Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Stefan Ludwig — Sommersemester 2025

Mathematische Logik
Blatt 8
Abgabe: 30.06.2025 10Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Seien X, Y und (der Graph von) $f : X \to Y$ Mengen in $\mathbb{V} \models ZF$.

(a) Angenommen $f : X \to Y$ ist surjektiv. Begründe, warum dann $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ eine Menge ist.

(b) Nehme nun zusätzlich an, dass $\mathbb{V} \models ZFC$. Zeige, dass dann eine Funktion $g : Y \to X$ so existiert, dass $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

(a) Zeige direkt aus der Definition, dass für alle Ordinalzahlen α die Ordinalzahl $\alpha+\omega$ eine Limeszahl ist.

(b) Sei $\alpha \neq \underline{0}$ eine Ordinalzahl. Zeige mit Hilfe des Induktionsprinzips der natürlichen Zahlen, dass α genau dann eine Limeszahl ist, wenn für alle $\beta < \alpha$ die Summe $\beta + \omega \leq \alpha$.

(c) Zeige, dass die Kollektion aller Ordinalzahlen, welche Limeszahlen sind, eine definierbare Teilklasse bildet. Ist diese Teilklasse eine Menge?

Hinweis: Aufgabe 2 von Blatt 7.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Definiere mit Hilfe des Rekursionssatz die Ordinalexponentiation zur Basis ω als

$$\begin{cases} \omega^{\underline{0}} = \underline{1}, \\ \omega^{\alpha+1} = \omega^{\alpha} \cdot \omega, \\ \omega^{\alpha} = \sup\limits_{\beta<\alpha} \omega^{\beta}, \text{ für } \alpha \text{ Limeszahl} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $\underline{1} \leq \omega^{\alpha}$ für jede Ordinalzahl α.

(b) Schließe daraus, dass $\alpha \leq \omega^{\alpha}$ für jede Ordinalzahl α.

(c) Wir definieren nun rekursiv eine Funktion $f : \omega \to \mathrm{On}$ als $f(\underline{0}) = \omega^{\underline{0}} = \underline{1}$ und $f(\alpha+1) = \omega^{f(\alpha)}$ sonst. Beachte, dass $f(\alpha)$ eine Limeszahl ist, falls $\alpha \neq \underline{0}$. Setze $\varepsilon = \sup\limits_{\alpha\in\omega} f(\alpha)$. Begründe mit Hilfe der Aufgabe 2 von Blatt 7, dass ε eine Limeszahl ist. Schließe daraus, dass $\omega^{\varepsilon} = \varepsilon$.

Hinweis: Zeige zunächst mit Hilfe von Induktion über die natürlichen Zahlen, dass $f(\alpha)$ für alle α in ω mit $\alpha \geq \underline{1}$ eine Limeszahl ist.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Eine Funktion $f : \alpha \to \beta$ zwischen zwei Ordinalzahlen α und β ist *gut*, falls es für jedes $\beta' < \beta$ ein $\alpha' < \alpha$ mit $f(\alpha') \geq \beta'$ gibt.

(a) Existiert eine gute Funktion $\underline{1} \to \omega^\omega + \underline{5}$?

(b) Gibt es eine gute Funktion $\omega \to \omega^{\underline{2}}$?

(c) Gegeben eine natürliche Zahl α in ZF, gibt es eine gute Funktion $\alpha \to \omega$?
Hinweis: Begründe zunächst, warum wir ein solches α kleinstmöglich wählen können.