Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Stefan Ludwig — Sommersemester 2025

Mathematische Logik
Blatt 6
Abgabe: 16.06.2025 10Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Graphen (in der Sprache $\mathcal{L} = \{R\}$ aus Aufgabe 1) derart, dass in jedem Graphen G aus $\mathcal{K}$ jeder Knoten a aus G nur endlich viele Nachbarn hat. Wir nehmen an, dass $\mathcal{K}$ axiomatisierbar ist. Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass eine uniforme Schranke für die Anzahl der Nachbarn der Knoten aus Graphen in $\mathcal{K}$ existiert, d.h., es existiert N aus $\mathbb{N}$ so, dass

$$\max_{\substack{G\in\mathcal{K}\\ a\in G}} \left|\left\{b \in G \mid R(a,b)\right\}\right| \leq N.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
Die *angeordnete Summe* $X_1 \overset{\leftarrow}{+} X_2$ zweier linear geordneter Mengen $(X_1, <_1)$ und $(X_2, <_2)$ ist die Menge

$$X_1 \sqcup X_2 = (X_1 \times \{1\}) \cup (X_2 \times \{2\})$$

mit der linearen Ordnung

$$(z,i) <_{X_1 \overset{\leftarrow}{+} X_2} (u,j) \Longleftrightarrow \begin{cases} i < j \text{ oder} \\ i = j \text{ und } z <_i u \end{cases}$$

Das *angeordnete Produkt* $X \overset{\leftarrow}{\times} Y$ der linear geordneten Mengen $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ ist die Menge $X \times Y$ mit der linearen Ordnung

$$(z_1,u_1) <_{X \overset{\leftarrow}{\times} Y} (z_2,u_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 <_Y u_2 \text{ oder} \\ u_1 = u_2 \text{ und } z_1 <_X z_2 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $X \overset{\leftarrow}{+} Y$ und $X \overset{\leftarrow}{\times} Y$ linear geordnet sind, wenn $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ linear geordnet sind.

(b) Zeige, dass $(X \overset{\leftarrow}{+} Y) \overset{\leftarrow}{+} Z \simeq X \overset{\leftarrow}{+} (Y \overset{\leftarrow}{+} Z)$ als angeordnete Mengen.

(c) Zeige, dass $X \overset{\leftarrow}{\times} (Y \overset{\leftarrow}{+} Z) \simeq (X \overset{\leftarrow}{\times} Y) \overset{\leftarrow}{+} (X \overset{\leftarrow}{\times} Z)$ als angeordnete Mengen.

(d) Eine lineare Ordunung $(Z, <)$ ist *wohlgeordnet*, falls jede nicht-leere Teilmenge von Z ein kleinstes Element besitzt. Zeige, dass $X \overset{\leftarrow}{+} Y$ und $X \overset{\leftarrow}{\times} Y$ wohlgeordnet sind, wenn die linearen Ordnungen $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ wohlgeordnet sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Zeige mit Hilfe von Induktion für jedes n aus $\mathbb{N}$, dass

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall x \left(x \in \underline{\mathrm{n}} \leftrightarrow \bigvee_{k=0}^{n-1} x = \underline{\mathrm{k}} \right).$$

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.