Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Stefan Ludwig — Sommersemester 2025

Mathematische Logik

Blatt 7

Abgabe: 23.06.2025 10Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (7 Punkte)**.**
Eine Menge X ist *Dedekind-endlich*, falls jede Injektion $f : X \to X$ surjektiv ist.

(a) Ist $\mathbb{N}$ Dedekind-endlich?

(b) Zeige, dass die Dedekind-endlichen Mengen eine definierbare Klasse bilden, d.h., es gibt eine Formel $\phi(x)$ derart, dass in jedem Modell $\mathbb{V}$ von ZF, die Menge a aus $\mathbb{V}$ genau dann Dedekind-endlich ist, wenn $\mathbb{V} \models \phi(a)$.

(c) Gegeben eine natürliche Zahl α aus ω sowie eine Bijektion $f : X \to \alpha$, zeige mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass X Dedekind-endlich ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeige, dass die Menge $\bigcup I$ bezüglich $\in$ linear geordnet ist. Schließe daraus, dass $\alpha = \bigcup I$ wieder eine Ordinalzahl so ist, dass $\beta \leq \alpha$ für alle β aus I.

(b) Zeige, dass $\alpha = \sup I$ das Supremum aller Ordinalzahlen aus I ist, d.h. die Ordinalzahl α ist kleinstmöglich mit $\beta \leq \alpha$ für jedes β aus I.

(c) Wir nehmen nun an, dass $\emptyset \neq \alpha = \sup I$ nicht in der Menge I liegt. Zeige, dass α eine Limeszahl sein muss.

(d) Kann $\sup I$ eine Limeszahl sein und dennoch in I liegen?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Wir nehmen an, dass die Theorie ZF konsistent ist.

(a) Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es ein Modell $\mathcal{M}$ von ZF so gibt, dass die Interpretation $\omega^{\mathcal{M}}$ der Formel $\varphi_{Nat.Zahl}[x]$ nichtstandard natürliche Zahlen besitzt, d. h, es gibt in $\varphi_{Nat.Zahl}[\mathcal{M}]$ Elemente, welche nicht der Form $\underline{n}$ für ein n aus $\mathbb{N}$ sind.

(b) Kann es eine Formel $\psi[x]$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{\in\}$, welche in jedem Modell $\mathbb{V}$ von ZF die Menge nichtstandard natürlicher Zahlen definiert wird? Das heißt,

$$\mathbb{V} \models \psi[\alpha] \iff \alpha \in \omega^{\mathbb{V}} \ \&\ \alpha \neq \underline{n} \text{ für alle } n \text{ aus } \mathbb{N}.$$

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.