# Kompakte Lie-Gruppen und ihre Darstellungen

Wolfgang Soergel

27. Juni 2005

Das soll ein Skript zur Vorlesung über Liegruppen werden, es ist leider noch in einem sehr unfertigen Zustand, mag aber dennoch als Erinnerungsstütze hilfreich sein. Der erste Abschnitt behandelt die abstrakte Theorie für endliche Gruppen, aber fast ohne Beispiele. Diese Theorie wird dann mit topologischen Methoden angereichert und zum Fall kompakter topologischer Gruppen verallgemeinert. Danach wird eine gewisse Vertrautheit mit Grundbegriffen der Differentialgeometrie vorausgesetzt und wir behandeln kompakte Liegruppen. Literatur: [BtD85, Lan74, Ser77]

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Darstellungstheorie von endlichen Gruppen

## 1.1 Definitionen und Grundlagen

**Definition 1.1.1.** Eine **Darstellung** (englisch und französisch **representation**) einer Gruppe $G$ über einem Körper $k$ ist ein Paar $(V, \rho)$ bestehend aus einem $k$-Vektorraum $V$ und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

*Bemerkung* 1.1.2. Oft bezeichnen wir eine Darstellung abkürzend mit demselben Symbol wie den zugrundeliegenden Vektorraum. Gegeben eine Darstellung $V$ einer Gruppe $G$ bezeichnet dann $\rho_V$ den zugehörigen Gruppenhomomorphismus $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$. In derselben Weise definiert man auch allgemeiner den Begriff der **Darstellung eines Monoids** über einem Körper oder, noch allgemeiner, über einem Ring $k$.

*Bemerkung* 1.1.3. Im Fall $V = k^n$ ist $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n, k)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $k$. Ist dann $\rho$ auch noch injektiv, so stellt $\rho$ die abstrakte Gruppe $G$ dar als eine konkrete Gruppe von Matrizen, daher die Terminologie. Das Symbol $\rho$ wird "rho" gesprochen und ist das Analogon für unser kleines r im griechischen Alphabet. Es steht für "representation". Das folgende Lemma erklärt, in welchem Sinn eine Darstellung einer Gruppe $G$ nichts anderes ist als eine Operation von $G$ auf einem Vektorraum "durch lineare Abbildungen".

**Lemma 1.1.4.** *Sei $G$ eine Gruppe und $k$ ein Körper.*

1. *Ist $(\rho, V)$ eine Darstellung von $G$ über $k$, so ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & (\rho(g))(v) \end{array}$$

   *eine Operation der Gruppe $G$ auf der Menge $V$.*

2. *Ist $G \times V \to V$ eine Operation der Gruppe $G$ auf einem $k$-Vektorraum $V$ derart, daß gilt $g(v + w) = gv + gw$ und $g(\lambda v) = \lambda(gv) \quad \forall g \in G$, $\lambda \in k$ und $v, w \in V$, so definiert die Formel $(\rho(g))(v) = gv$ eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

*Beispiel* 1.1.5. Jeder Vektorraum $V$ wird eine Darstellung seiner Automorphismengruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ vermittels $\rho = \mathrm{id}$. Diese Darstellung heißt die **Standarddarstellung** von $\mathrm{GL}(V)$.

*Beispiel* 1.1.6. Jeder Vektorraum $V$ wird eine Darstellung einer beliebigen Gruppe $G$ vermittels der trivialen Operation $\rho(g) = \mathrm{id}_V \quad \forall g \in G$.

*Beispiel* 1.1.7. Ist $K/k$ eine Körpererweiterung, so ist $K$ eine Darstellung über $k$ der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/k)$.

*Beispiel* 1.1.8. Eine Darstellung $(V, \rho)$ der Gruppe $\mathbb{Z}$ anzugeben bedeutet nach **??** nichts anderes, als einen Automorphismus $A \in \mathrm{GL}(V)$ eines Vektorraum $V$ anzugeben, nämlich dem Automorphismus $A = \rho(1)$.

*Beispiel* 1.1.9. Wie sehen die endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aus? Eine solche Darstellung ist ja nichts anderes als ein endlichdimensionaler Vektorraum $V$ mit einem Endomorphismus $A : V \to V$ derart, daß gilt $A^2 = \mathrm{id}_V$ . Wir unterscheiden zwei Fälle.

**$\mathrm{char}\, k \neq 2$:** In diesem Fall ist $V$ die direkte Summe $V = V^+ \oplus V^-$ der Eigenräume von $A$ zu den Eigenwerten $\pm 1$, für alle $v \in V$ gilt nämlich

$$v = \frac{1}{2}(v + Av) + \frac{1}{2}(v - Av)$$

**$\mathrm{char}\, k = 2$:** In diesem Fall hat $A$ nur den Eigenwert 1, in einer geeigneten Basis von $V$ hat also $A$ eine Matrix in Jordan'scher Normalform, und aus $A^2 = \mathrm{id}_V$ folgt, daß hier nur Jordanblöcke der Größen eins und zwei möglich sind.

Um unsere Erkenntnisse präzise formulieren zu können, müssen wir unseren Begriffsapparat weiter ausbauen.

**Definition 1.1.10.** Seien $V, W$ Darstellungen einer Gruppe $G$ über einem festen Körper $k$. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** ist eine $k$-lineare Abbildung $f : V \to W$ derart, daß gilt $f(gv) = gf(v)$ für alle $v \in V$, $g \in G$. Ein **Isomorphismus von Darstellungen** ist ein bijektiver Homomorphismus. Zwei Darstellungen heißen **isomorph** genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.

**Definition 1.1.11.** Gegeben Darstellungen $V, W$ einer Gruppe $G$ über einem Körper $k$ definieren wir ihre **direkte Summe** als den Vektorraum $V \oplus W$ mit der Operation $g(v, w) = (gv, gw)$. Ähnlich definieren wir auch direkte Summen von endlich (oder sogar unendlich) vielen Darstellungen. Die direkte Summe von $n \in \mathbb{N}$ Kopien von $V$ kürzen wir ab mit $V^n$.

*Beispiel* 1.1.12. Nun können wir präziser formulieren:

**$\mathrm{char}\, k \neq 2$:** Bezeichnet $k_+$ bzw. $k_-$ die triviale bzw. die nichttriviale eindimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über $k$ isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k_+^n \oplus k_-^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

$\operatorname{char} k = 2$**:** Bezeichnet $k$ bzw. $P$ die triviale Darstellung bzw. eine zweidimensionale Darstellung mit nichttrivialer Operation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so ist jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über $k$ isomorph zu genau einer Darstellung der Gestalt $k^n \oplus P^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

*Bemerkung* 1.1.13. Wir wollen nun ähnliche Aussagen auch für allgemeinere Gruppen formulieren und bauen dazu unseren Begriffsapparat noch weiter aus.

**Definition 1.1.14.** Sei $G$ eine Gruppe.

1. Eine Teilmenge $W \subset V$ einer Darstellung $V$ von $G$ heißt eine **Unterdarstellung** genau dann, wenn $W$ ein unter $G$ stabiler Untervektorraum ist, in Formeln $g \in G$, $w \in W \Rightarrow gw \in W$.

2. Eine Darstellung $V$ von $G$ heißt **irreduzibel** oder **einfach** genau dann, wenn $V$ nicht der Nullraum ist, aber 0 und $V$ die einzigen Unterdarstellungen von $V$ sind.

3. Eine Darstellung $V$ von $G$ heißt **unzerlegbar** genau dann, wenn $V$ nicht der Nullraum ist und es keine zwei von Null verschiedenen Unterdarstellungen $W_1, W_2 \subset V$ gibt mit $V = W_1 \oplus W_2$.

*Bemerkung* 1.1.15. Zum Beispiel ist jede eindimensionale Darstellung irreduzibel. Unsere Darstellung $P$ von eben ist zwar unzerlegbar, aber nicht irreduzibel. Wir formulieren nun ein nächstes Ziel.

**Proposition 1.1.16.** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $k$ ein beliebiger Körper. So gibt es bis auf Isomorphismus höchstens $|G|$ irreduzible Darstellungen von $G$ über $k$.*

*Bemerkung* 1.1.17. Bereits für die Klein'sche Vierergruppe gibt es über dem Körper mit zwei Elementen unzerlegbare Darstellungen beliebig großer Dimension, siehe [Ben91], 4.3. Die Proposition gilt also nicht, wenn wir "irreduzibel" ersetzen durch "unzerlegbar". Zum Beweis entwickeln wir im Folgenden allgemeine Begriffe und Methoden, die Ihnen auch in anderem Kontext ständig begegnen werden.

*Übung* 1.1.18. Gegeben ein Gruppenhomomorphismus $H \to G$ können wir jede Darstellung $V$ von $G$ zurückziehen zu einer Darstellung $\operatorname{res}_G^H V$ von $H$. Man zeige, daß wir beim Zurückziehen mit einem inneren Automorphismus $G \to G$ eine zur ursprünglichen Darstellung isomorphe Darstellung erhalten.

## 1.2 Moduln über Ringen

**Definition 1.2.1.** Sei $R$ ein Ring. Ein $R$**-Modul** ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ mit einer Abbildung

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \to & M \\ (r, m) & \mapsto & rm \end{array}$$

derart, daß für alle $r, s \in R$ und $m, n \in M$ gilt:

1. $r(m + n) = (rm) + (rn)$;
2. $(r + s)m = (rm) + (sm)$;
3. $r(sm) = (rs)m$;
4. $1m = m$.

*Beispiele* 1.2.2. Ist $R$ ein Körper, so nennt man einen $R$-Modul meist einen $R$-Vektorraum. Der Ring $R$ selbst ist in offensichtlicher Weise ein $R$-Modul. Dasselbe gilt für $R^n$. Weitere Beispiele kommen später.

*Bemerkungen* 1.2.3.
1. Arbeitet man mit nicht notwendig unitären Ringen, so macht die dritte Bedingung keinen Sinn mehr und wird aus der Definition weggelassen. Unsere Moduln würde man mit diesen Konventionen als "unitäre Moduln" über einem "unitären" Ring bezeichnen.
2. Wir vereinbaren auch in diesem Kontext die Regel "Punkt vor Strich".
3. Wie bei Vektorrämen zeigt man für alle $m \in M$ die Formel $0m = 0$ (genauer $0_R m = 0_M$) und folgert $(-1)m = -m$.

*Bemerkung* 1.2.4. Gegeben eine abelsche Gruppe $M$ bilden wir den Ring $\operatorname{Ab} M$ aller Gruppenhomomorphismen $\varphi : M \to M$. Seine Addition ist die Addition von Abbildungen, $(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$, die Multiplikation ist die Verknüpfung von Abbildungen, $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$, und das Einselement ist die Identität $\mathrm{id} : M \to M$.

**Lemma 1.2.5.** *Sei $M$ eine abelsche Gruppe und $R$ ein Ring.*

1. *Ist $\varphi : R \to \operatorname{Ab} M$ ein Ringhomomorphismus, so macht die Vorschrift $rm = (\varphi(r))(m)$ die abelsche Gruppe $M$ zu einem $R$-Modul.*
2. *Ist $M$ ein $R$-Modul, so induziert die Abbildung $\varphi : R \to \operatorname{Ens} M$, $(\varphi(r))(m) = rm$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to \operatorname{Ab} M$.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen. $\square$

*Bemerkung* 1.2.6. In diesem Sinne ist eine $R$-Modulstruktur auf einer abelschen Gruppe $M$ also "dasselbe" wie ein Ringhomomorphismus $R \to \mathrm{Ab}\, M$. Für jeden Ring $E$ gibt es nun genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to E$. Jede abelsche Gruppe $M$ trägt also genau eine $\mathbb{Z}$-Modulstruktur. Wir können diese $\mathbb{Z}$-Modulstruktur auch explizit beschreiben, für $a \in \mathbb{N}$ ist eben notwendig $1m = m$, also $2m = (1+1)m = m + m$, induktiv $(a+1)m = am + m$, und dann $(-a)m = (-1)am = -(am)$.

*Bemerkung* 1.2.7. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so wird jeder $S$-Modul und insbesondere auch $S$ selbst ein $R$-Modul vermittels der Operation $rm = \varphi(r)m$. Dies Verfahren heißt **Restriktion der Skalare** und zwar selbst dann, wenn $\varphi : R \to S$ nicht die Inklusion eines Teilrings ist. Zum Beispiel ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ der Quotient $R/\mathfrak{a}$ ein $R$-Modul in natürlicher Weise.

**Lemma 1.2.8.** *Sei $k$ ein Körper.*

1. *Ist $M$ ein $k[X]$-Modul, so erhalten wir auf $M$ die Struktur eines $k$-Vektorraums durch Restriktion, und die Multiplikation mit $X$ ist eine $k$-lineare Abbildung $M \to M$.*

2. *Ist $M$ ein $k$-Vektorraum und $A : M \to M$ eine $k$-lineare Abbildung, so macht die Vorschrift $Pm = P(A)(m)$ für $m \in M$, $P \in k[X]$ unser $M$ zu einem $k[X]$-Modul.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

*Bemerkung* 1.2.9. In diesem Sinne ist also ein $k[X]$-Modul "dasselbe" wie ein $k$-Vektorraum mit einem $k$-linearen Endomorphismus.

**Definition 1.2.10.** Eine Abbildung $f : M \to N$ von einem $R$-Modul in einen anderen heißt $R$**-linear** oder ein $R$**-Modulhomomorphismus** geanu dann, wenn gilt $f(m + m') = f(m) + f(m')$ und $f(rm) = rf(m) \quad \forall m, m' \in M$, $r \in R$.

**Definition 1.2.11.** Die Menge aller Homomorphismen von einem $R$-Modul $M$ in einen $R$-Modul $N$ schreiben wir auch $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Sie bildet eine Untergruppe von $\mathrm{Ens}(M, N)$. Ein bijektiver Homomorphismus heißt ein **Isomorphismus** von $R$-Moduln. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei $R$-Moduln $M$ und $N$, so schreiben wir auch $M \cong M$ und sagen, $M$ und $N$ sind **isomorph**.

**Lemma 1.2.12.** *Sei $M$ ein $R$-Modul. So ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathrm{Hom}_R(R, M) \\ m & \mapsto & (r \mapsto rm) \end{array}$$

*ein Isomorphismus von abelschen Gruppen mit Inversem $\varphi \mapsto \varphi(1)$.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

**Definition 1.2.13.** Eine Teilmenge $N \subset M$ eines $R$-Moduls $M$ heißt ein **Untermodul** genau dann, wenn $N$ eine Untergruppe ist und es gilt $m \in N$, $r \in R \Rightarrow rm \in N$.

*Bemerkung* 1.2.14. Die Untermoduln eines kommutativen Rings sind genau seine Ideale. Der Schnitt von Untermoduln ist wieder ein Untermodul. Ist $T \subset M$ eine Teilmenge, so heißt der kleinste Untermodul von $M$, der $T$ enthält, auch der **von $T$ erzeugte Untermodul** und wir bezeichnen ihn mit $\langle T \rangle_R$ oder abkürzend mit $\langle T \rangle$. Man kann diesen Untermodul beschreiben als die Menge aller Linearkombinationen

$$\{r_1 t_1 + \ldots r_s t_s \mid s \geq 0, r_i \in R, t_i \in T\},$$

wobei die leere Linearkombination mit $s = 0$ für die Null in $M$ stehen möge. Ein Modul, der von einem einzigen Element erzeugt wird, heißt ein **zyklischer Modul**.

*Bemerkung* 1.2.15. Das Bild eines Untermoduls unter einem Modulhomomorphismus ist wieder ein Untermodul. Dasselbe gilt für das Urbild eines Untermoduls. Insbesondere sind Bild und Kern eines Modulhomomorphismus stets Untermoduln.

**Proposition 1.2.16 (über Quotientenmoduln).** *Sei $M$ ein $R$-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul.*

1. *Es gibt genau eine Struktur eines $R$-Moduls auf der Quotientengruppe $M/N$ derart, daß die Projektion* $\operatorname{can} : M \twoheadrightarrow M/N$ *ein Homomorphismus von $R$-Moduln ist.*

2. *Jeder Homomorphismus von $R$-Moduln $\varphi : M \to M'$ mit $\varphi(N) = 0$ faktorisiert in eindeutiger Weise über $M/N$, es gibt also genau einen $R$-Modulhomomorphismus $\tilde{\varphi} : M/N \to M'$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \operatorname{can}$.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

*Übung* 1.2.17. Sei $R$ ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und $M$ ein $R$-Modul. Bezeichne $\mathfrak{a}M \subset M$ den Untermodul, der von allen Elementen $am$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$ erzeugt wird. Man zeige, daß die Operation von $R$ auf $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise faktorisiert über $R/\mathfrak{a}$, so daß also $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise ein $R/\mathfrak{a}$-Modul wird.

## 1.3 Einfache Moduln und Kompositionsreihen

**Definition 1.3.1.** Ein Modul heißt **einfach** genau dann, wenn er nicht Null ist, aber außer sich selbst und Null keine Untermoduln hat.

*Beispiele* 1.3.2. Die einfachen Moduln über einem Körper oder allgemeiner einem Schiefkörper sind genau die eindimensionalen Vektorräume. Jeder Vektorraum ist einfach als Modul über seinem Endomorphismenring.

*Übung* 1.3.3. Die einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln sind genau die zyklischen abelschen Gruppen von Primzahlordnung. Allgemeiner sind alle einfachen Moduln über einem Ring isomorph zu einem Quotienten des besagten Rings nach einem maximalen Linksideal. Ist der Ring kommutativ, so kann man besagtes Linksideal aus dem Modul zurückgewinnen als seinen Annulator. Bei nichtkommutativen Ringen können die Quotienten nach verschiedenen maximalen Linksidealen durchaus isomorph sein als Moduln.

*Übung* 1.3.4. Jeder endlich erzeugte und von Null verschiedene Modul besitzt einen einfachen Quotienten. (Hinweis: **??**.)

*Bemerkung* 1.3.5. Der Hilbert'sche Nullstellensatz **??** sagt, daß alle einfachen Moduln über einem Polynomring in endlich vielen Variablen mit Koeffizienten in einem Körper endlichdimensional sind über besagtem Körper. Ist der Körper algebraisch abgeschlossen, so sind sie sogar eindimensional, das folgt dann aus 1.3.10.

**Lemma 1.3.6.** *Sei $R$ ein Ring, $E$ ein einfacher $R$-Modul und $M$ ein beliebiger $R$-Modul. So gilt:*

1. *Jeder Homomorphismus $E \to M$ ist injektiv oder Null.*
2. *Jeder Homomorphismus $M \to E$ ist surjektiv oder Null.*
3. *Ist $M$ auch einfach, so ist jeder Homomorphismus $M \to E$ bijektiv oder Null.*
4. *Der Endomorphismenring $\operatorname{End}_R E$ ist ein Schiefkörper.*

*Beweis.* $\ker(E \to M)$ und $\operatorname{im}(M \to E)$ sind Untermoduln von $E$. □

**Definition 1.3.7.** Sei $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul. Wir sagen, $M$ sei von **endlicher Länge** genau dann, wenn es eine endliche Kette von Untermoduln

$$M = M_r \supset M_{r-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$$

gibt, für geeignetes $r \in \mathbb{N}$, so daß $M_i/M_{i-1}$ einfach ist für $1 \leq i \leq r$. Eine derartige Kette heißt dann auch eine **Kompositionsreihe** von $M$ und die

Moduln $M_i/M_{i-1}$ nennen wir die Subquotienten der Kompositionsreihe. Die minimal mögliche Länge einer Kompositionsreihe von $M$ definieren wir als die **Länge** des Moduls $M$, zeigen dann aber sofort, daß je zwei Kompositionsreihen dieselbe Länge und bis auf Isomorphismus und Reihenfolge sogar dieselben Subquotienten haben, die wir dann die **Kompositionsfaktoren** des Moduls $M$ nennen.

**Satz 1.3.8 (Jordan-Hölder für Moduln).** *1. Hat ein Modul $M$ endliche Länge, so auch jeder Untermodul $N \subset M$ und jeder Quotient von $M/N$ von $M$ und es gilt*

$$l(M) = l(M/N) + l(N)$$

*2. Je zwei Kompositionsreihen eines Moduls haben dieselbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten. Sind genauer $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ und $M = N_s \supset \ldots \supset N_0 = 0$ zwei Kompositionsreihen eines Moduls $M$, so haben wir $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $N_i/N_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}$ für alle $i$.*

*Beweis.* Sei $M$ ein $R$-Modul und $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ eine Kompositionsreihe von $M$ und $N \subset M$ ein Untermodul. Wir betrachten den Quotienten $\overline{M} = M/N$ und die Bilder $\overline{M}_i$ der $M_i$ in $\overline{M}$ und erhalten kurze exakte Sequenzen

$$M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \hookrightarrow M_i/M_{i-1} \twoheadrightarrow \overline{M}_i/\overline{M}_{i-1}$$

durch explizites Nachdenken oder formales Anwenden des Neunerlemmas auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
M_{i-1} \cap N & \hookrightarrow & M_i \cap N & \twoheadrightarrow & M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_{i-1} & \hookrightarrow & M_i & \twoheadrightarrow & M_i/M_{i-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\overline{M}_{i-1} & \hookrightarrow & \overline{M}_i & \twoheadrightarrow & \overline{M}_i/\overline{M}_{i-1}
\end{array}$$

Ist $N \neq 0$, so kann nicht $M_i \cap N = M_{i-1} \cap N$ gelten für alle $i$. Zu jeder Kompositionsreihe von $M$ haben wir also eine echt kürzere Kompositionsreihe von $\overline{M}$ konstruiert und es folgt $l(M/N) < l(M)$. Man sieht so, daß die Länge einer beliebigen echt absteigenden Kette von Untermoduln von $M$ nach oben beschränkt ist durch $l(M)$. Insbesondere hat auch jeder Untermodul von $M$ endliche Länge, je zwei Kompositionsreihen von $M$ haben dieselbe Länge, und Teil 1 ist gezeigt. Ist $N$ einfach, so gibt es genau einen Index $j$ mit

$$M_j \cap N = N \text{ aber } M_{j-1} \cap N = 0$$

Für diesen Index haben wir $M_j/M_{j-1} \cong N$ und $\overline{M}_j/\overline{M}_{j-1} = 0$, wohingegen für die anderen Indizes $i \neq j$ gilt $M_i/M_{i-1} \cong \overline{M}_i/\overline{M}_{i-1}$. Nun folgt 2 mit Induktion. □

**Korollar 1.3.9.** *Sei $R$ ein Ring, der einen Körper $k$ als Teilring hat. Ist $R$ endlichdimensional als Linksmodul über $k$, so gibt es bis auf Isomorphismus höchstens $\dim_k R$ einfache $R$-Moduln.*

*Beweis.* Natürlich ist $R$ von endlicher Länge als $R$-Modul und es gilt sogar $l(R) \leq \dim_k R$. Jeder einfache $R$-Modul ist aber ein Quotient von $R$ und taucht also in einer und damit in jeder Kompositionsreihe von $R$ als Subquotient auf. □

**Korollar 1.3.10.** *Sei $R$ ein kommutativer Ring, der einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ als Teilring hat. So ist ein einfacher $R$-Modul, der endlichdimensional ist als $k$-Vektorraum, notwendig eindimensional als $k$-Vektorraum.*

*Beweis.* Die Multiplikation mit $r \in R$ besitzt notwendig einen Eigenwert, und der zugehörige Eigenraum ist ein von Null verschiedener Untermodul, also der ganze Modul. Also operiert jedes $r \in R$ durch einen Skalar, und dann kann unser Modul nur einfach sein, wenn er eindimensional ist. □

*Übung* 1.3.11. Der Quotient eines Moduls nach einem maximalen echten Untermodul ist stets ein einfacher Modul.

*Übung* 1.3.12. Der einzige einfache Modul über dem Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraums ist der besagte Vektorraum selber, bis auf Isomorphismus.

## 1.4 Der Gruppenring

**Definition 1.4.1.** Sei $k$ ein Ring und $G$ eine Gruppe. So definieren wir den **Gruppenring** $kG$ der Gruppe $G$ über $k$ wie folgt: Als abelsche Gruppe ist $kG$ wie in **??** die Menge aller Abbildungen $f : G \to k$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annehmen. So eine Abbildung schreiben wir als eine formale Linearkombination $\sum f(g)g$ von Elementen aus $G$ mit Koeffizienten aus $k$. Die Multiplikation $*$ in $kG$, manchmal auch **Konvolution** oder **Faltung** genannt, erklären wir durch die Vorschrift

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) * \left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{x\in G}\left(\sum_{gh=x} a_g b_h\right) x$$

wo die innere Summe rechts über alle Paare $(g, h) \in G \times G$ laufen soll mit $gh = x$. Offensichtlich erhalten wir so einen Ring mitsamt einem Ringhomomorphismus $k \hookrightarrow kG$, $a \mapsto ae$ für $e \in G$ das neutrale Element und einem Gruppenhomomorphismus $G \to kG^\times$, $g \mapsto 1g$ von unserer Gruppe in die Einheiten ihres Gruppenrings, unter dem $G$ zu einer Basis von $kG$ über $k$ wird. Wir schreiben meist kurz $ae = a$ und $1g = g$, auch wenn wir Elemente des Gruppenrings meinen.

*Bemerkung* 1.4.2. Der Gruppenring $k\mathbb{Z}$ ist kanonisch isomorph zum Ring $k[X, X^{-1}]$ der Laurentpolynome. Allgemeiner kann man in derselben Weise auch für jedes Monoid $G$ den **Monoidring** $kG$ einführen und erhält zum Beispiel $k\mathbb{N} \cong k[X]$. Oft wird der Gruppenring auch $k[G]$ geschrieben.

**Lemma 1.4.3.** *Sei $G$ eine Gruppe oder allgemeiner ein Monoid und sei $k$ ein Körper oder allgemeiner ein Ring. Wir erhalten eine eineindeutige Entsprechung*

$$\left\{ \; kG\text{-Moduln} \; \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{Darstellungen von} \\ G \text{ über } k \end{array} \right\}$$

*indem wir die Operation von $kG$ auf $k$ und $G$ einschränken.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

**Satz 1.4.4.** *Über einem beliebigen Körper ist die Kardinalität einer endlichen Gruppe eine obere Schranke für die Zahl ihrer irreduziblen Darstellungen bis auf Isomorphismus.*

*Beweis.* Bezeichnet $G$ unsere endliche Gruppe und $k$ unseren Körper, so behaupten wir in Formeln, daß es bis auf Isomorphismus höchstens $|G|$ irreduzible Darstellungen von $G$ über $k$ gibt. Um das zu zeigen, fassen wir unsere Darstellungen auf als Moduln über dem Gruppenring $kG$ und der Satz folgt aus Korollar 1.3.9. □

## 1.5 Reduzibilität

**Satz 1.5.1 (von Maschke).** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $k$ ein Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt. So ist jede Darstellung von $G$ über $k$ eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

*Bemerkung* 1.5.2. Beispiel 1.1.12 zeigt, daß das im allgemeinen nicht mehr gilt, wenn die Charakteristik die Gruppenordnung teilt.

*Bemerkung* 1.5.3. Für den Beweis des Satzes von Maschke im allgemeinen Fall müssen wir etwas weiter ausholen und neue Konzepte einführen, die uns aber auch an anderer Stelle noch nützlich sein werden.

**Definition 1.5.4.** Sind $V, W$ zwei Darstellungen einer Gruppe $G$ über einem Körper $k$, so machen wir den Raum $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ aller $k$-linearen Abbildungen von $V$ nach $W$ selbst zu einer Darstellung vermittels der Vorschrift $(gf)(v) = g(f(g^{-1}v))$ oder, anders geschrieben,

$$gf = g \circ f \circ g^{-1}$$

*Bemerkung* 1.5.5. Ist noch allgemeiner $V$ eine Darstellung einer Gruppe $G$ und $W$ eine Darstellung einer Gruppe $H$, so erhalten wir eine natürliche Operation von $G \times H$ auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift $(g, h)f = \rho_W(h) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$. Unsere Definition ergibt sich im Fall $H = G$ durch Einschränken der $(G \times G)$-Operation auf dem Hom-Raum vermittels der diagonalen Einbettung $G \hookrightarrow G \times G$, $g \mapsto (g, g)$. Wir nennen sie manchmal präziser die **diagonale Operation** oder die **Operation durch Konjugation** auf dem Hom-Raum, um sie zu unterscheiden von der **Operation durch Nachschalten** $g : f \mapsto \rho_W(g) \circ f$ und der **Operation durch Vorschalten** $g : f \mapsto f \circ \rho_V(g^{-1})$.

*Beweis des Satzes von Maschke im allgemeinen Fall.* Man sieht sofort, daß die Invarianten im Raum aller linearen Abbildungen von einer Darstellung $V$ in eine Darstellung $W$ unter der Operation durch Konjugation genau die Homomorphismen von Darstellungen sind, in Formeln

$$\mathrm{Hom}_k(V, W)^G = \mathrm{Hom}_{kG}(V, W)$$

Ist nun $i : W \hookrightarrow V$ eine Unterdarstellung, so finden wir sicher eine $k$-lineare Abbildung $\pi : V \to W$ mit $\pi \circ i = \mathrm{id}_W$. Bilden wir im Hom-Raum den Mittelwert $\psi$ über die Bahn von $\pi$ unter $G$, in Formeln

$$\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}$$

so erhalten wir einen Homomorphismus von Darstellungen $\psi : V \to W$ mit $\psi \circ i = \mathrm{id}_W$, und $\ker \psi$ ist eine Unterdarstellung von $V$ mit $V = W \oplus \ker \psi$. Unter der zusätzlichen Annahme $\dim_k V < \infty$ sind wir nun wieder fertig mit Induktion. Im allgemeinen Fall folgt die Behauptung aus Proposition 1.7.3, $3 \Rightarrow 1$ im anschließenden Abschnitt. □

## 1.6 Summen und Produkte von Moduln

**Definition 1.6.1.** Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Moduln über einem Ring $R$ bilden wir zwei neue $R$-Moduln, das **Produkt** $\prod M_\lambda$ und die **direkte Summe** oder kurz **Summe** $\bigoplus M_\lambda$ durch die Regeln

$$\begin{array}{rcl}\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda & = & \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda\}\\ \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda & = & \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda,\ \text{nur endlich viele } m_\lambda \text{ sind nicht null}\}\end{array}$$

mit der offensichtlichen komponentenweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren aus $R$.

*Bemerkung* 1.6.2. Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Untermoduln eines Moduls $M$ bezeichnet man den von ihrer Vereinigung erzeugten Untermodul auch als ihre **Summe** und notiert ihn $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Diese Summe kann auch interpretiert werden als das Bild eines natürlichen Homomorphismus $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$ von der direkten Summe nach $M$. Ist dieser Homomorphismus injektiv, so sagen wir, die "Summe der Untermoduln $M_\lambda$ sei direkt" und schreiben statt $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ auch $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

*Bemerkung* 1.6.3. Für eine endliche Familie von Moduln $M_1, \ldots, M_s$ stimmen die direkte Summe und das Produkt überein. Wir benutzen dann alternativ die Notationen

$$M_1 \times \ldots \times M_s = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$$

*Bemerkung* 1.6.4. Das Produkt bzw. die Summe haben die folgenden Eigenschaften: Die offensichtlichen Einbettungen und Projektionen sind Homomorphismen

$$i_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \twoheadrightarrow M_\lambda$$

und ist $M$ ein weiterer $R$-Modul, so induzieren die durch Vorschalten der $i_\lambda$ bzw. Nachschalten der $\mathrm{pr}_\lambda$ gegebenen Abbildungen Bijektionen

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, M) & \stackrel{\sim}{\to} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M)\\ f & \mapsto & (f \circ i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_R(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) & \stackrel{\sim}{\to} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, M_\lambda)\\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda}\end{array}$$

*Bemerkung* 1.6.5. Auch bei Moduln über Ringen nennt man eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **linear unabhängig** genau dann, wenn nur die triviale (endliche)

Linearkombination verschwindet, wenn also für eine Familie $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Elementen unseres Rings mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Mitgliedern gilt

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda m_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{alle } r_\lambda \text{ sind null}$$

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt wie bei Vektorräumen eine **Basis**. Allerdings besitzen keineswegs alle Moduln eine Basis, wie man das von Vektorräumen gewohnt ist. Die Moduln, die eine Basis besitzen, nennt man **freie Moduln**.

*Bemerkung* 1.6.6. Zum Beispiel ist für jede Menge $\Lambda$ der Modul

$$R\Lambda = \{f : \Lambda \to R \mid f(\lambda) = 0 \text{ für fast alle } \lambda\}$$

frei, denn die Abbildungen, die an einer Stelle den Wert 1 annehmen und sonst den Wert Null, bilden eine Basis. Nach unseren Definitionen ist umgekehrt eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in einem Modul $M$ eine Basis genau dann, wenn die Abbildung $R\Lambda \to M$ mit $(r_\lambda) \mapsto \sum r_\lambda m_\lambda$ ein Isomorphismus ist.

*Übung* 1.6.7. Jeder Modul ist Quotient eines freien Moduls.

*Bemerkung* 1.6.8. Für beliebige Ringe $R$ folgt aus $R^n \cong R^m$ im allgemeinen nicht $n = m$. Das einfachste Gegenbeispiel ist der Nullring, und das ist nach 1.6.10 auch das einzige kommutative Gegenbeispiel. Unter den nicht kommutativen Ringen gibt es jedoch auch interessantere Gegenbeispiele.

*Bemerkung* 1.6.9. Zwei Untermoduln $U, D \subset M$ eines Moduls heißen **komplementär** und wir schreiben $M = U \oplus D$ genau dann, wenn die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $U \oplus D \xrightarrow{\sim} M$ ist. Dafür hinreichend und notwendig ist, daß sowohl gilt $U \cap D = 0$ als auch $U + D = M$. Wir sagen in dem Fall auch, $M$ sei die direkte Summe von $U$ und $D$. Analoge Begriffsbildungen benutzen wir auch für beliebige Familien von Untermoduln eines Moduls.

*Übung* 1.6.10. Gegeben ein kommutativer von Null verschiedener Ring $R$ folgt aus $R^n \cong R^m$ schon $n = m$. (Hinweis: Man benutze 1.2.17 und wähle ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, so daß $R/\mathfrak{a}$ ein Körper ist.)

*Übung* 1.6.11. Gegeben Moduln $M_1, \ldots, M_m$ und $N_1, \ldots, N_n$ über einem Ring $R$ haben wir eine natürliche Identifikation

$$\mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus \ldots \oplus M_m, N_1 \oplus \ldots \oplus N_n) \xrightarrow{\sim} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_R(M_j, N_i)$$

Wir werden die Elemente einer endlichen direkten Summe oft als Spaltenvektoren von Elementen der Summanden auffassen und die Homomorphismen zwischen direkten Summen als Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden. Das erlaubt uns, die Komposition solcher Homomorphismen mit dem Formalismus der Matrixmultiplikation zu berechnen.

*Übung* 1.6.12. Gegeben eine Familie von Moduln $M_{ij}$ mit $i \in I$, $j \in J$ haben wir stets einen kanonischen Homomorphismus $\bigoplus_i(\prod_j M_{ji}) \to \prod_j(\bigoplus_i M_{ji})$, der aber im allgemeinen kein Isomorphismus ist.

## 1.7 Halbeinfache Moduln

**Definition 1.7.1.** Ein Modul heißt **halbeinfach** genau dann, wenn er die Summe seiner einfachen Untermoduln ist.

*Übung* 1.7.2. Ein Ring heißt **halbeinfach** genau dann, wenn er halbeinfach ist als Linksmodul über sich selber. Man zeige, daß jeder Linksmodul über einem halbeinfachen Ring halbeinfach ist.

**Proposition 1.7.3 (Charakterisierung halbeinfacher Moduln).** *Sei $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul. So sind gleichbedeutend:*

1. *$M$ ist halbeinfach;*

2. *$M$ ist eine direkte Summe von einfachen Untermoduln;*

3. *Jeder Untermodul $U$ von $M$ besitzt ein* **Komplement** *$D$, als da heißt, es gibt zu jedem Untermodul $U$ einen Untermodul $D$ mit $D \oplus U = M$.*

*Beweis.* $2 \Rightarrow 1$ : Das ist klar.

$1 \Rightarrow 3$ : Sei $M = \sum_{i \in I} M_i$ eine Summe von einfachen Untermoduln $M_i \subset M$ und sei $U \subset M$ der Untermodul, für den wir ein Komplement suchen. Gegeben $J \subset I$ setzen wir $M_J = \sum_{i \in J} M_i$. Ist $I$ endlich, so finden wir natürlich unter allen Teilmengen $J \subset I$ mit $M_J \cap U = 0$ eine bezüglich Inklusion maximale Teilmenge. Ist $I$ unendlich, so folgt die Existenz eines solchen maximalen $J$ mit dem Zorn'schen Lemma. In jedem Fall behaupten wir für solch ein maximales $J$, daß gilt $M_J \oplus U = M$. In der Tat, aus $M_J + U \neq M$ folgt, daß es ein $i \in I$ gibt mit $M_i \not\subset (M_J + U)$, also $M_i \cap (M_J + U) = 0$ da $M_i$ einfach ist. Dann folgt aber $(M_i + M_J) \cap U = 0$ und $J$ war nicht maximal.

$3 \Rightarrow 2$ : Wir bemerken zunächst, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt: Sind nämlich $U \subset N \subset M$ Untermoduln und ist $V$ ein Komplement von $U$ in $M$, so ist notwendig $V \cap N$ ein Komplement von $U$ in $N$. Jetzt finden wir mithilfe des Zorn'schen Lemmas eine maximale Menge von einfachen Untermoduln derart, daß ihre Summe in $M$ direkt ist. Wäre diese Summe $S$ nicht ganz $M$, so fänden wir ein von Null verschiedenes Komplement $D$

von $S$ in $M$. In diesem Komplement $D$ gäbe es einen von Null verschiedenen zyklischen Untermodul und der hätte nach 1.3.4 seinerseits einen einfachen Quotienten, der sich als direkter Summand erst in unserem zyklischen Untermodul und dann in ganz $D$ einbetten ließe, im Widerspruch zur Maximalität von $S$. □

**Korollar 1.7.4.** *Jeder Quotient und jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.*

*Beweis.* Natürlich ist jeder Quotient eine Summe einfacher Untermoduln und ist damit halbeinfach nach 1.7.3. Weiter besitzt nach 1.7.3 jeder Untermodul ein Komplement und ist damit auch isomorph zu einem Quotienten unseres Moduls, nämlich zu dem Quotienten nach besagtem Komplement. Alternativ kann man sich daran erinnern, daß wir beim Beweis von $3 \Rightarrow 1$ in 1.7.3 bereits gezeigt hatten, daß sich die Eigenschaft 3 auf Untermoduln vererbt. □

**Definition 1.7.5.** Sei $R$ ein Ring und $M$ ein halbeinfacher $R$-Modul. Gegeben ein einfacher $R$-Modul $E$ notieren wir $M_E \subset M$ die Summe aller zu $E$ isomorphen Untermoduln von $M$ und nennen sie die **isotypische Komponente von $M$ vom Typ $E$.**

**Satz 1.7.6 (Zerlegung in isotypische Komponenten).** *Sei $R$ ein Ring, $M$ ein halbeinfacher $R$-Modul und $\operatorname{irr}(R)$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher $R$-Moduln. So zerfällt $M$ als die direkte Summe seiner isotypischen Komponenten*

$$M = \bigoplus_{E \in \operatorname{irr}(R)} M_E$$

*Beweis.* Da $M$ nach Annahme halbeinfach ist, muß nur gezeigt werden, daß die Summe der isotypischen Komponenten direkt ist. Dazu hinwiederum brauchen wir nur zu zeigen, daß jeder einfache Untermodul einer Summe von einfachen Untermoduln zu einem der Summanden isomorph ist. Da aber besagte Summe halbeinfach ist, ist unser einfacher Untermodul auch ein Quotient dieser Summe und damit notwendig auch ein Quotient eines Summanden. □

*Bemerkung* 1.7.7. Die Summe aller einfachen Untermoduln eines Moduls $M$ heißt der **Sockel von $M$** und wird notiert $\operatorname{soc} M$. Der Sockel ist natürlich der größte halbeinfache Untermodul.

*Übung* 1.7.8. Jeder Homomorphismus von halbeinfachen Moduln erhält die Zerlegung in isotypische Komponenten. Eine Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ von halbeinfachen Moduln ist exakt genau dann, wenn für alle einfachen Moduln die induzierte Sequenz $M'_E \to M_E \to M''_E$ exakt ist.

*Übung* 1.7.9. Man erkläre, inwiefern der Satz über die Zerlegung in isotypische Komponenten die Eigenraumzerlegung eines Vektorraums unter einem Endomorphismus verallgemeinert.

## 1.8 Der Dichtesatz von Jacobson

**Satz 1.8.1 (Jacobson's Dichtesatz).** *Sei $R$ ein Ring und $M$ ein halbeinfacher $R$-Modul. So ist das Bild des offensichtlichen Ringhomomorphismus*

$$R \to \operatorname{End}_{(\operatorname{End}_R M)} M$$

*dicht in folgendem Sinne: Gegeben $f \in \operatorname{End}_{(\operatorname{End}_R M)} M$ und endlich viele Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ gibt es stets $x \in R$ mit $f(m_i) = xm_i$ für alle $i$.*

*Bemerkung* 1.8.2. Gegeben ein Ring $E$ und eine Teilmenge $T \subset E$ erklärt man den **Kommutator von** $T$ durch die Formel $T' = \{x \in E \mid xt = tx \quad \forall t \in T\}$. Der Kommutator des Kommutators $T''$ heißt dann der **Bikommutator** und umfaßt natürlich $T$ selbst. Unser Satz sagt in dieser Terminologie, daß für einen halbeinfachen Modul $M$ über einem beliebigen Ring $R$ das Bild $T$ von $R$ im Endomorphismenring $E = \operatorname{Ab} M$ der abelschen Gruppe $M$ in der oben ausgeführten Weise "dicht" liegt in seinem Bikommutator.

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Fall $r = 1$ und betrachten zu $m = m_1$ ein Komplement $N$ des Untermoduls $Rm \subset M$, also

$$M = Rm \oplus N$$

Da die Projektion $\pi : M \twoheadrightarrow Rm \hookrightarrow M$ längs unserer Zerlegung in $\operatorname{End}_R M$ liegt, und da gilt $f \circ \pi = \pi \circ f$ nach Annahme, folgt $f(m) \in Rm$. Es gibt also in anderen Worten $x \in R$ mit $f(m) = xm$. Den allgemeinen Fall führen wir auf den Fall $r = 1$ zurück, indem wir das Element $(m_1, \ldots, m_r) \in M \oplus \ldots \oplus M$ betrachten und die Abbildung $f \times \ldots \times f$, die in der Tat kommutiert mit allen Elementen von

$$\operatorname{End}_R(M \oplus \ldots \oplus M) = \mathrm{M}(r \times r, \operatorname{End}_R M) \qquad \square$$

**Korollar 1.8.3 (Satz von Wedderburn).** *Ist $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \subset M(n \times n, k)$ ein Teilring derart, daß $k^n$ einfach ist als $A$-Modul, so gilt bereits $A = M(n \times n, k)$.*

*Beweis.* Zunächst gilt $\operatorname{End}_A k^n = k$, da sonst geeignete Eigenräume von Elementen $\varphi \in \operatorname{End}_A k^n$ nichttriviale $A$-Untermoduln wären. Dann folgt $A = \operatorname{End}_k k^n$ aus dem Dichtesatz. $\square$

## 1.9 Das Lemma von Schur

**Satz 1.9.1 (Schur'sches Lemma).** *Sei $G$ eine endliche Gruppe, $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V$ eine irreduzible Darstellung von $G$ über $k$. So besitzt $V$ außer den Skalaren keine Endomorphismen, in Formeln*

$$k \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_k^G V$$

*Beweis.* Da wir $G$ endlich angenommen hatten, ist $V$ notwendig endlichdimensional. Nach Annahme gilt auch $V \neq 0$. Jedes $\varphi \in \operatorname{Mod}_k^G V$ besitzt also einen Eigenwert, sagen wir $\lambda$, und der zugehörige Eigenraum ist offensichtlich eine von Null verschiedene Unterdarstellung als Kern von $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$. Also muß dieser Kern schon ganz $V$ sein und wir folgern $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$. □

*Beispiel* 1.9.2. Die Gruppe $G$ der vierten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ operiert durch Multiplikation auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ und macht diesen zu einer irreduziblen Darstellung $V = \mathbb{C}$ von $G$ über $k = \mathbb{R}$. Dennoch haben wir in diesem Fall $k \neq \operatorname{Mod}_k^G V$. Das steht nicht in Widerspruch zu unserem Satz, da $k = \mathbb{R}$ nicht algebraisch abeschlossen ist.

*Beispiel* 1.9.3. Ist $k \subset L$ ein Körpererweiterung, so wird $V = L$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $G = L^\times$ über $k$. In diesem Fall haben wir offensichtlich $\operatorname{End}_{kG} V = L$ und im allgemeinen kann natürlich $k \neq L$ gelten selbst wenn $k$ algebraisch abgeschlossen ist, zum Beispiel mit $L = k(X)$. Das steht jedoch auch nicht in Widerspruch zu unserem Satz, da unter der Voraussetzung $k$ algebraisch abgeschlossen die Gruppe $G = L^\times$ nicht endlich sein kann.

*Übung* 1.9.4. Sei $R$ ein Ring und $k \subset R$ ein algebraisch abgeschlossener Körper derart, daß gilt $ar = ra\ \forall a \in k, r \in R$. So gilt für jeden einfachen $R$-Modul $M$, der endlichdimensional ist als $k$-Vektorraum, notwendig $k \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_R M$.

**Satz 1.9.5 (Variante des Schur'schen Lemmas).** *Sei $G$ eine Gruppe, $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V$ eine irreduzible Darstellung von $G$ über $k$. Ist die Kardinalität von $k$ echt größer als die Kardinalität von $G$, d.h. gibt es keine Injektion $k \hookrightarrow G$, so besitzt $V$ außer den Skalaren keine Endomorphismen, in Formeln*

$$k \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_k^G V$$

*Beweis.* Der Endomorphismenring von $V$ hat eine $k$-Basis, die von einer Teilmenge von $G$ indiziert wird. Er ist jedoch auch eine Körpererweiterung von $k$. Wäre er echt größer als $k$, so müßte er den Funktionenkörper $k(X)$ umfassen, in dem die Familie der $((X-\lambda)^{-1})_{\lambda \in k}$ linear unabhängig ist über $k$, im Widerspruch zu unserer Bedingung an die Kardinalitäten. □

## 1.10 Darstellungen von Produkten

**Satz 1.10.1 (Einfache Darstellungen von Produkten).** *Seien Gruppen $G, H$ und ein algebraisch abgeschlossener Körper $k$ gegeben. Bezeichnet $\operatorname{irr}_k G$ die Menge aller Isomorphieklassen einfacher endlichdimensionaler Darstellungen von $G$ über $k$, so induziert das Tensorprodukt eine Bijektion*

$$(\operatorname{irr}_k G) \times (\operatorname{irr}_k H) \xrightarrow{\sim} \operatorname{irr}_k(G \times H)$$

*Bemerkung* 1.10.2. Ist $k$ nicht algebraisch abgeschlossen, so ist das im allgemeinen falsch. Zum Beipiel ist $\mathbb{C}$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $G$ der komplexen vierten Einheitswurzeln über $k = \mathbb{R}$, aber $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ hat als Darstellung von $G \times G$ den echten Quotienten $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.

*Beweis.* Gegeben $V \in G\text{-Mod}_k$, $W \in H\text{-Mod}_k$ einfache endlichdimensionale Darstellungen ist $V \otimes_k W \in (G \times H)\text{-Mod}_k$ einfach, da nach dem Satz von Wedderburn 1.8.3 die Operationen Surjektionen $kG \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k V$ und $kH \twoheadrightarrow \operatorname{End}_k W$ liefern und damit auch eine Surjektion des Gruppenrings von $G \times H$ auf $\operatorname{End}_k(V \otimes_k W)$. Die im Satz angegebene Abbildung ist also sinnvoll definiert. Ist $L$ eine endlichdimensionale Darstellung von $G \times H$, so besitzt $L$ als $G$-Darstellung eine einfache Unterdarstellung $V \subset L$. Die offensichtliche Abbildung $V \otimes_k \operatorname{Hom}_k(V, L)^G \to L$ ist dann nach 1.10.3 ein injektiver $(G \times H)$-Homomorphismus für die offensichtliche Operation von $H$ auf dem Hom-Raum. Ist $L$ einfach, so muß diese Abbildung auch surjektiv sein und der Hom-Raum muß eine einfache Darstellung $W$ von $H$ sein. Die im Satz angegebene Abbildung ist also surjektiv. Der Nachweis ihrer Injektivität kann der Leser ohne Mühe aus dem Nachweis der Surjektivität extrahieren. □

**Lemma 1.10.3.** *Sei $V$ eine Darstellung einer Gruppe $G$ über einem Körper $k$ und sei $L \in G\text{-Mod}_k$ eine einfache Darstellung mit Endomorphismenring $\operatorname{Mod}_k^G L = k$. So induziert das Auswerten eine Inklusion*

$$L \otimes_k \operatorname{Hom}_k(L, V)^G \hookrightarrow V$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß $V$ eine Summe und dann auch eine direkte Summe ist von zu $L$ isomorphen Unterdarstellungen. In diesem Fall ist aber das Lemma explizit klar. □

## 1.11 Zur Struktur von Gruppenringen

**Satz 1.11.1 (Fouriertransformation für endliche Gruppen).** *Seien $G$ eine endliche Gruppe, $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $L_1, \ldots, L_r$*

*die irreduziblen Darstellungen von $G$ über $k$, bis auf Isomorphismus. So definiert die Operation eine Surjektion*

$$kG \twoheadrightarrow (\mathrm{End}_k L_1) \times \ldots \times (\mathrm{End}_k L_r)$$

*und wenn die Charateristik von $k$ nicht die Gruppenordnung teilt, ist diese Surjektion sogar ein Isomorphismus.*

*Bemerkung* 1.11.2. Der Zusammenhang mit der Fouriertransformation aus der Analysis in **??** erklärt. Dieser Satz gilt analog für jeden halbeinfachen Ring $R$, der einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ enthält derart, daß gilt $ar = ra \; \forall a \in k, r \in R$ und daß $R$ endlichdimensional ist über $k$.

*Beweis.* Die Surjektivität folgt aus dem Dichtesatz 1.8.1, angewandt auf den $kG$-Modul $L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ mit seinem Endomorphismenring $k \times \ldots \times k$. Um die Injektivität zu zeigen bemerken wir, daß ja $kG$ nach Maschke selbst eine Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Liegt also $a \in kG$ im Kern unserer Abbildung, so ist die Linksmultiplikation mit $a$ die Nullabbildung auf $kG$ und es folgt $a = 0$. □

**Korollar 1.11.3.** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charateristik nicht die Gruppenordnung teilt. Seien $L_1, \ldots, L_r$ die irreduziblen Darstellungen von $G$ über $k$, bis auf Isomorphismus. So gilt*

$$|G| = (\dim L_1)^2 + \ldots + (\dim L_r)^2$$

*Beweis.* Klar. □

**Korollar 1.11.4.** *Gegeben eine endliche Gruppe und ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt, gibt es bis auf Isomorphismus genausoviele einfache Darstellungen unserer Gruppe über besagtem Körper wie Konjugationsklassen in unserer Gruppe.*

*Beweis.* Unter dem **Zentrum** $Z(R)$ eines Rings $R$ verstehen wir die Menge der Elemente von $R$, die mit allen anderen Elementen kommutieren, in Formeln

$$Z(R) = \{z \in R \mid za = az \;\; \forall a \in R\}$$

Das Zentrum ist stets ein kommutativer Teilring von $R$. Das Zentrum eines Gruppenrings $kG$ besteht nun offensichtlich genau aus den Funktionen $G \to k$, die konstant sind auf Konjugationsklassen. Man nennt sie **Klassenfunktionen**. Das Zentrum der anderen Seite in Satz 1.11.1 ist aber offensichtlich $k \times \ldots \times k$ ($r$ Kopien). □

*Übung* 1.11.5. Gegeben eine endliche Gruppe und ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt, zeige man: Genau dann ist die Gruppe kommutativ, wenn alle ihre irreduziblen Darstellungen über besagtem Körper eindimensional sind.

**Definition 1.11.6.** Ist $V$ eine Darstellung einer Gruppe $G$ über einem Körper $k$, so definiert man ganz allgemein für $v \in V$, $\varphi \in V^*$ den **Matrixkoeffizienten** $c_{\varphi,v} : G \to k$ durch die Vorschrift $c_{\varphi,v}(g) = \varphi(gv)$.

*Bemerkung* 1.11.7. Im Fall $V = k^n$ und $v = \mathrm{e}_i$ und $\varphi = \mathrm{pr}_j$ ist $c_{\varphi,v}(g)$ in der Tat ein Koeffizient der Matrix $\rho(g) \in \mathrm{M}(n \times n; k)$. Die Matrixkoeffizienten definieren eine Abbildung, die **Matrixkoeffizientenabbildung**

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes_k V & \to & kG \\ \varphi \otimes v & \mapsto & c_{\varphi,v} \end{array}$$

**Satz 1.11.8 (Inverse Fourier-Transformation).** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt. Sind $L, M$ irreduzible Darstellungen von $G$ über $k$, so ist die Verknüpfung*

$$L^* \otimes_k L \to kG \to \mathrm{End}_k M$$

*das $|G|/(\dim L)$-fache des üblichen Isomorphismus $L^* \otimes_k L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_k L^*$ im Fall $M \cong L^*$ und die Nullabbildung sonst.*

*Beweis.* Unsere Matrixkoeffizientenabbildung $V^* \otimes_k V \to kG$ ist ein Homomorphismus von Darstellungen für geeignete Operationen von $G \times G$ auf beiden Seiten, genauer gilt offensichtlich $c_{g\varphi,v} = g * c_{\varphi,v}$ und $c_{\varphi,gv} = c_{\varphi,v} * g^{-1}$ für alle $g \in G$. Die Abbildungen aus unserem Satz sind demnach Morphismen zwischen Darstellungen von $(G \times G)$. Nach 1.10.1 sind diese Darstellungen sogar irreduzibel, so daß die einzig offene Frage ist, das Wievielfache des üblichen Isomorphismus im Fall $M \cong L^*$ genommen werden muß. Ich will das in physikalischer Notation ausrechnen. Gegeben ein Vektorraum $L$ und ein Vektor $v \in L$ notieren wir $|v\rangle$ die lineare Abbildung $k \to L$, $\lambda \mapsto \lambda v$ und notieren Elemente $\varphi \in L^*$ des Dualraums auch einmal $\langle\varphi|$. Für $\varphi, \psi \in L^*$ und $v, w \in L$ ergibt sich damit, wenn wir die $k$-linearen Abbildungen von $k$ in sich selber stillschweigend mit $k$ identifizieren, für die Operation eines Matrixkoeffizienten auf $\psi \in L^*$ die Formel

$$(c_{\varphi,v} * \psi)(w) = \sum_{g\in G} \langle\varphi|g|v\rangle\langle\psi|g^{-1}|w\rangle = \langle\varphi| \left(\sum_{g\in G} g|v\rangle\langle\psi|g^{-1}\right) |w\rangle$$

Nun ist die große Summe $(\Sigma)$ in der Mitte der Formel rechts offensichtlich ein $G$-Endomorphismus von $L$, d.h. für alle $h \in G$ gilt $h \circ (\Sigma) \circ h^{-1} = (\Sigma)$.

Da $L$ irreduzibel ist, muß diese Summe folglich ein Vielfaches der Identität sein, $(\Sigma) = d\,\mathrm{id}_L$. Berechnen wir auf beiden Seiten die Spur, so ergibt sich

$$d \cdot \dim L = |G| \operatorname{tr}(|v\rangle\langle\psi|) = |G|\langle\psi|v\rangle$$

womit wir schließlich die Behauptung erhalten in Gestalt der Formel

$$(c_{\varphi,v} * \psi)(w) = \frac{|G|}{\dim L}\langle\psi|v\rangle\langle\varphi|w\rangle \qquad \square$$

**Korollar 1.11.9.** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt. So haben Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen irreduziblen Darstellungen im Gruppenring das Produkt Null.*

**Korollar 1.11.10 (Orthonormalität von Matrixkoeffizienten).** *Bilden gewisse $\rho_\lambda : G \to \mathrm{U}(d_\lambda)$ ein Repräsentantensystem für die einfachen unitären Darstellungen einer endlichen Gruppe $G$, so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten $\sqrt{d_\lambda}\,(\rho_\lambda)_{ij}$ eine Orthonormalbasis des Gruppenrings $\mathbb{C}G$ für das Skalarprodukt $\langle f, h\rangle = |G|^{-1}\sum_{g\in G}\overline{f(g)}h(g)$.*

*Beweis.* Haben wir auf einer endlichdimensionalen Darstellung $V$ ein $G$-invariantes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ gewählt, das schieflinear ist in der ersten Variablen und linear in der zweiten, so erhalten wir einen Isomorphismus von Darstellungen $\overline{V} \xrightarrow{\sim} V^*$, $v \mapsto \langle v,\ \rangle$. Für beliebige $v, w \in V$ und $g \in G$ gilt dann natürlich $\langle v, g^{-1}w\rangle = \langle gv, w\rangle = \overline{\langle w, gv\rangle}$. Mit dieser Erkenntnis können wir die Formel vom Ende des Beweises von 1.11.8 umdeuten zu

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\varphi, gv\rangle\overline{\langle w, g\psi\rangle} = \frac{1}{\dim L}\langle\psi, v\rangle\langle\varphi, w\rangle$$

für alle $v, w, \varphi, \psi \in L$. Mit demselben Argument ergibt sich, daß für nicht isomorphe einfache unitäre Darstellungen $L, M$ und $\varphi, v \in L$ und $w, \psi \in M$ gilt $\sum_{g\in G}\langle\varphi, gv\rangle\langle w, g\psi\rangle = 0$. $\square$

## 1.12 Charaktere

*Bemerkung* 1.12.1. Sei $G$ eine endliche Gruppe und $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charateristik nicht die Gruppenordnung teilt. Sei $L$ eine einfache Darstellung von $G$. Nach 1.11.1 gibt es genau ein Element $e_L \in kG$ derart, daß $e_L$ durch die Identität auf $L$ operiert und durch Null auf jeder einfachen Darstellung $M$ von $G$, die nicht isomorph ist zu $L$, in Formeln

$$(e_L\cdot : M \to M) = \begin{cases} \mathrm{id} : M \to M & \text{falls } M \cong L; \\ 0 : M \to M & \text{falls } M \text{ einfach, } M \not\cong L. \end{cases}$$

Dies Element $e_L$ nennen wir den **Projektor** zu $L$. Um den Projektor explizit anzugeben, erinnern wir uns an unsere inverse Fouriertransformation 1.11.8. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $L$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die duale Basis von $L^*$, so haben wir offensichtlich $\varphi_1 \otimes v_1 + \ldots + \varphi_n \otimes v_n \mapsto \mathrm{id}$ unter der kanonischen Identifikation $L^* \otimes_k L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_k L^*$. Unter der Matrixkoeffizientenabbildung dahingegen geht dieser Tensor auf die Funktion $\chi = \chi_L = c_{\varphi_1, v_1} + \ldots + c_{\varphi_n, v_n}$, die offensichtlich auch einfacher beschrieben werden kann durch die Formel $\chi_L(g) = \mathrm{tr}\{g : L \circlearrowleft\}$. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung $V$ einer Gruppe $G$ über einem Körper $k$ definiert man ganz allgemein ihren **Charakter** $\chi_V : G \to k$ durch die Vorschrift

$$\chi_V(g) = \mathrm{tr}\{g : V \circlearrowleft\}$$

Offensichtlich sind Charaktere stets Klassenfunktionen. Unsere Argumente zeigen für jede endliche Gruppe $G$ und jeden algebraisch abgeschlossenen Körper $k$, dessen Charateristik nicht die Gruppenordnung teilt, die **Charakter-Projektor-Formel**

$$e_{L^*} = \frac{\dim L}{|G|} \chi_L$$

Die Dimension einer Darstellung ist offensichtlich gerade der Wert ihres Charakters beim neutralen Element, und wir erkennen so, daß die wesentlichen Informationen über die Struktur eines Gruppenrings bereits aus der Kenntnis der Charaktere der einfachen Darstellungen, d.h. der **einfachen Charaktere** hervorgehen.

*Übung* 1.12.2. Gegeben eine Darstellung $V$ nennen wir $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ auch die **kontragradiente Darstellung**. Man zeige, daß der Charakter der kontragradienten Darstellung gegeben wird durch die Formel $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$. Weiter zeige man $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

**Satz 1.12.3 (Dimension einfacher Darstellungen).** *Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und eine endliche Gruppe ist die Dimension jeder einfachen Darstellung unserer Gruppe über dem gegebenen Körper ein Teiler der Gruppenordnung.*

*Beweis.* Sei $G$ unsere endliche Gruppe, $L$ unsere einfache Darstellung und $M = L^*$ ihre kontragrediente Darstellung. Wir gehen aus von der Gleichung $e_M * e_M = e_M$. Mit der Charakter-Projektor-Formel **??** folgt

$$\chi_L * \chi_L = \frac{|G|}{\dim L} \chi_L$$

Per definitionem ist $\chi_L(g)$ die Summe der Eigenwerte von $g : L \to L$, und da gilt $g^n = 1$ für $n = |G|$ sind diese Eigenwerte $n$-te Einheitswurzeln. Ist also $\zeta \in k$ eine primitive $n$-te Einheitswurzel, so nehmen alle Charaktere Werte in $\mathbb{Z}[\zeta]$ an. Bezeichnet $I \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ das von den Werten des Charakters $\chi_L$ erzeugte Ideal, so folgern wir im Körper $k$ die Inklusionsrelation

$$I \supset \frac{|G|}{\dim L} I$$

Da die Potenzen $1, \zeta, \zeta^2, \ldots \zeta^{n-1}$ bereits $\mathbb{Z}[\zeta]$ als abelsche Gruppe erzeugen, ist mit **??** auch $I$ eine endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe und mit **??** ist dann $I$ frei über $\mathbb{Z}$, in Formeln $I \cong \mathbb{Z}^r$ für geeignetes $r \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Erkenntnis $I \neq 0$ impliziert unsere Inklusion oben nun $(|G|/\dim L) \in \mathbb{Z}$ wie gewünscht. □

*Bemerkung* 1.12.4. Wir definieren nun für jede endliche Gruppe $G$ und jeden Körper $k$, dessen Charakteristik teilerfremd ist zur Gruppenordnung, auf dem Gruppenring $kG$ eine symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )$ durch die Vorschrift

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g^{-1})$$

**Satz 1.12.5.** *Seinen gegeben eine endliche Gruppe und ein Körper, dessen Charakteristik teilerfremd ist zur Gruppenordnung. So bilden die einfachen Charaktere für vorstehende Bilinearform eine Orthonormalbasis des Raums der Klassenfunktionen.*

*Beweis.* Wir beachten $(\varphi, \psi) = |G|^{-1}(\varphi * \psi)(e)$. Jetzt schreiben wir die Gleichung $e_M * e_L = 0$ für die Projektoren zu nichtisomorphen einfachen Darstellungen um auf einfache Charaktere und erhalten schon mal $(\chi, \psi) = 0$ für verschiedene einfache Charaktere. Sonst kommen wir wieder zurück auf unsere Gleichung

$$\chi * \chi = \frac{|G|}{\dim L} \chi$$

für $\chi = \chi_L$, und werten wir diese Gleichung aus am neutralen Element und beachten $\chi(e) = \mathrm{tr}(e : L \to L) = \dim L$, so ergibt sich auch $(\chi, \chi) = 1$ wie gewünscht. □

**Korollar 1.12.6 (Orthogonalitätsrelationen für Charaktere).** *Sei $G$ eine endliche Gruppe. Wir betrachten auf dem komplexen Gruppenring $\mathbb{C}G$ das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ gegeben durch*

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

*Für dieses Skalarprodukt bilden die einfachen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raums der Klassenfunktionen.*

*Beweis.* Mit 1.12.5 reicht es, für jeden Charakter $\chi = \chi_V$ über $\mathbb{C}$ die Formel $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ zu zeigen. Nun sind aber alle Eigenwerte von $(g\cdot) : V \to V$ Einheitswurzeln und die Eigenwerte von $(g^{-1}\cdot) : V \to V$ sind ihre Inversen alias ihre komplex Konjugierten. Alternativ folgt die Aussage auch sofort aus den Orthonormalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten 1.11.10. □

*Bemerkung* 1.12.7. Die wesentliche Information über die komplexen Darstellungen einer endlichen Gruppe wird meist in Form einer **Charaktertafel** dargeboten: Die Spalten solch einer Tafel sind indiziert durch Repräsentanten der Konjugationsklassen, die Zeilen durch irreduzible Darstellungen, und in der Tafel stehen die Werte des Charakters der entsprechenden irreduziblen Darstellung auf Elementen der entsprechenden Konjugationsklasse. Über den Konjugationsklassen wird meist in einer eigenen Zeile ihre Kardinalität angegeben, damit auch das Skalarprodukt auf dem Raum Klassenfunktionen aus der Tafel hervorgeht.

## 1.13 Darstellungen der symmetrischen Gruppen

*Bemerkung* 1.13.1. Wir stellen zunächst die beiden Hauptsätze vor, die wir beweisen wollen. Unter einem **Youngdiagramm** verstehen wir wie in **??** eine endliche Teilmenge $T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$((i,j) \in T \text{ und } i' \leq i \text{ und } j' \leq j) \quad \Rightarrow \quad (i',j') \in T$$

Die Elemente von $T$ nennen wir die "Kästchen" unseres Youngdiagramms und stellen uns ein Element $(i,j)$ vor als das Kästchen auf Rechenpapier, bei dem die Koordinaten der linken unteren Ecke gerade $(i,j)$ sind.

**Satz 1.13.2 (Einfache Darstellungen der symmetrischen Gruppe).** *Gegeben ein Youngdiagramm $T$ betrachte man in der Gruppe $\mathcal{S}_T = \operatorname{Ens}^\times T$ aller Permutationen von $T$ den* **Spaltenstabilisator** *$S$ und den* **Zeilenstabilisator** *$Z$. Das vom zugehörigen* **Young-Symmetrisator**

$$\left(\sum_{g\in S} g\right)\left(\sum_{h \in Z} \operatorname{sgn}(h)\, h\right)$$

*im Gruppenring $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$ erzeugte Linksideal ist dann eine irreduzible Darstellung $L(T)$ von $\mathcal{S}_T$. Indem wir irgendeine Bijektion $T \xrightarrow{\sim} \{1,\dots,n\}$ wählen, dadurch $\mathcal{S}_T$ mit $\mathcal{S}_n$ identifizieren und unsere einfache Darstellung $L(T)$ zurückziehen erhalten wir für jedes Youngdiagramm $T \in \mathcal{Y}_n$ eine nach 1.1.18 bis auf*

*Isomorphismus wohldefinierte einfache Darstellung $L(T)$ der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$. Auf diese Weise ergibt sich eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_n & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{irr} \mathbb{C}\mathcal{S}_n \\ T & \mapsto & L(T) \end{array}$$

*zwischen der Menge $\mathcal{Y}_n$ aller Youngdiagramme mit $n$ Kästchen und der Menge aller Isomorphieklassen von einfachen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$.*

**Definition 1.13.3.** Gegeben ein Youngdiagramm $T$ mit $n$ Kästchen ist ein **Tableau der Gestalt** $T$ eine Bijektion $\varphi : T \stackrel{\sim}{\to} \{1, \ldots, n\}$. Wir veranschaulichen so ein Tableau, indem wir in jedes Kästchen unseres Youngdiagramms den Wert schreiben, den $\varphi$ dort annimmt. Ein **Standardtableau** ist ein Tableau, dessen Einträge in allen Zeilen und Spalten monoton wachsen.

**Satz 1.13.4 (Dimensionen der einfachen Darstellungen).** *Gegeben ein Youngdiagramm $T$ stimmt die Dimension der zugehörigen einfachen Darstellung $L(T)$ von $\mathcal{S}_n$ überein mit der Zahl von Standardtableaus der Gestalt $T$.*

*Beweis von 1.13.2.* Wir zeigen zunächst, daß unsere Darstellungen $L(T)$ irreduzibel sind. Der Young-Symmetrisator ist ja bis auf einen Skalar das Produkt der beiden Idempotenten

$$E_T = |S|^{-1} \sum_{g \in S} g \quad \text{und} \quad A_T = |Z|^{-1} \sum_{h \in Z} \operatorname{sgn}(h)\, h$$

Die beiden von diesen Idempotenten erzeugten Linksideale $M(T)$ und $N(T)$ des Gruppenrings $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$ wird der mit Induktion vertraute Leser leicht identifizieren können mit den induzierten Darstellungen zur trivialen Darstellung des Spaltenstabilisators bzw. der Signumsdarstellung des Zeilenstabilisators. Der zentrale Punkt des Beweises besteht nun darin, die Formel

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_T}(M(T), N(T)) = 1$$

zu prüfen. Sie zeigt nämlich, daß unsere beiden induzierten Darstellungen genau einen einfachen Kompositionsfaktor gemeinsam haben, und der ist dann natürlich das Bild eines und jedes von Null verschiedenen Homomorphismus und insbesondere des durch Rechtsmultiplikation mit $A_T$ gegebenen Homomorphismus alias das von $E_T A_T$ erzeugte Linksideal $L(T)$. Ist nun ganz allgemein $R$ ein Ring und $e \in R$ idempotent und $M$ ein $R$-Modul, so induziert das Auswerten bei $e$ eine Bijektion $\operatorname{Hom}_R(Re, M) \stackrel{\sim}{\to} eM$, so daß sich unser zentraler Punkt umschreiben läßt zur Behauptung

$$\dim_{\mathbb{C}} E_T(\mathbb{C}\mathcal{S}_T)A_T = 1$$

Nun gilt ja offensichtlich $S \cap Z = 1$, also $E_T A_T \neq 0$, und für alle $x \in SZ$ gilt $E_T x A_T = \pm E_T A_T$. Es reicht also, wenn wir zusätzlich für alle $x \notin SZ$ zeigen $E_T x A_T = 0$ oder gleichbedeutend $x^{-1} E_T x A_T = 0$. Nun haben wir natürlich

$$|S| x^{-1} E_T x = \sum_{g \in x^{-1} S x} g$$

und bezeichnet $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots$ die Partition von $T$ in die Spalten des Youngdiagramms, so ist $x^{-1} S x$ gerade die Gruppe aller Permutationen von $T$, die jedes Stück der Partition

$$T = x^{-1} T_1 \cup x^{-1} T_2 \cup \ldots$$

stabilisieren. Trifft nun jedes der Stücke $x^{-1} T_i$ jede Zeile unseres Youngdiagramms in höchstens einem Element, so scheint es mir offensichtlich, daß es ein $y$ im Zeilenstabilisator $S$ geben muß mit $y x^{-1} T_i = T_i$ für alle $i$, woraus sofort folgt $x \in SZ$. Im Fall $x \notin SZ$ gibt es folglich ein Stück $x^{-1} T_i$, das mit einer Zeile von $T$ mindestens zwei Elemente gemeinsam hat. Die Vertauschung dieser beiden Elemente ist dann eine Transposition $t \in x^{-1} S x \cap Z$, und deren Existenz zeigt $E_T x A_T = 0$, da dann ja gilt

$$(x^{-1} E_T x) A_T = (x^{-1} E_T x t) A_T = (x^{-1} E_T x) t A_T = -(x^{-1} E_T x) A_T$$

Damit wissen wir, daß die Darstellungen $L(T)$ einfach sind. Da es offensichtlich ebensoviele Young-Diagramme mit $n$ Kästchen gibt wie Partitionen der Zahl $n$ wie Konjugationsklassen in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, ist der erste Satz bewiesen, sobald wir zeigen, daß die Darstellungen $L(T)$ paarweise nicht isomorph sind. Um das zu zeigen, führen wir auf der Menge $\mathcal{Y}_n$ aller Youngdiagramme mit $n$ Kästchen eine partielle Ordnung ein.

**Definition 1.13.5.** Ein Youngdiagramm heißt kleinergleich einem anderen in der **Dominanz-Ordnung** genau dann, wenn es für jedes $s \in \mathbb{N}$ in den ersten $s$ Spalten insgesamt höchstens ebensoviele Kästchen besitzt wie das andere. Wir notieren diese partielle Ordnung $T \leq T'$.

*Bemerkung* 1.13.6. Stellt man sich ein Youngdiagramm als eine Geröllhalde von Kästchen vor, so sind diejenigen Partitionen kleiner, die entstehen, wenn in unserer Geröllhalde ein oder mehrere Kästchen weiter nach unten purzeln.

*Fortführung des Beweises.* Wählen wir nun irgendeine Bijektion $T \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$, identifizieren mit ihrer Hilfe $\mathcal{S}_T$ mit $\mathcal{S}_n$ und ziehen die Darstellungen $M(T)$ und $N(T)$ zurück, so erhalten wir nach 1.1.18 bis auf Isomorphismus wohldefinierte Darstellungen von $\mathcal{S}_n$. Für je zwei Diagramme $T, T' \in \mathcal{Y}_n$ behaupten wir nun

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{S}_n}(M(T), N(T')) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad T \leq T'$$

Sobald das gezeigt ist, sind wir fertig, denn dann folgt aus $L(T) \cong L(T')$ sofort $T \leq T' \leq T$ und damit $T = T'$. Bezeichne nun $E_T$ und $A_{T'}$ die entsprechend zurückgezogenen Elemente des Gruppenrings $\mathbb{C}\mathcal{S}_n$. Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt es zu zeigen

$$T \not\leq T' \quad \Rightarrow \quad E_T x A_{T'} = 0 \;\; \forall x \in \mathcal{S}_n$$

Wieder schreiben wir das um zu $x^{-1}E_T x A_{T'} = 0$, und da wir das eh für das Zurückholen mit beliebigen Bijektionen $T \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\} \xleftarrow{\sim} T'$ zeigen werden, reicht es den Fall $x = 1$ zu betrachten und zu zeigen

$$T \not\leq T' \quad \Rightarrow \quad E_T A_{T'} = 0$$

Wie zuvor folgt das, wenn wir zeigen können, daß der zurückgeholte Spaltenstabilisator von $T$ mit dem zurückgeholten Zeilenstabilisator von $T'$ stets mindestens eine Transposition gemeinsam hat. Wie zuvor reicht es dafür weiter zu zeigen, daß sich unter unserer Voraussetzung $T \not\leq T'$ stets mindestens eine zurückgeholte Spalte und eine zurückgeholte Zeile in mehr als nur einem Element treffen. Das folgt jedoch sofort aus dem anschließenden Lemma. □

**Definition 1.13.7.** Zwei Partitionen einer Menge heißen **unabhängig** genau dann, wenn die Schnitte zwischen einem Stück der einen und einem Stück der anderen Partition alle höchstens ein Element enthalten.

**Definition 1.13.8.** Gegeben eine Partition einer endlichen Menge mit $n$ Elementen bilden wir zwei Youngdiagramme mit $n$ Kästchen: Im **Spaltendiagramm** entsprechen unter einer geeigneten Identifikation der Kästchen mit unserer Menge die Spalten den Stücken der Partition, im **Zeilendiagramm** die Zeilen.

**Lemma 1.13.9.** *Sind zwei Partitionen einer endlichen Menge unabhängig, so ist in der Dominanzordnung das Spaltendiagramm der ersten kleinergleich dem Zeilendiagramm der zweiten.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere Menge aus den Kästchen eines Youngdiagramms besteht und daß die zweite Partition bereits durch die Zeilen dieses Diagramms gegeben wird. In dieser Situation scheint mir das Lemma im Lichte der Definition 1.13.5 der Dominanzordnung offensichtlich. □

*Beweis von 1.13.4.* Gegeben ein Youngdiagramm $T$ operiert die Gruppe $\mathcal{S}_T$ aller Permutationen der Kästchen frei und transitiv von rechts auf der Menge aller Tableaus der Gestalt $T$ vermittels der Vorschrift $\varphi^\sigma = \varphi \circ \sigma$ für

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \ldots, n\}$$

ein Tableau und $\sigma : T \xrightarrow{\sim} T$ eine Permutation. Wenden wir nun auf ein Standardtableau der Gestalt $T$ alle Elemente von $SZ$ an, d.h. eine beliebige Vertauschung der Einträge jeder Spalte gefolgt von einer beliebigen Vertauschung der Einträge jeder Zeile, so erhalten wir zwar eventuell weitere Standardtableaus, aber für diese ist offensichtlich die Folge der Zeilensummen lexikographisch größer als bei unserem Ausgangstableau. Identifizieren wir also, indem wir irgendein Tableau auszeichnen, die Menge aller Tableaus mit $\mathcal{S}_T$, so sind die $xE_TA_T$ mit $x$ ein Standardtableau $\mathbb{C}$-linear unabhängig im Gruppenring $\mathbb{C}\mathcal{S}_T$. Es folgt, daß die Zahl der Standardtableaus eine untere Schranke ist für die Dimension der einfachen Darstellung $L(T)$. Daß die Zahl der Standardtableaus sogar mit dieser Dimension übereinstimmt, folgt dann aus der durch 1.14.1 bewiesenen Formel mit der aus 1.11.3 spezialisierten allgemeinen Erkenntnis

$$\sum_{T \in \mathcal{Y}_n} (\dim_{\mathbb{C}} L(T))^2 = |\mathcal{S}_n| \qquad \square$$

*Bemerkung* 1.13.10. Über die Darstellungen der symmetrischen Gruppen ist noch sehr viel mehr bekannt, siehe zum Beispiel [**?**, **?**, **?**, **?**]. Was die Darstellungen über Körpern positiver Charakteristik angeht, ist aber auch noch vieles offen, und selbst die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen sind noch nicht bekannt.

*Bemerkung* 1.13.11. Jedes Youngdiagramm $T$ mit $n$ Kästchen liefert zwei Partitionen der Zahl $n$, die Partition durch die Zeilenlängen $z(T)$ und die Partition durch die Spaltenlängen $s(T)$. Bezeichnet $\mathcal{Y}_n$ die Menge aller Youngdiagramme mit $n$ Kästchen und $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Partitionen der Zahl $n$, so erhalten wir auf diese Weise zwei Bijektionen

$$\mathcal{P}_n \overset{z}{\underset{\sim}{\leftarrow}} \mathcal{Y}_n \overset{s}{\underset{\sim}{\rightarrow}} \mathcal{P}_n$$

die zusammen eine selbstinverse Bijektion $\mathcal{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_n$ liefern. Diese Bijektion notieren wir $\lambda \mapsto \lambda'$ und nennen $\lambda'$ die **duale Partition zu** $\lambda$.

## 1.14 Der Robinson-Schensted-Algorithmus

*Bemerkung* 1.14.1. Wir erhalten eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen $\sigma$ von $\{1, \ldots, n\}$ und der Menge aller Paare von Standardtableaus selber Gestalt wie folgt: Zunächst stellen wir unsere Zahlen in der durch $\sigma$ gegebenen Reihenfolge auf als $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Dann lassen wir sie ein “Young-Haus” bauen und bewohnen nach den folgenden Regeln: Im $i$-ten Schritt geht die Zahl $\sigma(i)$ von links nach rechts durch die erste Etage des Young-Hauses, wie es bis da bereits konstruiert ist. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der ersten Etage, baut sie an ihrem Ende ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie die erste Bewohnerin der ersten Etage, die größer ist als sie selber, und diese versucht es in der zweiten Etage. Ist sie größer als alle Bewohnerinnen der zweiten Etage, so baut sie sich am Ende der zweiten Etage ein Kästchen an und zieht dort ein. Sonst verdrängt sie in der zweiten Etage die erste Bewohnerin, die größer ist als sie selber, und die versucht es in der dritten Etage etc. Der $i$-te Schritt ist fertig, wenn die Zahlen $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)$ alle wieder in einem Kästchen wohnen. So entsteht, wie man sich unschwer überlegt, ein Standardtableau $L(\sigma)$. Die Reihenfolge, in der die Kästchen angebaut werden, erinnern wir in einem zweiten Standardtableau $R(\sigma)$ derselben Gestalt, bei dem in demjenigen Kästchen die Zahl $i$ steht, das im $i$-ten Schritt angebaut wurde. Daß wir auf diese Weise in der Tat eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen und der Menge aller Paare von Standardtableaus gleicher Gestalt erhalten, kann der Leser hoffentlich ohne allzu große Schwierigkeiten selbst einsehen. In jedem Fall denke ich, daß es noch schwieriger wäre, einen in Worten aufgeschriebenen Beweis nachzuvollziehen.

*Beispiel* 1.14.2. Es sei $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(5)$ die Folge $3, 1, 5, 4, 2$. Wir erhalten

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\\hline 1 & 5\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 5\\\hline 1 & 4\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4\\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\\hline 4 & 5\\\hline 1 & 2\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\\hline 2 & 4\\\hline 1 & 3\\\hline\end{array}$$

und das Paar von Standardtableaus ganz am Ende der Zeile ist dann dasjenige, das der Robinson-Schensted-Algorithmus unserer Permutation $\sigma$ zuordnet.

## 1.15 Duale Paare

**Definition 1.15.1.** Seien $G, H$ Gruppen, $M$ ein $G \times H$-Modul über einem Körper $k$ und $\phi : G \to \mathrm{GL}(M), \psi : H \to \mathrm{GL}(M)$ die zugehörigen Homomorphismen. Mann nennt $(G, H)$ ein **duales Paar** vermittels $M$ genau dann, wenn $\mathrm{End}_k^G M$ als $k$-Algebra erzeugt wird von $\psi(H)$ und ebenso $\mathrm{End}_k^H M$ von $\phi(G)$.

**Proposition 1.15.2.** *Sind zwei endliche Gruppen $G, H$ ein duales Paar vermittels einer endlichdimensionalen komplexen Darstellung $M$, so gibt es einfache und paarweise nicht isomorphe Darstellungen $E_1, \ldots, E_r$ von $G$ und $F_1, \ldots, F_r$ von $H$ derart, daß $M$ unter $G \times H$ zerfällt als*

$$M \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} E_\nu \otimes F_\nu$$

*Bemerkung* 1.15.3. Insbesondere liefert ein duales Paar $M$ eine natürliche Bijektion zwischen den einfachen Kompositionsfaktoren von $M$ als $G$-Modul und den einfachen Kompositionsfaktoren von $M$ als $H$-Modul.

*Beweis.* Sicher können wir so eine Zerlegung finden mit den $E_r$ irreduzibel und paarweise nicht isomorph. Aber dann liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\prod_{\nu=1}^r \operatorname{End}_{\mathbb{C}} F_\nu \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_{\mathbb{C}}^G M$ und folglich sind die $F_\nu$ einfache Moduln für $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}^G M$ und damit nach Annahme für $H$. □

## 1.16 Erklärung zur diskreten Fouriertransformation

*Bemerkung* 1.16.1. *Woanders!* Die Terminologie erklärt sich wie folgt: Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der Kreislinie $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ der komplexen Zahlen sind genau die Abbildungen $z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Die zugehörigen eindimensionalen Darstellungen $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ bilden ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen von irreduziblen stetigen Darstellungen von $S^1$ in endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Die stetigen komplexwertigen Funktionen $\mathcal{C}(S^1)$ auf $S^1$ kann man verstehen als ein Analogon des Gruppenrings $kG$, und sie operieren auf jeder stetigen endlichdimensionalen Darstellung $V$ durch die Regel

$$f * v = \int_{S^1} f(z)(\rho_V(z)(v)) \quad \forall f \in \mathcal{C}(S^1), v \in V$$

für das offensichtliche Maß auf $S^1$ mit Gesamtmasse 1. Auf $L_n$ operiert also $f \in \mathcal{C}(S^1)$ durch Multiplikation mit dem Fourierkoeffizienten $\int_{S^1} f(z)z^n$, und die durch die Operation gegebene Abbildung

$$\mathcal{C}(S^1) \to \prod_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L_n = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

ordnet demnach einer Funktion $f \in \mathcal{C}(S^1)$ die Familie ihrer Fourierkoeffizienten zu. Das ist die Analogie, die hinter unserer Terminologie steckt. Im Rahmen der nichtkommutativen Analysis kann man sogar in ganz präziser Weise unsere "nichtkommutative" Fouriertransformation, die Entwicklung einer Funktion auf $S^1$ in ihre Fourierreihe und die übliche Fouriertransformation von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ als Spezialfälle einer sehr allgemeinen "abstrakten Fouriertransformation" begreifen. In der Technik spielt insbesondere die Fouriertransformation für endliche zyklische Gruppen eine Rolle und heißt die **diskrete Fouriertransformation** [MV00].

# 2 Eingebettete Liegruppen

Dieser Abschnitt kann bereits im Anschluß an **??** mit Vorgriff auf **??** gelesen werden. Wir arbeiten nur mit eingebetteten Mannigfaltigkeiten und ihren Tangentialräumen.

## 2.1 $C^\infty$-Abbildungen

*Bemerkung* 2.1.1. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ definiert auf einer offenen Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}^n$ heißt **beliebig oft differenzierbar** oder auch eine **$\mathcal{C}^\infty$-Abbildung** genau dann, wenn zu allen Komponenten $f_\mu$ von $f$ alle gemischten höheren partiellen Ableitungen, d.h. in der Multiindexschreibweise aus **??** die $\partial^\alpha f_\mu$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}^n$ auf ganz $U$ existieren. Wir wollen nun diese Bedingung auf Abbildungen mit halboffenem Definitionsbereich ausdehnen und sie außerdem koordinatenfrei formulieren, d.h. für Abbildungen zwischen geeigneten Teilmengen endlichdimensionaler reeller Vektorräume. Gegeben Vektorräume $V, W$ und $p \geq 0$ bilden wir dazu den Vektorraum $\operatorname{Mult}^p(V, W)$ aller multilinearen Abbildungen von dem Produkt von $p$ Kopien von $V$ nach $W$. Im Fall $p = 0$ verstehen wir $\operatorname{Mult}^0(V, W) = W$. Man bemerke die Isomorphismen $\operatorname{Hom}(V, \operatorname{Mult}^p(V, W)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mult}^{p+1}(V, W)$ gegeben durch $f \mapsto [f]$ mit $[f](v_0, v_1, \ldots, v_p) = (f(v_0))(v_1, \ldots, v_p)$.

*Bemerkung* 2.1.2. Sind $V, W$ endlichdimensionale reelle Vektorräume und ist $A \subset V$ eine halboffene Teilmenge und $g : A \to \operatorname{Mult}^p(V, W)$ eine differenzierbare Abbildung, so fassen wir $\mathrm{d}g$ mit der Identifikation aus der vorhergehenden Bemerkung auf als die Abbildung $\mathrm{d}g : A \to \operatorname{Mult}^{p+1}(V, W)$ gegeben durch $x \mapsto [\mathrm{d}_x g]$.

**Definition 2.1.3.** Gegeben $V, W$ endlichdimensionale reelle Vektorräume und $A \subset V$ eine halboffene Teilmenge und $f : A \to W$ eine Abbildung setzen wir $\mathrm{d}^{(0)} f = f$ und definieren induktiv die $p$-te Ableitung

$$\mathrm{d}^{(p)} f : A \to \operatorname{Mult}^p(V, W)$$

als $\mathrm{d}^{(p)} f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{(p-1)} f)$, falls die $(p-1)$-te Ableitung existiert und differenzierbar ist auf $A$. Existieren alle höheren Ableitungen von $f$ bis zur Ordung $p$ und sind stetig, so nennen wir $f$ **von der Klasse $C^p$** oder auch eine **$C^p$-Abbildung**. Zum Beispiel bedeutet $C^1$ nichts anderes als stetig differenzierbar. Ist $f$ von der Klasse $C^p$ für alle $p$, so nennen wir $f$ **beliebig oft differenzierbar** oder **von der Klasse $C^\infty$** oder eine **$C^\infty$-Abbildung** oder **diffferenzierbar** unter Beugung der Rechtschreibung, um sie von den differenzierbaren Abbildungen aus **??** abzusetzen.

*Bemerkung* 2.1.4. Jede Verknüpfung von diffferenzierbaren Abbildungen ist diffferenzierbar. Eine Abbildung in ein Produkt von endlichdimensionalen reellen Vektorräumen ist diffferenzierbar genau dann, wenn ihre Komponenten diffferenzierbar sind.

*Bemerkung* 2.1.5. Die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen läßt sich koordinatenfrei dahingehend formulieren, daß unsere höheren Ableitungen $\mathrm{d}^{(p)}f$ in den symmetrischen multilinearen Abbildungen landen, d.h. in denjenigen multilinearen Abbildungen, die ihren Wert nicht ändern, wenn man ihre Argumente untereinander vertauscht. Wir gehen darauf nicht näher ein, empfehlen aber dem Leser, zur Übung zu prüfen, daß sich die höheren Terme der Taylorentwicklung **??** koordinatenfrei in der Form $(p!)^{-1}(\mathrm{d}^{(p)}f)(h,\ldots,h)$ darstellen lassen.

**Definition 2.1.6.** Seien $V, W$ endlichdimensionale Vektorräume und $A \Subset V$, $B \Subset W$ halboffene Teilmengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt ein **$C^p$-Diffeomorphismus** genau dann, wenn $f$ bijektiv ist und sowohl $f$ als auch seine Umkehrung $f^{-1} : B \to A$ beide $C^p$-Abbildungen sind. Sprechen wir von einem **Difffeomorphismus** oder ohne nähere Spezifizierung von einem **Diffeomorphismus**, so meinen wir einen $C^\infty$-Diffeomorphismus.

*Bemerkung* 2.1.7. Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale reelle Vektorräume. Ist $U \Subset V$ offen und $f : U \to W$ diffferenzierbar und ist an einer Stelle $p \in U$ das Differential ein Isomorphismus, so induziert $f$ einen Difffeomorphismus von einer offenen Umgebung von $p$ mit einer offenen Umgebung von $f(p)$. Das folgt sofort aus **??**.

**Definition 2.1.8.** Eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums heißt eine **eingebettete $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit** genau dann, wenn es um jeden Punkt unserer Teilmenge eine Plättung im Sinne von **??** gibt, die sogar ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus ist.

*Bemerkung* 2.1.9. Die Beschreibungen **??** und **??** von eingebetteten Mannigfaltigkeiten als Urbilder bzw. als Bilder gelten analog, wenn man nur an den entsprechenden Stellen die Bedingung "stetig differenzierbar" zu "diffferenzierbar" verstärkt. Reden wir im folgenden ohne nähere Spezifizierung von Mannigfaltigkeiten, so meinen wir stets $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten, und unter Karten bzw. Koordinatensystemen wollen wir auch stets $\mathcal{C}^\infty$-Karten bzw. Umkehrabbildungen von $\mathcal{C}^\infty$-Karten verstehen. Damit sind dann natürlich auch alle Kartenwechsel diffferenzierbar.

**Definition 2.1.10.** Eine Abbildung von einer (eingebetteten) Mannigfaltigkeit in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum heißt **diffferenzierbar** genau dann, wenn ihre Verknüpfung mit jeder Karte diffferenzierbar ist. Eine Abbildung zwischen (eingebetteten) Mannigfaltigkeiten heißt **differenzierbar** genau dann, wenn ihre Verknüpfung mit der Einbettung der zweiten unserer Mannigfaltigkeiten diffferenzierbar ist. Ein **Difffeomorphismus** zwischen (eingebetteten) Mannigfaltigkeiten ist eine diffferenzierbare bijektive Abbildung, deren Umkehrung auch diffferenzierbar ist.

*Übung* 2.1.11. Eine Karte einer $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit ist nichts anderes als ein Difffeomorphismus zwischen einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^k$ bzw. eines $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1}$ mit einer offenen Teilmenge unserer Mannigfaltigkeit.

**Proposition 2.1.12.** *Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung von (eingebetteten) differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Gegeben ein Punkt $x \in M$ gibt es genau eine lineare Abbildung, das* **Differential**

$$\mathrm{d}_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$$

*derart, daß für jede Karte $(W, \varphi)$ von $M$ mit $\varphi(p) = x$ für ein $p \in W$ gilt $\mathrm{d}_x f \circ \mathrm{d}_p \varphi = \mathrm{d}_p(f \circ \varphi)$, wo wir beide Seiten auffassen als lineare Abbildungen vom Umgebungsraum unserer Karte $W$ in den Umgebungsraum unserer eingebetteten Mannigfaltigkeit $N$.*

*Beweis.* Per definitionem induziert für jede Karte das Differential $\mathrm{d}_p \varphi$ einen Isomorphismus des Umgebungsraums unserer Karte mit dem Tangentialraum $T_x M$. Für jede Karte finden wir also genau eine Abbildung $\mathrm{d}_x f$ mit der in der Proposition geforderten Verträglichkeitsbedingung für diese eine Karte. Die Kettenregel zeigt dann, daß alle die so definierten Abbildungen übereinstimmen. □

*Übung* 2.1.13. Gegeben differenzierbare Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to L$ von (eingebetteten) Mannigfaltigkeiten erfüllen die Differentiale für jeden Punkt $x \in M$ die **Kettenregel**

$$\mathrm{d}_{f(x)} g \circ \mathrm{d}_x f = \mathrm{d}_x (g \circ f)$$

*Übung* 2.1.14. Ist $M \subset V$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit, so ist auch das Tangentialbündel $TM \subset V \times V$ aus **??** eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit. Weiter ist für jede diffferenzierbare Abbildung $f : M \to N$ auch das Differential eine diffferenzierbare Abbildung $\mathrm{d}f : TM \to TN$.

## 2.2 Eingebettete Liegruppen

**Satz 2.2.1 (Untergruppen als Mannigfaltigkeiten).** *Ist $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, so ist jede abgeschlossene Untergruppe seiner Automorphismengruppe $G \overset{\circ}{\subset} \operatorname{Aut} V$ eine eingebettete $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit ohne Rand im endlichdimensionalen reellen Vektorraum* $\operatorname{End} V$.

*Bemerkung* 2.2.2. Man beachte, daß wir von unserer Gruppe $G$ nicht fordern, daß sie abgeschlossen sein soll im endlichdimensionalen Vektorraum $\operatorname{End} V$, vergleiche **??**. Ausgeschrieben fordern wir vielmehr nur für jede Folge in $G$, die bezüglich irgendeiner Norm auf $\operatorname{End} V$ gegen einen Punkt von $\operatorname{Aut} V$ konvergiert, daß dieser Punkt bereits in $G$ liegen soll.

*Beispiele* 2.2.3. Typische Beispiele sind $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}^n$ und $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) \subset \operatorname{Aut} \mathbb{H}^n$. Die Gruppen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \subset \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$ und $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}^n$ aller reellen bzw. komplexen Matrizen mit Determinante Eins. Die Gruppen $\mathrm{O}(n) \subset \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$ und $\mathrm{U}(n) \subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}^n$ aller orthogonalen bzw. unitären Matrizen und darin die Untergruppen $\mathrm{SO}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ aller Matrizen mit Determinante Eins. Die Gruppen aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen, oder aller reellen oder komplexen Diagonalmatrizen, jeweils zu einer fest vorgegebenen Zahl von Zeilen und Spalten.

*Beispiel* 2.2.4. Die Kugelschalen $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ tragen die Struktur einer $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit. Auf $S^0 = \{+1, -1\}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ und $S^3$ induziert die Multiplikation in $\mathbb{R}$, den komplexen Zahlen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bzw. den Quaternionen $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ sogar die Struktur einer Liegruppe. Wie in **??** erläutert wird, stimmt die Gruppe der Quaternionen der Länge Eins in unserem Modell der Quaternionen überein mit der Gruppe $\mathrm{SU}(2)$. Wir erhalten einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SU}(2) = S^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

mit Kern $\{+1, -1\}$, indem wir $S^3$ durch Konjugation auf dem Raum der rein imaginären Quaternionen $Q = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \{q \in \mathbb{H} \mid \overline{q} = -q\}$ mit dem Standard-Skalarprodukt operieren lassen. Insbesondere erhalten wir so einen Diffeomorphismus $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{P}^3\mathbb{R}$. Man nennt $S^3$ auch die **Spin-Gruppe**.

*Bemerkung* 2.2.5. Unter einer **Liegruppe** versteht man ganz allgemein eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit $G$ mit einer Gruppenstruktur derart, daß die Multiplikation $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ und die Inversenbildung $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ beide diffferenzierbar sind. Hierbei versteht man unter Mannigfaltigkeiten meist nicht nur eingebettete Mannigfaltigkeiten sondern allgemeiner abstrakte Mannigfaltigkeiten, die wir noch gar nicht eingeführt haben. Wir werden später sehen, wie sich unsere Argumente in diesem Rahmen verallgemeinern lassen. Die Terminologie erinnert an den Begründer der Theorie, den Mathematiker Sophus Lie (1842–1899). Eine abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums nennen wir auch eine **eingebettete Liegruppe**.

*Bemerkung* 2.2.6. Wir zeigen den Satz zusammen mit einer genaueren Aussage, die wir im folgenden formulieren. Dazu erinnern wir für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum $V$ an die Exponentialabbildung

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \operatorname{End} V & \to & \operatorname{Aut} V \\ & X & \mapsto & \sum_{\nu \geq 0} X^\nu / \nu! \end{array}$$

aus **??**. Sie ist eine $C^\infty$-Abbildung und ihr Differential im Ursprung ist die Identität.

**Satz 2.2.7 (Tangentialraum und Exponentialabbildung).** *Sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Für jede abgeschlossene Untergruppe $G \subseteq\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc \operatorname{Aut} V$ kann der Tangentialraum im neutralen Element beschrieben werden als*

$$T_e G = \{X \in \operatorname{End} V \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset G\}$$

*und die Exponentialabbildung $\exp : T_e G \to G$ liefert einen Difffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung der Null in $T_e G$ und einer offenen Umgebung des neutralen Elements in $G$.*

*Beweis von 2.2.1 und 2.2.7.* Wir zeigen zunächst einmal, daß die Menge

$$\mathfrak{g} = \{X \in \operatorname{End} V \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset G\}$$

ein Untervektorraum des Endomorphismenraums ist. Nach dem Umkehrsatz definiert ja die Exponentialabbildung $\operatorname{End} V \to \operatorname{Aut} V$ einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung $A$ der Null und einer offenen Umgebung $B$ der Identität. Jetzt brauchen wir

**Lemma 2.2.8.** *Für alle $X, Y \in \operatorname{End} V$ gilt*

$$\exp(X + Y) = \lim_{n \to \infty} \left( \exp\left(\frac{X}{n}\right) \exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n$$

*Beweis.* Für kleine $t \in \mathbb{R}$ gilt sicher

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$$

für eine wohldefinierte $C^\infty$-Kurve $Z : (-\epsilon, \epsilon) \to \operatorname{End} V$. Ein Vergleich der Differentiale zeigt $\dot{Z}(0) = X + Y$ und folglich $Z(t) = t(X + Y) + t\eta(t)$ für $\eta$ stetig bei Null mit Funktionswert Null. So ergibt sich

$$\begin{aligned} (\exp(\tfrac{X}{n})\exp(\tfrac{Y}{n}))^n &= \exp(Z(\tfrac{1}{n}))^n \\ &= \exp(nZ(\tfrac{1}{n})) \\ &= \exp(X + Y + \eta(\tfrac{1}{n})) \end{aligned}$$

und das strebt für $n \to \infty$ offensichtlich gegen $\exp(X + Y)$. □

Damit muß die Menge $\mathfrak{g}$ aller $X \in \operatorname{End} V$ mit $\exp(\mathbb{R}X) \subset G$ in der Tat ein Untervektorraum sein. Wir wählen zu diesem Untervektorraum ein Komplement $\mathfrak{t}$ und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \operatorname{End} V & \to & \operatorname{Aut} V \\ & X + Y & \mapsto & (\exp X)(\exp Y) \end{array}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{t}$. Offensichtlich ist $\psi^{-1}(G)$ stabil unter der Addition von Vektoren aus $\mathfrak{g}$. Weiter hat $\psi$ bijektives Differential bei Null und induziert folglich einen Diffeomorphismus $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ zwischen geeigneten offenen Umgebungen $A$ der Null und $B$ der Identität. Wenn wir zeigen können, daß $\psi$ für hinreichend kleine $A$ und $B$ sogar eine Bijektion

$$\psi : A \cap \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} B \cap G$$

induziert, so liefert $\psi$ eine Plättung von $G$ um das neutrale Element und $(g\cdot) \circ \psi$ eine Plättung um ein beliebiges Element $g \in G$ und 2.2.1 ist bewiesen und 2.2.7 folgt aus dem Beweis gleich auch noch. Es reicht also zu zeigen, daß die Null ein isolierter Punkt von $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ ist. Nun ist aber $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ stabil unter der Multiplikation mit ganzen Zahlen. Wäre außerdem die Null ein Häufungspunkt von $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$, so fänden wir nach dem anschließenden technischen Lemma 2.2.9 ein von Null verschiedenes $X \in \mathfrak{t}$ mit $\mathbb{R}X \subset \psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ im Widerspruch zu unserer Annahme $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g} = 0$. □

**Lemma 2.2.9.** *Jede abgeschlossene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums, die stabil ist unter der Multiplikation mit ganzen Zahlen und für die der Ursprung ein Häufungspunkt ist, enthält eine Gerade durch den Ursprung.*

*Beweis.* Sei $M$ unser endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subset M$ unsere abgeschlossene Teilmenge. Sei $|\ |$ eine Norm auf $M$. Nach unseren Annahmen finden wir eine Nullfolge $a_n$ in $A \backslash 0$. Bezeichnet $\alpha_n$ die kleinste ganze Zahl über $1/|a_n|$, so haben wir offensichtlich $\lim_{n\to\infty} |\beta_n a_n| = 1$ und nach Heine-Borel besitzt die Folge $\beta_n a_n$ eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß sie bereits selbst schon konvergiert, sagen wir gegen ein $x \in A$, in Formeln $\lim_{n\to\infty} \beta_n a_n = x$. Sicher gilt dann $|x| = 1$. Ist weiter $t \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es wegen $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$ eine Folge von ganzen Zahlen $\gamma_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \gamma_n/\beta_n = t$ und folglich

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n a_n = (\lim_{n\to\infty} \gamma_n/\beta_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} \beta_n a_n) = tx$$

Da $A$ abgeschlossen ist, folgt $\mathbb{R}x \subset A$. □

*Beispiel* 2.2.10. Der Tangentialraum an $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ beim neutralen Element ist $M(n\times n;\mathbb{C})$. Der Tangentialraum an $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ beim neutralen Element ist die Menge $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$ aller $(n\times n)$-Matrizen mit Spur Null. In der Tat beachte man, daß für komplexe obere Dreiecksmatrizen und damit für beliebige komplexe Matrizen gilt

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$$

Also landet $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$ unter exp in $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Daraus folgt bereits $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R}) \subset T_e\,\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Andererseits umfaßt $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ keine Umgebung der Einheitsmatrix in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ und daraus folgt $T_e\,\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) \neq M(n\times n;\mathbb{R})$. Beides zusammen zeigt dann die Gleichheit. Ein besseres Argument liefert später 2.4.4.

*Bemerkung* 2.2.11. Die Exponentialabbildung liefert keine Surjektion im Fall $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$. In der Tat sind alle nicht nilpotenten Matrizen der zugehörigen Liealgebren diagonalisierbar, folglich sind alle nicht unipotenten Matrizen im Bild der Exponentialabbildung diagonalisierbar, und in beiden Gruppen gibt es auch Elemente, die weder unipotent noch diagonalisierbar sind und die folglich nicht zum Bild der Exponentialabbildung gehören können.

**Proposition 2.2.12.** *Sind $G, H \subset\!\!\!\!\circ\ \operatorname{Aut} V$ wegzusammenhängende abgeschlossene Untergruppen mit $T_eG = T_eH$, so gilt bereits $G = H$.*

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß jede wegzusammenhängende abgeschlossene Untergruppe $G \subset\!\!\!\!\circ\ \operatorname{Aut} V$ von $\exp(T_eG)$ erzeugt wird. Wegen 2.2.7 ist jedoch die von $\exp(T_eG)$ erzeugte Untergruppe $U$ offen in $G$. Dann sind auch alle ihre Linksnebenklassen $Ug$ für $g \in G$ offen in $G$ und für $G$ wegzusammenhängend folgt aus **??** bereits $U = G$. □

## 2.3 Liealgebren eingebetteter Liegruppen

*Bemerkung* 2.3.1. Im Lichte von 2.4.6 stellt sich sofort die Frage, welche reellen Untervektorräume in $\operatorname{End} V$ denn von der Gestalt $T_eG$ sind für abgeschlossene Untergruppen $G \subset\!\!\!\!\circ\ \operatorname{Aut} V$. Eine notwendige Bedingung liefert der folgende Satz.

**Proposition 2.3.2 (Der Kommutator auf $T_eG$).** *Sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Für jede abgeschlossene Untergruppe $G \subset\!\!\!\!\circ\ \operatorname{Aut} V$ ist der Tangentialraum beim neutralen Element $T_eG$ stabil unter dem Bilden des Kommutators, d.h. mit $X$ und $Y$ gehört auch $XY - YX$ zu $T_eG$.*

*Beweis.* Für jedes $g \in \operatorname{Aut} V$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{int}(g): & \operatorname{End} V & \to & \operatorname{End} V \\ & x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

Ihr Differential bei der Einheitsmatrix notieren wir $\mathrm{Ad}(g)$. Da $\mathrm{int}(g)$ linear ist, wird $\mathrm{Ad}(g)$ durch dieselbe Formel gegeben wie $\mathrm{int}(g)$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $g \in G$ stabilisiert $\mathrm{int}(g)$ die Menge $G$ und induziert folglich eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ad}(g): & T_eG & \to & T_eG \\ & X & \mapsto & gXg^{-1} \end{array}$$

Insbesondere verläuft für $Y \in T_eG$ die Kurve $t \mapsto \exp(tY)X\exp(-tY)$ ganz in $T_eG$. Damit liegt auch ihr Geschwindigkeitsvektor bei $t = 0$ in $T_eG$, und der ist nach der Produktregel gerade der Kommutator $YX - XY$. □

*Bemerkung* 2.3.3. Die Notation Ad kommt her von der Bezeichnung dieser Operation von $G$ auf $T_eG$ als "adjungierte Darstellung". Wir werden diese Konstruktion in 3.2 noch ausführlich besprechen. Der Kommutator wird oft notiert

$$YX - XY = [X, Y]$$

heißt auch die **Lie-Klammer**. Einen Vektorraum $A$ über einem Körper $k$ mit einer $k$-bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ bezeichnet man ganz allgemein als eine **$k$-Algebra**. Gegeben eine eingebettete Liegruppe $G$ wird demnach der Tangentialraum beim neutralen Element $T_eG$ mit der Verknüpfung $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ eine $\mathbb{R}$-Algebra. Sie heißt die **Liealgebra von** $G$ und wird notiert

$$T_eG = \mathrm{Lie}\, G$$

*Bemerkung* 2.3.4. Unter einer **Liealgebra** über einem Körper $k$ versteht man im allgemeinen eine $k$-Algebra $\mathfrak{g}$, deren Verknüpfung $(x, y) \mapsto [x, y]$ notiert wird und von der gefordert wird, daß sie die Formeln $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ und $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ erfüllt. Daß in unseren Algebren $\mathrm{Lie}\, G$ diese Formeln gelten, kann man mühelos nachrechnen. Warum aber gerade diese Formeln einen mit der Theorie der Liegruppen aufs engste verwobenen Typ von Algebra definieren, wird erst in **??** klar werden.

*Beispiel* 2.3.5 *(***Anschauung für die Liealgebra der Drehgruppe***).* Man kann die Lie-Klammer auf der Liealgebra einer eigebetteten Liegruppe auch symmetrischer verstehen mithilfe der Formel

$$[A, B] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left(\exp(tA)\exp(tB) - \exp(tB)\exp(tA)\right)$$

die man leicht über die Taylorentwicklung nachrechnet. Beachtet man, daß $t \mapsto \exp(tX)$ ein und nach 2.4.3 sogar der einzige differenzierbare Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to G$ ist mit Geschwindigkeitsvektor $X$ beim neutralen Element, so kann man diese Formel dahingehend interpretieren, daß die

Lie-Klammer mißt, inwieweit zwei “infinitesimale Elemente” unserer Gruppe kommutieren. Zum Beispiel ergibt sich die Liealgebra der Drehgruppe SO(3) mit 2.2.7 und einer Dimensionsabschätzung als die Liealgebra $\mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ aller reellen schiefymmetrischen $(3 \times 3)$-Matrizen—ein besseres Argument wird in 2.4.4 gegeben. Als Basis wählen wir die drei Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deren Kommutatoren werden gegeben durch die Formeln $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_2, E_3] = E_1$ und $[E_3, E_1] = E_2$. Nun beschreibt

$$\exp(tE_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

eine Drehung um die $x$-Achse mit Winkel $t$ und $\exp(tE_2), \exp(tE_3)$ bedeuten ähnlich Drehungen um die $y$-Achse bzw. die $z$-Achse. Um die Lie-Klammer anschaulich zu interpetieren gilt es damit einzusehen, daß “ein kleines bißchen Drehen um die $x$-Achse gefolgt von einem kleinen bißchen Drehen um die $y$-Achse sich vom Effekt derselben Operationen in der umgekehrten Reihenfolge unterscheidet um ein quadratisch kleines bißchen Drehen um die $z$-Achse, bis auf einen kubisch kleinen Fehler”. Diese Aussage scheint mir der Anschauung durchaus zugänglich zu sein. Man bemerke auch, daß $\mathrm{e}_i \mapsto E_i$ einen Vektorraumisomorphismus $\psi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ definiert, unter dem das Kreuzprodukt der Lieklammer entspricht. Es ist eine gute Übung zu zeigen, daß mit dieser Notation $\exp(\psi(v))$ die Matrix einer Drehung mit Drehachse $\mathbb{R}v$ und Drehwinkel $\|v\|$ ist.

**Definition 2.3.6.** Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Ein **Algebrenhomomorphismus** ist eine lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen veträglich ist.

*Bemerkung* 2.3.7. Gegeben ein Körper $k$ und ein $k$-Vektorraum $V$ wird $\mathrm{End}\, V$ eine Liealgebra mit der Verknüpfung $[X, Y] = XY - YX$. Man notiert diese Liealgebra auf $\mathfrak{gl}(V)$. Keineswegs jede reelle Unter-Liealgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ für $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum ist der Tangentialraum im neutralen Element einer eingebetteten Liegruppe $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$. Das Problem ist, daß die vom Bild der Exponentialabbildung erzeugte Untergruppe keineswegs abgeschlossen zu sein braucht, wie der Fall $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\,\mathrm{diag}(\mathrm{i}, \alpha\,\mathrm{i}) \subset \mathrm{End}\,\mathbb{C}^2$ für irrationales reelles $\alpha$ zeigt. Jedoch gibt es auf der fraglichen Untergruppe stets genau eine Struktur von differenzierbarer Mannigfaltigkeit derart, daß die Einbettung differenzierbar ist und ihr Tangential den Tangentialraum unserer Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{g}$ identifiziert. Mehr dazu lernt man in der Differentialgeometrie.

## 2.4 Homomorphismen von Liegruppen

**Satz 2.4.1 (Homomorphismen von Liegruppen).** *Jeder stetige Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von Liegruppen ist diffferenzierbar, sein Differential beim neutralen Element $\mathrm{d}\varphi$ ist ein Homomorphismus von Liealgebren und es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Lie} G \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] \arrow[d, "\exp"'] & \operatorname{Lie} H \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

*Bemerkung* 2.4.2. Hier zeigen wir diese Aussage nur für eingebettete Liegruppen. Der Beweis im allgemeinen wird in **??** gegeben.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir davon ausgehen, daß wir abgeschlossene Untergruppen $G \mathrel{\subset\!\!\!\!A} \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ und $H \mathrel{\subset\!\!\!\!A} \mathrm{GL}(d;\mathbb{R})$ vor uns haben. Da $\varphi$ stetig ist, muß sein Graph $\Gamma \subset G \times H$ abgeschlossen sein. Da $\varphi$ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist $\Gamma$ sogar eine abgeschlossene Untergruppe und wir erhalten eine Sequenz von abgeschlossenen Untergruppen

$$\Gamma \mathrel{\subset\!\!\!\!A} G \times H \mathrel{\subset\!\!\!\!A} \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(d;\mathbb{R}) \mathrel{\subset\!\!\!\!A} \mathrm{GL}(n+d;\mathbb{R})$$

Nach 2.2.1 ist $\Gamma$ dann auch eine Untermannigfaltigkeit im Raum aller quadratischen Matrizen mit $(n+d)$ Zeilen und Spalten. Das offensichtliche kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M(n \times n;\mathbb{R}) \arrow[d, "\exp"] & M(n \times n;\mathbb{R}) \times M(d \times d;\mathbb{R}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\exp \times \exp"] & M(d \times d;\mathbb{R}) \arrow[d, "\exp"] \\ \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) & \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(d;\mathbb{R}) \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{GL}(d;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

mit Liealgebren-Homomorphismen in den oberen Horizontalen schränkt damit ein zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_e G \arrow[d, "\exp"'] & T_e \Gamma \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\exp"] & T_e H \arrow[d, "\exp"] \\ G & \Gamma \arrow[l] \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

mit $C^\infty$-Gruppenhomomorphismen in der unteren Horizontalen und den zugehörigen Differentialen beim neutralen Element in der oberen Horizontalen. Da $\Gamma$ der Graph einer stetigen Abbildung $G \to H$ ist, muß die Projektion $\Gamma \to G$ ein Homöomorphismus sein. Da die Vertikalen Karten um das neutrale Element liefern, induziert die lineare Abbildung $T_e\Gamma \to T_eG$ einen Homöomorphismus zwischen geeigneten offenen Umgebungen der Null. Es folgt, daß $T_e\Gamma \to T_eG$ ein Vektorraumisomorphismus ist, und durch Verschieben dieser Erkenntnis mit Gruppenelementen erkennen wir, daß $\Gamma \to G$ ein Diffeomorphismus sein muß. Der Satz folgt sofort. □

**Korollar 2.4.3 (Ein-Parameter-Untergruppen).** *Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine eingebettete Liegruppe $G$ sind genau die Abbildungen $t \mapsto \exp(tX)$ für $X \in \operatorname{Lie} G$.*

*Beweis.* Wir können $(\mathbb{R}, +)$ identifizieren mit der Gruppe aller unipotenten oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und Spalten. Jetzt brauchen wir nur noch den Satz 2.4.1 anzuwenden. □

*Übung* 2.4.4. Gegeben ein $\varphi : G \to H$ stetiger Homomorphismus von Liegruppen zeige man mit 2.2.7 die Formel $\operatorname{Lie}(\ker \varphi) = \ker(\mathrm{d}\varphi)$ und allgemeiner für $K \subset H$ eine abgeschlossene Untergruppe

$$\operatorname{Lie}(\varphi^{-1}(K)) = \{x \in \operatorname{Lie} G \mid (\mathrm{d}\varphi)(x) \in \operatorname{Lie} K\}$$

*Übung* 2.4.5. Gegeben ein $G$ eine Liegruppe und $\Gamma \subset \operatorname{Grpto}^\times G$ eine Menge von Automorphismen von $G$ ist die Liealgebra der Gruppe $G^\Gamma$ der Fixpunkte von $\Gamma$ genau die Menge der Fixpunkte in der Liealgebra, in Formeln

$$\operatorname{Lie}(G^\Gamma) = (\operatorname{Lie} G)^\Gamma$$

*Bemerkung* 2.4.6. Aus 2.2.7 folgt für beliebige abgeschlossene Untergruppen der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums $G, H \overset{\circ}{\subset}\!\!\!\!\!\!\mathrm{A}\ \operatorname{Aut} V$ die Formel

$$\operatorname{Lie}(G \cap H) = (\operatorname{Lie} G) \cap (\operatorname{Lie} H)$$

Die wichtigsten Methoden zur Berechnung von Liealgebren sind für uns diese Bemerkung, die beiden vorhergehenden Übungen sowie 2.5.7.

## 2.5 Darstellungen von Liegruppen und Liealgebren

*Bemerkung* 2.5.1. In diesem Abschnitt mag der Leser unter einer Liegruppe je nach Kenntnisstand eine eingebettete Liegruppe oder auch eine abstrakte Liegruppe verstehen. Des weiteren mag er je nach Kenntnisstand unter einer zusammenhängenden Liegruppe eine als metrischer Raum wegzusammenhängende eingebettete Liegruppe oder eine als topologischer Raum zusammenhängende abstrakte Liegruppe verstehen.

**Definition 2.5.2.** Eine **endlichdimensionale Darstellung** einer Liegruppe $G$ ist ein endlichdimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum $V$ mit einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

**Definition 2.5.3.** Sei $k$ ein Körper. Eine **Darstellung** einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über $k$ ist ein Paar $(V, \rho)$ bestehend aus einem $k$-Vektorraum $V$ und einem Homomorphismus von Liealgebren $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Ist $\rho$ injektiv, so nennt man die Darstellung **treu**.

*Beispiel* 2.5.4. Ist $G$ eine Liegruppe und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine stetige Darstellung durch Automorphismen eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums, so wird $V$ nach 2.4.1 eine Darstellung der Liealgebra $\mathrm{Lie}\, G$ vermittels des Differentials beim neutralen Element $\mathrm{d}\rho : \mathrm{Lie}\, G \to \mathfrak{gl}(V)$.

*Bemerkung* 2.5.5. Gegeben eine Darstellung einer Liealgebra schreiben wir statt $(\rho(x))(v)$ meist $xv$ und geben in dieser Notation noch eine Variante der obigen Definition. Gegeben Vektorräume $U, V, W$ können wir ja ganz allgemein die Menge aller linearen Abbildungen $U \to \mathrm{Hom}(V, W)$ in offensichtlicher Weise identifizieren mit der Menge aller bilinearen Abbildungen $U \times V \to W$. Insbesondere entspricht jede lineare Abbildung $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ eineindeutig einer bilinearen Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$. Man prüft nun leicht, daß hier $\rho$ eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann, wenn für die zugehörige Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto (\rho(x))(v)$ in der abkürzenden Schreibweise $(\rho(x))(v) = xv$ gilt

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$ mit dieser Eigenschaft nennen wir auch eine **Operation** der Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf dem Vektorraum $V$. Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und $x(yv)$ mit $xyv$ abkürzen.

*Bemerkung* 2.5.6. Gegeben eine stetige Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Liegruppe und $x \in \mathrm{Lie}\, G$ und $v \in V$ berechnet man $xv \in V$ zweckmäßig, indem man das Auswerten $a_v : \mathrm{GL}(V) \to V$ hinter $\rho$ dahinterhängt und eine Kurve $\mathbb{R} \to G$ mit Geschwindigkeit $x$ bei $t = 0$ davor, zum Beispiel die Kurve $t \mapsto \exp(tx)$. Da $a_v$ Restriktion einer linearen Abbildung und damit sein eigenes Differential ist, in Formeln $\mathrm{d}a_v = a_v$, ergibt sich so für die Operation eines Elements $x$ der Liealgebra auf einem Vektor $v$ der Darstellung die Formel

$$xv = \lim_{t \to 0} \frac{(\exp tx)v - v}{t}$$

**Korollar 2.5.7.** *Ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine stetige endlichdimensionale Darstellung einer eingebetteten Liegruppe und $v \in V$ ein Vektor, so gilt für die Liealgebra der Isotropiegruppe*

$$\mathrm{Lie}(G_v) = \{x \in \mathrm{Lie}\, G \mid xv = 0\}$$

*Beweis.* Aus $xv = 0$ folgt mit 2.4.1 sofort $(\exp tx)v = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und nach 2.2.7 damit $x \in \mathrm{Lie}(G_v)$. Die andere Inklusion ist eh evident. □

*Beispiel* 2.5.8. Die Liealgebra von $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \mid AA^\top = E\}$ ist $\mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n \times n;\mathbb{R}) \mid X + X^\top = 0\}$. In der Tat ist $\mathrm{O}(n)$ die Isotropiegruppe der Einheitsmatrix unter der Operation $A \cdot M = AMA^\top$ auf dem Raum aller Matrizen $M$. Die Ableitung von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to M(n \times n;\mathbb{R})$, $A \mapsto AMA^\top$ beim neutralen Element ist aber $X \mapsto XM + MX^\top$ und die Liealgebra ergibt sich mit 2.5.7. Ebenso ergibt sich die Liealgebra von $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \mid A\bar{A}^\top = E\}$ zu $\mathfrak{u}(n) = \{X \in M(n \times n;\mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^\top = 0\}$.

*Beispiel* 2.5.9. Sei $V$ ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht $V$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$, der **Standarddarstellung** von $\mathfrak{gl}(V)$. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist sie das Differential der offensichtlichen Darstellung der Liegruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ durch Automorphismen von $V$.

*Beispiel* 2.5.10. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die triviale Operation $xv = 0\ \forall x \in \mathfrak{g},\ v \in V$ macht jeden Vektorraum $V$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$. Den Grundkörper $k$ versehen mit der trivialen Operation nennt man die **triviale Darstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra. Ist $V$ eine endlichdimensionaler reeller Vektorraum und lassen wir eine Liegruppe derart darauf operieren, daß jedes Gruppenelement als die Identität operiert, so erhalten wir als Differential die Operation von $\mathrm{Lie}\, G$ durch Null auf $V$.

**Definition 2.5.11.** Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen zwei Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt ein **Homomorphismus von Darstellungen** genau dann, wenn gilt $\varphi(xv) = x\varphi(v) \quad \forall v \in V,\ x \in \mathfrak{g}$. Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen $\mathrm{Mod}^{\mathfrak{g}}(V, W)$ oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,

$$\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W)$$

Zwei Darstellungen heißen **isomorph** genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

*Bemerkung* 2.5.12. Jeder Homomorphismus zwischen stetigen endlichdimensionalen Darstellungen einer Liegruppe ist auch ein Homomorphismus zwischen den durch Differenzieren entstehenden Darstellungen der Liealgebra unserer Liegruppe.

**Definition 2.5.13.** Ein Untervektorraum $U$ einer Darstellung $V$ von $\mathfrak{g}$ heißt eine **Unterdarstellung** genau dann wenn gilt $xv \in U \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ v \in U$. Wir sagen in diesem Zusammenhang auch, $U$ sei **stabil** unter $\mathfrak{g}$. Eine von $V$ verschiedene Unterdarstellung $U \subsetneq V$ heißt eine **echte Unterdarstellung** von $V$.

*Bemerkung* 2.5.14. Gegeben eine Darstellung $V$ sind natürlich ganz $V$ und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild einer Unterdarstellung von $V$ eine Unterdarstellung von $W$ und das Urbild einer Unterdarstellung von $W$ eine Unterdarstellung von $V$. Insbesondere ist $\ker \varphi$ eine Unterdarstellung von $V$ und $\operatorname{im} \varphi$ eine Unterdarstellung von $W$.

**Definition 2.5.15.** Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

**Definition 2.5.16.** Für eine Darstellung $V$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V \mid xv = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Die Elemente von $V^{\mathfrak{g}}$ heißen die **$\mathfrak{g}$-invarianten Vektoren** von $V$.

**Satz 2.5.17 (Invarianten von Liegruppen und Liealgebren).** *Sei $G$ eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und sei $V$ eine Darstellung von $G$ in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum. So sind alle unter der Gruppe invarianten Vektoren auch invariant unter ihrer Liealgebra, in Formeln $V^G \subset V^{\mathfrak{g}}$, und für zusammenhängendes $G$ gilt sogar $V^G = V^{\mathfrak{g}}$.*

*Beweis.* Jeder $G$-invariante Vektor ist offensichtlich $\mathfrak{g}$-invariant. Jeder $\mathfrak{g}$-invariante Vektor ist umgekehrt invariant unter $\exp \mathfrak{g}$ wegen der Kommutativität des Diagramms 2.4.1 und damit unter $G$, da ja nach dem Beweis von 2.4.6 jede zusammenhängende Liegruppe bereits vom Bild ihrer Liealgebra unter der Exponentialabbildung erzeugt wird. □

*Bemerkung* 2.5.18. Gegeben zwei stetige endlichdimensionale Darstellungen $V, W$ einer Liegruppe $G$ ist auch die in 1.5.4 erklärte Operation durch Konjugation von $G$ auf $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ stetig, und die abgeleitete Operation der

Liealgebra wird für $x \in \operatorname{Lie} G$ und $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ dadurch gegeben, daß für alle $v \in V$ gilt

$$(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv)$$

Man prüft diese Formel zum Beispiel mit der Formel am Ende von 2.5.6, oder durch Berechnung und Einschränkung des Differentials der Operation von $G \times G$ auf dem Hom-Raum.

**Lemma 2.5.19.** *Sind $V, W$ Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper $k$, so wird der Homomorphismenraum* $\operatorname{Hom}_k(V, W)$ *eine Darstellung durch die Vorschrift $(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ und $f \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$, und mit dieser Operation von $\mathfrak{g}$ auf dem Homomorphismenraum gilt*

$$\operatorname{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W) = \operatorname{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$$

*Beweis.* Die erste Behauptung rechnet man stur nach, bei der Zweiten sind beide Seiten $\{f \in \operatorname{Hom}_k(V, W) \mid f(xv) = xf(v) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V\}$. □

**Satz 2.5.20 (Darstellungen von Liegruppen und Liealgebren).** *Sei $G$ eine* zusammenhängende *Liegruppe mit Liealgebra* $\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}$ *und seien $V, W$ stetige Darstellungen von $G$ in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen. So gilt:*

1. *Ein Teilraum $U \subset V$ ist stabil unter unserer zusammenhängenden Liegruppe $G$ genau dann, wenn er stabil ist unter ihrer Liealgebra.*

2. *Die Homomorphismen zwischen den gegebenen Darstellungen unserer Liegruppe stimmen überein mit den Homomorphismen zwischen den abgeleiteten Darstellungen ihrer Liealgebra, in Formeln*

$$\operatorname{Mod}_{\mathbb{R}}^{G}(V, W) = \operatorname{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{g}}(V, W)$$

*Beweis.* 1. Jeder $G$-stabile Teilraum ist offensichtlich auch $\mathfrak{g}$-stabil. Jeder $\mathfrak{g}$-stabile Teilraum ist aber auch $(\exp \mathfrak{g})$-stabil wegen der Kommutativität des Diagramms in 2.4.1. Damit ist er aber $G$-stabil, denn jede zusammenhängende Liegruppe wird vom Bild ihrer Exponentialabbildung erzeugt nach dem Beweis von 2.4.6.

2. Nach 2.5.17, angewendet auf die Darstellung $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, stimmen die Invarianten der Gruppe auf dem Hom-Raum überein mit den Invarianten der Liealgebra. Erstere sind jedoch offensichtlich gerade die Homomorphismen von Darstellungen der Gruppe und letztere nach 2.5.19 genau die Homomorphismen von Darstellungen der Liealgebra. □

**Korollar 2.5.21.** *Gegeben eine zusammenhängende Liegruppe liefert das Differenzieren auf den Isomorphieklassen eine Einbettung*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale reelle} \\ \textit{Darstellungen unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache Darstellungen} \\ \textit{ihrer Liealgebra} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Einfache Darstellungen bleiben einfach beim Übergang zur Liealgebra nach Teil 1 des vorhergehenden Satzes, und nichtisomorphe bleiben nichtisomorph nach Teil 3. □

**Korollar 2.5.22.** *Für jede zusammenhängende Liegruppe liefert das Differenzieren gefolgt von der kanonischen Erweiterung auf die Komplexifizierung eine Einbettung von Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale} \\ \textit{komplexe Darstellungen} \\ \textit{unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache Darstellungen} \\ \textit{ihrer komplexifizierten} \\ \textit{Liealgebra} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Bleibt dem Leser überlassen. □

## 2.6 Einfache Darstellungen der Drehgruppe

**Satz 2.6.1 (Einfache Darstellungen der Drehgruppe).** *Die einfachen komplexen Darstellungen der Drehgruppe werden klassifiziert durch ihre Dimension. Genauer liefert die Dimension eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \textit{Darstellungen der Drehgruppe } \mathrm{SO}(3) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 3, 5, \dots\}$$

*Bemerkung* 2.6.2. Die einfache Darstellung der Dimension 1 ist die triviale Darstellung, die einfache Darstellung der Dimension 3 die Standarddarstellung. Der Satz gilt im übrigen analog auch für die einfachen reellen Darstellungen der Drehgruppe. Wir beginnen den Beweis mit der Klassifikation der einfachen komplexen Darstellungen der Spingruppe SU(2).

**Satz 2.6.3 (Einfache Darstellungen der Spingruppe).** *Bis auf Isomorphismus gibt es in jeder Dimension genau eine irreduzible komplexe Darstellung der Gruppe* SU(2).

*Beweis.* Natürlich operiert die SU(2) auf der komplexen Ebene $\mathbb{C}^2$. Damit operiert unsere Gruppe auch auf dem Raum aller Abbildungen $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, der so eine komplexe Darstellung wird. In Formeln wird diese Operation gegeben durch

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^2, g \in \mathrm{SU}(2)$$

Der Teilraum $V(m) = \mathbb{C}[X,Y]^m \subset \mathbb{C}[X,Y]$ aller polynomialen Abbildungen vom Grad $m$ ist in diesem Abbildungsraum eine Unterdarstellung der Dimension $(m+1)$ und die Operation von $\mathrm{SU}(2)$ auf dieser Unterdarstellung ist offensichtlich stetig. Um nachzuweisen, daß sie auch irreduzibel ist, berechnen wir die Operation ihrer Liealgebra

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M(2\times 2; \mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0, \bar{A} = -A^\top\}$$

oder noch besser ihrer Komplexifizierung, die von der Einbettung in kanonischer Weise identifiziert wird mit $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Nun ist ja unsere Operation von $\mathrm{SU}(2)$ auf $V(m)$ die Restriktion einer stetigen Operation von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ auf $V(m)$, und die abgeleitete Operation von $A \in \mathfrak{gl}(2;\mathbb{C})$ auf $f \in V(m)$ geschieht durch

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{(\exp tA)f - f}{t}$$

Für $v \in \mathbb{C}^2$ folgt wegen der Linearität des Auswertens an der Stelle $v$ und nach Ignorieren von Termen höherer Ordnung in $t$ notwendig

$$(Af)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\exp(-tA)v) - f(v)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(v - tAv) - f(v)}{t}$$

Das bedeutet jedoch gerade das Anwenden des Vektorfelds $v \mapsto -Av$ auf unsere Funktion $f$, und bezeichnet $a_{ij}$ den Eintrag der Matrix $A$ in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte, so bedeutet es das Anwenden des Differentialoperators $(-a_{11}X - a_{12}Y)\partial_x + (-a_{21}X - a_{22}Y)\partial_y$ auf unser Polynom $f \in \mathbb{C}[X,Y]$. Diese Operation von $\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C})$ ist nun aber bereits komplexlinear. Identifizieren wir also $\mathfrak{su}(2) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$, so operieren die Elemente

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vermittels der Differentialoperatoren $-X\partial_x + Y\partial_y$, $-Y\partial_x$ und $-X\partial_y$. Insbesondere bilden die Vektoren $Y^m, XY^{m-1}, \ldots, X^m$ eine Basis von $V(m)$ aus Eigenvektoren von $h$ zu den Eigenwerten $m, m-2, \ldots, -m$ und $e$ und $f$ induzieren Isomorphismen zwischen Eigenräumen zu benachbarten Eigenwerten, so daß unsere Darstellung für die komplexifizierte Liealgebra in der Tat irreduzibel ist. Um zu zeigen, daß unsere Gruppe keine anderen irreduziblen komplexen Darstellungen besitzt, reicht es nach 2.5.22, dasselbe für ihre komplexifizierte Liealgebra zu prüfen. Das zeigen wir sogar über allgemeineren Grundkörpern als Satz 2.6.4. □

**Satz 2.6.4 (Einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$).** *1. Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.*

2. *Ist $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ mit $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so zerfällt jede einfache Darstellung $L = L(m)$ der Dimension $m+1$ unter $\tilde{h}$ in eindimensionale Eigenräume*

$$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \ldots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

*zu den Eigenwerten $m, m-2, \ldots, 2-m, -m$ und aus $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$ folgt $\tilde{f} : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$ sowie $\tilde{e} : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$.*

*Bemerkung* 2.6.5. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung $\mathbb{C}$, die Standarddarstellung $\mathbb{C}^2$ und die "adjungierte Darstellung", die wir in **??** einführen. Der Satz gilt mit demselben Beweis über jedem Körper der Charakteristik Null, in positiver Charakteristik sind die Verhältnisse jedoch komplizierter.

*Beweis.* Wir müssen (1) zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung konstruieren und (2) zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben (endlichen) Dimension isomorph sind. Wir beginnen mit (2). Die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ hat die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Sei nun $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung. Bezeichne $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$ den Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$. So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2},$$

denn aus $hv = \mu v$ folgt $hev = ehv + [h, e]v = e\mu v + 2ev = (\mu + 2)ev$ und der zweite Fall folgt ähnlich aus $[h, f] = -2f$. Ist $V$ endlichdimensional und $V \neq 0$, so gibt es sicher $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $V_\lambda \neq 0$ aber $V_{\lambda+2} = 0$. Für $v \in V_\lambda$ gilt dann $ev = 0$ und $hv = \lambda v$. Man prüft per Induktion, daß folgt

$$\begin{array}{rcll} hf^i v & = & (\lambda - 2i) f^i v & \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v & = & i(\lambda - i + 1) f^{i-1} v & \text{für alle } i \geq 1. \end{array}$$

Insbesondere ist der von den $f^i v$ mit $i \geq 0$ aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist $V$ zusätzlich einfach und $v \neq 0$, so müssen die $f^i v$ demnach ganz $V$ aufspannen. Gilt $f^i v \neq 0$, so sind $v$, $fv \ldots$, $f^i v$ Eigenvektoren von $h$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir $V$ endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich $d \geq 1$ mit $f^d v = 0$. Wählen wir $d$ kleinstmöglich, so ist $v$, $fv$, $\ldots$, $f^{d-1} v$ eine Basis von

$V$, also $d = \dim V$. Weiter folgt aus $f^d v = 0$ auch $0 = ef^d v = d(\lambda - d + 1) f^{d-1} v$ und mithin $\lambda = d - 1$, da wir ja $d \neq 0$ und $f^{d-1} v \neq 0$ vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ derselben endlichen Dimension $d$ isomorph sind, da nämlich die Matrizen von $\rho(e)$, $\rho(f)$ und $\rho(h)$ in der Basis $v$, $fv$, $\ldots$, $f^{d-1}v$ nur von $d$ abhängen. Um nun (1) die Existenz einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, k)$ in jeder Dimension zu zeigen, brauchen wir nur zu prüfen, daß die im Eindeutigkeitsbeweis hergeleiteten Formeln in der Tat eine Darstellung liefern, d.h. daß für jedes $d$ der Vektorraum mit der Basis $v_0, v_1, \ldots, v_{d-1}$ und der Operation gegeben durch $fv_i = v_{i+1}$ bzw. $fv_{d-1} = 0$, $ev_i = i(d-i)v_{i-1}$ bzw. $ev_0 = 0$ und $hv_i = (d - 1 - 2i)v_i$ eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist. Diese Rechnung scheint mir jedoch unerfreulich und wenig nahrhaft. Etwas eleganter prüft man mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen leicht, daß die Abbildung $\rho : \mathfrak{sl}(2, k) \to \mathfrak{gl}(k[X, Y])$ gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \rho(e) & = & X\partial_y \\ \rho(f) & = & Y\partial_x \\ \rho(h) & = & X\partial_x - Y\partial_y \end{array}$$

eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2, k)$ ist. Diese Darstellung ist nicht einfach, die Polynome von festem Totalgrad $m$ bilden vielmehr eine Unterdarstellung $L(m) = k[X, Y]^m$ der Dimension $d = m + 1$ mit Basis $w_i = Y^i X^{m-i}$ für $i = 0, \ldots, m$. In dieser Basis wird die Operation von $\mathfrak{sl}(2, k)$ auf $L(m)$ beschrieben durch die Formeln

$$\begin{array}{rcl} ew_i & = & iw_{i-1} \\ fw_i & = & (m - i)w_{i+1} \\ hw_i & = & (m - 2i)w_i \end{array}$$

wo wir $w_{-1} = w_{m+1} = 0$ verstehen. Die Darstellungen $L(m)$ sind einfach für $\operatorname{char} k = 0$, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung $0 \neq U \subset L(m)$ enthält notwendig einen Eigenvektor zu $h$, also eines der $w_i$, und daraus folgt sofort $U = L(m)$. Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Die expliziten Formeln gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von $h$. Setzen wir genauer $w_i = u_{m-2i}$, so erhalten wir für $L(m)$ eine Basis bestehend aus $u_m, u_{m-2}, \ldots, u_{-m}$ und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

$$\begin{array}{rcl} eu_j & = & ((m - j)/2)u_{j+2} \\ fu_j & = & ((m + j)/2)u_{j-2} \\ hu_j & = & ju_j \end{array}$$

Der Rest des Satzes folgt mit 2.6.7. □

*Übung* 2.6.6. Ist $V$ eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ und sind weder Null noch Eins Eigenwerte von $h = \operatorname{diag}(1, -1)$, in Formeln $V_0 = V_1 = 0$, so folgt bereits $V = 0$.

*Übung* 2.6.7. Ist weiter $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so zeige man $[\tilde{e}, \tilde{f}] = c\tilde{h}$ für einen von Null verschiedenen Skalar $c$.

*Beweis von 2.6.1.* Wir erinnern uns an die stetige Surjektion $\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ mit Kern $\{+1, -1\}$ aus 2.2.4. Das Zurückholen mit dieser Surjektion liefert nach **??** und **??** eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Drehgruppe und den Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Spingruppe, auf denen das Negative der Einheitsmatrix trivial operiert. Das sind aber offensichtlich genau die Darstellungen $V(m) = \mathbb{C}[X, Y]^m$ für gerades $m$ alias die einfachen Darstellungen ungerader Dimension. □

# 3 Weiteres zu Liegruppen

## 3.1 Muß woanders hin

*Bemerkung* 3.1.1. Hier sind die Darstellungen ungerader Dimension von reellem Typ und die Darstellungen gerader Dimension von quaternionalem Typ. In der Tat gibt es in jeder Dimension bis auf Isomorphismus nur eine irreduzible Darstellung, also ist jede einfache komplexe Darstellung isomorph zu ihrer kontragredienten Darstellung und es gibt keine einfachen Darstellungen von komplexem Typ. Den Darstellungen ungerader Dimension bleibt also gar nichts anderes übrig als reell zu sein. Die einfache zweidimensionale komplexe Darstellung andererseits ist von quaterionalem Typ nach **??**. Folglich kommt auch ihr Tensorprodukt $V(2) \otimes_{\mathbb{C}} V(2n+1) \cong V(2) \otimes_{\mathbb{R}} V(2n+1)_{\mathbb{R}}$ mit jeder einfachen Darstellung ungerader Dimension her von einer Darstellung über $\mathbb{H}$ und folglich besitzt auch dieses Tensorprodukt einen schieflinearen äquivarianten Automorphismus $J$ mit $J^2 = -\operatorname{id}$. Dasselbe gilt dann auch für seine isotypischen Komponenten, und mit **??** erkennen wir so, daß alle einfachen Darstellung gerader Dimension von quaterionalem Typ sind.

**Lemma 3.1.2.** *Ist $G$ eine kompakte Liegruppe, so ist jeder Liealgebrenhomomorphismus $\mathfrak{su}(2) \to \operatorname{Lie} G$ das Differential eines Homomorphismus von Liegruppen $\mathrm{SU}(2) \to G$.*

*Bemerkung* 3.1.3. Das ist ein Spezialfall eines allgemeinen Resultats, nach dem für je zwei Liegruppen $H, G$ mit $H$ einfach zusammenhängend das Differential eine Bijektion $\mathrm{Grpto}(H, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Lie} H, \operatorname{Lie} G)$ liefert. Wir geben hier für den oben angegebenen Spezialfall einen eigenständigen Beweis.

*Beweis.* Da jede kompakte Liegruppe nach **??** eine treue unitäre endlichdimensionale Darstellung besitzt, reicht es aus zu zeigen, daß jeder Liealgebrenhomomorphismus $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{u}(n)$ das Differential eines Homomorphismus von Liegruppen $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(n)$ ist. Wir wissen aber aus **??**, daß sich in der Tat jede endlichdimensionale unitäre Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$ zu einer Darstellung der Liegruppe $\mathrm{SU}(2)$ integrieren läßt. □

*Bemerkung* 3.1.4. Für die Killingform auf $so(3; \mathbb{R})$ haben wir $\kappa(E_i, E_j) = -2\delta_{ij}$. Folglich ist $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$ ein skalares Vielfaches des Casimir-Operators. Auf den $C^\infty$-Funktionen auf der Kugelschale wirkt das wie ein skalares Vielfaches des Laplace-Operators, der den Funktionswert an einer Stelle vergleicht mit dem Durchschnitt der Funktionswerte in einer kleinen Umgebung. Man überlege sich das für einen Pol und folgert es aus der Drehinvarianz unseres Operators für jede Stelle. Die isotypischen Komponenten von $C^\infty(S^2)$ sind also die Eigenräume des Laplace-Operators. Diese isotypischen Komponenten bestehen aus polynomialen Funktionen, da diese bereits dicht liegen nach Stone-Weierstraß etc. Um die Nullgewichtsräume bezüglich der infinitesimalen Rotation um die $z$-Achse in den isotypischen Komponenten zu erhalten, müssen wir also auf die Basis $z^0, z^1, z^2, \dots$ bezüglich der Metrik

$$\begin{array}{rcl} \langle f, g\rangle & = & \int_{S^2} \overline{f(z)} g(z) dS \\ & = & \int_-^1 1\overline{f(z)} g(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \end{array}$$

die Gram-Schmid'sche Orthonormalisierung anwenden.

*Bemerkung* 3.1.5. Die Notation $e, h, f$ für die Standardbasis der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ wie wir sie oben eingeführt hatten ist ein weit verbreiteter Standard. Manchmal heißt $e$ ein **Erzeugungsoperator** und $f$ dual ein **Vernichtungsoperator**. Eine andere gebräuchliche Notation anstelle von $e, h, f$ ist $x, h, y$.

*Übung* 3.1.6. *Später*. Jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist **selbstdual**, als da heißt isomorph zu ihrer kontragredienten Darstellung.

*Beispiel* 3.1.7. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über dem Körper $k$. Für eine Linearform $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ auf $\mathfrak{g}$ ist die Abbildung $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(k)$, $X \mapsto \lambda(X)$ eine Darstellung genau dann, wenn $\lambda$ auf dem von allen Kommutatoren $[x, y]$ erzeugten Untervektoren $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ verschwindet. Wir bezeichnen diese Darstellung dann mit $k_\lambda$ und erhalten so eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^* & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{eindimensionale Darstellungen von } \mathfrak{g}, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \lambda & \mapsto & k_\lambda \end{array}$$

Diejenigen Linearformen auf $\mathfrak{g}$, die auf $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ verschwinden, nennt man auch die **Charaktere von $\mathfrak{g}$**. Diese Bezeichnung wird jedoch auch noch für viele andere verwandte aber verschiedene Konzepte benutzt.

**Definition 3.1.8.** Ist $U \subset V$ eine Unterdarstellung, so gibt es genau eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $V/U$ derart, daß $\mathrm{can} : V \to V/U$ ein Homomorphismus von Darstellungen wird. Man nennt $V/U$ die **Quotientendarstellung**.

*Bemerkung* 3.1.9. Nehmen wir hier speziell $W = k$ die triviale Darstellung, so heißt $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ die **kontragrediente Darstellung** zu $V$. Explizit wird die Operation von $\mathfrak{g}$ auf $V^*$ gegeben durch die Formel

$$(xf)(v) = -f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f \in V^*,\ v \in V$$

Offensichtlich ist dann die kanonische Abbildung $V \to (V^*)^*$ ein Homomorphismus von Darstellungen. Nehmen wir umgekehrt $V = k$ die triviale Darstellung, so ist auch die offensichtliche Abbildung $W \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_k(k, W)$ ein Isomorphismus von Darstellungen.

*Übung* 3.1.10. Ist $\lambda : \mathfrak{g} \to k$ eine eindimensionale Darstellung einer Liealgebra $\mathfrak{g}$, so wird die kontragrediente Darstellung gegeben durch $-\lambda$, in Formeln $(k_\lambda)^* \cong k_{-\lambda}$.

## 3.2 Die adjungierte Darstellung

*Beispiel* 3.2.1. Die für jede eingebettete Liegruppe in **??** erklärte Abbildung $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}\, G)$ ist eine Darstellung von $G$, genannt die **adjungierte Darstellung**.

**Definition 3.2.2.** Für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ betrachtet man die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} & \to & \mathrm{End}\, \mathfrak{g} \\ x & \mapsto & \mathrm{ad}\, x = [x, \ ] \end{array}$$

Ausgeschrieben gilt also $(\mathrm{ad}\, x)(y) = [x, y]$ für alle $y \in \mathfrak{g}$. Die Jacobi-Identität zeigt, daß wir so einen Homomorphismus von Liealgebren $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ erhalten. Man nennt $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ die **adjungierte Darstellung** von $\mathfrak{g}$.

*Bemerkung* 3.2.3. Ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra einer Liegruppe $G$, so ensteht die adjungierte Darstellung der Liealgebra durch Differenzieren aus der adjungierten Darstellung der Liegruppe.

## 3.3 Invariante Integration

**Definition 3.3.1.** Ein **Haar-Maß** oder genauer ein **linksinvariantes Haar-Maß** auf einer eingebetteten Liegruppe $G$ ist eine positive Dichte $\mu$ auf $G$ im Sinne von **??** mit $\mu(xA) = \mu(A)$ für alle $x \in G$ und alle topologisch meßbaren Mengen $A \subset G$.

**Satz 3.3.2 (Existenz und Eindeutigkeit des Haar'schen Maßes).** *Auf jeder Matrix-Liegruppe gibt es ein Haar'sches Maß, und je zwei Haar'sche Maße unterscheiden sich um einen konstanten Faktor $c > 0$.*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist klar, da sich je zwei positive Dichten offensichtlich nur um das Produkt mit einer stetigen positiven Funktion unterscheiden, die im Fall von zwei Haar-Maßen eben auch linksinvariant und damit konstant sein muß. Um die Existenz zu zeigen, erinnern wir an unsere Einbettung $G \subseteq_{\mathcal{A}} \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$. Sei $k$ die Dimension von $G$. Sicher gibt es eine alternierende $k$-Form $\omega_e \in \mathrm{Alt}^k M(n \times n; \mathbb{R})$, deren Restriktion auf $T_e G$ nicht verschwindet. Wir erklären eine $k$-Form $\omega$ auf $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ durch die Vorschrift

$$\omega_g = (g \cdot)^\top \omega$$

in der Notation aus **??**. So erhalten wir eine stetige $k$-Form $\omega$ auf $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $(g\cdot)^*\omega = \omega \; \forall g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Die zugehörige nichtnegative Dichte $|\omega|$ auf der eingebetteten $k$-Mannigfaltigkeit $G$ ist dann positiv und linksinvariant. $\square$

*Beispiel* 3.3.3. Wir erhalten ein Haar'sches Maß auf $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, indem wir das gewöhnliche Lebesgue-Maß von $M(n \times n;\mathbb{R})$ einschränken und mit der Funktion $A \mapsto |\det A|^{-n}$ multiplizieren.

*Bemerkung* 3.3.4. Auf einer kompakten Lie-Gruppe $G$ ist jedes Haar-Maß auch rechtsinvariant, in Formeln $\mu(Ag) = \mu(A)$ für alle $g \in G$. In der Tat ist für jedes feste $g \in G$ mit $\mu$ auch die Vorschrift $A \mapsto \mu(Ag)$ ein linksinvariantes Haar-Maß, also gibt es eine Konstante $c_g$ mit $\mu(A) = c_g\mu(Ag)$ für alle $A$. Für kompaktes $G$ gilt aber $0 < \mu(G) < \infty$. Setzen wir also in der vorhergehenden Gleichung $A = G$, so folgt $c_g = 1$ wie gewünscht.

*Bemerkung* 3.3.5 *(***Integration vektorwertiger Funktionen***).* Sei $(X,\mu)$ ein Maßraum. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum $V$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(X;V)$ den Raum aller meßbaren Abbildungen $f : X \to V$ derart, daß für eine und damit jede Norm $|\;|$ auf $V$ die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ integrierbar ist. Wie man sich mithilfe einer Wahl von Koordinaten $V \cong \mathbb{R}^n$ leicht überzeugt, gibt es genau eine Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \int : & \mathcal{L}^1(X;V) & \to & V \\ & f & \mapsto & \int f = \int_X f(x)\mu(x) \end{array}$$

derart, daß für jede Linearform $\varphi \in V^*$ gilt $\langle\varphi|\int f\rangle = \int\langle\varphi|f\rangle$, und ist $L : V \to W$ eine lineare Abbildung in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so gilt $\int(L \circ f) = L(\int f)$. Nimmt $f$ nur endlich viele Werte an, so haben wir

$$\int_X f(x)\mu(x) = \sum_{v \neq 0} \mu(f^{-1}(v))\; v$$

Ganz allgemein gilt darüber hinaus die Abschätzung $|\int f| \leq \int |f|$. Diese Formel ist klar für Stufenfunktionen. Im allgemeinen sieht man sie vielleicht am leichtesten ein, indem man wieder mit $V = \mathbb{R}^n$ arbeitet, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ in jeder Koordinate als $L^1$-Grenzfunktion einer Folge von Stufenfunktionen schreibt, und dann zum Grenzwert übergeht.

**Lemma 3.3.6.** *Gegeben eine kompakte Matrix-Liegruppe liegen die Matrixkoeffizienten der reellen bzw. komplexen stetigen endlichdimensionalen Darstellungen dicht im Raum aller stetigen reell- bzw. komplexwertigen Funktionen auf unserer Gruppe, versehen mit der* sup*-Norm.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß **??**, da ja die darstellenden Funktionen eine (unter komplexer Konjugation stabile) Unteralgebra von $\mathcal{C}(G)$ bilden, die die Punkte trennen muß, da schon die Matrixkoeffizienten der definierenden Darstellung unserer Matrix-Liegruppe die Punkte trennen. □

**Satz 3.3.7 (Orthonormalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten).** *Sei $G$ eine kompakte Matrix-Liegruppe. Bilden die $\rho^\lambda : G \to \mathrm{GL}(d^\lambda; \mathbb{C})$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen stetiger einfacher unitärer Darstellungen von $G$, so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten $\sqrt{d^\lambda}\ \rho^\lambda_{ij}$ eine Hilbert-Basis von $L^2(G)$.*

**Lemma 3.3.8.** *Ist $G \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ eine kompakte Untergruppe, so sind die Matrixkoeffizienten von $G$ genau die Restriktionen von Polynomen in den Matrixeinträgen.*

*Beweis.* Das gilt sowohl für Matrixkoeffizienten reeller Darstellungen und Polynome mit reellen Koeffizienten wie für Matrixkoeffizienten komplexer Darstellungen und Polynome mit komplexen Koeffizienten. Beide Fälle sind offensichtlich äquivalent und wir konzentrieren uns der Einfachkeit halber auf den komplexen Fall. Die fraglichen Restriktionen liegen dicht in $C(G)$ nach Stone-Weierstraß **??** und sie bilden offensichtlich einen Teilraum im Raum aller komplexen Matrixkoeffizienten von $G$, der stabil ist unter Rechts- und Linkstranslation. Dieser Teilraum ist also eine Summe von Räumen von Matrixkoeffizienten einfacher Darstellungen, und würde hier eine einfache Darstellung fehlen, so könnte unser Teilraum wegen der Orthogonalitätsrelationen 3.3.7 nicht dicht sein. □

*Beispiel* 3.3.9. Für $G = S^1$ erhalten wir als Spezialfall die Sätze **??** aus der Theorie der Fouriereihen.

**Satz 3.3.10 (Orthonormalitätsrelationen für Charaktere).** *Die irreduziblen Charaktere einer kompakten Matrix-Liegruppe liegen in Bezug auf die sup-Norm dicht im Raum der stetigen Klassenfunktionen und bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Klassenfunktionen.*

*Beweis.* Die Abbildung $P : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$ mit $(Pf)(x) = \int f(g^{-1}xg)dg$ ist eine Projektion auf den Raum der Klassenfunktionen und ist stetig für die sup-Norm. Folglich liegen die Projektionen der Matrixkoeffizienten dicht im Raum der Klassenfunktionen. Die Projektion eines Matrixkoeffizienten einer irreduziblen Darstellung ist jedoch ein Vielfaches ihres Charakters. *Noch vervollständigen* □

## 3.4 Matrixkoeffizienten

*Bemerkung* 3.4.1. Sei $G$ eine Gruppe und $k$ ein Körper. Jede Abbildung $f : G \to k$ ist der Matrixkoeffizient $C_{\varphi,f}$ der rechtsregulären Darstellung von $G$ auf $E = \mathrm{Ens}(G, k)$ für $\varphi \in E^*$ das Auswerten am neutralen Element. In der Tat rechnen wir

$$C_{\varphi,f}(g) = \varphi(\grave{g}f) = (\grave{g}f)(e) = f(g).$$

Ebenso haben wir auch für die linksreguläre Darstellung $C_{\varphi,f} = \hat{f}$.

**Lemma 3.4.2.** *Für eine stetige komplexwertige Funktion auf einer topologischen Gruppe sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihrem Linkstranslaten einen endlichdimensionalen komplexen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf.*

2. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihrem Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen komplexen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf.*

3. *Unsere Funktion ist ein Matrixkoeffizient einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung unserer Gruppe.*

*Beweis.* Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung $V$ einer topologischen Gruppe $G$ liefern die Matrixkoeffizienten eine $(G \times G)$-äquivariante Abbildung $V^* \otimes V \to \mathcal{C}(G)$. Damit erhalten wir sofort $3 \Rightarrow 1\&2$. Ist umgekehrt $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und spannt mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathcal{C}(G)$ auf, so finden wir für diesen Teilraum $V$ eine Basis von gewissen $\grave{x}_1 f, \ldots, \grave{x}_\alpha f$, und da eine Funktion, die an jeder Stelle verschwindet, schon identisch null ist, finden wir Stellen $y_1, \ldots, y_\alpha \in G$ derart, daß die Auswertungen dort eine Basis des Dualraums $V^*$ liefern. Da die zugehörigen Matrixkoeffizienten $g \mapsto (\grave{g}\grave{x}_i f)(y_j) = f(y_j g x_i)$ alle stetig sind, muß $V$ eine stetige Darstellung von $G$ sein. Und nun ist $f$ eben der Matrixkoeffizient dieser stetigen endlichdimensionalen Darstellung zum Vektor $f \in V$ und dem Auswerten am neutralen Element $\varphi \in V^*$. Das zeigt $2 \Rightarrow 3$. Spannt schließlich $\mathfrak{h}$ mit seinen Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Raum auf, so auch $\hat{f}$ mit seinen Rechtstranslaten, also ist $\hat{f}$ Matrixkoeffizient einer endlichdimensionalen Darstellung und dann ist $f$ ein Matrixkoeffizient der kontragredienten Darstellung. $\square$

*Bemerkung* 3.4.3. Sei $G$ eine topologische Gruppe. Die Matrixkoeffizienten endlichdimensionaler Darstellungen bilden in $\mathcal{C}(G)$ eine Unteralgebra, die stabil ist unter der komplexen Konjugation. Ist in der Tat $f = C_{\varphi,v}$ für $v \in V, \varphi \in V^*$, so haben wir $\overline{f} = C_{\overline{\varphi},v}$ für $v \in \overline{V}$, $\overline{\varphi} \in \overline{V}^*$. Spannen weiter $f_1, \ldots, f_d$ und $h_1, \ldots, h_s$ jeweils einen unter Linkstranslation invarianten Teilraum von $\mathcal{C}(G)$ auf, so gilt offensichtlich dasselbe für die Produkte $f_i h_j$.

**Definition 3.4.4.** Gegeben eine topologische Gruppe $G$ bezeichne $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G) \subset \mathcal{C}(G)$ den Teilring der darstellenden Funktionen und $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(G) \subset \mathcal{C}(G; \mathbb{R})$ darin den Teilring der reellwertigen darstellenden Funktionen.

**Lemma 3.4.5.** *Gegeben topologische Gruppen $G, H$ definiert der offensichtliche Homomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(H) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G \times H)$$

*Beweis.* Die Injektivität gilt für beliebige Funktionen. Das einzige Problem ist die Surjektivität. Aber ist eine Funktion auf $G \times H$ Matrixkoeffizient einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung

$$\rho : G \times H \to \mathrm{GL}(n),$$

so haben wir ja die Matrizengleichung $\rho(g, h) = \rho(g, 1)\rho(1, h)$ und erhalten sofort die Surjektivität im Lemma. □

**Lemma 3.4.6.** *Die Multiplikation auf einer topologischen Gruppe definiert einen Ringhomomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G \times G)$$

*Beweis.* Ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(n)$ eine stetige Darstellung, so ist die Matrix $\rho(xy)$ das Produkt der Matrizen $\rho(x)$ und $\rho(y)$ und ihre Koeffizienten liegen folglich im Bild von $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$. □

*Bemerkung* 3.4.7. Für jede topologische Gruppe $G$ ist $\mathcal{R}(G)$ ein Gruppenobjekt in der oppornierten Kategorie zur Kategorie der $\mathbb{R}$-??ringe bzw. $\mathbb{C}$-??ringe.

**Definition 3.4.8 (Tensorprodukt von Darstellungen).** Gegeben zwei Darstellungen $V, W$ einer Gruppe $G$ über einem Körper $k$ macht ihr Tensorprodukt $V \otimes_k W$ zu einer Darstellung vermittels der Regel

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

*Bemerkung* 3.4.9. Natürlich ist $V \otimes_k W$ sogar in natürlicher Weise eine Darstellung von $G \times G$. Die Darstellung in der Definition entsteht daraus durch Einschränken vermittels der diagonalen Einbettung $G \hookrightarrow G \times G$.

*Beispiel* 3.4.10. Operiert eine Gruppe auf einem Vektorraum $V$, so operiert sie in natürlicher Weise auch auf dem Vektorraum $\mathrm{Bil}(V)$ aller Bilinarformen auf $V$. Der natürliche Isomorphismus

$$\mathrm{Bil}(V) \xrightarrow{\sim} (V \otimes V)^*$$

ist dann ein Isomorphismus von Darstellungen.

**Lemma 3.4.11.** *Sind $V, W$ endlichdimensionale stetige Darstellungen einer Liegruppe $G$, so wird die Operation der Liealgebra auf $\mathrm{Hom}(V, W)$ bzw. $V \otimes W$ gegeben durch die Formel*

$$\begin{array}{rcl} (Xf)(v) & = & X(f(v)) - f(Xv) \\ X(v \otimes w) & = & (Xv) \otimes w + v \otimes (Xw) \end{array}$$

*Bemerkung* 3.4.12. Speziell wird die Operation der Liealgebra auf der kontragradienten Darstellung $V^*$ gegeben durch $(Xf)(v) = -f(Xv)$.

*Beweis.* Wir zeigen nur die zweite Formel. Es gilt, das Differential der Verknüpfung

$$G \to \mathrm{End}\, V \times \mathrm{End}\, W \to \mathrm{End}(V \otimes W)$$

im neutralen Element zu berechnen. Die zweite Abbildung ist bilinear, ihr Differential wird folglich durch **??** gegeben. Damit ergibt sich als Differential

$$X \mapsto (d\rho_V(X), d\rho_W(X)) \mapsto d\rho_V(X) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes d\rho_W(X)$$

□

## 3.5 Konvolution

**Definition 3.5.1.** Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Ein **komplexes Maß** auf $X$ ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$$

die sich schreiben läßt als eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen positiven Maßen $\mathcal{M} \to [0, \infty)$. Wir verwenden für komplexe, reelle, endliche positive bzw. beliebige positive Maße die Bezeichnungen

$$M(X) \supset M(X; \mathbb{R}) \supset M(X; [0, \infty)) \subset M(X; [0, \infty])$$

*Bemerkung* 3.5.2. Jede Abbildung von $M(X; [0, \infty))$ in einen reellen bzw. komplexen Vektorraum, die verträglich ist mit der Addition von Maßen und der Multiplikation mit nichtnegativen reellen Skalaren, läßt sich auf genau eine Weise fortsetzen zu einer reell- bzw. komplexlinearen Abbildung auf $M(X; \mathbb{R})$ bzw. $M(X)$.

*Bemerkung* 3.5.3. Bezeichnet $X \times Y$ das Produkt zweier Meßräume, versehen mit der Produkt-$\sigma$-Algebra aus **??**, so liefert das Bilden des Produktmaßes eine Abbildung

$$M(X) \otimes_{\mathbb{C}} M(Y) \to M(X \times Y)$$

**Definition 3.5.4.** Gegeben eine meßbare Abbildung $f : X \to Y$ von Meßräumen und ein Maß $\mu$ auf $X$ erklärt man das **Bildmaß** $f_*\mu$ auf $Y$ dadurch, daß man für jede meßbare Menge $A \subset Y$ setzt

$$(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}A)$$

*Bemerkung* 3.5.5. Diese Definition machen wir für alle zuvor betrachteten Arten von Maßen. Offensichtlich gilt $\mathrm{id}_* \mu = \mu$ und für verknüpfbare Abbildungen haben wir $(f \circ g)_* = g_* \circ f_*$. Offensichtlich ist diese Konstruktion auch verträglich mit dem Bilden von Produktmaßen, in Formeln gilt für beliebige meßbare Abbildungen $f, g$ also $(f \times g)_*(\mu \otimes \nu) = (f_*\mu) \otimes (g_*\nu)$.

**Definition 3.5.6.** Unter einem Maß auf einem topologischen Raum verstehen wir, wenn nichts anderes explizit gesagt wird, stets ein Maß auf der $\sigma$-Algebra der topologisch meßbaren Teilmengen. Wollen wir das besonders betonen, so sprechen wir von einem **topologischen Maß**. Gibt es in unserem topologischen Raum eine kompakte Teilmenge $K$ derart, daß unser Maß verschwindet auf allen zu $K$ disjunkten topologisch meßbaren Mengen, so sagen wir, unser Maß habe **kompakten Träger** oder genauer **Träger in** $K$. Die Maße mit kompaktem Träger auf einem topologischen Raum $X$ notieren wir je nach ihrem Wertebereich mit

$$M_c(X) \supset M_c(X; \mathbb{R}) \supset M_c(X; [0, \infty)) \subset M_c(X; [0, \infty])$$

*Bemerkung* 3.5.7. Jedes komplexe Maß mit kompaktem Träger läßt sich sogar darstellen als eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen positiven Maßen mit kompaktem Träger. Um das zu sehen, stellen wir es dar als eine endliche Linearkombination von endlichen positiven Maßen und schränken dann alle diese Maße ein auf ein geeignetes Kompaktum. Mit dieser Erkenntnis sieht man leicht, daß 3.5.2 analog auch für Räume von topologischen Maßen mit kompaktem Träger gilt.

*Bemerkung* 3.5.8. Bei der Diskussion von Maßen auf Produkten topologischer Räume steht man im allgemeinen vor dem Problem, daß nicht alle offenen Mengen des Produkts zur Produkt-$\sigma$-Algebra gehören müssen. Ein topologischer Raum heißt **separabel** genau dann, wenn er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Für separable Räume gehören offensichtlich alle offenen Mengen des Produkts zur Produkt-$\sigma$-Algebra. Sind $X$ und $Y$ separable topologische Räume, so liefert das Bilden des Produktmaßes mithilfe von 3.5.2 bzw. mithilfe der vorhergehenden Bemerkung mithin Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} M(X) \otimes_{\mathbb{C}} M(Y) & \to & M(X \times Y) \\ M_c(X) \otimes_{\mathbb{C}} M_c(Y) & \to & M_c(X \times Y) \end{array}$$

*Bemerkung* 3.5.9. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ hat das Bild eines Maßes mit kompaktem Träger auch selbst kompakten Träger und wir erhalten so eine komplexlineare Abbildung

$$f_* : M_c(X) \to M_c(Y)$$

*Bemerkung* 3.5.10. Gegeben eine separable topologische Gruppe $G$ erklären wir die **Konvolution von Maßen**

$$\begin{array}{ccc} M(G) \times M(G) & \to & M(G) \\ (\mu \ , \ \nu) & \mapsto & \mu\nu \end{array}$$

durch die Vorschrift $\mu\nu = m_*(\mu \otimes \nu)$ für $\mu \otimes \nu$ das Produktmaß auf $G \times G$ und $m : G \times G \to G$ die Multiplikation. Auf diese Weise wird $M(G)$ ein Ring mit Teilringen

$$\mathbb{C}G \subset M_c(G) \subset M(G)$$

wobei die erste Einbettung jedem $g \in G$ das Dirac-Maß bei $g$ zuordnet.

*Bemerkung* 3.5.11. Arbeitet man mit lokal kompakten Gruppen, so kann man die Forderung der Separabilität umgehen und die Theorie für beliebige lokal kompakte Gruppen entwickeln auf der Basis von sogenannten "Radon-Maßen", d.h. geeigneten Linearformen auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Von unserem Standpunkt der topologischen Maße aus ist diese Allgemeinheit jedoch schlecht zugänglich und für unsere Ziele ist sie auch nicht wichtig.

*Bemerkung* 3.5.12. Ist $V$ eine endlichdimensionale komplexe stetige Darstellung einer Liegruppe $G$, so läßt sich die Operation des Gruppenrings $\mathbb{C}G$ auf $V$ erweitern zu einer Operation des Rings $M_c(G)$ aller topologischen Maße mit kompaktem Träger durch die Vorschrift

$$\mu v = \int \mu\langle g\rangle \, gv$$

*Bemerkung* 3.5.13. Ist $G$ eine Liegruppe und $\mu$ ein linksinvariantes oder ein rechtsinvariantes Haarmaß, so liefert die Multiplikation mit $\mu$ eine Einbettung

$$C_c(G) \hookrightarrow M_c(G)$$

deren Bild der Teilring der komplexwertigen stetigen Dichten mit kompaktem Träger auf $G$ ist. Speziell erhalten wir für jede kompakte Liegruppe $G$ durch das normierte Haarmaß $\mu$ eine kanonische Einbettung

$$C(G) \hookrightarrow M(G)$$

*Bemerkung* 3.5.14. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & L^1(G) & & & & \\
 & & \cup & \searrow & & & \\
\bigoplus\limits_{L\in\operatorname{irr} G}(L^*\otimes_{\mathbb{C}} L) & & L^2(G) & & M(G) & \to & \prod\limits_{M\in\operatorname{irr}G}\operatorname{End}_{\mathbb{C}} M \\
 & \searrow & \cup & & \cup & & \\
 & & C(G) & & \mathbb{C}G & &
\end{array}$$

Die Morphismen zwischen den Spalten sind der Reihe nach die Matrixkoeffizientenabbildung, die Multiplikation mit dem normalisierten Haar'schen Maß und die Operation von einem Maß auf einer Darstellung. Im Fall einer endlichen Gruppe sind alle vertikalen Inklusionen Gleichheiten und die Multiplikation mit dem Haar'schen Maß bedeutet schlicht die Multiplikation mit $|G|^{-1}$ auf dem Gruppenring $C(G) = \mathbb{C}G$. Abgesehen davon zeigen wir nun aber ganz genauso wie in **??**, daß die Verknüpfungen in der Horizontalen $L^* \otimes_{\mathbb{C}} L \to \operatorname{End} M$ Null sind falls $M \not\cong L^*$ und das $(\dim L)^{-1}$-fache des kanonischen Isomorphismus falls $M \cong L^*$. Da $\mathcal{C}(G) \subset L^2(G) \subset L^1(G)$ stetige Einbettungen von normierten Vektorräumen sind und da die Operation stetige Abbildungen $L^1(G) \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} M$ liefert, muß nach den Orthonormalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten also die orthogonale Projektion auf den Teilraum $L^* \otimes_{\mathbb{C}} L \subset L^2(G)$ gerade das $(\dim L)$-fache der Komposition $L^2(G) \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L^* \xrightarrow{\sim} L^* \otimes_{\mathbb{C}} L$ sein.

*Bemerkung* 3.5.15. Die Abbildung $P : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$ mit

$$(Pf)(x) = \int f(g^{-1}xg)\,\mathrm{d}g$$

ist eine Projektion auf den Raum der Klassenfunktionen und ist stetig für die sup-Norm. Folglich liegen die Projektionen der Matrixkoeffizienten dicht im Raum der Klassenfunktionen. Die Projektion eines Matrixkoeffizienten einer irreduziblen Darstellung ist jedoch ein Vielfaches ihres Charakters.

## 3.6 Liegruppen

*Übung* 3.6.1. Man zeige, daß alle Elemente einer kompakten Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ diagonalisierbare Matrizen sind, deren sämtliche Eigenwerte Norm 1 haben.

*Beispiel* 3.6.2. $\mathbb{R}^n$ ist eine Lie-Gruppe mit der Addition als Verknüpfung. Dasselbe gilt für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum.

*Beispiel* 3.6.3. Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ tragen stets in natürlicher Weise die Struktur einer $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit. Mit dieser Struktur ist $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ eine Lie-Gruppe. Dasselbe gilt für $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{(2n)^2}$.

## 3.7 Märchen: Lie-Gruppen und Liealgebren

**Satz 3.7.1 (Ein-Parameter-Untergruppen).** *Sei $G$ eine Lie-Gruppe. Bezeichne $T_eG$ den Tangentialraum von $G$ im neutralen Element $e \in G$. So erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{C}^\infty\text{-}\mathit{Gruppenhomomorphismen} \\ \varphi : \mathbb{R} \to G \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & T_eG \\ \varphi & \mapsto & \dot{\varphi}(0) \end{array}$$

*indem wir jedem $\mathcal{C}^\infty$-Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to G$ seine Geschwindigkeit $\dot{\varphi}(0)$ zum Zeitpunkt Null zuordnen.*

*Bemerkung* 3.7.2. Ein $\mathcal{C}^\infty$-Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to G$ heißt auch eine **Ein-Parameter-Untergruppe** von $G$, deshalb der Name des Satzes.

*Beispiel* 3.7.3. **??** bestimmt insbesondere die Ein-Parameter-Untergruppen der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums.

*Beispiel* 3.7.4. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \exp(tA) = 1 + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots \end{array}$$

ist die Ein-Parameter-Untergruppe mit Geschwindigkeitsvektor $A$ zum Zeitpunkt $t = 0$, für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{R}) = T_e \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Analoges gilt für $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$.

*Beispiel* 3.7.5. Der Tangentialraum an $S^1$ am neutralen Element 1 ist die imaginäre Achse, $T_1S^1 = \mathbb{R}\,\mathrm{i}$. Die Ein-Parameter-Untergruppen der $S^1$ sind die Abbildungen $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(a\,\mathrm{i}\,t)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Ganz genauso geht es mit der Gruppe $S^3$. Wir haben als Ein-Parameter-Untergruppen die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & S^3 \\ t & \mapsto & \exp(tq) \end{array}$$

für $q$ rein imaginär, also $\overline{q} = -q$. In der Tat folgt aus $\overline{q} = -q$ schon

$$\begin{array}{rcl} \|\exp(tq)\|^2 & = & \exp(tq) \cdot \overline{\exp(tq)} \\ & = & \exp(tq) \cdot \exp(t\overline{q}) \\ & = & \exp(tq) \exp(-tq) \\ & = & 1 \end{array}$$

**Definition 3.7.6.** Für $A \in T_eG$ bezeichne $\varphi_A : \mathbb{R} \to G$ die Einparameteruntergruppe mit $\dot{\varphi}_A(0) = A$. Wir definieren damit die Exponentialabbildung im allgemeinen durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} \exp: & T_eG & \to & G \\ & A & \mapsto & \varphi_A(1) \end{array}$$

*Bemerkung* 3.7.7. Man sieht leicht ein, daß gilt $\varphi_{tA}(s) = \varphi_A(ts)$, also $\varphi_A(t) = \exp(tA)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, $A \in T_eG$.

**Definition 3.7.8.** Die Liealgebra $\operatorname{Lie} G$ der Lie-Gruppe $G$ ist der Vektorraum $T_eG$ mit der Lie-Klammer

$$[A, B] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left( \varphi_A(t)\varphi_B(t) - \varphi_B(t)\varphi_A(t) \right),$$

wobei die Differenz natürlich nur in einer Karte um das neutrale Element gebildet werden kann als ein Element des den Definitionsbereich der Karte umfassenden Vektorraums, der Grenzwert unter der kanonischen Identifikation dieses Vektorraums mit dem Tangentialraum am neutralen Element jedoch unabhängig ist von der Karte.

*Bemerkung* 3.7.9. Man prüft leicht, daß $\mathfrak{g} = \operatorname{End} V$ mit der Lie-Klammer $[X, Y] = XY - YX$ zu einer reellen Liealgebra wird. Unter der Liealgebra

$$\operatorname{Lie} G$$

unserer abgeschlossenen Untergruppe $G \subset_{\!\!\mathrm{A}} \operatorname{Aut} V$ verstehen wir den Vektorraum $T_eG$ mit der induzierten Lie-Klammer. Um die Bedeutung des Konzepts einer Liealgebra zu erklären, gebe ich ohne Beweis und sogar ohne vollständige Definitionen zwei grundlegende Sätze an. Wir notieren die Kategorie der Liegruppe mit Lgrp und die Kategorie der Liealgebren über einem Körper $k$ mit $\mathrm{Lalg}_k$.

*Satz* 3.7.10. *Seien $G, H$ Liegruppen. Ist $G$ einfach zusammenhängend, so liefert das Differenzieren eine Bijektion*

$$\mathrm{Lgrp}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lalg}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Lie} G, \operatorname{Lie} H)$$

*Satz* 3.7.11. *Jede endlichdimensionale reelle Liealgebra ist isomorph zur Liealgebra einer einfach zusammenhängenden Liegruppe.*

Diese beiden Sätze kann man entweder auffassen als Korollare oder als Teile des Beweises eines allgemeinen Resultats, nach dem Funktor

$$\operatorname{Lie} : \{\text{Liegruppen}\} \to \{\text{endlichdimensionale reelle Liealgebren}\}$$

einen volltreuen Linksadjungierten besitzt, der eine Äquivalenz induziert zwischen der Kategorie aller endlichdimensionalen reellen Liealgebren und der Kategorie aller einfach zusammenhängenden Liegruppen.

## 3.8 Bedeutung der Lie-Klammer von Vektorfeldern

**Definition 3.8.1.** Unter dem **Fluss** eines Vektorfelds $X$ auf einer Mannigfaltigkeit $W$ versteht man diejenige differenzierbare Abbildung $\varphi_X : \tilde{W} \to W$ für geeignetes $\tilde{W} \Subset \mathbb{R} \times W$, die dadurch charakterisiert wird, daß für jedes $q \in W$ die Menge $I_q = \{t \in \mathbb{R} \mid (t,q) \in \tilde{W}\}$ ein Intervall ist und die Abbildung $I_q \to W$, $t \mapsto \varphi_X(t,q)$ die maximale Integralkurve des Vektorfelds $X$ durch den Punkt $q$.

*Bemerkung* 3.8.2. Wir schreiben statt $\varphi_X(t,q)$ auch

$$X^t q$$

für die Stelle, an der der Punkt $q$ landet, wenn er sich für die Zeitspanne $t$ mit dem Fluß zum Vektorfeld $X$ treiben läßt.

**Proposition 3.8.3 (Bedeutung der Lie-Klammer von Vektorfeldern).**

*Seien $X, Y$ stetig differenzierbare Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge $W$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums $V$. Gegeben $p \in W$ gilt unter der natürlichen Identifikation des Tangentialraums $T_pW$ mit dem Vektorraum $V$ die Gleichung*

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\left(Y^t X^t p - X^t Y^t p\right)$$

*Bemerkung* 3.8.4. Die Lie-Klammer zweier Vektorfelder mißt also, inwieweit die zugehörigen Flüsse "kommutieren", d.h. welchen Unterschied es macht, ob sich ein gegebener Punkt für ein festes kleines Zeitintervall erst mit dem einen und dann mit dem anderen Vektorfeld treiben läßt oder umgekehrt.

*Beweis.* Wir wählen einen Isomorphismus $V \cong \mathbb{R}^n$ und nennen die Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$. Wir dürfen $p = 0$ annehmen. Um nun **??** anzuwenden, betrachten wir den Fluß $\varphi_X$ von $X$ und entwickeln $\psi = (\mathrm{id}, \varphi_X) : \tilde{W} \to \mathbb{R} \times V$ in eine Taylorreihe um den Ursprung. Der konstante Term ist dann Null und der lineare Term ist das Differential, das sich mithilfe der partiellen Ableitungen als die lineare Abbildung

$$L = \mathrm{d}_{(0,p)}\psi : (t,v) \mapsto (t, v + tX_p)$$

entpuppt. Geben wir den entsprechenden Abbildungen zu $Y$ einen Hut, so folgt $L \circ \hat{L} = \hat{L} \circ L$ und die Taylorreihe von $\hat{\psi} \circ \psi - \psi \circ \hat{\psi}$ beginnt erst mit quadratischen Termen. Es gilt nun, bei diesen quadratischen Termen zu zeigen, daß der Koeffizient von $t^2$ als $V$-Komponente gerade $[X,Y]_p$ hat.

Dazu berechnen wir den quadratischen Teil der Taylorreihe von $\psi$. Da $\psi$ auf $0 \times W$ die Identität induziert, haben wir $\frac{\partial^2\psi}{\partial v_i \partial v_j}|_{(0,p)} = 0$. Weiter ergibt sich

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = (1, X) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial v_i \partial t} = \left(0, \frac{\partial X}{\partial v_i}\right) \quad \text{auf der Hyperebene } t = 0.$$

Die zweite partielle Ableitung nach der Zeit müssen wir zum Glück nicht explizit kennen, wir setzen deshalb einfach $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (0, c) \in \mathbb{R} \times V$ für ihren Wert bei $(0, p) = (0, 0)$. Der quadratische Teil der Taylorreihe von $\psi$ ergibt sich damit zu

$$Q : (t, v) \mapsto \left(0, \left.\frac{\partial X}{\partial v_i}\right|_p v_i t + \frac{c}{2}t^2\right)$$

Der Koeffizient von $t^2$ in der $V$-Komponente von $(L + Q) \circ (\hat{L} + \hat{Q})$ ist also der Koeffizient von $t^2$ in der $V$-Komponente von $L \circ \hat{Q} + Q \circ \hat{L}$ und ergibt sich zu

$$\frac{\hat{c}}{2} + \sum \frac{\partial X}{\partial v_i} Y_i + \frac{c}{2}$$

wobei wir das Auswerten von Vektorfeldern und ihren partiellen Ableitungen und Komponenten an $p$ nicht mehr explizit notiert haben. In der Differenz ergibt sich also $\sum X_i \frac{\partial Y}{\partial v_i} - Y_i \frac{\partial X}{\partial v_i}$ wie gewünscht. □

**Satz 3.8.5.** *Gegeben ein $C^\infty$-Vektorfeld auf einer $C^\infty$-Mannigfaltigkeit, das an einer festen Stelle nicht verschwindet, finden wir stets Koordinaten um besagte Stelle derart, daß unser Feld in diesen Koordinaten die Gestalt $\partial/\partial x_1$ hat.*

*Beweis.* Noch einfügen und an Analysis anschließen. □

**Proposition 3.8.6 (über kommutierende Vektorfelder).** *Zwei Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren.*

*Beweis.* Kommutieren die Flüsse, so auch die Vektorfelder nach 3.8.3. Kommutieren umgekehrt die Vektorfelder und wählen wir Koordinaten so, daß das erste Vektorfeld gerade $\frac{\partial}{\partial x_1}$ wird, so hat das zweite Vektorfeld die Gestalt $a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ wobei $a_2, \ldots, a_n$ konstant sind in $x_1$. Der Fluß des zweiten Feldes ist also invariant unter Verschiebung in die $x_1$-Richtung, d.h. unter dem Fluss des ersten Feldes. □

*Übung* 3.8.7. Gegeben paarweise kommutierende Vektorfelder, die an einer gegebenen Stelle linear unabhängig sind, finden wir stets eine Karte um diese Stelle, in der unsere Vektorfelder die Gestalt $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}$ haben.

## 3.9 Tannaka-Krein-Dualität

**Satz 3.9.1.** *Sei $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine kompakte Untergruppe. So gibt es Polynome in den Matrixeinträgen $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_{ij}]$ mit*

$$G = \{A \in M(n \times n;\mathbb{R}) \mid f_\nu(A) = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, r\}$$

*Bemerkung* 3.9.2. Dieser Satz ist eine erste Formulierung der Erkenntnis, daß kompakte Liegruppen recht eigentlich algebraische Objekte sind.

*Beweis.* Wir betrachten wie in **??** die Zariski-Topologie auf $M(n \times n;\mathbb{R})$ und müssen in den dort eingeführten Notationen nur zeigen $G = \bar{G}$, wobei sich der Abschluß auf die Zariski-Topologie von $M(n \times n;\mathbb{R})$ bezieht. In der Tat bedeutet diese Gleichung gerade, daß $G$ die Nullstellenmenge seines Verschwindungsideals ist, in Formeln $G = Z(I(G))$, und da das Verschwindungsideal $I(G)$ von $G$ endlich erzeugt sein muß in $\mathbb{R}[X_{ij}]$ nach dem Hilbert'schen Basissatz, sagen wir von Erzeugern $f_1, \ldots, f_r$, folgt $G = Z(f_1, \ldots, f_r)$.

Warum aber ist $G$ Zariski-abgeschlossen? Zunächst einmal zeigen wir dazu, daß mit einer metrisch kompakten Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auch ihr Zariski-Abschluß $\bar{G}$ eine metrisch kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ ist. Indem wir ein invariantes Skalarprodukt wählen, dürfen wir ja ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G \subset \mathrm{O}(n)$ annehmen, woraus folgt $\bar{G} \subset \mathrm{O}(n)$. Folglich ist $\bar{G}$ auch metrisch kompakt. Weiter ist mit $G$ auch $\bar{G}$ stabil unter dem Transponieren von Matrizen und enthält folglich mit jedem Element auch sein Inverses. Und schließlich impliziert $A \in G$ sofort $A \cdot G \subset G$ und $A \cdot \bar{G} \subset \bar{G}$ und dann folgt aus $B \in \bar{G}$ bereits $G \cdot B \subset G$ und so $\bar{G} \cdot B \subset \bar{G}$ und wir erkennen, daß $\bar{G}$ unter der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Mithin ist $\bar{G} \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auch eine metrisch kompakte Untergruppe. Nach **??** haben wir nun

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X_{ij}]/I(G) & \stackrel{\sim}{\to} & R(\bar{G};\mathbb{R}) \\ \| & & \downarrow \\ \mathbb{R}[X_{ij}]/I(G) & \stackrel{\sim}{\to} & R(G;\mathbb{R}) \end{array}$$

und die Restriktion von $\bar{G}$ auf $G$ induziert eine Bijektion zwischen den Räumen der Matrixkoeffizienten auf beiden Gruppen. Dasselbe folgt für komplexwertige Matrixkoeffizienten. Nun ist aber eine Darstellung $V$ derart, daß die Matrixkoeffizienten Abbildung $V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \to C(G)$ injektiv ist, nach **??** bereits irreduzibel. Es folgt, daß die Restriktion von $\bar{G}$ auf $G$ eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen einfacher stetiger Darstellungen von unseren beiden Gruppen liefern muß. Damit folgt, daß unter unserer Restriktion $R(\bar{G}) \stackrel{\sim}{\to} R(G)$ auch mit den normierten invarianten Integralen auf $\bar{G}$ bzw. $G$ verträglich sein muß. Dann muß aus Stetigkeintsgründen auch die Restriktion $C(\bar{G}) \to C(G)$ mit den normierten invarianten Integralen verträglich sein, und das ist der gewünschte Widerspruch, denn es gibt sicher $f : \bar{G} \to \mathbb{R}$ nicht null und nichtnegativ mit $f|_G = 0$. $\square$

## 3.10 Quotientenkonstruktion

**Satz 3.10.1 (Quotientenkonstruktion).** *Sei $G$ eine Liegruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe.*

1. *Versehen mit der finalen Struktur eines $\mathbb{R}$-geringten Raums für die Projektion $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ wird $G/H$ eine $C^\infty$- Mannigfaltigkeit.*

2. *Wir erhalten so die einzige Struktur einer $C^\infty$-Mannigfaltigkeit auf der Menge $G/H$ derart, daß $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ eine $C^\infty$-Abbildung ist mit surjektivem Differential an jeder Stelle.*

3. *Jeder Punkt von $G/H$ besitzt eine offene Umgebung $U$ derart, daß $\pi$ über $U$ einen $C^\infty$-Schnitt besitzt. Für jeden solchen Schnitt $s : U \to G$ ist die Abbildung $U \times H \to G, (x, h) \mapsto s(x)h$ eine offene Einbettung von $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten.*

*Beweis.* Nach **??** ist der Quotient mit seiner Quotiententopologie schon einmal Hausdorff. Wir wählen nun ein Vektorraumkomplement $V \subset \operatorname{Lie} G$ von $\operatorname{Lie} H$ und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V \times H & \to & G \\ & (X, h) & \mapsto & (\exp X)h \end{array}$$

Sicher ist ihr Differential in $(0, 1)$ bijektiv, folglich gibt es offene Umgebungen $A \Subset V$ von Null und $B \Subset H$ von 1 derart, daß $\varphi$ eine offene Einbettung von $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten

$$\varphi : A \times B \hookrightarrow G$$

induziert. Nun ist ganz allgemein $\varphi(X_1, h_1) = \varphi(X_2, h_2)$ gleichbedeutend zu $\exp(X_2)^{-1} \exp(X_1) = h_2 h_1^{-1}$. Sicher können wir $A$ so verkleinern, daß für $X_1, X_2 \in A$ gilt

$$\exp(X_2)^{-1} \exp(X_1) \in H \quad \Rightarrow \quad \exp(X_2)^{-1} \exp(X_1) \in B$$

Dann folgt aber für $X_1, X_2 \in A$ und beliebige $h_1, h_2 \in H$ aus $\varphi(X_1, h_1) = \varphi(X_2, h_2)$ erst $h = h_2 h_1^{-1} \in B$ und dann wegen $\exp(X_1) = \exp(X_2)h$ weiter $h = h_2 h_1^{-1} = 1$ und $X_1 = X_2$. Mithin induziert $\varphi$ für das so verkleinerte $A$ eine Injektion

$$\varphi : A \times H \hookrightarrow G$$

Mit Rechtsverschiebung durch $h \in H$ erkennen wir, daß ihr Differential an jeder Stelle bijektiv ist. Folglich ist diese Injektion eine offene Einbettung von $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten und liefert wegen **??** auch eine offene Einbettung von $\mathbb{R}$-geringten Räumen $A \hookrightarrow G/H$. Verknüpfen wir diese Einbettung mit den Automorphismen $(g\cdot) : G/H \to G/H$, so erkennen wir, daß $G/H$ in der Tat eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit ist und folgern auch die dritte Aussage des Satzes sofort. Es bleibt, Teil 2 zu zeigen. Daß für unsere Struktur auf $G/H$ das Differential stets surjektiv ist, folgt aus 3. Bezeichnet umgekehrt $X$ die Menge $G/H$ mit einer Struktur von $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten so daß $\pi : G \to X$ eine $C^\infty$-Abbildung ist und $\mathrm{d}_g\pi$ surjektiv für alle $g \in G$, so induziert unsere Injektion $\varphi : A \times H \hookrightarrow G$ eine injektive $C^\infty$-Abbildung $A \hookrightarrow X$ mit surjektivem Differential an jeder Stelle. Eine Abbildung von Mannigfaltigkeiten ohne Rand mit surjektivem Differntial an jeder Stelle ist aber notwendig offen, und ist unsere Abbildung auch noch injektiv, so muß ihr Differential an jeder Stelle bijektiv sein. Folglich ist $A \hookrightarrow X$ eine Karte und es folgt $X = G/H$. □

**Proposition 3.10.2.** *Sei $G$ ein Liegruppe und $H \subset G$ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe. So gibt es auf $G/H$ genau zwei $G$-invariante Orientierungen.*

*Beweis.* Wir wählen eine Orientierung auf $T_{eH}(G/H)$. Für jedes $g \in G$ liefert Verschieben mit $g$ eine Orientierung auf $T_{gH}(G/H)$. Diese Orientierung hängt nur von der Nebenklasse $gH$ ab, da Verschieben mit $h \in H$ die Orientierung auf $T_{eH}(G/H)$ erhält. Mithilfe lokaler Schnitte der Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ erkennt man leicht, daß unsere Orientierungen auch stetig vom Faßpunkt abhängen. □

## 3.11 Abelsche Liegruppen

**Lemma 3.11.1.** *Für eine zusammenhängende Liegruppe $G$ sind gleichbedeutend: (1) Die Liegruppe $G$ ist abelsch, (2) ihre Liealgebra* $\operatorname{Lie} G$ *ist abelsch und (3) die Exponentialabbildung definiert einen Gruppenhomomorphismus* $\operatorname{Lie} G \to G$.

*Beweis.* Wir beginnen mit $1 \Leftrightarrow 2$ und bemerken dazu, daß für jede zusammenhängende Liegruppe gilt

$$\begin{array}{rcll} G \text{ abelsch} & \Leftrightarrow & \operatorname{Int} g = \mathrm{id} : G \to G & \forall \quad g \in G \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{Ad} g = \mathrm{id} : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G & \forall \quad g \in G \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{ad} X = 0 : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G & \forall \quad X \in \operatorname{Lie} G \\ & \Leftrightarrow & [X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in \operatorname{Lie} G & \end{array}$$

wobei wir zweimal verwnden, daß ein Homomorphismus von einer zusammenhängenden Liegruppe in eine weitere Liegruppe bereits durch sein Differential beim neutralen Element eindeutig festgelegt wird. Für $1 \Rightarrow 3$ bemerken wir, daß für abelsches $G$ und $X, Y \in \operatorname{Lie} G$ beliebig ja auch $t \mapsto \exp(tX)\exp(tY)$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to G$ ist, und berechnen wir seine Geschwindigkeit bei $t = 0$, so folgt $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X + Y))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$. Für $3 \Rightarrow 1$ beachten wir, daß $\exp(\operatorname{Lie} G)$ unter unseren Voraussetzungen eine Untergruppe von $G$ sein muß, die offen ist, da sie eine offene Umgebung des neutralen Elements umfaßt. Wegen $G$ zusammenhängend folgt daraus exp surjektiv und $G$ abelsch. □

**Proposition 3.11.2 (Abelsche Liegruppen).** *Jede zusammenhängende abelsche Liegruppe ist isomorph zu genau einer Gruppe der Gestalt*

$$S^1 \times \ldots \times S^1 \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$$

*Beweis.* Sei $G$ unsere Liegruppe. Nach **??** induziert die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus

$$\operatorname{Lie} G / \ker(\exp) \xrightarrow{\sim} G$$

und $\ker(\exp) \subset \operatorname{Lie} G$ ist eine diskrete Untergruppe. Nun kann man 3.11.5 anwenden. □

*Bemerkung* 3.11.3. Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist diskret genau dann, wenn es eine Umgebung des neutralen Elements gibt, die unsere Untergruppe nur im neutralen Element trifft. Eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist sicher abgeschlossen, da für eine beliebig vorgegebene Norm jede Cauchy-Folge in unserer diskreten Untergruppe bis auf endlich viele Glieder konstant sein muß.

*Übung* 3.11.4. Eine diskrete Untergruppe einer Hausdorff'schen topologischen Gruppe ist stets abgeschlossen.

**Satz 3.11.5 (Gitter in reellen Vektorräumen).** *Eine Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist diskret genau dann, wenn sie als Untergruppe von linear unabhängigen Vektoren unseres Raums erzeugt wird.*

*Beweis.* Wir versehen unseren endlichdimensionalen reellen Vektorraum $V$ mit einem Skalarprodukt $( \ , \ )$ und argumentieren durch Induktion über die Dimension. Sicher trifft unsere Untergruppe $L \subset V$ jedes Kompaktum in einer endlichen Menge. Ist $L$ trivial, so ist der Satz klar. Sonst finden wir in $L\backslash 0$ einen Vektor $v$ kürzester Länge. Wir bezeichnen dann mit $p : V \twoheadrightarrow v^\perp$ die orthogonale Projektion und behaupten, daß $p(L)$ auch diskret ist. Sonst finden wir nämlich in $p(L)\backslash 0$ Vektoren von beliebig kleiner Länge. Gegeben $a \in p(L)$ hat jedoch sein Urbild in $L$ die Gestalt

$$p^{-1}(a) \cap L = a + cv + \mathbb{Z}v \qquad \text{mit } |c| \leq 1/2$$

Insbesondere hat $a + cv$ die quadrierte Länge $\|a + cv\|^2 = \|a\|^2 + \frac{1}{4}\|v\|^2$, und für $0 < \|a\| < \frac{1}{2}$ erhielten wir Vektoren in $L\backslash 0$, die noch kürzer wären als $v$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $p(L)$ diskret liegen muß. Nach Induktionsannahme finden wir also linear unabhängige $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r \in v^\perp$, die $p(L)$ erzeugen. Sind $v_i \in L$ Urbilder der $\bar{v}_i$, so sind $v, v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig in $V$ und erzeugen $L$. □

**Lemma 3.11.6.** *Seien $K \supset N$ eine kompakte Liegruppe und eine abgeschlossene normale Untergruppe. Sind $N$ und $K/N$ Tori, so ist auch $K$ ein Torus.*

*Beweis.* Wäre $K$ nicht zusammenhängend, so könnte auch $K/N$ nicht zusammenhängend sein. Also ist $K$ zusammenhängend und wir müssen nur zeigen, daß seine Liealgebra abelsch ist. Nun gibt es aber auf $\operatorname{Lie} K$ ein $K$-invariantes Skalarprodukt, und das liefert eine Zerlegung von $\operatorname{Lie} K$ in ein Produkt von Unteralgebren

$$\operatorname{Lie} K = \operatorname{Lie} N \oplus (\operatorname{Lie} N)^\perp$$

Die Projektion definiert nun aber offensichtlich einen Isomorphismus von Liealgebren $(\operatorname{Lie} N)^\perp \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie}(K/N)$ woraus folgt, daß $\operatorname{Lie} K$ abelsch ist. □

**Definition 3.11.7.** Eine topologische Gruppe heißt **topologisch zyklisch** genau dann, wenn es ein Element darin gibt, dessen Erzeugnis dicht liegt. Solch ein Element heißt dann ein **topologischer Erzeuger**.

*Bemerkung* 3.11.8. Jede topologisch zyklische Hausdorffsche Gruppe ist kommutativ. Ist allgemeiner $G$ eine Hausdorffsche topologische Gruppe und $A \subset G$ eine abelsche Untergruppe, so ist auch ihr Anschluß $\bar{A}$ abelsch. In der Tat folgt aus $aba^{-1}b^{-1} = 1$ für alle $a, b \in A$ dasselbe zunächst für alle $a \in A, b \in \bar{A}$ und dann für alle $a, b \in \bar{A}$. □

**Satz 3.11.9 (Topologisch zyklische Liegruppen).** *Eine Liegruppe ist topologisch zyklisch genau dann, wenn sie isomorph ist zu $\mathbb{Z}$ oder zu einem Produkt einer endlichen zyklischen Gruppe mit einem kompakten Torus. Eine kompakte Liegruppe ist topologisch zyklisch genau dann, wenn sie abelsch ist mit zyklischer Komponentengruppe.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, daß jeder kompakte Torus topologisch zyklisch ist. Genauer zeigen wir, daß für $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ gleichbedeutend sind:

(1) $\bar{a} \in \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ ist *kein* topologischer Erzeuger;

(2) Die Elemente $1, a_1, \ldots, a_k$ sind linear abhängig über $\mathbb{Q}$;

(3) Es gibt $\varphi : \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ einen surjektiven stetigen Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$.

Hier ist (3) $\Rightarrow$ (1) offensichtlich und (1) $\Rightarrow$ (3) ergibt sich, da der Quotient nach dem Abschluß des Erzeugnisses von $\bar{a}$ ja nach 3.11.2 ein nichttrivialer Torus sein muß. Weiter muß jeder Morphismus wie in (3) die Gestalt

$$\overline{(b_1, \ldots, b_k)} \mapsto \overline{n_1 b_1 + \ldots + n_k b_k}$$

haben für geeignete $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null wegen der Surjektivität, und $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$ bedeutet dann $n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k = n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ und damit (2). Dasselbe Argument zeigt aber auch (2) $\Rightarrow$ (3). Damit ist in der Tat jeder kompakte Torus topologisch zyklisch. Es ist dann auch klar, daß alle im Satz angegebenen Gruppen topologisch zyklisch sind. Ist umgekehrt $G$ topologisch zyklisch und $G^\circ$ seine 1-Zusammenhangskomponente und betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$G^\circ \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/G^\circ$$

so ist offensichtlich $G/G^\circ$ zyklisch und aus $G/G^\circ \cong \mathbb{Z}$ folgt $G^\circ = 1$. Haben wir dahingegen $G/G^0 \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $m \geq 1$, so ist $G^0$ ein Torus, und wählen wir ein Urbild $g \in G$ von $\bar{1} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und suchen $a \in G^0$ mit $a^m = g^m$, so liefert $\bar{1} \mapsto a^{-1}g$ eine Spaltung **??** unserer Sequenz. $\square$

# 4 Kompakte Liegruppen

## 4.1 Maximale Tori

*Bemerkung* 4.1.1. Eine kompakte zusammenhängende abelsche Liegruppe heißt ein **Torus** oder genauer ein **kompakter Torus**. Nach 3.11.2 ist jeder Torus isomorph zu einem Produkt von endlich vielen Kopien der Kreislinie $S^1$. Unter einem Torus in einer topologischen Gruppe verstehen wir stets eine Untergruppe, die mit der induzierten Topologie ein Torus ist. Unter einem **maximalen Torus** verstehen wir einen Torus, der nicht in einem anderen Torus echt enthalten ist.

**Satz 4.1.2 (über maximale Tori).** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe gehört jedes Element zu einem maximalen Torus und je zwei maximale Tori sind konjugiert.*

*Beweis.* Seien $G \supset T$ unsere zusammenhängende kompakte Liegruppe und ein maximaler Torus. Wir zeigen im folgenden

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

Der Satz folgt, denn ist dann $S \subset G$ ein weiterer maximaler Torus, so finden wir insbesondere für jeden topologischen Erzeuger $s \in S$ ein $g \in G$ mit $s \in gTg^{-1}$ und damit $S \subset gTg^{-1}$ und so $S = gTg^{-1}$. Es bleibt also wie oben in Formelsprache behauptet zu zeigen, daß die Konjugierten eines festen maximalen Torus bereits die ganze Gruppe überdecken. Das zeigen wir durch vollständige Induktion über die Dimension unserer Gruppe. Ist $Z \subset G$ das Zentrum und $Z^\circ$ seine Einszusammenhangskomponente, so ist sicher $TZ^\circ$ ein Torus und es folgt $T \supset Z^\circ$. Nach 3.11.6 ist dann auch $T/Z^\circ \subset G/Z^\circ$ ein maximaler Torus, und ist $Z^\circ$ nicht trivial, so folgt unsere Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Wir dürfen also $Z^\circ$ trivial alias $Z$ diskret und damit endlich annehmen. Unter dieser Voraussetzung behaupten wir nun

$$\bigcup_{g \in G} g(T - Z)g^{-1} = G - Z \qquad (*)$$

Haben wir das gezeigt, so gehen wir auf beiden Seiten zum Abschluß über und sind fertig, da $\bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$ stets abgeschlossen ist als Bild einer stetigen Abbildung $G \times T \to G$. Besteht $G$ nur aus einem Punkt, so ist diese letzte Behauptung $(*)$ eh klar. Als zusammenhängende Liegruppe mit diskretem Zentrum hat sonst $G$ mindestens die Dimension zwei und insbesondere ist mit $G$ auch $G - Z$ zusammenhängend. Es reicht also, wenn wir zeigen, daß

$$\bigcup_{g \in G} g(T - Z)g^{-1}$$

sowohl offen als auch abgeschlossen ist in $G - Z$. Daß es abgeschlossen ist in $G - Z$ erkennen wir daraus, daß ja gilt

$$\bigcup_{g \in G} g(T - Z)g^{-1} = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1} - Z$$

Um zu zeigen, daß es auch offen ist, müssen wir nur für jeden Punkt $t \in T - Z$ nachweisen, daß eine ganze Umgebung zu $\bigcup_{g \in G} g(T - Z)g^{-1}$ gehört. Da $t$ nicht zum Zentrum von $G$ gehört, dürfen wir auf die Einszusammenhangskomponente seines Zentralisators $K = Z_G(t)^\circ$ die Induktionsvoraussetzung anwenden und finden $K = \bigcup_{g \in K} gTg^{-1}$ und natürlich auch $K - Z = \bigcup_{g \in K} g(T - Z)g^{-1}$. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G \times (K - Z) & \to & G \\ (g\ ,\ k) & \mapsto & gkg^{-1} \end{array}$$

und sind fertig mit dem Umkehrsatz, wenn wir nur zeigen können, daß sie an der Stelle $(1, t)$ surjektives Differential hat. Gleichbedeutend können wir natürlich zeigen, daß die Abbildung $G \times K \to G$, $(g, k) \mapsto t^{-1}gtkg^{-1}$ an der Stelle $(1, 1)$ surjektives Differential hat. Nun ist aber dieses Differential gerade die Abbildung

$$\begin{array}{ccl} \operatorname{Lie} G \times \operatorname{Lie} K & \to & \operatorname{Lie} G \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & (\operatorname{Ad} t^{-1})(x) + y - x \end{array}$$

und nach 2.4.4 wissen wir um die Gleichung

$$\operatorname{Lie} K = \ker(\operatorname{Ad} t - \mathrm{id}) = \ker(\operatorname{Ad} t^{-1} - \mathrm{id})$$

Andererseits ist $\operatorname{Ad} t$ und ebenso $(\operatorname{Ad} t)^{-1} - \mathrm{id}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, und für jeden diagonalisierbaren Endomorphismus $f$ eines endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums $V$ gilt $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$. Das zeigt die Surjektivität des Differentials. □

**Korollar 4.1.3.** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist das Zentrum der Schnitt aller maximalen Tori.*

*Beweis.* Jedes Element des Zentrums liegt in einem maximalen Torus, also in jedem dazu konjugierten Torus, also in jedem maximalen Torus. Liegt umgekehrt ein Element in jedem maximalen Torus, so kommutiert es mit jedem Element jedes maximalen Torus. □

**Proposition 4.1.4.** *In einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe ist der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei $G$ unsere Gruppe, $S \subset G$ unser Torus und $x \in Z_G(S)$ ein Element seines Zentralisators. Sicher ist $B = \overline{\langle x, S \rangle}$ abelsch und kompakt und $B/B^\circ$ ist topologisch erzeugt von $\bar{x}$ und mithin zyklisch. Damit ist aber $B$ topologisch zyklisch nach 3.11.9 und liegt folglich in einem maximalen Torus von $G$. Wir folgern, daß $Z_G(S)$ die Vereinigung aller maximalen Tori von $G$ ist, die $S$ enthalten. □

**Korollar 4.1.5.** *In einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe ist der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammenhängend.*

*Beweis.* Der Zentralisator eines Elements der Liealgebra fällt zusammen mit dem Zentralisator der Gerade durch besagtes Element, dann auch mit dem Zentralisator ihres Bildes unter der Exponentialabbildung, und dann schließlich auch mit dem Zentralisator des Abschlusses dieses Bildes. Dieser Abschluß aber ist eine kompakte abelsche Liegruppe, als da heißt ein Torus. □

## 4.2 Starrheit von Tori und die Weylgruppe

*Bemerkung* 4.2.1. Die Menge der stetigen Gruppenhomomorphismen von einer topologischen Gruppe $G$ nach $S^1$ notieren wir mit

$$X(G) = \mathrm{Grpto}(G, S^1)$$

Offensichtlich bildet $X(G)$ eine Untergruppe der Einheitengruppe des Rings $\mathrm{Top}(G, \mathbb{C})$ mit seiner punktweisen Verknüpfung. Wir notieren jedoch die Verknüpfung in $X(G)$ additiv in der Hoffnung, daß das anschaulicher wirkt, und schreiben Elemente $\lambda \in X(G)$ in der Form $\mathrm{e}^\lambda$, wenn wir sie als komplexwertige Funktionen auffassen und insbesondere, wenn wir sie als komplexwertige Funktionen addieren wollen, so daß also im Ring $\mathrm{Top}(G, \mathbb{C})$ gilt $\mathrm{e}^{\lambda+\mu} = \mathrm{e}^\lambda \mathrm{e}^\mu$. Gegeben ein stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen $\varphi : G \to H$ induziert das Verknüpfen mit $\varphi$ natürlich einen Homomorphismus von additiven Gruppen

$$X(H) \to X(G)$$

**Lemma 4.2.2.** *Ist $G$ eine topologische Gruppe und $H$ ein Torus, so induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\mathrm{Grpto}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(X(H), X(G))$$

*Beweis.* Gilt die Aussage für zwei Tori $H_1$ und $H_2$, so auch für ihr Produkt $H = H_1 \times H_2$. Es reicht also, den Fall $H \cong S^1$ zu prüfen, und der ist evident. □

*Sollte auch zeigen für $H$ beliebige kompakte abelsche Liegruppe. Dann $X$ kontravariante Äquivalenz von Kategorien. Verallgemeinerung Pontrjagin-Dualität.*

**Proposition 4.2.3 (Starrheit von Tori).** *Seien $S$ und $T$ kompakte Tori und $\varphi : X \to \mathrm{Grp}(S,T)$ eine durch einen zusammenhängenden topologischen Raum $X$ parametrisierte Familie von Gruppenhomomorphismen, die stetig ist in dem Sinne, daß die induzierte Abbildung $X \times S \to T$ stetig ist. So ist $\varphi$ konstant.*

*Bemerkung* 4.2.4. Die Proposition gilt mit demselben Beweis für beliebige kompakte abelsche Liegruppen, aber der Fall von Tori ist im Weiteren besonders wichtig.

*Beweis.* Gegeben $x \in X$ bezeichnen wir den zugehörigen Homomorphismus mit $\varphi_x : S \to T$. Für beliebige $s \in S$, $t \in T$ ist natürlich

$$X_{st} = \{x \in X \mid \varphi_x(s) = t\}$$

abgeschlossen in $X$. Für $n \geq 1$ und eine beliebige Gruppe $G$ betrachten wir nun die Menge $G[n] = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ aller Elemente, deren Ordnung $n$ teilt. In unserem Fall sind $S[n]$ und $T[n]$ endlich und jeder Gruppenhomomorphismus schickt natürlich $S[n]$ nach $T[n]$. Gegeben $s \in S[n]$ und $t \in T[n]$ ist also $X_{st}$ auch offen in $X$. Da $X$ zusammenhängend ist, haben wir mithin $\varphi_x(s) = \varphi_y(s) \quad \forall x, y \in X, s \in S[n]$. Da das nun für alle $n \geq 1$ gilt und da die Vereinigung der $S[n]$ dicht liegt in $S$, folgt $\varphi_x = \varphi_y \quad \forall x, y \in X$. □

**Korollar 4.2.5.** *Für jeden Torus $S$ in einer topologischen Gruppe $G$ liegt die Einszusammenhangskomponente des Normalisators bereit im Zentralisator, in Formeln*

$$(N_G S)^\circ \subset Z_G S$$

*Beweis.* Wir wenden die vorhergehende Proposition 4.2.3 an auf die Abbildung $\varphi : (N_G S)^\circ \to \mathrm{Grp}(S,S)$, $g \mapsto \mathrm{int}\, g$ und folgern $\mathrm{int}\, g$ konstant, also $\mathrm{int}\, g = \mathrm{int}\, e = \mathrm{id}_S$ für alle $g \in (N_G S)^\circ$. □

**Proposition 4.2.6.** *Der Zentralisator eines maximalen Torus in einer kompakten Liegruppe hat als Einszusammenhangskomponente genau den besagten Torus selbst. Ist unsere kompakte Liegruppe zusammenhängend, so ist jeder maximale Torus sogar sein eigener Zentralisator.*

*Beweis.* Sei $G$ unsere kompakte Liegruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus. In Formeln behauptet die Proposition $Z_G(T)^\circ = T$. Sicher reicht es zu zeigen $\mathrm{Lie}\, Z_G(T) = \mathrm{Lie}\, T$. Für jedes $x \in \mathrm{Lie}\, Z_G(T)$ ist aber $\mathbb{R} \times T \to G$, $(a,t) \mapsto$

$\exp(ax)t$ ein Gruppenhomomorphismus, und hätten wir $x \notin \operatorname{Lie} T$, so wäre das Bild dieses Gruppenhomomorphismus eine zusammenhängende abelsche Untergruppe von $G$, die $T$ echt umfaßt. Der Abschluß dieses Bildes wäre dann auch noch kompakt und damit ein Torus, der $T$ echt umfaßt, im Widerspruch zur Wahl von $T$. Ist $G$ zusammenhängend, so ist der Zentralisator jedes Torus zusammenhängend nach 4.1.4. □

**Korollar 4.2.7.** *Ist $G$ eine kompakte Liegruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus, so ist die Weylgruppe $W = (N_G T)/T$ endlich.*

*Bweis.* Wir wissen $(N_G T)^\circ = (Z_G T)^\circ = T$ nach 4.2.5 und 4.2.6, folglich ist $(Z_G T)/T$ diskret. Diese Gruppe ist jedoch auch kompakt. □

## 4.3 Kompakte Liegruppen vom Rang Eins

*Übung* 4.3.1. Die maximalen abelschen Unteralgebren der Liealgebra einer kompakten Liegruppe sind genau die Liealgebren der maximalen Tori.

**Satz 4.3.2.** *Jede kompakte zusammenhängende Liegruppe mit eindimensionalem maximalen Torus ist isomorph zu* $\mathrm{SO}(3), \mathrm{SU}(2)$ *oder* $S^1$.

*Beweis.* Sei $G$ unsere Gruppe. Wir nehmen $\dim G > 1$ an und müssen zeigen, daß $G$ isomorph ist zu $\mathrm{SO}(3)$ oder zu $\mathrm{SU}(2)$. Wir folgern zunächst $\dim G = 3$. Sei dazu $T \subset G$ ein maximaler Torus und $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} G$ die komplexifizierte Liealgebra. Die komplexe Konjugation induziert eine schieflineare Involution $c : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, deren Invarianten genau die ursprüngliche Liealgebra $\operatorname{Lie} G$ selber sind. Jetzt zerlegen wir $\mathfrak{g}$ unter dem Torus als

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in X(T)} \mathfrak{g}^\alpha$$

Man prüft sofort $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$, da die Lieklammer stets einen Homomorphismus von Darstellungen $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ liefert. Man prüft auch sofort $c(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$, denn für $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ und alle $t \in T$ haben wir notwendig

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ad} t)(c(x)) &= c(\operatorname{Ad} t)x \\ &= c(\alpha(t)x) \\ &= \alpha(t)^{-1} c(x)\end{aligned}$$

Da $\operatorname{Lie} T \subset \operatorname{Lie} G$ wegen 4.3.1 eine maximale kommutative Unteralgebra ist, haben wir weiter $\mathfrak{g}^0 = \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} T$. Ist die Dimension unserer Gruppe größer als Eins, so gibt es folglich mindestens ein $\alpha \in X(T)$ mit $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$. Jetzt wählen wir einen Erzeuger $\gamma$ der Charaktergruppe $X(T)$ unseres maximalen Torus und $m > 0$ kleinstmöglich mit $\mathfrak{g}^{m\gamma} \neq 0$. Wählen wir dann $x \in \mathfrak{g}^{m\gamma}$ von Null verschieden, so haben wir $[x, c(x)] \neq 0$, da sonst die $c$-Invarianten in $\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}c(x)$ eine zweidimensionale abelsche Unteralgebra von $\operatorname{Lie} G$ aufspannten im Widerspruch zu 4.3.1. Also ist $[x, c(x)]$ eine Basis von $\mathfrak{g}^0$. Jetzt betrachten wir in $\mathfrak{g}$ den Untervektorraum

$$V = \mathbb{C}c(x) \oplus \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{n\gamma}$$

Er ist offensichtlich stabil unter $\operatorname{ad} x$ und $\operatorname{ad} c(x)$, folglich hat $\operatorname{ad}[x, c(x)]$ und damit $\operatorname{ad}(H)$ für alle $H \in \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} T$ Spur Null auf $V$. Bezeichnen wir der Einfachheit halber das Differential von $\gamma$ auch mit $\gamma : \operatorname{Lie} T \to \mathbb{C}$, so erhalten wir für alle $H \in \operatorname{Lie} T$ damit

$$0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} H : V \to V) = -m\gamma(H) + \sum_{n \geq 0} n\gamma(H) \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^{n\gamma})$$

und daraus folgt sofort $\dim \mathfrak{g}^{m\gamma} = 1$ und $\dim \mathfrak{g}^{n\gamma} = 0$ für $n \geq 0$ mit $n \neq m$. Wenden wir dieselbe Überlegung mit $-\gamma$ an statt mit $\gamma$, so erhalten wir $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3$ wie gewünscht. Wir erhalten zusätzlich, daß $\operatorname{Lie} G$ triviales Zentrum hat, da wir mit $\operatorname{Lie} T$ ja eine eindimensionale maximale abelsche Unteralgebra kennen, die nicht zentral ist. Die adjungierte Darstellung

$$G \to \mathrm{GL}(\operatorname{Lie} G)$$

hat also injektives Tangential, und wählen wir ein invariantes Skalarprodukt auf $\operatorname{Lie} G$, so hat durch Dimensionsvergleich der induzierte Homomorphismus

$$G \to \mathrm{SO}(\operatorname{Lie} G)$$

bijektives Tangential beim neutralen Element und ist folglich eine stetige Surjektion mit diskretem, also endlichem Kern. Ist sie ein Isomorphismus, so sind wir fertig. Sonst hat $G$ mehr irreduzible Darstellungen als $\mathrm{SO}(3)$, wegen der Klassifikation der Darstellungen der Liealgebra also eine irreduzible Darstellung gerader Dimension. Darin ist die von $\exp(\operatorname{Lie} G)$ erzeugte Untergruppe aber nach **??** isomorph zu $\mathrm{SU}(2)$ und wir erhalten so einen stetigen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{SU}(2)$. Dieser muß bijektiv sein, da sonst $G$ mehr einfache Darstellungen besitzen müßte als $\mathrm{SU}(2)$, und die einfachen Darstellungen der $\mathrm{SU}(2)$ liefern bereits alle einfachen endlichdimensionalen Darstellungen seiner komplexifizierten Liealgebra. $\square$

## 4.4 Klassifikation kompakter Liegruppen, Schrott

**Satz 4.4.1.** *Jede kompakte Untergruppe einer* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *ist eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand des* $\mathbb{R}^{n \cdot n}$ *und kann beschrieben werden als die simultane Nullstellenmenge einer endlichen Familie von Polynomen in den Matrixeinträgen.*

*Bemerkung* 4.4.2. In Formeln gibt es also für jede kompakte Untergruppe $K \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_{ij}]_{i,j=1}^n$ in den $n^2$ Veränderlichen $X_{ij}$ derart, daß gilt $K = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid f_1(A) = \ldots = f_r(A) = 0\}$. Zum Beispiel ist die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AA^\top = E\}$ die simultane Nullstellenmenge der $n^2$ Polynome

$$X_{r1}X_{1s} + X_{r2}X_{2s} + \ldots + X_{rn}X_{ns} - \delta_{rs} \quad \text{für } 1 \leq r, s \leq n.$$

*Bemerkung* 4.4.3. Für diejenigen, die bereits etwas über Spiegelungsruppen Bescheid wissen, sei hier kurz der Zusammenhang angerissen. Bezeichne $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ den Einheitskreis.

**Satz 4.4.4.** *Sei* $K \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *eine kompakte Untergruppe.*

1. *Jede zusammnenhängende kommutative Untergruppe von* $K$ *läßt sich zu einer maximalen zusammenhängenden kommutativen Untergruppe von* $K$ *vergrößern.*

2. *Je zwei maximale kommutative zusammenhängende Untergruppen* $T \subset K$ *sind zueinander konjugiert und es existieren für sie stetige Gruppenisomorphismen* $S^1 \times \ldots \times S^1 \xrightarrow{\sim} T$. *Man nennt diese Untergruppen die* **maximalen Tori** *von* $K$.

3. *In der abelschen Gruppe* $\mathrm{Top}(T, S^1)$ *aller stetigen Abbildungen von* $T$ *nach* $S^1$ *ist die Menge der stetigen Gruppenhomomorphismen eine endlich erzeugte Untergruppe* $X(T) \cong \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$.

4. *Bezeichnet* $N = N_K(T)$ *den Normalisator von* $T$ *in* $K$, *so operiert* $N$ *auf* $X(T)$ *und sein Bild ist eine endliche Gitterspiegelungsgruppe* $W \subset \mathrm{Ab}^\times(X(T))$.

5. *Auf diese Weise erhalten wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Kompakte zusammen-} \\ \textit{-hängende Liegruppen,} \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endliche Gitterspiegelungsgrup-} \\ \textit{-pen mit stabiler Wurzelwahl,} \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

## 4.5 Klassifikation kompakter Liegruppen

**Definition 4.5.1.** Unter einer **Gitterspiegelung** verstehen wir einen Automorphismus einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe derart, daß sein Quadrat die Identität ist und die Untergruppe der Elemente, die auf ihr Negatives gehen, unendlich zyklisch. Unter einer **Wurzel** zu einer Gitterspiegelung verstehen wir ein Element unserer abelschen Gruppe derart, daß sich jeder Punkt von seinem Spiegelbild um ein ganzzahliges Vielfaches des besagten Elements unterscheidet.

*Bemerkung* 4.5.2. Ist $s : X \to X$ eine Gitterspiegelung und $\alpha \in X$ eine Wurzel dazu, so gibt es natürlich genau eine Linearform $\alpha^\vee : X \to \mathbb{Z}$ mit

$$s\lambda = \lambda - \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in X$$

Diese Linearform $\alpha^\vee$ heißt die **Kowurzel** zur Wurzel $\alpha$. Natürlich gilt stets $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$. Weiter ist das Negative einer Wurzel zu einer Spiegelung stets wieder eine Wurzel zu derselben Spiegelung, und zu jeder Spiegelung gibt es mindestens zwei und höchstens vier Wurzeln: Genauer sind die beiden Erzeuger der unendlich zyklischen Gruppe $X^{-s}$ aller Vektoren $\lambda \in X$ mit $s\lambda = -\lambda$ stets mögliche Wurzeln, und nehmen die zugehörigen Kowurzeln auf $X$ nur gerade Werte an, so sind die Doppelten besagter Erzeuger auch noch mögliche Wurzeln. Damit sind aber auch bereits alle Möglichkeiten ausgeschöpft. Im übrigen ist die Transponierte einer Gitterspiegelung stets auch eine Gitterspiegelung und jedes Paar von Wurzel und Kowurzel zu unserer Spiegelung ist ein Paar von Kowurzel und Wurzel zu ihrer Transponierten.

**Definition 4.5.3.** Eine **endliche Gitterspiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Gitters, die von Spiegelungen erzeugt wird. Eine **stabile Wahl von Wurzeln** für eine endliche Gitterspiegelungsgruppe ist eine Teilmenge unseres Gitters, die (1) stabil ist unter unserer Spiegelungsgruppe, die (2) aus Wurzeln zu Spiegelungen unserer Spiegelungsgruppe besteht und die (3) zu jeder Spiegelung unserer Spiegelungsgruppe genau zwei Wurzeln enthält, die dann natürlich zueinander invers sein müssen.

**Satz 4.5.4 (Klassifikation kompakter Liegruppen).** *Ordnen wir jeder kompakten Liegruppe die Weylgruppe eines maximalen Torus zu mit ihrer Operation auf der Charaktergruppe des maximalen Torus und dem Wurzelsystem darin, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Zusammenhängende} \\ \textit{kompakte Liegruppen} \end{array} \right\} \overset{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endliche Gitterspiegelungsgruppen} \\ \textit{mit stabiler Wurzelwahl} \end{array} \right\}$$

*Bemerkung* 4.5.5. Im folgenden zeigen wir zunächst nur, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift auch da landet wo sie landen soll. Genauer zeigt die Proposition 4.5.7, daß jede Wurzel des Wurzelsystems auch Wurzel zu genau einer Spiegelung auf der Charaktergruppe des maximalen Torus ist, die durch ein Element der Weylgruppe gegeben wird. Dann zeigt 4.5.8, daß die Spiegelungen zu Wurzeln die Weylgruppe erzeugen. Und schließlich zeigt **??**, daß keine anderen Elemente der Weylgruppe als Spiegelungen auf der Charaktergruppe des maximalen Torus operieren.

**Satz 4.5.6 (Homomorphismen und Weylgruppen).** *1. Unter einem surjektiven Homomorphismus von kompakten Liegruppen ist das Bild jedes maximalen Torus wieder ein maximaler Torus.*

*2. Sind unsere Gruppen zusammenhängend und ist der Kern unseres Homomorphismus zentral, so ist auch das Urbild jedes maximalen Torus wieder ein maximaler Torus und das Urbild des Normalisators der Normalisator des Urbilds und wir erhalten einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Weylgruppen.*

*Beweis.* Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus. Ist $S \subset H$ ein maximaler Torus, so finden wir dazu einen topologischen Erzeuger $s \in S$ und dazu nach 4.1.2 ein Urbild in der Einszusammehangskomponente $t \in G^{\circ}$ und darüber einen maximalen Torus $T \subset G$ mit $t \in T$. Dann haben wir offensichtlich $\varphi(T) = S$. Gilt zusätzlich $\ker \varphi \subset Z(G)$, so folgt $\ker \varphi \subset T$ nach 4.1.3 und $\varphi^{-1}(S) = T$ und $\varphi^{-1}(N_H(S)) = N_G(\varphi^{-1}(S)) = N_G(T)$ und damit der behauptete Isomorphismus von Weylgruppen. □

**Proposition 4.5.7 (Wurzeln und ihre Spiegelungen).** *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit maximalem Torus, $R \subset X(T)$ das Wurzelsystem im Charaktergitter von $T$ und $W = W(G,T)$ die Weylgruppe. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt:*

1. *Der Wurzelraum ist eindimensional und außer ihrem Negativen ist kein Vielfaches unserer Wurzel eine Wurzel, in Formeln $\mathbb{Z}\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$;*

2. *Es gibt genau ein $s = s_\alpha \in W$ derart, daß $s$ auf $X$ als Spiegelung operiert mit $s(\alpha) = -\alpha$.*

3. *Es gibt in $G$ genau eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe $G_\alpha$ vom Rang Eins mit $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(G_\alpha) \supset (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, G)^\alpha$.*

4. *Es gibt genau ein $\alpha^\vee : X \to \mathbb{Z}$ mit $s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in X(T)$.*

*Beweis.* 1. Wir betrachten den Torus $S = (\ker\alpha)^\circ \subset T$ und bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & Z_G(S) \arrow[d, two heads] \\ T/S \arrow[r, hook] & Z_G(S)/S \end{tikzcd}$$

Die ober Horizontale ist offensichtlich die Einbettung eines maximalen Torus, und wegen 4.5.6 gilt dasselbe für die untere Horizontale. Wegen $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, G)^\alpha \subset \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, Z_G(S)$ ist andererseits die obere und dann auch die untere Horizontale keine Bijektion. Nach der Klassifikation der Gruppen vom Rang Eins 4.3.2 gibt es also einen Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to Z_G(S)/S$ mit bijektivem Differential im neutralen Element. Die komplexifizierte Liealgebra des Zentralisators ergibt sich andererseits mit 2.4.5 zu

$$\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, Z_G(S) = \bigoplus_{\ker \mathrm{d}\beta \supset \ker \mathrm{d}\alpha} (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, G)^\beta$$

und die komplexifizierte Liealgebra des Quotienten $Z_G(S)/S$ erhalten wir, indem wir in dieser Summe $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, G)^0 = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, T$ ersetzen durch den eindimensionalen Raum $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(T/S)$. Aus dem Vergleich dieser beiden Beschreibungen von $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, Z_G(S)/S$ als Darstellung von $T$ folgt sofort 1.

2. Ein mögliches $s$ erhält man, indem man das nichttriviale Element der Weylgruppe von $Z_G(S)^\circ/S$ unter unserem Homomorphismus $Z_G(S)^\circ \twoheadrightarrow Z_G(S)^\circ/S$ mit 4.5.6 in die Weylgruppe von $Z_G(S)^\circ$ zurückholt. In der Tat haben wir ja eine kurze exakte Sequenz

$$X(T/S) \hookrightarrow X(T) \twoheadrightarrow X(S)$$

Unser $s$ operiert per definitionem vorne durch $-1$, und da es einen Repräsentanten in $Z_G(S)$ hat, muß es hinten als die Identität operieren. Sein Quadrat ist also unipotent und von endlicher Ordnung und muß damit die Identität sein. Das zeigt, daß $s$ als Gitterspiegelung auf $X(T)$ operiert. Die Eindeutigkeit folgt ähnlich, da das Produkt von zwei möglichen Wahlen unipotent und von endlicher Ordnung sein muß.

3. Sicher muß $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(G_\alpha)$ stabil sein unter der komplexen Konjugation und muß folglich mit $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, G)^\alpha$ auch $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, G)^{-\alpha}$ enthalten und damit die von diesem Raum und $(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, G)^\alpha$ erzeugte Unteralgebra $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathrm{Lie}\, Z_G(S)$. Diese Unteralgebra ist nach 1 und 2 von der Dimension höchstens drei, und sie muß surjektiv und folglich vermittels eines Isomorphismus auf $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}\, Z_G(S)/S$ gehen. Unsere

Unteralgebra ist offensichtlich auch stabil unter der komplexen Konjugation, folglich schneidet sie $\operatorname{Lie} Z_G(S)$ in einer Unteralgebra $\mathfrak{g}_\alpha^\mathbb{R}$, die unter der Projektion isomorph auf $\operatorname{Lie} Z_G(S)/S$ alias $\mathfrak{su}(2)$ abgebildet wird. Invertieren wir diesen Isomorphismus, so erhalten wir einen Homomorphismus von Liealgebren

$$\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \operatorname{Lie} Z_G(S)$$

mit Bild $\mathfrak{g}_\alpha^\mathbb{R}$, der sich nach 3.1.2 integrieren läßt zu einem Homomorphismus von Liegruppen

$$\mathrm{SU}(2) \to Z_G(S)$$

Das Bild dieses Homomorphismus ist dann eine Untergruppe $G_\alpha$ mit den gewünschten Eigenschaften. Deren Eindeutigkeit geht aus dem Beweis hervor.

4. Wir betrachten nun die Sequenz

$$\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow G_\alpha \hookrightarrow Z_G(S)^\circ \twoheadrightarrow Z_G(S)^\circ/S$$

und den maximalen Torus $T \subset Z_G(S)^\circ$ und können in allen anderen Gruppen unserer Sequenz maximale Tori so wählen, daß alle Morphismen die gewählten maximalen Tori jeweils ineinander abbilden. Nach 4.5.6 induzieren die Abbildungen unserer ersten drei Gruppen nach $Z_G(S)^\circ/S$ jeweils einen Isomorphismus von Weylgruppen, und zwar liegt jedes Urbild eines Elements aus dem Normalisator des maximalen Torus $T/S$ jeweils im Normalisator des entsprechenden maximalen Torus. Eine der beiden Parametrisierungen des gewählten maximalen Torus der $\mathrm{SU}(2)$ definiert nun einen Homomorphismus $\alpha^\vee : S^1 \to T$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, und für diesen Homomorphismus gilt $s(\alpha^\vee) = -\alpha^\vee$, weil das ja bereits in der $\mathrm{SU}(2)$ geprüft werden kann und dort offensichtlich richtig ist. Wir wissen nun, daß $s$ eine Spiegelung ist, die die Wurzel $\alpha$ auf ihr Negatives abbildet. Für alle $\lambda \in X(T)$ folgt daraus bereits $s\lambda - \lambda = q\alpha$ für ein geeignetes $q \in \mathbb{Q}$. Wenden wir auf diese Gleichung die Linearform $\alpha^\vee$ an, so folgt mit $s(\alpha^\vee) = -\alpha^\vee$ sofort $-2\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \langle s\lambda - \lambda, \alpha^\vee \rangle = \langle q\alpha, \alpha^\vee \rangle = 2q$ und wir erhalten $q = -\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ und $s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$. □

**Proposition 4.5.8.** *Die Weylgruppe einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe wird von den Spiegelungen zu Wurzeln erzeugt.*

*Beweis.* Seien $G \supset T$ unsere kompakte Gruppe und der maximale Torus, zu dem wir die Weylgruppe bilden. Die Spiegelungen $s_\alpha \in W$ zu Wurzeln $\alpha \in R$ operieren auch auf $\operatorname{Lie} T$ als Spiegelungen und erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe in $\mathrm{GL}(\operatorname{Lie} T)$ mit Spiegelebenen $\ker(\mathrm{d}\alpha)$. Unsere Spiegelungsgruppe operiert auf der Menge der Alkoven in $\operatorname{Lie} T$ transitiv nach allgemeinen Resultaten über Spiegelungsgruppen **??**. Natürlich muß jedes Element der Weylgruppe Alkoven in Alkoven überführen. Um zu zeigen, daß die Spiegelungen zu Wurzeln bereits die Weylgruppe erzeugen, muß also nur gezeigt werden, daß ein Element der Weylgruppe, das einen Alkoven festhält, bereits die Identität sein muß. Aber bildet ein Element der Weylgruppe einen Alkoven auf sich selber ab, so hat es in diesem Alkoven auch einen Fixpunkt, sagen wir den Schwerpunkt einer Bahn der Untergruppe, die von besagtem Element erzeugt wird. Unser Element der Weylgruppe wird also repräsentiert im Zentralisator eines Elements $X \in \operatorname{Lie} T$, auf dem das Differential keiner Wurzel verschwindet. Für jeden Punkt $X \in \operatorname{Lie} T$, der vom Differential keiner Wurzel anulliert wird, gilt aber $\operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} Z_G(X) = \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} T$ und damit $\operatorname{Lie} Z_G(X) = \operatorname{Lie} T$. Weil nun nach 4.1.5 der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammmenhängend ist, folgt $Z_G(X) = T$ und unser Element der Weylgruppe war die Identität. □

## 4.6 Wohin?

**Satz 4.6.1.** *Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe $G$ und ein maximaler Torus $T \subset G$ induziert die Einbettung unseres Torus einen Homöomorphismus zwischen dem Raum der Bahnen der Weylgruppe auf dem Torus und dem Raum der Konjugationsklassen in unserer Gruppe*

$$T/W \xrightarrow{\sim} \operatorname{Conj}(G)$$

*Beweis.* Die Surjektivität unserer Abbildung folgt sofort aus **??**. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir an, es gebe $t, s \in T$ und $g \in G$ mit $gTg^{-1} = s$. Dann sind $T$ und $gTg^{-1}$ zwei Tori in $Z_G(s)$, also gibt es $h \in Z_G(s)$ mit $T = hgTg^{-1}h^{-1}$ und wir haben $y = hg \in N_G(T)$ gefunden mit $yty^{-1} = s$. Um schließlich zu zeigen, daß unsere Abbildung ein Homöomorphismus ist, müssen wir nach **??** nur nachweisen, daß die Konjugationsklassen in einer Hausdorffschen kompakten Gruppe einen Hausdorffraum bilden. Das folgt jedoch aus **??**. □

*Bemerkung* 4.6.2 *(Casimir).* Ist $G$ eine kompakte Liegruppe, so gibt es insbesondere auf der adjungierten Darstellung $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ ein invariantes Skalarprodukt $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$. Wir können es als Homomorphismus von Darstellungen $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ auffassen und auch als Isomorphismus von Darstellungen $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ und erhalten durch Dualisieren der ersten Interpretation und Invertieren der zweiten Homomorphismen von Darstellungen

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

Ist $(x_i)_{i=1}^n$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{g}$, so bildet dieser Homomorphismus die $1 \in \mathbb{R}$ ab auf den Tensor $x_1 \otimes x_1 + \ldots + x_n \otimes x_n$, der mithin unter $G$

invariant ist. Ist allgemeiner $(x_i)_{i=1}^n$ irgendeine Basis und $(y_i)_{i=1}^n$ die in Bezug auf unser Skalarprodukt duale Basis, so können wir unseren invarianten Tensor schreiben als $x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_n \otimes y_n$. Ist nun $V$ eine Darstellung von $G$ in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so erhalten wir einen Endomorphismus von $V$, den sogenannten **Casimir-Operator** durch die Vorschrift

$$c_V(v) = x_1 y_1 v = \ldots + x_n y_n v$$

In der Tat führt unser Homomorphismus von eben zu einem Homomorphismus $V \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} V$ und nun müssen wir nur erinnern, daß die Operation von $\mathfrak{g}$ auf $V$ auch einen Homomorphismus von Darstellungen $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} V \to V$ liefert.

## 4.7 Einfache Darstellungen

**Satz 4.7.1 (Klassifikation der einfachen Darstellungen).** *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe und ein maximaler Torus. Sei $W = W(G,T)$ die Weylgruppe und sei auf dem Gewichtegitter $X(T)$ eine positiv definite $W$-invariante $\mathbb{Z}$-wertige Bilinearform gewählt. So haben wir eine von dieser Wahl unabhängige Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{endlichdimensionale} \\ \textit{stetige komplexe einfache} \\ \textit{Darstellungen von } G \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & X(T)/W \\ V & \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} \textit{die Menge der} \\ \textit{längsten Gewichte von } V \end{array} \right\} \end{array}$$

*Bemerkung* 4.7.2. Wir folgern diesen Satz aus der Weyl'schen Integrationsformel, die wir gleich im Anschluß formulieren aber erst zu Ende dieses Abschnitts beweisen.

**Satz 4.7.3.** *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe und ein maximaler Torus. Erklären wir die Funktion $j : T \to \mathbb{R}$ durch $j(t) =$* $\det(\mathrm{id} - \mathrm{Ad}_{G/T}(t))$, *so gilt für alle stetigen Klassenfunktionen $f : G \to \mathbb{C}$ die* **Weyl'sche Integrationsformel**

$$\int_G f(g)\mu^G(g) = \int_T \frac{j(t)}{|W|} f(t)\mu^T(t)$$

*Bemerkung* 4.7.4. Hier bezeichnet $\mathrm{Ad}_{G/T}(t)$ die von der adjungierten Darstellung auf dem Quotienten $\mathrm{Lie}\, G / \mathrm{Lie}\, T$ induzierte Abbildung. Der Beweis der Integrationsformel wird zu Ende dieses Abschnitts gegeben.

*Bemerkung* 4.7.5. Wir schreiben die Gruppenstruktur des Gewichtegitters $X(T)$ additiv in der Hoffnung, daß das der Anschauung hilft. Fassen wir Elemente $\lambda \in X(T)$ dahingegen als konkrete Funktionen $T \to \mathbb{C}$ auf, so schreiben wir $\mathrm{e}^\lambda$, so daß also gilt $\mathrm{e}^\lambda \mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^{\lambda+\mu} \neq \mathrm{e}^\lambda + \mathrm{e}^\mu$ für $\lambda, \mu \in X(T)$. Unsere Funktion $j$ erhält in diesen Notationen die Gestalt

$$j = \prod_{\alpha \in R} (1 - \mathrm{e}^\alpha)$$

Wir wählen nun ein System positiver Wurzeln und betrachten ihre Halbsumme $\rho$. Im größeren Gruppenring $\mathbb{C}[\frac{1}{2}\langle R \rangle]$ des halbierten Wurzelgitters behaupten wir nun, daß wir eine Art Wurzel von $j$ auch als Summe schreiben können:

**Lemma 4.7.6 (Weyl'sche Nennerformel).**

$$\prod_{\alpha \in R^+} (\mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \mathrm{e}^{w\rho}$$

*Beweis.* Beide Seiten ändern ihr Vorzeichen unter Anwendung einer einfachen Spiegelung. Die linke Seite setzt sich zusammen aus Summanden $\mathrm{e}^\lambda$ mit $\lambda \in \rho - |R^+\rangle$. Es reicht also zu zeigen, daß von diesen $\lambda$ nur $\rho$ selbst im Inneren der dominanten Weylkammer liegt. Die fraglichen $\lambda$ sind aber, soweit sie im Abschluß der dominanten Weylkammer liegen, allesamt kürzer als $\rho$ für ein und jedes unter der Weylgruppe invariante Skalarprodukt, mit demselben Argument wie im Beweis von **??**. Wegen **??** kommt also nur $\lambda = \rho$ in Frage. □

*Beweis von 4.7.1.* Wir betrachten die zum Fixpunkt $\rho$ verschobene dot-Operation der Weylgruppe auf $X(T)$ und bilden für $\lambda \in X(T)$ im Gruppenring des Gewichtegitters den Ausdruck

$$A(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \mathrm{e}^{w \cdot \lambda}$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Weyl'schen Nennerformel mit $\mathrm{e}^{-\rho}$, so ergibt sich die Identität

$$\prod_{\alpha \in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha}) = A(0)$$

Nun ist der Gruppenring des Gewichtegitters ein Ring von Laurentpolynomen in endlich vielen Veränderlichen und damit insbesondere ein Integritätsbereich und sogar ein faktorieller Ring. Die $1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$ für $\alpha \in R^+$ sind darin paarweise teilerfremd, wie der Leser zum Beispiel durch Übergang zu einem geeigneten größeren Gitter prüfen mag. Die Identität

$$(1 - \mathrm{e}^{\alpha})(1 + \mathrm{e}^{\alpha} + \ldots \mathrm{e}^{n\alpha}) = (1 - \mathrm{e}^{(n+1)\alpha})$$

zeigt dann, daß $A(0)$ im bereits im Gruppenring des Gewichtegitters $\mathbb{Z}[X]$ jedes $A(\lambda)$ teilt. Wir können mithin für alle dominanten ganzen $\lambda$ im Gruppenring des Gewichtegitters den Quotienten

$$\chi_\lambda = A(\lambda)/A(0)$$

bilden. Er ist sogar invariant unter der Weylgruppe, denn rechnen wir in einem geeignet vergrößerten Gruppenring und erweitern unseren Bruch mit $\mathrm{e}^{\rho}$, so werden Nenner und Zähler unter der Weylgruppe antiinvariant. Wir interpretieren unsere Quotienten nun als unter der Weylgruppe invariante Funktionen auf $T$ und dehnen sie aus zu Klassenfunktionen $\chi_\lambda$ auf $G$. So erhalten wir ein Orthonormalsystem von Klassenfunktionen, denn mit der Weyl'schen Integrationsformel 4.7.3 ergibt sich

$$\int_G \chi_\lambda \overline{\chi}_\nu \,\mu^G = \int_T \frac{A(\lambda)\overline{A(\nu)}}{A(0)\overline{A(0)}} \frac{j}{|W|}\,\mu^T = \frac{1}{|W|}\int_T A(\lambda)\overline{A(\nu)}\,\mu^T = \delta_{\lambda\nu}$$

Andererseits hat $A(\lambda)/A(0)$ Leitterm $\mathrm{e}^{\lambda}$ und daraus folgt, daß die Restriktionen der Funktionen $\chi_\lambda$ eine Basis des Rings $\mathcal{R}(T)^W$ der $W$-invarianten darstellenden Funktionen auf dem Torus $T$ bilden. Ist nun $V$ eine endlichdimensionale Darstellung von $G$, so können wir ihren Charakter darstellen als

$$\chi_V = \sum_\nu n_\nu \chi_\nu$$

mit $n_\nu \in \mathbb{C}$ fast alle Null. Schreiben wir $\chi_\nu = \sum a_{\tau,\nu}\,\mathrm{e}^{\tau}$, so folgt $\mathbb{Z} \ni \dim V_\tau = \sum n_\nu a_{\tau,\nu}$. Da die $a_{\tau,\nu}$ eine Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen bilden, erhalten wir sogar $n_\nu \in \mathbb{Z}$. Ist also $V$ irreduzibel, so gilt ja $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ und daraus folgt sofort $\chi_V = \chi_\lambda$ für ein wohlbestimmtes dominantes ganzes Gewicht $\lambda$, das dann natürlich das höchste Gewicht von $V$ sein muß, und wir erhalten für $V$ auch gleich die sogenannte **Weyl'sche Charakterformel**

$$\chi_V|_T = \frac{\sum (-1)^{l(w)}\,\mathrm{e}^{w\cdot\lambda}}{\sum (-1)^{l(w)}\,\mathrm{e}^{w\cdot 0}}$$

Das zeigt sofort, daß je zwei einfache Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht isomorph sind. Da weiter die Charaktere dicht liegen müssen im Raum der Klassenfunktionen, zeigt es auch, daß es zu jedem dominanten Gewicht eine einfache Darstellung gibt, die dies höchste Gewicht hat. □

*Beweis der Weyl'schen Integrationsformel.* Zunächst einmal wählen wir beliebige nirgends verschwindende differenzierbare Volumenformen $\omega^{G/T}, \omega^T$ und $\omega^G$ auf $G/T, T$ und $G$. Dann interessieren wir uns für die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G/T \times T & \xrightarrow{\varphi} & G \\ (gT\ ,\ t) & \mapsto & gtg^{-1} \end{array}$$

Sicher gibt es eine $C^\infty$-Funktion $c : G/T \times T \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi^* \omega^G = c\, \omega^{G/T} \wedge \omega^T$$

Falls $\omega^G$ invariant ist unter Konjugation und $\omega^{G/T}$ invariant unter Linkstranslation, was wir beides von jetzt an annehmen wollen, so hängt offensichtlich $c$ nur von der zweiten Koordinate ab und kann geschrieben werden als $c(gT, t) = c(t)$. In der Tat haben wir ja $\varphi \circ (h\cdot) = (\operatorname{int} h) \circ \varphi$ für alle $h \in G$. Jetzt nehmen wir zusätzlich $\omega^G$ und $\omega^T$ auch noch invariant unter Linkstranslation an und betrachten für gegebenes $t \in T$ die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccccccc} G \times T & \to & G/T \times T & \to & G/T \times T & \xrightarrow{\varphi} & G & \to & G \\ (g, \tau) & \mapsto & (\bar{g}, \tau) & \mapsto & (\bar{g}, t\tau) & \mapsto & gt\tau g^{-1} & \mapsto & t^{-1} gt\tau g^{-1} \\ T_e G \times T_e T & \to & T_{\bar{e}} G/T \times T_e T & \to & T_{\bar{e}} G/T \times T_t T & \to & T_t G & \to & T_e G \end{array}$$

Das Differential $T_e G \times T_e T \to T_e G$ unserer Verknüpfung ist gegeben durch $(X, Y) \mapsto \operatorname{Ad}(t^{-1})X + Y - X$. Wählen wir irgendeine lineare Linksinverse $T_e G \to T_e T$ zur offensichtlichen Einbettung, so erhalten wir einen Isomorphismus $T_e G \xrightarrow{\sim} T_{\bar{e}} G/T \times T_e T$. Indem wir notfalls $\omega^G$ noch durch einen Skalar abändern, dürfen wir annehmen, daß sich unter diesem Isomorphismus $\omega^G_e$ und $\omega^{G/T}_{\bar{e}} \wedge \omega^T_e$ entsprechen. Lassen wir nun bei unserer Sequenz von linearen Abbildungen oben in der untersten Zeile den ersten Pfeil vorne weg und hängen hinten den neu konstruierten Isomorphismus an, so ergibt sich eine Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} T_{\bar{e}} G/T \times T_e T & \to & T_{\bar{e}} G/T \times T_t T & \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} & T_t G & \to & T_e G & \to & T_{\bar{e}} G/T \times T_e T \\ c(t)\omega^{G/T}_{\bar{e}} \wedge \omega^T_e & \leftarrow & c(t)\omega^{G/T}_{\bar{e}} \wedge \omega^T_t & \leftarrow & \omega^G_t & \leftarrow & \omega^G_e & \leftarrow & \omega^{G/T}_{\bar{e}} \wedge \omega^T_e \end{array}$$

und die Determinante der Verknüpfung ergibt sich aus der allgemeinen Regel für Determinaten von Block-Dreiecksmatrizen zu $\det(\operatorname{Ad}_{G/T}(t^{-1}) - \mathrm{id})$. Ohne die Wahl einer Spaltung von $T_e T \hookrightarrow T_e G$ hätten wir hier auch mit dem kanonischen Isomorphismus $\bigwedge^{\max}(V) = \bigwedge^{\max} U \otimes \bigwedge^{\max}(V/U)$ aus **??** arbeiten können. In jedem Fall zeigt unsere Sequenz für diese Wahlen von $\omega^G, \omega^T$ und $\omega^{G/T}$ die Formel $c(t) = \det(\operatorname{Ad}_{G/T}(t^{-1}) - \mathrm{id})$. Wählen wir nun Orientierungen auf $G, T$ und $G/T$, so erhalten wir für $f : G \to \mathbb{C}$ stetig eine Kette von Gleichheiten “bis auf von $f$ unabhängige multiplikative Konstanten” der Gestalt

$$\int_G f(g)\mu^G(g) \doteq \int_{\vec{G}} f\omega^G \doteq \int_{\overrightarrow{G/T}\times\vec{T}} \varphi^*(f\omega^G)$$

wo der Punkt über den Gleichheitszeichen andeutet, daß unsere Gleichungen eben nur bis auf von $f$ unabhängige multiplikative Konstanten gelten. Für $f$ eine Klassenfunktion erhalten wir weiter

$$\doteq \int_{\vec{T}} cf\omega^T \doteq \int_T c(t)f(t)\mu^T(t) \doteq \int_T j(t)f(t)\mu^T(t)$$

Damit ist bereits gezeigt, daß die Weyl'sche Integrationsformel gilt bis auf eine von der zu integrierenden Funktion $f$ unabhängige multiplikative Konstante $K$. Um diese Konstante $K$ auch noch zu bestimmen, testen wir auf der konstanten Funktion $f = 1$ und müsssen damit nur noch zeigen, $\int_T j(t)\mu^T(t) = |W|$. Dazu erinnern wir uns an die Identität $j(t) = A(0)\overline{A(0)}$, die sich aus der Weyl'schen Nennerformel ergibt. □

# Literatur


[Ben91] D. J. Benson, *Representations and cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 30, Cambridge University Press, 1991.

[BtD85] Bröcker and Tammo tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer, 1985.

[Lan74] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1974.

[MV00] Meyberg and Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, Springer, 2000.

[Ser77] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer, 1977.

# 5 Index

# Index