

Mathematische Logik
 Blatt 9
 Abgabe: 07.07.2025 10Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte).

- (a) Zeige mit Hilfe von Induktion, dass $\underline{1} + \alpha = \alpha + \underline{1}$ für alle natürlichen Zahlen α .
- (b) Schließe daraus mit Hilfe von Induktion über $\beta < \omega$, dass $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ für alle natürlichen Zahlen α und β .

Aufgabe 2 (8 Punkte).

- (a) Zeige, dass ω^2 nicht von der Form $\alpha + \omega$ mit α aus On ist.

Hinweis: Division mit Rest.

- (b) Schließe daraus mit Hilfe der Division mit Rest, dass $\omega + 1$ die Ordinalzahl ω^2 teilt.
- (c) Zeige mit Hilfe transfiniter Induktion über die Ordinalzahl β , dass für alle Ordinalzahlen α und α' , dass $\alpha + \beta \leq \alpha_1 + \beta$, falls $\alpha \leq \alpha_1$. Schließe daraus mit Hilfe transfiniter Induktion, dass ebenfalls $\alpha \cdot \beta \leq \alpha_1 \cdot \beta$, wenn $\alpha \leq \alpha_1$.
- (d) Mit Hilfe der Teilaufgabe (c), bestimme für welche eindeutige Ordinalzahl α gilt, dass $\omega^2 = (\omega + 1) \cdot \alpha$?

Aufgabe 3 (4 Punkte).

- (a) Entscheide, ob die Kardinalzahl $\aleph_0^+$ eine Nachfolgerzahl oder eine Limeszahl ist.
- (b) Zeige mit Hilfe des Satzes von Cantor-Bernstein-Schröder, dass $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

- (a) Zeige, dass die Abstandsfunktion $|\cdot| : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.
 $(x, y) \mapsto |x - y|$

- (b) Zeige, dass die Funktion $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.

$$(n, m) \mapsto \underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_m \text{ Mal}$$

Hinweis: Betrachte zunächst die Funktion $(x, y) \mapsto x^y$.