

# Analysis<sup>1</sup>

Wolfgang Soergel

3. März 2013

<sup>1</sup>Für die bebilderte 40MB-Version siehe .../ANALYSISmitBildern.pdf. Neuere weniger umfangreiche aber besser verlinkte Versionen findet man in <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel> unter Skripten

Im ersten Kapitel habe ich Notationen und Begriffsbildungen zusammengefaßt, von denen ich mir vorstelle, daß sie zu Beginn des Studiums in enger Abstimmung zwischen den beiden Grundvorlesungen entwickelt werden könnten. Im zweiten Kapitel steht allerhand über Mathematik, das nicht zum logisch kohärenten Aufbau beiträgt und teilweise auch stark persönlich gefärbt ist. Die weitere Einteilung in Kapitel spiegelt inhaltliche Einheiten wieder, darf aber nicht als Einteilung in Vorlesungen mißverstanden werden. Mir scheint zum Beispiel, daß der Stoff der folgenden beiden Kapitel über Funktionen einer und mehrerer reellen Veränderlichen mit seinen 347 Textseiten zusammen mit der Hälfte der 29 Textseiten aus dem ersten Kapitel mit den Grundlagen in etwa drei vierstündige Vorlesungen füllen könnte. Besonders wünschenswert für einen derartigen Grundkurs schiene mir, zusätzlich noch die ersten 30 Seiten des Kapitels über Funktionenräume und Symmetrien bis zur Fouriertransformation zu behandeln und dafür notfalls das eine oder andere wegzulassen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>A</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>15</b>
<b>I</b>	<b>Allgemeine Grundlagen</b>	<b>17</b>
1	Einstimmung . . . . .	19
1.1	Vollständige Induktion und binomische Formel . . . . .	19
1.2	Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff . . . . .	27
2	Naive Mengenlehre und Kombinatorik . . . . .	36
2.1	Mengen . . . . .	36
2.2	Abbildungen . . . . .	46
2.3	Logische Symbole und Konventionen . . . . .	56
3	Algebraische Grundbegriffe . . . . .	59
3.1	Mengen mit Verknüpfung . . . . .	59
3.2	Gruppen . . . . .	65
3.3	Homomorphismen . . . . .	70
3.4	Körper . . . . .	74
3.5	Der Aufbau des Zahlensystems* . . . . .	78
4	Zum Schreiben von Mathematik* . . . . .	80
4.1	Herkunft einiger Symbole . . . . .	80
4.2	Grundsätzliches zur Formulierung . . . . .	81
4.3	Sprache und Mathematik . . . . .	82
4.4	Terminologisches zur leeren Menge . . . . .	83
<b>B</b>	<b>Analysis</b>	<b>85</b>
<b>II</b>	<b>Funktionen einer Veränderlichen</b>	<b>87</b>
1	Die reellen Zahlen . . . . .	90
1.1	Wurzeln rationaler Zahlen . . . . .	90
1.2	Ordnungen auf Mengen . . . . .	92
1.3	Angeordnete Körper . . . . .	96
1.4	Die reellen Zahlen . . . . .	98
2	Folgen und Reihen . . . . .	106

2.1	Konvergenz von Folgen . . . . .	106
2.2	Vollständigkeit der reellen Zahlen . . . . .	116
2.3	Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ . . . . .	120
2.4	Die Kreiszahl $\pi$ . . . . .	124
2.5	Grenzwerte von Reihen . . . . .	125
2.6	Wachstum und Zerfall . . . . .	133
3	Stetigkeit . . . . .	140
3.1	Definition und erste Beispiele . . . . .	140
3.2	Umkehrfunktionen und Zwischenwertsatz . . . . .	146
3.3	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	156
3.4	Stetige Funktionen auf Kompakta . . . . .	163
3.5	Integration stetiger Funktionen . . . . .	166
4	Differentiation und Integration . . . . .	175
4.1	Differentiation . . . . .	175
4.2	Ableitungsregeln . . . . .	178
4.3	Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung . . . . .	182
4.4	Regeln von de l'Hospital . . . . .	193
4.5	Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung . . . . .	196
4.6	Integrationsregeln . . . . .	198
4.7	Hyperbolische trigonometrische Funktionen . . . . .	203
5	Potenzreihen und höhere Ableitungen . . . . .	208
5.1	Funktionsfolgen und Potenzreihen . . . . .	208
5.2	Taylorentwicklung . . . . .	217
5.3	Rechnen mit Approximationen . . . . .	220
5.4	Der Abel'sche Grenzwertsatz* . . . . .	224
6	Stetigkeit in mehreren Veränderlichen . . . . .	227
6.1	Vorschläge zur Veranschaulichung . . . . .	227
6.2	Stetigkeit bei metrischen Räumen . . . . .	229
6.3	Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen . . . . .	235
6.4	Abgeschlossene und offene Teilmengen . . . . .	238
6.5	Topologische Räume . . . . .	241
6.6	Grenzwerte in topologischen Räumen . . . . .	247
6.7	Kompakte metrische Räume . . . . .	250
6.8	Affine Räume . . . . .	253
6.9	Normierte Räume . . . . .	254
6.10	Überdeckungen kompakter metrischer Räume . . . . .	261
6.11	Integrale mit Parametern . . . . .	264
7	Raumwertige Funktionen . . . . .	267
7.1	Bogenlänge in metrischen Räumen . . . . .	267
7.2	Ableiten von raumwertigen Funktionen . . . . .	269
7.3	Die Bogenlänge in normierten Räumen . . . . .	275

	7.4	Definition von Sinus und Cosinus . . . . .	279
	7.5	Vollständigkeit und Exponential von Matrizen . . . . .	285
	7.6	Eigenschaften von Sinus und Cosinus . . . . .	290
<b>III</b>		<b>Analysis mit komplexen Zahlen</b>	<b>301</b>
	1	Komplexe Exponentialfunktion . . . . .	303
	1.1	Definition und erste Eigenschaften . . . . .	303
	1.2	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	311
	1.3	Integration von vektorwertigen Funktionen . . . . .	312
	1.4	Integration rationaler Funktionen . . . . .	316
	1.5	Komplexe Differenzierbarkeit* . . . . .	319
	2	Lösung einiger Schwingungsgleichungen . . . . .	325
	2.1	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	325
	2.2	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	329
	2.3	Gekoppelte Schwingungen . . . . .	330
	2.4	Angeregte Schwingungen . . . . .	332
	3	Grundlegendes zu Fourierreihen . . . . .	335
	3.1	Eindeutigkeit der Fourierreihe . . . . .	335
	3.2	Der Satz von Stone-Weierstraß . . . . .	336
	3.3	Konvergenz der Fourierreihe . . . . .	343
<b>IV</b>		<b>Funktionen mehrerer Veränderlichen</b>	<b>347</b>
	1	Ableitungen in mehreren Veränderlichen . . . . .	349
	1.1	Partielle Ableitungen und Gradient . . . . .	349
	1.2	Das Differential . . . . .	353
	1.3	Die Kettenregel . . . . .	361
	1.4	Weitere Ableitungsregeln . . . . .	363
	1.5	Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen . . . . .	367
	2	Mehrfache Integrale und Ableitungen . . . . .	371
	2.1	Integration über kompakte Quader . . . . .	371
	2.2	Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen . . . . .	376
	2.3	Rechnen mit Approximationen . . . . .	379
	2.4	Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen . . . . .	382
	3	Wegintegrale . . . . .	388
	3.1	Vektorfelder und Kovektorfelder . . . . .	388
	3.2	Gradienten in krummlinigen Koordinaten* . . . . .	401
	3.3	Wegintegrale . . . . .	407
	3.4	Wegzusammenhang . . . . .	415
	3.5	Homotopie von Wegen . . . . .	418
	3.6	Rotation und Potential . . . . .	421
	4	Umkehrsatz und Anwendungen . . . . .	436

4.1	Der Satz über die Umkehrabbildung . . . . .	436
4.2	Der Satz über implizite Funktionen . . . . .	444
4.3	Untermannigfaltigkeiten reeller Räume . . . . .	452
4.4	Die Transformationsformel . . . . .	464
4.5	Integration über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	475
5	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	483
5.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . . . .	483
5.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	495
5.3	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	501
5.4	Höhere Ableitungen ohne Koordinaten . . . . .	504
5.5	Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts . . . . .	506
6	Maß und Integral . . . . .	511
6.1	Maßräume und Maße . . . . .	511
6.2	Konstruktion des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$ . . . . .	518
6.3	Meßbare Abbildungen . . . . .	529
6.4	Das Integral von nichtnegativen Funktionen . . . . .	535
6.5	Integrierbare Funktionen und ihr Integral . . . . .	542
6.6	Integration auf Produkträumen . . . . .	548
6.7	Regularität von Borelmaßen . . . . .	558
6.8	Rechnen mit dem Lebesgue-Integral . . . . .	560
6.9	Flächenmaß . . . . .	565
7	Der Satz von Stokes . . . . .	570
7.1	Multilineare Algebra und Dachprodukt . . . . .	570
7.2	Differentialformen höheren Grades . . . . .	575
7.3	Orientierung von Mannigfaltigkeiten . . . . .	580
7.4	Integration von Differentialformen: Theorie . . . . .	583
7.5	Integration von Differentialformen: Praxis . . . . .	591
7.6	Äußere Ableitung von Differentialformen . . . . .	598
7.7	Berandete Untermannigfaltigkeiten . . . . .	604
7.8	Der Satz von Stokes . . . . .	612
7.9	Divergenz und Laplace in krummen Koordinaten* . . . . .	626
<b>V</b>	<b>Funktionsräume und Symmetrien</b>	<b>633</b>
1	Funktionsräume und Fourierreihen . . . . .	635
1.1	Lebesgue-Integral vektorwertiger Funktionen . . . . .	635
1.2	Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen . . . . .	636
1.3	Räume integrierbarer Funktionen . . . . .	639
1.4	Hilberträume und Hilbertbasen . . . . .	644
1.5	Approximation durch differenzierbare Funktionen . . . . .	648
1.6	Fourier-Reihen und Charaktere . . . . .	650
1.7	Orthogonale Projektionen in Hilberträumen . . . . .	653

2	Fouriertransformation . . . . .	659
2.1	Definition und erste Eigenschaften . . . . .	659
2.2	Abstrakte Fouriertransformation . . . . .	671
2.3	Abstrakte Inversionsformel und Poisson-Formel . . . . .	676
2.4	Operationen mit komplexen Maßen . . . . .	683
2.5	Faltung von Maßen und Funktionen . . . . .	686
2.6	Translationsinvariante Teilräume* . . . . .	695
2.7	Allgemeinere Fouriertransformationen* . . . . .	697
3	Spektraltheorie in Hilberträumen . . . . .	704
3.1	Unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$ . . . . .	704
3.2	Selbstadjungierte Operatoren . . . . .	711
3.3	Spektren in Banach-Algebren . . . . .	716
3.4	Spektren selbstadjungierter Operatoren . . . . .	721
3.5	Der Riesz'sche Darstellungssatz . . . . .	727
3.6	Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren . . . . .	730
3.7	Beweis des Spektralsatzes . . . . .	736
3.8	Spektralzerlegung unitärer Darstellungen . . . . .	741
3.9	Operationen von Maßen auf Darstellungen . . . . .	744
3.10	Variationen zum Spektralsatz . . . . .	748
3.11	Unbeschränkte Operatoren . . . . .	752
<b>VI</b>	<b>Mannigfaltigkeiten und Liegruppen</b>	<b>757</b>
1	Matrix-Liegruppen . . . . .	762
1.1	Einfache Darstellungen der Drehgruppen . . . . .	762
1.2	Tangentialraum und Exponentialabbildung . . . . .	766
1.3	Topologischer Zusammenhang . . . . .	775
1.4	Ergänzungen zum Zusammenhangsbegriff* . . . . .	778
1.5	Liealgebren von Matrix-Liegruppen . . . . .	780
1.6	Homomorphismen von Matrix-Liegruppen . . . . .	785
1.7	Drehgruppe und Spingruppe . . . . .	791
1.8	Quaternionale Gruppen . . . . .	792
2	Endlichdimensionale Darstellungen . . . . .	794
2.1	Darstellungen und ihre Ableitungen . . . . .	794
2.2	Einfache Darstellungen der Spingruppe . . . . .	800
2.3	Haar'sches Maß für Matrix-Liegruppen . . . . .	808
2.4	Vollständig reduzible Darstellungen . . . . .	812
2.5	Kugelfunktionen* . . . . .	816
3	Ergänzungen zur Topologie . . . . .	822
3.1	Inneres und Abschluß . . . . .	822
3.2	Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .	825
3.3	Kompakte Räume . . . . .	826

3.4	Konstruktion topologischer Räume . . . . .	829
3.5	Kompakte topologische Eins-Mannigfaltigkeiten* . . . . .	835
3.6	Produkttopologie . . . . .	838
3.7	Topologische Gruppen . . . . .	841
3.8	Quotienten nach Gruppenwirkungen . . . . .	843
3.9	Projektive Räume . . . . .	845
3.10	Eigentliche Abbildungen* . . . . .	848
3.11	Separierte Abbildungen* . . . . .	851
4	Mannigfaltigkeiten und Liegruppen . . . . .	852
4.1	Geringte Räume . . . . .	852
4.2	Mannigfaltigkeiten . . . . .	856
4.3	Tangentialräume . . . . .	862
4.4	Das Tangentialbündel . . . . .	870
4.5	Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	877
4.6	Integralkurven und Flüsse . . . . .	881
4.7	Die Lie-Klammer von Vektorfeldern . . . . .	885
4.8	Lieklammer und adjungierte Darstellung . . . . .	890
4.9	Quotienten und homogene Räume . . . . .	897
4.10	Abelsche Liegruppen . . . . .	902
4.11	Morphismen von Tori . . . . .	908
5	Vektorraumbündel und Felder . . . . .	910
5.1	Lineare Algebra mit Vektorraumbündeln . . . . .	910
5.2	Felder auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	915
5.3	Differentialformen . . . . .	918
5.4	Integration auf abstrakten Mannigfaltigkeiten . . . . .	920
5.5	Wohin? . . . . .	921
5.6	Lie-Ableitung . . . . .	922
5.7	Kotangentialbündel, Wohin? . . . . .	926
5.8	Das viel später bei $G$ -Strukturen . . . . .	927
5.9	Satz von Frobenius, wohin? . . . . .	932
6	Struktur kompakter Liegruppen . . . . .	936
6.1	Maximale Tori in kompakten Liegruppen . . . . .	936
6.2	Klassifikation im Rang Eins . . . . .	940
6.3	Weylgruppen kompakter Liegruppen . . . . .	945
6.4	Klassifikation der kompakten Liegruppen . . . . .	947
7	Spiegelungsgruppen . . . . .	966
7.1	Endliche Spiegelungsgruppen . . . . .	966
7.2	Alkovengeometrie . . . . .	971
7.3	Affine Spiegelungsgruppen . . . . .	980
7.4	Fundamentaltbereiche . . . . .	990
7.5	Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe . . . . .	992

7.6	Coxetergraphen und Klassifikation . . . . .	996
7.7	Struktur affiner Spiegelungsgruppen . . . . .	1009
8	Wurzelsysteme . . . . .	1012
8.1	Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen . . . . .	1012
8.2	Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme . . . . .	1017
8.3	Basen von Wurzelsystemen . . . . .	1023
8.4	Unzerlegbare Wurzelsysteme . . . . .	1028
8.5	Klassifikation von Wurzelsystemen . . . . .	1030
9	Altes zu Wurzelsystemen, noch nötig? . . . . .	1034
9.1	Wichtige Ergänzung für Weyl'sche Nennerformel . . . . .	1034
10	Funktionen auf kompakten Liegruppen . . . . .	1035
10.1	Das Haar-Maß auf Liegruppen . . . . .	1035
10.2	Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	1035
10.3	$G$ -Strukturen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	1039
10.4	Funktionen auf kompakten Matrix-Liegruppen . . . . .	1040
10.5	Matrixkoeffizienten . . . . .	1041
10.6	Kompakte Operatoren . . . . .	1044
10.7	Uniforme Strukturen . . . . .	1049
10.8	Konvolution auf topologischen Gruppen . . . . .	1051
10.9	Der Satz von Peter und Weyl . . . . .	1054
10.10	Faltungsoperation auf Darstellungen . . . . .	1057
10.11	Charaktere . . . . .	1061
10.12	Einfache Darstellungen . . . . .	1062
11	Allgemeine stetige Darstellungen . . . . .	1069
11.1	Topologische Algebra . . . . .	1069
11.2	Kompakt-offene Topologie . . . . .	1072
11.3	Beispiele für stetige Darstellungen . . . . .	1077
11.4	Stetige Induktion . . . . .	1080
11.5	Geometrische Interpretation der Induktion . . . . .	1085
11.6	Der Satz von Hahn-Banach . . . . .	1088
11.7	Filter auf topologischen Räumen . . . . .	1094
11.8	Von-Neumann-Räume . . . . .	1095
11.9	Kompakt getragene Maße . . . . .	1097
11.10	Von-Neumann-Darstellungen . . . . .	1098
11.11	Hauptseriendarstellungen von $SL(2; \mathbb{R})$ . . . . .	1101
11.12	Einfache $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln für $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ . . . . .	1107
11.13	Darstellungen als Moduln über der Maß-Algebra . . . . .	1109
12	Unitäre Darstellungen . . . . .	1112
12.1	Irreduzible unitäre Darstellungen von $SL(2; \mathbb{R})$ . . . . .	1112
12.2	Unitäre $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln . . . . .	1114
12.3	Unitarisierbarkeit . . . . .	1115

	12.4	Unitäre Induktion . . . . .	1116
	12.5	Weitere Beispiele stetiger Darstellungen mit Kategorien, ALT . . . . .	1118
13		Stetige Darstellungen von Lie-Gruppen . . . . .	1119
	13.1	Differenzieren vektorwertiger Funktionen . . . . .	1119
	13.2	Glatte Vektoren . . . . .	1122
	13.3	Algebraisierung . . . . .	1127
	13.4	Beispiel komplexer Gruppen . . . . .	1131
	13.5	Kohomologische Induktion . . . . .	1133
	13.6	Zulässigkeit irreduzibler unitärer Darstellungen . . . . .	1136
	13.7	Halbeinfaches, später . . . . .	1138
14		Ab hier noch nicht in der Vorlesung dran . . . . .	1139
	14.1	Wohin? . . . . .	1139
	14.2	Wohin? . . . . .	1140
	14.3	Klassifikation kompakter Liegruppen, Schrott . . . . .	1140
15		Weiteres zu Liegruppen . . . . .	1141
	15.1	Muß woanders hin, Sammelsurium . . . . .	1141
	15.2	Die adjungierte Darstellung . . . . .	1143
	15.3	Liegruppen . . . . .	1143
	15.4	Märchen: Lie-Gruppen und Liealgebren . . . . .	1144
16		Steinbruch und Schrotthalde . . . . .	1146
	16.1	Gemischte Übungen . . . . .	1146
	16.2	Zusammenhänge . . . . .	1147
	16.3	Mannigfaltigkeiten, alt . . . . .	1150
	16.4	Alter Beweis, wohl ganz Schrott . . . . .	1153
	16.5	Schrott . . . . .	1155
17		Radonmaße und Haar'sche Maße . . . . .	1156
	17.1	Stetige Funktionen auf topologischen Räumen . . . . .	1156
	17.2	Der Riesz'sche Darstellungssatz . . . . .	1158
	17.3	Haar'sche Maße . . . . .	1163
	17.4	Der Satz von Tychonoff . . . . .	1170
18		Unbefriedigende Versuche . . . . .	1172
	18.1	Restbestände . . . . .	1172
	18.2	Radon-Maße, ALT . . . . .	1172
<b>VII</b>		<b>Mist und Versuche</b>	<b>1175</b>
1		Steinbruch-Halde . . . . .	1178
	1.1	Gliederung der Darstellungstheorie . . . . .	1178
	1.2	Lösungen von Übungen . . . . .	1179
	1.3	Zur Überlagerung von Mannigfaltigkeiten . . . . .	1181
	1.4	Zu Riemann'schen Flächen . . . . .	1182

1.5	Alte Beweise . . . . .	1183
1.6	Versuch Differentialform auf beliebiger Mannigfaltigkeit	1183
1.7	Integration über Fasern . . . . .	1185
1.8	Etwas zur Lie-Theorie . . . . .	1187
1.9	Parametrisierte Minimalflächen nach Weierstraß . . . .	1187
1.10	Minimax-Theorem von von Neumann . . . . .	1188
1.11	Hilbert-Schmidt-Operatoren . . . . .	1188
1.12	Spuren in Hilberträumen . . . . .	1190
1.13	Faserungskriterium von Ehresmann . . . . .	1193
1.14	Tangentenumlaufzahl . . . . .	1194
2	Unausgegrenztes zum Lebesgue-Integral . . . . .	1198
2.1	Dichten . . . . .	1198
2.2	Translationsinvariante Maße auf Produkträumen . . . .	1198
3	Klassische Mechanik . . . . .	1200
3.1	Die Newton'schen Bewegungsgleichungen . . . . .	1200
3.2	Planetenbewegung . . . . .	1205
3.3	Systeme mit Zwangsbedingungen . . . . .	1210
3.4	Versuch, Überblick zu schaffen . . . . .	1221
3.5	Wohin? . . . . .	1223
3.6	Hamilton-Versuch . . . . .	1224
3.7	Noch angucken . . . . .	1230
3.8	Krümmungsbegriffe . . . . .	1230
3.9	Symplektische Form auf dem Kotangentenbündel . . . .	1232
3.10	Geodäten . . . . .	1234
3.11	Krümmung von Kurven . . . . .	1235
3.12	Krümmung von Flächen im Raum . . . . .	1238
3.13	Paralleltransport auf gekrümmten Räumen . . . . .	1242
3.14	Wohin? . . . . .	1251
3.15	Relativistische Raumzeit . . . . .	1252
3.16	Die Bewegungsgleichungen geladener Teilchen . . . . .	1259
3.17	Die Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	1263
3.18	Lorentzgruppe, noch Schrott . . . . .	1265
3.19	Schrott . . . . .	1266
3.20	Der Spannungstensor . . . . .	1268
3.21	Versuch zur Verschränkung . . . . .	1270
3.22	Laplace-Operator auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	1272
4	Schrotthalde zur Analysis . . . . .	1273
4.1	Lipschitzstetigkeit des Flusses . . . . .	1273
4.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	1276
4.3	Alter Beweis Umkehrsatz . . . . .	1285
4.4	Landau-Symbole . . . . .	1287

4.5	Ergänzungen für nicht $\sigma$ -endliche Maße . . . . .	1287
4.6	Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen . . . . .	1290
4.7	Markov-Ketten . . . . .	1291
4.8	Unendliche Produkte von Maßräumen . . . . .	1294
4.9	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	1295
4.10	Brown'sche Bewegung . . . . .	1299
4.11	Bedingte Erwartung . . . . .	1302
4.12	Borel-Cantelli . . . . .	1308
4.13	Altes Beispiel Integral 2-Form . . . . .	1309
4.14	Topologischer Dualraum . . . . .	1311
4.15	Topologischer Dualraum . . . . .	1315
4.16	Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen . . . . .	1320
<b>VIII</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>1323</b>
1	Holomorphe Funktionen . . . . .	1325
1.1	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	1325
1.2	Holomorphe Funktionen . . . . .	1328
1.3	Komplexe Wegintegrale . . . . .	1334
1.4	Integralsatz von Cauchy . . . . .	1342
1.5	Beziehung zu Wegintegralen im Reellen* . . . . .	1352
1.6	Integralformel von Cauchy . . . . .	1355
1.7	Potenzreihenentwicklung . . . . .	1361
1.8	Lokale Struktur holomorpher Funktionen . . . . .	1365
2	Singuläre Stellen holomorpher Funktionen . . . . .	1372
2.1	Isolierte Singularitäten und Laurentreihen . . . . .	1372
2.2	Umlaufzahl und Residuensatz . . . . .	1378
2.3	Anwendungen des Residuensatzes . . . . .	1383
3	Verschiedene weiterführende Resultate . . . . .	1391
3.1	Harmonische Funktionen . . . . .	1391
3.2	Reihenentwicklung des Kotangens . . . . .	1398
3.3	Produktentwicklung des Sinus . . . . .	1401
3.4	Gammafunktion . . . . .	1403
3.5	Riemann'scher Abbildungssatz . . . . .	1407
4	Erste Anwendungen in der Zahlentheorie . . . . .	1411
4.1	Verteilung von Primzahlen . . . . .	1411
4.2	Primzahlen in Restklassen . . . . .	1419
4.3	Dirichlet-Reihen . . . . .	1424
5	Unausgegrenztes zur Funktionentheorie . . . . .	1429
5.1	Riemann'sche Flächen . . . . .	1429
5.2	Anschauung für die Galoisgruppe* . . . . .	1442
5.3	Zur Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion . . . . .	1449

5.4	Klassifikation holomorpher Ringgebiete . . . . .	1458
5.5	Elliptische Funktionen . . . . .	1459
5.6	Höhere Differentiale, woanders . . . . .	1461
5.7	Hypergeometrische Funktionen . . . . .	1462
<b>IX</b>	<b>Typische Prüfungsfragen</b>	<b>1465</b>
1	Lineare Algebra . . . . .	1466
2	Algebra . . . . .	1467
3	Analysis . . . . .	1468
4	Funktionentheorie . . . . .	1469
5	Algebraische Geometrie (Staatsexamen) . . . . .	1470
6	Algebraische Gruppen . . . . .	1470

**Literaturverzeichnis**



**Teil A**  
**Grundlagen**



# Kapitel I

## Allgemeine Grundlagen

In diesem ersten Kapitel habe ich Notationen und Begriffsbildungen zusammengefaßt, von denen ich mir vorstelle, daß sie zu Beginn des Studiums in enger Abstimmung zwischen den beiden Grundvorlesungen erklärt werden könnten.

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Einstimmung</b> . . . . .	<b>19</b>
1.1	Vollständige Induktion und binomische Formel . .	19
1.2	Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Naive Mengenlehre und Kombinatorik</b> . . . . .	<b>36</b>
2.1	Mengen . . . . .	36
2.2	Abbildungen . . . . .	46
2.3	Logische Symbole und Konventionen . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Algebraische Grundbegriffe</b> . . . . .	<b>59</b>
3.1	Mengen mit Verknüpfung . . . . .	59
3.2	Gruppen . . . . .	65
3.3	Homomorphismen . . . . .	70
3.4	Körper . . . . .	74
3.5	Der Aufbau des Zahlensystems* . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Zum Schreiben von Mathematik*</b> . . . . .	<b>80</b>
4.1	Herkunft einiger Symbole . . . . .	80
4.2	Grundsätzliches zur Formulierung . . . . .	81
4.3	Sprache und Mathematik . . . . .	82
4.4	Terminologisches zur leeren Menge . . . . .	83



# 1 Einstimmung

## 1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel

**Satz 1.1.1.** Für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gilt  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Beweis.* Bei diesem Beweis sollen Sie gleichzeitig das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** lernen. Wir bezeichnen mit  $A(n)$  die Aussage, daß die Formel im Satz für ein gegebenes  $n$  gilt, und zeigen:

**Induktionsbasis:** Die Aussage  $A(1)$  ist richtig. In der Tat gilt die Formel  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

**Induktionsschritt:** Aus der Aussage  $A(n)$  folgt die Aussage  $A(n+1)$ . In der Tat, unter der Annahme, daß unsere Formel für ein gegebenes  $n$  gilt, der sogenannten **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und folgern so, daß die Formel auch für  $n + 1$  gilt.

Es ist damit klar, daß unsere Aussage  $A(n)$  richtig ist alias daß unsere Formel gilt für alle  $n = 1, 2, 3, \dots$   $\square$

1.1.2. Das Zeichen  $\square$  deutet in diesem Text das Ende eines Beweises an und ist in der neueren Literatur weit verbreitet. Buchstaben in Formeln werden in der Mathematik üblicherweise kursiv notiert, so wie etwa das  $n$  oder auch das  $A$  im vorhergehenden Beweis. Nur Buchstaben oder Buchstabenkombinationen, die stets dasselbe bedeuten sollen, schreibt man nicht kursiv, wie etwa  $\sin$  für den Sinus oder  $\log$  für den Logarithmus. Diese Konvention steht in gewissem Widerspruch zur in der Physik üblichen Konvention, Abkürzungen für Einheiten kursiv zu setzen, wie etwa  $m$  für “Meter”.

1.1.3. Der vorhergehende Beweis stützt sich auf unser intuitives Verständnis der natürlichen Zahlen. Man kann das Konzept der natürlichen Zahlen auch formal einführen und so die natürlichen Zahlen in gewisser Weise “besser” verstehen. Das wird in 2.2.35 und ausführlicher in ?? diskutiert. Das Wort “Induktion” meint eigentlich “Hervorrufen”, so wie etwa das Betrachten einer Wurst die Ausschüttung von Spucke induziert alias uns den Mund wässrig macht. Im Zusammenhang der vollständigen Induktion ist es dahingehend zu

verstehen, daß die Richtigkeit unserer Aussage  $A(1)$  die Richtigkeit von  $A(2)$  induziert, die Richtigkeit von  $A(2)$  wiederum die Richtigkeit von  $A(3)$ , die Richtigkeit von  $A(3)$  die Richtigkeit von  $A(4)$ , und immer so weiter.

1.1.4. Es herrscht keine Einigkeit in der Frage, ob man die Null eine natürliche Zahl nennen soll. In diesem Text ist stets die Null mit gemeint, wenn von natürlichen Zahlen die Rede ist. Wollen wir die Null dennoch ausschließen, so sprechen wir wie oben von einer “natürlichen Zahl  $n \geq 1$ ”.

1.1.5. Ich will kurz begründen, warum es mir natürlich scheint, auch die Null eine natürliche Zahl zu nennen: Hat bildlich gesprochen jedes Kind einer Klasse einen Korb mit Äpfeln vor sich und soll seine Äpfel zählen, so kann es ja durchaus vorkommen, daß in seinem Korb gar kein Apfel liegt, weil es zum Beispiel alle seine Äpfel bereits gegessen hat. In der Begrifflichkeit der Mengenlehre ausgedrückt, die wir in 2.1 einführen werden, muß man die leere Menge endlich nennen, wenn man erreichen will, daß jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Will man dann zusätzlich erreichen, daß die Kardinalität jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl ist, so darf man die Null nicht aus den natürlichen Zahlen herauslassen.

1.1.6. Man kann sich den Satz anschaulich klar machen als eine Formel für die Fläche eines Querschnitts für eine Treppe der Länge  $n$  mit Stufenabstand und Stufenhöhe eins. In der Tat bedeckt ein derartiger Querschnitt ja offensichtlich ein halbes Quadrat der Kantenlänge  $n$  nebst  $n$  halben Quadraten der Kantenlänge Eins. Ein weiterer Beweis geht so:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= 1/2 + 2/2 + \dots + n/2 \\ &\quad + n/2 + (n-1)/2 + \dots + 1/2 \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \dots + \frac{n+1}{2} \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

Ich will diesen Beweis benutzen, um eine neue Notation einzuführen.

**Definition 1.1.7.** Gegeben  $a_1, a_2, \dots, a_n$  schreiben wir

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Das Symbol  $\sum$  ist ein großes griechisches S und steht für “Summe”. Das Symbol  $:=$  deutet an, daß die Bedeutung der Symbole auf der doppelpunktbehafteten Seite des Gleichheitszeichens durch den Ausdruck auf der anderen Seite unseres Gleichheitszeichens definiert ist. Im obigen und ähnlichen Zusammenhängen heißen  $a_1, \dots, a_n$  die **Summanden** und  $i$  der **Laufindex**, da er eben etwa in unserem Fall von 1 bis  $n$  läuft und anzeigt alias “indiziert”, welcher Summand gemeint ist.



Die Gesamtfläche dieses Treppenquerschnitts ist offensichtlich

$$4^2/2 + 4/2 = 4 \cdot 5/2$$

1.1.8. Das Wort “Definition” kommt aus dem Lateinischen und bedeutet “Abgrenzung”. In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen. Sie werden merken, daß man in der Mathematik die Angewohnheit hat, in Definitionen Worte der Umgangssprache wie Menge, Gruppe, Körper, Unterkörper, Abbildung etc. “umzuwidmen” und ihnen ganz spezielle und meist nur noch entfernt mit der umgangssprachlichen Bedeutung verwandte neue Bedeutungen zu geben. In mathematischen Texten sind dann überwiegend diese umgewidmeten Bedeutungen gemeint. In dieser Weise baut die Mathematik also wirklich ihre eigene Sprache auf, bei der jedoch die Grammatik und auch nicht ganz wenige Wörter doch wieder von den uns geläufigen Sprachen übernommen werden. Das muß insbesondere für den Anfänger verwirrend sein, der sich auch bei ganz harmlos daherkommenden Wörtern stets wird fragen müssen, ob sie denn nun umgangssprachlich gemeint sind oder vielmehr bereits durch eine Definition festgelegt wurden. Um hier zu helfen, habe ich mir große Mühe mit dem Index gegeben, das Sie ganz am Schluß dieses Skriptums finden, und in dem alle an verschiedenen Stellen eingeführten oder umgewidmeten und dort fett gedruckten Begriffe verzeichnet sein sollten. Und an dieser Stelle muß ich Sie schon bitten, das Wort “Index” nicht als Laufindex mißzuverstehen. . .

*Beispiel* 1.1.9. In der  $\sum$ -Notation liest sich der in 1.1.6 gegebene Beweis so:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} \\ &\text{und nach Indexwechsel } i = n + 1 - k \text{ hinten} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{2} \\ &\text{dann mache } k \text{ zu } i \text{ in der zweiten Summe} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{2} \\ &\text{und nach Zusammenfassen beider Summen} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2} \\ &\text{ergibt sich offensichtlich} \\ &= n\left(\frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

*Beispiel* 1.1.10. Ein anderer Beweis derselben Formel kann auch durch die folgende von der Mitte ausgehend zu entwickelnde Gleichungskette gegeben werden:

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=0}^n 2i + 1 = 2 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 = n + 1 + 2 \sum_{i=0}^n i$$

**Definition 1.1.11.** In einer ähnlichen Bedeutung wie  $\sum$  verwendet man

auch das Symbol  $\prod$ , ein großes griechisches  $P$ , für “Produkt” und schreibt

$$\prod_{i=1}^n a_i := a_1 a_2 \dots a_n$$

Die  $a_1, \dots, a_n$  heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen die **Faktoren** des Produkts.

**Definition 1.1.12.** Für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  definieren wir die Zahl  $n!$  (sprich:  $n$  **Fakultät**) durch die Formel

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung  $0! := 1$  und haben also  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$  und so weiter.

*Ergänzung 1.1.13.* Wir werden in Zukunft noch öfter Produkte mit überhaupt keinem Faktor zu betrachten haben und vereinbaren deshalb gleich hier schon, daß Produkten, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 1 zugewiesen werden soll, also etwa  $1 = \prod_{i=1}^0 i$ . Ebenso vereinbaren wir auch, daß Summen, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 0 zugewiesen werden soll, so daß wir in Erweiterung unserer Formel 1.1.1 etwa schreiben könnten  $0 = \sum_{i=1}^0 i$ . Der Sinn dieser Erweiterungen zeigt sich darin, daß damit Formeln wie  $\sum_{i=k}^l a_i = \sum_{i=k}^m a_i + \sum_{i=m+1}^l a_i$  auch für  $m = k - 1$  richtig bleiben. Man mag sogar noch weiter gehen und die Definition von Summen auf beliebige untere und obere Grenzen so erweitern, daß diese Formeln richtig bleiben. In dieser Allgemeinheit ist die fragliche Notation jedoch nur beim kontinuierlichen Analogon  $\int$  des Summenzeichens üblich, wie in II.3.5.10 ausgeführt werden wird.

**Satz 1.1.14 (Bedeutung der Fakultät).** *Es gibt genau  $n!$  Möglichkeiten,  $n$  voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

*Beispiel 1.1.15.* Es gibt genau  $3! = 6$  Möglichkeiten, die drei Buchstaben  $a, b$  und  $c$  in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich

$$\begin{array}{l} abc \quad bac \quad cab \\ acb \quad bca \quad cba \end{array}$$

In gewisser Weise stimmt unser Satz sogar für  $n = 0$ : In der Terminologie, die wir in II.1.2 einführen, gibt es in der Tat genau eine Anordnung der leeren Menge.

*Beweis.* Hat man  $n$  voneinander verschiedene Objekte, so hat man  $n$  Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen, dann  $(n - 1)$  Möglichkeiten, ein Zweites auszusuchen und so weiter, bis schließlich nur noch eine Möglichkeit bleibt, ein Letztes auszusuchen. Insgesamt haben wir also in der Tat wie behauptet  $n!$  mögliche Reihenfolgen.  $\square$

**Definition 1.1.16.** Wir definieren für beliebiges  $n$  und jede natürliche Zahl  $k$  die **Binomialkoeffizienten**  $\binom{n}{k}$  (sprich:  $n$  über  $k$ ) durch die Regeln

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ für } k \geq 1 \text{ und } \binom{n}{0} := 1.$$

Der Sonderfall  $k = 0$  wird im Übrigen auch durch unsere allgemeine Formel gedeckt, wenn wir unsere Konvention 1.1.13 beherzigen. Im Lichte des folgenden Satzes schlage ich vor, die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  statt “ $n$  über  $k$ ” inhaltsreicher “ $k$  aus  $n$ ” zu sprechen.

1.1.17. Die Bezeichnung als Binomialkoeffizienten leitet sich von dem Auftreten dieser Zahlen als Koeffizienten in der “binomischen Formel” 1.1.23 ab.

*Ergänzende Übung* 1.1.18. Man zeige: Ist  $p$  eine Primzahl und  $n$  nicht durch  $p$  teilbar und  $e \geq 0$  eine natürliche Zahl, so ist  $\binom{p^e n}{p^e}$  auch nicht durch  $p$  teilbar. Hinweis: Man möge bei der Lösung dieser Übung bereits die Erkenntnis verwenden, daß eine Primzahl ein Produkt nur teilen kann, wenn sie einen der Faktoren teilt. Ein Beweis dieser Tatsache wird in ?? nachgeholt werden.

**Satz 1.1.19 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten).** Gegeben natürliche Zahlen  $n$  und  $k$  gibt es genau  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten, aus  $n$  voneinander verschiedenen Objekten  $k$  Objekte auszuwählen.

*Beispiel* 1.1.20. Es gibt genau  $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$  Möglichkeiten, aus den vier Buchstaben  $a, b, c, d$  zwei auszuwählen, nämlich

$$\begin{array}{l} a, b \quad b, c \quad c, d \\ a, c \quad b, d \\ a, d \end{array}$$

*Beweis.* Wir haben  $n$  Möglichkeiten, ein erstes Objekt auszuwählen, dann  $n - 1$  Möglichkeiten, ein zweites Objekt auszuwählen, und so weiter, also insgesamt  $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$  Möglichkeiten,  $k$  Objekte *der Reihe nach* auszuwählen. Auf die Reihenfolge, in der wir ausgewählt haben, kommt es uns aber gar nicht an, jeweils genau  $k!$  von unseren  $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$

Möglichkeiten führen nach 1.1.14 also zur Auswahl derselben  $k$  Objekte. Man bemerke, daß unser Satz auch im Extremfall  $k = 0$  noch stimmt, wenn wir ihn geeignet interpretieren: In der Terminologie, die wir gleich einführen werden, besitzt in der Tat jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge.  $\square$

1.1.21. Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $n \geq k$  die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Das folgt einerseits sofort aus der formalen Definition und ist andererseits auch klar nach der oben erklärten Bedeutung der Binomialkoeffizienten: Wenn wir aus  $n$  Objekten  $k$  Objekte auswählen, so bleiben  $n - k$  Objekte übrig. Es gibt demnach gleichviele Möglichkeiten,  $k$  Objekte auszuwählen, wie es Möglichkeiten gibt,  $n - k$  Objekte auszuwählen. Wir haben weiter  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$  für jede natürliche Zahl  $n \geq 0$  sowie  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$  für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ .

**Definition 1.1.22.** Wie in der Schule setzen wir  $a^k := \prod_{i=1}^k a$ , in Worten ist also gemeint “das Produkt von  $k$ -mal dem Faktor  $a$ ”, und verstehen im Lichte von 1.1.13 insbesondere  $a^0 = 1$ .

**Satz 1.1.23.** Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt die **binomische Formel**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.1.24. Man beachte, wie wichtig unsere Konvention  $a^0 = 1$  und insbesondere auch  $0^0 = 1$  für die Gültigkeit dieser Formel ist.

1.1.25. Die Bezeichnung “binomische Formel” leitet sich ab von der Vorsilbe “bi” für Zwei, wie etwa in englisch “bicycle” für “Zweirad” alias “Fahrrad”, und dem lateinischen Wort “nomen” für “Namen”. Mit den beiden “Namen” sind hier  $a$  und  $b$  gemeint. Mehr dazu wird in II.3.1.20 erklärt.

*Erster Beweis.* Beim Ausmultiplizieren erhalten wir so oft  $a^k b^{n-k}$ , wie es Möglichkeiten gibt, aus unseren  $n$  Faktoren  $(a + b)$  die  $k$  Faktoren auszusuchen, “in denen wir beim Ausmultiplizieren das  $b$  nehmen”. Dieses Argument werden wir in 2.1.22 noch besser formulieren.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Dieser Beweis ist eine ausgezeichnete Übung im Umgang mit unseren Symbolen und mit der vollständigen Induktion. Er scheint mir jedoch auch in einer für Beweise durch vollständige Induktion typischen Weise

wenig durchsichtig. Zunächst prüfen wir für beliebiges  $n$  und jede natürliche Zahl  $k \geq 1$  die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

durch explizites Nachrechnen. Dann geben wir unserer Formel im Satz den Namen  $A(n)$  und prüfen die Formel  $A(0)$  und zur Sicherheit auch noch  $A(1)$  durch Hinsehen. Schließlich gilt es, den Induktionsschritt durchzuführen, als da heißt,  $A(n+1)$  aus  $A(n)$  zu folgern. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &\text{und mit der Induktionsvoraussetzung} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &\text{und durch Ausmultiplizieren} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &\text{und Indexwechsel } k = i-1 \text{ in der ersten Summe} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &\text{dann mit } k \text{ statt } i \text{ und Absondern von Summanden} \\ &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\ &\text{und nach Zusammenfassen der mittleren Summen} \\ &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\ &\text{und Einbeziehen der abgesonderten Summanden} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

und folgern so tatsächlich  $A(n+1)$  aus  $A(n)$ . □

1.1.26. Die Formel  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$  für  $k \geq 1$  kann man zur effektiven Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascal'schen Dreieck** benutzen: Im Schema

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl in der Mitte berechne sich als die Summe ihrer beiden oberen "Nachbarn". Dann stehen in

der  $(n+1)$ -ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \dots$ , bis  $\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$ . Wir haben also zum Beispiel

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

*Übung 1.1.27.* Man finde und beweise eine Formel für  $\sum_{i=1}^n i^2$ . Hinweis: Man suche zunächst eine Formel für  $\sum_{i=1}^n i^3 - (i-1)^3$  und beachte  $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$ .

*Ergänzende Übung 1.1.28.* Man zeige, daß für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Formel der Gestalt  $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$  gilt mit  $a_k \in \mathbb{Q}$ .

## 1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff

*Beispiel 1.2.1.* Die **Fibonacci-Folge**

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

entsteht, indem man mit  $f_0 = 0$  und  $f_1 = 1$  beginnt und dann jedes weitere Folgenglied als die Summe seiner beiden Vorgänger bildet. Wir suchen nun für die Glieder  $f_i$  dieser Folge eine geschlossene Darstellung. Dazu vereinbaren wir, daß wir Folgen  $x_0, x_1, x_2, \dots$  mit der Eigenschaft  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$  für  $n = 2, 3, 4, \dots$  **Folgen vom Fibonacci-Typ** nennen wollen. Kennen wir die beiden ersten Glieder einer Folge vom Fibonacci-Typ, so liegt natürlich bereits die gesamte Folge fest. Nun bemerken wir, daß für jede Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  vom Fibonacci-Typ und jedes  $\alpha$  auch die Folge  $\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \dots$  vom Fibonacci-Typ ist, und daß für jede weitere Folge  $y_0, y_1, y_2, \dots$  vom Fibonacci-Typ auch die gliedweise Summe  $(x_0 + y_0), (x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \dots$  eine Folge vom Fibonacci-Typ ist. Der Trick ist dann, danach zu fragen, für welche  $\beta$  die Folge  $x_i = \beta^i$  vom Fibonacci-Typ ist. Das ist ja offensichtlich genau dann der Fall, wenn gilt  $\beta^2 = \beta + 1$ , als da heißt für  $\beta_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ . Für beliebige  $c, d$  ist mithin die Folge

$$x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$$

vom Fibonacci-Typ, und wenn wir  $c$  und  $d$  bestimmen mit  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 1$ , so ergibt sich eine explizite Darstellung unserer Fibonacci-Folge. Wir suchen also  $c$  und  $d$  mit

$$\begin{aligned} 0 &= c + d \\ 1 &= c\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right) + d\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right) \end{aligned}$$

und folgern leicht  $c = -d$  und  $1 = c\sqrt{5}$  alias  $c = 1/\sqrt{5} = -d$ . Damit ergibt sich schließlich für unsere ursprüngliche Fibonacci-Folge die explizite

Darstellung

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i$$

Im übrigen ist der zweite Summand hier immer kleiner als  $1/2$ , so daß wir  $f_i$  auch beschreiben können als diejenige ganze Zahl, die am nächstem am ersten Summanden liegt. Es wäre rückblickend natürlich ein Leichtes gewesen, diese Formel einfach zu “raten” um sie dann mit vollständiger Induktion 1.1.1 zu beweisen. Diese Art mathematischer Zaubertricks halte ich jedoch für unehrenhaft. Ich werde deshalb stets nach Kräften versuchen, das Tricksen zu vermeiden, auch wenn die Beweise dadurch manchmal etwas länger werden sollten. Eine Möglichkeit, auch den letzten verbleibenden Trick aus den vorhergehenden Überlegungen zu eliminieren, zeigt ???. Die bei unserer Lösung auftretende reelle Zahl  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  ist im Übrigen auch bekannt als “goldener Schnitt” aus Gründen, die in nebenstehendem Bild diskutiert werden. In II.2.3.4 dürfen Sie dann zur Übung zeigen, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also genauer und in Formeln für unsere Fibonacci-Folge  $f_0, f_1, f_2, \dots$  von oben gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

*Übung 1.2.2.* Ein Kredit von 10000 Euro wird am Ende jeden Jahres mit einem jährlichen Zinssatz von 5% auf die jeweilige Restschuld verzinst und der Kreditnehmer zahlt zu Beginn jeden Jahres 1000 Euro zurück. Man finde eine geschlossene Formel für die Restschuld am Ende des  $n$ -ten Jahres.

*Übung 1.2.3.* Kann man für jede Folge  $x_0, x_1, \dots$  vom Fibonacci-Typ Zahlen  $c, d$  finden mit  $x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$  für alle  $i$ ? Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Glieder der Folge, die mit  $0, 0, 1$  beginnt und dem Bildungsgesetz  $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$  gehorcht.

*Beispiel 1.2.4.* Ein System von mehreren Gleichungen, in denen dieselben Unbekannten auftauchen, nennt man auch ein **Gleichungssystem**. Wir betrachten ein “homogenes lineares” Gleichungssystem alias ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{array}{rcccccl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + & \dots & + \alpha_{1m}x_m & = & 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + & \dots & + \alpha_{2m}x_m & = & 0 \\ & & \vdots & & \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + & \dots & + \alpha_{nm}x_m & = & 0 \end{array}$$



SkriptenBilder/BildGSc.png

Der **goldene Schnitt** ist das Verhältnis, in dem eine Strecke geteilt werden muß, damit das Verhältnis vom größeren zum kleineren Stück gleich dem Verhältnis des Ganzen zum größeren Stück ist, also die positive Lösung der Gleichung  $a/1 = (1 + a)/a$  alias  $a^2 - a - 1 = 0$ , also  $a = (1 + \sqrt{5})/2$ .

Wie man zu vorgegebenen  $\alpha_{i,j}$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$  die Menge  $L$  aller Lösungen  $(x_1, \dots, x_m)$  ermittelt, sollen sie später in dieser Vorlesung lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Sind  $(x_1, \dots, x_m)$  und  $(x'_1, \dots, x'_m)$  Lösungen, so ist auch ihre komponentenweise Summe  $(x_1 + x'_1, \dots, x_m + x'_m)$  eine Lösung;
2. Ist  $(x_1, \dots, x_m)$  eine Lösung und  $\alpha$  eine reelle Zahl, so ist auch das komponentenweise Produkt  $(\alpha x_1, \dots, \alpha x_m)$  eine Lösung.

*Beispiel 1.2.5.* Wir betrachten die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die zweimal differenzierbar sind und der Differentialgleichung

$$f'' = -f$$

genügen. Lösungen sind zum Beispiel die Funktionen  $\sin, \cos$ , die Nullfunktion oder auch die Funktionen  $f(x) = \sin(x + a)$  für konstantes  $a$ . Wie man die Menge  $L$  aller Lösungen beschreiben kann, sollen Sie nicht hier lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Mit  $f$  und  $g$  ist auch die Funktion  $f + g$  eine Lösung;
2. Ist  $f$  eine Lösung und  $\alpha$  eine reelle Zahl, so ist auch  $\alpha f$  eine Lösung.

*Beispiel 1.2.6.* Wir betrachten die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafel Ebene. Graphisch stellen wir solch eine Parallelverschiebung dar durch einen Pfeil von irgendeinem Punkt zu seinem Bild unter der Verschiebung. Im nebenstehenden Bild stellen etwa alle gepunkteten Pfeile dieselbe Parallelverschiebung dar. Was für ein Ding diese Gesamtheit  $P$  aller Parallelverschiebungen eigentlich ist, scheint mir recht undurchsichtig, aber einiges ist a priori klar:

1. Sind  $p$  und  $q$  Parallelverschiebungen, so ist auch ihre "Hintereinanderausführung"  $p \circ q$ , sprich " $p$  nach  $q$ ", eine Parallelverschiebung.
2. Ist  $\alpha$  eine reelle Zahl und  $p$  eine Parallelverschiebung, so können wir eine neue Parallelverschiebung  $\alpha p$  bilden, das " $\alpha$ -fache von  $p$ ". Bei negativen Vielfachen vereinbaren wir hierzu, daß eine entsprechende Verschiebung in die Gegenrichtung gemeint ist.
3. Führen wir eine neue Notation ein und schreiben für die Hintereinanderausführung  $p \dagger q := p \circ q$ , so gelten für beliebige Parallelverschiebungen



Die Hintereinanderausführung der beiden Parallelverschiebungen der Tafel- oder hier vielmehr der Papierebene, die durch die durchgezogenen Pfeile dargestellt werden, wird die durch die gepunkteten Feile dargestellt.

$p, q, r$  der Tafelenebene und beliebige reelle Zahlen  $\alpha, \beta$  die Formeln

$$\begin{aligned}(p \dot{+} q) \dot{+} r &= p \dot{+} (q \dot{+} r) \\ p \dot{+} q &= q \dot{+} p \\ \alpha(\beta p) &= (\alpha\beta)p \\ (\alpha + \beta)p &= (\alpha p) \dot{+} (\beta p) \\ \alpha(p \dot{+} q) &= (\alpha p) \dot{+} (\alpha q)\end{aligned}$$

Will man sich die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafelenebene anschaulich machen, so tut man im Übrigen gut daran, einen Punkt als “Ursprung” auszuzeichnen und jede Parallelverschiebung mit dem Punkt der Tafelenebene zu identifizieren, auf den unsere Parallelverschiebung diesen Ursprung abbildet.

*Beispiel 1.2.7.* Analoges gilt für die Gesamtheit der Parallelverschiebung des Raums unserer Anschauung und auch für die Gesamtheit aller Verschiebungen einer Geraden und, mit noch mehr Mut, für die Gesamtheit aller Zeitspannen.

1.2.8. Die Formeln unserer kleinen Formelsammlung von 1.2.6.3 gelten ganz genauso auch für die Lösungsmenge unserer Differentialgleichung  $f'' = -f$ , wenn wir  $f \dot{+} g := f + g$  verstehen, für die Lösungsmenge unseres linearen Gleichungssystems, wenn wir

$$(x_1, \dots, x_m) \dot{+} (x'_1, \dots, x'_m) := (x_1 + x'_1, \dots, x_m + x'_m)$$

als “komponentenweise Addition” verstehen, und für die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ, wenn wir ähnlich die Summe  $\dot{+}$  zweier Folgen erklären. Ein wesentliches Ziel der folgenden Vorlesungen über lineare Algebra ist es, einen abstrakten Formalismus aufzubauen, dem sich alle diese Beispiele unterordnen. Dadurch soll zweierlei erreicht werden:

1. Unser abstrakter Formalismus soll uns dazu verhelfen, die uns als Augentieren und Nachkommen von Ästehüpfern angeborene räumliche Anschauung nutzbar zu machen zum Verständnis der bis jetzt gegebenen Beispiele und der vielen weiteren Beispiele von Vektorräumen, denen Sie im Verlauf Ihres Studiums noch begegnen werden. So werden sie etwa lernen, daß man sich die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ durchaus als Ebene vorstellen darf und die Menge aller Folgen mit vorgegebenem Folgenglied an einer vorgegebenen Stelle als eine Gerade in dieser Ebene. Suchen wir also alle Folgen vom Fibonacci-Typ mit zwei vorgegebenen Folgengliedern, so werden wir im allgemeinen genau eine derartige Lösung finden, da sich eben zwei Geraden aus einer Ebene im allgemeinen in genau einem Punkt schneiden. In diesem Licht betrachtet soll der abstrakte Formalismus uns also helfen,

a priori unanschauliche Fragestellungen der Anschauung zugänglich zu machen. Ich denke, diese Nähe zur Anschauung ist auch der Grund dafür, daß die lineare Algebra meist an den Anfang des Studiums gestellt wird: Von der Schwierigkeit des Formalismus her gesehen gehört sie nämlich keineswegs zu den einfachsten Gebieten der Mathematik, hier würde ich eher an Gruppentheorie oder Graphentheorie oder dergleichen denken.

2. Unser abstrakter Formalismus soll so unmißverständlich sein und seine Spielregeln so klar, daß Sie in die Lage versetzt werden, alles nachzuvollziehen und mir im Prinzip und vermutlich auch in der Realität Fehler nachzuweisen. Schwammige Begriffe wie “Tafelebene” oder “Parallelverschiebung des Raums” haben in einem solchen Formalismus keinen Platz mehr. In diesem Licht betrachtet verfolgen wir mit dem Aufbau des abstrakten Formalismus auch das Ziel einer großen Vereinfachung durch die Reduktion auf die Beschreibung einiger weniger Aspekte der uns umgebenden in ihrer Komplexität kaum präzise faßbaren Wirklichkeit.

Die lineare Algebra hat in meinen Augen drei wesentliche Aspekte: Einen **geometrischen Aspekt**, wie ihn das Beispiel 1.2.6 der Gesamtheit aller Parallelverschiebungen illustriert; einen **algorithmischen Aspekt**, unter den ich das Beispiel 1.2.4 der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems und insbesondere explizite Verfahren zur Bestimmung dieser Lösungsmenge einordnen würde; und einen **abstrakt-algebraischen Aspekt**, eine Art gedankliches Skelett, das Algorithmik und Geometrie verbindet und Brücken zu vielen weiteren Anwendungen schafft, die man dann auch als das Fleisch auf diesem Gerippe ansehen mag. Ich will im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen zur linearen Algebra versuchen, diese drei Aspekte zu einer Einheit zu fügen. Ich hoffe, daß Sie dadurch in die Lage versetzt werden, eine Vielzahl von Problemen mit den verbundenen Kräften Ihrer räumlichen Anschauung, Ihrer algorithmischen Rechenfähigkeiten und Ihres abstrakt-logischen Denkens anzugehen. Als Motivation für den weiteren Fortgang der Vorlesungen über lineare Algebra beschreibe ich nun das “Rückgrat unseres Skeletts” und formuliere ohne Rücksicht auf noch unbekannte Begriffe und Notationen die abstrakte Definition eines reellen Vektorraums.

**Definition 1.2.9.** Ein **reeller Vektorraum** ist ein Tripel bestehend aus den folgenden drei Dingen:

1. Einer Menge  $V$ ;
2. Einer Verknüpfung  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(v, w) \mapsto v + w$ , die  $V$  zu einer abelschen Gruppe macht;
3. Einer Abbildung  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ,  $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$ ,

derart, daß für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und alle  $v, w \in V$  gilt:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta v) &= (\alpha\beta)v \\ (\alpha + \beta)v &= (\alpha v) \dot{+} (\beta v) \\ \alpha(v \dot{+} w) &= (\alpha v) \dot{+} (\alpha w) \\ 1v &= v\end{aligned}$$

Hier ist nun viel zu klären: Was ist eine Menge? Eine Verknüpfung? Eine abelsche Gruppe? Eine Abbildung? Was bedeuten die Symbole  $\times$ ,  $\rightarrow$ ,  $\mapsto$ ,  $\in$ ,  $\mathbb{R}$ ? Wir beginnen in der nächsten Vorlesung mit der Klärung dieser Begriffe und Notationen.

1.2.10. Bereits hier will ich jedoch die Symbole  $\alpha$  und  $\beta$  erklären: Sie heißen “Alpha” und “Beta” und sind die beiden ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, das ja auch nach ihnen benannt ist. Bei der Darstellung von Mathematik hilft es, viele verschiedene Symbole und Symbolfamilien zur Verfügung zu haben. Insbesondere werden die griechischen Buchstaben oft und gerne verwendet. Ich schreibe deshalb hier zum Nachschlagen einmal das griechische Alphabet auf. In der ersten Spalte stehen der Reihe nach die griechischen Kleinbuchstaben, dahinter die zugehörigen Großbuchstaben, dann ihr lateinisches Analogon soweit vorhanden, und schließlich, wie man

diesen griechischen Buchstaben auf Deutsch benennt und spricht.

$\alpha$	A	a	alpha
$\beta$	B	b	beta
$\gamma$	$\Gamma$	g	gamma
$\delta$	$\Delta$	d	delta
$\epsilon, \varepsilon$	E	e	epsilon
$\zeta$	Z	z	zeta
$\eta$	H	ä	eta
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	th	theta
$\iota$	I	i	iota
$\kappa$	K	k	kappa
$\lambda$	$\Lambda$	l	lambda
$\mu$	M	m	my, sprich "mü"
$\nu$	N	n	ny, sprich "nü"
$\xi$	$\Xi$	x	xi
$o$	O	o	omikron
$\pi$	$\Pi$	p	pi
$\rho, \varrho$	P	r	rho
$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	s	sigma
$\tau$	T	t	tau
$\upsilon$	$\Upsilon$	y	ypsilon
$\phi, \varphi$	$\Phi$	f	phi
$\chi$	X	ch	chi
$\psi$	$\Psi$	ps	psi
$\omega$	$\Omega$	oh	omega

## 2 Naive Mengenlehre und Kombinatorik

### 2.1 Mengen

2.1.1. Beim Arbeiten mit reellen Zahlen oder räumlichen Gebilden reicht auf der Schule ein intuitives Verständnis meist aus, und wenn die Intuition in die Irre führt, ist ein Lehrer zur Stelle. Wenn Sie jedoch selbst unterrichten oder etwas beweisen wollen, reicht dieses intuitive Verständnis nicht mehr aus. *Im folgenden werden deshalb zunächst der Begriff der reellen Zahlen und der Begriff des Raums zurückgeführt auf Grundbegriffe der Mengenlehre, den Begriff der rationalen Zahlen, und elementare Logik.* Bei der Arbeit mit diesen Begriffen führt uns die Intuition nicht so leicht in die Irre, wir geben uns deshalb mit einem intuitiven Verständnis zufrieden und verweisen jeden, der es noch genauer wissen will, auf eine Vorlesung über Logik. Wir beginnen mit etwas naiver Mengenlehre, wie sie von Georg Cantor in den Jahren 1874-1897 begründet wurde, und von der der berühmte Mathematiker David Hilbert einmal sagte: "Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können". Natürlich gab es auch vor der Mengenlehre schon hoch entwickelte Mathematik, bei Carl Friedrich Gauß Tod 1855 gab es diese Theorie noch gar nicht und Fourier fand seine "Fourierentwicklung" sogar bereits zu Beginn des 19.-ten Jahrhunderts. Er behauptete auch gleich in seiner "Théorie analytique de la chaleur", daß sich jede beliebige periodische Funktion durch eine Fourierreihe darstellen lasse, aber diese Behauptung stieß bei anderen berühmten Mathematikern seiner Zeit auf Ablehnung und es entstand darüber ein heftiger Disput. Erst in besagtem "Paradies der Mengenlehre" konnten die Fourier's Behauptung zugrundeliegenden Begriffe soweit geklärt werden, daß dieser Disput nun endgültig beigelegt ist. Ähnlich verhält es sich auch mit vielen anderen Fragestellungen. Da die Mengenlehre darüber hinaus auch vom didaktischen Standpunkt aus eine äußerst klare und durchsichtige Darstellung mathematischer Sachverhalte ermöglicht, hat sie sich als Grundlage der höheren Mathematik und der Ausbildung von Mathematikern an Universitäten schnell durchgesetzt und ist nun weltweit ein wesentlicher Teil des "Alphabets der Sprache der Mathematiker". Man wird an Universitäten sogar geradezu dazu erzogen, geometrischen Argumenten keine Beweiskraft zuzugestehen, und ich halte das bei der Ausbildung von Mathematikern auch für angemessen. Bei der Mathematik-Ausbildung im allgemeinen scheint mir dieses Vorgehen dahingegen nicht zielführend: In diesem Kontext sollte man meines Erachtens nicht mit demselben Maß messen, auch ohne alle Mengenlehre geometrisch erklärte Begriffe wie Gerade und Kreis, Ebene und Raum, als wohldefinierte Objekte der Mathematik zulassen, und geometrischen Argumenten durchaus Beweiskraft zugestehen.

2.1.2. Im Wortlaut der ersten Zeilen des Artikels “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Aufsatz)” von Georg Cantor, erschienen im Jahre 1895, hört sich die Definition einer Menge so an:

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.

Verbinden wir mit einer Menge eine geometrische Vorstellung, so nennen wir ihre Elemente auch **Punkte** und die Menge selbst einen **Raum**. Ein derartiges Herumgerede ist natürlich keine formale Definition und birgt auch verschiedene Fallstricke, vergleiche 2.1.24. Das Ziel dieser Vorlesung ist aber auch nicht eine formale Begründung der Mengenlehre, wie Sie sie später in der Logik kennenlernen können. Sie sollen vielmehr die Bedeutung dieser Worte intuitiv erfassen wie ein Kleinkind, das Sprechen lernt: Indem sie mir und anderen Mathematikern zuhören, wie wir mit diesen Worten sinnvolle Sätze bilden, uns nachahmen, und beobachten, welchen Effekt Sie damit hervorrufen. Unter anderem dazu sind die Übungsgruppen da.

*Beispiele* 2.1.3. Endliche Mengen gibt man oft durch eine vollständige Liste ihrer Elemente in geschweiften Klammern an, zum Beispiel in der Form  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Diese geschweiften Klammern heißen auch **Mengenklammern**. Die Elemente dürfen mehrfach genannt werden, und es kommt nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden. So haben wir also  $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$ . Die Aussage “ $x$  ist Element von  $X$ ” wird mit  $x \in X$  abgekürzt, ihre Verneinung “ $x$  ist nicht Element von  $X$ ” mit  $x \notin X$ . Es gibt auch die sogenannte **leere Menge**  $\emptyset = \{ \}$ , die gar kein Element enthält. Andere Beispiele sind die Menge der **natürlichen Zahlen**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , die Menge der **ganzen Zahlen**  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  und die Menge der **rationalen Zahlen**  $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ . Der Name letzterer Menge kommt von lateinisch “ratio” für “Verhältnis”. Man beachte, daß wir auch hier Elemente mehrfach genannt haben, es gilt ja  $p/q = p'/q'$  genau dann, wenn  $pq' = p'q$ . Auf Deutsch bezeichnet man die rationalen Zahlen auch als **Bruchzahlen**, da man sich etwa ein Viertel eines Kekses als den Anteil denken kann, der entsteht, wenn man besagten Keks in vier gleiche Teile zerbricht.

2.1.4. Die Verwendung des Kommas als Trenner ist hier insofern problematisch, als  $\{1, 2\}$  nun sowohl als die Menge mit den beiden Elementen 1 und 2 verstanden werden kann, als auch als die Menge mit dem Dezimalbruch 1,2 als einzigem Element. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen oder durch genaues Prüfen des Freiraums nach dem Komma. In diesem Text werden Dezimalbrüche nur selten vorkommen.

*Ergänzung 2.1.5.* Das Gleichheitszeichen  $=$  scheint auf ein 1557 von Robert Recorde publiziertes Buch zurückzugehen und soll andeuten, daß das, was auf der linken und rechten Seite dieses Zeichens steht, so gleich ist wie die beiden Strichlein, die das uns heute so selbstverständliche Gleichheitszeichen bilden. Davor schrieb man statt einem Gleichheitszeichen meist *ae* für “äquivalent”.

2.1.6. In Texten, in deren Konventionen die Null keine natürliche Zahl ist, verwendet man meist die abweichenden Notationen  $\mathbb{N}$  für die Menge  $\{1, 2, \dots\}$  und  $\mathbb{N}_0$  für die Menge  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Die in diesem Text verwendete Notation  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  stimmt mit der internationalen Norm ISO 31-11 überein.

**Definition 2.1.7.** Eine Menge  $Y$  heißt **Teilmenge** einer Menge  $X$  genau dann, wenn jedes Element von  $Y$  auch ein Element von  $X$  ist. Man schreibt dafür  $Y \subset X$  oder  $X \supset Y$ . Zum Beispiel ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge, in Formeln  $\emptyset \subset X$ , und  $\{x\} \subset X$  ist gleichbedeutend zu  $x \in X$ . Zwei Teilmengen einer gegebenen Menge, die kein gemeinsames Element haben, heißen **disjunkt**.

2.1.8. Gegeben eine Teilmenge  $Y \subset X$  sage ich auch,  $X$  **umfaßt**  $Y$ . Gegeben ein Element  $x \in X$  sage ich,  $x$  **gehört zu**  $X$ . Andere Sprechweise möchte ich ungern auf eine Bedeutung festlegen. Gegeben eine Teilmenge  $Y \subset X$  kann man sagen, “ $Y$  sei enthalten in  $X$ ” oder “ $Y$  liege in  $X$ ”, und gegeben ein Element  $x \in X$  kann auch sagen, “ $x$  sei enthalten in  $X$ ” oder “ $x$  liege in  $X$ ”. Was genau gemeint ist, gilt es dann aus dem Kontext zu erschließen.

*Bemerkung 2.1.9.* Unsere Notation  $\subset$  weicht ab von der internationalen Norm ISO 31-11, die statt unserem  $\subset$  das Symbol  $\subseteq$  vorschlägt. In den Konventionen ISO 31-11 hat das Symbol  $\subset$  abweichend die Bedeutung einer **echten**, d.h. von der ganzen Menge verschiedenen Teilmenge, für die wir hinwiederum die Bezeichnungen  $\subsetneq$  oder  $\subsetneqq$  verwenden werden. Meine Motivation für diese Abweichung ist, daß das Symbol für beliebige Teilmengen sehr häufig und das für echte Teilmengen nur sehr selten vorkommt. Die hier verwendete Notation ist auch weit verbreitet und schon sehr viel länger in Gebrauch, das Symbol  $\subseteq$  ist eine vergleichsweise neue Konvention. Ich muß jedoch zugeben, daß die hier gewählte Notation mit den üblichen und auch in diesem Text verwendeten Notationen  $<$  und  $\leq$  hinwiederum weniger gut zusammenpaßt.

**Definition 2.1.10.** Wir vereinbaren, daß wir die leere Menge endlich nennen wollen, damit jede Teilmenge einer endlichen Menge auch wieder endlich ist. Die Zahl der Elemente einer endlichen Menge  $X$  nennen wir ihre **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** und notieren sie  $|X|$  oder  $\text{card}(X)$ . In der Literatur findet man auch die Notation  $\sharp X$ . Ist  $X$  unendlich, so schreiben wir kurz  $|X| = \infty$  und ignorieren in unserer Notation, daß auch unendliche Mengen

“verschieden groß” sein können, für ein Beispiel siehe II.2.3.6 und für eine genauere Diskussion des Begriffs der Kardinalität ???. Für endliche Mengen  $X$  ist demnach ihre Kardinalität stets eine natürliche Zahl  $|X| \in \mathbb{N}$  und  $|X| = 0$  ist gleichbedeutend zu  $X = \emptyset$ .

2.1.11. Oft bildet man Mengen als Teilmengen bestehender Mengen. Gebräuchlich ist dazu die Notation

$$Y = \{x \in X \mid x \text{ hat eine gewisse Eigenschaft}\}$$

Zum Beispiel gilt  $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$  und  $\{0, 1\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 = a\}$ .

2.1.12. Bereits an dieser Stelle ist unsere Notation nicht eindeutig: Ich wollte mit  $\{0, 1\}$  die zweielementige Menge mit den beiden Elementen Null und Eins andeuten, das könnte jedoch auch als die Menge mit der Dezimalzahl 0,1 als einzigem Element interpretiert werden. Es wird noch oft vorkommen, daß sich die Bedeutung einer Formel erst aus dem Kontext erschließt. Im folgenden werden Kommas fast nie als Kommas einer Dezimalzahl zu verstehen sein. Beim genauen Hinsehen kann man am Abstand hinter dem Komma erkennen, wann doch eine Dezimalzahl gemeint ist.

**Definition 2.1.13.** Es ist auch erlaubt, die “Menge aller Teilmengen” einer gegebenen Menge  $X$  zu bilden. Sie heißt die **Potenzmenge** von  $X$  und wird mit  $\mathcal{P}(X)$  bezeichnet.

2.1.14. Ist  $X$  eine endliche Menge, so ist auch ihre Potenzmenge endlich und es gilt  $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ . Für die drei-elementige Menge  $X = \{1, 2, 3\}$  besteht zum Beispiel  $\mathcal{P}(X)$  aus  $2^3 = 8$  Elementen, genauer gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

**Definition 2.1.15.** Gegeben zwei Mengen  $X, Y$  können wir auf verschiedene Arten neue Mengen bilden:

1. Die **Vereinigung**  $X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$ , zum Beispiel ist  $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ .
2. Den **Schnitt**  $X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$ , zum Beispiel ist  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ . Zwei Mengen sind also disjunkt genau dann, wenn ihr Schnitt die leere Menge ist.
3. Die **Differenz**  $X \setminus Y := \{z \in X \mid z \notin Y\}$ , zum Beispiel haben wir  $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$ . Man schreibt statt  $X \setminus Y$  auch  $X - Y$ . Ist  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ , so heißt  $X \setminus Y$  das **Komplement** von  $Y$  in  $X$ .



SkriptenBilder/BildMop.png

Eine gute Anschauung für die ersten drei Operationen liefern die sogenannten **van-de-Ven-Diagramme** wie sie die obenstehenden Bilder zeigen. Sie sind allerdings nicht zu genau zu hinterfragen, denn ob die Punkte auf einem Blatt Papier im Sinne von Cantor “bestimmte wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung” sind, scheint mir sehr fraglich. Wenn man jedoch jedes der schraffierten Gebiete im Bild auffasst als die Menge aller darin liegenden Kreuzungspunkte auf einem dazugedachten Millimeterpapier und keine dieser Kreuzungspunkte auf den Begrenzungslinien liegen, so können sie wohl schon als eine Menge im Cantor’schen Sinne angesehen werden.

4. Das **kartesische Produkt**  $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ , als da heißt die Menge aller geordneten Paare. Es gilt also  $(x, y) = (x', y')$  genau dann, wenn gilt  $x = x'$  und  $y = y'$ . Zum Beispiel haben wir  $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ . Oft benutzt man für das kartesische Produkt  $X \times X$  einer Menge  $X$  mit sich selbst die Abkürzung  $X \times X = X^2$ .

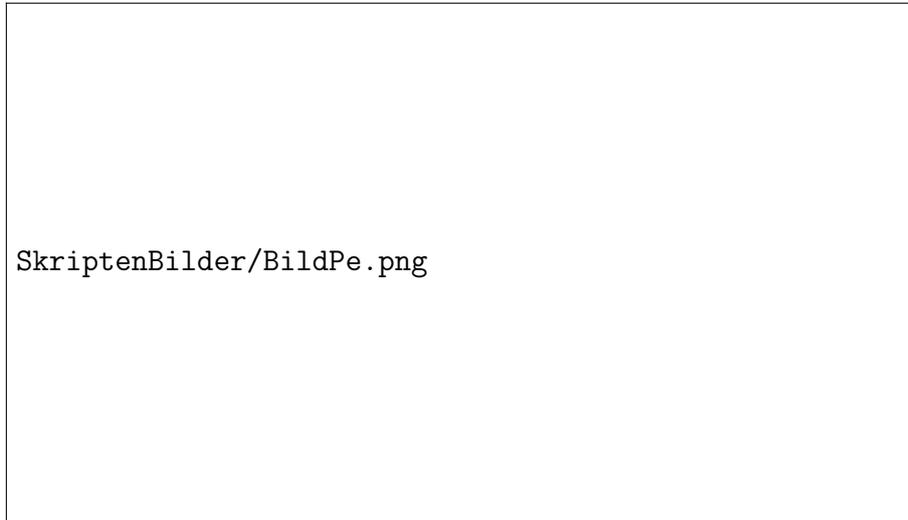
2.1.16. Die Verwendung des Kommas als Trenner ist hier insofern problematisch, als  $(1, 2)$  nun zweierlei bedeuten kann: Zum einen ein Element des kartesischen Produkts  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , zum anderen auch den eingeklammerten Dezimalbruch 1,2. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. In diesem Text werden Dezimalbrüche nur selten vorkommen. In Schulbüchern verwendet man für geordnete Paare meist die abweichende Notation  $(x|y)$ , um auch Paare von Dezimalbrüchen unmißverständlich notieren zu können.

2.1.17. Wir werden in unserer naiven Mengenlehre die ersten drei Operationen nur auf Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge anwenden, die uns in der einen oder anderen Weise bereits zur Verfügung steht. Die Potenzmenge und das kartesische Produkt dahingegen benutzen wir, um darüber hinaus neue Mengen zu erschaffen. Diese Konstruktionen erlauben es, im Rahmen der Mengenlehre so etwas wie Abstraktionen zu bilden: Wenn wir uns etwa die Menge  $T$  aller an mindestens einem Tag der Weltgeschichte lebenden oder gelebt habenden Tiere als eine Menge im Cantor'schen Sinne denken, so würden wir Konzepte wie "männlich" oder "Hund" oder "Fleischfresser" formal als Teilmengen dieser Menge definieren, d.h. als Elemente von  $\mathcal{P}(T)$ , und das Konzept "ist Kind von" als eine Teilmenge des kartesischen Produkts dieser Menge  $T$  mit sich selbst, also als ein Element von  $\mathcal{P}(T \times T)$ .

2.1.18. Für das Rechnen mit Mengen überlegt man sich die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cap Z) &= (X \cap Y) \cap Z \\ X \cup (Y \cup Z) &= (X \cup Y) \cup Z \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \\ X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ X \setminus (Y \cup Z) &= (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \\ X \setminus (Y \cap Z) &= (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) \\ X \setminus (X \setminus Y) &= X \cap Y \end{aligned}$$

Eine gute Anschauung für diese Regeln liefern die van-de-Ven-Diagramme, wie sie die nebenstehenden Bilder zeigen. Die vorletzte und vorvorletzte Gleichung faßt man auch unter der Bezeichnung **de Morgan'sche Regeln** zusammen.



Anschauliche Darstellung des Produkts einer Menge mit fünf und einer Menge mit drei Elementen. Hier wird ein Paar  $(x, y)$  dargestellt durch einen fetten Punkt, der über  $x$  und neben  $y$  liegt.



Dies Bild muß anders interpretiert werden als das Vorherige. Die Mengen  $X$  und  $Y$  sind nun zu verstehen als die Mengen der Punkte der vertikalen und horizontalen Geradensegmente und ein Punkt des Quadrats meint das Element  $(x, y) \in X \times Y$ , das in derselben Höhe wie  $y \in Y$  senkrecht über  $x \in X$  liegt.



$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$



$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

*Übung 2.1.19.* Sind  $X$  und  $Y$  endliche Mengen, so gilt für die Kardinalitäten  $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$  und  $|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X|$ .

**Satz 2.1.20 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten).** Gegeben  $n, k \in \mathbb{N}$  gibt der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  die Zahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge an, in Formeln:

$$|X| = n \quad \text{impliziert} \quad |\{Y \subset X \mid |Y| = k\}| = \binom{n}{k}$$

*Beweis.* Vollständige Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  gilt die Aussage, denn eine nullelementige Menge hat genau eine  $k$ -elementige Teilmenge falls  $k = 0$  und keine  $k$ -elementige Teilmenge falls  $k \geq 1$ . Nehmen wir nun an, die Aussage sei für ein  $n$  schon bewiesen. Eine  $(n + 1)$ -elementige Menge  $X$  schreiben wir als  $X = M \cup \{x\}$ , wo  $M$  eine  $n$ -elementige Menge ist und  $x \notin M$ . Ist  $k = 0$ , so gibt es genau eine  $k$ -elementige Teilmenge von  $M \cup \{x\}$ , nämlich die leere Menge. Ist  $k \geq 1$ , so gibt es in  $M \cup \{x\}$  nach Induktionsannahme genau  $\binom{n}{k}$   $k$ -elementige Teilmengen, die  $x$  nicht enthalten. Die  $k$ -elementigen Teilmengen dahingegen, die  $x$  enthalten, ergeben sich durch Hinzunehmen von  $x$  aus den  $(k - 1)$ -elementigen Teilmengen von  $M$ , von denen es gerade  $\binom{n}{k-1}$  gibt. Insgesamt hat  $M \cup \{x\}$  damit also genau  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$   $k$ -elementige Teilmengen.  $\square$

*Bemerkung 2.1.21.* Wieder scheint mir dieser Beweis in der für vollständige Induktion typischen Weise undurchsichtig. Ich ziehe deshalb den in 1.1.19 gegebenen weniger formellen Beweis vor. Man kann auch diesen Beweis formalisieren und verstehen als Spezialfall der sogenannten ‘‘Bahnformel’’ ??, vergleiche ??.

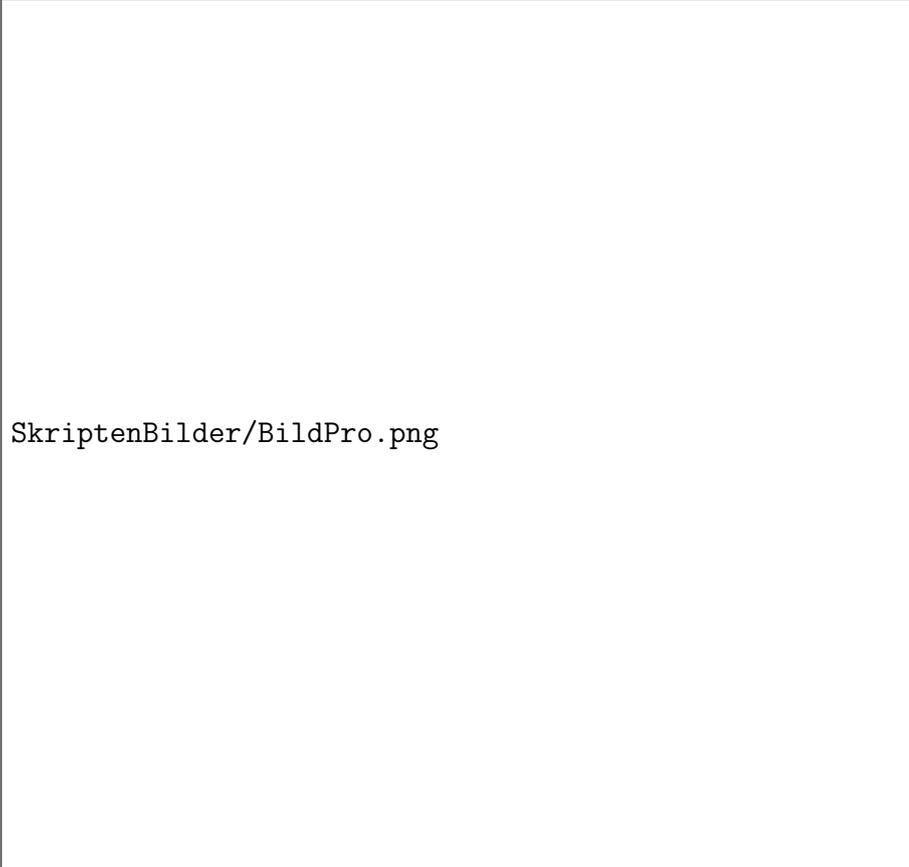
*Bemerkung 2.1.22.* Wir geben nun die versprochene präzise Formulierung unseres ersten Beweises der binomischen Formel 1.1.23. Wir rechnen dazu

$$(a + b)^n = \sum_{Y \subset \{1, 2, \dots, n\}} a^{|Y|} b^{n-|Y|}$$

Die rechte Seite soll hier in Verallgemeinerung der in Abschnitt 1.1 eingeführten Notation bedeuten, daß wir für jede Teilmenge  $Y$  von  $\{1, 2, \dots, n\}$  den angegebenen Ausdruck  $a^{|Y|} b^{n-|Y|}$  nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren. Dann fassen wir gleiche Summanden zusammen und erhalten mit 2.1.20 die binomische Formel.

*Ergänzende Übung 2.1.23.* Es gilt  $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ .

*Ergänzung 2.1.24 (Das Russell’sche Paradoxon).* Ich will nicht verschweigen, daß der in diesem Abschnitt dargestellte naive Zugang zur Mengenlehre



SkriptenBilder/BildPro.png

Aus  $X = X_1 \cup X_2$  und  $Y = Y_1 \cup Y_2$  folgt noch lange nicht  
 $X \times Y = (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$

durchaus begriffliche Schwierigkeiten mit sich bringt: Zum Beispiel darf die Gesamtheit  $\mathcal{M}$  aller Mengen nicht als Menge angesehen werden, da wir sonst die “Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten”, gegeben durch die formelhafte Beschreibung  $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\}$ , bilden könnten. Für diese Menge kann aber weder  $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$  noch  $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$  gelten ... Diese Art von Schwierigkeiten kann erst ein formalerer Zugang klären und auflösen, bei dem man unsere naiven Vorstellungen durch Ketten von Zeichen aus einem wohlbestimmten endlichen Alphabet ersetzt und unsere Vorstellung von Wahrheit durch die Verifizierbarkeit mittels rein algebraischer “erlaubter Manipulationen” solcher Zeichenketten, die in “Axiomen” festgelegt werden. Diese Verifikationen kann man dann durchaus auch einer Rechenmaschine überlassen, so daß wirklich auf “objektivem” Wege entschieden werden kann, ob ein “Beweis” für die “Richtigkeit” einer unserer Zeichenketten in einem vorgegebenen axiomatischen Rahmen stichhaltig ist. Allerdings kann in derartigen Systemen von einer Zeichenkette algorithmisch nur entschieden werden, ob sie eine “sinnvolle Aussage” ist, nicht aber, ob sie “bewiesen” werden kann. Noch viel stärker zeigt der Unvollständigkeitssatz von Gödel, daß es in einem derartigen axiomatischen Rahmen, sobald er reichhaltig genug ist für eine Beschreibung des Rechnens mit natürlichen Zahlen, stets sinnvolle Aussagen gibt derart, daß entweder sowohl die Aussage als auch ihre Verneinung oder aber weder die Aussage noch ihre Verneinung bewiesen werden können. Mit diesen und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die Logik.

2.1.25. Um mich nicht dem Vorwurf auszusetzen, während des Spiels die Spielregeln ändern zu wollen, sei bereits hier erwähnt, daß in ?? noch weitere wichtige Konstruktionen der Mengenlehre eingeführt werden, und daß in ?? einige weniger offensichtliche Folgerungen erläutert werden, die meines Erachtens bereits an den Rand dessen gehen, was man in unserem informellen Rahmen der naiven Mengenlehre als Argumentation noch vertreten kann. In ?? wird dann erst die Konstruktion der natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre diskutiert. Sicher ist es in gewisser Weise unbefriedigend, das Fundament des Hauses der Mathematik erst vollständig zu gießen, wenn das Haus bereits steht und bewohnt ist. Andererseits will ich aber auch vermeiden, daß Sie mir auf einem prächtigen Fundament jämmerlich erfrieren.

## 2.2 Abbildungen

**Definition 2.2.1.** Seien  $X, Y$  Mengen. Eine **Abbildung**  $f : X \rightarrow Y$  ist eine Zuordnung, die jedem Element  $x \in X$  genau ein Element  $f(x) \in Y$  zuordnet, das **Bild** von  $x$  unter  $f$ , auch genannt der **Wert** von  $f$  an der Stelle  $x$ . Man spricht dann auch vom **Auswerten** der Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  oder vom **Einsetzen** von  $x$  in  $f$ .

2.2.2. Wem das zu vage ist, der mag die alternative Definition vorziehen, nach der eine **Abbildung**  $f : X \rightarrow Y$  eine Teilmenge  $f \subset X \times Y$  ist derart, daß es für jedes  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  gibt mit  $(x, y) \in f$ . Dies eindeutig bestimmte  $y$  schreiben wir dann  $f(x)$  und sind auf einem etwas formaleren Weg wieder am selben Punkt angelangt. In unseren Konventionen nennen wir besagte Teilmenge den **Graphen von  $f$**  und notieren sie mit dem Symbol  $\Gamma$  (sprich: Gamma), einem großen griechischen G, und schreiben

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

**Definition 2.2.3.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, so nennen wir  $X$  ihren **Definitionsbereich** und  $Y$  ihren **Wertebereich**. Zwei Abbildungen nennen wir gleich genau dann, wenn sie denselben Definitionsbereich  $X$ , denselben Wertebereich  $Y$  und dieselbe Abbildungsvorschrift  $f \subset X \times Y$  haben. Die Menge aller Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  bezeichne ich mit

$$\text{Ens}(X, Y)$$

nach der französischen Übersetzung **ensemble** des deutschen Begriffs “Menge”. Üblicher ist die Notation  $Y^X$ .

*Bemerkung 2.2.4.* Noch gebräuchlicher ist die Bezeichnung  $\text{Abb}(X, Y)$  für die Menge aller Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Ich will jedoch sehr viel später die “Kategorie aller Mengen” mit  $\text{Ens}$  bezeichnen und für je zwei Objekte  $X, Y$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  die Menge aller “Morphismen” von  $X$  nach  $Y$  mit  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Das erklärt erst vollständig die hier gewählte Bezeichnung für Mengen von Abbildungen.

2.2.5. Wir notieren Abbildungen oft in der Form

$$\begin{array}{l} f : X \rightarrow Y \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

und in verschiedenen Verkürzungen dieser Notation. Zum Beispiel sprechen wir von “einer Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber” oder “der Abbildung  $n \mapsto n^3$  von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber”. Wir benutzen unsere zwei Arten von Pfeilen  $\rightarrow$  und  $\mapsto$  auch im allgemeinen in derselben Weise.

*Beispiel 2.2.6.* Für jede Menge  $X$  haben wir die **identische Abbildung** oder **Identität**

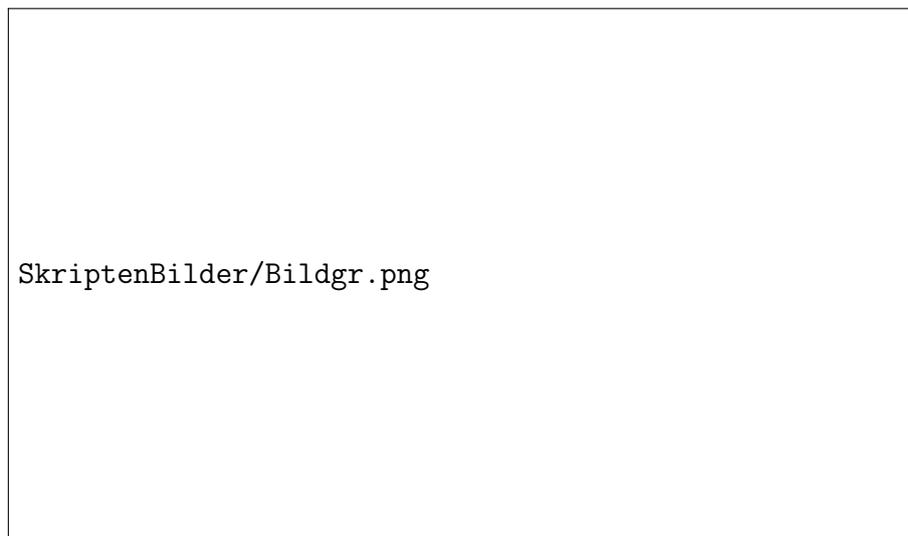
$$\begin{array}{l} \text{id} = \text{id}_X : X \rightarrow X \\ x \mapsto x \end{array}$$

Ein konkreteres Beispiel für eine Abbildung ist das Quadrieren

$$\begin{array}{l} q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$$



Eine Abbildung einer Menge mit fünf in eine mit drei Elementen



Der Graph der oben angegebenen Abbildung, wobei das  $X$  oben mit dem  $X$  hier identifiziert wurde durch "Umkippen nach Rechts"

*Beispiel 2.2.7.* Gegeben zwei Mengen  $X, Y$  erklärt man die sogenannten **Projektionsabbildungen** oder **Projektionen**  $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$  bzw.  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  durch die Vorschrift  $(x, y) \mapsto x$  bzw.  $(x, y) \mapsto y$ . In manchen Zusammenhängen notiert man sie auch abweichend  $\text{pr}_1$  und  $\text{pr}_2$  für die “Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente”.

**Definition 2.2.8.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, so definieren wir ihr **Bild** oder genauer ihre **Bildmenge**, eine Teilmenge im  $f \subset Y$ , durch

$$\text{im } f := \{y \in Y \mid \text{Es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

für französisch und englisch **image**. Eine Abbildung, deren Bild aus höchstens einem Element besteht, nennen wir eine **konstante Abbildung**. Eine Abbildung, deren Bild aus genau einem Element besteht, nennen wir eine **einwertige Abbildung**. In anderen Worten ist eine einwertige Abbildung also eine konstante Abbildung mit nichtleerem Definitionsbereich.

**Definition 2.2.9.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $A \subset X$  eine Teilmenge, so definieren wir das **Bild von  $A$  unter  $f$** , eine Teilmenge  $f(A) \subset Y$ , durch

$$f(A) := \{y \in Y \mid \text{Es gibt } x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

*Beispiel 2.2.10.* Per definitionem haben wir für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stets  $f(X) = \text{im } f$ . Für unsere Abbildung  $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \mapsto n^2$  des Quadrierens von eben könnten wir die Menge aller Quadratzahlen schreiben als

$$q(\mathbb{Z}) = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Ebenso wäre  $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$  eine mögliche formelmäßige Darstellung der Menge aller geraden natürlichen Zahlen, und  $\{ab \mid a, b \in \mathbb{N}, a \geq 2, b \geq 2\}$  wäre eine formelmäßige Darstellung der Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht prim und auch nicht Null oder Eins sind.

2.2.11. Gegeben ein festes  $c \in Y$  schreiben wir oft auch kurz  $c$  für die konstante Abbildung  $X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto c$  für alle  $x \in X$ . Damit verbunden ist die Hoffnung, daß aus dem Kontext klar wird, ob im Einzelfall die Abbildung  $c : X \rightarrow Y$  oder das Element  $c \in Y$  gemeint sind.

**Definition 2.2.12.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $B \subset Y$  eine Teilmenge, so definieren wir ihr **Urbild**, eine Teilmenge von  $f^{-1}(B) \subset X$ , durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Besteht  $B$  nur aus einem Element  $x$ , so schreiben wir auch  $f^{-1}(x)$  statt  $f^{-1}(\{x\})$  und nennen diese Menge die **Fasern von  $f$  über  $x$** . Das Quadrieren  $q$  aus 2.2.10 hat etwa die Fasern  $q^{-1}(1) = \{1, -1\}$  und  $q^{-1}(-1) = \emptyset$ .

**Definition 2.2.13.** Sind schließlich drei Mengen  $X, Y, Z$  gegeben und Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$ , so definieren wir eine Abbildung  $g \circ f : X \rightarrow Z$ , die **Verknüpfung** der Abbildungen  $f$  und  $g$ , durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

2.2.14. Die Notation  $g \circ f$ , sprich “ $g$  nach  $f$ ”, für “erst  $f$ , dann  $g$ ” ist gewöhnungsbedürftig, erklärt sich aber durch die Formel  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ . Ich sage,  $g \circ f$  entstehe aus  $g$  durch **Vorschalten von**  $f$  und  $g \circ f$  entstehe aus  $f$  durch **Nachschaten von**  $g$ . Oft kürzt man auch  $g \circ f$  mit  $gf$  ab.

*Beispiel 2.2.15.* Betrachten wir zusätzlich zum Quadrieren  $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  die Abbildung  $t : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto x + 1$ , so gilt  $(q \circ t)(x) = (x + 1)^2$  aber  $(t \circ q)(x) = x^2 + 1$ . Natürlich gilt  $(g \circ f)(A) = g(f(A))$  für jede Teilmenge  $A \subset X$  und umgekehrt auch  $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$  für jede Teilmenge  $C \subset Z$ .

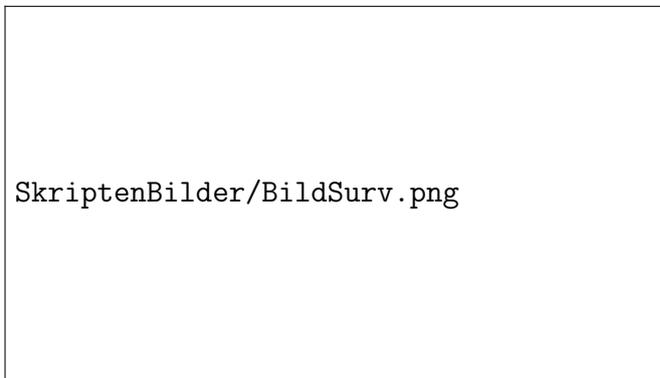
**Definition 2.2.16.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

1.  $f$  heißt **injektiv** oder eine **Injektion** genau dann, wenn aus  $x \neq x'$  folgt  $f(x) \neq f(x')$ . Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes  $y \in Y$  höchstens ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$ . Injektionen schreibt man oft  $\hookrightarrow$ .
2.  $f$  heißt **surjektiv** oder eine **Surjektion** genau dann, wenn es für jedes  $y \in Y$  mindestens ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$ . Surjektionen schreibt man manchmal  $\rightarrow$ .
3.  $f$  heißt **bijektiv** oder eine **Bijektion** genau dann, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes  $y \in Y$  genau ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$ . Bijektionen schreibt man oft  $\xrightarrow{\sim}$ .

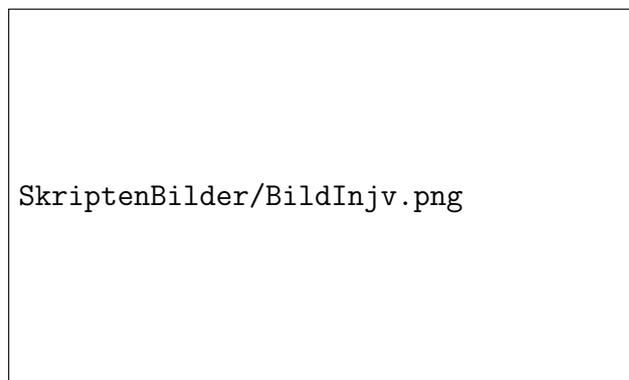
2.2.17. Ist  $X \subset Y$  eine Teilmenge, so ist die **Einbettung** oder **Inklusion**  $i : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto x$  stets injektiv. Ist  $g : Y \rightarrow Z$  eine Abbildung und  $X \subset Y$  eine Teilmenge, so nennen wir die Verknüpfung  $g \circ i$  von  $g$  mit der Inklusion auch die **Einschränkung** von  $g$  auf  $X$  und notieren sie

$$g \circ i =: g|_X = g|_X : X \rightarrow Z$$

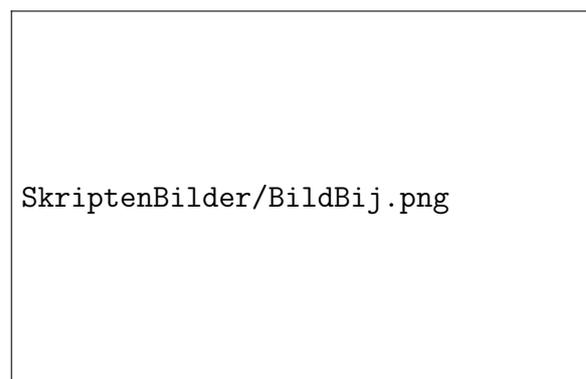
Oft bezeichnen wir eine Einschränkung aber auch einfach mit demselben Buchstaben  $g$  in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Abbildung genau gemeint ist.



Eine Surjektion



Eine Injektion



Eine Bijektion

2.2.18. Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, so ist die Abbildung  $f : X \rightarrow f(X)$ ,  $x \mapsto f(x)$  stets surjektiv. Der Leser möge entschuldigen, daß wir hier zwei verschiedene Abbildungen mit demselben Symbol  $f$  bezeichnet haben. Das wird noch öfter vorkommen. Überhaupt ignorieren wir, gegebene Mengen  $X, Y$  und eine Teilmenge  $Z \subset Y$ , im folgenden meist den Unterschied zwischen “Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , deren Bild in  $Z$  enthalten ist” und “Abbildungen von  $X$  nach  $Z$ ”.

*Ergänzung 2.2.19.* Eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  von einer Menge in ihre Potenzmenge kann nie surjektiv sein. In der Tat, betrachten wir in  $X$  die Teilmenge  $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ , so kann es kein  $y \in X$  geben mit  $f(y) = A$ , denn für solch ein  $y$  hätten wir entweder  $y \in A$  oder  $y \notin A$ , und aus  $y \in A$  alias  $y \in f(y)$  folgte  $y \notin A$ , wohingegen aus  $y \notin A$  alias  $y \notin f(y)$  folgte  $y \in A$ .

*Beispiele 2.2.20.* Unsere Abbildung  $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \mapsto n^2$  ist weder injektiv noch surjektiv. Die Identität  $\text{id} : X \rightarrow X$  ist stets bijektiv. Sind  $X$  und  $Y$  endliche Mengen, so gibt es genau dann eine Bijektion von  $X$  nach  $Y$ , wenn  $X$  und  $Y$  dieselbe Kardinalität haben, in Formeln  $|X| = |Y|$ .

**Satz 2.2.21.** *Seien  $f, f_1 : X \rightarrow Y$  und  $g, g_1 : Y \rightarrow Z$  Abbildungen.*

1. *Ist  $g \circ f$  injektiv, so ist  $f$  injektiv.*
2. *Sind  $g$  und  $f$  injektiv, so auch  $g \circ f$ .*
3. *Genau dann ist  $g$  injektiv, wenn aus  $g \circ f = g \circ f_1$  schon folgt  $f = f_1$ .*

*Beweis.* Übung. Besonders elegant ist es, zunächst die letzte Aussage zu zeigen, und dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen zu folgern.  $\square$

**Satz 2.2.22.** *Seien  $f, f_1 : X \rightarrow Y$  und  $g, g_1 : Y \rightarrow Z$  Abbildungen.*

1. *Ist  $g \circ f$  surjektiv, so ist  $g$  surjektiv.*
2. *Sind  $g$  und  $f$  surjektiv, so auch  $g \circ f$ .*
3. *Genau dann ist  $f$  surjektiv, wenn aus  $g \circ f = g_1 \circ f$  schon folgt  $g = g_1$ .*

*Beweis.* Übung. Besonders elegant ist es, zunächst die letzte Aussage zu zeigen, und dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen zu folgern.  $\square$

2.2.23. Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive Abbildung, so ist offensichtlich die Menge  $\{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$  im Sinne von 2.2.2 eine Abbildung oder, vielleicht klarer, der Graph einer Abbildung  $Y \rightarrow X$ . Diese Abbildung in die Gegenrichtung heißt die **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** auch die **inverse Abbildung** zu  $f$  und wird mit  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  bezeichnet. Offensichtlich ist mit  $f$  auch  $f^{-1}$  eine Bijektion.

*Beispiel 2.2.24.* Die Umkehrabbildung unserer Bijektion  $t : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x+1$  ist die Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x-1$ .

*Übung 2.2.25.* Gegeben eine Bijektion  $f : X \rightarrow Y$  ist  $g = f^{-1}$  die einzige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Ebenso ist auch  $h = f^{-1}$  die einzige Abbildung  $h : Y \rightarrow X$  mit  $h \circ f = \text{id}_X$ .

2.2.26. Gegeben drei Mengen  $X, Y, Z$  erhalten wir eine Bijektion

$$\text{Ens}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \text{Ens}(Y, Z))$$

durch die Vorschrift  $f \mapsto f(x, \_)$  mit der Notation  $f(x, \_)$  für die Abbildung  $y \mapsto f(x, y)$ . Etwas vage formuliert ist also eine Abbildung  $X \times Y \rightarrow Z$  von einem kartesischen Produkt  $X \times Y$  in eine weitere Menge  $Z$  dasselbe wie eine Abbildung, die jedem  $x \in X$  eine Abbildung  $Y \rightarrow Z$  zuordnet, und symmetrisch natürlich auch dasselbe wie eine Abbildung, die jedem  $y \in Y$  eine Abbildung  $X \rightarrow Z$  zuordnet. In der exponentiellen Notation liest sich das ganz suggestiv als kanonische Bijektion  $Z^{(X \times Y)} \xrightarrow{\sim} (Z^X)^Y$ . In diesem Sinne sind also die in der Schule derzeit so beliebten “Funktionen mit Parameter” nichts anderes als “Funktionen von zwei Variablen, bei denen eine der beiden Variablen als Parameter bezeichnet wird”.

**Satz 2.2.27 (Bedeutung der Fakultät).** *Sind  $X$  und  $Y$  zwei Mengen mit je  $n$  Elementen, so gibt es genau  $n!$  bijektive Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ .*

*Beweis.* Sei  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Wir haben  $n$  Möglichkeiten, ein Bild für  $x_1$  auszusuchen, dann noch  $(n-1)$  Möglichkeiten, ein Bild für  $x_2$  auszusuchen, und so weiter, bis schließlich nur noch 1 Element von  $Y$  als mögliches Bild von  $x_n$  in Frage kommt. Insgesamt gibt es also  $n(n-1) \cdots 1 = n!$  Möglichkeiten für  $f$ . Da wir  $0! = 1$  vereinbart hatten, stimmt unser Satz auch für  $n = 0$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 2.2.28.* Seien  $X, Y$  endliche Mengen. So gibt es genau  $|Y|^{|X|}$  Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , und unter diesen Abbildungen sind genau  $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2) \cdots (|Y|-|X|+1)$  Injektionen.

*Ergänzende Übung 2.2.29.* Sei  $X$  eine Menge mit  $n$  Elementen und seien natürliche Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$  gegeben mit  $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ . Man zeige:

Es gibt genau  $n!/(\alpha_1! \cdots \alpha_r!)$  Abbildungen  $f : X \rightarrow \{1, \dots, r\}$ , die jedes  $i$  genau  $\alpha_i$ -mal als Wert annehmen, in Formeln

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} = \text{card}\{f \mid |f^{-1}(i)| = \alpha_i \text{ für } i = 1, \dots, r\}$$

*Ergänzung 2.2.30.* Manche Autoren bezeichnen die Zahlen aus der vorherigen Übung 2.2.29 auch als **Multinomialkoeffizienten** und verwenden die Notation

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} =: \binom{n}{\alpha_1; \dots; \alpha_r}$$

Mich überzeugt diese Notation nicht, da sie im Gegensatz zu unserer Notation für die Binomialkoeffizienten recht eigentlich nichts kürzer macht.

*Ergänzende Übung 2.2.31.* Man zeige die Formel

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$$

Hier ist zu verstehen, daß wir für alle  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$  mit  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$  den angegebenen Ausdruck nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren.

*Ergänzende Übung 2.2.32.* Eine **zyklische Anordnung** einer endlichen Menge  $M$  ist eine Abbildung  $z : M \rightarrow M$  derart, daß wir durch mehrmaliges Anwenden von  $z$  auf ein beliebiges Element  $x \in M$  jedes Element  $y \in M$  erhalten können. Man zeige, daß es auf einer  $n$ -elementigen Menge mit  $n \geq 1$  genau  $(n-1)!$  zyklische Anordnungen gibt. Die Terminologie “zyklische Anordnung” macht mich nicht besonders glücklich, da unsere Struktur nun beim besten Willen keine Anordnung im Sinne von II.1.2 ist. Andererseits ist aber das Angeben einer Anordnung auf einer endlichen Menge  $M$  schon auch etwas Ähnliches.

*Ergänzende Übung 2.2.33.* Sei  $X$  eine Menge mit  $n \geq 1$  Elementen und sei  $m$  eine natürliche Zahl. Man zeige, daß es genau  $\binom{n+m-1}{n-1}$  Abbildungen  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  gibt mit  $\sum_{x \in X} f(x) = m$ . Hinweis: Man denke sich  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  und veranschauliche sich dann  $f$  als eine Folge auf  $f(1)$  Punkten gefolgt von einem Strich gefolgt von  $f(2)$  Punkten gefolgt von einem Strich und so weiter, insgesamt also eine Folge aus  $n + m - 1$  Symbolen, davon  $m$  Punkten und  $n - 1$  Strichen.

*Ergänzung 2.2.34.* Gegeben eine Menge  $X$  mag man sich eine Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{N}$  veranschaulichen als eine “Menge von Elementen von  $X$ , in der jedes Element mit einer wohlbestimmten Vielfachheit vorkommt”. Aufgrund dieser Vorstellung nennt man eine Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{N}$  auch eine **Multimenge** von



Versuch der graphischen Darstellung einer zyklischen Anordnung auf der Menge  $\{1, 2, \dots, 7\}$ . Die Pfeile  $\mapsto$  sollen jeweils den Effekt der Abbildung  $z$  veranschaulichen.



Eine Abbildung  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$  im Fall  $n = 6$  mit Wertesumme  $m = 10$  und die Veranschaulichung nach der Vorschrift aus Übung 2.2.33 als Folge bestehend aus  $m$  Punkten und  $n - 1$  Strichen.

Elementen von  $X$ . Unter der Kardinalität einer Multimenge verstehen wir die Summe über die Werte der entsprechenden Abbildung an allen Stellen  $x \in X$ , aufgefaßt als ein Element von  $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ . Ich notiere Multimengen durch Mengenklammern mit einem vorgestellten unteren Index  $\mu$ . So wäre etwa  ${}_{\mu}\{5, 5, 5, 7, 7, 1\}$  eine Multimenge von natürlichen Zahlen der Kardinalität 6. Die Gesamtheit aller endlichen Multimengen von Elementen einer Menge  $X$  notiere ich auch  $NX$ .

*Vorschau 2.2.35 (Formalisierung des Begriffs der natürlichen Zahlen).* Man kann im Rahmen der Mengenlehre zeigen, daß es Tripel  $(X, x, f)$  gibt bestehend aus einer Menge  $X$ , einem Element  $x \in X$  und einer injektiven Abbildung  $f : X \hookrightarrow X$  derart, daß gilt  $x \notin f(X)$  und daß jede Teilmenge  $Z \subset X$  mit  $x \in Z$  und  $f(Z) \subset Z$  bereits  $X$  selbst sein muß, vergleiche ???. Weiter kann man zeigen, daß solch ein Tripel im Wesentlichen eindeutig ist in dem Sinne, daß es für jedes weitere derartige Tripel  $(Y, y, g)$  genau eine Bijektion  $h : X \xrightarrow{\sim} Y$  gibt mit  $h(x) = y$  und  $gh = hf$ , vergleiche etwa ??. Im Rahmen der naiven Mengenlehre kann man solch ein Tripel unmittelbar angeben als  $(\mathbb{N}, 0, S)$  mit  $S : n \mapsto (n+1)$ . Bei einem etwas formaleren Aufbau der Mathematik aus der Mengenlehre wird man umgekehrt von derartigen Tripeln ausgehen und so zu einer Definition von  $\mathbb{N}$  und der Addition auf  $\mathbb{N}$  gelangen, wie das etwa in ??? ausgeführt wird. In jedem Fall liegt hier der Schlüssel für eine formale Rechtfertigung des Prinzips der vollständigen Induktion.

## 2.3 Logische Symbole und Konventionen

2.3.1. In der Mathematik meint **oder** immer, daß auch beides erlaubt ist. Wir haben diese Konvention schon benutzt bei der Definition der Vereinigung in 2.1.15 durch die Vorschrift  $X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$ . Zum Beispiel haben wir  $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ . In diesem Zusammenhang muß ich die schöne Geschichte erzählen von dem Logiker, der seinem Freund erzählt, er habe ein Kind bekommen. Der Freund fragt: “Ist es ein Junge oder ein Mädchen?” worauf der Logiker antwortet: “Ja!”

*Ergänzung 2.3.2.* In den “Arithmetes principia” von Guisepe Peano scheint das Symbol  $\cup$  zum ersten Mal vorzukommen, allerdings als Symbol für “oder”. Peano schreibt: “Signum  $\cup$  legitur *vel*” und “*vel*” heißt “oder” auf lateinisch. Der Kontext legt nahe, daß  $\cup$  an den Buchstaben *v* erinnern soll. Das ähnliche Symbol  $\vee$  hatte Peano schon als Symbol für “verum” verbraucht. In der Bedeutung der Vereinigung zweier Mengen habe ich das Symbol zuerst bei Bourbaki gesehen.

2.3.3. Sagt man der Mathematik, es gebe ein Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften, so ist stets gemeint, daß es *mindestens ein* derartiges Objekt geben soll. Hätten wir diese Sprachregelung rechtzeitig vereinbart, so hätten wir zum Beispiel das Wörtchen “mindestens” in Teil 2 von 2.2.16 bereits weglassen können. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe einen Bruder, so kann es auch durchaus sein, daß er noch weitere Brüder hat! Will man in der Mathematik Existenz und Eindeutigkeit gleichzeitig ausdrücken, so sagt man, es gebe **genau ein** Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe genau einen Bruder, so können sie sicher sein, daß er nicht noch weitere Brüder hat.

2.3.4. Die folgenden Abkürzungen erweisen sich als bequem und werden häufig verwendet:

$\forall$	für alle (ein umgedrehtes A wie “alle”)
$\exists$	es gibt (ein umgedrehtes E wie “existiert”)
$\exists!$	es gibt genau ein
$\dots \Rightarrow \dots$	aus $\dots$ folgt $\dots$
$\dots \Leftarrow \dots$	$\dots$ folgt aus $\dots$
$\dots \Leftrightarrow \dots$	$\dots$ ist gleichbedeutend zu $\dots$

Ist zum Beispiel  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, so können wir unsere Definitionen injektiv, surjektiv, und bijektiv etwas formaler so schreiben:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\Leftrightarrow ((f(x) = f(z)) \Rightarrow (x = z)) \\ f \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y \\ f \text{ bijektiv} &\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists! x \in X \text{ mit } f(x) = y \end{aligned}$$

*Ergänzung* 2.3.5. In den Zeiten des Bleisatzes war es nicht einfach, neue Symbole in Druck zu bringen. Irgendwelche Buchstaben verdreht zu setzen, war jedoch unproblematisch. So entstanden die Symbole  $\forall$  und  $\exists$ .

2.3.6. Bei den “für alle” und “es gibt” kommt es in der Mathematik, anders als in der weniger präzisen Umgangssprache, entscheidend auf die Reihenfolge an. Man betrachte zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen:

“Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt es  $m \in \mathbb{N}$  so daß gilt  $m \geq n$ ”

“Es gibt  $m \in \mathbb{N}$  so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $m \geq n$ ”

Offensichtlich ist die Erste richtig, die Zweite aber falsch. Weiter mache man sich klar, daß die “für alle” und “es gibt” bei Verneinung vertauscht werden. Äquivalent sind zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen

“Es gibt kein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n^2 = 2$ ”

“Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt nicht  $n^2 = 2$ ”

2.3.7. Wollen wir zeigen, daß aus einer Aussage  $A$  eine andere Aussage  $B$  folgt, so können wir ebensogut zeigen: Gilt  $B$  nicht, so gilt auch  $A$  nicht. In formelhafter Schreibweise haben wir also

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{nicht } B) \Rightarrow (\text{nicht } A))$$

Wollen wir zum Beispiel zeigen  $(g \circ f \text{ surjektiv}) \Rightarrow (g \text{ surjektiv})$ , so reicht es, wenn wir uns überlegen: Ist  $g$  nicht surjektiv, so ist  $g \circ f$  erst recht nicht surjektiv.

2.3.8. In der Literatur findet man oft die Abkürzung **oBdA** für “ohne Beschränkung der Allgemeinheit”.

### 3 Algebraische Grundbegriffe

Auf der Schule versteht man unter einer “reellen Zahl” meist einen unendlichen Dezimalbruch, wobei man noch aufpassen muß, daß verschiedene unendliche Dezimalbrüche durchaus dieselbe reelle Zahl darstellen können, zum Beispiel gilt in den reellen Zahlen ja

$$0,99999\dots = 1,00000\dots$$

Diese reellen Zahlen werden dann addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert ohne tiefes Nachdenken darüber, wie man denn zum Beispiel mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Subtraktion umgehen soll, und warum dann Formeln wie  $(a + b) - c = a + (b - c)$  wirklich gelten, zum Beispiel für  $a = b = c = 0,999\dots$ . Dieses tiefe Nachdenken wollen wir im Folgenden vom Rest der Vorlesung abkoppeln und müssen dazu sehr präzise formulieren, welche Eigenschaften für die Addition, Multiplikation und Anordnung in “unseren” reellen Zahlen gelten sollen: In der Terminologie, die in den folgenden Abschnitten eingeführt wird, werden wir die reellen Zahlen charakterisieren als einen angeordneten Körper, in dem jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke sogar eine größte untere Schranke besitzt. Von dieser Charakterisierung ausgehend erklären wir dann, welche reelle Zahl ein gegebener unendlicher Dezimalbruch darstellt, und errichten das Gebäude der Analysis. In demselben Begriffsgebäude modellieren wir auch den Anschauungsraum, vergleiche 1.2.9 oder besser ?? und ??. Um diese Charakterisierungen und Modellierungen verständlich zu machen, führen wir zunächst einige grundlegende algebraische Konzepte ein, die Ihnen im weiteren Studium der Mathematik noch oft begegnen werden.

#### 3.1 Mengen mit Verknüpfung

**Definition 3.1.1.** Eine **Verknüpfung**  $\top$  auf einer Menge  $A$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \top : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \top b \end{aligned}$$

die jedem geordneten Paar  $(a, b)$  mit  $a, b \in A$  ein weiteres Element  $(a \top b) \in A$  zuordnet.

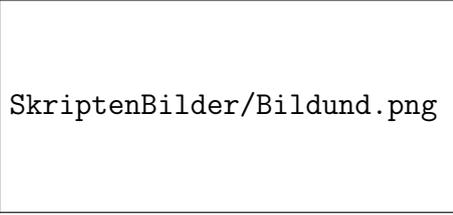
*Beispiele 3.1.2.* 1. Die Addition von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

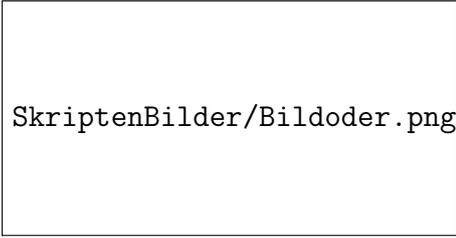


SkriptenBilder/BildVT.png

Man kann Verknüpfungen auf endlichen Mengen darstellen durch ihre **Verknüpfungstafel**. Hier habe ich etwa die Verknüpfungstafel der Verknüpfung  $\min$  auf der Menge  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  angegeben. Eigentlich muß man sich dazu einigen, ob im Kästchen aus der Spalte  $a$  und der Zeile  $b$  nun  $a \top b$  oder vielmehr  $b \top a$  stehen soll, aber bei einer kommutativen Verknüpfung wie  $\min$  kommt es darauf zum Glück nicht an.



SkriptenBilder/Bildund.png



SkriptenBilder/Bildoder.png

Die Wahrheitstafeln für “und” und “oder”. Gemeint ist hier wie stets in der Mathematik das “nichtausschließende oder”. Sagen wir, es gelte  $A$  oder  $B$ , so ist insbesondere auch erlaubt, daß beides gilt. Bei der Wahrheitstafel für das “ausschließende oder” müßte oben links als Verknüpfung von “Wahr” mit “Wahr” ein “Falsch” stehen.

2. Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

3. Die Zuordnung  $\min$ , die jedem Paar von natürlichen Zahlen die kleinere zuordnet (wenn sie verschieden sind, man setzt sonst  $\min(a, a) = a$ ), ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \min : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto \min(a, b) \end{aligned}$$

4. Sei  $X$  eine Menge. Wir kürzen die Menge  $\text{Ens}(X, X)$  aller Abbildungen von  $X$  in sich selber oft mit  $\text{Ens}(X, X) =: \text{Ens}(X)$  ab. Die Verknüpfung von Abbildungen liefert eine Verknüpfung auf der Menge  $\text{Ens}(X)$  aller Abbildungen von  $X$  in sich selber

$$\begin{aligned} \circ : \text{Ens}(X) \times \text{Ens}(X) &\rightarrow \text{Ens}(X) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

5. Die Subtraktion von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a - b \end{aligned}$$

6. Jede Verknüpfung  $\top$  auf einer Menge induziert eine Verknüpfung auf ihrer Potenzmenge mittels der Vorschrift

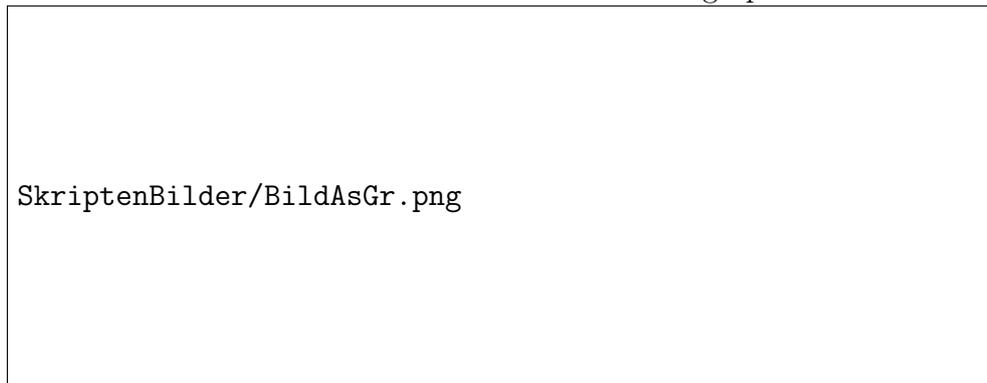
$$U \top V = \{u \top v \mid u \in U, v \in V\}$$

7. Gegeben Mengen mit Verknüpfung  $(A, \top)$  und  $(B, \perp)$  erhalten wir die **komponentenweise Verknüpfung** auf ihrem Produkt  $A \times B$  mittels der Vorschrift  $((a, b), (a', b')) \mapsto ((a \top a'), (b \perp b'))$ .
8. Die logischen Operationen “und”, “oder”, “impliziert” und dergleichen mehr können als Verknüpfungen auf der zweielementigen Menge {Wahr, Falsch} aufgefaßt werden. Die zugehörigen Verknüpfungstabellen heißen **Wahrheitstabeln**. Bei einem formalen Zugang werden diese Tafeln, wie sie für “und” und “oder” auf der vorhergehenden Seite zu finden sind, sogar zur Definition der jeweiligen Begriffe.

**Definition 3.1.3.** Eine Verknüpfung  $\top$  auf einer Menge  $A$  heißt **assoziativ** genau dann, wenn gilt  $a \top (b \top c) = (a \top b) \top c \quad \forall a, b, c \in A$ . Sie heißt **kommutativ** genau dann, wenn gilt  $a \top b = b \top a \quad \forall a, b \in A$ .



Mögliche “Klammerungen” mag man sich graphisch wie oben angedeutet veranschaulichen. Die Assoziativität bedeutet dann graphisch so etwas wie



wobei das Gleichheitszeichen nur meint, daß beide Klammerungen stets dasselbe liefern, wenn wir oben drei Elemente unserer Menge mit Verknüpfung einfüllen. . .

*Beispiele 3.1.4.* Von unseren Beispielen sind die ersten drei assoziativ und kommutativ, das vierte ist assoziativ aber nicht kommutativ falls  $X$  mehr als ein Element hat, das fünfte ist weder assoziativ noch kommutativ.

3.1.5. Ist eine Verknüpfung assoziativ, so liefern auch ungeklammerte Ausdrücke der Form  $a_1 \top a_2 \top \dots \top a_n$  wohlbestimmte Elemente von  $A$ , das Resultat ist genauer unabhängig davon, wie wir die Klammern setzen. Um diese Erkenntnis zu formalisieren, vereinbaren wir für so einen Ausdruck die Interpretation

$$a_1 \top a_2 \top \dots \top a_n := a_1 \top (a_2 \top (\dots (a_{n-1} \top a_n) \dots))$$

und zeigen dann das folgende Lemma.

**Lemma 3.1.6 (Assoziativität macht Klammern überflüssig).** *Gegeben  $(A, \top)$  eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung und  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in A$  gilt*

$$(a_1 \top \dots \top a_n) \top (b_1 \top \dots \top b_m) = a_1 \top \dots \top a_n \top b_1 \top \dots \top b_m$$

*Beweis.* Wir folgern aus dem Assoziativgesetz  $(a_1 \top \dots \top a_n) \top (b_1 \top \dots \top b_m) = a_1 \top ((a_2 \top \dots \top a_n) \top (b_1 \top \dots \top b_m))$  und sind fertig mit vollständiger Induktion über  $n$ .  $\square$

3.1.7. Das Wort Lemma, im Plural Lemmata, kommt von griechisch  $\lambda\alpha\mu\beta\alpha\nu\epsilon\iota\nu$  “nehmen” und bezeichnet in der Mathematik kleinere Resultate oder auch Zwischenschritte von größeren Beweisen, denen der Autor außerhalb ihres engeren Kontexts keine größere Bedeutung zumißt.

*Ergänzung 3.1.8.* Die Zahl der Möglichkeiten, einen Ausdruck in  $n+1$  Faktoren so zu verklammern, daß in jedem Schritt nur die Verknüpfung von je zwei Elementen zu berechnen ist, heißt die  $n$ -te **Catalan-Zahl** und wird  $C_n$  notiert. Die ersten Catalan-Zahlen sind  $C_0 = C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ ,  $C_3 = 5$ : Die fünf möglichen Verklammerungen von 4 Elementen sind etwa  $(ab)(cd)$ ,  $a(b(cd))$ ,  $a((bc)d)$ ,  $((ab)c)d$  und  $(a(bc))d$ . Im allgemeinen zeigen wir in II.5.3.9, daß sich die Catalan-Zahlen durch die Binomial-Koeffizienten 1.1.16 ausdrücken lassen vermittelt der amüsanten Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

**Definition 3.1.9.** Sei  $(A, \top)$  eine Menge mit Verknüpfung. Ist  $n \in \{1, 2, \dots\}$  eine von Null verschiedene natürliche Zahl und  $a \in A$ , so schreiben wir

$$\underbrace{a \top a \top \dots \top a}_{n\text{-mal}} =: n^\top a$$

3.1.10. Sei  $(A, \top)$  eine Menge mit assoziativer Verknüpfung. Sind  $m, n$  zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen, so erhalten wir mithilfe unseres Lemmas 3.1.6 zur Überflüssigkeit von Klammern bei assoziativen Verknüpfungen die Regeln  $(n + m)^\top a = (n^\top a) \top (m^\top a)$  und  $(nm)^\top a = n^\top (m^\top a)$ . Ist unsere Verknüpfung auch noch kommutativ, so gilt zusätzlich  $n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$ .

3.1.11. Sei  $(A, \top)$  eine Menge mit Verknüpfung. Eine Teilmenge  $B \subset A$  heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung** genau dann, wenn aus  $a, b \in B$  folgt  $a \top b \in B$ . Natürlich ist in diesem Fall auch  $(B, \top)$  eine Menge mit Verknüpfung, man spricht dann von der **auf  $B$  induzierten Verknüpfung**. Zum Beispiel ist  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  abgeschlossen unter der Addition, aber  $\mathbb{Z}_{\neq 0} \subset \mathbb{Q}_{\neq 0}$  ist nicht abgeschlossen unter der durch die Division gegebenen Verknüpfung  $(a, b) \mapsto a/b$ .

**Definition 3.1.12.** Sei  $(A, \top)$  eine Menge mit Verknüpfung. Ein Element  $e \in A$  heißt **neutrales Element** von  $(A, \top)$  genau dann, wenn gilt

$$e \top a = a \top e = a \quad \forall a \in A$$

3.1.13 (**Eindeutigkeit neutraler Elemente**). In einer Menge mit Verknüpfung  $(A, \top)$  kann es höchstens ein neutrales Element  $e$  geben, denn für jedes weitere Element  $e'$  mit  $e' \top a = a \top e' = a \quad \forall a \in A$  haben wir  $e' = e' \top e = e$ . Wir dürfen also den bestimmten Artikel verwenden und in einer Menge mit Verknüpfung von *dem* neutralen Element reden.

**Definition 3.1.14.** Ein **Monoid** ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, in der es ein neutrales Element gibt. Ist  $(A, \top)$  ein Monoid, so erweitern wir unsere Notation  $n^\top a$  aus 3.1.9 auf alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ , indem wir  $0^\top a$  als das neutrale Element von  $A$  verstehen, für alle  $a \in A$ .

3.1.15. Das Wort “Monoid” ist wohl von griechisch “*μονος*” für “allein” abgeleitet: Ein Monoid besitzt nur eine einzige Verknüpfung.

3.1.16. In Monoiden gelten die Regeln 3.1.10 für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ . Die natürlichen Zahlen bilden mit der Addition ein Monoid  $(\mathbb{N}, +)$  mit neutralem Element 0, und mit der Multiplikation ein Monoid  $(\mathbb{N}, \cdot)$  mit neutralem Element 1. Für jede Menge  $X$  ist die Menge  $\text{Ens}(X)$  der Abbildungen von  $X$  in sich selbst ein Monoid mit neutralem Element  $\text{id}_X$ . Die leere Menge ist *kein* Monoid, ihr fehlt das neutrale Element.

3.1.17. Notiert man in einem Monoid die Verknüpfung mit dem Symbol  $+$ , so notiert man das neutrale Element meist mit 0 und spricht von einem **additiv notierten Monoid**. Nur kommutative Monoide werden additiv notiert.

Notiert man in einem Monoid die Verknüpfung mit einem runden Symbol, etwa  $\cdot$  oder  $\circ$  oder auch einfach durch Hintereinanderschreiben, so notiert man das neutrale Element oft mit 1 und spricht von einem **multiplikativ notierten Monoid**.

3.1.18. Gegeben eine Abbildung  $I \rightarrow A$ ,  $i \mapsto a_i$  von einer endlichen Menge in ein kommutatives additiv bzw. multiplikativ notiertes Monoid vereinbaren wir die Notationen

$$\sum_{i \in I} a_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i \in I} a_i$$

für die “Verknüpfung aller  $a_i$ ”. Ist  $I$  die leere Menge, so vereinbaren wir, daß dieser Ausdruck das neutrale Element von  $A$  bedeuten möge, also 0 bzw. 1. Wir haben diese Notation bereits verwendet in 2.1.22, und für die konstante Abbildung  $I \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $i \mapsto 1$  hätten wir zum Beispiel

$$\sum_{i \in I} 1 = |I|$$

Unsere Konvention 1.1.13 für mit einem Laufindex notierte Summen bzw. Produkte verwenden wir bei Monoiden analog.

*Übung 3.1.19.* Sei  $X$  eine Menge. Das Schneiden von Teilmengen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ (A, B) &\mapsto A \cap B \end{aligned}$$

auf der Potenzmenge. Dasselbe gilt für die Vereinigung und das Bilden der Differenzmenge. Welche dieser Verknüpfungen sind kommutativ oder assoziativ? Welche besitzen neutrale Elemente?

*Ergänzende Übung 3.1.20.* Man gebe die Wahrheitstabellen für  $\Rightarrow$  und  $\Leftrightarrow$  an. Bezeichne weiter  $\neg : \{\text{Wahr, Falsch}\} \rightarrow \{\text{Wahr, Falsch}\}$  die “Verneinung”. Man zeige, daß die Formel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

beim Einsetzen beliebiger Wahrheitswerte aus  $\{\text{Wahr, Falsch}\}$  für  $A$  und  $B$  stets den Wert Wahr ausgibt, in Übereinstimmung mit unseren eher intuitiven Überlegungen in 2.3.7.

## 3.2 Gruppen

3.2.1. Ich empfehle, bei der Lektüre dieses Abschnitts die Tabelle auf Seite 69 gleich mitzulesen, die die Bedeutungen der nun folgenden Formalitäten

in den zwei gebräuchlichsten Notationssystemen angibt. In diesen Notationssystemen sollten alle Formeln aus der Schulzeit vertraut sein. Wir erinnern uns an die Definition eines Monoids aus 3.1.14: Ein Monoid ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, für die es in unserer Menge ein neutrales Element gibt.

**Definition 3.2.2.** 1. Ist  $(A, \top)$  ein Monoid und  $a \in A$  ein Element, so nennen wir ein weiteres Element  $\bar{a} \in A$  **invers zu  $a$**  genau dann, wenn gilt  $a \top \bar{a} = e = \bar{a} \top a$  für  $e \in A$  das neutrale Element unseres Monoids. Ein Element, das ein Inverses besitzt, heißt **invertierbar**.

2. Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element ein Inverses besitzt.
3. Eine **kommutative Gruppe** oder **abelsche Gruppe** ist eine Gruppe, deren Verknüpfung kommutativ ist.

3.2.3. Der Begriff einer “Gruppe” wurde von Évariste Galois (1811-1832) in die Mathematik eingeführt. Er verwendet den Begriff “Gruppe von Transformationen” sowohl in der Bedeutung einer “Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge” als auch in der Bedeutung einer “Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge, die abgeschlossen ist unter Verknüpfung und Inversenbildung”, und die damit in der Tat ein Beispiel für eine Gruppe im Sinne der obigen Definition bildet. Unsere obige Definition 3.2.2 geht auf eine Arbeit von Arthur Cayley aus dem Jahre 1854 mit dem Titel “On the theory of groups as depending on the symbolic equation  $\theta^n = 1$ ” zurück und wurde damit formuliert, bevor Cantor die Sprache der Mengenlehre entwickelte. Die Terminologie “abelsche Gruppe” wurde zu Ehren des norwegischen Mathematikers Niels Hendrik Abel eingeführt.

**Lemma 3.2.4.** *Jedes Element eines Monoids besitzt höchstens ein Inverses.*

*Beweis.* Aus  $a \top \bar{a} = e = \bar{a} \top a$  und  $a \top b = e = b \top a$  folgt durch Anwenden von  $b \top$  auf die erste Gleichung mit dem Assoziativgesetz sofort  $\bar{a} = b$ .  $\square$

3.2.5. Wir dürfen also den bestimmten Artikel benutzen und von nun an von *dem* Inversen eines Elements eines Monoids und insbesondere auch einer Gruppe reden. Offensichtlich ist das Inverse des Inversen stets das ursprüngliche Element, in Formeln  $\bar{\bar{a}} = a$ .

**Lemma 3.2.6.** *Sind  $a$  und  $b$  Elemente einer Gruppe oder allgemeiner invertierbare Elemente eines Monoids, so wird das Inverse von  $a \top b$  gegeben durch die Formel  $(a \top b) = \bar{b} \top \bar{a}$ .*



Die Verknüpfungstafel der Gruppe aller Permutationen der Menge  $\{1, 2, 3\}$ .

Eine solche Permutation  $\sigma$  habe ich dargestellt durch das geordnete  
Zahentripel  $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)$ , und im Kästchen aus der Zeile  $\tau$  und der Spalte  
 $\sigma$  steht  $\tau \circ \sigma$ .

*Beweis.* In der Tat rechnen wir schnell  $(a \top b) \top (\bar{b} \top \bar{a}) = e = (\bar{b} \top \bar{a}) \top (a \top b)$ . Diese Formel ist auch aus dem täglichen Leben vertraut: Wenn man sich morgens zuerst die Strümpfe anzieht und dann die Schuhe, so muß man abends zuerst die Schuhe ausziehen und dann die Strümpfe.  $\square$

*Beispiele 3.2.7.* Von unseren Beispielen 3.1.2 für Verknüpfungen oben ist nur  $(\mathbb{Z}, +)$  eine Gruppe, und diese Gruppe ist kommutativ. Ein anderes Beispiel für eine kommutative Gruppe ist die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, ein weiteres die Menge  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  der von Null verschiedenen rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung.

*Übung 3.2.8.* Die invertierbaren Elemente eines Monoids bilden stets eine Gruppe. Ein Element  $a$  eines Monoids  $A$  ist invertierbar genau dann, wenn es  $b, c \in A$  gibt mit  $b \top a = e = a \top c$  für  $e$  das neutrale Element.

**Definition 3.2.9.** Ist  $(A, \top)$  eine Gruppe, so erweitern wir unsere Notation  $n^\top a$  aus 3.1.14 auf alle  $n \in \mathbb{Z}$ , indem wir setzen  $n^\top a = (-n)^\top \bar{a}$  für  $n$  negativ.

3.2.10. In einer Gruppe gelten offensichtlich sogar für alle ganzen Zahlen  $n \in \mathbb{Z}$  die Regeln  $(n + m)^\top a = (n^\top a) \top (m^\top a)$  und  $(nm)^\top a = n^\top (m^\top a)$ . Ist die Gruppe kommutativ, so gilt zusätzlich  $n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

3.2.11. Verknüpfungen werden meist additiv oder multiplikativ geschrieben, also  $a + b$  oder  $a \cdot b$ , wobei die additive Schreibweise kommutativen Verknüpfungen vorbehalten ist und die Bruchnotation  $1/a$  und  $b/a$  aus nebenstehender Tabelle kommutativen multiplikativ geschriebenen Monoiden, in denen  $b$  invertierbar ist. Bei additiv geschriebenen Gruppen bezeichnet man das Inverse von  $a$  meist als das **Negative** von  $a$ . Bei nichtkommutativen und multiplikativ notierten Gruppen oder Monoiden benutzt man für das Inverse von  $a$  nur die von der allgemeinen Notation  $a^n$  abgeleitete Notation  $a^{-1}$ . Die nebenstehende Tabelle faßt die üblichen Notationen für unsere abstrakten Begriffsbildungen in diesem Kontext zusammen und gibt unsere allgemeinen Resultate und Konventionen in diesen Notationen wieder. Diejenigen Formeln und Konventionen, die keine Inversen brauchen, benutzt man auch allgemeiner für beliebige Monoide. Für die Gruppe der invertierbaren Elemente eines multiplikativ notierten Monoids  $A$  verwenden wir die Notation  $A^\times$ . Zum Beispiel haben wir  $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$ .

*Beispiel 3.2.12.* Für jede Menge  $X$  ist die Menge aller Bijektionen von  $X$  auf sich selbst eine Gruppe, mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Wir notieren diese Gruppe  $\text{Ens}^\times(X)$  in Übereinstimmung mit unserer

abstrakt	additiv	multiplikativ
$a \top b$	$a + b$	$a \cdot b, a \circ b, ab$
$e$	$0$	$1$
$\bar{b}$	$-b$	$1/b$
$a \top \bar{b}$	$a - b$	$a/b$
$n^\top a$	$na$	$a^n$
$e \top a = a \top e = a$	$0 + a = a + 0 = a$	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
$a \top \bar{a} = e$	$a - a = 0$	$a/a = 1$
$\bar{\bar{a}} = a$	$-(-a) = a$	$1/(1/a) = a$
$(-1)^\top a = \bar{a}$	$(-1)a = -a$	$a^{-1} = 1/a$
$\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$	$-(a + b) = (-b) + (-a)$	$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1},$ $1/ab = (1/b)(1/a)$
$\overline{(a \top \bar{b})} = b \top \bar{a}$	$-(a - b) = b - a$	$1/(a/b) = b/a$
$n^\top (m^\top a) = (nm)^\top a$	$n(ma) = (nm)a$	$(a^m)^n = a^{nm}$
$(m + n)^\top a = (m^\top a) \top (n^\top a)$	$(m + n)a = (ma) + (na)$	$a^{(m+n)} = (a^m)(a^n)$
$\overline{n^\top a} = (-n)^\top a$	$-(na) = (-n)a$	$(a^n)^{-1} = a^{-n}$
$0^\top a = e$	$0a = 0$	$a^0 = 1$
$n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$	$n(a + b) = (na) + (nb)$	$(ab)^n = (a^n)(b^n)$

Tabelle I.1: Konventionen und Formeln in verschiedenen Notationssystemen. Bereits diese Tabelle muß mit einigen Hintergedanken gelesen werden, weil die Symbole  $+$ ,  $-$ ,  $0$ ,  $1$  darin in zweierlei Bedeutung vorkommen: Manchmal meinen sie konkrete Operationen in  $\mathbb{Z}$  bzw. Elemente von  $\mathbb{Z}$ , manchmal stehen sie aber auch für Verknüpfung, Inversenbildung und neutrale Elemente in abstrakten Monoiden. Es scheint mir eine gute Übung, die Tabelle durchzugehen und allen Symbolen  $0$ ,  $1$  einen Hut aufzusetzen, wenn sie nicht ganze Zahlen bedeuten.

Konvention 3.2.11, schließlich handelt es sich um die Gruppe der invertierbaren Elemente des Monoids  $\text{Ens}(X)$ . Ihre Elemente heißen die **Permutationen von  $X$** . Die Gruppe der Permutationen einer Menge  $X$  ist für  $|X| > 2$  nicht kommutativ. Das Inverse einer Bijektion ist ihre Umkehrabbildung.

*Übung 3.2.13 (Kürzen in Gruppen)*. Sind  $a, b, c$  Elemente einer Gruppe, so folgt aus  $a \top b = a \top c$  bereits  $b = c$ . Ebenso folgt aus  $b \top a = c \top a$  bereits  $b = c$ . Dasselbe gilt allgemeiner in einem beliebigen Monoid, wenn wir  $a$  invertierbar annehmen.

*Ergänzende Übung 3.2.14*. Sei  $A$  ein Monoid und  $e$  sein neutrales Element. Man zeige: Unser Monoid ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes  $a \in A$  ein  $\bar{a} \in A$  gibt mit  $\bar{a} \top a = e$ , und dies Element  $\bar{a}$  ist dann notwendig das Inverse von  $a$  in  $A$ . Noch Mutigere zeigen: Ist  $A$  eine Menge mit assoziativer Verknüpfung und existiert ein  $e \in A$  mit  $e \top a = a \forall a \in A$  sowie für jedes  $a \in A$  ein  $\bar{a} \in A$  mit  $\bar{a} \top a = e$ , so ist  $A$  eine Gruppe.

*Ergänzende Übung 3.2.15*. Gegeben eine Menge  $X$  ist ihre Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  mit der Verknüpfung  $A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  eine abelsche Gruppe.

### 3.3 Homomorphismen

**Definition 3.3.1.** Eine Menge mit einer völlig beliebigen, nicht notwendig assoziativen Verknüpfung heißt auch ein **Magma**. Gegeben Magmas  $(H, \top)$  und  $(G, \perp)$  verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung** oder auch **Homomorphismus von Magmas** von  $H$  nach  $G$  eine Abbildung  $\varphi : H \rightarrow G$  derart, daß gilt  $\varphi(x \top y) = \varphi(x) \perp \varphi(y)$  für alle  $x, y \in H$ . Die Menge aller solchen Homomorphismen bezeichnen wir mit

$$\text{Mag}(H, G)$$

*Beispiel 3.3.2.* Sei  $X$  eine Menge  $\mathcal{P}(X)$  ihre Potenzmenge. Wir betrachten auf  $\mathcal{P}(X)$  die Verknüpfung  $(A, B) \mapsto A \setminus B$ . Ist  $X \hookrightarrow Y$  eine Injektion, so ist die auf den Potenzmengen induzierte Abbildung ein Homomorphismus von Magmas

$$(\mathcal{P}(X), \setminus) \rightarrow (\mathcal{P}(Y), \setminus)$$

**Definition 3.3.3.** Sind unsere beiden Mengen mit Verknüpfung Monoide, so verstehen wir unter einem **Monoidhomomorphismus** einen Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung, der das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet. Gegeben Monoide  $H$  und  $G$  bezeichnen wir die Menge aller Monoidhomomorphismen von  $H$  nach  $G$  mit

$$\text{Mon}(H, G)$$

3.3.4. Gegeben Monoide  $H, G$  kann  $\text{Mon}(H, G) \subset \text{Mag}(H, G)$  durchaus eine echte Teilmenge sein. Zum Beispiel ist die Nullabbildung  $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, \cdot)$  ein Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung, aber kein Monoidhomomorphismus.

*Übung 3.3.5.* Gegeben eine Menge  $X$  ist das Bilden des Komplements ein Monoidhomomorphismus  $(\mathcal{P}(X), \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(X), \cup)$ .

3.3.6. Gegeben ein Monoid  $H$  und eine Gruppe  $G$  haben wir stets  $\text{Mag}(H, G) = \text{Mon}(H, G)$ , jeder Homomorphismus  $\varphi$  von Mengen mit Verknüpfung von einem Monoid in eine Gruppe bildet also das neutrale Element auf das neutrale Element ab: In der Tat folgt das aus  $\varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) \cdot \varphi(e)$  durch Kürzen unmittelbar. Einen Homomorphismus zwischen zwei Gruppen, in Formeln eine Abbildung  $\varphi : G \rightarrow H$  mit  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$  für alle  $a, b \in G$ , nennen wir auch einen **Gruppenhomomorphismus**. Gegeben Gruppen  $H$  und  $G$  bezeichnen wir die Menge aller Gruppenhomomorphismen von  $H$  nach  $G$  mit

$$\text{Grp}(H, G)$$

Die neue Notation hat den Vorteil, uns daran zu erinnern, daß wir es mit Gruppen zu tun haben.

*Übung 3.3.7.* Die Multiplikation mit 5 ist ein Gruppenhomomorphismus von additiven Gruppen  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

3.3.8. Einen bijektiven Homomorphismus nennen wir in allen Situationen von Mengen mit Verknüpfung auch einen **Isomorphismus**.

*Vorschau 3.3.9.* Den Begriff eines Isomorphismus haben wir eben etwas schlampig eingeführt: Im allgemeinen nennt man einen Homomorphismus  $\phi$  nach ?? einen Isomorphismus genau dann, wenn es einen Homomorphismus  $\psi$  in die Gegenrichtung gibt derart, daß beide Kompositionen  $\psi \circ \phi$  und  $\phi \circ \psi$  die Identität sind. Im obigen Fall und in den Fällen, die uns bis auf weiteres begegnen werden, ist jedoch diese “richtige” Definition zu der oben gegebenen schlampigen Definition äquivalent. Der erste Fall, in dem das nicht mehr richtig ist, wird Ihnen in diesen Vorlesungen in [II.6.5.23](#) begegnen: Eine bijektive “stetige Abbildung von topologischen Räumen” muß keineswegs ein “Isomorphismus von topologischen Räumen” sein alias eine “stetige” Umkehrabbildung besitzen.

3.3.10. Die Terminologie kommt von griechisch “ $\mu\omicron\rho\phi\eta$ ” für “Gestalt, Struktur” und griechisch “ $\omicron\mu\omicron\iota\varsigma$ ” für “gleich, ähnlich”. Auf deutsch könnte man statt Homomorphismus auch “strukturerhaltende Abbildung” sagen. Das Wort “Isomorphismus” wird analog gebildet mit griechisch “ $\iota\sigma\omicron\varsigma$ ” für “gleich”.

*Übung 3.3.11 (Universelle Eigenschaft von  $(\mathbb{Z}, +)$ ).* Man zeige, daß für jede Gruppe  $G$  die Vorschrift  $\varphi \mapsto \varphi(1)$  eine Bijektion

$$\text{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

liefert. Ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der ganzen Zahlen in irgendeine weitere Gruppe ist also in Worten festgelegt und festlegbar durch das Bild des Elements  $1 \in \mathbb{Z}$ . Hinweis: Man erinnere 3.2.10. Man beachte, daß die 1 nicht das neutrale Element der Gruppe  $\mathbb{Z}$  meint, die hier vielmehr als additive Gruppe zu verstehen ist. Man gebe explizit den Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $1 \mapsto 5$  an. Man gebe explizit den Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  mit  $1 \mapsto 5$  an.

*Ergänzende Übung 3.3.12 (Universelle Eigenschaft von  $(\mathbb{N}, +)$ ).* Man zeige, daß für jedes Monoid  $G$  die Vorschrift  $\varphi \mapsto \varphi(1)$  eine Bijektion

$$\text{Mon}(\mathbb{N}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

liefert. Ein Monoidhomomorphismus vom additiven Monoid der natürlichen Zahlen in irgendein weiteres Monoid ist also in Worten festgelegt und festlegbar durch das Bild des Elements  $1 \in \mathbb{N}$ . Hinweis: Man erinnere 3.1.16. Wenn man es ganz genau nimmt, muß man für diese Übung die Diskussion der natürlichen Zahlen ?? abwarten.

*Ergänzung 3.3.13.* Eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung heißt auch eine **Halbgruppe**. Gegeben Halbgruppen  $H$  und  $G$  schreiben wir  $\text{Halb}(H, G)$  statt  $\text{Mag}(H, G)$  für die Menge aller mit der Verknüpfung verträglichen Abbildungen von  $H$  nach  $G$ , als da heißt, aller **Halbgruppenhomomorphismen**. Für jede Halbgruppe  $G$  liefert dann die Vorschrift  $\varphi \mapsto \varphi(1)$  eine Bijektion

$$\text{Halb}(\mathbb{N}_{\geq 1}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

Hierbei ist  $\mathbb{N}_{\geq 1}$  mittels der Addition als Halbgruppe aufzufassen. Etwas interessanter wird es, wenn wir Mengen mit völlig beliebigen, nicht notwendig assoziativen Verknüpfungen betrachten: Betrachten wir die Menge  $\mathbb{M}$  "aller möglichen Klammerungen" im Sinne von 3.1.8 und darauf die durch "Hinter-einanderschreiben" erklärte Verknüpfung sowie das Element  $* \in \mathbb{M}$ , das die einzig mögliche Verklammerung von einem Buchstaben meint, so liefert für jedes Magma  $G$  die Vorschrift  $\varphi \mapsto \varphi(*)$  eine Bijektion

$$\text{Mag}(\mathbb{M}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

*Übung 3.3.14.* Jeder Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  vertauscht mit Inversenbildung, in Formeln  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} \forall a \in G$ .

*Ergänzende Übung 3.3.15.* Gegeben eine Verknüpfung  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(a, b) \mapsto ab$  auf einer Menge erklärt man die **opponierte Verknüpfung** durch die Vorschrift  $(a, b) \mapsto ba$ . Oft schreibt man auch  $A^{\text{opp}}$  oder  $A^\circ$  für die Menge  $A$ , versehen mit der opponierten Verknüpfung, und  $x^\circ$  für das Element  $x \in A$ , aufgefaßt als Element von  $A^{\text{opp}}$ . Das hat den Vorteil, daß man sich das Verknüpfungssymbol sparen kann, die Definition der opponierten Verknüpfung wird dann  $b^\circ a^\circ := (ab)^\circ$ . Man zeige: Gegeben eine Gruppe  $G$  liefert das Bilden des Inversen stets einen Gruppenisomorphismus  $G^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} G$ ,  $g^\circ \mapsto g^{-1}$  zwischen der **opponierten Gruppe** und der ursprünglichen Gruppe.

*Ergänzende Übung 3.3.16.* Jede Halbgruppe  $G$  kann man zu einem Monoid  $\tilde{G}$  erweitern, indem man noch ein Element hinzunimmt und ihm die Rolle des neutralen Elements zuweist. Für jedes weitere Monoid  $H$  liefert dann das Vorschalten der Einbettung  $G \hookrightarrow \tilde{G}$  eine Bijektion

$$\text{Mon}(\tilde{G}, H) \xrightarrow{\sim} \text{Halb}(G, H)$$

### 3.4 Körper

3.4.1. Die algebraische Struktur eines Körpers wird den Hauptbestandteil unserer axiomatischen Einführung der reellen Zahlen in II.1.4 bilden. Gleichzeitig bildet sie die Grundlage der Modellierung des Raums in der linearen Algebra.

**Definition 3.4.2.** Ein **Körper**  $(K, +, \cdot)$  (englisch **field**, französisch **corps**) ist eine Menge  $K$  mit zwei assoziativen und kommutativen Verknüpfungen, der sogenannten **Addition**  $+$  und **Multiplikation**  $\cdot$  des Körpers, derart daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1.  $(K, +)$  ist eine Gruppe, die **additive Gruppe** des Körpers.
2. Bezeichnet  $0_K \in K$  das neutrale Element der Gruppe  $(K, +)$ , so folgt aus  $a \neq 0_K \neq b$  schon  $a \cdot b \neq 0_K$  und  $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$  ist eine Gruppe, die **multiplikative Gruppe** des Körpers.
3. Es gilt das **Distributivgesetz**

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$$

*Beispiele* 3.4.3. Ein Beispiel für einen Körper ist der Körper der rationalen Zahlen  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ . Ein anderes Beispiel ist der zweielementige Körper mit den durch die Axiome erzwungenen Rechenregeln, der fundamental ist in der Informatik. Die ganzen Zahlen  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  bilden keinen Körper, da  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$  keine Gruppe ist, da es nämlich in  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  nur für 1 und  $-1$  ein multiplikatives Inverses gibt. Es gibt keinen einelementigen Körper, da das Komplement seines Nullelements die leere Menge sein müßte: Dies Komplement kann dann aber unter der Multiplikation keine Gruppe sein, da es eben kein neutrales Element haben könnte.

*Ergänzung* 3.4.4. Der Begriff “Körper” ist in diesem Zusammenhang wohl zu verstehen als “besonders gut unter den verschiedensten Rechenoperationen abgeschlossener Zahlbereich”, in Analogie zu geometrischen Körpern wie Kugeln oder Zylindern, die man entsprechend als “besonders gut in sich geschlossene Bereiche des Raums” ansehen könnte. Die Bezeichnung als “Distributivgesetz” rührt daher, daß uns dieses Gesetz erlaubt, beim Multiplizieren eines Elements mit einer Summe den “Faktor auf die Summanden zu verteilen”.

3.4.5. Wenn wir mit Buchstaben rechnen, werden wir meist  $a \cdot b = ab$  abkürzen. Zusätzlich vereinbaren wir zur Vermeidung von Klammern die Regel “Punkt vor Strich”, so daß also zum Beispiel das Distributivgesetz kürzer

in der Form  $a(b + c) = ab + ac$  geschrieben werden kann. Die multiplikative Gruppe eines Körpers  $K$  notieren wir  $K^\times = K \setminus \{0_K\}$  in Übereinstimmung mit unserer allgemeinen Notation 3.2.11, schließlich handelt es sich um die Menge der invertierbaren Elemente des multiplikativen Monoids  $K$ . Für das neutrale Element der Multiplikation vereinbaren wir die Bezeichnung  $1_K \in K^\times$ . Wir kürzen meist  $0_K$  ab durch 0 und  $1_K$  durch 1 in der Erwartung, daß man aus dem Kontext erschließt, ob mit 0 und 1 natürliche Zahlen oder Elemente eines speziellen Körpers gemeint sind. Meist kommt es darauf im Übrigen gar nicht an.

3.4.6. Für alle  $a, b$  in einem Körper und alle  $n \geq 0$  gilt die binomische Formel

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

Um das einzusehen prüft man, daß wir bei der Herleitung nach 1.1.23 nur Körperaxiome verwandt haben. Man beachte hierbei unsere Konvention  $0_K^0 = 1_K$  aus 3.1.14, angewandt auf das Monoid  $(K, \cdot)$  in Verbindung mit der notationellen Konvention auf Seite 69. Die Multiplikation mit den Binomialkoeffizienten in dieser Formel ist zu verstehen als wiederholte Addition im Sinne der Bezeichnungskonvention  $na$  auf Seite 69, angewandt auf den Spezialfall der additiven Gruppe unseres Körpers.

**Lemma 3.4.7 (Folgerungen aus den Körperaxiomen).** *In jedem Körper  $K$  gilt:*

1.  $a0 = 0 \quad \forall a \in K$ .
2.  $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  oder  $b = 0$ .
3.  $-a = (-1)a \quad \forall a \in K$ .
4.  $(-1)(-1) = 1$ .
5.  $(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in K$ .
6.  $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  für alle  $a, c \in K$  und  $b, d \in K^\times$ .
7.  $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$  für alle  $a \in K$  und  $b, c \in K^\times$ .
8.  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  für alle  $a, c \in K$  und  $b, d \in K^\times$ .
9.  $m(ab) = (ma)b$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$  und  $a, b \in K$ .

*Beweis.* 1. Man folgert das aus  $a0 + a0 = a(0 + 0) = a0$  durch Hinzuaddieren von  $-(a0)$  auf beiden Seiten.

2. In der Tat folgt aus ( $a \neq 0$  und  $b \neq 0$ ) schon ( $ab \neq 0$ ) nach den Körperaxiomen.
3. In der Tat gilt  $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$ , und  $-a$  ist ja gerade definiert als das eindeutig bestimmte Element von  $K$  so daß  $a + (-a) = 0$ .
4. In der Tat gilt nach dem Vorhergehenden  $(-1)(-1) = -(-1) = 1$ .
5. Um das nachzuweisen ersetzen wir einfach  $(-a) = (-1)a$  und  $(-b) = (-1)b$  und verwenden  $(-1)(-1) = 1$ .
6. Das ist klar.
7. Das ist klar.
8. Das wird bewiesen, indem man die Brüche auf einen Hauptnenner bringt und das Distributivgesetz anwendet.
9. Das folgt durch wiederholtes Anwenden des Distributivgesetzes.

□

3.4.8. Die Frage, wie das Produkt zweier negativer Zahlen zu bilden sei, war lange umstritten. Mir scheint der vorhergehende Beweis das überzeugendste Argument für “Minus mal Minus gibt Plus”: Es sagt salopp gesprochen, daß man diese Regel adoptieren muß, wenn man beim Rechnen das Ausklammern ohne alle Einschränkungen erlauben will.

3.4.9. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man bei Mengen mit mehr als einer Verknüpfung analog. Zum Beispiel ist ein **Körperhomomorphismus**  $\varphi$  von einem Körper  $K$  in einen Körper  $L$  definiert als eine Abbildung  $\varphi : K \rightarrow L$  derart, daß gilt  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$  und  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$  für alle  $a, b \in K$  und  $\varphi(1) = 1$ . Die Bedingung  $\varphi(1) = 1$  ist nur nötig, um den Fall der Nullabbildung auszuschließen. In anderen Worten mag man einen Körperhomomorphismus auch definieren als eine Abbildung, die sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation ein Monoidhomomorphismus ist. Unter einem **Körperisomorphismus** verstehen wir wieder einen bijektiven Körperhomomorphismus.

3.4.10. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man auch im Fall von Mengen mit gar keiner Verknüpfung: Unter einem **Homomorphismus von Mengen** versteht man schlicht eine Abbildung, unter einem **Isomorphismus von Mengen** eine Bijektion.

*Übung 3.4.11.* Ist  $K$  ein Körper derart, daß es kein  $x \in K$  gibt mit  $x^2 = -1$ , so kann man die Menge  $K \times K = K^2$  zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Die Abbildung  $K \rightarrow K^2$ ,  $a \mapsto (a, 0)$  ist dann ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir  $(a, 0)$  mit  $a$  ab und setzen  $(0, 1) = i$ , so gilt  $i^2 = -1$  und  $(a, b) = a + bi$  und die Abbildung  $a + bi \mapsto a - bi$  ist ein Körperisomorphismus  $K^2 \xrightarrow{\sim} K^2$ .

3.4.12. Auf die in der vorhergehenden Übung 3.4.11 erklärte Weise können wir etwa aus dem Körper  $K = \mathbb{R}$  der “reellen Zahlen”, sobald wir ihn kennengelernt haben, direkt den Körper  $\mathbb{C}$  der **komplexen Zahlen** konstruieren. Unser Körperisomorphismus gegeben durch die Vorschrift  $a + bi \mapsto a - bi$  heißt in diesem Fall die **komplexe Konjugation** und wird auch  $z \mapsto \bar{z}$  notiert. Man beachte, wie mühelos das alles in der Sprache der Mengenlehre zu machen ist. Als die komplexen Zahlen erfunden wurden, gab es noch keine Mengenlehre und beim Rechnen beschränkte man sich auf das Rechnen mit “reellen” Zahlen, ja selbst das Multiplizieren zweier negativer Zahlen wurde als eine fragwürdige Operation angesehen, und das Ziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl als eine rein imaginäre Operation. In gewisser

Weise ist es das ja auch geblieben, aber die Mengenlehre liefert eben unserer Imagination eine wunderbar präzise Sprache, in der wir uns auch über imaginierte Dinge unmißverständlich austauschen können. Man kann dieselbe Konstruktion auch allgemeiner durchführen, wenn man statt  $-1$  irgendein anderes Element eines Körpers  $K$  betrachtet, das kein Quadrat ist. Noch allgemeinere Konstruktionen zur “Adjunktion höherer Wurzeln” oder sogar der “Adjunktion von Nullstellen polynomialer Gleichungen” können Sie in der Algebra kennenlernen, vergleiche etwa ???. In ??? diskutieren wir die komplexen Zahlen ausführlicher.

*Übung 3.4.13.* Ein Körperhomomorphismus ist stets injektiv.

### 3.5 Der Aufbau des Zahlensystems\*

#### 3.5.1. Der Aufbau des Zahlensystems

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

erscheint in diesem Text nur in einer Abfolge von Nebenbemerkungen und soll hier einmal zusammenfassend dargestellt werden.

1. Die Konstruktion der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  diskutiere ich in ???. Kurz wird das auch schon in 2.2.35 angerissen. Eine vollständig überzeugende Diskussion dieser Struktur ist meines Erachtens nur im Rahmen der Logik möglich.
2. Die Konstruktion der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  aus den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ , ja der einhüllenden Gruppe eines beliebigen kommutativen Monoids wird in ??? erklärt. Um die Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$  aus der Multiplikation auf  $\mathbb{N}$  zu erhalten, kann man dann wie in II.1.4.6 vorgehen.
3. Die Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  aus dem Integritätsbereich der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , ja des Quotientenkörpers eines beliebigen kommutativen Integritätsbereichs wird in ??? ausgeführt. Die Anordnung auf  $\mathbb{Q}$  dürfen Sie selbst in ??? konstruieren.
4. Die Konstruktion des angeordneten Körpers der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  aus dem angeordneten Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  wird zur Beginn der Analysis in II.1.4.3 erklärt.
5. Die Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  aus dem Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  wurde in 3.4.11 angerissen und wird in ??? ausführlicher behandelt.

3.5.2. Oft wird der Aufbau des Zahlensystems als Geschichte immer neuer Gewinne erzählt: Beim Übergang von  $\mathbb{N}$  zu  $\mathbb{Z}$  gewinnt man die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs  $a+x = b$ , beim Übergang von  $\mathbb{Z}$  zu  $\mathbb{Q}$  die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs  $ax = b$  für  $a \neq 0$ , beim Übergang von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$  die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs  $x^a = b$  für  $a, b > 0$ , und nach Übergang von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  besitzen sogar alle nichtkonstanten Polynome Nullstellen. Hier ist nur anzumerken, daß man die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs  $x^a = b$  für  $a, b > 0$  auch schon in einem abzählbaren Unterkörper von  $\mathbb{R}$  erreichen könnte und daß der eigentliche Grund für den Übergang zu  $\mathbb{R}$  analytischer Natur ist: Man gewinnt so den Zwischenwertsatz. Man kann den Aufbau des Zahlensystems aber auch als eine Geschichte immer neuer Verluste erzählen: Beim Übergang von  $\mathbb{N}$  zu  $\mathbb{Z}$  verliert man die Existenz eines kleinsten Elements, beim Übergang von  $\mathbb{Z}$  zu  $\mathbb{Q}$  die Existenz unmittelbarer Nachfolger, beim Übergang von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$  die Abzählbarkeit, und beim Übergang von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  die Anordnung. Man kann sogar noch weiter gehen zum Schiefkörper der sogenannten Quaternionen  $\mathbb{H} \supset \mathbb{C}$  aus ??, wobei man die Kommutativität der Multiplikation verliert, oder sogar den sogenannten Oktaven  $\mathbb{O} \supset \mathbb{H}$  aus ??, bei denen die Multiplikation nicht einmal mehr assoziativ ist.

## 4 Zum Schreiben von Mathematik\*

### 4.1 Herkunft einiger Symbole

4.1.1. Ich habe versucht, etwas über die Herkunft einiger mathematischer Symbole in Erfahrung zu bringen, die schon aus der Schule selbstverständlich sind.

4.1.2. Das Pluszeichen  $+$  ist wohl ein Ausschnitt aus dem Symbol  $\&$ , das hinwiederum entstanden ist durch Zusammenziehen der beiden Buchstaben im Wörtchen “et”, lateinisch für “und”.

4.1.3. Die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahlen kam Mitte des vorigen Jahrtausends aus Indien über die Araber nach Italien. Bis dahin rechnete man in Europa in römischer Notation. Sie müssen nur versuchen, in dieser Notation zwei größere Zahlen zu multiplizieren, um zu ermessen, welchen wissenschaftlichen und auch wirtschaftlichen Fortschritt der Übergang zur Dezimaldarstellung bedeutete. Das Beispiel der Dezimaldarstellung zeigt in meinen Augen auch, wie entscheidend das sorgfältige Einbeziehen trivialer Spezialfälle, manchmal als “Theorie der leeren Menge” verspottet, für die Eleganz der Darstellung mathematischer Sachverhalte sein kann: Sie wurde ja eben dadurch erst ermöglicht, daß man ein eigenes Symbol für “gar nichts” erfand! Ich denke, daß der Aufbau eines effizienten Notationssystems, obwohl er natürlich nicht denselben Stellenwert einnehmen kann wie die Entwicklung mathematischer Inhalte, dennoch in der Lehre ein wichtiges Ziel sein muß. In diesem Text habe ich mir die größte Mühe gegeben, unter den gebräuchlichen Notationen diejenigen auszuwählen, die mir am sinnvollsten schienen, und sie soweit wie möglich aufzuschlüsseln.

4.1.4. Das Wort von der “Theorie der leeren Menge” scheint auf Carl Ludwig Siegel zurückzugehen, der in Bezug auf Bourbaki einmal gesagt haben soll: “Ich habe Angst, dass die Mathematik vor dem Ende des Jahrhunderts zugrunde geht, wenn dem Trend nach sinnloser Abstraktion—die Theorie der leeren Menge, wie ich es nenne—nicht Einhalt geboten wird”.

4.1.5. Die Herkunft der logischen Symbole  $\exists$  und  $\forall$  als umgedrehte E bzw. A haben wir bereits in 2.3.4 erwähnt, sie wurden von Cantor in seiner Mengenlehre zuerst verwendet. Die Symbole  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$  wurden früher als fette Buchstaben gedruckt und zunächst nur beim Tafelanschrieb in der hier gegebenen Gestalt wiedergegeben, da man fetten Druck an der Tafel nicht gut darstellen kann.

## 4.2 Grundsätzliches zur Formulierung

4.2.1. Ich versuche, mir beim Schreiben über Mathematik immer vor Augen zu halten, daß die mathematische Terminologie und Formelsprache sehr wenig Redundanz aufweisen. Auch kleinste Fehler können dadurch schon zu den größten Mißverständnissen führen. Ich plädiere deshalb dafür, die Redundanz künstlich zu erhöhen und nach Möglichkeit alles dreimal zu sagen: Einmal in mathematischer Terminologie, einmal in Formeln, und dann noch einmal in weniger formellen Worten und mit Bildern.

4.2.2. Aus eigener Erfahrung weiß ich, daß ein Leser keineswegs immer von vorne nach hinten alles liest und sich das bereits Gelesene merkt, sondern daß man oft gezielt spezielle Resultate sucht und herausgreift oder auch diagonal liest. Ich habe es deshalb vermieden, irgendwelche Generalvoraussetzungen einzustreuen, von der Art “von nun an bis zum Ende des Abschnitts sind alle unsere topologischen Räume Hausdorff” und dergleichen. Wenn das einmal bei speziellen Themen zu umständlich werden sollte, will ich strikt die Regel befolgen, daß Generalvoraussetzungen für eine Gliederungsstufe entweder direkt nach der Überschrift besagter Gliederungsstufe stehen müssen, oder aber direkt vor dem Beginn der ersten Überschrift der nächsttieferen Gliederungsstufe, nach der entsprechenden Vorrede, und dann als eigener Abschnitt “Generalvoraussetzungen”.

4.2.3. Das Schema Definition-Satz-Beweis scheint mir für die Darstellung von Mathematik sehr gut geeignet und auch zum Lesen und Lernen äußerst effektiv, wenn es richtig angewendet wird: Wenn nämlich die Sätze so formuliert werden, daß ihre Aussagen auch für sich genommen schon sinnvoll und verständlich sind, sofern man die entsprechenden Definitionen parat hat. Dann kann man dieses Schema verstehen als eine Anleitung zum diagonalen Lesen. Demselben Ziel dient die Abstufung der Sätze als Sätze, Korollare, Propositionen, Lemmata und dergleichen: Sie soll dem Leser zu erlauben, etwa durch Konzentration auf die eigentlichen Sätze eine schnelle Orientierung über die wesentlichen Aussagen und Resultate zu gewinnen. Diese Form ersetzt zu einem gewissen Maße das, was man im Deutschunterricht lernt. Ich empfehle, mathematische Texte und Vorträge nicht mit einer Gliederung zu beginnen und auch nicht mit einem Schlußwort zu beenden, da das in Anbetracht der in der Mathematik eh üblichen Strukturierung durch das Schema “Definition-Satz-Beweis” leicht dazu führt, daß die strukturellen Elemente gegenüber dem eigentlichen Inhalt zuviel Raum einnehmen.

4.2.4. In diesem Text gibt es auch viele Textpassagen, die einfach nur nummeriert sind. Hier handelt es sich meist um kleinere Aussagen mit Beweis, die mir für die “große Form” Definition-Satz-Beweis zu unbedeutend oder zu

offensichtlich schienen. Andere Textpassagen sind als *Ergänzung* oder *Ergänzende Übung* ausgewiesen: Damit ist gemeint, daß sie im unmittelbaren Zusammenhang ohne Schaden übersprungen werden können, daß sie jedoch aus dem vorhergehenden heraus verständlich sein sollten, und daß darauf eventuell später zurückgegriffen werden wird. Wieder andere Textpassagen sind als *Vorschau* oder *Weiterführende Übung* ausgewiesen: Damit ist gemeint, daß sie im unmittelbaren Zusammenhang ohne Schaden übersprungen werden können, und möglicherweise auch, daß ihr Verständnis Kenntnisse voraussetzt, bei denen nicht davon ausgegangen werden kann, daß sie dem Leser an der entsprechenden Stelle bereits zur Verfügung stehen.

4.2.5. Satzzeichen wie Punkt und Komma stören in meinen Augen die Ästhetik von aus dem Text herausgestellten Formeln. Ich will deshalb die Regel aufstellen und befolgen, daß eine aus dem Text herausgestellte Formel stets mit einem nicht gedruckten Punkt dahinter zu denken ist, wenn der Text mit ihr aufhört oder wenn es darunter mit einem Großbuchstaben weitergeht. Ich werde versuchen, den Fall zu vermeiden, daß hinter eine aus dem Text herausgestellte Formel nach den Regeln der Grammatik ein Komma gehörte.

### 4.3 Sprache und Mathematik

4.3.1. In diesem Abschnitt habe ich gesammelt, was mir beim Erklären von Mathematik und Schreiben über Mathematik besonders schwer fällt.

4.3.2. Die mathematische Terminologie widmet freimütig Worte der Umgangssprache um und gibt ihnen hochpräzise mathematische Bedeutungen, die mal mehr und mal weniger zur Ursprungsbedeutung verwandt sind. Man denke zum Beispiel an die Worte Menge, Abbildung, Gruppe, Ring, Körper. Wie aber soll der lernende Leser an einer gegebenen Stelle erraten, ob ein Wort, auf das er stößt, nun bereits umgewidmet und in seiner neuen hochpräzisen mathematischen Bedeutung gemeint ist, oder vielmehr umgangssprachlich? In jedem Falle steht das auch wieder im Gegensatz zu dem, was in der Schule im Deutschunterricht gelernt wird: Wortwiederholung ist beim mathematischen Schreiben und Reden richtig und wichtig.

4.3.3. Bereits erklärte Begriffe werden in der mathematischen Fachsprache durch Ergänzungen mal spezifiziert, mal abgeschwächt, und manchmal sogar beides zugleich. Der noch wenig informierte Leser kann nur schwer erraten, was im Einzelfall zutrifft. So ist ein Primkörper etwas Spezielleres als ein Körper, ein Schiefkörper etwas Allgemeineres, und ein Erweiterungskörper "etwas mit zusätzlichen Daten". Ein lokal kompakter Raum ist etwas allgemeineres als ein kompakter Raum. Eine universelle Überlagerung ist etwas Spezielleres

als eine Überlagerung und eine verzweigte Überlagerung etwas Allgemeineres, das aber nur im Spezialfall von Flächen überhaupt sinnvoll definiert ist. Ein Borelmaß ist etwas Spezielleres als ein Maß und ein signiertes Maß etwas Allgemeineres. Eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist etwas Allgemeineres als eine Mannigfaltigkeit, eine glatte Mannigfaltigkeit dahingegen eine spezielle Art von Mannigfaltigkeit, und ich könnte noch lange fortfahren.

4.3.4. Problematisch scheint mir auch die Verwendung bestimmter und unbestimmter Artikel. Sind mathematische Strukturen “eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus”, wie Gruppen mit zwei Elementen oder Mengen mit einem Element, so fällt mir die Verwendung des bestimmten Artikels leicht. Sehr häufig sind mathematische Strukturen jedoch nur “eindeutig bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus”: Etwa Mengen mit fünf Elementen, Gruppen mit drei Elementen, Vektorräume gegebener Dimension über einem vorgegebenen Körper. Soll man dann den bestimmten oder den unbestimmten Artikel verwenden? Hier ist die Terminologie uneinheitlich: Man sagt üblicherweise “ein fünfdimensionaler reeller Vektorraum, eine abzählbar unendliche Menge” aber “der Zerfällungskörper, der algebraische Abschluß, die universelle Überlagerung”, ohne daß ich dafür triftige Gründe ausmachen könnte. Vielleicht wäre es eine gute Idee, für nur bis auf nichteindeutigen Isomorphismus eindeutige mathematische Objekte die bestimmten Artikel mit einer “abschwächenden Schlange” in der Form “dër, dïe, däs” zu verwenden.

## 4.4 Terminologisches zur leeren Menge

4.4.1. Ich finde es oft schwierig, die leere Menge terminologisch befriedigend einzubinden, und finde auch, daß Bourbaki, den ich an sich sehr schätze, das oft nicht richtig gelungen ist. Meine Konventionen sind wie folgt:

1. Die leere Menge ist nach II.2.1.1 ein Intervall, damit beliebige Schnitte von Intervallen wieder Intervalle sind;
2. Die leere Menge nach ?? konvex, damit beliebige Schnitte konvexer Mengen wieder konvex sind;
3. Die leere Menge ist *nicht* zusammenhängend, da die Zusammenhangskomponenten eines Raums die maximalen zusammenhängenden Teilmengen sein sollten, und die Zahl der Zusammenhangskomponenten einer topologischen Summe die Summe der Zahlen der jeweiligen Zusammenhangskomponenten, vergleiche IV.3.4.1, VI.1.3.2;
4. Die Wirkung einer Gruppe  $G$  auf der leeren Menge ist nach ?? *nicht* transitiv, damit jede  $G$ -Menge sich bis auf Reihenfolge und Isomorphis-

mus eindeutig als eine disjunkte Vereinigung von transitiven  $G$ -Mengen darstellen läßt;

5. Die leere Menge ist nach ?? *kein* affiner Raum, da sie keine transitive Operation eines Vektorraums zuläßt. Daß damit der Schnitt zweier affiner Teilräume nicht notwendig wieder ein affiner Teilraum ist, nehme ich als kleineres Übel in Kauf;
6. Eine Abbildung von der leeren Menge in eine beliebige weitere Menge ist konstant, aber nicht einwertig, vergleiche [2.2.8](#);

4.4.2. Diese Konventionen haben auch ihre Nachteile: So sind die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  nun genau die *nichtleeren* Intervalle und nur jede *nichtleere* konvexe Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums ist zusammenhängend. Ich denke jedoch, die Vorteile überwiegen.

**Teil B**  
**Analysis**



# Kapitel II

## Funktionen einer reellen Veränderlichen

Die hier und im folgenden gegebene Einteilung in Kapitel spiegelt inhaltliche Einheiten wieder und darf nicht als Einteilung in Vorlesungen mißverstanden werden. Mir scheint etwa, daß der Stoff der nächsten beiden Kapitel über Funktionen einer und mehrerer reellen Veränderlichen mit seinen 347 Textseiten zusammen mit der Hälfte der 29 Textseiten aus dem ersten Kapitel zu den Grundlagen in etwa drei vierstündige Vorlesungen füllen könnte. Besonders wünschenswert für einen derartigen Grundkurs schiene es mir, zusätzlich noch die ersten 30 Seiten des Kapitels über Funktionenräume und Fouriertransformation zu behandeln, und dafür notfalls das eine oder andere wegzulassen.

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Die reellen Zahlen</b> . . . . .	<b>90</b>
1.1	Wurzeln rationaler Zahlen . . . . .	90
1.2	Ordnungen auf Mengen . . . . .	92
1.3	Angeordnete Körper . . . . .	96
1.4	Die reellen Zahlen . . . . .	98
<b>2</b>	<b>Folgen und Reihen</b> . . . . .	<b>106</b>
2.1	Konvergenz von Folgen . . . . .	106
2.2	Vollständigkeit der reellen Zahlen . . . . .	116
2.3	Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ . . . . .	120
2.4	Die Kreiszahl $\pi$ . . . . .	124
2.5	Grenzwerte von Reihen . . . . .	125

2.6	Wachstum und Zerfall . . . . .	133
<b>3</b>	<b>Stetigkeit . . . . .</b>	<b>140</b>
3.1	Definition und erste Beispiele . . . . .	140
3.2	Umkehrfunktionen und Zwischenwertsatz . . . . .	146
3.3	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	156
3.4	Stetige Funktionen auf Kompakta . . . . .	163
3.5	Integration stetiger Funktionen . . . . .	166
<b>4</b>	<b>Differentiation und Integration . . . . .</b>	<b>175</b>
4.1	Differentiation . . . . .	175
4.2	Ableitungsregeln . . . . .	178
4.3	Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung . . . . .	182
4.4	Regeln von de l'Hospital . . . . .	193
4.5	Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung . . . . .	196
4.6	Integrationsregeln . . . . .	198
4.7	Hyperbolische trigonometrische Funktionen . . . . .	203
<b>5</b>	<b>Potenzreihen und höhere Ableitungen . . . . .</b>	<b>208</b>
5.1	Funktionenfolgen und Potenzreihen . . . . .	208
5.2	Taylorentwicklung . . . . .	217
5.3	Rechnen mit Approximationen . . . . .	220
5.4	Der Abel'sche Grenzwertsatz* . . . . .	224
<b>6</b>	<b>Stetigkeit in mehreren Veränderlichen . . . . .</b>	<b>227</b>
6.1	Vorschläge zur Veranschaulichung . . . . .	227
6.2	Stetigkeit bei metrischen Räumen . . . . .	229
6.3	Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen . . . . .	235
6.4	Abgeschlossene und offene Teilmengen . . . . .	238
6.5	Topologische Räume . . . . .	241
6.6	Grenzwerte in topologischen Räumen . . . . .	247
6.7	Kompakte metrische Räume . . . . .	250
6.8	Affine Räume . . . . .	253
6.9	Normierte Räume . . . . .	254
6.10	Überdeckungen kompakter metrischer Räume . . . . .	261
6.11	Integrale mit Parametern . . . . .	264
<b>7</b>	<b>Raumwertige Funktionen . . . . .</b>	<b>267</b>

7.1	Bogenlänge in metrischen Räumen . . . . .	267
7.2	Ableiten von raumwertigen Funktionen . . . . .	269
7.3	Die Bogenlänge in normierten Räumen . . . . .	275
7.4	Definition von Sinus und Cosinus . . . . .	279
7.5	Vollständigkeit und Exponential von Matrizen . . . . .	285
7.6	Eigenschaften von Sinus und Cosinus . . . . .	290

---

## 1 Die reellen Zahlen

Hier trennen sich nun die Wege der linearen Algebra, in der man sich zunächst nur auf die in [?] eingeführten algebraischen Konzepte stützt und bis auf weiteres mit beliebigen Körpern arbeiten kann, und der Analysis, für die das Wesen der reellen Zahlen grundlegend ist. Bei der Modellierung des Anschauungsraums spielen jedoch die reellen Zahlen auch wieder eine zentrale Rolle. Überspitzt könnte man sagen, daß im Gegensatz zu früher, als die mathematische Modellierung der Ebene mithilfe der euklidischen Axiome an den Anfang gestellt wurde, seit dem Anfang des 20.-ten Jahrhunderts eher die Modellierung der Gerade an den Anfang gestellt wird, wie wir sie im folgenden kennenlernen werden.

### 1.1 Wurzeln rationaler Zahlen

**Satz 1.1.1.** *Es gibt keine rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$ .*

*Bemerkung 1.1.2.* Dieser Satz erklärt, warum wir uns mit den rationalen Zahlen nicht zufrieden geben. In der Tat suchen wir nach einem Zahlbereich, in dem jeder "anschaulichen Länge", wie zum Beispiel der Länge der Diagonale eines Quadrats der Kantenlänge Eins, auch tatsächlich eine Zahl entspricht. Wir zeigen in 2.3.2, daß im Zahlbereich der reellen Zahlen immerhin aus allen nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln gezogen werden können, und diskutieren in 2.4.1, wie sich sogar unsere anschauliche Vorstellung von der Länge des Einheitskreises zur Definition einer reellen Zahl präzisieren läßt.

*Erster Beweis.* Setzen wir die in ?? bewiesene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraus, so folgt unmittelbar, daß das Quadrat eines unkürzbaren Bruches mit Nenner  $\neq \pm 1$  wieder ein unkürzbarer Bruch mit Nenner  $\neq \pm 1$  ist. Für eine rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  folgt aus  $x \notin \mathbb{Z}$  also  $x^2 \notin \mathbb{Z}$ . Gäbe es mithin eine rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$ , so müßte  $x$  bereits selbst eine ganze Zahl sein. Offensichtlich gibt es jedoch keine ganze Zahl  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $x^2 = 2$ .  $\square$

*Zweiter Beweis.* Ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraussetzen können wir in unserer speziellen Situation auch elementarer mit dem Primfaktor 2 durch Widerspruch argumentieren: Nehmen wir an, wir fänden ganze Zahlen  $p, q \in \mathbb{Z}$  mit  $q \neq 0$  derart, daß  $x = p/q$  ein unkürzbarer Bruch wäre mit  $x^2 = 2$ . Es folgte  $p^2 = 2q^2$ , also  $p^2$  gerade, also  $p$  gerade, also  $p^2$  durch 4 teilbar, also  $q^2$  gerade, also  $q$  gerade. Dann wäre unser Bruch aber doch kürzbar gewesen, nämlich durch 2.  $\square$



## 1.2 Ordnungen auf Mengen

**Definition 1.2.1.** Eine **Relation**  $R$  auf einer Menge  $X$  ist eine Teilmenge  $R \subset X \times X$  des kartesischen Produkts von  $X$  mit sich selbst, also eine Menge von Paaren von Elementen von  $X$ . Statt  $(x, y) \in R$  schreiben wir in diesem Zusammenhang meist  $xRy$ . Eine Relation  $R$  heißt eine **Ordnungsrelation** oder auch eine **partielle Ordnung** oder **Halbordnung** oder auch einfach nur eine **Ordnung** genau dann, wenn für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

1. **Transitivität:**  $(xRy \text{ und } yRz) \Rightarrow xRz$ ;
2. **Antisymmetrie:**  $(xRy \text{ und } yRx) \Rightarrow x = y$ ;
3. **Reflexivität:** Es gilt  $xRx$  für alle  $x \in X$ .

Auf Englisch benutzt man für eine partiell geordnete Menge alias “partially ordered set” auch oft die Abkürzung **poset**. Eine Ordnungsrelation heißt eine **Anordnung** oder eine **totale Ordnung** oder auch eine **lineare Ordnung** genau dann, wenn wir zusätzlich haben

4. **Totalität:** Für alle  $x, y \in X$  gilt  $xRy$  oder  $yRx$ .

1.2.2. Ordnungsrelationen schreibt man meist  $x \leq y$ , statt  $x \leq y$  schreibt man dann oft auch  $y \geq x$ . Weiter kürzt man  $(x \leq y \text{ und } x \neq y)$  ab mit  $x < y$  und ebenso  $(x \geq y \text{ und } x \neq y)$  mit  $x > y$ . Auf jeder angeordneten Menge definieren wir Verknüpfungen  $\max$  und  $\min$  in offensichtlicher Verallgemeinerung von [I.3.1.2.3](#).

**Definition 1.2.3.** Sei  $(Y, \leq)$  eine partiell geordnete Menge.

1. Ein Element  $g \in Y$  heißt ein **größtes Element** von  $Y$  genau dann, wenn gilt  $g \geq y \quad \forall y \in Y$ . Ein Element  $g \in Y$  heißt ein **maximales Element** von  $Y$  genau dann, wenn es kein  $y \in Y$  gibt mit  $y > g$ .
2. Ein Element  $k \in Y$  heißt ein **kleinstes Element** von  $Y$  genau dann, wenn gilt  $k \leq y \quad \forall y \in Y$ . Ein Element  $k \in Y$  heißt ein **minimales Element** von  $Y$  genau dann, wenn es kein  $y \in Y$  gibt mit  $y < k$ .

1.2.4. Jede partiell geordnete Menge besitzt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element. Wir dürfen deshalb den bestimmten Artikel verwenden und von **dem** größten bzw. kleinsten Element reden. Besitzt eine partiell geordnete Menge ein größtes bzw. ein kleinstes Element, so ist dies auch ihr einziges maximales bzw. minimales Element. Sonst kann es jedoch maximale bzw. minimale Elemente in großer Zahl geben, zumindest dann, wenn unsere Ordnungsrelation keine Anordnung ist.



Eine partiell geordnete Menge mit zwei minimalen und einem maximalen Element, die weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzt. Die

Darstellung ist in der Weise zu verstehen, daß die fetten Punkte die Elemente unserer Menge bedeuten und daß ein Element größer ist als ein anderer genau dann, wenn es von diesem “durch einen aufsteigenden Weg erreicht werden kann”.

**Definition 1.2.5.** Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge und  $Y \subset X$  eine Teilmenge.

1. Ein Element  $o \in X$  heißt eine **obere Schranke** von  $Y$  genau dann, wenn gilt  $o \geq y \quad \forall y \in Y$ .
2. Ein Element  $u \in X$  heißt eine **untere Schranke** von  $Y$  genau dann, wenn gilt  $u \leq y \quad \forall y \in Y$ .

**Definition 1.2.6.** Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge und  $Y \subset X$  eine Teilmenge.

1. Ein Element  $s \in X$  heißt die **kleinste obere Schranke** oder das **Supremum** von  $Y$  in  $X$  genau dann, wenn  $s$  das kleinste Element ist in der Menge  $\{o \in X \mid o \text{ ist obere Schranke von } Y\}$ . Wir schreiben dann  $s = \sup Y$  oder genauer  $s = \sup_X Y$ .
2. Ein Element  $i \in X$  heißt die **größte untere Schranke** oder auch das **Infimum** von  $Y$  in  $X$  genau dann, wenn  $i$  das größte Element ist in der Menge  $\{u \in X \mid u \text{ ist untere Schranke von } Y\}$ . Wir schreiben dann  $i = \inf Y$  oder genauer  $i = \inf_X Y$ .

*Beispiel 1.2.7.* Die Teilmenge  $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$  hat kein größtes Element, besitzt jedoch in  $\mathbb{Q}$  eine kleinste obere Schranke, nämlich  $\sup Y = 1$ . Die Teilmenge  $Z = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 1\} \subset \mathbb{Q}$  hat ein größtes Element, nämlich die 1, und das ist dann natürlich auch gleichzeitig ihre kleinste obere Schranke in  $\mathbb{Q}$ , also haben wir auch  $\sup Z = 1$ . Die Teilmenge  $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$  hat in  $\mathbb{Q}$  keine untere Schranke und dann natürlich erst recht keine größte untere Schranke.

1.2.8. Besitzt eine Teilmenge  $Y \subset X$  ein größtes Element  $g \in Y$ , so gilt  $g = \sup Y$ . Besitzt eine Teilmenge  $Y \subset X$  ein kleinstes Element  $k \in Y$ , so gilt  $k = \inf Y$ . Sind Teilmengen  $Z \subset Y \subset X$  gegeben und besitzen  $Z$  und  $Y$  ein Supremum in  $X$ , so gilt  $\sup Z \leq \sup Y$ .

*Ergänzendes Beispiel 1.2.9.* Auf der Potenzmenge einer beliebigen Menge ist die Inklusionsrelation eine partielle Ordnung. Bezüglich dieser Ordnung ist die Vereinigungsmenge im Sinne von ?? eines Mengensystems sein Supremum und die Schnittmenge sein Infimum.

*Übung 1.2.10.* Die Menge  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$  besitzt in  $\mathbb{Q}$  keine größte untere Schranke.



SkriptenBilder/Bildinfi.png

Die Menge  $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$  besitzt in  $\mathbb{Q}$  eine größte untere Schranke, nämlich die Null, in Formeln  $\inf Y = 0$ . Sie besitzt in  $\mathbb{Q}$  auch eine kleinste obere Schranke, nämlich die Eins, in Formeln  $\sup Y = 1$ .

### 1.3 Angeordnete Körper

**Definition 1.3.1.** Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper  $(K, +, \cdot)$  mit einer Anordnung  $\leq$ , die mit der Körperstruktur verträglich ist in dem Sinne, daß gilt

1.  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in K$ ;
2.  $(x \geq 0 \text{ und } y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0 \quad \forall x, y \in K$ .

Die Elemente  $x \in K$  mit  $x > 0$  bzw.  $x < 0$  nennt man **positiv** bzw. **negativ**. Die Elemente mit  $x \geq 0$  bzw.  $x \leq 0$  nennt man folgerichtig **nichtnegativ** bzw. **nichtpositiv**.

*Beispiel 1.3.2.* Der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist mit seiner üblichen Anordnung ein angeordneter Körper. Dasselbe wird auch für den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen gelten, den wir bald einführen werden.

*Ergänzung 1.3.3.* Für diejenigen Leser, die bereits das Konzept eines Rings kennen, sei angefügt, daß man in derselben Weise einen **angeordneten Ring** erklärt. In diesem Sinne ist dann etwa  $\mathbb{Z}$  ein angeordneter Ring.

**Lemma 1.3.4.** *In jedem angeordneten Körper gilt:*

1.  $(x \leq y \text{ und } a \leq b) \Rightarrow (x + a \leq y + b)$ ;
2.  $(x \leq y \text{ und } a \geq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$ ;
3.  $(0 \leq x < y \text{ und } 0 \leq a < b) \Rightarrow (0 \leq xa < yb)$ ;
4.  $(x \leq y) \Rightarrow (-y \leq -x)$ ;
5.  $(x \geq y \text{ und } a \leq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$ ;
6.  $(x \neq 0) \Rightarrow (x^2 > 0)$ ;
7.  $1 > 0$ ;
8.  $(x > 0) \Rightarrow (x^{-1} > 0)$ ;
9.  $(0 < x \leq y) \Rightarrow (0 < y^{-1} \leq x^{-1})$ .

*Beweis.* 1. In der Tat folgt  $x + a \leq y + a \leq y + b$ .

2. In der Tat folgt  $0 \leq y - x$ , also  $0 \leq a(y - x) = ay - ax$  und damit dann  $ax \leq ay$ .

3. In der Tat erhalten wir  $0 \leq xa \leq ya < yb$ .

4. Das folgt durch Addition von  $(-y - x)$  auf beiden Seiten.
5. In der Tat folgern wir  $x \geq y \Rightarrow (-a)x \geq (-a)y \Rightarrow ax \leq ay$ .
6. In der Tat ist  $x^2 = (-x)^2$  und  $x > 0 \Leftrightarrow (-x) < 0$ .
7. Das folgt aus  $1 = 1^2 \neq 0$ .
8. Das folgt durch Multiplikation mit  $(x^{-1})^2$ .
9. Das folgt durch Multiplikation mit  $y^{-1}x^{-1}$ .

□

1.3.5. Schreiben wir zur besonderen Betonung wieder  $0_K$  und  $1_K$ , so gelten demnach in jedem angeordneten Körper  $K$  die Ungleichungen

$$\dots < (-1_K) + (-1_K) < (-1_K) < 0_K < 1_K < 1_K + 1_K < \dots$$

Insbesondere folgt aus  $m1_K = n1_K$  für  $m, n \in \mathbb{Z}$  schon  $m = n$ . Die Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow K$ ,  $m \mapsto m1_K$  ist also eine Injektion. Das Bild dieser Injektion müßte wohl eigentlich einen eigenen Namen kriegen, zum Beispiel  $\mathbb{Z}_K$ , aber wir kürzen unsere Notation ab, bezeichnen dieses Bild auch mit  $\mathbb{Z}$  und schreiben kürzer  $m$  statt  $m1_K$ . Weiter erhalten wir auch eine Injektion  $\mathbb{Q} \rightarrow K$ ,  $m/n \mapsto m1_K/n1_K$ , die wir zum Beispiel  $q \mapsto q_K$  notieren könnten. Wir sind auch hier etwas nachlässig, bezeichnen das Bild unserer Injektion  $\mathbb{Q} \rightarrow K$  meist kurzerhand mit demselben Buchstaben  $\mathbb{Q}$  statt genauer  $\mathbb{Q}_K$  zu schreiben, und hängen auch den Elementen von  $\mathbb{Q}$  meist keinen Index an, wenn wir eigentlich ihr Bild in  $K$  meinen.

*Übung 1.3.6.* Man zeige, daß für jeden angeordneten Körper  $K$  die in 1.3.5 definierte Abbildung  $\mathbb{Q} \rightarrow K$  ein Körperhomomorphismus ist.

**Definition 1.3.7.** Für jeden angeordneten Körper  $K$  definieren wir eine Abbildung  $K \rightarrow K$ ,  $x \mapsto |x|$ , den **Absolutbetrag**, durch die Vorschrift

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0; \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

1.3.8. Wir listen einige Eigenschaften des Absolutbetrags auf. Der Beweis der ersten vier sei dem Leser überlassen.

1.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $|-x| = |x|$
3.  $|xy| = |x||y|$

4.  $|x^{-1}| = |x|^{-1}$  falls  $x \neq 0$

5. Es gilt die sogenannte **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in K$$

in Worten: Der Betrag einer Summe ist stets kleinergleich der Summe der Beträge der Summanden. In der Tat gilt ja  $x + y \leq |x| + |y|$  und ebenso auch  $-(x + y) \leq |x| + |y|$ . Unsere Ungleichung heißt deshalb Dreiecksungleichung, weil sie in einem allgemeineren Kontext sagt, daß in einem Dreieck zwei Seiten zusammen stets länger sind als die dritte.

6.  $||a| - |b|| \leq |a + b| \quad \forall a, b \in K.$

In der Tat folgt aus der Dreiecksungleichung  $|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$ , also  $|a| - |b| \leq |a + b|$ . Ebenso folgert man aber auch  $|b| - |a| \leq |a + b|$ .

*Übung 1.3.9.* In jedem angeordneten Körper gilt:

1. Aus  $|x - a| \leq \eta$  und  $|y - b| \leq \eta$  folgt  $|(x + y) - (a + b)| \leq 2\eta$ ;
2. Aus  $|x - a| \leq \eta \leq 1$  und  $|y - b| \leq \eta \leq 1$  folgt  $|xy - ab| \leq \eta(|b| + 1 + |a|)$ ;
3. Aus  $|y - b| \leq \eta \leq |b|/2$  und  $b \neq 0$  folgt  $y \neq 0$  und  $|1/y - 1/b| \leq 2\eta/|b|^2$ .

*Ergänzende Übung 1.3.10.* In jedem angeordneten Körper gilt für  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$  die sogenannte **Bernoulli-Ungleichung**  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ . Hinweis: Vollständige Induktion.

## 1.4 Die reellen Zahlen

1.4.1. Der folgende Satz enthält diejenige Charakterisierung eines gewissen angeordneten Körpers von "reellen Zahlen", auf der die ganze Vorlesung aufbaut. Er bildet auch einen wesentlichen Teil des Begriffsgebäudes, das es uns ermöglicht, unsere geometrischen Vorstellungen in der heute gebräuchlichen aus den Symbolen der Mengenlehre aufgebauten Sprache der höheren Mathematik wiederzufinden. Bereits im vierten Jahrhundert vor Christus erklärte der griechische Mathematiker Eudoxos eine Zahl als das Verhältnis zweier Längen und gab damit eine geometrische Beschreibung dessen, was wir heute "positive reelle Zahlen" nennen würden. Die logischen Feinheiten der Beziehung dieses "geometrischen" Zahlbegriffs zum "algorithmischen" Zahlbegriff, der vom Prozeß des Zählens herkommt, wurden erst nach und nach verstanden. Den folgenden Satz 1.4.3 und seinen Beweis mag man als den

Schlußpunkt dieser Entwicklung ansehen. Der Zwischenwertsatz 3.2.6 illustriert, wie gut die bei diesem Beweis im Reich der abstrakten Logik und Mengenlehre konstruierten reellen Zahlen unsere geometrische Anschauung modellieren.

1.4.2. Der Beweis der Existenz eines angeordneten Körpers mit den im Satz präzisierten Eigenschaften ist für das weitere Verständnis der Vorlesung belanglos. Ich gebe hier nur eine Beweisskizze, als da heißt einen Beweis für höhere Semester, um Sie zu überzeugen, daß wir nicht während des nächsten halben Jahres Folgerungen ziehen aus Grundannahmen, die überhaupt nie erfüllt sind. Ich rate dazu, bei der ersten Lektüre auf das genauere Studium des Existenzbeweises zu verzichten, der sich bis 1.4.8 hinzieht. Vom Beweis der Eindeutigkeit sind Teile durchaus auch für die Ziele dieser Vorlesung von Belang. Wir formulieren diese Teile als die eigenständigen Aussagen 1.4.12 und 1.4.13. Der Rest wird dem Leser als Übung 1.4.18 überlassen, die wieder für höhere Semester gedacht ist.

**Satz 1.4.3 (Charakterisierung der reellen Zahlen).** 1. *Es gibt einen angeordneten Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  derart, daß in der angeordneten Menge  $\mathbb{R}$  jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke besitzt.*

2. *Solch ein angeordneter Körper ist im wesentlichen eindeutig bestimmt. Ist genauer  $(\mathbb{R}', +, \cdot, \leq)$  ein weiterer derartiger angeordneter Körper, so gibt es genau einen Körperisomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}'$ , und für diesen Körperisomorphismus gilt zusätzlich  $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$ .*

1.4.4. Die im Satz gegebene Charakterisierung trifft auf den angeordneten Körper der rationalen Zahlen nicht zu. Zum Beispiel wissen wir nach 1.2.10, daß die Menge  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$  in  $\mathbb{Q}$  keine größte untere Schranke besitzt. Sie ist jedoch nicht leer und besitzt in  $\mathbb{Q}$  durchaus untere Schranken, nur eben keine größte.

*Übung 1.4.5.* Man zeige, daß es für je zwei nichtleere Teilmengen  $M, N \subset \mathbb{R}$  mit  $x \leq y$  für alle  $x \in M$  und  $y \in N$  stets ein  $a \in \mathbb{R}$  gibt mit  $x \leq a \leq y$  für alle  $x \in M$  und  $y \in N$ . Man zeige weiter, daß diese Bedingung an eine angeordnete Menge sogar gleichbedeutend ist zur Forderung, jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke möge auch eine größte untere Schranke besitzen.

*Beweis von 1.4.3.1.* Wir konstruieren einen derartigen Körper  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_D$  als

eine Menge  $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  von Teilmengen der Menge  $\mathbb{Q}$  aller rationalen Zahlen,

$$\mathbb{R} := \left\{ \alpha \subset \mathbb{Q} \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ ist nicht leer,} \\ \alpha \text{ hat eine untere Schranke,} \\ \alpha \text{ hat kein kleinstes Element,} \\ \alpha \text{ enthält mit } x \text{ auch jedes } y > x. \end{array} \right. \right\}$$

Man nennt solch ein  $\alpha$  einen **Dedekind'schen Schnitt** und bezeichnet die so konstruierte Menge  $\mathbb{R}$  als das "Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen". Auf unserer Menge  $\mathbb{R}$  von Teilmengen von  $\mathbb{Q}$  ist die Inklusionsrelation eine Anordnung und wir schreiben  $\alpha \leq \beta$  statt  $\alpha \supset \beta$ . Ist  $Y \subset \mathbb{R}$  eine nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke, so liegt offensichtlich auch die Vereinigung

$$\bigcup_{\alpha \in Y} \alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid \text{Es gibt } \alpha \in Y \text{ mit } q \in \alpha\}$$

aller Teilmengen aus  $Y$  in  $\mathbb{R}$  und ist das Infimum von  $Y$ . Damit haben wir bereits eine angeordnete Menge mit der geforderten Eigenschaft konstruiert. Wir müssen darauf nur noch eine Addition und eine Multiplikation erklären derart, daß unsere Struktur zu einem angeordneten Körper wird. Die Addition ist unproblematisch: Wir setzen

$$\alpha + \beta := \{x + y \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  schon folgt  $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ , daß  $\mathbb{R}$  so zu einer kommutativen Gruppe wird mit neutralem Element  $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ , und daß gilt  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Wir erlauben uns nun die Abkürzung  $0_{\mathbb{R}} = 0$ . Die Multiplikation positiver Elemente ist ebenfalls unproblematisch: Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha > 0, \beta > 0$  setzen wir

$$\alpha\beta := \{xy \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$  schon folgt  $\alpha\beta \in \mathbb{R}_{>0}$  und daß  $\mathbb{R}_{>0}$  so zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element  $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$  wird. Das Distributivgesetz in  $\mathbb{Q}$  impliziert mit diesen Definitionen auch sofort die Regel

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ . Um unsere Multiplikation so auf ganz  $\mathbb{R}$  auszudehnen, daß  $\mathbb{R}$  ein angeordneter Körper wird, verwenden wir das anschließende technische Lemma 1.4.6. Der Beweis der in Teil 2 behaupteten Eindeutigkeit ist dann Übung 1.4.18.  $\square$



SkriptenBilder/Bild0027.png

Zum Infimum in  $\mathbb{R}$

**Lemma 1.4.6.** Sei  $(R, +)$  eine kommutative Gruppe mit einer Anordnung  $\leq$  derart, daß gilt  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ . Sei auf  $R_{>0}$  eine Verknüpfung  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$  gegeben, die  $R_{>0}$  zu einer kommutativen Gruppe macht. Gilt außerdem die Regel

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R_{>0}$$

so gibt es genau eine Fortsetzung unserer Verknüpfung  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$  auf ganz  $R$  derart, daß  $(R, +, \cdot, \leq)$  ein angeordneter Körper wird.

*Ergänzung 1.4.7.* Dies Lemma oder eigentlich sein Beweis kann verstanden werden als die mathematische Begründung der wohlbekanntenen Regel “Minus mal Minus gibt Plus”. Ist unter den Voraussetzungen des Lemmas  $R_{>0}$  nur ein kommutatives Monoid, so gibt es immer noch genau eine Fortsetzung unserer Verknüpfung  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$  auf ganz  $R$  derart, daß  $(R, +, \cdot, \leq)$  ein angeordneter Ring wird im Sinne von 1.3.3. In dieser Allgemeinheit mag das Lemma auch bei der Konstruktion von  $\mathbb{Z}$  aus  $\mathbb{N}$  gute Dienste leisten, vergleiche 1.3.5.1.

*Beweis.* Wenn die Fortsetzung unserer Multiplikation auf ganz  $R$  das Distributivgesetz erfüllen soll, müssen wir notwendig setzen

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0; \\ -((-\alpha)\beta) & \alpha < 0, \beta > 0; \\ -(\alpha(-\beta)) & \alpha > 0, \beta < 0; \\ (-\alpha)(-\beta) & \alpha < 0, \beta < 0. \end{cases}$$

Es gilt nur noch, für diese Multiplikation die Körperaxiome nachzuweisen. Unsere Multiplikation auf  $R$  ist offensichtlich kommutativ und assoziativ und macht  $R \setminus \{0\}$  zu einer Gruppe. Wir müssen also nur noch das Distributivgesetz

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

nachweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierbei  $\alpha > 0$  und  $\beta + \gamma > 0$  annehmen, und die einzigen nicht offensichtlichen Fälle sind dann  $\beta > 0, \gamma < 0$  bzw.  $\beta < 0, \gamma > 0$ . Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\beta > 0, \gamma < 0$ . Nach unseren Annahmen gilt ja die Regel

$$\alpha\beta = \alpha((\beta + \gamma) + (-\gamma)) = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\gamma)$$

und daraus folgt sofort  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  auch in diesem letzten Fall.  $\square$

*Übung 1.4.8.* Bezeichne  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathbb{D}}$  das Dedekind’sche Modell der reellen Zahlen. Man zeige, daß die durch die Struktur eines angeordneten Körpers auf  $\mathbb{R}$  nach 1.3.5 definierte Injektion  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$  auch beschrieben werden kann durch die Vorschrift  $p \mapsto p_{\mathbb{R}} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > p\}$ .

**Definition 1.4.9.** Wir wählen für den weiteren Verlauf der Vorlesung einen festen angeordneten Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ , in dem jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke besitzt, erlauben uns wegen der in 1.4.3.2 formulierten “Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus” den bestimmten Artikel, und nennen ihn **den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen**.

*Übung 1.4.10.* Man zeige: Jede nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$  mit einer oberen Schranke hat auch eine kleinste obere Schranke.

*Übung 1.4.11.* Seien  $X$  und  $Y$  nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Bezeichnet  $X + Y \subset \mathbb{R}$  die Menge  $\{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ , so zeige man  $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ .

**Satz 1.4.12.** *Die natürlichen Zahlen besitzen keine obere Schranke in den reellen Zahlen, d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > x$ .*

*Beweis.* Das ist evident für den angeordneten Körper  $\mathbb{R}$ , den wir im Beweis von 1.4.3 konstruiert haben. Da diese Konstruktion jedoch nicht ganz einfach war, zeigen wir auch, wie unser Satz direkt aus unserer Definition 1.4.9 abgeleitet werden kann. Dazu argumentieren wir durch Widerspruch: Hätte die Teilmenge  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  eine obere Schranke, so hätte sie nach 1.4.10 auch eine kleinste obere Schranke  $a$ . Dann wäre aber  $a - 1 < a$  keine obere Schranke von  $\mathbb{N}$ , also gäbe es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > (a - 1)$ . Es folgte  $(n + 1) > a$ , und bereits  $a$  selbst wäre keine obere Schranke von  $\mathbb{N}$  gewesen.  $\square$

**Korollar 1.4.13.** 1. *Unter jeder reellen Zahl findet man noch ganze Zahlen, in Formeln: Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gibt es  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $m < x$ .*

2. *Für jede positive reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es eine positive natürliche Zahl  $n \geq 1$  mit  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .*

3. *Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets noch eine rationale Zahl, in Formeln: Gegeben  $x < y$  in  $\mathbb{R}$  gibt es  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $x < r < y$ .*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus 1.4.12. Um die Zweite zu zeigen, suche man  $n > 1/\varepsilon$ . Um die dritte Aussage zu zeigen, suchen wir zunächst  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  mit  $0 < \frac{1}{n} < y - x$ , also  $1 < ny - nx$ , das heißt  $1 + nx < ny$ . Nun gibt es  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $a < ny < b$ , also gibt es eine größte ganze Zahl  $m$  mit  $m < ny$  und folglich  $ny \leq m + 1$ , woraus hinwiederum folgt  $nx < m$  und dann  $x < \frac{m}{n} < y$ .  $\square$

1.4.14. Ein angeordneter Körper heißt **archimedisch angeordnet** genau dann, wenn es zu jedem Element  $x$  des Körpers eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $n > x$ . Das obige Korollar 1.4.13 gilt mit demselben Beweis für jeden archimedisch angeordneten Körper.

**Definition 1.4.15.** Mit einem endlichen Dezimalbruch wie 3,141 bezeichnet man wie auf der Schule die rationale Zahl  $3141/1000$ . Die durch einen **unendlichen Dezimalbruch** wie  $3,1415\dots$  dargestellte reelle Zahl definieren wir als das Supremum der Menge aller ihrer endlichen Teilausdrücke bzw. das Infimum, wenn ein Minus davorsteht. Wir setzen also zum Beispiel

$$3,1415\dots = \sup \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3,1 \\ 3,14 \\ 3,141 \\ 3,1415 \\ \dots \end{array} \right\}$$

wo wir die Elemente der Menge aller endlichen Teilausdrücke der Übersichtlichkeit halber untereinander geschrieben haben statt sie durch Kommata zu trennen und rationale Zahlen stillschweigend identifiziert haben mit ihren Bildern in  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 1.4.16.** 1. Jede reelle Zahl läßt sich durch einen unendlichen Dezimalbruch darstellen.

2. Genau dann stellen zwei verschiedene unendliche Dezimalbrüche dieselbe reelle Zahl dar, wenn es eine Stelle vor oder nach dem Komma gibt und eine von Neun verschiedene Ziffer  $z$  derart, daß die beiden Dezimalbrüche bis zu dieser Stelle übereinstimmen, ab dieser Stelle jedoch der eine die Form  $z99999\dots$  hat und der andere die Form  $(z+1)00000\dots$

*Beweis.* Für den ersten Teil reicht es zu zeigen, daß sich jede nichtnegative reelle Zahl  $y \geq 0$  als ein unendlicher Dezimalbruch darstellen läßt. Nehmen wir zu jedem  $s \in \mathbb{N}$  die größte reelle Zahl  $r_s \leq y$  unter  $y$  mit höchstens  $s$  Stellen nach dem Komma, so gilt

$$y = \sup\{r_0, r_1, r_2, \dots\}$$

In der Tat ist  $y$  eine obere Schranke dieser Menge, aber jede reelle Zahl  $x < y$  ist keine obere Schranke dieser Menge: Nach 1.4.13 oder, genauer, seinem Beweis gibt es nämlich für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$  ein  $s \in \mathbb{N}$  und ein  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $x < m \cdot 10^{-s} < y$ , als da heißt, es gibt ein  $s$  mit  $x < r_s$ . Den zweiten Teil überlassen wir dem Leser zur Übung.  $\square$

*Ergänzung 1.4.17.* Ich will die Gleichheit  $1 = 0,999\dots$  auch noch im Dedekind'schen Modell der reellen Zahlen erläutern und beginne dazu mit der

offensichtlichen Gleichheit

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > -1\} = \bigcup_{n \geq 1} \{q \in \mathbb{Q} \mid q > -\underbrace{0,999 \dots 9}_n\}$$

von Teilmengen von  $\mathbb{Q}$ . Sie bedeutet nach 1.4.8 und der Beschreibung des Infimums im Dedekind'schen Modell der reellen Zahlen  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_D$  genau die Gleichheit

$$-1_{\mathbb{R}} = \inf\{(-\underbrace{0,999 \dots 9}_n)_{\mathbb{R}} \mid n \geq 1\}$$

und mit unserer Konvention für die Interpretation unendlicher Dezimalbrüche 1.4.15 dann auch die Gleichheit von reellen Zahlen

$$-1 = -0,999 \dots$$

Jetzt gilt es nur noch, auf beiden Seiten das Negative zu nehmen. Ich bemerke weiter, daß es durchaus möglich ist, die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche ohne alle Identifizierungen zu betrachten und mit der Struktur einer angeordneten Menge zu versehen, in der dann sogar jede nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke eine größte untere Schranke hat. Es ist jedoch nicht möglich, die gewohnte Addition und Multiplikation von den endlichen Dezimalbrüchen so auf diese angeordnete Menge fortzusetzen, daß wir einen angeordneten Körper erhalten. Der naive Ansatz scheitert hier bereits daran, daß nicht klar ist, wie man mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Multiplikation umgehen soll.

*Ergänzende Übung 1.4.18* (Für höhere Semester). Man zeige 1.4.3.2. Hinweis: Die gesuchte Bijektion  $\varphi$  kann zum Beispiel konstruiert werden durch die Vorschrift  $\varphi(\alpha) = \inf\{q_{\mathbb{R}} \mid q \in \mathbb{Q}, q_{\mathbb{R}} > \alpha\}$ . Man zeige allgemeiner auch, daß jeder Körperhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Identität ist. Hinweis: Nach 2.3.2 sind die nichtnegativen reellen Zahlen genau die Quadrate, jeder Körperhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erhält also die Anordnung. Andererseits aber muß er auf  $\mathbb{Q}$  die Identität sein.

## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Konvergenz von Folgen

**Definition 2.1.1.** Eine Teilmenge einer Menge mit Ordnungsrelation heißt ein **Intervall** genau dann, wenn mit zwei beliebigen Punkten aus besagter Teilmenge auch jeder Punkt zwischen den beiden zu unserer Teilmenge gehört. Ist in Formeln  $(X, \leq)$  eine Menge mit Ordnungsrelation, so heißt demnach eine Teilmenge  $I \subset X$  ein Intervall oder genauer ein “Intervall in  $X$ ” genau dann, wenn für beliebige  $x, y, z \in X$  mit  $x < y < z$  aus  $x, z \in I$  folgt  $y \in I$ .

2.1.2. Jeder Schnitt von Intervallen ist wieder ein Intervall.

*Ergänzende Übung 2.1.3.* Jede Teilmenge  $Y$  einer angeordneten Menge  $X$  ist die disjunkte Vereinigung aller maximalen in  $Y$  enthaltenen nichtleeren Intervalle von  $X$ . Hinweis: Hat ein System von Intervallen von  $X$  nichtleeren Schnitt, so ist auch seine Vereinigung wieder ein Intervall von  $X$ .

**Definition 2.1.4.** Wir erweitern die reellen Zahlen durch die zwei Punkte  $-\infty$  und  $\infty$  zu der in hoffentlich offensichtlicher Weise angeordneten Menge der sogenannten **erweiterten reellen Zahlen**

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

2.1.5 (**Reelle Intervalle**). Jede Teilmenge von  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt in  $\overline{\mathbb{R}}$  ein Supremum und ein Infimum. Für ein Intervall  $I \subset \overline{\mathbb{R}}$  mit Supremum  $a = \sup I$  und Infimum  $b = \inf I$  gibt es die Alternativen  $a \in I$  oder  $a \notin I$  und  $b \in I$  oder  $b \notin I$ . Es gibt damit vier Typen von Intervallen in  $\overline{\mathbb{R}}$ , für die die beiden folgenden Notationen gebräuchlich sind:

$$\begin{aligned} [a, b] &= [a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\} \\ ]a, b[ &= (a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\} \\ [a, b[ &= [a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\} \\ ]a, b] &= (a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}$$

Wählen wir hier  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  beliebig mit  $a < b$ , so erhalten wir genau alle Intervalle in  $\overline{\mathbb{R}}$  mit mehr als einem Element. Wir benutzen die eben erklärten Notationen jedoch auch im Fall  $a \geq b$ , sie bezeichnen dann manchmal eine einpunktige Menge und meist die leere Menge. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann mit  $(a, b)$  ein Intervall gemeint ist und wann ein Paar aus  $\mathbb{R}^2$ . Ein Intervall in  $\mathbb{R}$  nennen wir ein **reelles Intervall**.

2.1.6. Sind  $a$  und  $b$  konkrete Zahlen, etwa  $a = 1$  und  $b = 27$ , so wäre zu allem Überfluß auch noch eine dritte Lesart von  $(1, 27)$  als die in Klammern notierte Dezimalzahl  $1,27$  denkbar. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Wenn man genau hinguckt, sollte auch im letzteren Fall der Abstand nach dem Komma etwas kleiner sein.

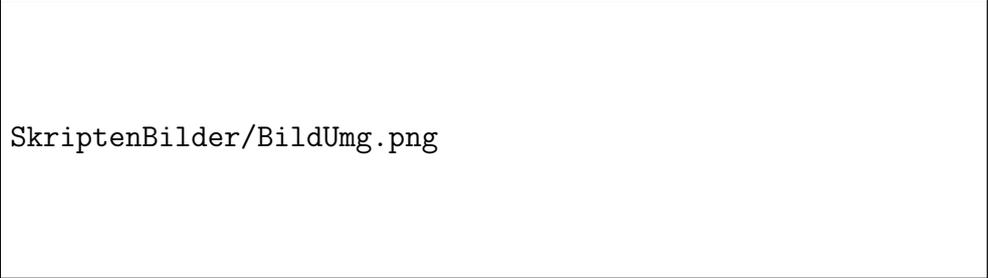
2.1.7. Ein Intervall in  $\overline{\mathbb{R}}$  heißt **kompakt** genau dann, wenn es eines unserer  $[a, b]$  ist. Der Begriff “kompakt” wird in 3.4.1 auf beliebige Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$  verallgemeinert. Ein reelles Intervall heißt **offen** genau dann, wenn es eines unserer Intervalle  $(a, b)$  ist. Der Begriff “offen” wird in 4.3.1 auf beliebige Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$  verallgemeinert. Wir nennen ein reelles Intervall **halb-offen** genau dann, wenn es nicht aus einem einzigen Punkt besteht, und verallgemeinern den Begriff “halboffen” in 4.1.1 auf beliebige Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . In der in diesem Text verwendeten Terminologie sind mithin alle offenen Intervalle auch halboffen. In der Literatur wird der Begriff halboffen meist abweichend davon verwendet als Bezeichnung für reelle Intervalle, die weder offen noch kompakt sind.

**Definition 2.1.8.** Gegeben ein Punkt  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  vereinbaren wir nun, welche Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$  wir **Umgebungen von**  $x$  nennen wollen. Wir geben diese Definition separat für reelle Zahlen und für die beiden Punkte  $\pm\infty$ .

1. Gegeben  $x \in \mathbb{R}$  heißt eine Teilmenge  $W \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine **Umgebung von**  $x$  genau dann, wenn sie ein Intervall  $(a, b)$  umfaßt mit  $a < x < b$ .
2. Für  $x = \infty$  heißt eine Teilmenge  $W \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine **Umgebung von**  $x$  genau dann, wenn sie ein Intervall  $(a, \infty]$  umfaßt mit  $a < \infty$ .
3. Für  $x = -\infty$  heißt eine Teilmenge  $W \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine **Umgebung von**  $x$  genau dann, wenn sie ein Intervall  $[-\infty, b)$  umfaßt mit  $\infty < b$ .

2.1.9. Die Aufspaltung der Definition in drei Fälle ist natürlich nicht besonders befriedigend. Sie ermöglicht es uns jedoch im weiteren Verlauf, viele noch viel weiter gehende Fallunterscheidungen zu vermeiden.

2.1.10. Gegeben  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  nennen wir das offene Intervall  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  die  $\varepsilon$ -**Umgebung von**  $x$ . Eine Umgebung von  $x \in \mathbb{R}$  können wir auch charakterisieren als eine Teilmenge  $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ , die für mindestens ein reelles  $\varepsilon > 0$  das Intervall  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  umfaßt, oder äquivalent als eine Teilmenge, die für mindestens ein reelles  $\varepsilon > 0$  das Intervall  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$  umfaßt. Eine der Motivationen für unsere großzügige Definition des Umgebungsbegriffs ist, daß er uns durch seine große Allgemeinheit dazu verhelfen soll, die Diskussion, ja die bloße Erwähnung derartiger Nebensächlichkeiten weitgehend zu vermeiden.



SkriptenBilder/BildUmg.png

Versuch der graphischen Darstellung einer Umgebung sowie einer  $\varepsilon$ -Umgebung eines hier fett eingezeichneten Punktes der reellen Zahlengeraden. Die obere Umgebung besteht aus zwei halboffenen Intervallen und einem einzelnen Punkt.

*Beispiel 2.1.11.* Das kompakte Intervall  $[0, 1]$  ist eine Umgebung von jedem Punkt aus dem offenen Intervall  $(0, 1)$ , aber von keinem anderen Punkt der erweiterten reellen Zahlengeraden.  $\mathbb{Q}$  ist für keinen Punkt der erweiterten reellen Zahlengeraden eine Umgebung.

2.1.12. Offensichtlich besitzen je zwei verschiedene Punkte der erweiterten reellen Zahlengeraden zueinander disjunkte Umgebungen, und der Schnitt von je zwei Umgebungen ein- und desselben Punktes ist wieder eine Umgebung des besagten Punktes.

*Ergänzung 2.1.13.* Bei der Vor- und Nachbereitung dieser Vorlesung ist mir erst richtig klar geworden, welcher großer Teil der Diskussion der Begriffe Grenzwert und Stetigkeit im Rahmen der Analysis einer reellen Veränderlichen nur die Struktur der reellen Zahlen als angeordnete Menge betrifft. Die Resultate dieses Abschnitts mit Ausnahme der Beschreibung aller Intervalle 2.1.5 gelten im Übrigen mit unverändertem Beweis auch allgemeiner für einen beliebigen archimedisch angeordneten Körper und zu einem guten Teil sogar für einen beliebigen angeordneten Körper.

**Definition 2.1.14.** Eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $n \mapsto x_n$  von den natürlichen Zahlen in eine Menge  $X$  nennen wir eine **Folge** in  $X$ . Wir schreiben eine Folge meist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $x_0, x_1, x_2, \dots$  oder auch einfach nur  $x_n$ . Die  $x_i$  heißen die **Folgenglieder**. Manchmal nennen wir allerdings auch Abbildungen Folgen, die erst ab  $n = 1$  definiert sind.

**Definition 2.1.15.** Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Elemente** einer Menge, so soll das bedeuten, daß sie gilt für alle Elemente bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Glieder** einer Folge, so soll das bedeuten, daß für fast alle Indizes  $n$  unsere Aussage für das  $n$ -te Folgenglied gilt.

**Definition 2.1.16.** Sei  $x_0, x_1, \dots$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  und  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  ein Punkt. Wir sagen, **die Folge  $x_n$  konvergiere gegen  $x$**  genau dann, wenn jede Umgebung von  $x$  fast alle Glieder der Folge enthält. Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

und nennen  $x$  einen **Grenzwert** oder lateinisch **Limes** der Folge. Nach der im folgenden bewiesenen Eindeutigkeit des Grenzwerts 2.1.21 dürfen wir uns sogar den bestimmten Artikel erlauben und von *dem* Grenzwert reden.

*Beispiel 2.1.17.* Die **konstante Folge**  $x_n = x \forall n$  konvergiert gegen  $x$ . In der Tat liegen bei dieser Folge in jeder Umgebung von  $x$  nicht nur fast alle, sondern sogar alle Folgenglieder.



SkriptenBilder/BildKoF.png

Graphische Darstellung der Folge  $x_n = 3^{3-n} - (-2)^{4-n}$ , die gegen Null konvergiert, wie Sie bald werden zeigen können. Die Folgenglieder sind die kleinen Kreuzchen auf der reellen Achse, ihre Indizes tragen sie an unterschiedlich langen gestrichelt eingezeichneten Stangen.

*Beispiel 2.1.18.* Die Folge  $x_n = n$  konvergiert gegen plus Unendlich, in Formeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

In der Tat umfaßt jede Umgebung  $U$  von  $\infty$  per definitionem ein Intervall der Gestalt  $(a, \infty]$  für  $a \in \mathbb{R}$ , und bereits jedem derartigen Intervall liegen nach 1.4.12 jeweils fast alle Folgenglieder.

**Definition 2.1.19.** Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen Null konvergiert.

*Beispiel 2.1.20.* Die Folge  $x_n = 1/n$  ist eine Nullfolge, in Formeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

In der Tat umfaßt jede Umgebung  $U$  von 0 per definitionem ein Intervall der Gestalt  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  für  $\varepsilon > 0$ , und bereits in jedem derartigen Intervall liegen alle Folgenglieder mit  $n > (1/\varepsilon)$ , nach 1.4.12 also jeweils fast alle Folgenglieder.

**Lemma 2.1.21 (Eindeutigkeit des Grenzwerts).** *Ein- und dieselbe Folge kann nicht gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren, in Formeln*

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \right) \Rightarrow (x = y)$$

*Beweis.* Durch Widerspruch. Sind unsere Punkte  $x$  und  $y$  verschieden, so besitzen sie auch disjunkte Umgebungen  $U$  und  $V$ . Dann können aber von unseren unendlich vielen Folgengliedern nicht fast alle in der Umgebung  $U$  von  $x$  und fast alle in der Umgebung  $V$  von  $y$  liegen, also kann unsere Folge nicht gleichzeitig gegen  $x$  und gegen  $y$  konvergieren.  $\square$

2.1.22. Man beachte, wie unser Umgebungsbegriff uns bereits an dieser Stelle dabei hilft, den Beweis kurz und prägnant zu halten und die Diskussion von Sonderfällen für  $\{x, y\} \cap \{-\infty, \infty\} \neq \emptyset$  zu vermeiden.

**Definition 2.1.23.** Unter einer **Umgebungsbasis** eines Punktes versteht man ein System alias eine Menge von Umgebungen besagten Punktes derart, daß jede Umgebung unseres Punktes mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt.

*Beispiele 2.1.24.* Die  $\varepsilon$ -Umgebungen eines Punktes  $x \in \mathbb{R}$  bilden eine Umgebungsbasis von  $x$ , desgleichen aber auch alle Intervalle  $[x - 3\varepsilon, x + 4\varepsilon)$  mit  $\varepsilon > 0$  oder alle Intervalle  $[x - 1/n, x + 1/n]$  mit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Eine Umgebungsbasis von  $\infty$  bilden etwa die Intervalle  $[K, \infty]$  mit  $K \in \mathbb{R}$  oder auch mit  $K \in \mathbb{N}$ .

2.1.25. Um die Konvergenz einer Folge gegen einen Punkt nachzuweisen, müssen wir offensichtlich nur für jede Umgebung aus einer fest gewählten Umgebungsbasis prüfen, daß fast alle Folgenglieder darin liegen. Konvergenz gegen einen Punkt  $x \in \mathbb{R}$  etwa ist gleichbedeutend dazu, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  fast alle Glieder der Folge enthält. Im Fall einer reellen Folge  $(x_n)$  ist das weiter gleichbedeutend dazu, daß es

für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt mit  $n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$ .

Dahingegen ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  gleichbedeutend dazu, daß für jedes  $K \in \mathbb{N}$  fast alle Folgenglieder oberhalb von  $K$  liegen.

2.1.26. Wenn Sie in der Analysis die Formulierung “für alle  $\varepsilon > 0$  gilt was auch immer” antreffen, so dürfen Sie erwarten, daß dieses “was auch immer”, wenn es denn für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  gilt, für alle größeren  $\varepsilon > 0$  eh gilt. Sallopp gesprochen besteht also die unausgesprochene Übereinkunft, durch die Verwendung des Buchstabens  $\varepsilon$  das anzudeuten, was man umgangssprachlich vielleicht mit “für jedes auch noch so kleine  $\varepsilon > 0$ ” ausdrücken würde. Sie müssen nur einmal versuchen, beim Vorrechnen einer Übungsaufgabe statt  $\varepsilon$  den Buchstaben  $M$  zu verwenden: Auch wenn formal alles richtig sein sollte, wird Ihr Tutor deutlich länger darüber nachdenken müssen, ob Ihre Formulierung auch wirklich stimmt! “Sei  $\varepsilon < 0$ ” schließlich ist ein mathematischer Witz.

2.1.27. Ich will versuchen, in der Vorlesung einem Farbencode zu folgen, nach dem vorgegebene Umgebungen von Grenzwerten und dergleichen in gelber Farbe dargestellt werden, dazu zu findende  $N$  und dergleichen dahingegen in roter Farbe.

2.1.28. Mit unserer Konvention für die “Konvergenz gegen  $\pm\infty$ ” bewegen wir uns zwar im Rahmen des allgemeinen Begriffs der “Konvergenz in topologischen Räumen” 6.6.1, aber außerhalb der in der einführenden Literatur zur Analysis üblichen Konventionen, in denen die Terminologie **bestimmte Divergenz gegen  $\pm\infty$**  verwendet wird. Üblicherweise bleibt in anderen Worten der Begriff der konvergenten Folge reserviert für Folgen, die gegen eine reelle Zahl konvergieren. Wir nennen solche Folgen **reell konvergent**. Falls eine Folge nicht konvergiert, auch nicht gegen  $\infty$  oder  $-\infty$ , so nennt man sie **unbestimmt divergent**. Wir verlieren mit unserer Terminologie zwar etwas an terminologischer Kohärenz, da wir im weiteren “Reihen” aus wieder anderen Gründen nur dann konvergent nennen werden, wenn die Folge ihrer Partialsummen *reell* konvergent ist. Das schien mir jedoch ein kleineres Übel, als es eine unnötig einschränkende oder in Fälle aufspaltende Formulierung von Aussagen wie 2.1.32 oder 2.2.6 wäre.

**Proposition 2.1.29.** *Für jede Folge  $x_n$  von Null verschiedener reeller Zahlen gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{-1}| = \infty$$

*Beweis.* Für alle  $K > 0$  gilt  $|x_n^{-1}| \in (K, \infty] \Leftrightarrow x_n \in (-K^{-1}, K^{-1})$ . Gilt also die rechte Seite bei vorgegebenem  $K > 0$  für fast alle Folgenglieder, so auch die Linke. Ebenso gilt für alle  $\varepsilon > 0$  offensichtlich  $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow |x_n^{-1}| \in (\varepsilon^{-1}, \infty]$ . Gilt also die rechte Seite bei vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  für fast alle Folgenglieder, so auch die Linke.  $\square$

2.1.30. Vereinbaren wir  $1/|\infty| = 1/|-\infty| = 0$  und  $|1/0| = \infty$ , so gilt diese Proposition mit demselben Beweis sogar für jede Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Proposition 2.1.31.** *Die folgende Tabelle beschreibt das Konvergenzverhalten der Folge  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Potenzen von  $x$  in Abhängigkeit von  $x$ :*

$$\begin{array}{ll} x > 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty; \\ x = 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1; \\ |x| < 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0; \\ x \leq -1 & \text{Die Folge } x^n \text{ divergiert unbestimmt.} \end{array}$$

*Beweis.* Im Fall  $x > 1$  schreiben wir  $x = 1 + y$  mit  $y > 0$  und erhalten mit der binomischen Formel

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny$$

Aber natürlich gilt  $1 + ny \geq K$  genau dann, wenn gilt  $n \geq (K - 1)/y$ , und das gilt bei festem  $K$  für fast alle  $n$ . Im Fall  $x = 1$  ist die Folge konstant 1 und es ist nichts zu zeigen. Falls  $0 < |x| < 1$  gilt nach dem Vorhergehenden  $\lim_{n \rightarrow \infty} |1/x^n| = \infty$  und daraus folgt mit Proposition 2.1.29  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ . Für  $x = 0$  gilt das natürlich eh. Im Fall  $x \leq -1$  gilt  $|x^n - x^{n+1}| \geq 2$  für alle  $n$ . Also kann die Folge nicht gegen eine reelle Zahl  $a$  konvergieren, denn dann müßte gelten  $|a - x^n| < 1$  für fast alle  $n$  und dann nach der Dreiecksungleichung  $|x^n - x^{n+1}| < 2$  für fast alle  $n$ . Die Folge kann in diesem Fall aber auch nicht gegen  $\pm\infty$  konvergieren, da die Folgenglieder immer abwechselnd positiv und negativ sind.  $\square$

**Lemma 2.1.32 (Quetschlemma).** *Sind in  $\overline{\mathbb{R}}$  drei Folgen  $a_n, b_n, c_n$  gegeben mit  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle  $n$ , und konvergieren  $a_n$  und  $c_n$  gegen denselben Grenzwert, so konvergiert auch  $b_n$  gegen diesen Grenzwert.*

*Ergänzung 2.1.33.* In der französischen Literatur trägt dieses Lemma auch die hintersinnige Bezeichnung **théorème des gendarmes**.

*Beweis.* Das folgt aus den Definitionen mit der Erkenntnis, daß sich jede Umgebung eines Punktes verkleinern läßt zu einer Umgebung desselben Punktes, die ein Intervall ist. Es reicht ja, für jede solche "Intervallumgebung"  $I$  des gemeinsamen Grenzwerts von  $a_n$  und  $c_n$  zu zeigen, daß fast alle  $b_n$  darinliegen. Das ist aber klar, da fast alle  $a_n$  und fast alle  $c_n$  darinliegen.  $\square$

*Beispiel 2.1.34.* Konvergiert eine Folge reeller Zahlen  $a_n$  gegen  $\infty$ , so konvergiert jede Folge reeller Zahlen  $b_n$  mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n$  auch gegen  $\infty$ . Das folgt zum Beispiel, indem wir als  $c_n$  die konstante Folge  $\infty$  nehmen und das Quetschlemma anwenden.

**Lemma 2.1.35 (Erhaltung von Ungleichungen).** *Seien  $a_n, b_n$  Folgen in  $\overline{\mathbb{R}}$  mit Grenzwerten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Gilt  $a_n \leq b_n$  für alle  $n$ , so folgt  $a \leq b$ .*

*Beweis.* Wäre hier  $b < a$ , so fänden wir  $k$  mit  $b < k < a$ . Dann wäre  $[-\infty, k)$  eine Umgebung von  $b$  und  $(k, \infty]$  eine Umgebung von  $a$ . Fast alle  $a_n$  müssten also in  $(k, \infty]$  liegen und fast alle  $b_n$  in  $[-\infty, k)$  und es folgte  $a_n > b_n$  für fast alle  $n$  im Widerspruch zu unserer Annahme.  $\square$

**Satz 2.1.36 (Rechenregeln für Grenzwerte).** *Seien  $a_n, b_n$  Folgen reeller Zahlen mit reellen Grenzwerten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .*

1. Die Summe bzw. das Produkt unserer Folgen konvergieren gegen die Summe bzw. das Produkt ihrer Grenzwerte, in Formeln

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= a + b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= ab\end{aligned}$$

2. Sind alle Glieder der Folge  $b_n$  sowie ihr Grenzwert  $b$  von Null verschieden, so gilt für die Folge der Kehrwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

*Beweis.* Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

**Lemma 2.1.37.** 1. Gegeben  $a, b \in \mathbb{R}$  und eine Umgebung  $W$  von  $a + b$  gibt es Umgebungen  $U$  von  $a$  und  $V$  von  $b$  mit  $U + V \subset W$ .

2. Gegeben  $a, b \in \mathbb{R}$  und eine Umgebung  $W$  von  $a \cdot b$  gibt es Umgebungen  $U$  von  $a$  und  $V$  von  $b$  mit  $U \cdot V \subset W$ .

3. Gegeben  $b \in \mathbb{R}^\times$  und eine Umgebung  $W$  von  $b^{-1}$  gibt es eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^\times$  von  $b$  mit  $V^{-1} \subset W$ .

2.1.38. In Erinnerung an [I.3.1.2.6](#) verstehen wir hier  $U + V = \{x + y \mid x \in U, y \in V\}$  und  $U \cdot V = \{x \cdot y \mid x \in U, y \in V\}$ . In Anlehnung an [I.2.2.8](#) verstehen wir weiter  $V^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in V\}$ .

*Beweis des Lemmas.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß  $W$  sogar eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a + b$  ist. Nehmen wir dann für  $U$  bzw.  $V$  die  $\varepsilon/2$ -Umgebung von  $a$  bzw.  $b$ , so gilt in der Tat  $U + V \subset W$ . Für die zweite Formel beginnen wir mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |(x - a)y + a(y - b)| \\ &\leq |x - a||y| + |a||y - b| \end{aligned}$$

Aus den beiden Ungleichungen  $|x - a| < \eta$  und  $|y - b| < \eta$  folgt zunächst  $|y| < |b| + \eta$  und dann

$$|xy - ab| \leq \eta(|b| + \eta + |a|)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nun wieder annehmen, daß  $W$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a \cdot b$  ist. Wählen wir dann ein  $\eta \in (0, 1)$  mit  $\varepsilon > \eta(|b| + 1 + |a|)$  und nehmen als  $U$  bzw.  $V$  die  $\eta$ -Umgebungen von  $a$  bzw.  $b$ , so gilt folglich in der Tat  $U \cdot V \subset W$ . Um die letzte Aussage zu zeigen, nehmen wir der Einfachheit halber  $b > 0$  an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nun  $W = (a, d)$  mit  $0 < a < b < d < \infty$  annehmen, und dann betrachten wir schlicht  $V = (d^{-1}, a^{-1})$  und sind fertig.  $\square$

Jetzt zeigen wir den Satz. Wir müssen für jede Umgebung  $W$  von  $a + b$  zeigen, daß fast alle Glieder der Folge  $a_n + b_n$  darinliegen. Nach dem vorhergehenden Lemma [2.1.37](#) finden wir jedoch Umgebungen  $U$  von  $a$  und  $V$  von  $b$  mit  $U + V \subset W$ . Da nach Annahme fast alle Glieder der ersten Folge in  $U$  liegen und fast alle Glieder der zweiten Folge in  $V$ , liegen damit in der Tat fast alle Glieder der Folge  $a_n + b_n$  in  $W$ . Ganz genauso folgt aus den anderen Teilen von Lemma [2.1.37](#), daß der Grenzwert des Produktes zweier Folgen das Produkt der Grenzwerte ist, und ähnlich aber einfacher, daß der Grenzwert der Kehrwerte der Kehrwert des Grenzwerts ist.  $\square$

*Beispiel 2.1.39.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n}{3n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + (1/n)^2}{3 + (1/n)} = \frac{5 + 0^2}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

2.1.40. Die Addition und die Multiplikation  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lassen sich nicht so zu Abbildungen von ganz  $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  nach  $\overline{\mathbb{R}}$  fortsetzen, daß die ersten beiden Teile von [2.1.37](#) entsprechend gelten. Alle derartigen Fortsetzungen auf Teilmengen

von  $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  stimmen jedoch auf dem Schnitt der jeweiligen Definitionsbereiche überein, so daß es sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation jeweils eine größtmögliche "sinnvolle Fortsetzung" gibt, die wir im Rahmen der Topologie VI.3.6.1 als die größtmögliche "stetige Fortsetzung" werden verstehen können. Wir beschreiben diese Fortsetzungen von Addition und Multiplikation durch Abbildungen  $+, \cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \cup \{*\}$  mit einem eigenen Symbol  $*$  für "nicht sinnvoll in  $\overline{\mathbb{R}}$  zu definieren". Unsere Fortsetzungen werden mit dieser Konvention gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ a + (-\infty) &= -\infty + a = -\infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \infty + (-\infty) &= -\infty + \infty = * \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a\infty &= \infty a = \infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a > 0 \\ a\infty &= \infty a = -\infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a < 0 \\ a(-\infty) &= (-\infty)a = -\infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a > 0 \\ a(-\infty) &= (-\infty)a = \infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a < 0 \\ 0\infty &= \infty 0 = * \\ 0(-\infty) &= (-\infty)0 = * \end{aligned}$$

*Übung 2.1.41.* Man zeige: Die Regeln 2.1.36.1 zum Vertauschen von Grenzwertbildung mit Addition und Multiplikation gelten auch noch, wenn wir  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  zulassen und  $a + b$  beziehungsweise  $a \cdot b$  sinnvoll definiert sind im Sinne der vorhergehenden Bemerkung 2.1.40.

*Übung 2.1.42.* Für jedes  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  gibt es eine absteigende Folge von Umgebungen  $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$  derart, daß jede Umgebung von  $x$  fast alle der  $U_n$  umfaßt.

*Übung 2.1.43.* Ist  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine nichtleere Teilmenge, so ist  $\sup A$  das größte Element in der Menge  $G$  aller Punkte aus den erweiterten reellen Zahlen, die Grenzwerte von Folgen aus  $A$  sind.

*Übung 2.1.44.* Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ . Umgekehrt folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  bereits  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Übung 2.1.45.* Ist  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen, die gegen eine reelle Zahl konvergiert, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

## 2.2 Vollständigkeit der reellen Zahlen

**Definition 2.2.1.** Eine Menge von reellen Zahlen heißt **beschränkt** genau dann, wenn sie in  $\mathbb{R}$  eine obere und eine untere Schranke besitzt. Eine Folge reeller Zahlen heißt beschränkt genau dann, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

**Lemma 2.2.2.** *Jede reell konvergente Folge von reellen Zahlen ist beschränkt.*

*Beweis.* Ist  $x \in \mathbb{R}$  der Grenzwert unserer Folge, so liegen fast alle Folgenglieder in  $[x - 1, x + 1]$ . Die endlich vielen Ausnahmen können wir durch hinreichend große Schranken auch noch einfangen.  $\square$

**Definition 2.2.3.** Eine Folge  $x_n$  in einer Menge mit Ordnungsrelation heißt

**monoton wachsend** genau dann, wenn gilt  $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$

**streng monoton wachsend** genau dann, wenn gilt  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$

**monoton fallend** genau dann, wenn gilt  $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$

**streng monoton fallend** genau dann, wenn gilt  $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$

Eine Folge heißt **monoton** genau dann, wenn sie monoton wächst oder monoton fällt. Eine Folge heißt **streng monoton** genau dann, wenn sie streng monoton wächst oder streng monoton fällt. Diese Begriffe werden in 3.2.1 auf Abbildungen zwischen beliebigen angeordneten Mengen verallgemeinert.

**Lemma 2.2.4.** *Jede monoton wachsende Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  konvergiert gegen das Supremum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monoton fallende Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  konvergiert gegen das Infimum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monotone beschränkte Folge von reellen Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl.*

*Beweis.* Wir zeigen nur die erste Aussage, die Zweite zeigt man analog und die Dritte ist eine offensichtliche Konsequenz. Sei in der Tat  $s$  das Supremum alias die kleinste obere Schranke der Menge aller Folgenglieder. Kein  $p$  mit  $p < s$  ist dann eine obere Schranke der Menge aller Folgenglieder, folglich liegen für jedes  $p < s$  ein und damit wegen der Monotonie fast alle  $x_n$  in  $(p, s]$ . Damit liegen in jeder Umgebung von  $s$  fast alle Folgenglieder.  $\square$

**Definition 2.2.5.** Sei  $x_0, x_1, x_2, \dots$  eine Folge. Sind  $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  natürliche Zahlen, so nennen wir die Folge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Gliedern

$$x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$$

eine **Teilfolge** der Folge  $x_n$ . Schreiben wir eine Folge als eine Abbildung  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $x \mapsto x(n) = x_n$ , so ist eine Teilfolge von  $x$  demnach eine Abbildung der Gestalt  $x \circ f$  für eine streng monoton wachsende Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Lemma 2.2.6.** *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge.*

*Beweis.* Das ist klar nach den Definitionen.  $\square$

**Lemma 2.2.7.** *Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt eine monotone Teilfolge.*



SkriptenBilder/BildAuP.png

Bei der Folge  $(-1)^n/n$  ist jedes zweite Folgenglied ein Aussichtspunkt im Sinne des Beweises von Lemma [2.2.7](#).

*Bemerkung 2.2.8.* Hier mögen Sie sich an unsere Sprachregelung [1.2.3.3](#) erinnern. Gemeint ist demnach: Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt mindestens eine monotone Teilfolge.

*Beweis.* Wir nennen ein Folgenglied  $x_n$  oder präziser seinen Index  $n$  einen “Aussichtspunkt” der Folge genau dann, wenn alle späteren Folgenglieder kleiner sind, in Formeln  $x_n > x_m$  für alle  $m > n$ . Besitzt unsere Folge unendlich viele Aussichtspunkte, so bilden diese eine streng monoton fallende Teilfolge. Sonst gibt es einen letzten Aussichtspunkt  $x_n$ . Dann finden wir aber eine monoton wachsende Teilfolge, die mit  $x_{n+1}$  beginnt, denn ab dem Index  $n + 1$  kommt dann nach jedem Folgenglied noch ein anderes, das mindestens ebenso groß ist.  $\square$

**Satz 2.2.9 (Bolzano-Weierstraß).** *Jede Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt eine in  $\overline{\mathbb{R}}$  konvergente Teilfolge. Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine reell konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Jede Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt nach [2.2.7](#) eine monotone Teilfolge, und diese ist nach [2.2.4](#) konvergent in  $\overline{\mathbb{R}}$ . Ist unsere Folge beschränkt, so ist auch jede solche Teilfolge beschränkt und konvergiert folglich gegen eine reelle Zahl.  $\square$

**Definition 2.2.10.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von reellen Zahlen heißt eine **Cauchy-Folge** genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt derart, daß gilt  $|x_n - x_m| < \varepsilon$  falls  $n, m \geq N$ . Analog erklärt man Cauchy-Folgen in beliebigen angeordneten Körpern.

**Satz 2.2.11.** *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

*Beweis.* Daß jede reell konvergente Folge Cauchy sein muß, ist leicht zu sehen: Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  folgt, daß es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $|x_n - x| < \varepsilon/2$  für  $n \geq N$ . Daraus folgt dann  $|x_n - x_m| < \varepsilon$  für  $n, m \geq N$ . Wir zeigen nun umgekehrt, daß auch jede Cauchy-Folge gegen eine reelle Zahl konvergiert. Eine Cauchy-Folge  $x_n$  ist sicher beschränkt, denn wählen wir für  $\varepsilon = 1$  ein  $N = N_\varepsilon$ , so liegen fast alle Folgenglieder im Intervall  $(x_N - 1, x_N + 1)$ , und die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große Schranke auch noch einfangen. Unsere Cauchy-Folge besitzt daher nach [2.2.9](#) eine reell konvergente Teilfolge  $x_{n_k}$ , sagen wir  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ . Wir behaupten, daß dann auch die Folge  $x_n$  selbst gegen  $x$  konvergiert. In der Tat gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon$  mit  $n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$ . Aus  $n \geq N_\varepsilon$  folgt damit insbesondere  $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$  für fast alle  $k$  und dann im Grenzwert  $|x_n - x| \leq \varepsilon$ , da ja die Ungleichungen  $-\varepsilon \leq x_n - x_{n_k} \leq \varepsilon$  bestehen bleiben beim Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

2.2.12. Ein angeordneter Körper, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständig**. Dieser Begriff ist Teil einer alternativen Charakterisierung der reellen Zahlen, die wir hier als Übung formulieren.

*Übung 2.2.13.* Gegeben ein angeordneter Körper sind gleichbedeutend: (1) Jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke besitzt eine größte untere Schranke und (2) Der Körper ist archimedisch angeordnet und vollständig.

*Übung 2.2.14 (Intervallschachtelungsprinzip).* Gegeben eine absteigende Folge von nichtleeren kompakten Intervallen  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots$  ist auch ihr Schnitt  $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} I_\nu$  nicht leer.

*Übung 2.2.15.* Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge, so konvergiert bereits die ganze Cauchyfolge, und zwar gegen denselben Grenzwert.

## 2.3 Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

2.3.1. Ich erinnere daran, daß es nach 1.1.1 keine rationale Zahl mit Quadrat Zwei gibt. Im Gegensatz dazu soll nun gezeigt werden, daß es in den reellen Zahlen zu jeder nichtnegativen reellen Zahl eine Quadratwurzel gibt.

**Satz 2.3.2.** Für jede nichtnegative reelle Zahl  $a \geq 0$  gibt es genau eine nichtnegative reelle Zahl  $x \geq 0$  mit  $x^2 = a$ . Man bezeichnet dies  $x$  mit  $\sqrt{a}$  und nennt es die **Wurzel** oder genauer **Quadratwurzel** von  $a$ .

*Beweis.* Haben wir einmal eine Lösung  $X = b$  der Gleichung  $X^2 - a = 0$  gefunden, so gilt  $X^2 - a = (X + b)(X - b)$ . Folglich ist  $X = -b$  dann die einzige andere Lösung, denn ein Produkt in einem Körper ist per definitionem nur dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Die Eindeutigkeit der nichtnegativen Lösung ist damit klar und nur die Existenz muß noch gezeigt werden. Wir konstruieren dazu eine Folge und beginnen mit  $x_0 = \max(1, a)$ . Dann gilt sicherlich schon einmal  $x_0^2 \geq a$ . Gegeben  $x_n > 0$  mit  $x_n^2 \geq a$  machen wir den Ansatz  $(x_n - \varepsilon)^2 = a$  und erhalten  $\varepsilon = (x_n^2 + \varepsilon^2 - a)/2x_n$ . Nun vernachlässigen wir  $\varepsilon^2/2x_n$ , vergessen unseren Ansatz und setzen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Man sieht sofort, daß aus  $x_n^2 \geq a$  und  $x_n > 0$  folgt  $x_{n+1}^2 \geq a$  und  $x_n \geq x_{n+1} > 0$ . Da die Folge der  $x_n$  monoton fällt und durch Null nach unten beschränkt ist, besitzt sie einen Grenzwert  $x \geq 0$ . Aus der Gleichung

$$2x_n x_{n+1} = x_n^2 + a$$



Graphische Darstellung unserer induktiven Formel für die Glieder der Folge  $x_n$  mit Grenzwert  $\sqrt{a}$  aus dem Beweis von [2.3.2](#)

folgt dann  $x^2 = a$  durch Übergang zum Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  auf beiden Seiten.  $\square$

2.3.3. Die Ungleichungen  $a/x_n \leq \sqrt{a} < x_n$  erlauben uns sogar abzuschätzen, wie gut unsere Approximation  $x_n$  mindestens sein muß. Machen wir für den Fehler den Ansatz  $x_n = \sqrt{a}(1 + f_n)$ , so ergibt sich mit etwas Rechnen

$$f_{n+1} = \frac{f_n^2}{2(1 + f_n)}$$

und indem wir im Nenner die 1 beziehungsweise  $f_n$  verkleinern zu Null erhalten wir die Abschätzung  $f_{n+1} \leq \frac{1}{2} \min(f_n, f_n^2)$ . Sobald also  $x_n$  so nah bei  $\sqrt{a}$  ist, daß gilt  $f_n < 1$ , "verdoppelt sich die Anzahl der richtigen Stellen beim Übergang von  $x_n$  zu  $x_{n+1}$ ". Man spricht unter diesen Umständen auch von **quadratischer Konvergenz**. Anschaulich erhält man  $x_{n+1}$ , indem man von  $x_n$  senkrecht hochgeht zum Graph der Funktion  $y = x^2 - a$  und dann auf der Tangente an diesen Graphen wieder herunter auf die  $x$ -Achse. Es ist damit auch anschaulich klar, daß unser Verfahren sehr schnell konvergieren sollte. Dieses Verfahren kann auch zur Bestimmung der Nullstellen allgemeinerer Funktionen anwenden. Es heißt das **Newton-Verfahren**.

*Übung 2.3.4.* Ich erinnere an die Fibonacci-Folge und den goldenen Schnitt aus I.1.2.1. Man zeige, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also in Formeln gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

für unsere Fibonacci-Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  aus I.1.2.1.

**Definition 2.3.5.** Eine Menge heißt **abzählbar** genau dann, wenn es eine Bijektion unserer Menge mit einer Teilmenge der Menge  $\mathbb{N}$  aller natürlichen Zahlen gibt. Gleichbedeutend können wir auch fordern, daß unsere Menge entweder leer ist oder es eine Surjektion von  $\mathbb{N}$  darauf gibt. Eine Menge heißt **abzählbar unendlich** genau dann, wenn sie abzählbar aber nicht endlich ist. Eine Menge heißt **überabzählbar** genau dann, wenn sie nicht abzählbar ist.

**Satz 2.3.6.** 1. Es gibt eine Bijektion  $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ , in Worten: Die Menge der rationalen Zahlen ist **abzählbar unendlich**.

2. Es gibt keine Surjektion  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , in Worten: Die Menge der reellen Zahlen ist **überabzählbar**.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist abzählbar und damit natürlich auch allgemeiner das Produkt von je zwei und dann auch von endlich vielen abzählbaren Mengen.



Illustration zum Cantor'schen Diagonalverfahren. Ähnlich zeigt man, daß die Menge  $\text{Ens}(\mathbb{N}, E)$  aller Abbildungen von  $\mathbb{N}$  in eine Menge  $E$  mit mindestens zwei Elementen nicht abzählbar ist.

*Beweis.* 1. Für jede natürliche Zahl  $N$  gibt es nur endlich viele Brüche  $p/q \in \mathbb{Q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$  und  $|p| \leq N$ ,  $|q| \leq N$ . Wir beginnen unser Abzählen von  $\mathbb{Q}$  mit den Brüchen für  $N = 1$ , dann nehmen wir die Brüche hinzu mit  $N = 2$ , und indem wir so weitermachen zählen wir ganz  $\mathbb{Q}$  ab.

2. Hierzu verwenden wir das **Cantor'sche Diagonalverfahren**. Man beachte zunächst, daß ein unendlicher Dezimalbruch, in dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen, nur dann dieselbe reelle Zahl darstellt wie ein beliebiger anderer unendlicher Dezimalbruch, wenn die beiden in jeder Stelle übereinstimmen. Wir nehmen nun eine beliebige Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \mapsto r_i$ , und zeigen, daß sie keine Surjektion sein kann. Wir schreiben dazu jedes  $r_i$  als unendlichen Dezimalbruch. Dann finden wir einen unendlichen Dezimalbruch  $r$ , bei dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen und so, daß  $r$  an der  $i$ -ten Stelle nach dem Komma verschieden ist von  $r_i$  und an der ersten Stelle vor dem Komma von  $r_0$ . Dies  $r$  ist dann verschieden von allen  $r_i$  und unsere Abbildung  $i \mapsto r_i$  kann keine Surjektion gewesen sein.  $\square$

*Bemerkung 2.3.7.* Man kann sich fragen, ob jede Teilmenge der reellen Zahlen entweder abzählbar ist oder in Bijektion zu den reellen Zahlen selber. Die schon auf Cantor zurückgehende Vermutung, das könnte gelten, ist bekannt als die **Kontinuumshypothese**. Sie wurde 1963 von Paul Cohen in sehr merkwürdiger Weise geklärt: Er zeigte, daß unsere Frage in dem axiomatischen Rahmen, in dem man die Mengenlehre üblicherweise formalisiert, nicht entscheidbar ist. Cohen wurde für diese Leistung auf dem internationalen Mathematikerkongress 1966 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Die Kontinuumshypothese ist übrigens die erste Frage einer berühmten Liste von 23 Fragestellungen, den sogenannten **Hilbert'schen Problemen**, die David Hilbert in seiner Ansprache auf dem internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris vorstellte in seinem Bemühen, "aus verschiedenen mathematischen Disziplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läßt".

## 2.4 Die Kreiszahl $\pi$

2.4.1. Bekanntlich bezeichnet  $\pi$ , ein kleines griechisches P für Perimeter, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Um diese Anschauung zu formalisieren zur Definition einer reellen Zahl im Sinne von 1.4.9 gehen wir aus von der anschaulichen Bedeutung von  $\pi$  als Länge des Halbkreises  $H$  mit Radius Eins

$$H = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1, b \geq 0\}$$

Seien  $x, y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die beiden Abbildungen, die jedem Punkt der Ebene seine erste bzw. zweite Koordinate zuordnen, also  $v = (x(v), y(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$ . Die Distanz  $d(v, w) \in \mathbb{R}$  zwischen zwei Punkten  $v, w \in \mathbb{R}^2$  der Ebene erklären wir in Erinnerung an den Satz des Pythagoras durch die Formel

$$d(v, w) := \sqrt{(x(v) - x(w))^2 + (y(v) - y(w))^2}$$

Die **Kreiszahl**  $\pi \in \mathbb{R}$  definieren wir dann als das Supremum über die ‐Längen aller in unseren Halbkreis  $H$  einbeschriebenen Polygonzüge‐, in Formeln

$$\pi := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(v_{i-1}, v_i) \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, v_0, v_1, \dots, v_n \in H, \\ x(v_0) < x(v_1) < \dots < x(v_n) \end{array} \right\}$$

Mithilfe der Abschätzung  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$  erkennt man, daß die Zahl 4 eine obere Schranke ist für unsere Menge von Längen von Polygonzügen, mithin haben wir hier in der Tat eine reelle Zahl  $\pi \in \mathbb{R}$  definiert. Wir werden in 7.6.19 sehen, wie man diese Zahl im Prinzip bis zu einer beliebig vorgegebenen Stelle nach dem Komma berechnen kann. Die Definition selbst ist sehr einfach. Ich habe sie nur deshalb nicht gleich im Zusammenhang mit der Definition der reellen Zahlen gegeben, weil sie die Existenz von Quadratwurzeln benötigt, die erst in 2.3.2 gezeigt wurde.

*Ergänzung 2.4.2.* Die Zahl  $\pi$  ist nicht rational, in Formeln  $\pi \notin \mathbb{Q}$ , wie Lambert bereits 1766 zeigen konnte. Anders ausgedrückt läßt sich  $\pi$  nicht durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen. Wir geben einen Beweis in 7.6.7. Unsere Kreiszahl  $\pi$  ist noch nicht einmal **algebraisch**, als da heißt Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit rationalen Koeffizienten, d.h. es gilt keine Gleichung der Gestalt

$$\pi^n + q_{n-1}\pi^{n-1} + \dots + q_1\pi + q_0 = 0 \quad \text{mit } q_{n-1}, \dots, q_0 \in \mathbb{Q} \text{ und } n \geq 1.$$

Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen **transzendent**, lateinisch für ‐überschreitend‐, da ihre Behandlung ‐die Grenzen der Algebra überschreitet‐. Die Transzendenz von  $\pi$  wurde 1882 von Lindemann in Freiburg bewiesen. Seine Büste steht im vierten Stock des Mathematischen Instituts. Er war übrigens Hilbert’s Doktorvater.

## 2.5 Grenzwerte von Reihen

**Definition 2.5.1.** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$



SkriptenBilder/BildPa.png

Ein eingeschriebener Polygonzug



SkriptenBilder/BildKA.png

Diese Abbildung soll veranschaulichen, warum 4 eine obere Schranke für die Längen eingeschriebener Polygonzüge ist: Die horizontalen Stücke und die vertikalen Stücke haben jeweils zusammengenommen eine Gesamtlänge  $\leq 2$ .

bezeichnet die Folge der **Partialsommen**  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  und, falls die Folge dieser Partialsummen konvergiert, auch ihren Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Wir sagen dann, die **Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  **konvergiere gegen**  $s$ . Nennen wir eine Reihe **konvergent**, so meinen wir stets, daß unsere Reihe gegen eine reelle Zahl konvergiert und nicht etwa gegen  $\pm\infty$ . Die  $a_k$  heißen die **Reihenglieder**.

2.5.2. Es spielt für das Konvergenzverhalten einer Reihe keine Rolle, wenn wir *endlich viele* ihrer Glieder abändern. Das beeinflußt nur den Grenzwert und ändert ihn eben um die Summe unserer endlich vielen Änderungen.

*Bemerkung 2.5.3.* Es wäre terminologisch kohärenter gewesen, wie bei Folgen auch bei Reihen von “reell konvergenten Reihen” zu sprechen. Das schien mir jedoch ungeschickt, da man den Begriff dann nicht als Verb verwenden kann: “Die Reihe reell-konvergiert” klingt einfach zu holprig, und Sprechweisen wie “die Reihe konvergiert absolut” sind oft praktisch.

*Beispiel 2.5.4.* Dies Beispiel illustriert den oft nützlichen **Teleskopsummentrick**:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Satz 2.5.5 (Geometrische Reihe).** Sei  $|x| < 1$ . So gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

*Beweis.* Sicher gilt  $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$ , die Partialsummen unserer Reihe ergeben sich also zu

$$1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

und streben für  $n \rightarrow \infty$  wie gewünscht gegen  $\frac{1}{1-x}$ . □

*Beispiel 2.5.6.* Es gilt  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$  und

$$0,999\dots = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 1$$

*Übung 2.5.7.* Genau dann läßt sich eine reelle Zahl durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen, wenn sie rational ist.

**Satz 2.5.8.** Sind  $\sum a_k$  und  $\sum b_k$  konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen  $\sum(a_k + b_k)$  und  $\sum \lambda a_k$  und es gilt:

$$\begin{aligned}\sum(a_k + b_k) &= \sum a_k + \sum b_k \\ \sum \lambda a_k &= \lambda \sum a_k\end{aligned}$$

*Beweis.* Das folgt sofort, wenn man die entsprechenden Aussagen für Folgen 2.1.36 auf die Folgen der Partialsummen anwendet.  $\square$

2.5.9. Eine Reihe kann nur dann konvergieren, wenn die Folge der Reihenglieder gegen Null strebt. In der Tat folgt das sofort, wenn wir 2.1.45 auf die Folge der Partialsummen anwenden.

**Lemma 2.5.10.** Eine Reihe, die aus nichtnegativen Gliedern besteht, konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

*Beweis.* Ist kein Reihenglied negativ, so wächst die Folge der Partialsummen monoton. Ist diese Folge auch noch beschränkt, so muß sie nach 2.2.4 reell konvergent sein. Die Umkehrung ist eh klar.  $\square$

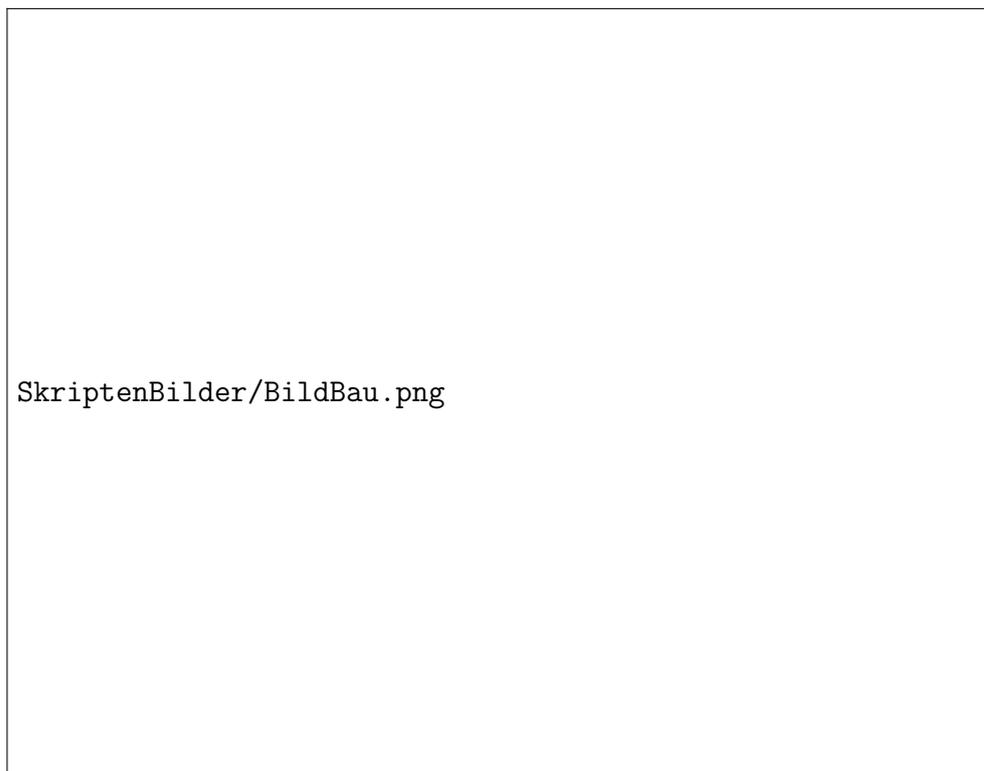
*Beispiel 2.5.11.* Die **harmonische Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  konvergiert nicht, da ja gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &\geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und so weiter.

Jedoch konvergieren die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  für  $s = 2, 3, 4, \dots$ , da für jede dieser Reihen die Folge der Partialsummen beschränkt ist durch  $1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2$ .

*Vorschau 2.5.12.* In der Funktionentheorie können Sie lernen, daß diese Reihen sogar eine außerordentlich interessante Funktion  $\zeta(s)$  definieren, die sogenannte **Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion**. Wir werden in VIII.3.2.7 zeigen, daß zum Beispiel gilt  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$  und nach VIII.3.2.5 haben wir sogar ganz allgemein  $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$  für beliebige natürliche Zahlen  $n \geq 1$ . Alle diese Formeln sind berühmte Resultate des 1707 in Basel geborenen Mathematikers **Leonhard Euler**. Als Übung 4.3.24 werden Sie im übrigen zeigen, daß auch die Reihe der Kehrwerte aller Primzahlen bereits divergiert. Für diejenigen unter Ihnen, die die komplexen Zahlen bereits kennen, sei erwähnt, daß es mit etwas größerem Aufwand sogar gelingt,  $\zeta(s)$  zu definieren für jede komplexe Zahl  $s \neq 1$ , vergleiche etwa VIII.4.1.7. Die vielleicht berühmteste Vermutung der Mathematik, die sogenannte **Riemann'sche Vermutung** besagt, daß alle Nullstellen der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion, die



Die Divergenz der harmonischen Reihe [2.5.11](#) zeigt, daß man mit hinreichend vielen identischen Bauklötzen einen beliebig weit neben seinem Grundklotz endenden Turm bauen kann. Obiges Bild zeigt etwa, wie weit man mit vier Klötzen so gerade eben mal kommen kann.

nicht auf der reellen Achse liegen, Realteil  $1/2$  haben müssen. Ein Beweis dieser Vermutung hätte weitreichende Konsequenzen für unser Verständnis der Verteilung der Primzahlen, wie der Beweis des Primzahlsatzes VIII.4.1.1 illustriert. Die Riemann'sche Vermutung ist übrigens der Kern des **achten Hilbert'schen Problems**.

**Definition 2.5.13.** Wir sagen, eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  **konvergiere absolut** genau dann, wenn die Reihe der Absolutbeträge ihrer Reihenglieder konvergiert, in Formeln  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ .

*Beispiel 2.5.14.* Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert, aber nicht absolut. Daß die Reihe nicht absolut konvergiert, hatten wir schon in 2.5.11 gesehen. Um zu zeigen, daß unsere Reihe dennoch konvergiert, beachten wir, daß für die Folge  $s_n$  der Partialsummen gilt

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

Folglich existiert  $S = \sup\{s_2, s_4, \dots\}$ . Da aber gilt  $s_{2k} \leq S \leq s_{2k+1}$  für alle  $k$  erhalten wir  $|S - s_n| \leq \frac{1}{n}$  und folglich  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ . Wir werden in 5.4.1 sehen, daß genauer gilt  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$ .

*Übung 2.5.15.* Man zeige das **Leibniz'sche Konvergenzkriterium**: Ist  $a_k$  eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ .

**Satz 2.5.16.** *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

*Beweis.* Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  unsere absolut konvergente Reihe. Seien

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

die Partialsummen der Reihe selbst und der Reihe der Absolutbeträge. Nach Annahme konvergiert die Folge der  $S_n$  in  $\mathbb{R}$  und ist also eine Cauchy-Folge. Da aber gilt  $|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^n a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = S_n - S_m \quad \forall n > m$ , ist dann auch  $s_n$  eine Cauchy-Folge und konvergiert in  $\mathbb{R}$  nach 2.2.11.  $\square$

**Satz 2.5.17 (Umordnungssatz).** *Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine absolut konvergente Reihe und  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion, so ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$  eine absolut konvergente Reihe und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*Beweis.* Da  $\sum |a_k|$  konvergiert, finden wir sicher für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  mit  $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$ . Ist  $M$  so groß, daß gilt  $u(\{1, \dots, M\}) \supset \{1, \dots, N\}$ , so erhalten wir daraus für alle  $n \geq N$  die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^M a_{u(k)} - \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt nach 2.1.35 und 2.1.44 dann auch im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  und zeigt, daß die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe konvergiert und denselben Grenzwert hat wie die Folge der Partialsummen der ursprünglichen Reihe. Wenden wir dieses Erkenntnis an auf die Reihe der Absolutbeträge, so folgt auch die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe.  $\square$

*Ergänzung 2.5.18.* Ist  $\sum a_k$  eine konvergente Reihe reeller Zahlen, die *nicht* absolut konvergiert, so gibt es für jedes  $x \in \mathbb{R}$  eine Umordnung  $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = x$ . In der Tat divergieren in diesem Fall die Reihen ihrer positiven und ihrer negativen Terme jeweils für sich genommen. Die Strategie ist nun, erst nur positive Reihenglieder zu nehmen, bis man oberhalb von  $x$  ist, dann nur negative, bis man wieder drunterrutscht, und immer so weiter.

*Ergänzende Übung 2.5.19.* Ist  $\sum a_k$  eine konvergente Reihe reeller Zahlen und  $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$  eine Umordnung mit der Eigenschaft, daß  $|u(k) - k|$  beschränkt ist, so konvergiert auch die umgeordnete Reihe  $\sum a_{u(k)}$  und zwar gegen denselben Grenzwert.

**Proposition 2.5.20 (Majorantenkriterium).** Sei  $\sum a_k$  eine Reihe. Gibt es für unsere Reihe eine konvergente **Majorante**, als da heißt eine konvergente Reihe  $\sum b_k$  mit  $|a_k| \leq b_k$  für fast alle  $k$ , so konvergiert unsere Reihe  $\sum a_k$  absolut.

*Beweis.* Aus 2.5.10 folgt in der Tat die Konvergenz der Reihe  $\sum |a_k|$ .  $\square$

**Korollar 2.5.21 (Quotientenkriterium).** Sei  $\sum a_k$  eine Reihe mit nicht-verschwindenden Gliedern. Gibt es  $\theta < 1$  mit  $|a_{k+1}/a_k| < \theta$  für alle  $k$ , so konvergiert die Reihe  $\sum a_k$  absolut.

2.5.22. Bei diesem Kriterium ist wesentlich, daß  $\theta$  nicht von  $k$  abhängt, die Ungleichungen  $|a_{k+1}/a_k| < 1$  gelten ja auch für die divergente harmonische Reihe. Es gibt jedoch auch Reihen wie  $\sum \frac{1}{k^2}$ , die absolut konvergieren, obwohl sie unser Kriterium nicht dazu zwingt.

*Beweis.* Aus der Annahme folgt  $|a_k| \leq |a_0|\theta^k$  für alle  $k$ , mithin ist die nach 2.5.5 konvergente Reihe  $\sum |a_0|\theta^k$  eine Majorante unserer Reihe.  $\square$

**Korollar 2.5.23.** Sei  $\sum a_k$  eine Reihe mit nichtverschwindenden Gliedern. Gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$ , so konvergiert die Reihe  $\sum a_k$  absolut.

*Beweis.* Klar nach dem Quotientenkriterium 2.5.21. □

**Definition 2.5.24.** Eine Familie  $(a_i)_{i \in I}$  von reellen Zahlen heißt **summierbar mit Summe  $s$**  und man schreibt

$$\sum_{i \in I} a_i = s$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $s$  es eine endliche Teilmenge  $I_U \subset I$  gibt derart, daß für jedes endliche  $J$  mit  $I_U \subset J \subset I$  gilt

$$\sum_{i \in J} a_i \in U$$

Diese Definition ist durchaus für  $s \in \overline{\mathbb{R}}$  sinnvoll, wir nennen unsere Familie jedoch nur im Fall  $s \in \mathbb{R}$  summierbar.

*Ergänzung 2.5.25.* Mir gefällt diese Definition besonders gut, da darin von einer Reihenfolge der Summanden erst gar nicht die Rede ist. In der folgenden Übung dürfen Sie zeigen, daß die in der vorhergehenden Definition erklärte Summierbarkeit im wesentlichen gleichbedeutend zu absoluter Konvergenz ist. Später, wenn wir auch in Vektorräumen summieren, erweist sich jedoch das Analogon 7.5.11 der Summierbarkeit als der nützlichere Begriff.

*Übung 2.5.26.* Man zeige, daß in einer summierbaren Familie von reellen Zahlen nur für höchstens abzählbar viele Indizes  $i \in I$  das entsprechende  $a_i$  von Null verschieden sein kann. Hinweis: Sonst gäbe es ein  $n \geq 1$  derart, daß für unendlich viele  $i$  gälte  $|a_i| > 1/n$ . Man zeige dann weiter, eine Familie von reellen Zahlen summierbar ist genau dann, wenn für eine und jede Abzählung ihrer von Null verschiedenen Glieder die so entstehende Reihe absolut konvergiert, und daß dann die Summe unserer Familie der Grenzwert der entsprechenden Reihe ist.

*Ergänzende Übung 2.5.27.* Gegeben eine summierbare Familie von reellen Zahlen  $(a_i)_{i \in I}$  zeige man, daß auch für eine beliebige Teilmenge  $J \subset I$  die Familie  $(a_i)_{i \in J}$  summierbar ist, und daß für eine beliebige Zerlegung  $I = \bigsqcup_{k \in K} I(k)$  von  $I$  in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen  $I(k)$  gilt  $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} (\sum_{i \in I(k)} a_i)$ . Weiter zeige man für jede aufsteigende Familie von Teilmengen  $I_0 \subset I_1 \subset \dots$  mit Vereinigung  $I$  die Formel  $\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} a_i$ . Diese Aussagen werden sich im übrigen als Spezialfälle des Satzes von Fubini IV.6.6.18 und des Satzes über dominierte Konvergenz IV.6.5.10 aus der Theorie des Lebesgue-Integrals erweisen.

## 2.6 Wachstum und Zerfall

**Definition 2.6.1.** Wir setzen

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

und erhalten so eine Abbildung  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die **Exponentialfunktion**.

2.6.2. Die fragliche Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$  nach dem Quotientenkriterium oder genauer seinem Korollar 2.5.23 und sie konvergiert sogar außerordentlich schnell. Von einem formalen Standpunkt aus betrachtet ist unsere Definition also völlig unproblematisch und von einem rechen-technischen Standpunkt aus betrachtet ist sie sogar ziemlich geschickt. Sie hat nur den Nachteil, daß aus der Definition heraus weder klar wird, warum gerade diese Funktion den Namen Exponentialfunktion verdienen sollte, noch warum sie überhaupt von Interesse ist. Ich erläutere das in den gleich anschließenden Bemerkungen.

**Proposition 2.6.3.** *Es gilt  $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .*

2.6.4. Die Proposition kann man dahingehend interpretieren, daß  $\exp(x)$  das Kapital ist, das in  $x$  Jahren aus einem Euro entsteht bei einer “kontinuierlichen Verzinsung mit einem Zinssatz von 100%”. Legen wir das Geld zum Beispiel für ein Jahr an, so haben wir bei jährlicher Verzinsung am Ende des Jahres zwei Euro auf dem Konto. Bei monatlicher Verzinsung ergeben sich mit Zinseszinsen schon  $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$  Euro, und bei kontinuierlicher Verzinsung  $e = \exp(1) = 2,781\dots$  Euro. Man nennt  $e = \exp(1)$  die **Euler’sche Zahl**. In der Schule haben Sie möglicherweise  $e^x$  statt  $\exp(x)$  geschrieben, aber wir erlauben uns das erst ab 3.2.15, wo wir für beliebiges  $a > 0$  die Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a^n$  zu einer Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, b \mapsto a^b$  fortsetzen und zwar nach 3.3.28 auf die einzig mögliche Weise, bei der die Funktion  $b \mapsto a^b$  “monoton” ist im Sinne von 3.2.1 und die “Funktionalgleichung”  $a^{b+c} = a^b a^c$  erfüllt.

2.6.5. In einem Ausdruck der Gestalt  $a^b$  nennt man  $a$  die **Basis** und  $b$  den **Exponenten**, weil er eben exponiert oben an die Basis geschrieben wird. Daher rührt auch die Bezeichnung als “Exponentialfunktion”. Ich würde unsere Funktion viel lieber ihrer Natur nach die “Funktion des natürlichen Wachstums” oder die “Wachstumsfunktion” nennen, aber die aus der Schreibweise abgeleitete Bezeichnung hat sich nun einmal durchgesetzt, mag sie auch aus historischen Zufällen entstanden sein: Hätte sich für die Bezeichnung des Quadrats einer Zahl  $a$  statt der Notation  $a^2$  die Notation  $a_2$  eingebürgert, so würde in Anbetracht dieses Schemas der Begriffsbildung unsere Exponentialfunktion heute vielleicht “Pedestalfunktion” heißen. . .



SkriptenBilder/Bild0013.png

Der Graph der Exponentialfunktion in zwei Maßstäben. Man erkennt unschwer, daß ein konstantes Wirtschaftswachstum über längere Zeiträume in einer Katastrophe enden muß. In derselben Weise entwickelt sich im Übrigen auch die Geschwindigkeit einer Vorlesung unter der Annahme, daß die Stoffmenge, die in einer Stunde vermittelt werden kann, proportional ist zur Menge des Stoffes, den die Zuhörer bereits kennen. . .

2.6.6. Eine infinitesimale Formulierung der in 2.6.4 erläuterten Bedeutung der Exponentialfunktion gibt Korollar 4.3.12, in dem die Exponentialfunktion charakterisiert wird als die eindeutig bestimmte differenzierbare Funktion von den reellen Zahlen in sich selber, die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt und bei Null den Wert Eins annimmt. Gehen wir von dieser Charakterisierung aus, so führt uns der Formalismus der Taylorreihen 5.2.2 ganz natürlich zu der Reihe, die wir in 2.6.1 haben vom Himmel fallen lassen, um möglichst schnell erste substanzielle Anwendungen unserer Betrachtungen zu Folgen und Reihen geben zu können. Eigentlich will ich es ja nach Möglichkeit vermeiden, Formeln vom Himmel fallen zu lassen. In diesem Fall schienen mir aber die didaktischen Vorteile der dadurch ermöglichten frühzeitigen Einführung dieser außerordentlich wichtigen Funktion zu überwiegen.

2.6.7. Die Exponentialfunktion wächst ungeheuer schnell. Eine gewisse Vorstellung davon mag die Erkenntnis 7.3.10 geben, nach der der Graph der Funktion  $(\exp(x) + \exp(-x))/2$ , in einem jeweils der speziellen Situation angepassten Maßstab auf die Wand gemalt, genau die Gestalt einer zwischen zwei Nägeln durchhängenden Kette hat. Ist die Kette zwanzigmal so lang ist wie der Abstand der beiden Nägel, so stellt sie unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von  $-2,3$  bis  $2,3$  dar. Ist die Kette zweihundertmal so lang wie der Abstand der beiden Nägel, so erhalten wir unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von  $-4,6$  bis  $4,6$ . Und eine Zwei-Meter-Kette hängt zwischen zwei im Abstand von einem knappen Zentimeter eingeschlagenen Nägeln schon recht steil!

*Beweis.* Mit der binomischen Formel I.1.1.23 ergibt sich

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}$$

Für beliebige  $M, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  gilt also

$$\begin{aligned} \left| \exp(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| &\leq \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^M \frac{x^k}{k!} \right| \\ &+ \left| \sum_{k=0}^M \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^M \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \right| \\ &+ \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \right| \end{aligned}$$

Da die Exponentialreihe für vorgegebenes  $x$  absolut konvergiert, gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $M = M_\varepsilon$  derart, daß für jedes  $n$  der erste und der letzte Term rechts beschränkt sind durch  $\varepsilon$ . Für dies feste  $M$  geht der mittlere Term bei  $n \rightarrow \infty$  gegen Null, es gibt also  $N = N_\varepsilon$  derart, daß er für dies feste  $M$  kleiner wird als  $\varepsilon$  falls  $n \geq N$ . Damit gilt  $\left| \exp(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq 3\varepsilon$  falls  $n \geq N$ .  $\square$

**Satz 2.6.8 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).** *Die Exponentialfunktion ist ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen. In Formeln ausgedrückt gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  also  $\exp(x) \neq 0 \neq \exp(y)$  und*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

2.6.9. Stellen wir uns  $\exp(x)$  vor als das Vermögen, daß in  $x$  Jahren aus einem Euro entsteht bei kontinuierlicher Verzinsung mit 100%, so erhalten wir offensichtlich gleichviel, ob wir unser Vermögen  $\exp(x)$  nach  $x$  Jahren gleich wieder für  $y$  Jahre anlegen, oder ob wir unseren Euro gleich von Anfang an  $x + y$  Jahre arbeiten lassen. Das ist die Bedeutung der Funktionalgleichung. In 3.3.28 werden Sie zeigen, daß die Gruppenhomomorphismen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$  mit der Eigenschaft  $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$  genau die Abbildungen  $\varphi(x) = \exp(ax)$  sind mit  $a > 0$ . In 3.2.11 werden wir zeigen, daß die Exponentialfunktion sogar einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen liefert.

*Ergänzung 2.6.10.* Der gleich folgende Beweis der Funktionalgleichung gefällt mir nicht besonders. Ein anderer aber in seiner Weise auch etwas verwickelter Beweis wird in 2.6.17 vorgestellt. Ein mehr konzeptueller Zugang zur Exponentialfunktion und ihrer Funktionalgleichung wird in 4.6.10 und 4.6.11 skizziert. Er benötigt jedoch Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen, und er läßt auch nicht so einfach auf den Fall von Matrizen zu verallgemeinern, der für uns bei der Diskussion von Sinus und Cosinus eine wesentliche Rolle spielen wird. Wir schicken dem eigentlichen Beweis einige allgemeine Betrachtungen voraus.

**Satz 2.6.11 (Produkt von Reihen).** *Sind  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  absolut konvergente Reihen, so konvergiert auch die Summe der Produkte  $a_i b_j$  für  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  im Sinne von 2.5.24 und es gilt*

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß für irgendeine Bijektion  $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $k \mapsto (u(k), v(k))$  die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} b_{v(k)}$  absolut konvergiert und daß gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Natürlich haben wir

$$\sum_{k=0}^n |a_{u(k)} b_{v(k)}| \leq \left( \sum_{i=0}^N |a_i| \right) \left( \sum_{j=0}^M |b_j| \right)$$

falls gilt  $N \geq \max(u(0), \dots, u(n))$  und  $M \geq \max(v(0), \dots, v(n))$ . Damit konvergiert unsere Reihe  $\sum a_{u(k)} b_{v(k)}$  absolut. Nach dem Umordnungssatz 2.5.17 können wir also die Bijektion  $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  nehmen, die wir wollen, um den Grenzwert zu bestimmen. Jetzt wählen wir unsere Bijektion  $w = (u, v)$  so, daß sie Bijektionen

$$\{0, \dots, n^2 - 1\} \xrightarrow{\sim} \{0, \dots, n - 1\} \times \{0, \dots, n - 1\}$$

induziert, und erhalten Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{n-1} b_j \right)$$

Der Übergang zum Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  zeigt dann die Behauptung.  $\square$

2.6.12. Das Ende des Beweises hätte sehr viel besser ausgesehen, wenn wir unsere Reihen mit dem Index  $k = 1$  beginnen ließen, aber so sieht der Anfang des Beweises natürlicher aus. In Wirklichkeit zeigen wir eh für beliebige im Sinne von 2.5.24 summierbare Familien reeller Zahlen  $(a_i)_{i \in I}$  und  $(b_j)_{j \in J}$ , daß auch die Familie aller Produkte  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  summierbar ist und daß gilt

$$\left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$

*Beweis der Funktionalgleichung 2.6.8.* Wir rechnen

$$\begin{aligned} \exp(x + y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x + y)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} x^i y^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} \right) \end{aligned}$$

wo wir im zweiten Schritt die binomische Formel verwenden und der Index  $i + j = k$  an einer Summe bedeutet, daß wir über alle Paare  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $i + j = k$  summieren. Andererseits erhalten wir mit unserem Satz über das Produkt von Reihen bei einer geeigneten Wahl der Bijektion  $w : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  und nach Übergang zu einer Teilfolge der Folge der Partialsummen auch

$$\begin{aligned} \exp(x) \exp(y) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} \right) \end{aligned}$$

Da sicher gilt  $\exp(0) = 1$ , folgt  $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x + (-x)) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und mithin  $\exp(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

*Übung 2.6.13.* Man folgere aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 2.6.8 die Formeln  $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ ,  $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(n) = e^n$ ,  $\exp(nx) = (\exp x)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$  sowie  $\exp(x/2) = \sqrt{\exp(x)}$ .

*Ergänzende Übung 2.6.14.* Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir hier im Vorgriff auf 3.2.15 schon  $\exp(x) = e^x$  ab. Man zeige, daß für alle  $i, N \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i} = \frac{N^i e^{-N}}{i!}$$

Dieses Resultat ist in der Stochastik wichtig, wie ich im folgenden ausführen will. Gegeben  $\lambda \in \mathbb{R}$  heißt die Funktion  $i \mapsto \lambda^i e^{-\lambda} / i!$  ganz allgemein die **Poisson-Verteilung** mit Parameter  $\lambda$ . Sie hat die folgende Bedeutung: Knetet man in einen großen Teig genau  $nN$  Rosinen ein und teilt ihn dann in  $n$  Rosinenbrötchen, so ist  $\left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$  die Wahrscheinlichkeit, daß  $i$  vorgegebene Rosinen in einem fest gewählten Brötchen landen und die restlichen Rosinen in den anderen Brötchen. Mithin ist  $\binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$  die Wahrscheinlichkeit, daß in einem fest gewählten Brötchen genau  $i$  Rosinen landen. Ist unser Brötchen klein im Vergleich zum ganzen Teig, so liegt diese Wahrscheinlichkeit also nahe bei  $N^i e^{-N} / i!$  oder allgemeiner bei  $\lambda^i e^{-\lambda} / i!$  mit  $\lambda$  der durchschnittlichen Zahl von Rosinen in dem Teigvolumen, das man für ein Brötchen braucht. Genau genommen stimmt das allerdings nur für punktförmige Rosinen, denn sonst liefert die Größe des Brötchens eine obere Schranke für die möglichen Anzahlen der darin verbackenen Rosinen.

*Ergänzende Übung 2.6.15.* Man berechne die Euler'sche Zahl  $e$  bis auf 5 sichere Stellen hinter dem Komma.

*Ergänzende Übung 2.6.16.* Die Euler'sche Zahl  $e$  ist nicht rational. Man zeige dies, indem man von ihrer Darstellung als Reihe ausgeht und durch geeignete Abschätzungen nachweist, daß  $q!e$  für  $q \in \mathbb{N}$  mit  $q \geq 2$  nie eine ganze Zahl sein kann.

*Ergänzende Übung 2.6.17.* In dieser Übung sollen Sie einen anderen Zugang zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ausarbeiten, den ich in einer Arbeit von Martin Kneser kennengelernt habe: Man zeige dazu in Verallgemeinerung von 2.6.3, daß für jede reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x)$ . Mithilfe der Identität

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{x + y + (xy/n)}{n}\right)$$

folgere man dann die Funktionalgleichung.



SkriptenBilder/BildPaa.png

Die Parabel  $y = x^2$  ist der Graph der Funktion  $f(x) = x^2$ .

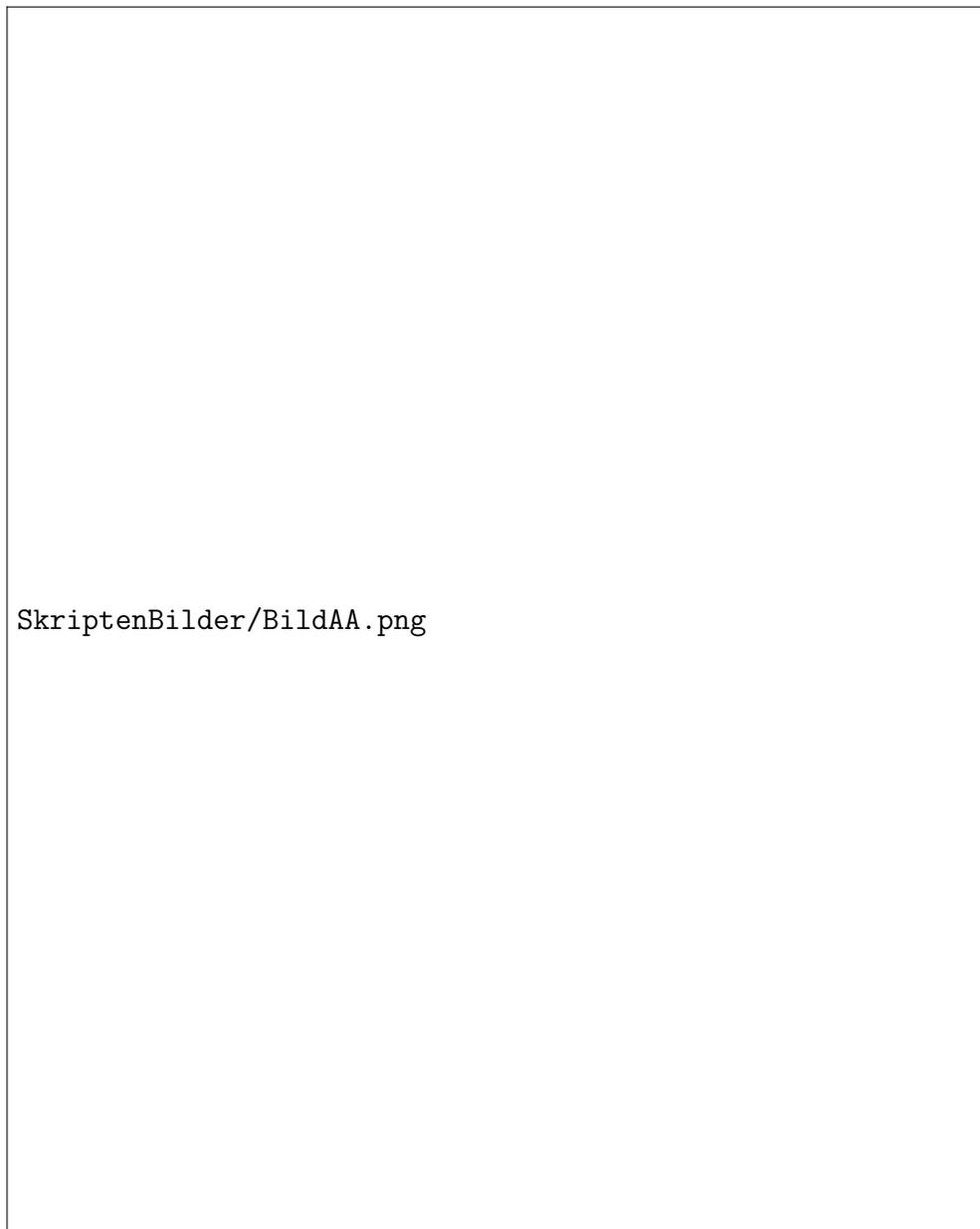
## 3 Stetigkeit

### 3.1 Definition und erste Beispiele

3.1.1. Abbildungen mit Werten in irgendeiner Art von Zahlen nennen wir **Funktionen**. Wir erlauben hier auch Werte in  $\overline{\mathbb{R}}$ . Wollen wir besonders betonen, daß nur reelle Zahlen als Werte angenommen werden, so sprechen wir von **reellwertigen Funktionen**. Reellwertige Funktionen auf der reellen Zahlengeraden kann man sich auf mindestens vier verschiedene Arten vorstellen:

1. In der Schule ist es üblich, eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch ihren Graphen  $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$  zu veranschaulichen, also durch eine Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .
2. In der Physik ist es üblich, sich eine Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow X, t \mapsto f(t)$  von  $\mathbb{R}$  in irgendeine Menge  $X$  vorzustellen als ein Teilchen, das sich “im Raum  $X$  bewegt und sich zur Zeit  $t$  (für lateinisch “tempus”) am Punkt  $f(t)$  befindet”. In unserem Fall hätten wir uns also ein Teilchen vorzustellen, das sich auf der Zahlengerade  $X = \mathbb{R}$  bewegt.
3. Eine reellwertige Funktion auf einer beliebigen Menge kann man sich als eine Temperaturverteilung auf besagter Menge vorstellen, im vorliegenden Fall also als eine Temperaturverteilung auf der reellen Zahlengeraden.
4. In der Mathematik ist es auch nützlich, sich eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wirklich als Abbildung der Zahlengerade auf sich selber vorzustellen. Als Beispiel betrachten wir den Absolutbetrag, der als Abbildung aufgefaßt den negativen Teil der Zahlengerade auf den positiven Teil herüberklappt.

3.1.2. Beliebige Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  können wild aussehen, man denke nur etwa an die Abbildung, die jeder rationalen Zahl den Betrag ihres Nenners nach vollständigem Kürzen zuordnet und jeder irrationalen Zahl ihre fünfte Nachkommastelle. Wir führen nun die Klasse der “stetigen Funktionen” ein und zeigen insbesondere, daß für stetige auf einem Intervall definierte und injektive Funktionen auch ihr Bild ein Intervall ist und die Umkehrfunktion stetig. Das liefert uns dann viele neue Funktionen als Umkehrfunktionen bereits bekannter Funktionen. Anschaulich ist eine reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall stetig genau dann, wenn man “ihren Graphen zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen”. Diese Anschauung werden wir im Folgenden präzisieren. Wir erinnern an den Umgebungsbegriff aus [2.1.8](#).



Vier verschiedene Anschauungen für eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen am Beispiel des Absolutbetrags  $x \mapsto |x|$

**Definition 3.1.3.** Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Gegeben ein Punkt  $p \in D$  heißt unsere Funktion **stetig bei  $p$**  genau dann, wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $f(p)$  eine Umgebung  $U'$  von  $p$  gibt mit  $f(U' \cap D) \subset U$ . Unsere Abbildung heißt **stetig** (englisch **continuous**, französisch **continue**) genau dann, wenn sie stetig ist bei jedem Punkt  $p \in D$ .

3.1.4. Wir vereinbaren diese Definition gleich im Fall einer Teilmenge  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  und einer Funktion  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , weil so der Zusammenhang mit dem Grenzwertbegriff in 3.3 in voller Allgemeinheit dargestellt werden kann. Wie bei Folgen reicht es auch hier, die Existenz von  $U'$  für alle Umgebungen  $U$  einer Umgebungsbasis von  $f(p)$  zu zeigen.

*Beispiele 3.1.5.* Für alle  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  ist die Einbettung  $i : D \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto x$  stetig. Der Absolutbetrag  $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$  ist stetig. Für jedes  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  ist die konstante Funktion  $c : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto c$  stetig. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = 1$  für  $x \geq 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x < 0$  ist nicht stetig bei  $p = 0$ , ihre Einschränkung auf  $D = \mathbb{R}^\times$  ist jedoch stetig. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$  für  $x \in \mathbb{Q}$  und  $f(x) = 0$  für  $x \notin \mathbb{Q}$  ist nur an der Stelle  $p = 0$  stetig.

**Satz 3.1.6 (Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig).** *Seien genauer  $D, E \subset \overline{\mathbb{R}}$  Teilmengen,  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Funktionen, und es gelte  $f(D) \subset E$ . Ist  $f$  stetig bei einem Punkt  $p \in D$  und  $g$  stetig bei seinem Bild  $f(p)$ , so ist auch  $g \circ f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto g(f(x))$  stetig bei  $p$ .*

3.1.7. Hier machen wir unsere Ankündigung aus 1.2.2.18 wahr. Genau genommen ist die Notation  $g \circ f$  nämlich nicht korrekt: Wir müßten eigentlich erst eine Abbildung  $\tilde{f} : D \rightarrow E$  definieren durch  $\tilde{f}(x) = f(x)$  für alle  $x \in D$  und dann die Abbildung  $g \circ \tilde{f}$  betrachten. Das ist nun jedoch meiner Ansicht nach ein Fall, in dem größere Präzision nicht mehr zur besseren Verständlichkeit beiträgt.

*Beweis.* Da  $g$  stetig ist bei  $f(p)$ , finden wir für jede Umgebung  $U$  von  $g(f(p))$  eine Umgebung  $U'$  von  $f(p)$  mit  $g(U' \cap E) \subset U$ . Da  $f$  stetig ist bei  $p$ , finden wir für diese Umgebung  $U'$  von  $f(p)$  eine Umgebung  $U''$  von  $p$  mit  $f(U'' \cap D) \subset U'$ . Damit finden wir in der Tat für jede Umgebung  $U$  von  $(g \circ f)(p)$  eine Umgebung  $U''$  von  $p$  mit  $(g \circ f)(U'' \cap D) \subset U$ .  $\square$

3.1.8. Einschränkungen stetiger Funktionen sind stetig. Ist genauer  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig bei  $p \in D$  und  $E \subset D$  eine Teilmenge mit  $p \in E$ , so ist auch die Einschränkung  $f|_E : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig bei  $p$ . Das folgt einerseits sofort aus der Definition und andererseits auch aus dem vorhergehenden Satz 1.2.2.18, indem wir die Einschränkung als Verknüpfung mit der nach 3.1.5 stetigen Einbettung von  $E$  schreiben.



SkriptenBilder/BildSTE.png

In diesem Bild habe ich für *eine* Umgebung  $U$  von  $f(p)$  mal eine mögliche Umgebung  $U'$  von  $p$  eingezeichnet. Stetigkeit bei  $p$  bedeutet jedoch sehr viel stärker, daß wir für *jede* Umgebung  $U$  von  $f(p)$  eine in der in [3.1.3](#) präzisierten Weise mögliche Umgebung  $U'$  von  $p$  finden können. Fett eingezeichnet ist auf der  $x$ -Achse der Definitionsbereich  $D$  unserer Funktion  $f$ , der Punkt  $p$  ist sein kleinstes Element. Auf dem Graphen von  $f$  habe ich den Teil über  $U' \cap D$  fett eingezeichnet, damit man gut sehen kann, daß in der Tat gilt  $f(U' \cap D) \subset U$ . Unsere eigentlichen  $U$  und  $U'$  sind die Projektionen der so bezeichneten “freischwebenden Intervalle” auf die jeweiligen Koordinatenachsen, was ich versucht habe, durch die gestrichelten Linien anzudeuten.

**3.1.9 (Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft).** Wird eine Funktion stetig bei einem Punkt nach Einschränkung auf eine Umgebung des besagten Punktes, so war sie dort schon selbst stetig. Ist genauer und in Formeln  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion und  $p \in D$  ein Punkt und gibt es eine Umgebung  $U$  von  $p$  derart, daß die Einschränkung von  $f$  auf  $D \cap U$  stetig ist bei  $p$ , so ist auch  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  bereits stetig bei  $p$ . Um das zum Ausdruck zu bringen, sagt man dann etwas vage, die “Stetigkeit sei eine lokale Eigenschaft”.

**Lemma 3.1.10 ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium für die Stetigkeit).** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion und  $p \in D$  ein Punkt. Genau dann ist  $f$  stetig bei  $p$ , wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  gibt derart, daß für alle  $x \in D$  mit  $|x - p| < \delta$  gilt  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ .

*Beweis.* Das folgt sofort aus der Definition der Stetigkeit 3.1.3 und der Definition des Umgebungsbegriffs 2.1.8.  $\square$

*Übung 3.1.11.* Seien  $I, J \subset \overline{\mathbb{R}}$  Intervalle mit nichtleerem Schnitt und sei  $f : (I \cup J) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Man zeige: Sind die Einschränkungen  $f|_I$  und  $f|_J$  stetig, so ist auch  $f$  selbst stetig. Im übrigen wird sich der “schwierige” Fall dieser Übung als Spezialfall von 6.5.35 erweisen.

**Lemma 3.1.12.** Die Funktion  $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig.

*Beweis.* Das ist gerade die Aussage von 2.1.37.3.  $\square$

**Lemma 3.1.13.** Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

3.1.14. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion können wir später auch aus dem allgemeinen Satz 5.1.5 folgern: Potenzreihen stellen auf ihrem Konvergenzbereich immer stetige Funktionen dar.

*Beweis.* Wir wenden das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium 3.1.10 an. Mit der Funktionalgleichung finden wir

$$|\exp(x) - \exp(p)| = |\exp(p)| \cdot |\exp(x - p) - \exp(0)|$$

Nun beachten wir, daß für  $|y| \leq 1$  gilt

$$|\exp(y) - \exp(0)| = |y| \cdot \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{i-1}}{i!} \right| \leq |y| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y|^{i-1}}{(i-1)!} \leq |y| \exp(1)$$

wo wir im zweiten Schritt die Dreiecksungleichung sowie die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert verwenden und die Nenner verkleinern. Aus  $|x - p| \leq 1$  folgt also  $|\exp(x) - \exp(p)| \leq \exp(p)|x - p|e$  und für gegebenes  $\varepsilon > 0$  können wir mithin  $\delta = \inf\{1, \varepsilon/(\exp(p)e)\}$  nehmen.  $\square$

**Definition 3.1.15.** Gegeben reellwertige Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die Funktionen  $f + g, fg : D \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \forall x \in D$ .

**Satz 3.1.16. Summe und Produkt stetiger Funktionen sind stetig.** Ist genauer  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  gegeben und  $p \in D$  ein Punkt und sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig bei  $p$ , so sind auch  $f + g$  und  $fg$  stetig bei  $p$ .

*Bemerkung 3.1.17.* Nehmen  $f$  und  $g$  allgemeiner Werte in  $\overline{\mathbb{R}}$  an und sind an jeder Stelle  $x \in D$  die Summe  $f(x) + g(x)$  bzw. das Produkt  $f(x) \cdot g(x)$  sinnvoll definiert im Sinne von 2.1.40, so gilt der Satz entsprechend mit fast demselben Beweis.

*Beweis.* Wir zeigen das nur für die Multiplikation, der Fall der Addition geht analog. Ist  $W$  eine Umgebung von  $f(p)g(p)$ , so gibt es nach 2.1.37 Umgebungen  $U$  von  $f(p)$  und  $V$  von  $g(p)$  mit  $U \cdot V \subset W$ . Da sowohl  $f$  als auch  $g$  stetig sind bei  $p$ , gibt es weiter Umgebungen  $U'$  und  $V'$  von  $p$  mit  $f(U' \cap D) \subset U$  und  $g(V' \cap D) \subset V$ . Ihr Schnitt  $U' \cap V'$  ist dann eine Umgebung  $W'$  von  $p$  mit  $(fg)(W' \cap D) \subset W$ .  $\square$

**Definition 3.1.18.** Wir nennen eine Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Polynomfunktion** genau dann, wenn es  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gibt derart, daß unsere Funktion gegeben wird durch die Abbildungsvorschrift  $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ .

*Ergänzung 3.1.19.* Jede Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , in der fast alle Folgenglieder Null sind, liefert uns eine Polynomfunktion. Nach ?? liefern verschiedene Folgen auch stets verschiedene Funktionen. Im Licht dieser Tatsache werden wir unsere Polynomfunktionen meist kürzer Polynome nennen, obwohl eigentlich der Begriff Polynom eher den formalen Ausdruck meint. Diese Unterscheidung ist aber erst in der Algebra wirklich von Belang, wenn man zum Beispiel mit endlichen Körpern arbeitet, vergleiche ??.

*Bemerkung 3.1.20.* Das Wort “Polynom” kommt von der griechischen Vorsilbe “poly” für “viele” und dem lateinischen Wort “nomen” für “Namen”. Allgemeiner betrachtet man auch Polynome in mehreren Veränderlichen und meint damit Ausdrücke wie etwa  $xyz + 7x^2y^4 - 12z + 1$ . Dieses Polynom ist die Summe der vier **Monome**  $xyz, 7x^2y^4, -12z$  und  $1$ , wobei das Wort “Monom” diesmal mit der griechischen Vorsilbe “mono” für “allein” gebildet ist. Einen Ausdruck wie  $xyz + 7x^2y^4$  würde man als **Binom** bezeichnen, diesmal mit der griechischen Vorsilbe “bi” für “Zwei”. Ein anderes Binom wäre der Ausdruck  $(x + y)$ , dessen Potenzen die “binomische” Formel I.1.1.23 explizit angibt. Es sollte klar sein, wie man aus unserer binomischen Formel auch Formeln für die Potenzen eines beliebigen Binoms erhält.

**Korollar 3.1.21.** *Polynomfunktionen sind stetig.*

*Beweis.* Das folgt induktiv aus dem vorhergehenden Satz 3.1.16.  $\square$

**Korollar 3.1.22 (Quotienten stetiger Funktionen sind stetig).** *Ist genauer  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und hat  $g$  keine Nullstelle in  $D$ , so ist auch die Funktion  $f/g : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/g(x)$  stetig.*

*Beweis.* Bezeichne  $i : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $x \mapsto 1/x$ . Sie ist stetig nach 3.1.12. Also ist auch  $i \circ g : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/g(x)$  stetig, und dann auch das Produkt dieser Funktion mit der stetigen Funktion  $f$ .  $\square$

3.1.23. Eine Funktion, die sich als der Quotient eines Polynoms durch ein von Null verschiedenes Polynom darstellen läßt, heißt eine **rationale Funktion**. So eine Funktion ist a priori natürlich nur da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, und ist nach dem vorhergehenden Korollar auf dem Komplement der Nullstellenmenge ihres Nenners stetig. Betrachten wir unsere rationale Funktion jedoch nicht als Abbildung, sondern als formalen Ausdruck, so verstehen wir unter ihrem Definitionsbereich die etwas größere Menge, auf der “nach maximalem Kürzen” der Nenner keine Nullstellen hat, vergleiche ???. Man beachte jedoch, daß die hier gegebene etwas unscharfe Formulierung “nach maximalem Kürzen” eigentlich erst in ??? gerechtfertigt wird, wo wir die Eindeutigkeit der “Primfaktorzerlegung” in Polynomringen diskutieren. Bleibt auch nach maximalem Kürzen noch ein nichtkonstantes Polynom im Nenner stehen, so spricht man von einer **gebrochen rationalen Funktion**.

## 3.2 Umkehrfunktionen und Zwischenwertsatz

**Definition 3.2.1.** Eine Abbildung  $f$  zwischen angeordneten Mengen heißt

<b>monoton wachsend,</b>	wenn gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
<b>streng monoton wachsend,</b>	wenn gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
<b>monoton fallend,</b>	wenn gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
<b>streng monoton fallend,</b>	wenn gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Eine Abbildung heißt **(streng) monoton** genau dann, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist. Das verallgemeinert unsere Begriffe für Folgen aus 2.2.3.

**Proposition 3.2.2.** *Ist  $I \subset \overline{\mathbb{R}}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  streng monoton, so ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig.*



Illustration zum Beweis von 3.2.2. Statt  $U$  und  $U'$  heißen unsere Umgebungen in diesem Bild allerdings  $W$  und  $W'$ . Man beachte, wie sich, salopp gesprochen, Unstetigkeitsstellen der Ausgangsfunktion in Definitionslücken der Umkehrfunktion verwandeln.

3.2.3. Wieder ist unsere Notation nicht ganz korrekt: Wir müßten genau genommen eigentlich die Bijektion  $\tilde{f} : I \xrightarrow{\sim} f(I)$ ,  $x \mapsto f(x)$  betrachten, dazu die inverse Abbildung  $\tilde{f}^{-1} : f(I) \xrightarrow{\sim} I$  nehmen, und unser  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definieren als die Verknüpfung von  $\tilde{f}^{-1}$  mit der Einbettung  $I \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

3.2.4. Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  darf nicht verwechselt werden mit der Funktion  $x \mapsto 1/f(x)$ : Ist zum Beispiel  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2$ , so haben wir  $1/f(x) = x^{-2}$ , aber die Umkehrabbildung ist gegeben durch  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ . Die Notation ist hier leider nicht ganz eindeutig. Oft muß man aus dem Kontext erschließen, ob mit  $f^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $f$  oder vielmehr die "Kehrwertfunktion"  $x \mapsto 1/f(x)$  gemeint ist.

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f$  streng monoton wachsend. Bezeichne  $g : f(I) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  die Umkehrfunktion, die unter diesen Umständen auch streng monoton wachsen muß. Gegeben  $p \in f(I)$  müssen wir für jede Umgebung  $U$  von  $g(p)$  eine Umgebung  $U'$  von  $p$  finden mit der Eigenschaft  $g(U' \cap f(I)) \subset U$ . Wir unterscheiden drei Fälle: Ist das Definitionsintervall  $I$  unserer Ausgangsfunktion  $f$  eine Umgebung von  $g(p)$ , so umfaßt jede Umgebung  $U$  von  $g(p)$  ein Intervall der Gestalt  $(a, b)$  mit  $a < g(p) < b$  und  $a, b \in I$  und wir können schlicht  $U' = (f(a), f(b))$  nehmen. Besteht  $I$  nur aus einem einzigen Punkt, so ist eh alles klar. Besteht schließlich  $I$  aus mehr als einem Punkt und ist  $g(p)$  eine seiner Grenzen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sein Supremum, so umfaßt jede Umgebung  $U$  von  $g(p)$  ein Intervall der Gestalt  $(a, g(p)]$  mit  $a \in I$  und wir können  $U' = (f(a), \infty]$  nehmen.  $\square$

*Beispiel 3.2.5.* Wenden wir unseren Satz an auf die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ , so finden wir insbesondere, daß das Wurzelziehen

$$[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

eine stetige Funktion ist. Da sich die Funktion  $x \mapsto x^2$  zu einer streng monotonen Bijektion  $[0, \infty] \xrightarrow{\sim} [0, \infty]$  fortsetzen läßt durch die Vorschrift  $\infty \mapsto \infty$ , läßt sich nach unserem Satz die Wurzelfunktion durch die Vorschrift  $\infty \mapsto \infty$  zu einer stetigen Bijektion  $[0, \infty] \xrightarrow{\sim} [0, \infty]$  fortsetzen. Analoges gilt für höhere Wurzeln, nur haben wir bis jetzt noch nicht bewiesen, daß wir solche höheren Wurzeln auch tatsächlich aus jeder nichtnegativen reellen Zahl ziehen können. Das folgt erst aus dem Zwischenwertsatz, den wir im Anschluß behandeln.

**Satz 3.2.6 (Zwischenwertsatz).** Für  $a \leq b$  aus  $\overline{\mathbb{R}}$  nimmt eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.



Illustration zum Zwischenwertsatz. Im vorliegenden Fall wird der gegebene Zwischenwert  $z$  sogar dreimal als Funktionswert angenommen. Unser erster Beweis führt stets zum hier eingezeichneten größten  $p \in [a, b]$ , an dem  $z$  als Funktionswert angenommen wird.

*Erster Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f(a) \leq f(b)$  annehmen. Gegeben  $z \in [f(a), f(b)]$  suchen wir  $p \in [a, b]$  mit  $f(p) = z$ . Wir betrachten dazu

$$p = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq z\}$$

und behaupten  $f(p) = z$ . Um das zu zeigen führen wir die Annahmen  $f(p) < z$  und  $z < f(p)$  beide zum Widerspruch: Aus  $f(p) < z$  folgte zunächst  $p < b$ , und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein  $p'$  mit  $p < p' < b$  und  $f(p') \leq z$  und  $p$  wäre gar keine obere Schranke unserer Menge gewesen. Aus  $z < f(p)$  folgte zunächst  $a < p$ , und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein  $p'$  mit  $a < p' < p$  und  $z < f(x)$  für alle  $x \in [p', p]$ . Also wäre auch  $p'$  schon eine obere Schranke unserer Menge und  $p$  könnte nicht ihre kleinste obere Schranke gewesen sein.  $\square$

*Zweiter Beweis für den Fall  $a, b \in \mathbb{R}$ .* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f(a) \leq f(b)$  annehmen. Gegeben  $z \in [f(a), f(b)]$  suchen wir  $p \in [a, b]$  mit  $f(p) = z$ . Dazu nehmen wir den Mittelpunkt  $m_0$  unseres Intervalls her und werten unsere Funktion dort aus. Gilt  $f(m_0) \geq z$ , so setzen wir  $a_1 = a$  und  $b_1 = m_0$ . Sonst setzen wir  $a_1 = m_0$  und  $b_1 = b$ . In jedem Fall gilt  $f(a_1) \leq z \leq f(b_1)$ . Anschließend nehmen wir den Mittelpunkt  $m_1$  des nur noch halb so großen Intervalls  $[a_1, b_1]$  her und verfahren genauso. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge  $a = a_0, a_1, \dots$  und eine monoton fallende Folge  $b = b_0, b_1, \dots$  mit  $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$  und  $f(a_n) \leq z \leq f(b_n)$  und für alle  $n$ . Unsere beiden Folgen müssen also konvergieren, und zwar gegen denselben Grenzwert  $p \in [a, b]$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  und der Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert nach 3.3.18 folgt dann

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq z \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(p)$$

und damit  $z = f(p)$  wie gewünscht. Dieser Beweis hat den Nachteil, nur für  $a, b \in \mathbb{R}$  zu funktionieren und bereits im Vorgriff die in diesem Text erst in 3.3.18 bewiesenen Sätze über die Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und dem Anwenden stetiger Funktionen zu verwenden. Dafür hat er den Vorteil, einen auch in der Praxis gangbaren Lösungsalgorithmus zu beschreiben, das sogenannte **Intervallhalbierungsverfahren**.  $\square$

**Korollar 3.2.7 (Abstrakter Zwischenwertsatz).** *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist ein Intervall. Ist also in Formeln  $I \subset \overline{\mathbb{R}}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig, so ist auch  $f(I)$  ein Intervall.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus 3.2.6.  $\square$

**Satz 3.2.8 (über die Umkehrfunktion).** Ist  $I \subset \overline{\mathbb{R}}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  streng monoton und stetig, so ist auch  $f(I) \subset \overline{\mathbb{R}}$  ein Intervall und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist streng monoton und stetig.

*Beweis.* Dieser Satz ist nur die Zusammenfassung des abstrakten Zwischenwertsatzes 3.2.7 mit der Proposition 3.2.2 über die Stetigkeit der Umkehrfunktion.  $\square$

**Definition 3.2.9.** Für  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 1$  definieren wir die  **$q$ -te Wurzel**

$$\sqrt[q]{\phantom{x}} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

als die Umkehrfunktion zur  $q$ -ten Potenzfunktion  $x \mapsto x^q$ . Nach 3.2.2 ist  $x \mapsto \sqrt[q]{x}$  stetig.

*Ergänzende Übung 3.2.10.* Sei  $\sum a_k$  eine Reihe. Man zeige das **Wurzelkriterium**: Gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ , so konvergiert die Reihe  $\sum a_k$  absolut. Hinweis: Analog zum Beweis des Quotientenkriteriums. Meiner Erfahrung nach ist dies Kriterium in der Praxis selten von Nutzen, da es meist auf schwer zu bestimmende Grenzwerte führt.

**Definition 3.2.11.** Aus dem Zwischenwertsatz folgt  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ , denn wir haben offensichtlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \infty$  und damit  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \exp(n) = 0$  nach 2.1.29. Wir können also den (**natürlichen**) **Logarithmus** einführen als die Umkehrfunktion

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion,  $\log(\exp(x)) = x$ , und erhalten aus Satz 3.2.8 die Stetigkeit des Logarithmus. In der französischen Literatur bezeichnet man diese Funktion auch als **logarithme népérien** in Erinnerung an den schottischen Mathematiker John Napier, der die ersten Logarithmentafeln aufstellte.

3.2.12. Die Exponentialfunktion liefert nach 2.6.8 und 3.2.11 einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe aller positiven reellen Zahlen. Daraus folgt sofort

$$\log(xy) = \log x + \log y \text{ und } \log(e) = 1$$

*Übung 3.2.13.* Man folgere  $\log(1) = 0$ ,  $\log(x^{-1}) = -\log(x)$ ,  $\log(x^n) = n \log(x)$  und  $\log(\sqrt[q]{x}) = \frac{1}{q} \log(x)$ .



Die Graphen von Logarithmus und Exponentialfunktion gehen wie immer bei Umkehrfunktionen durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen  $x = y$  auseinander hervor.

3.2.14. Die Notation “log” ist leider nicht universell. Auf vielen Taschenrechnern und auch in älteren Büchern wird unsere Funktion “log” notiert als “ln” für “logarithmus naturalis” oder “logarithme Néperien” und das Kürzel “log” steht für den “Logarithmus zur Basis 10”, den wir in 3.2.17 einführen und mit  $\log_{10}$  bezeichnen werden. Der Logarithmus zur Basis 10 wird in manchen Quellen auch der “Brigg’sche Logarithmus” genannt und mit “lg” bezeichnet. Die Norm ISO 31-11 empfiehlt die Notationen “ln” und “lg”, wir verwenden jedoch  $\log$  statt  $\ln$ , weil das in der reinen Mathematik so üblich ist und wir damit der Konvention folgen, spezielle Funktionen nach Möglichkeit mit Kürzeln aus drei Buchstaben zu notieren. “Logarithmus” ist das griechische Wort für “Rechnung”, und für das Rechnen waren die Logarithmentafeln, in denen die Werte des Logarithmus zur Basis Zehn aufgelistet wurden, auch außerordentlich praktisch: Mit ihrer Hilfe konnte man nämlich Divisionen in Subtraktionen verwandeln und Wurzelziehen in Divisionen, wie wir gleich näher ausführen. Die Entdeckung der Logarithmen und die ersten Logarithmentafeln von Napier bedeuteten für die damalige Wissenschaft eine ungeheure Arbeitserleichterung und wurden begeistert begrüßt.

**Definition 3.2.15 (Allgemeine Potenzen).** Gegeben  $a, x \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  setzen wir

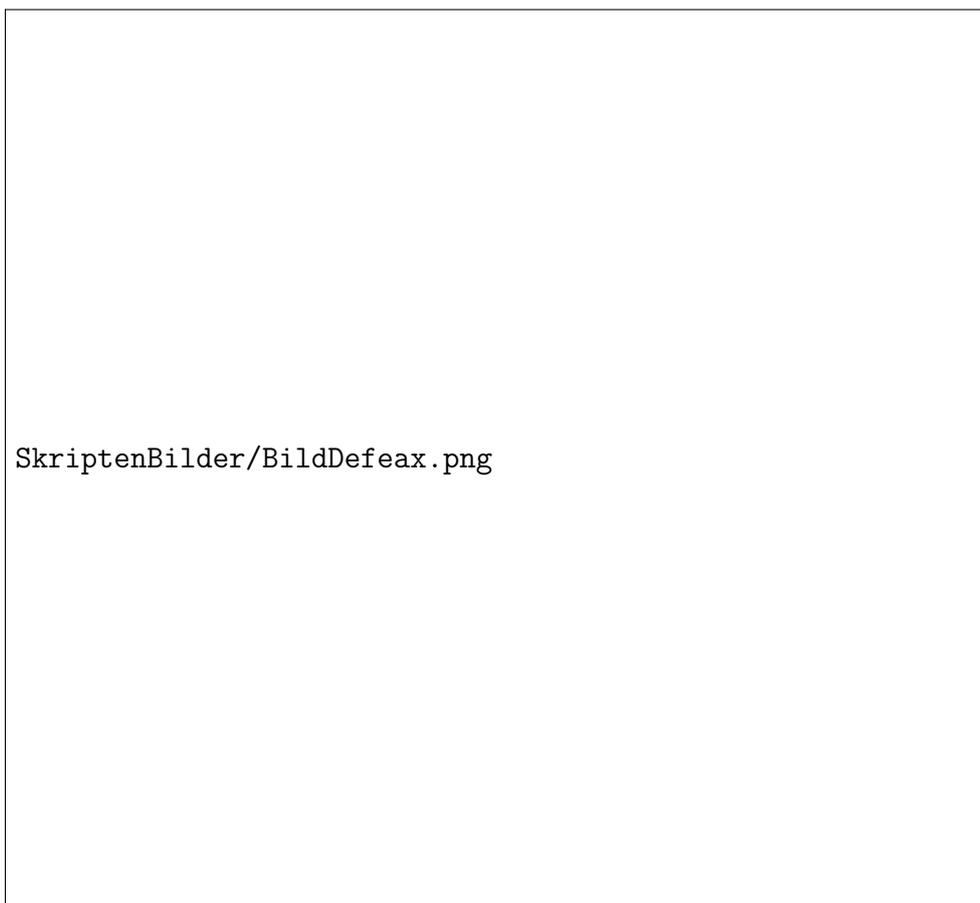
$$a^x := \exp(x \log a)$$

Im Fall  $x > 0$  vereinbart man zusätzlich  $0^x = 0$ . Das führt dazu, daß für  $x > 0$  die Funktion  $a \mapsto a^x$  sogar stetig ist auf  $[0, \infty)$ . Es führt allerdings auch dazu, daß die Funktion  $x \mapsto 0^x$  mit unserer Konvention  $0^0 = 1$  zwar auf  $[0, \infty)$  definiert aber bei  $x = 0$  *nicht* stetig ist. Damit müssen wir nun weiterleben.

3.2.16. Man prüft ohne Schwierigkeiten die Formeln  $a^0 = 1$ ,  $a^1 = a$  und  $a^{x+y} = a^x a^y$  und folgert insbesondere, daß im Fall  $a > 0$  und  $n \in \mathbb{Z}$  oder  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  das hier definierte  $a^n$  übereinstimmt mit unserem  $a^n$  aus der Tabelle am Ende von Abschnitt 1.1. Für beliebige  $a, b > 0$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  prüft man leicht die Rechenregeln  $a^{xy} = (a^x)^y$ ,  $(ab)^x = a^x b^x$  und  $\log(a^x) = x \log a$ . Ist speziell  $a = e$  die Euler’sche Zahl, so gilt  $\log e = 1$  und folglich  $\exp(x) = e^x$ . Für beliebige  $a, b \geq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 1$  prüft man ebensoleicht die Rechenregeln  $a^{xy} = (a^x)^y$ ,  $(ab)^x = a^x b^x$  und  $\sqrt[q]{a} = a^{1/q}$ .

**Definition 3.2.17.** Gegeben  $a > 0$  nennt man die Umkehrabbildung der Abbildung  $x \mapsto a^x$  auch den **Logarithmus zur Basis  $a$**

$$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$



Dieses Bild stellt den unangenehm verzwickelten Bereich aller  $(x, a) \in \mathbb{R}^2$  dar, für die  $a^x$  definiert ist: Bei  $x \in \mathbb{N}$  sind das jeweils alle  $a \in \mathbb{R}$ , bei ganzzahligem  $x \in \mathbb{Z}_{<0}$  nur alle  $a \in \mathbb{R}^\times$ , bei reellem nichtganzen  $x > 0$  alle  $a \geq 0$ , bei reellem nichtganzen  $x < 0$  alle  $a > 0$ . Unangenehm ist die Unstetigkeitsstelle am Ursprung, auf der senkrechten Koordinatenachse ist ja nun unsere Funktion konstant Eins und auf der positiven waagerechten Koordinatenachse konstant Null. Diese Unstetigkeitsstelle ist aber auch die Einzige.

3.2.18. Der natürliche Logarithmus ist also der Logarithmus mit der Euler'schen Zahl  $e$  als Basis, in Formeln  $\log = \log_e$ . Der Logarithmus zur Basis  $a$  läßt sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken vermittels der Formel  $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ . Man kommt deshalb meist mit dem natürlichen Logarithmus aus. Die Notation  $\log_a$  ist konform mit der Norm ISO 31-11, in der zusätzlich auch noch die Abkürzung  $\log_2 = \text{lb}$  für den **binären Logarithmus** empfohlen wird.

*Ergänzende Übung 3.2.19.* Seien  $a \leq b$  aus  $\overline{\mathbb{R}}$  gegeben und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(b) = 0$ . Man zeige, daß dann  $f$  eine kleinste Nullstelle in  $[a, b]$  hat.

*Übung 3.2.20.* Jede Polynomfunktion  $x \mapsto a_n x^n + \dots + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Ist  $a_n > 0$  und  $a_0 > 0$ , so besitzt sie sogar mindestens eine negative Nullstelle.

*Übung 3.2.21.* Man zeige für  $a > 0$  die Identität  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt[n]{a}) = \log a$ .

*Beispiel 3.2.22.* Bei einem radiokativen Material wird nach einem Tag nur noch 90% der Strahlungsaktivität gemessen. Wie lange dauert es, bis die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist? Nun, halten wir einen Referenzzeitpunkt beliebig fest, so wird die Aktivität nach Vergehen einer Zeitspanne  $\tau$  gemäß Überlegungen wie in 2.6.4 gegeben durch eine Formel der Gestalt  $M e^{c\tau}$  mit unbekanntem  $M$  und  $c$ . Wir kürzen die Zeiteinheit "Stunde" ab mit dem Buchstaben  $h$  für lateinisch "hora". Formal ist  $h$  eine Basis des in 1.1.2.7 angedachten eindimensionalen reellen Vektorraums "aller Zeitspannen", und formal ist auch  $M$  ein Element eines gedachten eindimensionalen reellen Vektorraums "aller Strahlungsaktivitäten" und  $c$  liegt im Raum der Linearformen auf dem Raum aller Zeitspannen, in dem wir mit  $h^{-1}$  dasjenige Element bezeichnen werden, das auf  $h$  den Wert Eins annimmt. So formal will ich hier aber eigentlich gar nicht werden und schreibe das Auswerten solch einer Linearform auf einer Zeitspanne schlicht als Produkt. Für  $\tau = 24 h$  wissen wir nun nach unserer Messung  $M e^{c \cdot 24 h} = \frac{90}{100} M$  und damit  $c = ((\log 9/10)/24) h^{-1}$ . Bezeichnet  $t$  die Zeitspanne, nach der die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist, so haben wir also  $M e^{ct} = M/2$  alias  $ct = -\log 2$  und damit

$$t = -\frac{\log 2}{c} = \frac{-\log(2) \cdot 24}{\log(9/10)} h$$

*Ergänzende Übung 3.2.23.* Das eingestrichene A liegt bei 440 Herz. Bei wieviel Herz etwa liegt das eingestrichene F? Hinweis: Die Lösung dieser Aufgabe benötigt zusätzlich zu mathematischen Kenntnissen auch physikalische und musikalische Vorkenntnisse.

*Ergänzung* 3.2.24. Versteht man eine positive reelle Zahl als das Verhältnis zweier gleichartiger Größen, so sagt man für den Zehnerlogarithmus besagter Zahl auch, er “drücke das Verhältnis in **Bel** aus”. Diese Sprechweise ehrt Alexander Graham Bell, der das Telephon einführte. So könnte man etwa sagen, das Verhältnis von Gramm zu Kilo betrage 3 Bel, statt von einem Verhältnis von Eins zu Tausend alias 1 zu  $10^3$  zu reden. Das Verhältnis von Kilo zu Tonne beträgt natürlich auch 3 Bel, und das Verhältnis von Gramm zu Tonne folglich 6 Bel. Häufig redet man auch von **Dezibel** alias “zehntel Bel”. Das ist jedoch “multiplikativ” zu verstehen, ein Verhältnis von 1 Dezibel meint also ein Verhältnis von Eins zu  $\sqrt[10]{10} \approx 1,26$ .

*Ergänzung* 3.2.25. Physikalisch beschreibt man eine Lautstärke durch die Leistung, die sie etwa an einer Membran verrichtet. Gibt man eine Lautstärke in Dezibel an, so ist allerdings das Verhältnis des Quadrats dieser Leistung zum Quadrat der Leistung einer Standardlautstärke gemeint. Diese Standardlautstärke ist so vereinbart, daß sie etwa bei der Hörschwelle eines menschliches Ohrs liegt. Eine Lautstärke von Null Dezibel bedeutet also, daß ein gesunder Mensch das Geräusch so gerade noch hören kann, und jede Erhöhung einer Lautstärke um zwanzig Dezibel bedeutet, daß das Ohr zehnmal soviel Leistung aufnehmen wird. Bei einer Erhöhung um zehn Dezibel wird das Ohr also  $\sqrt{10} \approx 3$  mal soviel Leistung aufnehmen.

### 3.3 Grenzwerte von Funktionen

**Definition 3.3.1.** Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  heißt ein **Häufungspunkt von  $D$  in  $\overline{\mathbb{R}}$**  genau dann, wenn jede Umgebung von  $p$  mindestens einen von  $p$  verschiedenen Punkt mit  $D$  gemeinsam hat. Diejenigen Punkte von  $D$ , die keine Häufungspunkte von  $D$  sind, nennt man **isolierte Punkte von  $D$** .

*Ergänzung* 3.3.2. Ich finde es verwirrend, daß ein Häufungspunkt von  $D$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  nicht notwendig ein Punkt von  $D$  zu sein braucht. Ich will jedoch unter einem **Häufungspunkt von  $D$  stets einen Häufungspunkt von  $D$  in  $\overline{\mathbb{R}}$**  verstehen, der auch tatsächlich in  $D$  liegt. Wenn ich das besonders betonen will, rede ich von einem **internen Häufungspunkt von  $D$** . Manche Autoren erklären zusätzlich noch die “Häufungspunkte einer Folge” als die Punkte aus  $\overline{\mathbb{R}}$  mit der Eigenschaft, daß in jeder ihrer Umgebungen unendlich viele Folgenglieder liegen.

*Beispiele* 3.3.3. Die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  besteht aus isolierten Punkten und hat in  $\mathbb{R}$  keine Häufungspunkte. In  $\overline{\mathbb{R}}$  hat sie jedoch die beiden Häufungspunkte  $\pm\infty$ . In einem halboffenen, d.h. nicht aus einem einzigen Punkt bestehenden Intervall von  $\overline{\mathbb{R}}$  ist jeder Punkt ein Häufungspunkt.

3.3.4. Wir vereinbaren für die Differenz einer Menge  $X$  und einer einpunktigen Menge  $\{p\}$  die abkürzende Schreibweise  $X \setminus \{p\} = X \setminus p$ .

*Übung 3.3.5.* Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge. Genau dann ist  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  Häufungspunkt von  $D$ , wenn es eine Folge reeller Zahlen  $x_n$  in  $D \setminus p$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ .

**Definition 3.3.6 (Grenzwerte von Funktionen).** Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge,  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f : D \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Sei  $b$  ein weiterer Punkt aus  $\overline{\mathbb{R}}$ . Wir sagen,  $f(x)$  **strebt gegen  $b$  für  $x \rightarrow p$**  und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung  $W$  des Grenzwerts  $b$  eine Umgebung  $W'$  des Punktes  $p$  gibt mit  $f(W' \cap D \setminus p) \subset W$ .

3.3.7. Man beachte, wie elegant es gelingt, hier die Fälle  $\pm\infty$  mithilfe des Umgebungsbegriffs einzubinden. Natürlich reicht es auch hier wieder, die Existenz von  $W'$  für jedes  $W$  aus einer Umgebungsbasis des Grenzwerts  $b$  nachzuweisen. Ist  $f$  auf ganz  $D$  definiert, so meinen wir mit obiger Notation stets implizit den Grenzwert der Einschränkung von  $f$  auf  $D \setminus p$ . Der Grund dafür, daß wir Grenzwerte nur an Häufungspunkten erklären, ist das folgende Lemma.

*Beispiele 3.3.8.* Es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ , wir können ja in diesem Fall schlicht  $W' = W$  nehmen. Für eine konstante Funktion  $f(x) = c$  gilt  $\lim_{x \rightarrow p} c = c$ , hier können wir für jedes  $W$  einfach  $W' = \overline{\mathbb{R}}$  nehmen. Für  $D = \mathbb{N}$  und  $p = \infty$  spezialisiert der eben eingeführte Grenzwertbegriff zu unserem Grenzwertbegriff für Folgen aus 2.1.16.

**Lemma 3.3.9 (Eindeutigkeit des Grenzwerts).** Seien  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge,  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f : D \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. So folgt aus  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$  und  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  bereits  $a = b$ .

*Beweis.* Durch Widerspruch. Wäre  $a \neq b$ , so gäbe es Umgebungen  $V$  von  $a$  und  $W$  von  $b$  mit  $V \cap W = \emptyset$ . Wir fänden Umgebungen  $V'$  und  $W'$  von  $p$  mit  $f(V' \cap D \setminus p) \subset V$  und  $f(W' \cap D \setminus p) \subset W$ , mithin gälte

$$f(V' \cap W' \cap D \setminus p) = \emptyset$$

Da aber  $V' \cap W'$  eine Umgebung von  $p$  ist und  $p$  ein Häufungspunkt von  $D$  gilt notwendig  $V' \cap W' \cap D \setminus p \neq \emptyset$ . Dieser Widerspruch beendet den Beweis.  $\square$



Der Grenzwert oder Limes einer Funktion mit einer “Fehlstelle” in ihrem Definitionsbereich ist, wenn er existiert, der Wert an der fraglichen Fehlstelle der einzig möglichen dort stetigen Fortsetzung.

3.3.10. Der Grenzwert einer Funktion für  $x \rightarrow p$  hängt nur von ihrem Verhalten in einer Umgebung von  $p$  ab. Ist genauer  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  Häufungspunkt einer Teilmenge  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  und  $f : D \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion und  $U$  eine Umgebung von  $p$ , so existiert  $\lim_{x \rightarrow p} f$  genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow p} f|_{U \cap D \setminus p}$  existiert, und unter diesen Umständen stimmen die beiden Grenzwerte überein.

**Proposition 3.3.11 (Grenzwerte und Stetigkeit).** Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und  $p \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f : D \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Genau dann gilt  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  für ein  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ , wenn die Fortsetzung von  $f$  auf  $D$  durch  $f(p) = b$  stetig ist bei  $p$ .

*Beweis.* Das folgt sofort aus unseren Definitionen 3.1.3 und 3.3.6.  $\square$

3.3.12. In anderen Worten ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig bei einem Häufungspunkt  $p \in D$  von  $D$  genau dann, wenn gilt  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ . Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Funktion mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung heißt dann der Grenzwert unserer Funktion an besagter Stelle.

*Beispiel 3.3.13.* Wir zeigen  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ . In der Tat, für jede Umgebung  $W$  von 0 gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset W$ , und nehmen wir als Umgebung  $W'$  von  $\infty$  die Menge  $W' = (1/\varepsilon, \infty]$ , so gilt offensichtlich  $x \in W' \Rightarrow 1/x \in W$ . Alternativ können wir auch wie folgt argumentieren: Die Funktion  $[0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  mit  $x \mapsto 1/x$  für  $0 < x < \infty$  und  $0 \mapsto \infty$  und  $\infty \mapsto 0$  ist streng monoton, deshalb ist nach 3.2.2 ihre Umkehrfunktion stetig. Die Umkehrfunktion fällt aber in diesem Fall mit der Funktion selbst zusammen. Also ist unsere Funktion stetig und mit 3.3.11 folgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ .

*Übung 3.3.14 (Rechenregeln für Grenzwerte).* Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und  $p \in D$  ein Häufungspunkt und seien  $f, g : D \setminus p \rightarrow \mathbb{R}$  reellwertige Funktionen mit reellen Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  und  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = c$ . So gilt  $\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = b + c$  und  $\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = bc$ .

*Übung 3.3.15 (Quetschlemma).* Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und  $p \in D$  ein Häufungspunkt und seien  $f, g, h : D \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Funktionen mit  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  für alle  $x \in D \setminus p$ . So folgt aus  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$  schon  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$ .

*Beispiel 3.3.16.* Aus dem Quetschlemma 3.3.15 und der Darstellung von  $e^x$  durch die Exponentialreihe folgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ . Aus 3.3.11 und 3.2.2 folgt dann  $\lim_{y \rightarrow \infty} \log y = \infty$ . Das Quetschlemma mit der Darstellung von  $e^x$  durch die Exponentialreihe liefert auch  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x/e^x) = 0$  und durch Substitution  $x = \log y$  und 3.3.11 und 3.1.6 folgt dann  $\lim_{y \rightarrow \infty} (\log y/y) = 0$ .

*Übung 3.3.17.* Man zeige  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^a/b^x) = 0$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  und  $b > 1$ . Man zeige  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x/x^c) = 0$  für alle  $c > 0$ . Man zeige  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Man zeige

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(5n)!}{(n!)^5}} = 5^5$$

3.3.18. Das Anwenden einer stetigen Funktion vertauscht mit der Grenzwertbildung. Ist genauer  $E \subset \overline{\mathbb{R}}$  und ist  $q \in E$  ein Häufungspunkt von  $E$  und  $g : E \setminus q \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion mit Bild in  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  und existiert  $\lim_{x \rightarrow q} g(x) = p$  und liegt auch in  $D$  und ist  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig bei  $p$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow q} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow q} g(x)\right)$$

Wir erhalten diese Aussage mithilfe von 3.3.11 als direkte Konsequenz aus der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 3.1.6. Speziell folgt für jede Funktion  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die stetig ist bei einer Stelle  $p \in D$ , und jede Folge  $a_n$  in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$  bereits  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(p)$ .

3.3.19. Man folgert so zum Beispiel die Vertauschbarkeit 2.1.44 von Grenzwertbildung und Absolutbetrag aus der Stetigkeit des Absolutbetrags und die Vertauschbarkeit 2.1.36.2 von Grenzwertbildung mit Kehrwerten aus der Stetigkeit der Abbildung  $x \mapsto 1/x$ .

*Beispiel 3.3.20.* Für alle  $a > 0$  folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und indem man für ein logisch vollständiges Argument die folgende Gleichungskette von hinten nach vorne liest

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \log a\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a\right) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.3.21. Es gibt noch weitere Möglichkeiten, aus dem Zusammenhang zwischen Grenzwert und Stetigkeit 3.3.11 sowie der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 3.1.6 ähnliche Aussagen abzuleiten. Zusammen mit der bereits als 3.3.18 ausführlicher besprochenen Aussage erhält man so insbesondere die drei Implikationen

$$\begin{aligned} (\lim_{x \rightarrow q} g(x) = p \text{ und } f \text{ stetig bei } p) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow q} f(g(x)) = f(p) \\ (g \text{ stetig bei } q \text{ und } \lim_{y \rightarrow g(q)} f(y) = b) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow q} f(g(x)) = b \\ (\lim_{x \rightarrow q} g(x) = p \text{ und } \lim_{y \rightarrow p} f(y) = b) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow q} f(g(x)) = b \end{aligned}$$

*Übung 3.3.22 (Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert).* Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge und  $p \in D$  ein Häufungspunkt und seien  $f, g : D \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  zwei Funktionen, die Grenzwerte besitzen für  $x \rightarrow p$ . Gilt  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in D \setminus p$ , so folgt  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ .

*Übung 3.3.23.* Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad  $\leq n$  gegebene Funktion  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  und ein  $p \in \mathbb{R}$  die Formel  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)/(x-p)^n = 0$ , so folgt  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ . Hinweis: Durch Verschieben kann man sich auf den Fall  $p = 0$  zurückziehen.

**Definition 3.3.24.** Eine besondere Notation vereinbaren wir für den Fall einer Funktion  $f : (a, b) \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $p \in (a, b)$ , wenn wir den Grenzwert für  $x \rightarrow p$  ihrer Restriktion auf  $(a, p)$  oder auf  $(p, b)$  untersuchen wollen. Wir sprechen dann vom **linkseitigen** bzw. vom **rechtseitigen Grenzwert** und notieren diese Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow p} f|_{(a,p)} = \lim_{x \nearrow p} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow p} f|_{(p,b)} = \lim_{x \searrow p} f(x)$$

In diesem Fall existiert der Grenzwert genau dann, wenn der linkseitige Grenzwert und der rechtseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen, wie man leicht aus den Definitionen folgert.

*Beispiel 3.3.25.* Es gilt  $\lim_{x \searrow 0} 1/x = \infty$  und  $\lim_{x \nearrow 0} 1/x = -\infty$ .

**Satz 3.3.26 (Einparameteruntergruppen von  $\mathbb{R}$ ).** Die stetigen Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in sich selber sind genau die Abbildungen  $x \mapsto \lambda x$  für beliebiges aber festes  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit  $F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Es reicht zu zeigen, daß  $F$  die Gleichung  $F(x) = xF(1)$  erfüllt. Auch ohne die Stetigkeit von  $F$  zu benutzen, folgern wir  $F(q) = qF(1)$  zunächst für alle  $q \in \mathbb{N}$ , dann für alle  $q \in \mathbb{Z}$ , dann für alle  $q \in \mathbb{Q}$ . Um unsere Gleichung  $F(x) = xF(1)$  sogar für alle  $x \in \mathbb{R}$  zu zeigen, wählen wir eine Folge  $q_n$  von rationalen Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$  und erhalten  $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n F(1) = xF(1)$ , also  $F(x) = \lambda x$  für  $\lambda = F(1)$ .  $\square$

**Satz 3.3.27 (Einparameteruntergruppen von  $\mathbb{R}^\times$ ).** Die stetigen Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$  von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die Abbildungen  $x \mapsto a^x$  für beliebiges aber festes  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

*Beweis.* Ist  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$  ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit  $G(x+y) = G(x)G(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ , so bildet  $G$  nach 1.3.4.13 notwendig das neutrale Element auf das neutrale Element ab, in Formeln  $G(0) = 1$ . Mit dem Zwischenwertsatz folgt  $G(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Damit können wir den Gruppenhomomorphismus  $F = \log \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bilden und aus 3.3.26 folgt sofort  $F(x) = xF(1)$ , also  $G(x) = \exp(F(x)) = \exp(xF(1)) = \exp(x \log G(1))$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 3.3.28.* Die monotonen Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$  von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die stetigen Gruppenhomomorphismen, also genau die Abbildungen  $x \mapsto a^x$  für festes  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Satz 3.3.29 (Stetigkeit als Folgenstetigkeit).** *Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$  ein Punkt. So sind gleichbedeutend:*

1.  $f$  ist stetig bei  $a$ .
2. Für jede Folge  $a_0, a_1, \dots$  von Punkten aus  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ .

*Bemerkung 3.3.30.* Die in diesem Satz gegebene Charakterisierung der Stetigkeit wird vielfach sogar als Definition derselben gewählt. Das ist auch der Grund, warum ich den Satz bereits hier beweise, obwohl er im weiteren Verlauf der Vorlesung erst sehr viel später eine Rolle spielen wird.

*Beweis.*  $1 \Rightarrow 2$  haben wir schon in 3.3.18 erledigt, wir konzentrieren uns deshalb auf  $2 \Rightarrow 1$ . Das zeigen wir durch Widerspruch. Für unser  $a \in \mathbb{R}$  finden wir nach 2.1.42 eine absteigende Folge von Umgebungen  $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$  derart, daß jede Umgebung  $V$  von  $a$  fast alle  $V_n$  umfaßt. Ist  $f$  nicht stetig bei  $a$ , so gibt es eine Umgebung  $U$  von  $f(a)$  derart, daß für kein  $n$  gilt  $f(V_n \cap D) \subset U$ . Für jedes  $n$  finden wir also  $a_n \in V_n \cap D$  mit  $f(a_n) \notin U$ . Die  $a_n$  bilden dann eine Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , für die nicht gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 3.3.31.* Man finde alle stetigen Funktionen  $G : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G(xy) = G(x) + G(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^\times$ , also alle stetigen Gruppenhomomorphismen von der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen in die additive Gruppe aller reellen Zahlen.

*Ergänzende Übung 3.3.32.* Man zeige, daß die Aussage der vorhergehenden Sätze 3.3.26 und 3.3.27 sogar folgt, wenn wir von unseren Gruppenhomomorphismen nur die Stetigkeit bei Null fordern.

*Ergänzende Übung 3.3.33.* Sei  $L \subset \mathbb{R}$  eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ohne reelle Häufungspunkte. So gibt es  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $L = \mathbb{Z}\alpha$ .

*Übung 3.3.34.* Sei  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  eine Teilmenge,  $p \in D$  ein Häufungspunkt und  $f : D \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. So gilt  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  genau dann, wenn für jede Folge  $x_n$  in  $D \setminus p$  mit  $x_n \rightarrow p$  gilt  $f(x_n) \rightarrow b$ .

### 3.4 Stetige Funktionen auf Kompakta

**Definition 3.4.1.** Man nennt eine Teilmenge  $K \subset \overline{\mathbb{R}}$  **kompakt** oder ein **Kompaktum** genau dann, wenn jede Folge in  $K$  eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus  $K$  konvergiert. Eine kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}$  heißt ein **reelles Kompaktum**.

3.4.2. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.2.9 sieht man leicht, daß die kompakten Intervalle in  $\overline{\mathbb{R}}$  genau die Intervalle der Gestalt  $[a, b]$  mit  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  sind.

**Satz 3.4.3 (Extremwerte auf Kompakta).** *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren Kompaktum nimmt das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.*

3.4.4. Ist in Formeln  $K \neq \emptyset$  kompakt und  $f : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig, so gibt es demnach  $p, q \in K$  mit  $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in K$ . Ist die Funktion  $f$  reellwertig, so ist insbesondere ihr Bild beschränkt. Salopp gesprochen kann also eine stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum nicht nach Unendlich streben. Man beachte, eine wie wichtige Rolle die Endpunkte eines Intervalls hier spielen: Eine stetige reellwertige Funktion auf einem offenen Intervall kann ja durchaus nach Unendlich streben, wie etwa die Funktion  $x \mapsto (1/x)$  auf dem Intervall  $(0, 1)$ .

*Beweis.* Da  $K$  nicht leer ist, finden wir eine Folge  $x_n$  in  $K$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup f(K)$ . Diese Folge besitzt nun nach Annahme eine Teilfolge, die gegen einen Punkt  $q$  aus  $K$  konvergiert. Indem wir zu dieser Teilfolge übergehen dürfen wir sogar annehmen, unsere Folge sei selbst schon konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ . Mit 3.3.29 folgt dann

$$f(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup f(K)$$

Die Existenz von  $p \in K$  mit  $f(p) = \inf f(K)$  zeigt man analog. □

*Übung 3.4.5.* Jede endliche Vereinigung von Kompakta ist kompakt.

*Übung 3.4.6.* Das Bild eines Kompaktums unter einer stetigen Abbildung ist stets auch wieder kompakt.

**Definition 3.4.7.** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  eine Menge von reellen Zahlen. Eine reellwertige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig stetig** genau dann, wenn folgende Aussage richtig ist: Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  derart, daß für alle  $x, y \in D$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

3.4.8. Bei der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit kommt es wesentlich auf den Definitionsbereich  $D$  an. Da wir Funktionen vielfach angeben, ohne ihren Definitionsbereich explizit festzulegen, ist es in diesem Zusammenhang oft sinnvoll, den jeweils gemeinten Definitionsbereich zu präzisieren. Dazu benutzen wir die Sprechweise  **$f$  ist gleichmäßig stetig auf  $D$** .

3.4.9. Ich will nun den Unterschied zur Stetigkeit diskutieren. Eine reellwertige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}$  heißt ja stetig bei  $p \in D$  genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$  gibt derart, daß für alle  $x \in D$  mit  $|x - p| < \delta(\varepsilon, p)$  gilt  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ . Des weiteren heißt sie stetig, wenn sie an jeder Stelle  $p \in D$  stetig ist. Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet nun, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon)$  gewählt werden kann, das es als  $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, p)$  für alle  $p \in D$  gleichzeitig tut.

*Beispiel 3.4.10.* Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  ist *nicht* gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn  $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$  kann auch für sehr kleines  $|x - y|$  noch groß sein, wenn nur  $|x + y|$  hinreichend groß ist. Die Einschränkung dieser Funktion auf ein beliebiges reelles Kompaktum ist aber daselbst gleichmäßig stetig nach dem anschließenden Satz.

**Satz 3.4.11 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta).** *Jede reellwertige stetige Funktion auf einem reellen Kompaktum ist auf besagtem Kompaktum gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Wir argumentieren durch Widerspruch und zeigen, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. Sei dazu  $K \subset \mathbb{R}$  unser Kompaktum und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  unsere Funktion. Wäre  $f$  nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , für das wir kein  $\delta > 0$  finden könnten: Wir probieren alle  $\delta = \frac{1}{n}$  und finden immer wieder  $x_n, y_n \in K$  mit  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ , für die dennoch gilt  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Gehen wir zu einer Teilfolge über, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge der  $x_n$  gegen einen Punkt von  $K$  konvergiert, in Formeln  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  mit  $x \in K$ . Damit folgt natürlich auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ . Wäre nun  $f$  stetig bei  $x$ , so folgte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

und damit lägen notwendig fast alle  $f(x_n)$  und fast alle  $f(y_n)$  im Intervall  $(f(x) - \varepsilon/2, f(x) + \varepsilon/2)$ . Das steht jedoch im Widerspruch dazu, daß ja nach



SkriptenBilder/BildGeSe.png



SkriptenBilder/BildGeSp.png

Gleichmäßige Stetigkeit für stetige Funktionen auf Intervallen kann man sich anschaulich wie folgt denken: Für eine beliebig für ein Rechteck vorgegebene Höhe  $2\varepsilon > 0$  findet man bei gleichmäßiger Stetigkeit immer eine Breite  $2\delta > 0$  derart, daß an welchen Punkt des Graphen meiner Funktion ich das Zentrum meines Rechtecks auch verschiebe, der Graph das Rechteck nie durch die Ober- oder Unterkante verläßt. So ist etwa die Wurzelfunktion gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , die Quadratfunktion jedoch nicht.

Konstruktion gilt  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$  für alle  $n$ . Wir haben also gezeigt, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann.  $\square$

### 3.5 Integration stetiger Funktionen

**Definition 3.5.1.** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres kompaktes reelles Intervall und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reellwertige Funktion. Wir definieren die Menge  $I(f) \subset \mathbb{R}$  aller "naiven Integrale zu Treppen, die unter  $f$  liegen" durch

$$I(f) := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i (a_i - a_{i-1}) \mid \begin{array}{l} \text{Alle möglichen Wahlen von } n \in \mathbb{N} \\ \text{und von Stellen } a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b \\ \text{und von Werten } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \text{ derart,} \\ \text{daß gilt } f(x) \geq c_i \text{ für alle } x \in [a_{i-1}, a_i] \end{array} \right\}$$

Da  $f$  stetig ist, hat es nach 3.4.3 einen beschränkten Wertebereich, d.h. es gibt  $m, M \in \mathbb{R}$  mit  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ . Daraus folgt, daß  $m(b-a)$  zu  $I(f)$  gehört und daß  $M(b-a)$  eine obere Schranke von  $I(f)$  ist. Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat  $I(f)$  nach 1.4.10 ein Supremum in  $\mathbb{R}$ . Wir nennen dies Supremum das **Integral der Funktion  $f$  über das Intervall  $[a, b]$**  und schreiben

$$\sup I(f) =: \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

Auf die Bedeutung dieser Notationen gehen wir in 3.5.6 ein.

3.5.2. Anschaulich mißt das Integral von  $f$  die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse, wobei Flächenstücke unterhalb der  $x$ -Achse negativ zu rechnen sind. Das Wort ist aus dem Lateinischen abgeleitet und bedeutet so etwas wie "Zusammenfassung". Der folgende Satz listet einige Eigenschaften unseres Integrals auf. Man kann leicht zeigen, daß unser Integral sogar durch diese Eigenschaften charakterisiert wird.

**Satz 3.5.3 (Integrationsregeln).** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres kompaktes Intervall.

1. Für die konstante Funktion mit dem Wert 1 gilt  $\int_a^b 1 = b - a$ .
2. Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $z \in [a, b]$  gilt  $\int_a^b f = \int_a^z f + \int_z^b f$ .
3. Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gilt  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ , in Kurzschreibweise  $f \leq g$ , so folgt  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .



Die schraffierte Fläche stellt ein Element von  $I(f)$  dar für die durch den geschwungenen Graphen dargestellte Funktion  $f$ .

4. Für  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

5. Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ .

3.5.4. Die beiden letzten Punkte bedeuten in der Sprache der linearen Algebra, daß das Integral eine Linearform auf dem reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem kompakten Intervall ist, als da heißt, eine lineare Abbildung in den Körper der reellen Zahlen.

*Beweis.* 1. Wir wissen ja schon, daß aus  $m = 1 \leq f(x) \leq 1 = M$  folgt  $b - a \leq \int_a^b f \leq b - a$ .

2. Für Teilmengen  $A, B \subset \mathbb{R}$  definiert man eine neue Teilmenge  $A + B \subset \mathbb{R}$  durch die Vorschrift  $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ . Offensichtlich gilt

$$I(f) = I(f|_{[a,z]}) + I(f|_{[z,b]})$$

Für beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen  $A, B \subset \mathbb{R}$  haben wir aber  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  nach Übung 1.4.11.

3. Aus  $f \leq g$  folgt offensichtlich  $I(f) \subset I(g)$ .

4 & 5. Um die letzten beiden Aussagen zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen. Für unsere stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und beliebiges  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  unterteilen wir unser Intervall **äquidistant**, lateinisch für "mit gleichen Abständen", durch

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r = b$$

Es gilt also  $t_i = a + i(b-a)/r$ . Wir definieren nun die  **$r$ -te Riemann-Summe**  $S^r(f) \in \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$S^r(f) := \sum_{i=1}^r f(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^r f(t_i) \left(\frac{b-a}{r}\right)$$

In der anschließenden Proposition 3.5.5 werden wir zeigen

$$\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

Damit erhalten wir dann sofort

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f + g) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (S^r(f) + S^r(g)) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} S^r f + \lim_{r \rightarrow \infty} S^r g \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g \end{aligned}$$

und ähnlich folgt  $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ . □



Die schraffierte Fläche stellt die fünfte Riemannsumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar.

**Proposition 3.5.5.** Für  $a \leq b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt  $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$ .

*Ergänzung 3.5.6.* In der Notation  $\int_a^b f(x) dx$ , die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen  $\int$  ein  $S$  wie “Summe” und  $dx$  meint die “Differenz im  $x$ -Wert”. Manchmal verwendet man auch allgemeiner für eine weitere Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit guten Eigenschaften, etwa für  $g$  die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen, die Notation  $\int f dg$ , und meint damit den Grenzwert der Summen  $\sum_{i=1}^r f(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$ , dessen Existenz in IV.3.3.1 folgende in großer Allgemeinheit diskutiert wird.

3.5.7. Man mag versucht sein, die in Proposition 3.5.5 enthaltene Beschreibung gleich als Definition des Integrals zu nehmen. Ich rate davon jedoch ab, da die Existenz des fraglichen Grenzwerts nicht so leicht zu zeigen ist, und da auch die zweite unserer Integrationsregeln 3.5.3 aus dieser Definition sehr viel schlechter herzuleiten ist.

*Beweis.* Wir definieren zusätzlich zur  $r$ -ten Riemann-Summe die  **$r$ -ten Untersummen** und **Obersummen** durch

$$\underline{S}^r(f) := \sum_{i=1}^r (\inf f[t_{i-1}, t_i]) \left(\frac{b-a}{r}\right) \quad \text{und} \quad \overline{S}^r(f) := \sum_{i=1}^r (\sup f[t_{i-1}, t_i]) \left(\frac{b-a}{r}\right)$$

und behaupten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \underline{S}^r(f) &\leq S^r(f) \leq \overline{S}^r(f) \\ \underline{S}^r(f) &\leq \int_a^b f \leq \overline{S}^r(f) \end{aligned}$$

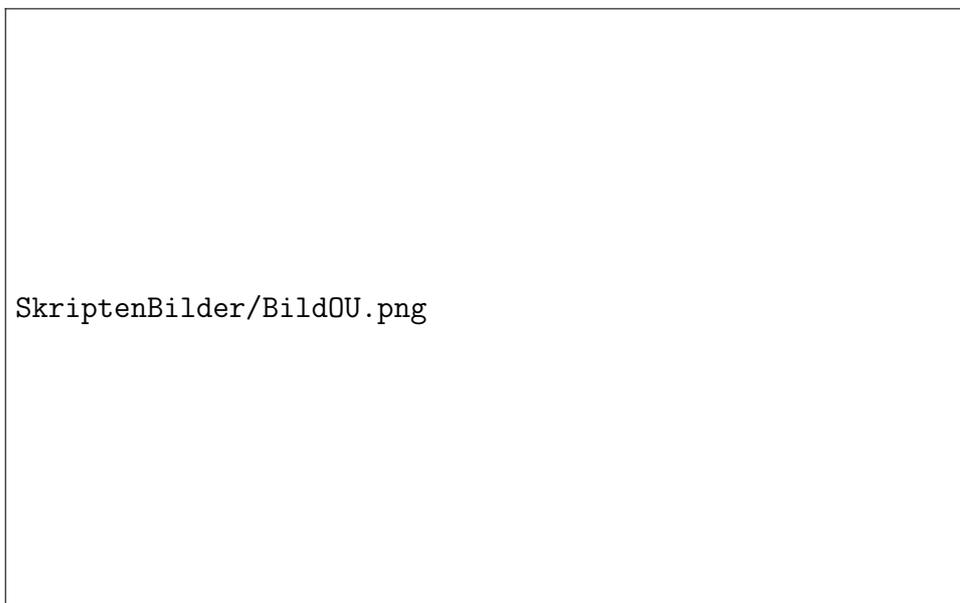
Die erste Zeile ist offensichtlich. Die zweite Zeile erhalten wir zum Beispiel, indem wir aus den bereits bewiesenen Teilen 1 und 3 des Satzes die Ungleichungen

$$(\inf f[t_{i-1}, t_i]) \left(\frac{b-a}{r}\right) \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \leq (\sup f[t_{i-1}, t_i]) \left(\frac{b-a}{r}\right)$$

folgern, diese Ungleichungen aufsummieren, und die Mitte mit dem auch bereits bewiesenen Teil 2 des Satzes zu  $\int_a^b f$  zusammenfassen. Damit sind beide Zeilen von Ungleichungen bewiesen. Nun ist  $f$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig stetig, für beliebiges  $\varepsilon > 0$  existiert also  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  mit  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Wählen wir  $N$  mit  $(\frac{b-a}{N}) < \delta$  und nehmen dann  $r \geq N$ , so schwankt unsere Funktion  $f$  auf jedem Teilintervall  $[t_{i-1}, t_i]$  höchstens um  $\varepsilon$ , mithin gilt  $0 \leq \overline{S}^r(f) - \underline{S}^r(f) \leq \varepsilon(b-a)$  und damit  $|S^r(f) - \int_a^b f| \leq \varepsilon(b-a)$ . Die Proposition ist gezeigt.  $\square$



In der Notation  $\int_a^b f(x) dx$ , die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen  $\int$  ein  $S$  wie "Summe" und  $dx$  meint die "Differenz im  $x$ -Wert".



Die schraffierte Fläche stellt die vierte Obersumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar, der kreuzweise schraffierte Teil ihre Untersumme.

$$\begin{aligned}
\text{Beispiel 3.5.8. } \int_0^b x \, dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{r} + \frac{2b}{r} + \dots + \frac{rb}{r} \right) \frac{b}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r(r+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{r^2} \quad \text{nach I.1.1.1} \\
&= \frac{b^2}{2}
\end{aligned}$$

**Lemma 3.5.9.** Für  $a \leq b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

*Beweis.* Aus  $-|f| \leq f \leq |f|$  folgt  $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$ . □

3.5.10. Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, und sind  $a, b \in I$  gegeben mit  $a > b$ , so definieren wir  $\int_a^b f(x) \, dx$  durch die Vorschrift

$$\int_a^b f(x) \, dx := - \int_b^a f(x) \, dx$$

Mit dieser Konvention gilt dann für beliebige  $a, b, c$  in einem reellen Intervall  $I$  und jede stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Formel

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

*Ergänzende Übung 3.5.11.* Sei  $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = b$  eine **Unterteilung** des kompakten reellen Intervalls  $[a, b]$ . Gegeben eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet man die Summen

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(a_i - a_{i-1})$$

mit beliebigen  $\zeta_i \in [a_{i-1}, a_i]$  als die **Riemann-Summen** von  $f$  zur vorgegebenen Unterteilung. Die maximale Länge  $\sup\{a_i - a_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$  eines Teilintervalls heißt die **Feinheit** der Unterteilung. Man zeige: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, daß alle Riemann-Summen von  $f$  zu Unterteilungen der Feinheit  $\leq \delta$  vom Integral  $\int f$  einen Abstand  $\leq \varepsilon$  haben.

*Ergänzung 3.5.12.* Allgemeiner heißt eine nicht notwendig stetige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **Riemann-integrierbar mit Integral**  $\int f$  genau dann, wenn die Bedingung vom Ende der vorhergehenden Übung erfüllt ist, daß es nämlich zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt derart, daß alle Riemann-Summen von  $f$  zu Unterteilungen der Feinheit  $\leq \delta$



Darstellung einer Riemannsumme im Sinne von [3.5.11](#).

von  $\int f$  einen Abstand  $\leq \varepsilon$  haben. Wir werden in diesem Text den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit vermeiden: Später wird eh das sehr viel stärkere Lebesgue-Integrals eingeführt, und bis dahin reicht unser Integrationsbegriff für stetige Funktionen aus.

*Ergänzende Übung 3.5.13.* Man zeige den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: Gegeben ein nichtleeres kompaktes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int f = (b-a)f(\xi)$ . Gegeben eine weitere stetige Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gibt es sogar  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int fg = f(\xi) \int g$ .

*Ergänzende Übung 3.5.14.* Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gerade** genau dann, wenn gilt  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x$ , und **ungerade** genau dann, wenn gilt  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x$ . Man zeige für jede ungerade stetige Funktion und alle reellen  $r$  die Formel  $\int_{-r}^r f = 0$ .

## 4 Differentiation und Integration

### 4.1 Differentiation

**Definition 4.1.1.** Wir nennen eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}$  **halboffen** genau dann, wenn sie mit jedem Punkt auch ein ganzes Intervall umfaßt, das besagten Punkt enthält und nicht nur aus diesem einen Punkt besteht.

4.1.2. Insbesondere ist also ein Intervall halboffen in diesem Sinne genau dann, wenn es nicht aus einem einzigen Punkt besteht. In der Literatur wird der Begriff “halboffen” meist abweichend verwendet für Intervalle, die weder offen noch kompakt sind, also für reelle Intervalle der Gestalt  $(a, b)$  oder  $[a, b)$ . Bei uns heißen jedoch auch Intervalle der Gestalt  $[a, b]$  mit  $a < b$  halboffen, da sie eben halboffen sind als Teilmengen von  $\mathbb{R}$  im Sinne der obigen Definition.

**Definition 4.1.3.** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  eine halboffene Teilmenge und  $p \in D$  ein Punkt. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b \in \mathbb{R}$**  genau dann, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch  $f'(p) = b$  oder  $\frac{df}{dx}(p) = b$  oder, wenn die Funktion  $x \mapsto f(x)$  durch einen größeren Ausdruck in  $x$  gegeben ist, durch

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=p} f(x) = b$$

4.1.4. Jede nicht vertikale, d.h. nicht zur  $y$ -Achse parallele Gerade in der Ebene ist die Lösungsmenge genau einer Gleichung der Gestalt  $y = a + bx$ . Die reelle Zahl  $b$  heißt in diesem Fall die **Steigung** unserer Gerade. Anschaulich bedeutet der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

die Steigung der Gerade durch die Punkte  $(p, f(p))$  und  $(x, f(x))$ . Diese Gerade heißt auch eine **Sekante**, lateinisch für “Schneidende”, da sie eben den Graphen unserer Funktion in den beiden besagten Punkten schneidet. Der Grenzwert  $f'(p)$  der Sekantensteigungen bedeutet anschaulich die Steigung der **Tangente**, lateinisch für “Berührende”, an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(p, f(p))$ . Die Umkehrung dieser Anschauung liefert auch eine präzise Definition besagter Tangente als der Gerade durch den Punkt  $(p, f(p))$  mit der Steigung  $f'(p)$ .



Eine Sekantensteigung und die Tangentensteigung der durch den gezahnten Graphen dargestellten Funktion

4.1.5. Wir geben noch zwei Umformulierungen der Definition der Differenzierbarkeit. Ist  $D \subset \mathbb{R}$  eine halboffene Teilmenge und  $p \in D$ , so ist nach 3.3.11 eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $f'(p) = b$  genau dann, wenn es eine Funktion  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die stetig ist bei  $p$  mit Funktionswert  $\varphi(p) = b$  derart, daß für alle  $x \in D$  gilt

$$f(x) = f(p) + (x - p)\varphi(x)$$

Anschaulich bedeutet diese Forderung, daß die sogenannte ‘‘Sekantensteigungsfunktion’’  $\varphi(x) = (f(x) - f(p))/(x - p)$  durch die Vorschrift  $\varphi(p) = b$  stetig an die Stelle  $p$  fortgesetzt werden kann. In nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b$  genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion  $\varepsilon$ , die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hierbei ist zu verstehen, daß die Funktion  $\varepsilon$  definiert sein soll auf der Menge aller  $h$  mit  $h + p \in D$ . Diese Formulierung des Ableitungsbegriffs hat den Vorteil, besonders gut zum Ausdruck zu bringen, daß für festes  $p$  und kleines  $h$  der Ausdruck  $f(p) + bh$  eine gute Approximation von  $f(p + h)$  ist.

*Beispiele* 4.1.6. Eine konstante Funktion auf einer halboffenen Menge von reellen Zahlen ist bei jedem Punkt besagter Menge differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion  $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$  hat bei jedem Punkt  $p$  die Ableitung  $\text{id}'(p) = \frac{dx}{dx}(p) = 1$ .

**Lemma 4.1.7.** Die Funktion  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist differenzierbar bei jedem Punkt von  $\mathbb{R}^\times$  und ihre Ableitung bei einer Stelle  $p \in \mathbb{R}^\times$  ist  $-\frac{1}{p^2}$ .

*Beweis.* Wir rechnen  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{\frac{x}{x} - \frac{p}{p}} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{-\frac{1}{xp}}{\frac{x-p}{x}} = -\frac{1}{p^2}$  nach 3.3.12.  $\square$

**Lemma 4.1.8.** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  halboffen. Ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar bei  $p \in D$ , so ist  $f$  stetig bei  $p$ .

*Beweis.* Das folgt sofort aus der vorhergehenden Proposition 4.1.5.  $\square$

**Definition 4.1.9.** Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt  $p \in (a, b)$  und existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

im Sinne von 3.3.24, so nennen wir sie die **linksseitige** bzw. die **rechtsseitige Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $p$ .

*Ergänzende Übung 4.1.10.* Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt  $p \in (a, b)$ . Genau dann ist  $f$  differenzierbar bei  $p$ , wenn dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen.

*Beispiel 4.1.11.* Man erkennt so zum Beispiel, daß der Absolutbetrag  $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  nicht differenzierbar ist bei  $p = 0$ , da dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung zwar existieren, aber nicht übereinstimmen.

## 4.2 Ableitungsregeln

**Proposition 4.2.1.** Seien  $D \subset \mathbb{R}$  halboffen und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar bei einem Punkt  $p \in D$ . So sind auch die Funktionen  $f + g$  und  $fg$  differenzierbar bei  $p$  und es gilt

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \text{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

*Beweis.* Wir schreiben wie in 4.1.5

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + f'(p)h + \varepsilon(h)h \\ g(p+h) &= g(p) + g'(p)h + \hat{\varepsilon}(h)h \end{aligned}$$

für Funktionen  $\varepsilon, \hat{\varepsilon}$ , die stetig sind bei Null die dort verschwinden, und erhalten durch Addieren bzw. Multiplizieren dieser Gleichungen

$$\begin{aligned} (f + g)(p+h) &= (f + g)(p) + [f'(p) + g'(p)]h + [\varepsilon(h) + \hat{\varepsilon}(h)]h \\ (fg)(p+h) &= (fg)(p) + [f'(p)g(p) + f(p)g'(p)]h \\ &\quad + [f'(p)g'(p)h + \varepsilon(h)g(p) + f(p)\hat{\varepsilon}(h) + h\varepsilon(h)\hat{\varepsilon}(h)]h \end{aligned}$$

Nach unseren Kenntnissen über stetige Funktionen steht aber in der zweiten eckigen Klammer auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen eine Funktion, die stetig ist bei  $h = 0$  und die dort den Wert Null annimmt.  $\square$

**Definition 4.2.2.** Ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert auf einer halboffenen Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}$  und differenzierbar an jedem Punkt von  $D$ , so nennen wir  $f$  **differenzierbar auf  $D$**  und nennen die Funktion  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto f'(p)$  ihre **Ableitung**.

*Beispiel 4.2.3.* Zum Beispiel ist  $1/x$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}^\times$  mit Ableitung  $-1/x^2$ , und sind  $f$  und  $g$  differenzierbar, so auch  $f+g$  und  $fg$  und für ihre Ableitungen gelten die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

**Korollar 4.2.4 (Ableiten ganzzahliger Potenzen).** Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und unter der Voraussetzung  $x \neq 0$  im Fall  $n \leq 0$  ist die Ableitung der Funktion  $x \mapsto x^n$  die Funktion  $x \mapsto nx^{n-1}$ .

*Beweis.* Man zeigt das durch vollständige Induktion über  $n$  separat für  $n \geq 0$  und  $n \leq -1$ . Im Fall  $n = 0$  ist die Ableitung der konstanten Funktion  $x^0 = 1$  natürlich überall definiert und Null, kann aber aber nur für  $x \neq 0$  in der Form  $0x^{-1}$  geschrieben werden.  $\square$

**Satz 4.2.5 (Kettenregel).** Seien  $D, E \subset \mathbb{R}$  halboffene Teilmengen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und es gelte  $f(D) \subset E$ . Sei  $f$  differenzierbar bei  $p$  und  $g$  differenzierbar bei  $f(p)$ . So ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

*Beweis.* Der besseren Übersichtlichkeit halber benutzen wir hier Großbuchstaben für die Ableitungen und setzen  $f'(p) = L$  und  $g'(f(p)) = M$ . Wir haben

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + Lh + \varepsilon(h)h \\ g(f(p)+k) &= g(f(p)) + Mk + \hat{\varepsilon}(k)k \end{aligned}$$

für Funktionen  $\varepsilon$  und  $\hat{\varepsilon}$ , die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir erhalten durch Einsetzen von  $Lh + \varepsilon(h)h$  für  $k$  sofort

$$\begin{aligned} g(f(p+h)) &= g(f(p) + Lh + \varepsilon(h)h) \\ &= g(f(p)) + MLh + M\varepsilon(h)h + \hat{\varepsilon}(Lh + \varepsilon(h)h)(L + \varepsilon(h))h \end{aligned}$$

Es ist nun aber offensichtlich, daß sich hier die Summe der Terme ab dem dritten Summanden einschließlich in der Gestalt  $\eta(h)h$  schreiben läßt für eine Funktion  $\eta$ , die stetig ist bei Null und die dort verschwindet, und wir erhalten

$$(g \circ f)(p+h) = (g \circ f)(p) + MLh + \eta(h)h \quad \square$$

**Proposition 4.2.6 (Quotientenregel).** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  eine halboffene Teilmenge,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ohne Nullstelle und  $p \in D$  ein Punkt.

1. Ist  $f$  differenzierbar bei  $p$ , so ist auch  $1/f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1/f(x)$  differenzierbar bei  $p$  und hat dort die Ableitung  $-f'(p)/f(p)^2$ .
2. Ist zusätzlich  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar bei  $p$ , so ist auch  $g/f$  differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

*Beweis.* Teil 1 folgt sofort aus 4.1.7 mit der Kettenregel. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel.  $\square$

4.2.7. Ist  $D \subset \mathbb{R}$  eine halboffene Teilmenge und sind  $g, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und hat  $f$  keine Nullstelle auf  $D$ , so ist mithin auch  $g/f$  differenzierbar auf  $D$  mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

**Lemma 4.2.8 (Ableitung der Exponentialfunktion).** *Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung, in Formeln  $\exp'(p) = \exp(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* In 5.1.15 werden wir lernen, daß man “Potenzreihen gliedweise differenzieren darf”. Da wir das aber bis jetzt noch nicht wissen, müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir bestimmen zunächst die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle  $p = 0$  und erhalten

$$\begin{aligned} \exp'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i!} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

nach 3.3.15 und 3.3.14, da ja  $\left|\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}\right|$  für  $|x| \leq 1$  beschränkt ist durch die Euler'sche Zahl  $e$ . Um  $\exp'(p)$  für beliebiges  $p$  zu bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} \exp'(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(p+h) - \exp(p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \exp(p) \\ &= \exp(p) \end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt den schon behandelten Fall  $p = 0$  verwenden und formal im ersten Schritt 3.3.21 benutzen, um den Grenzwert  $x \rightarrow p$  in einen Grenzwert  $h \rightarrow 0$  umzuformen.  $\square$

**Satz 4.2.9 (Ableitung von Umkehrfunktionen).** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton, stetig auf  $I$  und differenzierbar bei  $p \in I$  mit Ableitung  $f'(p) \neq 0$ . So ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar bei  $q = f(p)$  mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$



Veranschaulichung der Formel 4.2.9 für die Ableitung von Umkehrfunktionen

*Beweis.* Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) - f(p) = (x - p)\varphi(x)$  und  $\varphi(p) = f'(p)$ . Setzen wir hier  $x = f^{-1}(y)$ , so ist  $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $(y - q)\psi(y) = f^{-1}(y) - f^{-1}(q)$  und  $\psi(q) = 1/f'(p)$ .  $\square$

*Beispiel 4.2.10.* Die **Ableitung des Logarithmus** ist mithin

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

Damit ergibt sich für alle  $a \in \mathbb{R}$  die **Ableitung der allgemeinen Potenzen**, also der Funktionen  $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^a$ , zu  $x \mapsto ax^{a-1}$ . In der Tat, nach Definition gilt ja  $x^a = \exp(a \log x)$ , die Ableitung wird also  $a \frac{1}{x} \exp(a \log x) = ax^{a-1}$ .

**Lemma 4.2.11.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

*Beweis.* Wir betrachten allgemeiner für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-n} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

und zeigen, daß sie differenzierbar ist mit Ableitung  $f'_n = -nf_{n+1} + f_{n+2}$ . Damit sind wir dann natürlich fertig. Das einzige Problem ist die Ableitung an der Stelle  $p = 0$ , wo wir nachweisen müssen, daß die Sekantensteigungen "von rechts" auch gegen Null streben, daß also für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^{-n-1} e^{-1/x} = 0$$

Nun wissen wir aber nach der Definition von  $\exp$ , daß für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$  gilt  $\exp(x) > x^m/m!$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$  gilt also  $\exp(1/x) > x^{-n-2}/(n+2)!$  und wir folgern  $0 < x^{-n-1} e^{-1/x} < (n+2)! x$  für  $x > 0$ .  $\square$

### 4.3 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung

**Definition 4.3.1.** Eine Teilmenge der reellen Zahlen oder auch der erweiterten reellen Zahlen  $\overline{\mathbb{R}}$  heißt **offen** genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist. In Formeln ist demnach eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}$  offen genau dann, wenn es für jeden Punkt  $p \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset U$ .

**Satz 4.3.2 (Notwendige Bedingung für ein Extremum).** *Nimmt eine reellwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, an einem Punkt dieser offenen Teilmenge ihr Maximum oder ihr Minimum an, und ist sie dort auch differenzierbar, so verschwindet an diesem Punkt ihre Ableitung.*

4.3.3. Die Bedingung, unsere Teilmenge sei offen, ist an dieser Stelle wesentlich: Gegeben reelle Zahlen  $a < b$  nimmt etwa die Funktion  $x \mapsto x$  auf dem Intervall  $[a, b]$  ihr Minimum bei  $a$  und ihr Maximum bei  $b$  an, aber die Ableitung unserer Funktion verschwindet weder bei  $a$  noch bei  $b$ . Für Minima oder Maxima einer differenzierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kommen ganz allgemein nach unserem Satz nur in Frage: Einerseits Endpunkte des Intervalls, und andererseits die Punkte im Innern des Intervalls, an denen die Ableitung verschwindet. Mit etwas Glück können wir unter diesen Punkten dann durch Ausprobieren herauskriegen, wo das Minimum und das Maximum wirklich angenommen werden.

*Beweis.* Bezeichne  $U \subset \mathbb{R}$  unsere offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  unsere Funktion. Nimmt  $f$  ein Maximum an bei  $p \in U$ , so gilt für die Sekantensteigungsfunktion  $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$  offensichtlich  $\varphi(x) \geq 0$  für  $x < p$  und  $\varphi(x) \leq 0$  für  $x > p$ . Wenn der Grenzwert der Sekantensteigungen existiert, so folgt mit 3.3.22 notwendig  $0 \leq \lim_{x \nearrow p} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow p} \varphi(x) = \lim_{x \searrow p} \varphi(x) \leq 0$  und damit ist dann dieser Grenzwert Null. Nimmt  $f$  ein Minimum an bei  $p$ , so argumentiert man analog.  $\square$

*Übung 4.3.4.* An welchen Stellen nimmt die Funktion  $[-1, 2] \mapsto \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto |2 - x^2|$  ihr Minimum und Maximum an?

*Beispiel 4.3.5.* Das **Brechungsgesetz** behauptet, daß das Verhältnis vom Sinus des Eintrittswinkels zum Sinus des Austrittswinkels eines Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien, sagen wir Luft und Wasser, konstant ist. Wir leiten es nun ab aus dem sogenannten **Fresnel'schen Prinzip**, nach dem ein Lichtstrahl "stets den schnellsten Weg nimmt". Ist sagen wir die Lichtgeschwindigkeit in Wasser das  $\gamma$ -fache der Lichtgeschwindigkeit in Luft, so sollte nach diesem Prinzip der Lichtstrahl mit den Bezeichnungen aus nebenstehendem Bild bei dem  $x$  in das Wasser eintauchen, für das der Ausdruck

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \gamma \sqrt{b^2 + (L - x)^2}$$

minimal wird. Ableiten liefert dafür die notwendige Bedingung

$$\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \gamma \frac{-2(L - x)}{2\sqrt{b^2 + (L - x)^2}} = 0$$

und damit steht das Brechungsgesetz  $\sin \varphi = \gamma \sin \varphi'$  auch schon da.



Veranschaulichung der notwendigen Bedingung für ein Maximum [4.3.2](#)



Zum Brechungsgesetz

*Ergänzende Übung 4.3.6.* Bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe umfaßt eine Konservendose mit fest vorgegebener Oberfläche das größtmögliche Volumen?

**Satz 4.3.7 (von Rolle).** *Seien  $a < b$  aus  $\overline{\mathbb{R}}$  gegeben und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  und differenzierbar auf dem offenen Intervall  $(a, b)$ . Gilt dann  $f(a) = f(b)$ , so gibt es  $p \in (a, b)$  mit  $f'(p) = 0$ .*

*Beweis.* Nach 3.4.3 gibt es Punkte  $p, q \in [a, b]$ , an denen  $f$  sein Maximum und sein Minimum annimmt. Liegt einer dieser Punkte im Innern  $(a, b)$  unseres Intervalls, so verschwindet dort die Ableitung nach dem vorhergehenden Satz und wir sind fertig. Nimmt  $f$  sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand des Intervalls an, so ist die Funktion  $f$  wegen unserer Annahme  $f(a) = f(b)$  konstant und wir sind auch fertig.  $\square$

**Korollar 4.3.8 (Mittelwertsatz).** *Seien  $a < b$  aus  $\mathbb{R}$  gegeben und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem ganzen kompakten Intervall  $[a, b]$  und differenzierbar auf dem offenen Intervall  $(a, b)$ . So gibt es  $p \in (a, b)$  mit*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*Beweis.* Man wende den vorhergehenden Satz von Rolle 4.3.7 an auf die Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , die aus  $f$  entsteht durch "Subtraktion der globalen Sekanten".  $\square$

*Übung 4.3.9.* Eine differenzierbare Funktion auf einem halboffenen Intervall, deren Ableitung beschränkt ist, ist gleichmäßig stetig.

*Übung 4.3.10.* Gegeben eine differenzierbare Funktion auf einem halboffenen Intervall ist das Bild des fraglichen Intervalls unter der Ableitung unserer Funktion wieder ein Intervall. Hinweis: Mittelwertsatz. Man beachte, daß die Stetigkeit der Ableitung nicht vorausgesetzt wird.

**Satz 4.3.11 (Erste Ableitung und Monotonie).** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. So gilt*

$$\begin{aligned} f' > 0 &\Rightarrow f \text{ wächst streng monoton} \\ f' \geq 0 &\Leftrightarrow f \text{ wächst monoton} \\ f' < 0 &\Rightarrow f \text{ fällt streng monoton} \\ f' \leq 0 &\Leftrightarrow f \text{ fällt monoton} \\ f' = 0 &\Leftrightarrow f \text{ ist konstant} \end{aligned}$$



Veranschaulichung des Mittelwertsatzes [4.3.8](#)

*Beweis.* Es reicht, die beiden ersten Aussagen zu zeigen. Wächst  $f$  nicht streng monoton, so gibt es  $a < b$  mit  $f(a) \geq f(b)$  und nach dem Mittelwertsatz finden wir  $p \in (a, b)$  mit

$$f'(p) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq 0$$

Wächst  $f$  nicht monoton, so finden wir in derselben Weise  $p \in I$  mit  $f'(p) < 0$ . Das zeigt schon mal  $\Rightarrow$ . Umgekehrt folgt aus  $f$  monoton wachsend, daß alle Sekantensteigungen nichtnegativ sind, und damit auch alle Grenzwerte von Sekantensteigungen.  $\square$

**Korollar 4.3.12 (Funktionen, die ihre eigene Ableitung sind).** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall. Genau dann stimmt eine differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  überein mit ihrer eigenen Ableitung, wenn sie ein Vielfaches der Exponentialfunktion ist, in Formeln

$$f' = f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = c \exp(x)$$

4.3.13. Eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f' = f$  muß keineswegs ein Vielfaches der Exponentialfunktion sein. Zum Beispiel wäre die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 0$  für  $x < 0$  und  $f(x) = 5 \exp(x)$  für  $x > 0$  auch eine Möglichkeit. Aber gut,  $\mathbb{R}^\times$  ist ja auch kein Intervall.

*Beweis.* Bezeichne  $I \subset \mathbb{R}$  unser halboffenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  unsere differenzierbare Funktion mit  $f = f'$ . Die Ableitung der Funktion  $f(x)e^{-x}$  ergibt sich mit der Produktregel zu  $f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$ , mithin ist die Funktion  $f(x)e^{-x}$  konstant, sagen wir mit einzigem Funktionswert  $c$ , und wir folgern  $f(x) = ce^x \forall x \in I$ .  $\square$

*Übung 4.3.14.* Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  gegeben. Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und löst die Differentialgleichung  $f' = \alpha f$ , so gilt  $f(x) = f(0)e^{\alpha x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Satz 4.3.15 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum).** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  eine halboffene Teilmenge,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $p \in D$  ein Punkt mit  $f'(p) = 0$ . Sei die Ableitung  $f'$  von  $f$  differenzierbar bei  $p$ .

1. Gilt  $f''(p) > 0$ , so besitzt  $f$  ein **isoliertes lokales Minimum** bei  $p$ , als da heißt, es gibt  $r > 0$  derart, daß gilt  $f(q) > f(p)$  für alle  $q \in D$  mit  $0 < |q - p| < r$ .
2. Gilt  $f''(p) < 0$ , so besitzt  $f$  ein **isoliertes lokales Maximum** bei  $p$ .

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $D = I$  ein Intervall. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(p) + (x-p)\varphi(x) \\ &= (x-p)\varphi(x) \end{aligned}$$

mit  $\varphi$  stetig in  $p$  und  $\varphi(p) = f''(p) > 0$ . So gibt also  $r > 0$  mit  $\varphi(q) > 0$  für  $q \in I \cap (p-r, p+r)$ , und wir folgern  $f'(q) < 0$  für  $q \in I \cap (p-r, p)$  und  $f'(q) > 0$  für  $q \in I \cap (p, p+r)$ . Unsere Funktion  $f$  fällt also streng monoton auf  $I \cap (p-r, p)$  und wächst streng monoton auf  $I \cap (p, p+r)$ . Der andere Fall  $f''(p) < 0$  wird analog behandelt.  $\square$

*Ergänzende Übung 4.3.16.* Man zeige, daß ein Punkt  $(x, y) \in (0, 1)^2$  genau dann auf einem Geradensegment der Länge Eins mit einem Ende auf der  $x$ -Achse und dem anderen Ende auf der  $y$ -Achse liegt, wenn gilt  $y^{2/3} + x^{2/3} \leq 1$ . Hinweis: Man halte  $x$  fest und berechne für alle  $a \in [x, 1]$  die Höhe  $h_x(a)$  an der Stelle  $x$  eines Brettes der Länge 1, das bei  $a$  auf der  $x$ -Achse steht und an die  $y$ -Achse angelehnt ist. Dann bestimme man das Maximum dieser Höhen bei festem  $x$  und variablem  $\alpha$ .

**Definition 4.3.17.** Wir nennen eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem reellen Intervall  $I$  **konvex** bzw. **konkav** genau dann, wenn ihr Graph unter bzw. über jeder seiner Sekanten liegt, wenn also in Formeln für alle  $x < y < z$  aus  $I$  gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

bzw.  $\geq$  für konkave Funktionen.

*Übung 4.3.18.* Man zeige, daß diese Bedingung gleichbedeutend ist zu

$$f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z) \quad \forall t \in [0, 1]$$

**Satz 4.3.19 (Zweite Ableitung und Konvexität).** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halb-offenes Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion. So gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist konvex} &\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist konkav} &\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen nur die erste Aussage. Ist  $f$  nicht konvex, so gibt es  $x, y, z$  mit  $x < y < z$  aber

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Nach dem Mittelwertsatz finden wir dann aber  $\xi < \zeta$  mit  $f'(\xi) > f'(\zeta)$  und bei nochmaligem Anwenden  $\eta$  mit  $f''(\eta) < 0$ . Ist umgekehrt  $f$  konvex,



Illustration zu Übung [4.3.16](#).

so reicht es nach 4.3.11 zu zeigen, daß  $f'$  monoton wächst. Kürzen wir die Steigung der Sekante durch  $(x, f(x))$  und  $(y, f(y))$  ab mit  $s_{xy} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ , so impliziert die Konvexität die Ungleichungskette

$$s_{xy} \leq s_{xz} \leq s_{yz}$$

Hier ist  $s_{xy} \leq s_{yz}$  eine direkte Konsequenz der Konvexität, und da sicher gilt  $(x-y)s_{xy} + (y-z)s_{yz} = (x-z)s_{xz}$ , liegt  $s_{xz}$  als ein "gewichtetes Mittel" zwischen  $s_{xy}$  und  $s_{yz}$ . Unsere Ungleichungskette schreiben wir nun aus zu

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Die Sekantensteigungsfunktionen  $y \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  und  $y \mapsto \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$  wachsen insbesondere monoton auf  $(x, z]$  bzw.  $[x, z)$  und im Grenzwert folgt

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq f'(z) \quad \square$$

**Definition 4.3.20.** Wir nennen eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem reellen Intervall  $I$  **streng konvex** (bzw. **streng konkav**) genau dann, wenn ihr Graph echt unter (bzw. echt über) jeder Sekante liegt, wenn also in Formeln für alle  $x < y < z$  aus  $I$  gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

bzw.  $>$  für streng konkave Funktionen.

**Satz 4.3.21.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar. So gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist streng konvex} &\Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist streng konkav} &\Leftrightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

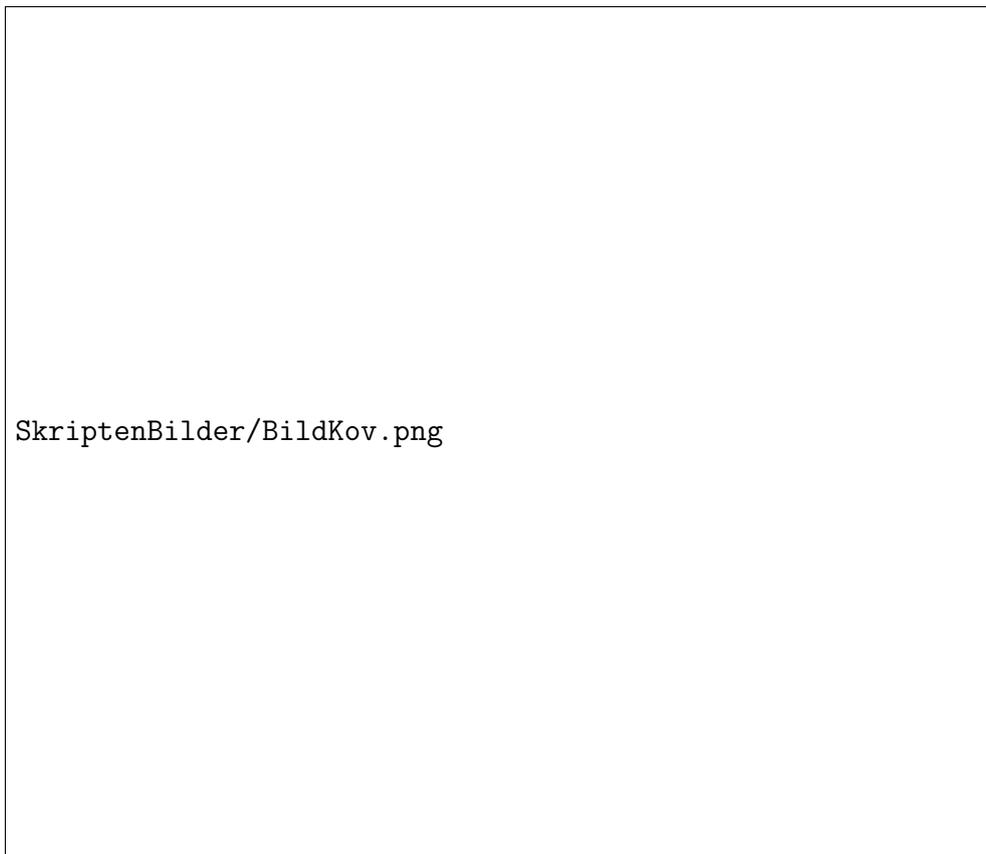
*Beweis.* Übung. □

*Übung 4.3.22.* Gegeben reelle Zahlen  $a, b \geq 0$  und  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  zeige man die **Young'sche Ungleichung**  $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$ . Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Exponentialfunktion aus.

*Übung 4.3.23.* Gegeben reelle Zahlen  $a, b \geq 0$  und  $p \geq 1$  zeige man die Ungleichung  $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ . Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Funktion  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^p$  aus.



Links der Graph einer konvexen, rechts der einer konkaven Funktion



Veranschaulichung unserer Ungleichungskette für die Sekantensteigungen  
bei konvexen Funktionen aus dem Beweis von [4.3.19](#)

*Ergänzende Übung 4.3.24.* Für  $P \subset \mathbb{N}$  die Menge aller Primzahlen gilt

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = \infty$$

In der Tat folgt aus  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$  und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Entwicklung in eine geometrische Reihe  $(1 - 1/p)^{-1} = (1 + p^{-1} + p^{-2} \dots)$ , daß die Menge der Partialprodukte des unendlichen Produkts  $\prod_{p \in P} (1 - 1/p)^{-1}$  nicht beschränkt sein kann. Nun wende man den Logarithmus an und schätze ab.

#### 4.4 Regeln von de l'Hospital

**Satz 4.4.1 (Regeln von de l'Hospital).** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall und  $p$  ein Häufungspunkt von  $I$  in  $\overline{\mathbb{R}}$ . Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen derart, daß gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow p} |g(x)| = \infty$$

Haben  $g$  und  $g'$  keine Nullstelle auf  $I \setminus p$  und existiert der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen  $\lim_{x \rightarrow p} (f'(x)/g'(x))$  in  $\overline{\mathbb{R}}$ , so existiert auch der Grenzwert des Quotienten der Funktionen  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x)/g(x))$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow p} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

*Beweis.* Wir beginnen den Beweis mit folgendem

**Lemma 4.4.2 (Allgemeiner Mittelwertsatz).** Seien  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  gegeben und seien  $f, g$  stetige reellwertige Funktionen auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$ , die differenzierbar sind auf dem offenen Intervall  $(a, b)$ . So gibt es  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi)(g(a) - g(b)) = g'(\xi)(f(a) - f(b))$$

4.4.3. Ich kann für diesen Satz leider keine Anschauung anbieten. Verschwindet  $g'$  nirgends auf  $(a, b)$ , so gilt  $g(a) \neq g(b)$  nach dem Satz von Rolle 4.3.7 und wir können unsere Gleichung schreiben in der Form

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ist also  $g(x) = x$ , so erhalten wir unseren Mittelwertsatz 4.3.8 als Spezialfall. Der allgemeine Mittelwertsatz wird nur beim Beweis der Regeln von de l'Hospital eine Rolle spielen, weshalb ich ihm auch nur den Status eines Lemmas eingeräumt habe.



SkriptenBilder/BildHop.png

Veranschaulichung der Regel von de l'Hospital [4.4.1](#) im Fall  $p \in \mathbb{R}$  unter der Annahme, daß beide Funktionen bei  $p$  nach Null streben. Es scheint mir anschaulich klar, daß der Grenzwert des Quotienten sich nicht ändert, wenn wir beide Funktionen durch ihre beste lineare Approximation bei  $p$  ersetzen, und das ist auch genau die anschauliche Bedeutung der Regel von de l'Hospital.

*Beweis.* Man wende den Satz von Rolle 4.3.7 an auf die Funktion

$$F(x) = f(x)(g(a) - g(b)) - g(x)(f(a) - f(b)) \quad \square$$

Jetzt zeigen wir die Regeln von de l'Hospital. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p \notin I$  annehmen, indem wir sonst  $I$  an der Stelle  $p$  in zwei Teile zerschneiden und den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert bei  $p$  getrennt betrachten. Für jede Umgebung  $W$  des Grenzwerts

$$q = \lim_{x \rightarrow p} f'(x)/g'(x)$$

finden wir nun per definitionem eine Intervallumgebung  $V$  von  $p$  mit  $\xi \in I \cap V \Rightarrow f'(\xi)/g'(\xi) \in W$ . Für beliebige  $a, b \in I \cap V$  mit  $a \neq b$  gilt dann  $g(a) \neq g(b)$ , da nach Annahme die Ableitung von  $g$  keine Nullstelle auf  $I \setminus p$  hat, und aus dem allgemeinen Mittelwertsatz folgt dann weiter

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} \in W$$

Von nun an müssen wir die beiden Fälle im Satz getrennt weiterbehandeln. Zunächst nehmen wir an, es gelte  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$ . Ist  $W$  ein kompaktes Intervall, so folgt  $f(a)/g(a) \in W$  sofort, indem wir  $a$  festhalten,  $b$  gegen  $p$  streben lassen und uns an die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert erinnern. Die Behauptung im ersten Fall folgt dann, da für jeden Punkt seine kompakten Intervallumgebungen ein Fundamentalsystem von Umgebungen bilden. Jetzt behandeln wir noch den Fall  $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow p} |g(x)| = \infty$ . In diesem Fall dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch annehmen, daß  $f$  auf  $I$  keine Nullstelle hat, so daß gilt

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f(b)}{g(b)} \left( \frac{1 - f(a)/f(b)}{1 - g(a)/g(b)} \right)$$

Sei nun  $a \in I \cap V$  fest gewählt. Für jedes und insbesondere auch für sehr nahe bei Eins liegendes  $\alpha \in (0, 1)$  finden wir dann eine Umgebung  $U$  von  $p$  derart, daß gilt

$$b \in U \cap I \Rightarrow \frac{1 - f(a)/f(b)}{1 - g(a)/g(b)} \in (\alpha, \alpha^{-1})$$

Indem wir zusätzlich  $U \subset V$  wählen, finden wir damit für jede Umgebung  $W$  von  $q$  und jedes  $\alpha \in (0, 1)$  eine Umgebung  $U$  von  $p$  mit  $b \in U \cap I \Rightarrow f(b)/g(b) \in (\alpha, \alpha^{-1})W$ . Die Behauptung folgt nun im zweiten Fall, da es für jede Umgebung  $W'$  von  $q$  eine Umgebung  $W$  von  $q$  und ein  $\alpha \in (0, 1)$  gibt mit  $(\alpha, \alpha^{-1})W \subset W'$ .  $\square$

Beispiel 4.4.4. Für  $\lambda > 0$  gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)/x^\lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)/\lambda x^{\lambda-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1/\lambda x^\lambda \\ &= 0\end{aligned}$$

## 4.5 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

**Satz 4.5.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).** *Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $a \in I$  ein Punkt, so ist die Funktion*

$$\begin{aligned}F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) \, dt\end{aligned}$$

die einzige differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$  und  $F(a) = 0$ .

4.5.2. Im Fall  $x < a$  ist dies Integral unter Verwendung unserer Konvention 3.5.10 als  $\int_a^x f(t) \, dt = -\int_x^a f(t) \, dt$  zu interpretieren.

*Beweis.* Für  $p \in I$  rechnen wir

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{x - p} \int_p^x f(t) \, dt$$

Da nun  $f$  stetig ist, finden wir für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, daß aus  $|t - p| \leq \delta$  folgt  $f(p) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(p) + \varepsilon$ . Aus  $0 < |x - p| \leq \delta$  folgen also durch Bilden des Integrals und Teilen durch  $(x - p)$  die Ungleichungen

$$f(p) - \varepsilon \leq \frac{1}{x - p} \int_p^x f(t) \, dt \leq f(p) + \varepsilon$$

und damit ist gezeigt, daß der Ausdruck in der Mitte für  $x \rightarrow p$  gegen  $f(p)$  konvergiert. Es folgt  $F'(p) = f(p)$  für alle  $p \in I$ . Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  auch differenzierbar mit  $G' = f$ , so verschwindet die Ableitung der Differenz  $G - F$ . Nach 4.3.11 ist diese Differenz also konstant, und haben wir dann auch noch  $G(a) = 0$ , so ist sie konstant Null und wir folgern  $F = G$ .  $\square$

**Korollar 4.5.3 (Integrieren mit Stammfunktionen).** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Stammfunktion von  $f$** , als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung  $G' = f$ , so gilt für alle  $a, b \in I$  die Formel*

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a)$$



Veranschaulichung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung  
4.5.1. Die kreuzweise schraffierte Fläche stellt  $F(p)$  dar, die irgendwie schraffierte  $F(x)$ , die einfach schraffierte  $F(x) - F(p)$ . Ich hoffe, man sieht, daß die Fläche unter der Kurve beim Verschieben der oberen Grenze um so stärker wächst, je größer dort der Wert unserer Funktion ist. Das ist qualitativ ausgedrückt die anschauliche Bedeutung des Hauptsatzes.

*Beweis.* Wir betrachten  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  wie im Hauptsatz 4.5.1 und folgern aus der Eindeutigkeitsaussage von dort  $F(x) = G(x) - G(a)$  für alle  $x \in [a, b]$ .  $\square$

4.5.4. Ist  $G$  ein komplizierterer Ausdruck, so ist es bequem und üblich, die Differenz  $G(b) - G(a)$  mit  $G(x)|_a^b$  abzukürzen. Man spricht einen solchen Ausdruck “ $G$ , ausgewertet zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$ ”. Für  $a, b$  positiv ergibt sich zum Beispiel

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x|_a^b = \log b - \log a$$

Die Ableitung von  $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \log|x|$  ist im Übrigen  $x \mapsto 1/x$ , als da heißt, für  $a, b$  negativ würden wir  $\log|b| - \log|a|$  erhalten. Über den Nullpunkt hinweg dürfen wir die Funktion  $1/x$  aber natürlich trotzdem nicht in dieser Weise integrieren, und unser Korollar erlaubt das auch nicht, es trifft vielmehr nur Aussagen über die Integration von auf einem Intervall definierten stetigen Funktionen.

*Übung 4.5.5.* Gegeben  $\alpha \in \mathbb{R}$  zeige man, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^\alpha dx$  existiert in  $\overline{\mathbb{R}}$  und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt  $\alpha < -1$ . Des weiteren zeige man, daß  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha dx$  existiert in  $\overline{\mathbb{R}}$  und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt  $\alpha > -1$ . Anschaulich gesprochen ist also die Hyperbel  $x \mapsto (1/x)$  gerade der Grenzfall, in dem sowohl die Fläche zwischen Kurve und  $x$ -Achse ab jedem  $x$ -Wert als auch symmetrisch die Fläche zwischen Kurve und  $y$ -Achse ab jedem  $y$ -Wert unendlich groß sind.

*Ergänzende Übung 4.5.6.* Der **Integrallogarithmus**  $\text{Li} : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wird erklärt durch die Vorschrift

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Man zeige  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \text{Li}(x) / \log(x)) = 1$ .

## 4.6 Integrationsregeln

**Satz 4.6.1 (Integration durch Substitution).** Gegeben zwei reelle Zahlen  $a < b$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f : g([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

wobei im Fall  $g(b) < g(a)$  das Integral rechts der Konvention 3.5.10 gemäß als das Negative des Integrals über das Intervall  $[g(b), g(a)]$  zu verstehen ist.

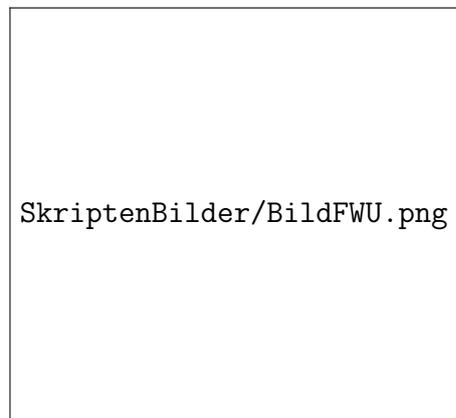


Illustration zu Übung [4.5.5](#).

4.6.2. Es gibt durchaus differenzierbare Abbildungen, deren Ableitung nicht stetig ist. Ein Beispiel findet man erst in 7.6.6, da wir vorher den Sinus noch nicht zur Verfügung haben, aber davon abgesehen kann es auch hier schon verstanden werden.

*Beweis.* Ist  $g$  konstant, so verschwinden beide Seiten und die Formel gilt. Ist sonst  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so ist  $F \circ g$  nach der Kettenregel 4.2.5 eine Stammfunktion von  $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ , und berechnen wir beide Integrale mithilfe dieser Stammfunktionen, so ergibt sich auf beiden Seiten der Wert  $F(g(b)) - F(g(a))$ .  $\square$

4.6.3. Wächst  $g$  streng monoton, so kann man auch leicht einen anschaulicheren Beweis geben, indem man  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$  äquidistant unterteilt und nach dem Mittelwertsatz  $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$  findet mit  $g(a_i) - g(a_{i-1}) = g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$ . Damit gilt ja die Gleichheit von Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))(g(a_i) - g(a_{i-1}))$$

Mithilfe von 3.5.11 zeigt man dann, daß diese Gleichheit im Grenzübergang  $r \rightarrow \infty$  gerade die Substitutionsregel liefert.

4.6.4. Als Gedächtnisstütze, die in IV.3.3 auch echte Bedeutung erhält, kann man sich merken, daß beim Substituieren, lateinisch ebenso wie “Prostituieren” für “Ersetzen”, von  $y$  durch  $g(x)$  nicht nur  $f(y)$  durch  $f(g(x))$  ersetzt werden muß, sondern auch  $dy$  durch  $g'(x) dx$ , wie es die Notation  $g'(x) = \frac{dy}{dx}$  suggeriert.

*Beispiel* 4.6.5. Indem wir uns das Integral erst etwas zurechtlegen, erhalten wir durch die Substitution  $g(x) = x^2 = y$ ,  $g'(x) = 2x dx = dy$  leicht

$$\int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+y} \Big|_{a^2}^{b^2} = \sqrt{1+x^2} \Big|_a^b$$

und als eine Stammfunktion des ursprünglichen Integranden ergibt sich die Funktion  $\sqrt{1+x^2}$ .

4.6.6. In Anwendungen wird man oft mit einer umkehrbaren Abbildung  $g$  arbeiten und die Regel in der Form

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))g'(x) dx$$

SkriptenBilder/BildSubR.png

Anschauliche Bedeutung der Substitutionsregel nach 4.6.3 im Fall  $g(x) = x^2$ . Die schraffierte Fläche stellt in diesem Spezialfall für  $r = 4$  und das Intervall  $[a, b] = [0, 4]$  die Summe

$$\sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))(g(a_i) - g(a_{i-1}))$$

dar. Die  $\xi_i$  sind mit dem Mittelwertsatz gerade so gewählt, daß gilt  $g(a_i) - g(a_{i-1}) = g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$ . Ich finde, man sieht sehr gut, daß diese Summen gegen  $\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_0^{16} f(y) dy$  konvergieren.

verwenden. Auch wenn  $g$  nicht umkehrbar ist, kann man in dieser Weise vorgehen, statt  $g^{-1}(\alpha)$  und  $g^{-1}(\beta)$  darf man dann eben irgendwelche  $a, b$  wählen derart, daß  $g$  auf ganz  $[a, b]$  stetig differenzierbar ist und daß gilt  $\alpha = g(a)$  und  $\beta = g(b)$ . Meist arbeiten wir sogar ohne explizite Erwähnung der Grenzen: Suchen wir nur eine Stammfunktion, so kommt es auf die untere Grenze eh nicht an und die obere Grenze wird mitgedacht und nach gelungener Integration wieder "zurücksubstituiert", wie es unsere Formel fordert.

*Beispiel 4.6.7.* Wir bestimmen eine Stammfunktion von  $f(y) = y\sqrt{1-y}$  durch die Substitution  $\sqrt{1-y} = x$ ,  $y = 1 - x^2 = g(x)$ ,  $dy = -2x dx$  zu

$$\begin{aligned} \int y\sqrt{1-y} dy &= \int (1-x^2)x(-2x) dx \\ &= \int (2x^4 - 2x^2) dx \\ &= \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \\ &= \frac{2}{5}(1-y)^2\sqrt{1-y} - \frac{2}{3}(1-y)\sqrt{1-y} \end{aligned}$$

**Satz 4.6.8 (Partielle Integration).** Gegeben reelle Zahlen  $a < b$  und zwei stetig differenzierbare Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

*Beweis.* Nach der Produktregel gilt  $fg' = (fg)' - f'g$  auf  $[a, b]$ , folglich stimmen auch die Integrale dieser Funktionen überein.  $\square$

*Beispiele 4.6.9.*

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 e^x dx \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x \end{aligned}$$

4.6.10. Ich erkläre nun noch einen alternativen Zugang zur Exponentialfunktion, der unsere Definition über eine a priori unmotivierte Reihe vermeidet. Suchen wir eine stetig differenzierbare Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $g' = g$  und  $g(0) = 1$ , so haben wir ja nach der Substitutionsregel

$$x = \int_0^x dt = \int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \int_1^{g(x)} \frac{1}{u} du$$

Man definiert also notgedrungen eine Funktion  $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift  $\log(y) = \int_1^y \frac{1}{u} du$ , und die gesuchte Funktion  $g$  muß deren Umkehrfunktion sein.

*Ergänzende Übung 4.6.11.* Wie könnte ein Autor, der den Zugang 4.6.10 zur Exponentialfunktion gewählt hat, die Funktionalgleichung 2.6.8 beweisen?

*Ergänzende Übung 4.6.12.* Man zeige durch Vergleich mit dem Integral der Funktion  $x^{-\alpha}$ , daß für jedes  $\alpha > 1$  die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$  konvergiert.

## 4.7 Hyperbolische trigonometrische Funktionen

**Definition 4.7.1.** Der **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** sind die Abbildungen  $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die gegeben werden durch die Formeln

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

4.7.2. Den Graphen des Cosinus hyperbolicus nennt man auch die **Kettenlinie**, weil er dieselbe Gestalt hat wie eine hängende Kette. Wir zeigen das in 7.3.10 im Anschluß an die Diskussion der Bogenlänge.

4.7.3. Offensichtlich gilt  $\sinh(0) = 0$ ,  $\cosh(0) = 1$ ,  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ , und  $\cosh(-x) = \cosh(x)$ , die Ableitungen unserer Funktionen sind

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

es gelten  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$  und die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b) \\ \cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \end{aligned}$$

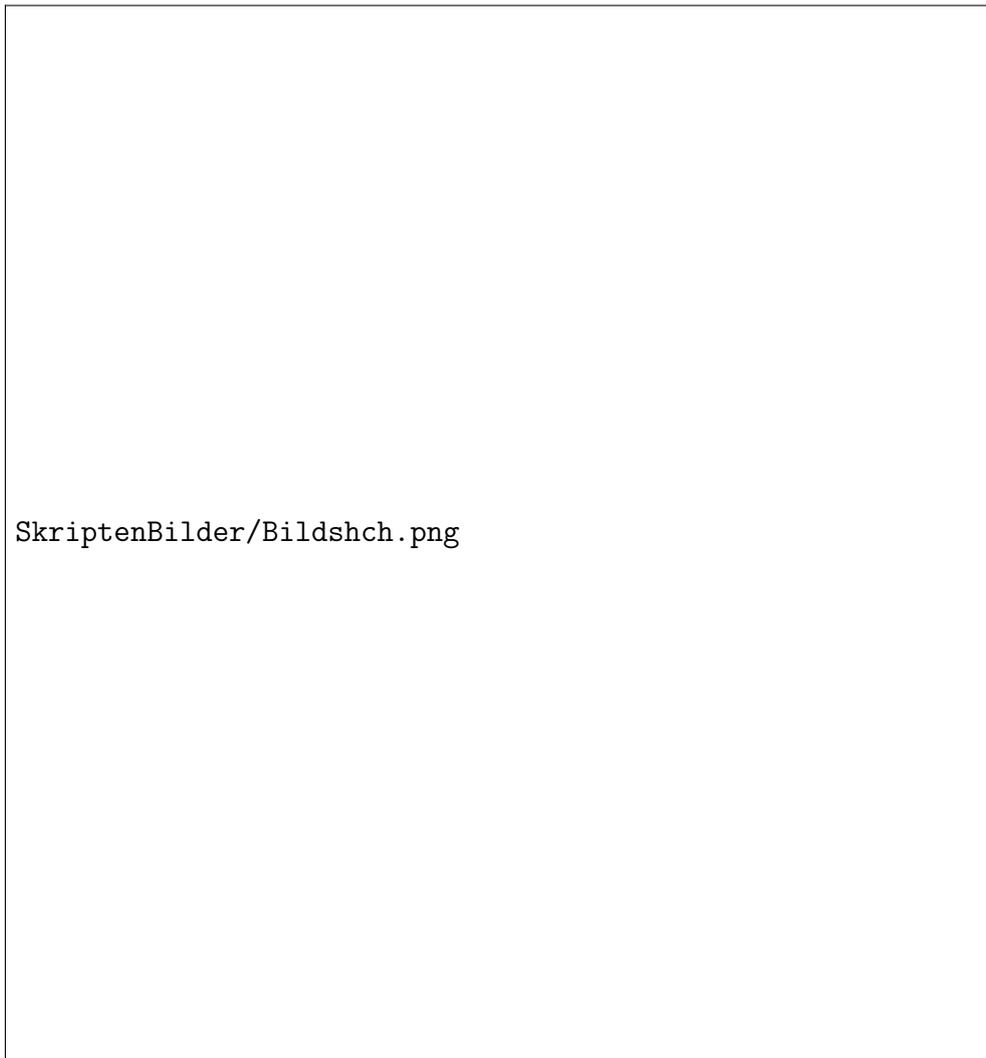
Die Funktion  $\cosh$  nimmt bei  $x = 0$  ihr Minimum an und  $\sinh$  ist eine Bijektion  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die inverse Abbildung nennt man **Area Sinus hyperbolicus** und bezeichnet sie mit  $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sie läßt sich auch elementar ausdrücken als  $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  und für die Ableitung von  $\operatorname{arsinh}$  erhalten wir

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

da ja gilt  $\sinh'(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 - \sinh^2(x)}$ ,  $\sinh'(\operatorname{arsinh} y) = \sqrt{1+y^2}$ .

Ähnlich liefert  $\cosh$  eine Bijektion  $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ , die inverse Abbildung **Area Cosinus hyperbolicus**  $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  kann geschrieben werden als  $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$  und ist differenzierbar auf  $(1, \infty)$  mit der Ableitung

$$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$



Die Graphen von Sinus und Cosinus hyperbolicus

Eher selten benutzt man den **Secans hyperbolicus**  $x \mapsto 1/\cosh(x)$ , den **Cosecans hyperbolicus**  $x \mapsto 1/\sinh(x)$  und den **Tangens hyperbolicus**  $\tanh : x \mapsto \sinh(x)/\cosh(x)$  sowie seine Umkehrung  $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ .

4.7.4. Die Namen unserer Funktionen haben den folgenden Hintergrund: Für  $t \in \mathbb{R}$  durchläuft der Punkt mit Koordinaten  $(\cosh t, \sinh t)$  den Hyperbelast

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(x - y) = 1, \quad x > 0\}$$

und zwar ist  $|t/2|$  gerade die Fläche oder lateinisch “area”, die zwischen  $x$ -Achse, Hyperbel und dem Geradensegment von  $(0, 0)$  nach  $(\cosh t, \sinh t)$  eingeschlossen ist. Es ist eine ausgezeichnete Übung, diese Behauptung nachzurechnen. Man sieht so die Verwandtschaft zu den üblichen trigonometrischen Funktionen, bei denen man nur die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  zu ersetzen hat durch den Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1$ , wie wir später zeigen werden. Die Herkunft der Bezeichnung “Sinus” wird auch dort, genauer in 7.4.4 erklärt. Die Bezeichnung **Trigonometrie** bedeutet übrigens “Dreiecksmessung”, die Wurzel “gon” taucht auch im deutschen Wort “Knie” auf und bedeutet im Griechischen sowohl “Knie” als auch im übertragenen Sinne “Winkel”.

4.7.5. Die Lösungsmengen in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  von Gleichungen der Gestalt  $ax^2 + bxy + cy^2 = d$  mit  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  heißen **ebene Quadriken** oder auch **Kegelschnitte**, da man sie erhalten kann als Schnitte räumlicher Ebenen mit dem **Kegel**  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$  bei geeigneter orthonormaler Identifikation unserer räumlichen Ebenen mit dem  $\mathbb{R}^2$ . Jeder Kegelschnitt ist bis auf Drehung und Verschiebung eine **Ellipse**  $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$  mit  $\alpha, \beta > 0$ , eine **Hyperbel**  $xy = \gamma$  mit  $\gamma > 0$ , eine **Parabel**  $x^2 = \delta y$  mit  $\delta > 0$ , ein Geradenkreuz, eine Gerade, ein Punkt oder die leere Menge. Die Bezeichnung “Parabel” kommt hier vom griechischen Wort für “Werfen”. In der Tat beschreibt ein Wurfgeschoss unter Vernachlässigung des Luftwiderstands stets eine “parabolische” Bahn, vergleiche VII.3.1.9.

*Ergänzende Übung* 4.7.6. Sei  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$  die Hyperbel. Wir konstruieren eine Bijektion  $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} H \setminus (1, 0)$ , indem wir jedem Punkt  $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  den Schnittpunkt der Geraden durch  $(0, t)$  und  $(1, 0)$  mit  $H \setminus (1, 0)$  zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

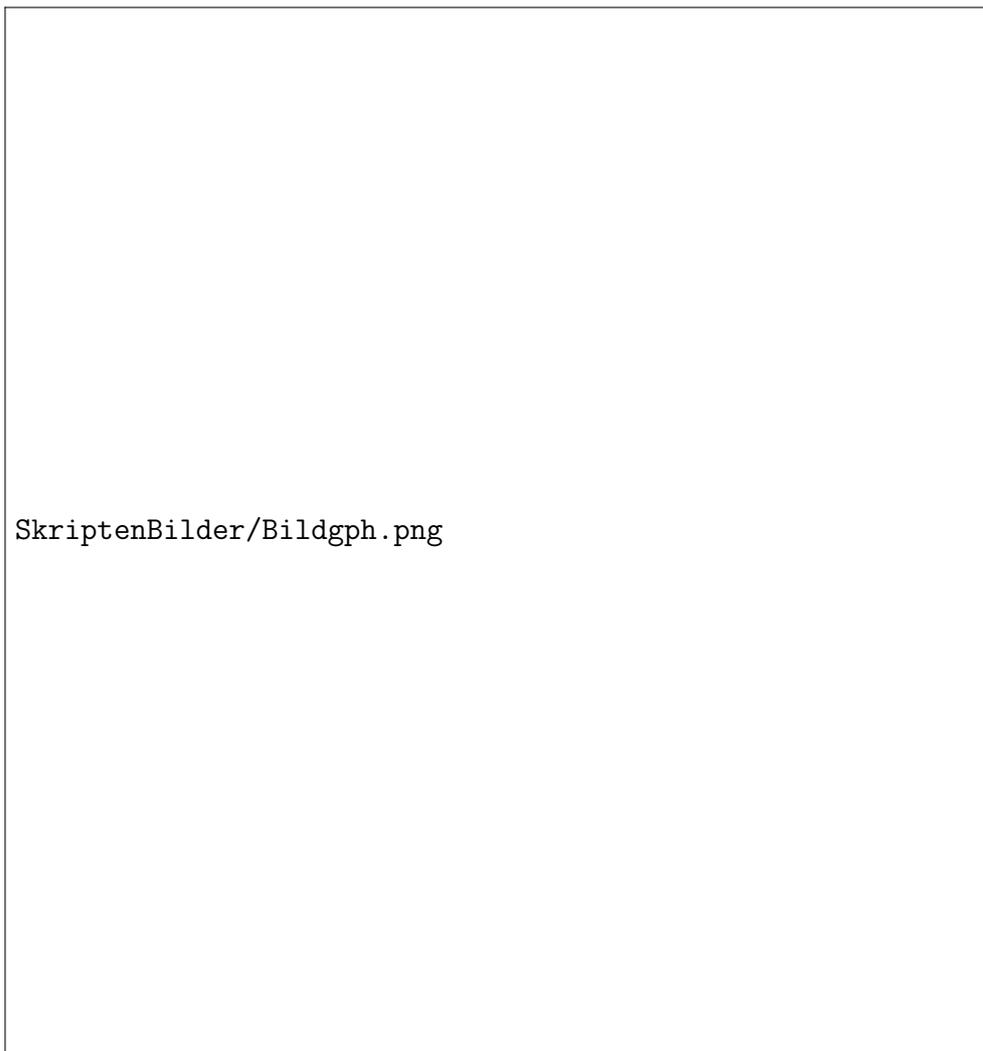
$$\varphi(t) = \left( \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \frac{2t}{t^2 - 1} \right)$$

Eine eng verwandte Parametrisierung des Einheitskreises werden wir in 7.6.17 besprechen.



SkriptenBilder/Bildgsh.png

Die geometrische Bedeutung von Sinus und Cosinus hyperbolicus



Die geometrische Bedeutung der Abbildung  $\varphi$  aus [4.7.6](#)

## 5 Potenzreihen und höhere Ableitungen

### 5.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

**Satz 5.1.1.** Sei  $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert für eine reelle Zahl  $z$  die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$  absolut für alle reellen  $x$  mit  $|x| < |z|$ .

*Vorschau 5.1.2.* Sobald Sie die komplexen Zahlen kennengelernt haben, werden Sie unschwer erkennen, daß dieser Satz ganz genauso und mit demselben Beweis auch gilt, wenn wir darin überall “reell” durch “komplex” ersetzen.

*Beweis.* Die Glieder einer konvergenten Reihe sind beschränkt, unter unseren Annahmen gibt es also eine endliche Schranke  $B$  mit  $|a_\nu z^\nu| \leq B$  für alle  $\nu$ . Aus  $|x| < |z|$  folgt aus der Konvergenz der geometrischen Reihe 2.5.5 dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x^\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu z^\nu| |x/z|^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} B |x/z|^\nu < \infty \quad \square$$

**Definition 5.1.3.** Ein Ausdruck der Gestalt  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$  heißt eine **Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge  $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  ihrer Koeffizienten anzugeben. Der **Konvergenzradius**  $r \in [0, \infty]$  einer Potenzreihe  $\sum a_\nu x^\nu$  ist per definitionem

$$r = \sup\{ |z| \mid \sum a_\nu z^\nu \text{ konvergiert} \}$$

Die Bezeichnung als Radius wird erst im Kontext komplexer Potenzreihen VIII.1.7.1 verständlich. Nach 5.1.1 definiert jede Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$  mittels der Abbildungsvorschrift  $x \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$  eine reellwertige Funktion auf dem Intervall  $(-r, r)$ .

*Übung 5.1.4.* Ist  $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eine Folge von von Null verschiedenen reellen Zahlen und existiert der Grenzwert  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_\nu / a_{\nu+1}|$  in  $[0, \infty]$ , so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ .

**Satz 5.1.5 (über Potenzreihen).** Die durch eine Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$  mit Konvergenzradius  $r > 0$  definierte Funktion  $s : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, ja sogar differenzierbar, und ihre Ableitung wird an jeder Stelle  $x \in (-r, r)$  gegeben durch die Potenzreihe  $s'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$

*Beispiel 5.1.6.* Dieser Satz liefert unmittelbar einen zweiten Beweis für die bereits in 4.2.8 bewiesene Tatsache, daß die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist.

5.1.7. Der Beweis dieses Satzes wird den größten Teil dieses Abschnitts einnehmen. Wir zeigen in 5.1.13, daß jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion stetig ist, und zeigen die weitergehenden Aussagen in 5.1.15. Zunächst jedoch müssen wir einige technische Hilfsmittel bereitstellen.

**Definition 5.1.8.** Sei  $D$  eine Menge,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion.

1. Wir sagen, die Folge  $f_n$  **konvergiert punktweise** gegen die Funktion  $f$  genau dann, wenn für alle  $x \in D$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .
2. Wir sagen, die Folge  $f_n$  **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion  $f$  und schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  genau dann, wenn es für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt derart, daß für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in D$  gilt  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

5.1.9. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt sicher punktweise Konvergenz. Das Umgekehrte gilt nicht: Die Funktionenfolge  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$  konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \neq 1$  und  $f(1) = 1$ .

**Satz 5.1.10.** *Konvergiert eine Folge von stetigen reellwertigen Funktionen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, so ist auch diese Grenzfunktion stetig.*

*Beweis.* Sei  $D \subset \mathbb{R}$  der gemeinsame Definitionsbereich und seien  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktionen unserer gleichmäßig konvergenten Folge und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ihre Grenzfunktion. Es reicht sicher, die Stetigkeit von  $f$  in jedem Punkt  $p \in D$  zu zeigen. Sei also  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Sicher finden wir ein  $n$  derart, daß für alle  $x \in D$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da  $f_n$  stetig ist in  $p$ , finden wir weiter  $\delta > 0$  derart, daß für alle  $x \in D$  mit  $|x - p| < \delta$  gilt

$$|f_n(x) - f_n(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Es folgt für alle  $x \in D$  mit  $|x - p| < \delta$  leicht

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| &\leq |f(x) - f_n(x)| \\ &\quad + |f_n(x) - f_n(p)| \\ &\quad + |f_n(p) - f(p)| < \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 5.1.11.** *Ist  $\sum a_\nu x^\nu$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$ , so konvergiert die Folge ihrer Partialsummen  $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu$  für alle  $\rho \in [0, r)$  gleichmäßig auf dem Kompaktum  $D = [-\rho, \rho]$ .*



Bei gleichmäßiger Konvergenz müssen für jedes  $\varepsilon > 0$  fast alle  $f_n$  auf dem ganzen Definitionsbereich  $D$  im “ $\varepsilon$ -Schlauch um  $f$ ” bleiben.



Die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergente Funktionenfolge der Funktionen  $x \mapsto x^n$  aus [5.1.9](#)

5.1.12. Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$  konvergiert im allgemeinen keineswegs gleichmäßig auf dem ganzen Intervall  $(-r, r)$ . Ein Gegenbeispiel wäre etwa die Exponentialfunktion, ein anderes die geometrische Reihe.

*Beweis.* Für alle  $x \in [-\rho, \rho]$  gilt  $|a_\nu x^\nu| \leq |a_\nu \rho^\nu|$  und folglich

$$|s_n(x) - s(x)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$$

Da  $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$  konvergiert, gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu| < \varepsilon$$

Für  $n \geq N$  und beliebiges  $x \in [-\rho, \rho]$  gilt dann  $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ .  $\square$

**Korollar 5.1.13.** *Die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $r > 0$  auf  $(-r, r)$  definierte Funktion ist stetig.*

*Beweis.* Nach Proposition 5.1.11 und Satz 5.1.10 ist unsere Funktion für alle  $\rho \in [0, r)$  stetig auf  $[-\rho, \rho]$  als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen. Daraus folgt mühelos, daß sie stetig ist auf ganz  $(-r, r)$ .  $\square$

**Satz 5.1.14. Das Integral eines gleichmäßigen Grenzwerts ist der Grenzwert der Integrale.** *Sei genauer die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . So gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

*Beweis.* Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  derart, daß gilt  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in [a, b]$ . Es folgt

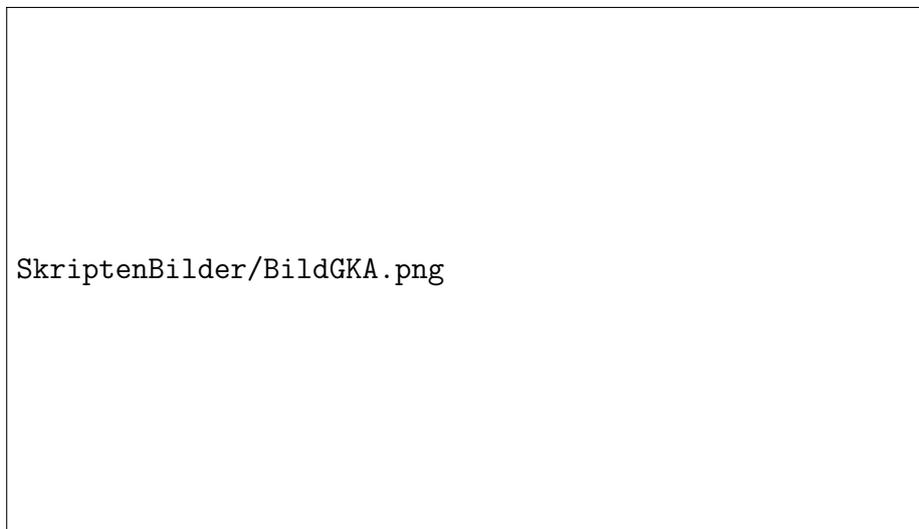
$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq (b - a)\varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ .  $\square$

**Satz 5.1.15. Potenzreihen dürfen gliedweise integriert und differenziert werden.** *Genauer gilt:*



Einige Glieder einer Funktionenfolge, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch nicht gegen das Integral der Nullfunktion konvergieren.



Einige Glieder einer Funktionenfolge vom Typ  $f_n = \frac{1}{n} \sin(nx)$ , die gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Ableitungen jedoch nicht gleichmäßig gegen die Ableitung der Nullfunktion konvergieren.

1. Ist die Funktion  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch die Potenzreihe  $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ , so konvergiert auch die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} a_{\nu} x^{\nu+1}$$

auf  $(-r, r)$ , und zwar gegen eine Stammfunktion von  $f$ .

2. Ist die Funktion  $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch die Potenzreihe  $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} x^{\nu}$ , so ist  $g$  differenzierbar und die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$$

konvergiert auf  $(-r, r)$  gegen die Ableitung  $g'$  unserer Funktion  $g$ .

*Beweis.* 1. Man wende den vorhergehenden Satz 5.1.14 auf die Folge  $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu}$  der Partialsummen an.

2. Wir zeigen zunächst, daß die Potenzreihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$  auch auf  $(-r, r)$  konvergiert. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert schon mal die Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^{\nu-1}$  für  $|z| < 1$ . Für  $|x| < r$  wählen wir nun ein  $\rho$  mit  $|x| < \rho < r$  und dazu eine Schranke  $B$  mit  $|b_{\nu} \rho^{\nu-1}| \leq B$  für alle  $\nu$ . Dann können wir abschätzen

$$|\nu b_{\nu} x^{\nu-1}| = |\nu b_{\nu} \rho^{\nu-1} (x/\rho)^{\nu-1}| \leq \nu B z^{\nu-1}$$

für  $z = |x/\rho| < 1$ . Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also die Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$ . Dann wissen wir aber nach Teil 1, daß für die Funktion  $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$  unser  $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} x^{\nu}$  eine Stammfunktion ist.  $\square$

**Definition 5.1.16.** Die  $n$ -te Ableitung einer Funktion  $f$  bezeichnen wir, falls sie existiert, mit  $f^{(n)}$ . Es ist also  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  und allgemein  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ .

5.1.17. Ist eine Funktion  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch die für  $x \in (-r, r)$  konvergente Potenzreihe  $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ , so folgt aus 5.1.15 sofort

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

Wenn also in anderen Worten eine fest vorgegebene Funktion  $f$  in einer Umgebung des Nullpunkts durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, so muß unsere Funktion dort beliebig oft differenzierbar sein und die fragliche Potenzreihe ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}$$

Diese Potenzreihe hinwiederum kann man ganz allgemein für jede in einer Umgebung des Nullpunkts beliebig oft differenzierbare Funktion erklären. Sie heißt dann die **Taylorreihe** besagter Funktion oder genauer ihre **Taylorreihe am Nullpunkt**, muß aber keineswegs positiven Konvergenzradius haben und muß, selbst wenn sie positiven Konvergenzradius hat, keineswegs gegen besagte Funktion konvergieren. Zum Beispiel hat nach 4.2.11 die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt die Ableitungen  $f^{(\nu)}(0) = 0 \quad \forall \nu \geq 0$ , aber es gilt dennoch  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ . Inwiefern die Taylorreihe dennoch unsere Funktion recht gut approximiert, erklären wir in 5.2.

**Definition 5.1.18 (Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten).** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ falls } k \geq 1 \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

**Proposition 5.1.19 (Binomische Reihe).** Für  $|x| < 1$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

5.1.20. Sobald wir komplexe Zahlen und in III.1.4.3 komplexe Exponenten eingeführt haben, wird der Leser erkennen, daß die Proposition mit demselben Beweis auch für  $x, \alpha \in \mathbb{C}$  gilt, vergleiche VIII.1.7.15. Aus unseren Überlegungen in 5.1.17 folgt auch unmittelbar, daß die Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung von  $(1+x)^\alpha$ , wenn es sie denn gibt, notwendig die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten sein müssen. Daß es aber eine derartige Entwicklung auch wirklich gibt, muß noch gezeigt werden. Also an die Arbeit!

*Beweis.* Für  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$  kennen wir diese Formel schon: Im Fall  $\alpha \in \mathbb{N}$  gilt  $\binom{\alpha}{k} = 0$  falls  $k > \alpha$  und wir erhalten einen Spezialfall der binomischen Formel I.3.4.6. Im Fall  $\alpha = -1$  gilt  $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$  und wir erhalten die geometrische Reihe 2.5.5 für  $-x$ . Unter der Annahme  $\alpha \notin \mathbb{N}$  sagt uns das Quotientenkriterium, daß die Potenzreihe rechts für  $|x| < 1$  konvergiert, sagen wir gegen die Funktion  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ich behaupte  $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ . Das prüft man durch gliedweises Differenzieren der binomischen Reihe mithilfe der Beziehung

$$\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = \binom{\alpha}{k}$$

die durch eine kurze Rechnung gezeigt wird. Aus  $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$  und  $f(0) = 1$  folgt aber bereits  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , denn setzt man  $\varphi(x) = f(x)/(1+x)^\alpha$ , so gilt  $\varphi(0) = 1$  und

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \quad \square$$

*Beispiel 5.1.21.* Die Darstellung

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

ergibt sich, indem wir die geometrische Reihe  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots$  gliedweise integrieren. Ähnlich ergibt sich die Entwicklung von  $\operatorname{arsinh}(x)$  in eine Potenzreihe, indem wir die binomische Reihe zu  $(1+x^2)^{-1/2}$  gliedweise integrieren.

*Beispiel 5.1.22.* Um die fünfte Ableitung bei  $x = 0$  von  $(e^{x^2} \sinh x)$  bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ e^{x^2} \sinh x &= x + x^3 \left( \frac{1}{3!} + 1 \right) + x^5 \left( \frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

wo wir einmal unsere Erkenntnisse über das Produkt absolut konvergenter Reihen verwendet haben, und die gesuchte fünfte Ableitung bei  $x = 0$  ergibt sich mit 5.1.17 zu

$$5! \left( \frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2} \right) = 1 + 20 + 60 = 81$$

5.1.23. Die Formel für die binomische Reihe kann umgeschrieben werden zur nun für alle  $y \in (0, 2)$  gültigen Darstellung

$$y^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (y-1)^k$$

Gehört allgemeiner ein Punkt  $p$  zum Definitionsbereich einer Funktion  $f$ , so bezeichnen wir eine Darstellung von  $f$  der Gestalt

$$f(p+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu h^\nu \quad \text{alias} \quad f(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (y-p)^\nu$$

als eine **Entwicklung von  $f$  in eine Potenzreihe um den Punkt  $p$** . Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt dann  $a_\nu = f^{(\nu)}(p)/\nu!$ . Ist allgemeiner  $f$  beliebig oft differenzierbar bei  $p$ , so erklären wir die **Taylorreihe von  $f$  zum Entwicklungspunkt  $p$**  als die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} h^\nu$$

Auch wenn die Partialsummen dieser Reihe nicht gegen  $f(p+h)$  konvergieren müssen, liefern sie doch die “bestmöglichen” Approximationen von  $f(p+h)$  durch Polynome in  $h$  von einem vorgegebenen maximalen Grad, wie wir im folgenden Abschnitt 5.2 ausführen werden.

*Ergänzende Übung 5.1.24.* Eine Funktion, die für jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in einer Umgebung besagten Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**. Wir werden erst in VIII.1.7.7 im Rahmen der Funktionentheorie zeigen, daß Potenzreihen analytische Funktionen liefern: Dort geht es mit den Tricks der Funktionentheorie sehr elegant, wir könnten es aber etwas weniger elegant auch hier schon zeigen. Man zeige: Stimmen zwei auf demselben reellen Intervall definierte analytische Funktionen auf der Umgebung eines Punktes aus unserem Intervall überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man betrachte das Supremum der Menge aller Punkte, an denen unsere beiden Funktionen übereinstimmen.

*Ergänzende Übung 5.1.25.* Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von  $\sqrt{1+x}$ ? Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von  $\sqrt{2+x}$ ? Gemeint ist jeweils die Entwicklung um  $x=0$ .

*Ergänzende Übung 5.1.26.* Wir würfeln mit einem Würfel eine unendlich lange Zahlenreihe. Anschaulich ist klar, daß der durchschnittliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einsen gerade Sechs sein muß. Betrachtet man nun die Wahrscheinlichkeiten, daß die nächste Eins beim nächsten Wurf, beim übernächsten Wurf etc. kommt, multipliziert sie jeweils mit Eins, Zwei etc. und summiert diese Produkte auf, so sollte sich auch dieser durchschnittliche Abstand ergeben. Die Aufgabe ist nun, zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

auch tatsächlich gegen 6 konvergiert.

## 5.2 Taylorentwicklung

5.2.1. Um im Folgenden auch den Fall  $n = 0$  zulassen zu dürfen, vereinbaren wir, daß “0-mal differenzierbar bei  $p$ ” zu verstehen sein soll als “stetig bei  $p$ ”.

**Satz 5.2.2 (Taylorentwicklung).** *Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall,  $p \in I$  ein Punkt und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, deren  $(n - 1)$ -te Ableitung  $f^{(n-1)}$  auf ganz  $I$  existiert und deren  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}(p)$  bei  $p$  existiert. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Polynom  $Q$  vom Grad  $\leq n$  mit der Eigenschaft*

$$f(x) = Q(x) + (x - p)^n \varepsilon(x - p)$$

*für eine Funktion  $\varepsilon$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .*

2. *Dieses Polynom kann auch charakterisiert werden als das eindeutig bestimmte Polynom  $Q$  vom Grad  $\leq n$ , dessen Ableitungen bei  $p$  bis zur  $n$ -ten Ableitung einschließlich mit den entsprechenden Ableitungen bei  $p$  unserer Funktion  $f$  übereinstimmen, in Formeln  $f^{(\nu)}(p) = Q^{(\nu)}(p)$  für  $0 \leq \nu \leq n$ .*

5.2.3. Wir nennen  $Q$  das **Approximationspolynom bis zur Ordnung  $n$  an  $f$  bei  $p$** . Der Graph des Approximationspolynoms bis zur ersten Ordnung heißt die **Tangente** an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(p, f(p))$ , der Graph des Approximationspolynoms bis zur zweiten Ordnung die **Schmiegeparabel**.

*Beweis.* Sicher gibt es genau ein Polynom  $Q$ , das die Bedingung aus Teil 2 erfüllt, nämlich das Polynom

$$Q(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}(x - p)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x - p)^n$$

das aus den ersten  $n + 1$  Termen der Taylorreihe von  $f$  beim Entwicklungspunkt  $p$  besteht. Betrachten wir für dieses Polynom  $Q$  die Differenz  $r = f - Q$ , so verschwinden die ersten  $n$  Ableitungen von  $r$  bei  $x = p$  und wir erhalten durch wiederholte Anwendung der Regeln von de l'Hospital 4.4.1 und die Definition von  $r^{(n)}(p)$  in der Tat

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{(x - p)^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow p} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n! (x - p)} = \frac{r^{(n)}(p)}{n!} = 0$$

Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß kein anderes Polynom  $\hat{Q}$  die Bedingung aus Teil 1 erfüllen kann. In der Tat folgt aber für zwei Polynome vom Grad  $\leq n$  aus

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\hat{Q}(x) - Q(x)}{(x - p)^n} = 0$$



Eine unvollkommene Darstellung der Tangente  $y = x + 1$  und Schmiegeparabel  $y = x^2/2 + x + 1$  an den Graph der Exponentialfunktion im Punkt  $(0, 1)$ .

nach 3.3.23 bereits  $\hat{Q}(x) = Q(x)$ .  $\square$

5.2.4. Wir können die Aussage des Satzes dahingehend umformulieren, daß gilt

$$f(p+h) = f(p) + f'(p)h + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h)$$

für eine Funktion  $\varepsilon$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . Schärfere Abschätzungen für das Restglied unter stärkeren Annahmen an die zu approximierende Funktion liefert die gleich folgende Proposition.

**Proposition 5.2.5 (Restglieddarstellungen zur Taylorentwicklung).**

*Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall,  $p \in I$  ein Punkt und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :*

**Lagrange'sche Form des Restglieds:** *Ist  $f$  sogar auf dem ganzen Intervall  $I$  und sogar  $(n+1)$ -mal differenzierbar, so gibt es für alle  $x \in I$  ein  $\xi$  zwischen  $p$  und  $x$  mit*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} (x-p)^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-p)^{n+1}$$

**Integraldarstellung des Restglieds:** *Ist  $f^{(n+1)}$  zusätzlich auch noch stetig auf ganz  $I$ , so gilt für alle  $x \in I$  die Formel*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} (x-p)^\nu + \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

*Beweis.* Wir kürzen die Summe wie zuvor mit  $\sum = Q(x)$  ab. Für den Rest  $r(x) = f(x) - Q(x)$  verschwinden, wie wir bereits wissen, die ersten  $n$  Ableitungen bei  $x = p$ , und unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen ist  $r$  sogar  $(n+1)$ -mal differenzierbar auf ganz  $I$  mit  $r^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ . Um daraus die beiden Darstellungen des Restglieds zu erhalten, brauchen wir nur zwei einfache Rechnungen.

1. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz und der Erkenntnis, daß Nenner und Zähler bei  $x = p$  verschwinden, erhalten wir unter der Annahme  $p \neq x$  sofort

$$\frac{r(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{r'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-p)^n} = \frac{r''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-p)^{n-1}} = \dots = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

2. Durch wiederholtes partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} r(x) &= \int_p^x r'(t) dt = \int_p^x (x-t)r''(t) dt = \frac{1}{2} \int_p^x (x-t)^2 r'''(t) dt \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n r^{(n+1)}(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

5.2.6. Diese Abschätzungen liefern umgekehrt auch zwei alternative Beweise für den Satz über die Taylorentwicklung. Allerdings benötigen diese alternativen Beweise wesentlich stärkere Voraussetzungen als unser ursprünglicher Beweis.

*Ergänzende Übung 5.2.7.* Ist eine Funktion auf einem offenen Intervall  $n$ -mal stetig differenzierbar für  $n \geq 1$  und verschwinden an einer Stelle  $p$  alle ihre höheren Ableitungen unterhalb der  $n$ -ten, so hat sie bei  $p$  ein isoliertes lokales Maximum bzw. Minimum, falls  $n$  gerade ist und die  $n$ -te Ableitung bei  $p$  negativ bzw. positiv, und kein lokales Extremum, falls  $n$  ungerade ist. Wem diese Übung zu einfach ist, der mag dasselbe zeigen unter der schwächeren Annahme, daß  $f^{(n-1)}$  zwar bei  $p$ , aber nicht notwendig auf dem ganzen Intervall differenzierbar ist.

### 5.3 Rechnen mit Approximationen

**Definition 5.3.1.** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei auf einer Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}$  definierte Funktionen. Sei  $p \in D$  ein Punkt und  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl. Wir sagen,  $f$  und  $g$  **stimmen bei  $p$  überein bis zur Ordnung  $n$**  und schreiben

$$f \sim_p^n g \quad \text{oder genauer} \quad f(x) \sim_{x=p}^n g(x)$$

genau dann, wenn gilt  $f(p+h) = g(p+h) + h^n \varepsilon(h)$  für eine Funktion  $\varepsilon$ , die stetig ist bei Null mit Funktionswert  $\varepsilon(0) = 0$ , und die eben definiert ist auf der Menge aller  $h$  mit  $p+h \in D$ .

5.3.2. Die Notation  $f \sim_p^n g$  scheint mir bequem und suggestiv, sie ist jedoch unüblich. Häufig nennt man eine Funktion, die bei  $x = 0$  mit der Nullfunktion übereinstimmt bis zur Ordnung  $n$ , auch ein **kleines  $o$  von  $x^n$**  und bezeichnet so eine Funktion mit  $o(x^n)$ . In dieser Notation würde man statt  $f \sim_p^n g$  schreiben  $f(x) = g(x) + o((x-p)^n)$ .

5.3.3. Natürlich folgt aus  $f \sim_p^n g$  und  $g \sim_p^n h$  schon  $f \sim_p^n h$ . Sind  $P$  und  $Q$  Polynome vom Grad  $\leq n$  und ist  $p$  ein Häufungspunkt von  $D$ , so folgt aus  $P \sim_p^n Q$  schon  $P = Q$ . Der Satz über die Taylorentwicklung 5.2.2 liefert uns für eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f$  auf einem halboffenen Intervall  $D$  das eindeutig bestimmte Polynom  $Q$  vom Grad  $\leq n$ , das bei  $p$  mit  $f$  übereinstimmt bis zur Ordnung  $n$ . Genauer besagt dieser Satz, daß dieses

Polynom  $Q$  charakterisiert wird durch die Bedingungen  $Q^{(\nu)}(p) = f^{(\nu)}(p)$  für  $0 \leq \nu \leq n$ .

**Satz 5.3.4 (Rechnen mit Approximationen).** 1. Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei auf einer Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}$  definierte Funktionen. Sei  $p \in D$  ein Punkt und seien  $P, Q$  Polynome mit  $f \sim_p^n P$  und  $g \sim_p^n Q$ . So folgt

$$f + g \sim_p^n P + Q \quad \text{und} \quad fg \sim_p^n PQ$$

2. (**Höhere Kettenregel**). Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  auf Teilmengen  $D, E \subset \mathbb{R}$  definierte Funktionen mit  $f(D) \subset E$ . Sei  $p \in D$  ein Punkt und seien  $P, Q$  Polynome mit  $f \sim_p^n P$  und  $g \sim_{f(p)}^n Q$ . So folgt

$$g \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

5.3.5. Im Fall  $n = 0$  spezialisiert dieser Satz zur Stetigkeit von Summen und Produkten 3.1.16 sowie Verknüpfungen 3.1.6. Im Fall  $n = 1$  spezialisiert er zur Summenregel 4.2.1, Produktregel 4.2.1 und Kettenregel 4.2.5.

*Beweis.* 1. Das bleibt dem Leser überlassen. Im Fall der Summe gilt das sogar für beliebige Funktionen  $P$  und  $Q$ , im Fall des Produkts reicht anstelle der Polynomialität die zusätzliche Annahme, daß  $P$  und  $Q$  in einer Umgebung von  $p$  beschränkt sind.

2. Wir zeigen zunächst  $g \circ f \sim_p^n Q \circ f$  und dann  $Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$ . Für die erste Aussage schreiben wir  $g(y) = Q(y) + (y - f(p))^n \varepsilon(y - f(p))$  für  $\varepsilon$  stetig bei Null mit Funktionswert Null. Durch Einsetzen von  $y = f(x)$  und Erweitern des letzten Terms mit  $(x - p)^n$  erhalten wir

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + (x - p)^n \left[ \left( \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right)^n \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle  $x \neq p$ . Im Fall  $n \geq 1$  stimmt  $f$  bei  $p$  bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit dem Polynom  $P$ , folglich ist  $f$  differenzierbar bei  $p$  und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für  $x \rightarrow p$  gegen Null. Im Fall  $n = 0$  stimmt  $f$  bei  $p$  bis zur Ordnung 0 überein mit dem Polynom  $P$ , also ist  $f$  zumindest stetig in  $p$  und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für  $x \rightarrow p$  wieder gegen Null. Wir müssen also nur noch für jedes Polynom  $Q$  zeigen

$$Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

Das folgt jedoch sofort aus Teil 1. □

*Beispiel 5.3.6.* Um die sechste Ableitung bei  $x = 0$  von  $1/\cosh(x)$  zu berechnen, erinnern wir uns an

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ (1+y)^{-1} &= 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6 \dots\end{aligned}$$

wo wir Gleichheitszeichen und Pünktchen geschrieben haben statt  $\sim^6$  mit entsprechenden Spezifikationen. Mit unserer "höheren Kettenregel" 5.3.4 erhalten wir dann sofort

$$\begin{aligned}1/\cosh(x) &= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^3 + \dots\end{aligned}$$

Als Koeffizient von  $x^6$  ergibt sich

$$-\frac{1}{6!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6!}(-1 + 30 - 90) = -\frac{61}{6!}$$

und die fragliche sechste Ableitung bei  $x = 0$  ist mithin  $-61$ . Eine andere Möglichkeit wäre, das Approximationspolynom sechsten Grades an  $1/\cosh(x)$  in  $x = 0$  als  $a_0 + a_1x + \dots + a_6x^6$  anzusetzen und aus der "höheren Produktregel" die Gleichung

$$\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) (a_0 + a_1x + \dots + a_6x^6) = 1 + bx^8 + \dots$$

zu folgern, die es uns hinwiederum erlaubt, induktiv die  $a_\nu$  zu bestimmen. Diese Rechnung kann im vorliegenden Fall zusätzlich vereinfacht werden durch die Erkenntnis, daß eh gilt  $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$ , da unsere Funktion nämlich gerade ist.

*Übung 5.3.7.* Gegeben zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen auf einem Intervall ist die Taylorreihe ihrer Summe die Summe der Taylorreihen und die Taylorreihe des Produkts das Produkt der Taylorreihen. Hier verstehen wir Produkt und Summe von Potenzreihen im formalen Sinn, vergleiche ??.

*Ergänzende Übung 5.3.8.* Man zeige, daß die Identitäten  $\exp(\log(x+1)) = x+1$  und  $\log((e^x-1)+1) = x$  auch als formale Identitäten von Potenzreihen gelten, daß also etwa im ersten Fall für  $k \geq 2$  gilt

$$\sum_{j(1)+\dots+j(i)=k} \frac{1}{i!} \left( \frac{-(-1)^{j(1)}}{j(1)} \right) \dots \left( \frac{-(-1)^{j(i)}}{j(i)} \right) = 0$$

wo die Summe über alle  $i \geq 1$  und alle Abbildungen  $j : \{1, \dots, i\} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$  läuft, bei denen  $k$  die Summe der Werte ist, wohingegen dieselbe Summe für  $k = 1$  gerade den Wert Eins ergibt. Allgemeiner führe man aus, inwiefern die Taylorreihe der Verknüpfung zweier unendlich oft differenzierbarer Funktionen gerade die Verknüpfung ihrer Taylorreihen ist.

*Ergänzung 5.3.9.* Wir zeigen nun die in 1.3.1.8 versprochene Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

für die ebendort eingeführten Catalan-Zahlen  $C_n$ . Diese Zahlen erfüllen offensichtlich die Rekursion

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$

Die **erzeugende Funktion** der Folge der Catalan-Zahlen alias die formale Potenzreihe  $P = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$  erfüllt demnach im Ring der formalen Laurentreihen aus ?? die Formel  $xP^2 = P - 1$  alias  $P^2 - \frac{1}{x}P + \frac{1}{x} = 0$ . Damit folgt, immer im Ring der formalen Laurentreihen, eine Identität der Form

$$P = \frac{1}{2x} \pm \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

falls die fragliche Wurzel im Ring der formalen Laurentreihen existieren sollte, wobei das Vorzeichen noch zu bestimmen ist. Nach 5.3.7 existiert diese Wurzel jedoch in der Tat und kann beschrieben werden durch die binomische Reihe

$$\sqrt{1 - 4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

Deren konstanter Term ist Eins, so daß für unser Vorzeichen nur das Minus in Frage kommt. Damit muß notwendig gelten

$$P = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Die Koeffizienten unserer binomischen Reihe lassen sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} (-1)^n 4^n &= \frac{1}{n!} \binom{1}{2} \binom{-1}{2} \binom{-3}{2} \cdots \binom{-2n+3}{2} (-1)^n 4^n \\ &= -\frac{1}{n!} (1 \cdot 3 \cdots (2n-3)) 2^n \\ &= \frac{-2(2(n-1))!}{(n-1)!(n-1)!} \end{aligned}$$

wobei die letzte Identität nur für  $n \geq 1$  stimmt. Setzen wir nun alles zusammen, so ergibt sich wie gewünscht

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## 5.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz\*

5.4.1. In diesem Abschnitt will ich mein Versprechen einlösen und die Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

zeigen. Wenn wir  $x = 1$  in die Reihenentwicklung von  $\log(1+x)$  einsetzen dürften, so folgte das sofort. Die Schwierigkeit liegt darin, daß wir bisher nur für  $|x| < 1$  nachgewiesen haben, daß unsere Potenzreihe aus 5.1.21 gegen  $\log(1+x)$  konvergiert. Der folgende Satz hilft uns, diese Schwierigkeit zu überwinden, und wird auch in 7.6.16 bei der Herleitung der wunderbaren Formel  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$  benötigt. Beide Formeln sehe aber mehr als schöne Blüten und weniger als zentrale Inhalte an, und davon abgesehen spielt der abelsche Grenzwertsatz im weiteren Verlauf der Vorlesung keine Rolle.

**Satz 5.4.2 (Abel'scher Grenzwertsatz).** *Konvergiert eine Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihres Konvergenzbereichs, so stellt sie bis in diesen Randpunkt hinein eine stetige Funktion dar.*

*Vorschau 5.4.3.* Für diejenigen Leser, die bereits mit komplexen Potenzreihen vertraut sind, sei bemerkt, daß die entsprechende Aussage im Komplexen in dieser Form nicht mehr gilt. Mehr dazu finden Sie etwa in VIII.1.7.14.

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $x = 1$  der besagte Randpunkt des Konvergenzbereichs ist. Sei also  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Wir müssen zeigen, daß die Reihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  für  $x \in [0, 1]$  eine stetige Funktion darstellt. Dazu schreiben wir die Differenzen der Partialsummen in der Form

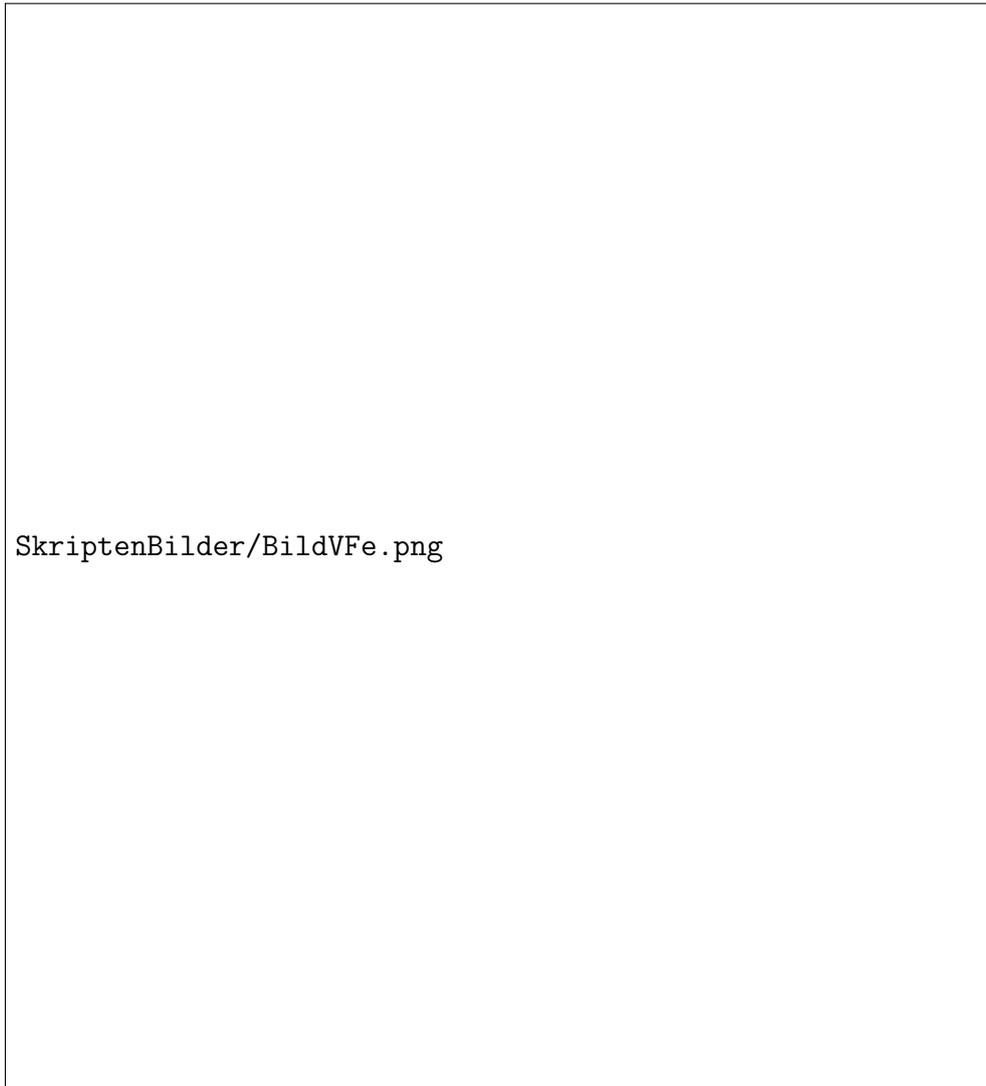
$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m a_k x^k &= (x^n - x^{n+1}) (a_n) \\ &+ (x^{n+1} - x^{n+2}) (a_n + a_{n+1}) \\ &+ (x^{n+2} - x^{n+3}) (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &\dots \dots \\ &+ (x^{m-1} - x^m) (a_n + \dots + a_{m-1}) \\ &+ x^m (a_n + \dots + a_{m-1} + a_m) \end{aligned}$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  finden wir nun wegen der Konvergenz unserer Reihe ein  $N$  derart, daß für alle  $n, m$  mit  $N \leq n \leq m$  gilt  $|a_n + \dots + a_m| \leq \varepsilon$ . Für alle  $n, m$  mit  $N \leq n \leq m$  und alle  $x \in [0, 1]$  folgt daraus die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k x^k \right| \leq (x^n - x^m) \varepsilon + x^m \varepsilon \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Partialsummen auf  $[0, 1]$  und damit die Stetigkeit der Grenzfunktion.  $\square$

*Vorschau* 5.4.4. Läßt sich die durch eine Potenzreihe im Inneren des Konvergenzintervalls definierte Funktion stetig auf einen Randpunkt fortsetzen, so muß die Potenzreihe an besagtem Randpunkt keineswegs konvergieren. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß das Konvergenzintervall  $(-1, 1)$  ist und der fragliche Randpunkt die 1, so folgt die Konvergenz von  $\sum a_n$  jedoch aus der stetigen Fortsetzbarkeit der Funktion  $\sum a_n x^n$  von  $x \in [0, 1)$  auf  $[0, 1]$  zusammen mit der **Tauber-Bedingung**, daß die Folge  $na_n$  betragsmäßig beschränkt sein möge. Unter der stärkeren Annahme  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$  wurde das bereits von Tauber gezeigt.



Die Darstellung der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (y/4, x/4)$  als ebenes Vektorfeld. Als Abbildung der Ebene auf sich selber beschreibt sie eine Stauchung um den Faktor 4 gefolgt von einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen  $y = x$ .

## 6 Stetigkeit in mehreren Veränderlichen

### 6.1 Vorschläge zur Veranschaulichung

6.1.1. Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  schreiben wir in der Form

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

oder abkürzend  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Man kann sich derartige Abbildungen auf die verschiedensten Arten vorstellen.

1. Den Fall  $n = m = 1$  hatten wir schon in 3.1.1 ausführlich behandelt und sogar etwas allgemeiner mögliche Interpretationen einer Abbildung von  $\mathbb{R}$  in einen beliebigen Raum bzw. von einem beliebigen Raum nach  $\mathbb{R}$  besprochen: Erstere kann man sich etwa veranschaulichen als Beschreibung der Bewegung eines Teilchens in besagtem Raum, Letztere als eine Temperaturverteilung auf besagtem Raum.
2. Im Fall  $n + m = 3$  kann man sich die Abbildung  $f$  ähnlich wie im Fall  $n = m = 1$  durch ihren Graphen  $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$  bzw.  $\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$  veranschaulichen. Der Graph einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist anschaulich eine hügelige Landschaft. Der Graph einer Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sieht aus wie ein Draht im  $\mathbb{R}^3$  mit genau einem Punkt für jede vorgegebene  $x$ -Koordinate. Zum Beispiel ist der Graph jeder konstanten Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Parallele zur  $x$ -Achse und der Graph jeder konstanten Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine "vollständig platte Landschaft" alias eine zur  $(x, y)$ -Ebene parallele Ebene.
3. Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann man auch graphisch darstellen, indem man auf der Ebene  $\mathbb{R}^2$  die **Niveaulinien** einzeichnet, die im Bild der Hügellandschaft die Höhenlinien in einer Landkarte für unsere Landschaft wären, in Formeln die Mengen  $\{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$  für verschiedene, meist äquidistant gewählte  $c \in \mathbb{R}$ . Auch eine Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kann man sich noch mithilfe ihrer analog definierten **Niveauflächen** vorstellen, aber mit dem Zeichnen wird es dann schon schwierig.
4. Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kann man sich vorstellen als ein Vektorfeld, jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  wird ja in der Tat ein Vektor  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet.
5. Es ist auch oft nützlich, sich  $f$  wirklich als eine Abbildung vorzustellen. Die Abbildung  $x \mapsto (x, x)$  ist in diesem Bild zum Beispiel die diagonale



Die Niveaulinien und der Graph der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ . Der Graph dieser Funktion hat die Gestalt einer Eistüte mit dem Öffnungswinkel  $90^\circ$ , die mit ihrer Spitze senkrecht auf den Ursprung in der  $xy$ -Ebene steht.



Die Darstellung als bewegtes Teilchen und der Graph der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $z \mapsto (\cos(2\pi z/(0, 4)), \sin(2\pi z/(0, 4)))$ . Anders als im Text haben wir hier eine Funktion der  $z$ -Koordinate dargestellt.

Einbettung der Zahlengerade in die Ebene, und  $(x, y) \mapsto (y, x)$  ist die Spiegelung am Bild unserer diagonalen Einbettung.

6.1.2. Ich will den Begriff der Stetigkeit nun statt für Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gleich im allgemeineren Rahmen der sogenannten “metrischen Räume” diskutieren, bei dem die bisherige stark von Koordinaten abhängige Darstellung von einer mehr abstrakt-geometrischen Sichtweise abgelöst wird. Dieser koordinatenfreie Zugang benötigt zwar einen größeren begrifflichen Aufwand, aber ich denke, dieser Aufwand lohnt, und zwar aus den folgenden Gründen: Erstens umfaßt unser Rahmen so auch unendlichdimensionale Räume wie zum Beispiel die für die Quantenmechanik wichtigen Hilberträume. Zweitens treten in meinen Augen auch schon im endlichdimensionalen Kontext die Zusammenhänge bei einer koordinatenfreien Behandlung klarer hervor. Man kennt das aus der Physik: Rechnet man wie üblich mit Einheiten, die ja mathematisch schlicht Basen eindimensionaler Vektorräume sind, so treten auch die Konsistenz und der Sinn physikalischer Formeln viel klarer zu Tage, als wenn man mit bloßen Zahlen arbeitet.

## 6.2 Stetigkeit bei metrischen Räumen

**Definition 6.2.1.** Unter einer **Metrik**  $d$  auf einer Menge  $X$  versteht man eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  derart, daß für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar  $X = (X, d)$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Metrik  $d$  auf  $X$ .

*Beispiel 6.2.2.* Der Buchstabe  $d$  steht in diesem Zusammenhang vermutlich für das Wort “Distanz”. Auf dem  $\mathbb{R}^n$  liefert der übliche **euklidische Abstand**  $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$  eine Metrik. Die Ungleichung aus der Definition einer Metrik wird in diesem Beispiel in ?? formal bewiesen und bedeutet anschaulich, daß in einem Dreieck mit Seitenlängen  $a, b, c$  stets gilt  $a \leq b + c$ . Sie heißt deshalb auch ganz allgemein die **Dreiecksungleichung**.

*Beispiel 6.2.3.* Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist auch der **Betragsabstand**

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$



Illustration zur Dreiecksungleichung

eine Metrik. Wenn nichts anderes gesagt ist, fassen wir den  $\mathbb{R}^n$  stets auf als einen metrischen Raum mit dem Betragsabstand als Metrik. Diese Metrik ist zwar weniger anschaulich als der euklidische Abstand, läßt sich aber einfacher handhaben.

*Beispiel 6.2.4.* Jede Teilmenge eines metrischen Raums ist mit der **induzierten Metrik** selbst ein metrischer Raum.

**Definition 6.2.5.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Für  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  bezeichne

$$B(x; \varepsilon) = \{z \in X \mid d(x, z) < \varepsilon\}$$

den  $\varepsilon$ -Ball um  $x$  oder auch die  $\varepsilon$ -Kugel um  $x$  oder auch die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ .

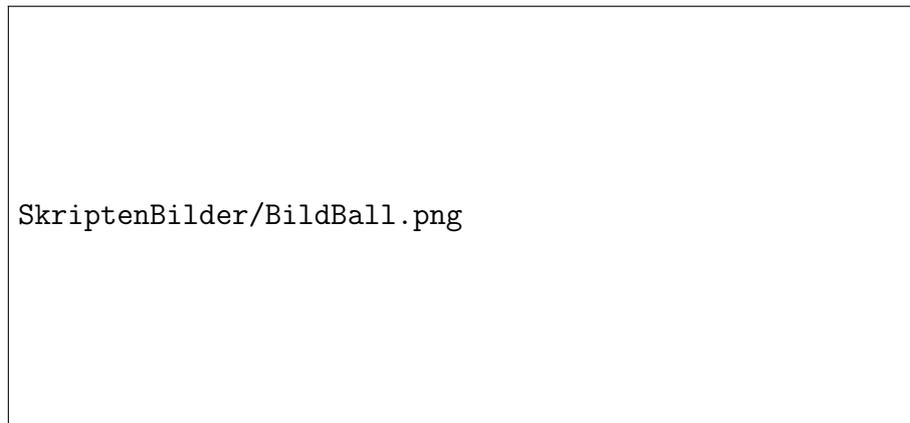
*Beispiel 6.2.6.* Für den euklidischen Abstand im  $\mathbb{R}^3$  ist der Ball um  $x$  mit Radius  $\varepsilon$  anschaulich tatsächlich ein Ball. Für den Betragsabstand hat  $B(x; \varepsilon)$  dahingegen die Gestalt eines Würfels mit Mittelpunkt  $x$  und Seitenlänge  $2\varepsilon$ .

**Definition 6.2.7.** Unter einer **Umgebung** eines Punktes in einem metrischen Raum versteht man eine Teilmenge von besagtem Raum, die einen ganzen Ball um unseren Punkt umfaßt.

6.2.8. Die Umgebungen eines Punktes im  $\mathbb{R}^n$  bezüglich der euklidischen Metrik sind dieselben wie seine Umgebungen bezüglich der Betragsmetrik, was man unschwer explizit prüft und was formal auch aus 6.9.21 folgen wird. Das ist der Grund dafür, daß wir im Folgenden Definitionen nach Möglichkeit mithilfe von Umgebungen formulieren, denn für so definierte Begriffe ist a priori klar, daß im Fall des  $\mathbb{R}^n$  ihre Bedeutung nicht davon abhängt, ob wir mit dem euklidischen Abstand oder mit dem Betragsabstand arbeiten.

6.2.9. Der Schnitt von endlich vielen Umgebungen eines Punktes in einem metrischen Raum ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums besitzen disjunkte Umgebungen. Genauer sind für  $x, y$  mit  $d(x, y) = r > 0$  die  $(r/2)$ -Bälle um  $x$  und  $y$  disjunkt. In der Tat folgte für  $z$  aus dem Schnitt ja mit Hilfe der Dreiecksungleichung  $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < r$ , also kann es solch ein  $z$  nicht geben.

**Definition 6.2.10.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen heißt **stetig im Punkt**  $p \in X$  genau dann, wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $f(p)$  eine Umgebung  $U'$  von  $p$  gibt mit  $f(U') \subset U$ . Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.



Bälle in der Ebene für den Betragsabstand und den euklidischen Abstand

6.2.11. Unter einer **Umgebungsbasis** eines Punktes versteht man eine Menge von Umgebungen besagten Punktes derart, daß jede seiner Umgebungen mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt. Zum Beispiel bilden alle  $\varepsilon$ -Umgebungen eines Punktes eine solche Umgebungsbasis. Um die Stetigkeit einer Abbildung  $f$  in einem Punkt  $p$  nachzuweisen, müssen wir offensichtlich nur für alle Mengen aus einer Umgebungsbasis seines Bildes  $f(p)$  prüfen, daß es jeweils eine Umgebung von  $p$  gibt, die dahinein abgebildet wird. Gleichbedeutend zur Stetigkeit einer Abbildung  $f$  im Punkt  $p$  ist also insbesondere die Forderung, daß es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  gibt derart, daß gilt  $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \varepsilon)$ .

*Beispiel 6.2.12.* Einfache Beispiele für stetige Abbildungen sind Einbettungen von einem Teilraum, konstante Abbildungen, oder auch die Projektion eines  $\mathbb{R}^n$  auf eine Koordinate. In diesen Fällen können wir einfach  $\delta = \varepsilon$  nehmen.

*Beispiel 6.2.13.* Als etwas kompliziertere Beispiele bemerken wir, daß **die Addition und die Multiplikation**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x+y$  bzw.  $(x, y) \mapsto xy$  **stetig sind**. Das ist im Wesentlichen die Aussage der ersten beiden Teile von Lemma 2.1.37.

6.2.14 (**Partiell stetig impliziert nicht stetig**). Es gibt Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  derart, daß sowohl  $x \mapsto f(x, b)$  als auch  $y \mapsto f(a, y)$  stetig sind für alle  $b$  bzw. alle  $a$ , daß aber dennoch die Funktion  $f$  selbst *nicht* stetig ist. Als Beispiel betrachte man die Funktion mit  $(x, y) \mapsto xy/(x^2 + y^2)$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$  und  $(0, 0) \mapsto 0$ . Sie ist nicht stetig am Nullpunkt nach dem anschließenden Satz 6.2.15, da nämlich ihre Verknüpfung mit  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (t, t)$  nicht stetig ist bei  $t = 0$ . Die Stetigkeit von  $t \mapsto (t, t)$  hinwiederum mag man aus der Komponentenregel 6.2.18 folgern. Der Anschauung mag die Erkenntnis helfen, daß unsere merkwürdige Funktion, wenn man vom Ursprung selbst einmal absieht, auf allen Geraden durch den Ursprung konstant ist. Auf den beiden Koordinatenachsen ist unsere Funktion konstant Null, auf allen anderen Geraden durch den Ursprung jedoch nimmt sie nur am Ursprung den Wert Null an und sonst konstant einen von Null verschiedenen Wert.

**Satz 6.2.15.** *Jede Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig.*

*Beweis.* Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen zwischen metrischen Räumen und  $p \in X$  ein Punkt. Wir zeigen genauer: Ist  $f$  stetig bei  $p$  und  $g$  stetig bei  $f(p)$ , so ist  $(g \circ f)$  stetig bei  $p$ . Ist in der Tat  $g$  stetig bei  $f(p)$ , so finden wir für jede Umgebung  $U$  von  $g(f(p))$  eine Umgebung  $U'$  von  $f(p)$  mit  $g(U') \subset U$ . Ist zusätzlich  $f$  stetig bei  $p$ , finden wir für diese Umgebung  $U'$  von  $f(p)$  weiter eine Umgebung  $U''$  von  $p$  mit  $f(U'') \subset U'$ . Damit haben wir aber auch eine Umgebung  $U''$  von  $p$  gefunden mit  $(g \circ f)(U'') \subset U$ .  $\square$

**Definition 6.2.16.** Gegeben metrische Räume  $(X_i, d_i)$  für  $1 \leq i \leq n$  machen wir das Produkt  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  zu einem metrischen Raum durch die **Produktmetrik**, indem wir für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  vereinbaren

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

*Beispiel 6.2.17.* Der Betragsabstand auf  $\mathbb{R}^{n+m}$  ist die Produktmetrik zu den Betragsabständen auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposition 6.2.18 (Komponentenregel).** *Seien  $Z$  und  $X_1, \dots, X_n$  metrische Räume und  $f_i : Z \rightarrow X_i$  Abbildungen. Genau dann ist die Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_n) : Z \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$  stetig, wenn alle  $f_i$  stetig sind.*

6.2.19. Wenden wir diese Proposition an mit  $f$  der Identität auf einem Produkt, so impliziert die Stetigkeit der Identität, daß alle Projektionsabbildungen  $\text{pr}_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$  stetig sein müssen.

*Beweis.* Da die Projektionen  $\text{pr}_i$  Abstände zwischen Punkten nie vergrößern, können wir ihre Stetigkeit direkt zeigen, "indem wir jeweils  $\delta = \varepsilon$  nehmen". Ist  $f$  stetig, so sind folglich auch die  $f_i = \text{pr}_i \circ f$  stetig als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. Sind umgekehrt alle  $f_i$  stetig in  $p$ , so gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  gewisse  $\delta_i$  mit  $d(p, z) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(p), f_i(z)) < \varepsilon$ , wo  $d_i$  die Metrik auf  $X_i$  bezeichnet. Nehmen wir  $\delta = \inf \delta_i$ , so gilt

$$d(p, z) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(z)) < \varepsilon$$

und das ist gleichbedeutend zu  $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \varepsilon)$ . □

**Korollar 6.2.20 (Summen und Produkte stetiger Abbildungen sind stetig).** *Ist  $X$  ein metrischer Raum und sind  $f, g$  stetige Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , so sind auch  $f + g$  und  $fg$  stetige Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Wir schreiben  $f + g$  bzw.  $fg$  als die Verknüpfung der nach 6.2.18 stetigen Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (f(x), g(x))$  mit der nach 6.2.13 stetigen Addition bzw. Multiplikation  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . □

*Beispiel 6.2.21.* Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto (x \sinh(y), x^2 y^3)$$

ist stetig. In der Tat reicht es nach der Komponentenregel zu zeigen, daß ihre beiden Komponenten  $f_1$  und  $f_2$  stetig sind. Wir zeigen das nur für die erste Komponente und überlassen die Behandlung der zweiten Komponente dem Leser. Warum also ist die Abbildung  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x \sinh(y)$  stetig?

Nun,  $(x, y) \mapsto x$  ist stetig nach 6.2.19 als Projektion auf eine Koordinate,  $(x, y) \mapsto y$  desgleichen,  $(x, y) \mapsto \sinh(y)$  dann auch als Verknüpfung stetiger Funktionen, und schließlich auch  $(x, y) \mapsto x \sinh(y)$  als Produkt stetiger Funktionen.

*Übung 6.2.22.* Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so ist für alle  $z \in X$  die Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto d(x, z)$  stetig. Hinweis: Dreiecksungleichung. Ist allgemeiner  $A \subset X$  eine nichtleere Teilmenge, so ist auch die Abbildung  $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$  stetig.

*Übung 6.2.23.* Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so ist die Metrik stetig als Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Übung 6.2.24.* Wir versehen den Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  mit der Metrik  $d(z, w) = |z - w|$ . Man zeige, daß das in der Tat eine Metrik ist, und daß die Addition und die Multiplikation stetige Abbildungen  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind und das Bilden des Inversen eine stetige Abbildung  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ .

*Ergänzende Übung 6.2.25.* Man zeige, daß das Invertieren von Matrizen eine stetige Abbildung  $GL(n; \mathbb{C}) \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$  ist. Hinweis: Cramer'sche Regel ??.

*Übung 6.2.26.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von metrischen Räumen, die Abstände nicht verkleinert, in Formeln  $d(f(x), f(z)) \geq d(x, z) \quad \forall x, z \in X$ . Man zeige, daß  $f$  injektiv ist und  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  stetig.

### 6.3 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen

**Definition 6.3.1.** Sei  $\mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $n \mapsto x_n$  eine Folge in einem metrischen Raum  $X$  und  $x \in X$  ein Punkt. Wir sagen, die Folge  $x_n$  **strebt gegen**  $x$  oder **konvergiert gegen**  $x$  und nennen  $x$  den **Grenzwert der Folge** und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

genau dann, wenn jede Umgebung von  $x$  fast alle Glieder unserer Folge enthält. Gleichbedeutend können wir ebensogut auch fordern, daß jeder Ball um  $x$  fast alle Glieder unserer Folge enthält.

6.3.2. Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig, wenn er existiert. Das folgt wie im Beweis von 2.1.21 daraus, daß nach 6.2.9 je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums disjunkte Umgebungen besitzen.

*Übung 6.3.3.* Sei  $(x_n, y_n)$  eine Folge im Produkt  $X \times Y$  der metrischen Räume  $X$  und  $Y$ . Genau dann konvergiert unsere Folge gegen  $(x, y)$ , wenn  $x_n$  gegen  $x$  konvergiert und  $y_n$  gegen  $y$ . Man formuliere und beweise auch die offensichtliche Verallgemeinerung auf beliebige endliche Produkte metrischer Räume.



Illustration zur Konvergenz von Folgen. Eingezeichnet sind drei Umgebungen eines Punktes  $x$ , in jeder sollen fast alle Folgenglieder liegen.

**Definition 6.3.4.** Ein metrischer Raum heißt **beschränkt** genau dann, wenn es für die möglichen Abstände zwischen Punkten unseres Raums eine reelle obere Schranke gibt. Eine Abbildung in einen metrischen Raum heißt **beschränkt** genau dann, wenn ihr Bild beschränkt ist.

*Beispiel 6.3.5.* Sei  $D$  eine Menge und  $X$  ein metrischer Raum. Auf dem Raum  $\text{Ens}^b(D, X)$  aller beschränkten Abbildungen  $f : D \rightarrow X$  kann man eine Metrik erklären durch die Vorschrift

$$d(f, g) = \sup\{d(f(p), g(p)) \mid p \in D\}$$

im Fall  $D \neq \emptyset$  und in offensichtlicher Weise im Fall  $D = \emptyset$ . Diese Metrik heißt die **Metrik der gleichmäßigen Konvergenz**. In der Tat ist für  $f_n, f$  im Funktionenraum  $\text{Ens}^b(D, \mathbb{R})$  mit dieser Metrik die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

gleichbedeutend dazu, daß die Abbildungen  $f_n$  im Sinne unserer Definition 5.1.8 gleichmäßig gegen die Abbildung  $f$  konvergieren.

**Definition 6.3.6 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz).** Sei  $D$  eine Menge,  $X$  ein metrischer Raum,  $f_n : D \rightarrow X$  eine Folge von Abbildungen und  $f : D \rightarrow X$  eine weitere Abbildung.

1. Wir sagen, die Folge der  $f_n$  **konvergiere punktweise** gegen  $f$  genau dann, wenn gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p)$  für alle Punkte  $p \in D$ .
2. Wir sagen, die Folge der  $f_n$  **konvergiere gleichmäßig** gegen  $f$  genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N_\varepsilon$  gibt mit

$$n \geq N \Rightarrow (d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon \forall p \in D)$$

*Übung 6.3.7.* Für beschränkte Abbildungen von einer Menge  $D$  in einen metrischen Raum  $X$  ist auch in dieser Allgemeinheit gleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend zur Konvergenz im Raum  $\text{Ens}^b(D, X)$  mit seiner eben erklärten “Metrik der gleichmäßigen Konvergenz”.

*Übung 6.3.8.* Für jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist die Menge der Folgenglieder beschränkt.

*Übung 6.3.9 (Stetigkeit als Folgenstetigkeit).* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von metrischen Räumen. Genau dann ist  $f$  stetig in  $p$ , wenn für jede Folge  $x_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p)$ . Hinweis: 3.3.29.

## 6.4 Abgeschlossene und offene Teilmengen

**Definition 6.4.1.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $x \in X$  heißt ein **Berührungspunkt von  $A$**  genau dann, wenn es eine Folge in  $A$  gibt, die gegen  $x$  konvergiert. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in  $X$**  genau dann, wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält, wenn sie also “abgeschlossen ist unter der Bildung von Grenzwerten”. Statt “ $A$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ ” schreiben wir kurz aber unüblich

$$A \triangleleft X$$

6.4.2. Wenn wir eine Menge einfach nur “abgeschlossen” nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum  $X$  dies “abgeschlossen” gemeint ist. Ist  $X$  ein metrischer Raum und sind  $U \subset Y \subset X$  Teilmengen, so meint  $U \triangleleft Y$ , daß  $U$  abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums  $Y$  mit seiner induzierten Metrik.

*Übung 6.4.3.* Der Schnitt eines beliebigen Systems von abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen. Jede einpunktige und damit auch jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Jedes kompakte reelle Intervall ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ .

*Ergänzende Übung 6.4.4.* Ein Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im kartesischen Produkt unserer beiden Räume. Hinweis: 6.3.9

*Ergänzende Übung 6.4.5.* Jede abgeschlossene echte Untergruppe der reellen Zahlengeraden ist zyklisch, als da heißt von der Gestalt  $\mathbb{Z}\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Hinweis: Ist  $G \subset \mathbb{R}$  unsere Untergruppe, so betrachte man  $\inf(G \cap \mathbb{R}_{>0})$ .

**Definition 6.4.6.** Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **offen** oder genauer **offen in unserem metrischen Raum** genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist, d.h. wenn sie mit jedem Punkt auch einen ganzen Ball um besagten Punkt enthält. Statt “ $U$  ist eine offene Teilmenge von  $X$ ” schreiben wir kurz aber unüblich

$$U \triangleleft X$$

6.4.7. Wenn wir eine Menge einfach nur “offen” nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum  $X$  dies “offen” gemeint ist. Ist  $X$  ein metrischer Raum und sind  $U \subset Y \subset X$  Teilmengen,

so meint  $U \subseteq Y$ , daß  $U$  offen ist als Teilmenge des Raums  $Y$  mit seiner induzierten Metrik.

*Übung 6.4.8.* Der Schnitt von endlich vielen offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die Vereinigung eines beliebigen Systems von offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die leere Menge und der ganze Raum sind offen. In einem endlichen metrischen Raum ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Die im Sinne unserer hier gegebenen Definition “offenen” Intervalle von  $\mathbb{R}$  sind genau die Intervalle  $(a, b)$  für  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , d.h. unsere “offenen reellen Intervalle” aus 2.1.7.

*Beispiele 6.4.9.* In einem metrischen Raum ist ein Ball  $B(x; r)$  stets offen, denn für  $z \in B(x; r)$  gilt  $d(x, z) < r$ , also gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $d(x, z) < r - \varepsilon$ , und dann haben wir aber  $B(z; \varepsilon) \subset B(x; r)$  nach der Dreiecksungleichung. Insbesondere umfaßt jede Umgebung eines Punktes eine offene Umgebung desselben Punktes.

**Satz 6.4.10 (Komplemente offener und abgeschlossener Teilmengen).** *Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Komplement offen ist.*

*Beweis.* Sei  $X$  unser metrischer Raum und  $M \subset X$  eine Teilmenge. Ist  $M$  nicht abgeschlossen, so gibt es einen Punkt  $p \in X \setminus M$ , der Berührungspunkt von  $M$  ist, also  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  mit  $x_n \in M$ . Dann kann es aber kein  $\varepsilon > 0$  geben mit  $B(p; \varepsilon) \subset X \setminus M$ , also ist  $X \setminus M$  nicht offen. Ist  $X \setminus M$  nicht offen, so gibt es einen Punkt  $p \in X \setminus M$  derart, daß gilt

$$B(p; 1/n) \cap M \neq \emptyset \quad \forall n \geq 1$$

Wählen wir jeweils einen Punkt  $x_n \in B(p; 1/n) \cap M$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$  und  $M$  ist nicht abgeschlossen.  $\square$

*Übung 6.4.11.* Nimmt man zu einer Teilmenge  $M$  eines metrischen Raums  $X$  alle ihre Berührungspunkte hinzu, so erhält man eine abgeschlossene Menge, genauer: Die kleinste abgeschlossene Menge, die  $M$  umfaßt. Diese Menge heißt auch der **Abschluß** von  $M$  in  $X$  und wird mit  $\text{Cl}_X(M) = \text{Cl}(M) = \overline{M}$  bezeichnet.

6.4.12. Diese Notation beißt sich mit unserer Notation  $\overline{\mathbb{R}}$  für die erweiterten reellen Zahlen. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist.

*Ergänzende Übung 6.4.13.* Sei  $X$  ein metrischer Raum und seien  $A, B \subset X$  disjunkte, abgeschlossene Teilmengen. So gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f|_A = 0$  und  $f|_B = 1$ . Hinweis: Man betrachte  $d_A$  wie in Übung 6.2.22 mache den Ansatz  $f(z) = g(d_A(z), d_B(z))$  für geeignetes  $g : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow [0, 1]$ .



Illustration zu Beispiel [6.4.9](#): Ein Ball in einem metrischen Raum ist stets offen.

*Übung 6.4.14.* Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $z \in X$  ein Punkt,  $r \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. So ist die Menge  $\{x \in X \mid d(x, z) \leq r\}$  abgeschlossen.

*Übung 6.4.15.* Ist  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge, so kann ihr Abschluß  $\bar{A}$  in der Notation von 6.2.22 beschrieben werden als die Menge  $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ .

## 6.5 Topologische Räume

6.5.1. Der Begriffsapparat der topologischen Räume wird erst sehr viel später unumgänglich werden, in der hier vorgesehenen Entwicklung der Theorie erst bei der Diskussion von abstrakten Mannigfaltigkeiten in VI.4.1 folgende. Daß ich ihn dennoch bereits hier einführe, hat mehrere Gründe. Zum Ersten erlaubt dieser Begriffsapparat eine große Vereinheitlichung: Zum Beispiel können in diesem Rahmen alle bisher betrachteten Grenzwertbegriffe unter einen Hut gebracht werden, wie in 6.6.9 ausgeführt wird. Zum Zweiten erlaubt er es, den Begriff der Stetigkeit im Kontext endlichdimensionaler reeller Vektorräume sehr unmittelbar zu fassen, indem man eben jeden derartigen Raum mit seiner “natürlichen Topologie” aus 6.9.22 versieht. Sobald das einmal getan ist, kann man auch in diesem Kontext mit Stetigkeit arbeiten, ohne Koordinaten zu benötigen. Und zum Dritten scheint es mir auch unabhängig davon wichtig, daß Sie beizeiten mit diesem Begriffsapparat vertraut werden, der die ganze Mathematik durchdringt: Um ihn an einfachen Beispielen einzuüben, will ich deshalb alles, was in dieser Vorlesung ohne große Umwege in der Allgemeinheit topologischer Räume formuliert und bewiesen werden kann, auch in diesem Rahmen formulieren und beweisen. Vielfach werden die Aussagen und Beweise dadurch sogar einfacher, und ich denke, dieser Vorteil wiegt zum Teil bereits die zusätzlichen Schwierigkeiten auf, die durch das Erlernen dieses neuen Begriffsapparats und seiner Beziehungen zu den primären Zielen der Vorlesung entstehen.

6.5.2. Gegeben eine Menge  $X$  können wir die Menge  $\mathcal{P}(X)$  aller Teilmengen von  $X$  bilden, die sogenannte Potenzmenge von  $X$ . Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in ?? Teilmengen von  $\mathcal{P}(X)$  lieber **Systeme von Teilmengen von  $X$**  und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

**Definition 6.5.3.** Eine **Topologie**  $\mathcal{T}$  auf einer Menge  $X$  ist ein System von Teilmengen  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ , das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie also:

1.  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$  für  $n \geq 0$  und insbesondere auch

$X \in \mathcal{T}$  als der Spezialfall  $n = 0$ . Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen  $X \in \mathcal{T}$  sowie  $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ ;

2.  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$  und damit insbesondere auch  $\emptyset \in \mathcal{T}$ , da ja das leere Mengensystem  $\mathcal{U} = \emptyset$  in jedem Mengensystem enthalten ist.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  samt einer Topologie. Statt  $U \in \mathcal{T}$  schreiben wir meist

$$U \subseteq X$$

und nennen  $U$  eine **offene Teilmenge von  $X$** . Die Notation  $\subseteq$  ist jedoch unüblich.

**Definition 6.5.4.** Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $p \in X$  ein Punkt. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt eine **Umgebung von  $p$**  genau dann, wenn es eine offene Menge  $V \subseteq X$  gibt mit  $p \in V \subset U$ .

*Ergänzung 6.5.5.* Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt eine **Umgebung von  $A$**  genau dann, wenn es eine offene Menge  $V \subseteq X$  gibt mit  $A \subset V \subset U$ .

**Definition 6.5.6.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt **stetig im Punkt  $p \in X$**  genau dann, wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $f(p)$  eine Umgebung  $U'$  von  $p$  gibt mit  $f(U') \subset U$ . Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

*Übung 6.5.7.* Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Ist  $f$  stetig in  $p \in X$  und  $g$  stetig in  $f(p) \in Y$ , so ist  $g \circ f$  stetig in  $p$ . Hinweis: 6.2.15.

*Beispiel 6.5.8.* Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner im Sinne von 6.4.6 offenen Teilmengen eine Topologie, die **metrische Topologie**. Wir fordern von einer Topologie *nicht*, daß ein beliebiger Schnitt offener Mengen stets wieder offen sein soll: Sonst müßten ja in unserem Beispiel der metrischen Räume alle einpunktigen Mengen offen sein, als Schnitte immer kleinerer Bälle. Da nach 6.4.9 Bälle in metrischen Räumen stets offen sind, ist in metrischen Räumen eine Umgebung eines Punktes im topologischen Sinne 6.5.4 dasselbe wie eine Umgebung im metrischen Sinne 6.2.7. Insbesondere ist eine Abbildung zwischen metrischen Räumen “topologisch stetig” im Sinne der obigen Definition 6.5.6 genau dann, wenn sie “metrisch stetig” ist im Sinne unserer Definition 6.2.10.

*Beispiel 6.5.9 (Topologie auf den erweiterten reellen Zahlen).* Auf unserer erweiterten reellen Zahlengeraden  $\overline{\mathbb{R}}$  erklären wir eine Topologie durch die Vorschrift, daß eine Menge  $U \subset \overline{\mathbb{R}}$  offen sein möge genau dann, wenn sie für jedes ihrer Elemente eine Umgebung im Sinne von 2.1.8 ist. Unsere Umgebungen im Sinne von 2.1.8 sind dann auch genau die Umgebungen für diese Topologie im Sinne von 6.5.4, und eine Abbildung  $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist offensichtlich topologisch stetig im Sinne der obigen Definition 6.5.6 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer Definition 3.1.3. Um die Beziehung zu unserem Stetigkeitsbegriff 3.1.3 für Abbildungen von einer Teilmenge  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  nach  $\overline{\mathbb{R}}$  zu klären, vereinbaren wir zunächst, in welcher Weise Teilmengen topologischer Räume mit einer Topologie versehen werden sollen.

**Definition 6.5.10.** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$  eine Teilmenge, so erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf  $Y$  durch die Vorschrift

$$U \subseteq Y \Leftrightarrow \exists V \subseteq X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von  $Y$  offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt von  $Y$  mit einer offenen Teilmenge von  $X$  ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge  $Y$  eines topologischen Raums  $X$  auf als topologischen Raum mit der induzierten Topologie.

*Übung 6.5.11.* Man zeige, daß das in 6.5.10 beschriebene Mengensystem auf einer Teilmenge eines topologischen Raums in der Tat eine Topologie auf besagter Teilmenge liefert, und daß die Einbettungsabbildung stetig ist.

6.5.12. Wenn wir eine Menge einfach nur “offen” nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum  $X$  dies “offen” gemeint ist. Ist  $X$  ein topologischer Raum und sind  $M \subset Y \subset X$  Teilmengen, so meint  $M \subseteq Y$ , daß  $M$  offen ist als Teilmenge des Raums  $Y$  mit seiner induzierten Topologie.

*Übung 6.5.13.* Man zeige, daß auf einer Teilmenge eines metrischen Raums die Spurtopologie zur metrischen Topologie mit der Topologie zur induzierten Metrik übereinstimmt.

*Beispiel 6.5.14.* Gegeben eine Teilmenge  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$  und eine Abbildung  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist  $f$  stetig an einer Stelle  $p \in D$  im Sinne von 3.1.3 genau dann, wenn sie stetig ist bei  $p$  im topologischen Sinne für die auf  $D$  induzierte Topologie. Desgleichen ist unsere Abbildung stetig im Sinne von 3.1.3 genau dann, wenn sie stetig ist im topologischen Sinne.

*Übung 6.5.15.* Man zeige für jeden topologischen Raum: Der Schnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Jede Umgebung eines Punktes kann verkleinert werden zu einer offenen Umgebung desselben Punktes.

*Übung 6.5.16.* Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist.

*Übung 6.5.17.* Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. So ist eine Teilmenge  $M \subset U$  offen in  $U$  genau dann, wenn sie offen ist in  $X$ . In Formeln gilt unter der Voraussetzung  $U \subseteq X$  für Teilmengen  $M \subset U$  also  $(M \subseteq U \Leftrightarrow M \subseteq X)$ .

**Satz 6.5.18 (Stetigkeit und Urbilder offener Mengen).** *Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder offenen Menge offen ist.*

6.5.19. Insbesondere gilt das auch für eine Abbildung zwischen metrischen Räumen.

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig an jeder Stelle  $p \in X$ . Gegeben  $U \subseteq Y$  offen ist ja  $U$  Umgebung eines jeden seiner Punkte. Folglich gibt es für jede Stelle  $p \in f^{-1}(U)$  eine Umgebung  $U'_p$  mit  $f(U'_p) \subset U$ . Diese  $U'_p$  können sogar offen gewählt werden, und damit ist  $f^{-1}(U)$  offen als die Vereinigung aller  $U'_p$  mit  $p \in f^{-1}(U)$ . Ist umgekehrt  $p \in X$  gegeben, so gibt es für jede Umgebung  $U$  von  $f(p)$  eine offene, in  $U$  enthaltene Umgebung  $V$  von  $f(p)$ , und ist das Urbild jeder offenen Menge offen und  $U' = f^{-1}(V)$  ist eine Umgebung von  $p$  mit  $f(U') \subset U$ . Ist also das Urbild jeder offenen Menge offen, so ist unsere Abbildung auch stetig an jeder Stelle  $p$ .  $\square$

*Ergänzung 6.5.20.* Entwickelt man die Theorie der topologischen Räume ab initio, so wird man in der Regel die im vorhergehenden Satz enthaltene Charakterisierung wegen ihrer großen Eleganz gleich als Definition der Stetigkeit nehmen. Daß die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig ist, kann man von dieser Definition ausgehend sehr leicht und direkt einsehen, indem man beachtet, daß aus  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetig folgt  $V \subseteq Z \Rightarrow g^{-1}(V) \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \subseteq X$ . Da nun gilt  $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ , ist damit auch  $(g \circ f)$  stetig.

*Übung 6.5.21 (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie).* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und  $Z \subset Y$  eine Teilmenge mit  $f(X) \subset Z$ . So ist  $f$  stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung  $f : X \rightarrow Z$  stetig ist für die auf  $Z$  induzierte Topologie. Analoges gilt für Stetigkeit in einem Punkt.

*Beispiele 6.5.22.* Es gibt auch Topologien, die unserer bis hierher entwickelten Anschauung eher ungewohnt sein mögen: Auf jeder Menge können wir etwa etwa die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht, oder die **diskrete Topologie**, indem wir

schlicht alle Teilmengen als offen ansehen. Einen topologischen Raum mit der diskreten Topologie nennen wir auch kurz einen **diskreten Raum**.

*Beispiele 6.5.23.* Jede konstante Abbildung ist stetig. Die Identität auf einem topologischen Raum ist immer stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung aus einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

*Ergänzende Übung 6.5.24.* Auf jeder Menge kann man die **koendliche Topologie** erklären durch die Vorschrift, daß außer der leeren Menge nur die Komplemente endlicher Mengen offen sein sollen.

*Ergänzende Übung 6.5.25.* Auf jeder partiell geordneten Menge kann man die **Ordnungstopologie**, auch genannt **Alexandroff-Topologie**, erklären durch die Vorschrift, daß genau die Teilmengen offen sein sollen, die mit einem Element auch jedes kleinere Element enthalten. Genau dann entsteht eine Topologie in dieser Weise aus einer partiellen Ordnung, wenn es für jedes Element eine kleinste offene Menge gibt, die es umfaßt.

**Definition 6.5.26.** Eine Teilmenge  $M$  eines topologischen Raums  $X$  heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in  $X$**  und wir schreiben in Formeln  $M \sqsubset X$  genau dann, wenn ihr Komplement  $X \setminus M$  offen ist.

6.5.27. Wenn wir eine Menge einfach nur “abgeschlossen” nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum  $X$  dies “abgeschlossen” gemeint ist. Ist  $X$  ein topologischer Raum und sind  $M \subset Y \subset X$  Teilmengen, so meint  $M \sqsubset Y$ , daß  $M$  abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums  $Y$  mit seiner induzierten Topologie 6.5.10. Die Terminologie kommt vom Fall metrischer Räume her, in dem die Komplemente offener Mengen gerade diejenigen Teilmengen waren, die “abgeschlossen sind unter dem Bilden von Grenzwerten”.

*Übung 6.5.28.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  mit einer Teilmenge  $Y$  zeige man:  $A \sqsubset Y \Leftrightarrow \exists B \sqsubset X$  mit  $A = B \cap Y$ .

*Übung 6.5.29.* Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \sqsubset X$  eine abgeschlossene Teilmenge. So ist eine Teilmenge  $B \subset A$  abgeschlossen in  $A$  unter der Spurtopologie genau dann, wenn  $B$  abgeschlossen ist in  $X$ . In Formeln gilt unter der Voraussetzung  $A \sqsubset X$  für Teilmengen  $B \subset A$  also  $(B \sqsubset A \Leftrightarrow B \sqsubset X)$ .

**Lemma 6.5.30.** *Jede endliche Vereinigung und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

*Beweis.* Das folgt mit der Definition einer Topologie sofort aus der Formel

$$X \setminus \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (X \setminus M)$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für jedes System  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen einer Menge  $X$ .  $\square$

**Definition 6.5.31.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine Teilmenge  $M \subset X$  gibt es stets eine kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $M$  umfaßt, nämlich den Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ , die  $M$  umfassen. Wir notieren diesen Schnitt  $\text{Cl}_X(M) = \text{Cl}(M) = \bar{M}$  und nennen sie den **Abschluß von  $M$**  oder genauer den **Abschluß von  $M$  in  $X$** .

6.5.32. Diese Notation beißt sich mit unserer Notation  $\bar{\mathbb{R}}$  für die erweiterten reellen Zahlen. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Immerhin ist  $\bar{\mathbb{R}}$  auch der Abschluß von  $\mathbb{R}$  in den erweiterten reellen Zahlen mit ihrer Topologie aus 6.5.9.

6.5.33. Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn darunter das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist: Das folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Satz 6.5.18 für offene Mengen, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

*Beispiel* 6.5.34. Wir geben einen neuen Beweis für die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert 2.1.35, der zwar nur für reelle Folgen mit reellen Grenzwerten funktioniert, aber dafür viele Möglichkeiten der Verallgemeinerung aufzeigt. Zunächst ist die Menge  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  nach 6.5.33 als Urbild der abgeschlossenen Menge  $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$  unter der stetigen Abbildung  $(x, y) \mapsto y - x$ . Ist  $(x_n, y_n)$  eine konvergente Folge in  $H$ , so liegt mithin auch ihr Grenzwert in  $H$ , und das bedeutet gerade die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert.

**Proposition 6.5.35.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung topologischer Räume.

1. Sei  $\mathcal{U}$  eine **offene Überdeckung** von  $X$ , d.h. ein System offener Teilmengen von  $X$  mit  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . So ist  $f$  stetig genau dann, wenn  $f|_U$  stetig ist für alle  $U \in \mathcal{U}$ . Etwas vage gesprochen ist demnach **Stetigkeit eine lokale Eigenschaft**.
2. Sei  $X$  überdeckt von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ , in Formeln  $A_1, \dots, A_n \subset X$  und  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . So ist  $f$  stetig genau dann, wenn  $f|_{A_i}$  stetig ist für alle  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Ist  $f$  stetig, so sind alle  $f|_U$  stetig als Verknüpfung von  $f$  mit der stetigen Inklusion  $U \hookrightarrow X$ . Sind andererseits alle  $f|_U$  stetig, so ist für alle  $W \subset Y$  und alle  $U \in \mathcal{U}$  das Urbild  $f^{-1}(W) \cap U$  offen in  $U$ , nach 6.5.17 ist also  $f^{-1}(W) \cap U$  sogar offen in  $X$ , und damit ist dann natürlich auch

$f^{-1}(W) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(W) \cap U$  offen in  $X$  als Vereinigung offener Mengen. Mithin ist  $f$  stetig. Teil 2 zeigt man ähnlich: Nach 6.5.33 muß nur gezeigt werden, daß für jede abgeschlossene Teilmenge  $B \subseteq Y$  von  $Y$  ihr Urbild  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen ist in  $X$ . Da aber gilt  $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \dots \cup f_n^{-1}(B)$  und  $f_i^{-1}(B) \subseteq A_i$  nach Annahme folgt die Proposition aus 6.5.29 und den Definitionen.  $\square$

*Übung 6.5.36.* Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $Y, Z$  metrische Räume. Man zeige, daß eine Abbildung  $(f, g) : X \rightarrow Y \times Z$  stetig ist genau dann, wenn  $f$  und  $g$  stetig sind. Man zeige, daß Produkt und Summe von stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum wieder stetig sind.

*Vorschau 6.5.37.* In VI.3.6.1 werden wir erklären, wie man ganz allgemein das Produkt topologischer Räume so mit einer Topologie versehen kann, daß das Analogon der vorhergehenden Übung auch für beliebige topologische Räume  $Y, Z$  gilt.

## 6.6 Grenzwerte in topologischen Räumen

**Definition 6.6.1.** Sei  $\mathbb{N} \rightarrow Y, n \mapsto y_n$  eine Folge in einem topologischen Raum  $Y$  und  $b \in Y$  ein Punkt. Wir sagen, die Folge  $y_n$  **strebt gegen**  $b$  oder **konvergiert gegen**  $b$  und nennen  $b$  einen **Grenzwert der Folge** und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

genau dann, wenn jede Umgebung von  $b$  fast alle Glieder unserer Folge enthält. Gleichbedeutend können wir ebensogut auch fordern, daß jede offene Menge um  $b$  fast alle Glieder unserer Folge enthält.

6.6.2. In dieser Allgemeinheit ist der Grenzwertbegriff nur noch eingeschränkt sinnvoll, da der Grenzwert einer Folge nicht mehr eindeutig zu sein braucht. Fordern wir jedoch von unserem topologischen Raum die sogenannte **Hausdorff-Eigenschaft**, daß je zwei verschiedene Punkte darin disjunkte Umgebungen besitzen, so ist der Grenzwert einer Folge eindeutig, wenn er existiert. Ein topologischer Raum mit der Hausdorff-Eigenschaft heißt ein **Hausdorff-Raum**.

*Vorschau 6.6.3.* Für allgemeine topologische Räume ist es nicht mehr richtig, daß jede unter der Bildung von Grenzwerten von Folgen abgeschlossene Teilmenge auch tatsächlich abgeschlossen ist. Ein Gegenbeispiel gebe ich in VI.3.1.10, eine Zusatzbedingung, unter der das doch wieder gilt, in VI.3.1.11.



In einem Hausdorffraum haben je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen.

*Übung 6.6.4.* Konvergiert eine Folge von stetigen Funktionen von einem topologischen Raum in einen metrischen Raum gleichmäßig, so ist auch die Grenzfunktion stetig. Hinweis: Man kopiere den Beweis von 5.1.10.

**Definition 6.6.5.** Ein Punkt eines topologischen Raums heißt ein **Häufungspunkt** genau dann, wenn jede seiner Umgebungen auch noch andere Punkte unseres Raums enthält, wenn also in anderen Worten die nur aus besagtem Punkt bestehende Menge nicht offen ist. Ist  $D \subset X$  eine Teilmenge eines topologischen Raums und  $p \in X$  ein Häufungspunkt von  $D \cup \{p\}$  im Sinne der vorhergehenden Definition, so sagen wir auch,  $p$  sei ein **Häufungspunkt von  $D$  in  $X$**  oder  $p \in X$  sei ein **Häufungspunkt von  $D$** . Will ich betonen, daß ich einen Häufungspunkt von  $D$  in  $D$  meine, so spreche ich auch von einem **internen Häufungspunkt von  $D$** .

*Ergänzung 6.6.6.* Manche Autoren erklären auch noch die “Häufungspunkte einer Folge in einem topologischen Raum  $X$ ” als die Punkte von  $X$  mit der Eigenschaft, daß in jeder ihrer Umgebungen unendlich viele Folgenglieder liegen.

*Übung 6.6.7.* Genau dann ist  $p$  Häufungspunkt des metrischen Raums  $X$ , wenn es eine Folge  $x_n$  in  $X \setminus p$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ .

**Definition 6.6.8 (Grenzwerte von Abbildungen).** Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $p \in X$  ein Häufungspunkt und  $f : X \setminus p \rightarrow Y$  eine Abbildung. Sei weiter  $b$  ein Punkt aus  $Y$ . Wir sagen,  $f(x)$  **strebt gegen  $b$  für  $x \rightarrow p$**  und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung  $W$  des Grenzwerts  $b$  eine Umgebung  $W'$  des Punktes  $p$  gibt mit  $f(W' \setminus p) \subset W$ .

**6.6.9 (Spezialfälle des allgemeinen Grenzwertbegriffs).** Die vorstehende Definition verallgemeinert alle bisher betrachteten Grenzwertbegriffe: Den Grenzwertbegriff für Folgen in den erweiterten reellen Zahlen nach 2.1.16, für Abbildungen zwischen Teilmengen der erweiterten reellen Zahlen 3.3.6, für Folgen in metrischen Räumen 6.3.1 und auch für Folgen in topologischen Räumen 6.6.1. Der Fall von Folgen ist jeweils der Spezialfall, in dem wir  $X = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$  mit der von  $\overline{\mathbb{R}}$  induzierten Topologie versehen und darin den Häufungspunkt  $p = \infty$  betrachten. Ich habe den topologischen Raum bei der Definition der Folgenkonvergenz 6.6.1 nur deshalb etwas ungewöhnlich mit  $Y$  bezeichnet, um deutlich zu machen, inwiefern es sich dabei um einen Spezialfall unseres allgemeinen Grenzwertbegriffs 6.6.8 handelt.

*Übung 6.6.10.* Auch in der Allgemeinheit von 6.6.8 ist der Grenzwert eindeutig, wenn er existiert und der Wertebereich Hausdorff ist.

*Übung 6.6.11.* Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $p \in X$  ein Häufungspunkt und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Man zeige, daß auch in dieser Allgemeinheit  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$  gleichbedeutend ist zur Stetigkeit von  $f$  bei  $p$ . Man diskutiere des weiteren Analoga zu 3.3.21.

*Übung 6.6.12.* Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $p \in X$  ein Häufungspunkt und  $f_i : X \setminus p \rightarrow Y_i$  Abbildungen in metrische Räume für  $1 \leq i \leq n$ . Sei  $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$  das Produkt und  $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow Y$ . So ist  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  für  $b = (b_1, \dots, b_n)$  gleichbedeutend zu  $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = b_i \forall i$ .

*Übung 6.6.13 (Quetschlemma).* Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $p \in X$  ein Häufungspunkt und  $f, g, h : X \setminus p \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit der Eigenschaft  $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in X \setminus p$ . So folgt aus  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$  bereits  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$ .

*Übung 6.6.14.* Im Fall einer Abbildung in einen metrischen Raum mit Metrik  $d$  ist  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$  gleichbedeutend zu  $\lim_{x \rightarrow p} d(f(x), y) = 0$ .

*Ergänzung 6.6.15.* Gegeben Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Z$  von topologischen Räumen mit  $Y$  Hausdorff und Punkte  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $z \in Z$  findet man manchmal die Notation

$$\lim_{g(x) \rightarrow z} f(x) = y$$

Das soll dann bedeuten, daß es für jede Umgebung  $U$  von  $y$  eine Umgebung  $V$  von  $z$  gibt mit  $g(x) \in (V \setminus z) \Rightarrow f(x) \in U$ . Zum Beispiel gilt für jedes nicht konstante Polynom  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Formel  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ .

*Ergänzung 6.6.16.* Um durchgehend mit topologischen Räumen arbeiten zu können, müßten wir nun erklären, wie das Produkt zweier topologischer Räume mit einer Topologie zu verstehen ist, und allerhand Eigenschaften wie etwa das Analogon der Komponentenregel prüfen. Das alles werde ich vorerst vermeiden und erst in VI.3 diskutieren, weil ich fürchte, den Sinn dieser Abstraktionen hier noch nicht ausreichend begründen zu können.

## 6.7 Kompakte metrische Räume

**Definition 6.7.1.** Ein metrischer Raum heißt **kompakt** oder ausführlicher **folgenkompakt** genau dann, wenn jede Folge in unserem Raum eine konvergente Teilfolge besitzt.

6.7.2. Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raums nennen wir kompakt oder auch ein **Kompaktum** genau dann, wenn sie kompakt ist als metrischer Raum mit der induzierten Metrik, wenn also jede Folge in  $A$  eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus  $A$  konvergiert.

*Übung 6.7.3.* Endliche Vereinigungen kompakter Teilmengen eines metrischen Raums sind stets wieder kompakt.

6.7.4. Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt. Ist in der Tat ein Raum nicht beschränkt, so finden wir darin eine Folge  $x_n$  mit  $d(x_0, x_n) \geq n$ , und diese Folge kann nach 6.3.8 keine konvergente Teilfolge haben.

**Proposition 6.7.5.** *Jedes endliche Produkt von kompakten metrischen Räumen ist kompakt.*

*Beweis.* Sei  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  mit kompakten  $X_i$ . Sei eine Folge in  $X$  gegeben. Da  $X_1$  kompakt ist, finden wir eine Teilfolge unserer Folge, die in der ersten Koordinate konvergiert. Da auch  $X_2$  kompakt ist, finden wir von dieser Teilfolge hinwiederum eine Teilfolge, die auch in der zweiten Koordinate konvergiert. Indem wir so weitermachen, finden wir schließlich eine Teilfolge, die in jeder Koordinate konvergiert. Diese Teilfolge konvergiert dann nach 6.3.3 auch in  $X$ .  $\square$

**Lemma 6.7.6.** *Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist stets abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum und  $A \subset X$  unsere Teilmenge. Ist  $A$  nicht abgeschlossen, so gibt es eine Folge in  $A$ , die gegen einen Punkt aus  $X \setminus A$  konvergiert. Solch eine Folge kann aber unmöglich eine Teilfolge haben, die gegen einen Punkt aus  $A$  konvergiert.  $\square$

*Übung 6.7.7.* Eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raums ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen ist.

**Satz 6.7.8 (Heine-Borel).** *Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

*Beweis.* Nach 6.7.4 und 6.7.6 ist eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums stets beschränkt und abgeschlossen. In der anderen Richtung wissen wir schon, daß für jedes  $k \geq 0$  das Intervall  $[-k, k]$  kompakt ist. Falls eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist, finden wir ein  $k$  mit  $A \subset [-k, k]^n$ . Nach 6.7.5 ist nun  $[-k, k]^n$  kompakt, und als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist nach 6.7.3 dann auch  $A$  selbst kompakt.  $\square$

*Beispiel 6.7.9.* Die Menge  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{Q}$  und beschränkt, ist aber nicht kompakt für die induzierte Metrik.

**Proposition 6.7.10.** *Unter einer stetigen Abbildung metrischer Räume werden Kompakta stets auf Kompakta abgebildet.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere stetige Abbildung und  $A \subset X$  ein Kompaktum. Ist  $y_n$  eine Folge in  $f(A)$ , so finden wir eine Folge  $x_n$  in  $A$  mit  $f(x_n) = y_n$ . Falls  $A$  kompakt ist, besitzt die Folge  $x_n$  eine Teilfolge  $x_{n_k}$ , die gegen einen Punkt  $x \in A$  konvergiert. Dann ist  $y_{n_k}$  nach 6.3.9 eine Teilfolge der Folge  $y_n$ , die gegen einen Punkt von  $f(A)$  konvergiert, nämlich gegen  $f(x)$ .  $\square$

**Korollar 6.7.11.** *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ist beschränkt und nimmt, wenn unser Raum nicht leer ist, das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte an.*

6.7.12. Ist also in Formeln  $X$  ein nichtleerer kompakter Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gibt es  $p, q \in X$  mit  $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in X$ .

*Beweis.* Nach 6.7.10 ist  $f(X) \subset \mathbb{R}$  kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Aus  $X \neq \emptyset$  folgt weiter  $f(X) \neq \emptyset$ . Damit besitzt  $f(X)$  ein Supremum und Infimum in  $\mathbb{R}$ . Da  $f(X)$  kompakt, also abgeschlossen ist, folgt  $\sup f(X) \in f(X)$  und  $\inf f(X) \in f(X)$ . Es gibt in anderen Worten  $p, q \in X$  mit  $\sup f(X) = f(p)$  und  $\inf f(X) = f(q)$ .  $\square$

**Definition 6.7.13.** Eine stetige Abbildung von metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig** genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt derart, daß gilt

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Satz 6.7.14 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta).** *Jede stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Mutatis mutandis zeigt das der Beweis von Satz 3.4.11.  $\square$

*Ergänzende Übung 6.7.15.* Ist in einem metrischen Raum eine abzählbare Familie kompakter Teilmengen  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben mit leerem Schnitt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$ , so gibt es schon ein  $N$  mit  $K_0 \cap \dots \cap K_N = \emptyset$ . Das wird verallgemeinert auf den Fall beliebiger Familien in 6.10.8.

*Ergänzende Übung 6.7.16.* Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subset X$  kompakt und  $A \subset X$  abgeschlossen mit  $A \cap K = \emptyset$ . So gibt es  $\delta > 0$  mit  $d(x, y) \geq \delta$  für alle  $x \in A, y \in K$ .

*Ergänzende Übung 6.7.17.* Man zeige, daß man auf dem Raum  $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$  aller Folgen in der zweielementigen Menge  $\{W, Z\}$  eine Metrik erklären kann durch die Vorschrift  $d(\omega, \eta) = 2^{-n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  die kleinste Zahl mit  $\omega(n) \neq$

$\eta(n)$ , bzw.  $d(\omega, \eta) = 0$  falls  $\omega = \eta$ . Man zeige weiter, daß der so gebildete metrische Raum kompakt ist. Nebenbei bemerkt denke ich bei  $W$  an “Wappen” und bei  $Z$  an “Zahl” und bei der Übung an Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

## 6.8 Affine Räume

6.8.1. Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus Abschnitt ?? der linearen Algebra. Ich habe ihn hier nur eingefügt, um Unklarheiten zu vermeiden, was die im weiteren verwendeten Notationen und Begriffsbildungen angeht.

**Definition 6.8.2.** Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper  $k$  ist ein Tripel

$$E = (E, \vec{E}, a)$$

bestehend aus einer nichtleeren Menge  $E$ , einer abelschen Gruppe  $\vec{E} \subset \text{Ens}^\times E$  von Permutationen von  $E$ , von der man fordert, daß für alle  $p \in E$  das Anwenden auf  $p$  eine Bijektion  $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$  besagter Gruppe mit unserem Raum liefert, sowie einer Abbildung  $a : k \times \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ , die die abelsche Gruppe  $\vec{E}$  zu einem  $k$ -Vektorraum macht. Die Elemente von  $\vec{E}$  heißen die **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums und den Vektorraum  $\vec{E}$  selbst nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums  $E$ . Die Operation von  $k$  auf  $\vec{E}$  mag man die **Reskalierung von Translationen** nennen. Unter der **Dimension** unseres affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Das Resultat der Operation von  $\vec{v} \in \vec{E}$  auf  $p \in E$  notieren wir  $\vec{v} + p := \vec{v}(p)$  oder manchmal auch  $p + \vec{v}$ .

6.8.3. Die eben eingeführte Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums steht leider in Konflikt mit der Notation aus IV.7.3.7, nach der mit Pfeilen versehene Mannigfaltigkeiten orientierte Mannigfaltigkeiten andeuten sollen. Was jeweils gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

6.8.4. Ist  $E$  ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes  $p \in E$  die Operation eine Bijektion  $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$ ,  $\vec{u} \mapsto \vec{u} + p$  und es gilt  $\vec{0} + p = p$  sowie  $\vec{u} + (\vec{v} + p) = (\vec{u} + \vec{v}) + p$  für alle  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$  und  $p \in E$ . Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein “Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat”. Gegeben  $p, q \in E$  definieren wir  $p - q$  als den Richtungsvektor  $\vec{u} \in \vec{E}$  mit  $p = \vec{u} + q$ .

6.8.5 (**Vektorräume als affine Räume**). Jeder Vektorraum  $V$  kann als ein affiner Raum aufgefaßt werden, indem wir als Translationen die durch die Addition von festen Vektoren gegebenen Abbildungen nehmen, so daß unsere Gruppe von Translationen das Bild des injektiven Gruppenhomomorphismus  $V \rightarrow \text{Ens}^\times(V)$ ,  $v \mapsto (v+)$  wird, und die Reskalierung von Translationen

dadurch erklären, daß dieser Gruppenhomomorphismus einen Vektorraumisomorphismus auf sein Bild liefern soll. Insbesondere erhalten wir damit eine kanonische Identifikation  $\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$  zwischen unserem Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Diese Identifikation scheint mir derart kanonisch, daß ich sie von nun an in Sprache und Notation oft so behandeln werde, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich.

*Beispiel 6.8.6.* Es scheint mir besonders sinnfällig, den uns umgebenden Raum mathematisch als dreidimensionalen reellen affinen Raum zu modellieren: Hierbei denkt man sich  $\vec{E}$  als die Gruppe aller "Parallelverschiebungen". Ähnlich mag man die Zeit modellieren als einen eindimensionalen reellen affinen Raum. Die leere Menge kann in meinen Konventionen nie ein affiner Raum sein, es gibt hierzu jedoch auch andere Konventionen.

*Ergänzung 6.8.7.* Meist findet man in der Literatur die begriffliche Variante eines **affinen Raums über einem vorgegebenen Vektorraum**: Darunter versteht man dann eine Menge  $E$  mit einer freien transitiven Operation des vorgegebenen Vektorraums. Ich ziehe die oben gegebene Variante vor, da sie jeden Bezug auf einen vorgegebenen Vektorraum vermeidet und den Anschauungsraum meines Erachtens besser modelliert.

**Definition 6.8.8.** Eine Abbildung  $\varphi : E \rightarrow E'$  zwischen affinen Räumen heißt eine **affine Abbildung** genau dann, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungsräumen  $\vec{\varphi} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$  gibt mit

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \vec{\varphi}(p - q) \quad \forall p, q \in E$$

Diese lineare Abbildung  $\vec{\varphi}$  ist dann durch  $\varphi$  eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** unserer affinen Abbildung.

*Übung 6.8.9.* Jede Verknüpfung affiner Abbildungen ist affin. Der lineare Anteil einer Verknüpfung affiner Abbildungen ist die Verknüpfung ihrer linearen Anteile.

## 6.9 Normierte Räume

6.9.1. Unter einem **reellen Vektorraum** bzw. einem **reellen Raum** verstehen wir einen Vektorraum bzw. einen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Wollen wir einen reellen Vektorraum bzw. affinen Raum mit einer Metrik versehen, so reicht es, wenn wir jedem seiner Vektoren bzw. Richtungsvektoren in geeigneter Weise eine "Länge" zuordnen. Einen solchen abstrakten Längenbegriff für die Vektoren eines Vektorraums nennt man eine "Norm". Die Details folgen.

**Definition 6.9.2.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $v \mapsto \|v\|$  derart, daß gilt:

1.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ;
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$ .

Unter einem **normierten Vektorraum** versteht man ein Paar  $(V, \| \cdot \|)$  bestehend aus einem Vektorraum  $V$  und einer Norm  $\| \cdot \|$  auf  $V$ .

*Ergänzung 6.9.3.* Für Leser, die schon mit komplexen Zahlen vertraut sind, sei noch erwähnt, daß man von einer Norm auf einem komplexen Vektorraum stärker fordert, daß die erste Bedingung sogar für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gelten soll, wobei  $|\lambda|$  als die “Norm der komplexen Zahl  $\lambda$ ” im Sinne von ?? zu verstehen ist.

6.9.4. Jeder normierte Vektorraum wird ein metrischer Raum mittels der **durch die Norm induzierten Metrik**

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Zum Beispiel gehört unser Betragsabstand auf dem  $\mathbb{R}^n$  zur Maximumsnorm. Wir dürfen damit in normierten Vektorräumen über Stetigkeit und Konvergenz von Folgen reden. Allgemeiner verstehen wir unter einem **normierten affinen Raum** einen reellen (oder komplexen) affinen Raum im Sinne von 6.8.2, dessen Richtungsraum mit einer Norm versehen ist. Auch jeder normierte affine Raum trägt eine natürliche Metrik, die durch dieselbe Formel beschrieben wird. Reden wir ohne nähere Spezifikation von einem **normierten Raum**, so meinen wir einen normierten affinen Raum. Leser, die mit dem Begriff eines affinen Raums noch nicht vertraut sind, mögen sich aber auch einen normierten Vektorraum denken.

*Übung 6.9.5.* Für je zwei Vektoren  $v, w$  eines normierten Vektorraums gilt  $\|v + w\| \geq |\|v\| - \|w\||$ .

*Beispiel 6.9.6.* Mit  $v \mapsto \|v\|$  ist auch  $v \mapsto \alpha\|v\|$  eine Norm, für jedes  $\alpha > 0$ . Auf dem Nullraum gibt es nur eine Norm, die eben den Nullvektor auf Null wirft.

*Beispiel 6.9.7.* Auf dem  $\mathbb{R}^n$  definiert man die **euklidische Norm** eines Vektors  $v = (v_1, \dots, v_n)$  durch  $\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ . Wie man formal zeigt, daß das tatsächlich eine Norm ist, diskutieren wir in ??.

*Beispiel 6.9.8.* Auf dem  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 0$  definiert man die **Maximumsnorm** von  $v = (v_1, \dots, v_n)$  durch  $|v| = \|v\|_\infty = \max(|v_1|, \dots, |v_n|)$ . Auf dem Raum  $V = \text{Ens}^b(D, \mathbb{R})$  aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge  $D$  haben wir die **Supremumsnorm**, gegeben für  $D \neq \emptyset$  durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

und im Fall  $D = \emptyset$  als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Für eine endliche Menge  $D$  mit  $n$  Punkten erhalten wir unsere Maximumsnorm auf dem  $\mathbb{R}^n$  als Spezialfall der Supremumsnorm. Noch allgemeiner definieren wir für jeden normierten Vektorraum  $(W, |\cdot|)$  auf dem Raum  $V = \text{Ens}^b(D, W)$  aller beschränkten Abbildungen von  $D$  nach  $W$  die Supremumsnorm durch  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$  im Fall  $D \neq \emptyset$  und im Fall  $D = \emptyset$  als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Die zu unserer Supremumsnorm gehörige Metrik ist in allen diesen Fällen die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

*Beispiel 6.9.9.* Sind  $V_1, \dots, V_n$  normierte Vektorräume, so erklären wir die **Produktnorm** auf ihrem Produkt  $V_1 \times \dots \times V_n$  für  $n > 0$  durch die Vorschrift  $\|(v_1, \dots, v_n)\| = \sup \|v_i\|$ . Offensichtlich induziert die Produktnorm die Produktmetrik.

*Übung 6.9.10.* Gegeben ein normierter Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  sind die folgenden Abbildungen stetig: Die Norm  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , die Addition  $V \times V \rightarrow V$ , und die Multiplikation mit Skalaren  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ . Ist unsere Norm die euklidische Norm zu einem Skalarprodukt  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist auch dies Skalarprodukt stetig. Leser, die bereits mit komplexen Zahlen vertraut sind, zeigen Analoges auch für komplexe Vektorräume.

*Ergänzende Übung 6.9.11 (Einparameteruntergruppen normierter Vektorräume).* Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additive Gruppe der reellen Zahlen in einen normierten Vektorraum sind genau die linearen Abbildungen. Hinweis: 3.3.26.

*Ergänzende Übung 6.9.12.* In einem normierten reellen Vektorraum ist jede nichtleere offene Teilmenge bereits ein Erzeugendensystem.

**Satz 6.9.13 (Stetigkeit linearer Abbildungen).** *Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen  $f : V \rightarrow W$  ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante  $C \geq 0$  gibt derart, daß gilt*

$$\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$$

6.9.14. Sie werden in 6.9.23 zeigen, daß lineare Abbildungen von einem endlichdimensionalen normierten Vektorraum in einen beliebigen weiteren normierten Vektorraum immer stetig sind.

*Beweis.* Ist  $f$  stetig, so gibt es  $\delta > 0$  mit  $\|v - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| \leq 1$ . Setzen wir  $C = 1/\delta$ , so folgt  $\|f(v)\| \leq C\|v\|$  zunächst für alle Vektoren  $v$  der Norm  $\|v\| = \delta$  und dann durch Multiplikation mit Skalaren für alle  $v \in V$ . Gibt es umgekehrt ein  $C > 0$  mit  $\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$ , so finden wir für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \varepsilon/C > 0$  so daß gilt

$$\|v - w\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \leq C\delta = \varepsilon \quad \square$$

*Übung 6.9.15.* Man zeige: Jede stetige lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen ist gleichmäßig stetig.

*Übung 6.9.16.* Die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Raum  $X$  notiere ich  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . Das  $\mathcal{C}$  steht hier für englisch “continuous” und französisch “continu”. Man zeige: Versehen wir die Menge  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten reellen Intervall  $[a, b]$  mit der Supremumsnorm, so wird das Integral  $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$  eine stetige Abbildung  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Übung 6.9.17.* Bezeichnet  $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  den Teilraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen, so ist das Ableiten  $f \mapsto f'$  keine stetige Abbildung  $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

*Übung 6.9.18.* Seien  $U, V, W$  normierte Vektorräume. Eine bilineare Abbildung  $F : U \times V \rightarrow W$  ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante  $C > 0$  gibt mit  $\|F(u, v)\| \leq C\|u\|\|v\|$ . Man formuliere und beweise die analoge Aussage auch für multilineare Abbildungen.

*Übung 6.9.19.* Gegeben eine Menge  $D$  und ein normierter Vektorraum  $V$  erkläre man auf dem Raum  $\text{Ens}^b(D, V)$  der beschränkten Abbildungen  $D \rightarrow V$  eine Norm derart, daß die zugehörige Metrik die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz aus 6.3.5 wird.

**Definition 6.9.20.** Zwei Normen  $\|\cdot\|, |\cdot|$  auf einem reellen Vektorraum  $V$  heißen **äquivalent** genau dann, wenn es positive Konstanten  $c, C > 0$  gibt derart, daß gilt

$$\|v\| \leq C|v| \quad \text{und} \quad |v| \leq c\|v\| \quad \forall v \in V$$

**Satz 6.9.21 (Äquivalenz von Normen).** *Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.*

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $V$  der  $\mathbb{R}^n$  ist mit  $n \geq 1$  und daß eine unserer Normen die Maximumsnorm  $|v|$

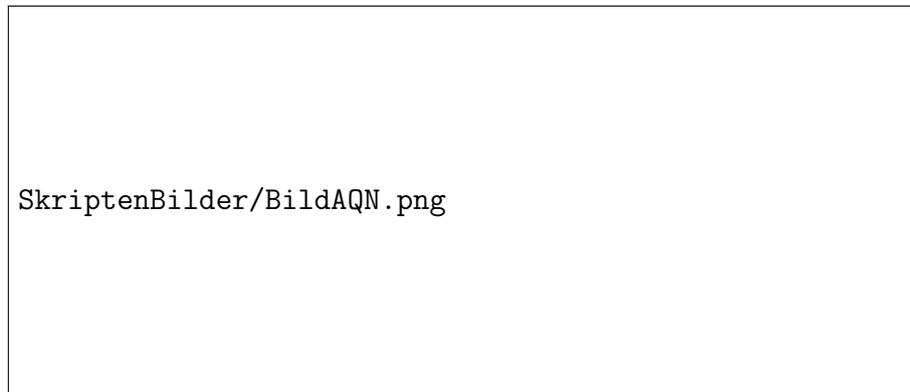


Illustration zur Äquivalenz von Normen am Beispiel der Betragsnorm und der euklidischen Norm auf dem  $\mathbb{R}^2$ .

ist. Sei  $\|\cdot\|$  eine zweite Norm. Bezeichnet  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  und ist  $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ , so haben wir

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|v_1 e_1 + \dots + v_n e_n\| \\ &\leq |v_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |v_n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq |v| \cdot C \end{aligned}$$

mit  $C = \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$ . Insbesondere folgern wir, daß  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist für die durch die Maximumsnorm  $|\cdot|$  gegebene Metrik auf  $\mathbb{R}^n$ , aus  $d(x, y) = |x - y| < \varepsilon/C$  folgt nämlich  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon$ . Nun ist aber die Oberfläche des Hyperkubus

$$K = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$$

$|\cdot|$ -kompakt nach 6.7.8 und nicht leer falls gilt  $n \geq 1$ . Nach 6.7.11 nimmt folglich die Funktion  $\|\cdot\|$  auf  $K$  ein Minimum  $a$  an, und da  $K$  nicht den Nullvektor enthält, ist dies Minimum notwendig positiv,  $a > 0$ . Wir folgern zunächst einmal  $a|v| \leq \|v\|$  für alle  $v \in K$ , dann gilt aber natürlich auch  $a|\lambda v| \leq \|\lambda v\|$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $v \in K$ , also  $a|w| \leq \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$ . Mit  $c = 1/a$  gilt also  $|w| \leq c\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

*Variante zum Schluß des vorhergehenden Beweises.* Statt mit Kompaktheit zu argumentieren, kann man hier alternativ auch mit Induktion über  $n$  und "Vollständigkeit" argumentieren, was uns insbesondere beim Beweis der Verallgemeinerung ?? helfen wird. Die Argumentation verläuft dann wie folgt: Wir betrachten die affinen Hyperebenen  $H_i = \{x \mid x_i = 1\}$ . Aus der Induktionsannahme können wir durch Widerspruch folgern, daß es positive Konstanten  $a_i > 0$  gibt mit

$$a_i \leq \|w\| \quad \forall w \in H_i$$

In der Tat gäbe es sonst in  $H_i$  eine Folge  $w_\nu$  mit  $\|w_\nu\| \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow \infty$ . Diese Folge wäre im Sinne von 7.5.1 eine Cauchy-Folge für die von  $\|\cdot\|$  auf  $H_i$  induzierte Metrik. Dann wäre sie aber wegen der Äquivalenz der Normen nach der Induktionsannahme auch eine Cauchy-Folge für die von der Maximumsnorm  $|\cdot|$  auf  $H_i$  induzierte Metrik und müßte nach 7.5.2 konvergieren gegen einen Punkt  $w \in H_i$  mit  $\|w\| = 0$ . Widerspruch! Nun gibt es für  $v \in \mathbb{R}^n \setminus 0$  stets  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda| = |v|$  derart, daß  $\lambda^{-1}v$  in einer der affinen Hyperebenen  $H_i$  liegt. Mit  $a = \inf(a_i)$  folgt  $a \leq \|\lambda^{-1}v\|$  und  $|v| \leq c\|v\|$  für  $c = 1/a$ .  $\square$

6.9.22. Wir nennen eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums **offen** bzw. **abgeschlossen** genau dann, wenn sie offen ist für die von irgendeiner Norm auf seinem Richtungsraum induzierte Metrik. Nach unserem Satz

6.9.21 über die Äquivalenz von Normen ist sie dann notwendig offen für jede von einer Norm induzierte Metrik. Die so erklärten offenen Teilmengen bilden die sogenannte **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen Raum.

*Übung 6.9.23.* Jede lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen Vektorraum in einen normierten Vektorraum  $W$  ist stetig. Sind allgemeiner endlichdimensionale Vektorräume  $V_1, \dots, V_n$  gegeben, so ist jede multilineare Abbildung  $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  stetig.

**Definition 6.9.24.** Ist  $f : V \rightarrow W$  eine stetige lineare Abbildung normierter Vektorräume, so heißt die kleinstmögliche Konstante  $C \geq 0$  wie in 6.9.13 auch die **Operatornorm**  $\|f\|$  von  $f$ , in Formeln

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

*Übung 6.9.25.* Sind  $f : V \rightarrow W$  und  $g : W \rightarrow X$  stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen, so gilt  $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$ .

6.9.26. Die stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen  $V, W$  nennt man auch **beschränkte Operatoren**, da sie nach 6.9.13 genau die linearen Abbildungen sind, die den Einheitsball auf eine beschränkte Menge abbilden. Ich notiere die Menge aller solchen Abbildungen  $\mathcal{B}(V, W)$  oder auch  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(V, W)$ , wenn ich besonders betonen will, daß reell-lineare Abbildungen gemeint sind und nicht etwa “komplex-lineare” Abbildungen, wie wir sie später für gewöhnlich betrachten werden. Ich werde die Notation  $\mathcal{B}$  benutzen, die Terminologie jedoch vermeiden und nach Möglichkeit von **stetigen Operatoren** reden, da diese ja keineswegs beschränkte Abbildungen im Sinne von 6.3.4 zu sein brauchen.

*Übung 6.9.27.* Man zeige: Der Raum  $\mathcal{B}(V, W)$  aller stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen  $V, W$  ist ein Untervektorraum im Raum  $\text{Hom}(V, W)$  aller linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$ , und die in 6.9.24 eingeführte Abbildung  $f \mapsto \|f\|$  ist eine Norm auf  $\mathcal{B}(V, W)$ .

*Ergänzende Übung 6.9.28.* Sind normierte Vektorräume  $V_1, \dots, V_n$  und  $W$  gegeben und ist  $f : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  eine stetige multilineare Abbildung, so heißt die kleinstmögliche Konstante  $C \geq 0$  wie in 6.9.18 die **Norm** von  $f$  und wird notiert

$$\|f\| = \sup\{\|f(v_1, \dots, v_n)\| \mid \|v_i\| \leq 1\}$$

Man zeige, daß wir so eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathcal{B}(V_1, \dots, V_n; W)$  aller stetigen multilinearen Abbildungen erhalten. Weiter zeige man: Die offensichtliche Abbildung liefert einen Isomorphismus von normierten Räumen

$$\mathcal{B}(V_1, \mathcal{B}(V_2, \dots, V_n; W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(V_1, \dots, V_n; W)$$

## 6.10 Überdeckungen kompakter metrischer Räume

**Definition 6.10.1.** Sei  $X$  eine Menge. Unter einer **Überdeckung** von  $X$  versteht man ein System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen von  $X$  mit Vereinigung  $X$ , in Formeln ausgedrückt  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Unter einer **Teilüberdeckung** einer Überdeckung  $\mathcal{U}$  versteht man ein Teilsystem  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , das auch selbst schon eine Überdeckung ist.

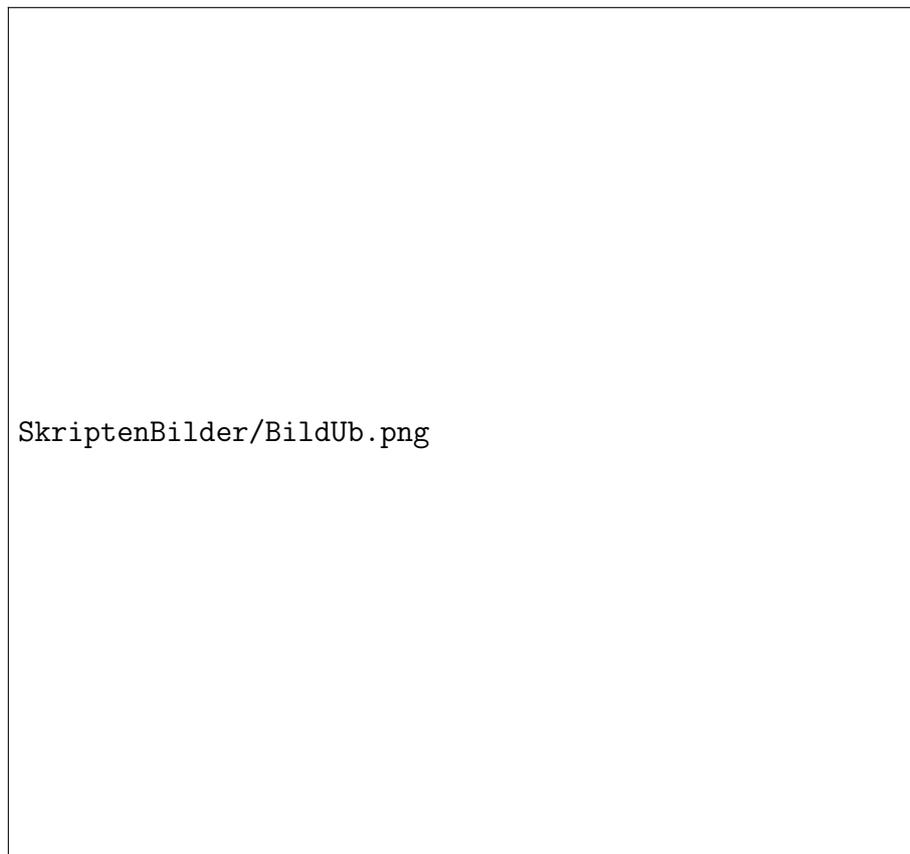
**Definition 6.10.2.** Unter einer **offenen Überdeckung** eines metrischen Raums oder allgemeiner eines topologischen Raums versteht man eine Überdeckung, die aus offenen Teilmengen besteht.

**Satz 6.10.3 (Kompaktheit und offene Mengen).** *Ein metrischer Raum ist folgenkompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

6.10.4. Ich hoffe, daß Sie im weiteren Verlauf dieser Vorlesung noch sehen werden, wie wichtig diese Charakterisierung der Kompaktheit ist. Im Kontext topologischer Räume wird Satz 6.10.3 die Definition der Kompaktheit VI.3.3.1: Ein topologischer Raum heißt **kompakt** oder manchmal auch ausführlicher **überdeckungskompakt** genau dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt. In der französischen Literatur bezeichnet man diese Eigenschaft eines topologischen Raums meist abweichend als **quasikompakt** und fordert von einem kompakten Raum zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft. Topologische Räume mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, heißen dahingegen **folgenkompakt**.

*Ergänzung 6.10.5.* Ein Beispiel für einen überdeckungskompakten aber nicht folgenkompakten topologischen Raum finden Sie in VII.4.15.7, ein Beispiel für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten topologischen Raum in VI.17.4.8 oder ???. Besitzt ein überdeckungskompakter topologischer Raum die zusätzliche Eigenschaft, daß man für jeden seiner Punkte eine Folge von Umgebungen derart finden kann, daß jede seiner Umgebungen mindestens eine Umgebung dieser Folge umfaßt, so ist er auch folgenkompakt mit demselben Argument, wie wir es im Beweis des Satzes verwenden.

6.10.6. Sei  $X$  eine Menge. Unter einer **Überdeckung einer Teilmenge**  $Y \subset X$  durch Teilmengen von  $X$  versteht man ein Mengensystem  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  mit  $Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Man folgert leicht aus 6.10.3, daß eine Teilmenge  $Y$  eines metrischen Raums  $X$  kompakt ist genau dann, wenn jede Überdeckung von  $Y$  durch offene Teilmengen von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.



Eine Überdeckung eines Quadrats durch vier Kreisscheiben

*Beweis.* Sei  $X$  ein metrischer Raum. Ist  $X$  nicht kompakt, so finden wir in  $X$  eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt von  $X$  eine offene Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und alle diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von  $X$  ohne endliche Teilüberdeckung. Das zeigt die eine Richtung. Den Beweis der anderen Richtung beginnen wir mit einem Lemma, das auch für sich genommen oft hilfreich ist.

**Lemma 6.10.7 (Überdeckungssatz von Lebesgue).** *Ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß für alle Punkte  $x \in X$  der  $\varepsilon$ -Ball  $B(x; \varepsilon)$  um  $x$  ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen  $U \in \mathcal{U}$  enthalten ist.*

*Erster Beweis.* Gäbe es kein solches  $\varepsilon > 0$ , so könnten wir für jedes  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  einen Punkt  $x_n \in X$  finden derart, daß  $B(x_n; 1/n)$  in keinem  $U \in \mathcal{U}$  enthalten wäre. Durch Übergang zu einer Teilfolge könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß die Folge der  $x_n$  konvergiert, etwa gegen  $x \in X$ . Nun finden wir jedoch ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U$  und dazu  $\rho > 0$  mit  $B(x; \rho) \subset U$  und dazu  $N$  mit  $d(x_N, x) < \rho/2$  und  $1/N < \rho/2$ , und dann gälte  $B(x_N; 1/N) \subset B(x_N; \rho/2) \subset B(x; \rho) \subset U$  im Widerspruch zur Wahl der  $x_n$ .  $\square$

*Zweiter Beweis.* Man betrachte die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) = \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B(x; r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert  $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ , insbesondere ist  $f$  stetig. Sicher dürfen wir  $X \neq \emptyset$  annehmen. Dann nimmt  $f$  nach 6.7.11 sein Minimum an, und dies Minimum ist ein mögliches  $\varepsilon > 0$ .  $\square$

Um die andere Implikation im Satz zu zeigen sei nun  $X$  kompakt und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Es gilt zu zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wählen wir zu unserer Überdeckung  $\mathcal{U}$  ein  $\varepsilon$  wie im Überdeckungssatz 6.10.7, so reicht es auch zu zeigen, daß es eine endliche Teilmenge  $E \subset X$  gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} B(x; \varepsilon)$$

In der Tat liegt ja der  $\varepsilon$ -Ball  $B(x; \varepsilon)$  um ein beliebiges  $x \in X$  nach Wahl von  $\varepsilon$  schon in einem der  $U \in \mathcal{U}$ . Gäbe es aber für ein  $\varepsilon > 0$  keine endliche Überdeckung von  $X$  durch  $\varepsilon$ -Bälle, so könnten wir induktiv eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

konstruieren mit  $x_n \notin \bigcup_{0 \leq \nu < n} B(x_\nu; \varepsilon)$  für alle  $n$ , also  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$  für  $n \neq m$ , und diese Folge könnte keine konvergente Teilfolge haben, im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

*Übung 6.10.8.* Ist in einem kompakten topologischen Raum  $X$  ein System abgeschlossener Teilmengen  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$  mit leerem Schnitt  $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$  gegeben, so gibt es bereits ein endliches Teilsystem  $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$  mit leerem Schnitt  $\bigcap_{K \in \mathcal{E}} K = \emptyset$ .

*Ergänzende Übung 6.10.9 (Satz von Dini).* Eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig. Hinweis: 6.10.8.

*Ergänzende Übung 6.10.10.* Man zeige, daß das Bild eines kompakten topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung kompakt ist für die Spurtopologie. Insbesondere ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum beschränkt.

*Ergänzende Übung 6.10.11.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  mit einer offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  zeige man: Eine Teilmenge  $Y$  unseres Raums ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit jeder offenen Teilmenge unserer Überdeckung abgeschlossenen Schnitt hat, in Formeln

$$Y \text{ } \mathcal{A} \text{ } X \iff (Y \cap U) \text{ } \mathcal{A} \text{ } U \forall U \in \mathcal{U}$$

Die fraglichen Schnitte sollen also abgeschlossen sein in  $U$ , nicht in  $X$ !

## 6.11 Integrale mit Parametern

**Satz 6.11.1 (über Integrale mit Parametern).** *Gegeben ein metrischer Raum  $X$  und eine stetige Funktion  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist auch die Funktion  $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$  stetig.*

6.11.2. Ich zeige diesen Satz in großer Allgemeinheit als Anwendung unserer neuen Charakterisierung der Kompaktheit und als Illustration für die Kraft der allgemeinen Theorie metrischer Räume. Ist  $X$  offen oder abgeschlossen in einem  $\mathbb{R}^n$ , so kann man auch elementarer mit der gleichmäßigen Stetigkeit argumentieren. Diesen Beweis gebe ich als Alternative auch noch an.

*Beweis.* Versehen wir den Raum  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  aller stetigen reellwertigen Funktionen auf  $[a, b]$  mit der Supremumsnorm, so ist nach dem gleich folgenden Satz 6.11.4 die von  $f$  induzierte Abbildung  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), x \mapsto f(x, \cdot)$  stetig. Nach Übung 6.9.16 ist weiter das Integrieren  $\int : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Damit ist unsere Abbildung  $\int \circ \tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig als eine Verknüpfung stetiger Abbildungen.  $\square$

*Alternativer Beweis.* Ist  $X$  offen oder abgeschlossen in einem  $\mathbb{R}^n$ , so kann man auch elementarer argumentieren. Zunächst reicht es ja, die Stetigkeit an jeder Stelle  $x \in X$  nachzuweisen. Mit dieser Überlegung können wir uns leicht auf den Fall zurückziehen, daß  $X$  kompakt ist. Dann ist aber auch  $X \times [a, b]$  kompakt und nach 6.7.14 ist  $f$  dort gleichmäßig stetig. Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es insbesondere  $\delta > 0$  mit

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(y, t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Aus  $|x - y| < \delta$  folgt mithin

$$\left| \int_a^b f(x, t) dt - \int_a^b f(y, t) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(y, t)| dt \leq (b - a)\varepsilon$$

und das zeigt die Behauptung.  $\square$

6.11.3. Den Raum aller stetigen Abbildungen von einem kompakten Raum  $X$  in einen metrischen Raum  $Y$ , versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, wird  $\mathcal{C}(X, Y)$  notiert. Das  $\mathcal{C}$  steht hier für englisch “continous” und französisch “continu”.

**Satz 6.11.4 (Stetige Abbildungen in Abbildungsräume).** *Seien  $X, Y$  und  $K$  metrische Räume. Ist  $K$  kompakt, so ist eine Abbildung  $f : X \times K \rightarrow Y$  stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathcal{C}(K, Y)$  stetig ist für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf  $\mathcal{C}(K, Y)$ .*

*Beweis.* Daß aus der Stetigkeit von  $\tilde{f}$  die Stetigkeit von  $f$  folgt, sieht man ohne weitere Schwierigkeiten. Wir zeigen nun die andere Richtung und müssen die Stetigkeit von  $\tilde{f}$  an jeder Stelle  $p \in X$  nachweisen. Sei diese Stelle  $p$  ab jetzt fest gewählt und sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  gibt es für jedes  $s \in K$  ein  $\delta_s > 0$  mit

$$f B((p, s); \delta_s) \subset B(f(p, s); \varepsilon)$$

Nun gilt für unsere Metrik auf  $X \times K$  ja  $B((p, s); \delta) = B(p; \delta) \times B(s; \delta)$  und nach 6.10.3 gibt es eine endliche Teilmenge  $E \subset K$  mit  $K \subset \bigcup_{s \in E} B(s; \delta_s)$ . Für  $\eta = \min_{s \in E} \delta_s$  behaupten wir dann

$$x \in B(p; \eta) \Rightarrow d(f(x, t), f(p, t)) < 2\varepsilon \quad \forall t \in K$$

In der Tat finden wir für jedes  $t \in K$  ein  $s \in E$  mit  $t \in B(s; \delta_s)$  und für dies  $s$  liegen  $(p, t)$  und  $(x, t)$  beide in  $B((p, s); \delta_s)$ . Damit ist die Stetigkeit von  $\tilde{f}$  bei  $p$  gezeigt.  $\square$



Illustration zum Beweis von Satz 6.11.4. Die mit gestrichelten Rändern eingezeichneten Quadrate sind so gewählt, daß unsere Abbildung  $f$  auf jedem Quadrat höchstens um den Abstand  $\varepsilon$  von ihrem Wert im Zentrum des jeweiligen Quadrats abweicht. Die gepunkteten Linien begrenzen einen Streifen der Breite  $2\eta$ , in dem unsere Funktion auf jeder Vertikalen höchstens um  $2\varepsilon$  von ihrem Wert am Schnittpunkt der besagten Vertikalen mit der fett eingezeichneten Horizontalen abweicht.

## 7 Raumwertige Funktionen

### 7.1 Bogenlänge in metrischen Räumen

**Definition 7.1.1.** Gegeben ein nichtleeres Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , ein metrischer Raum  $(X, d)$  und eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow X$  definieren wir die **Länge**  $L(\gamma) \in \overline{\mathbb{R}}$  von  $\gamma$  als das Supremum über “die Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge”, in Formeln

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \mid t_0, \dots, t_n \in I, t_0 \leq \dots \leq t_n \right\}$$

Man spricht in diesem Zusammenhang meist von **Bogenlänge**.

7.1.2. Diese Definition liefert uns sogar einen Längenbegriff für eine Abbildung von einer beliebigen angeordneten Menge in einen metrischen Raum. Eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten halboffenen reellen Intervall in einen metrischen oder allgemeiner topologischen Raum nennen wir einen **Weg** in unserem Raum. Wir interessieren uns besonders für die Länge von Wegen im  $\mathbb{R}^k$  und verstehen in diesem Zusammenhang die Länge stets in Bezug auf die euklidische Metrik.

7.1.3. Offensichtlich ist unsere Bogenlänge “invariant unter Reparametrisierung”, genauer haben wir für jede monotone Surjektion  $\psi : J \rightarrow I$  notwendig  $L(\gamma \circ \psi) = L(\gamma)$ . Unsere Definition der Kreiszahl  $\pi$  aus 2.4.1 können wir schreiben als  $\pi = L(\gamma)$  für  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$ .

*Übung 7.1.4.* Gegeben  $s \in \mathbb{R}$  bezeichne  $(s \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Multiplikation mit  $s$ . Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung von einem Intervall nach  $\mathbb{R}^n$ . Man zeige  $L((s \cdot) \circ \gamma) = |s|L(\gamma)$  für  $s \neq 0$ . Ebenso zeige man  $L(A \circ \gamma) = L(\gamma)$  für jede orthogonale, d.h. abstandserhaltende Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

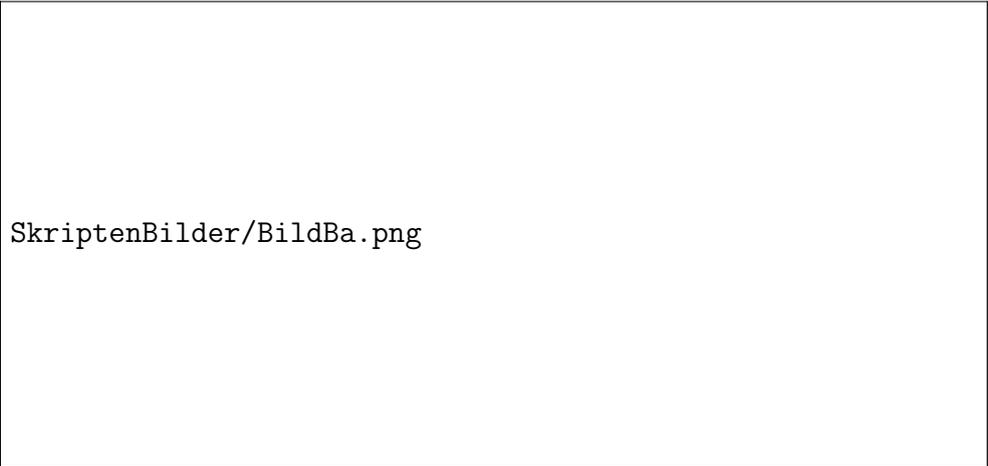
*Übung 7.1.5.* Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung, so gilt  $L(\gamma) \geq \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$  und Gleichheit haben wir genau dann, wenn  $\gamma$  aus dem Weg  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto t\gamma(a) + (1-t)\gamma(b)$  “entsteht durch monotone Umparametrisierung”, genauer: Wenn es  $\psi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  monoton gibt mit  $0, 1 \in \psi([a, b])$  und  $\gamma = \phi \circ \psi$ .

7.1.6. Um Bogenlängen zu berechnen benutzt man meist die Darstellung als Integral 7.3.2. Sie verwendet den Begriff der Ableitung 7.2.1 von Funktionen einer reellen Veränderlichen mit Werten in affinen Räumen, mit dem wir uns nun beschäftigen werden.



SkriptenBilder/Bild0009.png

Eine Approximation eines Weges durch einen Polygonzug



SkriptenBilder/BildBa.png

Eine bessere Approximation durch einen Polygonzug

## 7.2 Ableiten von raumwertigen Funktionen

**Definition 7.2.1.** Seien  $\gamma : I \rightarrow X$  eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}$  in einen normierten Raum  $X$  und  $p \in I$  ein Punkt von  $I$ . Wir nennen die Abbildung  $\gamma$  **differenzierbar bei  $p$**  genau dann, wenn der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow 0} (\gamma(p+t) - \gamma(p))/t$  in  $\vec{X}$  existiert im Sinne von 6.6.8. In diesem Fall nennen wir besagten Grenzwert die **Ableitung von  $\gamma$  bei  $p$**  und notieren diesen Vektor

$$\gamma'(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(p+t) - \gamma(p)}{t} = \lim_{q \rightarrow p} \frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{q - p}$$

Ist  $\gamma$  differenzierbar an allen Stellen  $p \in I$ , so nennen wir  $\gamma$  **differenzierbar** oder genauer **differenzierbar auf  $I$** .

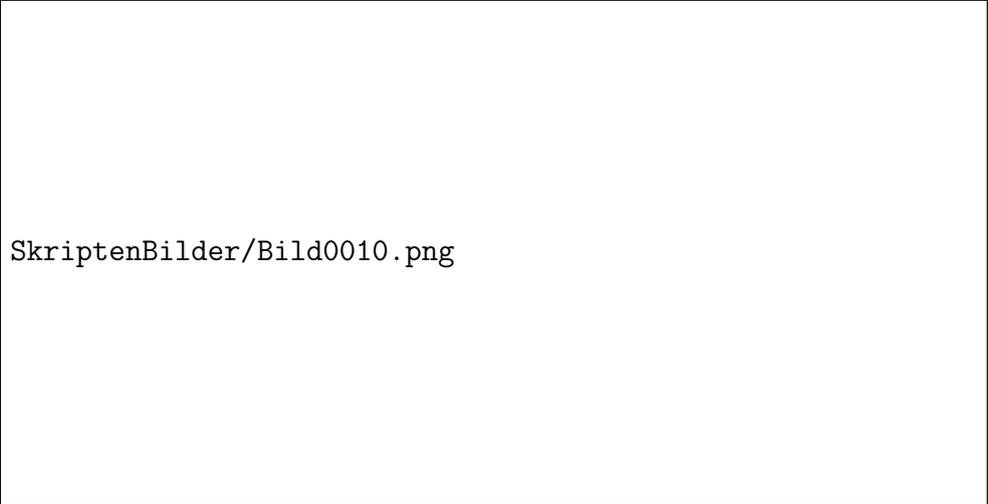
7.2.2. Ich denke mir eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}$  in einen normierten Raum  $X$  gerne als Beschreibung eines Teilchens, das sich in  $X$  bewegt, und denke mir also  $I$  als ein Zeitintervall. Dann nenne ich  $\gamma'(p)$  auch die ‘‘Geschwindigkeit’’ oder genauer den ‘‘Geschwindigkeitsvektor’’ von  $\gamma$  zum Zeitpunkt  $p$  und schreibe sogar manchmal  $\dot{\gamma}$  statt  $\gamma'$ . In physikalischen Zusammenhängen verwende ich diese Begriffe jedoch präziser nur für Funktionen auf einer halboffenen Teilmenge  $I \subset \mathbb{T}$  unseres mathematischen Modells der Zeit aus ??, vergleiche VII.3.1.2, denn eine physikalische Geschwindigkeit darf ja nicht die Einheit einer Länge haben. Wie man für Abbildungen von beliebigen eindimensionalen reellen Räumen in normierte reelle Räume die Ableitung definiert, besprechen wir in IV.1.2.2 und IV.1.2.15.

7.2.3. Formal folgt die in der Definition implizit behauptete Gleichheit der beiden Grenzwerte aus dem Analogon der zweiten Aussage von 3.3.21, die sich wie in 6.6.11 kurz erwähnt mitsamt ihrem Beweis ohne weitere Schwierigkeiten auf den Fall von Grenzwerten bei metrischen oder sogar topologischen Räumen verallgemeinern läßt.

7.2.4. Ich lege hier die Begrifflichkeit normierter affiner Räume im Sinne von 6.8.2 zugrunde. Der Leser mag sich stattdessen auch normierte Vektorräume oder sogar den  $\mathbb{R}^n$  denken. Die gewählte Allgemeinheit modelliert jedoch meines Erachtens besser unsere Anschauung bewegter Teilchen, etwa im uns umgebenden Raum oder auch auf der Tafel Ebene. Des weiteren hoffe ich, daß die begriffliche Trennung von Punkten einerseits und Richtungsvektoren andererseits auch das Verständnis fördern mag.

*Übung 7.2.5.* Auch für Abbildungen halboffener Teilmengen von  $\mathbb{R}$  in normierte Räume folgt aus der Differenzierbarkeit bereits die Stetigkeit.

*Übung 7.2.6.* Sei  $\gamma : I \rightarrow X$  eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}$  in einen normierten Raum  $X$  und sei  $L : X \rightarrow Y$  eine stetige affine



SkriptenBilder/Bild0010.png

Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential an die Bahnkurve. Seine Länge hängt jedoch von der Anzeige des Tachometers ab, wenn wir uns hier mal ein Auto denken, das auf einem Fußballfeld herumkurvt. Dieser Aspekt ist in einem Bild leider schwer darzustellen.

Abbildung in einen weiteren normierten Raum  $Y$ . Ist  $\gamma$  differenzierbar an einer Stelle  $p \in I$ , so ist auch  $L \circ \gamma$  differenzierbar bei  $p$  und es gilt

$$(L \circ \gamma)'(p) = \vec{L}(\gamma'(p))$$

Das zeigt insbesondere, daß unsere Ableitung sich nicht ändert, wenn wir zu einer anderen aber äquivalenten Norm auf  $X$  übergehen. Später wird sich diese Aussage als Spezialfall der Kettenregel in mehreren Veränderlichen [IV.1.3.1](#) erweisen.

7.2.7. Im Spezialfall  $X = \mathbb{R}$  sind unsere Definitionen identisch zu unseren bisherigen Definitionen für reellwertige Funktionen. Was im Fall  $X = \mathbb{R}^m$  passiert, zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 7.2.8 (Komponentenregel).** *Sei  $X = X_1 \times \dots \times X_m$  ein Produkt normierter Räume,  $I \subset \mathbb{R}$  eine halboffene Teilmenge,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : I \rightarrow X$  eine Abbildung und  $p \in I$  ein Punkt. Genau dann ist  $\gamma$  differenzierbar bei  $p$ , wenn alle  $\gamma_j$  differenzierbar sind bei  $p$ , und dann gilt*

$$\gamma'(p) = (\gamma_1'(p), \dots, \gamma_m'(p))$$

*Beweis.* Das folgt aus [6.6.12](#) und sei dem Leser überlassen. Man beachte, daß wir bereits bei der Formulierung die kanonische Identifikation zwischen dem Richtungsraum eines Produkts und dem Produkt der Richtungsräume der Faktoren ?? verwendet haben.  $\square$

7.2.9. Wie in ?? heißt eine Teilmenge eines reellen Raums **konvex** genau dann, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze die beiden Punkte verbindende Geradensegment enthält.

*Übung 7.2.10.* In einem normierten Raum ist jeder Ball konvex.

**Satz 7.2.11 (Schranksatz).** *Seien  $X$  ein normierter Raum,  $a < b$  reelle Zahlen und  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  eine differenzierbare Abbildung. Ist  $C \subset \vec{X}$  eine offene oder abgeschlossene konvexe Teilmenge und gilt  $\gamma'(t) \in C$  für alle  $t \in [a, b]$ , so folgt*

$$\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C$$

7.2.12. Man folgert leicht eine Variante, die auch  $a \geq b$  erlaubt: Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall,  $\gamma : I \rightarrow X$  eine differenzierbare Abbildung und gilt  $\gamma'(t) \in C$  für alle  $t \in I$ , so folgt  $\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C \quad \forall a, b \in I$ .

*Beispiel 7.2.13.* Anschaulich können wir den Inhalt des Satzes interpretieren wie folgt: Sei  $C$  eine Kreisscheibe im Richtungsraum der Anschauungsebene mit Radius 20 km/h. Fahren wir mit einem Geländewagen um 14:00 an



Eine nicht konvexe Teilmenge der Ebene

einem Parkplatz los und kurven durch die Gegend und der Tacho zeigt nie mehr als 20 km/h an, so sind wir um 17 : 00 höchstens 60 km von unserem ursprünglichen Parkplatz entfernt. Besteht  $C$  dahingegen aus einem einzigen Punkt, der sagen wir die Geschwindigkeit von 20 km/h in einer festen Richtung bedeutet, so besagt unser Satz: Fahren wir konstant mit 20 km/h in diese Richtung, so haben wir um 17 : 00 genau 60 km in besagte Richtung zurückgelegt. Für dieses Beispiel identifizieren wir implizit die Zeitachse  $\mathbb{T}$  mit der reellen Zahlengerade  $\mathbb{R}$  derart, daß jeder Stunde ein Intervall der Länge Eins entspricht und damit der Zeitspanne  $h \in \vec{\mathbb{T}}$  der Richtungsvektor  $1 \in \vec{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ . Das bedeutet insbesondere, daß wir implizit auch vektorielle Geschwindigkeiten mit Richtungsvektoren identifizieren dürfen. Im übrigen wird in IV.1.2.15 erklärt, wie man auch mit "echten" Geschwindigkeiten formal korrekt arbeiten kann.

7.2.14. Der Satz folgt im Fall  $X = \mathbb{R}$  leicht aus unserem bisherigen Mittelwertsatz 4.3.8 und er spielt auch im allgemeinen eine ähnliche Rolle, indem er es erlaubt, "den von einem Teilchen in einem Zeitintervall  $[a, b]$  gewonnenen Abstand von seinem Ausgangspunkt aus der Kenntnis seiner lokalen Geschwindigkeiten abzuschätzen". Jedoch kann man für höherdimensionales  $X$  im allgemeinen keinen Zeitpunkt mehr finden, zu dem das Teilchen "mittlere Geschwindigkeit" hätte, d.h. es gibt für höherdimensionales  $X$  im allgemeinen keinen Zeitpunkt  $\xi \in [a, b]$  mit  $\gamma(b) - \gamma(a) = (b - a)\gamma'(\xi)$ . Man stelle ich etwa vor, daß unser Geländewagen ein Rundtour fährt, bei der er zu keiner Zeit die Geschwindigkeit Null hat. Ich bin deshalb von der in der älteren Literatur üblichen Bezeichnung als "Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen" nicht vollständig befriedigt. Oft wird auch nur der Fall betrachtet, daß  $C$  ein offener Ball oder auch ein abgeschlossener Ball mit Zentrum im Ursprung ist: Aus  $\|\gamma'(t)\| \leq K \forall t \in [a, b]$  folgt so etwa  $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (b - a)K$ .

7.2.15. Offensichtlich ist eine Teilmenge  $C$  eines reellen Vektorraums genau dann konvex, wenn für beliebige reelle  $s, t \geq 0$  gilt  $sC + tC = (s + t)C$ . Das zeigt, daß in unserem Satz die Aussage für das ganze Intervall folgt, wenn wir sie für alle Stücke einer Zerlegung in Teilintervalle zeigen können.

*Erster Beweis.* Ist  $C$  abgeschlossen, so schreiben wir  $C$  als den Schnitt der offenen konvexen Mengen  $C + B(0; \eta)$ . Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $C$  offen annehmen. Wir betrachten nun

$$s = \sup\{q \in [a, b] \mid \gamma(x) - \gamma(a) \in (x - a)C \forall x \in [a, q]\}$$

und zeigen zunächst  $s = b$ . Für alle  $p \in [a, b]$  finden wir ja eine offene Umgebung  $U_p \subseteq [a, b]$  mit

$$\frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{q - p} \in C \text{ für alle } q \in U_p \setminus p$$

Insbesondere folgern wir  $s > a$  und müssen nur noch die Annahme  $s < b$  zum Widerspruch führen. Aber wäre  $s < b$ , so fänden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subset U_s$  und die Aussage des Satzes gälte für die Einschränkung von  $\gamma$  auf die Intervalle  $[a, s - \varepsilon]$ ,  $[s - \varepsilon, s]$  und  $[s, s + \varepsilon]$ . Daraus folgte jedoch mit 7.2.15 die Aussage des Satzes für das Intervall  $[a, s + \varepsilon]$  im Widerspruch zur Wahl von  $s$ . Mithin haben wir  $s = b$ . Da es aber mit denselben Argumenten auch ein  $\eta > 0$  gibt derart, daß die Aussage des Satzes für die Einschränkung von  $\gamma$  auf  $[b - \eta, b]$  gilt, folgt die Aussage des Satzes für das ganze Intervall  $[a, b]$ .  $\square$

*Zweiter Beweis.* Wir beginnen wie beim ersten Beweis und finden Umgebungen  $U_p$  wie dort, die wir sogar als Schnitte mit  $[a, b]$  von offenen Bällen  $B(p; \varepsilon_p)$  annehmen dürfen. Da  $[a, b]$  kompakt ist, wird es nach 6.10.3 überdeckt durch endlich viele solcher Umgebungen  $U_p$ . Seien nun  $a = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_r = b$  die Elemente einer kleinstmöglichen Menge von Punkten, die  $a$  und  $b$  enthält und für die die zugehörigen Umgebungen  $[a, b]$  überdecken. Es ist dann leicht zu sehen, daß wir Zwischenpunkte  $q_i \in (p_{i-1}, p_i)$  finden können derart, daß auf jedem Teilintervall der so entstehenden Unterteilung von  $[a, b]$  in  $2r$  Teilintervalle die Folgerung unseres Mittelwertsatzes gilt. Mithin gilt sie auch für das ganze Intervall  $[a, b]$ .  $\square$

*Übung 7.2.16.* Sei  $I \subset \mathbb{R}$  eine halboffene Teilmenge und seien  $A : I \rightarrow M(n \times m; \mathbb{R})$  und  $B : I \rightarrow M(m \times k; \mathbb{R})$  zwei differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt  $AB : t \mapsto A(t)B(t)$  differenzierbar und die Geschwindigkeit  $(AB)'$  der Produktfunktion  $AB : I \rightarrow M(n \times k; \mathbb{R})$  wird gegeben durch die Formel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

*Übung 7.2.17.* Man formuliere und zeige die Summenregel für vektorwertige Funktionen.

*Übung 7.2.18.* Man zeige für komplexwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen die Summenregel  $(f+g)' = f'+g'$ , die Produktregel  $(fg)' = f'g+fg'$  und die Regel für die Ableitung des Kehrwerts  $(1/f)' = -f'/f^2$ . In III.1.5.7 und III.1.5.14 werden wir das sogar für komplexwertige Funktionen einer komplexen Veränderlichen zeigen.

*Übung 7.2.19.* Für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  ist die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{R} \setminus \lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto (t - \lambda)^m$  differenzierbar mit Ableitung  $t \mapsto m(t - \lambda)^{m-1}$ .

*Ergänzende Übung 7.2.20.* (Hinweis: Schrankensatz 7.2.11.) Man zeige für jede stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow X$  von einer halboffenen Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}$  in einen normierten reellen Raum  $X$  die Stetigkeit der

“Tangenten-Sekanten-Abbildung”

$$\phi : I^2 \rightarrow V$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} & s \neq t; \\ \gamma'(s) = \gamma'(t) & s = t. \end{cases}$$

### 7.3 Die Bogenlänge in normierten Räumen

**Definition 7.3.1.** Gegeben ein differenzierbarer Weg in einem normierten Raum erklären wir seine **absolute Geschwindigkeit** zu einem gegebenen Zeitpunkt als die Norm des Geschwindigkeitsvektors.

**Satz 7.3.2 (Bogenlänge als Integral).** Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  in einem normierten reellen Raum  $X$  stimmt überein mit dem Integral über seine absolute Geschwindigkeit, in Formeln

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $\gamma'$  nach 6.7.14 gleichmäßig stetig ist auf  $[a, b]$ , finden wir ein  $\delta > 0$  mit  $\|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| < \varepsilon$  falls  $|x - y| \leq \delta$ . Gegeben eine Unterteilung  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$  einer Feinheit  $\leq \delta$  folgern wir aus dem Schrankensatz 7.2.11 dann

$$\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) \in (a_i - a_{i-1})(\gamma'(a_i) + B(0; \varepsilon))$$

und insbesondere  $\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| \in (a_i - a_{i-1})\|\gamma'(a_i)\| + (a_i - a_{i-1})[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Durch Aufsummieren folgt

$$\left| \sum_{i=1}^r \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| - \sum_{i=1}^r \|\gamma'(a_i)\|(a_i - a_{i-1}) \right| \leq (b - a)\varepsilon$$

für jede Unterteilung der Feinheit  $\leq \delta$ . Das zeigt schon  $L(\gamma) < \infty$ . Nach 3.5.11 können wir weiter  $\delta$  sogar so klein wählen, daß in unserer Differenz die rechte Summe zusätzlich einen Abstand  $\leq \varepsilon$  hat vom Integral  $\int \|\gamma'\|$  für jede Unterteilung der Feinheit  $\leq \delta$ . Da aber die Länge approximierender Polygonzüge beim Hinzufügen von Zwischenpunkten nur größer werden kann, finden wir eine Unterteilung von dieser Feinheit, für die die linke Summe von  $L(\gamma)$  einen Abstand  $\leq \varepsilon$  hat. Zusammen erhalten wir

$$\left| L(\gamma) - \int \|\gamma'\| \right| \leq (b - a + 2)\varepsilon$$

Da das für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $L(\gamma) = \int \|\gamma'\|$  wie gewünscht.  $\square$

*Ergänzung 7.3.3.* Ein Weg in einem metrischen Raum heißt **rektifizierbar** genau dann, wenn er endliche Länge hat. Ein stetig differenzierbarer Weg in einem normierten Raum ist also insbesondere stets rektifizierbar.

*Übung 7.3.4.* Eine Abbildung von einem halboffenen reellen Intervall in einen metrischen Raum heißt **nach der Bogenlänge parametrisierend** genau dann, wenn ihre Restriktion auf jedes nichtleere halboffene kompakte Teilintervall dieselbe Länge hat wie das Teilintervall selber. Man zeige, daß eine stetig differenzierbare Abbildung in einen normierten Raum genau dann nach der Bogenlänge parametrisierend ist, wenn die zugehörige absolute Geschwindigkeit konstant Eins ist.

*Übung 7.3.5.* Man zeige, daß sich jede stetig differenzierbare Abbildung von einem halboffenen reellen Intervall nach  $\mathbb{R}^n$  mit nirgends verschwindender Geschwindigkeit “nach der Bogenlänge parametrisieren” läßt, daß es genauer für solch eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow X$  stets eine stetig differenzierbare Bijektion  $\psi : J \xrightarrow{\sim} I$  gibt derart, daß  $\gamma \circ \psi$  nach der Bogenlänge parametrisierend ist. Das gilt auch für Wege in beliebigen normierten Vektorräumen, nur benötigt man zum Argumentieren in dieser Allgemeinheit die Kettenregel IV.1.3.1, die uns hier noch nicht zur Verfügung steht.

*Übung 7.3.6.* Gegeben ein stetig differenzierbarer Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  in einem normierten Raum  $X$  und eine stetige Funktion  $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man das **Kurvenintegral** von  $f$  längs  $\gamma$  als die reelle Zahl

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Man zeige, daß das Kurvenintegral unabhängig ist von der Parametrisierung und daß es mit denselben Notationen wie oben geschrieben werden kann als der Grenzwert der Riemannsummen

$$S_{\gamma}^r(f) = \sum_{i=1}^r f(\gamma(a_i)) \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\|$$

Als Kür definiere man allgemeiner das Kurvenintegral längs eines beliebigen rektifizierbaren Weges  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  in einem metrischen Raum  $X$ .

**7.3.7 (Anschauung zum Kurvenintegral).** Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges ist in dieser Terminologie das Kurvenintegral der konstanten Funktion Eins längs unseres Weges. Der Schwerpunkt eines durch eine Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschriebenen homogenen gebogenen Drahtes hat als Koordinaten die Integrale der Koordinatenfunktionen  $x, y, z$  längs  $\gamma$  dividiert durch die Länge unseres Weges. Stellen wir uns allgemeiner eine Erdwärmanlage vor, bei der kaltes Wasser in einem Rohr durch heißes Gestein gepumpt

wird um am Ende immer noch vergleichsweise kalt aber doch etwas wärmer herauszukommen, und beschreibt  $\gamma$  unser Rohr und  $f$  die Wärme der Erde an den jeweiligen Stellen, so würde unser Kurvenintegral nach Einfügen der entsprechenden physikalischen Konstanten die Temperaturdifferenz zwischen eintretendem und austretendem Wasser beschreiben.

7.3.8. Das hier definierte Kurvenintegral wird oft auch als "Wegintegral" bezeichnet. Ich will den Begriff des Wegintegrals jedoch für eine andere Konstruktion reservieren, die in IV.3.3 besprochen werden wird.

*Übung 7.3.9.* Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wird die Länge ihres Graphen, d.h. die Länge des Weges  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (t, f(t))$  gegeben durch das Integral  $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ .

7.3.10 (**Gestalt einer hängenden Kette**). Wir gehen hier davon aus, daß die Gestalt einer hängenden Kette durch den Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben wird, und wollen im Folgenden zeigen, daß diese Funktion im Wesentlichen der Cosinus hyperbolicus sein muß. Auf das Kettensegment über einem kompakten Intervall  $[a, b]$  wirken die Zugkraft in der Kette von beiden Seiten sowie die Schwerkraft. Bezeichnet  $L_a^b$  die Länge des besagten Kettensegments und  $v_x = (1, f'(x))$  den Tangentenvektor an unsere Kurve bei  $(x, f(x))$  mit 1 als erster Komponente, so bedeutet das Kräftegleichgewicht die vektorielle Gleichung

$$0 = -c_a v_a + c_b v_b - D(0, L_a^b)$$

für geeignete positive Zahlen  $c_a, c_b$  und eine positive Konstante  $D$ , die von den physikalischen Konstanten unseres Problems abhängen. Durch Betrachtung der ersten Komponenten liefert unsere vektorielle Gleichung für das Kräftegleichgewicht erst einmal  $c_a = c_b = c$  und durch Betrachtung der zweiten Komponenten dann

$$c f'(a) - c f'(b) = -D L_a^b = -D \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Folglich erfüllt unsere Funktion eine Differentialgleichung der Gestalt

$$f'(a) - f'(b) = -k \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

für positives  $k = D/c$ , mithin gilt  $f''(x) = k \sqrt{1 + f'(x)^2}$  woraus wir folgern

$$\int_a^b \frac{f''(x) dx}{k \sqrt{1 + f'(x)^2}} = b - a$$

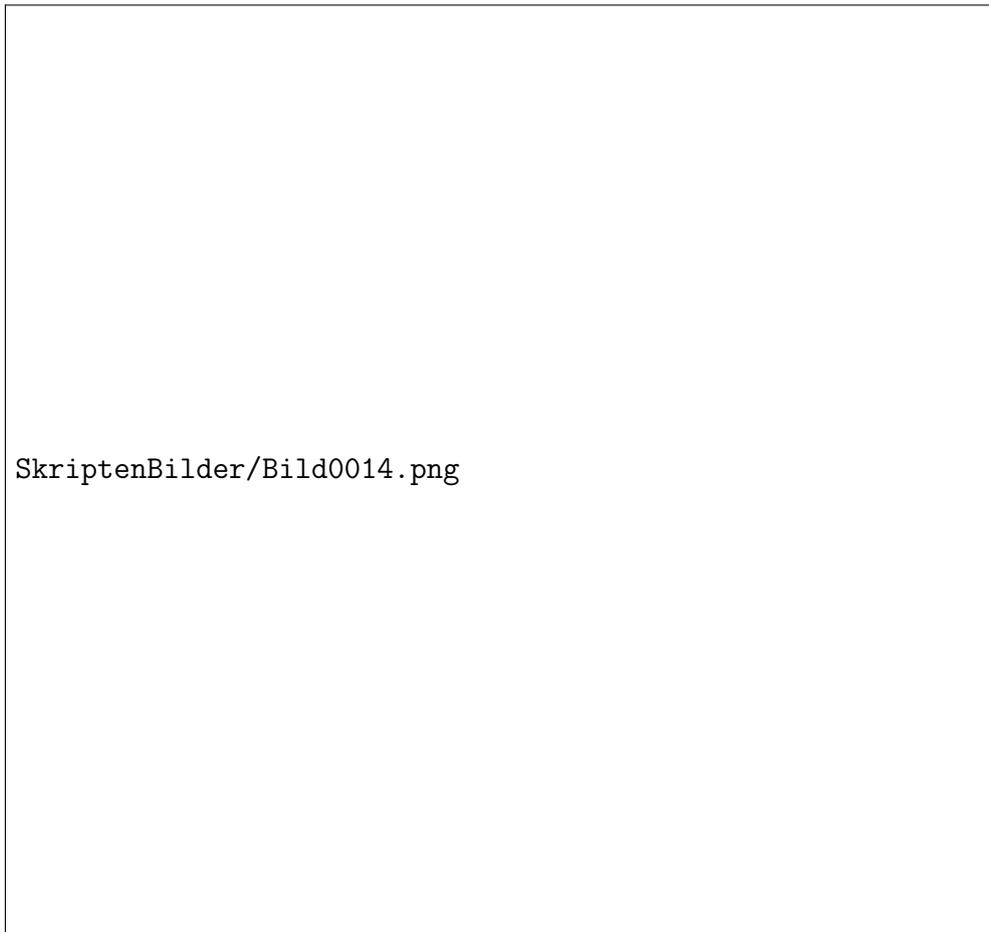


Illustration zur hängenden Kette

und mit der Substitution  $f'(x) = y$ ,  $f''(x) dx = dy$  weiter

$$\int_{f'(a)}^{f'(b)} \frac{dy}{k\sqrt{1+y^2}} = b - a$$

Dies Integral lösen wir durch die Substitution  $y = \sinh t$ ,  $dy = \cosh t dt$  und erhalten als Stammfunktion für den Integranden  $\frac{1}{k} \operatorname{arsinh} y$ . Damit ergibt sich  $\frac{1}{k} \operatorname{arsinh} f'(b) = b + m$  für eine weitere Konstante  $m$  und so  $f'(b) = \sinh\left(\frac{b+m}{k}\right)$  und damit schließlich

$$f(b) = k \cosh\left(\frac{b+m}{k}\right) + h$$

für geeignete Konstanten  $k, m$  und  $h$ . Hier beschreibt  $k$ , wie “steil” die Kette hängt,  $m$  ist das Negative der  $x$ -Koordinate der Stelle kleinster Höhe, und  $h$  beschreibt, wie hoch unsere Kette hängt.

## 7.4 Definition von Sinus und Cosinus

**Satz 7.4.1.** *Es gibt genau eine stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\|\gamma(t)\| = \|\gamma'(t)\| = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_2'(0) > 0$  und  $\gamma(0) = (1, 0)$ .*

7.4.2. Diese Bedingungen bedeuten anschaulich, daß  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  die Bewegung eines punktförmigen Teilchens in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  beschreibt, das auf dem Einheitskreis  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  mit konstanter absoluter Geschwindigkeit 1 im Gegenuhrzeigersinn umläuft und sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  an der Stelle  $(1, 0)$  befindet. Mithilfe von 4.3.10 können Sie zur Übung sogar zeigen, daß der Satz auch dann noch gilt, wenn wir von unserer Abbildung statt der stetigen Differenzierbarkeit nur die Differenzierbarkeit fordern.

**Definition 7.4.3.** Wir nennen die beiden Komponenten der Abbildung  $\gamma$  aus dem vorhergehenden Satz 7.4.1 den **Cosinus** und den **Sinus** und notieren sie

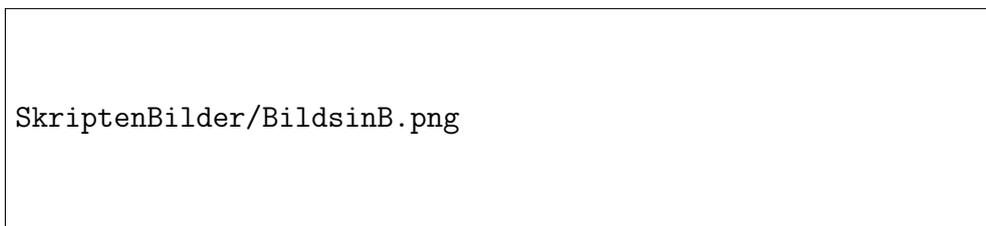
$$\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

In Formeln sind die Funktionen Sinus und Cosinus also definiert durch die Gleichung  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  mit  $\gamma$  unserer eindeutig bestimmten Abbildung aus 7.4.1.

*Bemerkung 7.4.4.* Auf Taschenrechnern muß man, um die hier definierten Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  zu erhalten, meist noch spezifizieren, daß die Eingabe im Bogenmaß, auf englisch “Radians” oder abgekürzt “rad”, zu verstehen sein soll. Auf lateinisch bedeutet Sinus übrigens “Bodenwelle” und “Busen”, wortverwandt ist französisch “le sein”.



Sinus und Cosinus am Einheitskreis



Die Graphen vom Sinus als durchgezogene Linie und vom Cosinus als gestrichelte Linie. Der Sinus hat seine Maxima genau an den Stellen, an denen der Cosinus verschwindet und eine negative Ableitung besitzt, vergleiche [4.3.15](#).

7.4.5. Im Vorgriff auf ?? erkläre ich bereits hier für Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  ihr **Skalarprodukt**  $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$  durch  $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$  für  $v = (v_1, \dots, v_n)$  und  $w = (w_1, \dots, w_n)$ . Die anschauliche Bedeutung wird in ?? erläutert. Offensichtlich gilt  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$  für die euklidische Norm im Sinne von 6.9.7, und jedenfalls im  $\mathbb{R}^2$  gilt  $\langle v, w \rangle = 0$  offensichtlich genau dann, wenn  $v$  und  $w$  anschaulich aufeinander senkrecht stehen oder einer der beiden Vektoren Null ist.

*Beweis von 7.4.1.* Wir zeigen hier nur, daß eine stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Bedingungen des Satzes erfüllt genau dann, wenn gilt

$$\gamma(0) = (1, 0), \quad \gamma'_1 = -\gamma_2 \quad \text{und} \quad \gamma'_2 = \gamma_1.$$

Damit folgt unser Satz 7.4.1 dann aus dem allgemeinen Satz 7.4.9, den wir im Anschluß beweisen. Zunächst ist für eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Länge  $\|\gamma(t)\|$  des Ortsvektors konstant genau dann, wenn ihr Quadrat  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle$  konstant ist genau dann, wenn dessen Ableitung  $2\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle$  verschwindet genau dann, wenn zu jedem Zeitpunkt  $t$  der Geschwindigkeitsvektor  $\gamma'(t)$  senkrecht steht auf dem Ortsvektor  $\gamma(t)$ . Die einzigen auf  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  senkrechten Vektoren derselben Länge wie  $(a, b)$  sind nun aber  $(-b, a)$  und  $(b, -a)$ . Für eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sind also  $\|\gamma(t)\|$  und  $\|\gamma'(t)\|$  konstant von derselben Länge genau dann, wenn zu jedem Zeitpunkt  $t$  gilt  $\gamma'(t) = \pm(-\gamma_2(t), \gamma_1(t))$ , wobei das Vorzeichen im Prinzip noch von  $t$  abhängen kann. Fordern wir allerdings die Stetigkeit der Ableitung, so muß dieses Vorzeichen konstant sein, und unter der zusätzlichen Bedingung  $\gamma(0) = (1, 0)$  ist unser Vorzeichen ein  $+$  genau dann, wenn gilt  $\gamma'_2(0) > 0$ .  $\square$

7.4.6. Man kann die Bedingungen  $\gamma'_1 = -\gamma_2$  und  $\gamma'_2 = \gamma_1$  zusammenfassen zur Matrix-Gleichung

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun ganz allgemein, wie man Systeme von Differentialgleichungen dieser Art löst. Genauer bestimmen wir für eine gegebene quadratische Matrix  $M \in M(n \times n; \mathbb{R})$  alle differenzierbaren Abbildungen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\gamma'(t) = M\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bei dieser Schreibweise fassen wir implizit die Elemente des  $\mathbb{R}^n$  als Spaltenvektoren auf, also  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top$ , wo der obere Index  $\top$  unsere Zeilenmatrix in eine Spaltenmatrix transponiert. Man nennt so eine Gleichung

auch ein **homogenes System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**. Die Spezifikation “mit konstanten Koeffizienten” grenzt unsere Gleichung ab von dem noch allgemeineren Fall, bei dem auch die Matrix  $M$  noch von  $t$  abhängt. Die Spezifikation “homogen” grenzt es ab vom allgemeineren Fall einer Gleichung der Gestalt  $\gamma'(t) = M\gamma(t) + f(t)$  für eine zusätzlich gegebene vektorwertige Funktion  $f$ , den wir in III.2.4.1 diskutieren. Anschaulich gesprochen geben wir uns auf dem  $\mathbb{R}^n$  das sehr spezielle Vektorfeld  $x \mapsto Mx$  vor und interessieren uns für die Bahnen solcher Teilchen, die bei  $x \in \mathbb{R}^n$  jeweils die Geschwindigkeit  $Mx$  haben.

7.4.7. Im Fall  $n = 1$  hat  $M$  genau einen Eintrag  $a \in \mathbb{R}$ , und wir hatten schon in 4.3.14 gesehen, daß alle Lösungen der Differentialgleichung  $\gamma' = a\gamma$  die Form  $\gamma(t) = c \exp(at)$  haben. Im Allgemeinen definieren wir die **Exponentialfunktion auf Matrizen** durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \exp : M(n \times n; \mathbb{R}) &\rightarrow M(n \times n; \mathbb{R}) \\ M &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{6}M^3 + \dots \end{aligned}$$

Hier bedeutet  $M^0 = I$  nach unserer Konvention I.3.1.14 die Einheitsmatrix und unsere unendliche Reihe ist zu verstehen als der Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen. Es ist nur noch zu zeigen, daß diese Grenzwerte existieren. Bezeichnen wir dazu für eine quadratische Matrix  $M \in M(n \times n; \mathbb{R})$  mit  $|M|$  das Maximum der Absolutbeträge ihrer Einträge, so gilt offensichtlich  $|MB| \leq n|M||B|$ , also  $|M^k| \leq (n|M|)^k$ , und dann zeigt die Konvergenz der Exponentialreihe zu  $(n|M|)$  schon die absolute Konvergenz aller Reihen von Matrixeinträgen in der Exponentialreihe zu  $M$ .

7.4.8. Die Stetigkeit von  $\exp : M(n \times n; \mathbb{R}) \rightarrow M(n \times n; \mathbb{R})$  dürfen Sie in größerer Allgemeinheit als Übung 7.5.27 selbst beweisen.

**Satz 7.4.9 (Lineare Differentialgleichungen).** *Ist  $M \in M(n \times n; \mathbb{R})$  eine quadratische Matrix und  $c \in \mathbb{R}^n$  ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Anfangswert  $\gamma(0) = c$  derart, daß gilt  $\gamma'(t) = M\gamma(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp(tM)c$$

7.4.10. Es ist durchaus möglich, mithilfe dieses Satzes auch ganz konkrete Differentialgleichungen ganz konkret zu lösen. Wir gehen darauf in Abschnitt III.2 näher ein.

*Beweis.* Wir behaupten zunächst, daß die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow M(n \times n; \mathbb{R})$ ,  $t \mapsto \exp(tM)$  differenzierbar ist mit der Ableitung  $g'(t) = M \exp(tM)$ . In



SkriptenBilder/Bild0012.png

Das ebene Vektorfeld  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

der Tat wissen wir nach 5.1.15, daß man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, und unsere Formel ergibt sich, wenn wir diese Erkenntnis anwenden auf alle Einträge unserer Matrix. Nach Lemma 7.2.6 ist nun auch die Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto \exp(tM)c$  differenzierbar mit Ableitung  $\gamma'(t) = M \exp(tM)c = M\gamma(t)$ , und die Bedingung  $\gamma(0) = c$  ist offensichtlich. Unsere Funktion ist damit eine Lösung der Differentialgleichung mit dem vorgegebenen Anfangswert. Ist umgekehrt  $\gamma(t)$  eine beliebige Lösung unserer Differentialgleichung  $\gamma' = M\gamma$ , so berechnen wir die Ableitung der Funktion  $t \mapsto h(t) = \exp(-tM)\gamma(t)$  mithilfe der matrixwertigen Produktregel 7.2.16 und erhalten

$$h'(t) = -M \exp(-tM)\gamma(t) + \exp(-tM)\gamma'(t) = 0$$

Die Funktion  $h(t) = \exp(-tM)\gamma(t)$  ist also konstant mit Wert  $\gamma(0)$  und mit dem anschließenden Lemma 7.4.11 folgt  $\gamma(t) = \exp(tM)\gamma(0)$ .  $\square$

**Lemma 7.4.11.** *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, und sind  $A, B$  zwei kommutierende quadratische Matrizen, in Formeln  $AB = BA$ , so gilt*

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

7.4.12. Insbesondere folgt  $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ . Die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge aller quadratischen Matrizen in die Menge aller invertierbaren quadratischen Matrizen

$$\exp : M(n \times n; \mathbb{R}) \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$$

Für den Beweis des Lemmas geben wir zunächst nur eine Skizze, die dann im anschließenden Abschnitt ausgemalt wird.

*Beweisskizze.* Genau wie bei der Diskussion des Produkts absolut konvergenter Reihen in 2.6.11 zeigt man

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{A^i B^j}{i!j!}$$

Dann faßt man mithilfe von 7.5.20 die Terme mit  $i + j = k$  zusammen und landet wegen  $AB = BA$  wie beim Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion bei der Reihe für  $\exp(A + B)$ . Um das alles formal zu rechtfertigen, kann man mit den einzelnen Matrixeinträgen argumentieren und sich so auf unsere Resultate über Reihen reeller Zahlen zurückziehen. Ich will aber stattdessen diese Schwierigkeit als Motivation nutzen und gleich im nächsten Abschnitt 7.5 eine allgemeine Begrifflichkeit entwickeln, in der dieser Beweis einfach und natürlich wird und die auch darüber hinaus von Nutzen ist.  $\square$

*Übung 7.4.13.* Ist  $M \in M(n \times n; \mathbb{R})$  eine quadratische Matrix und  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall, so bildet die Menge aller differenzierbaren Abbildungen  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma'(t) = M\gamma(t)$  für alle  $t \in I$  einen Untervektorraum  $L$  im Vektorraum  $\text{Ens}(I, \mathbb{R}^n)$  aller Abbildungen  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung, und das Auswerten an einer beliebigen Stelle  $t_0 \in I$  definiert einen Vektorraumisomorphismus  $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$ , den **Anfangswertisomorphismus**.

*Übung 7.4.14.* Gegeben eine Diagonalmatrix  $M = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  haben wir  $\exp(M) = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$ . Analoges gilt allgemeiner auch für blockdiagonale Matrizen.

## 7.5 Vollständigkeit und Exponential von Matrizen

**Definition 7.5.1.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem vorgegebenen metrischen Raum heißt eine **Cauchy-Folge** genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N_\varepsilon$  gibt derart, daß gilt

$$n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Ein metrischer Raum  $X$  heißt **vollständig** genau dann, wenn jede Cauchy-Folge in  $X$  konvergiert.

*Beispiele 7.5.2.* Die Zahlengerade  $\mathbb{R}$  ist vollständig nach 2.2.11. Weiter ist offensichtlich jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums vollständig. Darüber hinaus ist auch jedes endliche Produkt vollständiger metrischer Räume vollständig. Insbesondere ist der  $\mathbb{R}^n$  vollständig für den Betragsabstand im Sinne von 6.2.3. Dahingegen ist  $X = \mathbb{Q}$  mit dem Betragsabstand kein vollständiger metrischer Raum, und auch wenn wir aus der Zahlengerade einen Punkt entfernen, erhalten wir bereits einen unvollständigen metrischen Raum.

*Übung 7.5.3.* Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig. Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

*Übung 7.5.4.* Das Produkt zweier vollständiger metrischer Räume ist stets wieder vollständig.

*Übung 7.5.5.* Jede gleichmäßig stetige Abbildung  $f : A \rightarrow Y$  von einer Teilmenge  $A$  eines metrischen Raums  $X$  in einen vollständigen metrischen Raum  $Y$  kann auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung  $\bar{A} \rightarrow Y$  auf den Abschluß von  $A$  in  $X$  fortgesetzt werden. Vergleiche auch V.1.4.12.

*Übung 7.5.6.* Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge, so konvergiert bereits die ganze Cauchyfolge, und zwar gegen denselben Grenzwert.

**Definition 7.5.7.** Unter einem **Banach-Raum** oder genauer einem **reellen Banach-Raum** versteht man einen vollständigen normierten reellen Vektorraum. Sobald wir die komplexen Zahlen kennengelernt haben, werden wir auch und sogar überwiegend mit komplexen Banachräumen arbeiten.

**Lemma 7.5.8.** *Jeder endlichdimensionale normierte reelle Vektorraum ist vollständig, in anderen Worten also ein Banachraum.*

*Beweis.* Wir wählen irgendeinen Vektorraumisomorphismus mit dem  $\mathbb{R}^n$ . Die so induzierte Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist nach 6.9.21 äquivalent zur Maximumnorm und liefert also dieselben Cauchyfolgen und dieselben Grenzwerte von Folgen. Die Maximumnorm auf dem  $\mathbb{R}^n$  hinwiederum führt zum Betragsabstand, und für diese Metrik wissen wir seit 7.5.2, daß sie den  $\mathbb{R}^n$  zu einem vollständigen metrischen Raum macht.  $\square$

*Übung 7.5.9.* Seien  $V, W$  normierte Vektorräume. Ist  $W$  vollständig, so ist auch der Raum  $\mathcal{B}(V, W)$  der stetigen linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  aus 6.9.27 vollständig.

*Übung 7.5.10.* Ist  $V$  ein Banachraum und  $D$  eine Menge, so ist auch der Vektorraum  $\text{Ens}^b(D, V)$  aus 6.9.8 aller beschränkten Abbildungen von  $D$  nach  $V$  mit seiner Supremumsnorm vollständig.

**Definition 7.5.11.** Gegeben ein normierter Vektorraum  $V$  heißt eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren aus  $V$  **summierbar mit Summe**  $s \in V$  und man schreibt

$$\sum_{i \in I} v_i = s$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $s$  eine endliche Teilmenge  $I_U \subset I$  gibt derart, daß für jede endliche Obermenge  $J$  von  $I_U$  in  $I$  gilt

$$\sum_{i \in J} v_i \in U$$

Man sieht leicht, daß die Summe einer summierbaren Familie stets eindeutig bestimmt ist. Dieselbe Definition verwenden wir später allgemeiner für beliebige “abelsche Hausdorff’sche topologische Gruppen”.

*Übung 7.5.12.* Eine abzählbare Familie ist summierbar genau dann, wenn für jede Abzählung die Folge der Partialsummen konvergiert und für je zwei Abzählungen die entsprechenden Grenzwerte übereinstimmen.

*Übung 7.5.13.* Gegeben ein normierter Vektorraum  $V$  und eine summierbare Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren von  $V$  und eine stetige lineare Abbildung

$L$  von  $V$  in einen weiteren normierten Vektorraum ist auch die Bildfamilie summierbar und es gilt

$$\sum_{i \in I} L(v_i) = L\left(\sum_{i \in I} v_i\right)$$

Analoges gilt auch allgemeiner für beliebige “abelsche Hausdorff’sche topologische Gruppen”.

*Ergänzende Übung 7.5.14.* Gegeben normierte Vektorräume  $V, W, X$  und eine stetige bilineare Abbildung  $b : V \times W \rightarrow X$  und summierbare Familien  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren von  $V$  und  $(w_j)_{j \in J}$  von Vektoren von  $W$  ist auch die durch  $I \times J$  indizierte Familie der  $b(v_i, w_j)$  summierbar und es gilt

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} b(v_i, w_j) = b\left(\sum_{i \in I} v_i, \sum_{j \in J} w_j\right)$$

Analoges gilt auch allgemeiner für beliebige “abelsche Hausdorff’sche topologische Gruppen”.

**Definition 7.5.15.** Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren in einem normierten Vektorraum heißt **absolut summierbar** genau dann, wenn die Familie ihrer Normen  $(\|v_i\|)_{i \in I}$  summierbar ist.

**Lemma 7.5.16.** *In einem Banachraum ist jede absolut summierbare Familie summierbar und die Norm der Summe kann nach oben abgeschätzt werden durch die Summe der Normen.*

*Beweis.* Nach 2.5.26 sind bei einer absolut summierbaren Familie höchstens abzählbar viele Vektoren von Null verschieden, so daß wir uns auf Familien beschränken dürfen, die durch  $\mathbb{N}$  indiziert sind. Sei also  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  unsere Familie. Die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$  bilden eine Cauchy-Folge, da für  $m \geq n$  ja gilt

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m v_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|v_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|v_k\|$$

und das wird für hinreichend großes  $n$  beliebig klein. Mithin konvergiert die Folge der Partialsummen gegen einen Grenzwert  $s$ . Den Nachweis, daß dieser Grenzwert auch die Summe im Sinne der Definition 7.5.11 sein muß, überlasse ich dem Leser.  $\square$

*Ergänzung 7.5.17.* In 2.5.26 hatten wir gesehen, daß jede summierbare Familie reeller Zahlen absolut summierbar ist. Dasselbe gilt für summierbare

Familien in endlichdimensionalen normierten Räumen. In beliebigen normierten Räumen gilt es jedoch nicht mehr, ein typisches Gegenbeispiel ist etwa die “Konvergenz im quadratischen Mittel” in III.3.3.5 oder allgemeiner in V.1.4.18.

*Übung 7.5.18.* Man zeige, daß eine summierbare Familie in einem Banachraum höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Summanden haben kann.

*Ergänzung 7.5.19.* In allgemeinen “Hausdorff’schen topologischen Vektorräumen” kann es auch summierbare Familien mit überzählbar vielen von Null verschiedenen Summanden geben. Ist zum Beispiel  $X$  eine überzählbare Menge mit ihrer diskreten Topologie und  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  der Raum der reellwertigen Funktionen auf  $X$  mit seiner kompakt-offenen Topologie, so ist die Familie der charakteristischen Funktionen aller Punkte von  $X$  summierbar mit der konstanten Funktion Eins als Summe.

*Ergänzende Übung 7.5.20.* Gegeben eine summierbare Familie  $(v_i)_{i \in I}$  in einem Banachraum zeige man, daß auch jede Teilfamilie summierbar ist und daß für eine beliebig vorgegebene Zerlegung  $I = \bigsqcup_{k \in K} I(k)$  von  $I$  in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen  $I(k)$  gilt

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I(k)} v_i \right)$$

Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß  $K$  endlich ist. Die Aussage gilt allgemeiner für jede vollständige Hausdorff’sche abelsche topologische Gruppe.

**Definition 7.5.21.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow V$  definieren wir eine weitere lineare Abbildung  $\exp(A) : V \rightarrow V$  als den Grenzwert der sogenannten **Exponentialreihe**

$$\exp(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$$

7.5.22. Wählen wir eine Norm auf  $V$  und versehen den Raum  $\text{End } V$  aller Endomorphismen von  $V$  mit der Operatornorm, so gilt offensichtlich  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  und unsere Familie ist summierbar nach 7.5.16, da sie nämlich absolut summierbar ist bezüglich dieser und dann bezüglich jeder Norm. Für eine Operatornorm wie eben erhält man zusätzlich die Abschätzung  $\|\exp A\| \leq \exp \|A\|$ .

*Ergänzung 7.5.23.* Ist allgemeiner  $V$  ein Banachraum und  $A : V \rightarrow V$  eine stetige lineare Abbildung, so kann man in derselben Weise eine stetige lineare Abbildung  $\exp(A) : V \rightarrow V$  erklären. Der Grenzwert ist in diesem Fall

im Banachraum  $\mathcal{B}(V) := \mathcal{B}(V, V)$  aller stetigen linearen Abbildungen von  $V$  in sich selbst aus 7.5.9 zu bilden. Die im Folgenden bewiesenen Aussagen verallgemeinern sich ohne Schwierigkeiten auf diesen Fall. Er ist für die Quantenmechanik fundamental, denn die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems mit Hamiltonoperator  $H$  wird dadurch beschrieben, daß ein Zustand  $\psi$  in der Zeitspanne  $t$  in den Zustand  $\exp(itH)\psi$  übergeht.

**Lemma 7.5.24.** *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, und sind  $A, B$  zwei kommutierende Endomorphismen, gilt also in Formeln  $AB = BA$ , so folgt*

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

7.5.25. Insbesondere folgt  $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ , die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge der Endomorphismen in die Menge der Automorphismen  $\exp : \text{End } V \rightarrow \text{Aut } V$ . Die Aussage des Lemmas gilt ganz allgemein für beliebige stetige Endomorphismen von Banachräumen.

*Beweis.* Genau wie bei der Diskussion des Produkts absolut konvergenter Reihen in 2.6.11 zeigt man zunächst

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{A^i B^j}{i!j!}$$

Dann faßt man mithilfe von 7.5.20 die Terme mit  $i + j = k$  zusammen und landet wegen  $AB = BA$  wie beim Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 2.6.8 bei der Reihe für  $\exp(A + B)$ .  $\square$

*Ergänzung 7.5.26.* Es gilt auch eine koordinatenfreie Variante von 7.4.9. Ist genauer  $V$  ein Banachraum und  $A : V \rightarrow V$  eine stetige lineare Abbildung und  $c \in V$  ein Vektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V$  mit  $\gamma(0) = c$  und  $\gamma'(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , und diese Abbildung wird gegeben durch die Formel

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von 7.4.9. Problematisch ist nur, daß die Produktregel in der benötigten Allgemeinheit erst in IV.1.4.5 zur Verfügung gestellt wird.

*Ergänzende Übung 7.5.27.* Für jeden Banachraum  $V$  ist  $\exp : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(V)$  stetig. Hinweis: 6.6.4.

*Übung 7.5.28.* Sind  $A, B$  stetige Endomorphismen von Banachräumen  $V, W$  und ist  $P : W \rightarrow V$  stetig linear mit  $AP = PB$ , so gilt  $(\exp A)P = P(\exp B)$ . Ist insbesondere  $P$  invertierbar, so gilt  $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$ .

*Übung 7.5.29.* Gegeben eine Menge  $D$  und ein vollständiger metrischer Raum  $Y$  ist auch der Raum  $\text{Ens}^b(D, Y)$  aller beschränkten Abbildungen von  $D$  nach  $Y$  vollständig für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz 6.3.5.

*Übung 7.5.30.* Gegeben ein topologischer Raum  $D$  und ein vollständiger metrischer Raum  $Y$  ist auch der Raum  $\mathcal{C}_b(D, Y)$  aller stetigen beschränkten Abbildungen von  $D$  nach  $Y$  vollständig für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz 6.3.5. Hinweis: Man verwende 6.6.4.

*Übung 7.5.31.* Gegeben ein halboffenes kompaktes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  ist auch der Raum  $\mathcal{C}^1(I, V)$  aller einmal stetig differenzierbaren Abbildungen von  $I$  nach  $V$  vollständig für die Norm  $\|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_\infty$  der gleichmäßigen Konvergenz der Funktion und ihrer ersten Ableitung. Hinweis: Man verallgemeinere 6.6.4 und verwende 5.1.14.

*Ergänzende Übung 7.5.32.* Es gibt eine **stetige Surjektion vom Einheitsintervall  $[0, 1]$  auf das Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$** . Um diese auf den ersten Blick verblüffende Tatsache einzusehen, unterteile man das Einheitsintervall in neun gleiche Abschnitte und das Einheitsquadrat in vier gleiche Quadrate und wähle irgendeinen Weg  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ , der den  $2i$ -ten Abschnitt in das  $i$ -te Quadrat abbildet, für irgendeine Nummerierung der vier Quadrate. Dann unterteile man die  $2i$ -ten Abschnitte von eben jeweils in neun gleiche Unterabschnitte und die vier Quadrate von eben jeweils in vier gleiche Unterquadrate und ändere den Weg von eben auf den  $2i$ -ten Abschnitten von eben so ab, daß sie immer noch im  $i$ -ten Quadrat landen und zusätzlich die  $2j$ -ten Unterabschnitte des  $2i$ -ten Abschnitts im  $j$ -ten Unterquadrat des  $i$ -ten Quadrats landen, für irgendeine Nummerierung dieser Unterquadrate. Indem man immer so weitermacht, erhält man eine gleichmäßig konvergente Folge von Abbildungen. Der Grenzwert dieser Folge ist die gesuchte Surjektion.

## 7.6 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

7.6.1. Aus der Definition 7.4.3 und der nachfolgenden Diskussion wissen wir bereits, daß  $\sin$  und  $\cos$  differenzierbare Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  sind mit  $\sin' = \cos$ ,  $\cos' = -\sin$ ,  $\sin(0) = 0$  und  $\cos(0) = 1$ . Wir wissen weiter, daß gilt  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ , wo wir  $(\sin t)^2 = \sin^2 t$  und  $(\cos t)^2 = \cos^2 t$  abgekürzt haben. Diese Abkürzungen sind auch üblich für alle anderen trigonometrischen bzw. hyperbolischen trigonometrischen Funktionen, denn das spart Klammern und die alternativ möglichen Bedeutungen  $\sin^2 t = \sin(\sin t)$  etc. kommen nie vor.

**Satz 7.6.2 (Reihenentwicklung von Sinus und Cosinus).** *Unsere Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  werden dargestellt durch die absolut konvergenten Reihen*

$$\begin{aligned}\cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \\ \sin t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

und für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $\cos(-t) = \cos t$  sowie  $\sin(-t) = -\sin t$ .

*Beweis.* Die Reihen ergeben sich aus der Darstellung

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der zweite Punkt folgt aus den Reihendarstellungen.  $\square$

**Lemma 7.6.3.** *Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

*Beweis.* Wir müssen nur noch die Gleichheit der zweiten Spalten zeigen, also

$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das folgt aber mit 7.4.9 daraus, daß das Paar von Funktionen  $(-\sin t, \cos t)$  auch unserem System von Differentialgleichungen 7.4.6 genügt und darüber hinaus den richtigen Anfangswert hat.  $\square$

**Proposition 7.6.4 (Additionsformeln).** *Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b\end{aligned}$$

*Beweis.* Das folgt mit 7.6.3 aus der Matrixgleichung

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -(a+b) \\ (a+b) & 0 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

die wir ihrerseits aus 7.5.24 folgern.  $\square$

**Satz 7.6.5 (Nullstellen von Sinus und Cosinus).** *1. Die Nullstellen des Sinus sind genau die ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$ , in Formeln  $\{t \in \mathbb{R} \mid \sin t = 0\} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .*

2. Die Nullstellen des Cosinus sind genau die halbzahligen Vielfachen von  $\pi$ , in Formeln  $\{t \in \mathbb{R} \mid \cos t = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

*Beweis.* Zunächst einmal zeigen wir durch Widerspruch, daß der Cosinus überhaupt positive Nullstellen hat. Sicher gilt  $\cos(0) = 1 > 0$ . Hätte der Cosinus keine positive Nullstelle, so müßte  $\cos t$  positiv bleiben für alle  $t \geq 0$ . Dann müßte nach 4.3.11 also der Sinus streng monoton wachsen auf  $[0, \infty)$  und damit müßte

$$\int_0^x \sin t \, dt = \cos 0 - \cos x$$

für  $x \rightarrow \infty$  über alle Grenzen wachsen. Das ist aber unmöglich, denn es gilt  $\cos^2 \leq \cos^2 + \sin^2 = 1$ . Folglich hat der Cosinus eine kleinste positive Nullstelle

$$a = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \text{ und } \cos t = 0\}$$

Wir zeigen als nächstes, daß gilt  $a = \pi/2$ . Der Cosinus ist natürlich positiv auf  $(-a, a)$ , folglich ist der Sinus streng monoton auf  $[-a, a]$ , und aus  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  und  $\sin'(0) > 0$  folgt  $\sin(-a) = -1$ ,  $\sin(a) = 1$ . Der Sinus definiert also eine Bijektion

$$\sin : [-a, a] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$$

Da sich die Länge eines Weges nach 7.1.3 unter surjektiver monotoner Umparametrisierung nicht ändert, ist nun unser in 2.4.1 und in 7.1.3 definiertes  $\pi$  auch die Länge des Weges

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [-a, a] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\sin t, \cos t) \end{array}$$

und wir erhalten

$$\pi = L(\gamma) = \int_{-a}^a \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \, dt = \int_{-a}^a 1 \, dt = 2a$$

Damit ist in der Tat  $\pi/2$  die kleinste positive Nullstelle des Cosinus und wir erhalten gleichzeitig  $\sin(\pi/2) = 1$ . Mit den Additionsformeln 7.6.4 folgern wir  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ,  $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ , insbesondere ergibt sich  $\sin(x + \pi) = -\sin x$  und  $\cos(x + \pi) = -\cos x$  und damit  $\sin(n\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ . Hätte der Sinus noch eine weitere Nullstelle, so fänden wir mithilfe der Formel  $\sin(x + \pi) = -\sin x$  auch eine Nullstelle des Sinus in  $(0, \pi)$  und damit eine Nullstelle des Cosinus in  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Da gilt  $\cos t = \cos(-t)$  hätten wir dann sogar eine Nullstelle des Cosinus in  $[0, \pi/2)$ , und das ist unmöglich. Also haben der Sinus und dann auch der Cosinus genau die im Satz behaupteten Nullstellen.  $\square$

*Ergänzende Übung 7.6.6.* Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ , aber ihre Ableitung ist nicht stetig beim Nullpunkt.

**Satz 7.6.7.** Die Kreiszahl  $\pi$  ist nicht rational, in Formeln  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

7.6.8. Das wurde bereits 1766 von Johann Heinrich Lambert gezeigt. Der Beweis der Transzendenz von  $\pi$  ist schwieriger, mir gefällt die Darstellung in [Lor96]. Der hier gegebene Beweis der Irrationalität wirkt auf mich wie Zauberei. Ich folge der Darstellung von Stewart [Ste89].

*Beweis.* Man betrachte für reelles  $\alpha \neq 0$  und natürliches  $n$  das Integral

$$I_n = I_n(\alpha) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos(\alpha x) dx$$

Partielles Integrieren liefert  $\alpha^2 I_n = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$  für  $n \geq 2$ . Vollständige Induktion zeigt dann

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P_n(\alpha) \sin \alpha + Q_n(\alpha) \cos \alpha)$$

für  $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$  Polynome vom Grad  $\leq 2n$ . Wäre nun  $\pi = a/b$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  und setzen wir oben  $\alpha = \pi$  ein, so ergäbe sich, daß

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n(\pi)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine ganze Zahl sein muß im Widerspruch dazu, daß dieser Ausdruck für alle  $n$  von Null verschieden ist und für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt.  $\square$

*Übung 7.6.9.* Man führe die partiellen Integrationen des vorhergehenden Beweises aus und prüfe die Induktionsbasis, als da heißt die Fälle  $n = 0, 1$ .

**Satz 7.6.10 (Fläche des Einheitskreises).** Es gilt  $\pi/2 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ , anschaulich gesprochen ist also  $\pi$  die Fläche des Einheitskreises.

*Beweis.* Wir substituieren  $t = \sin x$ ,  $dt = \cos x dx$  und erhalten

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx$$

Mithilfe der Formel  $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ , die ihrerseits aus den Additionsformel folgt, ergibt sich unser Integral mühelos zu

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad \square$$



Illustration zu 7.6.6. Der Graph der Funktion ist zwischen zwei parabolischen Backen eingezwängt und hat deshalb am Ursprung Null Grenzwert der Sekantensteigungen, wird aber nah vom Ursprung beliebig steil.

**Definition 7.6.11.** Der Sinus wächst streng monoton auf  $[-\pi/2, \pi/2]$  und definiert folglich eine Bijektion  $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ , deren Umkehrabbildung man auch den **Arcussinus** nennt und notiert als

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

7.6.12. Die Bezeichnung “arcussinus” kommt von lateinisch “arcus” für “Bogen”. In der Tat bedeutet  $\arcsin b$  für  $b \in [0, 1]$  die Länge des Kreisbogens, der vom Punkt  $(1, 0)$  bis zum Punkt  $(\sqrt{1-b^2}, b)$  der Höhe  $b$  auf dem Einheitskreis reicht, wie der Leser zur Übung nachrechnen mag. Der Arcussinus ist nach 4.2.9 differenzierbar auf  $(-1, 1)$  und seine Ableitung ergibt sich mit unserer Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion zu

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= 1/(\cos(\arcsin x)) \\ &= 1/\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} \\ &= 1/\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Reihenentwicklung

$$\arcsin(x) = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

In der Tat gilt  $\arcsin(x) = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt$ , und nach der binomischen Reihe 5.1.19 haben wir

$$(1-t^2)^{-(1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-t^2)^k = 1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \dots$$

7.6.13. Analog fällt der Cosinus streng monoton auf dem Intervall  $[0, \pi]$  und definiert folglich eine Bijektion  $\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$ , deren Umkehrabbildung der **Arcuscosinus** heißt und  $\arccos$  notiert.

**Definition 7.6.14.** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\cos x \neq 0$  definieren wir den **Tangens** von  $x$  durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

7.6.15. Anschaulich bedeutet  $\tan(x)$  für  $x \in (0, \pi/2)$  die Höhe, in der der Strahl durch den Nullpunkt und den Punkt des Einheitskreises, der mit dem Punkt  $(1, 0)$  ein Kreissegment der Länge  $x$  begrenzt, die Tangente an unseren Einheitskreis im Punkt  $(1, 0)$  trifft. Man benutzt auch den **Cotangens**  $\cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$  und eher selten den **Secans**  $\sec(x) = 1/\cos(x)$  und **Cosecans**  $\operatorname{cosec}(x) = 1/\sin(x)$ .



Der Arcussinus



SkriptenBilder/Bild0019.png

Der Tangens

7.6.16. Die Ableitung des Tangens ist  $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$ , insbesondere ist der Tangens streng monoton wachsend auf  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Da er an den Grenzen sogar gegen  $\pm\infty$  strebt, liefert der Tangens eine Bijektion  $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ , und wir können die Umkehrfunktion **Arcustangens**

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

betrachten. Die Ableitung von  $\arctan$  ergibt sich mit 4.2.9 zu

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Damit erhalten wir durch gliedweises Integrieren der geometrischen Reihe 2.5.5 für den Arcustangens für  $|t| < 1$  die Reihenentwicklung

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots$$

und mit dem Abel'schen Grenzwertsatz 5.4.2 ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Es scheint, daß diese Formel bereits in dem 1530 erschienenen Analysis-Buch "Ganita Yuktibhasa" des Autors Jyesthadeva zu finden ist, eines Mathematikers aus Kerala in Indien, und daß sie auf den indischen Mathematiker Madhava zurückgeht. Außerdem erhalten wir so auch die bemerkenswerte Identität

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$$

*Übung 7.6.17.* Sei  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  der Einheitskreis. Wir konstruieren eine Bijektion  $\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus (-1, 0)$ , indem wir jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  den Schnittpunkt der Gerade durch  $(-1, 0)$  und  $(0, t)$  mit  $S^1 \setminus (-1, 0)$  zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\gamma(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Man prüfe  $\|\gamma'(t)\| = 2/(1+t^2)$  und interpretiere die vorstehende bemerkenswerte Formel. Der Punkt  $(\cos \tau, \sin \tau)$  für  $\tau \in (-\pi, \pi)$  wird hierbei übrigens parametrisiert durch  $t = \tan(\tau/2)$ , wie man durch Rechnung oder elementargeometrische Überlegungen prüft. Man beachte auch die Ähnlichkeit zur Parametrisierung der Hyperbel 4.7.6.



SkriptenBilder/Bild0015.png

Die Abbildung  $\gamma$  aus [7.6.17](#)

*Ergänzung* 7.6.18. Die Abbildung  $\gamma$  aus der vorstehenden Übung liefert im Übrigen auch eine Bijektion von  $\mathbb{Q}$  auf die Punkte von  $S^1 \setminus (-1, 0)$  mit rationalen Koordinaten. Diese Bijektion ist äußerst hilfreich bei der Bestimmung aller **pythagoreischen Zahlentripel**, d.h. aller Tripel  $a, b, c$  von natürlichen Zahlen mit  $a^2 + b^2 = c^2$ . Die Abbildung  $\gamma$  aus der vorstehenden Übung liefert allgemeiner sogar für jeden Körper  $k$  einer von Zwei verschiedenen Charakteristik eine Bijektion von  $k$  auf das Komplement des Punktes  $(-1, 0)$  in der Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  in der Ebene  $k^2 = k \times k$ . In der algebraischen Geometrie können Sie dann lernen, wie man das zu einer Bijektion von  $\mathbb{P}^1 k$  mit der Quadrik  $Q \subset \mathbb{P}^2 k$  erweitert, die durch die homogenisierte Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  definiert wird.

*Ergänzende Übung* 7.6.19. Mithilfe der Relation  $\tan(\pi/6) = 1/2$  berechne man  $\pi$  auf drei sichere Stellen hinter dem Komma. Es gibt im übrigen wesentlich effizientere Verfahren zur Berechnung von  $\pi$ , vergleiche [Cou71].

*Übung* 7.6.20. Man finde Stammfunktionen zu den Kehrwerten quadratischer Polynome, also zu Funktionen der Gestalt  $x \mapsto (x^2 + ax + b)^{-1}$ . Hinweis: Hat das fragliche quadratische Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen  $\lambda \neq \mu$ , so kann man unsere Funktion in der Gestalt  $\alpha/(x - \lambda) + \beta/(x - \mu)$  schreiben. Sonst bringe man sie in die Form  $((x + a/2)^2 + d)^{-1}$  mit  $d \geq 0$  und erinnere sich an  $\arctan'(t) = 1/(1 + t^2)$ .

*Übung* 7.6.21. Man finde eine Stammfunktion für den Arcustangens. Hinweis: Man wende auf das Produkt  $1 \cdot \arctan$  partielle Integration an.

# Kapitel III

## Analysis mit komplexen Zahlen

In diesem Kapitel diskutieren wir die komplexe Exponentialfunktion und ihre Bedeutung für die Analysis reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen. In den meisten Texten zur Analysis werden die komplexen Zahlen bereits sehr viel früher einbezogen. Da die Diskussion der komplexen Exponentialfunktion jedoch meines Erachtens die trigonometrischen Funktionen benötigt und ich diese hinwiederum durch den Begriff der Bogenlänge motivieren wollte, ging es in diesem Text nicht eher. Vom rein logischen Aufbau der Vorlesung aus gesehen könnte die Diskussion der komplexen Exponentialfunktion auch noch etwas warten: Im weiteren Verlauf der in dieser Vorlesung vorgesehenen Entwicklung wird zunächst der Abschnitt über die Integration vektorwertiger Funktionen relevant werden, und zwar bei der Diskussion gewöhnlicher Differentialgleichungen in IV.5. Auch dort wäre es aber natürlich wünschenswert, daß die Studenten die Theorie der Schwingungsgleichungen bereits kennen. Die Grundlagen zu Fourierreihen werden erst in Kapitel V wieder relevant. All diese Inhalte scheinen mir jedoch derart wichtig, daß ich es für sinnvoll halte, sie bereits früh zu diskutieren.

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Komplexe Exponentialfunktion</b> . . . . .	<b>303</b>
1.1	Definition und erste Eigenschaften . . . . .	303
1.2	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	311
1.3	Integration von vektorwertigen Funktionen . . . . .	312
1.4	Integration rationaler Funktionen . . . . .	316
1.5	Komplexe Differenzierbarkeit* . . . . .	319
<b>2</b>	<b>Lösung einiger Schwingungsgleichungen</b> . . . . .	<b>325</b>
2.1	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	325

2.2	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	329
2.3	Gekoppelte Schwingungen . . . . .	330
2.4	Angeregte Schwingungen . . . . .	332
<b>3</b>	<b>Grundlegendes zu Fourierreihen . . . . .</b>	<b>335</b>
3.1	Eindeutigkeit der Fourierreihe . . . . .	335
3.2	Der Satz von Stone-Weierstraß . . . . .	336
3.3	Konvergenz der Fourierreihe . . . . .	343

---

# 1 Komplexe Exponentialfunktion

## 1.1 Definition und erste Eigenschaften

1.1.1. Mir scheint es wünschenswert, daß dieser Abschnitt bereits zu Ende des ersten oder zu Beginn des zweiten Semesters behandelt wird, damit die komplexe Exponentialfunktion bei der Diskussion unitärer und orthogonaler Abbildungen in der linearen Algebra zur Verfügung steht. Ich setze voraus, daß der Leser mit den Grundlagen des algebraischen Rechnens mit komplexen Zahlen vertraut ist, wie sie etwa in ?? entwickelt werden.

**Definition 1.1.2.** Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir eine komplexe Zahl  $\exp(z) \in \mathbb{C}$  durch die Vorschrift

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Aufgrund der Abschätzungen  $\operatorname{Re}(z^k)$ ,  $\operatorname{Im}(z^k) \leq |z^k| = |z|^k$  konvergiert diese Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  nach dem Majorantenkriterium mit der reellen Exponentialreihe als Majorante absolut in Real- und Imaginärteil und wir erhalten folglich eine Abbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die **komplexe Exponentialfunktion**.

1.1.3. Man prüft genau wie in II.2.6.8 im Reellen auch im Komplexen die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

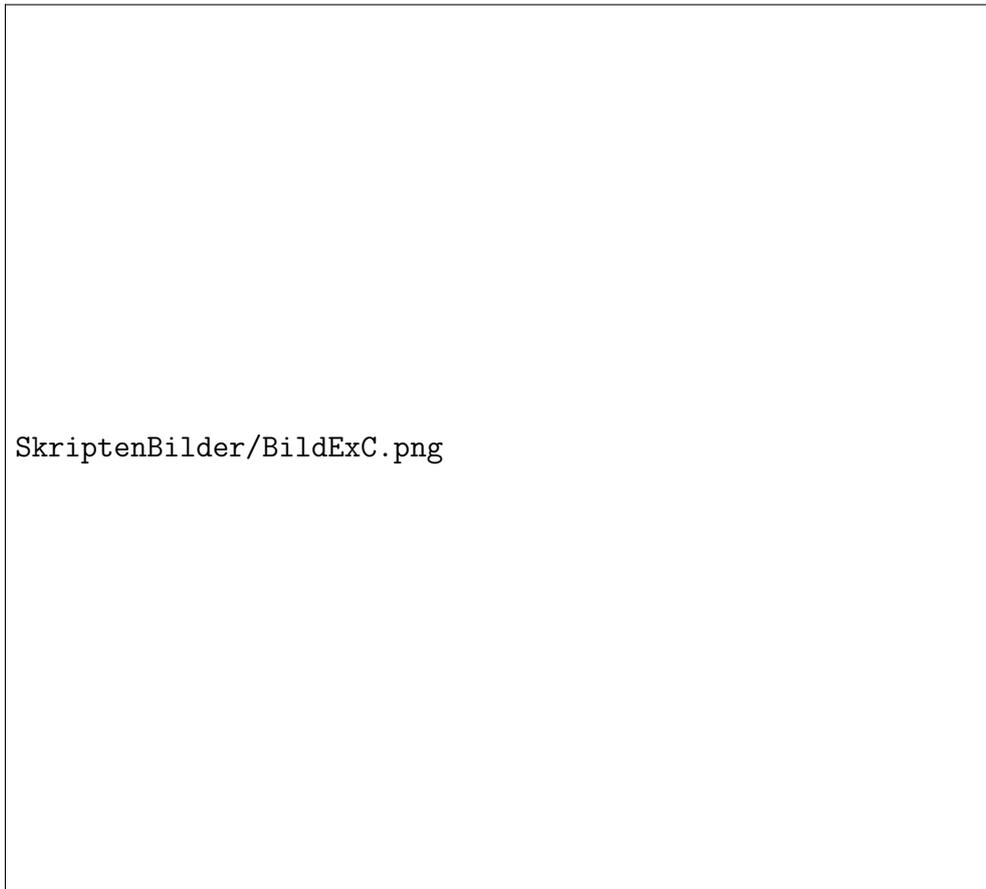
In der Sprache der Algebra ausgedrückt ist die Exponentialabbildung also ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der komplexen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen komplexen Zahlen und man erhält insbesondere  $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$ . Wie im Reellen II.3.1.13 zeigt man auch die Stetigkeit von  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zunächst im Nullpunkt über die Reihenentwicklung und dann an jeder Stelle  $z \in \mathbb{C}$  mithilfe der Funktionalgleichung. Zusätzlich folgern wir aus der Vertauschbarkeit der komplexen Konjugation mit Summe, Produkt und Grenzwertbildung auch noch

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Für den Betrag von  $\exp z$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |\exp z|^2 &= \exp z \overline{\exp z} \\ &= \exp z \exp \bar{z} \\ &= \exp(z + \bar{z}) \\ &= \exp(2 \operatorname{Re} z) \end{aligned}$$

Folglich gilt  $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$  und speziell  $|\exp(it)| = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .



Auch für komplexes  $z$  zeigt man wie in [II.2.6.3](#) die Formel

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Das obige Bild stellt unter anderem den vierten Term dieser Folge im Fall  $z = i$  dar. Ich finde, man kann recht gut erkennen, wie diese Folge bei wachsendem  $n$  gegen den Punkt auf der Kreislinie konvergiert, für den das Segment der Kreislinie, das von ihm zur reellen Achse herunterläuft, die Länge Eins hat.

1.1.4. Für eine reelle Zahl  $a > 0$  und  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir wieder

$$a^z := \exp(z \log a)$$

und schreiben insbesondere auch  $\exp z = e^z$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Aus der Beschreibung von  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\exp$  durch Potenzreihen II.7.6.2 oder in der Konstruktion von  $\mathbb{C}$  als Ring pezieller Matrizen auch aus II.7.6.3 folgt die **Euler'sche Formel**

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Anschaulich beschreibt die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \exp(it)$  also das Aufwickeln der reellen Zahlengerade auf den Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Insbesondere erfüllen unsere Hauptdarsteller die bemerkenswerte Identität

$$e^{i\pi} = -1$$

Aus  $\exp(-it) = \overline{\exp(it)}$  folgern wir umgekehrt für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Formeln

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Benutzen wir diese Formeln, um den Sinus und Cosinus zu Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auszudehnen, und dehnen wir ihre hyperbolischen Analoga in derselben Weise zu Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  aus, so können wir die formale Analogie zwischen diesen Funktionen präzisieren zu den Formeln  $\cos z = \cosh iz$  und  $\sin z = -i \sinh iz$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . In der angelsächsischen Literatur wird manchmal auch die Abkürzung  $\exp(iz) = \text{cis}(z)$  verwendet, die wohl auf die Euler'sche Formel  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$  zurückzuführen ist.

*Ergänzende Übung* 1.1.5. Man zeige mit der Euler'schen Formel aus 1.1.4 die Identität  $\sin^3 \vartheta = \frac{3}{4} \sin \vartheta - \frac{1}{4} \sin(3\vartheta)$ .

1.1.6 (**Kern und Bild der komplexen Exponentialfunktion**). Nach 1.1.4 induziert die Exponentialfunktion eine Surjektion der imaginären Geraden  $i\mathbb{R}$  auf den Einheitskreis  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Daß die Exponentialfunktion eine Bijektion  $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$  induziert, wissen wir bereits aus II.3.2.11. Da nun jede von Null verschiedene komplexe Zahl  $w$  sich schreiben läßt als Produkt  $w = (w/|w|)|w|$  mit  $w/|w|$  auf dem Einheitskreis und  $|w|$  positiv, ist die Exponentialfunktion nach der Funktionalgleichung sogar ein surjektiver Gruppenhomomorphismus  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, als da heißt das Urbild des neutralen Elements  $1 \in \mathbb{C}^\times$  besteht aufgrund unserer Gleichungen  $|\exp z| = \exp(\text{Re } z)$  und  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  genau aus allen ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi i$ , in Formeln

$$\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$$



Die Bilder ausgewählter Teile der komplexen Zahlenebene unter der komplexen Exponentialfunktion. Die Vertikalen werden zu Kreislinien aufgewickelt, die Horizontalen in vom Nullpunkt ausgehende Strahlen transformiert. Anschaulich mag man sich die komplexe Exponentialfunktion denken als Abbildung, bei der die komplexe Zahlenebene zunächst in horizontaler Richtung verzerrt und ganz auf die Halbebene mit positivem Realteil herübersgeschoben wird mit  $x + iy \mapsto \exp(x) + iy$ , gefolgt von einer Aufwicklung dieser Halbebene zu einer Wendeltreppe  $a + iy \mapsto (a \cos y, a \sin y, y)$  in den Raum gefolgt von einer senkrechten Projektion dieser Wendeltreppe auf die Ebene alias dem Weglassen der letzten Koordinate.

Im übrigen können wir mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion auch leicht zeigen, daß es für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ein  $w \in \mathbb{C}$  gibt mit  $w^2 = z$ : Wir dürfen ja ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $z \neq 0$  annehmen, dann finden wir nach dem vorhergehenden ein  $a \in \mathbb{C}$  mit  $z = \exp(a)$ , und tut es  $w = \exp(a/2)$ .

1.1.7. Wir bestimmen mit dieser Erkenntnis die  **$n$ -ten Einheitswurzeln**, als da heißt die komplexen Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$ . Nach 1.1.6 hat jede Lösung die Gestalt  $z = e^b$  für geeignetes  $b \in \mathbb{C}$  und so ein  $z$  löst unsere Gleichung genau dann, wenn gilt  $z^n = e^{nb} = 1$  alias  $nb \in 2\pi i\mathbb{Z}$ . Wir erhalten so die Lösungen  $\exp(2\pi i\nu/n)$  für  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$  und erkennen auch, daß sie paarweise verschieden sind und es keine anderen Lösungen geben kann. In der komplexen Zahlenebene kann man sich die  $n$ -ten Einheitswurzeln veranschaulichen als die Ecken desjenigen in den Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks, das als eine Ecke die 1 hat.

*Ergänzung* 1.1.8. Der Satz von **Hermite-Lindemann** sagt, daß für eine von Null verschiedene im Sinne von II.2.4.2 algebraische komplexe Zahl  $\alpha$  der Wert der Exponentialfunktion  $\exp(\alpha)$  stets transzendent ist. Daraus folgt sowohl, daß die Euler'sche Zahl  $e = \exp(1)$  transzendent ist, als auch, daß  $2\pi i$  und damit natürlich auch  $\pi$  transzendent sind, da nämlich  $\exp(2\pi i) = 1$  nicht transzendent ist. In etwas allgemeinerer Form sagt der Satz, daß gegeben komplexe algebraische Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , die linear unabhängig sind über  $\mathbb{Q}$ , die Werte der Exponentialfunktion  $\exp(\alpha_1), \dots, \exp(\alpha_n)$  algebraisch unabhängig sind über  $\mathbb{Q}$  im Sinne von ???. Mehr dazu findet man etwa in [Lor96]. Schanuels Vermutung, wie das zu verallgemeinern sein sollte, findet man in ???.

*Übung* 1.1.9. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für jede komplexe Zahl  $a \neq 0$  besitzt die Gleichung  $z^n = a$  genau  $n$  Lösungen  $z \in \mathbb{C}$ .

*Ergänzende Übung* 1.1.10 (**Nichtexistenz globaler komplexer Wurzeln**). Man zeige, daß es nicht möglich ist, in stetiger Weise zu jeder komplexen Zahl eine Wurzel zu wählen, daß es also keine stetige Abbildung  $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $w(z)^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Hinweis: Man prüfe, daß die Funktion  $w(\exp(z)) \exp(-z/2)$  einerseits konstant sein müßte, aber andererseits nicht denselben Wert bei 0 und  $2\pi i$  annehmen würde. Die anschauliche Bedeutung der Aussage mag aus der graphischen Darstellung der Abbildung  $z \mapsto z^2$  in ??? klar werden.

*Ergänzende Übung* 1.1.11 (**Der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck**). In einem regelmäßigen Fünfeck stehen die Längen der Diagonalen zu den Längen der Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts. Man prüfe diese elementargeometrisch leicht einzusehende Behauptung durch algebraische

Rechnung. Hinweis: Der goldene Schnitt ist die positive Lösung der Gleichung  $a/1 = (1+a)/a$  alias  $a^2 - a - 1 = 0$ , seine geometrische Bedeutung wurde in 1.1.2.1 erklärt. Es gilt zu zeigen, daß für  $\zeta = \exp(2\pi i/5)$  der Ausdruck  $a = |1 - \zeta^2|/|1 - \zeta| = |1 + \zeta|$  die fragliche Gleichung löst. Man verwende  $\zeta^4 = \bar{\zeta}$ .

*Übung 1.1.12.* Für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  hat die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto e^{\lambda t}$  die Ableitung  $t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$ . Später kann das auch mit 1.5.12 und 1.5.18 sehr schnell erledigt werden.

*Ergänzende Übung 1.1.13.* Die Nullstellen des komplexen Sinus liegen alle auf der reellen Achse.

*Ergänzende Übung 1.1.14.* Man leite einige Formeln der nachstehenden Tabelle her.

	sin	cos
$\pi$	0	-1
$\pi/2$	1	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/5$	$\sqrt{5 - \sqrt{5}}/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{5} + 1)/4$
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$
$\pi/7$	?	?
$\pi/8$	$\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{2}}$
$\pi/9$	?	?
$\pi/10$	$(\sqrt{5} - 1)/4$	$\sqrt{5 + \sqrt{5}}/2\sqrt{2}$
$\pi/11$	?	?

Man bemerkt, daß sich für  $\cos(\pi/5)$  gerade die Hälfte unseres “goldenen Schnitts” aus 1.1.11 ergibt. Bei der Bestimmung der Werte für  $\pi/5$  und  $\pi/10$  mag man von nebenstehendem Bild ausgehen, das insbesondere bei der Bestimmung von  $\sin(\pi/10)$  helfen sollte. Wir zeigen in ??, warum es unmöglich ist, Formeln derselben Bauart auch für  $\sin(\pi/7)$  oder  $\sin(\pi/9)$  oder  $\sin(\pi/11)$  anzugeben.

SkriptenBilder/BildUbSin.png

Die Überlagerung zweier Sinuswellen mit nahe beieinanderliegender Periode. Rechnerisch finden wir etwa die Identität

$$e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} = e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} (e^{i(\omega_1 + \omega_2)t/2} + e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2})$$

und durch Betrachtung der Imaginärteile beider Seiten

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin((\omega_1 - \omega_2)t/2) \cos((\omega_1 + \omega_2)t/2)$$

Liegen hier  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nah beieinander, so ergibt sich für diesen Ausdruck als Funktion von  $t$  das obige Bild, in dem sich anschaulich gesprochen immer abwechselnd beide Sinuswellen einmal gegenseitig auslöschen und dann wieder addieren. Man kann das auch mit eigenen Ohren erfahren, wenn man sich von zwei Komilitonen zwei nahe beieinanderliegende Töne vorsingen läßt: Es ist dann so eine Art Wummern zu hören, das eben mit der Frequenz  $\omega_1 - \omega_2$  geschieht.

Illustration zur Berechnung von  $\sin(\pi/10)$

## 1.2 Fundamentalsatz der Algebra

**Satz 1.2.1 (Fundamentalsatz der Algebra).** *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

1.2.2. Der im folgenden wiedergegebene Beweis von Jean-Robert Argand hat den Vorteil, mit besonders wenigen technischen Hilfsmitteln auszukommen. Einen Überblick über die gängigsten alternativen Beweise mit ihren Stärken und Schwächen findet man in ??.

*Beweis.* Sei  $P$  unser Polynom. Wir zeigen zunächst, daß es eine Stelle  $p \in \mathbb{C}$  gibt, an der die Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto |P(z)|$  ihr Minimum annimmt, in Formeln  $|P(z)| \geq |P(p)| \forall z \in \mathbb{C}$ . In der Tat, nehmen wir irgendein  $u \in \mathbb{C}$  her, so gibt es offensichtlich  $R \in \mathbb{R}$  derart, daß aus  $|z| \geq R$  folgt  $|P(z)| \geq |P(u)|$ . Als stetige Funktion nimmt aber die Funktion  $z \mapsto |P(z)|$  auf der kompakten Kreisscheibe  $\{z \mid |z| \leq R\}$  ein Minimum an, sagen wir an der Stelle  $p$ , und das muß dann auch das Minimum von  $|P(z)|$  auf ganz  $\mathbb{C}$  sein. Wir zeigen nun  $P(p) = 0$  durch Widerspruch und müssen dazu nachweisen: Ist  $p \in \mathbb{C}$  gegeben mit  $P(p) \neq 0$ , so nimmt die Funktion  $z \mapsto |P(z)|$  bei  $p$  nicht ihr Minimum an. Sei dazu erst einmal  $p \in \mathbb{C}$  beliebig. Entwickeln wir  $P(p+w)$  nach Potenzen von  $w$ , so erhalten wir

$$P(p+w) = P(p) + bw^m + w^{m+1}Q(w)$$

mit  $b \neq 0$ ,  $m \geq 1$  (da  $P$  nicht konstant ist) und einem geeigneten Polynom  $Q$ . Nach 1.1.9 finden wir  $q \in \mathbb{C}$  mit  $P(p) + bq^m = 0$  und sind fertig, sobald wir zeigen können, daß unter der Annahme  $P(p) \neq 0$  für hinreichend kleine  $t > 0$  gilt

$$|P(p+ tq)| < |P(p)|$$

Das ist klar im Fall  $Q = 0$  und wir müssen nur noch erklären, warum die Terme der Ordnung  $> m$  diese Ungleichung für kleines  $t$  nicht zerstören können. Wir betrachten dazu die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto P(p+ tq)$  und erhalten

$$P(p+ tq) = P(p) - t^m P(p) + t^{m+1} \tilde{Q}(t)$$

für ein geeignetes Polynom  $\tilde{Q}$ , also

$$|P(p+ tq)| \leq (1 - t^m) |P(p)| + t^m |t \tilde{Q}(t)| \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

Gilt nun  $P(p) \neq 0$  und wählen wir  $t \in (0, 1)$  hinreichend klein für die Ungleichung  $|t \tilde{Q}(t)| < |P(p)|$ , so folgt  $|P(p+ tq)| < |P(p)|$  und wir sind fertig.  $\square$

### 1.3 Integration von vektorwertigen Funktionen

1.3.1. Die Aufgabe, Funktionen wie zum Beispiel  $(x + x^5)/(x^7 - 1)$  zu integrieren, wird uns im anschließenden Abschnitt in natürlicher Weise zur Integration komplexwertiger Funktionen führen. Anstatt einen solchen Integralbegriff ad hoc einzuführen, zimmern wir in diesem Abschnitt gleich einen größeren begrifflichen Rahmen, der nicht nur das Integrieren komplexwertiger Funktionen als Spezialfall umfaßt, sondern auch in natürlicher Weise unsere Überlegungen zum Differenzieren vektorwertiger Funktionen ergänzt und uns in Zukunft noch in mancherlei Weise die Arbeit erleichtern wird. Sie dürfen sich vorerst unter einem Banachraum stets einen normierten endlichdimensionalen reellen Vektorraum vorstellen.

**Definition 1.3.2.** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres kompaktes Intervall,  $V$  ein reeller Vektorraum und  $f : [a, b] \rightarrow V$  eine Abbildung. Wir betrachten für  $r \geq 1$  die äquidistante Unterteilung  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = b$  und definieren die  $r$ -te **Riemannsumme**  $S^r(f) \in V$  durch

$$S^r(f) := \sum_{i=1}^r (t_i - t_{i-1})f(t_i) = \left(\frac{b-a}{r}\right) \sum_{i=1}^r f(t_i)$$

**Satz 1.3.3 (Integration vektorwertiger Funktionen).** *Ist  $f : [a, b] \rightarrow V$  eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten Intervall in einen Banachraum  $V$ , so existiert der Grenzwert der zugehörigen Riemannsummen. Das als dieser Grenzwert erklärte **Integral***

$$\int f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) \, dt := \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

ordnet jedem  $f$  einen Vektor  $(\int f) \in V$  zu und hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für alle  $c \in [a, b]$  gilt  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ ;
2. Ist  $f = v$  konstant ein  $v \in V$ , so gilt  $\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b v \, dt = (b-a)v$ ;
3. Ist  $W$  ein weiterer Banachraum und  $\Lambda : V \rightarrow W$  eine stetige lineare Abbildung, so gilt

$$\int (\Lambda \circ f) = \Lambda \left( \int f \right)$$

4. Für die Norm des Integrals gilt die Abschätzung  $\| \int f \| \leq \int \| f \|$ .

1.3.4. Sie mögen in diesem Satz die Regeln  $\int \lambda f = \lambda \int f$  sowie  $\int (f + g) = \int f + \int g$  für stetige vektorwertige Funktionen  $f, g$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  vermißt haben. Sie folgen jedoch formal aus Teil 3. In der Tat dürfen wir dort  $\Lambda = (\lambda \cdot) : V \rightarrow V$  nehmen und auch  $\Lambda : V \times V \rightarrow V$  die Addition sowie die beiden Projektionen. So ergibt sich für die  $V \times V$ -wertige Funktion  $(f, g)$  zunächst  $\text{pr}_1 \int (f, g) = \int f$  und  $\text{pr}_2 \int (f, g) = \int g$  und damit  $\int (f, g) = (\int f, \int g)$  und durch Anwenden der Addition dann  $\int (f + g) = \int f + \int g$ .

*Beweis.* Im Fall  $a = b$  sind alle Riemannsummen Null und ihr Grenzwert existiert und ist auch Null. Wir konzentrieren uns im folgenden auf den Fall  $a < b$ . Nach II.7.5.10 ist mit  $V$  auch der Vektorraum  $\text{Ens}^b([a, b], V)$  aller beschränkten Abbildungen  $[a, b] \rightarrow V$  mit seiner Supremumsnorm vollständig. Darin betrachten wir nun den Teilraum  $T \subset \text{Ens}^b([a, b], V)$  aller Abbildungen  $s : [a, b] \rightarrow V$  mit der Eigenschaft, daß es eine nicht notwendig äquidistante Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$  unseres Intervalls gibt derart, daß  $s$  auf jedem der Teilintervalle  $[a_{i-1}, a_i)$  konstant ist. Die Elemente von  $T$  heißen **Treppenfunktionen** auf  $[a, b]$ . Offensichtlich existiert eine lineare Abbildung  $I : T \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

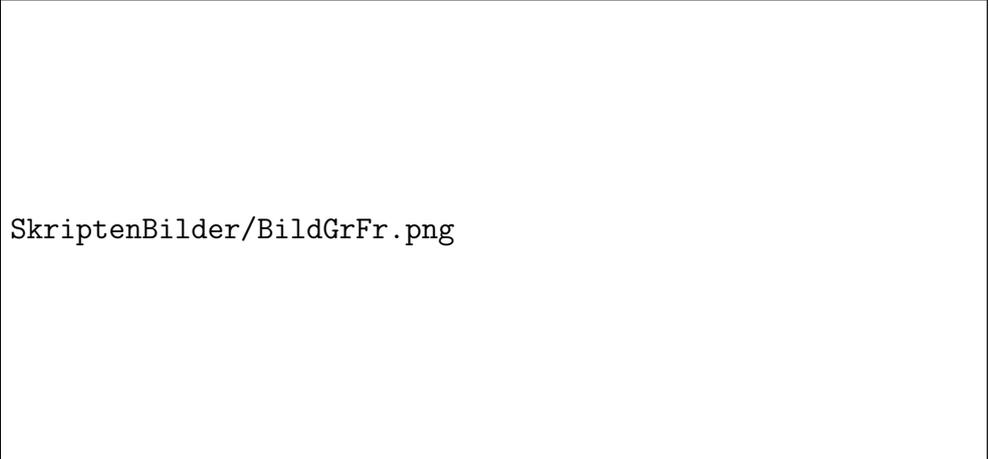
$$I(s) = \sum s(a_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

wann immer für eine Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$  unseres Intervalls unsere Funktion  $s$  konstant ist auf allen Teilintervallen  $[a_{i-1}, a_i)$ . Offensichtlich hat diese lineare Abbildung auch die Eigenschaft  $\|I(s)\| \leq (b - a)\|s\|_\infty$ . Insbesondere ist  $I : T \rightarrow V$  gleichmäßig stetig. Damit zeigt wiederum II.7.5.5, daß  $I$  auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung auf den Abschluß  $\bar{T}$  von  $T$  in  $\text{Ens}^b([a, b], V)$  fortgesetzt werden kann. In diesem Abschluß liegen nun aber, etwa nach gleichmäßiger Stetigkeit II.6.7.14, alle stetigen Abbildungen, in Formeln  $\mathcal{C}([a, b], V) \subset \bar{T}$ , so daß wir durch stetige Fortsetzung vom Raum der Treppenfunktionen insbesondere eine Abbildung

$$I : \mathcal{C}([a, b], V) \rightarrow V$$

erhalten. Wieder nach gleichmäßiger Stetigkeit II.6.7.14 ist jede stetige Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow V$  auch der Grenzwert in der Supremumsnorm derjenigen Treppenfunktionen  $f_r$ , die wir erhalten, wenn wir von der äquidistanten Unterteilung  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = b$  ausgehen und  $f_r$  auf  $[t_i, t_{i+1})$  konstant den Wert  $f(t_i)$  annehmen lassen und auf  $t_r$  den Wert  $f(t_r)$ . Für diese  $f_r$  gilt also  $\lim_{r \rightarrow \infty} f_r = f$  und wegen  $S_r(f) = I(f_r)$  folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} I(f_r) = I(f)$$



SkriptenBilder/BildGrFr.png

Der Graph einer reellwertigen Treppenfunktion.



SkriptenBilder/BildGrFr.png

Der Graph einer reellwertigen Funktion  $f$  und der zugehörigen Treppenfunktion  $f_7$  aus dem nebenstehenden Beweis, mit  $I(f_7)$  der siebten Riemannsumme von  $f$ .

Der Grenzwert unserer Riemannsummen existiert also in der Tat und stimmt mit  $I(f)$  überein. Die erste Eigenschaft zeigt man nun, indem man die Notation  $I$  zu  $I_a^b$  verfeinert, dann die Identität

$$I_a^b(f) = I_a^c(f) + I_c^b(f)$$

zunächst für Treppenfunktionen  $f \in T$  prüft, und sie dann für alle Funktionen aus  $\bar{T}$  folgert. Die drei anderen Eigenschaften erhält man, indem man die analogen Eigenschaften für Riemannsummen hinschreibt und zum Grenzwert übergeht.  $\square$

1.3.5. Wie im Fall reellwertiger Funktionen verwenden wir auch im Fall vektorwertiger Funktionen die Konvention  $\int_b^a f = -\int_a^b f$  und ist  $f : I \rightarrow V$  eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall in einen Banachraum, so gilt für beliebige  $a, b, c \in I$  die Formel  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

**Satz 1.3.6 (Vektorwertige Variante des Hauptsatzes).** *Gegeben ein halboffenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , ein Banachraum  $V$ , eine stetige Funktion  $f : I \rightarrow V$  und ein Punkt  $a \in I$  ist die Funktion*

$$F : I \rightarrow V \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

die einzige differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow V$  mit  $F' = f$  und  $F(a) = 0$ .

*Beweis.* Sehr ähnlich zum Beweis für reellwertige Funktionen und dem Leser zur Übung überlassen.  $\square$

**Korollar 1.3.7 (Integrieren mit Stammfunktionen).** *Sei  $V$  ein Banachraum und  $f : [a, b] \rightarrow V$  stetig. Ist  $G : [a, b] \rightarrow V$  eine **Stammfunktion** von  $f$ , d.h. eine differenzierbare Funktion mit Ableitung  $G'(t) = f(t)$ , so gilt*

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz 1.3.6.  $\square$

**Übung 1.3.8 (Substitution).** Man formuliere und beweise das Analogon der Substitutionsregel II.4.6.1 für  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f : g([a, b]) \rightarrow V$  stetig mit Werten in einem Banachraum  $V$ .

*Ergänzende Übung 1.3.9.* Man berechne  $\int_0^1 e^{it} dt$ . Hinweis: 1.1.12. Man finde eine Stammfunktion von  $\cos^4 x$ . Hinweis: 1.1.4.

*Ergänzende Übung 1.3.10.* Man formuliere und beweise eine Variante für vektorwertige Funktionen des Satzes II.6.11.1 über Integrale mit Parametern.

*Übung 1.3.11.* Gegeben ein halboffenes kompaktes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und ein Banachraum  $Y$  ist auch der Raum  $\mathcal{C}^1(I, Y)$  aller stetig differenzierbaren Abbildungen von  $I$  nach  $Y$  vollständig für die Norm  $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$  der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen. Hinweis: Man verwende II.7.5.30 und verallgemeinere II.5.1.14.

## 1.4 Integration rationaler Funktionen

1.4.1. Zur Integration rationaler Funktionen erinnern wir zunächst die Partialbruchzerlegung aus ???. Wenn wir vergessen, daß wir uns dabei in die komplexe Zahlenebene vorgewagt haben, so wird das Integrieren rationaler Funktionen sehr einfach: Wir haben ja in der Partialbruchzerlegung unsere rationale Funktion geschrieben als eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt  $x \mapsto (x - \mu)^m$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ , und Stammfunktionen für diese Funktionen sind natürlich

$$\frac{1}{m+1}(x - \mu)^{m+1} \text{ für } m \neq -1 \text{ bzw. } \log(x - \mu) \text{ für } m = -1 \text{ und } x > \mu.$$

Und nun ist es eben so, daß diese Formeln für  $\mu \in \mathbb{C}$  ganz genauso gelten, wenn wir sie nur richtig interpretieren. Im Fall  $m \neq -1$  ist das der Inhalt der Übung II.7.2.19. Im Fall  $m = -1$  wird es im Folgenden ausgeführt.

1.4.2. Um zu  $\mathbb{R} \setminus \mu \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto (x - \mu)^{-1}$  für beliebiges  $\mu \in \mathbb{C}$  eine Stammfunktion anzugeben, überlegt man sich zunächst, daß die komplexe Exponentialfunktion eine Bijektion

$$\exp : \mathbb{R} + (-\pi, \pi]i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$$

definiert. Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} + (-\pi, \pi]i$$

wird auf der positiven reellen Achse gegeben durch unseren üblichen Logarithmus  $u \mapsto \log u$ , auf der oberen bzw. unteren komplexen Halbebene durch die Vorschrift

$$\log(u + iv) = \log \sqrt{u^2 + v^2} \pm i \frac{\pi}{2} - i \arctan \frac{u}{v} \quad \text{für } \pm v > 0$$

und auf der negativen reellen Achse durch  $u \mapsto \log(-u) + i\pi/2$ . Man beachte, daß dieser **Hauptzweig des Logarithmus** nicht stetig ist längs der negativen reellen Achse, obwohl seine Einschränkung auf die negative reelle Achse durchaus stetig ist: Wir haben für  $u < 0$  genauer

$$\lim_{v \searrow 0} \log(u + iv) = \log(u) = \lim_{v \nearrow 0} \log(u + iv) + 2\pi i$$

Unabhängig davon ist es mit unseren expliziten Formeln eine elementare Übung, für alle  $\mu \in \mathbb{C}$  zu prüfen, daß die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \mu &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \log(x - \mu) \end{aligned}$$

die Ableitung  $1/(x - \mu)$  hat. Weniger elementar aber dafür konzeptioneller folgt es auch aus der komplexen Kettenregel 1.5.12 mitsamt der Regel für die komplexe Ableitung von Zweigen des komplexen Logarithmus 1.5.19 aus dem anschließenden Abschnitt. In jedem Fall sehen wir, wie sich im Prinzip die Stammfunktion einer beliebigen rationalen Funktion wieder als eine rationale Funktion mitsamt einigen Ausdrücken im Arcustangens und im reellen Logarithmus schreiben läßt.

1.4.3. Setzt man auch im Komplexen  $a^b = \exp(b \log a)$  mit dem eben definierten Hauptzweig des komplexen Logarithmus, so ergibt sich  $i^i = \exp(-\pi/2)$ . Insbesondere ist in diesem Sinne also  $i^i$  reell.

*Beispiel 1.4.4.* Wir bestimmen eine Stammfunktion zu  $1/(1 + x^2)$  mithilfe unserer Partialbruchzerlegung ???. Die Nullstellen des Nenners sind  $\pm i$  und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners, wir dürfen also ansetzen

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{a}{x + i} + \frac{b}{x - i}$$

und finden sofort  $(a + b)x - ia + ib = 1$ , also  $a + b = 0$  und  $a - b = i$  und folglich  $a = i/2$  und  $b = -i/2$ . Eine Stammfunktion ist mithin

$$\frac{i}{2} \log(x + i) - \frac{i}{2} \log(x - i)$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen beachten wir, daß unsere Stammfunktion bis auf eine Konstante eh eine reellwertige Funktion sein muß, wir dürfen also bereits vor dem Addieren die Realteile nehmen und erhalten als Stammfunktion sofort

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan(-x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$$

in Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen aus II.7.6.16.

*Beispiel 1.4.5.* Wir bestimmen zu  $(x^4 + 2x^2)/(x^2 + 2x + 1)$  eine Stammfunktion. Die Partialbruchzerlegung haben wir bereits in ??? durchgeführt und erhielten

$$\frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 5 - \frac{8}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}$$

Als Stammfunktion finden wir damit sofort

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 8 \log |x + 1| - \frac{3}{(x + 1)}$$

*Ergänzung 1.4.6.* Gegeben eine rationale Funktion  $R = P/Q$  betrachten wir die Funktion  $D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto R(e^t)$  mit dem Definitionsbereich  $D = \{t \in \mathbb{R} \mid Q(e^t) \neq 0\}$ . Das Integral eines solchen rationalen Ausdrucks in  $e^t$  kann man auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen durch die Substitution  $x = e^t$ ,  $dx = e^t dt = x dt$ . Zum Beispiel berechnen wir

$$\int \frac{dt}{\cosh t} = \int \frac{2 dt}{e^t + \frac{1}{e^t}} = \int \frac{2 dx}{x^2 + 1} = 2 \arctan x = 2 \arctan(e^t)$$

Das Integral eines rationalen Ausdrucks in  $\sqrt[n]{t}$  für eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  kann man ähnlich durch die Substitution  $\sqrt[n]{t} = x$ ,  $dt = nx^{n-1} dx$  auf das Integral einer rationalen Funktion in  $x$  zurückführen.

*Ergänzung 1.4.7.* Das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar  $(\sin, \cos)$  wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau) + \cos(\tau)}{\cos(\tau) + \cos^2(\tau)}$$

kann man auffassen als Kurvenintegral im Sinne von [II.7.3.6](#) einer rationalen Funktion in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel der Funktion

$$R(x, y) = \frac{y^3 + x}{x + x^2}$$

über ein Stück der Kreislinie. Mit der Umparametrisierung aus [II.7.6.17](#), d.h. mithilfe der Substitution  $t = \tan(\tau/2)$  und folglich  $\sin(\tau) = 2t/(1 + t^2)$ ,  $\cos(\tau) = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ ,  $d\tau = 2/(1 + t^2) dt$  läßt es sich dann umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen. Integrale über rationale Ausdrücke im Funktionenpaar  $(\sqrt{1 - x^2}, x)$  kann man in ähnlicher Weise als Kurvenintegral auffassen und lösen, im Gegensatz zu eben hat nur  $x \mapsto (\sqrt{1 - x^2}, x)$  nicht konstante absolute Geschwindigkeit 1, sondern vielmehr die absolute Geschwindigkeit  $1/\sqrt{1 - x^2}$ . Formal mag man auch  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$  substituieren und sich so auf den bereits behandelten Fall eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar  $(\sin, \cos)$  zurückziehen.

*Ergänzung 1.4.8.* Integrale von rationalen Ausdrücken in den Funktionenpaaren  $(\sqrt{x^2 + 1}, x)$  bzw.  $(\sqrt{x^2 - 1}, x)$  kann man auf die bereits in [1.4.6](#) behandelten Integrale rationaler Funktionen in  $e^t$  zurückführen durch die Substitution  $x = \sinh t$ ,  $dx = \cosh t dt$  bzw.  $x = \cosh t$ ,  $dx = \sinh t dt$ . Die geometrische Bedeutung dieses Tricks wird in [IV.3.3.13](#) erklärt.

*Ergänzende Übung 1.4.9.* Man finde eine Stammfunktion zu  $1/(1 + x^4)$ .

## 1.5 Komplexe Differenzierbarkeit\*

**Definition 1.5.1.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge und  $p \in U$  ein Punkt. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b \in \mathbb{C}$**  genau dann, wenn  $p$  ein Häufungspunkt von  $U$  ist und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch  $f'(p) = b$ .

1.5.2. Der Grenzwert ist hier im Sinne von II.6.6.8 zu verstehen. Diese Definition ist fast identisch zu unserer alten Definition II.4.1.3 bis auf das Detail, daß wir überall statt reeller Zahlen komplexe Zahlen betrachten und, wie im Komplexen üblich, die Variable mit  $z$  bezeichnen. Den Definitionsbereich unserer Funktion haben wir statt mit  $I$  hier mit  $U$  bezeichnet, weil der meistgebrauchte Fall nicht mehr der eines halboffenen Intervalls, sondern vielmehr der einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene ist. Der Fall eines Intervalls  $U \subset \mathbb{R}$  wird jedoch auch oft vorkommen. In diesem Fall stimmt die hier definierte Ableitung überein mit der Ableitung im Sinne von II.7.2.1. Der Rest dieses Abschnitts besteht darin, unsere Resultate zur reellen Differenzierbarkeit mitsamt ihren Beweisen im Komplexen zu wiederholen.

1.5.3. Ich gebe noch einige alternative Formulierungen an. Ist  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge und  $p$  ein Häufungspunkt von  $U$ , so ist nach II.6.6.11 eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn es eine Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, die stetig ist bei  $p$  mit Funktionswert  $\varphi(p) = b$  derart, daß für alle  $z \in U$  gilt

$$f(z) = f(p) + (z - p)\varphi(z)$$

In anderen nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b$  genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion  $\varepsilon$ , die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hier ist zu verstehen, daß die Funktion  $\varepsilon$  definiert sein soll auf der Menge aller  $h$  mit  $h + p \in U$ . Diese Formulierung hat den Vorteil, daß besonders gut zum Ausdruck kommt, inwiefern für festes  $p$  und kleines  $h$  der Ausdruck  $f(p) + f'(p)h$  eine gute Approximation von  $f(p+h)$  ist. Anschaulich wirkt  $f$  lokal um einen gegebenen Punkt  $p$  in erster Approximation wie eine Drehstreckung mit Zentrum in besagtem Punkt, deren Winkel und Streckfaktor durch  $f'(p)$  beschrieben werden, gefolgt von einer Verschiebung um  $f(p)$ .

*Beispiele* 1.5.4. Eine konstante Funktion auf einer Menge von komplexen Zahlen ist bei jedem Häufungspunkt besagter Menge komplex differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion  $\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z$  hat bei jedem Punkt  $p$  die Ableitung  $\text{id}'(p) = 1$ .

**Lemma 1.5.5.** Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  ist komplex differenzierbar bei jedem Punkt von  $\mathbb{C}^\times$  und ihre Ableitung bei einer Stelle  $p \in \mathbb{C}^\times$  ist  $-\frac{1}{p^2}$ .

*Beweis.* Wir rechnen  $\lim_{z \rightarrow p} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{p}}{z - p} = \lim_{z \rightarrow p} \frac{-1}{zp} = -\frac{1}{p^2}$ . □

**Lemma 1.5.6.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge. Ist eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p \in U$ , so ist  $f$  stetig bei  $p$ .

*Beweis.* Das folgt sofort aus 1.5.3. □

**Proposition 1.5.7.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge und seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei einem Punkt  $p \in U$ . So sind auch die Funktionen  $f + g$  und  $fg$  komplex differenzierbar bei  $p$  und es gilt

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \text{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

*Beweis.* Identisch zum Beweis im Reellen nach II.4.2.1. □

**Definition 1.5.8.** Ist eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definiert auf einer Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  und differenzierbar bei jedem Punkt von  $U$ , so nennen wir  $f$  **komplex differenzierbar auf  $U$**  und nennen die Funktion  $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p \mapsto f'(p)$  ihre **Ableitung**. Aus unseren Definitionen folgt natürlich insbesondere, daß dann die Menge  $U$  keine isolierten Punkte haben darf.

1.5.9. Für die Ableitungen komplex differenzierbarer Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich gelten mithin die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

**Korollar 1.5.10 (Ableiten ganzzahliger Potenzen).** Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und unter der Voraussetzung  $z \neq 0$  im Fall  $n \leq 0$  ist die Ableitung der Funktion  $z \mapsto z^n$  die Funktion  $z \mapsto nz^{n-1}$ .

*Beweis.* Man zeigt das durch vollständige Induktion über  $n$  separat für  $n \geq 0$  und  $n \leq -1$ . □

*Übung* 1.5.11. Ein komplexes Polynom hat bei  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn auch seine Ableitung bei  $\lambda$  verschwindet.

**Satz 1.5.12 (Kettenregel).** Seien  $U, V \subset \mathbb{C}$  Teilmengen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen und es gelte  $f(U) \subset V$ . Sei  $f$  komplex differenzierbar bei  $p$  und  $g$  komplex differenzierbar bei  $f(p)$ . So ist  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

*Beweis.* Identisch zum Beweis im Reellen nach II.4.2.5. Man beachte, daß nun rechts ein Produkt komplexer Zahlen steht.  $\square$

*Beispiel 1.5.13.* Wir berechnen für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  und  $m \geq 1$  eine natürliche Zahl die Ableitung der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f : t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu)^m$  und erhalten mit der Kettenregel  $f'(t) = (2t + \lambda)m(t^2 + \lambda t + \mu)^{m-1}$ . Schalten wir noch eine differenzierbare Abbildung  $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau \mapsto t(\tau)$  davor, so ergibt sich die Ableitung der zusammengesetzten Funktion wieder mit der Kettenregel zu

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{d\tau} = (2t(\tau) + \lambda)m(t(\tau)^2 + \lambda t(\tau) + \mu)^{m-1} \frac{dt}{d\tau}$$

**Proposition 1.5.14 (Quotientenregel).** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion ohne Nullstelle und  $p \in U$  ein Punkt.

1. Ist  $f$  komplex differenzierbar bei  $p$ , so ist auch  $z \mapsto 1/f(z)$  komplex differenzierbar bei  $p$  und hat dort die Ableitung  $-f'(p)/f(p)^2$ .
2. Ist zusätzlich  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$ , so ist auch  $g/f$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

*Beweis.* Teil 1 folgt sofort aus 1.5.5 mit der Kettenregel 1.5.12. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel 1.5.7.  $\square$

**Satz 1.5.15 (Ableitung von Umkehrfunktionen).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrung  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ . Ist dann  $f$  komplex differenzierbar beim Punkt  $p \in U$  mit Ableitung  $f'(p) \neq 0$ , so ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $q = f(p)$  mit Ableitung

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

1.5.16. In VIII.1.8.15 werden wir zeigen, daß eine injektive komplex differenzierbare Funktion mit offenem Definitionsbereich stets offenes Bild und eine stetige Umkehrung hat. Ein Teil der Bedingungen an unsere Funktion sind also eigentlich überflüssig und dienen nur dazu, den Beweis zu vereinfachen.

*Beweis.* Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) - f(p) = (z - p)\varphi(z)$  und  $\varphi(p) = f'(p)$ . Setzen wir hier  $z = f^{-1}(w)$ , so ist  $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $(w - q)\psi(w) = f^{-1}(w) - f^{-1}(q)$  und  $\psi(q) = 1/f'(p)$ .  $\square$

*Beispiel 1.5.17.* Das Quadrieren liefert eine Bijektion zwischen der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil und der “geschlitzten Zahlenebene”  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Die Umkehrfunktion zu dieser Bijektion ist also eine komplex differenzierbare Funktion auf der geschlitzten Zahlenebene, die wir  $\sqrt{z}$  notieren und die nach 1.5.15 differenzierbar ist mit Ableitung  $1/(2\sqrt{z})$ .

**Lemma 1.5.18.** *Die komplexe Exponentialfunktion ist komplex differenzierbar und stimmt auf der ganzen komplexen Zahlenebene mit ihrer eigenen Ableitung überein.*

*Beweis.* Der Beweis des reellen Analogons II.4.2.8 kann wortwörtlich übernommen werden.  $\square$

*Beispiel 1.5.19.* Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge derart, daß die Exponentialfunktion eine Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrfunktion  $\log : \exp(U) \rightarrow \mathbb{C}$  liefert, so nennt man  $\log$  einen **Zweig des Logarithmus**. Nach 1.5.15 ist jeder solche Zweig des Logarithmus komplex differenzierbar mit Ableitung

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

Im Spezialfall  $U = \mathbb{R} + (-\pi, \pi)i$  spricht man auch vom **Hauptzweig des Logarithmus**, den wir bereits in 1.4.2 eingeführt und sogar noch auf die negative reelle Achse fortgesetzt hatten, allerdings in nur noch partiell stetiger Weise.

*Übung 1.5.20.* Man zeige, daß für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  der Hauptzweig des Logarithmus von  $1 + z$  auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

*Hinweis:* Es reicht zu zeigen, daß für alle  $u \in \mathbb{C}$  mit  $|u| = 1$  das Einsetzen von  $z = ut$  auf beiden Seiten dieselbe Funktion in  $t \in (-1, 1)$  liefert. Beide Seiten



SkriptenBilder/Bild0026.png

Anschauliche Bedeutung der Ableitung der komplexen Exponentialfunktion

nehmen aber bei  $z = 0$  den Wert Null an, so daß es reicht, die Gleichheit ihrer Ableitungen zu zeigen. Im Rahmen der Funktionentheorie dürfen Sie diese Übung in [VIII.1.7.10](#) mit mehr Theorie und weniger Rechnen ein weiteres Mal lösen.

1.5.21. Eine komplex differenzierbare komplexwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definiert ist, heißt eine **holomorphe Funktion**. Die Theorie der holomorphen Funktionen, die sogenannte **Funktionentheorie**, ist grundlegend verschieden von der Theorie der differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlengerade, die wir in dieser Vorlesung ausführlich studiert haben. Zum Beispiel ist jede holomorphe Funktion, d.h. jede auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definierte einmal komplex differenzierbare Funktion, bereits beliebig oft komplex differenzierbar. Mehr dazu findet man etwa in [VIII.1.6.5](#).

## 2 Lösung einiger Schwingungsgleichungen

### 2.1 Gedämpfte Schwingungen

2.1.1. Wir interessieren uns für die Bewegung eines Massepunktes, der an einer Feder aufgehängt ist und dessen Bewegung durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung gedämpft wird. Mißt die Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto x(t)$  seine Auslenkung von der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt  $t$ , so muß unsere Funktion aus physikalischen Gründen eine Differentialgleichung zweiten Grades der Gestalt

$$\ddot{x} = -a\dot{x} - bx$$

erfüllen, wobei die Konstanten  $a$  und  $b$  die Stärke der Feder und der Dämpfung ausdrücken und in physikalisch relevanten Fällen nichtnegativ sind. Wir lösen diese Differentialgleichung hier erst einmal ad hoc und erheben danach in 2.2.2 diesen Zugang zur Methode.

**Proposition 2.1.2 (zur Lösung der Schwingungsgleichung).** *Seien reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$  bildet einen Untervektorraum des Raums  $\text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aller Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , den **Lösungsraum**  $L$  unserer Differentialgleichung.*
2. *Die Abbildung  $x \mapsto (x(0), \dot{x}(0))$  liefert einen Vektorraumisomorphismus  $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  dieses Lösungsraums mit dem  $\mathbb{R}^2$ , den sogenannten **Anfangswertisomorphismus**.*
3. *Hat das Polynom  $X^2 + aX + b$  zwei verschiedene reelle Nullstellen  $\lambda$  und  $\mu$ , so bilden die beiden Funktionen  $x_1(t) = e^{\lambda t}$  und  $x_2(t) = e^{\mu t}$  eine Basis des Lösungsraums. Hat es dahingegen eine doppelte reelle Nullstelle  $\lambda$ , so bilden die beiden Funktionen  $x_1(t) = e^{\lambda t}$  und  $x_2(t) = te^{\lambda t}$  eine Basis des Lösungsraums.*

*Bemerkung 2.1.3.* Um den Fall, daß unser Polynom gar keine reelle Nullstelle hat, werden wir uns gleich noch gesondert kümmern.

*Beweis.* Teil 1 scheint mir offensichtlich. Um Teil 2 zu zeigen beachten wir, daß die Vorschrift  $x \mapsto (x, \dot{x})$  offensichtlich einen Isomorphismus zwischen unserem Lösungsraum  $L$  und dem Lösungsraum des Systems  $\dot{\gamma}_1 = \gamma_2, \dot{\gamma}_2 =$

$-b\gamma_1 - a\gamma_2$  induziert, das in Matrixschreibweise die Gestalt  $\dot{\gamma} = A\gamma$  annimmt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Teil 2 folgt damit aus II.7.4.13. Für Teil 3 müssen wir folglich nur prüfen, daß die beiden angegebenen Funktionen in der Tat linear unabhängige Lösungen sind. Das kann dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

2.1.4. Statt in Teil 3 mögliche Lösungen einfach zu erraten, hätten wir uns auch daran erinnern können, daß ja nach II.7.4.9 jede Lösung von der Form

$$x(t) = \gamma_1(t) = \text{pr}_1(\exp(tA)c)$$

sein muß für  $c = (x(0), \dot{x}(0))$ . Das charakteristische Polynom unserer Matrix  $A$  ist aber nun gerade  $X^2 + aX + b$ . Hat es zwei verschiedene reelle Nullstellen  $\lambda, \mu$  und bilden wir eine Matrix  $P$  mit Eigenvektoren zu  $\lambda$  und  $\mu$  als Spalten, so gilt  $A = P \text{diag}(\lambda, \mu)P^{-1}$  und  $\exp(tA) = P \text{diag}(e^{\lambda t}, e^{\mu t})P^{-1}$  und wir erkennen auf Anhieb, daß jede Lösung eine Linearkombination der Gestalt  $x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}$  sein muß. Im Fall einer doppelten reellen Nullstelle finden wir ähnlich ein  $P$  mit

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

und II.7.5.24 liefert

$$\exp \begin{pmatrix} u & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u & t e^u \\ 0 & e^u \end{pmatrix}$$

womit sich die allgemeine Lösung ergibt als eine Linearkombination der Gestalt  $\alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}$ .

2.1.5. Im Fall der gedämpften Schwingung hat unser Polynom  $X^2 + aX + b$  die beiden Nullstellen

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Bei hinreichend großer Dämpfung  $a^2/4 \geq b$  erhalten wir reelle nichtpositive Lösungen und unser Massepunkt kehrt mit höchstens einmaligem Überschwingen zum Ruhezustand zurück. Im Fall kleiner Dämpfung  $a^2/4 < b$  hat unser Polynom dahingegen keine reellen Nullstellen mehr und stattdessen die beiden komplexen Nullstellen  $\pm i\omega - a/2$  mit  $\omega = \sqrt{b - a^2/4} > 0$ . Um hier weiterzukommen verallgemeinern wir zunächst einmal alles bisher Gesagte ins Komplexe.

**Proposition 2.1.6 (Lösung der Schwingungsgleichung).** *Seien komplexe Zahlen  $a, b \in \mathbb{C}$  gegeben.*

1. Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$  bildet einen komplexen Untervektorraum des Raums  $\text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  aller Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , den **Lösungsraum**  $L$  unserer Differentialgleichung.
2. Die Abbildung  $x \mapsto (x(0), \dot{x}(0))$  liefert einen Vektorraumisomorphismus  $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$ , den **Anfangswertisomorphismus**.
3. Hat das Polynom  $X^2 + aX + b$  zwei verschiedene Nullstellen  $\lambda$  und  $\mu$ , so bilden die beiden Funktionen  $x_1(t) = e^{\lambda t}$  und  $x_2(t) = e^{\mu t}$  eine Basis des Lösungsraums  $L$ . Hat es eine doppelte Nullstelle  $\lambda$ , so bilden die beiden Funktionen  $x_1(t) = e^{\lambda t}$  und  $x_2(t) = t e^{\lambda t}$  eine Basis des Lösungsraums.

*Beweis.* Der Beweis ist identisch zum Beweis im Reellen 2.1.6, sobald man die dabei benötigten Hilfsmittel ins Komplexe verallgemeinert hat. Das werden wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts und insbesondere in 2.1.10 tun.  $\square$

2.1.7 (**Beziehung zwischen reellen und komplexen Lösungen**). Sind in der Situation aus 2.1.6 die Koeffizienten  $a, b$  beide reell, so bilden die reellwertigen Lösungen unseres Systems nach 2.1.2 einen zweidimensionalen reellen Untervektorraum  $L_{\mathbb{R}} \subset \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Seine komplexwertigen Lösungen bilden dahingegen nach 2.1.6 einen zweidimensionalen komplexen Untervektorraum  $L_{\mathbb{C}} \subset \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , der stabil ist unter dem Übergang zum komplex Konjugierten, in Formeln  $f \in L_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{f} \in L_{\mathbb{C}}$ . Per definitionem gilt weiter  $L_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{C}} \cap \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Haben wir nun Erzeuger  $f_1, \dots, f_r$  für den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der komplexwertigen Lösungen gefunden, so erzeugen deren Realteile zusammen mit ihren Imaginärteilen den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellwertigen Lösungen: In der Tat schreibt sich ja jede reellwertige Lösung  $f$  als  $f = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r$  mit  $c_\nu \in \mathbb{C}$ , und bilden wir hier auf beiden Seiten den Realteil, so ergibt sich für  $f$  die Darstellung

$$f = \text{Re}(c_1) \text{Re}(f_1) - \text{Im}(c_1) \text{Im}(f_1) + \dots + \text{Re}(c_r) \text{Re}(f_r) - \text{Im}(c_r) \text{Im}(f_r)$$

2.1.8. Im Fall der gedämpften Schwingungen 2.1.1 mit kleiner Dämpfung und folglich komplexen Nullstellen  $\pm i\omega - a/2$  erhalten wir die komplexen Lösungen  $x_{\pm}(t) = e^{-at/2} e^{\pm i\omega t}$  und die Euler-Formel liefert, daß die Funktionen

$$x_1(t) = e^{-at/2} \cos \omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-at/2} \sin \omega t$$

den Raum der reellwertigen Lösungen aufspannen. Die Größe  $\omega$  wird in diesem Zusammenhang auch als **Winkelgeschwindigkeit** bezeichnet. Die Additionstheoreme zeigen, daß sich jede reelle Linearkombination  $\alpha \sin(\omega t) +$

$\beta \cos(\omega t)$  der Funktionen  $\cos(\omega t)$  und  $\sin(\omega t)$  als Sinuswelle mit **Amplitude**  $k$  und **Phase**  $\phi$  in der Form

$$\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) = k \sin(\omega t + \phi)$$

schreiben läßt, für  $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  und  $\phi$  einer Lösung des Gleichungssystems  $k \cos \phi = \alpha$  und  $k \sin \phi = \beta$ . Im Fall kleiner Dämpfung kann die allgemeine Lösung also geschrieben werden als  $x(t) = k e^{-at/2} \sin(\omega t + \phi)$  und beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude bei positiver Dämpfung  $a > 0$  exponentiell abfällt.

2.1.9. Man kann ohne Schwierigkeiten die Exponentialabbildung auf quadratischen Matrizen ins Komplexe erweitern zu

$$\begin{aligned} \exp : M(n \times n; \mathbb{C}) &\rightarrow M(n \times n; \mathbb{C}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{aligned}$$

**Satz 2.1.10 (Lineare Differentialgleichungen).** *Ist  $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$  eine quadratische Matrix und  $c \in \mathbb{C}^n$  ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit Anfangswert  $\gamma(0) = c$  derart, daß gilt  $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

*Beweis.* Mutatis mutandis, als da heißt nach Verändern des zu Verändernden identisch zum Beweis von II.7.4.9.  $\square$

**Korollar 2.1.11 (Anfangswertisomorphismus).** *Ist  $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$  eine quadratische Matrix, so bilden die differenzierbaren Abbildungen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$  einen komplexen Untervektorraum  $L \subset \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  und an jeder Stelle liefert das Auswerten einen Isomorphismus  $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ .*

*Beweis.* Dem Leser überlassen. Im Reellen war das Übung II.7.4.13.  $\square$

*Ergänzung 2.1.12.* Die Regel  $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$  aus II.7.5.28 gilt genauso für komplexe Matrizen. Die Berechnung des Exponentials einer beliebigen quadratischen Matrix wird Ihnen auf dieser Grundlage leicht gelingen, sobald sie in der linearen Algebra die Theorie der ‘Jordan’schen Normalform’ ?? kennengelernt haben.

*Übung 2.1.13.* Ist  $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$  eine reelle Matrix und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine komplexe Lösung der Differentialgleichung  $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$ , so sind ihr koordinatenweise gebildeter Real- und Imaginärteil  $\text{Re } \gamma$  und  $\text{Im } \gamma$  reelle Lösungen. Erzeugt eine Menge  $\mathbb{C}^n$ -wertiger Funktionen den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der  $\mathbb{C}^n$ -wertigen Lösungen unserer Differentialgleichung, so erzeugen ihre Real- und Imaginärteile zusammen den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der  $\mathbb{R}^n$ -wertigen Lösungen.

## 2.2 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

2.2.1. Die Erfahrungen, die wir bei der Behandlung gedämpfter Schwingungen gemacht haben, fassen wir nun noch etwas allgemeiner.

**Satz 2.2.2.** *Seien komplexe Zahlen  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  gegeben.*

1. *Die komplexwertigen  $n$ -mal differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_0f = 0$  bilden einen Untervektorraum im Raum aller Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung.*
2. *Die Abbildung  $f \mapsto (f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0))$  ist ein Isomorphismus dieses Lösungsraums mit dem  $\mathbb{C}^n$ , der **Anfangswertisomorphismus**.*
3. *Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle des Polynoms  $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$  der Vielfachheit  $r$ , so sind die Funktionen  $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda t}$  Lösungen unserer Differentialgleichung, und durchläuft  $\lambda$  alle Nullstellen unseres Polynoms, so bilden diese Lösungen eine Basis des Lösungsraums.*

*Ergänzung 2.2.3.* Der Satz bleibt gültig, wenn wir darin überall  $\mathbb{R}$  durch ein beliebiges halboffenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ersetzen.

*Beweis.* 1 ist offensichtlich. Um die in 2 behauptete Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen beachten wir zunächst, daß unsere Überlegungen aus II.7.4.9 ohne Änderungen auch im Komplexen gültig sind. Für eine quadratische Matrix  $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$  mit komplexen Einträgen haben also die differenzierbaren Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , die die Differentialgleichung  $g' = Ag$  lösen, die Form  $g(t) = (\exp tA)g(0)$  wo wir den Anfangswert  $g(0) \in \mathbb{C}^n$  frei wählen dürfen. Insbesondere definiert die Abbildung  $g \mapsto g(0)$  einen Isomorphismus vom Lösungsraum der Differentialgleichung  $g' = Ag$  mit dem  $\mathbb{C}^n$ . Jetzt beachten wir, daß die Vorschrift  $f \mapsto g = (f, f', f'', \dots, f^{(n-1)})^\top$  eine Bijektion induziert zwischen der Menge aller  $n$ -mal differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die die Differentialgleichung aus dem Satz erfüllen, und der Menge aller differenzierbaren Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , die das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} g'_0 &= g_1 \\ g'_1 &= g_2 \\ &\vdots \\ g'_{n-1} &= a_{n-1}g_{n-1} + \dots + a_1g_1 + a_0g_0 \end{aligned}$$

lösen, wo wir etwas ungewöhnlich  $g = (g_0, \dots, g_{n-1})$  indiziert haben der besseren Übersichtlichkeit halber. Damit ist auch Teil 2 bewiesen.

3. Motiviert durch unsere Erkenntnisse bei der Lösung von 2.1.6 beginnen wir mit dem Ansatz  $f(t) = e^{\lambda t}$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Mögliche  $\lambda$  sind dann genau die Nullstellen des Polynoms  $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ . Ist  $\lambda$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $r$ , so sind sogar, wieder in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse bei der Lösung von 2.1.6, auch  $t e^{\lambda t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda t}$  noch Lösungen unserer Gleichung. Um das einzusehen, betrachten wir den Vektorraum  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und fassen das Ableiten auf als eine lineare Abbildung

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Zerfällt unser Polynom in Linearfaktoren

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

so können wir den Operator  $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  auch schreiben als Verknüpfung der Operatoren  $(D - \lambda_i)^{n_i}$ , und es reicht folglich  $(D - \lambda)^r t^{r-1} e^{\lambda t} = 0$  nachzuweisen. Nun gilt aber offensichtlich

$$(D - \lambda)t^m e^{\lambda t} = m t^{m-1} e^{\lambda t}$$

und die Behauptung folgt per Induktion. Um zu zeigen, daß die  $t^j e^{t\lambda_i}$  für  $0 \leq j < n_i$  eine Basis des Lösungsraums bilden, reicht es die lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra, so erkennt man leicht, daß die  $t^m e^{\lambda t}$  jeweils zum Hauptraum  $\text{Hau}(D; \lambda)$  gehören und muß wegen ?? nur noch die lineare Unabhängigkeit der  $t^m e^{\lambda t}$  für festes  $\lambda$  und variables  $m$  zeigen, die hinwiederum sofort aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $t^m$  folgt. Man vergleiche auch ??.

Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra noch nicht, so muß man mehr arbeiten. Man setzt dann etwa eine Linearkombination  $\sum c_{ji} t^j e^{\lambda_i t} = 0$  an und muß zeigen, daß alle  $c_{ji}$  verschwinden. Sonst könnten wir aber nach eventueller Umnummerierung der Nullstellen ein  $k$  finden mit  $c_{k1} \neq 0$  aber  $c_{j1} = 0$  für  $j > k$ . Wenden wir dann auf unsere Summe den Differentialoperator  $(D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2)^N \dots (D - \lambda_r)^N$  an für hinreichend grosses  $N$ , so ergibt sich  $c_{k1} e^{t\lambda_1} = 0$  im Widerspruch zu unserer Annahme  $c_{k1} \neq 0$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 2.2.4.* Man bestimme eine Basis des komplexen sowie des reellen Lösungsraums der Differentialgleichung  $f''' = f$ .

## 2.3 Gekoppelte Schwingungen

*Beispiel 2.3.1.* An gegenüberliegenden Wänden eines Zimmers ist jeweils ein Wägelchen mit einer Feder befestigt und die beiden Wägelchen sind auch

untereinander durch eine Feder verbunden. Bezeichnen  $x(t)$  bzw.  $y(t)$  die Position des ersten bzw. zweiten Wägelchens auf einer Skala, auf der  $x = y = 0$  den Gleichgewichtszustand bedeuten und größere  $x$  bzw.  $y$  einen größeren Abstand eines Wägelchens von "seiner" Wand, so genügt unser System einer Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -ax - b(x + y) \\ \ddot{y} &= -cy - d(y + x)\end{aligned}$$

für Konstanten  $a, b, c, d > 0$ , in die die Stärke der Federn und die Massen der Wägelchen eingehen. Erklären wir  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto v(t) = (x(t), y(t))$  und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -(a+b) & -b \\ -d & -(c+d) \end{pmatrix}$$

so können wir unser System schreiben als

$$\ddot{v}(t) = Av(t)$$

Der Leser mag als Übung zeigen, daß der Lösungsraum vierdimensional sein muß. Unsere Matrix  $A$  hat, wie man dem charakteristischen Polynom ansieht, negative reelle Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$ . Also hat bereits der  $\mathbb{R}^2$  eine Basis  $v_1, v_2$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Dann sind die vier Funktionen

$$t \mapsto \exp((\pm\sqrt{\lambda_i})t)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2$$

offensichtlich Lösungen, und ähnliche Argumente wie im vorhergehenden Beispiel zeigen, daß sie sogar eine Basis Lösungsraums bilden. Setzen wir  $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ , so erhalten wir eine alternative Basis des Lösungsraums durch die vier Funktionen

$$\cos(t\omega_i)v_i \quad \text{und} \quad \sin(t\omega_i)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2.$$

Ist noch spezieller unsere Situation symmetrisch unter der Vertauschung der beiden Wägelchen, haben sie also dieselbe Masse und sind durch dieselben Federn mit den Wänden verbunden, so folgt  $b = d$  und  $a = c$  und wir erhalten  $v_1 = (1, 1)$  mit  $\lambda_1 = -a - 2b$  sowie  $v_2 = (1, -1)$  mit  $\lambda_2 = -a$ . Diese Eigenvektoren entsprechen den zwei **Eigenschwingungen** des Systems, bei denen beide Wägelchen zu allen Zeiten in derselben bzw. in entgegengesetzten Richtungen fahren. Die Bewegung der einzelnen Wägelchen  $x(t) = x_+(t)$  und  $y(t) = x_-(t)$  wird dann beschrieben durch

$$\operatorname{Re} (c_1 e^{i\omega_1 t} \pm c_2 e^{i\omega_2 t}) = \operatorname{Re} (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} (c_1 e^{i(\omega_1 + \omega_2)t/2} \pm c_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2}))$$

mit komplexen  $c_i$ . Nimmt man hier zum Beispiel  $c_1 = c_2 = 1$ , so ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t/2) \cos((\omega_1 + \omega_2)t/2) \\y(t) &= 2 \sin((\omega_1 - \omega_2)t/2) \sin((\omega_1 + \omega_2)t/2)\end{aligned}$$

Ist die verbindende Feder schwach im Verhältnis zu den Federn gegen die Wände, in Formeln  $a \gg b$ , so liegen die beiden Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  und damit auch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$  verhältnismäßig nah beieinander. Im Versuch kann man in diesem Fall schön sehen, wie die beiden Wägelchen mit der Winkelgeschwindigkeit  $(\omega_1 - \omega_2)/2$  ihre Energie untereinander austauschen.

2.3.2. Im Übrigen ist es auch a priori klar, daß in der symmetrischen Situation die zweielementige Symmetriegruppe unserer Gleichung, die der Vertauschung der beiden Wägelchen entspricht, auf dem Lösungsraum operieren muß, daß wir also uns schon von Anfang an hätten darauf beschränken dürfen, nur die symmetrischen und die antisymmetrischen Lösungen zu bestimmen und die allgemeine Lösung als Linearkombination solcher speziellen Lösungen zu erhalten.

## 2.4 Angeregte Schwingungen

2.4.1. Ist wieder  $A$  eine komplexe  $(n \times n)$ -Matrix und ist zusätzlich eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  vorgegeben und man sucht alle differenzierbaren  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , die das "inhomogene" System von Differentialgleichungen

$$\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) + f(t)$$

lösen, so rät einem die Methode der **Variation der Konstanten** zum Ansatz

$$\gamma(t) = \exp(tA)g(t)$$

Man erkennt leicht, daß dieser Ansatz eine Lösung liefert, wenn  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  differenzierbar ist und die Gleichung  $f(t) = \exp(tA)\dot{g}(t)$  erfüllt, als da heißt für

$$g(t) = \int^t \exp(-\tau A)f(\tau) d\tau$$

wobei  $g(t)$  als unbestimmtes Integral natürlich nur bis auf eine additive Konstante aus dem  $\mathbb{C}^n$  wohldefiniert ist. Daß wir mit diesem Verfahren tatsächlich auch alle Lösungen  $\gamma(t)$  unseres inhomogenen Systems von Differentialgleichungen erhalten ergibt sich daraus, daß ja ganz offensichtlich die Differenz

von je zwei Lösungen unserer inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung  $\dot{\gamma} = A\gamma(t)$  sein muß. In der Sprache der linearen Algebra bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung also einen affinen Teilraum des Raums aller Funktionen, dessen Raum von Richtungsvektoren der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist.

*Beispiel 2.4.2 (Angeregte Schwingungen).* Eine Lampe ist mit einer Feder an einer vibrierenden Decke aufgehängt. Sei  $h(t)$  die Auslenkung der Decke zur Zeit  $t$  und  $x(t)$  die Höhe der Lampe zur Zeit  $t$ , beide gemessen auf einer gegen den Boden festen Skala, auf der  $h = x = 0$  einen Zustand beschreibt, in dem sich die Federkraft, die die Lampe zur Decke zieht, und die Schwerkraft der Lampe die Waage halten. So genügt  $x(t)$  einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\ddot{x}(t) = -a(x(t) - h(t))$$

wobei  $a$  positiv ist und von der Masse der Lampe und der Federkonstante abhängt. Wie im Beweis von 2.2.2 schreiben wir das um zu einem System erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_0 &= \gamma_1 \\ \dot{\gamma}_1 &= -a\gamma_0 + ah\end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 0 \\ ah \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom unserer Matrix  $A$  ist  $X^2 + a$ , die Eigenwerte ergeben sich zu  $\pm i\eta$  für  $\eta = \sqrt{a}$  und als zugehörige Eigenvektoren finden wir  $(1, \pm i\eta)^\top$ . Nehmen wir diese Eigenvektoren als Spalten einer Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\eta & i\eta \end{pmatrix}$$

so haben wir offensichtlich  $AP = PB$  mit  $B = \text{diag}(-i\eta, i\eta)$  einer Diagonalmatrix und  $\varphi = P^{-1}\gamma$  erfüllt die Differentialgleichung  $\dot{\varphi}(t) = B\varphi(t) + f(t)$  mit

$$f(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\eta} \begin{pmatrix} i\eta & -1 \\ i\eta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{ah(t)}{2i\eta} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich betrachte von nun an diese Differentialgleichung, da es mit übersichtlicher scheint, mit  $\exp tB$  anstelle von  $\exp tA = P(\exp tB)P^{-1}$  zu hantieren. Nach unseren Überlegungen 2.4.1 lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$\varphi(t) = \exp(tB)g(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \int^t \exp(-\tau B)f(\tau) d\tau$$

Nehmen wir zum Beispiel an, unsere Decke vibriere mit  $h(t) = k \sin(\omega t)$  für  $\omega > 0$ , so ergibt sich die erste Komponente  $g_1(t)$  von  $g(t)$  zu

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -\frac{ka}{2i\eta} \int^t e^{i\tau\eta} \left( \frac{e^{i\tau\omega} - e^{-i\tau\omega}}{2i} \right) d\tau \\ &= \frac{ka}{4\eta} \int^t e^{i\tau(\eta+\omega)} d\tau - \frac{ka}{4\eta} \int^t e^{i\tau(\eta-\omega)} d\tau \\ &= \text{konst} + \frac{ka}{4i\eta(\eta+\omega)} e^{it(\eta+\omega)} - \begin{cases} \frac{ka}{4i\eta(\eta-\omega)} e^{it(\eta-\omega)} & \text{falls } \eta \neq \omega; \\ \frac{ka}{4\eta} t & \text{falls } \eta = \omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Ähnlich berechnen wir  $g_2(t)$  und erkennen, daß in dem Fall, daß die Eigenfrequenz der Lampe nahe an der Frequenz der Decke ist, d.h. für  $|\eta - \omega|$  klein, die Schwingung sehr groß werden kann und im Fall  $\eta = \omega$  die Auslenkung eventuell sogar gegen Unendlich strebt. In der Physik spricht man in diesen Fällen von **Resonanz** bzw. von einer **Resonanzkatastrophe**. Seien die Eigenschwingung unseres Systems  $t \mapsto e^{it\eta}$  und die Anregung  $t \mapsto h(t)$  oder gleichbedeutend  $t \mapsto f(t)$  periodisch mit derselben Periode  $p$  im Sinne der gleich folgenden Definition 3.1.1. Nehmen wir der Einfachheit halber  $p = 2\pi$  an, so finden wir  $\eta \in \mathbb{Z}$ , und entwickeln wir  $f$  in eine Fourierreihe im Sinne von 3.1.3, so zeigt unsere obige Formel  $g(t) = \int^t \exp(-\tau B) f(\tau) d\tau$ , daß nur die Summanden  $c_{\pm\eta} e^{\pm it\eta}$  für die Resonanz verantwortlich sind in dem Sinne, daß alle anderen Summanden der Fourierreihe nur periodische Beiträge zu  $g(t)$  liefern. Später in V.2.1.1 folgende werden Sie lernen, daß  $g_1(t)$  im allgemeinen bis auf eine Konstante auch interpretiert werden kann als der "Wert bei  $-\eta$  der Fouriertransformierten des Produkts von  $f_1$  mit der charakteristischen Funktion des Intervalls  $[0, t]$ ".

### 3 Grundlegendes zu Fourierreihen

#### 3.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe

**Definition 3.1.1.** Sei  $M$  eine Menge und  $p > 0$  eine positive reelle Zahl. Wir sagen, eine Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow M$  habe die **Periode**  $p$  genau dann, wenn gilt  $f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Satz 3.1.2 (Entwicklung in eine Fourier-Reihe, reelle Form).** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode  $2\pi$ . So gibt es eindeutig bestimmte  $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{R}$  derart, daß gilt

$$f(x) = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin(\nu x) + b_\nu \cos(\nu x)$$

in dem Sinne, daß die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen unsere Funktion  $f$  konvergiert.

**Satz 3.1.3 (Entwicklung in eine Fourier-Reihe, komplexe Form).** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode  $2\pi$ . So gibt es eindeutig bestimmte  $c_\nu \in \mathbb{C}$  derart, daß im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} c_\nu e^{i\nu x}$$

3.1.4. Natürlich können wir in der ersten Formulierung 3.1.2 unseres Satzes auch komplexwertige Funktionen erlauben, wenn wir  $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{C}$  zulassen. Die beiden Sätze sind dann äquivalent, da ja nach der Euler'schen Formel gilt

$$\begin{aligned} e^{i\nu x} &= \cos \nu x + i \sin \nu x \\ e^{-i\nu x} &= \cos \nu x - i \sin \nu x \end{aligned}$$

Gegeben eine Darstellung wie in Satz 3.1.3 erhalten wir also eine Darstellung wie in Satz 3.1.2 mit  $c = c_0$ ,  $b_\nu = c_\nu + c_{-\nu}$ ,  $a_\nu = i c_\nu - i c_{-\nu}$ , und diese Gleichungen sind erfüllt genau dann, wenn gilt

$$c_0 = c, \quad c_\nu = \frac{1}{2}(b_\nu - i a_\nu), \quad \text{und} \quad c_{-\nu} = \frac{1}{2}(b_\nu + i a_\nu).$$

*Beweis.* Wir zeigen vorerst nur die Eindeutigkeit, der Beweis der Existenz wird in 3.3.7 nachgeholt. Aus 1.5.18 oder auch aus der Euler'schen Formel folgt, daß die Ableitung von  $f(x) = e^{i\nu x} = \cos \nu x + i \sin \nu x$  gegeben wird durch  $f'(x) = i\nu e^{i\nu x} = -\nu \sin \nu x + i\nu \cos \nu x$ . Mit 1.1.12 und der vektorwertigen Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung 1.3.7

erhalten wir  $\int_0^{2\pi} e^{i\nu x} dx = \frac{1}{i\nu} e^{i\nu x} \Big|_0^{2\pi} = 0$  für  $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und für  $\nu = 0$  ergibt sich  $\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$ . Wir folgern

$$\int_0^{2\pi} e^{i\mu x} e^{-i\nu x} dx = \begin{cases} 2\pi & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Indem wir die gleichmäßige Konvergenz mit dem Integral vertauschen und uns überlegen, daß das auch für komplexwertige Funktionen erlaubt ist, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\nu x} dx = 2\pi c_\nu$$

Das zeigt die Eindeutigkeit der  $c_\nu$ . Der Beweis der Existenz wird in 3.3.7 nachgeholt.  $\square$

**Satz 3.1.5 (Variante zur Fourier-Reihe).** *Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode  $2\pi$ , so gibt es eindeutig bestimmte  $c_\nu \in \mathbb{C}$  derart, daß bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf  $\text{Ens}^b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  im Sinne von II.7.5.11 gilt*

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x} = f(x)$$

3.1.6. Natürlich müssen hier die  $c_\nu$  dieselben sein wie in der schwächeren aber einfacher zu formulierenden Version 3.1.3. Der Beweis ihrer Existenz wird in 3.3.7 gegeben. Ich habe etwas gezögert, auf der rechten Seite  $f(x)$  zu schreiben, wo doch schlicht die Funktion  $f$  gemeint ist, aber auf der linken Seite steht ja auch  $e^{i\nu x}$  für die Funktion  $x \mapsto e^{i\nu x}$ .

*Ergänzung 3.1.7.* Die obigen Sätze über die Fourierentwicklung sind nur der Beginn einer ganzen Theorie: Insbesondere ergibt sich offensichtlich die Frage, welche Abbildungen  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  denn nun verschiedenen Klassen von Funktionen entsprechen. Diese Frage erweist sich als recht delikate. In V.1.2.13 führen wir den Raum der "quadratintegrierbaren Funktionen" ein und zeigen, daß diese genau den Abbildungen  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechen, bei denen die Summe der Betragsquadrate endlich ist.

## 3.2 Der Satz von Stone-Weierstraß

3.2.1. Unter einem kompakten Raum darf man in diesem Abschnitt je nach Wissensstand einen kompakten metrischen Raum II.6.7.1 oder allgemeiner einen kompakten topologischen Raum II.6.10.4 verstehen.

3.2.2. Im folgenden verwende ich eine Begrifflichkeit, wie sie in ?? ausführlicher eingeführt wird, und bespreche hier nur das Nötigste. Gegeben ein Körper  $k$  bezeichnet man einen  $k$ -Vektorraum  $A$  mit einer bilinearen Verknüpfung  $A \times A \rightarrow A$  ganz allgemein als eine  **$k$ -Algebra**. Ist die Verknüpfung assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Gibt es für unsere Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation im Sinne von ?? ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** zu nennen.

3.2.3. Gegeben ein Körper  $k$  und eine beliebige Menge  $X$  ist etwa der  $k$ -Vektorraum  $\text{Ens}(X, k)$  aller  $k$ -wertigen Funktionen auf  $X$  mit der punktweisen Multiplikation als Verknüpfung eine Ringalgebra mit der konstanten Funktion Eins als Eins-Element. Wir sagen, eine Teilmenge  $A \subset \text{Ens}(X, k)$  **trenne die Punkte von  $X$**  genau dann, wenn es für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  ein  $a \in A$  gibt mit  $a(x) \neq a(y)$ .

3.2.4. Gegeben ein Körper  $k$  und eine  $k$ -Algebra  $A$  versteht man unter einer **Unteralgebra**  $B \subset A$  einen unter der Verknüpfung unserer Algebra stabilen Untervektorraum. Gegeben ein Körper  $k$  und eine  $k$ -Ringalgebra  $A$  verstehen wir unter einer **Unterringalgebra**  $B \subset A$  einen unter der Verknüpfung unserer Ringalgebra stabilen Untervektorraum, der darüber hinaus das Einselement der Ringalgebra  $A$  enthält. In anderen Worten ist eine Unterringalgebra also eine Unteralgebra, die gleichzeitig im Sinne von ?? ein Teilring ist.

3.2.5. Man beachte, daß wir bereits nach II.6.5.36 wissen, daß die stetigen reellen Funktionen auf einem topologischen Raum  $X$  in der  $\mathbb{R}$ -Ringalgebra aller reellen Funktionen eine  $\mathbb{R}$ -Unterringalgebra

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \subset \text{Ens}(X, \mathbb{R})$$

bilden. Des weiteren wissen wir nach II.6.6.4, daß diese Unterringalgebra stabil ist unter dem Bilden gleichmäßiger Grenzwerte. Gegeben ein kompakter Raum  $X$  bezeichne im folgenden  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  den reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf  $X$  mit seiner Supremumsnorm.

**Definition 3.2.6.** Eine Teilmenge eines metrischen oder auch eines topologischen Raums heißt **dicht** genau dann, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

**Satz 3.2.7 (Stone-Weierstraß).** *In der Ringalgebra aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede Unterringalgebra, die*

die Punkte unseres Raums trennt, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

*Ergänzung 3.2.8.* Ich erwähne noch eine Variante dieses Satzes, die man oft in der Literatur findet, die jedoch im weiteren Verlauf dieser Vorlesung nicht von Belang ist. Statt von unserer Unteralgebra  $A$  zu fordern, daß sie die konstante Funktion Eins enthält, bräuchten wir nur vorauszusetzen, daß es für jedes  $x \in X$  ein  $a \in A$  gibt mit  $a(x) \neq 0$ . Man sagt dann,  $A$  habe "keine simultane Nullstelle". Unser Beweis funktioniert im wesentlichen auch unter diesen Voraussetzungen, man muß dazu nur Lemma 3.2.11 verfeinern zur Aussage, daß  $p_\varepsilon$  sogar ohne konstanten Term gefunden werden kann, und muß in Schritt 3 etwas feiner argumentieren.

**Korollar 3.2.9 (Approximationssatz von Weierstraß).** *Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Polynomfunktion  $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  mit*

$$|p(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß 3.2.7. □

*Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß.* Sei  $X$  unser kompakter Raum und  $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  unsere Unterringalgebra. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall zurück, daß  $A$  in  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  abgeschlossen ist, und zeigen dazu:

**Lemma 3.2.10.** *Ist  $X$  kompakt und  $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  eine Unteralgebra, so ist auch der Abschluß  $\bar{A}$  von  $A$  eine Unteralgebra.*

*Beweis.* Nach II.6.4.11 ist  $\bar{A}$  genau die Menge aller stetigen Funktionen  $a : X \rightarrow \mathbb{R}$  derart, daß es eine Folge  $a_n$  aus  $A$  gibt, die gleichmäßig gegen  $a$  konvergiert. Sei  $b$  ein anderes Element von  $\bar{A}$  und  $b_n$  eine Folge aus  $A$ , die gleichmäßig gegen  $b$  konvergiert. Wir behaupten, daß dann auch  $a_n + b_n$  gleichmäßig gegen  $a + b$  konvergiert und  $a_n b_n$  gleichmäßig gegen  $ab$ . Den Beweis der ersten Aussage überlassen wir dem Leser. Für die Zweite benutze man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|ab - a_n b_n\| &\leq \|a - a_n\| \cdot \|b_n\| + \|a\| \cdot \|b - b_n\| \\ &\leq \varepsilon(\|b\| + 1 + \|a\|) \end{aligned}$$

falls gilt  $\|a - a_n\| < \varepsilon$ ,  $\|b - b_n\| < \varepsilon$  und  $\varepsilon < 1$ . □

Erfüllt also eine Unterringalgebra  $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  die Bedingungen im Satz von Stone-Weierstraß, so ist auch ihr Abschluß  $\bar{A}$  eine Unterringalgebra und trennt a fortiori die Punkte von  $X$ . Um den Satz von Stone-Weierstraß zu

beweisen reicht es demnach aus, wenn wir unter der zusätzlichen Annahme  $A$  abgeschlossen zeigen  $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . Um weiterzukommen, zeigen wir zunächst einmal einen Spezialfall des Approximationssatzes von Weierstraß durch ein direktes Argument.

**Lemma 3.2.11.** *Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gibt es stets ein Polynom  $p = p_\varepsilon$  mit  $|\sqrt{x} - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$ .*

*Erster Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $\sqrt{x}$  gleichmäßig stetig ist auf  $[0, 2]$ , finden wir  $\eta \in (0, 1)$  mit

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x + \eta}| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Da die Taylorreihe von  $\sqrt{z}$  um den Entwicklungspunkt 1 nach II.5.1.19 auf dem Intervall  $[\eta, 1 + \eta]$  gleichmäßig gegen  $\sqrt{z}$  konvergiert, finden wir weiter ein Polynom  $p$  mit

$$|\sqrt{x + \eta} - p(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \square$$

*Zweiter Beweis.* Bei der folgenden Alternative muß man etwas mehr denken, aber nichts wissen über die Konvergenz von Taylorreihen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Polynomen durch  $p_0(x) = 0$ ,  $p_{n+1}(x) = p_n(x) + (1/2)(x - p_n(x))^2$  und behaupten, daß diese Folge auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $\sqrt{x}$  konvergiert. In der Tat gilt ja

$$p_{n+1} = p_n + (\sqrt{x} - p_n)(\sqrt{x} + p_n)/2$$

und dieser Gleichung sehen wir an, daß für  $x \in [0, 1]$  gilt

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq \sqrt{x}$$

denn es folgt induktiv  $(\sqrt{x} - p_n) \geq 0$  und  $(\sqrt{x} + p_n)/2 \leq 1$ . Andererseits folgt aus unserer Gleichung auch

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} - p_{n+1}) &= (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x} - p_n)/2 \\ &\leq (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x})/2 \end{aligned}$$

und somit konvergiert unsere Folge  $p_n$  auf jedem Intervall  $[a, 1]$  mit  $0 < a < 1$  gleichmäßig gegen  $\sqrt{x}$ . Dann muß mit etwas Nachdenken unsere Folge aber auf ganz  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $\sqrt{x}$  konvergieren.  $\square$

Nun zeigen wir den Satz von Stone-Weierstraß 3.2.7 für eine abgeschlossene Unterringalgebra  $A$  in fünf Schritten. Gegeben  $a \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  bezeichne  $|a| \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  die Funktion  $x \mapsto |a(x)|$  und  $\|a\| \in \mathbb{R}$  die Supremumsnorm von  $a$ .

1.  $a \in A \Rightarrow |a| \in A$ . Um das zu zeigen, schreiben wir  $a = \lambda b$  mit  $\lambda \in (0, \infty)$  und  $\|b\| \leq 1$  und erhalten  $|a| = \lambda\sqrt{b^2}$ . Nach Lemma 3.2.11 gibt es eine Folge  $p_n$  von Polynomen, die auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $\sqrt{x}$  strebt, und dann strebt  $\lambda p_n(b^2)$  auf  $X$  gleichmäßig gegen  $|a|$ . Da  $A$  eine Unteralgebra ist, liegen alle  $\lambda p_n(b^2)$  auch in  $A$ , und da  $A$  abgeschlossen ist unter gleichmäßiger Konvergenz, folgt  $|a| \in A$ .

2.  $a, b \in A \Rightarrow \sup(a, b) \in A, \inf(a, b) \in A$ . In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\sup(a, b) &= 1/2(a + b + |a - b|) \\ \inf(a, b) &= 1/2(a + b - |a - b|)\end{aligned}$$

3. Für  $x \neq y$  zwei verschiedene Punkte aus  $X$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gibt es  $a \in A$  mit  $a(x) = \alpha, a(y) = \beta$ . In der Tat betrachte man die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned}A &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\mapsto (a(x), a(y))\end{aligned}$$

Da  $A$  Punkte trennt, gibt es  $a \in A$  mit  $a(x) \neq a(y)$ . Da die Konstanten zu  $A$  gehören, liegt jedoch auch  $(1, 1)$  im Bild unserer linearen Abbildung. Damit enthält das Bild unserer linearen Abbildung zwei linear unabhängige Vektoren und ist folglich ganz  $\mathbb{R}^2$ .

4. Für beliebige  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ,  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es  $a_x \in A$  mit  $a_x(x) = f(x)$  und

$$a_x(y) < f(y) + \varepsilon \quad \forall y \in X$$

In der Tat, für alle  $y \in X$  finden wir  $a_{x,y} \in A$  mit  $a_{x,y}(x) = f(x)$  und  $a_{x,y}(y) = f(y)$ . Auf einer geeigneten offenen Umgebung  $U_y$  von  $y$  gilt dann  $a_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in U_y$ . Da  $X$  kompakt ist, gibt es nun  $E \subset X$  endlich mit  $X = \bigcup_{y \in E} U_y$ . Dann nehmen wir  $a_x = \inf_{y \in E} a_{x,y}$  und haben unser  $a_x$  gefunden.

5. Für beliebiges  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es  $a \in A$  mit  $\|a - f\| < \varepsilon$ . Sei in der Tat für jedes  $x \in X$  ein  $a_x$  wie eben gewählt. Dann hat jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $V_x$  mit  $f(z) - \varepsilon < a_x(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in V_x$  wobei die zweite Ungleichung sogar gilt für alle  $z \in X$ . Da  $X$  kompakt ist, gibt es wieder  $F \subset X$  endlich mit  $X = \bigcup_{x \in F} V_x$ . Ist  $X$  nicht leer, so nehmen wir nun  $a = \sup_{x \in F} a_x$  und haben unser  $a$  gefunden. Der Fall  $X = \emptyset$  ist eh unproblematisch.  $\square$

**Definition 3.2.12.** Gegeben ein Kompaktum  $X$  betrachten wir nun die  $\mathbb{C}$ -Ringalgebra  $\mathcal{C}(X)$  aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $X$  mit der Supremumsnorm.



SkriptenBilder/Bild0029.png

Zum Beweis von [3.2.7](#), Schritt 4

**Korollar 3.2.13 (Komplexer Stone-Weierstraß).** *In der Ringalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede komplexe Unterringalgebra, die die Punkte unseres Raums trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

*Beweis.* Sei  $X$  unser kompakter Raum und  $B \subset \mathcal{C}(X)$  unsere komplexe Unterringalgebra, die die Punkte von  $X$  trennt und unter der komplexen Konjugation stabil ist, in Formeln  $b \in B \Rightarrow \bar{b} \in B$ . Man wende nun den Satz von Stone-Weierstraß 3.2.7 an auf  $A = B \cap \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . Aus  $b \in B$  folgt  $\operatorname{Re} b$  und  $\operatorname{Im} b \in A$ , denn es gilt  $\operatorname{Re} b = (b + \bar{b})/2$  und  $\operatorname{Im} b = (b - \bar{b})/2i$ . Also trennt auch unser  $A$  die Punkte von  $X$ . Für  $f \in \mathcal{C}(X)$  finden wir  $u, v \in A$  mit  $|\operatorname{Re} f(x) - u(x)| < \varepsilon/2$  und  $|\operatorname{Im} f(x) - v(x)| < \varepsilon/2$  für alle  $x \in X$ , setzen  $b = u + iv$  und folgern  $\|f - b\| < \varepsilon$ .  $\square$

**Definition 3.2.14.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der Gestalt  $t \mapsto \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} d_{\nu} e^{i\nu t}$  mit  $d_{\nu} \in \mathbb{C}$  heißt ein **trigonometrisches Polynom**.

**Satz 3.2.15 (Dichtheit trigonometrischer Polynome).** *Gegeben eine stetige Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(0) = f(2\pi)$  gibt es für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ein trigonometrisches Polynom  $g = g_{\varepsilon}$  mit*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

*Beweis.* Sei  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Wir betrachten die Abbildung  $E : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{it}$ , die anschaulich gesprochen “unser Intervall zu einer Kreislinie zusammenbiegt”. Das Vorschalten von  $E$  liefert eine Bijektion

$$(\circ E) : \mathcal{C}(S^1) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

wie man unschwer direkt einsehen und auch formal aus dem anschließenden Lemma 3.2.16 folgern kann. Unter unserer Bijektion entsprechen nun aber die trigonometrischen Polynome auf  $[0, 2\pi]$  genau den Funktionen der Form  $\sum_{\nu=-n}^n d_{\nu} z^{\nu}$  auf der Kreislinie  $S^1$ . Da gilt  $\bar{z} = z^{-1}$  für alle  $z \in S^1$ , dürfen wir den Satz von Stone-Weierstraß für komplexwertige Funktionen 3.2.13 anwenden und folgern, daß das  $\mathbb{C}$ -Erzeugnis der  $z^{\nu}$  dicht liegt in  $\mathcal{C}(S^1)$ . Der Satz folgt.  $\square$

**Lemma 3.2.16.** *Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Surjektion von kompakten metrischen Räumen, so ist eine Abbildung  $g : Y \rightarrow Z$  in einen weiteren metrischen Raum  $Z$  stetig genau dann, wenn  $g \circ f$  stetig ist.*

3.2.17. Das gilt auch allgemeiner und mit fast demselben Beweis, wenn wir statt metrischen Räumen topologische Räume betrachten und zusätzlich  $Y$  Hausdorff annehmen, vergleiche etwa [VI.3.4.18](#).

*Beweis.* Das Problem ist hier, die Stetigkeit von  $g$  aus der Stetigkeit von  $g \circ f$  zu folgern. Da  $f$  surjektiv ist, gilt für jede Teilmenge  $A \subset Z$  offensichtlich

$$g^{-1}(A) = f((g \circ f)^{-1}(A))$$

Ist  $A$  abgeschlossen in  $Z$ , so ist  $(g \circ f)^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $X$  wegen der Stetigkeit von  $g \circ f$ , also kompakt nach [II.6.7.3](#). Dann ist  $f((g \circ f)^{-1}(A))$  kompakt nach [II.6.7.10](#) als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, mithin abgeschlossen nach [II.6.7.3](#). Zusammenfassend haben wir also gezeigt, daß das Urbild  $g^{-1}(A)$  einer abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset Z$  abgeschlossen ist in  $Y$ , und daraus folgt mit [II.6.5.33](#) die Stetigkeit von  $g$ .  $\square$

### 3.3 Konvergenz der Fourierreihe

3.3.1. Wir verwenden im folgenden die Begrifflichkeit der Skalarprodukte, wie sie etwa in ?? eingeführt wird.

**Definition 3.3.2.** Wir versehen den komplexen Vektorraum  $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$  aller stetigen Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}g$$

Die zugehörige Norm notiert man in diesem Fall mit  $\sqrt{\langle f, f \rangle} =: \|f\|_2$ .

3.3.3. Unsere Formeln aus dem Beweis von [3.1.3](#) besagen genau, daß die  $e^{i\nu x}$  mit  $\nu \in \mathbb{Z}$  in diesem Raum ein Orthonormalsystem im Sinne von ?? bilden,

$$\langle e^{i\nu x}, e^{i\mu x} \rangle = \begin{cases} 1 & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten schreiben sich nun kürzer  $c_\nu = \langle e^{i\nu x}, f \rangle$  und wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 2\pi]) & \rightarrow & \text{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f^\wedge \end{array}$$

indem wir allgemeiner jeder stetigen Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  die Familie ihrer “Fourierkoeffizienten” zuordnen, in Formeln  $f^\wedge(\nu) := \langle e^{i\nu x}, f \rangle$ . In [V.1.2.13](#) werden wir diese Abbildung erweitern zu einer Bijektion zwischen geeigneten Räumen quadratintegrierbarer Funktionen.

**Satz 3.3.4 (über die quadratische Konvergenz der Fourierreihe).** Gegeben eine stetige Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit Fourierkoeffizienten  $c_\nu := \langle e^{i\nu x}, f \rangle$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{\nu=-n}^n c_\nu e^{i\nu x} \right\|_2 = 0$$

3.3.5. Gegeben eine Folge  $f_n$  stetiger Funktionen von einem kompakten Intervall  $[a, b]$  nach  $\mathbb{C}$  und eine weitere stetige Funktion  $f$  sagt man, die Folge der  $f_n$  **konvergiere im quadratischen Mittel gegen  $f$**  genau dann, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f - f_n|^2 = 0$$

Unser Satz sagt also in dieser Terminologie, daß die Fourierreihe einer stetigen Funktion im quadratischen Mittel gegen besagte Funktion konvergiert. Wir werden den vorhergehenden Satz in [V.1.2.13](#) verallgemeinern von stetigen auf alle “quadratintegrierbaren” Funktionen. Mit der Terminologie aus [II.7.5.11](#) können wir im normierten Vektorraum  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$  aus [3.3.2](#) die Aussage des Satzes auch schreiben in der Gestalt

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x}$$

*Beweis.* Für alle  $n$  können wir  $f$  nach ?? zerlegen in seine Projektion auf den von allen  $e^{i\nu x}$  mit  $-n \leq \nu \leq n$  aufgespannten Teilraum von  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$  und einen auf diesem Teilraum senkrechten Anteil,

$$f = \sum_{\nu=-n}^n c_\nu e^{i\nu x} + \left( f - \sum_{\nu=-n}^n c_\nu e^{i\nu x} \right)$$

Wir nehmen nun zunächst zusätzlich  $f(0) = f(2\pi)$  an. Für alle  $\varepsilon > 0$  finden wir dann nach dem Korollar [3.2.15](#) des Satzes von Stone-Weierstraß ein trigonometrisches Polynom  $g = \sum_{\nu=-n}^n d_\nu e^{i\nu x}$  mit

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

Es folgt sofort  $\|f - g\|_2 < \varepsilon$ . Da in einem euklidischen Vektorraum nach ?? die orthogonale Projektion eines Vektors auf einen endlichdimensionalen Teilraum stets die bestmögliche Approximation durch Vektoren dieses Teilraums ist, folgt für alle  $m \geq n$  erst recht

$$\left\| f - \sum_{\nu=-m}^m c_\nu e^{i\nu x} \right\|_2 < \varepsilon$$

Das zeigt die Behauptung im Fall  $f(0) = f(2\pi)$ . Im Fall  $f(0) \neq f(2\pi)$  müssen wir noch eine extra Verrenkung machen und zunächst eine stetige Funktion  $\tilde{f}$  finden mit  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$  sowie  $\|\tilde{f} - f\|_2 < \varepsilon$ . Dann gibt es wieder ein trigonometrisches Polynom  $g$  mit  $\|\tilde{f} - g\|_2 < \varepsilon$ , also  $\|f - g\|_2 < 2\varepsilon$ , und der Beweis kann wie zuvor zu Ende geführt werden.  $\square$

**Korollar 3.3.6.** Sei  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und seien  $c_\nu = \langle e^{i\nu x}, f \rangle$  seine Fourierkoeffizienten. So gilt  $\|f\|_2^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu|^2$ .

*Beweis.* Die Differenz  $\|f\|_2^2 - \sum_{\nu=-n}^n |c_\nu|^2$  ist das Quadrat des Ausdrucks, von dem wir gerade gezeigt haben, daß er gegen Null strebt.  $\square$

**Satz 3.3.7 (über die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe).** Gegeben  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar mit der Periode  $2\pi$  konvergiert die Fourierreihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ .

3.3.8. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch noch, wenn unsere Funktion nur "stückweise stetig differenzierbar" ist, wenn es also Punkte  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 2\pi$  gibt derart, daß die Einschränkung von  $f$  auf jedes der Intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  stetig differenzierbar ist. Die Details mag der Leser zur Übung selbst ausarbeiten.

*Beweis.* Die Fourier-Koeffizienten  $c_\nu = \langle e^{i\nu x}, f \rangle$  von  $f$  ergeben sich für  $\nu \neq 0$  aus den Fourier-Koeffizienten  $c'_\nu = \langle e^{i\nu x}, f' \rangle$  von  $f'$  durch partielles Integrieren zu

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\nu x} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(x) e^{-i\nu x}}{-i\nu} dx = \frac{-i c'_\nu}{\nu}$$

Jetzt gilt jedoch  $2|\alpha\beta| \leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2)$  für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  und es folgt

$$\sum_{\nu} |c_\nu| \leq |c_0| + \sum_{\nu \neq 0} \left( \frac{1}{\nu^2} + |c'_\nu|^2 \right) < \infty$$

Also konvergiert die Funktionenfolge  $\sum_{\nu=-n}^n c_\nu e^{i\nu x}$  gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $g$ . Natürlich konvergiert unsere Reihe erst recht auf jedem kompakten Intervall im quadratischen Mittel gegen diese Funktion  $g$ , aus 3.3.4 folgt also  $g = f$  und wir sind fertig.  $\square$

3.3.9. Fassen wir eine stetig differenzierbare  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  auf als eine Funktion auf dem Einheitskreis und nehmen sie reellwertig an, so gilt für ihre Fourier-Koeffizienten offensichtlich  $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$ . Sie können zum Beispiel in VIII.3.1 lernen, warum die Formel

$$P(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + c_{-\nu} \bar{z}^\nu$$

dann die eindeutig bestimmte “stabile Wärmeverteilung mit Randverteilung  $f$  auf der Einheitskreisscheibe” beschreibt. In diesem Zusammenhang hat Fourier, von dem erzählt wird, daß er häufig fröstelte, ursprünglich die heute nach ihm benannten Reihenentwicklungen gefunden und in seinem Werk “Théorie analytique de la chaleur” veröffentlicht.

# Kapitel IV

## Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Ableitungen in mehreren Veränderlichen . . . . .</b>	<b>349</b>
1.1	Partielle Ableitungen und Gradient . . . . .	349
1.2	Das Differential . . . . .	353
1.3	Die Kettenregel . . . . .	361
1.4	Weitere Ableitungsregeln . . . . .	363
1.5	Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen . . .	367
<b>2</b>	<b>Mehrfache Integrale und Ableitungen . . . . .</b>	<b>371</b>
2.1	Integration über kompakte Quader . . . . .	371
2.2	Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen . .	376
2.3	Rechnen mit Approximationen . . . . .	379
2.4	Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen .	382
<b>3</b>	<b>Wegintegrale . . . . .</b>	<b>388</b>
3.1	Vektorfelder und Kovektorfelder . . . . .	388
3.2	Gradienten in krummlinigen Koordinaten* . . . .	401
3.3	Wegintegrale . . . . .	407
3.4	Wegzusammenhang . . . . .	415
3.5	Homotopie von Wegen . . . . .	418
3.6	Rotation und Potential . . . . .	421
<b>4</b>	<b>Umkehrsatz und Anwendungen . . . . .</b>	<b>436</b>
4.1	Der Satz über die Umkehrabbildung . . . . .	436

4.2	Der Satz über implizite Funktionen . . . . .	444
4.3	Untermannigfaltigkeiten reeller Räume . . . . .	452
4.4	Die Transformationsformel . . . . .	464
4.5	Integration über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ .	475
<b>5</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>483</b>
5.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . .	483
5.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	495
5.3	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	501
5.4	Höhere Ableitungen ohne Koordinaten . . . . .	504
5.5	Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts . . .	506
<b>6</b>	<b>Maß und Integral . . . . .</b>	<b>511</b>
6.1	Maßräume und Maße . . . . .	511
6.2	Konstruktion des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$ . . . . .	518
6.3	Meßbare Abbildungen . . . . .	529
6.4	Das Integral von nichtnegativen Funktionen . . . .	535
6.5	Integrierbare Funktionen und ihr Integral . . . . .	542
6.6	Integration auf Produkträumen . . . . .	548
6.7	Regularität von Borelmaßen . . . . .	558
6.8	Rechnen mit dem Lebesgue-Integral . . . . .	560
6.9	Flächenmaß . . . . .	565
<b>7</b>	<b>Der Satz von Stokes . . . . .</b>	<b>570</b>
7.1	Multilineare Algebra und Dachprodukt . . . . .	570
7.2	Differentialformen höheren Grades . . . . .	575
7.3	Orientierung von Mannigfaltigkeiten . . . . .	580
7.4	Integration von Differentialformen: Theorie . . . .	583
7.5	Integration von Differentialformen: Praxis . . . . .	591
7.6	Äußere Ableitung von Differentialformen . . . . .	598
7.7	Berandete Untermannigfaltigkeiten . . . . .	604
7.8	Der Satz von Stokes . . . . .	612
7.9	Divergenz und Laplace in krummen Koordinaten*	626

---

# 1 Ableitungen in mehreren Veränderlichen

## 1.1 Partielle Ableitungen und Gradient

**Definition 1.1.1.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $p = (p_1, \dots, p_n) \in A$  ein Punkt. Wir nennen  $f$  **partiell differenzierbar bei  $p$  nach der  $i$ -ten Variablen** genau dann, wenn die Funktion  $x \mapsto f(p_1, \dots, p_{i-1}, x, p_{i+1}, \dots, p_n)$  differenzierbar ist bei  $x = p_i$ . Die Ableitung dieser Funktion heißt dann die  **$i$ -te partielle Ableitung** von  $f$  und wird notiert

$$(D_i f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{h}$$

1.1.2. Diese partiellen Ableitungen sind, soweit sie existieren, wieder reellwertige Funktionen auf  $A$ . Um  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  zu berechnen muß man sich nur vorstellen, alle  $x_j$  mit  $j \neq i$  seien Konstanten. Zum Beispiel berechnen wir die partiellen Ableitungen von  $f(x, y) = x \sin(xy)$  und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin(xy) + xy \cos(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cos(xy) \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt auch die Vorteile der Notation  $\frac{\partial}{\partial x}$  gegenüber der etwas exakteren Notation  $D_i$ , bei der man stets eine Reihenfolge der Variablen festlegen muß und schneller in Indizes ertrinkt. Im Fall, daß weder die Variablen noch die Funktion selbst bereits Indizes tragen, benutzt man auch die sehr konzise Schreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

*Ergänzung 1.1.3.* Allgemeiner definiert man ebenso auch partielle Ableitungen für Abbildungen  $f$  von einer offenen Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  in einen beliebigen normierten Vektorraum. Diese partiellen Ableitungen sind dann, soweit sie existieren, Abbildungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  von  $A$  in denselben normierten Vektorraum.

1.1.4. Ich will an einem Beispiel erläutern, aus welchem Grund man im Fall mehrerer Veränderlichen unsere bisherige Notation  $\frac{d}{dx}$  zu  $\frac{\partial}{\partial x}$  abändert. Denken wir uns einen Wanderer auf einer Wanderung durch die Alpen, bei der schlechtes Wetter aufkommt. Der Luftdruck  $D = D(t, h)$  hängt dann sowohl von der Zeit als auch von der Höhe ab. Macht unser Wanderer zum Zeitpunkt  $t = t_0$  in der Höhe  $h = h_0$  eine Pause, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate  $\frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h_0)$ . Geht er jedoch zum Zeitpunkt  $t = t_0$  bergab oder bergauf und gibt die Funktion  $h(t)$  seine Höhe zum Zeitpunkt



Veranschaulichen wir uns eine reellwertige Funktion von zwei reellen Veränderlichen durch ihren Graphen, eine “hügelige Landschaft”, im Bild etwa  $f(x, y) = \frac{1}{2} \sin((1 - y)x)$ , so mag man sich die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x}$  an einer Stelle denken als die Steigung an besagter Stelle einer Straße, die besagte hügeliger Landschaft in Richtung der  $x$ -Achse durchquert. Zum Beispiel wäre diese partielle Ableitung an der Stelle  $(0, 1/2)$  in unserem Fall die Steigung der gestrichelt eingezeichneten Straße an ihrem Beginn auf der  $y$ -Achse.

$t$  an, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (D(t, h(t)))$ . Wir werden zeigen, daß sich diese Rate auch ausdrücken läßt in der Gestalt  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (D(t, h(t))) = \frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h(t_0)) + h'(t_0) \frac{\partial D}{\partial h}(t_0, h(t_0))$ . In Kurzschreibweise gilt also

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{dh}{dt} \frac{\partial D}{\partial h}$$

Der Zweck der Variation unserer Notation liegt nun eben darin, daß mit ihr solche Verkürzungen verständlich bleiben. Um die behauptete Formel zu beweisen, führen wir den Begriff des Differential ein, studieren seinen Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen und erhalten unsere Formel als Korollar 1.5.4 der Kettenregel für Differentiale.

**Definition 1.1.5.** Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf ganz  $A$  nach jeder der  $n$  Variablen partiell differenzierbare Funktion, so definieren wir den **Gradienten** von  $f$  als die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{grad } f : A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^\top \end{aligned}$$

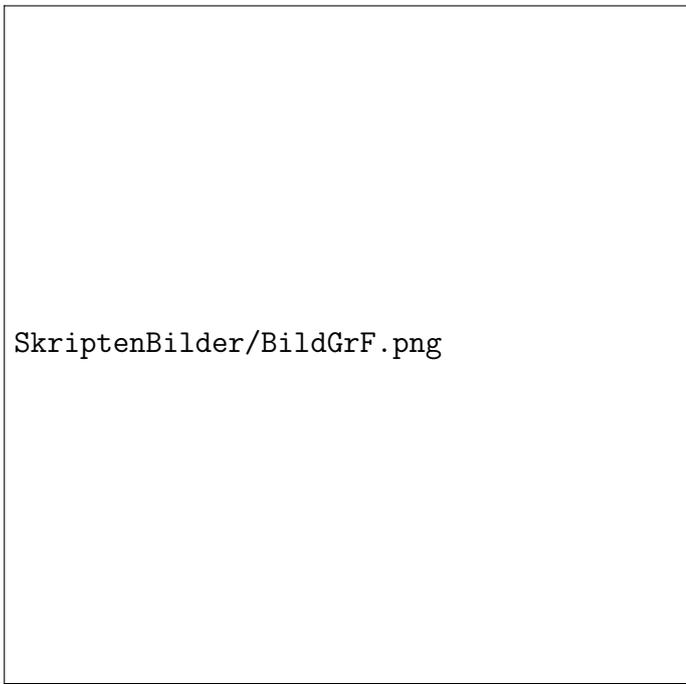
1.1.6. Man beachte, daß in dieser Definition das Symbol  $x$  für ein Element des  $\mathbb{R}^n$  steht und nicht wie zuvor für eine reelle Zahl. Ich stelle mir  $\text{grad } f$  meist vor als ein Vektorfeld, das also jedem Punkt aus  $A$  einen Vektor aus dem  $\mathbb{R}^n$  zuordnet. Das ist auch der Grund dafür, daß ich in obiger Definition den Zeilenvektor in einen Spaltenvektor transponiert habe. Denken wir uns im Fall  $n = 2$  den Graphen von  $f$  als eine Hügellandschaft, so zeigt  $\text{grad } f$  stets in die Richtung, in der es am steilsten den Berg hinaufgeht, und ist desto länger, je steiler es hinaufgeht. Diese Anschauung wird durch Bemerkung 1.5.6 formalisiert.

1.1.7. Der Begriff des Gradienten ist nur für reellwertige Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  sinnvoll. Bereits reellwertigen Funktionen auf abstrakten endlichdimensionalen reellen Vektorräumen kann nicht mehr sinnvoll ein Gradient in Gestalt eines Vektorfeldes zugeordnet werden. Ich vermeide deshalb im folgenden nach Möglichkeit den Begriff des Gradienten und arbeite stattdessen mit den sogenannten "Differentialen", die in sehr viel größerer Allgemeinheit sinnvoll sind. Die Beziehung zwischen Differentialen und Gradienten wird in 1.2.7 und 3.2.6 besprochen.

*Übung 1.1.8.* Sei  $R(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j$  ein Polynom in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ . Man zeige: Gibt es eine nichtleere offene Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  derart, daß gilt  $R(p) = 0 \forall p \in A$ , so ist  $R$  das Nullpolynom, in Formeln  $c_{ij} = 0 \forall i, j$ .



SkriptenBilder/BildNiL.png



SkriptenBilder/BildGrF.png

Einige Niveaulinien und das Gradientenfeld eines Hügels, hier  
möglicherweise der Funktion  $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2-y^2}$  auf der Kreisscheibe  
 $x^2+y^2 < \frac{1}{2}$ .

## 1.2 Das Differential

1.2.1. Wir werden es vorerst nur mit endlichdimensionalen normierten Vektorräumen zu tun haben. Ich arbeite dennoch hier und im folgenden mit beliebigen normierten Vektorräumen, weil das zum Ersten in keiner Weise schwieriger ist, weil es zum Zweiten einen größeren Abstand zum unübersichtlichen Gestrüpp der Koordinaten schafft, und weil es zum Dritten bei unserer Behandlung von Differentialgleichungen 5.5.2 in dieser Allgemeinheit gebraucht wird. Noch natürlicher wäre es, mit Abbildungen zwischen affinen Räumen  $X, Y$  im Sinne von II.6.8.2 zu arbeiten, deren Richtungsräume  $\vec{X}, \vec{Y}$  jeweils mit einer Norm versehen sind, und das Differential als eine lineare Abbildung zwischen diesen Richtungsräumen zu erklären. Ich werde diesen Gesichtspunkt im folgenden nur andeuten, indem ich schlicht von "normierten Räumen" rede und Symbole ohne Pfeil schreibe, wenn man ebensogut affine Räume mit normiertem Richtungsraum betrachten könnte, Symbole dahingegen mit Pfeil schreibe, wenn der zugehörige Richtungsraum gemeint ist.

**Definition 1.2.2.** Seien  $X, Y$  normierte reelle Räume,  $A \subseteq X$  eine offene Teilmenge,  $f : A \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $p \in A$  ein Punkt. Genau dann heißt die Abbildung  $f$  **differenzierbar** oder genauer **Fréchet-differenzierbar bei  $p$** , wenn es eine stetige lineare Abbildung  $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$  gibt derart, daß gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - Lh}{\|h\|} = 0$$

1.2.3. Gleichbedeutend und vielleicht anschaulicher ist die Forderung, daß es eine stetige lineare Abbildung  $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$  und eine  $\vec{Y}$ -wertige Abbildung  $\varepsilon$  gibt mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  und

$$f(p+h) = f(p) + Lh + \|h\|\varepsilon(h)$$

Hier ist implizit mit zu verstehen, daß die Abbildung  $\varepsilon$  definiert sein soll auf der Menge aller  $h \in \vec{X}$  mit  $p+h \in A$ . Weil wir in der Definition fordern, daß  $L$  stetig sein soll, ist jede bei  $p$  differenzierbare Abbildung bei  $p$  auch stetig. Die Stetigkeit von  $L$  ist im übrigen auch notwendig für die Gültigkeit der Kettenregel 1.3.1. Die lineare Abbildung  $L$  ist eindeutig bestimmt wenn sie existiert, da man für beliebiges  $v \in \vec{X}$  durch Einsetzen von  $h = tv$  zur Formel

$$Lv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

gelangt. Diesen Grenzwert in  $\vec{Y}$  hinwiederum nennt man, wann immer er existiert, die **Richtungsableitung von  $f$  bei  $p$  in Richtung  $v$**  und kürzt

ihn ab mit  $(D_v f)(p)$ . Das  $D$  steht hier für englisch **directional derivative**. Anschaulich mißt diese Richtungsableitung im Fall  $Y = \mathbb{R}$ , wie schnell unsere Funktion wächst bzw. abnimmt, wenn wir von  $p$  aus in der Richtung  $v$  gehen. Es gilt allerdings zu beachten, daß unsere Richtungsableitung keineswegs nur von der Richtung des Vektors  $v$  abhängt, sondern durchaus auch von seiner Länge. Die lineare Abbildung  $L$  selbst heißt das **Differential von  $f$  bei  $p$**  und wird bezeichnet mit

$$L = d_p f$$

Es mag dem Verständnis helfen, statt  $h$  das Symbol  $\delta p$  zu verwenden. Dann liest sich unsere Definition des Differentials

$$f(p + \delta p) = f(p) + (d_p f)(\delta p) + \|\delta p\| \varepsilon(\delta p)$$

1.2.4. Sind  $X, Y$  bereits selbst normierte Vektorräume, so benutzt man in diesem Zusammenhang meist die kanonischen Identifikationen  $X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$  und  $Y \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$  um unser Differential an einer Stelle  $p$  schlicht als eine lineare Abbildung  $d_p f : X \rightarrow Y$  aufzufassen.

*Beispiel 1.2.5.* Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oder allgemeiner  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar existieren insbesondere unsere partiellen Ableitungen und sind gerade die Richtungsableitungen in Richtung der Einheitsvektoren  $e_i$ , in Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = (D_{e_i} f)(p)$$

Dasselbe gilt auch, wenn  $f$  nur auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert ist. Umgekehrt werden wir in 1.5.1 zeigen, wie man aus der Existenz *und Stetigkeit* der partiellen Ableitungen die Existenz des Differentials folgern kann.

1.2.6. Wenn das Differential  $d_p f$  existiert, so existieren insbesondere auch alle Richtungsableitungen und es gilt

$$(D_v f)(p) = (d_p f)(v)$$

für alle  $v \in \vec{X}$ . Nennen wir eine Abbildung einfach nur **differenzierbar**, so ist die Differenzierbarkeit an jeder Stelle gemeint. Die Ableitung oder genauer das Differential einer differenzierbaren Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist aber nun eine Abbildung  $U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ,  $p \mapsto d_p f$ . Für jede fest vorgegebene Stelle  $p \in U$  ist weiter die darstellende Matrix des Differentials  $d_p f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nach ?? die Matrix mit den Spaltenvektoren  $(d_p f)(\vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ . Hat unsere Abbildung also die Gestalt  $f = (f_1, \dots, f_m)$

SkriptenBilder/BildDPo.png

Dies Bild soll die Bedeutung des Differentials in der Anschauung einer Abbildung “als Abbildung” verdeutlichen. Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

wobei verwirrender Weise die Klammern  $(, )$  einmal ein offenes Intervall und dann wieder Elemente kartesischer Produkte andeuten. Ihr Differential wird beschrieben durch die Jacobi-Matrix

$$[df] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Insbesondere wird das Differential an der Stelle  $a = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$  beschrieben durch die Matrix

$$[d_p f] = \begin{pmatrix} 0 & -1\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pfeile im Bild sollen zeigen, daß das in der Tat diejenige lineare Abbildung  $L$  ist, für die für kleines  $h$  die Abbildung  $p + h \mapsto f(p) + Lh$  unsere Abbildung  $p + h \mapsto f(p + h)$  besonders gut approximiert.

mit Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so hat die darstellende Matrix der linearen Abbildung  $d_p f$  die Gestalt

$$[d_p f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt die **Jacobi-Matrix** unserer Abbildung. Wir denken uns in diesem Zusammenhang Vektoren stets als Spaltenvektoren und hätten etwas pedantisch wohl auch besser  $f = (f_1, \dots, f_m)^\top$  schreiben sollen, um das nocheinmal zu betonen. Für die Jacobi-Matrix findet man häufig auch die Notation

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

In der Literatur werden unsere differenzierbaren Abbildungen vielfach **total differenzierbar** genannt, um sie abzugrenzen von den **partiell differenzierbaren** Abbildungen, bei denen nur die Existenz aller partiellen Ableitungen gefordert wird. Unser Differential heißt in manchen Quellen auch das **totale Differential**. Wenn Ihnen die Identifikation von Matrizen mit linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  aus ?? und ?? einmal richtig in Fleisch und Blut übergegangen ist, werden Sie sich auch nicht daran stören, wenn wir einmal mit  $d_p f$  sowohl das Differential als auch die Jacobi-Matrix bezeichnen sollten, was leicht einmal vorkommen kann.

1.2.7. Im Spezialfall einer reellwertigen Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  definiert ist, ist die Jacobi-Matrix also eine Zeilenmatrix

$$[d_p f] = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

und kann auch als die “Transponierte des Gradienten” verstanden werden, der ja als Vektor in unseren Konventionen a priori als eine Spaltenmatrix aufzufassen ist. Im Fall des  $\mathbb{R}^n$  kann eben der Dualraum in natürlicher Weise mit dem Raum selber identifiziert werden, so daß wir die Linearform  $d_p f$  auch als einen Vektor auffassen können und die Zuordnung  $p \mapsto d_p f$  auch als das Vektorfeld, das wir bereits in 1.1.6 als Gradientenfeld kennengelernt haben. Im Fall eines abstrakten endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  und einer reellwertigen Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq V$  definiert ist, geht das jedoch nicht mehr. Die Zuordnung  $p \mapsto d_p f$  ist dann zwar, unter den entsprechenden Differenzierbarkeitsannahmen, immer noch eine sinnvoll definierte Abbildung  $U \rightarrow V^*$  von  $U$  in den Dualraum von  $V$ , eben das Differential unserer Abbildung  $f$ . Diese Abbildung kann aber

nicht mehr in natürlicher Weise mit einem Vektorfeld alias einer Abbildung  $U \rightarrow V$  identifiziert werden. Abbildungen  $U \rightarrow V^*$  für  $U \subseteq V$  heißen im übrigen “Kovektorfelder auf  $U$ ” und werden in 3.1.4 folgende noch ausführlich besprochen werden.

*Ergänzung 1.2.8.* Unser Differenzierbarkeitsbegriff ändert sich nicht, wenn wir die Normen auf  $\vec{X}$  und  $\vec{Y}$  durch äquivalente Normen ersetzen. Das kann man sich ohne große Mühe direkt überlegen, es wird aber auch formal aus der Kettenregel 1.3.1 folgen. Sind insbesondere  $X$  und  $Y$  endlichdimensional, so ist unser Differenzierbarkeitsbegriff unabhängig von der Wahl der Normen.

1.2.9. Die der Definition zugrundeliegende Eindeutigkeit des Differential von  $f$  bei  $p$  gilt nach II.6.9.12 auch dann noch, wenn wir vom Definitionsbereich  $A$  von  $f$  nur fordern, daß es eine nichtleere offene Teilmenge  $C \subseteq \vec{X}$  gibt mit  $p + [0, 1]C \subset A$ , wenn es also anschaulich gesprochen ein kleines Kegelchen mit Spitze in  $p$  gibt, das ganz in  $A$  liegt. Gibt es solch ein Kegelchen für alle  $p \in A$ , so nennen wir  $A$  eine **halboffene** Teilmenge von  $X$ . Dieser Begriff kommt in der Literatur sonst nicht vor, er scheint mir jedoch nützlich, da er hilft, Verkampungen bei der Definition der Differenzierbarkeit auf abgeschlossenen Halbräumen und dergleichen zu vermeiden. Diese Allgemeinheit hinwiederum benötigen wir bei der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf höhere Dimensionen in 7.8.1.

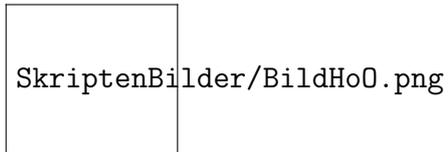
*Ergänzung 1.2.10.* Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine halboffene Teilmenge und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = (d_p f)(e_i)$$

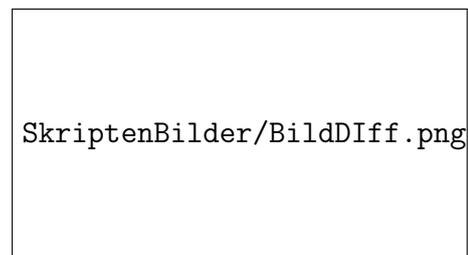
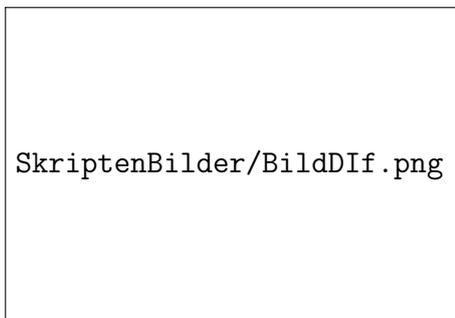
auch dann, wenn gewisse partielle Ableitungen bei  $p$  recht eigentlich gar nicht gebildet werden können, etwa weil die entsprechenden Geraden durch  $p$  die Menge  $A$  nur in  $p$  treffen.

*Beispiel 1.2.11.* Das Differential einer stetigen affinen Abbildung ist an jeder Stelle ihr linearer Anteil. Ist also in Formeln  $f : X \rightarrow Y$  gegeben durch  $f(v + h) = Lh + w$  mit einer stetigen linearen Abbildung  $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$  und  $v \in X$ ,  $w \in Y$  fest, so haben wir  $d_p f = L$  für alle  $p \in X$ . Insbesondere verschwindet das Differential einer konstanten Abbildung an jedem Punkt und das Differential einer stetigen linearen Abbildung ist an jedem Punkt die lineare Abbildung selbst.

*Beispiel 1.2.12.* Im allgemeinen kann man sich  $d_p f$  vorstellen als “den linearen Anteil der affinen Abbildung, die unsere Funktion in der Nähe der vorgegebenen Stelle bestmöglich approximiert” oder in anderen Worten als



Ein Kegelchen der Gestalt  $p + [0, 1]C$  in der Papierebene, für  $C$  die Menge aller Richtungsvektoren, die von  $p$  ins Innere der ellipsenförmigen Menge zeigen.



Anschauliche Bedeutung des Differential einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 1.2.12. Der Graph des Differential ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangente.



SkriptenBilder/Bilddpf.png

Anschauliche Bedeutung des Differentials einer reellwertigen Funktion von zwei reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 1.2.12. Der Graph des Differentials ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangentialebene. Der Wert des Differentials auf dem Vektor  $h$  ist etwa der im Bild durch eine geschweifte Klammer angedeutete Abstand oder noch genauer die zugehörige positive reelle Zahl.

“diejenige lineare Abbildung  $L$ , für die  $x \mapsto f(p) + L(x - p)$  unsere Funktion  $x \mapsto f(x)$  in der Nähe von  $p$  am besten approximiert”. Veranschaulichen wir uns zum Beispiel eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch ihren Graphen, eine hügelige Landschaft, so ist die “Tangentialebene” an unsere hügelige Landschaft im Punkt  $(p, f(p))$  im verschobenen Koordinatensystem mit Ursprung  $(p, f(p))$  gerade der Graph des Differentials  $d_p f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Beispiel 1.2.13.* Für  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow Y$  eine Abbildung von  $\mathbb{R}$  in einen normierten Raum  $Y$  wird unser  $d_p \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \vec{Y}$  gegeben durch Multiplikation mit dem Vektor  $\gamma'(p)$  aus II.7.2.1, wir haben also in Formeln

$$\gamma'(p) = (d_p \gamma)(1)$$

Später werden wir derlei Feinheiten meist ignorieren, die durch das Auswerten bei 1 gegebene kanonische Identifikation  $\text{Hom}(\mathbb{R}, \vec{Y}) \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$  nicht mehr explizit machen und schlicht  $\gamma'(p) = d_p \gamma$  schreiben. Bereits bei reellwertigen Funktionen  $f$  einer reellen Veränderlichen hätten wir die Differenzierbarkeit bei  $p$  mit Ableitung  $b$  auch dadurch charakterisieren können, daß gilt  $f(p+h) = f(p) + bh + |h|\varepsilon(h)$  für eine Funktion  $\varepsilon$ , die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Dort konnten wir die Betragstriche um  $h$  noch ohne Schaden weglassen. Ist jedoch  $h$  ein Vektor wie in unserer allgemeinen Situation, so sind die Betragstriche als da heißt das Bilden der Norm unumgänglich, schon allein, da wir ja im allgemeinen gar kein Produkt von Vektoren zur Verfügung haben.

*Beispiel 1.2.14.* Ist  $X$  ein eindimensionaler reeller Raum,  $x : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  ein Isomorphismus affiner Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine differenzierbare Abbildung in einen normierten Raum  $Y$  und  $p \in X$  ein Punkt, so erklären wir den **Differentialquotient bei  $p$**  durch die Vorschrift

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=p} = d_p f \circ (d_p x)^{-1}$$

Hier meint  $(d_p x)^{-1} : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \vec{X}$  die Umkehrabbildung zu  $d_p x : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  und unser Differentialquotient ist mithin eine lineare Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \vec{Y}$ , die wir meist vermittels der durch das Auswerten bei Eins gegebenen Identifikation schlicht als einen Vektor aus  $\vec{Y}$  auffassen. Ist  $x$  die Identität auf  $X = \mathbb{R}$ , so ist unser Differentialquotient nur eine andere Schreibweise für die Ableitung zum Zeitpunkt  $p$ . Die allgemeinere Definition zeigt jedoch, wie gut unsere neue Notation  $df$  für das Differential verträglich ist mit unserer alten Notation  $\frac{df}{dx}$  für die Ableitung.

*Ergänzung 1.2.15.* Ist insbesondere  $\mathbb{T}$  unsere Zeitachse aus ?? und  $\mathbb{E}$  unser Anschauungsraum aus ?? und  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$  die mathematische Beschreibung

der Flugbahn einer unsterblichen Fliege, eine differenzierbare Abbildung zwischen besagten reellen affinen Räumen, so ist das Differential dieser Abbildung zu einem festen Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  eine lineare Abbildung  $d_t \gamma : \vec{\mathbb{T}} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$ , die man als Element von  $\text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$  auffassen kann oder mit ?? auch als Element von  $\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ , das man dann die **vektorielle Geschwindigkeit** nennt. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist.

1.2.16. Für das Differential, das wir hier mit  $d_p f$  bezeichnen, findet man in der Literatur auch die Notationen  $(Df)(p)$  und  $f'(p)$ . Das vorstehenden Beispiel 1.2.14 erklärt, warum ich die Notation  $d_p f$  vorziehe. Einen zusätzlichen Grund findet man in 3.3.2: Dort wird erklärt, in welchem Sinne das Symbol  $dx$ , das wir bisher beim Integrieren nur benutzt haben, um die Integrationsvariable auszuzeichnen und die Substitutionsregel leichter zu erinnern, eigentlich das Differential der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$  bedeutet.

*Ergänzende Übung* 1.2.17. Das Differential bei der Nullmatrix der Exponentialabbildung  $\exp : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  ist die Identität, in Formeln gilt also  $d_0 \exp = \text{id} : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ . Man zeige das und zeige es allgemeiner auch für die Exponentialabbildung auf dem Raum der stetigen Endomorphismen eines beliebigen Banachraums, vergleiche II.7.5.23.

*Ergänzende Übung* 1.2.18. Eine Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist komplex differenzierbar bei  $p \in \mathbb{C}$  im Sinne von III.1.5.1 mit Ableitung  $f'(p) \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn so  $f$  bei  $p$  differenzierbar ist im Sinne von 1.2.2 und sein Differential  $d_p f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexlineare Abbildung. In diesem Fall ist das Differential von  $f$  gerade die Multiplikation mit seiner komplexen Ableitung  $f'(p)$  aus III.1.5.1, in Formeln  $d_p f = (f'(p) \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Analoges gilt, wenn  $f$  nur auf einer halboffenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  definiert ist.

### 1.3 Die Kettenregel

**Satz 1.3.1 (Kettenregel).** *Seien  $A, B, C$  halboffene Teilmengen normierter reeller Räume  $X, Y, Z$ . Seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  Abbildungen und  $p \in A$  ein Punkt derart, daß  $f$  differenzierbar ist bei  $p$  und  $g$  differenzierbar bei  $f(p)$ . So ist auch  $g \circ f$  differenzierbar bei  $p$  und es gilt*

$$d_p(g \circ f) = (d_{f(p)}g) \circ (d_p f)$$

1.3.2. Es ist anschaulich klar, daß die bestmögliche affine Approximation an die Verknüpfung  $g \circ f$  zweier Abbildungen  $f$  und  $g$  bei einer vorgegebenen Stelle  $p$  gerade die Verknüpfung der bestmöglichen affinen Approximation an  $f$  bei  $p$  mit der bestmöglichen affinen Approximation an  $g$  bei  $f(p)$  sein

muß. Die Kettenregel formalisiert diese Anschauung für die linearen Anteile unserer bestmöglichen affinen Approximationen.

1.3.3. Sind unsere drei normierten Räume  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$ , so bedeutet die Kettenregel die Identität der Jacobi-Matrizen

$$[d_p(g \circ f)] = [d_{f(p)}g] \circ [d_p f]$$

oder ausgeschrieben die Identität

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(g \circ f)_l}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial(g \circ f)_l}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(p)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(p)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1}(f(p)) & \dots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m}(f(p)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Beweis.* Zur Vereinfachung setzen wir  $q = f(p)$ ,  $L = d_p f$  und  $M = d_q g$  und haben

$$f(p+h) = f(p) + Lh + \|h\|\varepsilon(h)$$

$$g(q+j) = g(q) + Mj + \|j\|\eta(j)$$

für Abbildungen  $\varepsilon$  und  $\eta$ , die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir schreiben

$$f(p+h) = q + j(h)$$

mit  $j(h) = Lh + \|h\|\varepsilon(h)$  und erhalten durch Einsetzen

$$\begin{aligned} (g \circ f)(p+h) &= g(q + j(h)) \\ &= g(q) + Mj(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \\ &= (g \circ f)(p) + MLh + M\|h\|\varepsilon(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \end{aligned}$$

Wir sind fertig, sobald wir zeigen

$$\lim_{h \rightarrow 0} M\varepsilon(h) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|j(h)\|}{\|h\|} \eta(j(h)) = 0$$

Der erste Grenzwert ergibt sich mühelos,  $h \mapsto M\varepsilon(h)$  ist eben auch stetig bei  $h = 0$  und nimmt dort den Wert Null an. Um den zweiten Grenzwert zu berechnen, schätzen wir erst ab  $\|j(h)\| \leq \|h\|(\|L\| + \|\varepsilon(h)\|)$  und dann

$$\frac{\|j(h)\|}{\|h\|} \|\eta(j(h))\| \leq (\|L\| + \|\varepsilon(h)\|) \|\eta(j(h))\|$$

Die rechte Seite ist wieder stetig bei  $h = 0$  und nimmt dort den Wert Null an, gleichbedeutend strebt sie also für  $h \rightarrow 0$  gegen Null, und nach dem Quetschlemma II.6.6.13 strebt dann die linke Seite erst recht gegen Null.  $\square$

1.3.4. Speziell liefert die Kettenregel für stetiges lineares  $M = g$  die Formel  $d_p(M \circ f) = M \circ (d_p f)$ , noch spezieller folgt  $d_p(\lambda f) = \lambda(d_p f)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Übung 1.3.5.* Seien  $X, Y$  normierte reelle Räume. Sei  $A \subset X$  halboffen und  $f : A \rightarrow Y$  differenzierbar. Liegt für zwei Punkte  $p, q \in A$  das ganze verbindende Geradensegment  $[p, q]$  in  $A$  und ist die Operatornorm des Differential von  $f$  auf  $[p, q]$  beschränkt durch eine Konstante  $K$ , in Formeln  $\|d_x f\| \leq K \forall x \in A$ , so gilt  $\|f(p) - f(q)\| \leq K\|p - q\|$ . Hinweis: II.7.2.11.

## 1.4 Weitere Ableitungsregeln

**Proposition 1.4.1 (Komponentenregel).** *Seien  $X, Y_1, Y_2$  normierte Räume,  $A \subset X$  eine halboffene Teilmenge und  $f = (f_1, f_2) : A \rightarrow Y_1 \times Y_2$  eine Abbildung. Genau dann ist  $f$  differenzierbar bei  $p \in A$ , wenn  $f_1$  und  $f_2$  es sind, und dann gilt für die Differentiale die Formel*

$$d_p f = (d_p f_1, d_p f_2) : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}_1 \times \vec{Y}_2$$

1.4.2. Man beachte, daß  $(d_p f_1, d_p f_2)$  in Matrixschreibweise unter unseren Konventionen ??, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen wäre.

*Beweis.* Die Projektionen  $\text{pr}_i : X \rightarrow Y_i$  sind stetig und linear. Ist  $f$  differenzierbar bei  $p$ , so sind damit nach der Kettenregel auch die  $f_i = \text{pr}_i \circ f$  differenzierbar bei  $p$  und die Kettenregel liefert zusätzlich  $d_p f_i = d_{f(p)} \text{pr}_i \circ d_p f = \text{pr}_i \circ d_p f$ , also  $d_p f = (d_p f_1, d_p f_2)$ . Sind umgekehrt  $f_1$  und  $f_2$  differenzierbar bei  $p$  mit Differentialen  $L_1$  und  $L_2$ , so können wir nach Definition schreiben

$$f_i(p+h) = f_i(p) + L_i h + \|h\| \varepsilon_i(h)$$

für geeignete Abbildungen  $\varepsilon_i$ , die stetig sind bei Null und die dort den Wert  $\varepsilon_i(0) = 0$  annehmen. Setzen wir  $L = (L_1, L_2)$  und  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , so ist  $L$  stetig linear und  $\varepsilon$  stetig bei 0 mit Funktionswert  $\varepsilon(0) = 0$  und es gilt

$$f(p+h) = f(p) + Lh + \|h\| \varepsilon(h)$$

Das bedeutet aber genau, daß  $f$  differenzierbar ist bei  $p$  mit Differential  $d_p f = L$ .  $\square$

1.4.3. Mit Induktion folgt die analoge Aussage für eine Abbildung  $f : A \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$  in ein längeres kartesisches Produkt normierter Räume. Insbesondere ist eine Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar bei  $p \in A$  genau dann, wenn alle  $f_j$  es sind, und in diesem Fall gilt für die Differentiale die Formel

$$d_p f = (d_p f_1, \dots, d_p f_m) : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Wieder ist hier  $(d_p f_1, \dots, d_p f_m)$  gemäß unseren Konventionen, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen.

**Korollar 1.4.4 (Summenregel).** *Seien  $X$  ein normierter Raum,  $\vec{Y}$  ein normierter Vektorraum und  $A \subseteq X$  eine halboffene Teilmenge. Sind  $f, g : A \rightarrow \vec{Y}$  differenzierbar bei  $p \in A$ , so ist auch  $f + g : A \rightarrow \vec{Y}$  differenzierbar bei  $p$  und es gilt*

$$d_p(f + g) = d_p f + d_p g$$

*Beweis.* Die Addition  $+: \vec{Y} \times \vec{Y} \rightarrow \vec{Y}$ ,  $(w, w') \mapsto w + w'$  ist linear und stetig, und wir können  $f + g$  schreiben als die Verknüpfung  $f + g = + \circ (f, g)$ . Das Differential von  $f + g$  an der Stelle  $p$  ergibt sich also mit der Kettenregel zu  $d_p(f + g) = + \circ (d_p f, d_p g) = d_p f + d_p g$ .  $\square$

**Proposition 1.4.5 (Differential bilinearer Abbildungen).** *Seien  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  normierte Vektorräume und sei  $\varphi : \vec{X} \times \vec{Y} \rightarrow \vec{Z}$ ,  $(v, w) \mapsto \varphi(v, w)$  eine stetige bilineare Abbildung. So ist  $\varphi$  differenzierbar und das Differential von  $\varphi$  im Punkt  $(p, q)$  ist die lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} d_{(p,q)}\varphi : \vec{X} \times \vec{Y} &\rightarrow \vec{Z} \\ (h, k) &\mapsto \varphi(h, q) + \varphi(p, k) \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir rechnen

$$\varphi(p + h, q + k) = \varphi(p, q) + \varphi(h, q) + \varphi(p, k) + \varphi(h, k)$$

und müssen nur noch  $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varphi(h, k) / \|(h, k)\| = 0$  zeigen. Das folgt aber mit [II.6.9.25](#) aus der Stetigkeit von  $\varphi$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 1.4.6.* Man zeige, daß auch im Kontext normierter Vektorräume stetige multilineare Abbildungen stets differenzierbar sind, und gebe ein zur Produktregel [1.4.5](#) analoge Formel für deren Differential. Hinweis: [II.6.9.18](#).

*Beispiel 1.4.7.* Die Leibnizregel II.4.2.1 können wir aus der Kettenregel für Differentiale herleiten wie folgt: Gegeben  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir das Produkt  $fg$  als die Verknüpfung  $fg = \text{mult} \circ (f, g)$  der Funktion  $(f, g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit der Multiplikation  $\text{mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind  $f$  und  $g$  differenzierbar bei  $t \in \mathbb{R}$ , so nach der Komponentenregel auch ihre Zusammenfassung  $(f, g)$ , und deren Jacobi-Matrix ist die Spaltenmatrix  $[d_t(f, g)] = (f'(t), g'(t))^T$ . Andererseits ist die Multiplikation differenzierbar als stetige bilineare Abbildung oder auch nach 1.5.1 wegen der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen und ihr Differential bei  $(x, y)$  hat als Jacobi-Matrix die Zeilenmatrix  $[d_{(x,y)} \text{mult}] = (y, x)$ . Mit der Kettenregel in mehreren Veränderlichen folgt dann

$$\begin{aligned} (fg)'(t) &= [d_t(f \circ g)] \\ &= [d_{(f(t), g(t))} \text{mult}] \circ [d_t(f, g)] \\ &= (g(t), f(t)) \circ (f'(t), g'(t))^T \\ &= g(t)f'(t) + f(t)g'(t) \end{aligned}$$

**Korollar 1.4.8.** *Seien  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$  und  $B : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m \times k; \mathbb{R})$  differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt  $AB : t \mapsto A(t)B(t)$  differenzierbar und die Geschwindigkeit  $(AB)'$  der Produktfunktion  $AB : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$  wird gegeben durch die Formel*

$$(AB)' = A'B + AB'$$

1.4.9. Das sollten Sie zur Übung schon in Koordinaten nachgerechnet haben. Der hier gegebene Beweis ist komplizierter und dient in erster Linie nicht der Herleitung des Resultats, sondern vielmehr der Illustration unserer allgemeinen Regeln durch ein übersichtliches Beispiel. Man beachte jedoch auch, wie unübersichtlich dieses Beispiel wird, sobald wir versuchen, statt mit abstrakten Differentialen mit Jacobi-Matrizen zu arbeiten.

*Beweis.* Die Matrixmultiplikation ist eine stetige bilineare Abbildung

$$\text{Mult} : \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(m \times k; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$$

und wir können  $AB$  schreiben als die Verknüpfung  $AB = \text{Mult} \circ (A, B)$ . Mit der Kettenregel und der Komponentenregel ergibt sich

$$d_t(AB) = (d_{(A(t), B(t))} \text{Mult}) \circ (d_t A, d_t B)$$

Wenden wir diese lineare Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$  an auf  $1 \in \mathbb{R}$ , so erhalten wir mit 1.4.5 wie gewünscht

$$\begin{aligned} (AB)'(t) &= d_t(AB)(1) \\ &= (d_{(A(t), B(t))} \text{Mult})(A'(t), B'(t)) \\ &= A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \quad \square \end{aligned}$$

*Übung 1.4.10.* Sei  $\text{inv} : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  das Invertieren von Matrizen,  $\text{inv}(X) = X^{-1}$ . Man zeige für das Differential des Invertierens bei der Einheitsmatrix  $I$  die Formel  $d_I \text{inv} : H \mapsto -H$ . Man zeige allgemeiner, daß das Differential dieser Abbildung am Punkt  $P$  in Verallgemeinerung der Ableitungsregel für  $x \mapsto 1/x$  gegeben wird durch

$$\begin{aligned} d_P \text{inv} : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \\ H &\mapsto -P^{-1}HP^{-1} \end{aligned}$$

Hinweis: Man zeige erst, daß  $\text{inv}$  differenzierbar ist. Dann nehme man in der Gleichung  $\text{inv}(X)X = I$  auf beiden Seiten das Differential an der Stelle  $P$ .

*Übung 1.4.11.* Gegeben ein Banachraum  $V$  bilden die invertierbaren Elemente von  $\mathcal{B}(V)$  eine offene Teilmenge und das Invertieren ist darauf differenzierbar mit Differential  $d_P \text{inv} : H \mapsto -P^{-1}HP^{-1}$ . Hinweis: Man beachte, daß für alle Endomorphismen von  $V$  der Norm  $< 1$  gilt

$$(I - H)(I + H + H^2 + H^3 \dots) = I$$

wobei [II.7.5.9](#) und [II.7.5.11](#) die Konvergenz sicherstellen. Diese Übung verallgemeinert die vorhergehende Übung [1.4.10](#). Wir werden dies Resultat noch in [5.4.8](#) im Zusammenhang mit Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen brauchen.

*Ergänzende Übung 1.4.12.* Sei  $B \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  fest. Das Differential der Abbildung  $\psi : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  gegeben durch  $A \mapsto ABA^{-1}$  bei der Einheitsmatrix ist die lineare Abbildung  $H \mapsto HB - BH$ .

*Ergänzende Übung 1.4.13.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und  $W \subset \text{End } V$  ein Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus paarweise kommutierenden Abbildungen besteht, zeige man für das Differential von  $\exp : W \rightarrow \text{End } V$  bei  $A \in W$  die Formel  $d_A \exp = (\cdot \exp A) : W \rightarrow \text{End } V$ . Idem für  $V$  ein Banachraum und  $\mathcal{B}(V)$  statt  $\text{End } V$ . Eine allgemeine Formel für das Differential von  $\exp : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$  wird in [2.1.15](#) diskutiert.

*Ergänzende Übung 1.4.14.* Sei  $V$  ein Banachraum und  $A \in \mathcal{B}(V)$  ein stetiger Endomorphismus von  $V$  der Norm  $\|A\| < 1$ . Man zeige, daß das formale Einsetzen von  $A$  in die Taylorreihe von  $\log(1 + x)$ , als da heißt, die Reihe

$$A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots$$

gegen einen Endomorphismus  $B \in \mathcal{B}(V)$  mit der Eigenschaft  $\exp(B) = I + A$  konvergiert. Hinweis: Man berechne unter Verwendung von [1.4.13](#) die Ableitung der Abbildung  $f : t \mapsto \exp(tA - \frac{t^2 A^2}{2} + \frac{t^3 A^3}{3} - \dots)$  und die Ableitung der Abbildung  $t \mapsto f(t)(I + tA)^{-1}$  und zeige, daß letztere Funktion konstant ist. Ein besser verallgemeinerbares Argument findet man in [VIII.1.7.17](#).

*Ergänzende Übung 1.4.15 (Inversionen sind konforme Abbildungen).* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Die auf dem Komplement  $\{v \in V \mid \langle v, v \rangle \neq 0\}$  des Lichtkegels erklärte Abbildung  $f : v \mapsto v/\langle v, v \rangle$  heißt dann in Verallgemeinerung von ?? eine **Inversion**. Man zeige für das Differential von  $f$  bei  $v$  die Formel

$$(d_v f)(h) = \frac{h}{\langle v, v \rangle} - \frac{2\langle h, v \rangle v}{\langle v, v \rangle^2}$$

und folgere  $\langle (d_v f)(h), (d_v f)(k) \rangle = \langle h, k \rangle / \langle v, v \rangle^2$  für alle  $h, k$ . In Worten erhält  $d_v f$  also für alle  $v$  unsere Bilinearform bis auf einen von Null verschiedenen skalaren Faktor. Abbildungen  $f$  mit dieser Eigenschaft heißen **konforme Abbildungen**, deshalb die Überschrift.

## 1.5 Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen

**Proposition 1.5.1.** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow Y$  eine Abbildung von  $U$  in einen normierten Raum  $Y$ . Existieren alle partiellen Ableitungen und sind stetig als Abbildungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \vec{Y}$ , so ist die Abbildung  $f$  differenzierbar.*

*Ergänzung 1.5.2.* Seien  $X, Y$  normierte reelle Räume,  $A \subset X$  eine halboffene Teilmenge und  $f : A \rightarrow Y$  eine Abbildung. Genau dann heißt die Abbildung  $f$  **stetig differenzierbar**, wenn  $f$  differenzierbar ist und wenn zusätzlich die Abbildung  $p \mapsto d_p f$  von  $A$  in den Raum der stetigen linearen Abbildungen  $\mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Y})$  mit seiner Operatornorm aus II.6.9.27 stetig ist. Aus den Voraussetzungen der Proposition 1.5.1 folgt mit demselben Beweis unmittelbar, daß  $f$  sogar stetig differenzierbar ist.

*Ergänzende Übung 1.5.3.* Eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , deren sämtliche Richtungsableitungen überall existieren, die jedoch im Ursprung nicht total differenzierbar ist, kann man wie folgt erhalten: Man wählt eine  $2\pi$ -periodische stetig differenzierbare Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $g(x + \pi) = -g(x)$ , die nicht identisch Null ist, und setzt  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = rg(\theta)$  für  $r > 0$  und  $f(0, 0) = 0$ . Dann hängen insbesondere die Richtungsableitungen am Ursprung gar nicht linear vom Richtungsvektor ab.

*Beweis.* Es gilt, an jeder Stelle  $p \in U$  die totale Differenzierbarkeit zu zeigen. Indem wir zu  $f$  eine geeignete Konstante sowie eine geeignete lineare Abbildung addieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt  $f(p) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i$ . Unter diesen zusätzlichen Annahmen müssen wir nun zeigen, daß  $f$  total differenzierbar ist bei  $p$  mit

Differential Null. Indem wir vor  $f$  eine geeignete Verschiebung davorschalten, dürfen wir zusätzlich auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p = 0$  annehmen. Gegeben eine offene konvexe Umgebung  $C \subseteq \vec{Y}$  des Nullvektors von  $\vec{Y}$  finden wir nun sicher  $\delta > 0$  derart, daß alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  auf dem Ball  $B(0; \delta)$  nur Werte in  $C$  annehmen und daß dieser Ball ganz in  $U$  enthalten ist. Aus dem Schrankensatz II.7.2.11 folgt für  $|h| < \delta$  schon  $f(h_1, \dots, h_{i-1}, h_i, 0, \dots, 0) - f(h_1, \dots, h_{i-1}, 0, 0, \dots, 0) \in h_i C$  und insgesamt

$$f(h) - f(0) \in (h_1 + \dots + h_n)C$$

und für  $h \neq 0$  also  $f(h)/|h| \in nC$ . Damit ergibt sich  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/|h| = 0$  wie gewünscht.  $\square$

**Korollar 1.5.4.** *Seien  $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Abbildungen und sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar. So ist die durch die Vorschrift  $t \mapsto F(x_1(t), \dots, x_n(t))$  gegebene Abbildung differenzierbar und ihre Ableitung an der Stelle  $t = a$  wird unter Verwendung der Abkürzung  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  gegeben durch die Formel*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} F(x(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)) \frac{dx_1}{dt}(a) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \frac{dx_n}{dt}(a)$$

1.5.5. Natürlich gilt die Aussage auch dann noch, wenn unsere Funktionen  $x_i$  auf einem echten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert sind und  $F$  auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , solange nur  $x(t)$  stets im Definitionsbereich von  $F$  liegt. Man schreibt diese Formel meist etwas salopp in der Form

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

*Beweis.* Wir betrachten  $x$  als eine Abbildung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nach Definition ist  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} F(x_1(t), \dots, x_n(t)) = (d_a(F \circ x))(1)$  der einzige Eintrag in der Matrix der linearen Abbildung  $d_a(F \circ x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mit der Kettenregel finden wir nun

$$\begin{aligned} d_a(F \circ x) &= d_{x(a)}F \circ d_a x \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \right) \left( \frac{dx_1}{dt}(a), \dots, \frac{dx_n}{dt}(a) \right)^\top \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)) \frac{dx_1}{dt}(a) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \frac{dx_n}{dt}(a) \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile das Produkt einer Zeilenmatrix mit einer Spaltenmatrix zu verstehen ist, wie der obere Index  $\top$  andeutet.  $\square$

1.5.6. Für die Richtungsableitung  $(D_v f)(p)$  einer differenzierbaren reellwertigen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  am Punkt  $p$  in Richtung  $v$  erhalten wir speziell

$$(D_v f)(p) = (d_p f)(v) = \langle (\text{grad } f)(p), v \rangle$$

Insbesondere wird die Richtungsableitung bei  $p$  in Richtung eines Vektors  $v$  der Länge Eins maximal genau dann, wenn der Gradient von  $f$  ein nichtnegatives Vielfaches von  $v$  ist.

*Ergänzende Übung 1.5.7.* Man zeige, daß die komplexe Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar ist mit Differential

$$d_z \exp = (\exp z) \cdot : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

*Ergänzende Übung 1.5.8.* Man zeige, daß  $\det : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist, und daß das Differential der Abbildung  $\det$  an der Einheitsmatrix  $I$  die Spur  $\text{tr}$  ist, in Formeln

$$d_I \det = \text{tr} : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Für das Differential von  $\det$  an einer beliebigen Stelle  $P$  zeige man die Formel  $(d_P \det)(H) = \text{tr}((\det P)P^{-1}H)$ . Hier meint  $(\det P)P^{-1}$  den Wert bei  $P$  der stetigen Fortsetzung der Abbildung  $P \mapsto (\det P)P^{-1}$  vom Raum der invertierbaren Matrizen auf den Raum aller Matrizen alias die "adjungierte Matrix"  $P^\#$  aus ???. Hinweis: Man mag mit 1.4.6 arbeiten, oder auch mit partiellen Ableitungen. Erinnerung: Die Spur einer Matrix ist die Summe der Einträge auf der Diagonalen.

*Ergänzende Übung 1.5.9.* Jede stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der Hyperebene  $0 \times \mathbb{R}^n$  oder einer offenen Teilmenge des Halbraums  $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^n$  läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n+1}$  fortsetzen.

*Ergänzende Übung 1.5.10 (Differential über partielle Ableitungen).* Seien  $X, Y, Z$  normierte Räume,  $U \subseteq X$  sowie  $V \subseteq Y$  offene Teilmengen und  $f : U \times V \rightarrow Z$  eine Abbildung. Wir betrachten für alle  $x \in U$  die Einbettung  $j_x : V \rightarrow U \times V$ ,  $y \mapsto (x, y)$  und für alle  $y \in V$  die Einbettung  $i_y : U \rightarrow U \times V$ ,  $x \mapsto (x, y)$ . Existieren für alle  $p = (x, y) \in U \times V$  die Differentiale  $d_x(f \circ i_y) : \vec{X} \rightarrow \vec{Z}$  und  $d_y(f \circ j_x) : \vec{Y} \rightarrow \vec{Z}$  und sind stetig als Funktionen  $U \times V \rightarrow \mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Z})$  bzw.  $U \times V \rightarrow \mathcal{B}(\vec{Y}, \vec{Z})$ , so ist die Abbildung  $f$  differenzierbar mit Differential

$$d_p f : (v, w) \mapsto (d_x(f \circ i_y))(v) + (d_y(f \circ j_x))(w)$$

Hinweis: Man kopiere mutatis mutandis den Beweis von 1.5.1. Mutige mögen umgekehrt 1.5.1 aus dem Ergebnis dieser Übung ableiten durch vollständige Induktion über  $n$ .

*Ergänzung* 1.5.11. Oft werden auch partielle Ableitungen in größerer Allgemeinheit verwendet als in unserer Definition 1.1.1. Sind genauer  $X_1, \dots, X_n$  eindimensionale reelle Räume und ist  $E$  ein normierter reeller Raum und  $U \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow E$  eine Abbildung, so bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

auch das “Differential der Restriktion auf  $X_i$  bei festen anderen Variablen”, eine Abbildung  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \text{Hom}(\vec{X}_i, \vec{E})$ . Unter der Identifikation des Richtungsraums unseres Produkts  $X_1 \times \dots \times X_n$  mit dem Produkt der Richtungsräume und des Raums Homomorphismen von dort nach  $\vec{E}$  mit dem Produkt der Homomorphismenräume haben wir dann

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \mid \dots \mid \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Im Fall  $E = \mathbb{R}^m$  erhalten wir speziell wieder unsere Jacobi-Matrix als eine Zeilenmatrix von Spaltenvektoren.

## 2 Mehrfache Integrale und Ableitungen

Da es mir leichter fällt, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge anschaulich zu begründen als die Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen, bespreche ich nun einige Grundtatsachen zur Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

### 2.1 Integration über kompakte Quader

**Definition 2.1.1.** Ein Produkt von  $n$  Intervallen in  $\mathbb{R}^n$  nennen wir einen **Quader**. Ist  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  ein nichtleerer kompakter Quader und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so definieren wir das **Integral** von  $f$  über  $Q$ , eine reelle Zahl  $\int_Q f \in \mathbb{R}$ , durch die Formel

$$\int f = \int_Q f = \int_{a_n}^{b_n} \left( \dots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

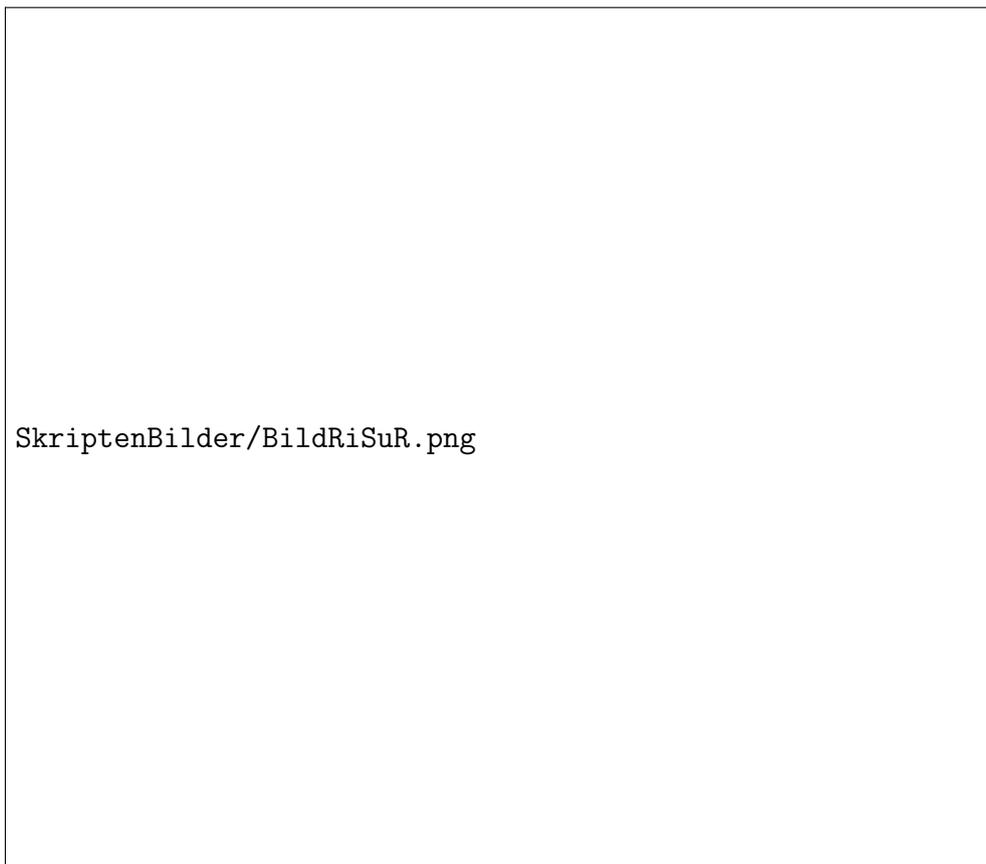
2.1.2. Proposition II.6.11.1 zeigt, daß in dieser Definition alle Integranden stetig vom Integrationsparameter abhängen, so daß alle unsere Integrale definiert sind. Aus den Eigenschaften des Integrals von Funktionen einer reellen Veränderlichen folgt sofort  $\int(f + g) = \int f + \int g$ ,  $\int(\lambda f) = \lambda \int f$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ , insbesondere auch  $|\int f| \leq \int |f|$ . Bezeichnet  $\text{vol } Q = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$  das Volumen des Quaders  $Q$ , so erhalten wir für eine konstante Funktion  $c$  das Integral  $\int_Q c = c \text{ vol } Q$ .

2.1.3. Für  $n = 2$  bedeutet  $\int f$  anschaulich den Rauminhalt zwischen dem Graphen der Funktion  $f$  und der  $xy$ -Ebene, wobei Rauminhalte unterhalb der  $xy$ -Ebene negativ zu zählen sind. Diese Anschauung wird im folgenden formal gerechtfertigt.

*Ergänzung 2.1.4.* In derselben Weise erklären wir von III.1.3.3 und III.1.3.10 ausgehend auch das Integral einer stetigen Abbildung von einem kompakten Quader in einen Banachraum. Es ist dann ein Vektor aus besagtem Banachraum, und die im Rest dieses Abschnitts erklärten Regeln gelten in diesem Fall entsprechend. Der Beweis der Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge muß allerdings umgeschrieben werden, das mag eine gute Übung abgeben.

**Definition 2.1.5.** Sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader alias ein **Rechteck** und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Bezeichne  $\text{vol } Q = (b - a)(d - c)$  die Fläche von  $Q$ . Für  $r \geq 1$  definieren wir die  $r$ -te **Riemannsumme**  $S^r(f)$  von  $f$  wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$$



Die vierte Riemannsumme der Funktion  $f(x, y) = (x + y)/2$  auf dem Einheitsquadrat mag man sich als das Volumen des hier gezeichneten räumlichen Gebildes denken.

$$c = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_r = d$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten eine Unterteilung unseres Rechtecks in  $r^2$  kleine Rechtecke  $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$  mit Flächeninhalt  $(\text{vol } Q)/r^2$ , und setzen

$$S^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j) \frac{\text{vol } Q}{r^2} = \text{vol } Q \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j)$$

**Proposition 2.1.6.** *It  $Q \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so ist das Integral von  $f$  über  $Q$  der Grenzwert unserer Riemannsummen, in Formeln*

$$\int_Q f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

*Beweis.* Wir definieren Unter- und Obersummen durch

$$\underline{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \inf f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2} \quad \text{und} \quad \bar{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \sup f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Bei den Untersummen lassen wir etwa auf unseren kleinen Quadern  $Q_{i,j}$  Türmchen hochwachsen, bis sie am Graphen unserer Funktion anstoßen, und bilden die Summe der Volumina aller dieser Türmchen, und bei der Obersumme nehmen wir entsprechend die kleinstmöglichen Türmchen, aus denen unsere Funktion nicht mehr oben herausguckt. Nun behaupten wir die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \underline{S}^r(f) &\leq S^r(f) \leq \bar{S}^r(f) \\ \underline{S}^r(f) &\leq \int_Q f \leq \bar{S}^r(f) \end{aligned}$$

Die Ungleichungen der ersten Zeile sind offensichtlich. Um die Ungleichungen der zweiten Zeile einzusehen, benutzen wir zunächst die Regeln für Integrale einer Veränderlichen und erkennen

$$\inf f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2} \leq \int_{Q_{i,j}} f \leq \sup f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Aus unseren Regeln für Integrale einer Veränderlichen folgt zusätzlich auch noch  $\int_Q f = \sum_{i,j} \int_{Q_{i,j}} f$ . Summieren wir dann alle unsere Ungleichungen für  $0 \leq i, j \leq r-1$ , so ergibt sich die zweite Zeile oben. Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es nun wegen der gleichmäßigen Stetigkeit unserer Funktion auf unserem kompakten Rechteck ein  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  mit

$$|(x_1, y_1) - (x, y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1, y_1) - f(x, y)| < \varepsilon$$

Ist  $R = R_\varepsilon$  so groß, daß alle Kantenlängen unserer kleinen Rechtecke  $Q_{i,j}$  bei äquidistanter Unterteilung in  $R$  Stücke unter  $\delta$  sinken, so folgt aus  $r \geq R$  also  $|\bar{S}^r(f) - \underline{S}^r(f)| < (\text{vol } Q)\varepsilon$  und mit unseren beiden Zeilen von Ungleichungen ergibt sich  $|\int_Q f - S^r(f)| < (\text{vol } Q)\varepsilon$ . Das zeigt  $\int_Q f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$  wie im Satz behauptet.  $\square$

**Korollar 2.1.7 (Vertauschen partieller Integrationen).** *Gegeben ein Rechteck  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt*

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

*Beweis.* Beide Seiten sind der Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$  derselben Folge von Riemannsummen.  $\square$

2.1.8. Den gemeinsamen Wert dieses Integrals notieren wir dann kürzer auch  $\int_Q f(x, y) d(x, y)$  und benutzen analoge Notationen im Fall von noch mehr Veränderlichen. Steht dahingegen  $x$  für eine Veränderliche des  $\mathbb{R}^k$ , so benutzen wir die Notation  $\int f(x) d^k x$ .

2.1.9. Da das Differenzieren so in etwa der inverse Prozess zum Integrieren ist, müssen mit den partiellen Integralen auch die partiellen Ableitungen sowie partielle Ableitung und partielles Integral vertauschen. Diese Idee wird im Folgenden ausgeführt.

**Korollar 2.1.10 (Vertauschen partieller Ableitungen).** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Existiert die gemischte partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  auf  $U$  und ist dort stetig und existiert darüber hinaus auch die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$  auf  $U$ , so existiert sogar die umgekehrte gemischte partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  auf  $U$  und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

2.1.11. Eine anschauliche Interpretation dieses Korollars wird der Satz über die Taylorentwicklung 2.2.1 geben: Geeignet differenzierbare reelle Funktionen von zwei Variablen besitzen eben lokal an jeder Stelle eine "beste" Approximation durch ein Polynom vom Grad höchstens zwei, also durch eine Funktion der Form  $f(p+h, q+k) \sim \alpha + \beta h + \gamma k + \delta h^2 + \kappa k^2 + \tau hk$ , und die gemischte partielle Ableitung unserer Funktion an besagter Stelle ist dann genau der Koeffizient  $\tau$  des "gemischten Terms".

*Beispiel 2.1.12.* Die Funktion  $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$  kann durch  $f(0, 0) = 0$  stetig auf ganz  $\mathbb{R}^2$  fortgesetzt werden und ist überall zweimal partiell differenzierbar, aber ihre beiden gemischten partiellen Ableitungen stimmen im Ursprung nicht überein. Das zeigt, daß unsere Forderung der Stetigkeit an eine gemischte partielle Ableitung im vorhergehenden Korollar 2.1.10 auch notwendig ist.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $U$  ein offenes Rechteck. Wir verwenden für die partiellen Ableitungen nach der ersten bzw. zweiten Variablen die Abkürzungen  $f_x$  und  $f_y$  und schreiben  $f_{xy} = (f_x)_y$  für die gemischte partielle Ableitung “erst nach  $x$ , dann nach  $y$ ”. Gegeben  $(a, c) \in U$  beliebig aber fest finden wir

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_c^y f_{xy}(s, t) dt ds &= \int_a^x f_x(s, y) - f_x(s, c) ds \\ &= f(x, y) - f(x, c) - f(a, y) + f(a, c) \end{aligned}$$

Ich bin nicht glücklich, daß die Symbole  $x$  und  $y$  hier sowohl als Integrationsgrenzen als auch als Anzeiger für zu bildende partielle Ableitungen vorkommen, aber ich fürchte, eine alternative Notation wie etwa  $f_1, f_2, f_{12}, f_{21}$  statt  $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$  wäre wieder in anderer Weise verwirrend. Jetzt vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge, bringen hinten die drei letzten Summanden auf die andere Seite und erhalten

$$\left( \int_c^y \int_a^x f_{xy}(s, t) ds dt \right) + f(x, c) + f(a, y) - f(a, c) = f(x, y)$$

Die linke Seite ist hier ganz offensichtlich partiell differenzierbar erst nach  $y$  und dann nach  $x$  und ihre gemischte partielle Ableitung ergibt sich zu  $f_{xy}$  wie gewünscht.  $\square$

**Korollar 2.1.13 (Differenzieren unter dem Integral).** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall,  $I \subset \mathbb{R}$  halboffen und  $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  stetig mit stetiger partieller Ableitung nach der zweiten Variablen. So ist die Funktion  $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$  differenzierbar und man darf die Integration über die erste Variable mit der partiellen Ableitung nach der zweiten Variablen vertauschen, in Formeln

$$\frac{d}{dy} \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

2.1.14. Einen allgemeineren Satz zum Differenzieren unter dem Integral werden Sie im Rahmen der Lebesgue’schen Integrationstheorie in Übung 6.5.14 herleiten.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $I$  ein echtes Intervall. Wir wählen  $c \in I$  beliebig und finden

$$\int_a^b \int_c^y f_y(x, t) dt dx = \int_a^b f(x, y) - f(x, c) dx$$

Vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge und bringen den letzten Summanden auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\int_c^y \int_a^b f_y(x, t) dx dt - \int_a^b f(x, c) dx = \int_a^b f(x, y) dx$$

Die linke Seite ist aber offensichtlich partiell differenzierbar nach  $y$  mit Ableitung  $\int_a^b f_y(x, t) dx$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 2.1.15.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  und  $A \in \text{End } V$  erklärt man die lineare Abbildung  $\text{ad } A : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$  durch die Vorschrift  $\text{ad } A : B \mapsto (AB - BA)$ . Man zeige, daß für  $V$  endlichdimensional und reell das Differential von  $\exp : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$  bei  $A \in \text{End } V$  gegeben wird durch die Formel

$$d_A \exp = (\cdot \exp A) \circ \left( \frac{\exp(\text{ad } A) - 1}{\text{ad } A} \right)$$

Beim letzten Faktor ist gemeint, daß  $\text{ad } A$  in die Potenzreihe  $\sum_{\nu \geq 0} z^\nu / (\nu + 1)!$  der Funktion  $(\exp(z) - 1)/z$  eingesetzt werden soll. Hinweis: Man wende  $\partial^2 / \partial s \partial t = \partial^2 / \partial t \partial s$  an auf  $\exp(s(A + tB)) \exp(-sA)$ , setze  $t = 0$  und integriere über  $s$ .

## 2.2 Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen

**Satz 2.2.1 (Taylorentwicklung in zwei Veränderlichen).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Teilmenge, die den Nullpunkt enthält, und sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $d$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. So gibt es genau ein Polynom in zwei Veränderlichen  $P(x, y) = \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} x^i y^j$  vom Grad  $\leq d$  derart, daß gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{|(x, y)|^d} = 0$$

und die Koeffizienten  $c_{i,j}$  dieses Polynoms  $P$  werden gegeben durch die Formel

$$c_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} (0, 0)$$

2.2.2. Ist  $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$  selbst eine Polynomfunktion, so erkennt man leicht, daß gilt

$$a_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0)$$

In diesem Fall liefert unsere Formel also  $P(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j$  und man sieht sofort, daß dieses  $P$  die geforderte Eigenschaft hat.

2.2.3. Um unseren Satz auch in mehr als zwei Veränderlichen übersichtlich formulieren zu können, führen wir neue Notationen ein. Gegeben ein **Multi-index**  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  definieren wir

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n \\ \alpha! &:= \alpha_1! \dots \alpha_n! \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \partial^\alpha f &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Notation annehmen, daß  $f$  eine  $|\alpha|$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion von  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  ist, so daß es insbesondere beim partiellen Ableiten nicht auf die Reihenfolge ankommt.

2.2.4. Unter einem **Polynom in mehreren Veränderlichen**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit reellen Koeffizienten versteht man eine “endliche formale Summe” der Gestalt

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

wobei die Summe über alle Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  laufen soll und alle Koeffizienten  $c_{\alpha}$  reelle Zahlen sind, die darüber hinaus fast alle verschwinden müssen, da wir ja salopp gesprochen nur endliche formale Summen zulassen wollen. Mit dem **Grad** oder genauer dem **Totalgrad** eines Polynoms in mehreren Veränderlichen meint man  $\sup\{|\alpha| \mid c_{\alpha} \neq 0\}$ . Das Nullpolynom hat also den Grad  $-\infty$ , konstante Polynome haben den Grad Null und

$$x^4 y^3 - z^5 y + 3z^2 x^2 y^2$$

ist ein Polynom in den drei Veränderlichen  $x, y, z$  vom Grad 7. Wir werden in 2.2.7 zeigen, daß verschiedene polynomiale Ausdrücke auch verschiedene Funktionen liefern, so daß wir im Fall reeller Koeffizienten nicht so genau zu hinterfragen brauchen, was wir unter solch einem “formalen Ausdruck” eigentlich genau verstehen wollen. Den Fall beliebiger Koeffizienten diskutieren wir in ?? im Fall einer Variablen und in ?? im allgemeinen.

**Satz 2.2.5 (Taylorentwicklung).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $d$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion, und  $p \in A$  ein Punkt. So gibt es genau ein Polynom  $P$  vom Grad  $\leq d$  mit

$$f(p+h) = P(h) + |h|^d \varepsilon(h)$$

für eine Funktion  $\varepsilon$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ , und dieses Polynom wird gegeben durch die Formel

$$P(h) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

2.2.6. Dieser Satz ist deutlich schwächer als unsere verschiedenen Versionen im Fall einer Variablen in II.5.2.2 folgende. Ich denke jedoch, daß an dieser Stelle größere Allgemeinheit den Aufwand nicht wert ist. Ich habe auch in einer Variablen den Aufwand nur getrieben, um den Aspekt der “Verallgemeinerung der Ableitung durch die Taylorentwicklung” herauszuarbeiten. In 5.4.12 deute ich an, wie der vorhergehende Satz koordinatenfrei formuliert werden könnte. Ich schicke dem Beweis ein Lemma voraus.

**Lemma 2.2.7.** Sei  $R$  ein Polynom in  $n$  Veränderlichen mit reellen Koeffizienten vom Grad  $\leq d$ . Gilt  $\lim_{h \rightarrow 0} R(h)/|h|^d = 0$ , so folgt  $R = 0$ .

*Beweis.* Wir zeigen das durch Widerspruch. Wäre  $R \neq 0$ , so gäbe es  $v \neq 0$  mit  $R(v) \neq 0$ , und  $t \mapsto R(tv)$  wäre ein von Null verschiedenes Polynom in einer Veränderlichen  $t \in \mathbb{R}$  vom Grad  $\leq d$  mit  $\lim_{t \rightarrow 0} R(tv)/|t|^d = 0$ . Wir wissen aber aus II.3.3.23, daß es solch ein Polynom in einer Variablen nicht gibt.  $\square$

*Beweis des Satzes.* Aus unserem Lemma folgt sofort die Eindeutigkeit von  $P$ , denn ist  $\hat{P}$  ein anderes mögliches Approximationspolynom, so können wir das Lemma auf  $R = P - \hat{P}$  anwenden. Um die Existenz der Taylorentwicklung nachzuweisen, nehmen wir ein  $h \in \mathbb{R}^m$ , das so klein ist, daß sogar das ganze Geradensegment  $[p, p+h] = \{p+th \mid t \in [0, 1]\}$  in  $A$  enthalten ist, und betrachten die Taylorentwicklung der Funktion  $g = g_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(p+th)$ . Wir behaupten zunächst, daß die höheren Ableitungen von  $g$  gegeben werden durch

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{\nu!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(p+th) h^\alpha$$

In der Tat gilt nach der Kettenregel in mehreren Veränderlichen 1.5.4 schon mal

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p+th) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p+th) \cdot h_n$$

und wir folgern induktiv

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_\nu} \frac{\partial^\nu f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\nu}}(p + th) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_\nu}$$

wobei die Summe über alle möglichen  $\nu$ -Tupel aus  $\{1, \dots, n\}$  laufen soll. Nach dem anschließenden Lemma 2.2.8 gibt es aber genau  $\nu!/\alpha!$  Möglichkeiten, ein  $\nu$ -Tupel  $(i_1, \dots, i_\nu) \in \{1, \dots, n\}^\nu$  so zu wählen, daß unter den  $i_1, \dots, i_\nu$  jedes  $j$  genau  $\alpha_j$ -mal vorkommt. Fassen wir also gleiche Summanden zusammen, so ergibt sich die behauptete Formel für die  $\nu$ -te Ableitung  $g^{(\nu)}$  von  $g$ . Jetzt schreiben wir zur Funktion  $g(t)$  die Taylorreihe mit der Lagrange'schen Form des Restglieds II.5.2.5 um den Entwicklungspunkt  $t = 0$  hin und erhalten an der Stelle  $t = 1$  mit einer kleinen Umformulierung die Gleichung

$$f(p + h) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=d} \frac{(\partial^\alpha f)(p + \xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

für geeignetes  $\xi_h \in (0, 1)$ . Es reicht also, wenn wir für  $|\alpha| = d$  zeigen, daß gilt  $\lim_{h \rightarrow 0} (\partial^\alpha f)(p + \xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p) = 0$ , und das folgt sofort aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen.  $\square$

**Lemma 2.2.8.** *Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$  gegeben und sei  $\nu = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  ihre Summe. So gibt es genau  $\nu!/\alpha_1! \dots \alpha_n!$  Abbildungen von einer Menge  $X$  mit  $\nu$  Elementen nach  $\{1, \dots, n\}$  derart, daß der Wert  $j$  jeweils genau  $\alpha_j$ -mal angenommen wird.*

*Beispiel 2.2.9.* Wollen wir 10 nummerierte Bälle so anmalen, daß 5 Bälle blau, 3 Bälle rot und 2 Bälle gelb werden, so gibt es dafür also  $10!/(5!3!2!) = 2520$  Möglichkeiten.

*Beweis.* Es gibt genau  $\nu!$  Möglichkeiten, unsere Menge  $X$  anzuordnen. Jede dieser Möglichkeiten liefert eine Abbildung  $i$  wie folgt: Wir bilden die ersten  $\alpha_1$  Zahlen auf 1 ab, die nächsten  $\alpha_2$  Zahlen auf 2, und so weiter, bis wir zum Schluß die letzten  $\alpha_n$  Zahlen auf  $n$  abbilden. So erhalten wir nur Abbildungen der gewünschten Form, genauer erhalten wir so jede der gewünschten Abbildungen genau  $(\alpha_1! \dots \alpha_n!)$ -mal. Das Lemma ist bewiesen.  $\square$

## 2.3 Rechnen mit Approximationen

**Definition 2.3.1.** Eine Abbildung  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **polynomial** oder auch **regulär** genau dann, wenn sie die Gestalt  $P = (P_1, \dots, P_m)$  hat, für geeignete Polynome  $P_1, \dots, P_m$  in  $n$  Veränderlichen. Haben alle unsere  $P_j$  Grad  $\leq d$ , so sagen wir auch, die polynomiale Abbildung  $P$  habe **Grad**  $\leq d$ .

**Definition 2.3.2.** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  zwei auf einer Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  definierte Abbildungen. Sei  $p \in D$  ein Punkt und  $d \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl. Wir sagen,  $f$  und  $g$  **stimmen bei  $p$  überein bis zur Ordnung  $d$**  und schreiben

$$f \sim_p^d g$$

genau dann, wenn gilt  $f(p+h) - g(p+h) = |h|^d \varepsilon(h)$  für eine Funktion  $\varepsilon$ , die stetig ist bei  $h = 0$  mit Funktionswert  $\varepsilon(0) = 0$ .

2.3.3. Ist  $p \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$ , so können wir das umschreiben zur Forderung, daß gilt  $f(p) = g(p)$  und

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - g(x)}{|x - p|^d} = 0$$

2.3.4. Natürlich stimmen zwei  $\mathbb{R}^m$ -wertige Funktionen bis zu einer gewissen Ordnung überein genau dann, wenn alle ihre Komponenten bis zu der entsprechenden Ordnung übereinstimmen. Schreiben wir also  $f = (f_1, \dots, f_m)$  und  $g = (g_1, \dots, g_m)$ , so gilt

$$f \sim_p^d g \Leftrightarrow (f_j \sim_p^d g_j \quad \forall j)$$

Offensichtlich folgt auch aus  $f \sim_p^d g$  und  $g \sim_p^d h$  schon  $f \sim_p^d h$ . Sind weiter  $P, Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  polynomiale Abbildungen vom Grad  $\leq d$  und ist  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so folgt aus  $P \sim_p^d Q$  schon  $P = Q$ .

2.3.5. Der Satz über die Taylorentwicklung 2.2.5 liefert uns für  $d$ -mal stetig partiell differenzierbares  $f$  die eindeutig bestimmte polynomiale Abbildung  $P$  vom Grad  $\leq d$  mit  $P \sim_p^d f$ . Genauer besagt unser Satz, daß diese polynomiale Abbildung  $P = (P_1, \dots, P_m)$  dadurch charakterisiert wird, daß die partiellen Ableitungen der Polynome  $P_j$  bis zur Ordnung  $d$  bei  $p$  denselben Wert annehmen wie die entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktionen  $f_j$ .

**Satz 2.3.6 (Rechnen mit Approximationen).** Seien  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^m$  Teilmengen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^l$  Abbildungen mit  $f(D) \subset E$ . Gegeben  $p \in D$  und polynomiale Abbildungen  $P, Q$  mit  $f \sim_p^d P$  und  $g \sim_{f(p)}^d Q$  folgt

$$g \circ f \sim_p^d Q \circ P$$

2.3.7. Im Fall  $d = 1$  ist die Aussage des Satzes äquivalent zur Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Im Fall  $d = 0$  bedeutet sie schlicht die Stetigkeit der Verknüpfung bei  $p$ , es reicht also, den Satz für  $d \geq 1$  zu beweisen. Dem eigentlichen Beweis geht ein Lemma voraus.

**Lemma 2.3.8.** Seien  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge und  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Gegeben  $p \in D$  und Polynome  $P_1, P_2$  mit  $f_i \sim_p^d P_i$  folgt

$$f_1 + f_2 \sim_p^d P_1 + P_2 \quad \text{und} \quad f_1 f_2 \sim_p^d P_1 P_2$$

2.3.9. Dies Lemma besteht in der Tat aus zwei Spezialfällen des Satzes, man kann nämlich die Addition  $(+) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten und rechnen  $f_1 + f_2 = (+) \circ (f_1, f_2) \sim_p^d (+) \circ (P_1, P_2) = P_1 + P_2$  und ähnlich für die Multiplikation. Wir brauchen jedoch einen unabhängigen Beweis, damit wir das Lemma beim Beweis des Satzes verwenden dürfen.

*Beweis des Lemmas.* Dem Leser überlassen. Statt  $P_i$  polynomial reicht es auch,  $P_i$  stetig bei  $p$  anzunehmen.  $\square$

*Beweis des Satzes.* Wir zeigen nun zunächst  $g \circ f \sim_p^d Q \circ f$  und dann  $Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$ . Für die erste Aussage schreiben wir  $g(y) = Q(y) + |y - f(p)|^d \varepsilon(y - f(p))$  und erhalten durch Einsetzen von  $y = f(x)$  und Erweitern des rechten Terms

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + |x - p|^d \left[ \left( \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} \right)^d \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle  $x \neq p$ . Wir hatten uns ja bereits auf den Fall  $d \geq 1$  zurückgezogen. In diesem Fall stimmt  $f$  bei  $p$  bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit der polynomialen Abbildung  $P$ , folglich ist  $f$  differenzierbar bei  $p$ , die vordere Klammer in den eckigen Klammern bleibt beschränkt für  $x \rightarrow p$  und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für  $x \rightarrow p$  gegen Null. Wir müssen also nur noch für jede polynomiale Abbildung  $Q$  zeigen

$$Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$$

Es reicht sicher, das im Fall  $l = 1$  zu zeigen, also für  $Q$  ein Polynom. In diesem Fall folgt sie aber sofort aus dem vorhergehenden Lemma 2.3.8.  $\square$

*Beispiel 2.3.10.* Wollen wir für die Funktion  $f(x, y) = \sin(x e^y)$  die partielle Ableitung  $\frac{\partial^3 f}{\partial x (\partial y)^2}$  im Nullpunkt bestimmen, so benutzen wir unseren Satz 2.3.6 und rechnen

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \dots \\ x e^y &= x + xy + \frac{xy^2}{2} + \dots \\ \sin(x e^y) &= x + xy + \frac{xy^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

und die gesuchte partielle Ableitung bei  $x = y = 0$  ergibt sich mit der Taylorreihe zu 1.

*Übung 2.3.11.* Eine Potenzreihe in mehreren Veränderlichen, die an allen Stellen einer offenen Menge punktweise absolut konvergiert, stellt auf dieser offenen Menge eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion dar.

## 2.4 Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen

**Definition 2.4.1.** Sei  $A$  ein metrischer Raum,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $p \in A$  ein Punkt. Wir sagen,  $f$  hat bei  $p$  ein **lokales Minimum** (bzw. **Maximum**) genau dann, wenn gilt  $f(x) \geq f(p)$  (bzw.  $f(x) \leq f(p)$ ) für alle  $x$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $p$ . Wir sagen,  $f$  hat bei  $p$  ein **isoliertes lokales Minimum** (bzw. **Maximum**) genau dann, wenn gilt  $f(x) > f(p)$  (bzw.  $f(x) < f(p)$ ) für alle von  $p$  verschiedenen  $x$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $p$ .

**Proposition 2.4.2.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $p \in A$  ein Punkt. Besitzt  $f$  bei  $p$  ein lokales Minimum oder Maximum, so gilt  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$  für alle  $i$ .

2.4.3. Die Bedingung,  $A$  sei offen, ist in diesem Zusammenhang wesentlich, wie wir bereits im Fall einer Veränderlichen in II.4.3.3 diskutiert haben.

*Beweis.* Für beliebiges  $i$  und hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  betrachten wir das parametrisierte Geradensegment  $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow A$ ,  $t \mapsto p + t e_i$ . Natürlich muß auch  $f \circ g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Minimum oder Maximum bei  $t = 0$  haben, also gilt  $(f \circ g)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ .  $\square$

**Definition 2.4.4.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion. Verschwinden alle ersten partiellen Ableitungen unserer Funktion an einer Stelle  $p \in A$ , so sagt man, die Funktion habe bei  $p$  eine **kritische Stelle**. Ist allgemeiner  $A$  eine halboffene Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion und verschwindet ihr Differential an einem Punkt  $p \in A$ , in Formeln  $d_p f = 0$ , so sagt man auch, die Funktion habe bei  $p$  eine **kritische Stelle**.

*Übung 2.4.5.* Sei  $V$  ein normierter Raum,  $A \subseteq V$  offen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $p \in A$  ein Punkt. Besitzt  $f$  bei  $p$  ein lokales Minimum oder Maximum, so folgt  $d_p f = 0$ .

*Beispiel 2.4.6.* Gegeben drei Punkte  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$  suchen wir die Punkte  $x \in \mathbb{R}^2$ , für die die Summe der Abstände

$$S(x) = \|x - p\| + \|x - q\| + \|x - r\|$$



SkriptenBilder/Bildpqr.png

Die Summe der Abstände zu drei vorgegebenen Punkten, die nicht auf einer Gerade liegen und ein Dreieck bilden, in dem kein Winkel grösergleich  $120^\circ$  ist, wird minimal an der Stelle, an der die Halbgeraden zu den Ecken jeweils den Winkel  $120^\circ$  einschließen. Ist dahingegen ein Winkel grösergleich  $120^\circ$ , so liegt das Minimum bei der fraglichen Ecke selbst.

kleinstmöglich wird. Sicher gilt  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} S(x) = \infty$ , folglich existiert ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^2$  mit

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2} S(x) = \inf_{x \in K} S(x)$$

und damit nimmt unsere Funktion nach II.6.7.11 ihr Infimum auch wirklich als Funktionswert an. Unsere Funktion ist auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$  stetig differenzierbar und ihr Gradient bei  $x$  ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$(\text{grad } S)(x) = \frac{x - p}{\|x - p\|} + \frac{x - q}{\|x - q\|} + \frac{x - r}{\|x - r\|}$$

Für das Minimum kommen nach unseren Erkenntnissen nur unsere drei Punkte  $p, q, r$  sowie die Nullstellen des Gradienten in Frage. Die weiteren Überlegungen führen wir nicht mehr in formaler Strenge durch, da das von unseren formalen Kenntnissen ausgehend einen unangemessenen Aufwand bedeuten würde. Anschaulich scheint es mir klar, daß unser Gradient nur dann verschwinden kann, wenn nicht alle drei Punkte  $p, q, r$  auf einer Geraden liegen und  $x$  im Inneren der zugehörigen Dreiecksfläche alias ihrer konvexen Hülle liegt und wenn die drei Vektoren  $x - p, x - q$  und  $x - r$  jeweils einen Winkel von  $120^\circ$  alias  $2\pi/3$  einschließen. Das ist für einen Punkt im Innern der Dreiecksfläche jedoch nur dann möglich, wenn jeder der Winkel unseres Ausgangsdreiecks kleiner ist als  $120^\circ$ . Nur unter den Voraussetzungen, daß unsere drei Punkte  $p, q, r$  nicht auf einer Geraden liegen und jeder der Winkel des Dreiecks mit den Ecken  $p, q, r$  kleiner ist als  $120^\circ$ , kann also das Minimum außerhalb der drei Punkte  $\{p, q, r\}$  angenommen werden. Sind sie erfüllt, so kann das Minimum hinwiederum nicht an einem dieser Punkte angenommen werden, da der Wert von  $S(x)$  dann abnimmt, wenn wir auf einer Winkelhalbierenden ins Dreieck hineinlaufen, wie man etwa an unserer Beschreibung des Gradienten sehen kann. Folglich muß dann das Minimum bei der kritischen Stelle angenommen werden, die eben dadurch charakterisiert ist, daß die Vektoren  $x - p, x - q$  und  $x - r$  jeweils einen Winkel von  $120^\circ = 2\pi/3$  einschließen.

2.4.7. Um eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum oder Maximum zu erhalten, müssen wir wie im Fall einer Veränderlichen die zweiten Ableitungen untersuchen. Am Beispiel der Funktionen  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  bzw.  $x^2$  bzw.  $x^2 - y^2$  kann man sehen, was lokal um  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  so alles passieren kann. Wir betrachten nun allgemeiner eine beliebige **quadratische Form**  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{ij}x_i x_j$  mit  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  wie in ??.

**Definition 2.4.8.** Eine quadratische Form  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

<b>positiv definit</b>	genau dann, wenn gilt	$q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0;$
<b>positiv semidefinit</b>	genau dann, wenn gilt	$q(x) \geq 0 \quad \forall x;$
<b>negativ definit</b>	genau dann, wenn gilt	$q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0;$
<b>positiv semidefinit</b>	genau dann, wenn gilt	$q(x) \leq 0 \quad \forall x;$
<b>indefinit</b>	genau dann, wenn gilt	es gibt $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $q(x) > 0, q(y) < 0.$

2.4.9. Wir werden nachher erklären, wie man für eine gegebene quadratische Form entscheiden kann, welche Definitheitseigenschaften sie hat. Zunächst diskutieren wir jedoch, inwieweit diese Eigenschaften für den quadratischen Approximationsterm das lokale Verhalten einer Funktion an einer kritischen Stelle bestimmen.

**Satz 2.4.10 (Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar und  $p \in A$  eine kritische Stelle. Wir bilden zu unserer Funktion die quadratische Form

$$q(h) = q_p(h) = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) h_i h_j$$

die also gerade aus den quadratischen Termen der Taylorreihe besteht.

1. Ist unsere quadratische Form  $q$  positiv definit, so hat  $f$  bei  $p$  ein isoliertes lokales Minimum.
2. Ist unsere quadratische Form  $q$  negativ definit, so hat  $f$  bei  $p$  ein isoliertes lokales Maximum.
3. Ist unsere quadratische Form  $q$  indefinit, so hat  $f$  bei  $p$  weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

2.4.11. Der Faktor  $1/2$  stand in der Taylorformel nur vor den reinen und nicht vor den gemischten doppelten partiellen Ableitungen. In der im Satz gegebenen Darstellung erstreckt sich die Summe dafür über alle  $i, j$  und nicht nur über  $i \leq j$ . Man beachte, daß der Satz keine Aussage für die semidefiniten Fälle macht, in Verallgemeinerung der Tatsache, daß man auch für Funktionen einer Veränderlichen bei Verschwinden der ersten und zweiten Ableitung an einer vorgegebenen Stelle ohne weitere Informationen noch nichts über Maxima oder Minima aussagen kann.

*Beweis.* Aus unseren Annahmen folgt mit der Taylor-Formel

$$f(p+h) = f(p) + q(h) + \varepsilon(h)|h|^2$$

für eine Funktion  $\varepsilon$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . Wir behandeln nun als erstes den Fall  $q$  positiv definit. Sei  $a$  das Minimum nach II.6.7.11 von  $q$  auf der Oberfläche des Einheitswürfels,  $a = \inf\{q(h) \mid |h| = 1\}$ . Aus unserer Annahme folgt  $a > 0$ . Offensichtlich gilt  $q(h) \geq a|h|^2$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ . Wegen  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  finden wir  $\delta > 0$  derart, daß aus  $|h| < \delta$  folgt  $|\varepsilon(h)| \leq a/2$ . Damit ergibt sich für  $|h| < \delta$  aber

$$f(p+h) \geq f(p) + (a/2)|h|^2$$

und  $f$  hat in der Tat ein isoliertes lokales Minimum. Ist  $q$  negativ definit, so argumentieren wir entsprechend. Ist  $q$  indefinit, so finden wir zwei Geraden durch Null derart, daß die Einschränkung von  $q$  auf diese Geraden außerhalb des Nullpunkts positiv bzw. negativ ist. Dann muß aber die Restriktion von  $f$  auf die erste Gerade ein isoliertes lokales Minimum haben bei  $p$ , und auf der zweiten Geraden ein isoliertes lokales Maximum. Folglich hat  $f$  bei  $p$  weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.  $\square$

*Übung 2.4.12.* Man zeige in der Situation des Satzes: Ist  $q$  positiv semidefinit und verschieden von Null, so kann  $f$  bei  $p$  kein lokales Maximum haben.

2.4.13. Jeder quadratischen Form  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  ordnen wir die symmetrische Matrix  $M(q)$  zu mit Einträgen  $(a_{ij} + a_{ji})/2$ . Nach den Definitionen hat die quadratische Form  $q$  eine gewisse Definitheit im Sinne unserer Definition 2.4.8 genau dann, wenn ihre Matrix die entsprechende Definitheit hat im Sinne der linearen Algebra.

**Definition 2.4.14.** Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen, die zum Doppelten der quadratischen Form  $q$  aus unserem Satz gehört, heißt die **Hesse-Matrix**  $H(f)$  von  $f$ , in Formeln

$$H(f) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$$

**Korollar 2.4.15 (Maxima, Minima und Hesse-Matrix).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar und  $p \in A$  ein kritischer Punkt.

1. Ist die Hesse-Matrix von  $f$  bei  $p$  positiv definit, so hat  $f$  bei  $p$  ein isoliertes lokales Minimum.
2. Ist die Hesse-Matrix von  $f$  bei  $p$  negativ definit, ein isoliertes lokales Maximum.
3. Ist die Hesse-Matrix von  $f$  bei  $p$  indefinit, so hat  $f$  bei  $p$  weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

*Beweis.* Das ist nur eine Umformulierung von Satz 2.4.10. □

2.4.16. Um die Definitheitseigenschaften einer symmetrischen quadratischen Matrix zu bestimmen, bringt man sie am einfachsten durch Basiswechsel in Diagonalgestalt, wie im Beweis von ?? erklärt. Bei kleineren Matrizen kann auch das Hurwitz-Kriterium ?? ein guter Trick sein: Danach ist eine symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix positiv definit genau dann, wenn für alle  $k < n$  die quadratische Untermatrix, die man erhält durch Wegstreichen der letzten  $k$  Spalten und der untersten  $k$  Zeilen, eine positive Determinante hat.

### 3 Wegintegrale

#### 3.1 Vektorfelder und Kovektorfelder

3.1.1. Unter einem reellen Raum verstehen wir wie in II.6.9.1 einen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Zu jedem reellen Vektorraum  $V$  bilden wir, wie in der linearen Algebra in ?? folgend ausführlich diskutiert und erläutert, seinen **Dualraum**  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ .

**Definition 3.1.2.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $U \subset X$  eine halboffene Teilmenge. Ein **Vektorfeld auf  $U$**  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow \vec{X} \\ p &\mapsto A_p \end{aligned}$$

von  $U$  in den Richtungsraum  $\vec{X}$  von  $X$ . Wir schreiben im Zusammenhang mit Differentialgleichungen statt  $A_p$  auch  $A(p)$ . Die Notation  $A_p$  dahingegen ist praktisch, wenn wir unsere Vektorfelder wie in 3.1.13 auf Funktionen anwenden wollen. In der physikalischen Terminologie heißen Vektorfelder **kontravariant** aus Gründen, die in 3.1.15 noch diskutiert werden.

*Ergänzung 3.1.3.* Sicherlich könnte man diese Definition auch allgemeiner für beliebige Teilmengen  $U$  vereinbaren. Das führt jedoch auf die Schwierigkeit, daß wir etwa ein Vektorfeld auf einer Kreislinie später werden verstehen wollen als eine Abbildung, die jedem Punkt der Kreislinie in der Ebene einen Tangentialvektor an besagte Kreislinie an besagtem Punkt zuordnet und nicht einfach irgendeinen Richtungsvektor der Ebene. Daß wir uns an dieser Stelle auf halboffene Teilmengen  $U$  beschränken, dient einzig und allein dem Zweck, derartige begriffliche Inkonsistenzen zu vermeiden.

**Definition 3.1.4.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $U \subset X$  eine halboffene Teilmenge. Ein **Kovektorfeld auf  $U$**  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \vec{X}^* \\ p &\mapsto \omega_p \end{aligned}$$

von  $U$  in den Dualraum  $\vec{X}^*$  des Richtungsraums von  $X$ . Wir schreiben hier  $\omega_p$  statt  $\omega(p)$ , damit  $\omega_p(v) \in \mathbb{R}$  den Wert der Linearform  $\omega_p$  auf einem Vektor  $v \in \vec{X}$  bezeichnen kann. Ein Kovektorfeld nennt man auch eine **Pfaff'sche Form** oder eine **Differentialform erster Ordnung** oder eine **1-Form**. In der physikalischen Terminologie heißen Kovektorfelder **kovariant** aus Gründen, die in 3.1.15 noch diskutiert werden.



SkriptenBilder/BildVeFA.png

Graphische Darstellung eines Vektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation von [3.1.14](#) durch die Formel

$$\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_x + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_y$$

gegeben würde. Hier haben wir zu ausgewählten Punkten den ihnen zugeordneten Richtungsvektor als Pfeil von besagtem Punkt zu dem um diesen Richtungsvektor verschobenen Punkt dargestellt.



Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation 3.1.10 durch die Formel

$$x \, dy$$

gegeben würde. Hier haben wir zu ausgewählten fett eingezeichneten Punkten den ihnen zugeordneten Kovektor dargestellt durch eine gestrichelte Linie, die jeweils einen Teil der Geraden zeigt, deren Punkte vom jeweiligen fetten Punkt durch einen Richtungsvektor erreicht werden können, auf dem der dem jeweilige Kovektor den Wert 1 annimmt. Die eingezeichneten Fäden deuten an, welche gestrichelte Linie jeweils zu welchem fetten Punkt gehört. Je weiter die gestrichelte Linie von ihrem fetten Punkt entfernt ist, desto kleiner ist also unser Kovektor, zum Beispiel bedeutet der doppelte Abstand den halben Kovektor. Fette Punkte ganz ohne gestrichelte Linie stehen für den Wert Null unseres Kovektorfelds an besagter Stelle. Daß eine gestrichelte Linie durch “ihren” fetten Punkt geht, ist nicht zulässig. Man mag versuchen, in diesem Bild auch noch das Vektorfeld  $(x, y) \mapsto (1, x)$  oder in der Notation aus 3.1.14 geschrieben  $\partial_x + x\partial_y$  einzuzichnen und anschaulich zu verstehen, daß as Einsetzen im Sinne von 3.1.7 dieses Vektorfelds in unser Kovektorfeld auch tatsächlich die Funktion  $(x, y) \mapsto x^2$  liefert.

*Beispiel 3.1.5.* Ein Kovektorfeld auf der Zeitachse  $\mathbb{T}$  aus ?? können wir uns in der in ?? noch genauer erklärten Weise denken als eine Vorschrift, die jedem Zeitpunkt eine Frequenz oder, vielleicht noch besser, eine Drehgeschwindigkeit zuordnet.

3.1.6. Wir addieren Vektorfelder und auch Kovektorfelder punktweise, die Summe  $\omega + \eta$  zweier Kovektorfelder ist also erklärt durch  $(\omega + \eta)_p = \omega_p + \eta_p$ , wobei letzteres Summenzeichen die Addition in  $\vec{X}^*$  meint. Wir multiplizieren Vektorfelder und auch Kovektorfelder mit Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , indem wir setzen  $(fA)_p = f(p)A_p$  bzw.  $(f\omega)_p = f(p)\omega_p$ .

3.1.7. Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $U \subset X$  eine halboffene Teilmenge. Ist  $A : U \rightarrow \vec{X}$  ein Vektorfeld und  $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$  ein Kovektorfeld, so können wir auch das Vektorfeld  $A$  in das Kovektorfeld  $\omega$  einsetzen oder, vielleicht besser gesagt, das Kovektorfeld  $\omega$  auf dem Vektorfeld  $A$  auswerten oder, ganz ausgewogen und immer noch gleichbedeutend, das **Kovektorfeld  $\omega$  mit dem Vektorfeld  $A$  paaren**. Wir erhalten dann eine Funktion

$$\begin{aligned} \omega(A) = \langle \omega, A \rangle : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \omega_p(A_p) \end{aligned}$$

3.1.8. Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $U \subset X$  eine halboffene Teilmenge. Im Sinne von 1.2.2.26 können wir ein Kovektorfeld  $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$  auch auffassen als eine Abbildung  $U \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  oder sogar als eine Abbildung  $\vec{X} \rightarrow \text{Ens}(U, \mathbb{R})$ . Es gehört etwas Übung dazu, alle diese verschiedenen Aspekte gleichzeitig präsent zu haben. Wir können also ein Kovektorfeld einerseits an einem Punkt  $p \in U$  auswerten und so eine Linearform  $\omega_p : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Richtungsraum erhalten, wir können es aber andererseits auch auf einem Richtungsvektor  $v \in \vec{X}$  auswerten und so eine reellwertige Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \omega_p(v)$  erhalten. Wir können es sogar etwas allgemeiner, wie in 3.1.7 besprochen, auf einem Vektorfeld  $p \mapsto v_p$  auswerten und auch so eine reellwertige Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \omega_p(v_p)$  erhalten. Man beachte, daß beim Auswerten von Kovektorfeldern auf Vektorfeldern keinerlei Differentiation stattfindet, sondern ausschließlich lineare Algebra, nur eben “in Abhängigkeit vom Punkt  $p$ ”.

**Definition 3.1.9.** Sei  $X$  ein reeller endlichdimensionaler Raum und  $U \subset X$  eine halboffene Teilmenge. Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so ist das Differential von  $f$  bei  $p$  eine lineare Abbildung  $d_p f : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Unter dem **Differential  $df$  von  $f$**  verstehen wir das Kovektorfeld auf  $U$ , das gegeben wird durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \vec{X}^* \\ p &\mapsto d_p f \end{aligned}$$

3.1.10. Für das Differential von einem Produkt gilt nach 1.4.5 die Produktregel  $d(fg) = f dg + g df$  und für das Differential einer Summe haben wir  $d(f+g) = df + dg$ . Ist speziell  $X = \mathbb{R}^n$  und  $U \subset \mathbb{R}^n$  halboffen und bezeichnet  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Restriktion der  $i$ -ten Koordinate auf  $U$ , so ist  $dx_i : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  konstant die  $i$ -te Koordinate selber. Die Koordinaten bilden nun eine Basis des Dualraums von  $\mathbb{R}^n$ , folglich läßt sich jedes Kovektorfeld auf  $U$  schreiben in der Gestalt  $\sum a_i dx_i$  mit eindeutig bestimmten  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Ich vermute, daß hier der Ursprung der Bezeichnung als “Differentialform” zu suchen ist: In gewisser Weise können wir eben unsere Kovektorfelder als “Linearkombinationen von Differentialen” schreiben. Für eine differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer halboffenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  haben wir dann

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Man prüft das leicht durch Auswerten beider Seiten an einer Stelle  $p \in U$  und Anwenden der so entstehenden Linearformen auf alle Vektoren der Standard-Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Speziell haben wir für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  also  $df = f'(x) dx$ . Ist  $U$  nicht offen, sondern nur halboffen, so sind die partiellen Ableitungen oben im Sinne unserer Notation 1.2.10 zu verstehen.

3.1.11. Anschaulich gesprochen beschreibt diese Gleichung, wie sich der Funktionswert der Funktion  $f$  in erster Näherung ändert, wenn wir an den Koordinaten  $x_i$  wackeln: Genauer gilt bei festen  $x_1, \dots, x_n$  für  $\delta x_1, \dots, \delta x_n \in \mathbb{R}$  so nah bei Null, daß alles definiert ist, eben

$$f(x_1 + \delta x_1, \dots, x_n + \delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + R(\delta x_1, \dots, \delta x_n)$$

mit einem Rest  $R$ , der auch nach dem Teilen durch das Maximum der Beträge aller  $\delta x_i$  noch gegen Null strebt, wenn alle  $\delta x_i$  gegen Null streben. Hierbei ist zu verstehen, daß die fraglichen partiellen Ableitungen an unserer festen Stelle  $(x_1, \dots, x_n)$  ausgewertet werden sollen, und um die partiellen Ableitungen zu bilden, müssen die  $x_i$  natürlich noch als variabel gedacht werden. Vielleicht wäre es hier konsistenter gewesen, die partiellen Ableitungen  $\partial_i f$  zu notieren oder sogar  $(\partial_i f)(x_1, \dots, x_n)$  um anzudeuten, daß sie ja an der festen Stelle  $(x_1, \dots, x_n)$  auszuwerten sind, aber es kommt bei komplizierteren Formeln auch nicht selten vor, daß größere Präzision insbesondere für fortgeschrittene Leser nicht zu besserer Verständlichkeit führt. Die Notation  $\delta x_i$  könnten wir zu  $\delta_i$  abkürzen, aber dann wirkt die Formel weniger suggestiv. Kürzen wir auch noch die linke Seite zu  $\delta f$  ab, so können wir unsere Identität mit der in

2.3.2 eingeführten Notation auch schreiben als die Übereinstimmung erster Ordnung von Funktionen der “Verrückungen”  $\delta x_i$  der Gestalt

$$\delta f \sim_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

*Beispiel 3.1.12.* Die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \mapsto 1/\|v\|$  hat mit der Konvention  $v = (x, y, z)$  das Differential  $df = -(x dx + y dy + z dz)/\|v\|^3$ .

**Definition 3.1.13.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$ , eine halboffene Teilmenge  $U \subset X$ , ein Vektorfeld  $A : U \rightarrow \vec{X}$  und eine differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  erklären wir eine Funktion  $(Af) : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$(Af)(p) := (d_p f)(A_p)$$

Ist  $U$  eine Umgebung von  $p$ , so ist nach 1.2.6 also  $(Af)(p)$  die Richtungsableitung von  $f$  bei  $p$  in der Richtung  $A_p$ . Wir sagen deshalb auch, die Funktion  $Af$  entstehe aus  $f$  durch **Ableiten in Richtung des Vektorfelds**  $A$ . In anderen Worten entsteht diese Funktion durch das Paaren des Vektorfelds  $A$  mit der durch das Differential der Funktion  $f$  gegebene Kovektorfeld  $df$ . Mit unserer Notation 3.1.7 kann diese Funktion auch  $\langle df, A \rangle$  geschrieben werden.

3.1.14. Meist werden Vektorfelder identifiziert mit den zugehörigen Differentialoperatoren. So notiere ich etwa das konstante Vektorfeld  $v$  wie die zugehörige Richtungsableitung  $D_v$ . Spezieller bezeichnet man das konstante Vektorfeld mit Wert  $e_i$  auf  $\mathbb{R}^n$  oft als “das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ” oder “das Vektorfeld  $\partial_i$ ” und im Fall nicht nummerierter Koordinaten wie etwa  $x, y, z$  auf  $\mathbb{R}^3$  schreiben wir für die fraglichen Vektorfelder auch  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  oder dergleichen. Sicher läßt sich jedes Vektorfeld auf  $U \subset \mathbb{R}^n$  halboffen schreiben in der Gestalt

$$\sum c_i \partial_i$$

mit eindeutig bestimmten  $c_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Paaren wir etwa das Vektorfeld  $\sum c_i \partial_i$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit dem Kovektorfeld  $\sum a_i dx_i$ , so ergibt sich die Funktion  $\sum a_i c_i$ . In unserer Notation 3.1.7 und mit dem Kroneckerdelta haben wir nämlich in der Tat

$$\langle dx_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$$

3.1.15. Zumindest unter linearen Koordinatentransformationen verhalten sich Kovektorfelder “so wie Koordinaten”. Ist etwa  $x_1, \dots, x_n$  ein System linearer Koordinaten auf  $X$  im Sinne eines Systems von Abbildungen  $x_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die zusammen einen Isomorphismus von affinen Räumen  $X \rightarrow \mathbb{R}^n$  liefern, und



Ganz links ist zuerst ein Vektorfeld auf der Ebene abgebildet, das unter der orthogonalen Projektion auf die  $x$ -Achse verwandt ist zu einem ebenfalls eingezeichneten konstanten Vektorfeld auf der  $x$ -Achse. In der Mitte dann ein Vektorfeld auf der Ebene, das unter dieser Projektion zu keinem Vektorfeld auf der  $x$ -Achse verwandt ist. Schließlich ganz rechts die konstante Abbildung der  $y$ -Achse auf einen Punkt der  $x$ -Achse und ein Vektorfeld auf der  $x$ -Achse, das darunter zu keinem Vektorfeld auf der  $y$ -Achse verwandt ist.

ist  $y_1, \dots, y_n$  ein anderes System linearer Koordinaten, und haben wir etwa  $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$  für eine Matrix von reellen Zahlen  $a_{ij}$ , so gilt die Identität von Kovektorfeldern  $dy_i = \sum_j a_{ij} dx_j$ . Für die durch unsere Koordinatensysteme bestimmten Vektorfelder haben wir dahingegen umgekehrt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

und benötigen die inverse Matrix, um  $\frac{\partial}{\partial y_i}$  durch die  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  auszudrücken. In diesem Sinne “transformieren sich Kovektorfelder wie Koordinaten” und heißen deshalb auch “kovariant”, wohingegen Vektorfelder sich “vermittels der inversen transponierten Matrix transformieren” und deshalb “kontravariant” heißen.

**Definition 3.1.16.** Sei  $\phi : U \rightarrow V$  eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume  $X$  und  $Y$ .

1. Zwei Vektorfelder  $A : U \rightarrow \vec{X}$  und  $B : V \rightarrow \vec{Y}$  heißen  **$\phi$ -verwandt** und wir schreiben  $\phi : A \rightsquigarrow B$  genau dann, wenn für alle  $x \in U$  gilt

$$(\mathrm{d}_x \phi)(A_x) = B_{\phi(x)}$$

2. Zwei Kovektorfelder  $\eta : U \rightarrow \vec{X}^*$  und  $\omega : V \rightarrow \vec{Y}^*$  heißen  **$\phi$ -verwandt** und wir schreiben  $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$  genau dann, wenn für alle  $x \in U$  gilt  $\eta_x = \omega_{\phi(x)} \circ \mathrm{d}_x \phi$  oder gleichbedeutend mit der transponierten Abbildung  $(\mathrm{d}_x \phi)^\top : \vec{X}^* \rightarrow \vec{Y}^*$  aus ?? zum Differential  $\mathrm{d}_x \phi : \vec{Y} \rightarrow \vec{X}$  notiert

$$\eta_x = (\mathrm{d}_x \phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$$

3. Zwei reelle Funktionen  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißen  **$\phi$ -verwandt** und wir schreiben  $\phi : g \rightsquigarrow f$  genau dann, wenn gilt  $g = f \circ \phi$ , als da heißt, wenn für alle  $x \in U$  gilt

$$g(x) = f(\phi(x))$$

3.1.17. Unter einer differenzierbaren Bijektion mit differenzierbarer Umkehrabbildung haben alle Vektorfelder, Kovektorfelder und Funktionen jeweils genau einen Verwandten, und unter der Identität sind sie jeweils selbst dieser einzige Verwandte. Ist allgemeiner  $\phi : U \rightarrow V$  differenzierbar aber sonst beliebig, so hat jedes Kovektorfeld  $\omega$  auf  $V$  immer noch genau einen “Rückwärtsverwandten” auf  $U$ , der eben gegeben wird durch die Formel  $\eta_x = (\mathrm{d}_x \phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$  und der notiert wird als

$$\eta = \phi^*(\omega)$$



SkriptenBilder/BildVSch.png

Dieses Bild soll den Effekt der Scherung  $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x + y, y)$  auf dem Kovektorfeld  $dy$  und dem Vektorfeld  $\partial_y$  darstellen. Bei der bildlichen Darstellung unseres Kovektorfelds folgen wir den auf Seite 390 im Anschluß an 3.1.2 eingeführten Konventionen. Man erkennt, daß  $dy$  unter dieser Scherung verwandt ist zu sich selber, in Formeln  $\phi : dy \rightsquigarrow dy$ , wohingegen  $\partial_y$  verwandt ist zu  $\partial_x + \partial_y$ , in Formeln  $\phi : \partial_y \rightsquigarrow \partial_x + \partial_y$ . Alternativ und im Wesentlichen gleichbedeutend mag man sich auch auf den Standpunkt stellen, daß wir auf dem Wertebereich von  $\phi$  ein “versichertes Koordinatensystem”  $(u, v)$  eingeführt haben mit  $u$  und  $v$  den Komponenten der zu  $\phi$  inversen Abbildung, also  $u(x, y) = x - y$  und  $v(x, y) = y$ . Dann erhalten wir statt der obigen Verwandtschaften die Formeln  $dv = dy$  sowie

$$\partial_v = \partial_x + \partial_y.$$

Er heißt das **mit  $\phi$  zurückgezogene** oder **zurückgeholte Kovektorfeld**. Ebenso hat jede Funktion  $f$  auf  $V$  genau einen “Rückwärtsverwandten”, eben die Funktion  $f \circ \phi$ , die man auch die **mit  $\phi$  zurückgezogene Funktion** nennt und manchmal  $\phi^*(f)$  notiert. Bei Vektorfeldern liegen die Verhältnisse nicht so einfach, aber ist  $\phi$  surjektiv, so hat jedes Vektorfeld auf  $U$  zumindest nicht mehr als einen “Vorwärtsverwandten” auf  $V$ .

3.1.18. Verwandtschaft ist transitiv. Sei genauer zusätzlich zu den obigen Daten  $Z$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $W \subset Z$  eine halboffene Teilmenge und  $\psi : V \rightarrow W$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist ein Vektorfeld  $C$  auf  $W$  unter  $\psi$  verwandt zu  $B$ , so ist auch  $A$  unter  $\psi \circ \phi$  verwandt zu  $C$ , in Formeln implizieren  $\phi : A \rightsquigarrow B$  und  $\psi : B \rightsquigarrow C$  also  $\psi \circ \phi : A \rightsquigarrow C$ . Analoges gilt für Funktionen und Kovektorfelder und läßt sich in den beiden letzteren Fällen auch schreiben als  $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ , so daß etwa für jedes Kovektorfeld  $\kappa$  auf  $C$  gilt

$$(\psi \circ \phi)^*(\kappa) = \phi^*(\psi^*(\kappa))$$

Aus Gründen der formalen Vollständigkeit ergänze ich noch, daß unter der Identität natürlich jedes Vektorfeld und jedes Kovektorfeld und jede Funktion verwandt ist zu sich selber und nur zu sich selber.

3.1.19. Verwandte Funktionen haben verwandte Differentiale, in Formeln impliziert  $\phi : g \rightsquigarrow f$  also  $\phi : dg \rightsquigarrow df$ , und gleichbedeutend haben wir für alle  $f$  die Identität  $\phi^*(df) = d(\phi^*(f)) = d(f \circ \phi)$ . In der Tat gilt für jeden Punkt  $y$  nach der Definition der Verwandtschaft und der Kettenregel

$$(\phi^*(df))_y = (d_{\phi(y)}f) \circ d_y\phi = d_y(f \circ \phi)$$

3.1.20. Wenden wir verwandte Vektorfelder auf verwandte differenzierbare Funktionen an, so erhalten wir wieder verwandte Funktionen, in Formeln folgt aus  $\phi : A \rightsquigarrow B$  und  $\phi : g \rightsquigarrow f$  also  $\phi : Ag \rightsquigarrow Bf$  oder anders geschrieben  $(Bf) \circ \phi = A(f \circ \phi)$ . Das folgt direkt aus der Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Letzteres ist sogar eine hinreichende Bedingung: Gilt  $(Af) \circ \phi = B(f \circ \phi)$  für alle differenzierbaren Funktionen  $f$ , so folgt  $\phi : A \rightsquigarrow B$ .

*Beispiel* 3.1.21. Für  $X = \mathbb{R}^n$  mit Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und  $Y = \mathbb{R}^m$  mit Koordinaten  $y_1, \dots, y_m$  und  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$  in eine halboffene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ergibt sich  $\phi^*(dx_i) = d(\phi^*x_i) = d\phi_i = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$  unter Verwendung von 3.1.19 und 3.1.10. Folglich kann das Zurückholen von Kovektorfeldern in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^* \left( \sum_i a_i dx_i \right) = \sum_{i,j} (a_i \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$$

*Übung 3.1.22.* Verwandtschaft ist verträglich mit dem Bilden von Produkten von Funktionen. Verwandtschaft ist verträglich mit dem Bilden des Produkts von Funktionen und Vektorfeldern, in Formeln folgt aus Verwandtschaften  $\phi : g \rightsquigarrow f$  und  $\phi : A \rightsquigarrow B$  also  $\phi : gA \rightsquigarrow fB$  oder anders geschrieben folgt aus  $\phi : A \rightsquigarrow B$  bereits  $\phi : (f \circ \phi)A \rightsquigarrow fB$ . Verwandtschaft ist verträglich mit dem Bilden des Produkts von Funktionen und Kovektorfeldern, in Formeln folgt aus  $\phi : g \rightsquigarrow f$  und  $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$  also  $\phi : g\eta \rightsquigarrow f\omega$  oder anders geschrieben gilt  $\phi^*(f\omega) = (f \circ \phi)\phi^*\omega$ . Schließlich ist Verwandtschaft auch verträglich mit dem Auswerten von Kovektorfeldern auf Vektorfeldern, in Formeln folgt aus  $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$  und  $\phi : A \rightsquigarrow B$  also  $\phi : \langle \eta, A \rangle \rightsquigarrow \langle \omega, B \rangle$  alias aus  $\phi : A \rightsquigarrow B$  folgt  $\langle \phi^*\omega, A \rangle = \langle \omega, B \rangle \circ \phi$ . Das ist sogar eine hinreichende Bedingung: Gilt  $\langle \phi^*\omega, A \rangle = \langle \omega, B \rangle \circ \phi$  für alle Kovektorfelder  $\omega$ , so folgt  $\phi : A \rightsquigarrow B$ .

*Beispiel 3.1.23.* Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

und benutzen die üblichen Koordinaten  $x, y$  auf dem Wertebereich. Unter dieser Abbildung ist etwa das Kovektorfeld  $dx$  rechts verwandt zum Kovektorfeld  $d(r \cos \vartheta) = (\cos \vartheta) dr - (r \sin \vartheta) d\vartheta$  links. Ebenso ist das Kovektorfeld  $dy$  rechts verwandt zum Kovektorfeld  $d(r \sin \vartheta) = (\sin \vartheta) dr + (r \cos \vartheta) d\vartheta$  links. Um einen Verwandten für  $\partial_\vartheta$  zu suchen, wenn dieses Vektorfeld denn einen Verwandten haben sollte, machen wir den Ansatz  $\partial_\vartheta \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$  mit unbestimmten Funktionen  $a, b$  und finden durch Paaren mit  $dx$  leicht  $-(r \sin \vartheta) \rightsquigarrow a$  und durch Paaren mit  $dy$  ebenso  $(r \cos \vartheta) \rightsquigarrow b$ , womit wir für das Vektorfeld  $\partial_\vartheta$  links als einzigen Verwandten das Vektorfeld  $-y\partial_x + x\partial_y$  rechts finden. Das Vektorfeld  $\partial_r$  links hat keinen Verwandten rechts, denn derselbe Ansatz  $\partial_r \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$  führt zu  $P : \sin \vartheta \rightsquigarrow a$  und  $P : \cos \vartheta \rightsquigarrow b$ , und derartige Funktionen  $a, b$  gibt es nicht. Schränken wir jedoch unsere Polarkoordinatenabbildung ein zu einer Abbildung  $P : \{(r, \vartheta) \mid r > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , so gibt es derartige Funktionen doch und unser Vektorfeld  $\partial_r$  hat unter dieser Einschränkung den einzigen Verwandten

$$\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_x + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_y$$

Meist wird man mit diesen Begriffen etwas großzügiger umgehen, zwischen verwandte Objekte schlicht ein Gleichheitszeichen schreiben und es auch mit den Definitionsbereichen nicht so genau nehmen, so daß wir etwa schreiben

würden

$$\begin{aligned}\partial_r &= (\cos \vartheta)\partial_x + (\sin \vartheta)\partial_y = \left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_x + \left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)\partial_y \\ \partial_\vartheta &= -(r \sin \vartheta)\partial_x + (r \cos \vartheta)\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y \\ \partial_x &= (\cos \vartheta)\partial_r - (r^{-1} \sin \vartheta)\partial_\vartheta \\ \partial_y &= (\sin \vartheta)\partial_r + (r^{-1} \cos \vartheta)\partial_\vartheta \\ dx &= (\cos \vartheta)dr - (r \sin \vartheta)d\vartheta \\ dy &= (\sin \vartheta)dr + (r \cos \vartheta)d\vartheta \\ d\vartheta &= (-y/(x^2+y^2))dx + (x/(x^2+y^2))dy \\ dr &= \left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)dy\end{aligned}$$

Man kann die unteren Formeln auch so verstehen, daß eben  $dr$  das Differential der Funktion  $r : (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto r(x, y)$  meint. Bei  $d\vartheta$  wird es schon kritischer, da ja eigentlich  $\vartheta$  nur auf geschlitzten Ebenen definiert werden kann. Allerdings unterscheiden sich die auf verschiedenen geschlitzten Ebenen definierten  $\vartheta$  dann wieder nur um additive Konstanten, so daß sie alle dasselbe Differential haben und wir doch ein wohldefiniertes Kovektorfeld  $d\vartheta$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$  erhalten. Das ist auch der tiefere Grund dafür, daß alle unsere Standardvektorfelder in diesem Fall wohldefinierte Verwandte haben und wir mit unseren Gleichheitszeichen nicht in Teufels Küche kommen. Bei komplizierteren Vektorfeldern sähe das anders aus: So hat etwa das Vektorfeld  $\vartheta\partial_\vartheta$  gar keinen Verwandten, es sei denn, wir schränken unsere Polarkoordinatenabbildung noch weiter ein.

3.1.24. Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum  $X$  und eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  und ein Diffeomorphismus alias ein System lokaler Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n) : U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichnet man gerne mit  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  oder auch mit  $\partial_i$  diejenigen Vektorfelder auf  $U$ , die unter diesem Diffeomorphismus zu den eben eingeführten Vektorfeldern auf  $\mathbb{R}^n$  verwandt sind. Man beachte jedoch, daß für eine einzelne Funktion  $x : U \rightarrow \mathbb{R}$  nicht sinnvoll ein Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x}$  auf  $U$  erklärt werden kann: Selbst wenn sich unsere Funktion zu einem Koordinatensystem ergänzen lassen sollte, wird doch das durch diese Ergänzung erklärte Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x}$  wesentlich von der Wahl der anderen Koordinaten abhängen. All das steht im Gegensatz zum Differential  $dx$  einer Funktion  $x$ , das durchaus auch für eine einzelne Funktion sinnvoll definiert ist.

Übung 3.1.25. Unter der Inversion am Einheitskreis  $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus 0$ ,  $(x, y) \mapsto (u, v) = (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$  zeige man die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\begin{aligned}\partial_x &\rightsquigarrow (v^2 - u^2)\partial_u - 2uv\partial_v \\ \partial_y &\rightsquigarrow (u^2 - v^2)\partial_v - 2uv\partial_u\end{aligned}$$



Einige Werte des Vektorfelds  $\partial_r$  als durchgezogene Pfeile und des Vektorfeld  $\partial_\vartheta$  als gepunktete Pfeile, gezeichnet in der  $xy$ -Ebene.

### 3.2 Gradienten in krummlinigen Koordinaten\*

3.2.1. Gegeben eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine hinreichend differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man wie in 1.1.5 ihren **Gradienten** als das Vektorfeld

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \partial_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \partial_n$$

auf  $U$ . Ich will im Folgenden diskutieren, welche Form dieses Konstrukt in krummlinigen Koordinaten annimmt. Formal ist damit folgendes gemeint: Man betrachte zusätzlich  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und einen Diffeomorphismus  $\phi : V \xrightarrow{\sim} U$  und berechne aus  $(f \circ \phi)$  das unter  $\phi$  zu  $(\text{grad } f)$  verwandte Vektorfeld auf  $V$ . In der Notation wird vielfach  $\phi$  einfach weggelassen und nur die Bezeichnungen der Koordinaten deuten das Gemeinte an. Ist etwa  $\phi = P : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  wie in 3.1.23 die Polarkoordinatenabbildung, so erhalten wir mit den Formeln aus 3.1.23 sofort  $f_x = \cos \vartheta f_r - r^{-1} \sin \vartheta f_\vartheta$  und  $f_y = \sin \vartheta f_r + r^{-1} \cos \vartheta f_\vartheta$  und nach kurzer Rechnung die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\text{grad } f = f_x \partial_x + f_y \partial_y = f_r \partial_r + \frac{1}{r^2} f_\vartheta \partial_\vartheta$$

Man nennt sie die **Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten**. Hier haben wir die Notation  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  für die entsprechende partielle Ableitung aus 1.1.1 und die Abkürzung  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$  aus 3.1.14 für den besagten Differentialoperator alias besagtes Vektorfeld verwendet. Bereits bei der Transformation des Gradienten in Kugelkoordinaten wird die Rechnung jedoch recht aufwendig. Ich will im folgenden erklären, mit welchen Kunstgriffen man sie strukturieren und übersichtlicher gestalten kann.

3.2.2. Gegeben ein Vektorraum  $V$  über einem Körper  $k$  notieren wir

$$\text{Bil}(V) = \text{Bil}_k(V)$$

den Vektorraum aller bilinearen Abbildungen  $V \times V \rightarrow k$ . Gegeben Linearformen  $\lambda, \eta : V \rightarrow k$  notieren wir  $(\lambda \otimes \eta) \in \text{Bil}(V)$  die bilineare Abbildung  $(v, w) \mapsto \lambda(v)\eta(w)$ . Sicher ist  $(\lambda, \eta) \mapsto \lambda \otimes \eta$  selbst eine bilineare Abbildung  $V^* \times V^* \rightarrow \text{Bil}(V)$ . Statt  $\eta \otimes \eta$  schreibt man meist kürzer  $\eta^{\otimes 2}$ . Das Symbol  $\otimes$  wird in ?? noch mit mehr Bedeutung aufgeladen. Hier darf und soll es ausschließlich als bequeme Notation verstanden werden.

**Definition 3.2.3.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Ein **2-Tensor auf  $U$**  ist eine Abbildung

$$g : U \rightarrow \text{Bil}(\vec{X})$$

von  $U$  in den Raum  $\text{Bil}(\vec{X})$  aller bilinearen Abbildungen  $\vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine **Riemann'sche Metrik auf  $U$**  ist ein 2-Tensor  $g$ , der jedem Punkt  $p \in U$  ein Skalarprodukt  $g_p$  auf  $\vec{X}$  zuordnet.

*Beispiel 3.2.4.* Das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  liefert eine Riemann'sche Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  und auf jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Gegeben Kovektorfelder  $\omega$  und  $\eta$  auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  können wir den 2-Tensor

$$\begin{aligned} \omega \otimes \eta : U &\rightarrow \text{Bil}(\vec{X}) \\ p &\mapsto \omega_p \otimes \eta_p \end{aligned}$$

betrachten. Weiter können wir 2-Tensoren punktweise addieren und mit Funktionen multiplizieren. Die übliche Riemann'sche Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  kann in diesen Konventionen geschrieben werden als  $s = dx_1^{\otimes 2} + \dots + dx_n^{\otimes 2}$ . Eine beliebige Riemann'sche Metrik  $g$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  hat in diesen Notationen die Gestalt

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

für Funktionen  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , die an jedem Punkt  $p \in U$  eine positiv definite symmetrische Matrix bilden.

3.2.5. Gegeben ein Vektorraum  $V$  über einem Körper  $k$  liefert jede Bilinearform  $g \in \text{Bil}(V)$  eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{can}_g : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto (w \mapsto g(v, w)) \end{aligned}$$

von unserem Vektorraum in seinen Dualraum, die jedem Vektor  $v$  die Linearform "Paare mit  $v$ " zuordnet. Zum Beispiel hätten wir  $\text{can}_{\lambda \otimes \eta}(v) = \lambda(v)\eta$ . Gleichberechtigt könnten wir auch die Abbildung  $\text{can}_g^2 : v \mapsto (w \mapsto g(w, v))$  betrachten und müßten dann, um dieser Gleichberechtigung Ausdruck zu verleihen, eigentlich genauer  $\text{can}_g = \text{can}_g^1$  schreiben. Das würde jedoch die Notation schwerfälliger machen, und ich denke, diese zusätzliche Schwere wiegt den Gewinn an Klarheit nicht auf. An dieser Stelle möchte ich auch allen Leserinnen versichern, daß sie ganz genauso gemeint sind, wenn einmal von "dem Leser" die Rede ist. Ich denke auch in diesem Zusammenhang, daß die zusätzliche Schwere der geschlechtsneutralen Formulierungen den Gewinn an Klarheit nicht aufwiegt. Ist speziell  $g$  nichtausgeartet und  $V$  endlichdimensional, so ist  $\text{can}_g$  ein Isomorphismus  $\text{can}_g : V \xrightarrow{\sim} V^*$  und wir können auch sein Inverses  $\text{can}_g^{-1} : V^* \xrightarrow{\sim} V$  betrachten.

3.2.6. Gegeben ein Vektorfeld  $A$  und ein 2-Tensor  $g$  können wir ein Kovektorfeld  $\text{can}_g(A)$  bilden durch das Einsetzen von  $A$  in die erste Stelle von  $g$ . Ist unser 2-Tensor  $g$  an keiner Stelle ausgeartet, insbesondere also im Fall einer Riemann'schen Metrik, so ist diese Abbildung eine Bijektion

$$\text{can}_g : \{\text{Vektorfelder}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Kovektorfelder}\}$$

Bezeichnet speziell  $s$  das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ , so haben wir etwa  $\text{can}_s(a\partial_i) = a dx_i$  für jede Funktion  $a$ . Für unseren Gradienten aus 1.1.5 gilt folglich  $\text{grad } f = \text{can}_s^{-1}(df)$ . Im allgemeinen verwendet man die Notation

$$\text{grad}_g f := \text{can}_g^{-1}(df)$$

und nennt dies Vektorfeld den **Gradienten von  $f$  in Bezug auf die Riemann'sche Metrik  $g$**  oder allgemeiner in Bezug auf den nichtausgearteten 2-Tensor  $g$ .

**Definition 3.2.7.** Seien  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$  offene Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume und  $\phi : U \rightarrow V$  stetig differenzierbar. Vorgegebene 2-Tensoren  $s$  auf  $U$  und  $g$  auf  $V$  heißen  **$\phi$ -verwandt** und wir schreiben  $\phi : s \rightsquigarrow g$  genau dann, wenn für alle  $x \in U$  und  $v, w \in \vec{X}$  gilt

$$s_x(v, w) = g_{\phi(x)}((d_x\phi)(v), (d_x\phi)(w))$$

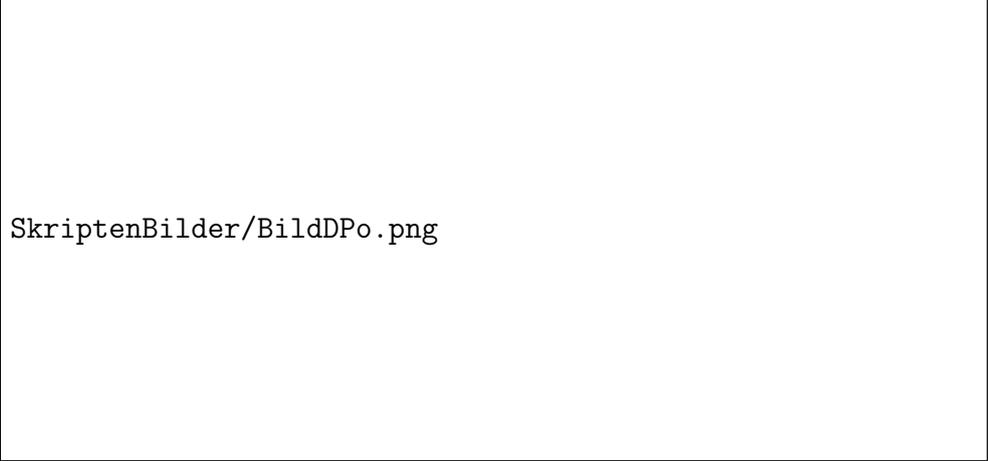
3.2.8. Wieder ist Verwandtschaft verträglich mit allen natürlichen Operationen, etwa mit dem Einsetzen von Vektorfeldern, dem Multiplizieren mit Funktionen, unserer Konstruktion  $\otimes$  etc. Insbesondere haben verwandte Funktionen unter verwandten Riemann'schen Metriken verwandte Gradienten, in Formeln impliziert  $\phi : s \rightsquigarrow g$  also die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\phi : \text{grad}_s(f \circ \phi) \rightsquigarrow \text{grad}_g f$$

Offensichtlich hat jeder 2-Tensor  $g$  auf  $V$  genau einen Verwandten auf  $U$ , den wir mit  $\phi^*g$  bezeichnen und den **zurückgeholten 2-Tensor** nennen. Gegeben eine parametrisierte Fläche im Raum oder allgemeiner eine differenzierbare Abbildung  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  bezeichnet man den symmetrischen 2-Tensor auf  $\mathbb{R}^2$ , der durch das Zurückholen der Standardmetrik entsteht, auch als die **erste Fundamentalform** unserer parametrisierten Fläche.

*Beispiel 3.2.9.* Unter der Polarkoordinatenabbildung  $P$  aus 3.1.23 ist die Standardmetrik  $s = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$  auf der  $xy$ -Ebene verwandt zum 2-Tensor

$$\begin{aligned} g &= (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \otimes (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \\ &\quad + (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \otimes (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \\ &= dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} \end{aligned}$$



SkriptenBilder/BildDPo.png

Dies Bild soll die Verwandtschaft von Riemann'schen Metriken  $f : dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} \rightsquigarrow dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$  verdeutlichen, mit  $f = P$  der Polarkoordinatenabbildung. Das Differential an der Stelle  $(r, \vartheta) = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$  ist dargestellt durch seinen Effekt auf der Standardbasis, die wir auch  $(\partial_r, \partial_\vartheta)$  notieren könnten. Die Standardbasis geht an jeder Stelle über in eine Orthogonalbasis und das Bild des ersten Basisvektors hat auch wieder die Länge Eins, das Bild des zweiten Basisvektors jedoch im allgemeinen die Länge  $r$  und in unserem Fall die Länge  $1\frac{1}{2}$ . Die Standardmetrik auf der  $xy$ -Ebene entspricht folglich einer Metrik auf der  $r\vartheta$ -Ebene, bei der  $\partial_r$  und  $\partial_\vartheta$  aufeinander senkrecht stehen und  $\partial_r$  die Länge Eins hat, wohingegen  $\partial_\vartheta$  die Länge  $r$  hat. Diese Eigenschaften aber charakterisieren genau unsere Metrik  $dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2}$ .

auf der  $r\vartheta$ -Ebene, der auf dem Komplement der Nullstellenmenge von  $r$  auch wieder eine Riemann'sche Metrik ist. Daß hier keine gemischten Tensoren  $dr \otimes d\vartheta$  auftreten, hat den Grund, daß die Vektorfelder  $\partial_r$  und  $\partial_\vartheta$  auch in der  $xy$ -Ebene an jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Die Koeffizienten 1 und  $r^2$  bedeuten gerade die quadrierten Längen  $s(\partial_r, \partial_r)$  und  $s(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta)$  der Vektoren dieser Vektorfelder. Für eine Funktion  $f = f(x, y)$  muß schließlich  $df$  unter  $P$  verwandt sein zu  $d(f \circ P)$ , und dann muß auch  $\text{grad } f = \text{grad}_s f = \text{can}_s^{-1}(df)$  verwandt sein zu

$$\text{grad}_g(f \circ P) = \text{can}_g^{-1} d(f \circ P) = \text{can}_g^{-1}(f_r dr + f_\vartheta d\vartheta) = f_r \partial_r + \frac{1}{r^2} f_\vartheta \partial_\vartheta$$

Damit haben wir die Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten ein weiteres Mal hergeleitet.

*Ergänzung 3.2.10.* Ingenieure arbeiten gerne mit einer anderen Darstellung von Vektorfeldern und betrachten etwa auf dem  $\mathbb{R}^2$  die auf euklidische Länge Eins normierten Vektorfelder  $\mathbf{e}_r = \partial_r$  und  $\mathbf{e}_\vartheta = r^{-1} \partial_\vartheta$ . Natürlich kann jedes Vektorfeld  $v$  auf dem Komplement des Ursprungs auch als  $v = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\vartheta$  geschrieben werden mit geeigneten reellwertigen Funktionen  $a, b$ . In Formelsammlungen findet man häufig Formeln für Gradienten und dergleichen in dieser Darstellung, zum Beispiel hätten wir  $\text{grad } f = (\partial_r f)\mathbf{e}_r + r^{-1}(\partial_\vartheta f)\mathbf{e}_\vartheta$ . Meist heißen die Koeffizienten eines Vektorfelds  $v = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\vartheta$  dann auch noch  $a = v_r$ ,  $b = v_\vartheta$ . Das verbietet sich für uns jedoch, da wir die Indexnotation bereits als Kürzel für partielle Ableitungen verwenden.

*Beispiel 3.2.11.* Die **Kugelkoordinaten** im Raum werden beschrieben durch eine geeignete Einschränkung der Abbildung

$$\begin{aligned} K : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \vartheta, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) \end{aligned}$$

deren anschauliche Bedeutung in nebenstehendem Bild erläutert wird.

*Übung 3.2.12.* Man zeige, daß die Standardmetrik im  $xyz$ -Raum unter Kugelkoordinaten, wie sie 3.2.11 eingeführt werden, verwandt ist zur Metrik

$$g = dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} + (r \sin \vartheta)^2 d\varphi^{\otimes 2}$$

*Übung 3.2.13.* Man zeige, daß der Gradient in Kugelkoordinaten, wie sie 3.2.11 eingeführt werden, ausgedrückt wird durch die Formel

$$\text{grad } f = f_r \partial_r + r^{-2} f_\vartheta \partial_\vartheta + (r \sin \vartheta)^{-2} f_\varphi \partial_\varphi$$



SkriptenBilder/BildKK.png

Die Kugelkoordinatenabbildung hat die folgende anschauliche Bedeutung:  
 Stellen wir uns ein Teleskop vor, das im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems auf einem waagerechten, d.h. in der  $xy$ -Ebene liegenden Drehteller steht und senkrecht nach oben zeigt. Um einen Stern zu betrachten, schwenken wir zunächst das Teleskop nach unten in Richtung der positiven  $x$ -Achse um einen Winkel  $\vartheta \in [0, \pi]$  und drehen dann den Drehteller um einen geeigneten Winkel, sagen wir um den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  gegen den Uhrzeigersinn. Ist schließlich  $r$  die Entfernung unseres Sterns, so gibt  $K(r, \vartheta, \varphi)$  seine kartesischen Koordinaten an. Natürlich ist im Fall eines senkrecht über oder unter dem Teleskop befindlichen Sterns  $\varphi$  nicht eindeutig, und befindet sich das Teleskop bereits im Stern, so sind beide Winkel nicht eindeutig. Die Einschränkung unserer Abbildung auf  $r > 0$ ,  $\vartheta \in (0, \pi)$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  hinwiederum ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv. Oft findet man auch eine Variante, bei der wir uns das Teleskop zu Beginn horizontal in Richtung der positiven  $x$ -Achse ausgerichtet denken und wo die zweite Koordinate  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  den Winkel bezeichnet, um den das Teleskop nach oben bzw. bei negativem Winkel nach unten geschwenkt werden muß. Die Formeln lauten dann abweichend

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$

*Ergänzung 3.2.14.* Ein 2-Tensor heißt **symmetrisch** bzw. **antisymmetrisch** genau dann, wenn er an jedem Punkt als Wert eine symmetrische bzw. antisymmetrische Bilinearform auf  $\vec{X}$  annimmt. Antisymmetrische 2-Tensoren werden wir später als sogenannte 2-Formen wiedertreffen. Eine Riemann'sche Metrik ist per definitionem ein symmetrischer 2-Tensor mit der zusätzlichen Eigenschaft, positiv definit zu sein.

### 3.3 Wegintegrale

**Definition 3.3.1.** Gegeben  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  ein stetig differenzierbarer Weg in einer halboffenen Teilmenge  $A$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  und ein stetiges Kovektorfeld  $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$  auf  $A$  definieren wir eine reelle Zahl  $\int_{\gamma} \omega$ , das **Integral des Kovektorfelds  $\omega$  längs des Weges  $\gamma$** , durch die Vorschrift

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

In der physikalisch motivierten Terminologie nach II.7.2.2 gilt es also, zu jedem Zeitpunkt  $t$  den Kovektor  $\omega_{\gamma(t)}$  auf dem Geschwindigkeitsvektor  $\gamma'(t)$  auszuwerten und die so entstehende reellwertige Funktion zu integrieren.

**3.3.2 (Wegintegrale über Geradensegmente).** Gegeben ein stetiges Kovektorfeld  $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$  auf einer halboffenen Teilmenge  $A$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  und Punkte  $p, q \in A$ , bei denen das ganze verbindende Geradensegment  $[p, q]$  in  $A$  liegt, vereinbaren wir für das Integral unseres Kovektorfelds über den geraden Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ ,  $t \mapsto p + t(q - p)$  von  $p$  nach  $q$  die Notation

$$\int_p^q \omega := \int_{\gamma} \omega$$

Für ein stetiges Kovektorfeld  $\omega = f(t) dt$  auf einem reellen Intervall  $A \subset \mathbb{R}$  und  $p, q \in A$  erhalten wir dann insbesondere

$$\int_p^q \omega = \int_0^1 f(p + t(q - p)) (q - p) dt = \int_p^q f(t) dt$$

so daß unsere neue Notation links sich als eine Verallgemeinerung unserer schon vor langem eingeführten Notation rechts erweist. Weiter erkennen wir, daß in diesem Kalkül das Differential  $dt$  der Identität  $t$  auf  $\mathbb{R}$  in einem ideellen Sinn dasselbe bedeutet wie das  $dt$ , das wir bisher bei Integralen oft hinzugefügt hatten, um klar zu machen, über welche Variable integriert werden soll. Ist  $A \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, so erhalten wir mit unserer Formel  $df = f'(t) dt$  und

dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für beliebige  $a, b \in A$  insbesondere

$$\int_a^b df = \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

*Beispiel 3.3.3.* Für einen beliebigen stetig differenzierbaren Weg  $\gamma$  und ein beliebiges Kovektorfeld  $\omega$  hat nun das mit dem Weg zurückgeholte Kovektorfeld gerade die Gestalt  $\gamma^*\omega = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$ , so daß wir mit unserer Notation aus 3.3.2 die Definition des Wegintegrals umschreiben können zur Identität

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \gamma^*\omega$$

Diese Darstellung ist für explizite Rechnungen besonders praktisch. Integrieren wir etwa das Kovektorfeld  $\omega = x dx + x^4 dy$  auf dem  $\mathbb{R}^2$  über den Weg  $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $\gamma(t) = (\sqrt{t}, \log t)$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} x dx + x^4 dy \\ &= \int_1^2 \sqrt{t} d(\sqrt{t}) + (\sqrt{t})^4 d(\log t) \\ &= \int_1^2 \sqrt{t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + t^2 t^{-1} dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + t\right) dt = 2 \end{aligned}$$

**Lemma 3.3.4 (Anschauung für das Wegintegral).** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  ein stetig differenzierbarer Weg in einer halboffenen Teilmenge  $A$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  und sei  $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$  ein stetiges relatives Kovektorfeld auf  $A$ . Betrachtet man in der Situation der Definition des Wegintegrals 3.3.1 für alle  $r \geq 1$  die äquidistanten Unterteilungen  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$  und bildet die **Riemannsummen**

$$S_{\gamma}^r(\omega) = \sum_{i=1}^r \omega_{\gamma(a_i)}(\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}))$$

so ist unser Wegintegral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$\int_{\gamma} \omega = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{\gamma}^r(\omega)$$

*Beweis.* Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf dem Richtungsraum  $\vec{X}$  und bezeichne  $\|\cdot\|$  auch die zugehörige Operatornorm auf  $\vec{X}^*$ . Nach II.3.5.5 ist unser Integral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$S^r = \sum_{i=1}^r \omega_{\gamma(t_i)}(\gamma'(t_i)) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Gegeben  $\varepsilon > 0$  finden wir wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\gamma'$  ein  $\delta > 0$  derart, daß gilt  $|s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon$ . Ist  $r$  so groß, daß die Länge der Intervalle  $t_i - t_{i-1}$  unter  $\delta$  sinkt, so folgt mit dem Mittelwertsatz II.7.2.11 in mehreren Veränderlichen  $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \in (t_i - t_{i-1})B(\gamma'(t_i); \varepsilon)$ , was wir umschreiben können zu

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})\gamma'(t_i)\| < (t_i - t_{i-1})\varepsilon$$

Das hinwiederum liefert für  $r$  oberhalb einer geeigneten Schranke die Abschätzung

$$|S_\gamma^r(\omega) - S^r| \leq \sum_{i=1}^r \|\omega_{\gamma(t_i)}\| (t_i - t_{i-1})\varepsilon \leq (\sup_{t \in [a,b]} \|\omega_{\gamma(t)}\|) (b - a)\varepsilon$$

Diese Differenz strebt also gegen Null für  $r \rightarrow \infty$ , folglich strebt die Folge  $S_\gamma^r(\omega)$  gegen denselben Grenzwert wie die Folge  $S^r$ .  $\square$

*Beispiel 3.3.5.* Ein Kovektorfeld auf der Zeitachse kann, wie in 3.1.5 erklärt, nach der Wahl eines ausgezeichneten Drehsinns als eine Vorschrift aufgefaßt werden, die jedem Zeitpunkt eine Drehgeschwindigkeit zuordnet. Das Integral eines derartigen Kovektorfelds über einen Weg in der Zeitachse liefert dann anschaulich gesprochen die Zahl der Umdrehungen in Richtung des ausgezeichneten Drehsinns zwischen Anfangszeitpunkt und Endzeitpunkt. Liegt der Endzeitpunkt hier vor dem Anfangszeitpunkt, so ist entsprechend das Negative zu nehmen.

*Ergänzung 3.3.6 (Wegintegrale von Vektorfeldern).* Redet man für  $X = \mathbb{R}^n$  vom Integral eines Vektorfelds  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  längs eines Weges oder von der **Zirkulation eines Vektorfelds in einem Weg**, so ist das Integral des Kovektorfelds  $\omega = \langle v, \rangle$  gemeint, das in Formeln gegeben wird durch  $\omega = v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n$ . In der Physik wird das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  meist  $v \cdot w$  notiert und unser Wegintegral über einen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  würde geschrieben als

$$\int_\gamma v \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b v \cdot d\gamma = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Die Bedeutung der Terme des rechtesten Integrals sollte hier klar sein. In der Mitte ist zu verstehen  $d\gamma = d_t\gamma = \dot{\gamma}(t) dt$ . Ganz links meint  $d\mathbf{x}$  ein "kleines vektoriell Kurvenelement" und das  $\mathbf{x}$  ist fett gedruckt um anzuzeigen, daß ein Vektor gemeint ist. Ich mag diese Notation nicht besonders, die fette Schreibweise ist auch an der Tafel schlecht umzusetzen. Allgemeiner



Der Fluß des Vektorfelds  $\partial_r = (x/r)\partial_x + (y/r)\partial_y$  durch den Weg  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (3 \cos t, 3 \sin t)$  ergibt sich nach kurzer Rechnung zu  $6\pi$ . Die Zirkulation desselben Vektorfeldes in demselben Weg ist dahingegen Null.

kann man Wegintegrale von Vektorfeldern  $v$  bilden, wann immer ein Skalarprodukt oder allgemeiner ein ausgezeichnete 2-Tensor  $g$  zur Verfügung steht, indem wir eben zu unserem Vektorfeld das Kovektorfeld  $\omega = \text{can}_g^1(v)$  oder auch  $\omega = \text{can}_g^2(v)$  bilden und diese Kovektorfelder dann integrieren wie in 3.3.1 erklärt. Ohne einen ausgezeichneten 2-Tensor gelingt es eben nicht, zwei Vektoren in natürlicher Weise zu paaren: Das gelingt ohne zusätzliche Wahlen in natürlicher Weise nur für einen Vektor und einen Kovektor.

*Ergänzung 3.3.7.* Redet man für  $X = \mathbb{R}^2$  vom **Fluß eines Vektorfelds**  $v = (v_1, v_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  **durch einen Weg**, so ist das Integral über das Kovektorfeld  $\omega = v_1 dy - v_2 dx$  gemeint. Dies Kovektorfeld kann alternativ auch beschrieben werden durch die Formel  $\omega_p(u) = \det(v(p)|u)$ , in der unsere Vektoren  $v(p)$  und  $u$  als Spaltenvektoren aufzufassen sind.

3.3.8. In der Literatur scheint mir eine gewisse Verwirrung zu herrschen was die Begriffe “Wegintegral” und “Kurvenintegral” angeht. Die hier gewählte Terminologie soll zum Ausdruck bringen, daß für einen injektiven stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  unser Kurvenintegral nur von der Bildmenge  $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$  abhängt, die wir im Sinne unserer Definition 7.7.2 eine “Kurve” werden nennen dürfen. Unser Wegintegral dahingegen hängt auch von der “durch den Weg  $\gamma$  gegebenen Richtung auf unserer Kurve” ab und ändert sein Vorzeichen, wenn wir die Kurve “in der umgekehrten Richtung durchlaufen”. Andererseits bleibt das Wegintegral unverändert selbst bei nicht notwendig monotoner “Neuparametrisierung”, wenn diese nur den Anfang bzw. das Ende des neuen Parameterintervalls auf den Anfang bzw. das Ende des Alten wirft, siehe 3.3.11. Das Kurvenintegral dahingegen ändert sich bei derartigen Neuparametrisierungen im allgemeinen sehr wohl.

**Satz 3.3.9 (Transformation von Wegintegralen).** *Seien  $X$  und  $Y$  endlichdimensionale reelle Räume,  $A$  bzw.  $B$  darin halboffene Teilmengen und  $\phi : A \rightarrow B$  stetig differenzierbar. Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  ein stetig differenzierbarer Weg in  $A$  und  $\omega$  ein stetiges Kovektorfeld auf  $B$ , so gilt*

$$\int_{\gamma} \phi^* \omega = \int_{\phi \circ \gamma} \omega$$

3.3.10. Zwei Wege  $\gamma : I \rightarrow A$  und  $\kappa : J \rightarrow B$  heißen  $\phi$ -**verwandt** und wir schreiben  $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$  genau dann, wenn gilt  $\kappa = \phi \circ \gamma$ , als da heißt, wenn sie denselben Definitionsbereich  $I = J$  haben und für alle  $t \in I$  gilt

$$\kappa(t) = \phi(\gamma(t))$$

Sicher hat jeder Weg  $\gamma$  in  $A$  genau einen Verwandten, nämlich den Weg  $\phi \circ \gamma$ . Der Inhalt des Satzes läßt sich mit diesen Begriffsbildungen dahingehend

zusammenfassen, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Genauer folgt aus der Verwandtschaft von Wegen  $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$  und der Verwandtschaft von Kovektorfeldern  $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$  die Gleichheit der Wegintegrale  $\int_{\gamma} \eta = \int_{\kappa} \omega$ .

*Beweis.* Wir rechnen  $\int_{\gamma} \phi^* \omega = \int_a^b \gamma^* \phi^* \omega = \int_a^b (\phi \circ \gamma)^* \omega = \int_{\phi \circ \gamma} \omega$ , wo wir 3.3.3, 3.1.18 und nochmals 3.3.3 angewandt haben.  $\square$

**Proposition 3.3.11 (Unabhängigkeit von der Parametrisierung).** *Gegeben  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  ein stetig differenzierbarer Weg in einem endlichdimensionalen reellen Raum  $X$  und  $\omega$  ein stetiges relatives Kovektorfeld auf einer halboffenen Teilmenge, die sein Bild umfaßt, und  $u : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar mit  $u(c) = a$  und  $u(d) = b$  gilt*

$$\int_{\gamma \circ u} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

3.3.12. Der folgende Beweis zeigt auch, daß bei einer richtungsumkehrenden Umparametrisierung, also für  $u$  mit  $u(c) = b$  und  $u(d) = a$  das Wegintegral über den umparametrisierten Weg das Negative des Wegintegrals über den ursprünglichen Weg ist. In 7.4.16 werden wir allgemeiner das Integral von  $k$ -Formen über  $k$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten einführen und speziell im Fall  $k = 1$  ein Integral von Kovektorfeldern über orientierte Kurven erhalten, das nach 7.5.10 im wesentlichen die in der Proposition enthaltene Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung zu einer Definition umgießt.

*Beweis.* Wir schreiben unsere Behauptung um zu  $\int_c^d u^*(\gamma^* \omega) = \int_a^b \gamma^* \omega$ . Für  $\eta = f(t) dt$  ein beliebiges stetiges Kovektorfeld auf  $[a, b]$ , insbesondere auch für  $\eta = \gamma^* \omega$  gilt jedoch  $u^* \eta = f(u(\tau)) u'(\tau) d\tau$  und damit  $\int_c^d u^* \eta = \int_a^b \eta$  nach der Substitutionsregel II.4.6.1.  $\square$

3.3.13. Wir können nun auch den in III.1.4.8 erklärten Trick zur Berechnung der Integrale von rationalen Ausdrücken in  $(x, \sqrt{x^2 + 1})$  geometrisch verstehen. Gegeben solch ein rationaler Ausdruck  $R(x, y)$  betrachten wir dazu auf einer geeigneten Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  die Differentialform  $R(x, y) dx$  und den Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (t, \sqrt{t^2 + 1})$  und fassen unser Integral auf als Wegintegral

$$\int_a^b R(t, \sqrt{t^2 + 1}) dt = \int_{\gamma} R(x, y) dx$$

Solch ein Wegintegral ist nach 3.3.11 unabhängig von der Parametrisierung. Unser Weg durchläuft ein Stück der Hyperbel  $y^2 - x^2 = 1$ , genauer ein Stück

des Hyperbelastes mit  $y > 0$ . Diesen Ast können wir nach II.4.7.6 auch parametrisieren durch  $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\varphi(\tau) = \left( \frac{2\tau}{\tau^2 - 1}, \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2} \right)$$

und bei dieser Parametrisierung führt uns unser Wegintegral ganz offensichtlich auf das Integral einer rationalen Funktion in  $\tau$ , das wir nach III.1.4 im Prinzip durch bekannte Funktionen ausdrücken können.

**Satz 3.3.14 (Wegintegral über ein Differential).** *Ist  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $A \subset X$  eine halboffene Teilmenge,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  ein stetig differenzierbarer Weg in  $A$ , so gilt*

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

*Beweis.* Es gilt  $\int_{\gamma} df = \int_a^b \gamma^*(df) = \int_a^b d(f \circ \gamma) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$  nach 3.3.3, 3.1.19 und 3.3.2.  $\square$

3.3.15. Wir interessieren uns nun für die Frage, unter welchen Bedingungen ein stetiges Kovektorfeld das Differential einer Funktion ist, und inwieweit diese Funktion eindeutig bestimmt ist. Diese Fragen werden nach einigen Vorbereitungen durch 3.6.1 und 3.4.6 beantwortet.

*Ergänzung 3.3.16.* Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $W$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $A \subset X$  eine halboffene Teilmenge. Ein  **$W$ -wertiges Kovektorfeld auf  $A$**  ist eine Abbildung

$$\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Sie ordnet also jedem Punkt  $p \in A$  eine lineare Abbildung des Richtungsraums in den Raum  $W$  zu. Ist etwa  $Y$  ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und  $A$  halboffen und  $f : A \rightarrow Y$  differenzierbar, so ist  $df$  oder genauer  $p \mapsto d_p f$  ein  $\vec{Y}$ -wertiges Kovektorfeld auf  $A$ . Ist nun  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  ein stetig differenzierbarer Weg in einer halboffenen Teilmenge  $A$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  und  $\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$  ein stetiges Kovektorfeld auf  $A$  mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $W$ , so definieren wir in Verallgemeinerung des Falls reellwertiger Kovektorfelder aus 3.3 einen Vektor  $(\int_{\varphi} \omega) \in W$ , das **Integral des  $W$ -wertigen Kovektorfelds  $\omega$  längs des Weges  $\varphi$** , durch die Vorschrift

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) dt$$

Auf der rechten Seite ist also für jeden Zeitpunkt  $t$  der Homomorphismus  $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \rightarrow W$  auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor  $\varphi'(t) \in \vec{X}$ , und die so entstehende stetige Abbildung  $[a, b] \rightarrow W$  ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von III.1.3.3.

*Ergänzendes Beispiel 3.3.17.* In der Physik begegnen einem insbesondere oft Kovektorfelder mit Werten in eindimensionalen reellen Vektorräumen. Zum Beispiel wird man sich ein Kraftfeld auf dem Anschauungsraum  $\mathbb{E}$  aus ?? a priori wie in VII.3.1.7 erklärt als ein “Vektorfeld mit Einheiten” denken, genauer als Abbildung

$$F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle \text{g/s}^2 \rangle\rangle$$

Da es sich jedoch mit Kovektorfeldern bei Koordinatenwechseln sehr viel besser rechnen läßt als mit Vektorfeldern, ist es oft günstiger, die durch das kanonische Skalarprodukt  $s : \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  aus ?? gegebene Identifikation  $\text{can}_s : \vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \mathbb{L}^{\otimes 2})$  nachzuschalten und unser Kraftfeld stattdessen als eine Abbildung

$$\tilde{F} : \mathbb{E} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \langle\langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle)$$

aufzufassen. Die Elemente des eindimensionalen Vektorraums

$$\langle\langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle = \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$$

heißen in der Physik auch **Energien**. In diesem Sinne können wir ein Kraftfeld dann also auch als ein Energie-wertiges Kovektorfeld auffassen. Das Wegintegral über dieses Kovektorfeld heißt die bei Durchlaufen des Weges in besagtem Kraftfeld freiwerdende Energie, und ihr Negatives die zu verrichtende **Arbeit**. Anschaulich und etwas vage gesprochen ordnet das Negative dieses Kovektorfelds nämlich gerade “jeder kleinen Verrückung die Arbeit zu, die bei dieser kleinen Verrückung gegen das Kraftfeld zu leisten wäre”. Eine energiewertige Abbildung  $V : \mathbb{E} \rightarrow \langle\langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$  mit  $dV = -\tilde{F}$  heißt in der Physik ein **Potential** unseres Kraftfelds.

*Ergänzendes Beispiel 3.3.18.* Zentral in der sogenannten “Funktionentheorie” sind die Wegintegrale komplexwertiger Kovektorfelder, die auf offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene definiert sind, vergleiche VIII.1.3.2 und VIII.1.5. Üblicherweise bezeichnet in diesem Kontext  $z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Identität und  $dz$  ihr Differential, ein komplexwertiges Kovektorfeld auf  $\mathbb{C}$ . Mit  $f(z) dz$  bezeichnet man dann das Produkt dieses Kovektorfelds mit einer komplexwertigen Funktion  $z \mapsto f(z)$ . Das Integral derartiger Kovektorfelder über Integrationswege liefert in diesem Fall entsprechend komplexe Zahlen.

### 3.4 Wegzusammenhang

**Definition 3.4.1.** Ist  $X$  ein topologischer Raum und sind  $x, y \in X$  Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  mit  $\gamma(a) = x$  und  $\gamma(b) = y$  einen **Weg von  $x$  nach  $y$** . Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegweise zusammenhängend** oder auch kurz **wegzusammenhängend** genau dann, wenn er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt.

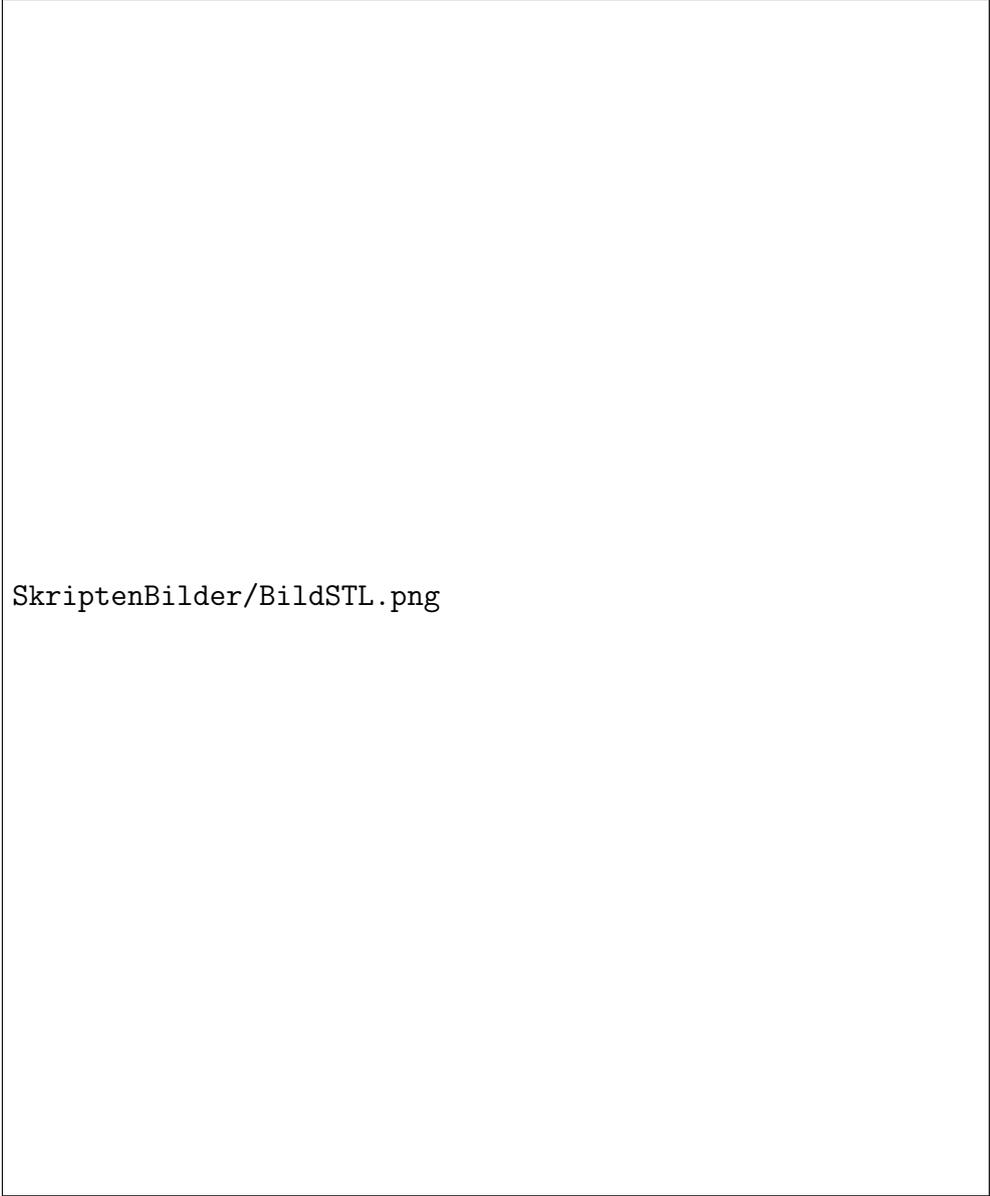
*Übung 3.4.2.* Auf jedem topologischen Raum  $X$  definiert man die Relation  $W$  der “Wegverbindbarkeit” durch die Vorschrift, daß gilt  $xWy$  genau dann, wenn es in  $X$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt. Man zeige, daß das eine Äquivalenzrelation ist. Hinweis: Die Transitivität ergibt sich durch das “Aneinanderhängen von Wegen” und die Stetigkeit der so entstehenden Wege folgt mit II.6.5.35. Die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit heißen die **Wegzusammenhangskomponenten** unseres Raums. Man zeige, daß die Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums offen sind genau dann, wenn jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt.

**Definition 3.4.3.** Unter einem **stückweise linearen Weg** in einem reellen Raum verstehen wir einen Weg, der aus endlich vielen Geradensegmenten zusammengesetzt ist. Genauer und in Formeln heißt als ein Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  in einem reellen Raum stückweise linear genau dann, wenn es eine Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  gibt derart, daß  $\gamma$  auf jedem Teilintervall  $[a_{i-1}, a_i]$  mit der Restriktion einer affinen Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow X$  übereinstimmt.

3.4.4. Im Lichte unserer allgemeinen Definitionen müßten wir eigentlich eher von einem “stückweise affinen Weg” reden, aber das tut kein Mensch.

**Lemma 3.4.5.** *In einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines normierten reellen Raums lassen sich je zwei Punkte auch durch einen stückweise linearen Weg verbinden.*

*Beweis.* Sei  $A \subseteq V$  unsere Teilmenge und seien  $x, y \in A$  gegeben. Nach Annahme gibt es einen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  von  $x$  nach  $y$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $A \neq V$  annehmen. Dann ist der Abstand zum Komplement von  $A$  nach II.6.2.22 eine stetige Funktion  $d_{V \setminus A} : V \rightarrow \mathbb{R}$  ohne Nullstelle auf  $A$  und  $d_{V \setminus A} \circ \gamma$  hat nach II.3.4.3 auf  $[a, b]$  ein Minimum  $\varepsilon > 0$ , als da heißt, es gibt  $\varepsilon > 0$  derart, daß alle Punkte aus  $\gamma([a, b])$  mindestens den Abstand  $\varepsilon$  zum Komplement von  $A$  haben. Andererseits ist  $\gamma$  gleichmäßig stetig, wir finden also eine Unterteilung  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$  unseres Intervalls mit  $\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| < \varepsilon$  für  $1 \leq i \leq n$ . Ein zwischen den



SkriptenBilder/BildSTL.png

Eckpunkten  $x = \gamma(a_0), \gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n) = y$  jeweils linear verlaufender Weg bleibt also ganz in  $A$ . Damit ist gezeigt, daß sich je zwei Punkte aus  $A$  auch durch einen stückweise linearen Weg in  $A$  verbinden lassen.  $\square$

**Lemma 3.4.6.** *Auf einer offenen wegzusammenhängenden Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist jede differenzierbare reellwertige Funktion mit verschwindendem Differential konstant.*

*Beweis.* Eine differenzierbare Funktion mit verschwindendem Differential muß nach 3.3.14 am Anfang und Ende jedes stetig differenzierbaren Weges und dann auch am Anfang und Ende jedes stückweise linearen Weges denselben Wert annehmen. Das Lemma folgt damit aus 3.4.5.  $\square$

**Definition 3.4.7.** Eine Teilmenge eines topologischen Raums nennen wir **diskret** genau dann, wenn jeder ihrer Punkte eine Umgebung besitzt, in der kein anderer Punkt besagter Teilmenge liegt. Zum Beispiel ist die Menge aller Brüche  $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$  mit einer Eins im Zähler eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlengeraden.

3.4.8. In anderen Worten nennen wir also eine Teilmenge eines topologischen Raums diskret genau dann, wenn sie mit der Spurtopologie im Sinne von II.6.5.10 ein diskreter topologischer Raum im Sinne von II.6.5.22 wird. Andere Autoren verstehen unter einer diskreten Teilmenge eines topologischen Raums abweichend eine Teilmenge derart, daß jeder Punkt des gesamten Raums eine Umgebung besitzt, in der höchstens ein Punkt besagter Teilmenge liegt. In unserer Terminologie sind das genau die diskreten abgeschlossenen Teilmengen.

*Übung 3.4.9.* Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  ist für  $n > 1$  wegzusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung “abgeschlossen”, ist dann aber schwerer zu zeigen.

*Übung 3.4.10.* Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und wegzusammenhängend und  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein affiner Teilraum einer Dimension  $\dim A \leq n - 2$  alias einer Kodimension mindestens Zwei, so ist auch  $U \setminus A$  wegzusammenhängend. Für Teilräume  $A$  der Kodimension Eins alias affine Hyperebenen  $A$  gilt das natürlich nicht!

**Definition 3.4.11.** Eine Funktion auf einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , die um jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in einer Umgebung durch ihre Taylorreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**.

3.4.12. Wir werden in VIII.1.7.7 zeigen, daß Potenzreihen in einer Veränderlichen analytische Funktionen liefern. Analog kann man es auch für Potenzreihen in mehreren Veränderlichen zeigen.

*Übung 3.4.13.* Stimmen zwei auf derselben wegzusammenhängenden offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  definierte analytische Funktionen auf einer Umgebung eines Punktes überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man ziehe sich mithilfe stückweise linearer Wege auf den Fall  $n = 1$  zurück.

*Ergänzende Übung 3.4.14.* Man zeige: Die Gruppe  $SO(n)$  aller orthogonalen  $(n \times n)$ -Matrizen mit Determinante Eins ist wegzusammenhängend. Hinweis: ?? Die Gruppe  $GL(n; \mathbb{R})^+$  aller invertierbaren reellen  $(n \times n)$ -Matrizen mit positiver Determinante ist wegzusammenhängend. Hinweis: ?? Die vorgeschlagenen Lösungsansätze laufen auf eine Flickschusterei hinaus. Einen konzeptionellen Beweis werden wir in [VI.3.9.6](#) kennenlernen.

*Ergänzende Übung 3.4.15.* Das Bild eines wegzusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets wieder wegzusammenhängend. Die wegzusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind gerade die nichtleeren Intervalle.

*Übung 3.4.16.* Gegeben ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist jede Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, entweder leer oder bereits der ganze Raum. Hinweis: Man wähle sonst einen Weg von einem Punkt unserer Teilmenge in ihr Komplement und konstruiere einen Widerspruch.

*Ergänzung 3.4.17.* Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend** genau dann, wenn er nicht leer ist und jede nichtleere Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, bereits der ganze Raum sein muß. Die vorhergehende Übung [3.4.16](#) besagt in dieser Terminologie insbesondere, daß jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Besitzt jeder Punkt unseres Raums eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind alle seine Wegzusammenhangskomponenten offen und man sieht umgekehrt, daß ein nicht wegzusammenhängender Raum mit dieser Eigenschaft auch nicht zusammenhängend sein kann. Insbesondere ist eine offene Teilmenge eines reellen normierten Raums genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist. Mehr dazu wird in [VI.1.3.2](#) besprochen.

## 3.5 Homotopie von Wegen

3.5.1. Einen durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  in einem topologischen Raum  $X$  nennen wir im Folgenden einen **normierten Weg**. Zu jedem Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  bilden wir den zugehörigen normierten Weg  $\hat{\gamma} : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb)$ .

**Definition 3.5.2.** Seien  $x, y$  Punkte eines topologischen Raums  $X$ . Zwei normierte Wege  $\alpha, \beta$  von  $x$  nach  $y$  heißen **homotop** oder präziser **homotop**

in  $X$  oder auch **homotop mit festen Endpunkten** und wir schreiben  $\alpha \simeq \beta$  genau dann, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- bzw. Oberkante unseres Quadrats mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also  $h(t, 0) = \alpha(t)$  und  $h(t, 1) = \beta(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  sowie  $h(0, \tau) = x$  und  $h(1, \tau) = y$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Wir sagen dann auch,  $h$  sei eine **Homotopie zwischen  $\alpha$  und  $\beta$**  und schreiben  $h : \alpha \simeq \beta$ . Zwei beliebige Wege von  $x$  nach  $y$  nennen wir **homotop** genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege homotop sind.

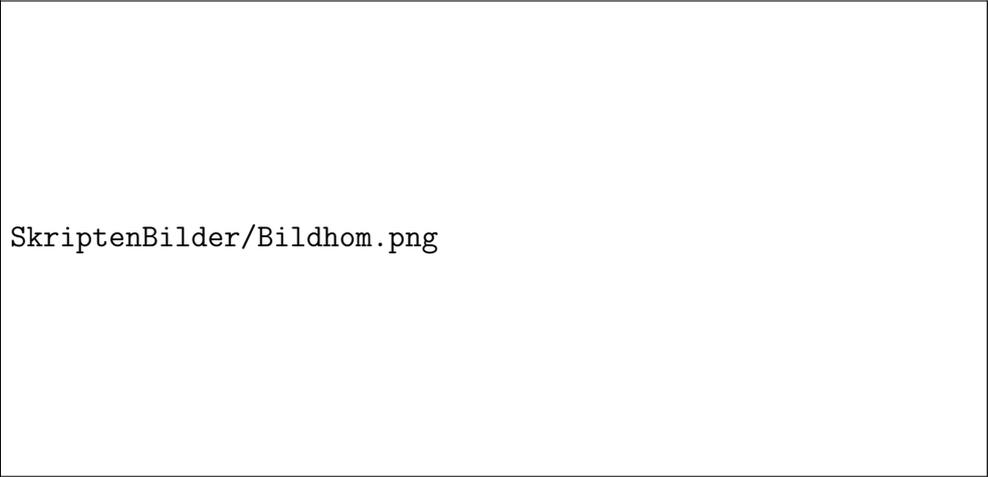
3.5.3. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie auch dahingehend interpretieren, daß es eine durch  $\tau \in [0, 1]$  parametrisierte Familie von normierten Wegen  $h_\tau$  von  $x$  nach  $y$  geben soll derart, daß gilt  $h_0 = \alpha$ ,  $h_1 = \beta$  und daß unsere Familie stetig von  $\tau$  abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung  $[0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $(t, \tau) \mapsto h_\tau(t)$  stetig ist.

*Beispiel 3.5.4.* Für eine konvexe Teilmenge  $X$  eines endlichdimensionalen reellen Raums und zwei beliebige Punkte  $x, y \in X$  sind je zwei Wege  $\alpha, \beta$  von  $x$  nach  $y$  homotop in  $X$ . Sind unsere Wege normiert, so kann man eine Homotopie explizit angeben vermittels  $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$ .

3.5.5 (**Vorwärtsverwandte homotoper Wege sind homotop**). . Ist genauer eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so folgt aus  $h : \alpha \simeq \beta$  schon  $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ . Speziell ist ein Weg homotop zu allen seinen Umparametrisierungen, denn nach 3.5.4 sind je zwei Wege in  $[0, 1]$  von 0 nach 1 homotop und damit gilt dasselbe für ihre Verknüpfung mit einer beliebigen stetigen Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ .

*Übung 3.5.6.* Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten. Hinweis: II.6.5.35.

**Definition 3.5.7.** Ein Weg in einem topologischen Raum heißt ein **geschlossener Weg** genau dann, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein Weg heißt **zusammenziehbar** genau dann, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg. Per definitionem ist also jeder zusammenziehbare Weg geschlossen. Ein topologischer Raum heißt **wegweise einfach zusammenhängend** genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und wenn darüber hinaus jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist.



SkriptenBilder/Bildhom.png

Eine Homotopie zwischen zwei Wegen, in diesem Fall zwischen den beiden Randwegen unserer Banane.



SkriptenBilder/BildRZsh.png

Ein zusammenziehbarer und ein nicht zusammenziehbarer geschlossener Weg in Komplement des durch ein Kreuzchen markierten Punktes in der Papierebene

3.5.8. In ?? werden wir auch “einfach zusammenhängende” topologische Räume kennenlernen, die in etwas anderer Weise definiert werden. Für halboffene Teilmengen normierter Räume wird sich dieser Begriff jedoch als gleichbedeutend zu “wegweise einfach zusammenhängend” erweisen.

*Übung 3.5.9.* Ein Raum ist wegweise einfach zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und je zwei Wege mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt darin homotop sind.

*Ergänzung 3.5.10.* Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und wegweise einfach zusammenhängend und ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein affiner Teilraum einer Kodimension  $\geq 3$ , so ist auch  $U \setminus A$  wegweise einfach zusammenhängend. Für einen Beweis dieses Analogons zu 3.4.10 verweise ich auf die Topologie, siehe etwa ??.

*Ergänzende Übung 3.5.11.* Jeder Weg in einer offenen Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums ist dort homotop zu einem stückweise linearen Weg. Hinweis: 3.4.5.

### 3.6 Rotation und Potential

**Proposition 3.6.1 (Wegintegrale und Potential).** *Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $A \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $\omega$  ein stetiges Kovektorfeld auf  $A$ . So sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kovektorfeld ist das Differential einer differenzierbaren Funktion.*
2. *Das Integral unseres Kovektorfelds über beliebige stetig differenzierbare Wege in  $A$  hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.*
3. *Das Integral unseres Kovektorfelds über jeden geschlossenen stetig differenzierbaren Weg in  $A$  verschwindet.*

3.6.2. In physikalischer Terminologie 3.3.17 hat also ein Kraftfeld oder genauer das zugehörige energiewertige Kovektorfeld ein Potential genau dann, wenn die längs beliebiger Wege geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt.

*Beweis.* Es ist im folgenden bequem, für etwas allgemeinere Wege den Begriff des Wegintegrals zur Verfügung zu haben.

**Definition 3.6.3.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ein Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  heißt **stückweise stetig differenzierbar** genau dann, wenn es eine Zerlegung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$  unseres Intervalls gibt derart, daß die Restriktionen  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  stetig differenzierbar sind für alle  $i$ . Wir bezeichnen stückweise stetig differenzierbare Wege abkürzend als **Integrationswege**.

3.6.4. Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  ein Integrationsweg in einem endlichdimensionalen reellen Raum  $X$  und  $\omega$  ein auf dem Bild von  $\gamma$  definiertes stetiges Kovektorfeld, so setzen wir

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a, a_1]}} \omega + \int_{\gamma|_{[a_1, a_2]}} \omega + \dots + \int_{\gamma|_{[a_{r-1}, b]}} \omega$$

für  $a_1 < \dots < a_{r-1}$  die Stellen in  $(a, b)$ , an denen  $\gamma$  nicht differenzierbar ist. Sicher gilt dann  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a, t]}} \omega + \int_{\gamma|_{[t, b]}} \omega$  für alle  $t \in (a, b)$ .

Wir behaupten nun zunächst, daß die Aussagen 2 bzw. 3 der Proposition jeweils gleichbedeutend sind zu

- 2'. Das Integral von  $\omega$  über beliebige Integrationswege in  $A$  hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.
- 3'. Das Integral von  $\omega$  über jeden geschlossenen Integrationsweg in  $A$  verschwindet.

Hier ist  $2' \Rightarrow 2$  offensichtlich. Andererseits können wir aber jeden Integrationsweg so umparametrisieren, daß er stetig differenzierbar wird. Das Integral ändert sich dabei nicht, und so folgt auch die andere Richtung  $2 \Rightarrow 2'$ . Ebenso zeigt man  $3 \Leftrightarrow 3'$ . Nach diesen Vorarbeiten beginnen wir nun mit dem eigentlichen Beweis der Proposition. Die Folgerungen  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$  sind offensichtlich. Wir zeigen als nächstes  $3' \Rightarrow 2$  durch Widerspruch: Gäbe es zwei Integrationswege mit demselben Anfangs- und Endpunkt aber verschiedenen Integralen, so könnten wir den einen dieser Wege umdrehen und an den anderen anhängen und so einen geschlossenen Integrationsweg erhalten, über den das Integral von  $\omega$  nicht Null wäre. Damit ist  $3' \Rightarrow 2$  gezeigt. Zeigen wir nun noch  $2' \Rightarrow 1$ , so haben wir schon einmal die Äquivalenzen  $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$  nachgewiesen. Nach 3.4.2 und 3.4.5 dürfen wir annehmen, daß  $A$  nicht leer ist und sich je zwei Punkte aus  $A$  durch einen Integrationsweg verbinden lassen. Dann wählen wir  $p \in A$  fest und definieren eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$f(x) = \int_{\gamma} \omega$$

für einen und nach 2' dann auch jeden Integrationsweg  $\gamma$  von  $p$  nach  $x$ . Ist nun  $\psi$  ein stetig differenzierbarer Weg in  $A$  von  $x$  nach  $y$ , so behaupten wir

$$\int_{\psi} \omega = f(y) - f(x)$$

In der Tat können wir ja  $\psi$  am  $\gamma$  anhängen und so einen Integrationsweg von  $p$  nach  $y$  erhalten, so daß also gilt  $\int_{\gamma} \omega + \int_{\psi} \omega = f(y)$ . Mit dieser Erkenntnis



Ein beliebiger Weg mit angehängtem geraden Stück aus dem Beweis von  $3 \Rightarrow 1$ .

läßt sich das Differential von  $f$  nun sehr leicht berechnen. Gegeben  $x \in A$  sei  $B \subseteq X$  ein offener Ball um Null mit  $x + B \subset A$ . Gegeben  $v \in B$  erhalten wir mit unserer Notation 3.3.2 sofort

$$f(x+v) - f(x) = \int_x^{x+v} \omega = \int_0^1 \omega_{x+tv}(v) dt = \omega_x(v) + \int_0^1 (\omega_{x+tv} - \omega_x)(v) dt$$

Das letzte Integral läßt sich aber schreiben als  $\|v\|$  mal eine Funktion, die beschränkt ist für  $v \in B$  durch  $\sup\{\|\omega_{x+w} - \omega_x\| \mid \|w\| \leq \|v\|\}$  und die folglich mit  $v$  gegen Null strebt. Das zeigt  $d_x f = \omega_x$  wie gewünscht.  $\square$

**Definition 3.6.5.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $A \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Ein stetig differenzierbares Kovektorfeld  $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$  auf  $A$  heißt **geschlossen** genau dann, wenn an jeder Stelle  $p \in A$  sein Differential  $d_p \omega : \vec{X} \rightarrow \vec{X}^*$  eine symmetrische Bilinearform auf  $\vec{X}$  liefert im Sinne einer Gleichheit von reellen Zahlen

$$(d_p \omega)(\vec{v})(\vec{w}) = (d_p \omega)(\vec{w})(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$$

Diese Terminologie geht vermutlich auf den gleich folgenden Satz 3.6.10 zurück, nach dem ein stetig differenzierbares Kovektorfeld geschlossen ist genau dann, wenn seine Wegintegrale über alle geschlossenen und im Definitionsbereich zusammenziehbaren Wege verschwinden.

*Beispiel 3.6.6.* Ein stetig differenzierbares Kovektorfeld  $\omega = \sum u_i dx_i$  auf einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  ist geschlossen genau dann, wenn gilt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

*Ergänzung 3.6.7.* Später werden wir in 7.6.3 ganz allgemein die “äußere Ableitung von Differentialformen” einführen. In dieser Terminologie sind dann unsere geschlossenen Kovektorfelder aus der vorhergehenden Definition 3.6.5 genau diejenigen stetig differenzierbaren Kovektorfelder, deren äußere Ableitung verschwindet.

*Übung 3.6.8.* Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $A \subseteq X$  eine offene Teilmenge,  $p \in A$  ein Punkt und  $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$  ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. So gilt in den Notationen der vorhergehenden Definition 3.6.5 für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$  die Identität

$$(d_p \omega)(\vec{v})(\vec{w}) - (d_p \omega)(\vec{w})(\vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})} \omega$$



Der Weg  $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$  aus Übung 3.6.8. Mit  $t \rightarrow 0$  wird er natürlich immer kleiner.

mit der Notation  $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$  für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke  $p$  und Kantenvektoren  $t\vec{v}$  und  $t\vec{w}$  umläuft, oder genauer, der stückweise linear läuft erst von  $p$  nach  $p + t\vec{v}$ , dann weiter nach  $p + t\vec{v} + t\vec{w}$ , von da nach  $p + t\vec{w}$ , und dann wieder zurück nach  $p$ . Hinweis: Es mag die Rechnung vereinfachen, wenn man das fragliche Integral zu einer Funktion von zwei Veränderlichen  $s, t$  erweitert.

*Ergänzende Übung 3.6.9.* Man zeige: Gegeben ein geschlossenes stetig differenzierbares Kovektorfeld ist auch sein Rückwärtsverwandter unter jeder stetig differenzierbaren Abbildung geschlossen. Insbesondere ist diese Eigenschaft “unabhängig von der Wahl der Koordinaten”. Eine gewisse Anschauung für diese Eigenschaft mag 3.6.8 liefern.

**Satz 3.6.10 (Rotation und Potential).** *Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $A \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Für ein stetig differenzierbares Kovektorfeld  $\omega$  auf  $A$  sind gleichbedeutend:*

1. Unser Kovektorfeld ist geschlossen;
2. Jeder Punkt von  $A$  besitzt eine offene Umgebung, auf der unser Kovektorfeld das Differential einer Funktion ist;
3. Auf jeder wegweise einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge von  $A$  ist unser Kovektorfeld das Differential einer Funktion;
4. Sind  $\gamma$  und  $\psi$  zwei in  $A$  zueinander homotope Integrationswege, so gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\psi} \omega$$

3.6.11. Insbesondere verschwindet also das Wegintegral eines stetig differenzierbaren geschlossenen Kovektorfelds über jeden in  $A$  zusammenziehbaren Integrationsweg. Einen alternativen und in gewisser Weise glatteren Beweis unter stärkeren Voraussetzungen geben wir in 7.8.28.

3.6.12. Gegeben ein differenzierbares Vektorfeld  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  bezeichnet man die Differenz  $\text{rot } v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$  als seine **Wirbeldichte** oder **skalare Rotation**, und gegeben ein differenzierbares Vektorfeld  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert man seine **Rotation**, ein weiteres Vektorfeld, durch die Vorschrift

$$\text{rot } v = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Um für diese Konzepte eine Anschauung zu entwickeln, mag man sich unser Vektorfeld  $F$  als ein Kraftfeld vorstellen. Läßt man im ebenen Fall dieses



Das ebene Vektorfeld  $(x, y) \mapsto (0, -x)$  hat konstant die Rotation  $-1$ .

Kraftfeld auf den Rand einer kleinen Kreisscheibe wirken, die an einer Stelle unserer Ebene drehbar befestigt ist, so beginnt sie sich zu drehen. Drehsinn sowie die Stärke der drehenden Kraft entsprechen Vorzeichen und Betrag der skalaren Rotation. Läßt man im räumlichen Fall dieses Kraftfeld auf die Oberfläche eines kleinen Balls wirken, den man an einer Stelle  $p$  hineinhält, so beginnt er sich auch zu drehen. Die Drehachse ist dann die von der Rotation unseres Vektorfeldes bei  $p$  erzeugte Gerade, und der Drehsinn sowie die Stärke der drehenden Kraft entsprechen Richtung und Länge der Rotation. In dieser Terminologie formuliert besagt der vorstehende Satz in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  insbesondere, daß jedes rotationsfreie Vektorfeld auf einer einfach zusammenhängenden offenen Menge der Gradient einer Funktion ist alias in physikalischer Terminologie ausgedrückt ein Potential besitzt.

*Beweis.*  $4 \Rightarrow 3$  ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.6.1, nach dem jedes stetige Kovektorfeld das Differential einer Funktion ist, bei dem alle Wegintegrale über geschlossene Integrationswege verschwinden.  $3 \Rightarrow 2$  ist offensichtlich. Um  $2 \Rightarrow 1$  zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X = \mathbb{R}^n$  annehmen. Die Implikation ist dann auch offensichtlich, für  $\omega = \sum u_i dx_i = df$  gilt in der Tat

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Im übrigen sieht man auch leicht ein, daß die  $d_p(df)$  entsprechende symmetrische Bilinearform gerade das Doppelte des “quadratischen Anteils der Taylorentwicklung der Funktion  $f$  um  $p$ ” ist. Wie dem auch sei, bleibt nur  $1 \Rightarrow 4$  zu zeigen. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiter  $X = \mathbb{R}^n$  annehmen. Wir beginnen unseren Beweis von  $1 \Rightarrow 4$ , indem wir einen Spezialfall von  $1 \Rightarrow 3$  als Proposition formulieren und unabhängig zeigen.

**Lemma 3.6.13.** *Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Kugel und  $\omega$  darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist  $\omega$  das Differential einer Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .*

3.6.14. Ich gebe dafür zwei Beweise: Erst einen sehr kurzen mehr rechnerischen Beweis, und im Anschluß einen etwas längeren mehr konzeptionellen.

*Rechnerischer Beweis.* Wir verwenden unsere Notation 3.3.2. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $0 \in A$  annehmen, bezeichnen nun wieder mit  $x$  einen Vektor und betrachten die Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \int_0^x \omega = \int_0^1 \omega_{tx}(x) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n u_j(tx) \cdot x_j dt$$



SkriptenBilder/BildWiF.png

Daß ein rotationsfreies Vektorfeld auf einer nicht wegweise einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  nicht notwendig ein Potential besitzt, zeigt das Vektorfeld  $\text{grad } \theta$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ , wo  $\theta(x, y)$  der eben nur bis auf eine additive Konstante wohlbestimmte Winkel ist, den der Strahl vom Nullpunkt nach  $(x, y)$  mit der horizontalen Koordinatenachse einschließt. Der Gradient  $\text{grad } \theta$  ist dann ein wohldefiniertes rotationsfreies Vektorfeld auf dem Komplement des Ursprungs, hat aber kein global definiertes Potential. Dies Vektorfeld ist nicht ganz leicht zu zeichnen, da die Längen seiner Vektoren gegen den Ursprung hin ins Unendliche wachsen. Auf den ersten Blick mag es absurd wirken, dieses Feld wirbelfrei zu nennen. Eine außerhalb des Ursprungs zum Testen hereingelegte kleine Kreisscheibe würde aber in der Tat nicht gedreht, die stärkeren Vektoren zerran zwar an der dem Ursprung zugewandten Seite, aber von diesen Vektoren greifen andererseits auch weniger an. In gewisser Weise konzentriert sich hier das gesamte Wirbeln im Ursprung, und der gehört nun eben gerade nicht zu unserem Definitionsbereich. In mathematischer Sprechweise ist  $d\vartheta$  ein geschlossenes Kovektorfeld auf der punktierten Ebene, das jedoch nicht das Differential einer global definierten Funktion ist.

Ihre partielle Ableitung nach  $x_i$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=p} \left( \sum_{j=1}^n (u_j \circ (t \cdot)) \cdot x_j \right) dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(tp) \cdot p_j + u_i(tp) dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(tp) \cdot p_j + u_i(tp) dt \\
 &= \int_0^1 t \cdot \frac{d}{dt}(u_i(tp)) + u_i(tp) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t \cdot (u_i(tp))) dt \\
 &= t \cdot u_i(tp) \Big|_0^1 \\
 &= u_i(p)
 \end{aligned}$$

und wir sehen, daß in der Tat gilt  $df = \omega$ . □

*Konzeptioneller Beweis.* Wir behandeln zunächst den Fall  $n = 2$  als eigenständiges Lemma.

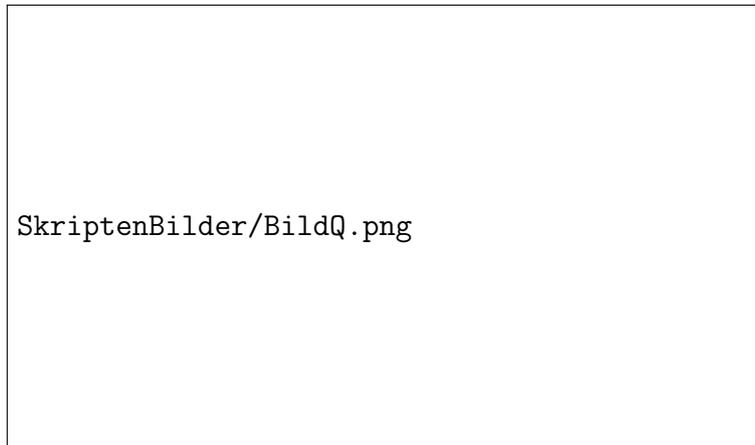
**Lemma 3.6.15.** *Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  eine ebene Kreisscheibe und  $\omega$  darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist  $\omega$  das Differential einer Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Um Indizes zu vermeiden schreiben wir bei der Behandlung dieses Spezialfalls  $(x, y)$  statt  $(x_1, x_2)$  in der Hoffnung, daß dies Einsparen von Indizes mehr Klarheit schafft, als die Verwendung der Buchstaben  $x, y$  mit verschiedenen Bedeutungen an Verwirrung erzeugt. Betrachten wir ein Rechteck  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset A$  und integrieren unser Kovektorfeld einmal im Gegenurzeigersinn auf dem Rand entlang, den wir parametrisieren als Weg  $\rho$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\rho} \omega &= \int_a^b u_1(x, c) dx + \int_c^d u_2(b, y) dy - \int_a^b u_1(x, d) dx - \int_c^d u_2(a, y) dy \\
 &= \int_c^d \int_a^b \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy
 \end{aligned}$$

Für ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld verschwindet also das Wegintegral einmal um den Rand unseres Rechtecks und der "obere" bzw. der "untere" Weg auf den Kanten des Rechtecks von einem Punkt zum diagonal gegenüberliegenden Punkt liefern dasselbe Wegintegral. Halten wir nun einen Punkt  $(p, q) \in A$  fest, so definiert dieses gemeinsame Wegintegral eine Funktion

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_p^x u_1(t, q) dt + \int_q^y u_2(x, s) ds \\
 &= \int_q^y u_2(p, s) ds + \int_p^x u_1(t, y) dt
 \end{aligned}$$



Das Rechteck aus dem Beweis von  $4 \Rightarrow 1$ .

für die wegen der ersten Darstellung offensichtlich gilt  $f_y = u_2$  und wegen der zweiten Darstellung  $f_x = u_1$ . Damit gilt  $\omega = df$  wie behauptet.  $\square$

Jetzt führen wir unseren konzeptionellen Beweis des Lemmas im Fall allgemeiner Dimension zu Ende. Wir betrachten dazu alle Wege, die längs der Kanten eines achsenparallelen Quaders vom Ursprung nach  $p$  laufen. Genauer betrachten wir für jede Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  den Weg  $[\sigma] = [\sigma; p]$  vom Ursprung nach  $p$ , der gerade verläuft zwischen den Eckpunkten

$$0, p_{\sigma(1)}\vec{e}_{\sigma(1)}, p_{\sigma(1)}\vec{e}_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)}\vec{e}_{\sigma(2)}, \dots, p$$

Ist  $\tau = (i, i+1)$  eine Transposition benachbarter Zahlen, so unterscheiden sich  $[\sigma]$  und  $[\sigma \circ \tau]$  nur dadurch, daß sie beim  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten Geradenstück auf verschiedenen Kantenwegen diagonal gegenüberliegende Punkte eines ebenen Rechtecks verbinden. Ziehen wir unser Kovektorfeld auf eine geeignete Ebene zurück, so landen wir im bereits behandelten Fall und folgern

$$\int_{[\sigma]} \omega = \int_{[\sigma \circ \tau]} \omega$$

für jede Transposition  $\tau$  der Gestalt  $\tau = (i, i+1)$ . Wissen wir nun bereits nach ??, daß derartige Transpositionen die symmetrische Gruppe erzeugen, so können wir sofort folgern, daß  $\int_{[\sigma]} \omega$  gar nicht von  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  abhängt. Die durch

$$f(p) = \int_{[\sigma; p]} \omega$$

für ein und alle  $\sigma$  definierte Funktion  $f$  hat dann Differential  $df = \omega$ , da ihre partielle Ableitung nach  $x_i$  auch aus jeder Darstellung durch ein  $\sigma$  mit  $\sigma(n) = i$  berechnet werden kann, für die  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = u_i$  offensichtlich ist.  $\square$

Jetzt können wir schließlich in unserem Satz 3.6.10 auch noch die Implikation  $1 \Rightarrow 4$  zeigen. Sei  $h : [0, 1]^2 \rightarrow A$  eine Homotopie zwischen unseren beiden Integrationswegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Analog wie beim Beweis von 3.4.5 zeigen wir mithilfe von II.6.2.22 und II.6.7.11, daß es für den Abstand von Punkten aus dem Bild unseres Einheitsquadrats und Punkten außerhalb von  $A$  eine positive untere Schranke gibt. Da  $h$  nach II.6.7.14 gleichmäßig stetig ist, finden wir weiter ein  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  derart, daß bei Unterteilung des Einheitsquadrats in  $r^2$  kleine Schachfelder der Kantenlänge  $1/r$  die einzelnen Felder unter  $h$  jeweils ganz in einen offenen Ball in  $A$  abgebildet werden. Jetzt betrachten wir die Integrale längs der Geradensegmente zwischen den Bildern in  $A$  von benachbarten Ecken unserer Schachfelder



Illustration zum Beweis von Satz 3.6.10 über die Homotopieinvarianz von Wegintegralen bei gewissen Kovektorfeldern. Die beiden Wege werden durch dicke gezackte Linien dargestellt, die Homotopie zwischen ihnen durch feine gestrichelte Linien. Es gilt, diese Unterteilung so fein zu wählen, daß jeder dieser “Ziegel” ganz in einem im Definitionsbereich unserer geschlossenen Differentialform enthaltenen Ball liegt.

$$c_{i,j} = \int_{h(\frac{i}{r}, \frac{j}{r})}^{h(\frac{i+1}{r}, \frac{j}{r})} \omega \quad \text{und} \quad d_{i,j} = \int_{h(\frac{i}{r}, \frac{j}{r})}^{h(\frac{i}{r}, \frac{j+1}{r})} \omega$$

Indem wir die für konvexe Definitionsbereiche bereits bewiesene Implikation auf unsere offenen Bälle in  $A$  anwenden, finden wir  $c_{i,j} + d_{i+1,j} - d_{i,j} - c_{i,j+1} = 0$  und durch Aufsummieren

$$\sum_{0 \leq i < r} c_{i,0} + \sum_{0 \leq j < r} d_{r,j} - \sum_{0 \leq j < r} d_{0,j} - \sum_{0 \leq i < r} c_{i,r} = 0$$

Indem wir nochmals den bereits bewiesenen Fall auf unsere offenen Bälle anwenden sehen wir dann weiter, daß diese vier Summen jeweils den Wegintegralen von  $\omega$  über die durch die vier Kanten unseres Quadrats gegebenen Wege gleichen. Zwei von diesen Wegen sind eh konstant und die übrigen sind eben gerade  $\gamma$  und  $\psi$ .  $\square$

*Übung 3.6.16.* Man zeige, daß gegeben  $n \in \mathbb{Z}$  der geschlossene Weg  $\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit  $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nur für  $n = 0$  zusammenziehbar ist. Hinweis: Man berechne das Integral des Winkelfeldes über diesen Weg und beachte 3.6.10. Ich empfinde es allerdings als Umweg, diese Aussage mithilfe von Wegintegralen nachzuweisen, und ziehe den topologischen Beweis über Liftungseigenschaften in ?? folgende vor.

*Ergänzende Übung 3.6.17.* Man zeige, daß es in 3.6.1 sogar ausreicht, die Differenzierbarkeit unseres stetigen Kovektorfelds an fast allen Punkten von  $A$  vorauszusetzen.

*Ergänzende Übung 3.6.18.* Gegeben auf einem Rechteck  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  stimmt das Integral seiner Rotation  $\text{rot } v$  im Sinne von 3.6.12 über das Rechteck  $Q$  überein mit seinem Wegintegral im Sinne von 3.3.6 einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks. In 7.8.16 werden wir diese Aussage als Spezialfall des allgemeinen Stokes'schen Satzes zu verstehen lernen.

**Satz 3.6.19 (Fundamentalsatz der Algebra).** *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

3.6.20. Andere Beweise werden in ?? diskutiert.

*Beweis.* Sei  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  unser Polynom. Wir argumentieren durch Widerspruch und betrachten für jeden Radius  $r > 0$  den geschlossenen Weg  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_r(t) = re^{it} = r \cos t + ir \sin t$ , der einmal auf dem Kreis mit Radius  $r$  umläuft. Nach 3.5.4 ist er in  $\mathbb{C}$  zusammenziehbar. Hätte unser Polynom keine Nullstelle, so lieferte es eine stetige Abbildung

$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , und nach 3.5.5 wären alle  $P \circ \gamma_r$  zusammenziehbar in  $\mathbb{C}^\times$ . Für hinreichend großes  $r$  gilt nun jedoch  $r^n > |a_{n-1}|r^{n-1} + \dots + |a_1|r + |a_0|$ , und für solche  $r$  ist der Weg  $P \circ \gamma_r$  in  $\mathbb{C}^\times$  homotop zum Weg  $t \mapsto \gamma_r(t)^n$ , da nämlich für kein  $t$  die Strecke von  $P(\gamma_r(t))$  nach  $\gamma_r(t)^n$  den Nullpunkt trifft. Hätte also  $P$  keine Nullstelle, so wäre der Weg  $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $t \mapsto \gamma_r(t)^n$  zusammenziehbar in  $\mathbb{C}^\times$ . Das steht jedoch im Widerspruch zu 3.6.16.  $\square$

## 4 Umkehrsatz und Anwendungen

### 4.1 Der Satz über die Umkehrabbildung

**Definition 4.1.1.** Eine im Sinne von 1.5.2 stetig differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen normierter reeller Räume nennt man auch eine  $\mathcal{C}^1$ -**Abbildung**. Der Buchstabe  $\mathcal{C}$  steht hier für englisch “continuous” oder französisch “continu”, zu deutsch stetig, und der obere Index 1 deutet an, daß nur die Existenz und Stetigkeit der *ersten* Ableitung gefordert wird. Eine bijektive  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung, deren Umkehrung auch eine  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung ist, heißt ein  $\mathcal{C}^1$ -**Diffeomorphismus**.

**Satz 4.1.2 (über die Umkehrabbildung).** *Seien  $X, Y$  endlichdimensionale reelle Räume,  $V \subseteq X$  offen und  $f : V \rightarrow Y$  stetig differenzierbar. Ist an einer Stelle  $p \in V$  das Differential ein Isomorphismus  $d_p f : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ , so induziert  $f$  einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung von  $p$  in  $V$  und einer offenen Umgebung von  $f(p)$  in  $Y$ .*

4.1.3. Wir zeigen den Satz nach einigen Vorbereitungen zu Ende dieses Abschnitts. Die Kettenregel liefert im Übrigen für das Differential des Inversen eines  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus sofort die Formel

$$d_{f(p)}(f^{-1}) = (d_p f)^{-1}$$

4.1.4. Unser Satz gilt auch für unendlichdimensionale normierte Räume  $X, Y$ , wenn wir zusätzlich annehmen, daß ihre Richtungsräume vollständig sind und daß das Inverse des Vektorraumisomorphismus  $d_p f$  stetig ist. Der Beweis bleibt derselbe. Diese Allgemeinheit ist durchaus auch von Interesse, eröffnet sie doch einen direkten Zugang zum Studium von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie in 5.5.2 ausgeführt wird. Als erste Prüfung für unseren Satz über die Umkehrabbildung überlege man sich die Gültigkeit der Behauptung im Spezialfall  $X = Y = \mathbb{R}$ .

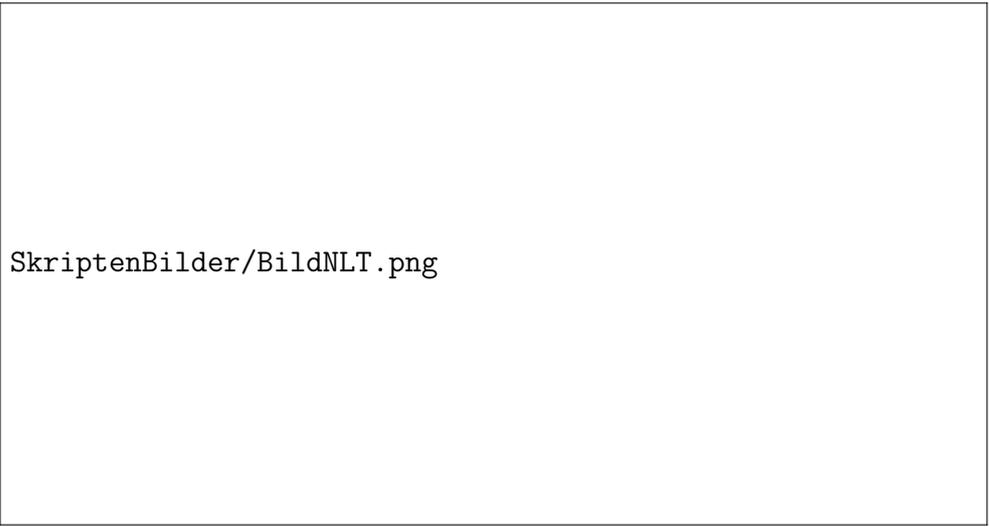
**Definition 4.1.5.** Ein Punkt, der unter einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein **Fixpunkt** besagter Abbildung.

**Definition 4.1.6.** Eine Abbildung  $f$  zwischen zwei metrischen Räumen heißt **Lipschitz-stetig** genau dann, wenn es eine Konstante  $\lambda > 0$  gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

für alle  $x, y$  im Ausgangsraum. Wir sagen dann auch,  $f$  sei lipschitzstetig **zur Lipschitz-Konstante**  $\lambda$ . Eine Abbildung  $f$  zwischen metrischen Räumen heißt **kontrahierend** genau dann, wenn sie lipschitzstetig ist zu einer Lipschitzkonstante  $\lambda < 1$ , wenn es also  $\lambda < 1$  gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y$$



SkriptenBilder/BildNLT.png

Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen zusammenhängenden Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  mit nirgends verschwindender Ableitung ist notwendig injektiv. Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen zusammenhängenden Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^2$  mit überall injektivem Differential ist dahingegen im allgemeinen nur noch “lokal injektiv” in einer Weise, die der Satz über die Umkehrabbildung spezifiziert.

*Beispiel 4.1.7.* Natürlich ist jede Lipschitzstetige Abbildung stetig. Eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante  $\lambda$  genau dann, wenn alle ihre Sekantensteigungen betragsmäßig beschränkt sind durch  $\lambda$ . Es ist hoffentlich anschaulich klar, daß im Fall  $\lambda < 1$  der Graph einer derart “flachen” Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  oder auch von einem nichtleeren kompakten reellen Intervall in sich selber an genau einer Stelle die Hauptdiagonale alias den Graphen der Identität kreuzen muß. Der Cosinus ist als Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  keineswegs kontrahierend, das Supremum seiner Sekantensteigungen ist ja Eins. Die Einschränkung des Cosinus zu einer Abbildung  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ist jedoch kontrahierend, und den im Banach’schen Fixpunktsatz versteckten Algorithmus zur Bestimmung des Fixpunktes illustriert nebenstehende Abbildung.

**Lemma 4.1.8 (Banach’scher Fixpunktsatz).** *Jede kontrahierende Selbstabbildung eines nichtleeren vollständigen metrischen Raums besitzt genau einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $f : M \rightarrow M$  unsere kontrahierende Selbstabbildung und  $\lambda < 1$  eine Lipschitzkonstante. Wir wählen  $x_0 \in M$  und betrachten die rekursiv definierte Folge  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Mit Induktion folgt  $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$ , und mit der Dreiecksungleichung folgt für  $n \leq m$  bereits

$$d(x_n, x_{m+1}) \leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \dots + \lambda^m) d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$

Also ist unsere Folge  $x_n$  eine Cauchy-Folge und konvergiert aufgrund der Vollständigkeit gegen einen Punkt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in M$ . Da nun eine kontrahierende Abbildung notwendig stetig ist, folgt aus der Vertauschbarkeit nach [II.6.3.9](#) von Grenzwerten mit dem Anwenden stetiger Funktionen

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p$$

und wir haben schon mal einen Fixpunkt gefunden. Ist  $q$  ein zweiter Fixpunkt, so folgt  $d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \lambda d(p, q)$  für  $\lambda < 1$  und damit  $d(p, q) = 0$ , also  $p = q$ .  $\square$

*Ergänzung 4.1.9.* Lassen wir in der Ungleichungskette aus obigem Beweis  $m$  nach Unendlich streben, so erhalten wir für den Abstand der  $n$ -ten Approximation  $x_n$  zum Fixpunkt  $p$  zusätzlich die Abschätzung

$$d(x_n, p) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$



SkriptenBilder/Bild0023.png

Schaltet man den Taschenrechner ein, stellt auf Bogenmaß und drückt wiederholt die Taste “cos”, so wird man feststellen, daß sich die Zahl in der Anzeige nach einer gewissen Zeit überhaupt nicht mehr ändert. Um das zu verstehen beachte man, daß der Cosinus eine kontrahierende Selbstabbildung des Intervalls  $[0, 1]$  liefert, da nämlich seine Ableitung dort betragsmäßig durch  $\sin(1) \in (0, 1)$  beschränkt ist. Der Beweis des Fixpunktsatzes [4.1.8](#) zeigt, daß unter diesen Umständen das wiederholte Anwenden stets eine Folge liefert, die gegen den Fixpunkt konvergiert.

**Satz 4.1.10 (Umkehrsatz für stetige Abbildungen).** *Seien  $X$  ein vollständiger normierter reeller Raum,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow X$  eine Abbildung, deren Differenz zur Identität*

$$(f - \text{id}) : U \rightarrow \vec{X}$$

*kontrahierend ist, d.h. Lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante  $\lambda < 1$ . So ist unsere Abbildung injektiv mit offenem Bild  $f(U) \subseteq X$  und ihre Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  ist Lipschitzstetig zur Lipschitzkonstante  $1/(1 - \lambda)$ .*

*Übung 4.1.11.* Der Leser mag zur Übung aus den Argumenten des anschließenden Beweises folgern, daß unter den Annahmen des Satzes genauer gilt

$$B(p; R) \subset U \Rightarrow B(f(p); (1 - \lambda)R) \subset f(U)$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen,  $X$  sei ein vollständiger normierter Vektorraum. Die Injektivität von  $f$  ergibt sich, da aus unserer Annahme  $\|(f - \text{id})(x) - (f - \text{id})(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$  sofort folgt  $\|y - x\| - \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$  alias

$$\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - \lambda)\|x - y\|$$

Durch Einsetzen von  $x = f^{-1}(p)$  und  $y = f^{-1}(q)$  folgt ohne Schwierigkeiten  $\|p - q\| \geq (1 - \lambda)\|f^{-1}(p) - f^{-1}(q)\|$  und damit sogar die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ . Bis hierher brauchen wir weder  $U$  offen noch  $X$  vollständig anzunehmen, und unsere Aussagen sind wenig mehr als ein Spezialfall der allgemeinen Resultate für “nicht abstandsverkleinernde” Abbildungen metrischer Räume aus Übung II.6.2.26. Der wesentliche Punkt besteht darin, zu zeigen, daß  $f$  offenes Bild hat. Dazu betrachten wir für alle  $y \in X$  die Abbildung

$$\begin{aligned} k_y : U &\rightarrow X \\ x &\mapsto x - f(x) + y \end{aligned}$$

Ihre Fixpunkte sind die Urbilder von  $y$  unter  $f$  und  $k_y$  ist unter unseren Annahmen auch kontrahierend. Genauer gilt offensichtlich

$$\|k_y(x) - k_y(z)\| \leq \lambda\|x - z\| \quad \forall x, z \in U$$

Gegeben  $p \in U$  finden wir nun einen Radius  $R > 0$  derart, daß der “abgeschlossene Ball”

$$A(p; R) := \{x \in X \mid \|p - x\| \leq R\}$$



SkriptenBilder/BildUFu.png

Für eine Abbildung  $f$  von einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  ist  $(f - \text{id})$  kontrahierend mit Kontraktionsfaktor  $\lambda$  genau dann, wenn alle ihre Sekantensteigungen im Intervall  $[1 - \lambda, 1 + \lambda]$  liegen. In diesem Fall sollte es anschaulich klar sein, daß  $f$  injektiv und offen ist und daß die Sekantensteigungen der Umkehrfunktion betragsmäßig beschränkt sind durch  $(1 - \lambda)^{-1}$ : In diesem Fall liegen alle Sekantensteigungen der Umkehrfunktion sogar im Intervall  $[(1 + \lambda)^{-1}, (1 - \lambda)^{-1}]$ .

ganz in  $U$  enthalten ist. Für  $y \in B(f(p); (1 - \lambda)R)$  bildet dann  $k_y$  unseren abgeschlossenen Ball  $A(p; R)$  in sich ab, denn es gilt

$$\begin{aligned} \|p - x\| \leq R &\Rightarrow \|k_y(p) - k_y(x)\| \leq \lambda R \\ &\Rightarrow \|(p - k_y(x)) + (y - f(p))\| \leq \lambda R \\ &\Rightarrow \|p - k_y(x)\| - \|y - f(p)\| \leq \lambda R \\ &\Rightarrow \|p - k_y(x)\| \leq R \end{aligned}$$

Wenden wir den Banach'schen Fixpunktsatz 4.1.8 auf die Selbstabbildung  $k_y$  von  $A(p; R)$  an, das nach II.7.5.2 als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums auch vollständig ist, so finden wir, daß  $k_y$  einen Fixpunkt in  $A(p; R)$  haben muß. Es folgt  $f(A(p; R)) \supset B(f(p); (1 - \lambda)R)$ , und das zeigt, daß das Bild von  $f$  offen sein muß, in Formeln  $f(U) \Subset X$ .  $\square$

*Beweis des Umkehrsatzes für  $C^1$ -Abbildungen 4.1.2.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $X, Y$  Vektorräume. Sicher reicht es, wenn wir den Satz für  $(d_p f)^{-1} \circ f$  statt für  $f$  zeigen. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X = Y$  und  $d_p f = \text{id}$  annehmen. Es folgt  $d_p(f - \text{id}) = 0$ . Wählen wir eine Norm auf  $X$  und beachten, daß  $f$  stetig differenzierbar angenommen war, so folgt leicht die Existenz eines offenen Balls  $B$  um  $p$  mit  $\|d_x(f - \text{id})\| \leq 1/2 \quad \forall x \in B$ . Nach 1.3.5 ist dann jedoch  $(f - \text{id}) : B \rightarrow X$  kontrahierend mit Lipschitzkonstante  $\leq (1/2)$ . Mit unserem Umkehrsatz für stetige Abbildungen 4.1.10 folgt, daß  $f$  eine Injektion mit offenem Bild  $f : B \hookrightarrow X$  liefert, deren Umkehrung lipschitzstetig ist zur Lipschitzkonstante Zwei. Um die Differenzierbarkeit von  $f^{-1} : f(B) \rightarrow B$  an der Stelle  $f(p)$  zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß gilt  $p = 0$  und  $f(p) = 0$ . Da wir  $f$  differenzierbar bei  $p$  mit Differential  $\text{id}$  angenommen hatten, können wir dann schreiben

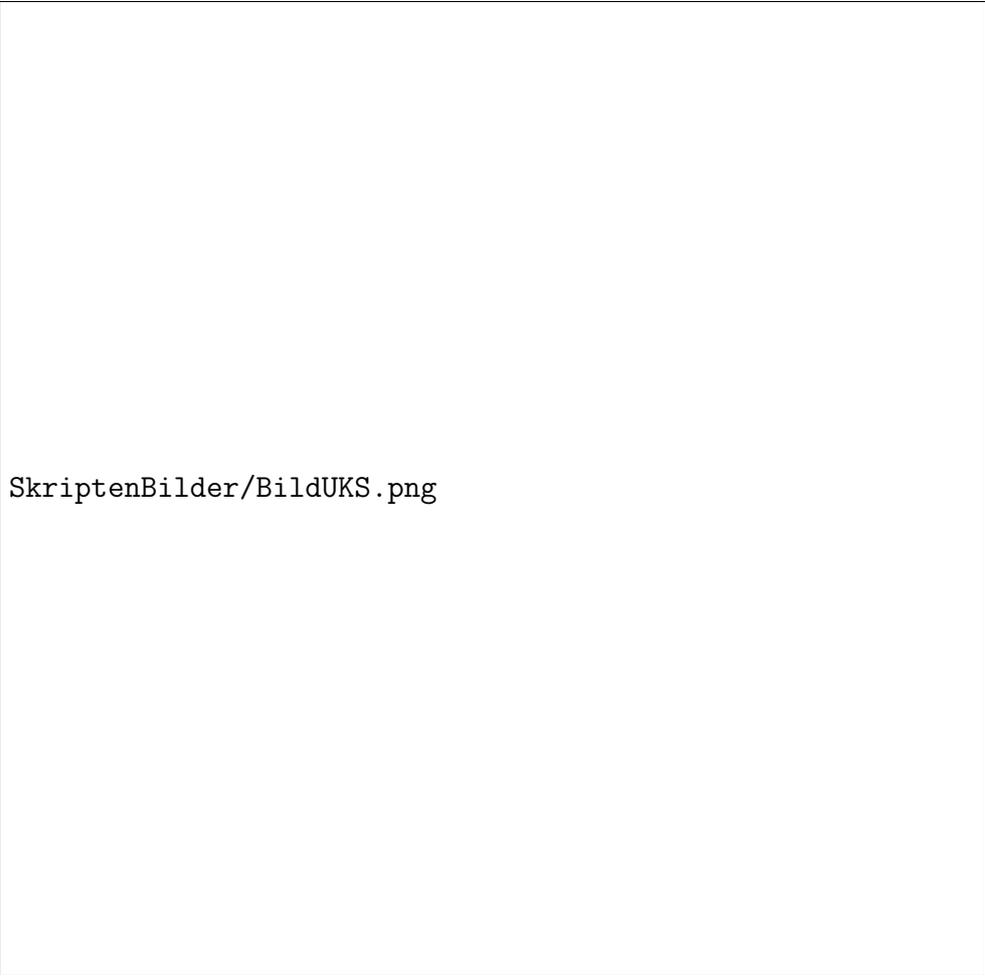
$$f(x) = x + \|x\|\varepsilon(x)$$

für eine geeignete Abbildung  $\varepsilon : B \rightarrow X$ , die stetig ist bei 0 und die dort den Wert Null annimmt. Setzen wir hier  $x = f^{-1}(y)$  ein mit  $y \in f(B)$ , so ergibt sich

$$y = f^{-1}(y) + \|f^{-1}(y)\| \varepsilon(f^{-1}(y))$$

Nun liefert die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion für unseren eben gewählten offenen Ball  $B$  nach 4.1.10 aber auch für alle  $y \in f(B)$  die Abschätzung  $\|f^{-1}(y)\| \leq 2\|y\|$ . Damit ergibt sich dann leicht

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y) - y}{\|y\|} = 0$$



SkriptenBilder/BildUKS.png

Das Verfahren aus dem Beweis von [4.1.2](#) ist auch durchaus von praktischer Bedeutung: Ausgeschrieben besagt es, daß wir eine Lösung  $x$  der Gleichung  $f(x) = y$  unter geeigneten Annahmen finden können als den Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung

$$\begin{aligned} k_y : U &\rightarrow X \\ x &\mapsto x + (d_p f)^{-1}(y - f(x)) \end{aligned}$$

für  $p$  mit  $f(p)$  hinreichend nah bei  $y$ . Es ist dem Newtonverfahren aus [II.2.3.3](#) eng verwandt, stimmt jedoch nicht damit überein: Beim Newtonverfahren etwa im Fall einer Veränderlichen “gehen wir ja immer auf der Tangente bei  $(x, f(x))$  wieder herunter zur  $x$ -Achse”, wohingegen wir bei unserer Korrektur  $k_y$  aus besagtem Beweis stattdessen auf der Parallelen durch  $(x, f(x))$  zur Tangente bei  $(p, f(p))$  heruntergehen, wie im Bild dargestellt.

und das besagt gerade, daß die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  bei  $y = 0$  differenzierbar ist mit Differential  $\text{id}$ . Verkleinern wir unsere offene Umgebung von  $p$  noch so weit, daß  $df$  dort überall invertierbar ist, so folgt die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung an jeder Stelle des Bildes unserer verkleinerten offenen Umgebung. Die Stetigkeit des Differentials der Umkehrabbildung folgt dann leicht aus der Stetigkeit des Differentials der ursprünglichen Abbildung und der Stetigkeit des Invertierens linearer Abbildungen, vergleiche im Fall von Banachräumen etwa 1.4.11.  $\square$

*Übung 4.1.12.* Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Raum hat offenes Bild, wenn an jeder Stelle ihr Differential surjektiv ist. Ist unsere stetig differenzierbare Abbildung zusätzlich injektiv, so liefert sie einen Diffeomorphismus unserer offenen Teilmenge mit ihrem Bild.

## 4.2 Der Satz über implizite Funktionen

4.2.1. Gegeben eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  von drei Veränderlichen scheint es mir anschaulich klar, daß salopp gesprochen ihre Niveaufläche  $N$  durch einen vorgegebenen Punkt  $p \in \mathbb{R}^3$  lokal um  $p$  als Graph einer reellwertigen Funktion der ersten beiden Veränderlichen dargestellt werden kann, *wenn* die Tangentialebene an unsere Niveaufläche bei  $p$  nicht auf der  $xy$ -Ebene alias der Nullstellenmenge der dritten Veränderlichen senkrecht steht, wenn also die partielle Ableitung unserer Funktion  $f$  nach der dritten Veränderlichen bei  $p$  nicht verschwindet. Etwas formaler sollte es also unter der Bedingung  $f_z(p) \neq 0$  offene Teilmengen  $C_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $A_1 \subseteq \mathbb{R}$  geben derart, daß gilt  $p \in C_1 \times A_1$  und daß  $N \cap (C_1 \times A_1)$  der Graph einer Funktion  $g : C_1 \rightarrow A_1$  ist. Derartige “implizit definierte Funktionen” werden wir im folgenden in voller Allgemeinheit studieren, allerdings mit einer anderen Konvention der Bezeichnung der Variablen: Statt  $(x, y, z)$  schreiben wir im folgenden  $(z_1, z_2, x)$ , bezeichnen mit  $y$  eine Koordinate des Raums, in dem unsere Abbildung  $f$  landet, und fassen  $f$  bei vorgegebenem  $y = f(p)$  auf als eine Gleichung in  $x$ , die von zwei Parametern  $z_1, z_2$  abhängt. Unsere implizite Funktion ist in dieser Notation dann diejenige Funktion  $g : C_1 \rightarrow A_1$ , die charakterisiert wird durch die Bedingung  $f(z_1, z_2, g(z_1, z_2)) = f(p)$ . Die Bedingung an die lokale Existenz einer impliziten Funktion lautet damit  $f_x(p) \neq 0$ .

4.2.2. Gegeben allgemeiner nicht nur eine einzige Gleichung in mehreren Veränderlichen, sondern ein ganzes Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten, sagen wir mit nur  $m$  Gleichungen für  $m + n$  Unbekannte,

wird man im allgemeinen erwarten, daß sich die Lösungsmenge in der folgenden Weise beschreiben läßt: Wir dürfen  $n$  Unbekannte frei wählen und können die übrigen  $m$  Unbekannten dann aus unseren  $m$  Gleichungen als Funktionen der bereits gewählten  $n$  Unbekannten bestimmen. Mir hilft es beim Denken und Reden, diese  $n$  frei zu wählenden Unbekannten als "Parameter" zu bezeichnen und unser System als ein System von  $m$  Gleichungen in  $m$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_m$  anzusehen, bei dem unsere  $m$  Gleichungen noch von insgesamt  $n$  Parametern  $z_1, \dots, z_n$  abhängen, in Formeln

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

mit fest vorgegeben gedachten  $y_1, \dots, y_m$ . Besteht unser Gleichungssystem etwa aus  $m$  linearen Gleichungen in  $m$  Unbekannten, wobei diese  $m$  Gleichungen noch stetig von den  $n$  Parametern  $z_1, \dots, z_n$  abhängen, und ist die  $(m \times m)$ -Matrix der Koeffizienten für eine Wahl der Parameter invertierbar, so wird sie auch für benachbarte Parameter invertierbar bleiben, und wir können die eindeutig bestimmten Lösungen für benachbarte Parameter als Funktionen der Parameter schreiben. Sind unsere Gleichungen nicht linear, so gelten entsprechende Aussagen. Eine präzise Formulierung gibt der "Satz über implizite Funktionen". Mit den "impliziten" Funktionen sind dabei diejenigen Funktionen gemeint, die die  $m$  Unbekannten als Funktionen der  $n$  Parameter ausdrücken: Diese Funktionen sind nämlich a priori nicht explizit etwa als Polynome oder allgemeiner als algebraische Ausdrücke in bekannten Funktionen gegeben, sondern nur implizit als Lösungen eines Gleichungssystems.

4.2.3. Ich will den Fall, daß unsere Gleichungen linear sind und sogar linear von den Parametern abhängen, auch noch koordinatenfrei und etwas präziser formulieren. Seien dazu ganz allgemein  $X, Y, Z$  Vektorräume. Die Elemente von  $Z$  spielen im folgenden die Rolle der "Parameter". Ist  $f : Z \times X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung, deren Restriktion auf  $X$  bijektiv ist, so gibt es genau eine Abbildung  $g : Z \rightarrow X$  mit  $f(z, g(z)) = 0$  für alle  $z \in Z$ . In der Tat ist unsere Gleichung wegen der Linearität von  $f$  gleichbedeutend zu  $f(0, g(z)) + f(z, 0) = 0$ , und nach Annahme gibt es eben genau ein  $x \in X$  mit  $f(0, x) = -f(z, 0)$ . Bezeichnet in Formeln  $\text{in}_X$  die lineare Einbettung  $x \mapsto (0, x)$  von  $X$  nach  $Z \times X$ , so haben wir  $g(z) = -(f \circ \text{in}_X)^{-1}(f(z, 0))$ , und notieren wir auch noch  $\text{in}_Z$  die lineare Einbettung  $z \mapsto (z, 0)$  von  $Z$  nach  $Z \times X$ , so erhalten wir

$$g = -(f \circ \text{in}_X)^{-1} \circ (f \circ \text{in}_Z)$$

Der Satz über implizite Funktionen besagt, daß ähnliche Aussagen “lokal” auch allgemeiner für beliebige stetig differenzierbare Abbildungen gelten.

**Satz 4.2.4 (über implizite Funktionen).** *Seien  $Z, X, Y$  endlichdimensionale reelle Räume,  $C \subseteq Z$  und  $A \subseteq X$  offen und  $f : C \times A \rightarrow Y$  stetig differenzierbar. Induziert an einer Stelle  $(c, a) \in C \times A$  die Restriktion des Differentials von  $f$  eine Bijektion*

$$(d_{(c,a)}f) \circ \text{in}_{\vec{X}} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$$

so existieren Paare  $(C_1, A_1)$  bestehend aus einer offenen Umgebung  $C_1 \subseteq C$  von  $c$  und einer offenen Umgebung  $A_1 \subseteq A$  von  $a$  derart, daß die Niveaumenge  $\{(z, x) \in C_1 \times A_1 \mid f(z, x) = f(c, a)\}$  der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $g : C_1 \rightarrow A_1$  ist. Diese durch die Bedingung  $f(z, g(z)) = f(c, a)$  erklärte **implizite Funktion**  $g$  hat dann bei  $z \in C_1$  das Differential

$$d_z g = - (d_{(z,g(z))}f \circ \text{in}_{\vec{X}})^{-1} \circ (d_{(z,g(z))}f \circ \text{in}_{\vec{Z}})$$

4.2.5. Wir sagen unter diesen Umständen, die Funktion  $g$  sei **implizit definiert durch die Bedingung**  $f(z, g(z)) = b$  für  $b = f(c, a)$ . Es kann durchaus verschiedene Paare  $(C_1, A_1)$  und  $(C'_1, A'_1)$  geben, für die die Bedingungen des Satzes erfüllt sind. Im Fall von nicht zusammenhängendem  $C_1$  kann die implizite Funktion auch durchaus von der Wahl von  $A_1$  abhängen: Zwei Paare  $(C_1, A_1)$  und  $(C_1, A'_1)$  mit demselben  $C_1$  können also durchaus verschiedene implizite Funktionen  $C_1 \rightarrow A$  liefern, wie nebenstehendes Bild illustriert.

*Ergänzung 4.2.6.* Wir werden zusätzlich zeigen, daß wir im Satz eine offene Umgebung  $C_1 \subseteq C$  von  $c$  sogar so wählen können, daß es (1) für jede darin enthaltene zusammenhängende offene Umgebung  $U$  von  $c$  genau eine stetige Funktion  $g : U \rightarrow A$  gibt mit  $g(c) = a$  und  $f(z, g(z)) = f(c, a)$  für alle  $z \in U$  und daß (2) diese Funktionen  $g$  stets stetig differenzierbar sind.

4.2.7. Die Kettenregel zeigt, daß die lineare Abbildung  $(d_{(c,a)}f) \circ \text{in}_{\vec{X}}$  auch als das Differential bei  $a$  der Abbildung  $x \mapsto f(c, x)$  verstanden werden kann. Wenn also dies Differential invertierbar ist für einen Parameter  $c$ , so kann “jedes kleine Verwackeln von  $c$  zu  $z$  eindeutig durch ein kleines Verwackeln von  $a$  zu  $x$  in dem Sinne ausgeglichen werden, daß unter diesem simultanen Wackeln der Wert von  $f$  konstant bleibt”.

4.2.8. Wieder gilt der Satz mit demselben Beweis auch für vollständige normierte Räume, wenn man zusätzlich zur Bijektivität auch noch die Stetigkeit der inversen Abbildung von  $(d_{(c,a)}f) \circ \text{in}_{\vec{X}} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$  fordert und “stetig differenzierbar” im Sinne von 1.5.2 interpretiert. Diese Allgemeinheit wird sich bei der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 5.5.2 als nützlich erweisen.



SkriptenBilder/Bildimpl.png

Der Schnitt der Niveauläche  $\{(z, x) \mid f(z, x) = x^2 - z = 0\}$  mit einem geeigneten Rechteck  $C_1 \times A_1$  ist der Graph einer Funktion, eben der entsprechenden impliziten Funktion, hier der Funktion  $g(z) = \sqrt{z}$ . Dieses Beispiel zeigt auch, daß im Fall von nicht zusammenhängendem  $C_1$  die implizite Funktion durchaus von der Wahl von  $A_1$  abhängen kann: Zwei Paare  $(C_1, A_1)$  und  $(C_1, A'_1)$  mit demselben  $C_1$  können verschiedene implizite Funktionen  $C_1 \rightarrow A$  liefern! Die Tangente an den Graphen unserer impliziten Funktion  $g$  schließlich steht in  $(c, a)$  senkrecht auf dem Gradienten  $(f_z(c, a), f_x(c, a))$ , so daß auch die Formel für die Tangentensteigung  $g'(c) = -f_z(c, a)/f_x(c, a)$  anschaulich unmittelbar einleuchtet.

*Beispiel 4.2.9.* Wir betrachten  $f(z, x) = x^3 + zx^2 - 3$  als eine Schar von Polynomen in  $x$  mit Parameter  $z$ . Für  $z = 2$  ist  $x = 1$  eine Nullstelle,  $f(2, 1) = 0$ . Wir wollen nun untersuchen, wie diese Nullstelle “mit dem Parameter  $z$  wackelt”, und wenden dazu den Satz über implizite Funktionen an. Die partielle Ableitung nach  $x$  ist  $f_x = 3x^2 + 2zx$ , insbesondere haben wir  $f_x(2, 1) = 7 \neq 0$  und nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es folglich  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  derart, daß für alle  $z \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$  das Polynom  $f(z, \cdot)$  genau eine Nullstelle  $x = g(z) \in (1 - \delta, 1 + \delta)$  hat. Diese Funktion  $g$  ist zwar schwer explizit anzugeben, aber der Satz sagt uns, daß sie in einer Umgebung von  $z = 2$  differenzierbar ist, und ihre Ableitung bei  $z = 2$  kennen wir auch: Wir haben nämlich  $f_z = x^2$ ,  $f_z(2, 1) = 1$  und folglich

$$g'(2) = -f_x(2, 1)^{-1} f_z(2, 1) = -\frac{1}{7}$$

Betrachten wir stattdessen  $h(z, x) = x^2 - z$ , so ist für  $z = 0$  natürlich  $x = 0$  eine Nullstelle, aber Entsprechendes gilt keineswegs: Schieben wir  $z$  etwas ins Negative, so hat  $h(z, \cdot)$  überhaupt keine reelle Nullstelle mehr, schieben wir  $z$  dahingegen etwas ins Positive, so werden aus unserer Nullstelle plötzlich zwei Nullstellen, wie das nebenstehende Bild illustriert. Das zeigt, daß die Bedingung an die Ableitung auch wirklich notwendig ist.

4.2.10. Ich will den Satz über implizite Funktionen auch noch in Koordinaten angeben. Seien dazu  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $f : C \times A \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar und  $z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m$  unsere “Parameter” und “Unbekannten”. So gilt:

1. Ist die Matrix

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^m$$

nicht ausgeartet an einer Stelle  $(c, a) \in C \times A$ , so existieren Tripel  $(C_1, A_1, g)$  bestehend aus einer offenen Umgebung  $C_1 \subseteq C$  von  $c$ , einer offenen Umgebung  $A_1 \subseteq A$  von  $a$  und einer stetig differenzierbaren Funktion  $g : C_1 \rightarrow A_1$  derart, daß an jeder Stelle  $z \in C_1$  der Wert  $g(z)$  das einzige  $x \in A_1$  ist mit  $f(z, x) = f(c, a)$ .

2. Die partiellen Ableitungen der Komponenten von  $g$  werden dann gegeben durch die Matrix-Gleichung

$$\left( \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \Big|_z \right) = - \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{(z, g(z))} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \Big|_{(z, g(z))} \right)$$



SkriptenBilder/Bildimq.png

Die Graphen von  $h(0, \cdot)$ ,  $h(-1/2, \cdot)$  und  $h(1/2, \cdot)$  für die Funktion  $h(z, x) = x^2 - z$  vom Ende des Beispiels 4.2.9. Hier haben wir anders als sonst  $x$  in horizontaler Richtung aufgetragen und denken an Nullstellen der veränderten Gleichung statt an Schnitte der Niveaulinie  $h(z, x) = x^2 - z = 0$  mit verschiedenen horizontalen Geraden. Dies Bild interpretiert also dieselbe Formeln wie das vorhergehende Bild auf Seite 447, nur eben in der alternativen Anschauung der “Abhängigkeit der Nullstellen von den Parametern” und in einem entsprechend an der Hauptdiagonale gespiegelmtem Koordinatensystem.

In dieser Sprache ausgedrückt kann also ein System von  $m$  Gleichungen in  $m + n$  Unbekannten im allgemeinen "lokal" in der Weise aufgelöst werden, daß wir  $n$  der Unbekannten frei wählen und die restlichen  $m$  Unbekannten dadurch dann im Wesentlichen eindeutig festgelegt werden.

*Beispiel 4.2.11.* Wir betrachten  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(z, x) = z^2 + x^2$  und  $(c, a) = (0, 1)$ . Da  $\frac{\partial f}{\partial x}$  nicht verschwindet bei  $(0, 1)$ , sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ein mögliches Tripel bestünde aus  $C_1 = (-1, 1)$ ,  $A_1 = (0, \infty)$  und  $g(z) = \sqrt{1 - z^2}$ . Unsere implizite Funktion sucht sich in diesem Fall für jedes  $z \in (-1, 1)$  dasjenige positive  $x = g(z)$  aus, für das der Punkt  $(z, x)$  auf dem Einheitskreis liegt. Die Ableitung dieser impliziten Funktion ergibt sich mit unserer Regel richtig zu

$$\frac{\partial g}{\partial z} = - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = - \frac{2z}{2x} = - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$$

*Beispiel 4.2.12.* Wir betrachten  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(z, w, x) = z^2 + w^2 + x^2$  und  $(c, a) = (0, 0, 1)$ . Um Indizes zu vermeiden, haben wir hier die Parameter mit  $(z, w)$  statt mit  $(z_1, z_2)$  bezeichnet. Da  $\frac{\partial f}{\partial x}$  nicht verschwindet bei  $(0, 0, 1)$ , sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ein mögliches Tripel bestünde aus  $C_1$  der offenen Einheitskreisscheibe in der  $zw$ -Ebene,  $A_1 = (0, \infty)$  und  $g(z, w) = \sqrt{1 - z^2 - w^2}$ . Anschaulich wählt unsere implizite Funktion für jedes Paar  $(z, w)$  aus der offenen Einheitskreisscheibe das positive  $x$  aus, für das der Punkt  $(z, w, x)$  auf der Einheitskugel liegt.

*Beispiel 4.2.13.* Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \zeta \xi + \zeta v - \xi u^2 &= 1 \\ \zeta u^3 + 3\zeta u - uv &= 3 \end{aligned}$$

Es ist etwa erfüllt für  $(\zeta, \xi, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ . Wenn man nun  $\zeta$  und  $\xi$  ein bißchen ändert, kann man dann stets  $u$  und  $v$  so anpassen, daß unser Gleichungssystem erfüllt bleibt? Der Satz über implizite Funktionen liefert genau diese Aussage, man muß dazu nur prüfen, daß die  $(2 \times 2)$ -Matrix der partiellen Ableitungen der beiden Gleichungen unseres Systems nach  $u$  und  $v$  bei  $(1, 1, 1, 1)$  invertierbar ist. Genauer erhält man hier die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit implizite Funktionen  $u(\zeta, \xi)$  und  $v(\zeta, \xi)$ , die in einer Umgebung von  $(1, 1)$  definiert sind und die dort jeweils den Wert 1 annehmen. Man beachte jedoch die Verschiebung der Notation: Unser  $(\zeta, \xi)$  hier entspricht

im Satz über implizite Funktionen dem  $z$  und unser  $(u, v)$  hier hieß dort  $x$ . Wie finden wir nun die partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$  bei  $(\zeta, \xi) = (1, 1)$ ? Sicher können wir unsere abstrakte Formel anwenden, aber dabei verheddert man sich leicht. Ich ziehe es vor, den Beweis im Spezialfall zu wiederholen und die definierenden Gleichungen partiell abzuleiten. Wir erhalten so für die partiellen Ableitungen nach  $\zeta$  etwa

$$\begin{aligned}\xi + v + \zeta v_\zeta - 2\xi u u_\zeta &= 0 \\ u^3 + 3\zeta u^2 u_\zeta + 3u + 3\zeta u_\zeta - u_\zeta v - u v_\zeta &= 0\end{aligned}$$

und nach Auswerten bei  $(\zeta, \xi) = (1, 1)$  ergibt sich für die Werte unserer partiellen Ableitungen dort das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2 + v_\zeta - 2u_\zeta &= 0 \\ 4 + 5u_\zeta - v_\zeta &= 0\end{aligned}$$

dessen Lösung keine Probleme mehr aufwerfen sollte.

*Beweis des Satzes 4.2.4 über implizite Funktionen.* Wir setzen  $f(c, a) = b$  und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned}F : C \times A &\rightarrow Z \times Y \\ (z, x) &\mapsto (z, f(z, x))\end{aligned}$$

Ihr Differential bei  $(c, a)$  hat im Sinne von ?? Block-Gestalt

$$\begin{pmatrix} \text{id}_{\bar{Z}} & 0 \\ d_{(c,a)}f \circ \text{in}_{\bar{Z}} & d_{(c,a)}f \circ \text{in}_{\bar{X}} \end{pmatrix}$$

und ist insbesondere invertierbar. Nach dem Umkehrsatz gibt es also offene Umgebungen  $C_1 \subset C$  von  $c$  und  $A_1 \subset A$  von  $a$  und  $P_1 \subseteq Z \times Y$  von  $(c, b) = F(c, a)$  derart, daß  $F$  einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus

$$F : C_1 \times A_1 \xrightarrow{\sim} P_1$$

liefert. Die Umkehrabbildung  $G = F^{-1} : P_1 \xrightarrow{\sim} C_1 \times A_1$  hat dann offensichtlich die Gestalt  $(z, y) \mapsto (z, \tilde{g}(z, y))$  für geeignetes  $\tilde{g} : P_1 \rightarrow X$ . Nun ist  $f(z, x) = b$  gleichbedeutend zu  $F(z, x) = (z, b)$ , und unter den Zusatzannahmen  $(z, x) \in C_1 \times A_1$  und  $(z, b) \in P_1$  ist das weiter gleichbedeutend zu  $(z, x) = G(z, b)$  alias  $x = \tilde{g}(z, b)$ . Verkleinern wir falls nötig  $C_1$  noch weiter derart, daß zusätzlich gilt  $C_1 \times \{b\} \subset P_1$ , dann gibt es zu jedem  $z \in C_1$  genau ein  $x = g(z) \in A_1$  mit  $f(z, x) = b$ , nämlich  $g(z) = \tilde{g}(z, b)$ . Die so definierte Funktion  $g$  ist

stetig differenzierbar nach dem Umkehrsatz. Ihre Ableitung bei  $z \in C_1$  ergibt sich leicht, wenn man die Definitionsgleichung  $f(z, g(z)) = b$  als Abbildung  $C_1 \rightarrow Y$  auffaßt und auf beiden Seiten das Differential an der Stelle  $z$  nimmt: Mit der Kettenregel folgt nämlich

$$d_{(z, g(z))}f \circ \begin{pmatrix} \text{id} \\ d_z g \end{pmatrix} = 0$$

und zerlegen wir darin  $d_{(z, g(z))}f = (d_{(z, g(z))}f \circ \text{in}_{\bar{z}}, d_{(z, g(z))}f \circ \text{in}_{\bar{x}})$  als Zeilen-Blockmatrix im Sinne von ??, so ergibt sich sofort die behauptete Formel für das Differential.  $\square$

*Ergänzung 4.2.14.* Wir zeigen noch unsere Behauptung 4.2.5 und zeigen genauer, daß für  $C_1$  wie im vorhergehenden Beweis und  $U \subseteq C_1$  eine wegzusammenhängende Umgebung von  $c$  die Einschränkung der bisher betrachteten Funktion  $g : C_1 \rightarrow A_1$  auch die einzige stetige Funktion  $\hat{g} : U \rightarrow A$  ist mit  $\hat{g}(c) = a$  und  $f(z, \hat{g}(z)) = b$  für alle  $z \in U$ . Sei in der Tat solch ein  $\hat{g}$  gegeben. Die Menge der Punkte  $z \in U$  mit  $\hat{g}(z) = g(z)$  ist nicht leer, da sie  $c$  enthält. Sie ist abgeschlossen in  $U$  wegen der Stetigkeit beider Funktionen. Wenn wir auch noch ihre Offenheit zeigen, sind wir fertig mit der Beschreibung VI.1.3.7, VI.1.3.9 des Zusammenhangs. Wegen der Stetigkeit nimmt  $\hat{g}$  in einer Umgebung von  $c$  nur Werte aus  $A_1$  an, in dieser Umgebung von  $c$  muß also  $\hat{g}$  mit  $g$  übereinstimmen. Dieselbe Argumentation greift nun aber für jeden Punkt  $z \in U$  mit  $\hat{g}(z) = g(z)$ , denn alles bereits Gesagte gilt genauso für  $(z, g(z))$  wie für  $(c, a)$ .

*Übung 4.2.15.* Gegeben eine einfache Nullstelle eines reellen oder komplexen Polynoms wird bei hinreichend kleinem Wackeln an den Koeffizienten des Polynoms sich auch unsere Nullstelle nur ein bißchen bewegen und differenzierbar, im komplexen Fall sogar komplex differenzierbar von besagten Koeffizienten abhängen. Man formuliere diese Aussage präzise und beweise sie.

*Übung 4.2.16.* Man zeige, daß es keine stetig differenzierbare bijektive Abbildung  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  geben kann.

### 4.3 Untermannigfaltigkeiten reeller Räume

4.3.1. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir Formeln herleiten für die Oberfläche einer Kugel oder eines Ellipsoids oder eines Torus alias Schwimmrings im  $\mathbb{R}^3$  und allgemeiner Maxima und Minima von Funktionen auf derartigen Gebilden untersuchen. Später werden wir darüber hinaus Funktionen über derartige Gebilde integrieren. Um alle diese Formeln in angemessener



SkriptenBilder/BildIFP.png

Die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Komplement der  $z$ -Achse gegeben durch  $(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z) \mapsto \sin(z - \vartheta)$  für  $r > 0$  und  $\vartheta$  beliebig hat als Niveaumenge zum Niveau Null eine Wendeltreppe, die sich um die  $z$ -Achse  $\langle e_3 \rangle$  windet. Eingezeichnet sind zusammenhängende offene Umgebungen  $C_1$  und  $C'_1$  eines Punkte  $c \in \mathbb{R}^2$ , die sich durchaus zu "erlaubten" Paaren  $(C_1, A_1)$  und  $(C'_1, A'_1)$  ergänzen lassen, bei denen die zugehörigen impliziten Funktionen jedoch auf  $C_1 \cap C'_1$  nicht übereinstimmen.

Allgemeinheit diskutieren zu können, führen wir hier den Begriff der Untermannigfaltigkeit einer endlichdimensionalen reellen Raums ein und erklären, wie man mit diesem Begriff umgeht. Anschließend diskutieren wir dann Extremwertaufgaben.

**Definition 4.3.2.** Sei  $X$  ein reeller Raum endlicher Dimension und  $k \geq 0$  eine natürliche Zahl. Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt eine  **$k$ -dimensionale  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit** oder kurz **Untermannigfaltigkeit** von  $X$  genau dann, wenn es für jeden Punkt  $p \in M$  ein Paar  $(U, g)$  gibt bestehend aus einer offenen Umgebung  $U \subseteq X$  von  $p$  und einem  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $g : U \xrightarrow{\sim} g(U)$  von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  derart, daß gilt:

$$g(U \cap M) = \{z \in g(U) \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$$

Ein derartiges Paar  $(U, g)$  heißt eine **Plättung** von  $M$  um  $p$ . Natürlich gilt hier notwendig  $n = \dim_{\mathbb{R}} X$ . Auf der rechten Seite unserer Gleichung hätte ich auch kürzer  $g(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$  schreiben können, wobei die  $0$  für die einelementige Menge  $\{0\} \subset \mathbb{R}^{n-k}$  steht. In vergleichbaren Situationen werde ich von nun an diese abgekürzte Darstellung bevorzugen. Im Grenzfall  $k = n = \dim_{\mathbb{R}} X$  ist insbesondere eine Untermannigfaltigkeit dasselbe wie eine offene Teilmenge.

4.3.3. Manche Autoren fordern von Mannigfaltigkeiten zusätzlich, daß sie zusammenhängend sein sollen. Andere Autoren, zum Beispiel Warner [War83], verwenden den Begriff einer Untermannigfaltigkeit in einer anderen Bedeutung: Unsere Untermannigfaltigkeiten im Sinne der vorhergehenden Definition würden diese Autoren als "eingebettete Untermannigfaltigkeiten" bezeichnen.

4.3.4. Sei  $X$  ein reeller Raum endlicher Dimension. Einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $g$  von einer offenen Umgebung  $U$  eines Punktes  $p \in X$  auf eine offene Teilmenge  $g(U)$  eines  $\mathbb{R}^n$  nennt man auch ein **lokales Koordinatensystem** um den Punkt  $p$  und die Komponenten  $g_1, \dots, g_n$  von  $g$  heißen die **Koordinaten**  $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  unseres Koordinatensystems. Ein typisches Beispiel sind etwa die Polarkoordinaten auf offenen Teilmengen von  $X = \mathbb{R}^2$ , bei denen man statt  $(g_1, g_2)$  meist  $(r, \vartheta)$  schreibt. In dieser Terminologie kann etwa eine Untermannigfaltigkeit von  $X$  der Dimension Eins beschrieben werden als eine Teilmenge  $M \subset X$  derart, daß es um jeden Punkt  $p \in M$  ein lokales Koordinatensystem von  $X$  gibt, unter dem  $M$  einer Koordinatenachse entspricht.

*Beispiele 4.3.5.* Jeder affine Teilraum  $Y \subset X$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\dim Y$ . Der Graph jeder  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , als Plättung mag man  $g :$



SkriptenBilder/BildLPK.png

Der Einheitskreis ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Ebene  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Eine Plättung um beliebige Punkte aus der oberen Halbebene  $U$  wird etwa gegeben durch  $g(x, y) = (x, \sqrt{x^2 + y^2} - 1)$ . In diesem Fall besteht  $g(U)$  aus dem schraffierten Bereich, also aus allen Punkten oberhalb des Graphen der Funktion  $x \mapsto |x| - 1$ .

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  mit  $g(x, y, z) = (x, y, z - f(x, y))$  nehmen. Der Einheitskreis ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ . Eine Untermannigfaltigkeit der Dimension Null ist dasselbe wie eine diskrete Teilmenge im Sinne von 3.4.7.

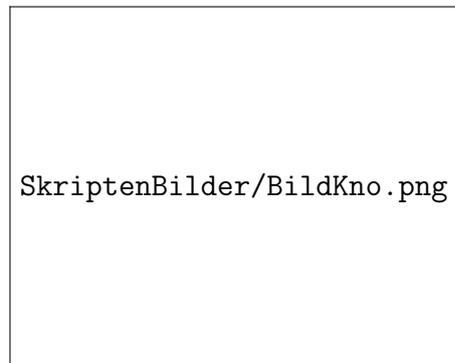
*Übung 4.3.6 (Jede Untermannigfaltigkeit ist lokal ein Graph).* Gegeben eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  gibt es für jeden Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  derart, daß  $M \cap U$  unter der entsprechenden Permutation der Koordinaten dem Graph einer  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung  $V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  entspricht, die auf einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  definiert ist. Zum Beispiel ist jede eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Ebene  $\mathbb{R}^2$  lokal entweder Graph einer reellwertigen  $\mathcal{C}^1$ -Funktion der  $x$ -Koordinate oder der an der Hauptdiagonalen gespiegelte Graph einer reellwertigen  $\mathcal{C}^1$ -Funktion der  $y$ -Koordinate.

*Ergänzung 4.3.7.* Eine kompakte Untermannigfaltigkeit der Dimension Eins in  $\mathbb{R}^3$  heißt eine **Verschlingung** und, wenn sie zusätzlich wegzusammenhängend ist, ein **Knoten**. Zwei Verschlingungen heißen **isotop** genau dann, wenn sie durch einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  mit überall positiver Funktionaldeterminante ineinander überführt werden können. Die ‘‘Knotentheorie’’ versucht, Kriterien dafür zu entwickeln, wann zwei gegebene Verschlingungen isotop sind.

4.3.8. Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum. Spätestens mit 4.3.22 wird klar, daß für  $k, l \in \mathbb{N}$  eine Teilmenge  $M \subset X$  nur dann sowohl eine  $k$ -dimensionale als auch eine  $l$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit sein kann, wenn entweder gilt  $k = l$  oder aber  $M = \emptyset$ . Jede nichtleere Untermannigfaltigkeit hat also eine wohlbestimmte Dimension.

4.3.9. Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum. Eine Untermannigfaltigkeit der Dimension Eins von  $X$  heißt eine **Kurve** in  $X$  und eine Untermannigfaltigkeit der Dimension Zwei eine **Fläche**. Gegeben  $k \leq \dim X$  versteht man unter einer Untermannigfaltigkeit der **Kodimension**  $k$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $(\dim X) - k$ . Eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension Eins heißt eine **Hyperfläche**. Jede offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit ist selbst eine Untermannigfaltigkeit derselben Dimension.

**Proposition 4.3.10 (Untermannigfaltigkeiten als Urbilder).** *Seien  $X$  und  $Y$  endlichdimensionale reelle Räume,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow Y$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für alle  $c \in Y$  das Urbild  $M = f^{-1}(c)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $X$  der Dimension  $\dim X - \dim Y$ .*



Die links abgebildete Verschlingung ist besonders bemerkenswert dadurch, daß je zwei der Ringe getrennt werden könnten, wenn eben der Dritte nicht wäre. Sie heißt die Verschlingung der **Borromäischen Ringe** nach einer italienischen Familie, die diese Ringe in ihrem Wappen führte. Rechts ein Beispiel für einen Knoten.



Illustration zum Beweis des Satzes 4.3.10 über Mannigfaltigkeiten als Urbilder. Dick gezackelt eine Niveaulinie einer Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Liegt  $p$  auf dieser Niveaulinie und ist  $d_p f$  surjektiv alias nicht null, so läßt sich  $f$  durch eine lineare Abbildung, im Bild die Abbildung  $y$ , zu einem lokalen Koordinatensystem ergänzen, und der Umkehrsatz 4.1.2 liefert dann die gesuchte lokale Plättung unserer Niveaulinie.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $X = \mathbb{R}^n$  und  $Y = \mathbb{R}^m$  annehmen und haben dann  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Für jedes  $p \in M$  finden wir sicher lineare Abbildungen  $l_{m+1}, \dots, l_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  derart, daß das Differential von  $g = (f_1, \dots, f_m, l_{m+1}, \dots, l_n)$  in  $p$  bijektiv ist. Nach dem Umkehrsatz 4.1.2 gibt es dann  $U' \subseteq U$  mit  $p \in U'$  derart, daß  $g$  einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $U' \xrightarrow{\sim} g(U') \subseteq \mathbb{R}^n$  induziert, und nach Konstruktion gilt  $g(U' \cap M) = g(U') \cap (\{c\} \times \mathbb{R}^{n-m})$ . Damit erhält man dann leicht die gesuchte Plättung von  $M$  um  $p$ .  $\square$

*Beispiel 4.3.11.* Die **Sphären**  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  sind  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , denn das Differential von  $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$  verschwindet nirgends auf der Sphäre  $S^n$ .

*Übung 4.3.12.* In der Situation von 4.3.10 ist allgemeiner auch für jede Untermannigfaltigkeit  $C \subset Y$  ihr Urbild  $M = f^{-1}(C)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $X$  der Dimension  $\dim X - \dim Y + \dim C$ .

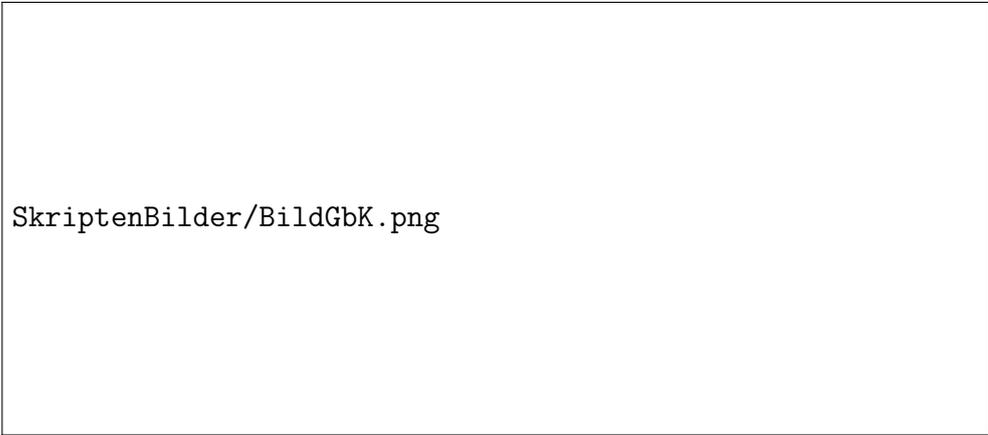
*Übung 4.3.13.* Man zeige: Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$  und  $c \neq 0$  eine reelle Konstante, so ist  $\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = c\}$  eine Hyperfläche in  $V$ .

**Proposition 4.3.14 (Untermannigfaltigkeiten als Bilder).** *Seien ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$  der Dimension  $\dim_{\mathbb{R}} X = n$  und  $k \geq 0$  gegeben. Eine Teilmenge  $M \subset X$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn es für jeden Punkt  $p \in M$  eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : W \rightarrow X$  von einer offenen Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^k$  nach  $X$  gibt derart, daß gilt:*

1.  $\varphi(W)$  ist enthalten in  $M$  und offen in  $M$  und enthält  $p$ ;
2.  $d_x \varphi$  ist injektiv für alle  $x \in W$ ;
3.  $\varphi$  ist injektiv und  $\varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow W$  ist stetig.

4.3.15. Ein Paar  $(W, \varphi)$  wie in der Proposition nenne ich eine **Karte** der Untermannigfaltigkeit  $M$ . Eine Karte der Stadt Freiburg kann als eine Variante dieses Begriffs verstanden werden, bei der  $W$  ein Rechteck aus Papier ist und das Bild einiger Punkte des Papiers unter der Abbildung  $\varphi$  in das wirkliche Freiburg durch bildliche Symbole angezeigt wird.

4.3.16. Im Fall  $k = 0$  stellt bereits die erste Bedingung sicher, daß jeder Punkt von  $M$  offen ist in  $M$ , so daß  $M$  in der Tat eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit von  $X$  ist.



SkriptenBilder/BildGbK.png

Ein Beispiel einer Teilmenge  $M$  der Papierebene, die keine Untermannigfaltigkeit ist und für die die Bedingung aus [4.3.14](#) erfüllt wäre, wenn wir von unseren Karten nicht auch noch fordern würden, daß ihre Umkehrabbildungen stetig sind.

*Beweis.* Ist  $M \subset X$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $k$  und  $(U, g)$  eine Plättung von  $M$ , so liefert die Einschränkung von  $g^{-1}$  auf  $W = g(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$  eine Karte von  $M$ . Folglich hat eine Untermannigfaltigkeit um jeden Punkt mindestens eine Karte. Ist andererseits  $\varphi : W \rightarrow M \subset X$  eine Karte von  $M$  um  $p$  mit  $W \subseteq \mathbb{R}^k$ , so können wir Vektoren  $v_1, \dots, v_{n-k} \in \vec{X}$  finden derart, daß das Differential von

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : W \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow X \\ (w, t_1, \dots, t_{n-k}) &\mapsto \varphi(w) + t_1 v_1 + \dots + t_{n-k} v_{n-k} \end{aligned}$$

im Punkt  $(\varphi^{-1}(p), 0)$  bijektiv ist. Nach dem Umkehrsatz 4.1.2 induziert  $\tilde{\varphi}$  dann einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung  $G \subseteq W \times \mathbb{R}^{n-k}$  von  $(\varphi^{-1}(p), 0)$  auf eine offene Umgebung  $\tilde{U} \subseteq X$  von  $p$ . Kürzen wir in etwas gewagter Notation

$$\{w \in W \mid (w, 0) \in G\} = W \cap G$$

ab, so ist  $W \cap G$  offen in  $W$  und damit  $\varphi(W \cap G)$  offen in  $\varphi(W)$  und damit in  $M$ . Also gibt es  $U_1 \subseteq X$  mit  $\varphi(W \cap G) = M \cap U_1$ . Dann setzen wir  $U = \tilde{U} \cap U_1$  und  $g = \tilde{\varphi}^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist die gesuchte Plättung von  $M$  um  $p$ .  $\square$

*Übung 4.3.17.* Man zeige: Gegeben eine Karte  $(W, \varphi)$  einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  und ein Punkt  $p \in W$  gibt es stets ein Paar  $(U, g)$  bestehend aus einer offenen Umgebung  $U \subseteq X$  von  $\varphi(p)$  und einer  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung  $g : U \rightarrow W$  derart, daß gilt  $g(\varphi(y)) = y$  für alle  $y \in \varphi^{-1}(U)$ .

*Übung 4.3.18.* Der Doppelkegel  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$  ist keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Auch die Teilmenge aller seiner Punkte mit nicht-negativer  $z$ -Koordinate ist keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Entfernen wir aus dem Doppelkegel jedoch den Ursprung, so erhalten wir eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

4.3.19. Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $M \subset X$  eine Untermannigfaltigkeit. Die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}^k$  zu einer Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  von  $M$  nennen wir in Verallgemeinerung von 4.3.4 ein **lokales Koordinatensystem von  $M$**  und seine Komponenten  $\text{pr}_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq k$  nennen wir **lokale Koordinaten auf  $M$** . Viele Autoren verwenden allerdings auch eine andere Terminologie und verstehen unter einer Karte das, was wir ein Koordinatensystem genannt haben. Lokale Koordinaten um einen Punkt der Erdoberfläche, der nicht gerade auf dem sogenannten "Nullmeridian" liegt, sind etwa die Längen- und Breitengrade. Bilden Funktionen  $x_1, \dots, x_k : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein System von lokalen Koordinaten auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq M$  einer Mannigfaltigkeit, und ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so bezeichnen wir mit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  auch die Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$ , die unter der



Ein Bild zum Beweis von [4.3.14](#) im Fall  $n = k = 1$

zugehörigen Karte  $\varphi : W \xrightarrow{\sim} U$  verwandt ist zu  $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}$ , wenn denn  $f \circ \varphi$  partiell differenzierbar ist nach der  $i$ -ten Variablen. Auch hier gilt es zu beachten, daß  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  von der Wahl aller Koordinaten abhängt, und keineswegs nur von der  $i$ -ten Koordinate.

*Übung 4.3.20.* Seien  $X \subset Y$  ein endlichdimensionaler reeller Raum mit einem affinen Teilraum. So ist eine Teilmenge  $M \subset X$  als Teilmenge von  $Y$  eine Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn  $M$  als Teilmenge von  $X$  eine Untermannigfaltigkeit ist.

**Definition 4.3.21.** Sind  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  und  $(W_\beta, \varphi_\beta)$  zwei Karten einer Untermannigfaltigkeit  $M$ , so setzen wir  $W_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(W_\beta))$  und nennen die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$$

den **Kartenwechsel** zwischen unseren beiden Karten.

**Proposition 4.3.22.** *Kartenwechsel sind stets  $C^1$ -Diffeomorphismen.*

*Beweis.* Nach dem Beweis von 4.3.14 kann man für  $(W, \varphi)$  eine Karte und  $p \in \varphi(W)$  einen Punkt aus ihrem Bild stets eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $X$  finden derart, daß  $\varphi^{-1} : U \cap \varphi(W) \rightarrow W$  die Restriktion einer Plättung  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  unserer Mannigfaltigkeit ist.  $\square$

**Satz 4.3.23 (Extrema unter Nebenbedingungen).** *Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $U \subseteq X$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar, und  $p \in U$  ein Punkt mit  $d_p f$  surjektiv, so daß der Schnitt der Menge*

$$M = \{q \in U \mid f(q) = f(p)\}$$

*mit einer hinreichend kleinen offenen Umgebung von  $p$  eine Mannigfaltigkeit ist. Besitzt dann für eine differenzierbare Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  ihre Einschränkung  $h|_M$  ein lokales Extremum bei  $p$ , so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  mit*

$$d_p h = \lambda_1 d_p f_1 + \dots + \lambda_m d_p f_m$$

4.3.24. Mit der Notation  $f(p) = c$  mag man in dieser Situation ein lokales Extremum der Restriktion  $h|_M$  auch ein **lokales Extremum von  $h$  unter den Nebenbedingungen**  $f_1(q) = c_1, \dots, f_m(q) = c_m$ . Die  $\lambda_i$  heißen die **Lagrange'schen Multiplikatoren**. Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  kann man unsere Bedingung dahingehend interpretieren, daß "der Gradient der Funktion  $h$  in  $p$  auf  $M$  senkrecht stehen muß" oder auch, daß "der Gradient der Funktion  $h$  in  $p$  eine Linearkombination der Gradienten der Nebenbedingungen sein muß". Die Bedingung "d<sub>p</sub>f surjektiv" hinwiederum kann man dahingehend interpretieren, daß die Gradienten der  $f_i$  bei  $p$  linear unabhängig sein sollen.



SkriptenBilder/BildLM.png

Dies Bild soll den Satz über Extrema mit Nebenbedingungen veranschaulichen für den Fall einer Funktion  $h$  auf der Papierebene, hier angedeutet durch einige gestrichelt eingezeichnete Niveaulinien, die maximiert werden soll unter einer Nebenbedingung  $f$ , hier angedeutet durch die fett eingezeichnete Kurve  $M$  der Punkte, bei denen sie erfüllt ist. Es scheint mir anschaulich recht offensichtlich, daß Extrema von  $h$  auf  $M$  nur an Stellen  $p \in M$  zu erwarten sind, an denen der Gradient von  $h$  senkrecht steht auf  $M$ , also ein Vielfaches des Gradienten von  $f$  ist. Im Bild hätten wir etwa grob geschätzt  $(\text{grad } h)(p) = -\frac{1}{2}(\text{grad } f)(p)$ . Allerdings ist es für reellwertige Funktionen auf der Papierebene streng genommen erst nach der Wahl eines Maßstabs sinnvoll, von Gradienten zu reden, und in allgemeineren Fällen erst nach Wahl eines Skalarprodukts auf dem Richtungsraum, weshalb ich im Satz die koordinatenfreie Formulierung mit Differentialen vorgezogen habe.

*Beweis.* Indem wir  $U$  verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $d_q f$  surjektiv ist für alle  $q \in U$ . Nach 4.3.10 ist dann  $M \subset X$  eine Untermannigfaltigkeit. Ist  $\varphi : W \rightarrow M$  eine Karte von  $M$  um  $p$  mit  $p = \varphi(w)$ , so hat  $h|_{M \cap U}$  ein lokales Extremum bei  $p$  genau dann, wenn  $h \circ \varphi$  ein lokales Extremum bei  $w$  hat. Nach 2.4.5 ist eine notwendige Bedingung dafür  $d_w(h \circ \varphi) = 0$ , als da heißt  $d_p h \circ d_w \varphi = 0$ . Wir haben aber eh  $f \circ \varphi = 0$ , also  $d_p f \circ d_w \varphi = 0$ , und aus Dimensionsgründen bilden die  $d_p f_i$  für  $1 \leq i \leq m$  sogar eine Basis für den Untervektorraum von  $\vec{X}^*$  aller Linearformen, die auf dem Bild von  $d_w \varphi$  verschwinden. Verschwindet auch  $d_p h$  auf diesem Teilraum, so muß es folglich als Linearkombination der  $d_p f_i$  geschrieben werden können.  $\square$

*Beispiel 4.3.25.* Wir suchen lokale Extrema der Funktion  $h : (x, y) \mapsto x + y$  auf dem Einheitskreis  $M = S^1$ , d.h. unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$ . Diese Nebenbedingung bedeutet, daß die Funktion  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  den Wert 1 annehmen muß. Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen  $p \in M$  mit  $d_p h = \lambda d_p f$  angenommen werden, also an Stellen  $p = (x, y) \in S^1$  mit  $(1, 1) = \lambda(2x, 2y)$ . Damit kommen nur die beiden Stellen  $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  und  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  in Frage. Hier ist offensichtlich die erste ein lokales Minimum und die zweite ein lokales Maximum.

*Beispiel 4.3.26.* Wir suchen lokale Extrema der Funktion  $h : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$  auf dem Einheitskreis  $M = S^1 \times 0$  in der  $xy$ -Ebene, d.h. unter den beiden Nebenbedingungen  $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$  und  $f_2(x, y, z) = z = 0$ . Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen  $p \in M$  angenommen werden, für die es  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  gibt mit  $d_p h = \lambda_1 d_p f_1 + \lambda_2 d_p f_2$ , also an Stellen  $(x, y, z) \in M$  mit

$$(a, b, c) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(0, 0, 1)$$

Daraus folgt jedoch schnell  $\lambda_2 = c$ , und unter der zusätzlichen Voraussetzung  $(a, b) \neq (0, 0)$  es kommen nur die beiden Stellen  $\pm(a^2 + b^2)^{-1}(a, b, 0)$  in Frage. Wieder ist hier offensichtlich die eine ein lokales Minimum und die andere ein lokales Maximum.

## 4.4 Die Transformationsformel

**Definition 4.4.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow V$  eine Abbildung in einen Vektorraum oder allgemeiner eine abelsche Gruppe. Der **Träger**  $\text{supp } f$  von  $f$  (für englisch und französisch **support**) ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , außerhalb derer die Funktion verschwindet, in Formeln

$$\text{supp } f = \overline{f^{-1}(V \setminus \{0\})}$$

Den Vektorraum aller stetigen Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ .

4.4.2. Diese Definition muß kleinlich genau genommen werden. Ist zum Beispiel  $X = (0, 1)$  ein offenes Intervall und  $f$  die konstante Funktion 1, so hat  $f$  nicht kompakten Träger, denn  $\text{supp } f = X$  ist nicht kompakt.

**Definition 4.4.3.** Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R})$  eine stetige Funktion auf  $U$  mit kompaktem Träger, so definieren wir eine reelle Zahl

$$\int_U f = \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_U f(x) d^n x,$$

das **Integral von  $f$  über  $U$** , indem wir  $f$  durch Null zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}^n$  ausdehnen und diese Ausdehnung im Sinne von 2.1.1 integrieren über irgendeinen kompakten Quader, der den Träger umfaßt. Im Spezialfall  $n = 0$  vereinbaren wir, daß das Integral einfach der einzige Funktionswert der zu integrierenden Funktion sein möge.

4.4.4. Man überlege sich als Übung, daß es hierbei nicht auf die Wahl des kompakten Quaders ankommt. Das so definierte Integral ist offensichtlich linear,  $\int f + g = \int f + \int g$  und  $\int \lambda f = \lambda \int f$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , und monoton, als da heißt  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ . Insbesondere folgt wie im Fall einer Veränderlichen  $|\int f| \leq \int |f|$ .

*Ergänzung 4.4.5.* In derselben Weise erklärt man auch den Träger für vektorwertige Funktionen oder, noch allgemeiner, für Funktionen mit Werten in einer beliebigen Gruppe, und in Fortführung von 2.1.4 erklärt man für jede stetige Abbildung mit kompaktem Träger von  $\mathbb{R}^n$  in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum ihr Integral, einen Vektor aus besagtem Vektorraum. Auch die folgende Transformationsformel überträgt sich unmittelbar auf den Fall vektorwertiger Funktionen.

**Satz 4.4.6 (Transformationsformel).** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und  $\phi : U \xrightarrow{\sim} V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Bezeichne  $|\det d\phi|$  die Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto |\det d_p \phi|$ . So gilt für jede stetige Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

*Beispiele 4.4.7.* Ist  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine abstandserhaltende Abbildung, also nach ?? die Verknüpfung einer orthogonalen Abbildung mit einer Translation, so liefert die Transformationsformel für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Identität  $\int f = \int f \circ \phi$ . Ist  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Streckung um den Faktor 2, so liefert die Transformationsformel die Identität  $\int f = 4 \int f \circ \phi$ . Beide Aussagen sollten auch anschaulich unmittelbar einleuchten.

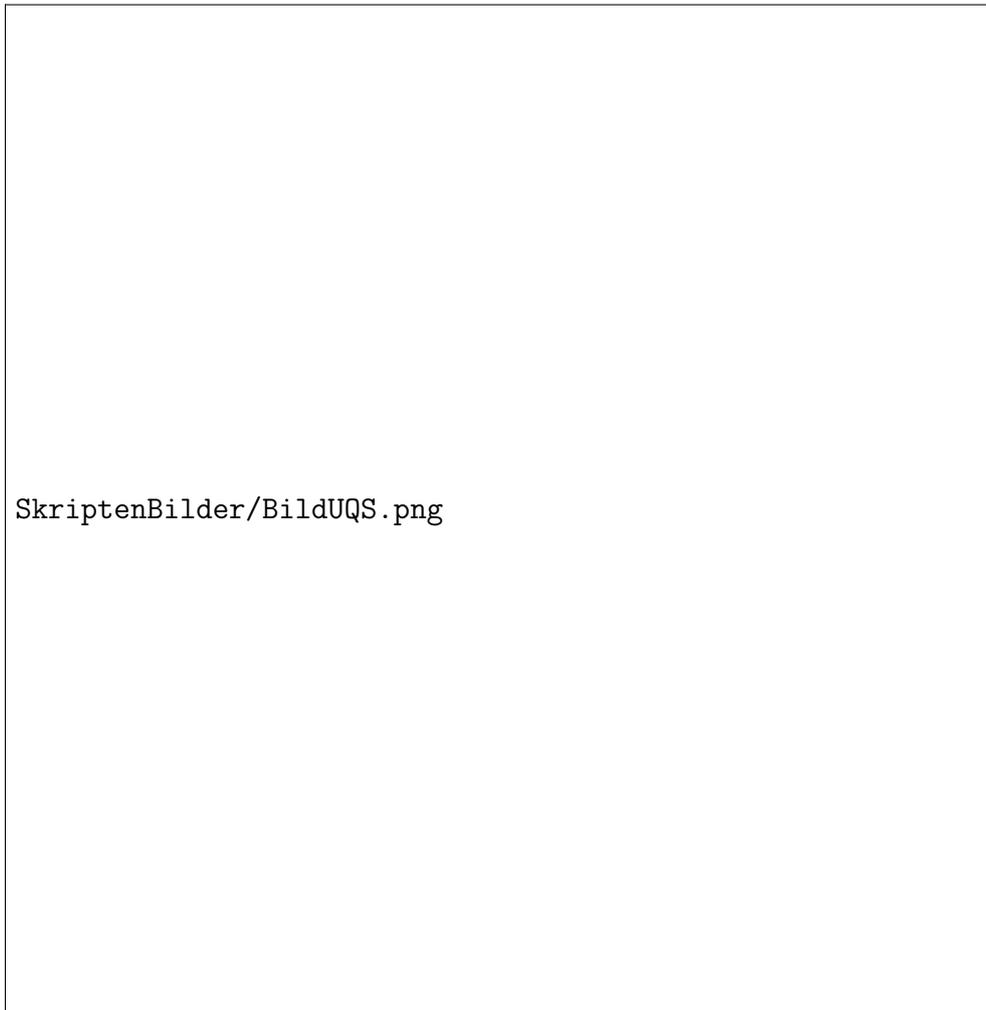
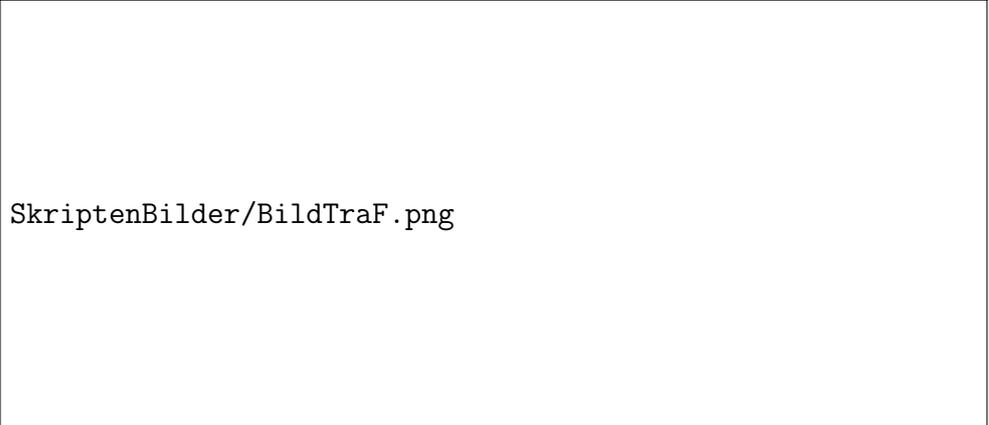


Illustration zur Definition des Integrals stetiger Funktionen mit kompaktem Träger 4.4.3. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß die Wahl des kompakten Quaders hier keine Rolle spielt, solange er nur den Träger unserer Funktion umfaßt. Im Bild kommen unter vielen anderen etwa die beiden Quader  $Q$  und  $Q'$  in Frage.



SkriptenBilder/BildTraF.png

Illustration zur Transformationsformel, insbesondere zu Beispiel 4.4.8. Das Integral einer Funktion  $f$  über das linke Kuchenstück kann angenähert werden, indem wir die angedeutete Unterteilung des Integrationsbereichs betrachten, in jedem der unterteilenden Stücke den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Stücks multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Unter der Polarkoordinatenabbildung  $P$  entspricht nun die Unterteilung unseres Kuchenstücks einer Unterteilung unseres Quadrats, und die Fläche des Bildes eines Unterquadrats ist in etwa der Betrag der Funktionaldeterminante  $|\det P|$  an einer Stelle unseres Unterquadrats multipliziert mit der Fläche besagten Unterquadrats. So wäre etwa die Fläche des schraffierten Teils im Kuchenstück rechts etwas weniger als halb so groß wie die Fläche des schraffierten Unterquadrats links, und  $|\det P| = r$  nimmt auf unserem Unterquadrat Werte zwischen  $1/4$  und  $1/2$  an. Es wird also in etwa dasselbe herauskommen, wenn wir von der Funktion  $(f \circ P)|\det P|$  auf unserem Quadrat in jedem der Unterquadrate den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Unterquadrats multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Im Grenzübergang für immer feinere Unterteilungen kommt dann sogar nicht nur in etwa, sondern ganz genau dasselbe heraus, und das ist die anschauliche Bedeutung der Transformationsformel.

*Beispiel 4.4.8.* Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$P: \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus (\text{abgeschlossene negative } x\text{-Achse})$$

$$(r, \vartheta)^\top \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)^\top$$

wobei verwirrender Weise die Klammern  $(, )$  einmal ein offenes Intervall und dann wieder Elemente kartesischer Produkte andeuten, die wir anschließend noch zu Spaltenvektoren transponieren. Das Differential der Polarkoordinatenabbildung wird gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$dP = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

mit der Determinante  $\det dP = r$ . Beim Bilden des Betrags ändert sich Nichts, und wir erhalten

$$\int_V f(x, y) \, dx \, dy = \int_{P^{-1}(V)} f(P(r, \vartheta)) \, r \, dr \, d\vartheta$$

für stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}^2$  mit kompaktem Träger, der darüber hinaus nicht die abgeschlossene negative  $x$ -Achse treffen darf. Oft schreibt man kurz  $f(r, \vartheta)$  statt  $f(P(r, \vartheta))$  in der Erwartung, daß schon aus der bloßen Bezeichnung der Variablen klar wird, was gemeint ist. So ergibt sich dann eine Formel für die Transformation eines Integrals auf Polarkoordinaten, die man als

$$dx \, dy = r \, dr \, d\vartheta$$

abkürzen mag. Leider erhalten wir besagte Formel vorerst nur für sehr spezielle Funktionen. In der Praxis ist deshalb unser Satz kaum anwendbar und wir bauen im nächsten Kapitel erst einmal die Integrationstheorie aus, um die auch in der Praxis anwendbare Verallgemeinerung [6.8.1](#) formulieren und beweisen zu können.

4.4.9. Man nennt  $\det d\phi$  die **Funktionaldeterminante von  $\phi$** . Wir verallgemeinern die Transformationsformel in [6.8.1](#) auf beliebige “integrierbare” Funktionen  $f$ , sie läßt sich auch erst in dieser Allgemeinheit gut anwenden. Bevor wir die hier gegebene Version beweisen, wollen wir versuchen, sie mit Anschauung zu füllen. Wir beschränken uns dazu auf den Fall  $n = 2$ . Zunächst ist hoffentlich anschaulich klar, daß es für jede lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reelle Konstante  $c(L) \geq 0$  gibt derart, daß “das Bild unter  $L$  eines Flächenstücks  $U$  der Fläche  $\text{vol}(LU) = c(L) \text{vol}(U)$  hat”. Unsere Transformationsformel enthält nun, wenn man sie ohne Rücksicht auf die Bedingungen des Satzes mutig auf die konstante Funktion  $f = 1$  auf  $U$  anwendet und  $\phi = L$  linear annimmt, die Erkenntnis

$$c(L) = |\det L|$$

Das sieht man auch anschaulich leicht ein: Zunächst sollte anschaulich klar sein, daß “eine Scherung die Fläche nicht ändert” und “die Streckung einer Achse die Fläche genau durch Multiplikation mit dem Betrag des Streckfaktors ändert”, so daß also unsere Erkenntnis anschaulich klar ist für lineare Abbildungen  $L$  mit Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Anschaulich klar ist weiter  $c(L \circ M) = c(L)c(M)$  und nach der Multiplikationsformel für Determinanten haben wir auch  $|\det L \circ M| = |\det L| |\det M|$ . So rechtfertigen wir dann unsere Erkenntnis  $c(L) = |\det L|$  im allgemeinen. Mehr dazu mag man in ?? nachlesen. Das Integral von  $f$  erhalten wir nun im Grenzwert, wenn wir  $V$  in lauter kleine Flächenstücke  $V_i$  zerlegen und die Produkte der Flächen dieser Flächenstücke mit einem Funktionswert an einem Punkt  $y_i \in V_i$  des jeweiligen Flächenstück aufsummieren, in Formeln

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i) \operatorname{vol}(V_i)$$

Wir betrachten nun die Urbilder  $x_i = \phi^{-1}(y_i)$  unserer Punkte  $y_i$  und die Zerlegung von  $U$  durch die Urbilder  $U_i = \phi^{-1}(V_i)$  unserer kleinen Flächenstücke  $V_i$ . Bei  $x_i$  wird  $\phi$  bis auf Verschiebung gut approximiert durch  $d_{x_i}\phi$ , deshalb haben die Bilder  $\phi(U_i) = V_i$  dieser Flächenstücke  $U_i$  in etwa die Fläche  $\operatorname{vol}(V_i) \simeq |\det d_{x_i}\phi| \operatorname{vol}(U_i)$  und wir folgern

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i) \operatorname{vol}(V_i) \simeq \sum (f \circ \phi)(x_i) |\det d_{x_i}\phi| \operatorname{vol}(U_i) \simeq \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

Das beendet unsere anschauliche aber doch recht vage Argumentation und wir kommen nach einem Beispiel zum eigentlichen Beweis.

*Beweis.* Wir zeigen den Satz durch vollständige Induktion über  $n$ . Der Fall  $n = 0$  ist unproblematisch und wir behandeln gleich den Fall  $n = 1$ . In diesem Fall kann  $U$  nach II.2.1.3 als disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen  $U_i$  geschrieben werden, und deren Bilder in  $V$  sind wieder Intervalle nach dem Zwischenwertsatz und offen etwa nach 4.1.12. Unsere Funktion  $f$  verschwindet außerhalb von endlich vielen der  $\phi(U_i)$  nach II.6.10.3 und wir können folglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $U$  und  $V$  bereits offene Intervalle sind. Wir finden dann sicher ein echtes kompaktes Intervall  $[c, d] \subset V$ , das den Träger von  $f$  umfaßt. Die Substitutionsregel II.4.6.1 liefert nun

$$\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx$$

für die  $a, b \in U$  mit  $\phi(a) = c$  bzw.  $\phi(b) = d$ . Da  $\phi$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus sein soll, ist  $\phi'$  stetig mit  $\phi' \neq 0$  auf  $U$  und wir folgern, daß auf  $U$  entweder gilt  $\phi' > 0$  oder aber  $\phi' < 0$ . Im ersten Fall haben wir  $a < b$  und unsere Transformationsformel steht bereits da. Im zweiten Fall haben wir  $a > b$  und  $|\phi'| = -\phi'$  und

$$\int_U (f \circ \phi) |\det d\phi| = \int_b^a f(\phi(x)) |\phi'(x)| dx = \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

und sind wieder fertig. Damit ist der Fall  $n = 1$  erledigt. Nehmen wir nun also an, wir hätten  $n \geq 2$  und der Satz sei für Integration im  $\mathbb{R}^{n-1}$  schon bewiesen. Wir gehen dann in mehreren Schritten vor.

1. Läßt  $\phi$  die erste Koordinate unverändert, in Formeln  $\phi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$ , so folgt unsere Transformationsformel aus der Induktionsvoraussetzung. In der Tat, betrachten wir die Schnitte  $U_c = U \cap \{x_1 = c\}$  und  $V_c = V \cap \{x_1 = c\}$  unserer offenen Mengen mit der Hyperebene  $x_1 = c$ , so induziert unsere Abbildung  $\phi$  für jedes feste  $c$  Diffeomorphismen  $\phi_c : U_c \xrightarrow{\sim} V_c$  und es gilt

$$|\det d_{(x_2, \dots, x_n)} \phi_c| = |\det d_{(c, x_2, \dots, x_n)} \phi|$$

Für  $f_c : V_c \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f_c(x_2, \dots, x_n) = f(c, x_2, \dots, x_n)$  erhalten wir also nach der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \int f_c &= \int (f_c \circ \phi_c) |\det d\phi_c| \\ &= \int (f \circ \phi)(c, x_2, \dots, x_n) |\det d_{(c, x_2, \dots, x_n)} \phi| \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung über alle  $c$ , so ergibt sich die Transformationsformel für die Koordinatentransformation  $\phi$ .

2. Sind  $W \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\phi} V$  zwei  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , und gilt unsere Transformationsformel für  $\phi$  und  $\psi$ , so gilt sie auch für  $\phi \circ \psi$ . In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned} \int f &= \int (f \circ \phi) |\det d\phi| \\ &= \int (f \circ \phi \circ \psi) (|\det d\phi| \circ \psi) |\det d\psi| \\ &= \int (f \circ \phi \circ \psi) |\det d(\phi \circ \psi)| \end{aligned}$$

Hier gilt die erste Zeile nach der Transformationsformel für  $\phi$  angewandt auf die Funktion  $f$ , die zweite nach der Transformationsformel für  $\psi$  angewandt auf die Funktion  $(f \circ \phi) |\det d\phi|$ , und die dritte nach der Kettenregel

$$d_p(\phi \circ \psi) = d_{\psi(p)} \phi \circ d_p \psi$$

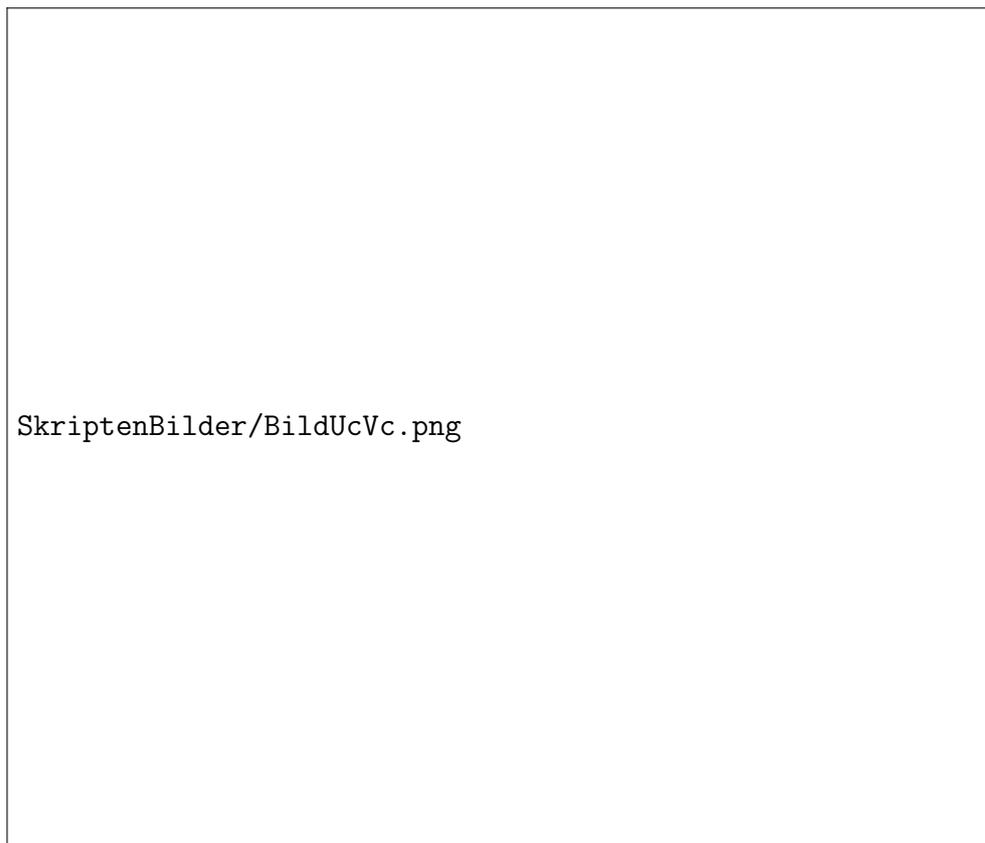


Illustration zum Beweis der Transformationsformel.

für  $p \in W$  und der Multiplikationsformel  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  für Determinanten.

3. Für  $\phi$  eine Vertauschung der Koordinaten gilt unsere Formel. In der Tat ist so ein  $\phi$  ja linear mit  $|\det d\phi| = 1$ , und wir wissen schon nach 2.1.7, daß es bei Mehrfachintegralen nicht auf die Reihenfolge ankommt.

4. Ist eine Komponente von  $\phi$  eine Koordinate auf  $U$ , haben wir also in Formeln  $\phi_i(x_1, \dots, x_n) = x_j$  für geeignete  $i$  und  $j$ , so gilt unsere Formel. In der Tat finden wir eine Darstellung  $\phi = \psi \circ \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$  derart, daß  $\tilde{\phi}$  die erste Koordinate unverändert läßt und  $\psi, \tilde{\psi}$  Koordinatenvertauschungen sind. Für  $\tilde{\phi}$  gilt dann unser Satz nach Schritt 1, für  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  nach Schritt 3, und dann gilt er auch für  $\phi$  nach Schritt 2.

5. Jeder Punkt  $p \in U$  besitzt eine offene Umgebung  $U_p$  derart, daß unsere Transformationsformel gilt für die Restriktion von  $\phi$  auf  $U_p$ . In der Tat finden wir zunächst ein  $i$  derart, daß gilt  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}(p) \neq 0$ , und dann gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung  $U_p$  von  $p$  derart, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\phi_i(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus von  $U_p$  auf eine offene Teilmenge  $\psi(U_p) = W_p \subset \mathbb{R}^n$  induziert. Wir bezeichnen das Bild von  $U_p$  unter  $\phi$  mit  $\phi(U_p) = V_p$  und erhalten ein kommutatives Diagramm von  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismen

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{\psi} & W_p \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi\psi^{-1} \\ & & V_p \end{array}$$

wobei die  $i$ -te Komponente der Abbildung  $\phi\psi^{-1}$  gerade die erste Koordinate ist, in Formeln

$$(\phi\psi^{-1})_i(y_1, \dots, y_n) = y_1$$

Für beide Abbildungen  $\psi$  und  $(\phi\psi^{-1})$  gilt also nach Schritt 4 unsere Transformationsformel, mithin gilt sie nach Schritt 2 auch für ihre Verknüpfung, als da heißt für die Restriktion  $\phi : U_p \xrightarrow{\sim} V_p$  von  $\phi$  auf  $U_p$ . Hier ist im übrigen die Stelle im Beweis, die uns daran hindert, unsere Induktion mit dem Trivialfall  $n = 0$  zu starten: Im Fall  $n = 1$  können wir nämlich Schritt 4 auf  $\psi$  nicht anwenden, da in diesem Fall keine Komponente von  $\psi$  eine Koordinate wäre.

6. Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger  $\text{supp } f \subset V$ . Für  $p \in U$  wählen  $U_p$  wie in Schritt

5 und setzen wieder  $V_p = \phi(U_p)$ . Da  $\text{supp } f$  kompakt ist, finden wir nach II.6.10.3 eine endliche Teilmenge  $E \subset U$  mit  $\text{supp } f \subset \bigcup_{p \in E} V_p$ . Jetzt benutzen das im Anschluß formulierte und bewiesene technische Lemma 4.4.10, wählen wir für unsere endliche Überdeckung von  $\text{supp } f = K$  durch die  $V_p$  mit  $p \in E$  eine angepaßte Teilung der Eins  $\alpha_p$  und schreiben

$$f = \sum_{p \in E} \alpha_p f$$

Die Summanden  $\alpha_p f$  sind dann stetig mit kompaktem in  $V_p$  enthaltenem Träger. Nach der Wahl der  $V_p$  haben wir nun  $\int \alpha_p f = \int ((\alpha_p f) \circ \phi) |\det d\phi|$  für alle  $p \in E$ , und addieren wir diese Gleichungen, so ergibt sich wie gewünscht

$$\int f = \int (f \circ \phi) |\det d\phi| \quad \square$$

**Lemma 4.4.10 (Teilung der Eins).** *Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und sind  $V_1, \dots, V_r \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit  $K \subset \bigcup V_i$ , so gibt es stetige Funktionen  $\alpha_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  mit kompaktem, jeweils in  $V_i$  enthaltenem Träger derart, daß gilt*

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

4.4.11. Eine derartige Familie von Funktionen  $\alpha_i$  heißt eine an die gegebene Überdeckung von  $K$  angepaßte **Teilung der Eins**.

*Beweis.* Wir wählen für jedes  $x \in K$  ein  $j = j(x)$  mit  $x \in V_j$  und eine stetige Funktion  $\varphi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  mit kompaktem, in  $V_j$  enthaltenem Träger, die bei  $x$  nicht verschwindet, in Formeln  $\varphi_x(x) > 0$ . Die  $N_x := \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$  sind natürlich offen in  $\mathbb{R}^n$  und überdecken  $K$  und wir haben  $\overline{N_x} \subset V_{j(x)}$ . Da  $K$  kompakt ist, finden wir  $E \subset K$  endlich mit  $K \subset \bigcup_{x \in E} N_x$ . Dann bilden wir

$$\psi = \sum_{x \in E} \varphi_x$$

Diese Funktion ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}^n$ , nimmt auf  $N = \bigcup_{x \in E} N_x$  positive Werte an, und verschwindet außerhalb von  $N$ . Nun betrachten wir für jedes  $x \in E$  auf der offenen Menge  $N$  die stetige Funktion  $\psi_x = \varphi_x / \psi$ . Natürlich gilt  $\sum_{x \in E} \psi_x(z) = 1$  nicht nur für alle  $z \in K$ , sondern sogar für alle  $z \in N$ , und  $\psi_x$  verschwindet außerhalb von  $N_x$ . Als nächstes konstruieren wir eine stetige Funktion  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , die auf  $K$  konstant Eins ist und deren Träger in  $N$  enthalten ist. Ist zum Beispiel  $m$  das Minimum von  $\psi$  auf  $K$ , so erhalten wir ein mögliches  $\beta$ , indem wir setzen  $\beta = h \circ \psi$  für  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

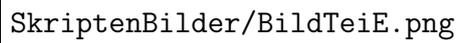
A rectangular box containing the text "SkriptenBilder/BildTeiE.png". This box is intended to hold an illustration of a compact interval  $K \subset \mathbb{R}$  being covered by two open sets.

Illustration einer Teilung der Eins im Fall einer Überdeckung eines kompakten Intervalls  $K \subset \mathbb{R}$  durch zwei offene Teilmengen.

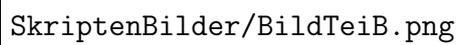
A rectangular box containing the text "SkriptenBilder/BildTeiB.png". This box is intended to hold an illustration of some sets used in the construction of a partition of unity for a compact rectangle  $K \subset \mathbb{R}^2$ .

Illustration einiger Mengen, die bei unserer Konstruktion einer Teilung der Eins eine Rolle spielen, im Fall einer Überdeckung eines kompakten Quaders  $K \subset \mathbb{R}^2$  durch zwei offene Teilmengen.

eine stetige Funktion mit  $h|_{[m, \infty)} = 1$  und  $h|_{(-\infty, m/2]} = 0$ . Dann bilden wir schließlich

$$\alpha_i = \sum_{j(x)=i} \beta \psi_x$$

Diese Funktionen sind zwar a priori nur auf  $N$  definiert, aber da  $\mathbb{R}^n$  durch  $N$  und das Komplement des Trägers von  $\beta$  überdeckt wird, lassen sie sich stetig durch Null auf ganz  $\mathbb{R}^n$  fortsetzen, und diese Fortsetzungen haben dann offensichtlich die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

*Ergänzung 4.4.12 (Glatte Teilung der Eins).* Im vorherigen Lemma können die Funktionen  $\alpha_i$  sogar glatt, als da heißt beliebig gemischt partiell differenzierbar gewählt werden. Um das zu sehen, sind nur wenige Zusatzüberlegungen von Nöten. Aus II.4.2.11 kennen wir ja eine glatte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf der negativen Halbgeraden verschwindet und auf der echt positiven Halbgeraden positiv ist. Dann ist das Produkt  $f(t)f(1-t)$  eine von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktion mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}$ . Man erhält von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}^n$ , indem man von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger in den einzelnen Koordinaten nimmt und das Produkt bildet. So sehen wir, daß die  $\varphi_x$  im vorhergehenden Beweis sogar glatt gewählt werden können. Damit sind dann auch  $\psi$  und die  $\psi_x$  glatt. Wählen wir zusätzlich die Funktion  $h$  glatt, bis auf Reskalierung könnte man für  $h$  etwa das Integral einer von Null verschiedenen nichtnegativen glatten Funktion mit kompaktem Träger nehmen, so liefert die Konstruktion aus dem vorhergehenden Beweis sogar eine glatte Teilung der Eins.

*Übung 4.4.13.* Man zeige, daß die Funktionaldeterminante der Kugelkoordinatenabbildung  $K$  aus 3.2.11 gegeben wird durch  $\det dK = r^2 \sin \vartheta$ . Salopp gesprochen transformieren sich also Volumenintegrale in Kugelkoordinaten vermittels der Regel

$$dx dy dz = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

## 4.5 Integration über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

**Satz 4.5.1 (Integration über Untermannigfaltigkeiten).** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $\mathcal{C}_c(M, \mathbb{R})$  der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger. So gibt es genau eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\int_M : \mathcal{C}_c(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  und jede Funktion  $f \in \mathcal{C}_c(M, \mathbb{R})$  mit Träger im Bild der Karte alias  $\text{supp } f \subset \varphi(W)$  gilt

$$\int_M f = \int_W f(\varphi(x)) \sqrt{\det (d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)} \, d^k x$$

4.5.2. Dieser Satz ist formal betrachtet noch nicht besonders nützlich, da für das Lösen praktischer Aufgaben meist Funktionen zu integrieren sind, die eben gerade nicht kompakten Träger haben. Dennoch sollte daraus ersichtlich sein, wie in der Praxis gerechnet werden muß. Wir verschieben die formale Rechtfertigung dieser Rechnungen auf den Abschnitt über das Lebesgue-Integral, vergleiche 6.9.1 folgende, in dessen Rahmen sie besonders einfach formuliert und bewiesen werden können. Bevor ich den obigen Satz beweise, will ich erst einmal versuchen, ihn zu motivieren und den darin erklärten Integralbegriff mit Anschauung zu füllen.

*Ergänzung 4.5.3.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $X$  und ein Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum mit Einheiten im orientierten eindimensionalen Vektorraum  $L$  im Sinne von ?? liefern die analogen Definitionen für jede  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  ein Integral

$$\int_M : \mathcal{C}_c(M, \mathbb{R}) \rightarrow L^{\otimes k}$$

Wie bereits erwähnt messen sich also auch in der Mathematik “Längen in Metern, Flächen in Quadratmetern und Volumen in Kubikmetern”. Betrachten wir noch allgemeiner Funktionen mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ , so wird unser Integral noch allgemeiner zu einer Abbildung  $\int_M : \mathcal{C}_c(M, V) \rightarrow L^{\otimes k} \otimes V$ .

*Beispiel 4.5.4.* Ist  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve derart, daß das Bild des offenen Intervalls  $\varphi((a, b))$  eine 1-Mannigfaltigkeit  $M$  ist und  $\varphi : (a, b) \rightarrow M$  eine Karte von  $M$ , so ist das Integral einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  über  $M$  genau das Kurvenintegral der durch Null auf die Endpunkte fortgesetzten Funktion  $f$  längs der Kurve  $\varphi$  im Sinne von II.7.3.6.

*Beispiel 4.5.5 (Oberfläche der Einheitskugel).* Lassen wir aus der Kugelschale  $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  den Äquator weg, also alle Punkte  $(x, y, z)$  mit  $z = 0$ , und dazu noch einen halben Großkreis von Pol zu Pol, sagen wir alle Punkte  $(x, y, z)$  mit  $y = 0$  und  $x \leq 0$ , so ist der Rest die disjunkte Vereinigung von zwei geschlitzten offenen Hemisphären  $U_+ \cup U_-$  und  $U_\pm$  ist das Bild der Karte

$$\begin{aligned} \varphi_\pm : (0, 1) \times (-\pi, \pi) &\rightarrow S^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, \pm \sqrt{1 - r^2}) \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu

$$d\varphi_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \\ \mp r/\sqrt{1-r^2} & 0 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten als Gram'sche Matrix

$$(d\varphi_{\pm})^{\top}(d\varphi_{\pm}) = \begin{pmatrix} 1/(1-r^2) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix ergibt sich damit zu  $r/\sqrt{1-r^2}$  und wir folgern für jede stetige Funktion  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit Träger in  $U_+ \cup U_-$  die Formel

$$\int_{S^2} f = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 f(\varphi_+(r, \theta)) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 f(\varphi_-(r, \theta)) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta$$

Argumentieren wir nun heuristisch, gehen davon aus, daß dieses Weglassen eines Längen- und eines Breitengrades das Integral einer stetigen Funktion ja wohl kaum ändern kann, und wenden unsere Formel mutig auf die konstante Funktion Eins an, obwohl unser Satz das gar nicht erlaubt, so erhalten wir heuristisch für die Oberfläche der Einheitskugel das Ergebnis

$$\int_{S^2} 1 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 4\pi$$

Im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie werden wir Sätze kennenlernen, mit deren Hilfe sich die obige heuristische Argumentation auch formal rechtfertigen läßt, vergleiche 6.9.6.

4.5.6. Hat  $M$  die Dimension  $k$ , so ist  $d_x\varphi$  eine Matrix mit  $k$  Spalten und  $n$  Zeilen und das Produkt  $(d_x\varphi)^{\top}(d_x\varphi)$  dieser Matrix mit ihrer Transponierten ist folglich eine  $(k \times k)$ -Matrix. Diese sogenannte **Gram'sche Matrix** kann aufgefaßt werden als die Matrix aller Skalarprodukte zwischen Spaltenvektoren von  $d_x\varphi$ . Sie ist nach ?? insbesondere positiv semidefinit und hat damit eine nichtnegative Determinante. Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix  $V$  mit Spaltenvektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  definieren wir ganz allgemein eine reelle Zahl

$$\text{vol } V = \text{vol}(v_1 | \dots | v_k) := \sqrt{\det(V^{\top} V)} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$$

und nennen sie das  **$k$ -dimensionale Volumen** des von den Vektoren  $v_i$  aufgespannten Parallelepiped. Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix können wir mit dieser Notation auch kürzer schreiben als

$$\sqrt{\det(d_x\varphi)^{\top}(d_x\varphi)} = \text{vol}(d_x\varphi)$$

Im Fall  $k = 1$  ist das eindimensionale Volumen eines Vektors nach dieser Definition schlicht seine Länge. Im Fall  $k = 2$  bedeutet das zweidimensionale Volumen eines Paares von Vektoren  $v, w$  die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms mit den Ecken  $0, v, w$  und  $v + w$ . Um die Bezeichnung “Volumen” für die Zahl  $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$  im Allgemeinen zu rechtfertigen, beachten wir:

1. Es gilt  $\text{vol}(v_0 | v_1 | \dots | v_k) = \text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$  falls  $v_0$  die Länge 1 hat und senkrecht steht auf allen anderen  $v_i$ .
2. Im Fall  $k = n$  haben wir  $\text{vol}(v_1 | \dots | v_n) = |\det(v_1 | \dots | v_n)|$ . In der Tat, bezeichnet  $V$  die in diesem Fall quadratische Matrix mit Spalten  $v_i$ , so gilt nach dem Multiplikationssatz für Determinanten  $\det(V^T V) = (\det V)^2$ .

Auf diese Weise kann unsere anschauliche Interpretation der Zahl  $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$  heuristisch auf unsere anschauliche Interpretation der Determinante in ?? und 4.4.9 zurückgeführt werden: Die Fläche eines Parallelogramms im Raum sollte eben das Volumen des Körpers sein, der entsteht, wenn ich mein Parallelogramm “zu einem Toast des Dicke Eins verdicke”.

*Ergänzung 4.5.7.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und ein Skalarprodukt  $s$  auf seinem Richtungsraum mit Einheiten im orientierten eindimensionalen Vektorraum  $L$  im Sinne von ?? liefern die analogen Definitionen für jedes  $k$ -Tupel von Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  ein Element

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\det(s(v_i, v_j))} \in L^{\otimes k}$$

Salopp gesprochen messen sich also auch in der Mathematik Längen in Metern, Flächen in Quadratmetern und Volumen in Kubikmetern.

4.5.8. Wir wollen nun auch unsere Definition des Integrals anschaulich rechtfertigen. Sei dazu  $(U, \varphi)$  eine Karte einer der Einfachheit der Notation halber zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$ , die das Rechteck  $Q = [0, a] \times [0, c]$  enthält, und sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Träger in  $\varphi(Q)$ . Wir betrachten für  $r \geq 1$  die äquidistanten Unterteilungen  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = a$ ,  $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_r = c$  der Kanten von  $Q$ , bezeichnen mit  $q_{i,j} = (a_i, c_j)$  die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf  $Q$  und mit  $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$  die Bilder dieser Gitterpunkte in unserer Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann definieren wir die  $r$ -te **Riemannsumme**  $S_M^r(f)$  durch die Formel

$$S_M^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(p_{i,j}) \text{vol}(p_{i+1,j} - p_{i,j} | p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

Natürlich hängt diese Summe von der Karte  $(U, \varphi)$  ab, auch wenn das in der Notation nicht zum Ausdruck kommt. Die versprochene Anschauung für unseren Begriff des Integrals einer Funktion über eine Mannigfaltigkeit soll das nun folgende Lemma geben.

**Lemma 4.5.9.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit,  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$ ,  $Q \subset U$  ein kompaktes Rechteck und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit Träger im Bild des Inneren von  $Q$ . So gilt mit unseren eben definierten Riemannsummen*

$$\int_M f = \lim_{r \rightarrow \infty} S_M^r(f)$$

*Beweis.* Um Indizes zu vermeiden bezeichnen wir die Koordinaten auf  $\mathbb{R}^2$  mit  $x, y$  und schreiben  $\varphi_x, \varphi_y$  für die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix von  $\varphi$ . Die linke Seite ist per definitionem das Integral  $\int_U (f \circ \varphi) \operatorname{vol}(\varphi_x | \varphi_y)$ . Dies Integral können wir nach III.1.3.3 schreiben als den Grenzwert für  $r \rightarrow \infty$  gewisser Riemannsummen, die wir Übersichtlichkeit halber mit  $S_Q^r$  abkürzen wollen und die gegeben werden durch

$$S_Q^r = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(\varphi(q_{i,j})) \operatorname{vol}(\varphi_x(q_{i,j}) | \varphi_y(q_{i,j})) \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2}$$

für  $\operatorname{vol} Q = ac$  die Fläche unseres Rechtecks  $Q$  und damit  $(\operatorname{vol} Q)/r^2$  die Fläche der kleinen rechteckigen Felder  $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ . Nun ist  $\varphi_x$  gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum  $Q$ , für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es also ein  $R > 0$  derart, daß gilt

$$\|\varphi_x(p) - \varphi_x(q)\| \leq \varepsilon$$

wann immer  $p$  und  $q$  im selben kleinen rechteckigen Feld für eine Unterteilung mit  $r \geq R$  liegen. Mit dem Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen II.7.2.11 folgt für die Vektoren  $\varepsilon_{i,j}(r)$ , die erklärt werden durch

$$p_{i+1,j} - p_{i,j} = \frac{a}{r} (\varphi_x(q_{i,j}) + \varepsilon_{i,j}(r))$$

unter der Voraussetzung  $r \geq R$  die Abschätzung  $\|\varepsilon_{i,j}(r)\| \leq \varepsilon$ . Eine analoge Abschätzung erhalten wir für  $p_{i,j+1} - p_{i,j}$ . Jetzt setzen wir diese Darstellungen ein in  $S_M^r(f)$  und überlassen es dem Leser, hieraus zu folgern, daß gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_Q^r - S_M^r) = 0$$

Da aber die Folge  $S_Q^r$  gegen  $\int_M f$  konvergiert, muß dasselbe auch für die Folge  $S_M^r$  gelten.  $\square$



Die gepunkteten Pfeile stellen die Vektoren  $p_{3,0} - p_{2,0}$  und  $p_{2,1} - p_{2,0}$  dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht in die Riemannsumme  $S_M^3$  ein. Die durchgezogenen Pfeile stellen die Vektoren  $\varphi_x(q_{2,0})$  und  $\varphi_y(q_{2,0})$  dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht entsprechend in die Riemannsumme  $S_Q^3$  ein. Beim Übergang zu immer feineren Rastern kommen wir zum selben Grenzwert, wie im Beweis von [4.5.9](#) ausgeführt wird.

*Beweis von Satz 4.5.1 zur Integration über Untermannigfaltigkeiten.* Die Eindeutigkeit ist nicht schwer zu zeigen: Der Träger  $K := \text{supp } f$  unserer Funktion  $f$  wird nach II.6.10.3 als Kompaktum von den Bildern endlich vieler Karten  $(W_1, \varphi_1), \dots, (W_r, \varphi_r)$  überdeckt. Nach II.6.5.13 gibt es  $V_1, \dots, V_r \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi_i(W_i) = V_i \cap M$ . Nach 4.4.10 existiert eine an die Überdeckung  $K \subset \bigcup V_i$  angepaßte Teilung der Eins  $\alpha_i$ . Dann gilt  $f = \sum_i \alpha_i f$ , und da unsere Bedingung bereits die Integrale der Summanden festlegt, legt die ebenfalls geforderte Linearität dann auch das Integral von  $f$  fest. Es bleibt, die Existenz einer linearen Abbildung  $\int_M$  mit den geforderten Eigenschaften zu zeigen. Zunächst halten wir dazu unsere Funktion  $f$  fest und betrachten eine weitere Überdeckung ihres Trägers durch die Bilder endlich vieler Karten  $(U_1, \psi_1), \dots, (U_s, \psi_s)$  und eine zugehörige Teilung der Eins  $\beta_j$  und behaupten die Gleichheit

$$\sum_i \int ((\alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x = \sum_j \int ((\beta_j f) \circ \psi_j)(x) \text{vol}(d_x \psi_j) d^k x$$

Sie ist aufgrund der Linearität aller Integrale äquivalent zur Gleichheit

$$\sum_{i,j} \int ((\beta_j \alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x = \sum_{i,j} \int ((\beta_j \alpha_i f) \circ \psi_j)(x) \text{vol}(d_x \psi_j) d^k x$$

und folgt, wenn wir die Gleichheit aller Summanden zeigen. Hier haben nun die Funktionen  $\beta_j \alpha_i f$  Träger im Schnitt der Karten  $\varphi_i(W_i) \cap \psi_j(U_j)$ . Wir können also die Indizes weglassen und müssen nur für eine stetige Funktion mit kompaktem Träger  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Träger im Bild zweier Karten  $(W, \varphi)$  und  $(U, \psi)$  liegt, die Identität

$$\int h(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \int h(\psi(x)) \text{vol}(d_x \psi) d^k x$$

zeigen. Indem wir unsere Karten notfalls noch etwas verkleinern, dürfen wir dabei sogar  $\varphi(W) = \psi(U)$  annehmen, so daß der Kartenwechsel nach 4.3.21 ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $g = \psi^{-1} \circ \varphi : W \xrightarrow{\sim} U$  ist mit  $\psi \circ g = \varphi : U \rightarrow M$ . Es folgt  $h(\varphi(x)) = h(\psi(g(x)))$  und  $d_x \varphi = d_{g(x)} \psi \circ d_x g$ . Wir erhalten mit der Multiplikatивität der Determinante also

$$\text{vol}(d_x \varphi) = |\det d_x g| \text{vol}(d_{g(x)} \psi)$$

und folgern die behauptete Gleichheit der Integrale aus der Transformationsformel 4.4.6, angewandt auf die charakteristische Funktion  $h \circ \psi$ . Damit haben wir gezeigt, daß jede Überdeckung des Trägers unserer Funktion  $f$  durch Bilder von Karten und jede zugehörige Teilung der Eins in der Formel

oben dieselbe Summe liefert, die wir damit als unser  $\int_M f$  erklären können. Daß die so erklärte Abbildung  $f \mapsto \int_M f$  dann auch  $\mathbb{R}$ -linear ist und die geforderte Eigenschaft für Funktionen mit Träger im Bild einer Karte hat, folgt unmittelbar.  $\square$

*Übung 4.5.10.* Gegeben eine kompakte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  und eine Isometrie  $A : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  zeige man

$$\int_M 1 = \int_{A(M)} 1$$

Insbesondere und in Worten bleibt also beim Drehen und Verschieben von Flächen im Raum die Größe ihrer Oberfläche unverändert.

## 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 5.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

5.1.1. Ganz allgemein versteht man unter einer **gewöhnlichen Differentialgleichung** eine Gleichung, in der die Ableitungen einer zu bestimmenden Funktion *einer* Veränderlichen zueinander und mit der Veränderlichen selbst in Beziehung gesetzt werden. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$(f''(t))^2 f'(t) + tf(t) = t^2$$

für eine zu bestimmende zweimal differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Im Gegensatz dazu stehen zumindest terminologisch die **partiellen Differentialgleichungen**, bei denen die partiellen Ableitungen einer Funktion *mehrerer* Veränderlichen auftreten. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Auf Englisch benutzt man die Abkürzungen **ODE** für **ordinary differential equation** und **PDE** für **partial differential equation**. Wir besprechen in diesem Abschnitt nur gewöhnliche Differentialgleichungen. Rein formal ist dieser Abschnitt unabhängig von der Behandlung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in II.7.4.9 und in III.2 folgende. Ich denke jedoch, daß eine gewisse Vertrautheit mit diesen einfachsten und wichtigsten Spezialfällen es sehr erleichtern kann, die nun folgende allgemeine Theorie zu verstehen.

5.1.2. Die Ordnung der höchsten in einer gewöhnlichen Differentialgleichung auftretenden Ableitung heißt die **Ordnung** unserer Differentialgleichung. Von einer **expliziten** Gleichung spricht man, wenn in unserer Gleichung die Ableitung höchster Ordnung “explizit durch die tieferen Ableitungen ausgedrückt wird”. Andernfalls spricht man von einer **impliziten** Gleichung. Bei unserem obigen Beispiel handelt es sich also um eine implizite Gleichung. Wir werden uns im folgenden jedoch nur mit expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Eine derartige explizite Gleichung der Ordnung  $n$  hat, wenn wir von der Spezifikation allgemeinstmöglicher Definitionsbereiche einmal absehen, die Gestalt

$$f^{(n)}(t) = C(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t))$$

mit einer Abbildung  $C : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht sind alle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $n$ -mal differenzierbar sind und eben zusammen mit ihren Ableitungen diese Gleichung erfüllen. Etwas allgemeiner betrachten wir zugleich auch **Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen**, bei denen vektorwertige

Funktionen  $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  gesucht werden derart, daß eine Gleichung der obigen Gestalt gilt, die nun aber eine vektorwertige Gleichung meint mit einer vorgegebenen Abbildung  $C : \mathbb{R}^{kn+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**5.1.3 (Reduktion auf Systeme erster Ordnung).** Die Betrachtung von *Systemen* gewöhnlicher Differentialgleichungen erlaubt uns zumindest für Fragen des allgemeinen Lösungsverhaltens die Beschränkung auf den Fall erster Ordnung. Um zu zeigen, wie diese Reduktion funktioniert, betrachten wir beispielhaft den Fall einer Gleichung dritter Ordnung

$$f'''(t) = C(t, f(t), f'(t), f''(t))$$

Jede Lösung  $f$  liefert sicher eine Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mittels der Vorschrift  $\phi(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ , und natürlich gilt dann

$$\begin{aligned}\phi_1'(t) &= \phi_2(t) \\ \phi_2'(t) &= \phi_3(t) \\ \phi_3'(t) &= C(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))\end{aligned}$$

Erklären wir nun also eine neue Abbildung  $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch die Vorschrift  $B(t, x, y, z) = (y, z, C(t, x, y, z))$ , so ist unser  $\phi$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

Umgekehrt zeigt man leicht, daß für jede Lösung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dieses Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung die erste Komponente  $\phi_1(t) = f(t)$  eine Lösung unserer ursprünglichen Gleichung dritter Ordnung liefert. In derselben Weise kann auch im Allgemeinen die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung auf den Fall von Systemen erster Ordnung zurückgeführt werden. Anschaulich mag man sich dann  $B$  als ein zeitabhängiges Vektorfeld auf dem  $\mathbb{R}^n$  denken, das jedem Ort  $x \in \mathbb{R}^n$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  einen Vektor  $B(t, x) \in \mathbb{R}^n$  zuordnet. In dieser Anschauung beschreibt eine Lösung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Bewegung eines Teilchens, das zu jedem Zeitpunkt  $t$  die für seinen Ort zu diesem Zeitpunkt durch unser zeitabhängiges Vektorfeld  $B$  vorgegebene Geschwindigkeit hat.

**5.1.4 (Reduktion auf den zeitunabhängigen Fall).** Gegeben  $B : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  löst eine differenzierbare Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  unsere Differentialgleichung

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

genau dann, wenn die Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $t \mapsto (t, \phi(t))$  die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t))$$

löst für  $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  gegeben durch  $A(t, x) := (1, B(t, x))$ . In diesem Sinne können wir uns also stets auf den Fall zeitunabhängiger Felder zurückziehen. Allerdings erhält man für zeitabhängige Felder bei einer eigenständigen Betrachtung etwas schärfere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen, weshalb dieser Fall insbesondere in einigen Ergänzungen weiter vorkommen wird. Zunächst konzentrieren wir uns nun jedoch auf den zeitunabhängigen Fall und besprechen seine geometrische Bedeutung in einer koordinatenfreien Sprache.

5.1.5. Unter einem **Vektorfeld** auf einer halboffenen Teilmenge  $U \subset X$  eines normierten reellen Raums  $X$  verstehen wir wie in 3.1.2 eine Abbildung  $A$  von  $U$  in den Richtungsraum  $\vec{X}$  von  $X$ , in Formeln

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow \vec{X} \\ p &\mapsto A_p \end{aligned}$$

**Definition 5.1.6.** Sei  $X$  ein normierter reeller Raum,  $U \subseteq X$  eine halboffene Teilmenge und  $A : U \rightarrow \vec{X}$  ein Vektorfeld. Eine **Integralkurve** unseres Vektorfelds ist eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow U$  von einem halboffenen reellen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $U$  mit der Eigenschaft, daß “zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  die Geschwindigkeit unserer Integralkurve zum Zeitpunkt  $t$  genau der durch das Vektorfeld vorgegebene Vektor an der Stelle  $\gamma(t)$  ist”, in Formeln

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Eine **maximale Integralkurve** ist eine Integralkurve, die nicht zu einer auf einem echt größeren reellen Intervall definierten Integralkurve erweitert werden kann. Ist  $p \in U$  gegeben, so verstehen wir unter einer **Integralkurve mit Anfangswert  $p$**  oder kurz einer **Integralkurve zu  $p$**  eine Integralkurve  $(\gamma, I)$  mit  $0 \in I$  und  $\gamma(0) = p$ .

5.1.7. Unsere Terminologie ist hier nicht vollständig konsistent, da mit dieser Definition eine Integralkurve keine Kurve im Sinne unserer Definition 4.3.9 ist, sondern vielmehr, zumindest im Fall eines offenen Definitionsintervalls und unter geeigneten Injektivitätsvoraussetzungen, eine Karte einer Kurve. Die Integralkurven eines Vektorfelds bilden im Übrigen eine “durch Einschränkung” partiell geordnete Menge, und unsere maximalen Integralkurven sind darin gerade die maximalen Elemente.

*Beispiel 5.1.8.* Ist unser Vektorfeld konstant, so laufen seine Integralkurven auf den Geraden mit diesem konstanten Vektor als Richtungsvektor und mit der durch diesen Vektor vorgegebenen konstanten Geschwindigkeit. Ist unser Vektorfeld auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $X = V$  definiert durch eine lineare Abbildung, sagen wir durch die lineare Abbildung

$A \in \text{End } V$ , so haben wir bereits in II.7.4.9 gezeigt, daß seine maximalen Integralkurven genau diejenigen Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow V$  sind, die gegeben werden durch die Formeln  $\gamma(t) = \exp(tA)c$  mit  $c \in V$ .

5.1.9 (**Zeitverschiebung**). Gegeben ein Vektorfeld auf einer halboffenen Teilmenge eines normierten reellen Raums und eine Integralkurve  $(\gamma, I)$  ist für alle  $c \in \mathbb{R}$  auch die Abbildung  $t \mapsto \gamma(t + c)$  eine Integralkurve, die nun eben definiert ist auf dem verschobenen Intervall  $I - c$ . Das gilt im Fall zeitabhängiger Vektorfelder natürlich so nicht mehr.

*Übung 5.1.10 (Verhalten unter differenzierbaren Abbildungen)*. Entsprechen sich unter einem Diffeomorphismus zwei Vektorfelder, so entsprechen sich auch deren Integralkurven. Allgemeiner haben offensichtlich im Sinne von 3.1.16 verwandte Vektorfelder auch verwandte Integralkurven. Ist genauer unter einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\phi$  ein Vektorfeld  $A$  verwandt zu einem Vektorfeld  $B$ , so ist für jede Integralkurve  $\gamma$  von  $A$  auch  $\phi \circ \gamma$  eine Integralkurve von  $B$ . Ist insbesondere ein Vektorfeld  $A$  unter einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\phi$  verwandt zum Nullfeld, in Formeln  $\phi : A \rightsquigarrow 0$ , und ist  $\gamma$  eine seiner Integralkurven, so ist  $\phi \circ \gamma$  eine Integralkurve des Nullfelds und mithin konstant, als da heißt, die Funktion  $\phi$  ist konstant auf Integralkurven von  $A$ . Man nennt die Funktion  $\phi$  dann auch ein **erstes Integral** unserer Differentialgleichung. In physikalischen Modellen liefern oft Energie, Impuls und Drehimpuls solche ersten Integrale.

**Satz 5.1.11 (Picard-Lindelöf)**. 1. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines reellen Raums endlicher Dimension gibt es zu jedem Anfangswert genau eine größte Integralkurve.

2. Diese größte Integralkurve hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist dieses Intervall nach oben beschränkt, so verläßt die fragliche Integralkurve für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann einmal endgültig.

5.1.12. Wir zeigen diesen Satz als 5.2.6 sogar unter noch etwas schwächeren Voraussetzungen. Der letzte Teil des Satzes besagt salopp formuliert, daß der Grund dafür, daß sich eine Integralkurve nicht beliebig weit in Richtung positiver Zeiten fortsetzen läßt, nur darin liegen kann, daß sie bereits in endlicher Zeit “aus dem Definitionsbereich des Vektorfeldes hinausläuft”. Entsprechendes gilt in Richtung negativer Zeiten, was man auch formal durch Betrachtung des mit  $(-1)$  multiplizierten Vektorfelds leicht folgern kann. Von unserer Integralkurve fordern wir natürlich nur, daß sie in der partiell geordneten Menge aller Integralkurven zu unserem festen Anfangswert das größte Element sein soll. Da größte Elemente in partiell geordneten Mengen eh

eindeutig bestimmt sind, war die Präzisierung “genau eine” recht eigentlich überflüssig und nur dazu bestimmt, eventuellen Mißverständnissen vorzubeugen. In der Menge aller Integralkurven ist diese Integralkurve nur noch maximal und wird deshalb meist die **maximale Integralkurve** zu unserem Anfangswert genannt.

*Beispiel 5.1.13 (Ein Fall mit nicht eindeutigen Integralkurven).* Bei Vektorfeldern, die nicht stetig differenzierbar sind, kann es durchaus vorkommen, daß zu einem vorgegebenen Anfangswert keine größte Integralkurve existiert, weil etwa mehrere maximale Integralkurven mit ein und demselben Anfangswert existieren, die auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche nicht übereinstimmen. Betrachten wir zum Beispiel auf  $\mathbb{R}^2$  das Vektorfeld  $A$ , für das sämtliche verschobenen Kubiken  $\gamma_c(t) = (t + c, t^3)$  Integralkurven sind. Wir haben  $\dot{\gamma}_c(t) = (1, 3t^2)$  und damit  $A(x, y) = (1, 3|y|^{2/3})$ . Maximale Integralkurven sind in diesem Fall nicht nur die verschobenen Kubiken  $\gamma_c$ , sondern auch alle Kurven, die längs einer verschobenen Kubik auf die  $x$ -Achse hochsteigen und dann eine Weile auf der  $x$ -Achse entlanglaufen bevor sie auf einer anderen verschobenen Kubik weitersteigen. In diesem Fall existieren zwar maximale Integralkurven zu jedem Punkt, von Eindeutigkeit kann aber keine Rede sein.

*Beispiel 5.1.14 (Der Fall eindimensionaler Felder ohne Nullstellen).* Gegeben ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums gibt es zu jedem Anfangswert genau eine maximale Integralkurve. In diesem Fall brauchen wir also von unserem Vektorfeld nicht einmal stetige Differenzierbarkeit zu fordern. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $U \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und unser stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen zeige in Richtung der positiven  $x$ -Achse, als da heißt, es werde gegeben durch  $a : U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Integralkurven sind auf halboffenen Intervallen  $I \subseteq \mathbb{R}$  definierte differenzierbare Funktionen  $\gamma : I \rightarrow U$  mit

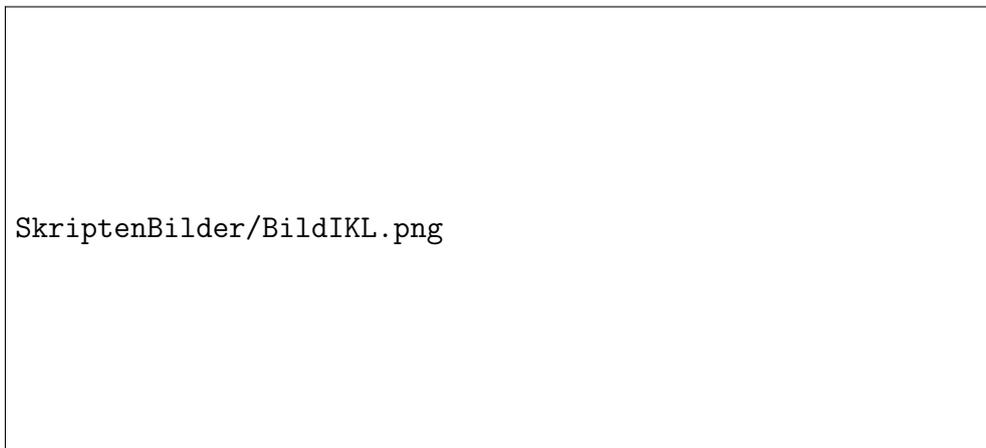
$$\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Aus dieser Gleichung folgt für alle  $s, t \in I$  sofort

$$t - s = \int_s^t \frac{\dot{\gamma}(\tau) d\tau}{a(\gamma(\tau))} = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{a(x)} = G(\gamma(t)) - G(\gamma(s))$$

für  $G : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $1/a$ . Nun wächst  $G$  sicher streng monoton und hat folglich als Bild ein offenes Intervall  $J \subseteq \mathbb{R}$  und für unsere Integralkurve folgt  $\gamma(t) = G^{-1}(t + c)$  mit der Konstanten  $c = G(\gamma(s)) - s$ . In anderen Worten ist

$$G^{-1} : J \xrightarrow{\sim} U$$



Das ebene stetige aber nicht stetig differenzierbare Vektorfeld aus Beispiel [5.1.13](#) mit einer seiner Integralkurven

bis auf “Zeitverschiebung” die einzige maximale Integralkurve. Zum Beispiel ist  $a(x) = x$  ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf  $U = \mathbb{R}_{>0}$  und  $G(x) = \log x$  ist eine Stammfunktion von  $1/x$  und jede maximale Integralkurve ist von der Gestalt  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\gamma(t) = \exp(t + c)$  mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ .

**Übung 5.1.15 (Größere Felder haben schnellere Integralkurven).** Gegeben  $U \subset \mathbb{R}$  halboffen und  $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ohne Nullstelle mit  $a \leq b$  und  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall und  $\gamma, \kappa : I \rightarrow U$  differenzierbar mit  $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t))$  und  $\dot{\kappa}(t) = b(\kappa(t))$  für alle  $t \in I$  folgt aus  $\gamma(t_0) \leq \kappa(t_0)$  für ein  $t_0 \in I$  bereits dieselbe Aussage für alle  $t \in I$  mit  $t \geq t_0$ .

**Beispiel 5.1.16 (Spezielle eindimensionale Felder mit Nullstellen).** Gegeben ein stetiges Vektorfeld mit Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums liegen die Verhältnisse komplizierter als in 5.1.14. Wir suchen etwa für  $\alpha \in \mathbb{R}$  Integralkurven des Vektorfelds  $a(x) = x^\alpha$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  alias auf einem halboffenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte Funktionen  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\dot{\gamma}(t) = (\gamma(t))^\alpha \quad \forall t \in I$$

Unsere allgemeine Theorie aus 5.1.14 sagt uns, daß das gerade die Umkehrfunktion zu Stammfunktionen von  $x^{-\alpha}$  sind. Den Fall  $\alpha = 1$  kennen wir zur Genüge, im Fall  $\alpha \neq 1$  erhalten wir als Stammfunktion  $G(x) = x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ . Im Fall  $\alpha > 1$  induziert nun  $G$  eine Bijektion  $G : \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{<0}$  und im Fall  $\alpha < 1$  eine Bijektion  $G : \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$ , aber die Umkehrfunktion wird jedesmal durch dieselbe Formel gegeben und wir erhalten die Integralkurven

$$\gamma(t) = ((1-\alpha)t)^{(1-\alpha)^{-1}}$$

Im Fall  $\alpha = 2$  etwa ergibt sich  $\gamma(t) = -1/t$  und unsere Integralkurve “läuft in endlicher Zeit nach  $+\infty$ , braucht aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, unendlich lange bis zum Ursprung”. Dasselbe gilt in allen Fällen mit  $\alpha > 1$ . Im Fall  $\alpha = 0$  dahingegen ergibt sich  $\gamma(t) = t$  und unsere Integralkurve “läuft für alle positiven Zeiten, braucht aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, nur endlich viel Zeit bis zum Ursprung”. Dasselbe gilt in allen Fällen mit  $\alpha < 1$ . In den Fällen mit  $0 \leq \alpha$  können wir unser Vektorfeld stetig auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen durch die Vorschrift  $a(x) = |x|^\alpha$  und für  $0 < \alpha$  hat diese Fortsetzung eine Nullstelle bei Null. In den Fällen  $0 < \alpha < 1$  gibt es nun auch Integralkurven, die in endlicher Zeit aus dem Negativen nach Null laufen und dort eine Weile stehenbleiben bevor sie ins Positive weiterlaufen. Erklären wir etwa auf  $\mathbb{R}$  ein stetiges Vektorfeld durch  $a(x) = \sqrt[3]{x^2}$ , so ist  $\gamma(t) = t^3/27$  ein Integralkurve, aber auch die Abbildung  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die



SkriptenBilder/BildStF.png

Im Fall eindimensionaler Felder mag man sich die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen veranschaulichen und das Vektorfeld als eine Vorschrift, die diesem Graphen in jeder Höhe  $x$  eine Steigung  $a(x)$  vorschreibt.



Mögliche Lösungsfunktionen mit positiven Werten der Differentialgleichung  $\dot{\gamma}(t) = (\gamma(t))^\alpha$  für verschiedene Werte von  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alle anderen Lösungsfunktionen mit positiven Werten erhält man durch horizontales Verschieben der entsprechenden Graphen. Im Fall  $\alpha > 1$  “läuft unsere Lösung in endlicher Zeit nach Unendlich”, was die gestrichelt eingezeichnete vertikale Asymptote andeuten soll. Im Fall  $1 > \alpha > 0$  kann man, wie gestrichelt angedeutet, die Lösung zu einer Lösung von  $\dot{\gamma}(t) = |\gamma(t)|^\alpha$  ins Negative fortsetzen, aber eben auf vielerlei Weisen. Das war im Wesentlichen auch unser Gegenbeispiel [5.1.13](#).

gegeben wird durch die Vorschrift

$$\psi(t) = \begin{cases} t^3/27 & t \leq 0; \\ 0 & 0 \leq t \leq 1; \\ (t-1)^3/27 & 1 \leq t; \end{cases}$$

ist eine Integralkurve. Im Rückblick ist unser Beispiel 5.1.13 im wesentlichen dasselbe, nur in trivialer Weise um eine Dimension erweitert, damit es besser bildlich dargestellt werden kann.

*Beispiel 5.1.17 (Verhalten unter Längenänderungen).* Ändern wir bei einem Vektorfeld ohne Nullstellen nur die Längen seiner Vektoren, durchaus auch in Abhängigkeit vom Ort, so bleiben die Integralkurven offensichtlich bis auf Reparametrisierung dieselben. Ist also in Formeln  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $U \subseteq X$  offen,  $A : U \rightarrow \vec{X}$  ein Vektorfeld ohne Nullstellen und  $c : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ohne Nullstellen und ist  $\gamma : I \rightarrow U$  eine Integralkurve von  $A$ , so finden wir mit dem Ansatz  $\psi(t) = \gamma(r(t))$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\psi}(t) = c(\psi(t))A(\psi(t))$$

In der Tat liefert diese Gleichung nämlich für die Reparametrisierung  $r$  die Gleichung

$$\dot{r}(t)\dot{\gamma}(r(t)) = c(\gamma(r(t)))A(\gamma(r(t)))$$

und damit  $\dot{r}(t) = (c \circ \gamma)(r(t))$ , und diese Gleichung haben wir bereits in 5.1.14 lösen gelernt.

**5.1.18 (Felder mit separierten Variablen).** Gegeben endlichdimensionale reelle Räume  $X, Z$  und offene Teilmengen  $U \subseteq X, V \subseteq Z$  und Vektorfelder  $A : U \rightarrow \vec{X}$  sowie  $B : V \rightarrow \vec{Z}$  sind die Integralkurven des Vektorfelds  $(A \times B) : U \times V \rightarrow \vec{X} \times \vec{Z}$  genau die Abbildungen  $(\gamma, \psi)$  mit  $\gamma : I \rightarrow U$  einer Integralkurve von  $A$  und  $\psi : I \rightarrow V$  einer Integralkurve von  $B$ . In dieser Situation spricht man von einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder lateinisch **separierten Variablen**. Man beachte die enge Beziehung zu 5.1.10. Die in 5.1.21 erläuterte Methode der ‘‘Separation der Variablen’’ mag man auffassen als das Überführen einer Differentialgleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen.

**5.1.19 (Geometrische Interpretation im zeitabhängigen Fall).** Allgemeiner können wir für einen normierten reellen Raum  $X$  eine Abbildung  $A : \mathbb{R} \times X \rightarrow \vec{X}$  als ein **zeitabhängiges Vektorfeld** auf  $X$  auffassen und uns die Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = A(t, \gamma(t))$$

in dieser Weise veranschaulichen. Dasselbe gilt, wenn  $A$  nur auf einer Teilmenge  $U \subset \mathbb{R} \times X$  definiert ist. Der Fall eines zeitabhängigen Vektorfelds  $A$  kann leicht auf den Fall des zeitunabhängigen Vektorfelds  $(1, A) : U \rightarrow \mathbb{R} \times \vec{X}$  zurückgeführt werden: In der Tat ist  $\gamma$  eine Integralkurve unseres zeitabhängigen Vektorfelds genau dann, wenn  $(\text{id}, \gamma)$  eine Integralkurve des zeitunabhängigen Vektorfelds  $(1, A)$  ist, und jede Integralkurve von  $(1, A)$  ist etwa nach 5.1.10 bis auf eine Zeitverschiebung von dieser Gestalt. Allerdings gelingt es im Fall zeitabhängiger Felder, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei einer direkten Betrachtung unter schwächeren Annahmen zu zeigen, und das führt insbesondere bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen zu einfacheren Aussagen.

*Beispiel 5.1.20 (Eindimensionale zeitabhängige Felder).* Gegeben sind etwa  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  und man interessiert sich Lösungen der Gleichung

$$\dot{x} = a(t, x)$$

Unter einer ‘‘Lösung’’ versteht man hierbei ein Paar  $(\gamma, I)$  mit  $I \subset \mathbb{R}$  einem halboffenen Intervall und  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  einer differenzierbaren Funktion, deren Graph in  $U$  enthalten ist und für die gilt

$$\dot{\gamma}(t) = a(t, \gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ich habe hier Lösungen als  $\gamma(t)$  und nicht als  $x(t)$  geschrieben, wie es die Gleichung suggeriert, in der Hoffnung, daß das zum besseren Verständnis beiträgt. Hängt  $a(t, x)$  gar nicht von  $x$  ab, also  $a(t, x) = a(t)$ , so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung natürlich genau die Stammfunktionen von  $a$ . Hängt  $a(t, x)$  dahingegen nicht von  $t$  ab, also  $a(t, x) = a(x)$ , so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung nichts anderes als die Integralkurven des auf einer geeigneten Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definierten Vektorfelds  $a(x)$ , die wir bereits in 5.1.14 diskutiert hatten.

5.1.21. Seien  $V, W \subseteq \mathbb{R}$  offen und  $a : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : W \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Differentialgleichungen der Gestalt

$$\dot{x} = a(x)b(t)$$

lassen sich oft mit der Methode der **Separation der Variablen** oder deutsch **Variablentrennung** lösen. Ich führe zunächst dieses Verfahren vor und erkläre dann, inwiefern wir dabei implizit unsere Gleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen im Sinne von 5.1.18 transformieren. Wir nehmen an,  $a$  habe keine Nullstelle und  $V$  sei ein Intervall. Gegeben eine Lösung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  kann die Gleichung  $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t))b(t)$  dann auch geschrieben werden als

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{a(\gamma(t))} = b(t)$$



SkriptenBilder/BildStFZ.png

Im Fall zeitabhängiger eindimensionaler Felder mag man sich ein Vektorfeld als ein “Steigungsfeld” veranschaulichen, bei dem die jeweils vorgeschriebene Steigung  $a(t, x)$  von beiden Koordinaten abhängen darf, und die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen, der dann eben an jeder Stelle tangential an das dort vorgegebene Steigungsfeld sein soll.



SkriptenBilder/BildStFZP.png

In [5.1.19](#) habe ich ausgeführt, wie die Untersuchung der Integralkurven zeitabhängiger Felder auf einem Raum  $X$  auf die Untersuchung der Integralkurven zeitunabhängiger Felder auf dem Raum  $\mathbb{R} \times X$  zurückgeführt werden kann. Dieses Bild zeigt im Spezialfall  $X = \mathbb{R}$  das zeitunabhängige Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^2$ , dessen Integralkurven den Integralkurven des durch das Bild darüber dargestellten zeitabhängigen Feldes auf  $\mathbb{R}$  entsprechen.

Ist nun  $G$  eine Stammfunktion von  $1/a$  und  $B$  eine Stammfunktion von  $b$ , so folgt für alle  $s, t \in I$  sofort

$$G(\gamma(t)) - G(\gamma(s)) = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{a(x)} = \int_s^t \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{a(\gamma(\tau))} d\tau = \int_s^t b(\tau) d\tau = B(t) - B(s)$$

Hier ist  $G$  sicher streng monoton. Folglich hat es offenes Bild  $G(V) \subseteq \mathbb{R}$ , und bilden wir die Umkehrabbildung  $G^{-1} : G(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , so folgt

$$\gamma(t) = G^{-1}(B(t) + c) \quad \forall t \in I$$

mit der Konstante  $c = G(\gamma(s)) - B(s)$ . Umgekehrt prüft man auch ohne Schwierigkeiten, daß für  $(s, v) \in W \times V$  die obige Formel für  $c = G(v) - B(s)$  und  $t \in I + B^{-1}(G(V) - c)$  die größte Lösung unserer Differentialgleichung mit  $\gamma(s) = v$  liefert. Um den Zusammenhang mit der Situation separierter Variablen im Sinne von 5.1.18 herzustellen, interpretieren wir unsere Gleichung wie in 5.1.19 als die Suche nach Integralkurven des ebenen Vektorfelds  $(z, x) \mapsto (1, a(x)b(z))$  und kommen unter der zusätzlichen Annahme, daß auch  $b$  keine Nullstelle habe, mit der in 5.1.17 erläuterten Längenänderung um  $c(z, x) = b(z)^{-1}$  zum Vektorfeld  $(z, x) \mapsto (b(z)^{-1}, a(x))$ . In dieser Weise landen wir dann bei der Suche nach den Integralkurven eines Vektorfelds mit separierten Variablen.

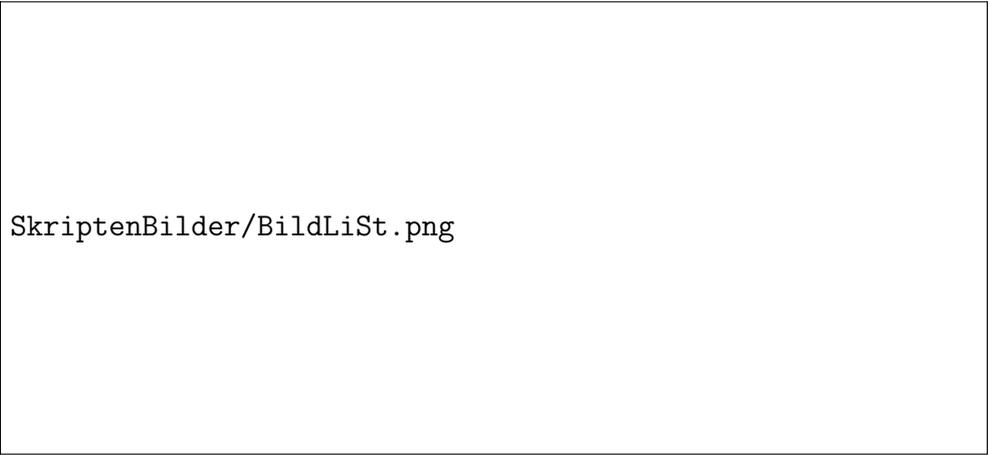
5.1.22. Eine Fülle an weiteren Beispielen und Lösungsmethoden findet man etwa in [MV00].

## 5.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

5.2.1. Wir erinnern daran, daß nach 4.1.6 eine Abbildung  $f$  zwischen metrischen Räumen lipschitzstetig heißt genau dann, wenn es eine Konstante  $L > 0$  gibt mit  $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$  für alle  $x, y$  im Ausgangsraum. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **lokal lipschitzstetig** genau dann, wenn jeder Punkt des Ausgangsraums eine Umgebung besitzt, auf der unsere Funktion lipschitzstetig ist.

5.2.2. Nach 1.3.5 ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines normierten Raums lokal lipschitzstetig, deshalb folgt 5.1.11 aus der anschließenden etwas technischeren Version 5.2.6. Die Hauptlast des Beweises trägt jedoch das folgende Lemma 5.2.3.

**Lemma 5.2.3 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit).** *Gegeben  $X$  ein vollständiger normierter reeller Raum,  $U \subseteq X$  offen und  $A : U \rightarrow \vec{X}$  ein beschränktes lipschitzstetiges Vektorfeld existieren zu jedem Anfangswert  $p \in U$*



SkriptenBilder/BildLiSt.png

Die Restriktion auf die negative  $x$ -Achse der hier durch ihren Graphen dargestellten Funktion ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, da sie an jeder Stelle den schraffierten verbotenen Bereich der entsprechenden verschobenen Figur vermeidet. Die Begrenzungslinien haben darin als Steigung die Lipschitzkonstante, in diesem Fall die Steigung 1. Die Restriktion auf die positive  $x$ -Achse ist zwar lipschitzstetig, aber mit einer größeren Lipschitzkonstante.

*Integralkurven von  $A$  mit offenem Definitionsbereich, und je zwei Integralkurven  $\gamma : I \rightarrow U$  und  $\phi : J \rightarrow U$  mit demselben Anfangswert stimmen für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  auf  $I \cap J \cap [-\varepsilon, \varepsilon]$  überein.*

*Ergänzung 5.2.4.* Allgemeiner gilt das auch für stetige beschränkte zeitabhängige Vektorfelder  $A : (-a, a) \times U \rightarrow \vec{X}$ , die nur **partiell lipschitzstetig** sind in dem Sinne, daß es eine Konstante  $L$  gibt mit  $\|A(t, x) - A(t, y)\| \leq L\|x - y\|$  für alle  $t \in (-a, a)$  und  $x, y \in U$ . Der Beweis ist mutatis mutandis derselbe. Diese Variante ist insofern stärker, als das Lemma beim Übergang 5.1.19 von zeitabhängigen zu zeitunabhängigen Vektorfeldern dieselbe Folgerung nur liefert unter der stärkeren Annahme, daß  $A : (-a, a) \times U \rightarrow \vec{X}$  nicht nur “partiell” sondern “auch in Bezug auf die erste Variable” lipschitzstetig ist.

*Beweis.* Wir betrachten für ein beliebiges halboffenes kompaktes reelles Intervall  $K \subset \mathbb{R}$  mit  $0 \in K$  den affinen Raum

$$\mathcal{C}_p(K, X)$$

aller stetigen Wege  $\gamma : K \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = p$  und versehen seinen Richtungsraum  $\mathcal{C}_0(K, \vec{X})$  mit der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  der gleichmäßigen Konvergenz. Nach II.7.5.30 erhalten wir so einen vollständigen normierten Vektorraum. Nun betrachten wir in unserem affinen Raum die offene Teilmenge  $\mathcal{C}_p(K, U)$  aller in  $U$  verlaufenden Wege und die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, U) &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, X) \\ (\tau, \gamma) &\mapsto (\tau, \gamma - \tau \int (A \circ \gamma)) \end{aligned}$$

wobei  $\int : \mathcal{C}(K, \vec{X}) \rightarrow \mathcal{C}_0(K, \vec{X})$  gegeben sei durch  $(\int \psi)(t) = \int_0^t \psi(s) ds$  mit unserem vektorwertigen Integral aus III.1.3.3. Bezeichne  $\kappa$  den konstanten Weg bei  $p$ . Unter unserer Abbildung geht aufgrund der vektorwertigen Variante III.1.3.6 des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung  $(\tau, \gamma)$  nach  $(\tau, \kappa)$  genau dann, wenn  $\gamma : K \rightarrow U$  eine Integralkurve des reskalierten Feldes  $\tau A$  ist. Insbesondere haben wir  $(0, \kappa) \mapsto (0, \kappa)$ . Wir wenden nun den Umkehrsatz für stetige Funktionen 4.1.10 an und zeigen genauer, daß für  $\eta > 0$  hinreichend klein und  $K \subset [-1/4S, 1/4S]$  mit  $S > 0$  einer oberen Schranke der Normen der Vektoren unseres Vektorfeldes  $A$  die Restriktion von

$F - \text{id}$  auf  $(-\eta, \eta) \times \mathcal{C}_p(K, U)$  kontrahierend ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \|(F - \text{id})(\sigma, \psi) - (F - \text{id})(\tau, \gamma)\| &= \left\| \sigma \int A\psi - \tau \int A\gamma \right\|_{\infty} \\ &\leq |\sigma - \tau| \left\| \int A\psi \right\|_{\infty} + |\tau| \left\| \int A\psi - A\gamma \right\|_{\infty} \\ &\leq |\sigma - \tau|(S/4S) + (\eta L/4S) \|\psi - \gamma\|_{\infty} \\ &\leq |\sigma - \tau|/4 + \|\psi - \gamma\|_{\infty}/4 \\ &\leq (1/2) \|(\tau - \sigma, \gamma - \psi)\| \end{aligned}$$

falls im vorletzten Schritt  $\eta > 0$  so klein ist, daß gilt  $\eta L/S < 1$ . Dann liefert uns der Umkehrsatz für stetige Abbildungen 4.1.10 wegen  $F : (0, \kappa) \mapsto (0, \kappa)$ , daß es für  $\tau > 0$  hinreichend klein genau ein Urbild  $(\tau, \gamma_{\tau})$  von  $(\tau, \kappa)$  unter  $F$  gibt, also genau eine Integralkurve  $\gamma_{\tau} : K \rightarrow U$  des reskalierten Vektorfelds  $\tau A$ . Gehen wir etwa von  $K = [-\beta, \beta]$  aus, so ist  $\gamma(t) := \gamma_{\tau}(\tau^{-1}t)$  eine auf  $(-\tau\beta, \tau\beta)$  definierte Integralkurve des Vektorfelds  $A$  zu  $p$  und die Existenzaussage des Lemmas ist gezeigt. Seien andererseits  $\gamma : I \rightarrow U$  und  $\phi : J \rightarrow U$  Integralkurven mit demselben Anfangswert. Besteht  $I \cap J$  nur aus dem Nullpunkt, so ist die Behauptung eh klar. Sonst gibt es  $\alpha > 0$  mit  $I \cap J \cap [-\alpha, \alpha]$  halboffen und kompakt und in  $[-1/4S, 1/4S]$  enthalten, und für alle  $\tau \in [0, 1]$  sind die Abbildungen  $t \mapsto \gamma(\tau t)$  und  $t \mapsto \phi(\tau t)$  auf  $I \cap J \cap [-\alpha, \alpha]$  definierte Integralkurven zu  $p$  des reskalierten Vektorfelds  $\tau A$ . Für hinreichend kleines  $\tau > 0$  gibt es aber nach dem, was wir gezeigt haben, nur eine derartige Integralkurve, und damit folgt auch die zweite Behauptung des Lemmas.  $\square$

*Ergänzung 5.2.5.* Die allgemeinere Aussage 5.2.4 über lokale Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven für *partiell* lipschitzstetige zeitabhängige Vektorfelder folgt analog mithilfe der Abbildung

$$F : (\tau, \gamma) \mapsto \left( \tau, \gamma - \tau \int_0^t A(\tau s, \gamma(s)) \, ds \right)$$

**Satz 5.2.6 (Globale Existenz und Eindeutigkeit).** 1. Gegeben ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines vollständigen normierten reellen Raums gibt es zu jedem Anfangswert genau eine größte Integralkurve.

2. Diese größte Integralkurve hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist besagtes Intervall nach oben beschränkt, so verläßt die fragliche Integralkurve für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann einmal endgültig.



SkriptenBilder/BildIK.png

Eine maximale Integralkurve, deren Definitionsbereich nach oben beschränkt ist und die so jedes Kompaktum wie etwa  $K$  oder  $L$  irgendwann einmal engültig verläßt. In diesem Fall wäre der Definitionsbereich nach unten unbeschränkt und unsere Integralkurve würde für negative Zeiten gegen eine Nullstelle unseres Vektorfeldes konvergieren, die im Zentrum der Spirale liegt.

5.2.7. Oft wird dieser Satz auch als **Satz von Picard-Lindelöf** zitiert. Beim Beweis zeigen wir stärker als in Teil 2 formuliert: Ist das Definitionsintervall unserer größten Integralkurve nach oben beschränkt, so kann sie nicht ab irgendeinem Zeitpunkt ganz innerhalb irgendeiner in unserem affinen Raum abgeschlossenen Teilmenge bleiben, die im Definitionsbereich unseres Vektorfelds enthalten ist und auf der unser Vektorfeld beschränkt ist.

5.2.8. Allgemeiner gilt unser Satz auch für stetige zeitabhängige Vektorfelder  $A : U \rightarrow \vec{X}$  auf  $U \subseteq \mathbb{R} \times X$ , die nur **lokal partiell lipschitzstetig** sind in dem Sinne, daß jeder Punkt von  $U$  eine offene Umgebung besitzt, in der sie im Sinn von 5.2.4 partiell lipschitzstetig sind. Der Beweis ist derselbe, man muß sich dafür nur auf 5.2.4 stützen. Diese Allgemeinheit ist insbesondere bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen von Nutzen.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, daß je zwei Integralkurven  $\gamma, \psi$  mit demselben Anfangswert  $p$  und demselben Definitionsintervall  $I$  übereinstimmen. Wir zeigen nur, daß sie auf  $I \cap [0, \infty)$  übereinstimmen, für  $I \cap (-\infty, 0]$  argumentiert man analog. Stimmen aber unsere Wege auf  $I \cap [0, \infty)$  nicht überein, so wäre das Supremum  $s$  über alle  $t \in I$  mit  $\gamma|_{[0, t]} = \psi|_{[0, t]}$  nicht das Supremum von  $I$ . Wegen der Stetigkeit der Integralkurven gälte  $\gamma(s) = \psi(s)$ , und nach der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 5.2.3 muß dann auch gelten  $\gamma|_{[0, t + \eta]} = \psi|_{[0, t + \eta]}$  für ein positives  $\eta$ , im Widerspruch zur Wahl von  $s$ . Folglich stimmen je zwei Integralkurven mit Anfangswert  $p$  auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein und es gibt genau eine größte Integralkurve mit Anfangswert  $p$ , deren Definitionsbereich eben die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Integralkurven zu  $p$  ist. Wäre dieser Definitionsbereich nicht offen, so enthielte er sein Supremum oder sein Infimum. Dann könnten wir jedoch um die Bilder dieser Grenzpunkte auch wieder Integralkurven mit offenem Definitionsbereich finden und "ankleben" und unsere Integralkurve wäre nicht maximal gewesen. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere größte Integralkurve offenen Definitionsbereich hat. Bezeichne schließlich  $A$  unser Vektorfeld und  $U \subseteq X$  seinen Definitionsbereich. Ist  $\gamma : [0, b) \rightarrow U$  eine Integralkurve von  $A$ , deren Bild in einem Kompaktum  $M \subset U$  landet, so ist wegen  $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$  ihre Geschwindigkeit  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  beschränkt auf  $[0, b)$ , mithin ist  $\gamma$  lipschitzstetig und besitzt nach II.7.5.5 eine stetige Fortsetzung  $\tilde{\gamma} : [0, b] \rightarrow M$ . Die Integralform unserer Differentialgleichung zeigt dann sofort, daß auch  $\tilde{\gamma}$  eine Integralkurve von  $A$  sein muß. Mithin kann eine Integralkurve mit nach oben beschränktem Definitionsbereich, die ganz in einem Kompaktum  $M \subset U$  verläuft, schon einmal nicht maximal sein. Wir erklären nun noch, warum eine maximale Integralkurve mit nach oben beschränktem Definitionsbereich ab einem gewissen Zeitpunkt auch nicht mehr in ein vorgegebenes Kompaktum zurückkehren darf. Sicher besitzt unser Kompaktum

$M$  eine endliche Überdeckung durch offene Teilmengen von  $U$ , auf denen unser Vektorfeld jeweils lipschitzstetig ist. Mit II.6.7.16 finden wir auch ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß die Menge  $N$  aller Punkte von  $X$  mit Abstand  $\leq \varepsilon$  zu einem Punkt von  $M$  in der Vereinigung der Mengen dieser endlichen Überdeckung enthalten ist. Da unser Vektorfeld auch auf  $N$  lipschitzstetig ist, hat unsere Integralkurve dann an allen Stellen aus  $N$ , die sie durchläuft, eine gleichmäßig beschränkte Geschwindigkeit. Wann immer unsere maximale Integralkurve einen Punkt aus  $M$  durchläuft, muß sie also noch für eine gewisse von diesem Punkt unabhängige Zeitspanne innerhalb von  $N$  weiterlaufen. Sind wir näher als diese Zeitspanne am oberen Ende des Definitionsbereichs unserer maximalen Integralkurve, so kann unsere Integralkurve demnach keine Punkte aus  $M$  mehr durchlaufen, da sie ja wegen 5.2.7 nicht ab einem vorgegebenen Zeitpunkt in  $N$  bleiben darf, und es sonst nicht mehr schaffen könnte,  $N$  noch zu verlassen.  $\square$

### 5.3 Lineare Differentialgleichungen

**Satz 5.3.1 (Homogene lineare Differentialgleichungen).** *Gegeben ein halboffenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und eine stetige Abbildung  $M : I \rightarrow \text{End } V$  bilden die differenzierbaren Abbildungen  $\gamma : I \rightarrow V$  mit*

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) \quad \forall t \in I$$

einen Untervektorraum  $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$ , den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung. Weiter ist für jedes  $t_0 \in I$  das Auswerten bei  $t_0$  ein Isomorphismus  $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} V$ ,  $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$ , der **Anfangswertisomorphismus**.

*Ergänzung 5.3.2.* Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen Banachraums  $V$ , wenn man statt dem Raum  $\text{End } V$  aller Endomorphismen von  $V$  den normierten Raum  $\mathcal{B}(V)$  aller stetigen Endomorphismen von  $V$  betrachtet. Wir müssen dann nur am Schluß etwas sorgfältiger argumentieren, etwa in dem Sinne, daß eine auf  $[0, b)$  definierte Integralkurve nach den Abschätzungen im Beweis gleichmäßig stetig wäre und sich nach II.7.5.5 stetig auf  $[0, b]$  fortsetzen ließe. Das Bild dieser stetigen Fortsetzung ist dann das gesuchte Kompaktum, das nicht verlassen wird, im Widerspruch zu 5.2.8.

*Beweis.* Daß unser Lösungsraum  $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$  ein Untervektorraum ist und das Auswerten bei  $t_0$  linear, scheint mir beides offensichtlich. Es bleibt nur, Injektivität und Surjektivität des Auswertens zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dazu  $t_0 = 0$  annehmen. Falls  $I$  nicht offen ist,

wählen wir eine stetige Fortsetzung von  $M$  auf ein offenes Intervall  $J \supset I$ . Nun erfüllt  $\gamma : I \rightarrow V$  nach 5.1.19 unsere Differentialgleichung genau dann, wenn es eine Integralkurve des zeitabhängigen Vektorfelds  $(t, v) \mapsto M(t)v$  auf  $J \times V$  ist. Dies zeitabhängige Vektorfeld ist lokal partiell lipschitzstetig, im Sinne von 5.2.8, also besitzt es nach 5.2.8 zu jedem Anfangswert höchstens eine auf  $I$  definierte Integralkurve, und das zeigt die Injektivität. Für den Beweis der Surjektivität reicht es zu zeigen, daß jede maximale Integralkurve des zeitabhängigen Vektorfelds  $(t, v) \mapsto M(t)v$  mit Anfangswert  $\gamma(t_0) = v_0$  auf ganz  $J$  definiert ist. Sicher reicht es zu zeigen, daß sie bis zum oberen Ende von  $J$  definiert ist. Sonst gäbe es aber  $b \in J$  derart, daß die Lösung nicht in positiver Richtung über  $[0, b)$  hinaus fortgesetzt werden könnte. Es gibt jedoch  $L$  mit  $\|M(t)\| \leq L$  für alle  $t \in [0, b]$ , daraus folgt für  $t \in [0, b)$  erst

$$\|\gamma(t)\| = \left\| v_0 + \int_0^t M(\tau)\gamma(\tau) \, d\tau \right\| \leq \|v_0\| + L \int_0^t \|\gamma(\tau)\| \, d\tau$$

und dann  $\|\gamma(t)\| \leq \|v_0\| e^{Lt}$  nach dem Lemma von Gronwall 5.3.3, das wir im Anschluß beweisen. Dann wäre aber  $\|\gamma(t)\|$  beschränkt auf  $t \in [0, b)$ , nämlich durch  $\|v_0\| e^{Lb}$ , im Widerspruch zur letzten Aussage von 5.2.6 oder genauer ihrem Analogon 5.2.8 für zeitabhängige Vektorfelder.  $\square$

**Lemma 5.3.3 (Gronwall).** *Ist  $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $f : [0, b] \rightarrow [0, \infty)$  stetig und gibt es nichtnegative Konstanten  $L, C$  mit*

$$f(t) \leq L \int_0^t f(\tau) \, d\tau + C$$

*für alle  $t \geq 0$ , so erfüllt  $f$  die Abschätzung  $f(t) \leq C e^{Lt}$ .*

5.3.4. Es scheint mir von der Anschauung her ziemlich klar, daß eine differenzierbare Funktion  $F$  mit der Eigenschaft  $F' \leq F$  höchstens exponentiell wachsen kann. Das Lemma von Gronwall präzisiert und verallgemeinert diese Intuition.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $L$  und  $C$  positiv annehmen. Bezeichnet  $F(t)$  den Wert des obigen Integrals, so folgern wir erst

$$\frac{F'(t)}{LF(t) + C} \leq 1$$

und dann durch Integrieren von 0 bis  $t$  mithilfe der Substitutionsregel weiter  $L^{-1} \log(LF(t) + C) - L^{-1} \log C \leq t$  alias  $\log(LF(t) + C) \leq Lt + \log C$  und durch Exponentieren und das Erinnern unserer Voraussetzungen schließlich

$$f(t) \leq LF(t) + C \leq C e^{Lt} \quad \square$$

**Korollar 5.3.5 (Inhomogene lineare Differentialgleichungen).** Gegeben ein halboffenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  sowie stetige Abbildungen  $M : I \rightarrow \text{End } V$  und  $f : I \rightarrow V$ , bilden die differenzierbaren Abbildungen  $\gamma : I \rightarrow V$  mit

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) + f(t) \quad \forall t \in I$$

einen affinen Teilraum  $\mathcal{L}_i \subset \text{Ens}(I, V)$  mit dem Lösungsraum der zugehörigen linearen Gleichung als Raum von Richtungsvektoren und für jedes  $t_0 \in I$  definiert das Auswerten bei  $t_0$  eine Bijektion  $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} V$ ,  $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$ , den **Anfangswertisomorphismus**.

*Ergänzung 5.3.6.* Dies Korollar gilt wieder mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen vollständigen normierten reellen Vektorraums  $V$ , wenn man statt dem Raum  $\text{End } V$  aller Endomorphismen von  $V$  den normierten Raum  $\mathcal{B}(V)$  aller stetigen Endomorphismen von  $V$  betrachtet.

*Beweis.* Die Differenz von je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, und die Summe einer Lösungen der homogenen und einer Lösung der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit bleibt nur zu zeigen, daß die inhomogene Gleichung überhaupt eine Lösung besitzt. Das folgt ähnlich wie im homogenen Fall und ohne weitere Schwierigkeiten aus unseren allgemeinen Prinzipien. Wir geben nun aber sogar eine Lösungsmethode an, die Methode der **Variation der Konstanten**. Dazu wählen wir eine Basis  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  des Lösungsraums der homogenen Gleichung und fassen sie zusammen zu einer Lösung  $X : I \rightarrow V^n = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$  der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{X}(t) = M(t)X(t)$$

für Funktionen  $I \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$ . Da die Werte von  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  an jeder Stelle eine Basis von  $V$  bilden, ist  $X(t)$  an jeder Stelle ein Vektorraumisomorphismus. Nun machen wir für die Lösung unserer inhomogenen Gleichung den Ansatz  $\gamma(t) = X(t)c(t)$  mit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar alias  $\gamma(t) = c_1(t)\gamma_1(t) + \dots + c_n(t)\gamma_n(t)$  und finden

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= M(t)X(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= M(t)\gamma(t) + X(t)\dot{c}(t) \end{aligned}$$

Unser Ansatz führt also zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung genau dann, wenn gilt  $X(t)\dot{c}(t) = f(t)$  alias  $\dot{c}(t) = X^{-1}(t)f(t)$ . Ein  $c$  mit dieser

Eigenschaft existiert aber ganz offensichtlich, eben das Integral der rechten Seite.  $\square$

**5.3.7 (Verhalten benachbarter Integralkurven).** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $A : U \rightarrow \vec{X}$  ein lipschitzstetiges Vektorfeld mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Sind  $\gamma_p, \gamma_q : [0, b] \rightarrow U$  Integralkurven zu Anfangswerten  $p, q \in U$ , so finden wir für alle  $t \in [0, b]$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| &= \left\| p + \int_0^t A(\gamma_p(\tau)) \, d\tau - q - \int_0^t A(\gamma_q(\tau)) \, d\tau \right\| \\ &\leq \|p - q\| + L \int_0^t \|\gamma_p(\tau) - \gamma_q(\tau)\| \, d\tau \end{aligned}$$

und das Lemma von Gronwall 5.3.3 liefert für alle  $t \in [0, b]$  die Abschätzung

$$\|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| \leq \|p - q\| e^{Lt}$$

Salopp gesprochen besagt diese Abschätzung, daß zwei Integralkurven in einem lipschitzstetigen Vektorfeld “höchstens exponentiell auseinanderlaufen können”. Man mag das Argument vom Schluß des Beweises des Satzes über homogene lineare Differentialgleichungen 5.3.1 auch etwas vergrößernd dahingehend zusammenfassen, daß sich in diesem Fall eine beliebige Lösung höchstens exponentiell von der Null-Lösung entfernt und folglich nicht in endlicher Zeit ins Unendliche entweichen kann.

## 5.4 Höhere Ableitungen ohne Koordinaten

5.4.1. Gegeben eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder auch eine  **$C^\infty$ -Abbildung** genau dann, wenn zu allen Komponenten  $f_\mu$  von  $f$  für  $1 \leq \mu \leq m$  alle gemischten höheren partiellen Ableitungen, in der Multiindexschreibweise aus 2.2.3 also alle  $\partial^\alpha f_\mu$  für beliebige  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , auf ganz  $U$  existieren. Existieren sie bis zum Totalgrad  $|\alpha| \leq k$  und sind stetig, so spricht man von einer  **$C^k$ -Abbildung**. Wir wollen nun diese Bedingungen auf Abbildungen mit halboffenem Definitionsbereich auf beliebigen normierten reellen Räumen ausdehnen.

5.4.2. Gegeben Vektorräume  $V, W$  und  $k \geq 0$  bilden wir dazu den Vektorraum  $\text{Mult}^k(V, W)$  aller multilinearen Abbildungen des Produkts von  $k$  Kopien von  $V$  nach  $W$ . Im Fall  $k = 0$  verstehen wir  $\text{Mult}^0(V, W) = W$ . Man bemerke die Isomorphismen  $\text{Hom}(V, \text{Mult}^k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \text{Mult}^{k+1}(V, W)$  durch  $f \mapsto \langle f \rangle$  mit  $\langle f \rangle(v_0, v_1, \dots, v_k) = (f(v_0))(v_1, \dots, v_k)$ .

5.4.3. Die Notation  $\langle f \rangle$  haben wir auch schon an anderer Stelle für den “von  $f$  erzeugten Untervektorraum” eingeführt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

5.4.4. Gegeben normierte reelle Vektorräume  $V, W$  und  $k \geq 0$  bilden wir ähnlich den normierten Vektorraum  $\mathcal{B}^k(V, W)$  aller stetigen multilinearen Abbildungen des Produkts von  $k$  Kopien von  $V$  nach  $W$ , versehen mit der Norm [II.6.9.28](#). Im Fall  $k = 0$  verstehen wir  $\mathcal{B}^0(V, W) = W$ . Man bemerke die Isomorphismen von normierten Vektorräumen  $\mathcal{B}(V, \mathcal{B}^k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^{k+1}(V, W)$  durch  $f \mapsto \langle f \rangle$ .

5.4.5. Sind  $X, Y$  normierte reelle Räume und ist  $A \subset X$  eine halboffene Teilmenge und  $g : A \rightarrow \mathcal{B}^k(\vec{X}, \vec{Y})$  eine differenzierbare Abbildung, so fassen wir  $dg$  mit der Identifikation aus [5.4.4](#) auf als diejenige Abbildung  $dg : A \rightarrow \mathcal{B}^{k+1}(\vec{X}, \vec{Y})$ , die gegeben wird durch  $x \mapsto \langle d_x g \rangle$ .

**Definition 5.4.6.** Gegeben  $X, Y$  normierte reelle Räume und  $A \subset X$  eine halboffene Teilmenge und  $f : A \rightarrow Y$  eine Abbildung setzen wir  $d^0 f := f$  und  $d^1 f := df : x \mapsto d_x f$  und definieren induktiv die  **$k$ -te Ableitung**

$$d^k f : A \rightarrow \mathcal{B}^k(\vec{X}, \vec{Y})$$

als  $d^k f := d(d^{k-1} f)$ , falls die  $(k-1)$ -te Ableitung existiert und differenzierbar ist auf  $A$ . Existieren alle höheren Ableitungen von  $f$  bis zur Ordnung  $k$  und sind stetig, so nennen wir  $f$  **von der Klasse  $\mathcal{C}^k$**  oder auch eine  **$\mathcal{C}^k$ -Abbildung**. Zum Beispiel bedeutet  $\mathcal{C}^1$  nichts anderes als stetig differenzierbar und  $\mathcal{C}^0$  nichts anderes als stetig. Ist  $f$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  für alle  $k$ , so heißt die Abbildung  $f$  **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder **von der Klasse  $\mathcal{C}^\infty$**  oder eine  **$\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung**.

*Übung 5.4.7.* Die Exponentialabbildung  $\exp : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  ist glatt. Hinweis: [2.3.11](#).

*Übung 5.4.8.* Gegeben ein Banachraum  $V$  ist das Invertieren eine glatte Abbildung auf der Menge der invertierbaren Elemente von  $\mathcal{B}(V)$ . Hinweis: [1.4.11](#).

*Übung 5.4.9.* Seien  $X, Y$  normierte Räume und  $A \subset X$  halboffen. Eine differenzierbare Abbildung  $f : A \rightarrow Y$  ist von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  genau dann, wenn die Abbildung  $A \times \vec{X} \rightarrow Y \times \vec{Y}$ ,  $(x, v) \mapsto (f(x), (d_x f)(v))$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$  ist.

*Übung 5.4.10.* Jede Verknüpfung von  $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen ist von der Klasse  $\mathcal{C}^k$ . Jede Verknüpfung von glatten Abbildungen ist glatt. Hinweis: [1.5.10](#) und [5.4.9](#).

*Übung 5.4.11.* Eine Abbildung in ein Produkt von endlich vielen normierten reellen Vektorräumen ist  $\mathcal{C}^k$  genau dann, wenn ihre Komponenten  $\mathcal{C}^k$  sind.

5.4.12. Die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen läßt sich koordinatenfrei dahingehend formulieren, daß unsere höheren Ableitungen  $d^k f$  in den symmetrischen multilinearen Abbildungen landen, d.h. in denjenigen multilinearen Abbildungen, die ihren Wert nicht ändern, wenn man ihre Argumente untereinander vertauscht. Wir gehen darauf nicht näher ein, empfehlen aber dem Leser zu prüfen, daß sich die höheren Terme der Taylorentwicklung 2.2.5 koordinatenfrei in der Form  $(k!)^{-1}(d^k f)(h, \dots, h)$  darstellen lassen.

**Definition 5.4.13.** Seien  $X, Y$  normierte reelle Räume und  $A \subset X, B \subset Y$  halboffene Teilmengen. Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  heißt ein  **$C^k$ -Diffeomorphismus** genau dann, wenn  $f$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch seine Umkehrung  $f^{-1} : B \rightarrow A$  beide  $C^k$ -Abbildungen sind. Sprechen wir ohne nähere Spezifizierung von einem **Diffeomorphismus**, so meinen wir einen  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

5.4.14. Seien  $X$  und  $Y$  vollständige normierte reelle Räume. Ist  $U \subseteq X$  offen und  $f : U \rightarrow Y$  eine  $C^k$ -Abbildung für  $1 \leq k \leq \infty$  und ist an einer Stelle  $p \in U$  das Differential ein Isomorphismus mit stetigem Inversen, so induziert  $f$  einen  $C^k$ -Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung von  $p$  mit einer offenen Umgebung von  $f(p)$ . Das folgt sofort aus 4.1.4 mit den vorhergehenden Übungen, insbesondere 5.4.8.

## 5.5 Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts

**Definition 5.5.1.** Gegeben ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines normierten reellen Raums  $X$ , das zu jedem Anfangswert  $q \in U$  eine größte Integralkurve  $\gamma_q : I_q \rightarrow U$  besitzt, erklären wir seinen **Fluß** als die Abbildung

$$\Phi : (t, q) \mapsto \gamma_q(t)$$

von der Menge  $\tilde{U} := \{(t, q) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_q\}$ , dem **Definitionsbereich des Flusses**, in den Definitionsbereich  $U$  unseres Vektorfelds.

**Satz 5.5.2 (Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts).** *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums hat sein Fluß offenen Definitionsbereich und ist ebenfalls glatt.*

*Ergänzung 5.5.3.* Auch dieser Satz gilt mit fast demselben Beweis allgemeiner für einen vollständigen normierten und nicht notwendig endlichdimensionalen Raum.

*Beweis.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$ , eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$ , ein  $C^k$ -Vektorfeld  $A : U \rightarrow \vec{X}$  mit  $k \geq 1$  und ein Punkt  $p \in U$

wählen wir zunächst offene Umgebungen  $V \subseteq U$  von  $p$  und  $W \subseteq \vec{X}$  von Null mit  $V + W \subset U$ . Weiter wählen wir eine Norm auf  $\vec{X}$ . Dann betrachten wir für ein halboffenes kompaktes reelles Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $0 \in I$  den affinen Raum

$$\mathcal{C}_p^1(I, X)$$

aller stetig differenzierbaren Wege  $\gamma : I \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = p$  und versehen seinen Richtungsraum  $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X})$  mit der Norm  $\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty$  der gleichmäßigen Konvergenz von Funktion und erster Ableitung. Nach III.1.3.11 erhalten wir so einen reellen Banachraum. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times V \times \mathcal{C}_0^1(I, W) &\rightarrow \mathcal{C}(I, \vec{X}) \\ (\tau, q, \psi) &\mapsto \psi' - \tau(A \circ (q + \psi)) \end{aligned}$$

Genau dann wird  $(\tau, q, \psi)$  auf Null abgebildet, wenn  $t \mapsto \gamma(t) = q + \psi(t)$  eine Integralkurve des reskalierten Vektorfelds  $\tau A$  zum Anfangswert  $\gamma(0) = q$  ist. Nach Summenregel 1.4.4, Produktregel 1.4.5 und dem im Anschluß bewiesenen Lemma 5.5.4 ist  $F$  differenzierbar mit Differential

$$(d_{(\tau, q, \psi)} F)(h, v, \alpha) = \alpha' - h(A \circ (q + \psi)) - \tau((dA) \circ (q + \psi, v + \alpha))$$

Insbesondere gilt  $(d_{(0, p, 0)} F)(0, 0, \alpha) = \alpha'$ , und da  $\alpha \mapsto \alpha'$  eine stetige und stetig umkehrbare Bijektion  $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(I, \vec{X})$  definiert und  $F$  nach unserer Formel stetig differenzierbar ist, dürfen wir den Satz über implizite Funktionen 4.2.8 anwenden. Er liefert uns ein Paar  $(A_1, B_1)$  mit  $(0, p) \in A_1 \subseteq \mathbb{R} \times V$  und  $0 \in B_1 \subseteq \mathcal{C}_0^1(I, W)$  derart, daß es für jedes  $(\tau, q) \in A_1$  genau ein  $\psi_{\tau, q} \in B_1$  gibt, für das  $\gamma_{\tau, q} = q + \psi_{\tau, q}$  eine auf  $I$  definierte Integralkurve des reskalierten Vektorfelds  $\tau A$  mit Anfangswert  $q$  ist. Wählen wir also etwa  $I = [-1, 1]$ , so finden wir in  $A_1$  eine offene Umgebung von  $(0, p)$  der Gestalt  $(-\eta, \eta) \times D$ , und daselbst ist dann auch der Fluß definiert. Da Integralkurven unter Zeitverschiebung Integralkurven bleiben, zeigt das schon mal, daß unser Fluß einen offenen Definitionsbereich hat. Weiter ist  $F$  nach obiger Formel für sein Differential sogar von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  im Sinne von 5.4.6. Damit zeigt der Satz über implizite Funktionen mit den Resultaten und Definitionen von 5.4 aber auch, daß die Zuordnung  $(\tau, q) \mapsto \gamma_{\tau, q}$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung  $(-\eta, \eta) \times D \rightarrow \mathcal{C}^1(I, U)$  ist. Verknüpfen wir diese mit dem Auswerten an einer festen Stelle  $t \in I \setminus 0$ , einer stetigen affinen Abbildung, und beachten  $\gamma_{\tau, q}(t) = \gamma_q(\tau t)$ , so folgt, daß der Fluß selbst eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung ist.  $\square$

**Lemma 5.5.4.** *Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $A : U \rightarrow Y$  stetig differenzierbar. Für jedes Kompaktum  $K$  ist dann auch die Abbildung  $(A \circ) : \mathcal{C}(K, U) \rightarrow \mathcal{C}(K, Y)$  differenzierbar und ihr Differential*

paßt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K, U) \times \mathcal{C}(K, \vec{X}) & \xrightarrow{d(A \circ)} & \mathcal{C}(K, \vec{Y}) \\ \downarrow \wr & & \parallel \\ \mathcal{C}(K, U \times \vec{X}) & \xrightarrow{(dA) \circ} & \mathcal{C}(K, \vec{Y}) \end{array}$$

5.5.5. Hier verstehen wir für jeden normierten Raum  $Z$  den Abbildungsraum  $\mathcal{C}(K, Z)$  mit seiner Norm der gleichmäßigen Konvergenz und identifizieren den Richtungsraum unseres Abbildungsraums in der hoffentlich offensichtlichen Weise mit  $\mathcal{C}(K, \vec{Z})$ . In der oberen Horizontalen meinen wir die Abbildung  $(\gamma, \alpha) \mapsto (d_\gamma(A \circ))(\alpha)$  und in der unteren Horizontalen meint  $dA$  entsprechend die Abbildung  $dA : U \times \vec{X} \rightarrow \vec{X}$ ,  $(x, v) \mapsto (d_x A)(v)$ .

*Beweis.* Es reicht, an jeder Stelle  $\gamma \in \mathcal{C}(K, U)$  die Differenzierbarkeit zu untersuchen und das Differential  $d_\gamma(A \circ)$  zu bestimmen. Gegeben  $\varepsilon > 0$  gibt es für alle  $x \in \gamma(K)$  ein größtes  $\eta(x) = \eta_\varepsilon(x) \in (0, 1)$  derart, daß gilt  $B(x; \eta(x)) \subset U$  und

$$\|x - z\| < \eta(x) \Rightarrow \|d_x A - d_z A\| \leq \varepsilon$$

Man erkennt unschwer, daß  $\eta : \gamma(K) \rightarrow (0, 1)$  stetig ist, ja sogar lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante Zwei. Sei  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  das Minimum von  $\eta$  auf unserem Kompaktum  $\gamma(K)$ . Für  $x \in \gamma(K)$  und  $h \in \vec{X}$  mit  $\|h\| \leq \delta$  liefert dann der Schrankensatz oder vielmehr sein Korollar 1.3.5 die Abschätzung

$$\|A(x+h) - A(x) - (d_x A)(h)\| \leq \|h\| \varepsilon$$

Für jedes  $\alpha : K \rightarrow \vec{X}$  mit  $\|\alpha\| \leq \delta$  gilt also

$$\|A \circ (\gamma + \alpha) - A \circ \gamma - (dA) \circ (\gamma, \alpha)\| \leq \|\alpha\| \varepsilon$$

und das war im wesentlichen die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.5.6 (Normalform eines Vektorfelds).** *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums, das an einer festen Stelle nicht verschwindet, finden wir für diese Stelle stets eine offene Umgebung mitsamt einem Diffeomorphismus besagter Umgebung auf eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums, unter dem unser Feld zu einem konstanten Feld verwandelt ist.*

5.5.7. In Koordinaten gesprochen hat also jedes Vektorfeld, daß an einer vorgegebenen Stelle nicht verschwindet, in geeigneten lokalen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  um diese Stelle die Gestalt  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ .



Illustration zum Beweis von Satz 5.5.6 zur lokalen Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum,  $U \subseteq X$  unsere offene Teilmenge,  $A : U \rightarrow \vec{X}$  unser Vektorfeld und  $p \in U$  die vorgegebene Stelle. Wir wählen  $\vec{Y} \subset \vec{X}$  komplementär zur Geraden mit Richtungsvektor  $A_p$  und wählen einen Isomorphismus  $L : \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ . Gegeben ein glattes Vektorfeld  $A$  auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen affinen Raums schreiben wir im folgenden  $A^t q$  für die Stelle  $A^t q \in U$ , an der der Punkt  $q \in U$  landet, wenn er sich für die Zeitspanne  $t$  mit dem Fluß des Vektorfelds  $A$  treiben läßt. Man zeigt mühelos, daß für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  und eine hinreichend kleine Umgebung  $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  des Ursprungs die Abbildung  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W \rightarrow U, (t, \vec{w}) \mapsto A^t(p + L\vec{w})$  sinnvoll definiert und ein Diffeomorphismus der gewünschten Art ist.  $\square$

## 6 Maß und Integral

Es mag nahe liegen zu versuchen, jeder Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ein "Volumen" oder "Maß" in  $[0, \infty]$  so zuzuordnen, daß (1) das Verschieben von Mengen ihr Maß nicht ändert, daß (2) bei beliebigen disjunkten Vereinigungen das Maß der Vereinigung die Summe der Maße ist, und daß (3) dem Einheitswürfel  $[0, 1]^n$  das Maß Eins zugeordnet wird. Kurzes Nachdenken zeigt jedoch, daß das unmöglich gelingen kann: Für solch ein Volumen müßte nämlich jeder Punkt Volumen Null haben, da ja unendlich viele verschiedene Punkte im Einheitswürfel liegen, und dann müßte auch der ganze Einheitswürfel Volumen Null haben als disjunkte Vereinigung einpunktiger Teilmengen. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, mag man etwas schwächer statt (2) nur noch bei *abzählbaren* disjunkten Vereinigungen fordern wollen, daß das Maß der Vereinigung die Summe der Maße ist, aber auch solch einen Volumenbegriff kann es für beliebige Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  nicht geben, wie in 6.1.28 ausgeführt wird. Es ist jedoch möglich, gewisse Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  als "meßbar" auszuzeichnen derart, daß alle "einigermaßen vernünftigen" Teilmengen meßbar sind, und jeder dieser meßbaren Mengen ein Volumen so zuzuordnen, daß Bedingung (1), die abzählbare Variante von (2) sowie (3) entsprechend gelten. Im folgenden will ich das ausführen und zeigen, wie davon ausgehend auch eine sehr allgemeine Integrationstheorie entwickelt werden kann, die sich sowohl in der weiteren Entwicklung der Analysis als auch bei der mathematischen Modellierung der Wahrscheinlichkeit als außerordentlich nützlich erweisen wird.

### 6.1 Maßräume und Maße

6.1.1. Gegeben eine Menge  $X$  erinnere ich daran, daß wir nach 1.2.1.13 die Menge aller ihrer Teilmengen bilden dürfen, und daß diese Menge die Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  von  $X$  heißt. Weiter erinnere ich daran, daß in diesem Text aus rein didaktischen Erwägungen heraus Teilmengen der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  einer Menge  $X$  vorzugsweise als "Systeme von Teilmengen von  $X$ " oder "Mengensysteme" angesprochen werden.

**Definition 6.1.2.** Ein System von Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  einer Menge  $X$  heißt eine **Mengenalgebra** genau dann, wenn gilt:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$ ;
3.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{A}$ .

In Worten ist ein System von Teilmengen einer Menge  $X$  also eine Mengenalgebra genau dann, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und von Komplementen bezüglich  $X$ .

6.1.3. Ich will kurz diskutieren, warum unsere Definition in Formeln zu unserer Definition in Worten gleichbedeutend sind. Bei der Definition in Worten ist mitgemeint, daß eine Mengenalgebra die leere Menge enthalten soll als “die Vereinigung über überhaupt keine Teilmenge von  $X$ ”, vergleiche ???. Bei der Definition in Formeln folgt umgekehrt die Stabilität von  $\mathcal{A}$  unter endlichen Vereinigungen von mehr als zwei Mengen induktiv.

6.1.4. Eine Mengenalgebra ist natürlich auch stabil unter dem Bilden von endlichen Schnitten und von Differenzmengen.

**Definition 6.1.5.** Eine Mengenalgebra, die sogar stabil ist unter abzählbaren Vereinigungen, heißt eine  $\sigma$ -**Algebra**, französisch **tribu**. Ein Paar  $(X, \mathcal{M})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt ein **Meßraum**. Die Mengen aus  $\mathcal{M}$  heißen dann die **meßbaren** Mengen von  $(X, \mathcal{M})$  oder kurz von  $X$ .

6.1.6. In Formeln ist eine  $\sigma$ -Algebra also eine Mengenalgebra  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  derart, daß aus  $A_i \in \mathcal{A}$  für  $i = 1, 2, \dots$  folgt  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ . Gegeben ein Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  ist dann natürlich auch ganz  $X$  meßbar und abzählbare Schnitte meßbarer Mengen sind wieder meßbar.

*Beispiel 6.1.7.* In jeder Menge bilden die endlichen Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine Mengenalgebra, die jedoch nur dann eine  $\sigma$ -Algebra ist, wenn wir unsere Konstruktion in einer endlichen Menge durchführen. In jeder Menge bilden die abzählbaren Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine  $\sigma$ -Algebra.

*Beispiel 6.1.8.* Alle endlichen Vereinigungen von Intervallen bilden eine Mengenalgebra von Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Die abzählbaren Vereinigungen von Intervallen bilden *keine*  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , da dieses Mengensystem nicht unter dem Bilden von Komplementen stabil ist: Zum Beispiel ist die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  eine abzählbare Vereinigung von Intervallen, genauer von einelementigen Intervallen, aber ihr Komplement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist keine abzählbare Vereinigung von Intervallen mehr.

**Definition 6.1.9.** Sei  $X = (X, \mathcal{M})$  ein Meßraum. Ein **Maß** oder genauer ein **nichtnegatives Maß** auf  $X$  ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  derart, daß für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten meßbaren Mengen das Maß ihrer Vereinigung übereinstimmt mit der Summe der Maße der einzelnen Mengen. Wir sagen dann auch, die Abbildung  $\mu$  sei  $\sigma$ -**additiv** und nennen

das Tripel  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  einen **Maßraum**. In Formeln fordern wir also für jede abzählbare Familie  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise disjunkten meßbaren Mengen die Gleichheit

$$\mu \left( \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Diese Gleichheit ist in  $[0, \infty]$  zu verstehen, das Symbol  $\sqcup$  deutet wie in ?? erklärt an, daß die zu vereinigenden Teilmengen zusätzlich disjunkt sein sollen. Über den Fall  $N = \emptyset$  enthält unsere Forderung nach unseren Konventionen I.3.1.18 insbesondere die Forderung  $\mu(\emptyset) = 0$ . Fordert man diese Bedingung separat, so braucht man die große Formel nur noch für Folgen meßbarer Mengen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu fordern.

*Ergänzung* 6.1.10. Ein Maßraum, bei dem die ganze Menge Maß Eins hat, heißt ein **Wahrscheinlichkeitsraum**. Mit diesem Wort geht allerdings eine völlig andere Motivation, Intuition und Buchstabenwahl einher: Das Ziel ist nun nicht mehr ein begrifflicher Rahmen zur Berechnung der Volumina einfacher Körper und dergleichen, also die explizite Berechnung von Maßen vorgegebener Mengen, sondern die mathematische Modellierung des Zufalls. Man notiert Wahrscheinlichkeitsräume statt  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  meist  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und denkt sich dabei  $\Omega$  als eine völlig unstrukturierte und von der speziell untersuchten Fragestellung unabhängige Menge “von sich paarweise ausschließenden Möglichkeiten”, und  $P(A)$  mit  $P$  wie “Probability” als die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten einer Möglichkeit aus  $A$ . Das Interesse konzentriert sich in diesem Zusammenhang auf das Studium der Beziehungen zwischen sogenannten **Zufallsvariablen**. Ganz allgemein versteht man unter einer Zufallsvariablen eine Abbildung von  $\Omega$  in einen weiteren Meßraum mit der Eigenschaft, daß die Urbilder aller meßbaren Mengen meßbar sind. So würde etwa ein gerechter Würfel modelliert durch eine Abbildung  $W : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  mit  $W^{-1}(i)$  meßbar und  $P(W^{-1}(i)) = 1/6$  für  $1 \leq i \leq 6$ . Hier könnte  $\Omega$  aus eben diesen sechs Elementen bestehen, es könnte jedoch auch viel größer sein und etwa aus allen möglichen Ausgängen eines einmaligen Würfels mit hundert Würfeln bestehen, von denen unser Würfel nur einer ist, oder  $\Omega$  könnte aus allen Paaren in  $\{1, \dots, 6\} \times \{\text{an, aus}\}$  bestehen, bei denen der zweite Eintrag erinnert, ob das Licht in dem Raum, in dem gewürfelt wurde, nun an oder aus war. Ganz allgemein interessieren in der Wahrscheinlichkeitstheorie im Wesentlichen nur diejenigen Konstruktionen und Definitionen, die veträglich sind mit dem Zurückholen unter **Verfeinerungen**, d.h. unter Abbildungen  $\Omega' \rightarrow \Omega$  von einem weiteren Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega', \mathcal{A}', P')$  nach  $\Omega$  mit der Eigenschaft, daß Urbilder meßbarer Mengen meßbar bleiben und dasselbe Maß behalten wie die ursprüngliche Menge. Die meßbaren Teilmengen von  $\Omega$  heißen auch **Ereignisse**. Ist jede einelementige Teilmenge von  $\Omega$  meßbar, so

mag man die Elemente der Menge  $\Omega$  auch **Elementar-Ereignisse** nennen. Man beachte jedoch, daß bei Verfeinerungen neue Ereignisse hinzukommen können und Elementar-Ereignisse im allgemeinen keine Elementar-Ereignisse bleiben werden.

*Beispiele* 6.1.11. Einfache Beispiele für Maße sind das **Dirac-Maß**  $\delta_x$  an einem Punkt  $x \in X$ , gegeben durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und das **Zählmaß**  $\zeta(A) = |A| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , das jeder Teilmenge die Zahl ihrer Elemente zuordnet. Diese beiden Maße sind sogar auf der gesamten Potenzmenge einer beliebigen Menge  $X$  definiert. Allgemeiner kann man für jede Menge  $X$  und jede Abbildung  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  wieder auf der gesamten Potenzmenge von  $X$  das Maß  $A \mapsto \sum_{x \in A} f(x)$  betrachten, bei dem in gewisser Weise “jeder Punkt  $x \in X$  mit dem Faktor  $f(x)$  gewichtet wird”. Das vielleicht wichtigste Beispiel für ein Maß ist das “Lebesgue-Maß” auf den “topologisch meßbaren Mengen” oder “Borelmengen” des  $\mathbb{R}^n$ , dessen Konstruktion noch aussteht.

6.1.12. Sei  $X$  eine feste Menge. Sind  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$  zwei  $\sigma$ -Algebren, so ist auch ihr Schnitt  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Sogar ein beliebiger Schnitt von  $\sigma$ -Algebren in  $X$  ist wieder eine  $\sigma$ -Algebra in  $X$ .

**Definition 6.1.13.** Ist  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  irgendein System von Teilmengen einer Menge  $X$ , so betrachten wir den Schnitt aller  $\sigma$ -Algebren, die  $\mathcal{A}$  enthalten. Dieser Schnitt ist sicher die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , die  $\mathcal{A}$  enthält. Er heißt die **von  $\mathcal{A}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra** und wird  $\sigma(\mathcal{A})$  notiert.

6.1.14. Ich rate davon ab, nach einer expliziteren Beschreibung für die von einem Mengensystem erzeugte  $\sigma$ -Algebra zu suchen, und ich rate erst recht davon ab, dafür eine Anschauung entwickeln zu wollen. Es handelt sich hierbei vielmehr um ein abstraktes logisches Konstrukt, das nur dazu dient, einen begrifflichen Rahmen für unsere weiteren Überlegungen zu liefern. Um Ihnen die Schwierigkeiten einer “expliziten” Beschreibung zu zeigen, will ich kurz andeuten, wie es *nicht* geht. Man könnte versucht sein, unser Mengensystem zunächst einmal zu ergänzen durch Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen. Dann durch Hinzunehmen aller Komplementmengen. Dann wieder durch Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen, und immer so weiter. Kriegt man so in endlich vielen Schritten jede Menge der von unserem Mengensystem erzeugten  $\sigma$ -Algebra? Eben nicht: Denn nun muß man auch noch die Vereinigungsmengen aller Mengenfolgen dazunehmen, bei denen die erste

Menge nach einem Schritt erhalten wurde, die zweite nach zwei Schritten und so weiter. Um die ganze  $\sigma$ -Algebra zu beschreiben, muß man stattdessen mit transfiniten Induktion arbeiten, wie etwa im Beweis von Lemma ?? ausgeführt wird.

**Definition 6.1.15.** Die von den offenen Mengen eines metrischen oder allgemeiner eines topologischen Raums  $X$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra nennen wir die  $\sigma$ -Algebra der **topologisch meßbaren Teilmengen** oder auch der **Borelmengen** von  $X$  und notieren sie  $\text{Borel}(X)$ . Unter einem **topologischen Maß** verstehen wir ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra aller topologisch meßbaren Mengen eines topologischen Raums; unter einem **Borelmaß** ein topologisches Maß, das auf allen Kompakta endliche Werte annimmt. Das Zählmaß auf  $\mathbb{R}$  etwa ist in unserem Sinne ein topologisches Maß, aber kein Borelmaß. Für den Begriff einer Borelmenge und eines Borelmaßes sind jedoch leider auch viele andere Bedeutungen in der Literatur verbreitet.

*Ergänzung 6.1.16.* Auch ohne die Kontinuumshypothese vorauszusetzen kann man zeigen, daß jede überabzählbare Borelmenge bereits in Bijektion zu ganz  $\mathbb{R}$  ist. Wie das genau geht, können Sie etwa in der Mengenlehre lernen.

*Übung 6.1.17.* Man zeige, daß die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten die  $\sigma$ -Algebra aller Borelmengen der reellen Zahlengeraden erzeugen.

6.1.18. Natürlich sind mit unserer Definition auch alle abgeschlossenen Mengen topologisch meßbar, und für jede Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  und beliebiges  $a \in \mathbb{R}^n$  ist auch die verschobene Menge  $a + A$  eine Borelmenge.

**Definition 6.1.19.** Ein topologisches Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$  heißt **translationsinvariant** genau dann, wenn für beliebiges  $a \in \mathbb{R}^n$  und jede Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt  $\lambda(a + A) = \lambda(A)$ .

**Satz 6.1.20 (Charakterisierung des Lebesguemaßes).** *Es gibt auf dem  $\mathbb{R}^n$  genau ein translationsinvariantes topologisches Maß  $\lambda$ , das dem Einheitswürfel das Maß Eins zuordnet, für das also in Formeln gilt  $\lambda([0, 1]^n) = 1$ .*

6.1.21. Dieses Maß  $\lambda$  heißt das **Lebesgue-Maß** auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, welches  $n$  gemeint ist, notieren wir es auch  $\lambda^n$ . Die zweite Bedingung an unser Lebesguemaß nennen wir seine **Normierung**. In dieser Terminologie können wir also das Lebesgue-Maß charakterisieren als das eindeutig bestimmte normierte translationsinvariante Maß auf den Borelmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Anschaulich ordnet  $\lambda$  jeder Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ihr **Volumen** oder **Maß**  $\lambda(A) \in [0, \infty]$  zu. Der Nachweis der Eindeutigkeit wird dem Leser als Übung 6.2.27 und 6.2.28 überlassen. Die Existenz zeigen wir für  $n = 1$  im folgenden Abschnitt in Bemerkung 6.2.12 und für beliebiges  $n$  in 6.6.4.

6.1.22. Viele Autoren verstehen unter dem Lebesguemaß auch erst die “Vervollständigung” des hier beschriebenen Maßes im Sinne von 6.2.34. Präziser sollte man das im Satz 6.1.20 beschriebene Maß also vielleicht das “Lebesguemaß auf den Borelmengen” oder das **Lebesgue-Borel-Maß** nennen.

**Satz 6.1.23 (Regularität des Lebesguemaßes).** *Für das Lebesguemaß  $\lambda$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  und jede Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt*

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ offen in } \mathbb{R}^n}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

6.1.24. Dieser Satz wird in 6.7.1 gezeigt. Er deutet eine mögliche Konstruktion des Lebesgue-Maßes  $\lambda$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  an: Um das Lebesgue-Maß einer Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  zu bestimmen können wir beginnen mit dem Fall endlicher disjunkter Vereinigungen von Produkten von Intervallen. Solche “Quadermengen” haben noch ein anschauliches Volumen. Dann wird für  $U$  offener Wert  $\lambda(U)$  definiert als das Supremum über die Volumina aller in  $U$  enthaltenen Quadermengen, und schließlich erhält man das Maß  $\lambda(A)$  einer beliebigen Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  als Infimum von  $\lambda(U)$  über alle offenen  $U$ , die  $A$  umfassen. Diese Beschreibung von  $\lambda(A)$  ähnelt unserer definitiven Konstruktion des Lebesguemaßes. Die wesentliche Schwierigkeit ist, zu zeigen, daß die so konstruierte Abbildung von den Borelmengen in die um  $\infty$  erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen  $\sigma$ -additiv ist.

6.1.25. Wir wollen uns zur besseren Motivation sofort überlegen, daß es schon im Fall  $n = 1$  keinen vernünftigen Volumenbegriff für *beliebige* Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  geben kann. Wir beginnen mit dem Nachweis einiger Eigenschaften von Maßen, die wir auch an anderer Stelle noch oft benötigen werden.

6.1.26. Für jedes Maß und meßbare  $A, B$  gilt  $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ , es gilt ja sogar genauer  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ . Ist weiter  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  eine abzählbare aufsteigende Vereinigung meßbarer Mengen, also  $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

In der Tat, schreiben wir  $A$  als die disjunkte Vereinigung der  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ , so haben wir  $\mu(A_n) = \mu(B_n) + \dots + \mu(B_0)$  und die Behauptung folgt aus der Definition. Ist schließlich  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  eine beliebige abzählbare Vereinigung meßbarer Mengen, so können wir  $A$  auch als disjunkte Vereinigung der kleineren Mengen  $B_n = A_n \setminus (A_{n-1} \cup \dots \cup A_0)$  schreiben und erhalten so die Abschätzung

$$\mu(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

*Übung 6.1.27.* Ist  $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$  ein abzählbarer absteigender Schnitt meßbarer Mengen, also  $A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  erst unter der zusätzlichen Voraussetzung  $\mu(A_n) < \infty$  für mindestens ein  $n$ .

**Lemma 6.1.28.** *Es gibt kein Maß  $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  auf der  $\sigma$ -Algebra aller Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , das translationsinvariant und normiert ist.*

*Beweis.* Wir werden eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  und Folgen  $r_n$  und  $q_n$  reeller Zahlen konstruieren derart, daß gilt:

1. Die Mengen  $r_n + A$  sind paarweise disjunkt und alle in  $[0, 3]$  enthalten.
2. Die Mengen  $q_n + A$  überdecken  $\mathbb{R}$ .

Für unsere Menge  $A$  müßte also gleichzeitig gelten

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(r_n + A) \leq \lambda([0, 3]) \leq 3\lambda([0, 1]) = 3 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(q_n + A) \geq \lambda(\mathbb{R}) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(2n + [0, 1]) = \infty \end{aligned}$$

und dieser Widerspruch zeigt dann das Lemma. Um unsere Menge  $A$  zu konstruieren, wählen wir mithilfe von ?? eine Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}$  derart, daß  $\{1\} \cup I$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $\mathbb{R}$  ist, und betrachten den von  $I$  erzeugten  $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum  $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$  und die Menge  $A = \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [0, 2]$ . Für jede Folge  $r_n$  von paarweise verschiedenen rationalen Zahlen aus  $[0, 1]$  sind dann die  $r_n + A$  paarweise disjunkt und in  $[0, 3]$  enthalten. Andererseits finden wir auch für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ein  $b_n \in \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [n - 1, n]$ , es folgt  $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} = \bigcup b_n + A$  und dann

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}} q + b_n + A \quad \square$$

6.1.29. Es kommt sogar noch schlimmer: Nach Banach und Tarski ist es möglich, jedenfalls wenn man das Auswahlaxiom akzeptiert, die abgeschlossene Einheitskugel so in sechs paarweise disjunkte Teilmengen zu zerlegen, daß sich diese Teilmengen geeignet verschoben und im Raum gedreht ohne Überlappungen zu *zwei* Einheitskugeln zusammenfügen lassen. Das ist das sogenannte **Banach-Tarski-Paradoxon**. Die fraglichen sechs Teilmengen sind dann natürlich nicht alle meßbar.

*Übung 6.1.30.* Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Mengenalgebra. Man zeige: (1) Genau dann ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra, wenn  $\mathcal{M}$  stabil ist unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen. (2) Genau dann ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra, wenn  $\mathcal{M}$  stabil ist unter abzählbaren *aufsteigenden* Vereinigungen im Sinne von 6.1.26.

*Übung 6.1.31.* In einem metrischen Raum mit einer abzählbaren dichten Teilmenge erzeugen die offenen Bälle bereits die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen.

*Übung 6.1.32.* Konstruieren Sie in  $\mathbb{R}$  eine offene dichte Teilmenge von endlichem Lebesguemaß.

*Ergänzende Übung 6.1.33.* Sei  $X$  ein Meßraum und  $\mu_i$  eine Folge von endlichen Maßen derart, daß für jedes meßbare  $A \subset X$  die Folge der  $\mu_i(A)$  monoton wachsend und beschränkt ist. So wird durch die Formel  $\mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(A)$  ein weiteres Maß auf  $X$  erklärt.

## 6.2 Konstruktion des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$

**Definition 6.2.1.** Ein System von Teilmengen einer gegebenen Menge heißt ein **Mengenring** genau dann, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und von Differenzmengen. In Formeln ausgedrückt ist ein System von Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  einer Menge  $X$  also ein Mengenring genau dann, wenn gilt:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$ ;
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ .

6.2.2. Daß unsere Definition in Worten und unsere Definition in Formeln gleichbedeutend sind, erkennt man wie in 6.1.3. Ein Mengensystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  ist eine Mengenalgebra genau dann, wenn  $\mathcal{A}$  ein Mengenring ist und wenn zusätzlich gilt  $X \in \mathcal{A}$ .

*Ergänzung 6.2.3.* Identifiziert man  $\mathcal{P}(X)$  mit der Menge  $\text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$  aller Abbildungen von  $X$  in den zweielementigen Körper, indem man jeder Menge die Funktion zuordnet, die auf unserer Menge den Wert Eins annimmt und außerhalb den Wert Null, so entsprechen unsere Mengenringe  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  genau den “nicht-unitären Teilringen” oder in unserer Terminologie Teilringen von  $\text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$  unter der punktweisen Addition und Multiplikation, und unsere Mengenalgebren entsprechen den “unitären Teilringen”, die wir in unserer Terminologie ?? schlicht Teilringe nennen.

*Übung 6.2.4.* Gegeben Mengen  $X$  und  $Y$  sowie Mengenringe  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  und  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$  ist auch das System aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten Mengen der Gestalt  $A \times B$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  ein Mengenring in  $\mathcal{P}(X \times Y)$ .

**Definition 6.2.5.** Ist  $X$  eine Menge und  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  ein Mengerring und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  eine Abbildung, die unsere Bedingung

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

für abzählbare Familien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{A}$  erfüllt wann immer die Vereinigung der  $A_n$  wieder zu  $\mathcal{A}$  gehört, so nennen wir die Abbildung  $\mu$  ein **Prämaß** auf dem Mengerring  $\mathcal{A}$  und sagen wieder,  $\mu$  sei  **$\sigma$ -additiv**. Wieder ist unsere auch äquivalent zu den beiden Forderungen  $\mu(\emptyset) = 0$  und  $\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen aus unserem Mengerring, bei der die Vereinigung wieder zu unserem Mengerring gehört.

**Lemma 6.2.6.** *Auf dem Mengerring  $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  aller endlichen Vereinigungen von beschränkten Intervallen gibt es genau ein Prämaß  $\lambda$  derart, daß für jedes nichtleere beschränkte Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  gilt*

$$\lambda(I) = \sup I - \inf I$$

*Beweis.* Gegeben  $A \in \mathcal{I}$  betrachten wir die bis auf Reihenfolge eindeutige Darstellung  $A = J_1 \cup \dots \cup J_r$  von  $A$  als disjunkte Vereinigung der maximalen darin enthaltenen Intervalle und müssen setzen

$$\lambda(A) = \lambda(J_1) + \dots + \lambda(J_r)$$

Das zeigt die Eindeutigkeit. Es gilt damit nur noch zu zeigen, daß für  $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  eine disjunkte Vereinigung mit  $A, A_n \in \mathcal{I}$  gilt

$$\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$$

Offensichtlich gilt schon einmal  $\lambda(B \cup C) = \lambda(B) + \lambda(C)$  für  $B, C \in \mathcal{I}$  disjunkt. Wir setzen nun  $B_n = A \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ . Natürlich sind dann auch die  $B_n$  endliche Vereinigungen beschränkter Intervalle, es gilt  $B_0 \supset B_1 \supset \dots$  und  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$ , und es reicht, wenn wir zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n) = 0$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir finden für jedes  $n$  eine kompakte Menge  $C_n \subset B_n$ , die endliche Vereinigungen kompakter Intervalle ist und für die gilt

$$\lambda(B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} \varepsilon$$

Jetzt betrachten wir  $D_n = C_0 \cap \dots \cap C_n$ . Auch die  $D_n$  sind endliche Vereinigungen kompakter Intervalle, es gilt  $D_n \subset C_n \subset B_n$ , und zusätzlich haben wir  $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \dots$ . Wir zeigen nun  $\lambda(B_n \setminus D_n) \leq 2\varepsilon$  für alle  $n$ . In der Tat gilt ja

$$B_n \setminus D_n = \bigcup_{k=0}^n B_n \setminus C_k \subset \bigcup_{k=0}^n B_k \setminus C_k$$

und folglich

$$\lambda(B_n \setminus D_n) \leq \sum_{k=0}^n \lambda(B_k \setminus C_k) \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Nun folgt aber aus  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$  und der Kompaktheit der  $D_n$  und [II.6.7.15](#) schon  $D_N = \emptyset$  für ein  $N$ , und damit ergibt sich  $\lambda(B_n) \leq 2\varepsilon$  für  $n \geq N$ .  $\square$

*Ergänzung 6.2.7.* Ist allgemeiner  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und **linksseitig stetig**, d.h.  $\lim_{y \nearrow x} f(y) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so zeigt man ähnlich, daß es auf dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen beschränkter Intervalle der Gestalt  $[a, b]$  genau ein Prämaß  $df$  gibt mit  $(df)([a, b]) = f(b) - f(a)$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Man muß dann nur ein wenig feiner argumentieren,  $C_n$  aus dem besagten Mengenring wählen mit  $\bar{C}_n \subset B_n$ , und  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$  aus  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{C}_n = \emptyset$  folgern.

*Ergänzung 6.2.8.* Ist noch allgemeiner  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und linksseitig stetig in jeder Variablen, so zeigt man in derselben Weise, daß es auf dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen beschränkter Quader der Gestalt  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  genau ein Prämaß  $\mu_f$  gibt derart, daß für  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a_i < b_i$  der Wert  $\mu_f([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n])$  auf dem Quader die "alternierende Summe der Werte von  $f$  auf den Ecken" ist. Die Vorzeichen sind hierbei in der Weise zu wählen, daß für keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken dasselbe Vorzeichen gewählt wird und daß der Wert an der Ecke  $(b_1, \dots, b_n)$  mit positivem Vorzeichen eingeht.

**Definition 6.2.9.** Eine Teilmenge eines Raums mit Prämaß heißt  **$\sigma$ -endlich** genau dann, wenn sie sich durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus dem entsprechenden Mengenring überdecken läßt. Ein Prämaß heißt  **$\sigma$ -endlich** genau dann, wenn der ganze Raum in diesem Sinne  $\sigma$ -endlich ist.

**Satz 6.2.10 (Maßfortsetzungssatz von Caratheodory).** Gegeben eine Menge  $X$ , ein Mengenring  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  und ein  $\sigma$ -endliches Prämaß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  existiert genau eine Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{A}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{A})$ .

6.2.11. Sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit von Maßfortsetzungen unter den gegebenen Voraussetzungen sind zentrale Aussagen der Maßtheorie. Der Beweis des Maßfortsetzungssatzes wird nach einigen Vorbereitungen direkt vor Übung ?? geführt werden.

6.2.12. In 6.2.6 haben wir auf dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen beschränkter reeller Intervalle ein translationsinvariantes Prämaß konstruiert, das dem abgeschlossenen Einheitsintervall den Wert Eins zuweist. Mit dem Satz über Maßfortsetzungen 6.2.10 folgt sofort die in 6.1.20 behauptete Existenz eines normierten translationsinvarianten topologischen Maßes auf der reellen Zahlengeraden. Den Nachweis der Eindeutigkeit in 6.1.20 überlassen wir dem Leser als Übung 6.2.27.

*Übung 6.2.13.* Man zeige, daß zwei Maße auf ein- und derselben  $\sigma$ -Algebra übereinstimmen, sobald sie auf einem schnittstabilen Erzeugendensystem unserer  $\sigma$ -Algebra übereinstimmen, das darüber hinaus  $\sigma$ -**endlich** ist in dem Sinne, daß die ganze Menge durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus besagtem Erzeugendensystem überdeckt werden kann. Hierbei heißt ein Mengensystem  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$  **schnittstabil** genau dann, wenn gilt  $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$ .

*Ergänzung 6.2.14.* Ist unser Prämaß nicht  $\sigma$ -endlich, so besitzt es zwar stets die gleich in 6.2.15 konstruierte **kanonische Fortsetzung** zu einem Maß auf  $\sigma(\mathcal{A})$ , aber möglicherweise ist das nicht seine einzige Fortsetzung auf diese  $\sigma$ -Algebra. Als erstes Beispiel betrachte man in einer nichtleeren Menge den Mengenring, der nur aus der leeren Menge besteht. Als etwas feineres Beispiel betrachte man den Mengenring aller endlichen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  und darauf das Prämaß, das jeder Menge die Null zuordnet. Die von unserem Mengenring erzeugte  $\sigma$ -Algebra besteht aus allen Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die entweder abzählbar sind oder abzählbares Komplement haben, und die möglichen Fortsetzungen unseres Prämaßes sind alle die Abbildungen, die allen abzählbaren Mengen die Null zuordnen und allen Komplementen abzählbarer Mengen ein beliebiges aber festes Element von  $[0, \infty]$ . Die kanonische Fortsetzung kann im übrigen auch charakterisiert werden als die eindeutig bestimmte Fortsetzung, die allen den Mengen von  $\sigma(\mathcal{A})$  das Maß Unendlich zuordnet, die nicht in einer abzählbaren Vereinigung von Mengen endlichen Maßes aus  $\mathcal{A}$  enthalten sind, vergleiche VII.4.5.2.

**Proposition 6.2.15 (Konstruktion von Maßfortsetzungen).** *Gegeben eine Menge  $X$ , ein Mengenring  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  und ein Prämaß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  erhält man eine Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{A}$  erzeugten*

$\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{A})$ , indem man für alle  $M \in \sigma(\mathcal{A})$  setzt

$$\mu(M) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } M \subset \bigcup A_n \right\}$$

6.2.16. Ich erinnere hier an unsere Konvention, nach der das Infimum der leeren Menge als  $\infty$  zu verstehen ist. Der Beweis dieser Proposition wird im Anschluß an den Beweis des Zerlegerlemmas 6.2.26 gegeben.

*Ergänzung* 6.2.17. Zusammen mit 6.2.7 zeigt unser Satz über Maßfortsetzungen sogar, daß es für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau ein topologisches Maß  $df$  auf  $\mathbb{R}$  gibt mit  $(df)([a, b)) = f(b) - f(a)$  für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Unser Lebesguemaß kann man in dieser Notation auch schreiben als das Maß  $dx$ , mit  $x$  als alternativer Bezeichnung für die Identität  $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$  auf der reellen Zahlengeraden. Mehr dazu in 6.4.23

*Ergänzende Übung* 6.2.18 (**Maße und ihre Verteilungsfunktionen**). Die Zuordnung  $f \mapsto df$  aus 6.2.17 liefert eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(0) = 0$  und der Menge aller Borelmaße auf  $\mathbb{R}$ . Hinweis: Die Umkehrabbildung kann explizit angegeben werden als  $\mu \mapsto f_{\mu}$  mit  $f_{\mu}(x) = \mu[0, x)$  falls  $x \geq 0$  und  $f_{\mu}(x) = \mu[x, 0)$  falls  $x \leq 0$ .

*Ergänzung* 6.2.19. Die Zuordnung  $f \mapsto \mu_f$  aus 6.2.8 zusammen mit dem Satz über Maßfortsetzungen liefert eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller in jeder Variablen monoton wachsenden und linksseitig stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf allen Koordinatenhyperebenen verschwinden, und der Menge aller Borelmaße auf  $\mathbb{R}^n$ .

*Ergänzung* 6.2.20. Im Fall von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  mit seiner  $\sigma$ -Algebra der topologisch meßbaren Mengen ist es üblich, eine Variante der Konstruktion aus Übung 6.2.18 zu betrachten und die **Verteilungsfunktion** des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  zu definieren durch die Vorschrift  $V_{\mu}(x) = \mu(-\infty, x)$  und allgemeiner  $V_{\mu}(x_1, \dots, x_n) = \mu((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n))$  für Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{R}^n$ . Damit erhalten wir dann eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{R}$  und der Menge aller linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Infimum Null und Supremum Eins, in Formeln  $\inf(V(\mathbb{R})) = 0$  und  $\sup(V(\mathbb{R})) = 1$ , oder allgemeiner zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{R}^n$  und der Menge aller in jeder Variablen linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Infimum Null und Supremum Eins. Andere Quellen erklären die Verteilungsfunktion abweichend

als  $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$  und erhalten dann analog eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{R}$  und der Menge aller *rechtsseitig* stetigen monoton wachsenden Funktionen  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Infimum Null und Supremum Eins.

**Definition 6.2.21.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$  eine  $\sigma$ -Algebra. Ein **äußeres Maß** auf  $\mathcal{N}$  ist eine Abbildung  $\mu^* : \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty]$  derart, daß aus  $Y \subset Z$  folgt  $\mu^*(Y) \leq \mu^*(Z)$  und daß für jede abzählbare Familie  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Mengen aus unserer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}$  gilt

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Y_n)$$

Die letzte Bedingung nennen wir die  **$\sigma$ -Subadditivität**. Für  $N = \emptyset$  spezialisiert sie zur Bedingung  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

**Lemma 6.2.22.** Gegeben  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  ein Mengensystem und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  eine Abbildung erhalten wir ein äußeres Maß auf  $\mathcal{P}(X)$  durch die Vorschrift

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } Y \subset \bigcup A_n \right\}$$

*Beweis.* Es ist klar, daß  $\mu^*$  die erste Eigenschaft eines äußeren Maßes erfüllt. Es bleibt, die  $\sigma$ -Subadditivität zu zeigen. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir finden für jedes  $n$  eine Folge  $A_n^i$  in  $\mathcal{A}$  mit  $Y_n \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_n^i$  und

$$\mu^*(Y_n) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n^i) \leq \mu^*(Y_n) + \varepsilon/2^n$$

Dann gilt aber  $\bigcup Y_n \subset \bigcup_{i,n} A_n^i$  und aus der Definition von  $\mu^*$  folgern wir

$$\mu^* \left( \bigcup Y_n \right) \leq \sum_{i,n} \mu(A_n^i) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(Y_n) + 2\varepsilon$$

Da das nun gilt für alle  $\varepsilon > 0$ , erfüllt  $\mu^*$  auch die zweite Bedingung an ein äußeres Maß.  $\square$

**Lemma 6.2.23.** Gegeben  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  ein Mengenring und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein Prämaß stimmt das in 6.2.22 konstruierte äußere Maß  $\mu^*$  auf  $\mathcal{A}$  mit  $\mu$  überein, in Formeln  $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$ .

*Beweis.* Die Ungleichung  $\mu^*(A) \leq \mu(A)$  ist offensichtlich. Wir müssen also nur noch  $\mu(A) \leq \mu^*(A)$  zeigen. Dazu reicht es, wenn wir zeigen  $\mu(A) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  finden wir aber eine Folge  $A_n$  in  $\mathcal{A}$  mit  $A \subset \bigcup A_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$ , und indem wir  $A_n$  verkleinern zu  $A_n \setminus (A_{n-1} \cup \dots \cup A_0)$  dürfen wir hier sogar die Fогenglieder paarweise disjunkt annehmen. Wegen  $A = \bigsqcup (A \cap A_n)$  erhalten wir dann wie gewünscht

$$\mu(A) = \sum \mu(A \cap A_n) \leq \sum \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \quad \square$$

6.2.24. Gegeben  $A \subset X$  verwenden wir im folgenden für sein Komplement die Abkürzung  $X \setminus A = A^c$

**Definition 6.2.25.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $\mathcal{P}(X)$ . Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt  $\mu^*$ -**meßbar** oder auch ein **Zerleger** genau dann, wenn für jede Teilmenge  $Y \subset X$  gilt

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

**Lemma 6.2.26 (Zerleger-Lemma).** Ist  $X$  eine Menge und  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  von  $X$ , so ist das System  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  der  $\mu^*$ -meßbaren Mengen eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu^*$  ist ein Maß auf  $\mathcal{M}$ .

*Beweis.* Zunächst einmal zeigen wir, daß  $\mathcal{M}$  eine Mengenalgebra ist. Sicher gilt  $\emptyset \in \mathcal{M}$ , und aus  $A \in \mathcal{M}$  folgt  $A^c \in \mathcal{M}$ . Wir müssen nur noch zeigen, daß aus  $A, B \in \mathcal{M}$  folgt  $A \cap B \in \mathcal{M}$ . Sei dazu  $Y \subset X$  beliebig. Es gilt, für  $\mu^*$ -meßbare  $A$  und  $B$  zu zeigen

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A \cap B) + \mu^*(Y \cap (A \cap B)^c)$$

Da  $A$  und  $B$  schon  $\mu^*$ -meßbar sind, finden wir aber in der Tat

$$\begin{aligned} \mu^*(Y \cap (A \cap B)^c) &= \mu^*(Y \cap (A \cap B)^c \cap A) + \mu^*(Y \cap (A \cap B)^c \cap A^c) \\ &= \mu^*(Y \cap B^c \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \\ &= \mu^*(Y \cap A) - \mu^*(Y \cap A \cap B) + \mu^*(Y \cap A^c) \\ &= \mu^*(Y) - \mu^*(Y \cap (A \cap B)) \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{M}$  schon mal eine Mengenalgebra. Sind  $A, B \in \mathcal{M}$  disjunkt, so gilt  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ , ja es gilt sogar

$$\mu^*(Y \cap (A \cup B)) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap B)$$

für beliebiges  $Y \subset X$ , denn unter der Voraussetzung  $A \cap B = \emptyset$  können wir schreiben  $Y \cap A = Y \cap (A \cup B) \cap A$  und  $Y \cap B = Y \cap (A \cup B) \cap A^c$ . Induktiv folgt für  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{M}$  paarweise disjunkt und  $Y \subset X$  beliebig

$$\mu^*(Y \cap (A_0 \cup \dots \cup A_n)) = \sum_{i=0}^n \mu^*(Y \cap A_i)$$

Haben wir also in  $\mathcal{M}$  eine Folge  $(A_i)$  von paarweise disjunkten Teilmengen mit Vereinigung  $A$  gegeben, so gilt für jede Teilmenge  $Y \subset X$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mu^*(Y) &= \mu^*(Y \cap (A_0 \cup \dots \cup A_n)) + \mu^*(Y \cap (A_0 \cup \dots \cup A_n)^c) \\ &\geq \sum_{i=0}^n \mu^*(Y \cap A_i) + \mu^*(Y \cap A^c)\end{aligned}$$

und im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich mit der  $\sigma$ -Subadditivität unseres äußeren Maßes

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

Die andere Ungleichung gilt eh, nach unseren Annahmen an ein äußeres Maß, also haben wir Gleichheit und  $A$  ist auch  $\mu^*$ -meßbar. Nach Übung 6.1.30 ist damit  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra, und für eine Folge  $A_k$  von paarweise disjunkten Teilmengen aus  $\mathcal{M}$  mit Vereinigungsmenge  $A$  folgt aus

$$\sum_{k=0}^n \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \mu^*(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu^*$ . Also ist  $\mu^*$  in der Tat ein Maß auf  $\mathcal{M}$ .  $\square$

*Beweis der Proposition 6.2.15.* Seien  $\mathcal{A}$  ein Mengenring,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein Prämaß auf  $\mathcal{A}$  und  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  das in 6.2.23 konstruierte äußere Maß. Um die Proposition aus dem Zerlegerlemma 6.2.26 abzuleiten, müssen wir nur noch zeigen, daß  $\mathcal{A}$  aus  $\mu^*$ -meßbaren Mengen besteht. Für jedes äußere Maß auf  $\mathcal{P}(X)$  und beliebige  $A, Y \subset X$  gilt per definitionem

$$\mu^*(Y) \leq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

Wir müssen für  $A \in \mathcal{A}$  und beliebiges  $Y \subset X$  auch die andere Ungleichung zeigen. Das ist nur im Fall  $\mu^*(Y) < \infty$  problematisch. Unter dieser Voraussetzung finden wir aber für beliebiges  $\varepsilon > 0$  eine Folge  $(B_n)$  in  $\mathcal{A}$  mit  $Y \subset \bigcup_n B_n$  und

$$\begin{aligned}\mu^*(Y) + \varepsilon &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)\end{aligned}$$

Da das für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt die andere Ungleichung

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

und damit die Gleichheit. Also besteht  $\mathcal{A}$  in der Tat aus  $\mu^*$ -meßbaren Mengen und die Proposition 6.2.15 ist bewiesen.  $\square$

*Beweis des Maßfortsetzungssatzes.* Die Existenz einer Maßfortsetzung haben wir bereits als Proposition 6.2.15 gezeigt und nur die Eindeutigkeit ist noch zu zeigen. Sei dazu  $\nu$  eine zweite Fortsetzung. Es gilt zu zeigen  $\mu(C) = \nu(C)$  für alle  $C \in \mathcal{M}$ . Aus der Konstruktion von  $\mu$  in 6.2.15 folgt bereits  $\nu(C) \leq \mu(C)$ . Da wir unser Prämaß  $\sigma$ -endlich angenommen hatten, gibt es jedoch eine aufsteigende Folge  $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$  in  $\mathcal{A}$  mit  $\bigcup A_n \supset C$  und  $\mu(A_n) < \infty \quad \forall n$ . Wir müssen nur für alle  $n$  die Gleichungen

$$\mu(C \cap A_n) = \nu(C \cap A_n)$$

zeigen, dann ergibt sich  $\mu(C) = \nu(C)$  im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ . Wie bereits erwähnt gilt jedoch  $\nu(C \cap A_n) \leq \mu(C \cap A_n)$  und ganz genauso auch  $\nu(C^c \cap A_n) \leq \mu(C^c \cap A_n)$ , und da die Summe dieser Ungleichungen die Gleichung  $\nu(A_n) = \mu(A_n)$  liefert, müssen unsere Ungleichungen beide schon Gleichungen gewesen sein.  $\square$

*Übung 6.2.27.* Zeigen Sie, dass es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß  $\lambda$  auf  $\mathbb{R}$  geben kann. Hinweis: Zeigen Sie zunächst  $\lambda(\{a\}) = 0$ , für alle  $a \in \mathbb{R}$ , und anschließend, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\lambda([0, 1/n]) = 1/n$ . Erweitern Sie als nächstes die Aussage auf Intervalle mit rationalen Endpunkten und schließlich auf beliebige Intervalle. Wenden Sie dann den Satz über Maßfortsetzungen an.

*Übung 6.2.28.* Zeigen Sie, dass es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß  $\lambda$  auf  $\mathbb{R}^n$  geben kann. Hinweis: 6.2.27.

*Ergänzende Übung 6.2.29 (Benford's Gesetz).* Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall  $I = [a, b]$  genau ein topologisches Maß  $\mu$  gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das "partiell translationsinvariant" ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge  $A \subset I$  und jedes  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a + A \subset I$  gilt  $\mu(A) = \mu(a + A)$ . Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall  $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_{>0}$  genau ein topologisches Maß  $\mu$  gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das "partiell skaleninvariant" ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge  $A \subset I$  und jedes  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $cA \subset I$  gilt  $\mu(A) = \mu(cA)$ . Zeigen Sie weiter, daß dieses Maß, wenn unser Intervall nicht nur aus einem Punkt besteht, von der Gestalt  $ax^{-1} dx$  ist mit  $a > 0$ . Gegeben ein derartiges Maß und  $I$  so groß, daß gilt  $\beta > 10^n \alpha$  für  $n \geq 1$ , wird dann für jede Ziffer  $i \in \{1, \dots, 9\}$  das Maß der Menge  $M_i$  aller  $x \in I$ , die als Dezimalbruch mit erster von Null verschiedener Ziffer  $i$  geschrieben werden können, von  $(\log(i+1) - \log(i))/\log(10)$  um weniger als  $1/(n+1)$  abweichen. Diese Verteilung der Anfangsziffern "zufälliger" Zahlenreihen tritt in der Wirklichkeit häufig auf und heißt **Benford's Gesetz**. Benford fand es beim Nachdenken über die Tatsache, daß bei Büchern

mit Logarithmentafeln die Seiten mit den Logarithmen zu kleinen Anfangsziffern am Rand viel schwärzer sind als die Seiten mit den Logarithmen zu großen Anfangsziffern. Benford's Gesetz wird unter anderem eingesetzt, um Steuerbetrug zu entlarven, da von Menschen willkürlich hingeschriebene Zahlenreihen typischerweise eine andere Verteilung von Anfangsziffern haben.

*Ergänzende Übung 6.2.30 (Gleichverteilung im Folgenraum).* Man zeige: Auf dem Raum  $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$  aller Folgen in der zweielementigen Menge  $\{W, Z\}$  mit der in II.6.7.17 erklärten Metrik gibt es genau ein Borelmaß, das für jeden  $n$ -gliedrigen Folgenanfang der Menge aller Folgen mit diesem Anfang das Maß  $2^{-n}$  zuordnet. Man zeige weiter, daß die durch die dyadische Entwicklung gegebene Surjektion  $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\}) \rightarrow [0, 1]$  stetig ist und daß hier das Maß des Urbilds einer Borelmenge gerade das Lebesguemaß der ursprünglichen Menge ist. Hinweis: Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums " $n$ -vernünftig" nennen genau dann, wenn sie mit einer Folge auch alle anderen Folgen enthält, die sich von dieser frühestens im  $n$ -ten Folgenglied unterscheiden. Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums "vernünftig" nennen genau dann, wenn sie  $n$ -vernünftig ist für mindestens ein  $n$ . Man mag von der Erkenntnis ausgehen, daß die vernünftigen Teilmengen einen Mengenring bilden, und verwenden, daß alle vernünftigen Teilmengen sowohl offen als auch abgeschlossen und damit nach II.6.7.17 kompakt sind. Jede Überdeckung einer vernünftigen Teilmenge durch vernünftige Teilmengen besitzt folglich eine endliche Teilüberdeckung.

*Ergänzende Übung 6.2.31.* Wir betrachten die **Cantor-Menge**  $C$ , die aus dem Einheitsintervall  $C_0 = [0, 1]$  entsteht, indem wir das mittlere Drittel  $(1/3, 2/3)$  herausnehmen, dann aus den beiden so entstehenden kompakten Intervallen wieder jeweils das offene mittlere Drittel und so weiter, und schließlich als  $C$  den Schnitt über alle Mengen  $C_n$  nehmen, die wir in dieser Weise in  $n$  Schritten erhalten. Man zeige, daß die Cantor-Menge das Lebesgue-Maß  $\lambda(C) = 0$  Null hat und überabzählbar ist. Hinweis: Man kann die Cantor-Menge auch beschreiben als die Menge aller Zahlen, die sich in der Basis Drei mit einer Null vor dem Komma und ohne die Ziffer Eins ausdrücken lassen, in Formeln

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

*Ergänzende Übung 6.2.32.* Die Menge aller reellen Zahlen, die sich darstellen lassen durch einen unendlichen Dezimalbruch, in dem die Ziffer 6 nicht vorkommt, bilden eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  vom Lebesgue-Maß Null.

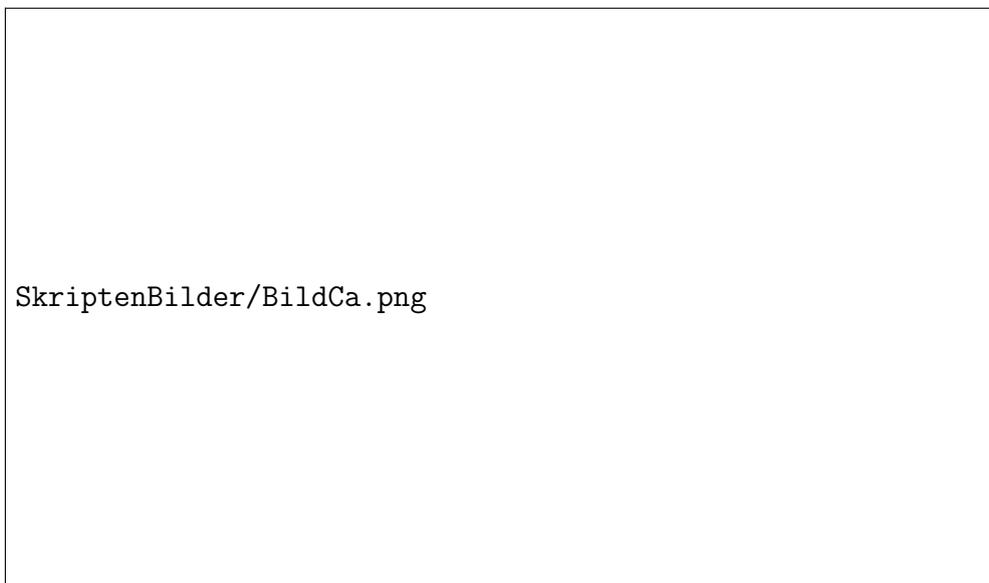


Illustration zur Cantor-Menge

**Definition 6.2.33.** Eine Teilmenge eines Maßraums, die in einer meßbaren Menge vom Maß Null enthalten ist, heißt eine **Nullmenge** unseres Maßraums. Ein Maßraum  $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$  heißt **vollständig** genau dann, wenn jede Nullmenge bereits meßbar ist, d.h. zu  $\mathcal{M}$  gehört.

**Proposition 6.2.34 (Vervollständigung von Maßräumen).** *Gegeben ein Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  gibt es genau eine Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß  $\mu^*$  auf der von  $\mathcal{M}$  und den  $\mu$ -Nullmengen erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}^*$ , und der so entstehende Maßraum  $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$  ist vollständig.*

*Beweis.* Erweitern wir  $\mu$  zu einem äußeren Maß  $\mu^*$  auf  $\mathcal{P}(X)$  wie im Lemma 6.2.23 und wenden auf dieses äußere Maß das Zerleger-Lemma 6.2.26 an, so folgt, daß alle  $\mu$ -Nullmengen bereits  $\mu^*$ -meßbar sind und daß mithin  $\mu^*$  ein Maß ist auf  $\mathcal{M}^*$ . Das zeigt die Existenz von  $\mu^*$ . Für die Eindeutigkeit prüft man, daß  $\mathcal{M}^*$  genau aus allen Teilmengen  $E \subset X$  besteht derart, daß es  $A, B \in \mathcal{M}$  gibt mit  $A \subset E \subset B$  und  $\mu(B \setminus A) = 0$ . In der Tat bilden nämlich alle diese  $E$  eine  $\sigma$ -Algebra. Jedes erweiterte Maß  $\mu^*$  nimmt aber auf einer solchen Teilmenge  $E$  notwendig den Wert  $\mu^*(E) = \mu(A)$  an.  $\square$

*Übung 6.2.35.* Man arbeite den Schluß des vorhergehenden Beweises aus und zeige, daß gegeben ein Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  das Mengensystem aller  $E \subset X$  derart, daß es  $A, B \in \mathcal{M}$  gibt mit  $A \subset E \subset B$  und  $\mu(B \setminus A) = 0$ , eine  $\sigma$ -Algebra ist.

6.2.36. Der Maßraum  $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$  heißt die **Vervollständigung** des Maßraums  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Die bezüglich der Vervollständigung des Lebesgue-Maßes meßbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  nennt man die **Lebesgue-meßbaren** Teilmengen oder kurz **Lebesgue-Mengen**. Es ist nicht ganz einfach, eine Lebesgue-Menge in  $\mathbb{R}$  explizit anzugeben, die nicht topologisch meßbar ist. Genauer gesagt wüßte ich selber nicht, wie ich das machen sollte, und müßte einen Logiker um Hilfe bitten. Man kann jedoch zeigen, daß es im Sinne der Mengenlehre "mehr" Lebesgue-Mengen in  $\mathbb{R}$  gibt als topologisch meßbare Teilmengen, vergleiche etwa ??.

*Übung 6.2.37.* Man zeige: Eine Teilmenge der reellen Zahlengeraden ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesgue-Maß genau dann, wenn sie sich für jedes  $\varepsilon > 0$  durch eine Folge von kompakten Intervallen  $[a_n, b_n]$  überdecken läßt derart, daß gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$ . Hinweis: 6.2.10 und 6.2.15.

## 6.3 Meßbare Abbildungen

6.3.1. Bis jetzt haben wir uns nur mit dem Messen von Mengen beschäftigt. Wir haben gesehen, daß das Messen ganz beliebiger Teilmengen der reellen

Zahlengerade problematisch ist, konnten jedoch gewisse Mengen als meßbar auszeichnen und solchen Mengen sinnvoll ein Maß zuordnen. Nun wollen wir reellwertigen Funktionen auf Maßräumen ein Integral zuordnen. Wieder ist das für ganz beliebige Funktionen problematisch, aber wieder können wir gewisse Funktionen als “meßbar” auszeichnen und zumindest allen nichtnegativen meßbaren Funktionen sinnvoll ein Integral zuordnen. In einem zweiten Schritt geben wir dann auch eine Definition für das Integral beliebiger meßbarer reellwertiger Funktionen mit der Eigenschaft, daß ihr Betrag ein endliches Integral hat.

**Definition 6.3.2.** Seien  $(X, \mathcal{M})$  und  $(Y, \mathcal{N})$  Meßräume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **meßbar** genau dann, wenn das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist, in Formeln  $V \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$ .

6.3.3. Die folgende Übung zeigt, daß nicht alle Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar sind. Ganz im Gegenteil sind die wenigsten Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar, obwohl es nicht ganz leicht ist, Beispiele anzugeben. Die Lage ist ähnlich wie bei den transzendenten Zahlen: Obwohl alle reellen Zahlen bis auf abzählbar viele Ausnahmen transzendent sind, ist es doch vergleichsweise schwierig, explizite Beispiele für transzendente Zahlen anzugeben.

*Übung 6.3.4.* Man gebe eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, die nicht meßbar ist in Bezug auf die Borel’schen  $\sigma$ -Algebren. Hinweis: Man beachte 6.1.28 und seinen Beweis.

*Ergänzung 6.3.5.* Eine meßbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Meßraum heißt auch eine **Zufallsvariable** auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum mit Werten in besagtem Meßraum oder auch ein **zufälliges Element** von besagtem Meßraum.

**Lemma 6.3.6.** *Jede Verknüpfung meßbarer Abbildungen ist meßbar.*

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus der Definition mit demselben Argument wie wir es in II.6.5.20 für die Stetigkeit der Verknüpfung gesehen hatten.  $\square$

6.3.7. Wenn nichts anderes gesagt ist, denken wir uns einen metrischen oder allgemeiner topologischen Raum stets mit der durch die Borel’sche  $\sigma$ -Algebra gegebene Struktur eines Meßraums versehen. Im Fall des topologischen Raums  $\mathbb{R}$  kann die Borel’sche  $\sigma$ -Algebra auch beschrieben werden als die von allen Intervallen erzeugte  $\sigma$ -Algebra, und wer mag, kann im folgenden auch diese Beschreibung als Definition nehmen.

**Proposition 6.3.8.** *Alle stetigen Abbildungen sind meßbar.*

*Beweis.* Da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen nach II.6.5.18 stets offen sind, folgt das unmittelbar aus dem anschließenden Lemma 6.3.9.  $\square$

**Lemma 6.3.9.** *Seien  $(X, \mathcal{M})$  und  $(Y, \mathcal{N})$  zwei Meßräume und sei die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}$  erzeugt von einem Teilsystem  $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$ . Genau dann ist  $f : X \rightarrow Y$  meßbar, wenn gilt*

$$V \in \mathcal{S} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$$

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß für eine beliebige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  die Menge  $f_*\mathcal{M} = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{M}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Das ist jedoch klar. Im Übrigen heißt die  $\sigma$ -Algebra  $f_*\mathcal{M}$  das **Bild unter  $f$**  der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$ .  $\square$

*Übung 6.3.10.* Alle monotonen Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sind meßbar.

6.3.11. Gegeben ein Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  betrachten wir auf jeder Teilmenge  $A \subset X$  die **induzierte  $\sigma$ -Algebra**  $\mathcal{M}|_A$ , die gerade aus allen Schnitten mit  $A$  von meßbaren Mengen in  $X$  besteht,  $\mathcal{M}|_A = \{Z \cap A \mid Z \in \mathcal{M}\}$ . Wir machen unsere erweiterten reellen Zahlen  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  zu einem Meßraum, indem wir darauf die von allen Intervallen erzeugte  $\sigma$ -Algebra betrachten. Für die natürliche Topologie auf  $\overline{\mathbb{R}}$  im Sinne von II.6.5.9 ist das genau die  $\sigma$ -Algebra der topologisch meßbaren Mengen.

*Ergänzende Übung 6.3.12.* Gegeben eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$  erhalten wir eine  $\sigma$ -Algebra  $f^*\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$  durch die Vorschrift  $f^*\mathcal{N} = \{f^{-1}(N) \mid N \in \mathcal{N}\}$ . Wir nennen sie das **Urbild unter  $f$**  der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}$ . Zum Beispiel ist unsere induzierte  $\sigma$ -Algebra aus 6.3.11 das Urbild der ursprünglichen  $\sigma$ -Algebra unter der Einbettung.

*Ergänzung 6.3.13.* Ein topologischer Raum heißt **separabel** oder gleichbedeutend **zweitabzählbar** genau dann, wenn es darin ein abzählbares System von offenen Teilmengen gibt derart, daß jede offene Menge als Vereinigung eines Teilsystems dieses abzählbaren Systems geschrieben werden kann. Ein metrischer Raum ist separabel in diesem Sinne genau dann, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. In der Tat können wir aus einem abzählbaren System von offenen Teilmengen wie eben leicht eine abzählbare dichte Teilmenge erhalten, indem wir aus jeder nichtleeren Teilmenge unseres Systems einen Punkt auswählen. Umgekehrt erhalten wir aus einer abzählbaren dichten Teilmenge ein abzählbares System offener Mengen mit der gewünschten Eigenschaft als das System aller offenen Bälle mit rationalen Radien um besagte Punkte.

*Ergänzung 6.3.14.* Manche Autoren, so etwa Jameson oder Rudin, verwenden eine andere Terminologie, die auf Fréchet zurückzugehen scheint und

nach der ein topologischer Raum “separabel” heißt genau dann, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Bourbaki führt diesen Begriff nur für metrische Räume ein. In der Bedeutung dieses Textes wird der Begriff “separabel” auch im Buch von Halmos zur Maßtheorie verwendet.

*Ergänzende Übung 6.3.15.* Jeder kompakte metrische Raum ist separabel.

**Proposition 6.3.16 (Komponentenregel).** *Seien  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum,  $Y, Z$  separable metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow Z$  Abbildungen. So ist  $(f, g) : X \rightarrow Y \times Z$  meßbar genau dann, wenn  $f$  und  $g$  meßbar sind.*

*Ergänzung 6.3.17.* Leser, denen die Produkt-Topologie vertraut ist, werden unschwer erkennen, daß der Satz mit fast demselben Beweis allgemeiner für beliebige separable topologische Räume  $Y$  und  $Z$  gilt.

*Beweis.* Mit  $(f, g)$  sind natürlich auch  $f = \text{pr}_1 \circ (f, g)$  und  $g = \text{pr}_2 \circ (f, g)$  meßbar. Sind andererseits  $f$  und  $g$  meßbar, so gilt  $f^{-1} B(y; \delta) \in \mathcal{M}$  und  $g^{-1} B(z; \delta) \in \mathcal{M}$  für alle  $y \in Y, z \in Z, \delta > 0$ , und daraus folgt

$$(f, g)^{-1} B((y, z); \delta) = f^{-1} B(y; \delta) \cap g^{-1} B(z; \delta) \in \mathcal{M}$$

Mit 6.1.31 folgt aber, daß die offenen Bälle  $B((y, z); \delta)$  in  $Y \times Z$  schon die  $\sigma$ -Algebra der topologisch meßbaren Mengen in  $Y \times Z$  erzeugen. Damit folgt die Proposition aus 6.3.9.  $\square$

**Korollar 6.3.18.** *Die Summe und das Produkt reellwertiger meßbarer Funktionen sind wieder meßbar.*

*Beweis.* Sei  $X$  ein Meßraum und seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  meßbare Funktionen. Nach Proposition 6.3.16 ist dann  $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  meßbar, und damit auch die Verknüpfung von  $(f, g)$  mit der stetigen und daher meßbaren Addition bzw. Multiplikation  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 6.3.19 (Meßbarkeit von Grenzwerten von Funktionenfolgen).** *Sei  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum.*

1. *Eine Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist genau dann meßbar, wenn für jedes  $a \in \mathbb{R}$  die Menge  $\{x \mid f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty]$  meßbar ist in  $X$ .*
2. *Für jede Folge meßbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sind auch das Supremum und das Infimum  $s, i : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, s(x) = \sup f_n(x)$  bzw.  $i(x) = \inf f_n(x)$  meßbar.*
3. *Konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  punktweise gegen  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , so ist auch  $f$  meßbar.*

*Beweis.* 1. Die Intervalle der Form  $(a, \infty]$  erzeugen die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen in  $\overline{\mathbb{R}}$ .

2. Es gilt  $s^{-1}(a, \infty] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(a, \infty]$  und  $i^{-1}[-\infty, a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}[-\infty, a)$ .

3. Nach 2 sind auch die Funktionen  $s_N(x) = \sup_{n \geq N} f_n(x)$  meßbar, und dann auch die Funktion  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $g(x) = \inf_N s_N(x)$ . Diese Funktion bezeichnet man auch mit  $g = \limsup f_n$ . Falls die  $f_n$  punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergieren, so gilt insbesondere  $f = \limsup f_n$ , mithin ist dann auch  $f$  meßbar.  $\square$

**Lemma 6.3.20.** *Ist  $X$  ein Meßraum und  $Y$  ein metrischer Raum und konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow Y$  punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f : X \rightarrow Y$ , so ist auch die Grenzfunktion  $f$  meßbar.*

6.3.21. Wir können den dritten Teil von Satz 6.3.19 auch als Spezialfall dieses Lemmas erhalten, wenn wir etwa beachten, daß unsere Topologie auf  $\overline{\mathbb{R}}$  auch als eine metrische Topologie erhalten werden kann. Das Lemma gilt im übrigen mit demselben Beweis für einen beliebigen Hausdorffraum mit der Eigenschaft, daß jede seiner abgeschlossenen Mengen als der Schnitt einer abzählbaren Familie offener Mengen geschrieben werden kann.

*Beweis.* Nach 6.3.9 reicht es, für alle abgeschlossenen Teilmengen  $A \subseteq Y$  zu zeigen, daß ihr Urbild unter  $f$  meßbar ist. Nun gibt es jedoch eine absteigende Folge offener Mengen  $U_0 \supset U_1 \supset \dots$  mit Schnitt  $A$ . Dann ist  $f(x) \in A$  gleichbedeutend dazu, daß es für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $N = N(x, i)$  gibt mit  $f_n(x) \in U_i$  für  $n \geq N(x, i)$ . Damit können wir  $f^{-1}(A)$  wie folgt beschreiben: Wir bilden zunächst für jedes  $i$  die Menge

$$V_i := \{x \in X \mid \exists N \text{ mit } n \geq N \Rightarrow f_n(x) \in U_i\} = \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(U_i)$$

und erhalten dann  $f^{-1}(A) = \bigcap_{i \geq 0} V_i$ . Diese Darstellung zeigt jedoch, daß mit den  $f_n^{-1}(U_i)$  auch  $f^{-1}(A)$  meßbar sein muß.  $\square$

*Übung 6.3.22.* Gegeben eine meßbare Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von Meßräumen und ein Maß  $\mu$  auf  $X$  erklärt man das **Bildmaß**  $\phi_*\mu$  auf  $Y$  dadurch, daß man für jede meßbare Menge  $A \subset Y$  setzt

$$(\phi_*\mu)(A) = \mu(\phi^{-1}A)$$

Man zeige, daß diese Vorschrift in der Tat ein Maß auf  $Y$  liefert. Man zeige auch für eine weitere meßbare Abbildung  $\psi : Y \rightarrow Z$  von Meßräumen die Formel  $\psi_*(\phi_*\mu) = (\psi \circ \phi)_*\mu$  und für die Identität auf  $X$  die Formel  $\text{id}_*\mu = \mu$ .



Versuch der graphischen Darstellung eines Bildmaßes. Das Maß einer Teilmenge ist hier so in etwa zu verstehen als die Zahl der Strichle in besagter Teilmenge.

*Ergänzung 6.3.23.* Ist  $(\Omega, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, so heißt das Bildmaß des Wahrscheinlichkeitsmaßes unter einer Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow Y$  die **Verteilung der Zufallsvariable** und wird  $P^X$  notiert. Im Fall einer reellwertigen Zufallsvariable  $Y = \mathbb{R}$  ist dann  $P^X$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$ , und seine Verteilungsfunktion im Sinne von 6.2.20 heißt die **Verteilungsfunktion** oder präziser die **kumulative Verteilungsfunktion** unserer Zufallsvariablen. Das Bildmaß des Dirac-Maßes auf einer einpunktigen Menge unter einer Abbildung in einen Meßraum ist das Dirac-Maß am Bildpunkt.

*Beispiel 6.3.24.* Die **geometrische Verteilung** mit Parameter  $p \in (0, 1]$  auf  $\mathbb{N}_{\geq 1}$  ist das Maß  $\mu = \mu_p$  auf  $\mathbb{N}_{\geq 1}$  mit  $\mu(i) = p^{i-1}(1-p)$ . Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gerechten Würfel beim  $i$ -ten Wurf zum ersten Mal eine Sechs zu würfeln, ist zum Beispiel  $\mu_{5/6}(i) = (5/6)^{i-1} \cdot (1/6)$ .

6.3.25. Manchmal scheint mir die äquivalente Terminologie der “Verwandtschaft” transparenter, die ich nun einführe. Gegeben eine meßbare Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von Meßräumen und ein Maß  $\mu$  auf  $X$  und ein Maß  $\nu$  auf  $Y$  heißen die beiden Maße  **$\phi$ -verwandt** und wir schreiben

$$\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$$

genau dann, wenn gilt  $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}A)$  für jede meßbare Teilmenge  $A \subset Y$ . Gleichbedeutend ist per definitionem  $\nu = \phi_*\mu$ . Jedes Maß hat also unter jeder meßbaren Abbildung genau einen “Vorwärtsverwandten”. Das mag den konzeptionellen Unterschied zwischen Maßen und Funktionen deutlich machen, die im Gegensatz dazu stets genau einen “Rückwärtsverwandten” haben.

*Ergänzung 6.3.26.* Eine Funktion auf einem Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , die meßbar ist auf dem in Bezug auf das Maß  $\mu$  vervollständigten Maßraum, nennen wir  **$\mu$ -meßbar**. Insbesondere heißt eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  **Lebesgue-meßbar** genau dann, wenn sie  **$\lambda$ -meßbar** ist für  $\lambda$  das Lebesgue-Maß. Wir werden nach Möglichkeit versuchen, ohne diese Begrifflichkeit auszukommen. Die Beziehung dieses Begriffs zur Meßbarkeit klärt 6.4.22.

*Übung 6.3.27.* Man zeige, daß jede linksseitig stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar ist. Hinweis: Man schreibe  $f$  als punktweisen Grenzwert stückweise konstanter Funktionen. Man zeige, daß jede in jeder Variablen monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar ist.

## 6.4 Das Integral von nichtnegativen Funktionen

**Definition 6.4.1.** Eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt, nenne ich eine **Stufenfunktion**.

6.4.2. Ist  $X$  eine Menge und  $A \subset X$  eine Teilmenge, so ist zum Beispiel die **charakteristische Funktion**  $\chi_A = [A] : X \rightarrow \{0, 1\}$  von  $A$ , definiert durch die Vorschrift

$$[A](x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

eine Stufenfunktion. Sie heißt auch die **Indikatorfunktion von  $A$**  und wird oft alternativ  $1_A$  notiert. Ist  $(X, \mathcal{M})$  ein Maßraum, so ist jede reellwertige meßbare Stufenfunktion  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  von der Form

$$s = \sum_{i=1}^n c_i [A_i]$$

für eine Zerlegung  $X = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  von  $X$  in endlich viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen und geeignete  $c_i \in \mathbb{R}$ , und die reellwertigen meßbaren Stufenfunktionen bilden einen Untervektorraum im Raum aller reellwertigen Funktionen auf  $X$ .

**Definition 6.4.3 (Integral nichtnegativer reeller Stufenfunktionen).**

Gegeben ein Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  und eine nichtnegative meßbare reellwertige Stufenfunktion  $s : X \rightarrow [0, \infty)$  erklärt man das **Integral**  $\int s = \int_X s = \int_X s \mu \in [0, \infty]$  von  $s$  über  $X$  durch die Formel

$$\int_X s \mu := \sum_{c \in s(X) \setminus 0} c \cdot \mu(s^{-1}(c))$$

6.4.4. Ich habe in dieser Formel den Summanden für  $c = 0$  weggelassen, um den Ausdruck  $0 \cdot \infty$  zu vermeiden. Im folgenden erweist es sich jedoch als bequemer, diesen Summanden zuzulassen und mit der Konvention  $0 \cdot \infty = 0$  zu arbeiten. Weiter habe ich nur  $c \in s(X)$  statt  $c \in \mathbb{R}$  geschrieben, um eine endliche Summe zu erhalten. Da aber die Summanden für  $c \notin s(X)$  eh Null sind, hätten wir, ohne etwas am Resultat zu ändern, auch über alle  $c \in \mathbb{R}$  summieren können.

6.4.5 (**Eigenschaften des Integrals reeller meßbarer Stufenfunktionen**). Natürlich gilt  $\int \alpha s = \alpha \int s$ ,  $\forall \alpha \in (0, \infty)$ , und ist  $t : X \rightarrow [0, \infty)$  eine zweite meßbare Stufenfunktion, so gilt  $\int s + t = \int s + \int t$  und mithin auch  $s \leq t \Rightarrow \int s \leq \int t$ . In der Tat, schreiben wir  $X_{a,b} = s^{-1}(a) \cap t^{-1}(b)$ , so ergibt sich mit der Additivität des Maßes unmittelbar

$$\begin{aligned} \int s + t &= \sum_c c \cdot \mu(\bigcup_{c=a+b} X_{a,b}) &= \sum_{a,b} (a+b) \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int s &= \sum_a a \cdot \mu(\bigcup_b X_{a,b}) &= \sum_{a,b} a \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int t &= \sum_b b \cdot \mu(\bigcup_a X_{a,b}) &= \sum_{a,b} b \cdot \mu(X_{a,b}) \end{aligned}$$

Für  $s = \sum_{i=1}^n c_i [A_i]$  mit  $c_i \in [0, \infty)$  wird also das Integral gegeben durch die Formel  $\int s = \sum_i c_i \mu(A_i)$ .

**Definition 6.4.6 (Integral nichtnegativer Funktionen).** Gegeben ein Maßraum  $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$  und eine meßbare Abbildung  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  definieren wir ein Element  $\int f \mu$  aus  $[0, \infty]$ , das **Integral von  $f$  über  $X$** , als

$$\int f \mu := \sup_{s \leq f} \int_X s \mu$$

wobei das Supremum gebildet wird über alle reellwertigen nichtnegativen meßbaren Stufenfunktionen  $s : X \rightarrow [0, \infty)$  mit  $s(x) \leq f(x)$  für alle  $x \in X$ . Ist  $f$  bereits selbst eine reelle Stufenfunktion, so wird das fragliche Supremum bei  $s = f$  angenommen und wir erhalten unser Integral von Stufenfunktionen 6.4.3 für  $s = f$ .

6.4.7. Wir verwenden für dies Integral auch die Notationen

$$\int f = \int_X f \mu = \int_X f(x) \mu \langle x \rangle$$

Die eckigen Klammern sollen andeuten, daß mit  $\mu \langle x \rangle$  nicht der Wert einer etwaigen Funktion  $\mu$  an einer Stelle  $x$  gemeint ist. Vielmehr wird dieser Ausdruck erst in Verbindung mit dem Integralzeichen sinnvoll. In der Literatur findet man meist die Notation  $\int_X f d\mu$ . Diese leider allgemein übliche Notation scheint mir jedoch im Lichte der ursprünglichen Bedeutung des Symbols  $d$  unter dem Integralzeichen völlig abwegig, um nicht zu sagen irreführend: Das Differential  $d$  macht aus einer Funktion ein Maß, wie etwa in 6.2.7 erklärt, aber wo bereits ein Maß steht, hat es nichts mehr zu suchen.

6.4.8. Unsere Definition des Integrals 6.4.6 ist sogar sinnvoll für nicht notwendig meßbare Funktionen  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ . Das Supremum heißt dann das **Unterintegral** von  $f$ . Der Beweis des folgenden Satzes über monotone Konvergenz zeigt, welche Rolle die Meßbarkeit von  $f$  spielt, und der Beweis des gleich anschließenden Satzes 6.4.11 zeigt dann weiter, wie die Meßbarkeit in den Beweis der Formel  $\int f + g = \int f + \int g$  eingeht, die für nicht meßbare Funktionen  $f$  und  $g$  im Allgemeinen nicht mehr richtig ist.

**Satz 6.4.9 (über monotone Konvergenz).** *Ist  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum und  $(f_n)$  eine monoton wachsende Folge meßbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ , d.h.  $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$ , so ist auch der punktweise Grenzwert  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  der  $f_n$  meßbar und es gilt*

$$\int_X f \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \mu$$

6.4.10. Das Bild zu II.5.1.14 zeigt eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren, ohne daß ihre Integrale deshalb gegen Null streben. Die Annahme der Monotonie unserer Folge ist also wesentlich.

*Beweis.* Die Meßbarkeit von  $f$  folgt aus 6.3.19. Die Abschätzung  $\geq$  ist evident. Es gilt,  $\leq$  zu zeigen. Dafür reicht es, wenn wir für jede Stufenfunktion  $s$  mit  $s \leq f$  und jedes  $\eta \in (0, 1)$  die Abschätzung

$$\eta \int s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

zeigen. Nun haben wir ja  $s = \sum_{i=0}^r c_i [A_i]$  für geeignete paarweise disjunkte meßbare  $A_i$  und  $c_i \in (0, \infty)$ . Setzen wir  $A_i^n = \{x \in A_i \mid f_n(x) \geq \eta c_i\}$ , so sind auch die  $A_i^n$  meßbar und es gilt  $A_i^0 \subset A_i^1 \subset A_i^2 \subset \dots$  sowie  $\bigcup A_i^n = A_i$ , nach 6.1.26 also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i^n) = \mu(A_i)$$

Betrachten wir die Stufenfunktionen  $s_n = \sum_i \eta c_i [A_i^n]$ , so gilt mithin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n = \eta \int s$$

Andererseits haben wir aber nach Konstruktion  $s_n \leq f_n$  und folglich  $\int s_n \leq \int f_n$ . Bilden wir nun auf beiden Seiten den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ , so ergibt sich damit  $\eta \int s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$  wie gewünscht.  $\square$

**Satz 6.4.11 (Eigenschaften des Integrals nichtnegativer Funktionen).** Gegeben  $f, g$  nichtnegative meßbare Funktionen mit Werten in  $[0, \infty]$  auf einem Maßraum gilt

1.  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ ;
2.  $\int cf = c \int f \quad \forall c \in (0, \infty)$ ;
3.  $\int f + g = \int f + \int g$ .

*Beweis.* Nur der dritte Punkt braucht einen Beweis. Sind  $f$  und  $g$  reelle Stufenfunktionen, so haben wir die Behauptung schon in 6.4.5 gezeigt. Um den allgemeinen Fall daraus abzuleiten, brauchen wir ein Lemma.

**Lemma 6.4.12.** Sei  $(X, \mathcal{M})$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  eine meßbare Funktion. So gibt es eine monotone Folge von meßbaren Stufenfunktionen  $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots$  mit Werten in  $[0, \infty)$ , die punktweise gegen  $f$  konvergiert.



SkriptenBilder/BildKST.png

Die ersten Glieder unserer monotonen Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen, die punktweise gegen eine gegebene nichtnegative Funktion konvergieren.

*Beweis.* Wir konstruieren  $\varphi_n$  zum Beispiel wie folgt: Sei  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = n$  die äquidistante Einteilung von  $[0, n]$  in Stücke der Länge  $2^{-n}$ , also  $r = n2^n$  und  $a_i = i2^{-n}$ . Wir setzen  $A_i = f^{-1}[a_i, a_{i+1})$  für  $0 \leq i < r$  sowie  $A_r = f^{-1}[n, \infty]$  und bilden  $\varphi_n = \sum_{i=0}^r a_i[A_i]$ . Es ist offensichtlich, daß wir so eine monotone Folge von Stufenfunktionen erhalten, die punktweise gegen  $f$  konvergiert.  $\square$

Jetzt schreiben wir  $f$  und  $g$  als punktweise Grenzwerte von monotonen Folgen meßbarer Stufenfunktionen,  $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots$  und  $0 \leq \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots$ , und folgern mit dem Satz 6.4.9 über monotone Konvergenz

$$\int f + g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n = \int f + \int g \quad \square$$

*Übung 6.4.13.* Sei  $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$  ein Maßraum,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$  eine  $\sigma$ -Unteralgebra und  $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$  das darauf induzierte Maß. Man zeige: Für jede bezüglich  $\mathcal{M}$  meßbare Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  gilt  $\int f \mu = \int f \mu^*$ .

*Übung 6.4.14.* Sei  $(X, \mathcal{M})$  ein Maßraum. Man zeige: Die Summe zweier Maße  $\mu, \nu$  auf  $\mathcal{M}$  ist wieder ein Maß  $\mu + \nu$  auf  $\mathcal{M}$  und für jede meßbare Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  gilt  $\int f(\mu + \nu) = \int f \mu + \int f \nu$ .

**6.4.15 (Restriktion von Maßen).** Ist  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum und  $A \subset X$  eine meßbare Teilmenge, so erhalten wir in offensichtlicher Weise einen weiteren Maßraum  $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ . Meist kürzen wir die Restriktion  $\mu|_A$  von unserem Maß auf die induzierte  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}|_A = \{B \in \mathcal{M} \mid B \subset A\}$  mit  $\mu$  ab. Integrale in Bezug auf diesen Maßraum notieren wir  $\int_A f \mu$  oder auch  $\int_A f$ . Ist  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar, so haben wir offensichtlich

$$\int_A f = \int_X [A]f$$

wobei links das Integral der Restriktion von  $f$  auf  $A$  gemeint ist und rechts das Integral des Produkts von  $f$  mit der charakteristischen Funktion von  $A$ , gebildet mit der Konvention  $0 \cdot \infty = 0$ .

*Ergänzung 6.4.16.* Ich habe nicht durchdacht, ob für  $j : A \hookrightarrow X$  eine injektive meßbare Abbildung von Meßräumen mit der Eigenschaft, daß die Bilder meßbarer Mengen wieder meßbar sind, die Notation  $j^! \mu$  für das vermittels  $j$  eingeschränkte Maß sinnvoll sein könnte. Es ist ja schon so, daß derartige Abbildungen das meßbare Analogon von étalen Abbildungen sind, und in kartesischen Diagrammen in der Kategorie der Meßräume gilt durchaus  $\psi_* j^! \mu = i^! \phi_* \mu$ .

*Übung 6.4.17.* Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion  $g$  auf einem Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mit  $\int_X g \mu < \infty$  gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\alpha = \alpha_\varepsilon > 0$  derart, daß für alle  $A \in \mathcal{M}$  gilt

$$\mu(A) < \alpha \Rightarrow \int_A g \mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion  $h : X \rightarrow [0, \infty)$  mit  $h \leq g$  und  $\int g \mu \leq \int h \mu + \varepsilon/2$ .

*Übung 6.4.18.* Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion  $g$  auf einem Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mit  $\int_X g \mu < \infty$  gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\beta = \beta_\varepsilon > 0$  mit

$$\int \inf(g, \beta) \mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion  $h : X \rightarrow [0, \infty)$  mit  $h \leq g$  und  $\int g \mu \leq \int h \mu + \varepsilon/2$ .

*Übung 6.4.19.* Man zeige: Gegeben ein Maßraum  $X$  und eine Folge  $(f_n)$  nichtnegativer meßbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  ist auch ihre Summe  $\sum f_n$  meßbar und es gilt

$$\int \sum f_n = \sum \int f_n$$

*Übung 6.4.20 (Produkte von Maßen mit Funktionen).* Ist  $(X, \mu)$  ein Maßraum und  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar, so erhalten wir ein neues Maß  $g\mu$  auf  $X$  durch die Vorschrift  $(g\mu)(A) = \int_A g \mu$  und für jede weitere meßbare Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  gilt mit der Konvention  $0 \cdot \infty = 0 = \infty \cdot 0$  die Identität von Maßen  $f(g\mu) = (fg)\mu$ . Ist ähnlich  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so ist  $f$  integrierbar in Bezug auf  $(g\mu)$  genau dann, wenn unter der Konvention  $0 \cdot \infty = 0$  die Funktion  $fg$  integrierbar ist in Bezug auf  $\mu$ , und unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg) \mu = \int f (g\mu)$$

*Übung 6.4.21.* Ist  $(X, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und sind  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar, so gilt die Gleichheit von Maßen  $f\mu = g\mu$  genau dann, wenn  $f$  und  $g$  außerhalb einer meßbaren Menge vom Maß Null übereinstimmen. Man gebe auch ein Gegenbeispiel im Fall nicht  $\sigma$ -endlicher Maßräume. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall  $\mu(X) < \infty$  zurück und betrachte dann zunächst die Mengen  $\{x \mid n > f(x) > g(x) + 1/n\}$ .

*Ergänzung 6.4.22.* Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum. Für jede  $\mu$ -meßbare Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  im Sinne von 6.3.26 gibt es eine meßbare Funktion  $\tilde{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die außerhalb einer  $\mu$ -Nullmenge mit  $f$  übereinstimmt. In der Tat können wir  $f$

nach 6.4.12 schreiben als punktweisen Grenzwert einer Folge von  $\mu$ -meßbaren Stufenfunktionen  $f(x) = \lim s_n(x)$ . Dann verkleinern wir die Grundflächen aller Stufen von von Null verschiedener Höhe zu meßbaren Mengen so, daß sich das Maß der Stufen nicht ändert, und erhalten eine Folge von meßbaren Stufenfunktionen  $\tilde{s}_n$ , die außerhalb einer meßbaren Nullmenge  $A$  punktweise gegen  $f$  konvergiert, und betrachten den punktweisen Grenzwert  $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [A](x) \tilde{s}_n(x)$ .

*Ergänzende Übung 6.4.23.* Nach 6.2.17 gibt es für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau ein topologisches Maß  $df$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $(df)([a, b]) = f(b) - f(a)$  für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Man zeige: Ist unser  $f$  zusätzlich stetig differenzierbar, so stimmt  $df$  überein mit dem Vielfachen  $f'(x) dx$  des Lebesgue-Maßes.

*Ergänzende Übung 6.4.24.* Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und linksseitig stetig in jeder Variablen, so wissen wir aus 6.2.8, daß es auf dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen beschränkter Quader der Gestalt  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  genau ein Prämaß  $\mu_f$  gibt derart, daß für  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a_i < b_i$  der Wert  $\mu_f([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n])$  auf dem Quader die "alternierende Summe der Werte von  $f$  auf den Ecken" ist. Man zeige: Existiert die gemischte partielle Ableitung  $\partial_1 \dots \partial_n f$  und ist stetig, so stimmt die Caratheodory-Fortsetzung  $\mu_f$  unseres Prämaßes überein mit dem Vielfachen des  $(\partial_1 \dots \partial_n f) d^n x$  des Lebesgue-Maßes.

## 6.5 Integrierbare Funktionen und ihr Integral

**Definition 6.5.1 (Integrierbare Funktionen und ihr Integral).** Gegeben ein Maßraum  $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$  heißt eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  **integrierbar** oder genauer **meßbar und integrierbar** genau dann, wenn sie meßbar ist und wenn zusätzlich gilt  $\int |f| < \infty$  im Sinne des in 6.4.6 erklärten Integrals nichtnegativer Funktionen. Wir definieren das **Integral**  $\int f \in \mathbb{R}$  einer integrierbaren Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

wobei  $f^+, f^- : X \rightarrow [0, \infty)$  den **positiven** bzw. **negativen Anteil** von  $f$  bezeichnen, der gegeben wird durch  $f^\pm(x) = \sup(\pm f(x), 0)$ . Die Menge aller integrierbaren Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  notieren wir je nach der gewünschten Präzision  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X; \mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X; \mathcal{M}, \mu)$ .

6.5.2. Wir haben nun genau genommen zwei Integrale definiert: Erst ein Integral für meßbare nichtnegative Funktionen mit Werten in  $[0, \infty]$ , das Werte in

$[0, \infty]$  annimmt, und dann ein Integral für integrierbare reellwertige Funktionen, das reelle Werte annimmt. Offensichtlich stimmen im Fall einer nichtnegativen reellwertigen integrierbaren Funktion diese beiden Integrale überein. Auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche liefern unsere beiden Varianten des Integralbegriffs in anderen Worten dasselbe. Es ist deshalb sinnvoll, für beide Konzepte dasselbe Symbol zu verwenden. Es gilt jedoch zu beachten, daß man einer beliebigen meßbaren reellwertigen Funktion im Allgemeinen nicht mehr sinnvoll ein Integral zuordnen kann: Das gelingt nur bei meßbaren Funktionen mit nichtnegativen Werten und wenn man  $\infty$  als Wert des Integrals zuläßt. Wie wir gesehen haben, gelingt dann ja das Integrieren sogar allgemeiner für alle meßbaren Funktionen mit Werten in  $[0, \infty]$ . Man kann hier sogar noch ein wenig mehr herauskratzen und analog wie oben auch meßbaren Funktionen mit Werten in  $[-\infty, \infty]$  sinnvoll ein Integral in  $(-\infty, \infty]$  zuordnen, wenn nur ihr Negativteil  $f_-$  integrierbar ist, aber in dieser Allgemeinheit werde ich das Integral nie verwenden.

6.5.3. Allgemeiner mag man auch solche Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  noch “integrierbar” nennen wollen, die im Sinne der vorhergehenden Definition meßbar und integrierbar sind in Bezug auf den vervollständigten Maßraum. Diese Terminologie entspricht vielleicht noch besser dem Sprachempfinden, führt jedoch leicht zu technischen Verkrampfungen. In den Fällen, in denen die Integrierbarkeit in Bezug auf den vervollständigten Maßraum gemeint ist, werde ich stets gesondert darauf hinweisen.

*Übung* 6.5.4. Auf einem topologischen Raum mit einem Borelmaß ist jede stetige reellwertige Funktion mit kompaktem Träger integrierbar.

*Ergänzung* 6.5.5. Gegeben eine reellwertige integrierbare Zufallsvariable  $X$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  heißt ihr Integral auch der **Erwartungswert** der Zufallsvariable und wird  $E(X) := \int_{\Omega} X(\omega)P\langle\omega\rangle$  notiert.

*Beispiel* 6.5.6 (**Integrierbarkeit und absolute Konvergenz**). Ist  $I$  eine abzählbare Menge, so ist eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn für eine oder gleichbedeutend jede “Abzählung” von  $I$  die Reihe  $\sum_{i \in I} f(i)$  absolut konvergiert. Das Integral unserer Funktion ist in diesem Fall genau der Grenzwert der Reihe. Ist  $I$  eine beliebige Menge, so ist eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn die Familie der  $f(i)$  summierbar ist im Sinne von [II.2.5.24](#), was ja nach [II.2.5.26](#) auch im Wesentlichen absolute Konvergenz bedeutet.

*Übung* 6.5.7. Man zeige, daß für jede integrierbare Funktion die Menge der Punkte, auf denen sie nicht den Wert Null annimmt,  $\sigma$ -endlich sein muß. Lösung: [VII.4.5.4](#).

6.5.8. Aus der Definition erhalten wir für  $f, g$  integrierbar sofort  $|\int f| \leq \int |f|$  und  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ .

**Satz 6.5.9 (Linearität des Integrals).** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum. Der Raum  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X)$  aller integrierbaren Funktionen ist ein Untervektorraum im Raum aller Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , und das Integral ist eine lineare Abbildung

$$\int : \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

*Beweis.* Wir überlassen den Nachweis der ersten Aussage dem Leser und zeigen nur die Linearität des Integrals. Zunächst zeigen wir die Additivität

$$\int f + g = \int f + \int g$$

Seien  $f = f^+ - f^-$ ,  $g = g^+ - g^-$  und  $f + g = h = h^+ - h^-$  die Zerlegungen in den positiven und negativen Anteil. Wir folgern durch Einsetzen  $f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$  und mit 6.4.11 ergibt sich  $\int f^+ + \int g^+ + \int h^- = \int f^- + \int g^- + \int h^+$ , woraus mit der Definition dann wieder  $\int f + \int g = \int f + g$  folgt. Nun zeigen wir noch die Verträglichkeit mit der Multiplikation mit Skalaren

$$\int cf = c \int f$$

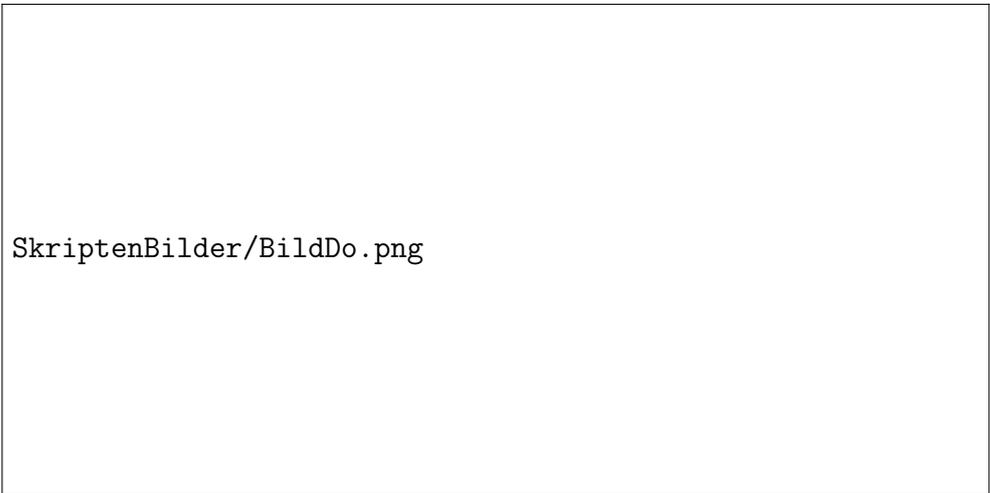
Für  $c = -1$  folgt das aus den Definitionen, für  $c \geq 0$  folgt es aus 6.4.11, und der allgemeine Fall ergibt sich aus diesen beiden Spezialfällen.  $\square$

**Satz 6.5.10 (über dominierte Konvergenz).** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum und  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge meßbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Gibt es eine integrierbare Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|f_n| \leq g$  für alle  $n$ , so sind alle  $f_n$  und auch  $f$  integrierbar und es gilt

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

*Ergänzung 6.5.11.* Andere Quellen sprechen gleichbedeutend vom **Satz über majorisierte Konvergenz**. Verschärfungen dieses Satzes zeigen wir in VII.4.6.5, dort fordern wir statt punktweiser Konvergenz nur “stochastische Konvergenz”, und noch weitergehend in VII.4.11.10, dort fordern wir außerdem statt der Dominiertheit nur noch die “gleichgradige Integrierbarkeit”.

*Ergänzung 6.5.12.* Eine eher unwesentliche Verallgemeinerung erhält man, wenn man allgemeiner nur eine Domination der Konvergenz durch eine meßbare Funktion  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\int g < \infty$  voraussetzt: Aus dieser Annahme folgt nämlich, daß  $g$  außerhalb einer Nullmenge doch wieder reelle Werte annehmen muß, und schwupps finden wir uns im bereits behandelten Fall wieder.



SkriptenBilder/BildDo.png

Eine Folge integrierbarer Funktionen auf der reellen Zahlengeraden, die zwar punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch keine Nullfolge bilden. In diesem Fall können wir auch offensichtlich keine alle Funktionen unserer Folge dominierende integrierbare Funktion  $g$  finden.

*Beweis.* Aus unseren Annahmen folgt  $\int |f_n| \leq \int g < \infty$ , also sind die  $f_n$  integrierbar. Weiter ist  $f$  auch meßbar als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen und dann ist mit demselben Argument auch  $f$  integrierbar. Um die Vertauschbarkeit des Grenzwerts mit dem Integral zu zeigen, betrachten wir nun die Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} i_n(x) &= \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} \\ s_n(x) &= \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} \end{aligned}$$

Sie bestehen aus meßbaren Funktionen, beide Folgen konvergieren punktweise gegen  $f$ , und es gilt

$$-g \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq s_1 \leq s_0 \leq g$$

Mit dem Satz über monotone Konvergenz erhalten wir also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g + i_n = \int g + f$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g - s_n = \int g - f$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int i_n = \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n$$

Da aber nach Definition gilt  $i_n \leq f_n \leq s_n$ , folgt die Behauptung aus dem Quetschlemma II.2.1.32.  $\square$

**Korollar 6.5.13 (Riemann-Integral als Lebesgue-Integral).** *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall ist integrierbar im Sinne der vorhergehenden Definition 6.5.1 und ihr Riemann-Integral stimmt mit ihrem Lebesgue-Integral überein.*

*Beweis.* Jede stetige reellwertige Funktion  $f$  auf einem kompakten reellen Intervall  $[a, b]$  ist meßbar und beschränkt. Aus  $|f| \leq M$  folgt dann sofort  $\int |f| \leq M(b - a) < \infty$  und damit die Integrierbarkeit von  $f$ . Bilden wir Stufenfunktionen  $f_r$ , indem wir  $[a, b]$  äquidistant unterteilen durch Zwischenpunkte  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$  und  $f_r$  auf  $[a_{i-1}, a_i)$  konstant den Wert  $f(a_i)$  geben und bei  $b$  den Wert  $f(b)$ , so konvergieren die  $f_r$  wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  punktweise gegen  $f$ . Andererseits sind ihre Integrale offensichtlich genau unsere Riemannsummen  $S^r(f)$  aus II.3.5.5, in Formeln  $S^r(f) = \int f_r$ , und für  $r \rightarrow \infty$  strebt die linke Seite nach II.3.5.5 gegen das Riemannintegral und die Rechte nach dem Satz über dominierte Konvergenz 6.5.10 gegen das Lebesgueintegral von  $f$ .  $\square$

*Übung 6.5.14 (Vertauschen von Integration und Ableitung).* Sei  $(X, \mu)$  ein Maßraum und  $I \subset \mathbb{R}$  halboffen und  $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung derart, daß  $x \mapsto f(x, t)$  integrierbar ist für alle  $t \in I$  und  $t \mapsto f(x, t)$  differenzierbar für alle  $x \in X$ . Existiert eine integrierbare Abbildung  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) \geq$

$|\partial_t f(x, t)|$  für alle  $x$  und  $t$ , so ist  $x \mapsto \partial_t f(x, t)$  integrierbar für alle  $t$  und es gilt

$$\partial_t \int f(x, t) \mu\langle x \rangle = \int \partial_t f(x, t) \mu\langle x \rangle$$

Hinweis: Dominierte Konvergenz 6.5.10 und Mittelwertsatz.

*Übung 6.5.15 (Integrale unter Bildmaßen).* Man zeige, daß das Integrieren Verwandtschaft respektiert. Sind genauer  $\phi : X \rightarrow Y$  eine meßbare Abbildung von Meßräumen,  $\mu, \nu$  verwandte Maße, in Formeln  $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$ , und  $g, f$  verwandte meßbare Funktionen nach  $[0, \infty]$ , in Formeln  $\phi : g \rightsquigarrow f$ , so gilt

$$\int_X g(x) \mu\langle x \rangle = \int_Y f(y) \nu\langle y \rangle$$

Wir können dieselbe Aussage auch wie folgt formulieren: Gegeben Meßräume  $X, Y$ , eine meßbare Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$ , eine meßbare Abbildung  $f : Y \rightarrow [0, \infty]$  und ein Maß  $\mu$  auf  $X$  gilt

$$\int_X f(\phi(x)) \mu\langle x \rangle = \int_Y f(y) (\phi_*\mu)\langle y \rangle$$

Weiter ist eine reellwertige meßbare Funktion  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar in Bezug auf  $\phi_*\mu$  genau dann, wenn  $f \circ \phi$  integrierbar ist in Bezug auf  $\mu$ , und unter dieser Voraussetzung gilt dieselbe Gleichung in  $\mathbb{R}$ .

*Übung 6.5.16 (Satz von Beppo Levi).* Sei  $f_n$  eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. Ist die Folge ihrer Integrale beschränkt, so ist die Menge  $N$  aller  $x \in X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$  meßbar vom Maß Null und die Funktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : (X \setminus N) \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar mit Integral  $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ .

*Übung 6.5.17.* Sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit Träger in  $Q$ . Sei weiter  $\mu$  ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}^2$ . Für  $r \geq 1$  definieren wir dann die  $r$ -te **Riemannsumme**  $S^r(f; \mu)$  von  $f$  wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$\begin{aligned} a &= a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b \\ c &= c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_r = d \end{aligned}$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten auf diese Weise  $r^2$  klitzekleine halboffene Rechtecke  $Q_{i,j}^\perp = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$  und setzen

$$S^r(f; \mu) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j) \mu(Q_{i,j}^\perp)$$

Man zeige, daß unter unseren Annahmen diese Riemannsummen gegen das Integral streben, in Formeln

$$\int_Q f \mu = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f; \mu)$$

*Übung 6.5.18.* Ist  $(X, \mu)$  ein Maßraum und  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar und  $g\mu$  das in 6.4.20 konstruierte Maß, so zeige man für  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar, daß  $f$  integrierbar ist in Bezug auf  $(g\mu)$  genau dann, wenn unter der Konvention  $0 \cdot \infty = 0$  die Funktion  $fg$  integrierbar ist in Bezug auf  $\mu$ , und daß unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg) \mu = \int f (g\mu)$$

## 6.6 Integration auf Produkträumen

**Satz 6.6.1 (Produktmaß).** Für  $\sigma$ -endliche Maßräume  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  gibt es auf der von allen Produkten  $A \times B$  mit  $A \in \mathcal{M}$  und  $B \in \mathcal{N}$  erzeugten **Produkt- $\sigma$ -Algebra**  $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$  genau ein Maß  $\mu \boxtimes \nu$  derart, daß für alle  $A \in \mathcal{M}$  und  $B \in \mathcal{N}$  gilt

$$(\mu \boxtimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

6.6.2. Hier verwenden wir unsere Konvention  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ . Sind unsere Maßräume nicht  $\sigma$ -endlich, so wird das Produktmaß durch die angegebene Bedingung noch nicht eindeutig festgelegt. Eine mögliche Definition in dieser Allgemeinheit geben wir in VII.4.5.5. In der Literatur wird für die Produkt- $\sigma$ -Algebra und Produktmaße meist das Symbol  $\otimes$  verwendet, aber mir gefällt das Symbol  $\boxtimes$  hier besser, da es sich beim Produkt von Maßen eher um eine Art "externes Produkt" und jedenfalls nicht um ein Tensorprodukt handelt.

*Übung 6.6.3.* Gegeben metrische Räume  $X, Y$  mit abzählbaren dichten Teilmengen fällt das Produkt der  $\sigma$ -Algebren der jeweils topologisch meßbaren Mengen zusammen mit der  $\sigma$ -Algebra der topologisch meßbaren Mengen des Produkts, in Formeln

$$\text{Borel}(X) \boxtimes \text{Borel}(Y) = \text{Borel}(X \times Y)$$

Für den Beweis mag man sich an 6.3.16 orientieren, das vom logischen Aufbau der Theorie her eigentlich besser als Korollar der in der vorstehenden Formel enthaltenen Aussage bewiesen worden wäre. Genauer zeigt man  $\supset$  wie dort und verwendet für  $\subset$  die Borel-Meßbarkeit der Projektionen. Leser mit Kenntnissen in Topologie werden unschwer erkennen, daß diese Formel auch allgemeiner für beliebige separable topologische Räume  $X$  und  $Y$  gilt.



Illustration der Tatsache, daß die Vereinigung zweier Quader auch als die disjunkte Vereinigung von sieben Quadern geschrieben werden kann.

*Beweis.* Die Gesamtheit aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern  $A \times B$  mit  $A \in \mathcal{M}$  und  $B \in \mathcal{N}$  bildet sicher einen Mengenring  $\mathcal{E}$ , und in 6.2.4 haben Sie das sich auch zur Übung bereits überlegt. Wir zeigen zunächst, daß es auf diesem Mengenring  $\mathcal{E}$  ein Prämaß  $\mu \times \nu$  gibt mit  $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ . Es ist jedoch klar, daß für  $C \in \mathcal{E}$  und beliebiges  $y \in Y$  die Abbildung  $x \mapsto [C](x, y)$  eine meßbare Stufenfunktion  $X \rightarrow \{0, 1\}$  ist und daß wir weiter mit  $y \mapsto \int_X [C](x, y)\mu\langle x \rangle$  eine meßbare Stufenfunktion  $Y \rightarrow [0, \infty]$  erhalten. Wir können also definieren

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_Y \left( \int_X [C](x, y)\mu\langle x \rangle \right) \nu\langle y \rangle$$

und die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu \times \nu$  folgt dann aus der Additivität der Integrale 6.4.11 zusammen mit dem Satz über monotone Konvergenz 6.4.9. Unser Satz zum Produktmaß folgt damit aus dem Maßfortsetzungssatz 6.2.10.  $\square$

6.6.4. Mit diesem Satz können wir durch Induktion über  $n$  das Lebesgue-Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$  aus dem Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  konstruieren und so die Existenz in 6.1.20 im allgemeinen zeigen.

*Übung 6.6.5.* Gegeben meßbare Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  ist auch ihr Produkt  $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$  meßbar. Sind zusätzlich  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $X$  und  $\nu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $Y$  mit  $\sigma$ -endlichen Bildmaßen, so ist das Bildmaß ihres Produkts das Produkt der Bildmaße, in Formeln

$$(f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu) = (f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu)$$

*Übung 6.6.6.* Man präzisiere und zeige die ‘‘Assoziativität von Produkten’’ bei Maßräumen.

*Ergänzende Übung 6.6.7.* Gegeben ein endlichdimensionaler Raum  $X$  induziert das Bilden des Produkts mit dem Lebesguemaß eine Bijektion zwischen der Menge aller Borelmaße auf  $X$  und der Menge aller Borelmaße auf  $X \times \mathbb{R}$ , die invariant sind unter Translation in der zweiten Komponente. Hinweis: Gegeben ein in dieser Weise translationsinvariantes Borelmaß  $\mu$  auf  $X \times \mathbb{R}$  beachte man, daß für  $A \subset X$  mit kompaktem Abschluss die Vorschrift  $B \mapsto \mu(A \times B)$  ein translationsinvariantes Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  definiert.

**Satz 6.6.8 (positiver Fubini).** Gegeben  $\sigma$ -endliche Maßräume  $(X, \mu)$  und  $(Y, \nu)$  sowie eine meßbare Funktion  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  ist  $x \mapsto f(x, y)$  für alle  $y \in Y$  eine meßbare Funktion  $X \rightarrow [0, \infty]$  und das partielle Integral  $y \mapsto \int f(x, y)\mu\langle x \rangle$  ist eine meßbare Funktion  $Y \rightarrow [0, \infty]$  und es gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y \rangle = \int_Y \left( \int_X f(x, y)\mu\langle x \rangle \right) \nu\langle y \rangle$$

6.6.9. Unser Satz impliziert insbesondere, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die partiellen Integrale vertauscht werden dürfen. Bezeichnet in der Tat  $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$  das Vertauschen, so haben wir die offensichtliche Verwandtschaft von Maßen  $\tau : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \nu \boxtimes \mu$  und die ebenso offensichtliche Verwandtschaft von Funktionen  $\tau : f \rightsquigarrow \tilde{f}$  mit  $\tilde{f}(y, x) = f(x, y)$  und damit unmittelbar und formal nach 6.5.15 die Gleichheit

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_{Y \times X} \tilde{f}(y, x) (\nu \boxtimes \mu) \langle y, x \rangle$$

6.6.10. Dieser Satz und verschiedene seiner Varianten werden auch oft als **Satz von Tonelli** zitiert. Daß die partiellen Integrale bei nicht notwendig  $\sigma$ -endlichen Maßräumen im allgemeinen nicht mehr vertauscht werden dürfen, zeigt das folgende Beispiel: Sei  $X = Y = [0, 1]$  versehen mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  der topologisch meßbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß  $\lambda$  beziehungsweise dem Zählmaß  $\zeta$ . Die Diagonale  $\Delta$  ist dann meßbar, für ihre charakteristische Funktion  $[\Delta]$  gilt jedoch

$$\int_Y \left( \int_X [\Delta](x, y) \lambda \langle x \rangle \right) \zeta \langle y \rangle = 0 \neq 1 = \int_X \left( \int_Y [\Delta](x, y) \zeta \langle y \rangle \right) \lambda \langle x \rangle$$

*Beweis.* Für jedes  $y \in Y$  ist die  $y$ -Horizontale  $X \rightarrow X \times Y$ ,  $x \mapsto (x, y)$  meßbar nach Lemma 6.3.9, da die Urbilder von Erzeugern der  $\sigma$ -Algebra der meßbaren Mengen des Produkts meßbar sind. Also ist auch  $x \mapsto f(x, y)$  meßbar auf  $X$  als die Verknüpfung von  $f$  mit der  $y$ -Horizontalen. Um die anderen Aussagen des Satzes zu zeigen, müssen wir weiter ausholen. Zunächst einmal dürfen wir annehmen, daß  $X$  und  $Y$  endliches Maß haben: Sonst schreiben wir  $X$  bzw.  $Y$  als aufsteigende Vereinigungen von Teilmengen  $X_n$  bzw.  $Y_m$  endlichen Maßes und erhalten die Meßbarkeit des partiellen Integrals über  $X_n$  und

$$\int_{X_n \times Y_m} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_{Y_m} \left( \int_{X_n} f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich dann auf der linken Seite nach dem Satz 6.4.9 über monotone Konvergenz  $\int_{X \times Y_m} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle$ , und auf der rechten streben die meßbaren Funktionen  $y \mapsto \int_{X_n} f(x, y) \mu \langle x \rangle$  punktweise monoton gegen  $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle$ . Mithin ist diese Funktion auch meßbar und hat das Integral

$$\int_{Y_m} \left( \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Y_m} \left( \int_{X_n} f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

Bilden wir dann schließlich den Grenzwert für  $m \rightarrow \infty$ , so folgt wie gewünscht  $\int_{X \times Y} f = \int_Y \int_X f$ . Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß  $X$  und  $Y$  endliches Maß haben. Wir zeigen nun den Satz zunächst für Funktionen der Gestalt  $f = [C]$  mit  $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ . Dazu brauchen wir einen neuen Begriff.

**Definition 6.6.11.** Sei  $Z$  eine Menge. Ein System  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Z)$  von Teilmengen von  $Z$  heißt **monoton** genau dann, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:

1. Liegen  $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$  alle in  $\mathcal{A}$ , so auch  $\bigcup A_n$ ;
2. Liegen  $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$  alle in  $\mathcal{A}$ , so auch  $\bigcap B_n$ .

**Lemma 6.6.12.** *Ist  $Z$  eine Menge und  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(Z)$  eine Mengenalgebra, so kann die von  $\mathcal{R}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  auch beschrieben werden als das kleinste monotone System  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Z)$ , das  $\mathcal{R}$  umfaßt, alias als der Schnitt aller monotonen Systeme, die  $\mathcal{R}$  umfassen.*

*Beweis.* Offensichtlich gilt  $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{R})$ . Wir müssen also nur zeigen, daß  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Dazu reicht es nach 6.1.30 zu zeigen, daß  $\mathcal{A}$  eine Mengenalgebra ist. Zunächst zeigen wir, daß  $\mathcal{A}$  stabil ist unter dem Bilden von Komplementen. Mit  $\mathcal{A}$  ist jedoch auch  $\mathcal{A}^c := \{A \in \mathcal{A} \mid A^c \in \mathcal{A}\}$  ein monotones System und wegen  $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}^c$  folgt  $\mathcal{A}^c = \mathcal{A}$  aus der Minimalität von  $\mathcal{A}$ . Ähnlich ist für jede Teilmenge  $Y \subset Z$  mit  $\mathcal{A}$  auch  $\mathcal{A}_Y := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap Y \in \mathcal{A}\}$  ein monotones System. Für  $Y \in \mathcal{R}$  gilt natürlich  $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_Y$  und daraus folgt mit der Minimalität von  $\mathcal{A}$  sofort  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_Y$ . Damit haben wir gezeigt:

$$A \in \mathcal{A} \text{ und } Y \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap Y \in \mathcal{A}$$

Mit dieser Erkenntnis lassen wir nun dasselbe Argument nocheinmal laufen: Für  $X \in \mathcal{A}$  wissen wir damit nämlich, daß gilt  $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_X$ , und daraus folgt  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_X$ , also  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_X$ . Damit haben wir gezeigt

$$A \in \mathcal{A} \text{ und } X \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap X \in \mathcal{A}$$

Also ist  $\mathcal{A}$  eine Mengenalgebra, und da es auch stabil ist unter abzählbaren aufsteigenden Vereinigungen, ist es dann wie bereits erwähnt sogar eine  $\sigma$ -Algebra.  $\square$

Mit diesem Lemma können wir nun den Satz im Fall  $f = [C]$  zeigen: Da wir uns nämlich bereits auf den Fall  $\mu(X) < \infty, \nu(Y) < \infty$  zurückgezogen haben, ist die konstante Funktion 1 integrierbar auf  $X \times Y$ , und natürlich dominiert diese Funktion die charakteristischen Funktionen aller Teilmengen von  $X \times Y$ .

Aus dem Satz über dominierte Konvergenz 6.5.10 folgt also, daß das System aller  $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ , für deren charakteristische Funktion der Satz gilt, ein monoton System ist. Dies monotone System enthält aber offensichtlich alle  $C \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ , mithin besteht es nach dem Lemma aus allen meßbaren Mengen  $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ . Damit ist der Satz nun auch für meßbare Stufenfunktion  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty)$  klar. Für beliebiges meßbares  $f$  folgert man die Aussage dann, indem man  $f$  mithilfe von 6.4.12 als punktwisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge meßbarer Stufenfunktionen schreibt und beachtet, daß nach dem Satz über monotone Konvergenz 6.4.9 auf beiden Seiten Integral und Grenzwert vertauscht werden dürfen.  $\square$

6.6.13. Nimmt man im vorherigen Satz für  $f$  die charakteristische Funktion einer  $\sigma$ -endlichen meßbaren Menge  $C \subset \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ , so ergibt sich, daß für  $C_x = i_x^{-1}(C)$  das Urbild von  $C$  unter der  $x$ -Vertikalen  $i_x : Y \rightarrow X \times Y$ ,  $y \mapsto (x, y)$  die Abbildung  $X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $x \mapsto \mu(C_x)$  meßbar ist und daß gilt

$$(\mu \boxtimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x) \mu(x)$$

Kippen wir das in unserer Vorstellung, so folgt insbesondere das **Prinzip von Cavalieri**, nach dem zwei meßbare Mengen  $C, D \subset \mathbb{R}^3$  dasselbe Volumen haben, wenn ihre horizontalen Schnitte in jeder Höhe dieselbe Fläche haben. Weiter können wir so beweisen, daß das Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion auf  $\mathbb{R}$  tatsächlich die zwischen ihrem Graphen und der  $x$ -Achse eingeschlossene Fläche ist, wie im folgenden Korollar ausgeführt wird.

**Korollar 6.6.14.** *Sei  $(X, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  eine meßbare Funktion. So ist auch die Menge  $F \subset X \times \mathbb{R}$  gegeben als  $F = \{(x, y) \mid 0 \leq y < f(x)\}$  meßbar und es gilt  $(\mu \boxtimes \lambda)(F) = \int_X f \mu$ .*

*Beweis.* Um zu zeigen, daß  $F$  meßbar ist, schreiben wir  $F$  als abzählbare Vereinigung von Quadraten  $F = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_{>0}} f^{-1}([q, \infty]) \times [0, q)$ . Die Formel für das Volumen von  $F$  folgt sofort aus 6.6.13.  $\square$

*Bemerkung 6.6.15.* Man findet bei Lebesgue und auch in vielen anderen Texten die Bemerkung, das Lebesgue-Integral unterscheide sich vom Riemann-Integral dadurch, daß die Fläche unter dem Graphen der Funktion in horizontale statt in vertikale Streifen aufgeschnitten werde, deren Flächen man dann addiert. Ich kann das nur bedingt nachvollziehen, nach Cavalieri liefert ja beides dasselbe Integral. Der wesentliche Schritt ist meines Erachtens vielmehr der Übergang vom Messen reeller Intervalle zum Messen beliebiger

“meßbarer Mengen”. Ich gebe aber zu, daß die horizontalen Streifen im Gegensatz zu den vertikalen Streifen eben keine Intervalle und dadurch näher an allgemeinen meßbaren Mengen sind.

*Beispiel 6.6.16.* Es folgt sofort, daß für  $k < n$  die Teilmenge  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge ist. Es folgt weiter mit II.7.6.10, daß das Lebesgue-Maß einer Kreisscheibe  $D$  vom Radius  $r$  in der Tat gegeben wird durch  $\lambda^2(D) = \pi r^2$ . Ist schließlich  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall oder allgemeiner eine meßbare Teilmenge und  $f : I \rightarrow [0, \infty]$  stetig oder allgemeiner meßbar, so folgt für das **Volumen des Rotationskörpers**  $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$  die Formel

$$\lambda^3(R) = \pi \int_I f(z)^2 dz$$

*Übung 6.6.17.* Man zeige, daß die Einheitskugel das Volumen  $4\pi/3$  hat.

**Satz 6.6.18 (Fubini).** Gegeben  $\sigma$ -endliche Maßräume  $(X, \mu)$  und  $(Y, \nu)$  und eine integrierbare Funktion  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Menge  $N$  aller  $y \in Y$ , für die  $x \mapsto f(x, y)$  nicht integrierbar ist, meßbar vom Maß  $\nu(N) = 0$ , und die Funktion  $Y \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle$  ist integrierbar mit Integral

$$\int_{Y \setminus N} \left( \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle = \int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle$$

6.6.19. Will man diesen Satz in der Praxis anwenden, so wird man in der Regel zuerst den positiven Fubini 6.6.8 benutzen, um die Integrierbarkeit von  $f$  nachzuweisen.

*Beispiel 6.6.20.* Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die außerhalb der  $x$ -Achse verschwindet und auf der  $x$ -Achse bei  $(x, 0)$  jeweils den Wert  $x$  annimmt, ist integrierbar auf  $\mathbb{R}^2$ . Jedoch ist  $x \mapsto f(x, y)$  nur integrierbar für  $y \neq 0$ .

*Beispiel 6.6.21.* Unser Satz sagt insbesondere, daß wir unter gewissen Umständen “die Integrationsreihenfolge vertauschen dürfen”. Das folgende Beispiel zeigt, welche Probleme beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge im allgemeinen auftreten können. Sei  $\zeta$  das Zählmaß auf  $\mathbb{N}$ . Wir finden induktiv eine Funktion  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Träger in der “treppenförmigen” Menge  $\{(i, j) \mid 0 \leq i - j \leq 1\}$  mit  $f(0, 0) = 1/2$  und

$$\begin{aligned} f(n, n) + f(n+1, n) &= 0 \\ f(n+1, n) + f(n+1, n+1) &= 2^{-(n+2)} \end{aligned}$$

für alle  $n \geq 0$ . Die beiden partiellen Integrale von  $f$  existieren und sind integrierbar. Ihre Integrale sind jedoch verschieden, genauer gilt

$$\int \left( \int f(n, m) \zeta \langle n \rangle \right) \zeta \langle m \rangle = 0 \neq 1 = \int \left( \int f(n, m) \zeta \langle m \rangle \right) \zeta \langle n \rangle$$



Eine meßbare Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  wie in [6.6.21](#) derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt. Der “positive Fubini” greift hier nicht, da unsere Funktion auch negative Werte annimmt, der “Fubini” greift auch nicht, da unsere Funktion nicht integrierbar ist.

Indem wir unsere Funktion etwas “verschmieren” erhalten wir auch eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  mit entsprechenden Eigenschaften, und durch geeignete Transformation sogar eine stetige reellwertige Funktion auf dem offenen Einheitsquadrat derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt.

*Beweis von Satz 6.6.18.* Ist  $f$  nichtnegativ, so folgt die Behauptung aus dem positiven Fubini 6.6.8, denn aus  $\int_Y \left( \int_X f(x, y) \mu(x) \right) \nu(y) < \infty$  folgt, daß die Menge  $N$  aller  $y \in Y$  mit  $\int_X f(x, y) \mu(x) = \infty$  Maß Null hat. Im allgemeinen folgt die Behauptung dann mit der Zerlegung  $f = f^+ - f^-$ .  $\square$

*Beispiel 6.6.22.* Wir integrieren die Funktion  $y$  über die durch eine Parabel und die Gerade  $y = 0$  begrenzte Fläche  $P = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \int_P y &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{1-x^2} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} dx = \left. \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right|_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Teilen wir noch durch die Gesamtfläche

$$\int_P 1 = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left. x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

so ergibt sich die Höhe des Schwerpunkts unserer abgeschnittenen Parabelfläche zu  $\frac{2}{5}$ . Hier haben wir den Satz von Fubini, und zwar die positive Variante, angewandt auf das Produkt der Funktion  $y$  mit der charakteristischen Funktion  $[P]$  unserer Fläche  $P$ . Die Funktion  $y$  ist meßbar, weil sie stetig ist, die Funktion  $[P]$  ist meßbar als charakteristische Funktion einer meßbaren da abgeschlossenen Menge, und das Produkt dieser beiden meßbaren Funktionen ist damit auch meßbar nach 6.3.18.

*Übung 6.6.23.* Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Quader im  $\mathbb{R}^n$  ist integrierbar und ihr Riemann-Integral nach 2.1.1 stimmt mit ihrem Lebesgue-Integral überein. Hinweis: 6.5.13.

*Übung 6.6.24.* Zeige: Die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$  hat das Volumen  $(n!)^{-1}$ .

*Übung 6.6.25.* Man diskutiere den Zusammenhang zwischen dem Satz von Fubini und dem Satz über das Produkt von Reihen II.2.6.11.

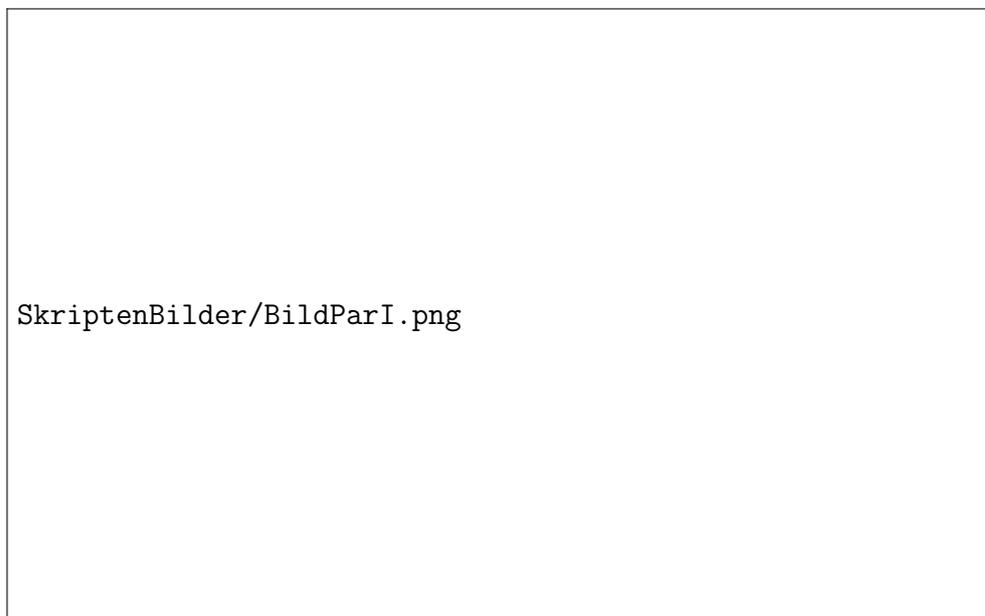


Illustration zur Anwendung des Satzes von Fubini in [6.6.22](#).

**Proposition 6.6.26 (Partielle Integration).** Gegeben reelle Zahlen  $a < b$  und integrierbare Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit “Stammfunktionen”  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $F(y) = \int_a^y f(x) dx$  und  $G(x) = \int_a^x g(y) dy$  gilt

$$\int_a^b Fg = FG|_a^b - \int_a^b fG$$

Dieselbe Formel gilt auch allgemeiner, wenn wir  $F$  oder  $G$  jeweils noch um eine additive Konstante abändern.

*Beweis.* Die zweite Aussage folgt leicht aus der ersten. Um die erste Aussage zu zeigen, berechnen wir das Integral der Funktion  $f(x)g(y)$  über das Quadrat  $[a, b]^2$  und finden mit Fubini  $F(b)G(b)$ . Andererseits können wir dies Integral auch schreiben als das Integral über das dreieckige Gebiet unterhalb der Diagonalen plus das Integral über das dreieckige Gebiet oberhalb der Diagonalen. Diese Integrale ergeben sich aber wieder mit Fubini leicht zu  $\int_a^b Fg$  und  $\int_a^b fG$ .  $\square$

*Übung 6.6.27 (Partielle Integration, Variante).* Die vorhergehende Proposition gilt sogar noch etwas allgemeiner: Ist  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und linksseitig stetig und  $dG$  das zugehörige Maß auf  $[a, b)$  nach 6.2.7 und  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar nach dem Lebesgue-Maß  $\lambda$  und  $F$  eine Stammfunktion wie in der Proposition, so gilt

$$\int_{[a,b)} F dG = FG|_a^b - \int_a^b fG\lambda$$

Dieselbe Formel gilt auch allgemeiner, wenn wir  $F$  noch um eine additive Konstante abändern. Hinweis: Man berechne  $\int_{[a,b)^2} f(x)(\lambda \boxtimes dG)(x, y)$  auf zwei Weisen wie im Beweis der Proposition.

## 6.7 Regularität von Borelmaßen

**Satz 6.7.1 (Regularität von Borelmaßen auf  $\mathbb{R}^n$ ).** Gegeben ein Borelmaß  $\lambda$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  gelten für jede Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  die Formeln

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ offen in } \mathbb{R}^n}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

6.7.2. Das “umgekehrte” Approximieren durch Kompakta von außen oder offene Mengen von innen ist nicht möglich, wie zum Beispiel die Fälle der Mengen  $A$  aller rationalen bzw. aller irrationalen Punkte in  $[0, 1]$  zeigen.

*Übung 6.7.3.* Analoges gilt auch für Borelmaße auf beliebigen offenen Teilmengen  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  und wird in dieser Allgemeinheit in V.1.5.1 benötigt. Um es zu zeigen, mag man etwa  $W$  als Vereinigung einer Folge offener Quader  $W_i$  schreiben und  $A$  als disjunkte Vereinigung topologisch meßbarer Teilmengen  $A_i \subset W_i$  und die analoge Aussage für alle  $A_i \subset W_i$  verwenden. Diese Aussage folgt nämlich direkt aus 6.7.1, da jeder offene Quader in einer die Topologien respektierenden Weise mit dem  $\mathbb{R}^n$  identifiziert werden kann.

*Ergänzung 6.7.4.* Ein topologischer Raum heißt **lokal kompakt** genau dann, wenn sich für jeden Punkt jede Umgebung zu einer kompakten Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt. Diese Terminologie ist nicht unumstritten. Viele Autoren schreiben auch lokalkompakt zusammen und definieren diesen Begriff als das, was wir “lokal kompakt und Hausdorff” nennen. In Übung VI.17.2.10 zeigen Sie die Aussage des Satzes ganz allgemein für jedes Borelmaß auf einem beliebigen separablen lokal kompakten Hausdorffraum.

*Beweis.* Für beschränkte Intervalle  $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$  betrachten wir den Quader  $I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ . Die Gesamtheit aller endlichen Vereinigungen derartiger beschränkter Quader ist ein Mengenring  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , der die  $\sigma$ -Algebra der topologisch meßbaren Mengen erzeugt. Wir können also die Proposition über die Konstruktion von Maßfortsetzungen 6.2.15 in Verbindung mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Caratheodory 6.2.10 anwenden und folgern für jede topologisch meßbare Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  die Gleichung

$$\lambda(A) = \inf \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) \right)$$

wobei das Infimum gebildet wird über alle Folgen  $Q_{\nu}$  in  $\mathcal{Q}$  mit  $A \subset \bigcup_{\nu} Q_{\nu}$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  finden wir demnach eine Folge  $Q_{\nu}$  von beschränkten Quadern wie oben mit

$$\lambda(A) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) \leq \lambda(A) + \varepsilon$$

Nun finden wir für jeden dieser Quader  $Q_{\nu}$  einen offenen Quader  $B_{\nu} \supset Q_{\nu}$  mit  $\lambda(Q_{\nu}) \leq \lambda(B_{\nu}) \leq \lambda(Q_{\nu}) + 2^{-\nu}\varepsilon$ , da nämlich jeder unserer Quader der Schnitt einer absteigenden Folge offener beschränkter Quader ist, und für die offene Menge  $U = \bigcup_{\nu} B_{\nu}$  folgt dann

$$\lambda(A) \leq \lambda(U) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(B_{\nu}) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) + 2^{-\nu}\varepsilon \leq \lambda(A) + 3\varepsilon$$

Da das für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, ist das Maß von  $A$  in der Tat das Infimum über die Maße aller offenen Mengen, die  $A$  umfassen. Um die zweite Behauptung

zu zeigen, wählen wir eine Folge  $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots$  kompakter Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  mit  $\bigcup L_i = \mathbb{R}^n$ . Natürlich gilt  $\lambda(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(A \cap L_i)$  und es reicht folglich, die zweite Gleichung für alle  $A \cap L_i$  zu zeigen. In anderen Worten dürfen wir annehmen, daß es ein Kompaktum  $L$  gibt mit  $A \subset L$ . Nach dem schon bewiesenen Teil gilt natürlich erst recht

$$\lambda(L \setminus A) = \inf_{\substack{U \supset L \setminus A \\ U \text{ offen}}} \lambda(U \cap L)$$

Jetzt beachten wir die Gleichungen  $\lambda(L \setminus A) = \lambda(L) - \lambda(A)$  und  $\lambda(U \cap L) = \lambda(L) - \lambda(L \setminus U)$  und erhalten

$$\lambda(A) = \sup_{\substack{U \supset L \setminus A \\ U \text{ offen}}} \lambda(L \setminus U)$$

Aber es gilt ja  $\{L \setminus U \mid U \supset (L \setminus A), U \text{ offen}\} = \{K \subset A \mid K \text{ kompakt}\}$ , und damit ist auch die zweite Behauptung bewiesen.  $\square$

*Übung 6.7.5.* Eine Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesgue-Maß genau dann, wenn sie sich für jedes  $\varepsilon > 0$  durch eine Folge von kompakten Quadern  $Q_n$  überdecken läßt mit  $\sum_{n=0}^{\infty} \text{vol } Q_n < \varepsilon$ .

## 6.8 Rechnen mit dem Lebesgue-Integral

**Satz 6.8.1 (Transformationsformel).** *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und  $\phi : U \rightarrow V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. So gilt für jede meßbare Funktion  $f : V \rightarrow [0, \infty]$  in  $[0, \infty]$  die Gleichheit*

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

*Ist alternativ  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion, so ist auch die Funktion  $(f \circ \phi) |\det d\phi| : U \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und dieselbe Formel gilt in  $\mathbb{R}$ .*

6.8.2. Steht  $x$  für eine Veränderliche des  $\mathbb{R}^k$ , so benutzen wir die Notation  $\int f(x) d^k x$  auch für Integrale bezüglich des Lebesguemaßes. In diesem Zusammenhang hat also  $d^k x$  dieselbe Bedeutung wie  $\lambda^k \langle x \rangle$ . Wir können die Aussage des Satzes mit dieser Notation auch interpretieren als die Verwandtschaft von Maßen

$$\phi : |\det d\phi| d^k x \rightsquigarrow d^k y$$

6.8.3. Wir kennen unsere Formel aus 4.4.6 bereits für stetige Funktionen  $f$  mit kompaktem Träger. Dem eigentlichen Beweis schicken wir ein Lemma voraus.

**Lemma 6.8.4.** *Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, so gibt es eine monoton wachsende Folge von stetigen, ja sogar von glatten nichtnegativen Funktionen mit kompaktem, in  $A$  enthaltenem Träger, die punktweise gegen die charakteristische Funktion  $[A]$  von  $A$  strebt.*

*Beweis.* Man schreibe  $A$  als Vereinigung einer Folge offener Quader  $Q_k$  mit kompaktem Abschluß, wähle etwa mithilfe von II.4.2.11 für jedes  $Q_k$  eine glatte Funktion  $g_k$  auf  $\mathbb{R}^n$ , die auf  $Q_k$  positiv ist und außerhalb von  $Q_k$  verschwindet, und betrachte die Folge der Funktionen  $f_k = g_1 + \dots + g_k$ . Des weiteren wähle man eine Folge von monoton wachsenden glatten Funktionen  $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derart, daß  $h_k$  unterhalb von  $1/(k+1)$  verschwindet und oberhalb von  $1/k$  konstant den Wert 1 annimmt. Die  $h_k \circ f_k$  bilden dann eine Folge von Funktionen der gewünschten Art.  $\square$

*Beweis von 6.8.1.* Wir zeigen nun zunächst die erste Behauptung. Mit Lemma 6.8.4 folgt unsere Formel für die charakteristischen Funktionen  $f = [O]$  von offenen Teilmengen  $O \subseteq V$ , indem wir  $[O]$  als punktweisen monotonen Grenzwert einer Folge  $f_n$  aus  $\mathcal{C}_c(V)$  schreiben und den Satz über monotone Konvergenz 6.4.9 verwenden und erinnern, daß wir die Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger bereits als 4.4.6 gezeigt haben. Dann folgt sie für die charakteristischen Funktionen  $f = [K]$  von kompakten Teilmengen  $K \subset V$ , indem wir eine offene Menge  $O$  endlichen Maßes finden mit  $K \subset O \subset V$  und  $[K] = [O] - [O \setminus K]$  schreiben. Dann folgt sie für die charakteristischen Funktionen  $f = [A]$  von meßbaren Teilmengen  $A \subset V$ , indem wir mithilfe von 6.7.1 eine absteigende Folge offener Mengen und eine aufsteigende Folge kompakter Mengen finden mit  $O_0 \supset O_1 \supset \dots \supset A \supset \dots \supset K_1 \supset K_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(O_n) = \lambda(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n)$ . Dann folgt sie für meßbare reellwertige Stufenfunktionen aus der Additivität des Integrals 6.4.11. Schließlich folgt sie für beliebige meßbare Funktionen  $f : V \rightarrow [0, \infty]$  mit dem Satz über monotone Konvergenz, indem wir  $f$  mit 6.4.12 als punktweisen monotonen Grenzwert meßbarer Stufenfunktionen schreiben. Der Fall integrierbarer Funktionen folgt ohne Mühe aus dem Fall meßbarer Funktionen mit Werten in  $[0, \infty]$ .  $\square$

*Übung 6.8.5.* Liefere zwei Borelmaße auf dem  $\mathbb{R}^n$  dasselbe Integral für alle glatten Funktionen mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 6.8.4 und 6.7.1. Verwendet man 6.7.3, so folgt dieselbe Aussage sogar für Borelmaße auf beliebigen offenen Teilmengen eines  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 6.8.6 (Nützliche Nullmengen).** *Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $k < n$  und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, so ist  $\varphi(U)$  eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^n$ .*

*Ergänzung 6.8.7.* Der **Satz von Sard** besagt, daß auch für  $k \geq n$  und  $\varphi$  mindestens  $(k - n + 1)$ -mal stetig partiell differenzierbar auf  $U$  das Bild unter  $\varphi$  der Menge aller Stellen  $p \in U$ , an denen  $d_p\varphi$  nicht surjektiv ist, eine Lebesgue-Nullmenge sein muß. Wir werden das nicht zeigen.

*Beweis.* Nach dem technischen Lemma 6.8.8, das wir im Anschluß beweisen, können wir  $U$  schreiben als abzählbare Vereinigung über eine Folge von offenen Quadern  $Q_\nu$  mit  $\bar{Q}_\nu$  kompakt und  $\bar{Q}_\nu \subset U$ . Folglich dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß  $\bar{U}$  selbst ein kompakter Quader ist und daß  $|d\varphi|$  beschränkt ist auf  $U$ . Nach einer affinen Koordinatentransformation dürfen wir zusätzlich sogar annehmen  $U = (0, 1)^k$ . Wir arbeiten wie immer mit der Maximumnorm auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^k$ , die Bälle  $B(x, \delta)$  sind also offene Würfel und ihre Abschlüsse  $\bar{B}(x; \delta)$  abgeschlossene Würfel. Ist  $C$  eine Schranke für  $|d\varphi|$ , so gilt nach dem Schrankensatz  $\varphi(U \cap \bar{B}(x; \delta)) \subset \bar{B}(\varphi(x); C\delta)$  für alle  $x \in U$ . Für  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  finden wir nun eine Überdeckung von  $(0, 1)^k$  durch  $r^k$  abgeschlossene Würfelchen der Gestalt  $\bar{B}(x; 1/r)$ , also finden wir eine Überdeckung von  $\varphi(U)$  durch  $r^k$  abgeschlossene Würfelchen der Gestalt  $\bar{B}(y; C/r)$  mit Gesamtvolumen  $r^k(2C/r)^n$ . Dies Gesamtvolumen strebt aber gegen Null für  $r \rightarrow \infty$ , mithin ist  $\varphi(U)$  eine Nullmenge.  $\square$

**Lemma 6.8.8.** *Jede offene Überdeckung einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.*

*Beweis.* Wir betrachten in  $\mathbb{R}^n$  alle offenen Bälle mit rationalem Radius und rationalem Mittelpunkt. Diese offenen Bälle lassen sich abzählen und bilden dann eine Folge  $U_0, U_1, \dots$  von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Ist  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $p \in V$  ein Punkt, so finden wir stets ein  $\nu$  mit  $p \in U_\nu \subset V$ . In der Tat gibt es  $\varepsilon > 0$  rational mit  $B(p; \varepsilon) \subset V$  und einen Punkt mit rationalen Koordinaten in  $B(p; \varepsilon/2)$  und dann gilt  $p \in B(q; \varepsilon/2) \subset V$ . Ist nun  $A \subset \mathbb{R}^n$  überdeckt durch eine Familie  $V_i$  von offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , so betrachten wir in der Folge der  $U_\nu$  die Teilfolge  $U_{\nu(0)}, U_{\nu(1)}, \dots$  aller  $U_\nu$ , die in einem der  $V_i$  liegen, und wählen für jedes  $r \in \mathbb{N}$  ein  $i(r)$  mit  $V_{i(r)} \supset U_{\nu(r)}$ . Die  $V_{i(r)}$  bilden dann die gesuchte abzählbare Teilüberdeckung.  $\square$

*Übung 6.8.9.* Jede diskrete Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  ist abzählbar.

*Übung 6.8.10.* Man zeige: Gegeben eine meßbare Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$  gilt  $\lambda(cA) = |c|^n \lambda(A)$ . Zum Beispiel hat eine Kugel vom doppelten Radius das achtfache Volumen.

*Beispiel 6.8.11.* Wir berechnen die Höhe des Schwerpunkts der massiven Halbkugel  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$ . Per definitionem ist das diejenige Zahl  $h \in \mathbb{R}$ , für die gilt  $\int_H (z - h) = 0$ , so daß wir

unter Zuhilfenahme von 6.6.17 erhalten

$$h \frac{2\pi}{3} = h \int_H 1 = \int_H z$$

Durch Übergang zu Kugelkoordinaten nach 4.4.13 folgt

$$\begin{aligned} \int_H z &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \vartheta) r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= 2\pi \left( \int_0^1 r^3 \, dr \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \, d\vartheta \right) \\ &= 2\pi \cdot \left( \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\vartheta) \, d\vartheta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-\cos(2\vartheta)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

womit sich die Höhe des Schwerpunkts ergibt zu  $h = 3/8$ .

*Beispiel 6.8.12.* Wir berechnen das Integral der Funktion  $x^2 + y^2$  über die Einheitskugel  $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ . Physikalisch Gebildete erkennen, daß wir eigentlich das Trägheitsmoment der Einheitskugel um die  $z$ -Achse suchen, aber das spielt in unserer Rechnung keine Rolle. Durch Übergang zu Kugelkoordinaten 4.4.13 und mit III.1.1.5 erhalten wir

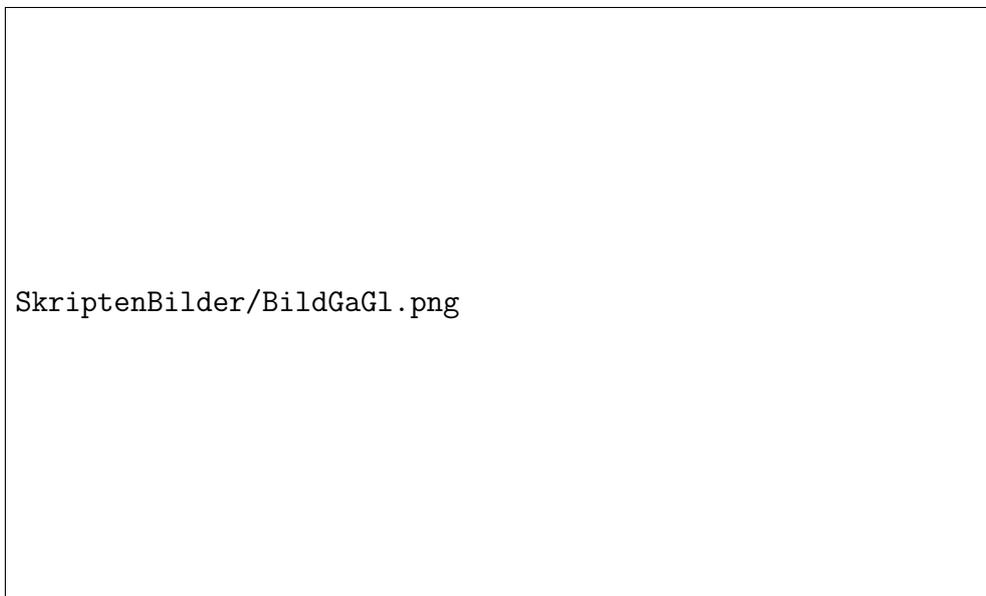
$$\int_K x^2 + y^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^4 \sin^3(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{15}$$

**Proposition 6.8.13 (Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve).**

Für die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve gilt die Formel  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, dx = \sqrt{\pi}$ .

6.8.14. Die Gauss'sche Glockenkurve spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie in V.2.5.18 ausgeführt wird.

*Beweis.* Wir rechnen das Integral über die Ebene der nichtnegativen Funktion  $\exp(-(x^2 + y^2))$  auf zwei Weisen aus, einmal direkt mit Fubini und ein zweites Mal, indem wir mithilfe von 6.8.6 die Ebene längs der negativen  $x$ -Achse aufschneiden und mit 6.8.1 zu Polarkoordinaten übergehen. Ein



Skizze der Gauß'schen Glockenkurve alias dem Graphen von  $x \mapsto \exp(-x^2)$  mit zusätzlich eingezeichnetem Klöppel.

Vergleich der Resultate liefert die Behauptung. Genauer rechnen wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \exp(-y^2) \, dx \, dy \\
 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, dx \right)^2 \\
 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}} \exp(-(x^2 + y^2)) \, dx \, dy \\
 &= \int_{(0,\infty) \times (-\pi,\pi)} \exp(-r^2) \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \exp(-r^2) \, r \, dr \, d\theta \\
 &= -\pi \exp(-r^2) \Big|_0^\infty \\
 &= \pi \quad \square
 \end{aligned}$$

*Beispiel 6.8.15.* Es sollte wohl irgendwann einmal gezeigt werden, daß mit der in VIII.3.4.1 definierten Interpolation  $\Gamma : \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}$  der Zuordnung  $n \mapsto (n-1)!$  und der Konvention  $x! := \Gamma(x+1)$  gilt

$$(\text{Volumen der Einheitskugel im } \mathbb{R}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$$

*Übung 6.8.16.* Gegeben ein von Null verschiedenes Polynom  $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  hat seine Nullstellenmenge  $P^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-Maß Null. Hinweis: Induktion über den Grad des Polynoms. Außerhalb der kritischen Stellen ist  $P^{-1}(0)$  eine Untermannigfaltigkeit.

## 6.9 Flächenmaß

**Satz 6.9.1.** *Auf jeder Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  gibt es genau ein topologisches Maß  $\sigma = \sigma_M$  derart, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  und jede topologisch meßbare Menge  $A \subset \varphi(W)$  gilt*

$$\sigma(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det(d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)} \, d^k x$$

mit dem Lebesgue-Integral über  $\varphi^{-1}(A) \subset W \subseteq \mathbb{R}^k$  auf der rechten Seite. Dieses Maß heißt das **Flächenmaß** von  $M$ . Es ist ein Borelmaß. Jede in  $M$  enthaltene Mannigfaltigkeit  $N$  echt kleinerer Dimension ist für das Flächenmaß von  $M$  eine Nullmenge.

6.9.2. Die hinter diesen Definitionen stehende Anschauung wurde bereits in 4.5.1 diskutiert. Man sieht leicht ein, daß das dort für stetige Funktionen mit kompaktem Träger erklärte Integral mit ihrem Integral in Bezug auf

das hier erklärte Flächenmaß übereinstimmen muß. Der Buchstabe  $\sigma$  steht für englisch und französisch “surface”. Die Bezeichnung suggeriert zwar die Vorstellung zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten, aber wir benutzen sie auch im allgemeinen. Gegeben eine integrierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  notieren wir ihr Integral bezüglich des Flächenmaßes

$$\int_M f = \int_M f \sigma = \int_M f(x) \sigma(x)$$

In der Literatur ist es üblich,  $d\sigma$  hinter das Integral zu schreiben, und man findet auch die Notationen  $dS$  und in der deutschen Literatur  $d\omega$  oder  $dO$  mit  $\omega$  oder  $O$  wie “Oberfläche”.

*Ergänzung 6.9.3.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $X$  und ein Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum mit Einheiten in einem orientierten eindimensionalen Vektorraum  $L$  im Sinne von ?? liefern die analogen Definitionen auf jeder  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit das Flächenmaß in Gestalt eines topologischen Maßes mit Werten in  $L^{\otimes k}$ . Unter einem **Maß mit Werten in einem eindimensionalen orientierten Vektorraum**  $T$  verstehen wir dabei eine  $\sigma$ -additive Abbildung von einer  $\sigma$ -Algebra nach  $T_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}$ . In diesem Sinne messen sich also auch in der Mathematik Längen in Metern, Flächen in Quadratmetern und Volumen in Kubikmetern.

6.9.4. Gegeben eine Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  ist die Einschränkung des Oberflächenmaßes auf ihr Bild  $\varphi(W)$  also genau das Bild unter  $\varphi$  des Produkts des Lebesgue-Maßes auf  $W$  mit der Funktion  $\text{vol}(d_x\varphi) = \sqrt{\det (d_x\varphi)^\top (d_x\varphi)}$  in der Notation aus 4.5.6. Gegeben eine meßbare Funktion  $f : M \rightarrow [0, \infty]$ , die außerhalb von  $\varphi(W)$  verschwindet, haben wir nach 6.5.15 in  $[0, \infty]$  die Identität

$$\int_M f = \int_W f(\varphi(x)) \text{vol}(d_x\varphi) d^k x$$

Ist ähnlich eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, die außerhalb von  $\varphi(W)$  verschwindet, so ist  $f$  integrierbar über  $M$  genau dann, wenn die Funktion unter dem Integral auf der rechten Seite unserer Gleichung integrierbar ist über  $W$ , und dann gilt unsere Formel ganz genauso in  $\mathbb{R}$ .

*Beispiel 6.9.5 (Kurvenintegral als Integral nach einem Flächenmaß).* Ist  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbarer Weg derart, daß das Bild des offenen Intervalls  $\varphi((a, b))$  eine 1-Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist und  $\varphi : (a, b) \rightarrow M$  eine Karte von  $M$ , so ist jede stetige Funktion  $f : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über  $M$  und ihr Integral über  $M$  ist genau das Kurvenintegral

im Sinne von II.7.3.6 der Funktion  $f$  längs  $\varphi$ , in Formeln

$$\int_M f = \int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$$

*Beweis von Satz 6.9.1.* Nach 6.8.8 können wir eine Folge von Karten  $(W_n, \varphi_n)$  finden, deren Bilder unsere Mannigfaltigkeit überdecken. Gegeben eine solche Folge zerlegen wir jede topologisch meßbare Menge  $A \subset M$  in die disjunkte Vereinigung gewisser Teilmengen  $A_n$ , die jeweils aus allen Punkten im Bereich der  $n$ -ten Karte bestehen sollen, die nicht bereits im Bereich von Karten mit kleinerem Index liegen. In Formeln bilden wir also  $M_n = \bigcup_{\nu \leq n} \varphi_\nu(W_\nu)$  und setzen  $A_n = (A \setminus M_{n-1}) \cap \varphi_n(W_n)$ . Dann erklären wir ein Maß  $\sigma$  auf  $M$  durch die Vorschrift

$$\sigma(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi_n^{-1}(A_n)} \text{vol}(d_x \varphi_n) d^k x$$

und überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Vorschrift auch wirklich ein Maß auf  $M$  definiert. Nun müssen wir für  $(W, \varphi)$  eine weitere Karte von  $M$  und  $A \subset \varphi(W)$  meßbar zeigen

$$\sigma(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \text{vol}(d_x \varphi) d^k x$$

Sicher reicht es aus, das für alle die eben zu  $A$  gebildeten  $A_n$  zu zeigen. Wir zeigen gleich allgemeiner für jede im Bild zweier Karten  $(W, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  enthaltene topologisch meßbare Menge  $B \subset \varphi(W) \cap \psi(V)$  die Formel

$$\int_{\psi^{-1}(B)} \text{vol}(d_y \psi) d^k y = \int_{\varphi^{-1}(B)} \text{vol}(d_x \varphi) d^k x$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierfür  $\varphi(W) = \psi(V)$  annehmen. Der Kartenwechsel  $g = \psi^{-1} \circ \varphi : W \xrightarrow{\sim} V$  ist dann ein Diffeomorphismus mit  $\psi \circ g = \varphi$ , also gilt  $d_{g(x)} \psi \circ d_x g = d_x \varphi$ . Wir erhalten mit der Multiplikativität der Determinante also

$$\text{vol}(d_x \varphi) = |\det d_x g| \text{vol}(d_{g(x)} \psi)$$

und folgern die behauptete Gleichheit der Integrale aus der Transformationsformel 6.8.1 angewandt auf die Funktion  $f(y) = \text{vol}(d_y \psi)[\psi^{-1}(B)](y)$  mit dem transformierenden  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $\phi = g : W \xrightarrow{\sim} V$  alias der Substitution  $y = g(x)$ . Daß es kein anderes Maß mit der geforderten Eigenschaft geben kann, ist eh klar. Daß jede in  $M$  enthaltene Untermannigfaltigkeit echt kleinerer Dimension für unser Oberflächenmaß eine Nullmenge ist,

folgt leicht aus 6.8.6. Um zu zeigen, daß unser Flächenmaß endlich ist auf Kompakta  $K \subset M$ , wählen wir zunächst mithilfe von II.6.10.3 eine endliche Überdeckung von  $K$  durch offene Mengen  $V_1, \dots, V_r \subseteq \mathbb{R}^n$ , in denen  $M$  jeweils plättbar ist, so daß insbesondere gilt  $(M \cap V_i) \triangleleft V_i$  für  $i = 1, \dots, r$ . Dann betrachten wir eine Teilung der Eins nach 4.4.10 und finden also  $\alpha_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  stetig mit kompaktem in  $V_i$  enthaltenem Träger und  $\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) = 1$  für alle  $x \in K$ . Es reicht also zu zeigen  $\int_M \alpha_i(x) \sigma \langle x \rangle < \infty$  für alle  $i$ . Ist aber  $\varphi : W \xrightarrow{\sim} M \cap V_i$  die zu einer entsprechenden Plättung gehörige Karte, so haben wir

$$\int_M \alpha_i(x) \sigma \langle x \rangle = \int_W (\alpha_i \circ \varphi)(x) \operatorname{vol}(d_x \varphi) d^k x < \infty$$

da ja  $(\operatorname{supp} \alpha_i) \cap M \cap V_i$  und damit auch  $\operatorname{supp}(\alpha_i \circ \varphi)$  kompakt ist.  $\square$

*Beispiel 6.9.6 (Oberfläche der Einheitskugel).* Wir machen nun unsere heuristische Argumentation aus 4.5.5 präzise und zeigen für die Oberfläche der Einheitskugel die Formel

$$\int_{S^2} \sigma = 4\pi$$

Lassen wir aus der Kugelschale  $S^2$  den Äquator weg, also alle Punkte  $(x, y, z)$  mit  $z = 0$ , und dazu noch einen halben Großkreis von Pol zu Pol, sagen wir alle Punkte  $(x, y, z)$  mit  $y = 0$  und  $x \leq 0$ , so ändert sich nach 6.9.1 das Integral nicht. Der Rest ist die disjunkte Vereinigung von zwei geschlitzten offenen Hemisphären  $U_+ \cup U_-$  und  $U_\pm$  und unsere Rechnung aus 4.5.5 zeigt bereits  $\int_{U_\pm} \sigma = 2\pi$ .

*Übung 6.9.7 (Oberfläche eines Rotationskörpers).* Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow (0, \infty)$  stetig differenzierbar. So ist die **Mantelfläche**  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  mit der Oberfläche

$$\int_M \sigma = 2\pi \int_I f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$$

Allgemeiner zeige man für das Bildmaß des Oberflächenmaßes unter der orthogonalen Projektion  $p : M \rightarrow I$  unserer Mantelfläche auf die  $z$ -Achse die Formel  $p_* \sigma = 2\pi f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$ . Ist speziell  $M$  die Einheitskugel, so zeige man  $p_* \sigma = 2\pi dz$  und berechne nochmals die Oberfläche der Einheitskugel.

6.9.8. Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unsere Rotationsfläche durch eine Vereinigung von dünnen Bändern der Gestalt “unten abgeschnittenener Eiswaffeln” approximiert.

*Übung 6.9.9 (Zwiebelformel).* Ist  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  die Einheitskugel mit ihrem Flächenmaß  $\sigma$ , so ist unter der Multiplikationsabbildung  $\text{mult} : \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  das Produktmaß  $r^{n-1} dr \boxtimes \sigma$  verwandt zum Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , in Formeln

$$\text{mult} : r^{n-1} dr \boxtimes \sigma \rightsquigarrow \lambda^n$$

Hinweis: Man rechne mit einer beliebigen Karte von  $S^{n-1}$  und erweitere sie zu einer Karte von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Man beachte, daß für eine differenzierbare Kurve, die ganz in der Einheitskugel verläuft, der Geschwindigkeitsvektor stets auf dem Ortsvektor senkrecht steht.

*Übung 6.9.10.* Genau dann ist die Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ ,  $x \mapsto \|x\|^\alpha$  für gegebenes  $\alpha \in \mathbb{R}$  integrierbar auf dem Komplement eines und jedes offenen Balls um den Ursprung, wenn gilt  $\alpha < (-n)$ . Hinweis: Zwiebelformel 6.9.9.

*Übung 6.9.11.* Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  ein Gitter, d.h. das Gruppenerzeugnis einer Basis von  $\mathbb{R}^n$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Genau dann konvergiert  $\sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \|\omega\|^\alpha$ , wenn gilt  $\alpha < (-n)$ . Hinweis: 6.9.10.

*Übung 6.9.12.* Berechnen Sie das Integral der Funktion  $(xyz)^2$  über die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^3$ .

## 7 Der Satz von Stokes

Im vorigen Abschnitt haben wir unser Kurvenintegral aus II.7.3.6 verallgemeinert zum Integral einer Funktion über eine Unterannigfaltigkeit eines  $\mathbb{R}^n$ . In diesem Abschnitt werden wir unser Wegintegral aus 3.3, d.h. das Integral eines Kovektorfelds auf einem endlichdimensionalen reellen Raum längs eines Weges verallgemeinern zum Integral einer “ $k$ -Form” auf einem endlichdimensionalen reellen Raum über eine “orientierte”  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Als Spezialfälle enthält diese Konstruktion insbesondere die Definition des “Flusses eines Vektorfelds in  $\mathbb{R}^3$  durch eine orientierte Fläche in  $\mathbb{R}^3$ ”. Unser eigentliches Ziel ist dann der sogenannte “allgemeine Satz von Stokes” 7.8.1, der den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II.4.5.1 auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

### 7.1 Multilineare Algebra und Dachprodukt

**Definition 7.1.1.** Sei  $k$  ein Körper. Gegeben ein  $k$ -Vektorraum  $V$  und eine natürliche Zahl  $p$  bilden wir den Raum der **alternierenden  $p$ -Multilinearformen** oder kurz  **$p$ -Formen**

$$\text{Alt}^p V := \{\omega : V \times \dots \times V \rightarrow k \mid \omega \text{ ist multilinear und alternierend}\}$$

Hier meint alternierend wie in ??, daß  $\omega(v_1, \dots, v_p)$  verschwindet, wann immer es  $i \neq j$  gibt mit  $v_i = v_j$ .

7.1.2. Hat unser Körper nicht die Charakteristik 2, so ist es gleichbedeutend zu fordern, daß  $\omega(v_1, \dots, v_p)$  sein Vorzeichen ändert wenn man zwei Einträge  $v_i$  und  $v_j$  vertauscht, daher die Bezeichnung “alternierend”. Unter Nullformen verstehen wir Skalare, in Formeln setzen wir also  $\text{Alt}^0 V = k$ . Einsformen sind Elemente des Dualraums alias Linearformen, wir haben also  $\text{Alt}^1 V = V^\top$ . Gegeben Linearformen  $f_1, \dots, f_p \in V^\top$  definieren wir ein Element  $\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \in \text{Alt}^p V$  durch die Vorschrift

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p)(v_1, \dots, v_p) := \det(f_i(v_j))$$

7.1.3. Wir werden unmittelbar im Anschluß das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen einführen und dessen Assoziativität beweisen ebenso wie die Formel  $\text{alt}(f_1, \dots, f_p) = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$ . Sobald das geleistet ist, wird die Notation  $\text{alt}(f_1, \dots, f_p)$  obsolet werden.

*Ergänzung 7.1.4.* Im Rahmen unserer Diskussion des Tensorprodukts werden die Begriffsbildungen dieses Abschnitts auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt besprochen. Genauer konstruieren wir in ?? einen kanonischen Isomorphismus zwischen dem hier definierten Raum  $\text{Alt}^p V$  der alternierenden Multilinearformen auf  $V$  und dem Dualraum  $(\bigwedge^p V)^\top$  seiner

dort definierten  $p$ -ten äußeren Potenz  $\bigwedge^p V$ . Zusätzlich erklären wir in ?? für endlichdimensionales  $V$  kanonische Isomorphismen  $(\bigwedge^p V)^\top \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p (V^\top)$  zwischen den Dualräumen der äußeren Potenzen und den äußeren Potenzen des Dualraums und erhalten so zusammen einen kanonischen Isomorphismus  $\text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p (V^\top)$ .

7.1.5. Sind Linearformen  $f_1, \dots, f_n \in V^\top$  gegeben und ist  $I \subset \{1, \dots, n\}$  eine Teilmenge mit  $p$  Elementen, so setzen wir

$$f_I := \text{alt}(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \in \text{Alt}^p V$$

für  $i_1 < \dots < i_p$  die der Größe nach gereihten Elemente von  $I$ . Für  $I = \emptyset$  vereinbaren wir  $f_\emptyset = 1$ .

**Proposition 7.1.6 (Basis des Raums der  $p$ -Formen).** *Ist  $V$  ein Vektorraum und  $f_1, \dots, f_n$  eine Basis von  $V^\top$ , so bilden die  $f_I$  aus 7.1.5 mit  $|I| = p$  eine Basis von  $\text{Alt}^p V$ .*

*Beweis.* Ist  $v_1, \dots, v_n$  die duale Basis von  $V$  und ist auch  $J = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, n\}$  gegeben mit  $j_1 < \dots < j_p$ , so gilt offensichtlich

$$f_I(v_{j_1}, \dots, v_{j_p}) = \begin{cases} 1 & I = J; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das zeigt die lineare Unabhängigkeit der  $f_I$ . Andererseits ist klar, daß eine alternierende Multilinearform schon festgelegt wird durch ihre Werte auf den  $p$ -Tupeln  $(v_{j_1}, \dots, v_{j_p})$  mit  $j_1 < \dots < j_p$ . Das zeigt, daß die  $f_I$  auch  $\text{Alt}^p V$  erzeugen.  $\square$

7.1.7. Im Vorgriff auf unsere zukünftige Notation  $f_1 \wedge \dots \wedge f_p$  für  $\text{alt}(f_1, \dots, f_p)$  wäre im Fall eines vierdimensionalen Vektorraums  $V$  mit einer Basis  $f_1, \dots, f_4$  seines Dualraums also  $\text{Alt}^2 V$  ein Raum der Dimension 6 mit Basis  $f_1 \wedge f_2, f_1 \wedge f_3, f_1 \wedge f_4, f_2 \wedge f_3, f_2 \wedge f_4, f_3 \wedge f_4$ .

**Proposition 7.1.8.** *Seien  $k$  ein Körper,  $V$  ein  $k$ -Vektorraum endlicher Dimension und  $p, q \geq 0$ . So gibt es genau eine bilineare Abbildung, das **Dachprodukt***

$$\begin{aligned} \text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V &\rightarrow \text{Alt}^{p+q} V \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

derart, daß für alle  $f_1, \dots, f_{p+q} \in V^\top$  gilt

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \wedge \text{alt}(f_{p+1}, \dots, f_{p+q}) = \text{alt}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$$

7.1.9. Mit 7.1.6 folgt unmittelbar die **Assoziativität des Dachprodukts**

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$$

Damit brauchen wir auch bei längeren Dachprodukten keine Klammern zu setzen und unsere Notation “alt” wird schon wieder obsolet, denn offensichtlich folgt aus der Proposition auch

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$$

*Ergänzung 7.1.10.* Ein natürlichere Konstruktion des Dachprodukts besprechen wir im Rahmen der multilinearen Algebra in ???. Sie mögen zur Übung zeigen, daß unter unserem Isomorphismus 7.1.4 das Dachprodukt aus ??? genau unserem Dachprodukt aus 7.1.8 entspricht, vergleiche auch ???. In der Tat reicht es angesichts der Assoziativität beider Dachprodukte, diese Behauptung im Fall des Dachprodukts zweier Linearformen zu prüfen, und in diesem Fall ist sie schnell nachgerechnet.

*Ergänzung 7.1.11.* Die Formel aus dem anschließenden Beweis definiert auch für alternierende Formen auf einem nicht notwendig endlichdimensionalen Raum ein assoziatives Produkt  $\wedge$ . Der Beweis bleibe dem Leser überlassen ebenso wie der Nachweis der graduierten Kommutativität 7.1.12 in dieser Allgemeinheit. Für unsere Belange reicht der endlichdimensionale Fall aus.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt sofort aus 7.1.6 und nur die Existenz ist noch zu zeigen. Wir betrachten dazu die Menge  $\mathcal{S}_{p,q} \subset \mathcal{S}_{p+q}$  aller Permutationen, die die Reihenfolge der ersten  $p$  Einträge und die der letzten  $q$  Einträge unverändert lassen. Stellen wir uns unsere Permutationen als Mischvorschriften für ein Spiel von  $p+q$  Karten vor, so heben wir also  $p$  Karten ab und schieben die beiden so gebildeten Stapel von  $p$  bzw.  $q$  Karten irgendwie ineinander. Solche Permutationen heißen auch  $(p, q)$ -**Shuffles**, in Formeln haben wir

$$\mathcal{S}_{p,q} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ und } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)\}$$

Weiter betrachten wir in  $\mathcal{S}_{p+q}$  die Untergruppe  $\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q$  aller Permutationen, die die ersten  $p$  Einträge unter sich vertauschen und die letzten  $q$  Einträge ebenso. Die Verknüpfung von Permutationen liefert dann offensichtlich eine Bijektion

$$\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$$

Jetzt definieren wir für  $\omega$  und  $\eta$  wie oben eine Multilinearform  $\omega \wedge \eta$  durch die Vorschrift

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$



SkriptenBilder/BildShuffle.png

Ein  $(3, 4)$ -Shuffle

Betrachten wir andererseits unsere Definition

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_n)(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\tau) f_1(v_{\tau(1)}) \dots f_n(v_{\tau(n)})$$

für  $n = p, q$  und setzen in die Definition von  $\wedge$  ein, so ergibt sich mithilfe unserer Zerlegung  $\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$  wie gewünscht

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \wedge \text{alt}(f_{p+1}, \dots, f_{p+q}) = \text{alt}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$$

Die Bilinearität von  $\wedge$  zeigt dann weiter, daß die Multilinearform  $\omega \wedge \eta$  auch im allgemeinen alternierend ist, so daß unsere Formel für  $\wedge$  in der Tat eine Abbildung  $\text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V \rightarrow \text{Alt}^{p+q} V$  mit den geforderten Eigenschaften liefert.  $\square$

**Lemma 7.1.12 (Graduierte Kommutativität des Dachprodukts).** *Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für beliebige  $\omega \in \text{Alt}^p V$  und  $\eta \in \text{Alt}^q V$  gilt  $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$ . Bezeichnet  $|\omega|$  den Grad von  $\omega$ , also  $|\omega| = p$  für  $\omega \in \text{Alt}^p$ , so können wir diese Regel auch schreiben in der Gestalt*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|} \eta \wedge \omega$$

*Beweis.* Aus 7.1.8 folgt sofort  $f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(n)} = (\text{sgn } \sigma) f_1 \wedge \dots \wedge f_n$  für jede Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  und alle  $f_1, \dots, f_n \in V^\top$ . Die Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}$ , die die ersten  $p$  Einträge an den Schluß schiebt und die letzten  $q$  Einträge an den Anfang, hat aber nach ?? das Signum  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{pq}$ . Das Lemma folgt so zunächst für  $\omega, \eta$  iterierte Dachprodukte und dann auch im Allgemeinen.  $\square$

**7.1.13 (Funktorialität alternierender Multilinearformen).** Zu jeder linearen Abbildung  $L : V \rightarrow W$  bilden wir wie in ?? ihre transponierte Abbildung  $L^\top : W^\top \rightarrow V^\top$ ,  $f \mapsto f \circ L$  und allgemeiner auch die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} L^\top : \text{Alt}^p W &\rightarrow \text{Alt}^p V \\ \omega &\mapsto \omega \circ (L \times \dots \times L) \end{aligned}$$

mit  $L \times \dots \times L$  wie in ??, als da heißt  $(L^\top \omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega(Lv_1, \dots, Lv_p)$ . Aus den Definitionen folgen leicht die Formeln  $\text{id}^\top = \text{id}$  und  $(L \circ M)^\top = M^\top \circ L^\top$  für die transponierten Abbildungen sowie die Verträglichkeit mit dem Dachprodukt

$$L^\top(\omega \wedge \eta) = (L^\top \omega) \wedge (L^\top \eta)$$

*Ergänzung 7.1.14.* In der Sprache der Kategorientheorie ?? bilden demnach für jedes  $p$  die Zuordnungen  $V \mapsto \text{Alt}^p V$ ,  $L \mapsto L^\top$  einen kontravarianten Funktor  $\text{Alt}^p$  von der Kategorie der  $k$ -Vektorräume in sich selber, dessen Effekt auf Morphismen ich nur der Bequemlichkeit der Notation halber  $L \mapsto L^\top$

statt  $L \mapsto \text{Alt}^p(L)$  notiert habe, und  $V \mapsto \text{Alt } V := \bigoplus \text{Alt}^p V$  ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der  $k$ -Vektorräume in die Kategorie der  $k$ -Ringalgebren.

**Lemma 7.1.15 (Dachprodukt und Determinante).** *Gegeben ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum  $V$  und eine lineare Abbildung  $L : V \rightarrow V$  gilt*

$$L^\top = (\det L) : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$$

*Beweis.* Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, so ist  $\text{Alt}^n V$  eindimensional. Für  $L : V \rightarrow V$  linear muß also  $L^\top : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$  die Multiplikation mit einem Skalar aus dem Grundkörper sein. Ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und  $f_1, \dots, f_n$  die duale Basis von  $V^\top$ , so ist  $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$  eine Basis von  $\text{Alt}^n V$  und das Lemma folgt mit expliziter Rechnung, für  $(\det L)$  die Determinante der Matrix von  $L$  in der gewählten Basis. Daß die fragliche Determinante von der Wahl der Basis gar nicht abhängt und deshalb in der Tat  $(\det L)$  notiert werden darf, erhält man als Konsequenz.  $\square$

*Ergänzung 7.1.16.* Nehmen wir 7.1.13 und 7.1.15 zusammen, so ergibt sich unmittelbar die Multiplikationsformel für Determinanten ??.

*Ergänzung 7.1.17.* Gegeben endlichdimensionale Vektorräume  $V, W$  und Formen  $\omega \in \text{Alt}^p V$  und  $\eta \in \text{Alt}^q W$  kürzen wir die  $(p+q)$ -Form  $(\text{pr}_1^\top \omega) \wedge (\text{pr}_2^\top \eta)$  auf  $V \times W$  auch gerne mit  $\omega \wedge \eta$  ab und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann  $\wedge$  dieses "äußere Dachprodukt" meint und wann das "innere Dachprodukt" aus 7.1.8.

7.1.18. Für einen Vektorraum  $V$  der Dimension  $\dim V = n$  liefert das Dachprodukt  $V^\top \times \text{Alt}^{n-1} V \rightarrow \text{Alt}^n V$  eine nichtausgeartete Paarung, als da heißt, jeder Isomorphismus  $\text{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  liefert vermittelt unserer Paarung einen Isomorphismus  $\text{Alt}^{n-1} V \xrightarrow{\sim} V$ .

## 7.2 Differentialformen höheren Grades

**Definition 7.2.1.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $U \subset X$  eine Teilmenge. Ein **Feld von relativen  $p$ -Formen** oder kürzer eine  **$p$ -Form auf  $U$**  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \text{Alt}^p \vec{X} \\ x &\mapsto \omega_x \end{aligned}$$

die also ausgeschrieben jedem Punkt  $x \in U$  eine alternierende  $p$ -Multilinearform  $\omega_x : \vec{X} \times \dots \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnet. Den Raum aller relativen  $p$ -Formen auf  $U$  notieren wir  $\Omega_X^p(U)$ . Wenn wir hoffen, daß die genaue Bedeutung aus dem Kontext hervorgeht, sprechen wir auch oft abkürzend schlicht von **Differentialformen**.

7.2.2. Später werden wir ganz allgemein Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten erklären als Zuordnungen, die jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Tangentialraum am entsprechenden Punkt zuordnen. Im Fall einer eingebetteten Mannigfaltigkeit  $U \subset X$  positiver Kodimension ist das natürlich etwas anderes, als jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Richtungsraum des umgebenden affinen Raums zuzuordnen. Das ist der Grund, aus dem ich das hier eingeführte elementare Konzept eine “relative Differentialform” genannt habe.

7.2.3 (**Formen und Formenfelder**). In der hier und im vorhergehenden Abschnitt eingeführten abgekürzten Terminologie kann eine “ $p$ -Form auf  $U$ ” zwei sehr verschiedene Dinge bedeuten: Entweder ist  $U$  ein  $k$ -Vektorraum und unsere  $p$ -Form ist ein Element von  $\text{Alt}^p(U)$ , also eine alternierende multilineare Abbildung  $\omega : U \times \dots \times U \rightarrow k$ , oder aber  $U$  ist Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  und unsere  $p$ -Form ist eine Abbildung  $\omega : U \rightarrow \text{Alt}^p(\vec{X})$  mit  $x \mapsto \omega_x$ . Man sollte deshalb eigentlich letztere Objekte stets als “Felder von  $p$ -Formen” ansprechen, sie stehen ja auch zu alternierenden  $p$ -Multilinearformen in derselben Beziehung wie Vektorfelder zu Vektoren. Von Formenfeldern aber redet kein Mensch. Ich will deshalb auch nicht damit anfangen, und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist.

*Beispiel 7.2.4.* Eine 0-Form auf  $U$  ist eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und eine 1-Form auf einer halboffenen Teilmenge  $U$  ein Kovektorfeld im Sinne von 3.1.4. Ist  $U \subset X$  eine halboffene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums, so schreiben wir statt  $\Omega_X^p(U)$  meist  $\Omega^p(U)$ , da in diesem Fall unsere relativen Differentialformen mit den üblichen Differentialformen auf abstrakten Mannigfaltigkeiten übereinstimmen, wie wir sie in VI.5.3 kennenlernen werden.

*Beispiel 7.2.5 (Anschauung für Differentialformen).* In einem dreidimensionalen orientierten reellen affinen Raum bewege sich ein Gas. Wir halten ein kurzes Zeitintervall fest und ordnen jedem orientierten Flächenelement die Gesamtmasse der Gasmoleküle zu, die in diesem Zeitintervall hindurchtritt, wobei wir diese Masse je nach der Richtung, in der unsere Moleküle hindurchtreten, positiv oder negativ gewichten. Diese Zuordnung ist, nach Wahl einer Masseneinheit, ein Feld von 2-Formen. Man nennt es auch die **Flußdichte**. Ruht das Gas und ordnen wir jedem orientierten Volumenelement die Gesamtmasse der darin befindlichen Gasmoleküle zu, gewichtet mit einem Vorzeichen, das von der Orientierung bestimmt wird, so erhalten wir ein Feld von 3-Formen auf unserem affinen Raum, genaugenommen wieder nach Wahl einer Masseneinheit. Man nennt es auch die **Dichte** unseres Gases. Wählen wir zusätzlich auf dem Richtungsraum unseres affinen Raums



Versuch einer graphischen Darstellung der 2-Form auf der Papierebene, die in den durch die Koordinatenachsen gegebenen Koordinaten durch die Formel  $xy \, dx \wedge dy$  dargestellt werden könnte. Eingezeichnet ist an jedem Punkt ein geordnetes Paar von Richtungsvektoren mit der Eigenschaft, daß unsere Form auf besagtem Paar den Wert Eins annimmt. Die Anordnung wird hierbei durch einen kleinen Pfeil vom ersten zum zweiten Vektor angezeigt. Natürlich ist dies Vektorenpaar in keinster Weise eindeutig, wir könnten dieselbe 2-Form auch ganz anders darstellen, die beteiligten Vektoren müssen dabei auch keineswegs parallel zu Koordinatenachsen sein. Problematisch ist in dieser Anschauung nur die Darstellung der Nullform.

ein Skalarprodukt, so erhalten wir eine Identifikation von Vektorfeldern mit 2-Formen, indem wir jedem Vektor  $u$  die 2-Form  $(v, w) \mapsto \text{vol}(u, v, w)$  zuordnen, mit  $\text{vol}(u, v, w)$  dem ‘‘Volumen’’ des Parallelogramms mit Kanten  $u, v, w$  und einem Vorzeichen, das von der ‘‘Orientierung’’ unseres Tripels abhängt. Ähnlich erhalten wir dann auch eine Identifikation von Funktionen mit 3-Formen. Die Möglichkeit dieser Identifikationen mag ein Grund dafür sein, daß Differentialformen zumindest meiner Intuition schwer zugänglich sind. Es fällt uns einfach nicht zu, einen dreidimensionalen ohne Skalarprodukt zu visualisieren, geschweige denn Räume höherer Dimensionen: Das beste Beispiel für eine 2-Form wäre dann nämlich, nach Wahl der dazu nötigen physikalischen Einheiten, das elektromagnetische Feld auf der Raumzeit.

**Definition 7.2.6.** Für zwei Differentialformen  $\omega \in \Omega^p$  und  $\eta \in \Omega^q$  definieren wir ihr **Dachprodukt**  $\omega \wedge \eta \in \Omega^{p+q}$  als punktweises Dachprodukt im Sinne von 7.1.8, in Formeln  $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$ . Für  $f \in \Omega^0$  eine Funktion schreiben wir meist  $f\eta$  statt  $f \wedge \eta$ .

7.2.7. Ist speziell  $X = \mathbb{R}^n$  und sind  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenfunktionen, so läßt sich für  $U \subset X$  nach 7.1.6 jede  $p$ -Form  $\omega \in \Omega_X^p(U)$  eindeutig schreiben in der Gestalt

$$\omega = \sum_{|I|=p} a_I dx_I$$

Hier läuft die Summe wie angedeutet über alle  $p$ -elementigen Teilmengen  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , die Koeffizienten  $a_I$  sind reelle Funktionen auf  $U$ , und  $dx_I$  ist ähnlich wie in 7.1.1 eine Abkürzung für  $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  mit  $i_1 < \dots < i_p$  den der Größe nach geordneten Elementen von  $I$ . Diese Notation ist allerdings mit Vorsicht zu genießen, denn natürlich ist  $dx_I$  für  $|I| \neq 1$  in keinsten Weise das Differential einer wie auch immer gearteten Funktion  $x_I$ . Das Dachprodukt zweier in dieser Standarddarstellung gegebenen Formen ergibt sich dann leicht mittels der Regeln  $dx_i \wedge dx_i = 0$  und  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ .

7.2.8. Die 2-Form  $dx \wedge dy$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  kann man sich veranschaulichen als Vorschrift, die ‘‘jeder kleinen orientierten Parallelogrammfläche den Flächeninhalt ihrer orthogonalen Projektion auf die  $(x, y)$ -Ebene zuordnet, mit einem von der Orientierung abhängigen Vorzeichen’’.

**Definition 7.2.9.** Gegeben endlichdimensionale reelle Räume  $X, Y$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $\phi : A \rightarrow Y$  auf einer halboffenen Teilmenge  $A \subset X$  definieren wir das **Zurückholen von Differentialformen**, eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\phi^* : \Omega_Y^p(\phi(A)) \rightarrow \Omega^p(A)$ , durch die Vorschrift

$$(\phi^*\omega)_x = (d_x\phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$$

Hier bezeichnet  $(d_x\phi)^\top : \text{Alt}^p \vec{Y} \rightarrow \text{Alt}^p \vec{X}$  die vom Differential  $d_x\phi : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$  von  $\phi$  an der Stelle  $x \in A$  induzierte Abbildung. Alternativ könnten wir auch schreiben  $(\phi^*\omega)_x = \omega_{\phi(x)} \circ (d_x\phi \times \dots \times d_x\phi)$  mit  $p$  Faktoren ganz rechts.

7.2.10. Dies Zurückholen ist bei der Begrifflichkeit der Differentialformen die eigentliche Hauptsache. Das Zurückholen von Funktionen alias Nullformen mit einer Abbildung ist schlicht das ‘‘Vorschalten’’ von besagter Abbildung, in Formeln  $\phi^*(g) = g \circ \phi$  für eine Funktion  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Das Zurückholen von 1-Formen haben wir bereits in 3.1.17 diskutiert. Wir verallgemeinern die dort eingeführte Terminologie auf den vorliegenden Fall und nennen Differentialformen  $\eta$  und  $\omega$  **verwandt unter**  $\phi$  und schreiben  $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$  genau dann, wenn gilt  $\eta = \phi^*(\omega)$ .

**Lemma 7.2.11.** *Für das Zurückholen von Differentialformen gilt die Kettenregel, d.h. wir haben stets  $\text{id}^* = \text{id}$  und*

$$\psi^*(\phi^*\omega) = (\phi \circ \psi)^*(\omega)$$

*Beweis.* Das folgt mit der üblichen Kettenregel 1.3.1 sofort aus den Definitionen. Wir können die Aussage des Lemmas auch im Sinne von 3.1.18 dahingehend verstehen, daß Verwandtschaft transitiv ist.  $\square$

**Lemma 7.2.12.** *Verwandschaft alias das Zurückholen  $\phi^*$  von Differentialformen ist verträglich mit dem Dachprodukt, in Formeln gilt also*

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$$

*Beweis.* Dem Leser überlassen.  $\square$

*Beispiel 7.2.13.* Wir erinnern 3.1.21. Für  $X = \mathbb{R}^n$  mit Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und  $Y = \mathbb{R}^m$  mit Koordinaten  $y_1, \dots, y_m$  und  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$  in eine halboffene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ergibt sich  $\phi^*(dx_i) = d(\phi^*x_i) = d\phi_i = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$ . Folglich kann das Zurückholen von 1-Formen in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^* \left( \sum_i a_i dx_i \right) = \sum_{i,j} (a_i \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$$

*Beispiel 7.2.14.* Ist  $\phi$  die Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \vartheta) &\mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{aligned}$$

und haben wir auf  $\mathbb{R}^2$  die 1-Form  $y dx$  gegeben, so wird sie zurückgeholt zu

$$\begin{aligned}\phi^*(y dx) &= \phi^*(y)\phi^*(dx) \\ &= r \sin \vartheta d(r \cos \vartheta) \\ &= r \sin \vartheta \cos \vartheta dr - r^2 \sin^2 \vartheta d\vartheta\end{aligned}$$

und für die 2-Form  $dx \wedge dy$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\phi^*(dx \wedge dy) &= \phi^*(dx) \wedge \phi^*(dy) \\ &= d(r \cos \vartheta) \wedge d(r \sin \vartheta) \\ &= (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \\ &= r dr \wedge d\vartheta\end{aligned}$$

Man mag sich letztere Formel dahingehend veranschaulichen, daß “ein kleines orientiertes Flächenelement in der  $xy$ -Ebene unter der Polarkoordinatenabbildung einem entsprechend größeren oder auch kleineren orientierten Flächenelement in der  $r\vartheta$ -Ebene entspricht, je nachdem, in welchem Abstand vom Ursprung unser ursprüngliches Flächenelement liegt”.

**Lemma 7.2.15.** Für  $A$  halboffen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar gilt stets

$$\phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\det d\phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

*Beweis.* Für jeden Endomorphismus  $L$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V$  ist die induzierte Abbildung  $L^\top : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$  nach 7.1.15 gerade die Multiplikation mit  $\det L$ .  $\square$

### 7.3 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

**Definition 7.3.1.** Gegeben eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein Punkt  $p \in M$  definieren wir den **Tangententialraum an  $M$  in  $p$**  als den Vektorraum

$$T_p M := \text{im}(d_u \varphi) \subset \vec{X}$$

für eine und jede Karte  $\varphi : U \rightarrow M$  mit  $\varphi(u) = p$ . Wir haben also  $\dim T_p M = \dim M$ , und  $p + T_p M$  ist der affine Teilraum von  $X$ , der anschaulich gesprochen “ $M$  am besten approximiert bei  $p$ ”.

*Übung 7.3.2.* Man zeige: Gegeben eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein Punkt  $p \in M$  kann der Tangentialraum  $T_p M$  auch beschrieben werden als die Menge aller möglichen Geschwindigkeitsvektoren bei  $p$  von in  $M$  verlaufenden und bei  $p$  differenzierbaren Wegen.



In diesem Bild habe ich zu einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit der Ebene zwei affine Räume eingezeichnet, deren Richtungsräume ihre Tangentialräume an den beiden fett eingezeichneten Punkten wären. Diese affinen Räume schneiden sich natürlich und ihre Richtungsräume schneiden sich desgleichen. Im bildlich dargestellten Fall besteht dieser Schnitt der Richtungsräume aus dem Nullvektor, aber im allgemeinen kann er auch größer sein. Ich habe die beiden Geraden dennoch als nicht-schneidend gemalt, um bildlich anzudeuten, daß alle diese Überschneidungen von uns bei der Definition des Tangentialbündels sozusagen wegdefiniert werden.

*Ergänzung 7.3.3.* Man will sich meist die verschiedenen Tangentialräume als paarweise disjunkt denken, ändert die obige Definition deshalb ab und setzt formal

$$T_p M := \{p\} \times \text{im}(d_u \varphi) \subset \{p\} \times \vec{X}$$

So kann man dann das **Tangentialbündel** von  $M$  definieren als

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M \subset M \times \vec{X}$$

Unter geeigneten zusätzlichen Differenzierbarkeitsannahmen an unsere Untermannigfaltigkeit  $M$  kann man zeigen, daß  $TM \subset M \times \vec{X}$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $2(\dim M)$  ist, vergleiche VI.1.6.13. Die einzelnen Tangentialräume erhält man als die Fasern der Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$  des Tangentialbündels auf die Mannigfaltigkeit, in Formeln  $T_p M = \pi^{-1}(p)$ .

7.3.4. Wir erinnern daran, daß nach ?? eine **Orientierung** eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  über einem angeordneten Körper eine Vorschrift  $\varepsilon$  ist, die jeder angeordneten Basis  $B$  unseres Vektorraums ein Vorzeichen  $\varepsilon(B) \in \{+1, -1\}$  zuordnet und zwar so, daß für je zwei angeordnete Basen  $B, B'$  die Determinante der Basiswechsellmatrix das Vorzeichen  $\varepsilon(B)\varepsilon(B')$  hat. In ?? werden auch noch weitere Begriffsbildungen in diesem Zusammenhang formal eingeführt, deren Bedeutung Sie aber auch leicht selbst werden erraten können.

**Definition 7.3.5.** Eine **Orientierung** einer  $k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Vorschrift, die jedem Punkt  $p \in M$  eine Orientierung im Sinne von ?? des Tangentialraums  $T_p M$  zuordnet und zwar so, daß es um jeden Punkt eine Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  gibt mit der Eigenschaft, daß die Differentiale  $d_x \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(x)} M$  für  $x \in W$  entweder alle orientierungserhaltend oder alle orientierungsumkehrend sind.

7.3.6. Eine Orientierung einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  anzugeben bedeutet schlicht, eine Abbildung  $\varepsilon : M \rightarrow \{+1, -1\}$  anzugeben, deren Wert bei  $p \in M$  eben das Vorzeichen der angeordneten Basis  $\emptyset$  des Tangentialraums  $T_p M$  ist.

**Definition 7.3.7.** Unter einer **orientierten Mannigfaltigkeit** versteht man ein Paar bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $M$  und einer Orientierung auf  $M$ . Ich notiere orientierte Mannigfaltigkeiten oft mit einem Pfeil, etwa als  $\vec{M}$ , aber das ist nicht allgemein üblich. Eine Mannigfaltigkeit, die mindestens eine Orientierung zuläßt, nennt man eine **orientierbar**. Das "Möbiusband" ist ein Beispiel für eine nicht orientierbare 2-Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ .

7.3.8. Den Pfeil über einem Symbol benutze ich auch bei affinen Räumen als Notation für den zugehörigen Raum von Richtungsvektoren, vergleiche ???. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

**Definition 7.3.9.** Wir sagen, eine Karte  $(W, \varphi)$  einer orientierten Mannigfaltigkeit **habe die Orientierung**  $\varepsilon$  für  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$  genau dann, wenn für jeden Punkt  $x \in W$  das Bild der Standardbasis unter dem Isomorphismus  $d_x \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(x)} M$  die Orientierung  $\varepsilon$  hat. Nur die leere Karte kann beide Orientierungen haben. Karten, die nicht zusammenhängend sind, besitzen im allgemeinen weder die Orientierung  $+1$  noch die Orientierung  $-1$ . Eine nichtleere Karte der Orientierung  $+1$  nennen wir eine **positiv orientierte Karte**.

*Übung 7.3.10.* Jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt genau zwei Orientierungen. Hinweis: Gegeben zwei Orientierungen ist die Menge aller Punkte  $p$ , an denen sie dieselbe Orientierung von  $T_p M$  liefern, ebenso offen wie die Menge aller Punkte  $p$ , an denen sie verschiedene Orientierungen von  $T_p M$  liefern. Nun verwende man 3.4.16.

*Ergänzende Übung 7.3.11.* Seien  $X$  und  $Y$  endlichdimensionale reelle Räume,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow Y$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für alle  $c \in Y$  nach 4.3.10 das Urbild  $M = f^{-1}(c)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $X$  der Dimension  $\dim X - \dim Y$ . Man zeige für alle  $p \in M$  die Formel  $T_p M = \ker d_p f$ .

*Übung 7.3.12.* Man zeige: Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine von Null verschiedene symmetrische Bilinearform auf  $V$  und  $c \in \mathbb{R}$  eine Konstante, so ist  $M := \{v \in V \setminus 0 \mid \langle v, v \rangle = c\}$  eine Hyperfläche in  $V$  und unter der üblichen Identifikation  $\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$  haben wir  $T_v M = \text{trans}\{w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0\}$  oder abkürzend geschrieben

$$T_v M = v^\perp$$

## 7.4 Integration von Differentialformen: Theorie

7.4.1. Wie im nächsten Abschnitt erklärt werden wird, ist die Integration von Differentialformen in lokalen Koordinaten kein großes Kunststück und verallgemeinert verschiedene Integrationsbegriffe, die Sie bereits kennengelernt haben. Ich möchte Sie deshalb ermutigen, den nächsten Abschnitt vorzuziehen. Andererseits muß man, um formal korrekte Aussagen machen zu können, zuvor den Begriff einer integrierbaren Differentialform und ihres Integrals einführen. Das soll in diesem eher technischen Abschnitt geschehen.

**Proposition 7.4.2 (Das Maß einer Differentialform).** *Gegeben eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  eines endlichdimensionalen reellen Raums und eine meßbare  $k$ -Form  $\omega$  auf  $M$  gibt es genau ein topologisches Maß  $|\omega|$  auf  $M$  mit der Eigenschaft, daß für jede Karte  $(W, \varphi)$  von  $M$  und jede Borelmenge  $A \subset \varphi(W)$  gilt*

$$|\omega|(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} |(\varphi^*\omega)(e_1, \dots, e_k)| \lambda^k$$

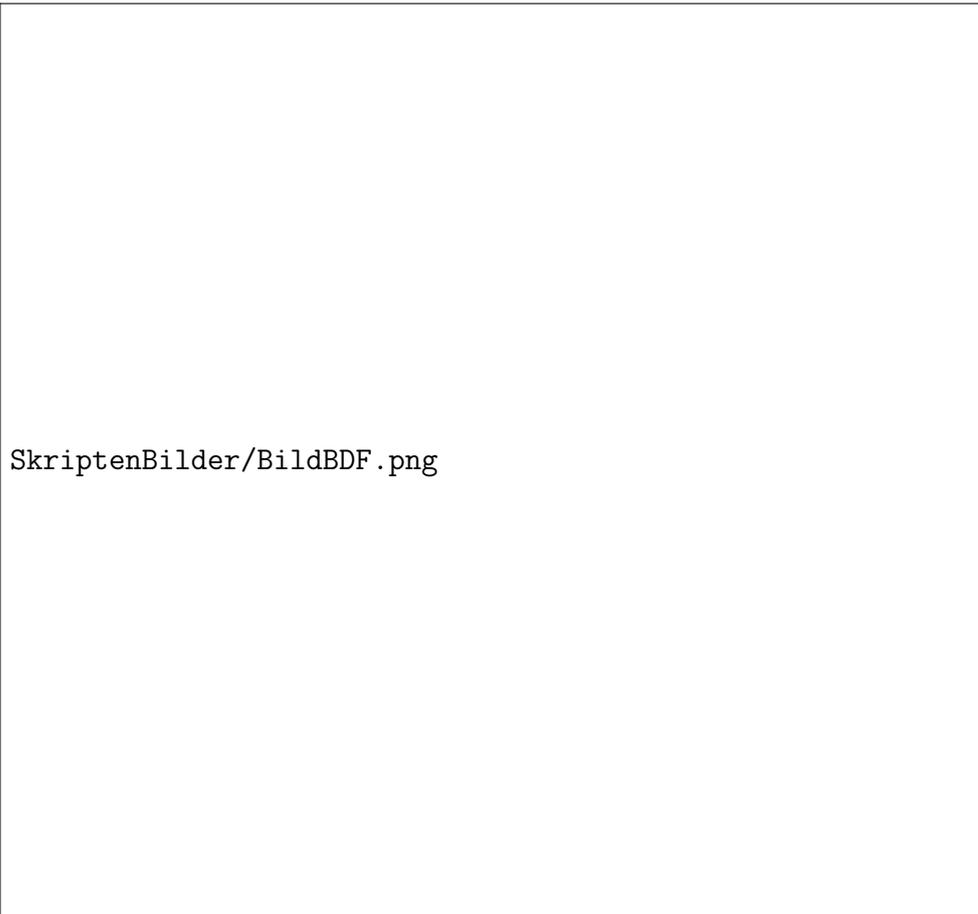
*Jede in  $M$  enthaltene Mannigfaltigkeit echt kleinerer Dimension ist für dieses Maß eine Nullmenge, und jede stetige  $k$ -Form liefert ein Borelmaß.*

7.4.3. Die Notation  $|\omega|$  hatten wir eigentlich bereits vereinbart für den Grad einer Differentialform, also  $|\omega| = p$  im Fall einer  $p$ -Form. Es ist also a priori ungeschickt, dieselbe Notation noch für ein völlig anderes Konzept zu verwenden. Andererseits sind beide Notationen üblich, und welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist, kann der Leser leicht aus dem Kontext erschließen: Im Wesentlichen tritt  $|\omega|$  in der Bedeutung als Grad fast nur im Exponenten von  $(-1)$  auf, und  $|\omega|$  in der Bedeutung als Maß nie im Exponenten.

7.4.4. Auf der rechten Seite meint  $e_1, \dots, e_k$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^k$ , auf der also unsere  $k$ -Form  $\varphi^*\omega$  an jeder Stelle ausgewertet werden soll. Für die 2-Form  $\eta = y^2 \sin x \, dx \wedge dy$  auf dem  $\mathbb{R}^2$  etwa wäre  $\eta(e_1, e_2)$  die Funktion  $y^2 \sin x$ . Das Integral auf der rechten Seite ist als Integral in Bezug auf das Lebesgue-Maß der meßbaren reellwertigen Funktion  $p \mapsto |(\varphi^*\omega)_p(e_1, \dots, e_k)|$  über die meßbare Menge  $\varphi^{-1}(A) \subset W \subset \mathbb{R}^k$  zu verstehen. Mit einer  $k$ -Form meinen wir vorerst noch eine relative  $k$ -Form. Sobald wir die wirklichen  $k$ -Formen auf Mannigfaltigkeiten kennenlernen, wird dieselbe Definition jedoch auch für diese sinnvoll und richtig werden.

7.4.5. Ich will einen wesentlichen Unterschied zum in 6.9.1 eingeführten Flächenmaß hervorheben: Das Maß zu einer Differentialform können wir auf Untermannigfaltigkeiten beliebiger endlichdimensionaler Räume einführen, wohingegen wir das Flächenmaß nur auf Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  erklärt haben und bestenfalls auf Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler euklidischer Räume hätten erklären können.

*Beispiel 7.4.6 (Maß einer Flußdichte).* Ist  $X$  ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und  $M \subset X$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit alias Fläche und  $\omega$  die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 7.2.5, so ordnet das Maß  $|\omega|$  jedem Flächenstück auf  $M$  die Gesamtmasse an Gas zu, die im gegebenen Zeitintervall hindurchtritt. In welcher Richtung das Gas an der einen oder anderen Stelle hindurchtritt, beachten



Versuch einer graphischen Darstellung des Maßes  $|xy dx \wedge dy| = xy\lambda^2$  der Differentialform  $xy dx \wedge dy$ , die wir in 7.2 versucht hatten, graphisch darzustellen. Das Maß einer Teilmenge wäre so in etwa zu denken als die Zahl der in ihr enthaltenen schwarzen Punkte.

wir dabei nicht, deshalb die Betragsstriche. Wir fordern auch nicht, daß  $M$  orientiert oder orientierbar sein soll, es dürfte sich etwa um ein Möbiusband handeln.

*Beispiel 7.4.7.* Das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^k$  ist das Maß zu  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ , in Formeln  $d^k x = |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k|$ . Speziell ist  $|dx|$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$ . In diesem Fall erlauben wir uns aus den bereits in 6.2.17 dargelegten Gründen auch die Notation  $dx$ . Allgemeiner erhalten wir für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar die Gleichheit von Maßen  $|f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k| = |f| d^k x$ .

*Beispiel 7.4.8.* Ist  $M$  eine 0-Mannigfaltigkeit, als da heißt eine diskrete Teilmenge eines endlichdimensionalen Raums, und  $\omega$  eine relative 0-Form alias eine reellwertige Funktion  $f$  auf  $M$ , so ist  $|\omega|$  das Maß, das jedem Punkt  $p \in M$  als Maß den Betrag des Funktionswerts  $|\omega_p| = |f(p)|$  zuordnet.

*Beispiel 7.4.9.* Wir betrachten als Differentialform die 1-Form  $\omega = dx$  auf  $\mathbb{R}^2$  und als Untermannigfaltigkeit die Kreislinie  $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . In diesem Fall stimmt das Maß  $|dx|$  auf  $S^1$  überein mit der Summe der Bildmaße  $\mu_{\pm}$  des Lebesgue-Maßes auf dem Intervall  $[-1, 1]$  unter seinen vertikalen Projektionen auf den oberen bzw. auf den unteren Halbkreis. Insbesondere hätten wir also  $|dx|(S^1) = 4$ . In der Tat, betrachten wir etwa die Karte  $\varphi : (-1, 1) \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$  und eine Borelmenge  $A$  in ihrem Bild, dem offenen oberen Halbkreis, so ergibt sich mit unseren Definitionen

$$|dx|(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi^*(dx)(e_1)| = \int_{\varphi^{-1}(A)} |dt(e_1)| = \int_{\varphi^{-1}(A)} 1 = \lambda(\varphi^{-1}(A))$$

für  $\lambda$  das Lebesguemaß auf  $[-1, 1]$ .

7.4.10. Etwas vage mag man sich im Fall einer 2-Mannigfaltigkeit alias Fläche im Anschauungsraum vorstellen, daß wir unsere Fläche lokal durch “parallelogrammförmige Schuppen” approximieren, denen wir mithilfe unserer 2-Form jeweils ein Maß zuordnen können, indem wir an jeder Stelle die beiden Kantenvektoren unserer parallelogrammförmigen Schuppen in die der besagten Stelle zugeordnete alternierende bilineare Abbildung einsetzen und vom Resultat den Betrag nehmen. Dann gilt es, mit immer feineren Schuppen in geeigneter Weise zum Grenzwert überzugehen. Konkreter erkläre ich nun eine Interpretation durch Riemannsummen. Sei dazu  $(W, \varphi)$  eine orientierte Karte einer der Einfachheit der Notation halber zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$ , sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset W$  ein Rechteck und  $P = \varphi(Q) \subset M$  sein Bild. Sei weiter  $\omega : M \rightarrow \text{Alt}^2(\vec{X})$  eine stetige relative 2-Form auf  $M$ . Wir betrachten für  $r \geq 1$  die äquidistanten Unterteilungen  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ ,  $c = c_0 < c_1 < \dots < c_r = d$  der Kanten von  $Q$



In diesem Bild soll angedeutet werden, welches Maß auf der Kreislinie eine Einsform auf der Papierebene liefert. Denken wir uns etwa die Einsform  $y dx$ . Für eine meßbaren Menge wie dem eingezeichneten  $A$  dürfen wir uns das Maß so vorstellen: Wir approximieren durch einen Polygonzug und summieren die Beträge der Werte unserer Differentialform auf den Kantenvektoren. Eine Approximation von  $|y dx|(A)$  wäre also etwa

$$|a_2 v_1| + b_2 w_1 = |1 \cdot 0| + |(-1) \cdot (-1)| = 1.$$



Die gepunkteten Pfeile stellen die Vektoren  $p_{3,0} - p_{2,0}$  und  $p_{2,1} - p_{2,0}$  dar, der Betrag des Werts von  $\omega_{p_{2,0}}$  auf diesem Paar von Vektoren geht in die Riemannsumme  $S_P^3$  ein.

in jeweils  $r$  Segmente, bezeichnen mit  $q_{i,j} = (a_i, c_j)$  die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf  $Q$ , und mit  $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$  die Bilder dieser Gitterpunkte in  $P \subset M$ . Dann definieren wir die  $r$ -te **Riemannsumme**  $S_P^r|\omega|$  durch die Formel

$$S_P^r|\omega| = \sum_{i,j=0}^{r-1} |\omega_{p_{i,j}}(p_{i+1,j} - p_{i,j}, p_{i,j+1} - p_{i,j})|$$

Natürlich hängt diese Summe von der Karte  $(W, \varphi)$  ab, auch wenn das in der Notation nicht zum Ausdruck kommt. Wir können nun das Maß  $|\omega|(P)$  interpretieren als den Grenzwert

$$|\omega|(P) = \lim_{r \rightarrow \infty} S_P^r|\omega|$$

Den Beweis dieser Tatsache entlang der Grundlinie des Beweises von 4.5.9 überlassen wir dem Leser zur Übung.

*Beweis von 7.4.2.* Der Beweis von 6.9.1 kann fast Wort für Wort wiederholt werden, wobei wir nur für jede Karte  $(W, \varphi)$  auf  $W$  statt der Funktionen  $\text{vol}(d_x\varphi)$  die Beträge der Funktionen  $\omega_\varphi$  mit  $\omega_\varphi(x) = (\varphi^*\omega)_x(e_1, \dots, e_k)$  einsetzen müssen. Der entscheidende Schritt besteht dann wieder darin, für je zwei Karten  $(W, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  mit  $\varphi(W) = \psi(V)$  und Kartenwechsel  $g = \psi^{-1} \circ \varphi : W \xrightarrow{\sim} V$  die Formel

$$|\omega_\varphi(x)| = |\det d_x g| |\omega_\psi(x)|$$

zu zeigen. Per definitionem haben wir jedoch  $\varphi^*\omega = \omega_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$  und ebenso  $\psi^*\omega = \omega_\psi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$  und wegen  $\psi \circ g = \varphi$  gilt  $g^*(\psi^*\omega) = \varphi^*\omega$ . Mit 7.2.15 folgt dann sofort  $(\det d_x g)\omega_\psi(g(x)) = \omega_\varphi(x)$  für alle  $x \in W$ , und nehmen wir hier auf beiden Seiten Beträge, so steht unsere Behauptung auch schon da.  $\square$

*Übung 7.4.11.* Wir betrachten auf  $\mathbb{R}^2$  die Funktionen  $f(x, y) = \sin(xy)$  und  $g(x, y) = x^2y + y$  und die 2-Form  $\omega = df \wedge dg$ . Man schreibe das Maß  $|\omega|$  auf  $\mathbb{R}^2$  als Vielfaches des Lebesgue-Maßes.

*Übung 7.4.12.* Seien  $U, V$  offene Teilmengen  $n$ -dimensionaler reeller Räume und sei  $\phi : U \xrightarrow{\sim} V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Gegeben eine meßbare  $n$ -Form  $\omega$  auf  $V$  zeige man die Verwandtschaft von Maßen  $\phi : |\phi^*\omega| \rightsquigarrow |\omega|$ . In anderen Worten folgt also aus der Verwandtschaft von meßbaren  $n$ -Formen  $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$  die Verwandtschaft von Maßen  $\phi : |\eta| \rightsquigarrow |\omega|$ . Hinweis: Das ist bei rechtem Lichte besehen nur eine Umformulierung der Transformationsformel 6.8.1.

*Übung 7.4.13.* Die Kovektorfelder  $d\vartheta$  und  $dr$  auf  $\mathbb{R}^2$  zu unseren Polarkoordinaten aus 3.1.23 liefern Maße auf dem Kreis  $K \subset \mathbb{R}^2$  mit Radius 4 und auf der Parallelen  $G \subset \mathbb{R}^2$  zur  $y$ -Achse durch den Punkt  $(1, 0)$ . Man finde stetige Funktionen auf diesen Mannigfaltigkeiten derart, daß ihre Produkte mit den jeweiligen Flächenmaßen die Maße zu unseren Differentialformen liefern.

**Definition 7.4.14.** Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Raums. Wir nennen eine meßbare  $k$ -Form  $\omega$  auf  $M$  **nichtnegativ** genau dann, wenn für alle Punkte  $p \in M$  und jede angeordnete Basis  $v_1, \dots, v_k$  der Orientierung  $\varepsilon$  des Tangentialraums  $T_p M$  gilt

$$\varepsilon \omega_p(v_1, \dots, v_k) \geq 0$$

**Definition 7.4.15.** Wir nennen eine  $k$ -Form  $\omega$  auf einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M$  eines endlichdimensionalen reellen Raums **integrierbar über  $M$**  genau dann, wenn sie meßbar ist und wenn für das nach 7.4.2 zugehörige Maß  $|\omega|$  gilt  $|\omega|(M) < \infty$ .

**Satz 7.4.16 (Integration von Differentialformen).** *Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Raums. So bilden die über  $M$  integrierbaren  $k$ -Formen einen Untervektorraum im Raum aller  $k$ -Formen auf  $M$ , und es gibt auf diesem Untervektorraum genau eine Linearform  $\omega \mapsto \int_{\vec{M}} \omega$  derart, daß für alle nichtnegativen  $k$ -Formen  $\omega$  gilt*

$$\int_{\vec{M}} \omega = |\omega|(M)$$

*Beispiel 7.4.17 (Integration einer Flußdichte).* Ist  $X$  ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und  $M \subset X$  eine orientierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit alias Fläche und  $\omega$  die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 7.2.5 und 7.4.6, so beschreibt das Integral von  $\omega$  über  $M$  die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche  $M$  hindurchtritt. Gas, das in der Gegenrichtung durch unsere Fläche tritt, schlägt dabei negativ zu Buche.

*Beweis.* Daß die integrierbaren  $k$ -Formen einen Untervektorraum bilden, scheint mir offensichtlich. Um die Eindeutigkeit der fraglichen Linearform zu zeigen, betrachten wir für eine beliebige meßbare  $k$ -Form  $\omega$  auf  $M$  die meßbare Teilmenge

$$M^+ = \left\{ p \in M \left| \begin{array}{l} \text{Es gilt } \omega_p(v_1, \dots, v_k) > 0 \text{ für eine} \\ \text{und jede orientierte angeordnete} \\ \text{Basis } v_1, \dots, v_k \text{ von } T_p M \end{array} \right. \right\}$$

Unsere meßbare  $k$ -Form  $\omega$  können wir nun schreiben als die Differenz  $\omega = \omega^+ - \omega^-$  zweier nichtnegativer Formen, indem wir etwa  $\omega^+$  erklären durch  $\omega_p^+ = \omega_p$  für  $p \in M^+$  und  $\omega_p^+ = 0$  sonst. Wir müssen also setzen

$$\int_{\vec{M}} \omega = |\omega^+|(M) - |\omega^-|(M)$$

und es bleibt nur zu zeigen, daß diese Vorschrift auch tatsächlich eine Linearform liefert. Hierbei ist nur die Additivität problematisch. Für je zwei integrierbare nichtnegative Formen  $\omega$  und  $\eta$  gilt jedoch offensichtlich

$$\int_{\vec{M}} \omega + \eta = \int_{\vec{M}} \omega + \int_{\vec{M}} \eta$$

Im allgemeinen schreiben wir nun  $\omega = \omega^+ - \omega^-$ ,  $\eta = \eta^+ - \eta^-$  und  $\omega + \eta = \rho = \rho^+ - \rho^-$  und folgern durch Einsetzen  $\omega^+ + \eta^+ + \rho^- = \omega^- + \eta^- + \rho^+$ . Wenden wir darauf die Additivität des Integrals für nichtnegative Formen an, so folgt sofort die Additivität des Integrals für beliebige integrierbare Formen.  $\square$

## 7.5 Integration von Differentialformen: Praxis

**Proposition 7.5.1 (Integration in lokalen Koordinaten).** *Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit in einem endlichdimensionalen reellen Raum,  $\varphi : W \rightarrow M$  eine Karte der Orientierung  $\varepsilon$  und  $\omega$  eine meßbare  $k$ -Form auf  $M$ , die außerhalb von  $\varphi(W)$  verschwindet. So ist  $\omega$  integrierbar genau dann, wenn die reellwertige Funktion  $(\varphi^*\omega)(e_1, \dots, e_k)$  integrierbar ist auf  $W$ , und in diesem Fall gilt*

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_W (\varphi^*\omega)(e_1, \dots, e_k) \lambda^n$$

*Beweis.* Für nichtnegative Formen  $\omega$  ist das im Wesentlichen unsere Definition 7.4.16, für beliebige Formen folgt es mithilfe unserer Zerlegung  $\omega = \omega^+ - \omega^-$  aus dem vorhergehenden Beweis von Satz 7.4.16.  $\square$

7.5.2. Nach der Definition in Satz 7.4.16 und 7.4.2 ändern sich Integrierbarkeit und Integral einer meßbaren Differentialform nicht, wenn wir ihre Werte auf einer Untermannigfaltigkeit echt kleinerer Dimension ändern. So können wir in der Praxis bei "vernünftigen" Karten erreichen, daß unsere Differentialformen außerhalb des Bildes der Karte verschwindet und die Proposition greift.

7.5.3. Unter den Annahmen und Notationen von 7.5.1 und wenn wir  $W$  mit der von  $\mathbb{R}^k$  induzierten Orientierung versehen, gilt für unsere integrierbare  $k$ -Form  $\omega$  auch

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_{\vec{W}} \varphi^* \omega$$

In der Tat folgt das unmittelbar aus den Definitionen, wenn wir das Differentialformenintegral auf der rechten Seite mittels der Karte  $\text{id} : W \xrightarrow{\sim} W$  berechnen. Ebenso folgt, daß  $\omega$  integrierbar ist genau dann, wenn  $\varphi^* \omega$  integrierbar ist.

**Beispiel 7.5.4 (Funktionenintegral als Differentialformenintegral).** Eine  $n$ -Form  $\eta$  auf einer offenen Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  hat die Gestalt  $\eta = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  für eine wohlbestimmte reellwertige Funktion  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ , eben der Funktion  $f$  gegeben durch  $f(x) = \eta_x(e_1, \dots, e_n)$ . Geben wir unserer offenen Teilmenge die von der Standardorientierung des  $\mathbb{R}^n$  induzierte Orientierung, so ist unsere  $n$ -Form  $\eta$  integrierbar über  $W$  genau dann, wenn die Funktion  $f$  integrierbar ist über  $W$  in Bezug auf das Lebesgue-Maß  $\lambda^n$ , und in diesem Fall gilt unter Verwendung unserer ganzen verschiedenen Notationen

$$\int_{\vec{W}} \eta = \int_{\vec{W}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_W f(x) d^n x = \int_W f \lambda^n$$

**Beispiel 7.5.5.** Wir berechnen das Integral der 2-Form  $x^2 dx \wedge dy$  über die obere Hemisphäre  $H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$  mit der Orientierung, für die die beiden ersten Vektoren  $e_1, e_2$  der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  in dieser Reihenfolge eine orientierte Basis des Tangentialraums am Pol  $T_{(0,0,1)}H$  bilden. Wir betrachten das offene Rechteck  $R = (0, \pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$  und die orientierte Karte  $\phi : R \rightarrow H, (\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta)$ , anschaulich gesprochen eine “liegende Version” unserer Kugelkoordinaten aus 3.2.11, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\vec{H}} x^2 dx \wedge dy &= \int_{\vec{R}} \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) \wedge d(\cos \varphi \sin \vartheta) \\ &= \int_{\vec{R}} \cos^2 \vartheta (-\sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\cos \varphi \cos \vartheta d\vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta d\varphi) \\ &= \int_{\vec{R}} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta \wedge d\varphi \\ &= \int_R \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2(2\vartheta) d\vartheta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{\cos 4\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Um diese Rechnung zu rechtfertigen, müssen wir sie von hinten nach vorne lesen: Der Übergang zum Doppelintegral ist erlaubt, da der Integrand nichtnegativ ist und so der positive Fubini greift, der dann hinwiederum erst

recht eigentlich die Integrierbarkeit unserer Funktion auf dem Rechteck  $R$  und damit die Integrierbarkeit unserer Differentialform auf der Hemisphäre  $H$  zeigt. Bei der Rechnung selber ist der erste Schritt Übung 7.5.3 mitsamt dem Vertauschen vom Zurückholen mit Dachprodukt und Differential 3.1.19, der zweite die Formel 3.1.10 für das Differential einer Funktion, der dritte beruht auf dem Alternieren und der Bilinearität des Dachprodukts, und der vierte auf Proposition 7.5.1. Man hätte auch mit 7.5.1 und einer Nebenrechnung direkt die vierte Gleichung erhalten können, aber das schien es mir weniger übersichtlich.

7.5.6. Um die Integration von Differentialformen anschaulich zu machen, erkläre ich ihre Interpretation durch Riemannsummen. Sei dazu  $(W, \varphi)$  eine orientierte Karte einer der Einfachheit der Notation halber zweidimensionalen orientierten Untermannigfaltigkeit  $\vec{M}$  eines reellen Raums  $X$ , sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset W$  ein Rechteck und sei  $\omega : M \rightarrow \text{Alt}^2(\vec{X})$  eine stetige relative 2-Form auf  $M$  mit  $(\text{supp } \omega) \cap M \subset \varphi(Q)$ , wobei der Pfeil über dem  $X$  den zugehörigen Richtungsraum meint, der Pfeil über dem  $M$  dahingegen eine feste gewählte Orientierung andeutet. Wir betrachten für  $r \geq 1$  die äquidistanten Unterteilungen  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ ,  $c = c_0 < c_1 < \dots < c_r = d$  der Kanten von  $Q$  in jeweils  $r$  Segmente, bezeichnen mit  $q_{i,j} = (a_i, c_j)$  die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf  $Q$ , und mit  $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$  die Bilder dieser Gitterpunkte in  $M$ . Dann definieren wir die  $r$ -te **Riemannsumme**  $S_{\vec{M}}^r(\omega)$  durch die Formel

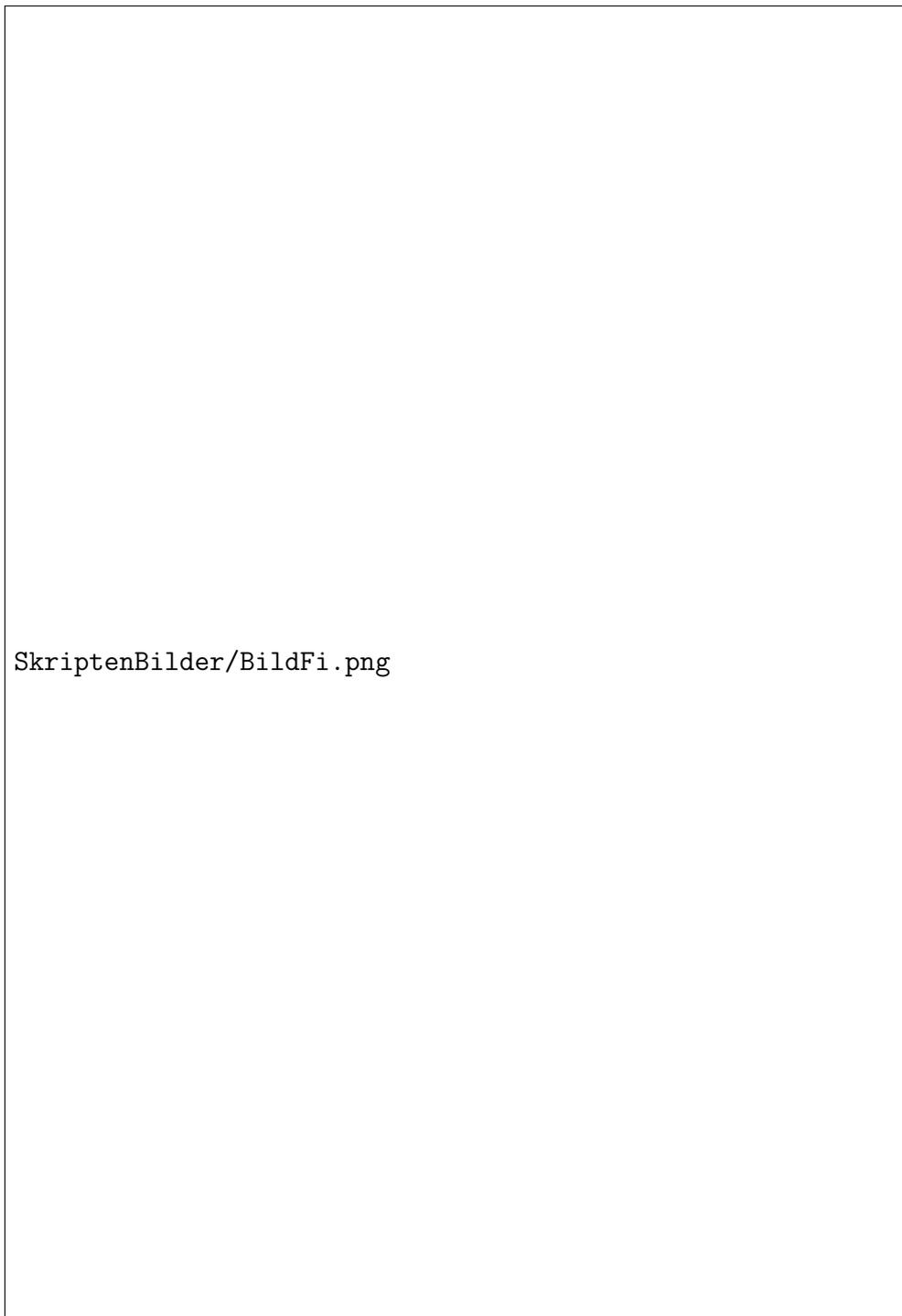
$$S_{\vec{M}}^r(\omega) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \omega_{p_{i,j}}(p_{i+1,j} - p_{i,j}, p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

Natürlich hängt diese Summe von der Karte  $(W, \varphi)$  ab, auch wenn das in der Notation nicht zum Ausdruck kommt. Wir können nun das Integral von  $\omega$  über  $M$  interpretieren als den Grenzwert

$$\int_{\vec{M}} \omega = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{\vec{M}}^r(\omega)$$

Den Beweis dieser Tatsache entlang der Grundlinie des Beweises von 4.5.9 überlassen wir dem Leser zur Übung.

7.5.7. Unter der Voraussetzung einer quadratischen Karte, in Formeln  $b-a = d-c$ , betrachten wir nun die Spiegelung  $\tau$  an der Hauptdiagonalen und die neue Karte  $\varphi \circ \tau$ . Sie ist negativ orientiert und ihre Riemannsummen sind dieselben wie die Riemannsummen von eben, wenn man nur in jedem Summanden den ersten und den zweiten Eintrag der bilinearen Abbildung  $\omega$  vertauscht und das von der negativen Orientierung der Karte herrührende



Die gepunkteten Pfeile stellen die Vektoren  $p_{3,0} - p_{2,0}$  und  $p_{2,1} - p_{2,0}$  dar, der Wert von  $\omega_{p_{2,0}}$  auf diesem Paar von Vektoren, genommen in einer durch die Orientierung gegebenen Reihenfolge, geht in die Riemannsumme  $S_M^3$  ein.

Vorzeichen berücksichtigt. Ist also  $\omega$  alternierend, so liefert unsere neue Karte dieselben Riemannsummen und dasselbe Integral. Das soll die in unserem Satz enthaltene Aussage veranschaulichen, daß das Integral einer alternierenden Form unabhängig ist von den zur Berechnung gewählten Karten.

7.5.8. Die Integrale von Differentialformen über orientierte Untermannigfaltigkeiten eines  $\mathbb{R}^n$  der Dimensionen 0 oder 1 bzw. der Kodimensionen 0 oder 1 werden von den Anwendern oft in anderer Weise interpretiert. Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang die Fälle mit  $n \leq 3$ .

*Beispiel 7.5.9 (Summation als Differentialformenintegral).* Im Fall einer kompakten nulldimensionalen Mannigfaltigkeit alias einer endlichen Menge ist das Integral einer Nullform alias Funktion schlicht die Summe der Funktionswerte multipliziert mit den jeweils durch die Orientierung gegebenen Vorzeichen, in Formeln

$$\int_{\vec{M}} f = \sum_{p \in M} \operatorname{sgn}(p) f(p)$$

Im nichtkompakten Fall ist unsere Nullform alias Funktion integrierbar genau dann, wenn die Summe ihrer Werte absolut konvergiert, und dann gilt die obige Formel entsprechend.

*Beispiel 7.5.10 (Wegintegral als Differentialformenintegral).* Eine 1-Form  $\omega$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  hat die Gestalt  $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$ . Gegeben eine orientierte 1-Mannigfaltigkeit  $K$  verstehen wir ganz allgemein unter einer **orientierten Parametrisierung von  $K$**  eine orientierte Karte  $\varphi : W \rightarrow K$  mit dichtem Bild, bei der  $W \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist. Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeit und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbarer Weg, dessen Einschränkung auf das offene Intervall  $(a, b)$  eine orientierte Parametrisierung von  $K$  ist, so fällt das Integral unserer 1-Form  $\omega$  über unsere eindimensionale orientierte Mannigfaltigkeit  $K$  zusammen mit dem Integral der 1-Form  $\omega$  über den Weg  $\varphi$  und wird von Anwendern meist geschrieben als das Wegintegral des Vektorfelds  $v = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top$  längs  $\varphi$ , in Formeln

$$\int_{\vec{K}} \omega = \int_{\varphi} \omega = \int_a^b \langle v, d\varphi \rangle = \int_a^b v \cdot d\varphi$$

*Beispiel 7.5.11.* Der Fall der Integration von Differentialformen über Hyperflächen benötigt von den hier explizit behandelten Fällen den größten begrifflichen Aufwand und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen.

**Definition 7.5.12.** Ist  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine Hyperfläche, so gibt es zu jedem Punkt  $p \in M$  genau zwei Vektoren der Länge Eins in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , die auf dem Tangentialraum  $T_p M$  senkrecht stehen. Ist  $M$  darüber hinaus orientiert, so hat

genau ein Vektor  $N_p$  von diesen beiden die Eigenschaft, daß für jede angeordnete Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $T_p M$  der Orientierung  $\varepsilon$  die Standardorientierung der angeordneten Basis  $N_p, v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  auch  $\varepsilon$  ist. Wir erhalten so eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} N : M &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p &\mapsto N_p \end{aligned}$$

Man nennt sie das **orientierte Normalenfeld**.

7.5.13. Wir nummerieren nun die Koordinaten auf dem  $\mathbb{R}^{n+1}$  etwas unüblich  $x_0, x_1, \dots, x_n$  und ordnen jedem Vektor  $F \in \mathbb{R}^{n+1}$  eine alternierende Multilinearform  $\omega_F \in \text{Alt}^n(\mathbb{R}^{n+1})$  zu durch die Vorschrift

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) = \det(F|v_1|\dots|v_n)$$

wo rechts die Matrix mit den entsprechenden Spaltenvektoren zu verstehen ist. In derselben Weise ordnen wir auch jedem Vektorfeld  $F$  auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  eine  $n$ -Form  $\omega_F$  zu und erkennen durch das Auswerten an Tupeln der Standardbasis, daß sie geschrieben werden kann in der Gestalt

$$\omega_F = \sum_{i=0}^n (-1)^i F_i \, dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

Im  $\mathbb{R}^3$  entspricht speziell einem Vektorfeld  $F = (F_x, F_y, F_z)$  die 2-Form

$$\omega_F = F_x \, dy \wedge dz + F_y \, dz \wedge dx + F_z \, dx \wedge dy$$

wobei die unteren Indizes nicht als partielle Ableitungen mißverstanden werden dürfen, sondern vielmehr die Komponenten unseres Vektorfelds meinen, die wir auch hätten  $F_1, F_2, F_3$  notieren können. Mit diesen ganzen Begriffsbildungen können wir nun formulieren:

**Proposition 7.5.14 (Fluß als Differentialformenintegral).** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine orientierte Hyperfläche und  $F$  ein meßbares relatives Vektorfeld auf  $M$ . So ist die zu unserem Vektorfeld  $F$  gehörige  $n$ -Form  $\omega = \omega_F$  integrierbar über  $M$  genau dann, wenn das Skalarprodukt von  $F$  mit dem orientierten Normalenfeld integrierbar ist über  $M$ , und in diesem Fall gilt*

$$\int_{\vec{M}} \omega_F = \int_M \langle F, N \rangle \sigma = \int_M F \cdot N \, \sigma$$

7.5.15. Die Mitte und die rechte Seite unterscheiden sich hier nur in der Notation für das Skalarprodukt. Das Integral des Skalarprodukts unseres Vektorfelds  $F$  mit dem orientierten Normalenfeld  $N$  heißt der **Fluß des Vektorfelds  $F$  durch die orientierte Hyperfläche  $M$** . Dies Oberflächenintegral

mag der Anschauung besser zugänglich sein als unser Integral über eine Differentialform. Für das explizite Rechnen ist jedoch die Darstellung als Integral einer Differentialform meist günstiger, wie etwa Beispiel 7.5.5 illustriert.

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine positiv orientierte bijektive Karte  $\varphi : W \xrightarrow{\sim} M$  gibt. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir unser Vektorfeld  $F$  in der Form  $p \mapsto F_p$ , wo der Index unglücklicherweise eine völlig andere Bedeutung hat als in 7.5.13. Wir zerlegen nun unser Vektorfeld  $F$  an jedem Punkt  $p \in M$  in einen orthogonalen und einen tangentialen Anteil als  $F_p = \langle F_p, N_p \rangle N_p + R_p$  mit  $R_p \in T_p M$  und finden für alle  $x \in W$

$$\begin{aligned} (\varphi^* \omega)_x(e_1, \dots, e_n) &= \omega_{\varphi(x)}(d_x \varphi(e_1), \dots, d_x \varphi(e_n)) \\ &= \det(F_{\varphi(x)} | d_x \varphi) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \det(N_{\varphi(x)} | d_x \varphi) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \text{vol}(d_x \varphi) \end{aligned}$$

wo in der zweiten Zeile die quadratische Matrix gemeint ist, die aus der Jacobi-Matrix zu  $d_x \varphi$  entsteht durch Anfügen von  $F_{\varphi(x)}$  als erster Spalte. Die Gleichheit der beiden Integrale folgt nun aus den Definitionen.  $\square$

*Beispiel 7.5.16.* Anschaulich kann man unser Integral aus 7.5.5 also auch als den Fluß durch die obere Hemisphäre des senkrechten Vektorfelds  $x^2 e_3$  verstehen, wie wir in 7.5.14 im allgemeinen zeigen werden. In der Notation von dort hätten wir etwa

$$\int_{\bar{H}} x^2 dx \wedge dy = \int_H (x^2 e_3 \cdot N) \sigma$$

Hier meint  $\sigma$  das Oberflächenmaß der Einheitssphäre und  $N$  das “nach außen weisende Normalenfeld”, das in unserem Fall auch das “orientierte Normalenfeld” nach 7.5.12 ist. Zur Probe rechne ich hier die rechte Seite auch noch direkt aus. Auf der Einheitssphäre stimmen ja der Ortsvektor und der nach außen weisende Normalenvektor überein, so daß der Rückzug der Funktion  $x^2 e_3 \cdot N$  bezüglich unserer Karte  $\phi : R \rightarrow H$  die Funktion  $\cos^2 \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta$  ist. Um nach dem Oberflächenmaß zu integrieren, gilt es die Gram’sche Matrix zu berechnen. In unserem Fall haben wir

$$d\phi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

und die Matrix der Skalarprodukte der Spaltenvektoren ergibt sich zu

$$(\mathrm{d}\phi)^\top \mathrm{d}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

und die Wurzel aus deren Determinante zu  $\sin \vartheta$ , so daß wir bei demselben Doppelintegral über  $\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi$  landen wie in 7.5.5.

*Übung 7.5.17.* Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds  $F : (x, y, z) \mapsto (x, 0, 0)$  durch die Einheitssphäre, die Sie dazu mit einer Orientierung ihrer Wahl versehen mögen.

## 7.6 Äußere Ableitung von Differentialformen

7.6.1. Ist  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum, so definieren wir für alle  $k \geq 0$  eine lineare Abbildung

$$\mathrm{alt} : \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Alt}^k V) \rightarrow \mathrm{Alt}^{k+1} V$$

Leser mit den entsprechenden Kenntnissen in multilinearer Algebra können sie unter den in ?? gegebenen Identifikationen  $\bigwedge^k(V^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^k V$  verstehen als die Komposition  $\mathrm{Hom}(V, \mathrm{Alt}^k V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes \bigwedge^k(V^*) \xrightarrow{\wedge} \bigwedge^{k+1}(V^*)$  des Inversen zum Standardisomorphismus  $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$  aus ?? mit dem Dachprodukt. Weniger Gebildete definieren diese Abbildung explizit, indem sie ähnlich wie bei der Konstruktion des Dach-Produkts setzen

$$(\mathrm{alt} f)(v_0, v_1, \dots, v_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i (f(v_i))(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k)$$

Hier soll die ‘‘Tarnkappe’’ über  $v_i$  wie üblich bedeuten, daß dieser Eintrag beim entsprechenden Summanden auszulassen ist.

**Definition 7.6.2.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $A \subset X$  halboffen. Eine Differentialform  $\omega \in \Omega^k(A)$  heißt **differenzierbar** bzw. **stetig differenzierbar** genau dann, wenn sie als Abbildung  $\omega : A \rightarrow \mathrm{Alt}^k \vec{X}$  von der halboffenen Teilmenge  $A$  des endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  in den endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $\mathrm{Alt}^k \vec{X}$  differenzierbar ist im Sinne von 1.2.2 bzw. stetig differenzierbar im Sinne von 1.5.2, wenn also ihr Differential auch stetig ist als Abbildung  $A \rightarrow \mathrm{Hom}(\vec{X}, \mathrm{Alt}^k \vec{X})$  gegeben durch  $x \mapsto \mathrm{d}_x \omega$ .

**Definition 7.6.3.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $A \subset X$  halboffen. Gegeben  $\omega \in \Omega^k(A)$  eine differenzierbare  $k$ -Form erklären wir eine  $(k+1)$ -Form  $d\omega \in \Omega^{k+1}(A)$  durch die Vorschrift

$$(\mathrm{d}\omega)_x := \mathrm{alt}(\mathrm{d}_x \omega)$$

wo  $d_x\omega : V \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$  das Differential im Sinne von 1.2.2 unserer Form  $\omega : A \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$  an einer Stelle  $x \in A$  meint. Wir nennen  $d\omega$  die **äußere Ableitung von  $\omega$** . Den Unterschied zwischen  $d\omega$  und  $d\omega$  bringen wir nur durch die Wahl der Schriftart zum Ausdruck. Eine Differentialform, deren äußere Ableitung verschwindet, heißt **geschlossen**.

7.6.4. Um uns die äußere Ableitung  $d\omega$  zu veranschaulichen, erinnern wir zunächst an den Fall einer Nullform alias Funktion, die wir dann statt  $\omega$  lieber  $f$  nennen. Deren äußere Ableitung  $(df)_x$  ist schlicht das Differential  $d_x f$  bei  $x$  und kann dadurch beschrieben werden, daß es jedem Richtungsvektor  $\vec{v} \in \vec{X}$  die Zahl

$$(df)_x(\vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + t\vec{v}) - f(x))$$

zuordnet. Im Fall einer Einsform alias eines Kovektorfelds  $\omega$  kann seine äußere Ableitung  $(d\omega)_x$  bei  $x$  analog dadurch beschrieben werden, daß sie jedem geordneten Paar von Richtungsvektoren  $(\vec{v}, \vec{w}) \in \vec{X}^2$  die Zahl

$$(d\omega)_x(\vec{v}, \vec{w}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(x, t\vec{v}, t\vec{w})} \omega$$

zuordnet mit der Notation  $\gamma(x, t\vec{v}, t\vec{w})$  für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke  $x$  und Kantenvektoren  $t\vec{v}$  und  $t\vec{w}$  umläuft, oder genauer, der stückweise linear läuft erst von  $x$  nach  $x + t\vec{v}$ , dann weiter nach  $x + t\vec{v} + t\vec{w}$ , von da nach  $x + t\vec{w}$ , und dann wieder zurück nach  $x$ . Möglicherweise haben Sie das bereits als Übung 3.6.8 gezeigt. Im allgemeinen Fall einer  $k$ -Form  $\omega$  schließlich haben wir

$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k+1}} \int_{F(x, t\vec{v}_0, \dots, t\vec{v}_k)} \omega$$

wobei wir uns  $F$ , zumindest für  $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k$  linear unabhängig, als die in geeigneter Weise orientierte Oberfläche eines Parallelepipedes mit Ecke  $x$  und Kantenvektoren  $t\vec{v}_i$  denken dürfen, über die wir dann unsere  $k$ -Form integrieren können, wenn wir etwas Mut beweisen und beim Integrieren von den Kanten einmal absehen. Es mag eine gute Übung sein, etwa für die zweite Aussage auch einmal einen Beweis auszuschreiben.

*Beispiel 7.6.5.* Offensichtlich ist die Zuordnung  $\omega \mapsto d\omega$  linear und für Nullformen alias Funktionen  $f$  gilt  $df = d_x f$ . Ist  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $A \subset X$  halboffen,  $\omega_\circ \in \text{Alt}^k \vec{X}$  eine konstante  $k$ -Form und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so behaupten wir die Formel

$$d(f\omega_\circ) = df \wedge \omega_\circ$$



Der Weg  $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$  aus Übung 7.6.4. Mit  $t \rightarrow 0$  wird er natürlich immer kleiner.

Leser mit entsprechenden Kenntnissen in multilinearer Algebra erkennen das auf einen Blick, die anderen müssen dumpf rechnen, können dann aber die Formel zumindest verifizieren. Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  wird für eine Differentialform der Gestalt  $\omega = \sum a_I dx_I$  insbesondere ihre äußere Ableitung  $d\omega$  gegeben durch die Vorschrift

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx_I$$

Das folgt auch formal aus den allgemeineren Aussagen, die in den drei anschließenden Lemmata formuliert werden.

**Lemma 7.6.6.** *Sind  $\omega$  und  $\eta$  differenzierbare Differentialformen auf einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums, so gilt für ihr Produkt die **Leibniz-Regel***

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta$$

**Lemma 7.6.7.** *Sei  $\omega$  eine Differentialform auf einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums. Ist  $\omega$  stetig differenzierbar und  $d\omega$  auch stetig differenzierbar, so gilt*

$$d(d\omega) = 0$$

**Lemma 7.6.8.**  *$\mathcal{C}^2$ -verwandte Differentialformen haben verwandte äußere Ableitungen. Ist genauer und in Formeln  $\phi : A \rightarrow B$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume und  $\omega$  eine differenzierbare Differentialform auf  $B$ , so gilt*

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$$

7.6.9. Wie Sie noch sehen werden, erlauben diese Formeln ein außerordentlich elegantes Rechnen mit Differentialformen. Der hier gegebene Formalismus geht auf Élie Cartan's Arbeiten zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zurück. Die Verträglichkeit des äußeren Differentials mit Verwandtschaft macht die Umrechnung zwischen verschiedenen Koordinatensystemen so einfach, daß es auch bei anderen Umrechnungen oft der bequemste Weg ist, sie auf diesen Formalismus zurückzuführen. Als Beispiel bespreche ich die Umrechnung des Laplace-Operators in krummlinige Koordinaten in [7.9.17](#) folgende.

7.6.10. Man kann diese drei Lemmata durch explizite Rechnung in Koordinaten der Reihe nach beweisen. Mir schien jedoch ein anderes Vorgehen übersichtlicher, bei dem im Anschluß an einen Beweis des ersten Lemmas die beiden anderen in einer Art Kaminkletterei abwechselnd in wachsender Allgemeinheit gezeigt werden. Die letzte Regel [7.6.8](#) können wir auch  $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega \Rightarrow \phi : d\eta \rightsquigarrow d\omega$  schreiben. Der Leser sei ermutigt, sich das im

Lichte unserer Anschauung 7.6.4 bildlich klarzumachen. Die Regel  $dd\omega = 0$  ist zumindest für Nullformen im Lichte unserer Anschauung 7.6.4 leicht einzusehen, da das Integral des Differentials einer Funktion über jeden geschlossenen Integrationsweg verschwindet. Für Kovektorfelder sollte die Identität  $dd\omega = 0$  zumindest aus dem Stokes'schen Satz mit Ecken 7.8.24 heraus klar werden: Er besagt, daß das Integral von  $d\omega$  über eine Fläche unseres Parallelepipedes auch als Integral von  $\omega$  über dessen Rand geschrieben werden kann, und die Summe aller Randintegrale über die sechs Flächen unseres Parallelepipedes ist offensichtlich wieder Null.

*Beweis von 7.6.6.* Wir können  $\omega$  und  $\eta$  schreiben als Summen von Formen der Gestalt  $a\omega_\circ, b\eta_\circ$  mit  $\omega_\circ, \eta_\circ$  konstant und  $a, b$  differenzierbaren Funktionen. Es reicht also, die Behauptung für  $\omega = a\omega_\circ, \eta = b\eta_\circ$  zu prüfen. Im Fall von Funktionen liefert die Produktregel, wie bereits in 3.1.10 erwähnt, unmittelbar  $d(ab) = (da)b + a(db)$ . Dann gilt nach 7.6.5 aber  $d\omega = da \wedge \omega_\circ, d\eta = db \wedge \eta_\circ$  und damit  $d(\omega \wedge \eta) = ((da)b + a(db))\omega_\circ \wedge \eta_\circ$ . Da zusätzlich gilt  $db \wedge \omega_\circ = (-1)^{|b|}\omega_\circ \wedge db$ , folgt die Leibniz-Regel.  $\square$

*Beweis von 7.6.7 im Fall  $X = \mathbb{R}^n$ .* Für eine Nullform alias eine Funktion  $\omega = a$  auf einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  können wir ganz explizit rechnen

$$\begin{aligned} da &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \\ dda &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

wo wir die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen 2.1.10 verwendet haben, die wiederum aus der Annahme der Stetigkeit der zweiten Ableitungen folgt. Für eine  $k$ -Form  $\omega$  auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , sagen wir  $\omega = \sum_{|I|=k} a_I dx_I$ , erhalten wir damit sofort  $d(d\omega) = \sum d(da_I) \wedge dx_I = 0$ . Für eine  $k$ -Form  $\omega$  auf einer halboffenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  folgt unsere Behauptung dann aus der Stetigkeit von  $d(d\omega)$ .  $\square$

*Beweis von 7.6.8 für  $\phi$  affin.* Gilt unsere Formel für  $\omega$  und  $\eta$ , so nach der Produktregel auch für  $\omega \wedge \eta$ . Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 3.1.19. Für eine konstante 1-Form  $\omega_\circ$  und  $\phi$  affin ist natürlich  $\phi^*\omega_\circ$  auch eine konstante 1-Form, mithin gilt wie gewünscht  $d(\phi^*\omega_\circ) = 0 = \phi^*(d\omega_\circ)$ .  $\square$

*Beweis von 7.6.7 im Allgemeinen.* Ist  $\phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$  ein Isomorphismus von affinen Räumen, so folgt  $\phi^*(dd\omega) = dd(\phi^*\omega) = 0$  und mithin  $dd\omega = 0$ .  $\square$



SkriptenBilder/Bilddphio.png

Versuch einer anschaulichen Interpretation der Verträglichkeit zwischen der äußeren Ableitung und dem Zurückholen von Kovektorfeldern. Gegeben ist ein Kovektorfeld  $\omega$  rechts und ein Punkt  $p$  mit zwei Richtungsvektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  links. Das Wegintegral von  $\phi^*\omega$  über den kleinen Parallelogrammweg links approximiert  $(d(\phi^*\omega))_p(\vec{v}, \vec{w})$ . Es stimmt nach 3.3.9 überein mit dem Wegintegral des Kovektorfelds  $\omega$  über seinen Bildweg rechts, eingezeichnet als durchgezogener Rundweg aus vier krummen Stücken. Dahingegen approximiert das Wegintegral über den kleinen gestrichelten Parallelogrammweg rechts  $(d\omega)_{\phi(p)}(d_p\phi(\vec{v}), d_p\phi(\vec{w}))$ . Die Anschauung soll uns nun sagen, daß im Grenzwert  $t \rightarrow 0$  wie in 7.6.4 die entsprechenden beiden Wegintegrale rechts nach Teilen durch  $t^2$  gegen denselben Wert streben. In der Tat werden ja nicht nur die beiden Rundwegsintegrale klein von zweiter Ordnung, sondern die beiden Wege werden sich bei  $t \rightarrow 0$  auch sehr ähnlich, und das sorgt dafür, daß die Differenz ihrer Rundwegsintegrale für  $t \rightarrow 0$  sogar von dritter Ordnung verschwindet.

*Beweis von 7.6.8 im Allgemeinen.* Gilt unsere Formel für  $\omega$  und  $\eta$ , so nach der Produktregel auch für  $\omega \wedge \eta$ . Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 3.1.19. Für eine konstante 1-Form  $\omega_\circ$  und  $\phi$  beliebig haben wir hinwiederum  $\omega_\circ = da$  für eine geeignete Funktion  $a$ , genauer für jede affine Abbildung  $a$  von unserem affinen Raum nach  $\mathbb{R}$  mit linearem Anteil  $\vec{a} = \omega_\circ$ , und damit ergibt sich  $d\phi^*\omega_\circ = d\phi^*da = dd\phi^*a = 0 = \phi^*0 = \phi^*d\omega_\circ$ , wo wir im mittleren Schritt verwenden, daß uns die Regel  $\phi^*da = d\phi^*a$  für Funktionen  $a$  ja bereits aus 3.1.19 zur Verfügung steht.  $\square$

*Übung 7.6.11.* Prüfen Sie für die Differentialform  $x^2 dx \wedge dy - 4e^y dx \wedge dz$ , daß erst die äußere Ableitung bilden und dann auf Kugelkoordinaten übergehen dasselbe Resultat liefert wie erst auf Kugelkoordinaten übergehen und dann die äußere Ableitung bilden.

*Übung 7.6.12.* Zeigen Sie, daß für eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  die Bedingung  $d\omega = 0$  gleichbedeutend ist zur Bedingung, daß es eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\eta$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  gibt mit  $\omega = d\eta$ .

*Ergänzende Übung 7.6.13.* Bezeichnen wir die Koordinaten des  $\mathbb{R}^4$  mit  $x, y, z, t$  und betrachten auf dem  $\mathbb{R}^4$  eine allgemeine glatte 2-Form

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt \\ + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy$$

So ist die Gleichung  $dF = 0$  äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

für  $\operatorname{rot}$  der Rotation wie in 3.6.12 und  $\operatorname{div} B$  der ‘‘Divergenz’’ alias der Summe der partiellen Ableitungen nach  $x, y$  und  $z$  wie in 7.8.12. Leser mit physikalischer Vorbildung erkennen für  $H = cB$  die beiden ersten Maxwell’schen Gleichungen im Vakuum. Der Formalismus der Verwandtschaft von Differentialformen sagt uns dann, in welcher Weise solch ein elektromagnetisches Feld  $F$  in anderen Koordinaten geschrieben werden muß, und daß zumindest die beiden ersten Maxwell’schen Gleichungen nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen. Wie man sogar alle vier Maxwell’schen Gleichungen im Vakuum ähnlich elegant formulieren kann, wird in VII.3.17.1 erklärt.

## 7.7 Berandete Untermannigfaltigkeiten

7.7.1. Wir werden im folgenden Gebilde betrachten wollen wie etwa die Halbkugelschale mit Äquator  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ . Das ist

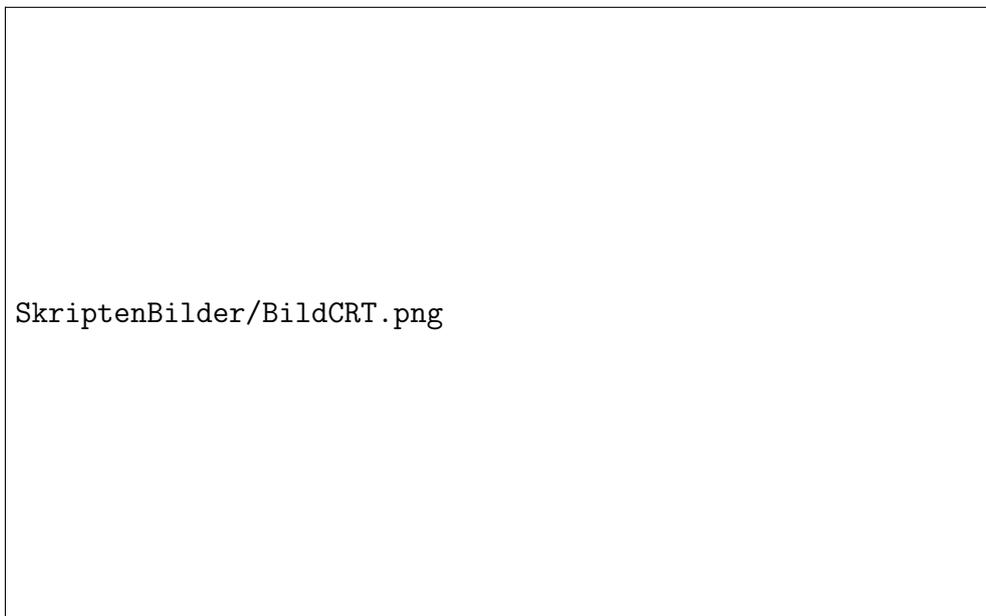
im Sinne unserer Definition 4.3.2 keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , da wir um Punkte auf dem Äquator keine Plättung im dort erklärten Sinne finden können. Derartige Gebilde sind aber gerade besonders wichtig für die Formulierung höherdimensionaler Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, weshalb wir sie nun auch in unseren allgemeinen begrifflichen Rahmen aufnehmen und dazu den Begriff einer “berandeten Untermannigfaltigkeit” einführen. Im selben Schritt diskutieren wir auch die in diesem Zusammenhang benötigten stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an Mannigfaltigkeiten.

**Definition 7.7.2.** Sei  $X$  ein reeller Raum endlicher Dimension und seien  $k \geq 1$  und  $1 \leq l \leq \infty$  gegeben. Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt eine  **$k$ -dimensionale berandete  $\mathcal{C}^l$ -Untermannigfaltigkeit** oder kurz **berandete Untermannigfaltigkeit** von  $X$  genau dann, wenn es für jeden Punkt  $p \in M$  ein Paar  $(U, g)$  gibt aus einer offenen Umgebung  $U \Subset X$  von  $p$  und einem  $\mathcal{C}^l$ -Diffeomorphismus  $g : U \xrightarrow{\sim} g(U)$  von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $g(U) \Subset \mathbb{R}^n$  derart, daß gilt:

$$g(U \cap M) = g(U) \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0)$$

Ein derartiges Paar  $(U, g)$  nenne ich eine **Plättung als berandete  $\mathcal{C}^l$ -Untermannigfaltigkeit** oder kurz **Randplättung** von  $M$  um  $p$ . Im Fall  $k = 0$  vereinbaren wir, daß eine berandete Untermannigfaltigkeit der Dimension Null dasselbe sein soll wie eine diskrete Teilmenge. Statt  $\mathcal{C}^\infty$  sagt man auch oft **glatt**. Sprechen wir ohne nähere Spezifizierung von berandeten Untermannigfaltigkeiten, so sind im Zweifelsfall stets glatte berandete Untermannigfaltigkeiten gemeint.

7.7.3. Eine Randplättung darf natürlich auch in  $\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}^{n-1}$  landen und ist dann sogar eine Plättung als Untermannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition 4.3.2. Jede  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition 4.3.2 ist insbesondere auch eine berandete  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit im Sinne von 7.7.2: Haben wir in der Tat im Fall  $k \geq 1$  eine Plättung  $(U, g)$  als  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit um einen Punkt  $p$ , so finden wir durch Verschieben auch eine Plättung als Untermannigfaltigkeit  $(U, h)$ , unter der  $p$  auf einen Punkt mit negativer erster Koordinate abgebildet wird, und verkleinern wir dann  $U$  zu  $V = h^{-1}(\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}^{n-1})$ , so ist  $(V, h)$  eine Randplättung um  $p$ . Ich finde die Terminologie insofern unbefriedigend, als der Zusatz “berandet” den Begriff einer Untermannigfaltigkeit erweitert, anstatt ihn einzuschränken. Wir werden in 7.7.7 den “Rand” von berandeten Untermannigfaltigkeiten definieren und aus 7.7.10 wird folgen, daß berandete  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeiten mit leerem Rand in der Tat dasselbe sind wie



Eine zweidimensionale berandete Untermannigfaltigkeit der Papierebene  
mit Plättungen um zwei ausgewählte Punkte.

unsere  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeiten im Sinne von 4.3.2. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir Untermannigfaltigkeiten im Sinne von 4.3.2 meinen, sprechen wir folgerichtig von **Untermannigfaltigkeiten ohne Rand**.

7.7.4. Statt wie wir mit  $(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0)$  arbeiten viele Autoren mit  $(\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times 0)$ . Das liefert natürlich eine äquivalente Definition, die sich jedoch im weiteren Verlauf deshalb als weniger geeignet erweist, da sie zu mehr Vorzeichen führt.

7.7.5. Eine berandete  $\mathcal{C}^l$ -Untermannigfaltigkeit der Kodimension Null in einem endlichdimensionalen reellen Raum heißt auch eine  **$\mathcal{C}^l$ -berandete Teilmenge**. Unser Bild von eben stellt zum Beispiel eine glatt berandete Teilmenge der Papierebene dar.

*Beispiele 7.7.6.* Alle echten Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind glatt berandete Teilmengen. Die abgeschlossene Vollkugel  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  ist eine glatt berandete Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition 7.7.7.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ein Punkt einer berandeten Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  positiver Dimension  $k \geq 1$ , der unter *mindestens einer* Randplättung nach  $0 \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0$  abgebildet wird, heißt ein **Randpunkt** unserer berandeten Untermannigfaltigkeit. Man beachte, daß die linke Null hier die  $0 \in \mathbb{R}_{\leq 0} \subset \mathbb{R}$  ist, die rechte Null jedoch der Ursprung  $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Die Menge aller Randpunkte von  $M$  notieren wir  $\partial M$  und nennen sie den **Rand von  $M$** . Für Untermannigfaltigkeiten  $M$  der Dimension  $k = 0$  vereinbaren wir  $\partial M = \emptyset$ .

7.7.8. Das Symbol  $\partial$  ist ein griechisches  $d$ . Die Notation  $\partial M$  für den Rand ist wohl darauf zurückzuführen, daß sich das Bilden des Randes nach dem Satz von Stokes 7.8.1 als eine in gewisser Weise “duale Operation” zum Differenzieren auffassen läßt und in jedem Falle dazu eng verwandt ist. Der eben erklärte Begriff von Rand fällt im Fall von glatt berandeten Teilmengen mit dem in der Topologie verwendeten Begriff von Rand VI.3.1.2 zusammen, ist im allgemeinen aber davon verschieden.

7.7.9. Das folgende Lemma 7.7.10 zeigt, daß ein Randpunkt unter *jeder* Randplättung nach  $0 \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0$  abgebildet wird, daß es also um einen Randpunkt keine Plättung im Sinne von 4.3.2 geben kann. Insbesondere sind unsere  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeiten im Sinne von 4.3.2 genau unsere berandeten  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeiten im Sinne von 7.7.2 mit leerem Rand im Sinne der vorhergehenden Definition 7.7.7.

**Lemma 7.7.10 (Randmannigfaltigkeit).** *Ist  $M$  eine berandete Untermannigfaltigkeit positiver Dimension  $k \geq 1$  in einem endlichdimensionalen reellen Raum und  $(U, g)$  eine Randplättung von  $M$ , so gilt stets  $g(U \cap \partial M) =$*

$g(U) \cap (0 \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0)$ . Insbesondere ist der Rand  $\partial M$  einer berandeten Untermannigfaltigkeit der Dimension  $k \geq 1$  stets eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension  $(k - 1)$ .

*Beweis.* Gegeben ein Randpunkt  $p \in U \cap \partial M$  gibt es per definitionem eine Randplättung  $(V, h)$  von  $M$  um  $p$  mit  $h(p) \in 0 \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $U = V$  annehmen. Dann ist also  $h \circ g^{-1}$  ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $g(U), h(U)$  des  $\mathbb{R}^n$ , der die jeweiligen Schnitte  $G, H$  besagter Teilmengen mit  $(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0)$  miteinander identifiziert. Mithin definiert  $\varphi = h^{-1} \circ g$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarer Umkehrung zwischen diesen Schnitten  $\varphi : H \xrightarrow{\sim} G$ , die ja halboffen sind in  $\mathbb{R}^k \times 0$ . Die Komplemente  $H^\circ, G^\circ$  von  $(0 \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0)$  in  $H, G$  sind dann die größten in  $\mathbb{R}^k \times 0$  offenen Teilmengen von  $H, G$  und aus dem Satz über die Umkehrabbildung 4.1.2 folgt  $\varphi(H^\circ) = G^\circ$ . Also muß unsere Abbildung auch die Schnitte beider Mengen mit  $(0 \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0)$  identifizieren.  $\square$

*Beispiele 7.7.11.* Der einzige Randpunkt der glatt berandeten Teilmenge  $[a, b) \subset \mathbb{R}$  ist  $a$ . Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in der Ebene ist auch als Teilmenge des Raums aufgefaßt eine zweidimensionale berandete Untermannigfaltigkeit mit dem Einheitskreis als Rand.

7.7.12. Eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist in der Zusammenschau der vorhergehenden Definitionen also eine  **$\mathcal{C}^l$ -Untermannigfaltigkeit ohne Rand** oder kurz  **$\mathcal{C}^l$ -Untermannigfaltigkeit** für  $1 \leq l \leq \infty$  genau dann, wenn es um jeden Punkt unserer Teilmenge eine Plättung im Sinne von 4.3.2 gibt, die sogar ein  $\mathcal{C}^l$ -Diffeomorphismus ist. Eine  **$\mathcal{C}^\infty$ -Untermannigfaltigkeit** nennen wir auch eine **glatte Untermannigfaltigkeit**. Die Beschreibungen 4.3.10 und 4.3.14 von Untermannigfaltigkeiten als Urbilder bzw. als Bilder gelten analog, wenn man an den entsprechenden Stellen die Bedingung “stetig differenzierbar” zur Bedingung “von der Klasse  $\mathcal{C}^l$ ” verstärkt. Sprechen wir ohne nähere Spezifizierung von Untermannigfaltigkeiten, so sind im Zweifelsfall stets glatte Untermannigfaltigkeiten ohne Rand gemeint.

*Übung 7.7.13.* Seien  $X$  und  $Y$  endlichdimensionale reelle Räume,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow Y$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für jede berandete Untermannigfaltigkeit  $C \subset Y$  ihr Urbild  $M = f^{-1}(C)$  eine berandete Untermannigfaltigkeit von  $X$  der Dimension  $\dim X - \dim Y + \dim C$  mit Rand  $\partial M = f^{-1}(\partial C)$ . Man erkennt so zum Beispiel, daß alle Vollkugeln berandete Untermannigfaltigkeiten sind. Hinweis: 4.3.10 und 4.3.12.

**Proposition 7.7.14 (Berandete Untermannigfaltigkeiten als Bilder).**

Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum der Dimension  $\dim_{\mathbb{R}} X = n$  und sei  $k \geq 1$ . Eine Teilmenge  $M \subset X$  ist eine  $k$ -dimensionale berandete  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn es für jeden Punkt  $p \in M$  eine  $C^1$ -Abbildung  $\varphi : W \rightarrow X$  von einer offenen Teilmenge  $W \subseteq (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1})$  nach  $X$  gibt derart, daß gilt:

1.  $\varphi(W)$  ist offen in  $M$  und enthält  $p$ ;
2.  $d_x \varphi$  ist injektiv für alle  $x \in W$ ;
3.  $\varphi$  ist injektiv und  $\varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow W$  ist stetig.

7.7.15. Ein Paar  $(W, \varphi)$  wie in der Proposition nenne ich eine **Randkarte** der berandeten Untermannigfaltigkeit  $M$ , obwohl  $\varphi(W)$  den Rand von  $M$  keineswegs treffen muß.

*Beweis.* Mutatis mutandis derselbe Beweis wie im randlosen Fall, den wir in 4.3.14 behandelt haben. Übung 1.5.9 mag auch helfen.  $\square$

**Definition 7.7.16.** Sind  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  und  $(W_\beta, \varphi_\beta)$  zwei Randkarten einer berandeten Untermannigfaltigkeit  $M$ , so setzen wir  $W_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(W_\beta))$  und nennen die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$$

den **Kartenwechsel** zwischen unseren beiden Randkarten.

**Lemma 7.7.17.** *Kartenwechsel zwischen Randkarten sind stets Diffeomorphismen. Ist  $(W, \varphi)$  eine Randkarte einer berandeten Untermannigfaltigkeit  $M$  positiver Dimension  $k \geq 1$ , so gilt stets  $\varphi^{-1}(\partial M) = W \cap (0 \times \mathbb{R}^{k-1})$ .*

*Beweis.* Mutatis mutandis derselbe wie der Beweis von 4.3.22.  $\square$

7.7.18. Genau wie in 6.9.1 erklärt man auch das Flächenmaß einer berandeten Untermannigfaltigkeit eines  $\mathbb{R}^n$  und zeigt, daß es ein Borelmaß ist, für das Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension Nullmengen sind. Das kann insofern nützlich sein, als man so Endlichkeitsaussagen erhält: Ist zum Beispiel  $M$  eine kompakte berandete Mannigfaltigkeit, so hat  $M$  und damit dann auch  $M \setminus \partial M$  endliches Flächenmaß. Genau wie in 7.4.2 erklärt man weiter für eine meßbare relative  $k$ -Form  $\omega$  auf einer berandeten Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums das zugehörige Maß  $|\omega|$ , zeigt, daß Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension Nullmengen sind, und daß für stetiges  $\omega$  das zugehörige Maß  $|\omega|$  ein Borelmaß ist. Vollständig analog wie

im randlosen Fall erklärt man auch, was eine **Orientierung** einer berandeten Mannigfaltigkeit sein soll und wie  $k$ -Formen über berandete orientierte Mannigfaltigkeiten zu integrieren sind. Das ist aber fast überflüssig, da beim Integrieren der Rand eh nichts zum Integral beiträgt und höchstens beim Nachweis der Integrierbarkeit helfen kann.

*Beispiel 7.7.19.* Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $\mathcal{C}^l$ -Injektion mit nirgends verschwindendem Differential, die einen Homöomorphismus auf ihr Bild induziert. Aus 7.7.14 folgt leicht, daß dann das Bild von  $\varphi$  eine eindimensionale berandete  $\mathcal{C}^l$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist, und diese 1-Mannigfaltigkeit besitzt genau eine Orientierung, für die  $\varphi|_{(a,b)}$  eine orientierte Karte ist. Unsere Begriffe sind nun gerade so erklärt, daß in diesem Fall für jede stetige relative 1-Form  $\omega$  auf  $M$  ihr Integral über  $M$  übereinstimmt mit ihrem Wegintegral über  $\varphi$ , in Formeln

$$\int_{\bar{M}} \omega = \int_{\varphi} \omega$$

*Ergänzende Übung 7.7.20.* Jede Orientierung des Komplements des Randes in einer Mannigfaltigkeit läßt sich eindeutig zu einer Orientierung der ganzen Mannigfaltigkeit fortsetzen.

**Definition 7.7.21.** Gegeben eine Randkarte  $(W, \varphi)$  einer berandeten  $(k+1)$ -Mannigfaltigkeit  $M$  definieren wir die **induzierte Karte  $(\bar{W}, \bar{\varphi})$  des Randes  $\partial M$**  durch die Vorschrift

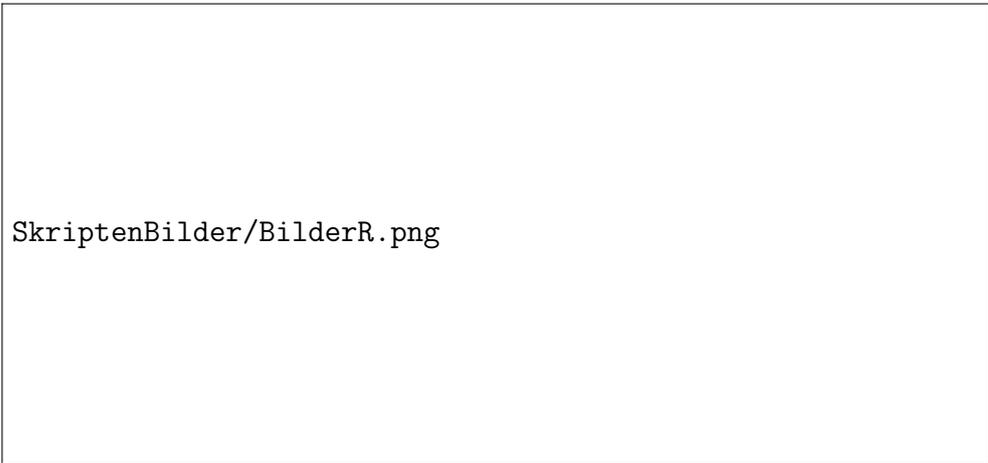
$$(\bar{W}, \bar{\varphi}) := (i^{-1}(W), \varphi \circ i)$$

mit  $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$  der Einbettung  $x \mapsto (0, x)$ .

**Lemma 7.7.22.** *Gegeben eine orientierte berandete  $(k+1)$ -Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es genau eine Orientierung ihres Randes  $\partial M$  derart, daß für jede Randkarte der Orientierung  $\varepsilon$  auch die induzierte Karte des Randes die Orientierung  $\varepsilon$  hat. Wir nennen sie die **induzierte Orientierung des Randes**.*

*Beweis.* Seien  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  und  $(W_\beta, \varphi_\beta)$  zwei Randkarten von  $M$ . Der Kartenwechsel  $\varphi_{\beta\alpha} : W_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} W_{\beta\alpha}$  identifiziert  $W_{\alpha\beta} \cap (0 \times \mathbb{R}^k)$  mit  $W_{\beta\alpha} \cap (0 \times \mathbb{R}^k)$  und kann dort durch den Kartenwechsel  $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$  der auf dem Rand induzierten Karten ausgedrückt werden als  $\text{id}_0 \times \bar{\varphi}_{\beta\alpha}$ . Gegeben  $y \in \bar{W}_\alpha \cap \bar{W}_\beta$  hat die Jacobi-Matrix  $d_{(0,y)}\varphi_{\beta,\alpha}$  des Kartenwechsels die Gestalt

$$d_{(0,y)}\varphi_{\beta,\alpha} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial(\varphi_{\beta\alpha})_1}{\partial x_1}(0, y) & * \\ \hline 0 & d_y\bar{\varphi}_{\beta\alpha} \end{array} \right)$$



SkriptenBilder/BilderR.png

Eine orientierte berandete zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit der induzierten Orientierung auf ihrem Rand und einer Randkarte

und ihr Eintrag oben links alias die partielle Ableitung in  $(0, y)$  der ersten Komponente des Kartenwechsels nach der ersten Variablen ist offensichtlich nicht negativ. Mithin hat in jedem Randpunkt die Funktionaldeterminante eines Kartenwechsels zweier Randkarten von  $M$  dasselbe Vorzeichen wie die Funktionaldeterminante des Kartenwechsels der auf dem Rand induzierten Karten.  $\square$

*Beispiel 7.7.23.* Im Fall der in 7.7.19 besprochenen berandeten orientierten 1-Mannigfaltigkeit  $M$  besteht der Rand aus den beiden Punkten  $\partial M = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$  und die induzierte Orientierung gibt dem Ersten dieser Punkte ein negatives Vorzeichen und dem Zweiten ein positives. Im höherdimensionalen Fall bedeutet unsere Definition anschaulich, daß die orientierten Basen der Tangentialräume des Randes diejenigen angeordneten Basen sind, die orientierte Basen der Tangentialräume der Mannigfaltigkeit liefern, wenn man noch einen Vektor davorschreibt, der tangential an die Mannigfaltigkeit ist und an unserem Randpunkt "aus der Mannigfaltigkeit heraus zeigt". Ist speziell  $M = \partial K$  der Rand einer glatt berandeten Teilmenge  $K$  mit der von einer Orientierung des umgebenden Raums induzierten Orientierung, so nennt man das orientierte Normalenfeld auch das **äußere Normalenfeld**, da dann anschaulich gesprochen  $N_p$  stets "aus  $K$  heraus zeigt".

## 7.8 Der Satz von Stokes

**Satz 7.8.1 (Stokes'scher Integralsatz).** *Sei  $M$  eine kompakte orientierte berandete glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension  $(k + 1)$  in einem endlichdimensionalen reellen Raum und sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $k$ -Form auf einer offenen Teilmenge unseres Raums, die  $M$  umfaßt. Versehen wir den Rand  $\partial M$  von  $M$  mit der induzierten Orientierung, so gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

**7.8.2 (Abschwächung der Voraussetzungen).** Der Beweis wird zeigen, daß wir statt der Kompaktheit unserer Mannigfaltigkeit schwächer nur voraussetzen brauchen, daß der Träger der Differentialform unsere Mannigfaltigkeit in einem Kompaktum trifft. Weiter reicht es anzunehmen, daß unsere Differentialform auf einer halboffenen Menge definiert ist, die unsere Mannigfaltigkeit umfaßt, und statt der Bedingung  $\mathcal{C}^\infty$  an unsere Mannigfaltigkeit  $M$  reicht auch die Bedingung  $\mathcal{C}^2$ .

**7.8.3.** Konkrete Spezialfälle des vorhergehenden Satzes werden ab 7.8.11 diskutiert. Bereits hier sei bemerkt, daß für eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne

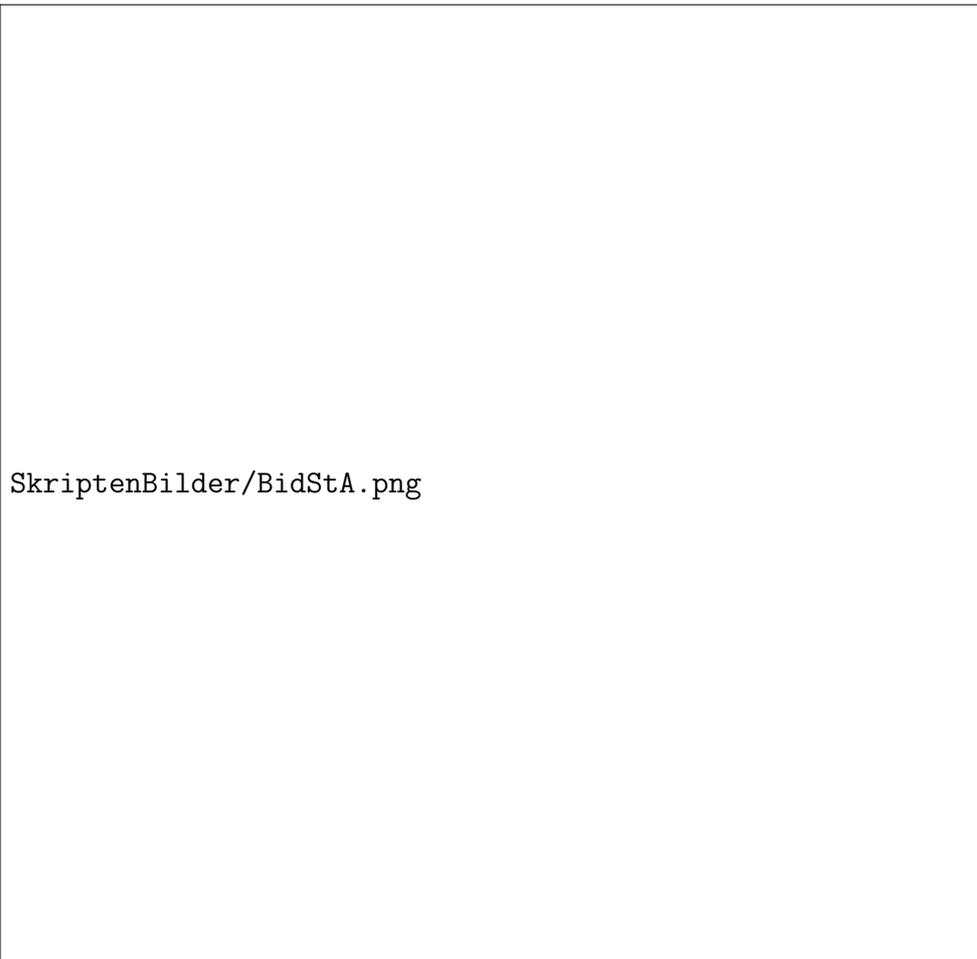


Illustration zum Stokes'schen Satz. Gegeben ein Kovektorfeld  $\omega$  erinnern wir uns dazu daran, daß nach 7.6.4 seine äußere Ableitung  $(d\omega)_p(\vec{v}, \vec{w})$  ausgewertet auf Richtungsvektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  eine Approximation des Wegintegrals von  $\omega$  über den Rundweg von  $p$  erst nach  $p + \vec{v}$ , dann weiter nach  $p + \vec{v} + \vec{w}$ , von dort nach  $p + \vec{w}$  und zurück nach  $p$  ist. Es sollte nun anschaulich klar sein, daß die Summe über viele derartige kleine Rundwegsintegrale das Randintegral über den ganzen Bereich approximiert. Der Satz von Stokes formalisiert diese Anschauung.

Rand alias mit leerem Rand das Integral auf der linken Seite verschwinden muß, in Formeln  $\partial M = \emptyset \Rightarrow \int_{\bar{M}} d\omega = 0$ .

*Vorschau* 7.8.4. Später werden wir lernen, was eine “abstrakte Mannigfaltigkeit” und eine “Differentialform auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit” ist und wie man solche Differentialformen ableitet und  $k$ -Formen über orientierte  $k$ -Mannigfaltigkeiten integriert. In dieser Allgemeinheit gilt dann dieselbe Formel für eine beliebige stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  mit kompaktem Träger auf einer beliebigen orientierten  $(k + 1)$ -Mannigfaltigkeit  $M$ .

*Beispiel* 7.8.5 (**Satz von Stokes im Fall einer Flußdichte**). Sei  $X$  ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und  $K \subset X$  eine kompakte orientierte dreidimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand alias ein Körper wie etwa eine massive Kugel oder ein massiver Eisenring, den wir uns aber nur als wohlbestimmte Region in  $X$  denken, die durchaus von Gas durchströmt wird. Der Rand  $\partial K$  ist dann eine Fläche, etwa eine Kugelschale oder die Oberfläche unseres Rings. Sei nun  $\omega$  die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 7.2.5. Nach 7.4.17 beschreibt das Integral von  $\omega$  über  $\partial K$  die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche  $\partial K$  hindurchtritt. Nach 7.6.4 beschreibt die 3-Form  $d\omega$  an jeder Stelle für je drei kleine Vektoren die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall aus dem entsprechenden kleinen Parallelepiped entweicht oder in dieses einströmt, je nach Vorzeichen. Nach 7.4.17 beschreibt das Integral über  $K$  dieser 3-Form die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall aus der Region  $K$  entweicht oder in diese einströmt, je nach Vorzeichen. Der Satz von Stokes besagt dann schlicht, daß diese Gesamtmasse dieselbe ist wie die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall durch die Oberfläche  $\partial K$  hindurchtritt.

*Beispiel* 7.8.6. Jedes kompakte reelle Intervall  $M = [a, b]$  mit  $a < b$  ist eine eindimensionale berandete Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}$  und erbt von  $\mathbb{R}$  eine Orientierung. Sein Rand ist die nulldimensionale Mannigfaltigkeit  $\partial M = \{a, b\}$  und die induzierte Orientierung darauf gibt dem Punkt  $a$  das Vorzeichen  $-1$  und dem Punkt  $b$  das Vorzeichen  $+1$ . Eine Nullform  $\omega$  auf  $M$  ist schlicht eine Funktion  $G$ , ihr Differential ist  $d\omega = dG = G'(x) dx$ , und wir erkennen, daß unser Satz von Stokes 7.8.1 in diesem Fall zum Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung II.4.5.3 spezialisiert.

*Beispiel* 7.8.7. Wir kommen nochmal auf unser Integral über die obere Hemisphäre  $H$  der 2-Form  $x^2 dx \wedge dy$  aus 7.5.5 zurück, wobei unsere Orientierung der oberen Hemisphäre unter der Projektion auf die Ebene die übliche Orientierung des  $\mathbb{R}^2$  entsprach. Nun haben wir das Glück,  $x^2 dx \wedge dy = -d(x^2 y dx)$  schreiben zu können. Der Rand von  $\vec{H}$  ist dann der im Gegenuhrzeigersinn

orientierte Einheitskreis in der  $xy$ -Ebene  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  und aus dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\vec{H}} x^2 dx \wedge dy = \int_{\vec{S}} -x^2 y dx$$

Zur Sicherheit machen wir noch die Probe und landen mit

$$\int_{\vec{S}} -x^2 y dx = \int_0^{2\pi} -\cos^2 \varphi \sin \varphi d(\cos \varphi) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi$$

im wesentlichen bei demselben Integral wie dem, das wir bereits in 7.5.5 berechnet hatten. Genauer wird der fehlende Faktor 2 von  $\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi$  in der Rechnung dort hier dadurch ausgeglichen, daß das Integral bis  $2\pi$  läuft.

*Beweis.* Gilt die Aussage für  $\omega$  und  $\omega'$ , so auch für  $\omega + \omega'$ . Wir können also nach II.6.10.3 und 4.4.10 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine zusammenhängende Randkarte  $(W, \varphi)$  von  $M$  gibt, die eine Orientierung hat und derart, daß gilt  $(\text{supp } \omega \cap M) \subset \varphi(W)$ . Ist  $\varepsilon$  die Orientierung unserer Randkarte, so gilt per definitionem und da die äußere Ableitung vertauscht mit dem Zurückholen

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \varepsilon \int_W \varphi^*(d\omega) = \varepsilon \int_W d(\varphi^*\omega)$$

Bezeichnet  $(\vec{W}, \bar{\varphi})$  wie in 7.7.21 die induzierte Karte des Randes und  $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ ,  $x \mapsto (0, x)$  die offensichtliche Einbettung, so gilt nach unseren Definitionen und wegen  $\bar{\varphi} = \varphi \circ i$  und  $\vec{W} = i^{-1}(W)$  auch

$$\int_{\partial \vec{M}} \omega = \varepsilon \int_{\vec{W}} \bar{\varphi}^*\omega = \varepsilon \int_{i^{-1}W} i^*(\varphi^*\omega)$$

Bezeichnen wir mit  $\eta$  die Fortsetzung durch Null von  $\varphi^*\omega$  auf den ganzen Halbraum, so reduziert sich der Satz auf einen Spezialfall, den wir im Anschluss als eigenständiges Lemma formulieren und beweisen.  $\square$

**Lemma 7.8.8.** *Bezeichne  $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$  wie zuvor die offensichtliche Einbettung und sei  $\eta$  eine stetig differenzierbare  $k$ -Form mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ . So gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^k} i^*\eta = \int_{\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k} d\eta$$

*Beweis.* Wir nennen unsere Koordinaten hier ausnahmsweise  $x_0, x_1, \dots, x_k$  und können schreiben

$$\eta = \sum_{\nu=0}^k \eta_\nu dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_\nu \wedge \dots \wedge dx_k$$

für stetig differenzierbare Funktionen  $\eta_\nu$  mit kompaktem Träger. Es ergibt sich  $i^*\eta = \eta_0 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ , die linke Seite ist also schlicht  $\int_{\mathbb{R}^k} \eta_0$ . Auf der rechten Seite erhalten wir

$$d\eta = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\nu} dx_0 \wedge \dots \wedge dx_k$$

und für alle  $\nu \neq 0$  verschwindet beim entsprechenden Summanden das  $\nu$ -te partielle Integral, da die Stammfunktion  $\eta_\nu$  kompakten Träger hat und von  $-\infty$  bis  $\infty$  integriert wird. Nur der erste Summand liefert also einen Beitrag, und der ist

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x_0} \right) = \int_{\mathbb{R}^k} \eta_0 \quad \square$$

7.8.9. Lassen wir den Beweis des Stokes'schen Satzes nocheinmal Revue passieren, so fällt auf, daß er ziemlich kurz ist. Das liegt daran, daß seine Formulierung in der Sprache der Differentialformen so gut mit Koordinatenwechseln verträglich ist, daß wir uns sofort auf einen sehr einfachen Spezialfall zurückziehen können. In gewisser Weise haben wir also mit der Entwicklung der Sprache der Differentialformen die Hauptarbeit bereits geleistet. Als wesentliche nichttriviale Aussage möchte ich dabei insbesondere die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit Koordinatenwechseln hervorheben, die sich auch in anderen Zusammenhängen noch als starkes Hilfsmittel erweisen wird.

7.8.10. Ich formuliere nun einige Spezialfälle des allgemeinen Stokes'schen Satzes 7.8.1 in klassischer Notation, um die Lektüre älterer Texte zu erleichtern. Ich hoffe jedoch, daß sich der für explizite Rechnungen und theoretische Überlegungen gleichermaßen bestens geeignete Formalismus der Differentialformen mit der Zeit auch bei den Anwendern durchsetzen wird.

*Beispiel 7.8.11 (Wegintegral über ein Gradientenfeld).* Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Injektion mit nirgends verschwindendem Differential, die einen Homöomorphismus auf ihr Bild induziert. Aus 7.7.14 folgt leicht, daß dann das Bild von  $\varphi$  eine berandete 1-Mannigfaltigkeit  $M$  ist, und diese 1-Mannigfaltigkeit besitzt genau eine Orientierung, für die  $\varphi|_{(a,b)}$  eine orientierte Karte ist. Gegeben eine Nullform alias Funktion  $f$  auf einer offenen Umgebung von  $M$  haben wir  $df = \langle \text{grad } f, \cdot \rangle = (\text{grad } f) \cdot$  und der Satz

von Stokes erhält nach 7.7.19 und 7.7.23 und 7.5.9 die Gestalt

$$\int_a^b \langle \text{grad } f, d\varphi \rangle = \int_a^b (\text{grad } f) \cdot d\varphi = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

In Worten stimmt also das Wegintegral des Gradientenfelds einer Funktion überein mit der Differenz zwischen den Werten besagter Funktion am Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges.

*Beispiel 7.8.12 (Satz von Gauss).* Gegeben eine kompakte glatt berandete Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  und ein im Sinne von 1.5.2 stetig differenzierbares Vektorfeld  $F$  auf  $K$  bilden wir wie in 7.5.13 die zugehörige  $(n-1)$ -Form  $\omega = \omega_F$  und finden

$$d\omega = (\text{div } F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

für  $(\text{div } F) : K \rightarrow \mathbb{R}$  die sogenannte **Quelldichte** oder auch **Divergenz** unseres Vektorfeldes, die auf dem "Inneren"  $K \setminus \partial K$  von  $K$  gegeben wird durch die Vorschrift

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Damit spezialisiert der allgemeine Satz von Stokes zum **Satz von Gauss**

$$\int_K \text{div } F = \int_{\partial K} F \cdot N$$

für  $N : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äussere Normalenfeld. In Worten ist also der Fluß eines Vektorfeldes durch den Rand eines glatt berandeten Kompaktums im  $\mathbb{R}^n$  gleich dem Integral seiner Quelldichte über besagtes Kompaktum. Anschaulich mag man sich im Fall  $n = 2$  die Oberfläche  $K$  eines ebenen Moores denken, in dem Wasser nach oben dringt und über das Moor an den Rand des Moores fließt. Nehmen wir das Geschwindigkeitsfeld dieses Flusses als unser Vektorfeld, so wäre die Divergenz eben die Quelldichte in unserem Moor, das Randintegral mißt die Wassermenge, die pro Zeiteinheit am Rand unseres Moores herausläuft, und unser Satz besagt, daß sie gleich der Wassermenge sein muß, die pro Zeiteinheit im Inneren emporquillt.

*Beispiel 7.8.13.* Ein homogener, als da heißt überall gleich dichter schwerer Körper  $K$  wird an einem Seil ins Wasser gelassen. Wir wollen uns überlegen, daß auch im Wasser der Schwerpunkt unseres Körpers in der Vertikalen unter dem Aufhängepunkt bleibt. Für inhomogene Körper gilt das im allgemeinen natürlich nicht! Wir denken uns unseren Körper als kompakte glatt berandete Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^3$  mit Schwerpunkt auf der  $z$ -Achse, also  $\int_K x = \int_K y = 0$ . Die Wasseroberfläche möge die Ebene  $z = 0$  sein. Der Wasserdruck steigt linear mit der Tiefe, auf ein Oberflächenelement der Fläche  $\sigma\langle p \rangle$  um  $p \in \partial K$

wirkt also die Kraft  $z(p)N_p\sigma\langle p\rangle$  mit  $N_p$  dem orientierten Normalenvektor bei  $p$ . Befindet sich der Aufhängepunkt etwa in der Höhe  $h < 0$ , so wird das Drehmoment um diesen Aufhängepunkt das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial K} z(p)(N_p \times (p + h e_3))\sigma\langle p\rangle$$

Die Komponenten dieses Vektors bei  $p = (x, y, z)$  mit  $N_p = (N_1, N_2, N_3)$  sind  $z(N_2(z+h) - N_3y)$ ,  $z(N_3x - N_1(z+h))$  und  $z(N_1y - N_2x)$  und können auch dargestellt werden als die Skalarprodukte von  $N_p$  mit den Vektorfeldern  $v_1(x, y, z) = (0, z^2 + hz, -zy)$ ,  $v_2(x, y, z) = (-z^2 - hz, 0, zx)$  und  $v_3(x, y, z) = (zy, -zx, 0)$ , so daß es gilt  $\int_{\partial K} (N \cdot v_i)\sigma = 0$  zu zeigen. Mit dem Satz von Gauss können wir diese Integrale verwandeln in die Integrale  $\int_K \operatorname{div} v_i$  und wegen  $\operatorname{div} v_1 = -y$ ,  $\operatorname{div} v_2 = x$  und  $\operatorname{div} v_3 = 0$  verschwinden sie in der Tat alle drei.

**Beispiel 7.8.14 (Klassischer Satz von Stokes).** Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte orientierte berandete Fläche und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \partial M$  eine orientierte Parametrisierung ihres Randes. Sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , die  $M$  umfaßt, und bezeichne  $\eta = \langle F, \cdot \rangle$  die zugehörige 1-Form. So finden wir  $d\eta = \omega_R$  in der Notation von 7.5.13 für  $R : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dasjenige Vektorfeld  $\operatorname{rot} F$  auf  $U$ , das definiert wird durch die Vorschrift

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Dies Vektorfeld ist die Rotation unseres Vektorfelds  $F$ , wie wir sie in 3.6.12 eingeführt haben. Unser allgemeiner Satz von Stokes 7.8.1 spezialisiert in dieser Situation zum **klassischen Satz von Stokes**

$$\int_M N \cdot (\operatorname{rot} F)\sigma = \int_a^b F \cdot d\varphi$$

Hier bedeutet  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  wieder das durch die Orientierung von  $M$  festgelegte Normalenfeld. In Worten ist also das Wegintegral eines Vektorfeldes über den Rand einer Fläche gleich dem Fluß der Rotation des Vektorfeldes durch besagte Fläche.

7.8.15. Bei Anwendern, die hauptsächlich im  $\mathbb{R}^3$  arbeiten, ist eine andere symbolische Schreibweise für  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{rot}$  und  $\operatorname{div}$  sehr beliebt: Sie betrachten den sogenannten **Nabla-Operator**  $\nabla$ , den man sich denkt als den "Vektor von Symbolen"  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ , und schreiben

$\nabla f = \operatorname{grad} f$ , zu verstehen als symbolisches Produkt des Nabla-Vektors mit einer skalaren Funktion;

$\nabla \cdot F = \operatorname{div} f$ , zu verstehen als symbolisches Skalarprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion; das Skalarprodukt wird von diesen Anwendern meist  $v \cdot w$  notiert statt wie bei uns  $\langle v, w \rangle$ ;

$\nabla \times F = \operatorname{rot} F$ , zu verstehen als symbolisches Vektorprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion, wo eben das Vektorprodukt  $v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$  aus der Geometrie des Raums ?? zugrundegelegt wird.

In dieser Notation wird dann unsere Formel  $dd\omega = 0$  für  $\omega$  eine Funktion bzw. eine 1-Form auf dem  $\mathbb{R}^3$  verstanden als formal-symbolische Konsequenz der Formeln  $v \times v = 0$  bzw.  $v \cdot (v \times w) = 0$  aus der Geometrie des Raums.

*Beispiel 7.8.16 (Green'sche Formel).* Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  eine kompakte glatt berandete Teilmenge und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine orientierte Parametrisierung ihres Randes, anschaulich "ein im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand umlaufender geschlossener Weg". Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $v = (v_1, v_2)$  auf einer offenen Umgebung von  $G$  betrachten wir die 1-Form  $\langle v, \cdot \rangle = \eta = v_1 dx_1 + v_2 dx_2$  mit ihrem Differential  $d\eta = (\operatorname{rot} v) dx_1 \wedge dx_2$  für

$$\operatorname{rot} v = \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

die in 3.6.12 erklärte skalare Rotation eines Vektorfelds in der Ebene, und der allgemeine Satz von Stokes 7.8.1 spezialisiert zur **Green'schen Formel**

$$\int_G \operatorname{rot} v = \int_a^b v \cdot d\varphi$$

7.8.17. Dieselbe Formel hatten wir in 3.6.18 schon für  $G$  ein Rechteck kennengelernt, nur ist ein Rechteck natürlich nicht glatt berandet. In 7.8.24 werden wir jedoch einen "Satz von Stokes mit Ecken" kennenlernen, der dann auch diese Formel für Rechtecke als Spezialfall enthält.

*Beispiel 7.8.18 (Fläche eines ebenen Gebiets).* Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  wie in 7.8.16 eine kompakte glatt berandete Teilmenge und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine orientierte Parametrisierung ihres Randes. Betrachten wir die 2-Form  $\omega = x dy$  mit Differential  $d\omega = dx \wedge dy$  und  $\varphi^*\omega = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) dt$ , so spezialisiert der allgemeine Satz von Stokes 7.8.1 zu einer Formel für die Fläche des Gebietes  $G$ , genauer zu der Regel

$$\int_G 1 = \int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2'(t) dt$$

7.8.19. Ich selber finde die alternative Interpretation dieser Formel mithilfe des Gauss'schen Integralsatzes besonders anschaulich: Quillt in einem Moor überall gleichviel Wasser hoch, so können wir seine Fläche bestimmen, indem wir messen, wieviel Wasser in einem Graben um unser Moor abläuft. Wie genau das Wasser auf unserem Moor zum Randgraben läuft, ist dabei völlig unerheblich. Statt mit  $\omega = x dy$  könnten wir also irdendein beliebiges  $\omega$  mit  $d\omega = dx \wedge dy$  nehmen und so weitere Formeln für die Fläche eines ebenen Gebiets erhalten.

**Definition 7.8.20.** Sei  $X$  ein reeller Raum endlicher Dimension und seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq l \leq \infty$ . Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt eine  **$k$ -dimensionale  $\mathcal{C}^l$ -Untermannigfaltigkeit mit Ecken** oder kurz **Untermannigfaltigkeit mit Ecken** von  $X$  genau dann, wenn es für jeden Punkt  $p \in M$  ein Paar  $(U, g)$  gibt aus einer offenen Umgebung  $U \subseteq X$  von  $p$  und einem  $\mathcal{C}^l$ -Diffeomorphismus  $g : U \xrightarrow{\sim} g(U)$  von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  derart, daß gilt:

$$g(U \cap M) = g(U) \cap ((\mathbb{R}_{\leq 0})^k \times 0)$$

Ein derartiges Paar  $(U, g)$  nenne ich eine **Plättung als  $\mathcal{C}^l$ -Untermannigfaltigkeit mit Ecken** oder kurz **Eckenplättung** von  $M$  um  $p$ .

*Beispiele 7.8.21.* Eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit mit Ecken ist dasselbe wie eine diskrete Teilmenge. Eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Ecken ist dasselbe wie eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Erst in höheren Dimensionen erhalten wir etwas Neues: So wäre zum Beispiel das "Innere eines ebenen Vielecks zusammen mit seinem Rand" eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit mit Ecken der Ebene, aber keine zweidimensionale berandete Untermannigfaltigkeit der Ebene.

7.8.22. Alle Punkte einer Untermannigfaltigkeit  $M$  mit Ecken, um die es eine Randplättung gibt, bilden eine berandete Untermannigfaltigkeit  $M_r$  unseres endlichdimensionalen reellen Raums, die wir den **regulären Teil von  $M$**  nennen.

*Beispiele 7.8.23.* Der reguläre Teil einer kompakten Quadratfläche ist das Komplement der vier Ecken. Der reguläre Teil eines kompakten massiven Würfels ist das Komplement der Ecken und Kanten.

**Satz 7.8.24 (Stokes'scher Integralsatz mit Ecken).** *Sei  $M$  eine kompakte glatte Untermannigfaltigkeit mit Ecken der Dimension  $(k + 1)$  in einem endlichdimensionalen reellen Raum. Sei der reguläre Teil  $M_r$  von  $M$  orientiert und sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $k$ -Form auf einer halboffenen*



Eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  mit Ecken der Papierebene mitsamt einer Eckenplättung in die dafür in geeigneter Weise mit  $\mathbb{R}^2$  zu identifizierende Papierebene.

Teilmenge unseres Raums, die  $M$  umfaßt. So existieren die Integrale von  $\omega$  über  $\partial\vec{M}_r$  und von  $d\omega$  über  $\vec{M}_r$  und es gilt

$$\int_{\vec{M}_r} d\omega = \int_{\partial\vec{M}_r} \omega$$

7.8.25 (**Abschwächung der Voraussetzungen**). Der Beweis wird wieder zeigen, daß wir statt der Kompaktheit unserer Mannigfaltigkeit mit Ecken schwächer nur voraussetzen brauchen, daß der Träger der Differentialform unsere Mannigfaltigkeit in einem Kompaktum trifft. Weiter reicht es anzunehmen, daß unsere Differentialform auf einer halboffenen Menge definiert ist, die unsere Mannigfaltigkeit umfaßt, und statt der Bedingung  $\mathcal{C}^\infty$  an unsere Mannigfaltigkeit  $M$  reicht auch die Bedingung  $\mathcal{C}^2$ .

7.8.26. Im allgemeinen gilt der Satz von Stokes keineswegs für nichtkompakte berandete Mannigfaltigkeiten wie etwa unser  $M_r$ . Ist zum Beispiel  $Q$  ein Quadrat in der Ebene ohne die Ecken, so können wir auf einer offenen Menge, die unser eckenloses Quadrat umfaßt, ein Vektorfeld konstruieren, das den Fluß eines expandierenden Gases beschreibt, das “durch die Löcher in den Ecken entweicht” aber dessen Fluß durch die Randkanten des Quadrats verschwindet. In dieser Allgemeinheit gälte der Satz von Stokes also nicht. Allerdings müßte unser Gas “mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Ecken pfeifen” und sein Geschwindigkeitsfeld könnte nicht stetig auf besagte Ecken fortgesetzt werden, weshalb auch die Voraussetzungen für unseren Satz von Stokes mit Ecken in diesem Fall nicht erfüllt wären. Es gibt noch sehr viel allgemeinere Versionen des Stokes’schen Satzes mit Ecken, vergleiche etwa [Kön97], mit denen sich zum Beispiel auch der Fluß durch die Oberfläche eines Ikosaeders direkt diskutieren ließe. Der hier besprochene Fall scheint mir jedoch für die meisten Anwendungen ausreichend und hat den Vorteil, daß sowohl seine Formulierung als auch sein Beweis nur wenig begrifflichen Aufwand benötigen. Den Fall eines Ikosaeders kann man daraus im übrigen auch noch erhalten, etwa indem man ihn etwa in Dreieckspyramiden mit einer Ecke im Ursprung zerlegt.

*Beispiel* 7.8.27. Ich will noch einmal auf das schon in 7.8.7 besprochene Beispiel 7.5.5 zurückkommen, in dem wir den Fluß des Vektorfeldes  $x^2 e_3$  durch die obere Hemisphäre  $H$  alias das Integral der 2-Form  $x^2 dx \wedge dy$  über eben diese Hemisphäre berechnet hatten. Die Länge der Vektoren unseres Vektorfeldes  $x^2 e_3$  hängt von der Höhe  $z$  gar nicht ab. Es scheint mir deshalb offensichtlich, daß sein Fluß durch die obere Hemisphäre  $H$  derselbe ist wie durch die Einheitskreisscheibe in der  $xy$ -Ebene  $D = \{(x, y) \mid z = 0, x^2 + y^2 < 1\}$ . Formal können wir das wegen  $d(x^2 dx \wedge dy) = 0$  auch aus dem Satz von Stokes mit Ecken 7.8.24 folgern, indem wir ihn auf die massive obere Halbkugel



Ein expandierendes Gas, das durch die Ecken entweicht, als Beispiel dafür, daß die Kompaktheitsbedingung beim Satz von Stokes notwendig ist.

$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$  anwenden. Deren regulärer Teil  $M_r$  besteht aus dem Komplement der Kreislinie  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ , und der Rand des regulären Teils  $\partial M_r$  ist die Vereinigung der oberen Hemisphäre  $H$  aus 7.5.5 mit der offenen Einheitskreisscheibe in der  $xy$ -Ebene  $D$ . Versehen wir unsere massive Halbkugel mit der von  $\mathbb{R}^3$  induzierten Orientierung, so erbt die obere Hemisphäre  $H$  die bereits in 7.5.5 beschriebene Orientierung, die Einheitskreisscheibe  $D$  jedoch die nicht von der Einbettung in  $\mathbb{R}^2$  induzierte Orientierung. Schreiben wir  $\vec{D}$  für  $D$  mit der von der Einbettung in  $\mathbb{R}^2$  induzierten Orientierung, so erhalten wir für  $\omega = x^2 dx \wedge dy$  wegen  $d\omega = 0$  folglich nach Stokes in der Tat

$$0 = \int_{\vec{M}_r} d\omega = \int_{\partial \vec{M}_r} \omega = \int_{\vec{H}} x^2 dx \wedge dy - \int_{\vec{D}} x^2 dx \wedge dy$$

*Beweis.* Ganz genau wie beim Beweis des Stokes'schen Satzes 7.8.1 ziehen wir uns zurück auf den Fall einer stetig differenzierbaren  $k$ -Form  $\eta$  auf  $(\mathbb{R}_{\leq q})^{k+1}$  mit kompaktem Träger. Wieder nennen wir unsere Koordinaten  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , betrachten nun aber für  $0 \leq \nu \leq k$  die Einbettungen

$$i_\nu : (\mathbb{R}_{\leq 0})^k \hookrightarrow (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$$

die durch Einfügen einer Null an der  $\nu$ -ten Stelle entstehen. Der Stokes'sche Integralsatz mit Ecken reduziert sich dann auf die Behauptung

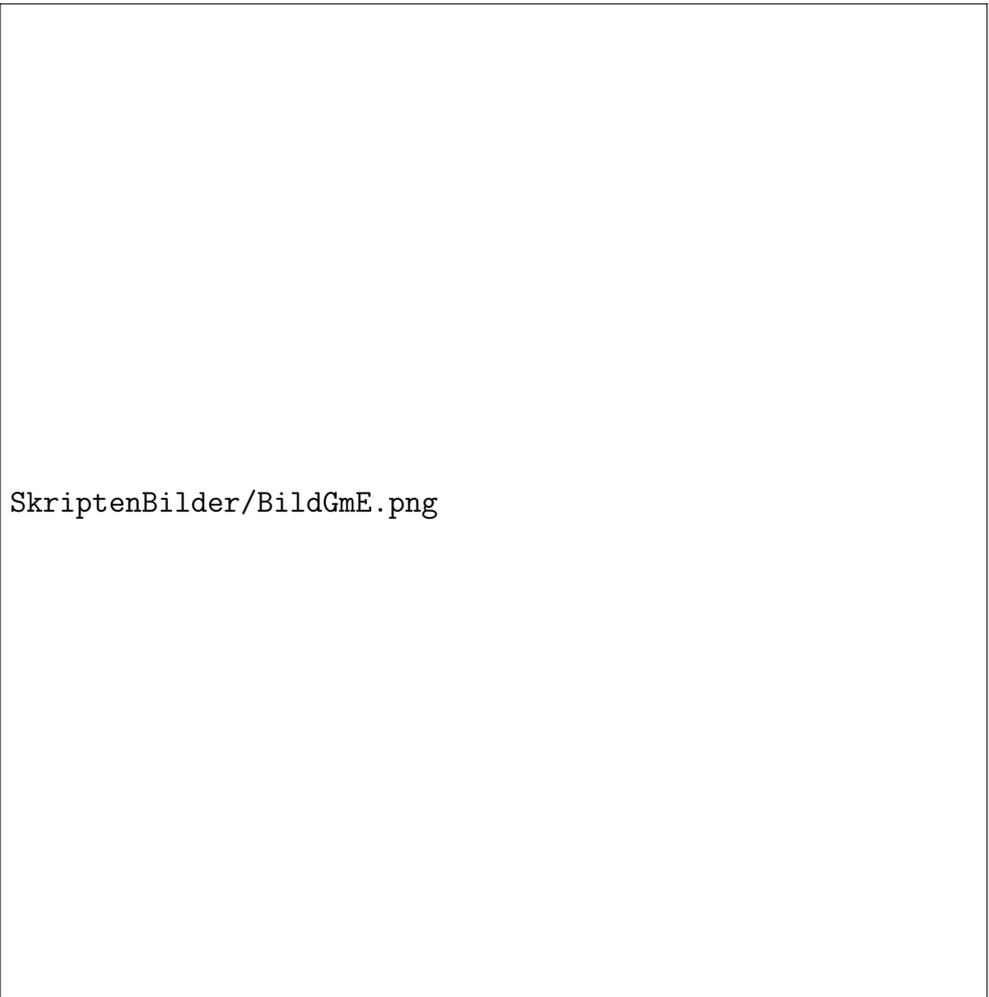
$$\sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^k} i_\nu^* \eta = \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}} d\eta$$

und das kann wie beim Beweis von 7.8.8 explizit nachgerechnet werden.  $\square$

**7.8.28 (Alternativer Zugang zur Homotopieinvarianz bei Wegintegralen).** Wir können nun auch einen besonders kurzen Beweis für die Homotopieinvarianz von Wegintegralen in geschlossenen Kovektorfeldern 3.6.10 geben unter der stärkeren Voraussetzung, daß es zwischen unseren beiden stetig differenzierbaren Wegen  $\gamma, \psi : [0, 1] \rightarrow A$  sogar eine zweimal stetig differenzierbare Homotopie  $h : [0, 1]^2 \rightarrow A$  gibt. Wir nehmen genauer  $A$  offen in einem reellen Raum  $X$  an und  $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$  ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. Die Behauptung in 3.6.10 besagt ja gerade, daß aus  $d\omega = 0$  folgt  $\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega$ . Aber nun finden wir

$$\int_\gamma \omega - \int_\psi \omega = \int_{\partial([0,1]^2)} h^* \omega = \int_{[0,1]^2} d(h^* \omega) = \int_{[0,1]^2} h^*(d\omega) = 0$$

nach der Definition einer Homotopie, dem Satz von Stokes mit Ecken, der Verträglichkeit des Zurückholens von Formen mit dem äußeren Differential 7.6.8 und unserer Annahme  $d\omega = 0$ .



SkriptenBilder/BildGmE.png

Die Formel 7.8.18 für die Fläche eines ebenen Gebiets gilt nun natürlich ebenso für “Gebiete mit Ecken”. Diese Formel kann etwa angewandt werden, um ein GPS-Gerät so zu programmieren, daß es einem die Fläche des Gebiets berechnet, das man bei einem Rundweg umrundet hat. Im Spezialfall eines Gebiets, das von einem den Kanten eines Rechenpapiers folgenden Weg im Uhrzeigersinn umrundet wird, ergibt sich, wenn wir Stokes auf die Form  $\int y dx$  anwenden, die Fläche als die Höhe des Schwerpunkts der Menge der horizontalen Kanten, wenn wir jede Kante nach rechts mit ihrer Höhe gewichten und jede Kante nach links mit dem Negativen ihrer Höhe. Für die Fläche des obigen Gebiets ergibt sich so

$$3 \times 4 + 2 - 2 \times 1 - 2 - 3 = 7$$

## 7.9 Divergenz und Laplace in krummen Koordinaten\*

7.9.1. Die folgenden Argumente bauen nicht auf dem Stokes'schen Integralsatz auf, vielmehr geht es um Anwendungen des Kalküls der Differentialformen aus 7.6.

7.9.2. Gegeben ein orientierter  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt oder allgemeiner einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform  $t$  kann man im eindimensionalen Raum  $\text{Alt}^n(V)$  aller sogenannten **Volumenformen auf  $V$**  ein von Null verschiedenes Element  $\omega = \omega_t$ , die **kanonische Volumenform**, auszeichnen durch die Bedingung, daß gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$$

für jede orientierte Orthonormalbasis im positiv definiten Fall bzw. jede orientierte Basis  $v_1, \dots, v_n$  mit  $|t(v_i, v_j)| = \delta_{ij}$  im allgemeinen Fall. In der Tat erfüllt die Basiswechselmatrix  $A$  zwischen zwei derartigen Basen eine Gleichung der Gestalt  $A^\top J A = J'$  mit  $J = J' = I$  der Einheitsmatrix im Fall eines Skalarprodukts und  $\det J = \det J' \neq 0$  im allgemeinen, so daß der Multiplikationssatz für Determinanten  $\det A = \pm 1$  liefert, und die Orientiertheit beider Basen zeigt dann sogar  $\det A = 1$ . Damit aber folgt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(w_1, \dots, w_n)$$

für jede  $n$ -Form  $\omega$  und je zwei Basen wie oben, etwa indem wir 7.1.15 auf den Automorphismus von  $V$  mit  $v_i \mapsto w_i$  anwenden.

*Übung 7.9.3.* Ersetzen wir  $t$  durch  $\lambda t$  für  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ , so erhalten wir für die neue Volumenform

$$\omega_{\lambda t} = |\lambda|^{n/2} \omega_t$$

**Definition 7.9.4.** Gegeben ein orientierter  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform  $t$  erklärt man für jede Zerlegung  $n = p + q$  den **Hodge\*-Operator**, einen Isomorphismus

$$* = *_t : \text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q V$$

auszeichnen durch die Formel  $\alpha \wedge \beta = t(*\alpha, \beta)\omega$ . Hier ist  $t$  rechts zu verstehen als  $t(f_1 \wedge \dots \wedge f_r, g_1 \wedge \dots \wedge g_r) := \det(t(f_i, g_j))$  und letztere Bilinearform auf  $V^*$  ist dadurch erklärt, daß sie unter  $\text{can}_t : V \xrightarrow{\sim} V^*$  unserem ursprünglichen  $t$  entsprechen soll. Das  $\omega$  schließlich meint unsere Volumenform. Etwas ausführlicher gesagt konstruiert man unseren Hodge\*-Operator wie folgt: Man geht aus von der durch das Dachprodukt gegebenen nichtausgearteten Paarung

$$\text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V \rightarrow \text{Alt}^n V$$

und verknüpft sie mit dem Isomorphismus  $\text{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ , der die kanonische Volumenform  $\omega$  auf die Eins wirft. Die so erhaltene Paarung kann als ein Isomorphismus

$$\text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} (\text{Alt}^q V)^*$$

interpretiert werden, und der kanonische Isomorphismus  $(\text{Alt}^q V)^* \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q(V^*)$  aus ?? zusammen mit dem von  $\text{can}_t : V \xrightarrow{\sim} V^*$  induzierten Isomorphismus  $\text{Alt}^q(V^*) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q(V)$  liefert dann in der Verknüpfung schließlich unseren Hodge-Operator.

*Übung 7.9.5.* Für  $r$ -Formen  $\alpha$  auf einem orientierten  $n$ -dimensionalen Vektorraum mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform  $t$  und  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$  prüfe man die Formel  $*_{\lambda t}\alpha = (\lambda^r/|\lambda|^{n/2}) *_{t}\alpha$ . Insbesondere gilt für 2-Formen  $\alpha$  auf einem vierdimensionalen Raum und  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$  stets  $*_{\lambda t}\alpha = *_{t}\alpha$ .

7.9.6. Gegeben ein Isomorphismus  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  von endlichdimensionalen orientierten reellen Vektorräumen und nichtausgeartete symmetrische Bilinearformen  $t$  auf  $V$  und  $s$  auf  $W$  und eine Zerlegung  $n = p + q$  der Dimension  $n$  unserer beiden Vektorräume kommutiert offensichtlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Alt}^p W & \xrightarrow{*s} & \text{Alt}^q W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Alt}^p V & \xrightarrow{*t} & \text{Alt}^q V \end{array}$$

7.9.7. Die in der obigen Definition 7.9.4 versteckten und in gewisser Weise zufälligen Wahlen von Vorzeichen werden wie auch hier üblicherweise so getroffen, daß im Fall eines Skalarproduktes  $t$  für alle  $\alpha$  gilt

$$\alpha \wedge * \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \omega$$

Wir werden das gleich explizit sehen. Es wäre auch nicht besser oder schlechter, die Vorzeichen so zu wählen, daß das “umgekehrte Dach-Produkt” in diesem Sinne “positiv definit” wäre, aber an dieser Stelle muß man sich eben nun einmal auf eine Konvention einigen.

7.9.8 (**Explizite Formeln für den Hodge-\* -Operator**). Sei zunächst  $t$  ein Skalarprodukt,  $v_1, \dots, v_n$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $V$  und  $f_1, \dots, f_n$  die duale Basis von  $V^*$ . Wir folgern  $\omega = f_1 \wedge \dots \wedge f_n$  und gegeben  $I, J$  mit  $|I| = p$  und  $|J| = q$  haben wir

$$f_I \wedge f_J = \begin{cases} \varepsilon_I \omega & I \sqcup J = \{1, \dots, n\}; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\varepsilon_I$  das Vorzeichen der Permutation meint, die alle Elemente von  $I$  an den Anfang schiebt, ihre Reihenfolge untereinander aber ebenso wie die

Reihenfolge der Elemente ihres Komplements unverändert läßt. Unsere Abbildung

$$\text{Alt}^p V \rightarrow (\text{Alt}^q V)^*$$

macht also die Basisvektoren  $f_I$  bis auf Vorzeichen zu den Vektoren der dualen Basis, genauer haben wir  $f_I \mapsto \varepsilon_I f_{\bar{I}}^*$  für  $\bar{I}$  das Komplement von  $I$ . Unter  $(\text{Alt}^q V)^* \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q(V^*)$  entspricht dieser Vektor dann  $\varepsilon_I v_{\bar{I}}$  und unter  $\text{can}_t$  wiederum  $\varepsilon_I f_{\bar{I}}$ , woraus wir folgern

$$*_t f_I = \varepsilon_I f_{\bar{I}} \quad \text{für } \bar{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I.$$

Insbesondere gilt also im Fall eines Skalarprodukts und der dualen Basis zu einer Orthonormalbasis die Formel  $f_I \wedge *_t f_I = \omega$ , die in diesem Fall auch sofort  $*(\alpha) = (-1)^{pq} \alpha$  für alle  $\alpha \in \text{Alt}^p(V)$  liefert. Ist allgemeiner im symmetrischen nicht ausgearteten Fall  $v_1, \dots, v_n$  orientiert und orthogonal, aber haben wir etwa  $t(v_i, v_i) = \eta_i = \pm 1$ , so müssen wir nur ganz am Schluß noch ein Vorzeichen ergänzen und erhalten mit der Notation  $\eta_{\bar{I}} = \prod_{j \in \bar{I}} \eta_j$  die Formel

$$*_t f_I = \varepsilon_I \eta_{\bar{I}} f_{\bar{I}} \quad \text{für } \bar{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I.$$

Sei nun noch allgemeiner  $t$  symmetrisch nicht ausgeartet,  $v_1, \dots, v_n$  eine orientierte Orthogonalbasis von  $V$  mit  $t(v_i, v_i) = \eta_i c_i^2$  mit  $c_i > 0$  und  $f_1, \dots, f_n$  die duale Basis von  $V^*$ . Gegeben  $I, \bar{I}$  mit  $|I| = p$  erhalten wir dann mit der Notation  $c_I = \prod_{i \in I} c_i$  durch Reskalierung die Formel

$$*_t f_I = \frac{\varepsilon_I \eta_{\bar{I}} c_{\bar{I}}}{c_I} f_{\bar{I}} \quad \text{für } \bar{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I.$$

**Definition 7.9.9.** Gegeben eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  und eine Riemann'sche Metrik  $t$  auf  $U$  und ein differenzierbares Vektorfeld  $v : U \rightarrow \vec{X}$  definieren wir die **Divergenz** unseres Vektorfelds als die Funktion

$$\text{div}_t(v) = (*_t \circ d \circ *_t \circ \text{can}_t)(v)$$

Obwohl der  $*$ -Operator von einer zu wählenden Orientierung abhängt, ist die Divergenz wegen des doppelten Auftretens unseres  $*$ -Operators davon unabhängig.

*Ergänzende Übung 7.9.10.* Man zeige, daß die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfelds auf  $\mathbb{R}^n$  genau die "lokale Volumenänderung unter dem Fluß des besagten Vektorfelds" beschreibt, daß genauer für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger  $f$  gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int f \circ X^t = - \int f \text{div} X$$

Hier ist zu beachten, daß auf jedem Kompaktum der Fluß für eine positive Zeitspanne existiert. Hinweis: Man schränke sich auf den Fall von glattem  $f$  ein, ziehe die zeitliche Ableitung unter das Integral, und beachte, daß das Integral über ganz  $\mathbb{R}^n$  jeder partiellen Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion mit kompaktem Träger verschwindet.

*Beispiel 7.9.11.* Sei  $X = \mathbb{R}^3$  mit der Standardorientierung und dem Standardskalarprodukt  $t = s$  versehen. Gegeben ein differenzierbares Vektorfeld der Gestalt  $v = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$  mit differenzierbaren Funktionen  $a, b, c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  finden wir die übliche Formel  $\operatorname{div} v = a_x + b_y + c_z$ , indem wir rechnen

$$\begin{aligned} v &= a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \\ \operatorname{can}_s(v) &= adx + bdy + cdz \\ *_s(\operatorname{can}_s(v)) &= ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy \\ d(*_s(\operatorname{can}_s(v))) &= a_x dx \wedge dy \wedge dz - b_y dy \wedge dx \wedge dz + c_z dz \wedge dx \wedge dy \\ *_s(d(*_s(\operatorname{can}_s(v)))) &= a_x + b_y + c_z \end{aligned}$$

Hier wäre es zwar in der Tat sehr viel einfacher gewesen, schlicht diese letzte Formel hinzuschreiben. Unsere neue Interpretation verträgt sich jedoch besser mit der Verwandtschaft, insbesondere da die äußere Ableitung  $d$  sich so gut mit Verwandtschaft verträgt, und ermöglicht so eine übersichtliche Darstellung in anderen orthogonalen Koordinaten. Um etwa die Divergenz in Polarkoordinaten zu bestimmen, erinnern wir uns daran, daß nach 3.2.9 unter der Polarkoordinatenabbildung  $P$  die Standardmetrik  $s = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$  auf der  $xy$ -Ebene verwandt ist zum 2-Tensor  $g = dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2}$  und rechnen

$$\begin{aligned} v &= a\partial_r + b\partial_\vartheta \\ \operatorname{can}_g(v) &= adr + br^2 d\vartheta \\ *_g(\operatorname{can}_g(v)) &= ar d\vartheta - br dr \\ d(*_g(\operatorname{can}_g(v))) &= (a_r r + a) dr \wedge d\vartheta + b_\vartheta r dr \wedge d\vartheta \\ *_g(d(*_g(\operatorname{can}_g(v)))) &= a_r + b_\vartheta + r^{-1}a \end{aligned}$$

*Übung 7.9.12.* Wir betrachten wieder Kugelkoordinaten wie in 3.2.11. Man zeige, daß für das zum Vektorfeld  $a\partial_r + b\partial_\vartheta + c\partial_\varphi$  verwandte Feld auf dem  $xyz$ -Raum die Divergenz verwandt ist zur Funktion  $a_r + b_\vartheta + c_\varphi + 2r^{-1}a + b \cot \vartheta$ .

**Definition 7.9.13.** Gegeben  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  setzen wir

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und nennen  $\Delta$  den **Laplaceoperator**.

7.9.14 (**Anschauung für den Laplaceoperator**). Der Wert von  $\Delta f$  an einer Stelle  $x$  mißt die Abweichung des Funktionswerts von  $f$  bei  $x$  vom Durchschnitt der Funktionswerte in einer kleinen Umgebung von  $x$ . In einer Veränderlichen gilt zum Beispiel für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f''(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon^2} \left( \frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)}{2} - f(x) \right)$$

wie der Leser mithilfe der Taylorentwicklung leicht nachprüfen kann. In mehreren Veränderlichen gilt in derselben Weise für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Notation  $e_i$  für die Vektoren der Standardbasis

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left( \frac{1}{2^n} \left( \sum_{i=1}^n f(x + \varepsilon e_i) + f(x - \varepsilon e_i) \right) - f(x) \right)$$

Übung 7.9.15 (**Mehr Anschauung für den Laplaceoperator**). Man zeige, daß der Laplaceoperator invariant ist unter Drehungen. Ist genauer  $A \in O(n)$  eine orthogonale Matrix und bezeichnet  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die zugehörige lineare Abbildung, so zeige man für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Formel  $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$ . Man folgere die Formel

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left( \frac{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} f(y) \sigma\langle y \rangle}{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} \sigma\langle y \rangle} - f(x) \right)$$

auf deren rechter Seite nach dem Faktor  $2^n/\varepsilon^2$  bis auf ein Vorzeichen die Differenz zwischen dem Funktionswert  $f(x)$  und dem Durchschnitt der Funktionswerte auf einer Kugelschale mit Zentrum in  $x$  und Radius  $\varepsilon$  steht. Hinweis: Man middle 7.9.14. Die Taylorentwicklung oben liefert in einer Veränderlichen sogar präziser die Darstellung

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \left( \frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)}{2} - f(x) \right) = (f''(\xi^+) + f''(\xi^-))/2$$

mit  $\xi^+ \in (x, x + \varepsilon)$  und  $\xi^- \in (x - \varepsilon, x)$ .

Ergänzende Übung 7.9.16. Die polynomialen Funktionen  $D \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ , die invariant sind unter allen Drehungen  $A \in SO(n)$ , sind genau alle Polynome im quadrierten Abstand vom Nullpunkt, in Formeln

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{SO(n)} = \mathbb{C}[(X_1^2 + \dots + X_n^2)]$$

Die Differentialoperatoren  $D \in \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$  mit konstanten Koeffizienten auf dem  $\mathbb{R}^n$ , die invariant sind unter allen Drehungen  $A \in SO(n)$ , sind genau alle Polynome im Laplace-Operator, in Formeln

$$\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]^{SO(n)} = \mathbb{C}[\Delta]$$

7.9.17 (**Laplace-Operator in anderen Koordinaten**). Um den Laplace-Operator  $\Delta$  in anderen Koordinaten auszudrücken, kann man von der Darstellung

$$\Delta f = *_s d *_s df$$

ausgehen, mit  $s$  der üblichen Riemann'schen Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  und  $*_s$  dem zu dieser Metrik und der Standard-Orientierung gehörenden Hodge-\*-Operator. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$  und eine offene Teilmenge  $V \subseteq X$  und eine differenzierbare Abbildung  $\phi : V \rightarrow U$  mit bijektivem Differential an jeder Stelle und eine zur Standard-Metrik  $\phi$ -verwandte Riemann'sche Metrik  $t$  auf  $V$  haben wir dann die Verwandtschaft  $\phi : *_t d *_t d(f \circ \phi) \rightsquigarrow *_s d *_s df = \Delta f$ . Ist speziell etwa  $\phi$  die Polarkoordinaten- oder die Kugelkoordinatenabbildung, so läßt sich das auch sehr konkret und explizit berechnen.

*Beispiel 7.9.18.* Wir berechnen den Laplace-Operator einer Funktion  $f$  in Polarkoordinaten und finden ähnlich wie in 7.9.11 der Reihe nach

$$\begin{aligned} df &= f_r dr + f_\vartheta d\vartheta \\ *_g(df) &= f_r r d\vartheta - r^{-1} f_\vartheta dr \\ d(*_g(df)) &= (f_{rr} r + f_r + r^{-1} f_{\vartheta\vartheta}) dr \wedge d\vartheta \\ *_g(d(*_g(df))) &= f_{rr} + r^{-1} f_r + r^{-2} f_{\vartheta\vartheta} \end{aligned}$$

*Übung 7.9.19.* Man zeige, daß der Laplace-Operator einer Funktion  $f$  in den Kugelkoordinaten aus 3.2.11 gegeben wird durch die Formel

$$\Delta f = f_{rr} + 2r^{-1} f_r + r^{-2} f_{\vartheta\vartheta} + r^{-2} f_\vartheta \cot \vartheta + (r \sin \vartheta)^{-2} f_{\varphi\varphi}$$

Hinweis: Statt das direkt zu rechnen, kann man auch von 3.2.13 und 7.9.12 ausgehen.



# Kapitel V

## Funktionenräume und Symmetrien

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Funktionenräume und Fourierreihen</b> . . . . .	<b>635</b>
1.1	Lebesgue-Integral vektorwertiger Funktionen . . .	635
1.2	Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen . .	636
1.3	Räume integrierbarer Funktionen . . . . .	639
1.4	Hilberträume und Hilbertbasen . . . . .	644
1.5	Approximation durch differenzierbare Funktionen .	648
1.6	Fourier-Reihen und Charaktere . . . . .	650
1.7	Orthogonale Projektionen in Hilberträumen . . . .	653
<b>2</b>	<b>Fouriertransformation</b> . . . . .	<b>659</b>
2.1	Definition und erste Eigenschaften . . . . .	659
2.2	Abstrakte Fouriertransformation . . . . .	671
2.3	Abstrakte Inversionsformel und Poisson-Formel . .	676
2.4	Operationen mit komplexen Maßen . . . . .	683
2.5	Faltung von Maßen und Funktionen . . . . .	686
2.6	Translationsinvariante Teilräume* . . . . .	695
2.7	Allgemeinere Fouriertransformationen* . . . . .	697
<b>3</b>	<b>Spektraltheorie in Hilberträumen</b> . . . . .	<b>704</b>
3.1	Unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$ . . . . .	704
3.2	Selbstadjungierte Operatoren . . . . .	711

3.3	Spektren in Banach-Algebren . . . . .	716
3.4	Spektren selbstadjungierter Operatoren . . . . .	721
3.5	Der Riesz'sche Darstellungssatz . . . . .	727
3.6	Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren	730
3.7	Beweis des Spektralsatzes . . . . .	736
3.8	Spektralzerlegung unitärer Darstellungen . . . . .	741
3.9	Operationen von Maßen auf Darstellungen . . . . .	744
3.10	Variationen zum Spektralsatz . . . . .	748
3.11	Unbeschränkte Operatoren . . . . .	752

---

# 1 Funktionenräume und Fourierreihen

## 1.1 Lebesgue-Integral vektorwertiger Funktionen

**Definition 1.1.1.** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum und  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow V$  heißt **integrierbar** genau dann, wenn sie meßbar ist und für eine und jede Norm auf  $V$  gilt  $\int \|f\| < \infty$ . Unter diesen Umständen erklären wir das **Integral** unserer Funktion  $f$  als den eindeutig bestimmten Vektor

$$v = \int f = \int_X f(x) \mu \langle x \rangle$$

mit der Eigenschaft  $\lambda(v) = \int \lambda(f(x)) \mu \langle x \rangle$  für jede Linearform  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Um die Existenz und Eindeutigkeit von  $v$  zu zeigen, können wir etwa  $V = \mathbb{R}^n$  annehmen und müssen nur prüfen, daß dann das komponentenweise Integral den einzig möglichen Vektor  $v$  mit den angeführten Eigenschaften liefert. Das ist leicht zu sehen.

1.1.2. In III.1.3.3 hatten wir eine andere Verallgemeinerung des Integrationsbegriffs besprochen, zu einem Integral für stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in Banachräumen. Auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich, also für stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in endlichdimensionalen Banachräumen, liefern unsere beiden Verallgemeinerungen offensichtlich dasselbe Integral. Eine weitere Verallgemeinerung wird in VI.11.8.7 besprochen.

*Übung 1.1.3.* Unsere Sätze über dominierte Konvergenz und Integration auf Produkträumen gelten unverändert auch für vektorwertige Funktionen. Für jede lineare Abbildung  $\Lambda : V \rightarrow W$  in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt die Formel  $\int (\Lambda \circ f) = \Lambda \left( \int f \right)$ .

*Übung 1.1.4.* Nimmt eine integrierbare Abbildung  $f : X \rightarrow V$  mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum nur endlich viele Werte an, so haben wir

$$\int_X f(x) \mu \langle x \rangle = \sum_{v \neq 0} \mu(f^{-1}(v)) v$$

*Übung 1.1.5.* Gegeben eine integrierbare Abbildung  $f : X \rightarrow V$  mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt für jede Norm auf  $V$  die Abschätzung

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|$$

Hinweis: Man zeige das zunächst für meßbare Stufenfunktionen und argumentiere dann mit dem Satz über dominierte Konvergenz.

1.1.6. Im Fall komplexwertiger Funktionen kann man die Abschätzung  $|\int f| \leq \int |f|$  auch einfacher zeigen, indem man  $\lambda \in \mathbb{C}$  wählt mit  $|\lambda| = 1$  und  $\lambda \int f > 0$ , woraus dann folgt

$$\left| \int f \right| = \lambda \int f = \int \lambda f = \int \operatorname{Re}(\lambda f) \leq \int |\lambda f| = \int |f|$$

## 1.2 Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen

1.2.1. Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum. Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **quadratintegrierbar** genau dann, wenn sie meßbar ist und ihr Betragsquadrat integrierbar ist, in Formeln  $\int |f|^2 < \infty$ . Die Menge  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(X, \mu)$  aller quadratintegrierbaren Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein Untervektorraum im  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller meßbaren komplexwertigen Funktionen auf  $X$ , denn wir haben  $2|f| \cdot |g| \leq |f|^2 + |g|^2$  und  $|f+g|^2 \leq |f|^2 + 2|f| \cdot |g| + |g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$ . Dieselben Abschätzungen zeigen auch, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \int \bar{f}g \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und schieflinear im ersten Eintrag sowie linear im zweiten. Es gilt auch offensichtlich  $\langle f, f \rangle \geq 0$  für alle  $f \in \mathcal{L}^2$ , aber dennoch liefert unsere Paarung im Allgemeinen kein Skalarprodukt auf  $\mathcal{L}^2$  im Sinne von ??, da aus  $\langle f, f \rangle = 0$  nicht notwendig folgt  $f = 0$ . Man beachte vielmehr das folgende Lemma.

**Lemma 1.2.2.** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum und  $h : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar. Genau dann gilt  $\int h = 0$ , wenn  $h$  außerhalb einer Nullmenge verschwindet.

*Beweis.* Verschwindet  $h$  außerhalb einer Nullmenge, so gilt offensichtlich  $\int h = 0$ . Gilt umgekehrt  $\int h = 0$ , so hat  $h^{-1}([1/n, \infty])$  Maß Null für alle  $n$ , und damit hat auch  $h^{-1}((0, \infty])$  Maß Null als abzählbare Vereinigung von Mengen vom Maß Null.  $\square$

1.2.3. Es liegt damit nahe, im Rahmen der Integrationstheorie nicht zwischen Funktionen zu unterscheiden, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Diese Idee werden wir nun präzise fassen.

**Definition 1.2.4.** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum. Gilt eine Aussage für alle  $x \in X$  außerhalb einer Nullmenge, so sagt man auch, die Aussage gelte **fast überall** oder genauer  **$\mu$ -fast überall**. Auf der Menge aller Abbildungen von unserem Maßraum  $X$  in irgendeine weitere Menge  $Y$  sei die Äquivalenzrelation  $\sim$  gegeben durch die Vorschrift

$$f \sim g \Leftrightarrow \{f(x) = g(x) \text{ fast überall auf } X\}.$$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen **fast überall definierte Abbildungen** von  $X$  nach  $Y$ . Wir notieren fast überall definierte Abbildungen auch  $f : X \dashrightarrow Y$ . Wenn wir ganz besonders betonen wollen, daß eine Abbildung oder Funktion im ursprünglichen Sinne zu verstehen ist, sprechen wir von einer **überall definierten Funktion**.

1.2.5. Sicher wird eine solche Äquivalenzklasse schon dadurch festgelegt, daß man fast überall die Werte eines Repräsentanten angibt. Die fast überall definierten Funktionen  $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$  können auch aufgefaßt werden als die Elemente des Quotientenvektorraums  $\text{Ens}(X, \mathbb{C})/\mathcal{N}$ , wo  $\mathcal{N}$  die Menge aller Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnet, die fast überall verschwinden.

1.2.6. Den Begriff *fast überall* verwenden wir unglücklicherweise in zwei Bedeutungen: Auf einem Maßraum  $X$  als Abkürzung für “die Ausnahmen bilden eine Nullmenge”, auf einer beliebigen Menge  $X$  als Abkürzung für “die Ausnahmen bilden eine endliche Menge”. Mir ist keine griffige Terminologie eingefallen, die diese Unschärfe ausräumt. Ich kann nur hoffen, daß stets aus dem Kontext erschlossen werden kann, welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist.

1.2.7. Man kann reellwertige oder auch komplexwertige fast überall definierte Funktionen addieren und multiplizieren, man darf beim Rechnen mit fast überall definierten Funktionen sogar auch dann noch den Quotienten  $f/g$  bilden, falls  $g$  nur fast überall von Null verschieden ist. Es ist sinnvoll, von einer Folge fast überall definierter Funktionen zu sagen, daß sie fast überall punktweise gegen eine weitere fast überall definierte Funktion konvergiert. Man kann die Verknüpfung  $g \circ f$  einer fast überall definierten Funktion  $f$  mit einer überall definierten Funktion  $g$  bilden und erhält so wieder eine fast überall definierte Funktion. Eine reellwertige fast überall definierte Funktion heißt **meßbar** bzw. **integrierbar** bzw. **quadratintegrierbar** genau dann, wenn sie einen meßbaren bzw. integrierbaren bzw. quadratintegrierbaren Repräsentanten hat. Ist unser Maßraum nicht vollständig, so wird eine meßbare fast überall definierte Funktion durchaus auch nicht-meßbare Repräsentanten haben. Auch mit unserer Konvention, integrierbar im Sinne von IV.6.5.1 als “meßbar und integrierbar” zu verstehen, wird für eine integrierbare fast überall definierte Funktion jedoch das Integral nicht vom gewählten integrierbaren Repräsentanten abhängen, so daß jeder integrierbaren fast überall definierten Funktion sinnvoll ihr Integral zugeordnet werden kann. Nicht sinnvoll ist das Auswerten einer fast überall definierten Funktion an einem Punkt, es sei denn, der fragliche Punkt habe positives Maß.

**Definition 1.2.8.** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum. Eine integrierbare fast überall definierte Funktion auf  $X$  heißt eine  **$L^1$ -Funktion** auf  $X$ . Eine quadratintegrierbare fast überall definierte Funktion auf  $X$  heißt eine  **$L^2$ -Funktion**

auf  $X$ . Der Buchstabe  $L$  steht in diesem Zusammenhang für “Lebesgue”. Die Menge aller komplexwertigen  $L^1$ -Funktionen bzw.  $L^2$ -Funktionen notiert man

$$L^1(X) = L^1(X; \mu) \quad \text{bzw.} \quad L^2(X) = L^2(X; \mu)$$

und nennt sie etwas unpräzise die **Räume aller integrierbaren** bzw. **quadratintegrierbaren Funktionen** in der Hoffnung, daß sich von selbst versteht, daß die Elemente dieser Räume genau genommen nur fast überall definierte Funktionen, also gewisse Äquivalenzklassen von Funktionen, sein sollen.

1.2.9. Anschaulich und unpräzise gesprochen ist die Quadratintegrierbarkeit im Vergleich zur Integrierbarkeit eine schwächere Bedingung an das Abfallen für  $x \rightarrow \pm\infty$ , aber eine stärkere Bedingung an die Natur möglicher Polstellen.

*Übung 1.2.10.* Man gebe eine quadratintegrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, die nicht integrierbar ist. Man gebe eine integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, die nicht quadratintegrierbar ist. Man zeige, daß jede quadratintegrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger integrierbar ist. Hinweis: 1.2.9.

**Lemma 1.2.11.** *Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum.*

1. *Die Mengen  $L^1(X)$  und  $L^2(X)$  sind Untervektorräume im Vektorraum aller fast überall definierten Funktionen auf  $X$ .*
2. *Die Vorschrift  $\|f\|_1 = \int |f|$  definiert eine Norm auf  $L^1(X)$ .*
3. *Für  $f, g \in L^2(X)$  ist  $\bar{f}g$  integrierbar und die Vorschrift  $\langle f, g \rangle = \int \bar{f}g$  definiert ein Skalarprodukt auf  $L^2(X)$ .*

*Beweis.* Kann nach 1.2.1 und 1.2.2 dem Leser überlassen bleiben. □

1.2.12. Wir erinnern an die Fourierentwicklung stetig differenzierbarer  $2\pi$ -periodischer Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aus III.3.1.3. Wollen wir die Abhängigkeit der Fourierkoeffizienten  $c_n$  einer derartigen Funktion von der Funktion zum Ausdruck bringen, so schreiben wir  $c_n = f^\wedge(n)$  und erhalten wie in III.3.3.4 eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 2\pi]) & \rightarrow & \text{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f^\wedge \end{array}$$

die jeder Funktion die Familie ihrer Fourierkoeffizienten zuordnet. Diese Zuordnung baut der anschließende Satz zu einer Bijektion zwischen geeigneten Räumen quadratintegrierbarer Funktionen aus.

**Satz 1.2.13 (Fourier-Reihen quadratintegrierbarer Funktionen).** Sei das Intervall  $[0, 2\pi]$  mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesgue-Maß  $\mu := dt/2\pi$  versehen und  $\mathbb{Z}$  mit dem Zählmaß. So liefert die Fourierentwicklung  $f \mapsto f^\wedge$  gegeben durch  $f^\wedge(n) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mu\langle t \rangle$  einen Isomorphismus von Räumen mit Skalarprodukt

$$L^2([0, 2\pi]; \mu) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{Z})$$

1.2.14. Den Beweis dieses Satzes müssen wir zurückstellen, bis wir die Theorie etwas weiter ausgebaut haben. Er wird dann im Anschluß an 1.5.3 gegeben werden. Wir werden auch zeigen, daß die inverse Abbildung in der Form

$$(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

geschrieben werden kann, wobei die Summe allerdings im Sinne von II.7.5.11 zu verstehen ist, *nicht* als punktweise Konvergenz für alle  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Übung 1.2.15.* Man berechne die Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion  $t \mapsto |t|$  für  $t \in [-\pi, \pi]$  und der Funktion  $t \mapsto \exp(\exp(2\pi i t))$ .

*Übung 1.2.16.* Sind  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  fast überall gleich und stetig bei  $p \in \mathbb{R}^n$ , so gilt  $f(p) = g(p)$ .

*Ergänzende Übung 1.2.17.* Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von der Periode  $2\pi$  und integrierbar auf  $[0, 2\pi]$  und sei  $a \in \mathbb{R}$  gegeben. Lassen sich die Restriktionen  $f|_{(-\infty, a)}$  und  $f|_{(a, \infty)}$  auf die jeweiligen abgeschlossenen reellen Intervalle fortsetzen zu bei  $a$  differenzierbaren Funktionen, so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  an der Stelle  $a$ , genauer die Folge der Partialsummen  $\sum_{|\nu| \leq n} c_\nu e^{i\nu a}$  gegen den Wert

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{t \nearrow a} f(t) + \lim_{t \searrow a} f(t) \right)$$

Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt  $a = 0$  und  $f$  ist gerade und stetig bei Null mit  $f(0) = 0$ . Nun setze man  $P_n = \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu t}$  und prüfe  $P_n(t) = \cos(nt) + \cot(t/2) \sin(nt)$ . Dann zeige man  $\langle f, P_n \rangle \rightarrow 0$ .

*Übung 1.2.18.* Man zeige für  $f, g \in L^2$  die sogenannte **Hölder-Ungleichung**  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ . Hinweis: Man wende die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung auf die Beträge unserer Funktionen an.

### 1.3 Räume integrierbarer Funktionen

1.3.1. Um unsere Räume integrierbarer und quadratintegrierbarer Funktionen simultan behandeln zu können, führen wir eine größere Klasse normierter

Vektorräume ein, die sogenannten  $L^p$ -Räume. Im Rahmen dieser Vorlesung könnte man im Folgenden stets mit  $p \in \{1, 2\}$  arbeiten und so die Diskussion allgemeiner  $L^p$ -Räume vermeiden. In anderen Zusammenhängen scheinen jedoch auch die  $L^p$ -Räume für andere  $p$  von Bedeutung zu sein.

**Definition 1.3.2.** Gegeben ein Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  und  $p \in [1, \infty)$  erklärt man  $L^p(X) = L^p(X; \mu) = L^p(X; \mathcal{M}, \mu)$  als die Menge aller fast überall definierten meßbaren komplexwertigen Funktionen  $f$  auf  $X$  mit

$$\int |f|^p < \infty$$

Die Elemente dieser Mengen heißen  **$L^p$ -Funktionen**. Unter einer  **$L^\infty$ -Funktion** versteht man dahingegen eine fast überall definierte meßbare komplexwertige Funktion mit mindestens einem betragsmäßig beschränkten Repräsentanten.

*Beispiel 1.3.3.* In den Fällen  $p = 1$  und  $p = 2$  erhalten wir die bereits ausführlich diskutierten Räume  $L^1$  aller integrierbaren und  $L^2$  aller quadratintegrierbaren Funktionen.

**Proposition 1.3.4.** Gegeben ein Maßraum  $(X, \mu)$  und  $p \in [1, \infty]$  ist die Menge der  $L^p$ -Funktionen  $L^p(X; \mu)$  ein Untervektorraum im Raum aller fast überall definierten Funktionen auf  $X$ . Wir erhalten darauf eine Norm, indem wir im Fall  $p < \infty$  setzen

$$\|f\|_p := \left( \int |f|^p \right)^{1/p}$$

und im Fall  $p = \infty$  für  $\|f\|_\infty$  das Minimum der Supremumsnormen aller betragsmäßig beschränkten Repräsentanten von  $f$  nehmen oder äquivalent setzen  $\|f\|_\infty := \sup\{c \geq 0 \mid \mu(f^{-1}\{z \mid |z| > c\}) > 0\}$  für einen und jeden Repräsentanten.

1.3.5. Leider hat nun das Symbol  $\|f\|_\infty$  zwei Bedeutungen: Einmal für eine beschränkte komplexwertige Funktion auf einer beliebigen Menge als Supremum der Beträge aller Funktionswerte bzw. Null für die einzige Funktion auf der leeren Menge, ein andermal als das eben definierte, so genannte **essentielle Supremum** einer fast überall definierten Funktion auf einem Maßraum. Welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser meist aus dem Kontext erschließen. Wenn ich explizit auf dem essentiellen Supremum bestehen will schreibe ich  $\|f\|_\infty^{\text{ess}}$ , so daß wir also in Formeln für jede beschränkte fast überall definierte Funktion  $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$  schreiben können

$$\|f\|_\infty^{\text{ess}} = \inf\{\|\tilde{f}\|_\infty \mid \tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist beschränkter Repräsentant von } f\}$$

1.3.6. Wir erinnern aus II.4.3.22 und II.4.3.23 zwei im folgenden nützliche Ungleichungen: Gegeben reelle Zahlen  $a, b \geq 0$  und  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  folgt die **Young'sche Ungleichung**  $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$  aus der Konvexität der Exponentialfunktion und die Ungleichung  $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$  aus der Konvexität der Funktion  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^p$ .

*Beweis.* Sicher gilt  $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$  und aus  $\|f\|_p = 0$  folgt  $f = 0$  fast überall mit 1.2.2. Daß  $L^p$  stabil ist unter der Addition ist im Fall  $p = \infty$  eh klar. In den anderen Fällen gehen wir aus von 1.3.6 und folgern

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

Um schließlich zu zeigen, daß  $\|\cdot\|_p$  ein Norm auf  $L^p$  ist, müssen wir weiter ausholen. Wir dürfen sicher  $p > 1$  annehmen und finden dann  $q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alias  $p + q = pq$ . Solche  $p, q$  heißen **konjugierte Exponenten** aus  $(1, \infty)$ . Nach 1.3.6 gilt für reelle  $a, b > 0$  dann

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

Aus  $f \in L^p$  und  $g \in L^q$  folgt mithin  $fg \in L^1$ . Wir behaupten unter diesen Annahmen sogar stärker die **Hölder-Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

und auch das folgt im Fall  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$  sofort aus unserer obigen Ungleichung und im allgemeinen durch Reskalierung. Gegeben  $p > 1$  und  $f, g \in L^p$  zeigen wir nun schließlich  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $f$  und  $g$  nichtnegativ und nicht fast überall Null annehmen. Setzen wir  $h = (f + g)^{p-1}$ , so ergibt sich  $h^q = (f + g)^p$ , also  $h \in L^q$  und wir haben

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \|(f + g)h\|_1 \\ &\leq \|fh\|_1 + \|gh\|_1 \\ &\leq \|f\|_p \|h\|_q + \|g\|_p \|h\|_q \end{aligned}$$

Beachten wir nun  $\|h\|_q = \|f + g\|_p^{(p/q)}$  und teilen das auf beiden Seiten weg, so ergibt sich die Behauptung.  $\square$

1.3.7. Man bezeichnet etwas allgemeiner als im vorherigen Beweis eingeführt auch 1 und  $\infty$  als **konjugierte Exponenten**. Ist nun  $(X, \mu)$  ein Maßraum und sind  $p, q \in [1, \infty]$  konjugierte Exponenten, so folgt aus  $f \in L^p$  und  $g \in L^q$  immer noch  $fg \in L^1$  und  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . In der Tat hatten wir das für  $p, q \in (1, \infty)$  bereits im vorhergehenden Beweis gesehen, und im verbleibenden Fall ist es eh klar.

*Übung 1.3.8.* Ist  $(X, \mu)$  ein Maßraum und  $E \subset X$  eine meßbare Teilmenge endlichen Maßes, so liefert für alle  $p \in [1, \infty]$  die Einschränkung von Funktionen eine stetige Abbildung  $L^p(X) \rightarrow L^1(E)$ .

**Satz 1.3.9 (Vollständigkeit der  $L^p$ -Räume).** Für jeden Maßraum  $X$  und alle  $p \in [1, \infty]$  sind die normierten Vektorräume  $L^p(X)$  vollständig. Jede konvergente Folge in einem dieser Räume besitzt des weiteren eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion konvergiert.

*Beispiel 1.3.10.* Die charakteristischen Funktionen der Intervalle  $[0, 1]$ ,  $[0, 1/2]$ ,  $[1/2, 1]$ ,  $[0, 1/4]$ ,  $[1/4, 2/4]$ ,  $[2/4, 3/4]$ ,  $[3/4, 1]$ ,  $[0, 1/8]$ ,  $[1/8, 2/8]$ , ... bilden eine Nullfolge im Raum der  $L^1$ -Funktionen auf dem Einheitsintervall, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert.

*Beweis.* Wir überlassen den Fall  $p = \infty$  dem Leser zur Übung und führen den Beweis nur im Fall  $p < \infty$ . Es gilt zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in  $L^p(X)$  konvergiert. Seien also die  $f_n$  Repräsentanten der Glieder einer Cauchy-Folge in  $L^p(X)$ . Indem wir falls nötig zu einer Teilfolge übergehen, dürfen wir annehmen, daß gilt  $\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}$ . Wir betrachten nun die Funktionen  $g_k, g : X \rightarrow [0, \infty]$  gegeben durch

$$g_k = \sum_{n=0}^k |f_n - f_{n+1}| \quad \text{und} \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n - f_{n+1}|$$

Aus unseren Annahmen folgt  $\|g_k\|_p \leq 2$  für alle  $k$ , und da die Funktion  $g^p$  der monotone punktweise Grenzwert der  $g_k^p$  ist, erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz  $\int g^p \leq 2^p$ . Insbesondere gilt also  $g(x) < \infty$  fast überall auf  $X$ . Sicher gilt aber auch

$$f_0 - f_{k+1} = \sum_{n=0}^k (f_n - f_{n+1})$$

und diese Reihe konvergiert absolut an allen Stellen  $x \in X$  mit  $g(x) < \infty$ , als da heißt fast überall. Mithin konvergiert auch die Folge der  $f_k$  fast überall, und wir erhalten als ihren punktweisen Grenzwert eine fast überall definierte meßbare Funktion  $f$ . Wir müssen nur noch zeigen, daß  $f$  in  $L^p$  liegt und daß die Folge der  $f_k$  auch in der  $L^p$ -Norm gegen  $f$  konvergiert. Offensichtlich sind aber die Funktionen  $|f_0 - f_k|$  fast überall beschränkt durch  $g$ , folglich ist  $|f_0 - f|$  fast überall beschränkt durch  $g$ , also gehört  $f_0 - f$  zu  $L^p$ , und dann gehört auch  $f$  zu  $L^p$ . Weiter können wir mit 1.3.6 abschätzen

$$|f - f_k|^p \leq 2^{p-1}(|f - f_0|^p + |f_0 - f_k|^p) \leq 2^p g^p$$



Die ersten Glieder der Nullfolge in  $L^1$  aus 1.3.10, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert. Die graphische Darstellung ist etwas fragwürdig, da Graphen von Funktionen keine senkrechten Linien enthalten dürfen, aber wir vereinbaren einfach, daß in diesem Fall stets der oberste mögliche Wert gemeint ist.

und damit folgt  $\lim_{k \rightarrow 0} \|f - f_k\|_p = 0$  aus dem Satz über dominierte Konvergenz, angewandt auf die Funktionenfolge  $|f - f_k|^p$ .  $\square$

*Übung 1.3.11.* Gegeben ein Maßraum liegen für  $1 \leq p < \infty$  die integrierbaren Stufenfunktionen auf unserem Raum dicht im Raum der  $L^p$ -Funktionen. Hinweis: Man verwende Lemma IV.6.4.12.

*Übung 1.3.12.* Gegeben ein Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  und  $1 \leq p \leq \infty$  ist der Raum  $L^p(\mathbb{R}; \mu)$  endlichdimensional genau dann, wenn  $\mu$  eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist. Hinweis: Man betrachte die Variante IV.6.2.18 der Verteilungsfunktion unseres Maßes.

## 1.4 Hilberträume und Hilbertbasen

**Definition 1.4.1.** Ein **Hilbertraum** ist ein komplexer, seltener auch reeller Vektorraum mit Skalarprodukt im Sinne von ??, der vollständig ist für die von diesem Skalarprodukt induzierte Metrik.

1.4.2. Einen reellen oder komplexen Vektorraum mit Skalarprodukt im Sinne von ?? hatten wir in ?? einen euklidischen Vektorraum genannt. Man bezeichnet diese Struktur insbesondere dann, wenn unser Raum nicht vollständig ist, auch als **Prähilbertraum**. Manche Quellen fordern von einem Hilbertraum zusätzlich noch, daß er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzen möge. Wir schließen uns dieser Konvention nicht an und nennen derartige Hilberträume "separabel", da es sich dabei in der Tat genau um die Hilberträume handelt, die als topologische Räume separabel sind im Sinne von IV.6.3.13.

1.4.3. Bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  unser Skalarprodukt, so wird die davon induzierte Metrik gegeben durch die Vorschrift  $d(x, y) = \|x - y\|_2$  mit  $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ , vergleiche ??.

*Beispiel 1.4.4.* Nach 1.3.9 ist für jeden Maßraum  $X$  der Raum  $L^2(X)$  der fast überall definierten quadratintegrierbaren Funktionen auf  $X$  ein Hilbertraum. Wir werden im Folgenden zeigen, daß es keine wesentlich anderen Beispiele für Hilberträume gibt, ja sogar, daß jeder Hilbertraum bereits isomorph ist zum Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer mit dem Zählmaß versehenen Menge. Dazu müssen wir jedoch zunächst etwas mehr über Hilberträume wissen.

**Definition 1.4.5.** Eine Familie von Vektoren  $(e_i)_{i \in I}$  eines Prähilbertraums heißt ein **Orthonormalsystem** genau dann, wenn gilt  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  mit dem Kroneckerdelta aus ?. Eine **Hilbertbasis** eines Hilbertraums ist ein Orthonormalsystem, dessen Vektorraumergzeugnis dicht ist in unserem Hilbertraum. Viele Autoren bezeichnen eine Hilbertbasis auch als **vollständiges Orthonormalsystem**.

1.4.6. Eine Hilbertbasis ist im allgemeinen keine Basis unseres Hilbertraums im Sinne der linearen Algebra. Genauer gilt das nur für endlichdimensionale Hilberträume, und für diese ist eine Hilbertbasis dasselbe wie eine Orthonormalbasis. Man vergleiche dazu auch Übung 1.4.19.

**Definition 1.4.7.** Für eine Menge  $I$  bezeichne  $L^2(I)$  den Raum der in Bezug auf das Zählmaß quadratintegrierbaren Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\chi_i \in L^2(I)$  die charakteristische Funktion der einelementigen Menge  $\{i\}$ . In der Literatur wird unser  $L^2(I)$  auch oft  $l^2(I)$  notiert.

1.4.8. Nach 1.3.11 bilden die  $\chi_i$  eine Hilbertbasis von  $L^2(I)$ . Nach II.2.5.26 ist jede quadratintegrierbare Funktion  $I \rightarrow \mathbb{C}$  im übrigen nur auf einer abzählbaren Teilmenge von  $I$  verschieden von Null.

1.4.9. Wir erinnern, daß wir nach II.7.5.11 eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren eines normierten Vektorraums  $V$  summierbar mit Summe  $s \in V$  nennen und

$$\sum_{i \in I} v_i = s$$

schreiben als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung  $U$  von  $s$  eine endliche Teilmenge  $I_U \subset I$  gibt derart, daß für jede endliche Obermenge  $J$  von  $I_U$  in  $I$  gilt  $\sum_{i \in J} v_i \in U$ .

**Satz 1.4.10 (über Hilbertbasen).** 1. Ist  $(e_i)_{i \in I}$  ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , so gibt es genau eine stetige lineare Abbildung  $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\chi_i \mapsto e_i$  für alle  $i \in I$ , und diese Abbildung erhält das Skalarprodukt.

2. Ist  $(e_i)_{i \in I}$  sogar eine Hilbertbasis, so ist besagte Abbildung ein Isomorphismus von Hilberträumen  $L^2(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$  und ihre Inverse  $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} L^2(I)$ ,  $v \mapsto \hat{v}$  wird gegeben durch  $\hat{v}(i) = \langle e_i, v \rangle$ .

3. Gegeben eine Hilbertbasis  $(e_i)_{i \in I}$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  gilt für jeden Vektor  $v \in \mathcal{H}$  im Sinne von 1.4.9 die Darstellung

$$v = \sum_{i \in I} \langle e_i, v \rangle e_i$$

1.4.11. Wir schicken dem Beweis zwei Lemmata voraus.

**Lemma 1.4.12 (Stetige Fortsetzung von dichten Teilmengen).** Seien  $X, Y$  metrische Räume und  $A \subset X$  eine dichte Teilmenge. So gilt:

1. Jede Abbildung  $g : A \rightarrow Y$  besitzt höchstens eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{g} : X \rightarrow Y$ .

2. Ist  $g : A \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig und  $Y$  vollständig, besitzt  $g$  genau eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{g} : X \rightarrow Y$ .

1.4.13. Im Wesentlichen haben Sie das Lemma bereits als Übung II.7.5.5 gezeigt. Die Abbildung  $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (1/x)$  ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, und läßt sich nicht stetig auf die Vervollständigung  $[0, 1]$  des offenen Intervalls  $(0, 1)$  fortsetzen.

*Ergänzung* 1.4.14. In VI.3.6.8 wird erklärt, unter welchen Voraussetzungen sich die erste Aussage auf den Fall topologischer Räume verallgemeinern läßt. Die zweite Aussage läßt sich allgemeiner für sogenannte "uniforme Räume" zeigen, wie sie in VI.10.7 eingeführt werden. Wir gehen hier darauf nicht näher ein.

*Beweis.* Gegeben  $x \in X$  finden wir eine Folge  $a_n$  in  $A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ . Natürlich muß für jede stetige Erweiterung  $\tilde{g}$  von  $g$  gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \tilde{g}(x)$$

und das zeigt auch schon die Eindeutigkeit von  $\tilde{g}$ . Ist  $g$  nun gleichmäßig stetig, so ist mit  $a_n$  auch  $g(a_n)$  eine Cauchy-Folge, und ist  $Y$  vollständig, so muß  $g(a_n)$  konvergieren. Haben weiter zwei Folgen  $a_n, b_n$  in  $A$  denselben Grenzwert  $x$ , so strebt auch die Folge  $c_n$  mit den Gliedern  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  gegen  $x$ . Wir folgern

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n)$$

und können also definieren  $\tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$  für eine und jede Folge  $a_n$  aus  $A$ , die gegen  $x$  strebt. Wir müssen nur noch zeigen, daß  $\tilde{g}$  stetig ist. Sei dazu für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gegeben mit  $d(a, b) \leq \delta \Rightarrow d(g(a), g(b)) \leq \varepsilon$ . Wir zeigen  $d(x, z) \leq \delta/2 \Rightarrow d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$  für alle  $x, z \in X$ . In der Tat, ist  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , so folgt aus der Dreiecksungleichung  $d(a_n, b_n) \leq \delta$  für fast alle  $n$  und damit  $d(g(a_n), g(b_n)) \leq \varepsilon$  für fast alle  $n$  und dann im Grenzwert auch  $d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$  mithilfe der Stetigkeit der Metrik  $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  nach II.6.2.23.  $\square$

1.4.15. Wir erinnern daran, daß nach ?? eine lineare Abbildung zwischen zwei Hilberträumen oder allgemeiner zwei Prähilberträumen  $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  unitär heißt genau dann, wenn sie das Skalarprodukt erhält, wenn also in Formeln gilt  $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathcal{H}$ .

1.4.16. Eine unitäre Einbettung von einem Hilbertraum in einen Prähilbertraum und allgemeiner eine normerhaltende Einbettung von einem Banachraum in einen weiteren normierten Vektorraum hat stets abgeschlossenes Bild. In der Tat ist nach II.7.5.3 eine vollständige Teilmenge eines metrischem Raums stets abgeschlossen.

**Lemma 1.4.17.** *Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $A \subset X$  ein dichter Teilraum und  $g : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Ist die Einschränkung  $g|_A : A \rightarrow Y$  linear, so ist auch  $g$  linear. Sind  $X, Y$  sogar Prähilberträume und ist die Einschränkung  $g|_A : A \rightarrow Y$  unitär, so ist auch  $g$  unitär.*

*Beweis.* Die Abbildung  $X \times X \rightarrow Y, (v, w) \mapsto g(v) + g(w)$  ist stetig und stimmt auf der dichten Teilmenge  $A \times A$  mit der stetigen Abbildung  $(v, w) \mapsto g(v + w)$  überein. Also sind diese Abbildungen gleich und es gilt  $g(v + w) = g(v) + g(w)$  für alle  $v, w \in X$ . Mit ähnlichen Argumenten beendet man den Nachweis der Linearität von  $g$  und zeigt die Verträglichkeit mit dem Skalarprodukt.  $\square$

*Beweis des Satzes 1.4.10 über Hilbertbasen.* Bezeichne  $\mathbb{C}I \subset L^2(I)$  den Raum aller Abbildungen  $I \rightarrow \mathbb{C}$ , die nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden sind. Natürlich bilden die  $\chi_i$  eine Basis von  $\mathbb{C}I$  und wir erhalten eine lineare Abbildung  $\mathbb{C}I \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\chi_i \mapsto e_i$ . Da sowohl die  $\chi_i$  als auch die  $e_i$  Orthonormalsysteme sind, ist unsere Abbildung mit den Skalarprodukten verträglich, insbesondere erhält sie Abstände. Da  $\mathcal{H}$  vollständig ist und  $\mathbb{C}I$  dicht liegt in  $L^2(I)$ , läßt sich unsere Abbildung nach Lemma 1.4.12 auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung  $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$  ausdehnen, und nach 1.4.17 ist diese Ausdehnung sogar unitär. Damit ist Teil 1 bewiesen. Nach 1.4.16 ist das Bild unserer unitären Abbildung notwendig abgeschlossen, und im Fall einer Hilbertbasis folgt ihre Surjektivität. Um die inverse Abbildung zu beschreiben, rechnen wir

$$\hat{v}(i) = \langle \chi_i, \hat{v} \rangle = \langle \varphi(\chi_i), \varphi(\hat{v}) \rangle = \langle e_i, v \rangle$$

Mit der Notation aus 1.4.9 kann die im Beweis konstruierte Abbildung  $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$  auch suggestiver geschrieben werden in der Form

$$\varphi : f \mapsto \sum_{i \in I} f(i) e_i$$

In der Tat gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein endliches  $I_\varepsilon \subset I$  mit  $\sum_{i \notin I_\varepsilon} |f(i)|^2 < \varepsilon^2$ , und für  $J$  endlich mit  $I_\varepsilon \subset J \subset I$  und der Notation  $\chi_A$  für die charakteristische Funktionen einer Teilmenge  $A \subset I$  folgt  $f = \chi_J f + (1 - \chi_J) f$  und zusätzlich  $\|(1 - \chi_J) f\|_2 < \varepsilon$ , mithin  $\|\varphi(f) - \varphi(\chi_J f)\|_2 < \varepsilon$ . Daraus folgt unmittelbar der letzte Teil des Satzes.  $\square$

*Übung 1.4.18.* Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von paarweise orthogonalen Vektoren eines Hilbertraums ist summierbar im Sinne von 1.4.9 genau dann, wenn gilt  $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$ , und in diesem Fall haben wir

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|v_i\|^2$$

*Übung 1.4.19.* Man zeige, daß ein unendlichdimensionaler Hilbertraum keine Orthonormalbasis im Sinne der linearen Algebra besitzen kann.

*Ergänzende Übung 1.4.20.* Gegeben ein Maßraum  $(X, \mu)$  und ein separabler Hilbertraum  $\mathcal{H}$  bilden die meßbaren fast überall definierten Funktionen  $f : X \rightarrow \mathcal{H}$ , für die  $\| \cdot \|^2 \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist, mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \int \langle f(x), g(x) \rangle$  selbst einen Hilbertraum

$$L^2(X, \mathcal{H}) = L^2(X, \mathcal{H}; \mu)$$

und die meßbaren Stufenfunktionen mit Träger von endlichem Maß bilden darin einen dichten Teilraum. Hinweis: Man verallgemeinere den Beweis von 1.3.9. Die Bedingung der Separabilität von  $\mathcal{H}$  ist nötig wegen IV.6.3.16, da im allgemeinen  $\langle f(x), g(x) \rangle$  nicht meßbar sein müßte, etwa wenn  $X$  endliches Maß hat und  $f$  jedem Punkt von  $X$  den durch diesen Punkt indizierten Vektor einer durch  $X$  indizierten Orthonormalbasis zuordnet. Die Aussage gilt aber entsprechend für beliebige Hilberträume  $\mathcal{H}$ , wenn wir  $L^2(X, \mathcal{H})$  feiner erklären als die Menge aller meßbaren fast überall definierten Funktionen  $f : X \dashrightarrow \mathcal{H}$ , deren Bild in einem separablen Teilraum von  $\mathcal{H}$  enthalten ist und für die  $\| \cdot \|^2 \circ f : X \dashrightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist.

*Ergänzende Übung 1.4.21.* Gegeben ein Maßraum  $X$  und eine Menge  $Z$  notieren wir die Menge der fast überall definierten Abbildungen von  $X$  nach  $Z$  als  $\text{fEns}(X, Z)$ . Gegeben zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume  $X, Y$  und eine Menge  $Z$  induziert die offensichtliche Bijektion zwischen den entsprechenden Räumen überall definierter Abbildungen aus 1.2.2.26 nach Fubini eine Bijektion

$$\text{fEns}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{fEns}(X, \text{fEns}(Y, Z))$$

Man zeige, daß diese Abbildung im Spezialfall  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $Z = \mathbb{C}$  einen Isomorphismus  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$  induziert. Hinweis: Geeignete Stufenfunktionen bilden auf beiden Seiten dichte Teilräume, die als Prähilberträume unter unserer Abbildung identifiziert werden. Dann benutze man, daß punktweise Konvergenz fast überall unter unserer Abbildung punktweise Konvergenz fast überall wird, und schließe mit 1.3.9.

## 1.5 Approximation durch differenzierbare Funktionen

**Satz 1.5.1.** *Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\mu$  ein Borelmaß auf  $U$ , so liegen glatten Funktionen mit kompaktem in  $U$  enthaltenem Träger für alle  $p \in [1, \infty)$  dicht im Raum der  $L^p$ -Funktionen auf  $U$ , in Formeln*

$$\overline{\mathcal{C}_c^\infty(U)} = L^p(U; \mu)$$

1.5.2. Diese Aussage ist im Fall  $p = \infty$  nicht mehr richtig. So kann man für  $n \geq 1$  die konstante Funktion 1 in  $L^\infty$  nicht als Grenzwert einer Folge von Funktionen mit kompaktem Träger erhalten, und die charakteristische Funktion eines nichtleeren und von ganz  $\mathbb{R}$  verschiedenen Intervalls hat von jeder stetigen Funktion mit kompaktem Träger einen  $\|\cdot\|_\infty$ -Abstand  $\geq 1$ .

*Beweis.* Natürlich ist  $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(U)} \subset L^p(U; \mu)$  ein Untervektorraum. Wir zeigen nun für immer größere Funktionenklassen, daß sie zu  $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(U)}$  gehören.

1. Ist  $A \Subset U$  offen von endlichem Maß  $\mu(A) < \infty$ , so gehört die charakteristische Funktion  $[A]$  von  $A$  zu  $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(U)}$ . Das folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz sofort aus Lemma IV.6.8.4, nach dem eine Folge nichtnegativer glatter Funktionen mit kompaktem, in  $A$  enthaltenem Träger monoton gegen die charakteristische Funktion von  $A$  konvergiert.

2. Ist  $B \subset U$  meßbar von endlichem Maß  $\mu(B) < \infty$ , so gehört  $[B]$  zu  $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(U)}$ . In der Tat, für jedes  $\varepsilon > 0$  finden wir aufgrund der Regularität unseres Maßes nach IV.6.7.3 eine offene Teilmenge  $A \Subset U$  mit  $B \subset A$  und  $\mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon$ . Für deren charakteristische Funktion gilt dann  $\|[B] - [A]\|_p < \varepsilon^{1/p}$ . Also ist  $[B]$  Grenzwert einer Folge aus  $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(U)}$  und gehört mithin selbst zu  $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(U)}$ .

3. Für jeden Maßraum liegen die integrierbaren Stufenfunktionen für  $p \in [1, \infty)$  dicht im Raum aller  $L^p$ -Funktionen, siehe 1.3.11.  $\square$

*Ergänzung 1.5.3.* Im Raum der  $L^p$ -Funktionen auf einem beliebigen separablen lokal kompakten Hausdorff-Raum mit einem Borel-Maß liegen die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht. Das Argument geht ähnlich.

*Ergänzende Übung 1.5.4.* Ist  $U \Subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\mu$  darauf ein Borelmaß, so gibt es für jede beschränkte meßbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge  $f_n$  in  $\mathcal{C}_c^\infty(U)$  mit  $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  für alle  $n$  und  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für fast alle  $x \in U$ . Hinweis: Da unser Maß notwendig  $\sigma$ -endlich ist, findet man ein endliches Maß mit denselben Nullmengen, für das dann  $f$  integrierbar ist. Nun verwende man 1.3.9.

**Satz 1.5.5 (Fourier-Reihen quadratintegrierbarer Funktionen).** Sei das Intervall  $[0, 2\pi]$  mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesgue-Maß  $\mu := dt/2\pi$  versehen und  $\mathbb{Z}$  mit dem Zählmaß. So liefert die Fourierentwicklung  $f \mapsto f^\wedge$  gegeben durch  $f^\wedge(n) := \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mu\langle t \rangle$  einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2([0, 2\pi]; \mu) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{Z})$$

*Beweis.* Wir müssen nach 1.4.10 nur zeigen, daß die Funktionen  $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$  im Sinne von 1.4.5 eine Hilbertbasis von  $L^2([0, 2\pi]; \mu)$  bilden. Wir haben schon

im Beweis von III.3.1.3 gesehen, daß sie ein Orthonormalsystem bilden. Aus III.3.2.15 wissen wir weiter, daß sich jede stetige Funktion der Periode  $2\pi$  beliebig gut gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren läßt. Da sogar die glatten Funktionen auf  $[0, 2\pi]$  mit Träger im offenen Intervall  $(0, 2\pi)$  nach 1.5.1 ihrerseits dicht in  $L^2$  liegen, liegen auch die trigonometrischen Polynome dicht in  $L^2$ .  $\square$

*Übung 1.5.6 (Fourierreihen in mehreren Veränderlichen).* Man zeige, daß die Funktionen  $x \mapsto e^{2\pi i x \cdot \xi}$  für  $\xi \in \mathbb{Z}^n$  eine Hilbertbasis des Raums  $L^2([0, 1]^n; \lambda)$  der in Bezug auf das Lebesgue-Maß quadratintegrierbaren Funktionen auf dem  $n$ -dimensionalen Einheitswürfel bilden.

*Übung 1.5.7.* Gegeben  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $p \in [1, \infty)$  bezeichne  $\tau_y : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  die Verschiebung, in Formeln  $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$ . Man zeige die Stetigkeit der Abbildung  $\mathbb{R}^n \times L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $(y, f) \mapsto \tau_y f$ . Hinweis: Man zeige zunächst die Stetigkeit von  $y \mapsto \tau_y f$  für  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ . Der Buchstabe  $\tau$  steht für das Wort "Translation".

*Ergänzende Übung 1.5.8.* Hier dürfen Sie zeigen, daß für  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  meßbar von positivem Maß die Menge  $A + B$  eine nichtleere offene Teilmenge umfaßt. Man folgere zunächst aus 1.5.7, daß für alle  $g \in L^1(\mathbb{R}^n; \lambda)$  die Funktion  $y \mapsto \int f(y-x)[B](x) \lambda\langle x \rangle$  stetig sein muß. Dann beachte man, daß diese Funktion im Fall  $f = [A]$  mit  $A$  meßbar von positivem endlichen Maß nichtnegativ ist und positives Integral hat.

## 1.6 Fourier-Reihen und Charaktere

1.6.1. Seine natürlichste Form erhält unser Satz über Fourier-Reihen, wenn wir das Intervall  $[0, 2\pi]$  zur Kreislinie  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  zusammenbiegen. Das will ich im folgenden ausführen.

**Satz 1.6.2 (Einparameteruntergruppen von  $\mathbb{C}^\times$ ).** *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  hat die Gestalt  $\varphi(t) = \exp(at)$  für genau ein  $a \in \mathbb{C}$ .*

*Ergänzung 1.6.3.* Allgemeinere Aussagen dieser Art können Sie in VI.1.6.3 oder 3.1.20 kennenlernen.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $a$  folgt aus  $\varphi'(0) = a$ . Nur die Existenz von  $a$  ist also noch zu zeigen. Nun liefert für hinreichend kleines  $r > 0$  die komplexe Exponentialfunktion sicher eine Injektion  $\exp : B(0; r) \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$  mit offenem Bild  $U \subseteq \mathbb{C}$  und stetiger Umkehrabbildung  $U \xrightarrow{\sim} B(0; r)$ . Das Bild  $V = \exp(B(0; r/2))$  des Balls mit dem halben Radius hat dann offensichtlich die



Das Bild eines stetigen Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  hat im allgemeinen die Gestalt einer Spirale. Sie wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen, aber der Radius hängt exponentiell von der Zeit ab.

Eigenschaft, daß es für jedes  $z = \exp(b) \in U$  genau eine Wurzel in  $V$  gibt, als da heißt genau ein  $w := \sqrt{z} \in V$  mit  $w^2 = z$ , nämlich  $w = \exp(b/2)$ . Insbesondere besitzt also jedes  $z \in V$  genau eine Wurzel in  $V$ . Gegeben ein stetiger Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  finden wir nun sicher ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset V$  und ein  $b \in B(0; r/2)$  mit  $\varphi(\varepsilon) = \exp(b)$ . Es folgt

$$\varphi(\varepsilon/2) = \sqrt{\exp(b)} = \exp(b/2)$$

und induktiv  $\varphi(\varepsilon/2^n) = \exp(b/2^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $a = b/\varepsilon$ , so gilt mithin  $\varphi(t) = \exp(at)$  erst für alle  $t = \varepsilon/2^n$ , aber da beide Seiten Gruppenhomomorphismen sind, dann auch für alle  $t = m\varepsilon/2^n$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ , und da beide Seiten stetig sind, damit schließlich auch für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

*Übung 1.6.4.* Bezeichne  $S^1$  die Gruppe aller komplexen Zahlen der Norm Eins. Man zeige, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  die Gestalt  $z \mapsto z^n$  hat für genau ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Hinweis: 1.6.2.

*Übung 1.6.5.* Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen  $(S^1)^m \rightarrow (S^1)^n$  und der Menge  $M(n \times m; \mathbb{Z})$  aller  $(n \times m)$ -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Hinweis: 1.6.4.

*Übung 1.6.6.* Gegeben  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  betrachten wir den Gruppenhomomorphismus  $\rho_{\lambda, \varepsilon} : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit  $\rho_{\lambda, \varepsilon}(x) = |x|^\lambda (\operatorname{sgn}(x))^\varepsilon$ . Man zeige, daß wir so genau alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  erhalten. Hinweis: Man beachte  $\mathbb{R} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\times$  mittels  $(\exp \times \operatorname{id})$  bzw. der Multiplikation und wende 1.6.2 an.

1.6.7. Die Gruppenhomomorphismen von einer abelschen Gruppe  $G$  in die multiplikative Gruppe  $\mathbb{C}^\times$  der komplexen Zahlen heißen ganz allgemein die **Charaktere von  $G$**  und die Gruppenhomomorphismen in die Kreislinie  $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$  die **unitären Charaktere** von  $G$ . Ein stetiger Charakter der Kreislinie  $S^1$  ist automatisch unitär, da sein Bild eine kompakte Untergruppe von  $\mathbb{C}^\times$  sein muß und jede kompakte Untergruppe von  $\mathbb{C}^\times$  bereits in  $S^1$  enthalten ist.

**Definition 1.6.8.** Ein Borelmaß  $\mu$  auf der Kreislinie  $K = S^1$ , das unter Drehung invariant ist, heißt auch ein **Haar-Maß** auf der Kreislinie. In Formeln fordern wir von einem Haarmaß auf der Kreislinie also

$$\mu(A) = \mu(zA)$$

für alle  $z \in K$  und alle Borelmengen  $A \subset K$ .

**Satz 1.6.9 (Fourierreihen über Charaktere).** *Es gibt genau ein Haarmaß auf der Kreislinie, das der ganzen Kreislinie das Maß Eins zuordnet, und die stetigen Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums der in Bezug auf dieses Maß quadratintegrierbaren Funktionen.*

1.6.10. Bezeichnet in Formeln  $\hat{K}$  die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen  $\chi : K \rightarrow \mathbb{C}^\times$  und  $\mu$  das auf Gesamtmasse Eins normierte Haarmaß, so liefert die Vorschrift  $f \mapsto f^\wedge$  mit  $f^\wedge(\chi) := \int_K f \bar{\chi} \mu$  dem Integral des Produkts unserer Funktion mit dem komplex konjugierten Charakter nach unserem Satz also einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2(K; \mu) \xrightarrow{\sim} L^2(\hat{K})$$

zwischen dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf unserer Kreislinie  $K$  und dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Menge  $\hat{K}$  ihrer Charaktere, versehen mit dem Zählmaß. In dieser Form gilt unser Satz sogar für beliebige “separable abelsche kompakte Hausdorff’sche topologische Gruppen”  $K$ , was wir hier jedoch nicht beweisen. Im Spezialfall der zyklischen Gruppen  $K = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  heißt diese Transformation auch die **diskrete Fouriertransformation** und  $\hat{K}$  besteht aus den Abbildungen  $\chi_m : \zeta \mapsto \zeta^m$  für  $m = 0, 1, \dots, n-1$ . Sie ist für konkrete Anwendungen von besonderer Bedeutung, da in der Praxis ja stets nur endlich viele Messungen durchgeführt werden können. In der Algebra werden wir dieses Beispiel in ?? auf den Fall allgemeinerer Grundkörper verallgemeinern und in ?? auf den Fall endlicher nicht notwendig kommutativer Gruppen. In VI.10.10.2 schließlich führen wir im Fall komplexer Koeffizienten diese Verallgemeinerungen in verschiedene Richtungen wieder zusammen unter dem Dach einer “Fouriertransformation für kompakte Liegruppen”, die übrigens mutatis mutandis auch allgemeiner für beliebige “separable kompakte Hausdorff’sche topologische Gruppen” gilt.

*Beweis.* Die Abbildung  $E : [0, 2\pi) \rightarrow K$ ,  $t \mapsto e^{it}$  ist ein Isomorphismus von Meßräumen, und unter  $E$  entspricht  $dt/2\pi$  einem Maß  $\mu$  auf  $K$  mit den geforderten Eigenschaften. Den Nachweis der Eindeutigkeit von  $\mu$  überlassen wir dem Leser mit dem Tipp, das aus unserer Charakterisierung des Lebesguemaßes IV.6.1.20 herzuleiten. Die stetigen Gruppenhomomorphismen  $\chi : K \rightarrow \mathbb{C}^\times$  sind nach 1.6.4 genau die Abbildungen  $\chi_n : z \mapsto z^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ . Unter  $E$  entsprechen sie gerade den Funktionen  $\chi_n \circ E : t \mapsto e^{int}$ . Unser Satz ist damit nur eine Übersetzung von 1.2.13 in eine andere Sprache.  $\square$

## 1.7 Orthogonale Projektionen in Hilberträumen

1.7.1. Wir holen den Beweis nach für unsere Behauptung, daß jeder Hilbertraum eine Hilbertbasis besitzt, und zeigen dafür:

**Satz 1.7.2 (Orthogonale Komplemente in Hilberträumen).** *Für jede Teilmenge eines Hilbertraums  $U \subset \mathcal{H}$  ist das orthogonale Komplement  $U^\perp =$*

$\{v \in \mathcal{H} \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$  ein abgeschlossener Teilraum. Ist  $U$  bereits selbst ein abgeschlossener Teilraum, so definiert die Addition eine Bijektion

$$U \times U^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$$

1.7.3. Alle Aussagen dieses Satzes mit Ausnahme der Surjektivität der Addition  $U \times U^\perp \rightarrow \mathcal{H}$  gelten mit demselben Beweis auch für einen Prähilbertraum  $\mathcal{H}$ . Um die Surjektivität zu erhalten, muß man jedoch im Fall eines Prähilbertraums zusätzlich fordern, daß  $U \subset \mathcal{H}$  ein vollständiger Teilraum sein soll. Der Beweis ist dann wieder derselbe. Im Fall eines Hilbertraums sind nach II.7.5.3 und II.7.5.2 die vollständigen Teilräume genau die abgeschlossenen Teilräume, im Fall eines Prähilbertraums ist die Forderung der Vollständigkeit an einen Teilraum jedoch stärker.

*Beweis.* Sicher ist für alle  $x \in \mathcal{H}$  die Abbildung  $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $v \mapsto \langle x, v \rangle$  stetig und linear. Das Urbild  $x^\perp$  von  $0 \in \mathbb{C}$  unter dieser Abbildung ist also ein abgeschlossener Untervektorraum von  $\mathcal{H}$ , und dann muß auch für beliebiges  $U \subset \mathcal{H}$  die Menge

$$U^\perp = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall x \in U\} = \bigcap_{x \in U} x^\perp$$

ein abgeschlossener Untervektorraum von  $\mathcal{H}$  sein. Offensichtlich gilt weiter  $U \cap U^\perp = 0$ , und damit ist unsere Additionsabbildung im Fall eines Teilraums  $U$  injektiv. Um für  $U$  einen abgeschlossenen Teilraum ihre Surjektivität zu zeigen, wählen wir ein  $v \in \mathcal{H}$  und setzen  $d = d(v, U) = \inf_{u \in U} \|v - u\|$ . Sicher gibt es eine Folge  $u_n$  von Vektoren aus  $U$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - u_n\| = d$ . Wir erinnern nun an die Parallelogrammregel ??, die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen. Ist also eine Diagonale fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein. In Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 &= \|u_n - u_m\|^2 + \|2v - u_n - u_m\|^2 \\ &= \|u_n - u_m\|^2 + 4\|v - (u_n + u_m)/2\|^2 \end{aligned}$$

Da aber  $(u_n + u_m)/2$  auch in  $U$  liegt, folgt

$$2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4d^2 \geq \|u_n - u_m\|^2$$

und aus dieser Abschätzung erkennt man, daß die  $u_n$  eine Cauchyfolge bilden. Da  $U$  vollständig ist, gibt es also  $u \in \mathcal{H}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ . Da die Norm stetig ist, gilt weiter  $d = \|v - u\|$ . Wir behaupten  $(v - u) \in U^\perp$ . In der Tat, für alle  $h \in U$  nimmt die Funktion

$$t \mapsto \|v - u + th\|^2 = \|v - u\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle v - u, h \rangle + t^2 \|h\|^2$$

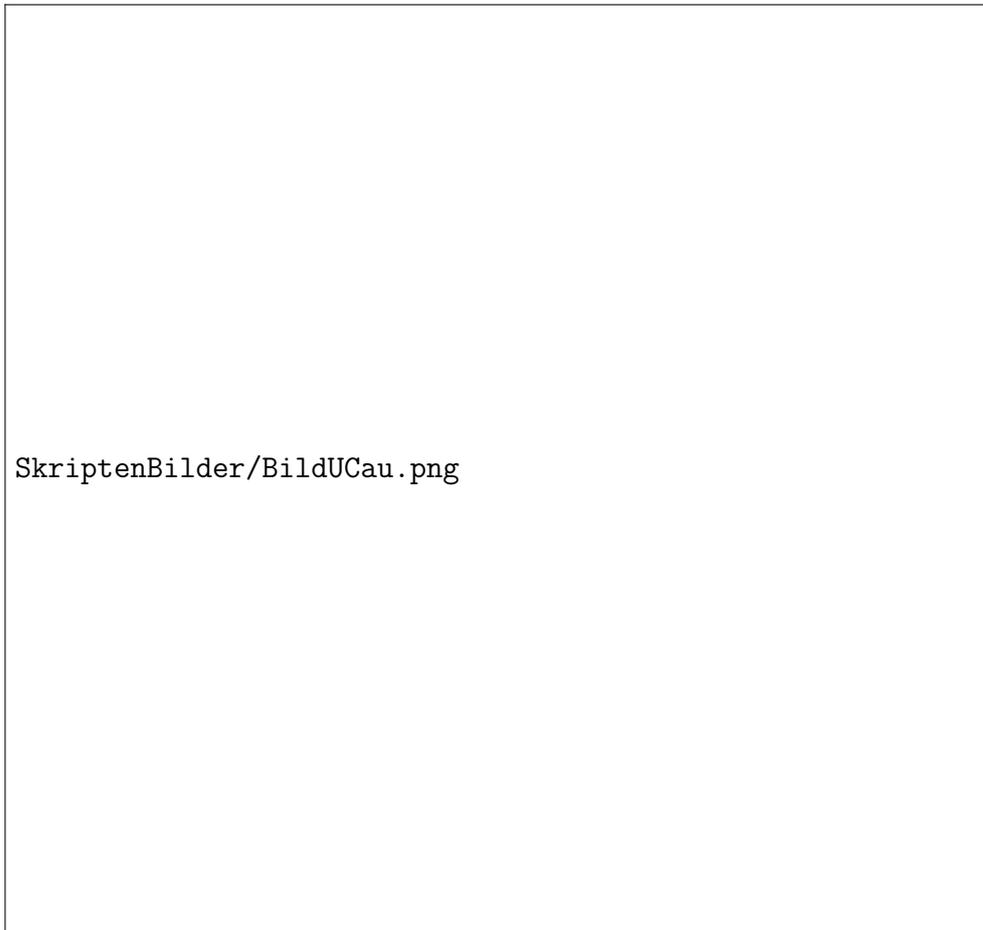


Illustration zum Beweis des Satzes über das orthogonale Komplement: Ist in einem Parallelogramm eine Diagonale, hier etwa die gestrichelt eingezeichnete, fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein.

bei  $t = 0$  ein Minimum an, folglich verschwindet dort ihre Ableitung, und wir erhalten  $\operatorname{Re}\langle v - u, h \rangle = 0$  für alle  $h \in U$ . Damit haben wir die gesuchte Zerlegung  $v = u + (v - u)$  mit  $u \in U$  und  $(v - u) \in U^\perp$  gefunden.  $\square$

**Korollar 1.7.4 (Riesz'scher Darstellungssatz für Hilberträume).** *Jede stetige Linearform auf einem Hilbertraum kann beschrieben werden als das Bilden des Skalarprodukts mit einem durch die besagte Linearform eindeutig bestimmten Vektor.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{H}$  unser Hilbertraum und  $l : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  unsere Linearform. Der Kern  $\ker l \subset \mathcal{H}$  ist ein abgeschlossener Teilraum und  $l$  induziert eine Injektion  $(\ker l)^\perp \hookrightarrow \mathbb{C}$ . Im Fall  $l = 0$  ist  $x = 0$  das gesuchte Element von  $\mathcal{H}$ . Sonst finden wir genau ein  $x \in (\ker l)^\perp \cong \mathbb{C}$  mit  $\langle x, v \rangle = l(v) \quad \forall v \in (\ker l)^\perp$ , und da diese Gleichung eh gilt für alle  $v \in \ker l$ , folgt sie für alle  $v \in \mathcal{H}$ .  $\square$

**Definition 1.7.5.** Sei  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  eine lineare Abbildung von Hilberträumen und  $B : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  eine lineare Abbildung in die Gegenrichtung. Die Abbildungen  $A$  und  $B$  heißen **adjungiert** genau dann, wenn gilt

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}, w \in \mathcal{H}'$$

1.7.6. Wir werden in 3.2.1 zeigen, daß eine lineare Abbildung zwischen Hilberträumen genau dann stetig ist, wenn sie eine adjungierte Abbildung besitzt. In der folgenden Übung sollen Sie von dieser Aussage die einfache Richtung zeigen.

*Übung 1.7.7.* Jede stetige lineare Abbildung von Hilberträumen hat genau eine adjungierte Abbildung, und diese ist auch stetig. Man notiert die adjungierte Abbildung zu  $A$  in der mathematischen Literatur meist  $A^*$ , in der physikalischen Literatur dahingegen meist  $A^\dagger$ . Man zeige nun weiter  $(A^*)^* = A$  und  $(AB)^* = B^*A^*$  und  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\|A\| = \|A^*\|$  sowie  $\|A^*A\| = \|A\|^2$  für die Operatornorm. Hinweis: Zuerst mag der Riesz'sche Darstellungssatz helfen, angewandt auf  $v \mapsto \langle Av, w \rangle$  für festes  $w$ , dann die Erkenntnis  $\|A\| = \sup\{\langle Av, v' \rangle \mid \|v\| = \|v'\| = 1\}$  im Fall, daß keiner unserer beiden Räume der Nullraum ist.

*Übung 1.7.8.* Die orthogonalen Projektionen auf abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraums sind genau die idempotenten selbstadjungierten Operatoren, als da heißt die stetigen linearen Selbstabbildungen  $P$  unseres Hilbertraums mit  $P^2 = P$  und  $P^* = P$ .

*Übung 1.7.9.* Eine stetige lineare Abbildung zwischen Hilberträumen hat dichtes Bild genau dann, wenn die adjungierte Abbildung injektiv ist. Allgemeiner zeige man, daß das orthogonale Komplement des Bildes der Kern der adjungierten Abbildung ist.

*Übung 1.7.10.* Es gibt ein elegantes direktes Argument, das für jeden selbstadjungierten Operator  $T$  auf einem Hilbertraum die Identität

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| \mid \|x\| \leq 1\}$$

zeigt: Bezeichnet  $M$  die rechte Seite, so ist  $\|T\| \geq M$  eh klar. Für die andere Ungleichung betrachte man für  $x$  von der Länge Eins mit  $Tx \neq 0$  sein auf Länge Eins normiertes Bild  $y = Tx/\|Tx\|$ . Dann gilt  $\|Tx\| = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  und man erhält von der Mitte ausgehend

$$4M = M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \geq \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 4\|Tx\|$$

*Übung 1.7.11.* Man zeige: Gegeben eine stetige beschränkte Abbildung von einem topologischen Raum in einen Hilbertraum  $f : X \rightarrow \mathcal{H}$  und ein komplexes Maß  $\mu \in M(X)$  gibt es genau einen Vektor  $\int f(x) \mu\langle x \rangle$  in  $\mathcal{H}$  mit Eigenschaft

$$\left\langle w, \int f(x) \mu\langle x \rangle \right\rangle = \int \langle w, f(x) \rangle \mu\langle x \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Man zeige weiter, daß dieses Integral  $\int f(x) \mu\langle x \rangle$  linear ist in  $f$  und  $\mu$ . Hinweis: 1.7.4.

*Übung 1.7.12.* Man zeige, daß jeder abgeschlossene Teilraum von  $L^2(S^1)$ , der unter dem Vorschalten aller Multiplikationen  $(z \cdot)$  für  $z \in S^1$  stabil ist, der Abschluß des Erzeugnisses der in ihm enthaltenen Charaktere sein muß. Hinweis: Man betrachte die linearen Abbildungen  $p_n : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$  mit

$$(p_n(f))(w) = \int_{S^1} z^n f(zw) \mu\langle z \rangle$$

und überlege sich etwa mit 1.7.11, daß sie auch unsere abgeschlossenen Teilräume von oben in sich überführen müssen.

**Korollar 1.7.13.** *Jeder Hilbertraum besitzt eine Hilbertbasis.*

*Beweis.* Nach dem Zorn'schen Lemma finden wir ein bezüglich Inklusion maximales Orthonormalsystem. Wäre der Abschluß seines Erzeugnisses nicht der ganze Raum, so könnten wir unser Orthonormalsystem nach 1.7.2 doch noch vergrößern durch Hinzunahme eines Vektors der Länge Eins aus seinem orthogonalen Komplement, im Widerspruch zur Maximalität.  $\square$

1.7.14. Damit ist insbesondere gezeigt, daß sich jeder Hilbertraum schreiben läßt als ein Raum von quadratintegrierbaren Funktionen, und das sogar auf einer Menge mit Zählmaß.

*Übung 1.7.15.* Man zeige: Genau dann besitzt ein Hilbertraum eine abzählbare dichte Teilmenge, wenn er eine abzählbare Hilbertbasis besitzt.

*Ergänzung 1.7.16 (Keele-Vermutung).* Gegeben eine abgeschlossene beschränkte nichtleere Teilmenge eines Hilbertraums wird vermutet, daß es zu jedem Punkt unseres Hilbertraums nur einen nächsten Punkt in unserer Teilmenge gibt genau dann, wenn unsere Teilmenge konvex ist. Das ist derzeit (2004) meines Wissens nur für endlichdimensionale Räume bewiesen.

*Beispiel 1.7.17.* Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum muß keine abzählbare Hilbertbasis besitzen. Um ein Beispiel dafür anzugeben, muß ich jedoch mehr Wissen voraussetzen. Betrachten wir den Raum  $X = \text{Ens}(I, \{1, -1\})$  aller Abbildungen von einer beliebigen Menge  $I$  in die zweielementige Menge  $\{1, -1\}$ . Mit der Produkttopologie zur diskreten Topologie auf  $\{1, -1\}$  ist  $X$  kompakt nach dem Satz von Tychonov VI.17.4.7. Jetzt liefert eine analoge Argumentation wie in IV.6.2.30 ein wohlbestimmtes Borelmaß auf  $X$ , das jedem Urbild eines Punktes unter der Projektion auf einen der Faktoren das Maß  $1/2$  zuordnet. Die Projektionen auf die Faktoren bilden dann ein Orthonormalsystem in  $L^2(X)$ .

## 2 Fouriertransformation

### 2.1 Definition und erste Eigenschaften

**Definition 2.1.1.** Die **Fouriertransformierte** einer integrierbaren Funktion  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  ist die Funktion  $f^\wedge : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , die gegeben wird durch die Vorschrift

$$f^\wedge(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i x \cdot y} d^n x$$

Hier bezeichnet  $x \cdot y \in \mathbb{R}$  das Standard-Skalarprodukt der Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Offensichtlich liefert die Abbildungsvorschrift  $f \mapsto f^\wedge$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung von zumindest im Fall  $n \geq 1$  unendlichdimensionalen komplexen Vektorräumen  $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1 \rightarrow \text{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , die **Fouriertransformation** oder genauer **Fouriertransformation auf integrierbaren Funktionen**.

2.1.2. Natürlich kann man die Fouriertransformierte auch berechnen, wenn man eine integrierbare Funktion nur fast überall kennt. Das Vorzeichen im Exponenten kommt her vom Vorzeichen aus unserer Formel für die Koeffizienten der Fourierentwicklung am Ende des Beweises von [III.3.1.3](#) und verbessert die Verträglichkeit beider Formalismen. Der merkwürdige Faktor  $(2\pi)^{-n/2}$  wird eingeführt, um eine Symmetrie vorzutäuschen, die mir eher gekünstelt scheint: Wie wir beim Beweis der Inversionsformel [2.1.32](#) sehen werden, sorgt er dafür, daß für alle  $f \in \mathcal{L}^1$  mit  $f^\wedge \in \mathcal{L}^1$  gilt  $(f^\wedge)^\wedge(x) = f(-x)$  für fast alle  $x$ . Oft verwendet man eine alternative Konvention, nach der die Fouriertransformierte gegeben wird durch das Integral

$$f^\wedge(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} d^n x$$

Auch mit dieser Konvention liefert die zweimalige Transformation, wenn sie denn möglich ist, die Verknüpfung der ursprünglichen Funktion mit der Punktspiegelung am Ursprung, aber die Formeln aus der gleich folgenden Proposition [2.1.6](#) müssen beim Arbeiten mit dieser Konvention durch kompliziertere Formeln ersetzt werden. Die eigentliche Bedeutung dieser ganzen Faktoren ebenso wie ein natürlicherer Formalismus werden in den folgenden Abschnitten noch ausführlich diskutiert werden, vergleiche insbesondere [2.2.11](#) und [2.3.14](#).

2.1.3. Sie alle beherrschen die Fouriertransformation viel besser, als Sie vielleicht vermuten: Wird etwa auf einem Klavier ein Akkord angeschlagen, so ist der Luftdruck an Ihrem Ohr eine komplizierte Funktion der Zeit, und wenn wir diese Funktion auf ein im Vergleich zur Dauer des einmaligen Hin-und-Her-Schwingens einer Klaviersaite großes Zeitintervall einschränken, durch

Null ausdehnen und darauf die Fouriertransformation anwenden, so erhalten wir eine Funktion auf dem Raum aller möglichen Tonhöhen, die in der Nähe der angeschlagenen Tonhöhen sehr große Werte annimmt und sonst nur sehr kleine Werte, vergleiche 2.1.5. In diesem Sinne ist also das Auflösen eines Akkordes in einzelne Töne eine Fouriertransformation. Sie ist der Ausgangspunkt eines Teilgebiets der Mathematik, das man denn auch treffend als **Harmonische Analysis** bezeichnet.

*Beispiel 2.1.4.* Wir berechnen die Fouriertransformierte von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto e^{-|x|}$  und erhalten

$$\begin{aligned} f^\wedge(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-|x|} e^{-ixy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(iy+1)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(iy-1)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{iy+1} - \frac{1}{iy-1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{y^2+1} \end{aligned}$$

*Übung 2.1.5.* Man berechne die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion  $f$ , die gegeben wird durch die Vorschrift  $f(x) = 1$  für  $|x| \leq 1$  und Null sonst, und zeige  $f^\wedge(y) = (\sqrt{2} \sin y) / \sqrt{\pi} y$ . Man berechne auch die Fouriertransformierten der Produkte  $f(x) \sin(\alpha x)$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und diskutiere den Zusammenhang mit dem Hören von Akkorden.

**Proposition 2.1.6 (Formelsammlung für die Fouriertransformation).**

Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  eine integrierbare Funktion.

1. Die Fouriertransformierte  $f^\wedge$  von  $f$  ist stetig und beschränkt, genauer gilt  $f^\wedge(y) \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$  für alle  $y$ . In 2.1.14 zeigen wir zusätzlich, daß die Fouriertransformierte  $f^\wedge$  einer integrierbaren Funktion  $f$  für  $\|y\| \rightarrow \infty$  stets gegen Null strebt.
2. Für  $g(x) = f(x) e^{i\alpha \cdot x}$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  haben wir  $g^\wedge(y) = f^\wedge(y - \alpha)$ .
3. Für  $g(x) = f(x - b)$  mit  $b \in \mathbb{R}^n$  haben wir  $g^\wedge(y) = f^\wedge(y) e^{-ib \cdot y}$ .
4. Für  $g(x) = \overline{f(x)}$  haben wir  $g^\wedge(y) = \overline{f^\wedge(-y)}$ .
5. Für  $g(x) = f(cx)$  mit  $c \in \mathbb{R}^\times$  haben wir  $g^\wedge(y) = |c|^{-n} f^\wedge(y/c)$ .
6. Ist für ein  $\nu$  mit  $1 \leq \nu \leq n$  die Funktion  $g$  mit  $g(x) = x_\nu f(x)$  auch integrierbar, so ist  $f^\wedge$  partiell differenzierbar nach der  $\nu$ -ten Variablen und es gilt  $g^\wedge(y) = i \frac{\partial f^\wedge}{\partial y_\nu}(y)$ .

7. Ist für ein  $\nu$  mit  $1 \leq \nu \leq n$  die Funktion  $f$  stetig partiell differenzierbar nach der  $\nu$ -ten Variablen und ist  $h(x) = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$  auch integrierbar, so gilt  $h^\wedge(y) = i y_\nu f^\wedge(y)$ .

*Beweis.* Per definitionem ist die Fouriertransformierte von  $f$  beschränkt durch  $(2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$ . Nach II.6.3.9 reicht es zum Nachweis der Stetigkeit (1), wenn wir für jede konvergente Folge  $y_r \rightarrow y$  zeigen, daß gilt  $f^\wedge(y_r) \rightarrow f^\wedge(y)$ . Das folgt jedoch leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz IV.6.5.10. Die Behauptungen (2) bis (5) ergeben sich durch mühelose Rechnungen. Um (6) zu zeigen, wenden wir unsere Erkenntnisse zum Differenzieren unter dem Integral aus IV.6.5.14 an. Formal ist das allerdings etwas mühsam, da wir dort noch keine vektorwertigen Funktionen betrachtet hatten, so daß es mir das Einfachste scheint, den Beweis nochmal in unserem Fall mit den entsprechenden Variationen auszuführen. Dazu bezeichnen wir mit  $e_\nu \in \mathbb{R}^n$  den  $\nu$ -ten Einheitsvektor und rechnen

$$\frac{f^\wedge(y) - f^\wedge(y + t e_\nu)}{t} = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) e^{-i x \cdot y} \frac{1 - e^{-i t x_\nu}}{t} d^n x$$

Jetzt beachten wir, daß nach dem Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen gilt  $|1 - e^{i t a}| \leq t |a|$ . Der Integrand ist also für  $|t| \leq 1$  beschränkt durch die integrierbare Funktion  $|x_\nu f(x)|$ . Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt also für jede Folge  $t_r$  aus  $\mathbb{R}^\times$  mit  $t_r \rightarrow 0$  notwendig

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f^\wedge(y) - f^\wedge(y + t_r e_\nu)}{t_r} = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) e^{-i x \cdot y} (-i x_\nu) d^n x = -i g^\wedge(y)$$

Die Behauptung folgt damit aus Übung II.3.3.34 über den Zusammenhang zwischen Grenzwerten von Funktionen und von Folgen. Um (7) zu zeigen beginnen wir mit dem Fall  $n = 1$  und rechnen

$$f'^\wedge(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f'(x) e^{-i x y} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_r}^{b_r} f'(x) e^{-i x y} dx$$

für beliebige Folgen  $a_r, b_r$  mit  $a_r \rightarrow -\infty$  und  $b_r \rightarrow \infty$ . Mit einer partiellen Integration dürfen wir das umschreiben zu

$$f'^\wedge(y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( f(x) e^{-i x y} \Big|_{a_r}^{b_r} - \int_{a_r}^{b_r} f(x) (-i y) e^{-i x y} dx \right)$$

Da  $f$  integrierbar ist, können wir unsere Folgen  $a_r, b_r$  sogar so wählen, daß gilt  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(a_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(b_r) = 0$ , und auf diese Weise sehen wir

$$f'^\wedge(y) = i y f^\wedge(y)$$

Für beliebiges  $n$  folgt unsere Behauptung dann mit dem Satz von Fubini.  $\square$

2.1.7. Bezeichne  $\mathcal{C}_b(D)$  den Raum der stetigen beschränkten komplexwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum  $D$ . Bezeichne  $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$  die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum und  $\tau_a$  die Verschiebung wie in 1.5.7, also  $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$ , so liefert die Proposition 2.1.6 uns damit zwei kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) \\ \tau_b \downarrow & & \downarrow e^{-i b \cdot y} \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) \\ e^{i a \cdot x} \downarrow & & \downarrow \tau_a \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung gemeint.

*Ergänzende Übung 2.1.8.* Wir betrachten in dieser Übung der Einfachheit halber nur Funktionen auf der reellen Zahlengeraden. Man zeige: Die Fouriertransformierte einer geraden Funktion ist gerade; die Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion ist ungerade. Die Fouriertransformierte einer geraden reellwertigen Funktion ist reellwertig; die Fouriertransformierte einer ungeraden reellwertigen Funktion nimmt nur rein imaginäre Werte an. Schreiben wir eine integrierbare Funktion  $f$  als Summe  $f = g + u$  ihres geraden und ihres ungeraden Anteils, so gilt  $g^\wedge(y) = (2\pi)^{-1} \int f(x) \cos(xy) dx$  und  $u^\wedge(y) = (2\pi)^{-1} \int f(x) \sin(xy) dx$ . Diese beiden Integrale, aufgefaßt als Funktionen von  $y$ , sind auch bekannt als die **Cosinustransformation** und die **Sinustransformation** von  $f$ . Sie haben den Vorteil, reelle Funktionen wieder zu reellen Funktionen zu machen, und ihre diskreten Analoga sind von großer technischer Bedeutung.

**Definition 2.1.9.** Der **Schwartzraum**  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist der Raum aller glatten Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  derart, daß für alle Multiindizes  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  die Funktion  $x^\alpha \partial^\beta f$  beschränkt ist. Hier verwenden wir die Multiindexschreibweise aus IV.2.2.3. Im Fall einer Veränderlichen bedeutet unsere Forderung also in Worten, daß alle Ableitungen unserer Funktion multipliziert mit beliebigen Polynomfunktionen beschränkt bleiben.

2.1.10. Im Schwartzraum liegen insbesondere alle glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Offensichtlich ist der Schwartzraum stabil unter Multiplikationen mit beliebigen  $x^\alpha$  und unter allen partiellen Ableitungen  $\partial^\beta$ . Offensichtlich sind alle Funktionen des Schwartzraums integrierbar.

*Übung 2.1.11.* Die Funktion  $x \mapsto e^{-x^2}$  liegt im Schwartzraum.

**Lemma 2.1.12.** Die Fouriertransformation führt den Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in sich selber über.

*Beweis.* Für eine Funktion aus dem Schwartzraum  $f \in \mathcal{S}$  finden wir nach 2.1.10 und Proposition 2.1.6 induktiv, daß  $f^\wedge$  beliebig stetig partiell differenzierbar ist und daß für alle Multiindizes  $\alpha, \beta$  gilt

$$(\partial^\beta x^\alpha f)^\wedge = i^{|\beta|+|\alpha|} y^\beta \partial^\alpha f^\wedge$$

Die Fouriertransformierten integrierbarer Funktionen sind aber nach 2.1.6.1 stets beschränkt, und damit gehört  $f^\wedge$  auch zum Schwartzraum.  $\square$

2.1.13. Bezeichnet  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum und  $\tau_a$  die Verschiebung wie in 1.5.7, also  $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$ , so liefert die Proposition 2.1.6 uns damit vier kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ \tau_b \downarrow & & \downarrow e^{-i b \cdot y} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ e^{i a \cdot x} \downarrow & & \downarrow \tau_a \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ x_\nu \downarrow & & \downarrow i \frac{\partial}{\partial y_\nu} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} \downarrow & & \downarrow i y_\nu \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist wieder die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  gemeint, im Fall des vertikalen Pfeils links unten also die Abbildung  $f \mapsto x_\nu f$ , wobei  $x_\nu f$  die Funktion meint mit den Werten  $(x_\nu f)(x_1, \dots, x_n) = x_\nu f(x_1, \dots, x_n)$ . Die Fouriertransformation verwandelt nach den unteren Diagrammen insbesondere partielles Ableiten in algebraische Operationen. Eine beliebige Anwendung ist denn auch das Lösen von Differentialgleichungen. Im Übrigen wird die Inversionsformel 2.1.18 zwei unserer vier Diagramme überflüssig machen.

2.1.14. Für alle  $f \in L^1$  gilt mit der Notation II.6.6.15 sogar die Formel  $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} f^\wedge(y) = 0$ . Für  $f \in \mathcal{C}_c^\infty$  folgt das bereits aus 2.1.12. Für beliebiges  $f \in L^1$  und  $\varepsilon > 0$  finden wir nach 1.5.1 ein  $g \in \mathcal{C}_c^\infty$  mit  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$  und damit folgt dann sofort  $|f^\wedge(y) - g^\wedge(y)| < \varepsilon \quad \forall y$ . So erhalten wir unsere Aussage für beliebiges integrierbares  $f$ . Gegeben ein topologischer Raum  $X$  bezeichnet man ganz allgemein mit

$$\mathcal{C}_0(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \subset X \text{ kompakt mit } (x \notin K_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)\}$$

die Menge der **im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen**. Mit dieser Notation liefert unsere Fouriertransformation eine Abbildung  $L^1 \rightarrow \mathcal{C}_0$ . Anschaulich mag man das etwa im Fall  $n = 1$  wie folgt verstehen:

Ist  $|y|$  sehr groß, so beschreibt  $x \mapsto e^{ixy}$  eine Funktion, die sehr schnell oszilliert. Ändert sich  $f$  nicht ganz so schnell, so wird sich beim Integrieren von  $f(x)e^{ixy}$  sehr viel wegheben, so daß das Integral sehr klein wird.

**Lemma 2.1.15 (Fouriertransformierte der Glockenkurve).** *Die Gauß'sche Glockenkurve ist ihre eigene Fouriertransformierte, in Formeln gilt für die Funktion  $g(x) = e^{-x^2/2}$  also  $g^\wedge(y) = e^{-y^2/2}$ .*

*Beweis.* Natürlich erfüllt  $g$  die Differentialgleichung

$$g'(x) = -xg(x)$$

Auch ohne den Eindeutigkeitssatz über Lösungen von Differentialgleichungen zu bemühen, kann man durch Ableiten von  $f(x)/(e^{-x^2/2})$  zeigen, daß diese Differentialgleichung bis auf konstante Faktoren keine anderen Lösungen  $f$  hat. Nach Übung 2.1.11 gehört  $g$  zum Schwartzraum, durch Fouriertransformation unserer Differentialgleichung ergibt sich damit

$$iyg^\wedge(y) = -ig^{\wedge'}(y)$$

und wir folgern, daß die Fouriertransformierte von  $g(x) = e^{-x^2/2}$  die Gestalt  $g^\wedge(y) = ce^{-y^2/2}$  haben muß mit  $c \in \mathbb{C}$ . Diese Konstante  $c$  schließlich ergibt sich mit IV.6.8.13 zu

$$c = g^\wedge(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} dx = 1 \quad \square$$

2.1.16. Ein mehr konzeptionelle Alternative zur Rechnung mithilfe der Formel für die Fläche unter der Gauss'schen Glockenkurve IV.6.8.13 bietet die Poisson'sche Summationsformel 2.1.35, der man direkt und ohne erst schwierige Integrale zu lösen entnehmen kann, daß die fragliche Konstante  $c$  den Wert Eins haben muß.

*Übung 2.1.17.* Gegeben integrierbare Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  einer reellen Veränderlichen ist die Fouriertransformierte von  $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$  das Produkt  $f^\wedge(y) = f_1^\wedge(y_1) \dots f_n^\wedge(y_n)$ . Speziell ist die Funktion  $e^{-x \cdot x/2}$  auf  $\mathbb{R}^n$  ihre eigene Fouriertransformierte.

**Proposition 2.1.18 (Inversionsformel im Schwartzraum).** *Gegeben eine Funktion aus dem Schwartzraum  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt für die Fouriertransformierte ihrer Fouriertransformierten stets*

$$(f^\wedge)^\wedge(x) = f(-x)$$

2.1.19. In 2.1.32 leiten wir dieselbe Formel allgemeiner für beliebige integrierbare Funktionen mit integrierbarer Fouriertransformierten her. Eine kanonische Version, in der wir auch das Vorzeichen als ein Artefakt unserer Konventionen verstehen lernen, wird in 2.3.14 gegeben.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst im Schwartzraum eine beliebige weitere Funktion  $g \in \mathcal{S}$  und behaupten

$$\int f^\wedge(y)g(y) \, d^n y = \int f(x)g^\wedge(x) \, d^n x$$

In der Tat ist das nach unseren Definitionen und Fubini gleichbedeutend zu

$$\int \int f(x) e^{-ix \cdot y} g(y) \, d^n x \, d^n y = \int \int f(x) e^{-ix \cdot y} g(y) \, d^n y \, d^n x$$

und damit offensichtlich. Ist etwas allgemeiner  $h \in \mathcal{S}$  eine Funktion aus dem Schwartzraum und betrachten wir für  $r > 0$  die Funktion  $g = h_r = h(y/r)$ , so erhalten wir mit 2.1.6.5 sofort  $g^\wedge = h_r^\wedge = r^n h^\wedge(rx)$  und damit

$$\int f^\wedge(y)h(y/r) = \int f(x)h_r^\wedge(x) = \int f(x)r^n h^\wedge(rx) = \int f(x/r)h^\wedge(x)$$

wo wir im letzten Schritt die Transformationsformel IV.4.4.6 angewandt haben. Für  $r \rightarrow \infty$  folgt dann aus dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\int f^\wedge(y)h(0) = \int f(0)h^\wedge(x)$$

und wenn wir  $(2\pi)^{-n/2}$  davormultiplizieren und integrieren

$$f^{\wedge\wedge}(0) \cdot h(0) = f(0) \cdot h^{\wedge\wedge}(0)$$

Setzen wir hier speziell für  $h$  das Produkt von Gauss'schen Glockenkurven  $e^{-x \cdot x/2}$  ein, so folgt aus 2.1.15 sofort

$$f^{\wedge\wedge}(0) = f(0)$$

Diese Erkenntnis brauchen wir nur noch auf die verschobenen Funktionen  $\tau_b f$  anzuwenden und mit den beiden ersten kommutativen Diagrammen von 2.1.13 erhalten wir

$$f(-b) = (\tau_b f)(0) = (\tau_b f)^{\wedge\wedge}(0) = (\tau_{-b}(f^{\wedge\wedge}))(0) = f^{\wedge\wedge}(b) \quad \square$$

**Satz 2.1.20 (Fouriertransformation von  $L^2$ -Funktionen).** *Die Fouriertransformation nach 2.1.1 läßt sich auf genau eine Weise vom Schwartzraum fortsetzen zu einem unitären Isomorphismus von Hilberträumen*

$$L^2(\mathbb{R}^n; d^n x) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}^n; d^n y)$$

und das Quadrat dieses Isomorphismus fällt zusammen mit dem Effekt der Punktspiegelung am Ursprung des  $\mathbb{R}^n$  auf quadratintegrierbaren Funktionen.

*Beweis.* Nach 1.5.1 liegt der Schwartzraum dicht im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen. Nach dem Lemma über die Existenz stetiger Fortsetzungen 1.4.12 und dem Lemma über die Linearität und Unitarität stetiger Fortsetzungen 1.4.17 reicht es also, wenn wir für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  zeigen  $\|f\|_2 = \|f^\wedge\|_2$ . Dazu erklären wir  $g$  durch  $g(y) = \overline{f^\wedge(y)}$  und finden mit 2.1.6.4 leicht

$$g^\wedge(x) = \overline{f^\wedge(-x)} = \overline{f(x)}$$

Unsere Formel vom Beginn des vorhergehenden Beweises der Inversionsformel 2.1.18 zeigt dann sofort  $\|f^\wedge\|_2 = \|f\|_2$ . Die Inversionsformel im Fall quadratintegrierbarer Funktionen schließlich folgt durch stetige Fortsetzung aus der Inversionsformel für Funktionen aus dem Schwartzraum.  $\square$

2.1.21. Die bisherigen Konstruktionen können wir zusammenfassen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 : & L^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_0 \\ & \cup & & \cup \\ \mathcal{F} : & \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{S} \\ & \cap & & \cap \\ \mathcal{F}_2 : & L^2 & \rightarrow & L^2 \end{array}$$

wobei die Transformation der obersten Zeile stetig ist nach 2.1.6.1 für die  $\|\cdot\|_1$ -Norm auf  $L^1$  und die  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm auf  $\mathcal{C}_0$ , die mittlere Zeile sich durch Einschränkung ergibt, und die unterste Zeile durch stetige Ausdehnung in Bezug auf  $\|\cdot\|_2$  entsteht. Dies Diagramm legt es nahe zu fragen, ob denn (1) für eine fast überall definierte Funktion  $f \in L^1 \cap L^2$  ihre Fouriertransformation im Sinne integrierbarer Funktionen stets übereinstimmt mit ihrer Fouriertransformation im Sinne quadratintegrierbarer Funktionen, und weiter, ob (2) für  $f \in L^1$  mit  $f^\wedge \in L^1$  auch gilt  $f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$  fast überall. Beides ist richtig und soll im Folgenden gezeigt werden. Dafür müssen wir einige Vorbereitungen treffen. Zunächst geben wir jedoch noch eine Anwendung.

2.1.22 (**Berechnung der Fourier-Transformierten einer  $L^2$ -Funktion**). Es ist nicht ganz leicht, eine explizite Formel für die Fourier-Transformierte einer  $L^2$ -Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  anzugeben. In der Tat kann man ja nicht

erwarten, daß das Integral 2.1.1 für alle  $y$  konvergiert, ja das wäre sogar fast etwas beunruhigend, da es uns unter Verwendung der Inversionsformel erlauben würde, zu jeder quadratintegrierbaren Funktion einen wohlbestimmten “überall definierten Repräsentanten” auszuzeichnen. Stattdessen können wir wie folgt vorgehen: Wir wählen reelle Folgen  $a_n, b_n$  mit  $a_n \rightarrow -\infty$  und  $b_n \rightarrow \infty$  und betrachten die integrierbaren Funktionen  $f_n$ , die durch Restriktion von  $f$  auf das kompakte Intervall  $[a_n, b_n]$  und Ausdehnen durch Null entstehen. Dann gilt  $f_n \rightarrow f$  im  $L^2$ -Sinne und folglich auch  $\mathcal{F}_2(f_n) \rightarrow \mathcal{F}_2(f)$  im  $L^2$ -Sinne. Da die  $f_n$  integrierbar sind, gilt nach der im folgenden bewiesenen Proposition 2.1.30 nun aber  $\mathcal{F}_2(f_n) = \mathcal{F}_1(f_n) = f_n^\wedge$ , und das können wir mit unserer Formel 2.1.1 jedenfalls im Prinzip ausrechnen. Die so gebildeten fast überall definierten Funktionen  $f_n^\wedge$  streben demnach im  $L^2$ -Sinne gegen  $\mathcal{F}_2(f)$ . Gelingt es uns also zum Beispiel, Folgen  $a_n, b_n$  so geschickt zu wählen, daß die Folge der Fouriertransformierten  $f_n^\wedge$  fast überall punktweise konvergiert, so ist dieser punktweise Grenzwert nach 1.3.9 notwendig bereits quadratintegrierbar und ist unsere gesuchte Fouriertransformierte  $\mathcal{F}_2(f)$ .

**Definition 2.1.23.** Eine fast überall definierte Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **lokal integrierbar** genau dann, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf das Lebesgue-Maß. Wir notieren den Raum aller reellwertigen bzw. komplexwertigen lokal integrierbaren Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$$

*Ergänzung 2.1.24.* Ist allgemeiner  $\mu$  ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum  $X$ , so nennen wir eine  $\mu$ -fast überall definierte Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  **lokal integrierbar in Bezug auf  $\mu$**  genau dann, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf  $\mu$ . Diesen Funktionenraum notieren wir dann  $L_{\text{loc}}^1(X; \mu)$ .

*Übung 2.1.25.* Jede  $L^p$ -Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  für  $p \in [1, \infty]$  ist lokal integrierbar. Genau dann ist eine fast überall definierte Funktion lokal integrierbar, wenn ihre Einschränkung auf jedes Kompaktum integrierbar ist. Jede lokal integrierbare Funktion ist meßbar.

**Lemma 2.1.26.** *Zwei lokal integrierbare Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$ , deren Produkt mit jeder kompakt getragenen glatten Funktion dasselbe Integral hat, stimmen bereits als fast überall definierte Funktionen überein.*

2.1.27. Dasselbe gilt auch mit fast demselben Beweis für zwei in Bezug auf ein vorgegebenes nichtnegatives Borelmaß lokal integrierbare Funktionen. Der-

selbe Beweis zeigt die analoge Aussage auch noch allgemeiner für lokal integrierbare Funktionen, die auf offenen Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  definiert sind: Sie stimmen fast überall überein genau dann, wenn ihr Produkt mit jeder Funktion aus  $\mathcal{C}_c^\infty(U)$  dasselbe Integral über  $U$  hat.

*Beweis.* In Formeln ausgedrückt müssen wir zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)^* \\ f &\mapsto (g \mapsto \int fg) \end{aligned}$$

von unserem Raum lokal integrierbarer Funktionen in den Dualraum des Raums aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger eine Injektion ist. Sicher reicht es, wenn wir zeigen, daß dieselbe Abbildungsvorschrift im Fall reellwertiger Funktionen eine Injektion

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

liefert. Sicher reicht es sogar zu zeigen, daß die Restriktion dieser Abbildung auf die Teilmenge  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$  aller nichtnegativen lokal integrierbaren Funktionen injektiv ist. Diese Restriktion jedoch können wir schreiben als die Verknüpfung von Injektionen

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0}) \hookrightarrow \{\text{Borelmaße auf } \mathbb{R}^n\} \hookrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

wo die erste Abbildung jeder Funktion  $f$  das Borelmaß  $f(x) d^n x$  zuordnet und die zweite Abbildung jedem Borelmaß das Integrieren nach diesem Maß. Hier ist die erste Abbildung injektiv nach IV.6.4.21 und die Zweite injektiv nach IV.6.8.5 und die Proposition ist bewiesen.  $\square$

2.1.28. Etwas feiner betrachten wir den Raum  $L_{\mathcal{S}}^1(\mathbb{R}^n)$  aller meßbaren fast überall definierten Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft, daß ihr Produkt mit jeder Schwartzfunktion integrierbar ist. Offensichtlich erhalten wir so einen Untervektorraum

$$L_{\mathcal{S}}^1(\mathbb{R}^n) \subset L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$$

und ebenso offensichtlich liegen alle  $L^p$ -Funktionen ebenso wie alle stetigen beschränkten Funktionen, ja sogar alle meßbaren Funktionen von höchstens polynomialem Wachstum bereits in diesem Teilraum.

2.1.29. Wir bilden nun den algebraischen Dualraum  $\mathcal{S}^*$  des Schwartzraums, also den Raum  $\mathcal{S}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}, \mathbb{C})$  aller Linearformen auf dem Schwartzraum ohne irgendwelche Stetigkeitsannahmen. Nach 2.1.26 erhalten wir erst recht eine Inklusion

$$\text{int} : L_{\mathcal{S}}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$$

durch die Vorschrift  $f \mapsto (g \mapsto \int fg)$ . Des weiteren betrachten wir nun die zur Fouriertransformation auf dem Schwartzraum transponierte Abbildung  $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$ .

**Proposition 2.1.30.** *Mit den Einbettungen int aus 2.1.29 als Vertikalen kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 : L^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_0 \\ & \cap & \cap \\ \mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* & \rightarrow & \mathcal{S}^* \\ & \cup & \cup \\ \mathcal{F}_2 : L^2 & \rightarrow & L^2 \end{array}$$

*Insbesondere stimmt auf Funktionen, die sowohl integrierbar als auch quadratintegrierbar sind, die durch direktes Integrieren definierte Fouriertransformation zusammen mit der durch stetige Ausdehnung vom Schwartzraum erhaltenen.*

*Ergänzung 2.1.31.* Man kann allgemeiner zeigen, daß unter  $\mathcal{F}^\top$  für konjugierte Exponenten  $p, q$  mit  $1 \leq p \leq 2$  Funktionen aus  $L^p \subset \mathcal{S}^*$  in Funktionen aus  $L^q \subset \mathcal{S}^*$  übergehen, vergleiche etwa [Wer05].

*Beweis.* Um die Kommutativität des oberen Quadrats zu zeigen, wählen wir  $f \in L^1$  und müssen für alle  $g \in \mathcal{S}$  zeigen  $\int (\mathcal{F}_1 f)g = \int f(\mathcal{F}g)$ . Per definitionem und mit Fubini werden hier jedoch beide Seiten gegeben durch dieselbe Formel

$$(2\pi)^{-n/2} \int \int f(x) e^{-ix \cdot y} g(y) d^n x d^n y$$

Um weiter die Kommutativität des unteren Quadrats zu zeigen, wählen wir  $f \in L^2$  und müssen für alle  $g \in \mathcal{S}$  zeigen  $\int (\mathcal{F}_2 f)g = \int f(\mathcal{F}g)$ . Für festes  $g$  sind hier beide Seiten stetige Abbildungen  $L^2 \rightarrow \mathbb{C}$  und es reicht zu zeigen, daß sie auf allen Funktionen  $f$  aus dem Schwartzraum übereinstimmen. Das hinwiederum zeigt dieselbe Rechnung wie zuvor.  $\square$

**Satz 2.1.32 (Inversionsformel für integrierbare Funktionen).** *Für eine integrierbare Funktion  $f \in L^1$  mit integrierbarer Fouriertransformierten  $f^\wedge \in L^1$  gilt  $f^\wedge^\wedge(x) = f(-x)$  fast überall.*

2.1.33. Insbesondere ist jede integrierbare Funktion mit einer integrierbaren Fouriertransformierten stetig, oder genauer, besitzt einen stetigen Repräsentanten.

*Beweis.* Nach der Inversionsformel für Funktionen aus dem Schwartzraum wissen wir ja bereits, daß  $\mathcal{F}^\top \circ \mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$  die transponierte Abbildung zur von der Punktspiegelung am Ursprung auf dem Schwartzraum induzierten Abbildung ist. Natürlich ist unsere Einbettung  $L^1 \hookrightarrow \mathcal{S}^*$  verträglich mit den von der Punktspiegelung am Ursprung auf beiden Räumen induzierten Abbildungen. Die Proposition folgt nun leicht aus 2.1.30.  $\square$

*Ergänzung 2.1.34.* Bezeichne im folgenden  $\lambda$  das Lebesguemaß auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Motiviert durch die vorhergehenden Überlegungen definiert man den Raum

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}^*$$

aller **temperierten Distributionen** als den kleinsten Untervektorraum des vollen Dualraums  $\mathcal{S}^*$  des Raums der Schwartzfunktionen, der (1) alle Linearformen umfaßt, die die Gestalt  $\varphi \mapsto \int f\varphi\lambda$  haben für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  stetig von höchstens polynomialem Wachstum, und der (2) stabil ist unter den Transponierten  $\partial_\nu^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$  der partiellen Ableitungen  $\partial_\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ . Man überlegt sich ohne große Schwierigkeiten, daß die Transponierte der Fouriertransformation  $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^*$  einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$$

auf den temperierten Distributionen induziert, und daß sich alle  $L^p$ -Funktionen  $f$  als temperierte Distributionen auffassen lassen, ja daß das Bild unserer Einbettung  $\text{int} : L^1_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$  aus 2.1.29 gegeben durch die Vorschrift  $\varphi \mapsto \int f\varphi\lambda$  aus temperierten Distributionen besteht, in Formeln  $L^p \subset L^1_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ . Darüberhinaus lassen sich auch alle endlichen Borelmaße  $\mu$  als die temperierte Distributionen auffassen vermittels der immergleichen Vorschrift  $\varphi \mapsto \int \varphi\mu$ , und alle bisher betrachteten Varianten der Fouriertransformation sowie auch die noch ausstehende Variante für komplexe Maße können als Einschränkung unserer Transformation  $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$  verstanden werden. Welche Vorteile die temperierten Distributionen gegenüber allgemeinen Linearformen auf dem Schwartzraum bieten, und wie allgemeiner beliebige, nicht notwendig temperierte Distributionen erklärt werden, mögen Sie in Vorlesungen zur Funktionalanalysis lernen.

**Satz 2.1.35 (Poisson'sche Summationsformel).** *Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion aus dem Schwartzraum und  $f^\wedge(y) = \int f(x) e^{-2\pi i xy} dx$  ihre wie angegeben normalisierte Fouriertransformierte, so gilt*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^\wedge(n)$$

*Beweis.* Man betrachtet die periodische Funktion  $F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + n)$ . Nach II.5.1.14 ist sie stetig differenzierbar. Die linke Seite der Poisson'schen Summationsformel ist  $F(0)$ . Bilden wir dahingegen die Fourierreihe von  $F$ , so können wir  $F$  darstellen als  $F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t}$  mit

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 F(t) e^{-2\pi i n t} dt = \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(t + m) e^{-2\pi i n t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t} dt = f^\wedge(n) \end{aligned}$$

und nach III.3.3.7 erhalten wir auch  $F(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^\wedge(n)$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 2.1.36.* Für  $g \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $g|_{(-\infty, 0]} = 0$  gibt es eine holomorphe Funktion  $g^\wedge$  auf der komplexen unteren Halbebene  $\text{Im } z < 0$ , die die auf  $\mathbb{R} = \{z \mid \text{Im } z = 0\}$  definierte Fouriertransformierte  $g^\wedge$  stetig fortsetzt. Im übrigen kann man im Rahmen der Funktionentheorie VIII.1.8.8 zeigen, daß diese stetige Fortsetzung sogar eindeutig ist. Die auf der rechten Halbebene  $\{z \mid \text{Re}(z) \geq 0\}$  definierte Funktion  $t \mapsto g^\wedge(-it)$  nennt man die **Laplace-Transformierte** von  $g$ , vergleiche auch VIII.4.1.13.

## 2.2 Abstrakte Fouriertransformation

2.2.1. Getreu meiner Devise, durch die Verallgemeinerung vom Fall des  $\mathbb{R}^n$  auf abstrakte endlichdimensionale reelle Vektorräume nach besserem Verständnis zu suchen, diskutiere ich nun, welche Gestalt die Fouriertransformation in dieser Allgemeinheit annimmt. Insbesondere hoffe ich, daß dadurch die Bedeutung des merkwürdigen Vorfaktors  $(2\pi)^{-n/2}$  aus unserer ursprünglichen Definition 2.1.1 klarer wird. Es scheint mir am natürlichsten, die Fouriertransformation in dieser Allgemeinheit als eine Vorschrift aufzufassen, die endliche Maße auf einem Vektorraum transformiert in Funktionen auf seinem Dualraum oder, noch präziser, in Funktionen auf seinem Charakterraum. Diese Formulierung hat über ihre Unabhängigkeit von der Wahl von Koordinaten hinaus den Vorteil, sich auf beliebige "kommutative lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppen" verallgemeinern zu lassen, und diese Verallgemeinerung umfaßt dann auch die Theorie der Fourierreihen 1.2.13.

**Definition 2.2.2.** Bezeichne  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  die Kreislinie. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  nennt man einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $\chi : V \rightarrow \mathbb{C}^\times$  einen **Charakter** und einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $\chi : V \rightarrow S^1$  einen **unitären Charakter** von  $V$ .

Der Raum aller unitären Charaktere von  $V$  heißt auch kurz der **Charakterraum**. Ich notiere die Menge aller Charaktere  $\text{Grpto}(V, \mathbb{C}^\times)$  und den Raum aller unitären Charaktere

$$\hat{V} := \mathfrak{X}(V) := \text{Grpto}(V, S^1)$$

Gegeben Charaktere  $\chi$  und  $\eta$  erklärt man ihre Summe  $\chi + \eta$  durch

$$(\chi + \eta)(v) = \chi(v)\eta(v)$$

Mit dieser Verknüpfung wird der Charakterraum eine abelsche Gruppe, man bezeichnet ihn deshalb auch oft als die **Charaktergruppe**. Gegeben ein Charakter  $\chi$  und ein Skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  erklärt man einen weiteren Charakter  $\alpha\chi$  durch die Vorschrift  $(\alpha\chi)(v) = \chi(\alpha v)$  und prüft ohne Schwierigkeiten, daß die Charaktergruppe  $\hat{V}$  eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums auf diese Weise selbst ein reeller Vektorraum wird. Jede lineare Abbildung  $L : V \rightarrow W$  von endlichdimensionalen reellen Vektorräumen liefert schließlich durch Vorschalten eine lineare Abbildung  $\hat{L} : \hat{W} \rightarrow \hat{V}$  in die Gegenrichtung auf den Charakterräumen.

*Ergänzung 2.2.3.* Hier und im folgenden habe ich mir Mühe gegeben, alle Aussagen soweit möglich so zu formulieren, daß sie auch sinnvoll und richtig bleiben, wenn man unter  $\mathbb{C}$  einen Körper von “vergeßlichen komplexen Zahlen” im Sinne von ?? versteht.

**Lemma 2.2.4.** *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  liefert das Nachschalten der Exponentialabbildung einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, i\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{V} \\ \phi & \mapsto & \exp \circ \phi \end{array}$$

2.2.5. Für jede Wahl  $i$  einer Quadratwurzel aus  $-1$  erhalten wir also einen Isomorphismus  $V^* \xrightarrow{\sim} \hat{V}$  zwischen dem Dualraum und dem Charakterraum durch die Vorschrift  $\psi \mapsto (v \mapsto e^{i\psi(v)})$ . Eine alternative auch oft verwendete Identifikation in diesem Zusammenhang ist  $\psi \mapsto (v \mapsto e^{2\pi i\psi(v)})$ . Ich will von nun an mit dem Charakterraum  $\hat{V}$  arbeiten, um die Darstellung von der Notwendigkeit der Wahl einer derartigen Konvention zu befreien. Für  $V = \mathbb{R}^n$  erhalten wir speziell eine Identifikation  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  durch die Vorschrift  $y \mapsto \hat{y}$  mit  $\hat{y}(x) = e^{-ix \cdot y}$ , die wir verwenden werden, um unsere abstrakte Fouriertransformation mit der bisher besprochenen konkreten Variante in Beziehung zu setzen.

*Beweis.* Im Fall  $V = \mathbb{R}$  folgt die Behauptung unmittelbar aus 1.6.2. Gilt die Behauptung für  $V_1$  und  $V_2$ , so auch für  $V_1 \times V_2$ . o folgt sie dann im allgemeinen.  $\square$

*Ergänzung 2.2.6.* Die Inverse zur Abbildung in Lemma 2.2.4 kann durch die Formel  $\chi \mapsto d_0\chi$  beschrieben werden, wobei man  $\chi \in \hat{V}$  als Abbildung  $\chi : V \rightarrow \mathbb{C}$  auffaßt und beachtet, daß deren Differential im Ursprung  $d_0\chi : V \rightarrow \mathbb{C}$  nur rein imaginäre Werte annehmen kann.

*Vorschau 2.2.7.* Ganz allgemein heißen die Gruppenhomomorphismen von einer abelschen Gruppe in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen auch die **Charaktere** unserer Gruppe und die Gruppenhomomorphismen in die Kreislinie  $S^1$  die **unitären Charaktere** unserer Gruppe. Trägt unsere Gruppe eine Topologie, so meint man hier meist implizit stetige Charaktere. Auch in dieser Allgemeinheit spricht man von der **Charaktergruppe**, wobei man in der Bezeichnung unterschlägt, daß nur die stetigen unitären Charaktere gemeint sind.

**Definition 2.2.8.** Sei  $(X, \mathcal{M})$  ein Maßraum. Ein nichtnegatives Maß auf  $X$  heißt **endlich** genau dann, wenn es den Wert  $\infty$  nicht annimmt. Ein **komplexes Maß** auf  $X$  ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$$

die sich schreiben läßt als eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen nichtnegativen Maßen  $\mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ . Ein komplexes Maß, das nur reelle Werte annimmt, nennen wir ein **reelles Maß**. Wir verwenden für komplexe, reelle, endliche nichtnegative bzw. beliebige nichtnegative Maße auf einem vorgegebenen Maßraum  $X$  die Bezeichnungen

$$M(X) \supset M(X; \mathbb{R}) \supset M(X; [0, \infty)) \subset M(X; [0, \infty])$$

2.2.9. Sei  $(X, \mathcal{M})$  ein Maßraum. Jede Abbildung von  $M(X; [0, \infty))$  in einen reellen bzw. komplexen Vektorraum, die verträglich ist mit der Addition von Maßen und der Multiplikation mit nichtnegativen reellen Skalaren, läßt sich auf genau eine Weise fortsetzen zu einer reell- bzw. komplexlinearen Abbildung auf  $M(X; \mathbb{R})$  bzw.  $M(X)$ . Diese Aussage kann man im übrigen auch als Spezialfall von ?? erhalten.

2.2.10. Gegeben ein Maßraum  $(X, \mathcal{M})$  kann man zeigen, daß eine Abbildung  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  ein komplexes Maß ist genau dann, wenn sie komplex  $\sigma$ -additiv ist in dem Sinne, daß für jede abzählbare Familie  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise disjunkten meßbaren Mengen die Gleichheit

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

gilt. Die Summe ist hier zu verstehen im Sinne von II.7.5.11 oder gleichbedeutend im Sinne absoluter Konvergenz. Wir benötigen diese zugegebenermaßen elegantere Charakterisierung komplexer Maße allerdings erst später bei der Diskussion von Spektralmaßen und werden deshalb den Beweis erst dort in ?? geben.

**Definition 2.2.11.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  definieren wir die **abstrakte Fouriertransformation**

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} M(V) & \rightarrow & \text{Ens}(\hat{V}, \mathbb{C}) \\ \mu & \mapsto & \mu^\wedge \end{array}$$

als die Vorschrift, die jedem komplexen Maß  $\mu$  auf unserem Vektorraum diejenige komplexwertige Funktion  $\mu^\wedge$  auf seinem Charakterraum zuordnet, deren Wert bei  $\chi \in \hat{V}$  gegeben wird durch das Integral

$$\mu^\wedge(\chi) := \int_V \chi(v) \mu\langle v \rangle$$

Das Integral einer beschränkten meßbaren Funktion nach einem nichtnegativen reellen Maß kennen wir bereits, das Integral einer beschränkten meßbaren Funktion nach einem komplexen Maß ist zu verstehen als lineare Fortsetzung im Sinne von 2.2.9.

*Ergänzung 2.2.12.* Man beachte, daß die Fouriertransformation in dieser Formulierung sogar sinnvoll definiert ist, wenn man  $\mathbb{C}$  durch einen Körper von vergesslichen komplexen Zahlen im Sinne von ?? ersetzt: Die Wahl einer ausgezeichneten Wurzel von  $-1$  ist in dieser Formulierung in anderen Worten völlig überflüssig.

2.2.13. Ich will am akustischen Beispiel 2.1.3 ausführen, welche konkreten Inhalte man mit dieser Transformation verbinden mag. Ist etwa  $V = \vec{\mathbb{T}}$  der Vektorraum aller Zeitspannen, so kann man seinen Charakterraum  $\hat{V}$  ähnlich wie in ?? interpretieren als den Raum aller Frequenzen, und es ist nur natürlich, ein zeitabhängiges Signal nach seinen Frequenzanteilen zu zerlegen oder in der umgekehrten Richtung, die durch fast dieselbe Formel gegeben wird, eine Vorgabe von Frequenzanteilen mit ihren jeweiligen Stärken zu einem zeitabhängigen Signal zusammenzufassen: Letztere Operation leistet etwa ein Klavier und Erstere unser Ohr, so daß man fast Lust hätte, statt von Fouriertransformationen und ihren Inversen von “Klaviertransformationen” und “Hörtransformationen” zu reden. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist.

*Beispiele 2.2.14.* Per definitionem ist die Fouriertransformierte des Dirac-Maßes  $\delta_v$  zu  $v \in V$  die durch das Auswerten bei  $v$  gegebene Funktion auf dem Charakterraum, in Formeln

$$\delta_v^\wedge(\chi) = \chi(v)$$

Ist ganz allgemein  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum, so definiert sicher jede integrierbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ein komplexes Maß  $f\mu$  auf  $X$  mittels der Vorschrift

$$(f\mu)(A) = \int_A f(x) \mu\langle x \rangle$$

für beliebiges  $A \in \mathcal{M}$ . Betrachten wir das renormalisierte Lebesgue-Maß  $\mu = (2\pi)^{-n/2} d^n x$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  und für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  das komplexe Maß  $f\mu \in M(\mathbb{R}^n)$  und betrachten wir andererseits den Isomorphismus von  $\mathbb{R}^n$  mit seinem Charakterraum, der gegeben wird durch die Vorschrift  $y \mapsto \hat{y}$  mit  $\hat{y}(x) = e^{-ix \cdot y}$ , so wird unser  $f^\wedge(y)$  aus 2.1.1 in der neuen Notation gegeben als der Wert der Fouriertransformierten des komplexen Maßes  $f\mu$  auf dem Charakter  $\hat{y}$ , in Formeln

$$f^\wedge(y) = (f\mu)^\wedge(\hat{y})$$

In der Tat rechnen wir

$$\begin{aligned} (f\mu)^\wedge(\hat{y}) &= \int \hat{y}(x) (f\mu)\langle x \rangle \\ &= \int e^{-ix \cdot y} f(x) \mu\langle x \rangle \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot y} f(x) d^n x \end{aligned}$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen im Vorgriff auf 2.4.5 bereits das Analogon von IV.6.4.20 für komplexe Maße verwenden. Transformieren wir andererseits das Diracmaß  $\delta_x$ , so erhalten wir mit derselben Notation

$$\delta_x^\wedge(\hat{y}) = e^{-ix \cdot y}$$

Ist schließlich  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  eine absolut summierbare Familie komplexer Zahlen, so ist die Fouriertransformierte des in hoffentlich offensichtlicher Weise erklärten komplexen Maßes  $\mu = \sum c_n \delta_n$  auf  $\mathbb{R}$  die zugehörige Fourierreihe, genauer die Funktion

$$\mu^\wedge(\hat{t}) = \sum c_n e^{-int}$$

*Ergänzung 2.2.15.* In der Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet man die Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  oder allgemeiner auf  $\mathbb{R}^n$  auch als die **charakteristische Funktion** des besagten Maßes. Für konkrete Rechnungen verwende ich dieselbe Identifikation  $y \mapsto \hat{y}$  von  $\mathbb{R}^n$  mit seinem Charakterraum wie in 2.2.14, so daß wir insbesondere erhalten

$$\mu^\wedge(y) = \int e^{-ix \cdot y} \mu\langle x \rangle$$

*Ergänzung 2.2.16.* Das Auswerten eines unitären Charakters  $\chi \in \hat{V}$  auf  $v \in V$  notieren wir hier und im folgenden  $\langle \chi, v \rangle \in S^1$ . Die kommutativen Diagramme in 2.1.7 nehmen in der koordinatenfreien Fassung mit dieser Notation die Gestalt kommutativer Diagramme

$$\begin{array}{ccc} M(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\hat{V}) \\ \xi \cdot \downarrow & & \downarrow \circ(+\xi) \\ M(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\hat{V}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\hat{V}) \\ (+w)_* \downarrow & & \downarrow \cdot \langle \cdot, w \rangle \\ M(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\hat{V}) \end{array}$$

an, für beliebige Charaktere  $\xi \in \hat{V}$  und Vektoren  $w \in V$ . Ganz links ist die Multiplikation mit der Funktion  $\xi : V \rightarrow \mathbb{C}^\times$  zu verstehen, ganz rechts mit unserer neuen Notation die Multiplikation mit der Funktion  $\hat{V} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  gegeben durch  $\chi \mapsto \chi(w)$ .

### 2.3 Abstrakte Inversionsformel und Poisson-Formel

**Definition 2.3.1.** Unter einem **Haar-Maß** auf einem endlichdimensionalen reellen Raum versteht man ein von Null verschiedenes translationsinvariantes nichtnegatives Borelmaß.

**Lemma 2.3.2.** *Auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gibt es ein Haarmaß, und je zwei Haarmaße unterscheiden sich höchstens um einen konstanten positiven Faktor.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus Satz IV.6.1.20 über die Existenz und Eindeutigkeit des Lebesguemaßes.  $\square$

2.3.3. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Das Auswerten eines unitären Charakters  $\chi \in \hat{V}$  auf  $v \in V$  notieren wir weiter  $\langle \chi, v \rangle \in S^1$  und vereinbaren zusätzlich die Notation  $\langle v, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, v \rangle}$ . Unter der kanonischen Identifikation

$$\text{can} : V \xrightarrow{\sim} \hat{\hat{V}}$$

verstehen wir die Abbildung  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ , so daß also gilt  $(\text{can } v)(\chi) = \chi(v)^{-1}$ .

2.3.4. Verknüpfen wir die Fouriertransformation  $M(\hat{V}) \rightarrow \mathcal{C}_b(\hat{\hat{V}})$  mit dem Vorschalten von can, so erhalten wir ganz allgemein auch eine Abbildung vom Raum der komplexen Maße auf der Charaktergruppe in den Raum der Funktionen auf unserem ursprünglichen Vektorraum, die wir notieren als  $M(\hat{V}) \rightarrow \mathcal{C}_b(V)$ ,  $\xi \mapsto \xi^\wedge$ . Hier wird  $\xi^\wedge$  also explizit gegeben durch

$$\xi^\wedge(v) = \int_{\hat{V}} \langle v, \chi \rangle \xi(\chi) = \int_{\hat{V}} \overline{\langle \chi, v \rangle} \xi(\chi)$$

**Definition 2.3.5.** Unter einem **Gitter** in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum versteht man eine Untergruppe der additiven Gruppe des jeweiligen Vektorraums, die als Gruppe von einer Basis des besagten Vektorraums erzeugt wird. Gegeben ein Gitter  $\Gamma$  in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  erklären wir das **duale Gitter**  $\Gamma^\wedge$  im Raum der Charaktere  $\hat{V}$  als die Menge aller Charaktere, die auf allen Punkten der ursprünglichen Gitters den Wert Eins annehmen, in Formeln

$$\Gamma^\wedge = \{\chi \mid \langle \chi, v \rangle = 1 \quad \forall v \in \Gamma\}$$

*Beispiel 2.3.6.*  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  ist ein Gitter, und das duale Gitter  $\mathbb{Z}^\wedge \subset \hat{\mathbb{R}}$  entspricht unter der Identifikation  $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{R}}, y \mapsto \hat{y}$  mit  $\hat{y}(x) = e^{-ixy}$  dem Gitter  $2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ .

2.3.7. Gegeben ein Gitter  $\Gamma$  in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und ein Haar-Maß  $\lambda$  auf  $V$  definieren wir eine reelle Zahl  $\lambda(V/\Gamma)$  als das ‘‘Maß der Grundmasche des Gitters’’, in Formeln

$$\lambda(V/\Gamma) = \lambda([0, 1]v_1 + \dots + [0, 1]v_n)$$

für ein und jedes Erzeugendensystem  $v_1, \dots, v_n$  von  $\Gamma$ , das eine Basis von  $V$  bildet. Daß diese Zahl nicht vom gewählten Erzeugendensystem abhängt, kann man zum Beispiel mit der Transformationsformel aus der Tatsache folgern, daß die Übergangsmatrix zwischen je zwei derartigen Erzeugendensystemen ebenso wie ihre Inverse nur ganzzahlige Einträge hat, so daß für ihre Determinante nur die Werte  $\pm 1$  in Frage kommen.

**Definition 2.3.8.** Gegeben ein Haarmaß  $\lambda$  auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  definieren wir ein Haarmaß  $\hat{\lambda}$  auf seiner Charaktergruppe  $\hat{V}$ , das **Plancherel-Maß** zu  $\lambda$ , durch die Vorschrift

$$\lambda(V/\Gamma) \cdot \hat{\lambda}(\hat{V}/\Gamma^\wedge) = 1$$

für jedes Gitter  $\Gamma \subset V$ . Der Nachweis, daß solch ein Plancherelmaß existiert, kann dem Leser überlassen bleiben.

2.3.9. Unter unserer Identifikation  $\text{can} : V \xrightarrow{\sim} \hat{V}$  aus 2.3.3 ist für jedes Haar-Maß  $\lambda$  auf  $V$  das Plancherel-Maß des Plancherel-Maßes offensichtlich verwandt zum Maß  $\lambda$  selbst, in Formeln

$$\text{can} : \lambda \rightsquigarrow \hat{\lambda}$$

*Beispiel 2.3.10.* Wir betrachten  $V = \mathbb{R}^n$  mit dem Gitter  $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ . Unser Isomorphismus  $\varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \hat{V}, y \mapsto \hat{y}$  gegeben durch  $\hat{y}(x) = e^{-ix \cdot y}$  induziert dann eine Bijektion  $2\pi\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \Gamma^\wedge$ . Das Plancherelmaß  $\hat{\lambda}$  zum Lebesguemaß  $\lambda =$

$d^n x$  entspricht unter unserem Isomorphismus folglich dem renormalisierten Lebesguemaß  $(2\pi)^{-n} d^n y$  auf  $\mathbb{R}^n$ , in Formeln

$$\hat{\lambda} = \varphi_*((2\pi)^{-n} d^n y)$$

und das Plancherelmaß  $\hat{\mu}$  zum Maß  $\mu = (2\pi)^{-n/2} d^n x$  entspricht in derselben Weise dem Maß  $(2\pi)^{-n/2} d^n y$ .

**Definition 2.3.11.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}(V)$  die Menge aller Funktionen  $V \rightarrow \mathbb{C}$ , die unter einer und jeder Identifikation  $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  Funktionen des Schwartzraums entsprechen. Wir nennen  $\mathcal{S}(V)$  den **Schwartzraum** von  $V$  oder auch den ‘‘Raum der glatten schnell abklingenden Funktionen auf  $V$ ’’ oder kürzer der **Schwartzfunktionen**.

**Definition 2.3.12.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  erklären wir im Raum aller komplexen topologischen Maße auf  $V$  den Teilraum der **Schwartzmaße**

$$\mathcal{M}(V) \subset M(V)$$

als den Raum aller komplexen Maße der Gestalt  $f\lambda$  mit  $f \in \mathcal{S}(V)$  einer Funktion aus dem Schwartzraum und  $\lambda$  einem Haarmaß auf  $V$ .

*Ergänzung 2.3.13.* Die unteren kommutativen Diagramme aus 2.1.13 nehmen mit diesen Notationen die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\hat{V}) \\ (\mathrm{d}_0\xi) \cdot \downarrow & & \downarrow D_\xi \\ \mathcal{M}(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\hat{V}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\hat{V}) \\ D_w \downarrow & & \downarrow \cdot \mathrm{d}_0\langle w, \cdot \rangle \\ \mathcal{M}(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\hat{V}) \end{array}$$

an, für beliebiges  $\xi \in \hat{V}$  und  $w \in V$ . Dabei ist  $\mathrm{d}_0\xi$  wie in 2.2.6 die lineare Abbildung  $\phi : V \rightarrow i\mathbb{R}$  mit  $\xi = \exp \circ \phi$ , und rechts ist die Richtungsableitung in Richtung  $\xi$  alias das Ableiten nach dem konstanten Vektorfeld  $\xi$  auf  $\hat{V}$  gemeint. Weiter ist  $D_w : f\lambda \mapsto (D_w f)\lambda$  zu verstehen für ein beliebiges Haarmaß  $\lambda$  auf  $V$  und  $f \in \mathcal{S}(V)$ . Schließlich ist  $\mathrm{d}_0\langle w, \cdot \rangle : \hat{V} \rightarrow \mathbb{C}$  die lineare Abbildung, die man als Differential im Ursprung von  $\chi \mapsto \langle w, \chi \rangle$  erhält. Für  $\psi : V \rightarrow i\mathbb{R}$  mit  $\chi = \exp \circ \psi$  haben wir also  $\mathrm{d}_0\langle w, \cdot \rangle : \chi \mapsto -\psi(w)$ .

**Satz 2.3.14 (Abstrakte glatte Inversionsformel).** *Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Haar-Maß  $\lambda$  und  $\hat{V}$  sein Charakterraum mit dem zugehörigen Plancherel-Maß  $\hat{\lambda}$  nach 2.3.8, so liefert im*

folgenden Diagramm mit abstrakten Fouriertransformationen von Schwarzmaßen zu Schwarzfunktionen nach 2.2.11 in den Horizontalen das “Einmal-im-Kreis-Herumgehen” an jeder Stelle die Identität:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\hat{V}) \\
 \cdot\lambda \uparrow & & \downarrow \cdot\hat{\lambda} \\
 \mathcal{S}(V) & \xleftarrow{\circ\text{can}} \mathcal{S}(\hat{V}) & \xleftarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}(\hat{V})
 \end{array}$$

2.3.15. Das Vorzeichen aus der Inversionsformel 2.1.18 versteckt sich bei dieser Formulierung in der Definition des kanonischen Isomorphismus  $\text{can} : V \xrightarrow{\sim} \hat{V}$  aus 2.3.3.

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $V = \mathbb{R}^n$  annehmen und in diesem Fall folgt die Behauptung ohne weitere Schwierigkeiten aus der konkreten Version 2.1.18.  $\square$

*Ergänzung 2.3.16.* Verwenden wir die schieflinaren Einbettungen in die Dualräume  $M(V) \hookrightarrow \mathcal{S}(V)^*$  gegeben durch  $\mu \mapsto (f \mapsto \int f\bar{\mu})$  und  $\mathcal{C}_b(V) \hookrightarrow \mathcal{M}(V)^*$  gegeben durch  $f \mapsto (\mu \mapsto \int \bar{f}\mu)$  und entsprechend mit  $\hat{V}$  statt  $V$ , so wird das kommutative Viereck aus 2.3.14 in verträglicher Weise in das entsprechende transponierte und auf den Kopf gestellte Viereck eingebettet. In Formeln ausgedrückt kommutiert mit den so erklärten schieflinaren schrägen Pfeilen nach ganz außen also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}(V)^* & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{M}(\hat{V})^* \\
 \swarrow & & \searrow \\
 M(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\hat{V}) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \mathcal{M}(V) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\hat{V}) \\
 \cdot\lambda \uparrow \wr & & \downarrow \wr \cdot\hat{\lambda} \\
 \mathcal{S}(V) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}} & \mathcal{M}(\hat{V}) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \mathcal{C}_b(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & M(\hat{V}) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \mathcal{M}(V)^* & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{S}(\hat{V})^*
 \end{array}$$

Die wesentliche Rechnung zum Nachweis dieser Tatsache wird im Beweis der anschließenden Proposition 2.3.19 durchgeführt. Im äußeren Viereck kann man noch feiner statt der vollen Dualräume nur geeignet erklärte Teilräume von “temperierten Distributionen”  $\mathcal{S}(V)' \subset \mathcal{S}(V)^*$  und “temperierten verallgemeinerten Funktionen”  $\mathcal{M}(V)' \subset \mathcal{M}(V)^*$  betrachten, die aber erst dann ihren Sinn zeigen, wenn sie mit den Methoden der Funktionalanalysis behandelt werden.

*Ergänzung 2.3.17.* Partielle Integration liefert auch mühelos die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V)^* \\ D_w \downarrow & & \downarrow -D_w^\top \\ \mathcal{S}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V)^* \end{array}$$

Unsere kommutativen Diagramme aus 2.3.13 werden damit eingebettet in kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(V)^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{M}(\hat{V})^* \\ -((d_0\xi)\cdot)^\top \downarrow & & \downarrow -D_\xi^\top \\ \mathcal{S}(V)^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{M}(\hat{V})^* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(V)^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{M}(\hat{V})^* \\ -D_w^\top \downarrow & & \downarrow -(d_0\langle w, \cdot \rangle)^\top \\ \mathcal{S}(V)^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{M}(\hat{V})^* \end{array}$$

für unsere “verallgemeinerten Fourier-Transformationen”  $\mathcal{F}^\top$ . Der Sinn dieser Konstruktionen erschließt sich hier allerdings noch nicht.

*Ergänzung 2.3.18.* Ich verzichte darauf, die Inversionsformel für integrierbare Funktionen in dieser Allgemeinheit zu formulieren und zu beweisen. Den Fall quadratintegrierbarer Funktionen erkläre ich im folgenden noch, werde diese Resultate jedoch im weiteren nicht verwenden.

**Proposition 2.3.19.** *Die Fouriertransformation von Maßen ist injektiv, als da heißt, nur das Nullmaß liefert die Nullfunktion.*

*Beweis.* Wir gehen dazu ähnlich vor wie beim Beweis von 2.1.30 und behaupten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : \mathcal{M}(V) & \rightarrow & \mathcal{C}_b(\hat{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^\top : \mathcal{S}(V)^* & \rightarrow & \mathcal{M}(\hat{V})^* \end{array}$$

Hier sei die linke Vertikale gegeben durch  $\mu \mapsto (g \mapsto \int g \bar{\mu})$  und die rechte Vertikale analog durch  $f \mapsto (\xi \mapsto \int f \xi)$ . Die untere Horizontale sei die Transponierte der Verknüpfung geeigneter Abbildungen aus 2.3.14. Da sie ein

Isomorphismus ist, reicht es, wenn wir die Injektivität der linken Vertikale und die Kommutativität des Diagramms zeigen. Die besagte Injektivität muß nur auf dem Teilraum aller reellen Maße gezeigt werden. Wie beim Beweis von 2.1.26 reicht es hier sogar, die Injektivität auf der Teilmenge der nicht-negativen reellen Maße zu zeigen, und diese folgt sofort aus IV.6.8.5. Um die Kommutativität nachzuprüfen nehmen wir  $\mu \in M(V)$  und  $\xi \in \mathcal{M}(\hat{V})$  und finden

$$\int \overline{(\mathcal{F}\mu)\xi} = \int \int \overline{\chi(v)\mu\langle v \rangle} \xi\langle \chi \rangle = \int (\mathcal{F}\xi)\bar{\mu} \quad \square$$

**Satz 2.3.20 (Abstrakte Poisson-Formel).** *Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $\Gamma \subset V$  ein Gitter,  $\lambda = \lambda_\Gamma$  das im Sinne von 2.3.7 durch die Bedingung  $\lambda(V/\Gamma) = 1$  normalisierte Haar-Maß auf  $V$  und  $\Gamma^\wedge \subset \hat{V}$  das duale Gitter. Ist  $f \in \mathcal{S}(V)$  eine Schwartzfunktion, so gilt für die Fouriertransformierte  $(f\lambda)^\wedge$  des komplexen Maßes  $f\lambda$  die Formel*

$$\sum_{\zeta \in \Gamma^\wedge} (f\lambda)^\wedge(\zeta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$$

2.3.21. Eine noch etwas allgemeinere Version zeigen wir in einer etwas abstrakteren Sprache in 2.7.20.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir statt  $\Gamma \subset V$  konkret  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$  betrachten. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bilden wir die  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion

$$F(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} f(x + \gamma)$$

Nach III.3.3.7 im Fall  $n = 1$  und einer Verallgemeinerung der dort gegebenen Argumente im Allgemeinen konvergiert die Fourier-Reihe von  $F$  gleichmäßig gegen  $F$ . Betrachten wir genauer als Hilbertbasis von  $L^2([0, 1]^n; \lambda)$  die Funktionen  $2\pi\hat{y} : x \mapsto e^{-2\pi i x \cdot y}$  mit  $y \in \mathbb{Z}^n$  nach 1.5.6 und bilden die Fourier-Koeffizienten

$$c_y = \int f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} \lambda\langle x \rangle = (f\lambda)^\wedge(2\pi\hat{y})$$

so gilt  $F(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} c_y e^{2\pi i x \cdot y}$  an jeder Stelle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Speziell erhalten wir durch Vergleich der beiden Ergebnisse

$$\sum_{\zeta \in \Gamma^\wedge} (f\lambda)^\wedge(\zeta) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} c_y = F(0) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \quad \square$$

*Ergänzung 2.3.22.* Der **Satz von Bochner** beschreibt das Bild der durch die Fouriertransformation gegebenen Einbettung  $\mathcal{F} : M(V; [0, \infty)) \hookrightarrow \mathcal{C}_b(\hat{V})$

des Raums der nichtnegativen endlichen Borelmaße in den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf der Charaktergruppe als die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen  $\phi : \hat{V} \rightarrow \mathbb{C}$ , die “positiv semidefinit” sind in dem Sinne, daß für beliebiges  $n$  und beliebige paarweise verschiedene  $\chi_1, \dots, \chi_n \in \hat{V}$  die quadratische Matrix mit Einträgen  $\phi(\chi_i - \chi_j)$  positiv semidefinit ist. Daß unsere Abbildung in den positiv semidefiniten Funktionen landet, mag der Leser zur Übung selbst prüfen. Daß auch alle beschränkten positiv semidefiniten Funktionen im Bild liegen, ist nicht so leicht zu sehen.

*Ergänzung 2.3.23.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $V$  definieren wir einen Hilbertraum

$$L^2(V)$$

wie folgt: Wir betrachten auf der Menge aller Paare  $(\lambda, f)$  mit  $\lambda$  einem von Null verschiedenen translationsinvarianten Borelmaß und  $f \in L^2(V; \lambda)$  die Äquivalenzrelation  $(\lambda, f) \sim (c^2\lambda, c^{-1}f)$  für  $c > 0$  und definieren  $L^2(V)$  als die Menge der Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse von  $(\lambda, f)$  notieren wir

$$f\sqrt{\lambda}$$

und bemerken, daß es auf dem Raum dieser Äquivalenzklassen genau eine Struktur als Hilbertraum gibt derart, daß für ein und jedes translationsinvariante Borelmaß  $\lambda$  die Abbildung  $L^2(V; \lambda) \rightarrow L^2(V)$ ,  $f \mapsto f\sqrt{\lambda}$  ein unitärer Isomorphismus von Hilberträumen ist. In VI.12.4.4 erkläre ich allgemeiner, wie man jeder Mannigfaltigkeit  $X$  in vollständig kanonischer Weise den Hilbertraum  $L^2(X)$  der “quadratintegrierbaren Halbdichten auf  $X$ ” zuordnen kann. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  mit Charaktergruppe  $\hat{V}$  liefert die Fouriertransformation auf den quadratintegrierbaren Halbdichten einen vollständig kanonischen Hilbertraumisomorphismus

$$L^2(V) \xrightarrow{\sim} L^2(\hat{V})$$

zwischen den quadratintegrierbaren Halbdichten auf  $V$  und auf  $\hat{V}$ , und dessen Inverses ist die Verknüpfung

$$L^2(\hat{V}) \xrightarrow{\sim} L^2(\hat{V}) \xrightarrow{\sim} L^2(V)$$

der entsprechenden Fouriertransformation zu  $\hat{V}$  mit dem von unserem kanonischen Isomorphismus aus ?? unseres Raums mit dem Charakterraum seines Charakterraums induzierten Hilbertraumisomorphismus. Um das zu sehen, wählen wir ein Haarmaß  $\lambda$  auf  $V$  mit Plancherelmaß  $\hat{\lambda}$  auf  $\hat{V}$  und betrachten die Komposition

$$L^2(V) \xrightarrow{(\sqrt{\lambda})^{-1}} L^2(V; \lambda) \rightarrow L^2(\hat{V}; \hat{\lambda}) \xrightarrow{\sqrt{\hat{\lambda}}} L^2(\hat{V})$$

Ersetzen wir hier  $\lambda$  durch  $c^2\lambda$  für  $c > 0$ , so ändert sich die mittlere Abbildung um den Faktor  $c^2$  und die beiden äußeren um den Faktor  $c^{-1}$  und die Verknüpfung ändert sich folglich nicht.

## 2.4 Operationen mit komplexen Maßen

2.4.1. Im nächsten Abschnitt soll der zentrale Satz 2.5.7 gezeigt werden, nach dem unter der Fouriertransformation die Faltung zweier Maße dem Produkt ihrer Fouriertransformierten entspricht. Daraus kann man dann ohne große Mühe den sogenannten “zentralen Grenzwertsatz” 2.5.18 ableiten, eine tragende Säule der Wahrscheinlichkeitstheorie. Natürlich könnten wir uns stattdessen auch auf die Faltung von Funktionen beschränken. Das wäre einfacher, da dazu weniger Maßtheorie benötigt wird, aber konzeptionell scheint es mir der falsche Zugang: Funktionen auf Vektorräumen kann man gar nicht miteinander falten, und bei Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  gelingt es nur deshalb, weil uns dort mit dem Lebesgue-Maß ein kanonisches Haarmaß zur Verfügung steht, mithilfe dessen wir den Raum der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße einbetten können. Um nun aber die Faltung zweier Maße in 2.5.2 definieren zu können, müssen wir uns zunächst etwas ausführlicher mit komplexen Maßen beschäftigen.

**Definition 2.4.2.** Gegeben ein komplexes Maß  $\mu$  auf einem Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  erklärt man ein nichtnegatives reelles Maß  $|\mu|$ , seine **Variation**, durch die Vorschrift

$$|\mu|(A) = \sup \sum |\mu(A_\nu)|$$

wo das Supremum über alle Zerlegungen  $A = \bigsqcup A_\nu$  von  $A$  in eine disjunkte Vereinigung einer abzählbaren Familie von meßbaren Teilmengen gebildet werden soll.

*Übung 2.4.3.* Gegeben ein komplexes Maß  $\mu$  auf einem Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  nimmt seine in 2.4.2 erklärte Variation  $|\mu|$  Werte in  $[0, \infty)$  an und ist ein Maß auf  $\mathcal{M}$ . Weiter ist  $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$  eine Norm auf dem Raum  $M(X)$  der komplexen Maße auf  $X$ , die **Variationsnorm**. Jedes komplexe Maß  $\mu$  auf einem Meßraum läßt sich darstellen als Linearkombination von vier nichtnegativen reellen Maßen in der Form

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$$

und so, daß zusätzlich gilt  $\mu_r \leq |\mu|$  für  $1 \leq r \leq 4$  als da heißt  $\mu_r(A) \leq |\mu|(A)$  für jede meßbare Menge  $A \subset X$ . Hinweis: Im Fall eines reellen Maßes mag man etwa mit  $\mu_1 = (|\mu| + \mu)/2$  beginnen.

*Übung 2.4.4 (Integration nach komplexen Maßen).* Gegeben ein komplexes Maß  $\mu$  auf einem Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  gibt es genau eine Linearform  $L^1(X; |\mu|) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f \mapsto \int f \mu$$

mit der Eigenschaft  $\int f \mu = \int f \mu_1 - \int f \mu_2 + i \int f \mu_3 - i \int f \mu_4$  für eine und jede Darstellung von  $\mu$  wie in 2.4.3. Man zeige weiter die Abschätzung  $|\int f \mu| \leq \int |f| |\mu|$ . Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß  $f$  eine Stufenfunktion ist.

*Übung 2.4.5 (Produkte komplexer Maße mit Funktionen).* Gegeben ein komplexes Maß  $\mu$  auf einem Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  und eine Funktion  $f \in L^1(X; |\mu|)$  erhalten wir ein weiteres komplexes Maß  $f\mu$  auf  $X$  durch die Vorschrift

$$(f\mu)(A) = \int [A] f \mu \quad \text{für alle meßbaren } A \subset X,$$

und dieses Maß hat die Variation  $|f\mu| = |f| |\mu|$ . Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß  $f$  eine Stufenfunktion ist. Ist  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere meßbare Funktion, so gilt  $g \in L^1(X; |f\mu|)$  genau dann, wenn  $fg$  zu  $L^1(X; |\mu|)$  gehört, und in diesem Fall haben wir die Gleichheit komplexer Maße

$$g(f\mu) = (gf)\mu$$

*Übung 2.4.6.* Sei  $(X, \mu)$  ein Maßraum und  $f \in L^1(X; \mu)$  integrierbar. Ist das Maß  $f\mu$  Null, so war  $f$  bereits die Null von  $L^1(X; \mu)$ .

**2.4.7 (Produktmaß für komplexe Maße).** Bezeichnet  $X \times Y$  das Produkt zweier Meßräume, versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra aus IV.6.6.1, so liefert das Bilden des Produktmaßes mit zweimaligem Anwenden von 2.2.9 eine bilineare Abbildung auf den zugehörigen Räumen komplexwertiger Maße

$$\begin{aligned} M(X) \times M(Y) &\rightarrow M(X \times Y) \\ (\mu, \nu) &\mapsto \mu \boxtimes \nu \end{aligned}$$

2.4.8. Geht man von diskreten Mengen zu allgemeineren "Räumen" über, etwa zu reellen affinen Räumen, so gibt es zwei besonders natürliche Verallgemeinerungen für das Konzept einer komplexwertigen Funktion: Funktionen und Maße. Gegeben eine Abbildung  $X \rightarrow Y$  können Funktionen auf  $Y$  zu Funktionen auf  $X$  zurückgezogen werden, Maße auf  $X$  jedoch liefern in der Gegenrichtung Bildmaße auf  $Y$ . Diese zugegebenermaßen vagen Andeutungen werden im folgenden in speziellen Situationen ausgeführt.

**2.4.9 (Bildmaße komplexer Maße).** Gegeben eine meßbare Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von Meßräumen und ein komplexes Maß  $\mu$  auf  $X$  erklärt man

wie in IV.6.3.22 das **Bildmaß**  $f_*\mu$  auf  $Y$  dadurch, daß man für jede meßbare Menge  $A \subset Y$  setzt

$$(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

Offensichtlich gilt  $\text{id}_*\mu = \mu$  und für verknüpfbare Abbildungen haben wir  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ .

*Übung 2.4.10 (Integration über Bildmaße).* Gegeben eine meßbare Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von Meßräumen und ein komplexes Maß  $\mu$  auf  $X$  ist die Variation des Bildmaßes nach oben beschränkt durch das Bildmaß der Variation, in Formeln

$$|f_*\mu| \leq f_*|\mu|$$

Gehört für eine meßbare Funktion  $h : Y \rightarrow \mathbb{C}$  die Verknüpfung  $h \circ f$  zu  $L^1(X; |\mu|)$ , so ist  $h$  integrierbar nach  $|f_*\mu|$  und es gilt

$$\int_Y h(f_*\mu) = \int_X (h \circ f) \mu$$

*Übung 2.4.11 (Bilder von Produktmaßen).* Gegeben meßbare Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  und  $\mu \in M(X)$  und  $\nu \in M(Y)$  komplexe Maße, so ist das Bildmaß ihres Produkts das Produkt der Bildmaße, in Formeln

$$(f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu) = (f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu)$$

2.4.12. Die Fouriertransformierte  $\mu^\wedge$  eines komplexen Maßes ist notwendig beschränkt und stetig. Um das zu sehen, darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mu$  endlich positiv annehmen, und dann ist  $\mu(V)$  eine Schranke für  $|\mu^\wedge|$  und man folgert die Stetigkeit von  $\mu^\wedge$  leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz in Verbindung mit II.6.3.9.

*Übung 2.4.13 (Natürlichkeit der Fouriertransformation).* Ist  $L : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung endlichdimensionaler reeller Vektorräume und  $\mu$  ein komplexes Maß auf  $V$ , so stimmt die Fouriertransformation seines Bildmaßes überein mit der Fouriertransformation des Maßes selbst verknüpft mit der auf den Charakteren induzierten Abbildung, in Formeln

$$(L_*\mu)^\wedge = \mu^\wedge \circ \hat{L}$$

oder anders ausgedrückt:  $L$ -verwandte Maße haben  $\hat{L}$ -verwandte Fouriertransformierte, in Formeln  $(L : \mu \rightsquigarrow \nu) \Rightarrow (\hat{L} : \nu^\wedge \rightsquigarrow \mu^\wedge)$ . Spezieller zeige man für die durch Multiplikation mit einer invertierbaren quadratischen Matrix  $A$  gegebene Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und eine integrierbare Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  die Formel  $(f \circ A)^\wedge = |\det A|^{-1} f^\wedge \circ (A^\top)^{-1}$ . Sie verallgemeinert 2.1.6.5.

## 2.5 Faltung von Maßen und Funktionen

2.5.1. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist Satz 2.5.7, nach dem der Faltung zweier Maße unter der Fouriertransformation das Produkt ihrer Fouriertransformierten entspricht. Diese Formel verallgemeinert unsere Erkenntnisse über die Fouriertransformierte einer verschobenen Funktion 2.1.6.3 und hilft oft bei der Berechnung von Fouriertransformierten. Eine besonders schöne und wichtige Anwendung ist der Beweis des zentralen Grenzwertsatzes 2.5.18. Der Begriff der Faltung scheint auf eine Arbeit aus dem Jahre 1923 von Gustav Doetsch mit dem Titel “Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus” zurückzugehen. Gustav Doetsch begründete übrigens den Gebrauch der Laplace-Transformation in den Ingenieurwissenschaften und wurde 1931 Professor in Freiburg.

**Definition 2.5.2.** Gegeben  $\sigma$ -endliche topologische Maße  $\mu, \nu$  auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  erklären wir ein topologisches Maß  $\mu * \nu$  auf  $V$ , die **Faltung** oder **Konvolution** unserer beiden Maße, als das Bildmaß unter der Additionsabbildung des Produktmaßes  $\mu \boxtimes \nu$  auf  $V \times V$ , in Formeln

$$\mu * \nu := \text{add}_*(\mu \boxtimes \nu)$$

2.5.3. Die Faltung zweier  $\sigma$ -endlicher Maße liefert nicht notwendig wieder ein  $\sigma$ -endliches Maß: So ist etwa die Faltung des Lebesgue-Maßes auf der reellen Zahlengeraden mit sich selbst das Maß, das jeder meßbaren Nullmenge den Wert Null zuordnet und jeder anderen meßbaren Menge den Wert Unendlich. Die Faltung zweier endlicher Maße liefert jedoch notwendig wieder ein endliches Maß. Deshalb können wir durch bilineare Fortsetzung auch die Faltung reeller und komplexer Maße erklären und erhalten so wieder reelle bzw. komplexe Maße.

*Beispiel 2.5.4.* Die Faltung des Dirac-Maßes bei  $v \in V$  mit dem Dirac-Maß bei  $w \in V$  ist das Dirac-Maß bei  $v+w$ , in Formeln  $\delta_v * \delta_w = \delta_{v+w}$ . Die Faltung eines beliebigen komplexen Maßes  $\mu$  mit dem Dirac-Maß bei  $w \in V$  ist das “um  $w$  verschobene Maß  $\mu$ ”, in Formeln  $\mu * \delta_w = (\tau_w)_*\mu$ . Insbesondere gilt stets  $\mu * \delta_0 = \mu$ .

*Ergänzung 2.5.5.* Gegeben stochastisch unabhängige reellwertige Zufallsvariablen  $X, Y$  ist die Verteilung ihrer Summe die Faltung ihrer Verteilungen, in Formeln

$$P^{X+Y} = P^X * P^Y$$

In der Tat gilt  $X + Y = \text{add} \circ (X, Y)$ . Wegen der stochastischen Unabhängigkeit  $P^{(X,Y)} = P^X \boxtimes P^Y$  folgt  $P^{X+Y} = \text{add}_* P^{(X,Y)} = \text{add}_*(P^X \boxtimes P^Y) = P^X * P^Y$ .

**Lemma 2.5.6.** *Die Faltung von komplexen Maßen ist kommutativ und assoziativ.*

*Beweis.* Wir zeigen nur die Assoziativität und überlassen den Beweis der Kommutativität dem Leser zur Übung. Wir gehen aus vom kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 V \times (V \times V) & \xrightarrow{\text{id} \times \text{add}} & V \times V \\
 \parallel & & \downarrow \text{add} \\
 V \times V \times V & \xrightarrow{\text{addd}} & V \\
 \parallel & & \uparrow \text{add} \\
 (V \times V) \times V & \xrightarrow{\text{add} \times \text{id}} & V \times V
 \end{array}$$

Gegeben komplexe Maße  $\mu, \nu, \lambda$  sind die Maße  $\mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)$  und  $(\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda$  verwandt unter den offensichtlichen Identifikationen in der linken Vertikalen zu ein- und demselben Maß auf  $V \times V \times V$ , das wir  $\mu \boxtimes \nu \boxtimes \lambda$  notieren. Es folgt

$$\begin{aligned}
 \mu * (\nu * \lambda) &= \text{add}_*(\mu \boxtimes \text{add}_*(\nu \boxtimes \lambda)) \\
 &= \text{add}_*(\text{id}_*(\mu) \boxtimes \text{add}_*(\nu \boxtimes \lambda)) \\
 &= \text{add}_*(\text{id} \times \text{add})_*(\mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)) \\
 &= \text{addd}_*(\mu \boxtimes \nu \boxtimes \lambda)
 \end{aligned}$$

und für  $(\mu * \nu) * \lambda$  erhält man analog dieselbe Darstellung.  $\square$

**Satz 2.5.7 (Fouriertransformation und Faltung).** *Die Fouriertransformierte der Faltung zweier komplexer Maße auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ist das punktweise Produkt ihrer Fouriertransformierten, in Formeln*

$$(\mu * \nu)^\wedge = \mu^\wedge \cdot \nu^\wedge$$

*Beispiel 2.5.8.* Im Fall eines Diracmaßes  $\mu = \delta_a$  erhalten wir insbesondere in Verallgemeinerung von 2.1.6.3 die Formel  $(\tau_a \nu)^\wedge(\chi) = \chi(a) \nu^\wedge(\chi)$ . Gegeben Maße  $\mu, \nu$  auf  $\mathbb{R}$ , die durch endliche Summen  $\mu = \sum a_n \delta_n$  und  $\nu = \sum b_m \delta_m$  mit  $n, m \in \mathbb{Z}$  dargestellt werden können, haben wir

$$\mu * \nu = \sum \left( \sum_{n+m=k} a_n b_m \right) \delta_k$$

und bei geeigneter Identifikation von  $\hat{\mathbb{R}}$  mit  $\mathbb{R}$  weiter  $\mu^\wedge(t) = \sum a_n e^{2\pi i n t}$  und  $\nu^\wedge(t) = \sum b_m e^{2\pi i m t}$  und unsere Formel ist damit explizit klar. In der in 2.7.1

diskutierten Allgemeinheit kann das auch noch besser verstanden werden als das Analogon obiger Formel im Fall der Gruppe  $\mathbb{Z}$  mit ihrer Charaktergruppe  $\hat{\mathbb{Z}} = S^1$ .

*Beweis.* Sei  $V$  unser endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien  $\mu, \nu \in M(V)$  komplexe Maße. Da in der Behauptung beide Seiten bilinear sind, dürfen wir unsere Maße endlich und nichtnegativ annehmen. Gegeben  $\chi \in \hat{V}$  gilt es zu zeigen  $(\mu * \nu)^\wedge(\chi) = \mu^\wedge(\chi)\nu^\wedge(\chi)$  alias

$$\int_V \chi(v) (\mu * \nu)\langle v \rangle = \left( \int_V \chi(u) \mu\langle u \rangle \right) \left( \int_V \chi(w) \nu\langle w \rangle \right)$$

Mit Hilfe der Beschreibung IV.6.5.15 von Integralen unter Bildmaßen und der Definition der Faltung können wir die linke Seite umformen zu

$$\int_{V \times V} (\chi \circ \text{add})(u, w) (\mu \boxtimes \nu)\langle u, w \rangle = \int_{V \times V} \chi(u + w) (\mu \boxtimes \nu)\langle u, w \rangle$$

und wegen  $\chi(u + w) = \chi(u)\chi(w)$  folgt die Behauptung dann leicht aus dem Satz von Fubini.  $\square$

**Definition 2.5.9 (Faltung von Maßen mit stetigen Funktionen).** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $\mu \in M(V)$  ein komplexes Maß auf  $V$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und beschränkt, so erklären wir eine weitere stetige beschränkte Funktion  $\mu * f$  auf  $V$  durch die Vorschrift

$$(\mu * f)(x) := \int f(x - y) \mu\langle y \rangle$$

Es reicht hier, die Stetigkeit der Funktion  $\mu * f$  im Fall positiver endlicher Maße  $\mu$  zu zeigen, in dem sie leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt.

*Beispiel 2.5.10.* Ist  $E \subset V$  endlich und  $\mu = \sum_{y \in E} a_y \delta_y$  eine Linearkombination von Diracmaßen mit komplexen Koeffizienten, so haben wir

$$\mu * f = \sum_{y \in E} a_y (\tau_y f)$$

für  $\tau_y f$  die um  $y$  verschobene Funktion gegeben durch  $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$ . Ähnliches gilt allgemeiner für abzählbare Linearkombinationen von Diracmaßen mit einer absolut konvergenten Familie von Koeffizienten.

*Übung 2.5.11.* Sind  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $\mu, \nu \in M(V)$  komplexe Maße auf  $V$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und beschränkt, so gilt

$$\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$$

**Lemma 2.5.12 (Faltung von Maßen mit  $L^p$ -Funktionen).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $\mu \in M(V; [0, \infty))$  ein endliches Maß auf  $V$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $L^p$ -Funktion in Bezug auf ein Haar-Maß  $\lambda$  für  $1 \leq p < \infty$ . So ist die Funktion  $y \mapsto f(x - y)$  für alle  $x \in V$  außerhalb einer  $\lambda$ -Nullmenge integrierbar in Bezug auf  $\mu$  und die fast überall definierte Funktion

$$x \mapsto \int f(x - y) \mu\langle y \rangle$$

ist wieder eine  $L^p$ -Funktion. Sie heißt die **Faltung**  $(\mu * f)(x)$  **des Maßes  $\mu$  mit der Funktion  $f$**  und erfüllt die Abschätzung  $\|\mu * f\|_p \leq \mu(V) \|f\|_p$ .

2.5.13. Wir erklären die Faltung von beliebigen komplexen Maßen mit  $L^p$ -Funktionen  $M(V) \times L^p(V) \rightarrow L^p(V)$ ,  $(\mu, f) \mapsto \mu * f$  dann durch lineare Fortsetzung. Im Rückblick wird sich die Konvolution von Maßen mit stetigen Funktionen oder auch mit  $L^p$ -Funktionen als Spezialfall der allgemeinen Konstruktion einer "Operation von Maßen auf Darstellungen" erweisen, wie sie in 3.9.3 in einem anderen Spezialfall und in VI.11.10.2 in vergleichsweise großer Allgemeinheit diskutiert wird.

*Beweis.* Der Satz von Fubini zeigt, daß für jedes Haar-Maß  $\lambda$  das Produktmaß  $\lambda \boxtimes \mu$  unter der Scherung  $S : V \times V \rightarrow V \times V$ ,  $(x, y) \mapsto (x - y, y)$  invariant ist, in Formeln  $S : \lambda \boxtimes \mu \rightsquigarrow \lambda \boxtimes \mu$ . Wir behandeln nun zunächst den Fall  $p = 1$ . Für  $f \in L^1(V; \lambda)$  bilden wir die Funktion  $(f \circ \text{pr}_1) : (x, y) \mapsto f(x)$  und nach Fubini gilt

$$(f \circ \text{pr}_1) \in L^1(V \times V; \lambda \boxtimes \mu)$$

Daraus folgt, daß auch  $(f \circ \text{pr}_1 \circ S) : (x, y) \mapsto f(x - y)$  integrierbar ist unter dem Produktmaß, und der Satz von Fubini zeigt dann die Behauptung. Im Fall von beliebigem  $p$  können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f$  nichtnegativ annehmen. Dann können wir unsere bis hier gewonnenen Erkenntnisse auf die Funktion  $f^p$  anwenden und erhalten so, daß  $y \mapsto f(x - y)^p$  für alle  $x$  außerhalb einer  $\lambda$ -Nullmenge nach  $\mu\langle y \rangle$  integriert werden kann. Bemerkung 1.3.7 aus dem Kontext der Hölderungleichung angewandt auf die Funktion  $h_x(y) = f(x - y)$  aus  $L^p(V; \mu)$  und die konstante Funktion 1 aus  $L^q(V; \mu)$  zeigt dann, daß für alle  $x$  außerhalb derselben  $\lambda$ -Nullmenge die Funktion  $h_x$  nach  $\mu\langle y \rangle$  integrierbar ist. Bezeichnen wir dies Integral wie im Satz mit  $(\mu * f)(x)$ , so zeigt die Hölderungleichung 1.3.7 weiter

$$|(\mu * f)(x)| \leq \|h_x\|_1 \leq \|1\|_q \|h_x\|_p$$

für alle  $x$  außerhalb unserer  $\lambda$ -Nullmenge. Schreiben wir andererseits  $f$  als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge nichtnegativer integrierbarer Funktionen, so zeigt der bereits behandelte Fall  $p = 1$  auch, daß



SkriptenBilder/BildSche.png

Ein Quader  $Q$  und sein Bild  $S(Q)$  unter der Scherung  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ . Berechnen wir die Maße unter  $\lambda \boxtimes \mu$  für  $\lambda$  ein Haarmaß und  $\mu$  ein beliebiges  $\sigma$ -endliches Maß, indem wir erst horizontal nach  $x$  und dann vertikal nach  $y$  integrieren, so erkennen wir unmittelbar, daß  $Q$  und  $S(Q)$  dasselbe Maß haben.

$x \mapsto (\mu * f)(x)$  als fast überall definierte Funktion meßbar sein muß. Bilden wir nun auf beiden Seiten die  $p$ -te Potenz und integrieren über  $\lambda\langle x \rangle$ , so ergibt sich wegen  $\|1\|_q = \mu(V)^{1/q}$  sofort

$$\begin{aligned} \int |(\mu * f)(x)|^p \lambda\langle x \rangle &\leq \mu(V)^{p/q} \left( \int |f(x-y)|^p (\lambda \boxtimes \mu)\langle x, y \rangle \right) \\ &= \mu(V)^{1+p/q} \|f\|_p^p = \mu(V)^p \|f\|_p^p \end{aligned}$$

und damit ist  $\mu * f$  wieder eine  $L^p$ -Funktion mit  $\|\mu * f\|_p \leq \mu(V) \|f\|_p$ .  $\square$

*Übung 2.5.14.* Gegeben ein Haarmaß  $\lambda$  auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und  $f \in L^1(V; \lambda)$  zeige man für jedes weitere komplexe Maß  $\mu \in M(V)$  die Gleichheit von Maßen  $(\mu * f)\lambda = \mu * (f\lambda)$ .

**2.5.15 (Faltung von integrierbaren Funktionen).** Sei  $\lambda$  ein Haar-Maß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ . Gegeben integrierbare Funktionen  $f, g \in L^1(V; \lambda)$  erklären wir eine weitere integrierbare Funktion, ihre **Faltung**, durch die Vorschrift

$$f *_{\lambda} g := (f\lambda) * g$$

oder explizit  $(f *_{\lambda} g)(x) = \int g(x-y)f(y)\lambda\langle y \rangle$ . Die durch Multiplikation mit dem Maß  $\lambda$  nach 2.4.6 induzierte Einbettung  $L^1(V; \lambda) \hookrightarrow M(V)$  ist nach 2.5.14 verträglich mit den jeweiligen Konvolutionen, in Formeln

$$(f *_{\lambda} g)\lambda = (f\lambda) * (g\lambda)$$

Insbesondere ist also auch die Faltung  $*_{\lambda}$  von integrierbaren Funktionen assoziativ und kommutativ. Unsere Fouriertransformation aus 2.1.1 verträgt sich jedoch nicht so gut mit der Faltung von Funktionen wie die abstrakte Fouriertransformation mit der Faltung von Maßen, genauer gilt für integrierbare Funktionen  $f, g$  auf  $\mathbb{R}^n$  und Faltung in Bezug auf das Lebesgue-Maß die unschöne Formel

$$(f * g)^{\wedge} = (2\pi)^{n/2} (f^{\wedge} \cdot g^{\wedge})$$

weil wir ja die Fouriertransformierte einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; d^n x)$  erklärt hatten als die Fouriertransformierte des Maßes  $(2\pi)^{-n/2} f d^n x$ . In diesem Zusammenhang erweist sich die in 2.1.2 erwähnte alternative Fouriertransformation als günstiger, die jedoch hinwiederum in 2.1.6 Komplikationen verursacht.

*Übung 2.5.16.* Für die für  $v > 0$  um den Faktor  $\sqrt{v}$  verzerrten und auf Integral Eins normierten Gauss'schen Glockenkurven  $G_v(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-x^2/2v)$  wird die Faltung in Bezug auf das Lebesgue-Maß gegeben durch

$$G_u * G_v = G_{u+v}$$

2.5.17. Mit partieller Integration prüft man für die Standard-Normalverteilung  $\mu = e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$  leicht  $\int x^2 \mu \langle x \rangle = 1$ . Weiter prüft man für das  $G_v$  aus 2.5.16 auch  $\int x^2 G_v(x) dx = v$ . In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hat also eine reelle Zufallsvariable mit der Verteilung  $G_v(x) dx$  Varianz  $v$  und Standardabweichung  $\sqrt{v}$ .

**Satz 2.5.18 (Abstrakter zentraler Grenzwertsatz).** *Ist  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$ , in Bezug auf das  $x$  und  $x^2$  integrierbar sind mit  $\int x \mu \langle x \rangle = 0$  und  $\int x^2 \mu \langle x \rangle = 1$ , so konvergiert die Folge der jeweils um den Faktor  $\sqrt{n}$  gestauchten iterierten Faltungen  $\mu^{*n}$  gegen die **Standard-Normalverteilung**  $e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$  im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz der Verteilungsfunktionen. In Formeln haben wir also gleichmäßig in  $a \in \mathbb{R}$  die Konvergenz*

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{n} \cdot a} \mu^{*n} \longrightarrow \int_{-\infty}^a \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

*Ergänzung 2.5.19.* In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hört sich unser zentraler Grenzwertsatz 2.5.18 dann so an: Gegeben eine Folge identisch verteilter stochastisch unabhängiger reeller Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  mit Erwartungswert Null und Varianz Eins konvergiert die Folge der Zufallsvariablen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$$

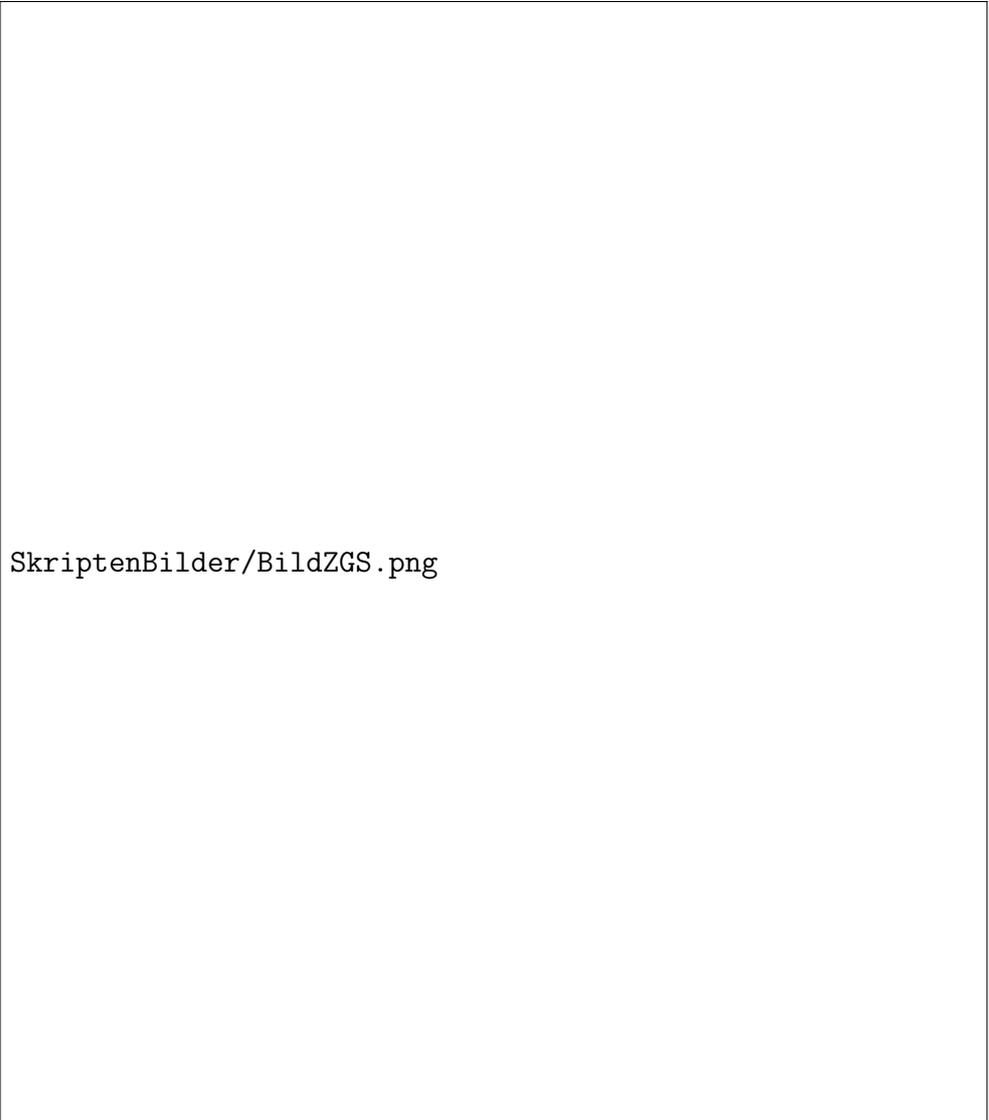
in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung.

*Beweis.* Unsere Bedingungen liefern, daß die Fouriertransformierte alias die charakteristische Funktion  $\mu^\wedge$  von  $\mu$  im Sinne von 2.2.15 zweimal stetig differenzierbar ist, und ihre Taylorentwicklung um den Nullpunkt liefert mithilfe einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 2.1.6.6 eine Darstellung

$$\mu^\wedge(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + y^2 \varepsilon(y)$$

für  $\varepsilon$  stetig mit Funktionswert Null bei Null. Nach 2.5.7 ist nun die Fouriertransformierte der Faltung das Produkt der Fouriertransformierten, und verwenden wir zusätzlich 2.1.6.5 oder besser 2.4.13, so ergibt sich für die charakteristische Funktion der um den Faktor  $\sqrt{n}$  gestauchten  $n$ -fach iterierten Faltung die Darstellung

$$((n^{-1/2})_* \mu^{*n})^\wedge(y) = \left(1 - \frac{y^2}{2n} + \frac{y^2}{n} \varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$



SkriptenBilder/BildZGS.png

In der linken Spalte sind die erste, zweite und vierte Faltungspotenz desjenigen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  dargestellt, das die Summe der Hälfte der Diracmaße an den Stellen  $1/4$  und  $-1/4$  ist. Diese Faltungspotenzen sind wieder Summen von Diracmaßen, und das Maß eines Punktes entspricht der Länge des an der entsprechenden Stelle angehefteten vertikalen Strichleins. In der rechten Spalte sind entsprechend für  $n = 1, 2, 4$  die um den Faktor  $\sqrt{n}$  in  $x$ -Richtung gestauchten Maße dargestellt. Die untere Zeile schließlich entsteht aus der rechten Spalte, indem wir jedes Strichlein durch ein Türmchen ersetzen, dessen Fläche gerade die Länge unseres Strichleins ist. Der zentrale Grenzwertsatz bedeutet in obigem Spezialfall anschaulich, daß auf jedem kompakten Intervall die Treppenfunktionen der unteren Zeile gleichmäßig gegen eine entsprechend normalisierte Gauss'sche Glockenkurve streben.

Hier steht  $(n^{-1/2})_*$  für das Bildmaß im Sinne von IV.6.3.22 unter der durch die Multiplikation mit  $n^{-1/2}$  gegebenen Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Unsere Funktionenfolge strebt nun nach II.2.6.17 punktweise gegen die Funktion  $e^{-y^2/2}$  und all ihre Glieder sind als charakteristische Funktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen betragsmäßig beschränkt durch Eins. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt damit für jede Funktion  $f$  des Schwartzraums

$$\int ((n^{-1/2})_* \mu^{*n})^\wedge(y) f(y) dy \rightarrow \int e^{-y^2/2} f(y) dy$$

bei  $n \rightarrow \infty$ . Nach 2.1.15 ist die Funktion  $e^{-y^2/2}$  die charakteristische Funktion im Sinne von 2.2.15 des Maßes  $e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$ , so daß wir wie im Beweis von 2.3.19 mit der Erkenntnis, daß die Fouriertransformation im Wesentlichen ihre eigene Transponierte ist, folgern können, daß für alle Funktionen  $g$  des Schwarzraums gilt

$$\int g(x) ((n^{-1/2})_* \mu^{*n})\langle x \rangle \rightarrow \int g(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

bei  $n \rightarrow \infty$ . Das anschließende Lemma 2.5.20 beendet dann den Beweis.  $\square$

**Lemma 2.5.20.** *Sei  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathbb{R}$  und  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit einer stetigen Verteilungsfunktion  $V = V_\mu$ . Gilt*

$$\int g(x) \mu_n \langle x \rangle \rightarrow \int g(x) \mu \langle x \rangle \quad \text{bei } n \rightarrow \infty$$

*für jede Funktion  $g$  des Schwartzraums, so streben die Verteilungsfunktionen  $V_n$  der  $\mu_n$  gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion  $V$  von  $\mu$ .*

*Beweis.* Alle unsere Verteilungsfunktionen streben gegen Null für  $b \rightarrow -\infty$  und gegen Eins für  $b \rightarrow \infty$  und wachsen monoton. Es ist damit nicht schwer einzusehen, daß aus der punktweisen Konvergenz  $V_n(b) \rightarrow V(b)$  bereits die gleichmäßige Konvergenz folgt. Gegeben  $I \subset J \subset \mathbb{R}$  beschränkte Intervalle derart, daß sogar der Abschluß des Ersten im Inneren des Zweiten enthalten ist, in Formeln  $\bar{I} \subset J^\circ$ , finden wir eine glatte Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , die auf  $I$  Eins ist und die außerhalb von  $J$  verschwindet. Sicher gilt dann

$$\mu(I) \leq \int g(x) \mu \langle x \rangle \leq \mu(J)$$

und ebenso für alle  $\mu_n$ . Wir finden folglich für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  mit

$$n \geq N \Rightarrow \begin{cases} \mu_n(I) & \leq \mu(J) + \varepsilon; \\ \mu(I) & \leq \mu_n(J) + \varepsilon. \end{cases}$$

Sind also  $I \subset J \subset K \subset \mathbb{R}$  beschränkte Intervalle, von denen jeweils der Abschluß des einen im Inneren des nächsten liegt, so folgt

$$\mu(I) - \varepsilon \leq \mu_n(J) \leq \mu(K) + \varepsilon$$

für hinreichend großes  $n$ . Da wir die Verteilungsfunktion von  $\mu$  stetig angenommen hatten, können wir für ein gegebenes beschränktes Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  und beliebiges  $\varepsilon > 0$  auch beschränkte Intervalle  $I, K$  wie oben finden mit  $\mu(K) - \mu(I) \leq \varepsilon$ . Zusammen folgt so für jedes beschränkte Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(J) = \mu(J)$$

Schließlich finden wir für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Intervall  $[a, b)$  mit  $\mu([a, b)) \geq 1 - \varepsilon$  und folglich  $\mu((-\infty, a)) \leq \varepsilon$ . Für hinreichend großes  $n$  gilt dann  $\mu_n([a, b)) \leq 1 - 2\varepsilon$  und damit  $\mu_n((-\infty, a)) \leq 2\varepsilon$ . Für  $x \leq a$  gilt bereits für diese  $n$  die Abschätzung  $|\mu((-\infty, x)) - \mu_n((-\infty, x))| \leq 3\varepsilon$ . Für  $x > a$  müssen wir zusätzlich  $n$  noch so groß wählen, daß  $|\mu([a, x)) - \mu_n([a, x))| \leq \varepsilon$  und dann folgt für derart große  $n$  offensichtlich

$$|\mu((-\infty, x)) - \mu_n((-\infty, x))| \leq 4\varepsilon$$

alias die punktweise Konvergenz der Verteilungsfunktionen.  $\square$

## 2.6 Translationsinvariante Teilräume\*

2.6.1. In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man mithilfe der Fouriertheorie die abgeschlossenen translationsinvarianten Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum bestimmen kann. Wir werden das Resultat nicht benötigen, es wird später eh durch die Theorie der unitären Darstellungen von Vektorräumen überholt. Jedoch mag es für manche Vorlesung einen netten Abschluß liefern.

**Definition 2.6.2.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Ein Teilraum  $M \subset L^2(V)$  heißt **translationsinvariant** genau dann, wenn er für alle  $a \in V$  invariant ist unter der Translation  $\tau_a : L^2(V) \rightarrow L^2(V)$  gegeben durch  $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$ , wenn also in Formeln gilt

$$f \in M \Rightarrow \tau_a f \in M \quad \forall a \in V$$

*Beispiel 2.6.3.* Für  $E \subset \hat{V}$  Borel-meßbar ist das Bild von  $\chi_E L^2(\hat{V}) = L^2(E)$  unter der Fouriertransformation nach 2.5.8 ein translationsinvarianter Teilraum von  $L^2(V)$ , und nach II.7.5.3 ist dieser Teilraum auch abgeschlossen. Wir zeigen nun, daß diese Konstruktion bereits alle Beispiele für abgeschlossene translationsinvariante Teilräume liefert.

**Satz 2.6.4 (Translationsinvariante Teilräume in  $L^2(V)$ ).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum.

1. Jeder translationsinvariante abgeschlossene Teilraum  $M \subset L^2(V)$  ist von der Form  $M = L^2(E)^\wedge$  für eine Borelmenge  $E \subset \hat{V}$ .
2. Gegeben eine weitere Borelmenge  $F \subset \hat{V}$  gilt  $L^2(E)^\wedge = L^2(F)^\wedge$  genau dann, wenn  $E \setminus F$  und  $F \setminus E$  in Bezug auf ein und jedes Haarmaß Nullmengen sind.

2.6.5. Im Fall einer Veränderlichen mag man die Aussage dieses Satzes dahingehend zusammenfassen, daß die translationsinvarianten abgeschlossenen Teilräume durch die Vorgabe gewisser "erlaubter Frequenzanteile" beschrieben werden können, also umgangssprachlich durch die Angabe des "erlaubten Tonumfangs".

*Beweis.* Die zweite Behauptung ist klar. Für die Erste wählen wir ein Haarmaß  $\lambda$  und bemerken, daß ein Teilraum von  $L^2(V; \lambda)$  nach 2.5.8 invariant ist unter allen Translationen genau dann, wenn sein Bild unter der Fouriertransformation invariant ist unter allen Multiplikationen mit Charakteren. Damit folgt unser Satz aus der anschließenden Proposition 2.6.6.  $\square$

**Proposition 2.6.6.** Sei  $W$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\mu$  ein Borelmaß auf  $W$ . So hat jeder unter der Multiplikation mit allen unitären Charakteren von  $W$  invariante abgeschlossene Teilraum  $M \subset L^2(W; \mu)$  die Gestalt  $M = L^2(E)$  für eine Borelmenge in  $E \subset W$ .

*Beweis.* Sei  $P : L^2(W; \mu) \rightarrow M$  der orthogonale Projektor. Natürlich gilt

$$\langle Pf, g \rangle = \langle Pf, Pg \rangle = \langle f, Pg \rangle$$

für alle  $f, g \in L^2(W; \mu)$ . Für jeden Charakter  $\chi \in \hat{W}$  gilt offensichtlich  $P(\chi f) = \chi(Pf)$ . Wir folgern  $\langle Pf, \chi g \rangle = \langle f, \chi Pg \rangle$  für alle  $\chi \in \hat{W}$  oder ausgeschrieben

$$\int \overline{Pf} \cdot \chi g = \int \bar{f} \cdot \chi Pg$$

Nach 2.3.19 haben aber zwei komplexe Maße nur dann dieselbe Fouriertransformierte, wenn sie übereinstimmen. Damit folgt die Gleichheit von Maßen

$$(\overline{Pf})g\mu = \bar{f}(Pg)\mu$$

Wählen wir nun  $g \in \mathcal{L}^2$  Borelmeßbar und quadratintegrierbar mit  $g(y) > 0$  für alle  $y$  und setzen

$$\varphi(y) = (Pg)(y)/g(y)$$

so folgt aus unserer Gleichheit von Maßen mit 2.4.6 die Gleichheit von Funktionen  $(Pf)(y) = \varphi(y)f(y)$  für fast alle  $y$ . Da aber gilt  $P^2 = P$ , nimmt  $\varphi(y)$  fast überall nur die Werte 0 und 1 an. Also gibt es eine Borelmenge  $E \subset W$  mit  $Pf = \chi_E f$ . Nun gilt aber  $f = \chi_E f \Leftrightarrow f \in L^2(E)$  und es folgt  $M = L^2(E)$ .  $\square$

## 2.7 Allgemeinere Fouriertransformationen\*

2.7.1. Als Ausblick will ich ohne Beweise skizzieren, in welcher Weise sowohl Fourierreihen als auch Fouriertransformationen beide Spezialfälle einer allgemeineren Theorie sind. Mehr dazu findet man etwa in [Rud90, Bou67].

2.7.2. Gegeben topologische Räume  $X$  und  $Y$  kann man ihr kartesisches Produkt  $X \times Y$  auf genau eine Weise mit einer Topologie versehen derart, daß die Projektionen  $\text{pr}_X$  und  $\text{pr}_Y$  stetig werden und daß das Tripel  $(X \times Y, \text{pr}_X, \text{pr}_Y)$  im Sinne von ?? ein Produkt in der Kategorie der topologischen Räume ist. Wie diese **Produkttopologie** im allgemeinen konstruiert wird, können Sie etwa in VI.3.6.1 lernen. Sind  $X$  und  $Y$  metrische Räume mit ihrer metrischen Topologie, so ist die metrische Topologie zur Produktmetrik nach II.6.5.36 bereits die Produkttopologie.

2.7.3. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe  $G$  mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung  $G \times G \rightarrow G$  und die Inversenabbildung  $G \rightarrow G$  stetig sind.

*Beispiele* 2.7.4. Die additiven Gruppen endlichdimensionaler reeller Vektorräume sind mit ihrer natürlichen Topologie topologische Gruppen. Die Automorphismengruppen endlichdimensionaler reeller oder komplexer Vektorräume sind mit der von der natürlichen Topologie des Endomorphismenraums induzierten Topologie topologische Gruppen. Die orthogonalen und unitären Matrizen bilden mit ihrer jeweiligen von der natürlichen Topologie des Endomorphismenraums induzierten Topologie topologische Gruppen. Jede Gruppe ist mit ihrer diskreten Topologie eine topologische Gruppe. In der Zahlentheorie sind auch die topologischen Gruppen der sogenannten “ $p$ -adischen Zahlen” und “Adele” von Bedeutung.

2.7.5. Für kommutative Hausdorff’sche lokal kompakte topologische Gruppen schlage ich die abkürzende Bezeichnung **Pontrjagin-Gruppen** vor. In der Literatur wird die Theorie meist für derartige Gruppen entwickelt. Ich beschränke mich im folgenden auf den Fall separabler Pontrjagin-Gruppen, der einerseits alle mir bekannten Anwendungen abdeckt und andererseits technisch für uns weniger aufwendig ist, da wir uns in diesem Fall auf die in dieser Vorlesung bereits entwickelten Methoden der Maßtheorie stützen können.

*Beispiele 2.7.6.* Die additiven Gruppen endlichdimensionaler reeller Vektorräume sind separable Pontrjagingruppen. Die Kreislinie  $S^1$  ist eine separable Pontrjagingruppe. Jede abzählbare kommutative Gruppe mit ihrer diskreten Topologie ist eine separable Pontrjagingruppe. Auch die “ $p$ -adischen Zahlen” und “Adele” aus der Zahlenheorie sind separable Pontrjagingruppen.

2.7.7. Ist  $G$  eine separable Pontrjagingruppe, so erhält die Menge ihrer Charaktere, als da heißt aller stetigen Gruppenhomomorphismen in die Kreislinie

$$\hat{G} = \mathfrak{X}(G) = \text{GrpTop}(G, S^1)$$

mit ihrer “kompakt-offenen Topologie” und punktweisen Verknüpfung auch wieder die Struktur einer separablen Pontrjagingruppe. Wir nennen  $\hat{G}$  die **Charaktergruppe von  $G$** . Die kompakt-offene Topologie ist dadurch definiert, daß eine Teilmenge  $U \subset \hat{G}$  offen ist genau dann, wenn es für jedes  $\chi \in U$  eine kompakte Teilmenge  $K \subset G$  und ein  $\varepsilon > 0$  gibt derart, daß alle Charaktere  $\psi$  mit  $|\psi(g) - \chi(g)| < \varepsilon \forall g \in K$  auch noch in  $U$  liegen. Die Vorschrift  $G \mapsto \hat{G}$  ist sogar ein kontravarianter Funktor, in Formeln liefert jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  in der Gegenrichtung einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $\hat{\varphi} := (\circ\varphi) : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$ . Des weiteren wird unter diesem Funktor jede kurze exakte Sequenz bestehend aus einer abgeschlossenen Einbettung gefolgt von einer finalen Surjektion zu einer kurzen exakten Sequenz derselben Art in der Gegenrichtung.

*Beispiele 2.7.8.* Im Fall  $G = \mathbb{R}^n$  ergibt sich  $\hat{G} \cong \mathbb{R}^n$ . Im Fall  $G = S^1$  ergibt sich  $\hat{G} \cong \mathbb{Z}$ . Ist allgemeiner  $G$  kompakt, so ist  $\hat{G}$  diskret. Ist  $G$  endlich, so haben wir  $\hat{G} \cong G$ , aber in völlig unkanonischer Weise.

**Definition 2.7.9.** Gegeben eine separable Pontrjagingruppe  $G$  erklären wir die **Fouriertransformation**

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : M(G) &\rightarrow \mathcal{C}_b(\hat{G}) \\ \mu &\mapsto \mu^\wedge \end{aligned}$$

durch die Vorschrift  $\mu^\wedge(\chi) := \int_G \chi(g)\mu\langle g \rangle$ . In Worten ist der Wert  $\mu^\wedge(\chi)$  der Fouriertransformierten  $\mu^\wedge$  eines Maßes  $\mu$  an einem Charakter  $\chi$  das Integral von besagtem Charakter in Bezug auf besagtes Maß.

*Beispiele 2.7.10.* Im Fall  $G = S^1$  erhalten wir die Theorie der Fourierreihen. Im Fall  $G = \mathbb{R}^n$  erhalten wir die Theorie der Fouriertransformationen. Im Fall  $|G| < \infty$  erhalten wir die Theorie der die sogenannten **diskreten Fouriertransformationen**. Besonders beliebt ist der Fall  $G = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$  von zyklischen Gruppen, deren Ordnung eine Zweierpotenz ist. Auch in dieser Allgemeinheit erklärt man die **Cosinustransformation** und die **Sinustransformation** von  $\mu$  als die Funktionen  $\chi \mapsto \int_G \frac{1}{2}(\chi(g) + \bar{\chi}(g))\mu\langle g \rangle$

und  $\chi \mapsto \int_G \frac{1}{2i}(\chi(g) - \bar{\chi}(g))\mu(g)$  und erhält so zu reellen Maßen reellwertige Funktionen. Besonders wichtig ist wieder der Fall einer zyklischen Gruppe, in dem diese Transformationen die **diskrete Cosinustransformation** und die **diskrete Sinustransformation** heißen.

**2.7.11 (Natürlichkeit der Fouriertransformation).** Gegeben ein stetiger Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  von separablen Pontrjagingruppen kommutiert, wie man unschwer einsieht, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\hat{G}) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \circ \hat{\varphi} \\ M(H) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_b(\hat{H}) \end{array}$$

*Beispiele 2.7.12.* Einen Spezialfall dieser Aussage haben Sie bereits in Übung 2.4.13 gesehen. Wickelt  $\varphi$  die Zahlengerade auf die Kreislinie auf, so ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Fourierreihe und der Fouriertransformation.

**Definition 2.7.13.** Gegeben ein Ring  $k$  und Mengen  $X, Y$  und Abbildungen  $f : X \rightarrow k$  und  $g : Y \rightarrow k$  notieren wir  $f \boxtimes g$  die Funktion  $X \times Y \rightarrow k$  gegeben durch  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ . Wir nennen  $f \boxtimes g$  das **äußere Produkt** der beiden Funktionen  $f$  und  $g$ .

**2.7.14 (Produktverträglichkeit der Fouriertransformation).** Ist unsere Gruppe ein Produkt  $G \times H$  von zwei separablen Pontrjagingruppen  $G, H$  und sind Maße  $\mu \in M(G)$ ,  $\nu \in M(H)$  gegeben, so entspricht die Fouriertransformierte des Produktmaßes  $\mu \boxtimes \nu \in M(G \times H)$  unter der natürlichen Identifikation  $\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$  dem äußeren Produkt der Fouriertransformierten unserer beiden Maße, in Formeln

$$(\mu \boxtimes \nu)^\wedge = \mu^\wedge \boxtimes \nu^\wedge$$

Auch das folgt unmittelbar aus den Definitionen. Einen Schatten dieses Resultats haben Sie eventuell bereits als Übung 2.1.17 ausgearbeitet.

**2.7.15 (Faltung).** Gegeben eine separable Pontrjagingruppe wird die Faltung  $M(G) \times M(G) \rightarrow M(G)$ ,  $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$  wie in 2.5.2 erklärt durch die Vorschrift

$$\mu * \nu := m_*(\mu \boxtimes \nu)$$

für  $m : G \times G \rightarrow G$  die Verknüpfung unserer Gruppe. Wie in 2.5 zeigt man auch in dieser Allgemeinheit, daß die Faltung  $M(G)$  zu einer  $\mathbb{C}$ -Kringalgebra macht.

**Satz 2.7.16 (Fouriertransformation und Faltung).** *Die Fouriertransformierte der Faltung zweier komplexer Maße ist das punktweise Produkt ihrer Fouriertransformierten, in Formeln*

$$(\mu * \nu)^\wedge = \mu^\wedge \cdot \nu^\wedge$$

*Beweis.* Der Komorphismus  $\hat{m} : \hat{G} \rightarrow \hat{G} \times \hat{G}$  zur Verknüpfung  $m : G \times G \rightarrow G$  ist offensichtlich die diagonale Einbettung, in Formeln  $\hat{m} = \Delta_{\hat{G}}$ . Unsere Formeln liefern für die Fouriertransformierte einer Faltung also

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)^\wedge &= (m_*(\mu \boxtimes \nu))^\wedge \text{ nach Definition der Faltung,} \\ &= (\mu \boxtimes \nu)^\wedge \circ \hat{m} \text{ nach der Natürlichkeit 2.7.11,} \\ &= (\mu^\wedge \boxtimes \nu^\wedge) \circ \hat{m} \text{ nach der Produktverträglichkeit 2.7.14,} \\ &= \mu^\wedge \cdot \nu^\wedge \text{ wegen } \hat{m} = \Delta_{\hat{G}}. \quad \square \end{aligned}$$

**2.7.17 (Inversionsformel).** Sei  $G$  eine separable Pontrjagingruppe. Die kanonische Abbildung gegeben durch  $(\text{can}(g))(\chi) = \overline{\chi(g)}$  liefert einen Isomorphismus

$$\text{can} : G \xrightarrow{\sim} \hat{\hat{G}}$$

Man nennt die Charaktergruppe  $\hat{G}$  deshalb auch die **Pontrjagin-duale Gruppe** zu  $G$ . Unter unseren Annahmen gibt es auf  $G$  bis auf Skalar genau ein Haarmaß  $\lambda$ , als da heißt ein von Null verschiedenes Borelmaß mit  $\lambda(gA) = \lambda(A)$  für alle  $g \in G$  und alle meßbaren  $A \subset G$ . Wieder gibt es für jedes Haarmaß  $\lambda$  auf  $G$  genau ein Haarmaß  $\hat{\lambda}$  auf  $\hat{G}$ , das zugehörige **Plancherel-Maß**, mit der Eigenschaft, daß für  $f \in L^1(G; \lambda)$  und  $h \in L^1(\hat{G}; \hat{\lambda})$  gilt

$$(\mathcal{F} : f\lambda \mapsto h) \Leftrightarrow (\mathcal{F} : h\hat{\lambda} \mapsto f)$$

wobei die Rücktransformation  $\mathcal{F} : M(\hat{G}) \rightarrow \mathcal{C}_b(G)$  als Fouriertransformation gefolgt von der durch die Identifikation  $\text{can}$  gegebenen Abbildung zu verstehen ist. Etwas feiner folgt sogar für jedes Maß  $\mu \in M(G)$  aus  $\mu^\wedge \in L^1(\hat{G}; \hat{\lambda})$  bereits  $\mu = (\mu^\wedge \hat{\lambda})^\wedge \lambda$ . Jedes Maß mit einer integrierbaren Fouriertransformierten ist mithin das Produkt eines Haarmaßes mit einer stetigen integrierbaren Funktion. Auch in dieser Allgemeinheit kann ein Hilbertraumisomorphismus

$$L^2(G; \lambda) \xrightarrow{\sim} L^2(\hat{G}; \hat{\lambda})$$

definiert werden durch stetige Fortsetzung der auf den integrierbaren und quadratintegrierbaren Funktionen definierten Abbildung  $L^1 \cap L^2 \rightarrow \mathcal{C}_b(\hat{G})$ ,  $f \mapsto (f\lambda)^\wedge$ . Dessen Inverses entsteht analog durch stetige Fortsetzung der Abbildung  $L^1 \cap L^2 \rightarrow \mathcal{C}_b(G)$ ,  $g \mapsto (g\hat{\lambda})^\wedge \circ \text{can}^{-1}$ .

2.7.18. Ist  $G$  kompakt, so ist  $\hat{G}$  diskret und das Plancherelmaß zum auf Gesamtmasse Eins normierten Haarmaß auf  $G$  ist das Zählmaß auf  $\hat{G}$ .

*Ergänzende Übung 2.7.19.* Die Abbildung  $\mu \mapsto \mu^\wedge$  mit  $\mu^\wedge(n) = \int z^n \mu\langle z \rangle$  liefert eine Injektion  $M(S^1) \hookrightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{Z})$ . Hinweis: III.3.2.15 und IV.6.8.5 oder besser VI.17.2.3. Gegeben  $w \in S^1$  zeige man weiter  $((w \cdot)_* \mu)^\wedge(n) = w^n \mu^\wedge(n)$ . Ist insbesondere  $w$  von unendlicher Ordnung, so gilt es außer den Vielfachen des Haar'schen Maßes keine Borelmaße  $\mu \in M(S^1)$  mit  $(w \cdot)_* \mu = \mu$ . Bezeichnet  $\lambda$  das auf Gesamtmasse Eins normierte Haar-Maß, so gilt insbesondere für jede Borelmenge  $A \subset S^1$  mit  $wA = A$  die Alternative  $\lambda(A) \in \{0, 1\}$ .

**Satz 2.7.20 (Poisson-Formel).** *Seien  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $\Gamma \subset V$  ein Gitter,  $\lambda = \lambda_\Gamma$  das durch die Bedingung  $\lambda(V/\Gamma) = 1$  normalisierte Haar-Maß auf  $V$  und  $\Gamma^\wedge \subset \hat{V}$  das duale Gitter. Ist  $f \in \mathcal{L}^1(V; \lambda)$  eine integrierbare Funktion derart, daß für alle  $x \in V/\Gamma$  die Summe  $\sum_{v+\Gamma=x} f(v)$  absolut konvergiert und daß diese Summen eine stetige Funktion auf  $V/\Gamma$  liefern, so gilt für die Fouriertransformierte  $(f\lambda)^\wedge$  des komplexen Maßes  $f\lambda$  die Formel*

$$\sum_{\zeta \in \Gamma^\wedge} (f\lambda)^\wedge(\zeta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$$

2.7.21. Dieser Satz wurde unter etwas stärkeren Voraussetzungen bereits als 2.3.20 bewiesen. Hier formuliere ich noch einen koordinatenfreien Beweis. In [?] wird eine noch allgemeinere Version beschrieben.

*Beweis.* Seien  $\Gamma \triangleleft V$  separable Pontrjagingruppen. Der kurzen exakten Sequenz  $\Gamma \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/\Gamma$  entspricht eine kurze exakte Sequenz in der Gegenrichtung, die auch  $\Gamma^\wedge \hookrightarrow \hat{V} \twoheadrightarrow \hat{V}/\Gamma^\wedge$  geschrieben werden kann mit  $\Gamma^\wedge = \mathfrak{X}(V/\Gamma)$  und  $\hat{V}/\Gamma^\wedge = \mathfrak{X}(\Gamma)$ . Nun betrachten wir die beiden zueinander Pontrjagindualen Spalten

$$\begin{array}{ccc} V & & \hat{V} \\ p \downarrow & & \uparrow \hat{p} \\ V/\Gamma & & \Gamma^\wedge \\ i \uparrow & & \downarrow \hat{i} \\ 0 & & 0 \end{array}$$

von additiv notierten Gruppen. Der Beweis besteht im Wesentlichen darin, von der obersten Etage mit Natürlichkeit in die mittlere Etage herunterzusteigen, dort die Inversionsformel anzuwenden, und mit Natürlichkeit weiter in die unterste Etage herunterzusteigen, in der dann die von der Poisson'schen Summationsformel behauptete Gleichheit von komplexen Zahlen entsteht. In

Formeln liest sich das wie folgt. Gegeben ein Maß  $\mu \in M(V)$  mit Fouriertransformierter  $\mu^\wedge$ , in Formeln

$$\mu \xrightarrow{\mathcal{F}} \mu^\wedge$$

liefert die Natürlichkeit 2.7.11 der Fouriertransformation

$$p_*\mu \xrightarrow{\mathcal{F}} \mu^\wedge \circ \hat{p}$$

Ist  $\lambda$  ein Haarmaß auf  $V/\Gamma$  und  $\hat{\lambda}$  das zugehörige Plancherelmaß auf  $\Gamma^\wedge$ , so folgt unter der Annahme  $\mu^\wedge \circ \hat{p} \in L^1(\Gamma^\wedge; \hat{\lambda})$  aus der Inversionsformel 2.7.17, daß es  $h \in L^1(V/\Gamma; \lambda)$  gibt mit  $h\lambda = p_*\mu$ , und daß für dieses  $h$  gilt

$$h \xleftarrow{\mathcal{F}} (\mu^\wedge \circ \hat{p})\hat{\lambda}$$

Mit erneutem Anwenden der Natürlichkeit 2.7.11 erhalten wir daraus

$$h \circ i \xleftarrow{\mathcal{F}} \hat{i}_*((\mu^\wedge \circ \hat{p})\hat{\lambda})$$

Ist hier  $\Gamma^\wedge$  diskret und  $\hat{\lambda}$  das Zählmaß, so besagt die letzte Zeile schlicht

$$h(0) = \sum_{\zeta \in \Gamma^\wedge} \mu^\wedge(\zeta)$$

Sind nun  $V, \Gamma, \lambda$  und  $f$  wie im Satz und betrachten wir  $\mu = f\lambda$ , so gilt  $p_*\mu = p_*(f\nu) = h\lambda$  mit  $h(x) := \sum_{p(v)=x} f(v)$ . Bis hierher kann man noch  $f \in L^1(V; \lambda)$  beliebig nehmen, die Integrierbarkeit von  $h$  folgt mit Fubini aus dem Isomorphismus von Maßräumen  $\Gamma \times A \xrightarrow{\sim} V$  für eine "Grundmasche"  $A$  des Gitters  $\Gamma$ . Ist nun  $f \in \mathcal{L}^1$  eine überall definierte integrierbare Funktion derart, daß die Summe  $\sum_{p(v)=x} f(v)$  überall konvergiert und eine bei Null stetige Funktion  $h$  liefert, so haben wir sogar

$$h(0) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$$

Die Poisson'sche Summationsformel folgt. □

**Ergänzung 2.7.22.** Nach Rieffel kann man den sogenannten **oszillatorischen Integralen**

$$\int F(x, y) e^{2\pi i x \cdot y} dx dy$$

bereits dann sinnvoll eine komplexe Zahl als Wert zuordnen, wenn  $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$  glatt ist und alle seine partiellen Ableitungen gleichmäßig stetig und beschränkt sind. Für Funktionen  $F$  der Gestalt  $F(x, y) = f(x)g(y)$  mit  $f$  und  $g$  aus dem Schwartzraum liefert unser Integral bis auf geeignete Normalisierungen das Skalarprodukt von  $f$  mit der Fouriertransformierten von  $g$ . Es fällt mir schwer, dieses Resultat im Allgemeinen einzuordnen. Es mag sinnvoll sein, etwas allgemeiner

$$\hat{F}(a, b) = \int F(x + a, y + b) e^{2\pi i x \cdot y} dx dy$$

als Funktion von  $a, b$  zu untersuchen und zu bestimmen, wie diese Funktion mit Funktionen des Schwartzraums  $G(a, b)$  paaren sollte. Gegeben Funktionen  $f, g$  aus dem Schwartzraum und mit  $G(a, b) = f(a)g(b)$  finden wir heuristisch

$$\begin{aligned} \int f(a)g(b)F(x + a, y + b) e^{-ixy} &= \int f(a)g(b)F(x, y + b) e^{-i(x-a)y} \\ &= \int \hat{f}(-y) e^{-ixy} g(b)F(x, y + b) \\ &= \int \hat{f}(-y)g(b - y) e^{-ixy} F(x, b) \\ &= \int h(x, b)F(x, b) \end{aligned}$$

für  $h$  die Fouriertransformierte in  $y$  der Schwartzfunktion gegeben durch  $(y, b) \mapsto \hat{f}(-y)g(b - y)$ .

### 3 Spektraltheorie in Hilberträumen

#### 3.1 Unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$

**Definition 3.1.1.** Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  bilden eine Gruppe  $U(\mathcal{H})$ . Eine **unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$**  ist ein Paar  $(\mathcal{H}, \rho)$  bestehend aus einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und einem Gruppenhomomorphismus  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$  derart, daß die zugehörige Operation  $\mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $(t, v) \mapsto (\rho(t))(v)$  stetig ist für die Produktmetrik auf  $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ .

3.1.2. In Formeln fordern wir von unserer Abbildung  $\rho$  also

$$\rho(s + t) = \rho(s) \circ \rho(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

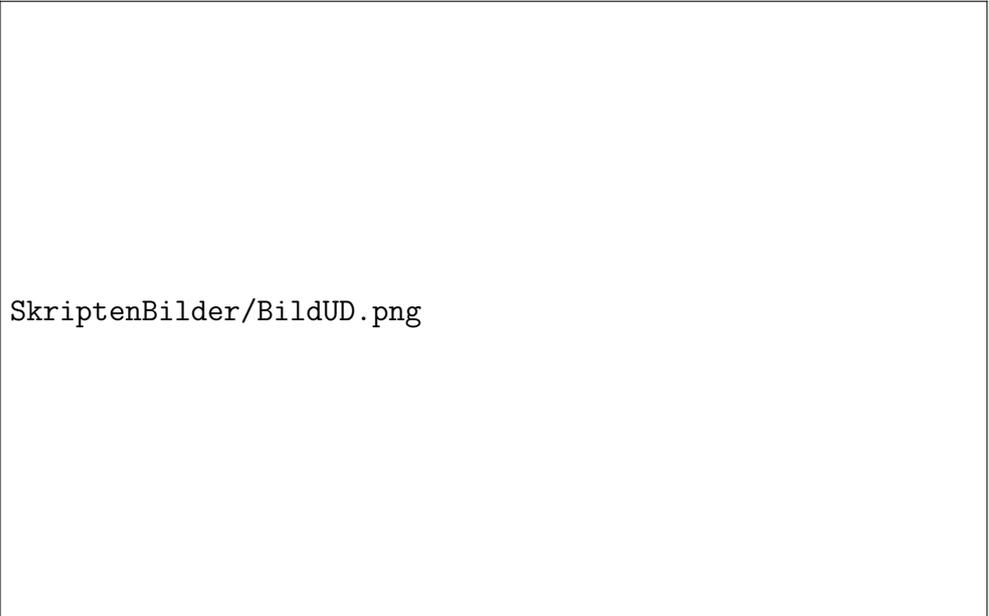
Unitäre Darstellungen von  $\mathbb{R}$  sind in der Quantenmechanik von grundlegender Bedeutung, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems durch eine unitäre Operation von  $\mathbb{R}$  oder noch präziser von der dazu isomorphen Gruppe  $\vec{\mathbb{T}}$  der Zeitspannen auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  seiner Zustände modelliert wird. Als erstes Beispiel betrachten wir auf  $\mathbb{R}$  das Lebesgue-Maß  $dt$  und die unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$  durch das Verschieben von Funktionen  $\rho(t)f = \tau_t f$ , deren Stetigkeit in 1.5.7 gezeigt wurde. Der folgende Satz 3.1.4 soll als Leitbild für die Entwicklung der Spektraltheorie dienen, die wir anschließend in Angriff nehmen werden. Er stellt gleichzeitig eine große Klasse von Beispielen bereit und wirft Licht auf die allgemeine Struktur.

*Vorschau* 3.1.3. Man kann  $U(\mathcal{H})$  so mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen, daß unsere unitären Darstellungen gerade die Einparameteruntergruppen von  $U(\mathcal{H})$  sind: Das leistet die sogenannte **starke Operatortopologie**, die definiert ist als die Initialtopologie zu allen Auswertungen an Vektoren  $U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ .

**Satz 3.1.4 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von  $\mathbb{R}$ ).** *Ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$  eine unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  und  $v \in \mathcal{H}$  ein Vektor, so gibt es genau ein Paar  $(\mu, \varphi)$  mit  $\mu = \mu_v$  einem endlichen Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  einer unitären Einbettung derart, daß gilt  $\varphi(1) = v$  und*

$$\rho(t) \circ \varphi = \varphi \circ (e^{itx} \cdot) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3.1.5. Das Symbol  $x$  ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß ein Element  $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  eine Funktion  $f(x)$  sein soll. Für jedes feste  $t \in \mathbb{R}$  ist also mit  $(e^{itx} \cdot)$  die Abbildung  $(e^{itx} \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$  gemeint ist, die ein



SkriptenBilder/BildUD.png

Illustration zur Operation von  $\mathbb{R}$  auf  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ . Den Graph einer Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mag man sich als Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  vorstellen, die eingezeichneten Kreise sind jeweils als  $S^1 \subset \mathbb{C}$  zu verstehen und die Multiplikation mit  $e^{i \cdot x t}$  für festes  $t$  bedeutet das Drehen um geeignet von  $x$  abhängende Winkel in den jeweiligen Ebenen  $\{x\} \times \mathbb{C}$ , anschaulich also ein Verdrillen des Graphen.

$f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  auf diejenige fast überall definierte Funktion abbildet, die an der Stelle  $x \in \mathbb{R}$  den Wert  $e^{itx} f(x)$  annimmt. Die 1 meint die konstante Funktion 1 auf  $\mathbb{R}$ , die ja in Bezug auf jedes endliche Borelmaß quadratintegrierbar ist. Das Wörtchen “lokal” spielt darauf an, daß die Darstellung in gewisser Weise nur “lokal um den Vektor  $v$ ” beschrieben wird. Eine globale Beschreibung werden wir als “Spektralzerlegung” in 3.8.1 kennenlernen, und aus dieser Spektralzerlegung leiten wir dann auch erst den obigen Satz über die lokale Struktur her. Der besseren Übersichtlichkeit halber stelle ich die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccc}
 f(x) \in & L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\
 \downarrow & (e^{itx} \cdot) \downarrow & & \downarrow \rho(t) \\
 e^{itx} f(x) \in & L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\
 & 1 & \mapsto & v
 \end{array}$$

*Übung 3.1.6.* Gegeben ein Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  zeige man, daß die Abbildung  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}; \mu))$  mit  $(\rho(t)f)(x) = e^{itx} f(x)$  für  $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  eine unitäre Darstellung ist, daß jedoch  $\rho$  als Abbildung von  $\mathbb{R}$  in den Raum der Operatoren auf unserem Hilbertraum mit seiner Operatornorm im allgemeinen nicht stetig ist: Ist  $\mu$  das Lebesguemaß, so gilt sogar  $s \neq t \Rightarrow \|\rho(t) - \rho(s)\| = 2$ .

*Übung 3.1.7.* Man zeige unter der Annahme der Gültigkeit von 3.1.4: Betrachten wir zu einem Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  den Raum  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$  als unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  wie in 3.1.6, so wird für  $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  das zugehörige Maß  $\mu_f$  gegeben durch die Formel  $\mu_f = |f|^2 \mu$ .

3.1.8. Ich formuliere diesen Satz auch noch im unwesentlich allgemeineren Fall einer **Geradengruppe**, als da heißt der additiven Gruppe  $G$  eines eindimensionalen reellen Vektorraums. Diese Allgemeinheit scheint mir aus mehreren Gründen sinnvoll: Erstens hoffe ich, daß selbst im Fall  $G = \mathbb{R}$  die Aussage übersichtlicher wird, wenn in der Notation die drei verschiedenen Bedeutungen von  $\mathbb{R}$  als (1) dargestellte Gruppe, (2) deren Charaktergruppe und (3) auf dem Hilbertraum operierender Körper getrennt werden. Zweitens sind Operationen von Geradengruppen auf Hilberträumen in der Quantenmechanik besonders natürlich, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems ja eigentlich durch eine unitäre Operation der Gruppe  $G = \vec{\mathbb{T}}$  aller Zeitspannen auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  aller Zustände des Systems modelliert wird. Und drittens gilt unser Satz in dieser Gestalt unverändert für die additive Gruppe jedes endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $G$  und mutatis mutandis für  $G$  eine beliebige kommutative “lokal kompakte Hausdorff’sche topologische Gruppe”, besonders wichtig wäre in diesem Zusammenhang etwa die Gruppe der Translationen des Anschauungsraums.

Bezeichne  $\hat{G} = \text{Grpto}(G, S^1)$  den Charakterraum unserer Geradengruppe im Sinne von 2.2.2, also die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von  $G$  in die Kreislinie  $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ . Auf diesem Charakterraum haben wir in 2.2.2 die Struktur eines reellen Vektorraums erklärt und haben gezeigt, daß er im Fall einer Geradengruppe die Dimension Eins hat.

**Satz 3.1.9 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von Geradengruppen).** *Ist  $G$  eine Geradengruppe,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $\rho : G \rightarrow \text{U}(\mathcal{H})$  eine unitäre Darstellung und  $v \in \mathcal{H}$  ein Vektor, so gibt es genau ein Paar  $(\mu, \varphi)$  mit  $\mu = \mu_v$  einem endlichen Borelmaß auf der Charaktergruppe  $\hat{G}$  und  $\varphi : L^2(\hat{G}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  einer unitären Einbettung derart, daß gilt  $\varphi(1) = v$  und*

$$\rho(g) \circ \varphi = \varphi \circ (g \cdot) \quad \forall g \in G$$

3.1.10. Hier ist  $(g \cdot)$  zu verstehen als die Multiplikation mit der durch das Auswerten an der Stelle  $g$  definierten Funktion  $\hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$  auf der Charaktergruppe. Der besseren Übersichtlichkeit halber stellen wir die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccc} f(\chi) \in L^2(\hat{G}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ \downarrow & (g \cdot) \downarrow & \downarrow \rho(g) \\ \chi(g)f(\chi) \in L^2(\hat{G}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ & 1 \mapsto & v \end{array}$$

Hierbei meint  $\chi \in \hat{G}$  einen variablen Charakter und  $f(\chi)$  sowie  $\chi(g)$  sind nur nur etwas ausführlichere Darstellungen einer Funktion  $f : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$  bzw. der durch das Auswerten bei  $g \in G$  gegebenen Funktion  $\hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ . Ich schlage vor, dies Maß  $\mu$  das **Frequenzmaß** des Vektors  $v$  zu nennen. Es mißt in gewisser und im endlichdimensionalen Fall in 3.1.14 präzisierter Weise, “wie stark verschiedene Frequenzanteile in  $v$  vorkommen”. Die Abbildung  $\varphi$  nenne ich die **kanonische Einbettung** zu unserem Vektor  $v$ .

3.1.11. Eine **Unterdarstellung** einer unitären Darstellung  $(\mathcal{H}, \rho)$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $\mathcal{H}$ , der unter allen  $\rho(t)$  in sich selber überführt wird. Ein Vektor  $v \in \mathcal{H}$  einer Darstellung heißt ein **zyklischer Vektor** unserer Darstellung genau dann, wenn es außer  $\mathcal{H}$  selbst keine Unterdarstellung gibt, die unseren Vektor enthält. Ist im vorhergehenden Satz  $v$  ein zyklischer Vektor, so ist  $\varphi$  ein Isomorphismus und liefert sogar eine explizite Beschreibung der “globalen Struktur” unserer Darstellung. Umgekehrt zeigt unser Satz auch, daß für jedes Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  die unitäre Darstellung  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$  nach 3.1.6 zyklische Vektoren besitzt, ja sogar, daß für jedes endliche Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  die konstante Funktion  $1 \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  ein zyklischer Vektor

ist: Andernfalls läge ja 1 in einer echten Unterdarstellung  $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R}; \mu)$  und wir fänden dazu neben dem Paar  $(\mu, \text{id})$  noch ein weiteres mögliches Paar  $(\nu, \varphi)$ , bei dem  $\varphi$  über  $\mathcal{H}$  faktorisiert, im Widerspruch zur behaupteten Eindeutigkeit. Im allgemeinen gibt es zwar keinen zyklischen Vektor, aber in jedem Fall ist unser Raum die "Hilbertsumme" von abgeschlossenen Unterdarstellungen, die jeweils einen zyklischen Vektor besitzen. Natürlich kann es viele verschiedene derartige Zerlegungen geben und im Fall der Existenz eines zyklischen Vektors auch noch viele andere zyklische Vektoren. Die dadurch erzeugten Mehrdeutigkeiten werden wir in späteren Abschnitten noch sorgfältig studieren. Jetzt diskutieren wir zunächst einmal beispielhaft den endlichdimensionalen Fall.

**Proposition 3.1.12.** *Ist  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$  eine unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  durch Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  endlicher Dimension, so gibt es eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathcal{H}$  und reelle Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  mit*

$$\rho(t)v_\nu = \exp(ix_\nu t)v_\nu \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 1 \leq \nu \leq n.$$

3.1.13. In anderen Worten operiert also bezüglich unserer Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  jedes  $t \in \mathbb{R}$  durch die diagonale Matrix

$${}_{\mathcal{B}}[\rho(t)]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(e^{ix_1 t}, \dots, e^{ix_n t})$$

*Beweis.* Nach ?? ist jede unitäre Matrix diagonalisierbar und hat nur Eigenwerte der Länge Eins. Insbesondere trifft das also auf alle  $\rho(t)$  zu. Nach ?? ist weiter jede Familie von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen simultan diagonalisierbar, wir finden also eine Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $\mathcal{H}$  aus simultanen Eigenvektoren aller  $\rho(t)$ . In Bezug auf diese Basis werden alle  $\rho(t)$  durch Diagonalmatrizen dargestellt. Die diagonalen Matrixeinträge sind dann stetige Gruppenhomomorphismen  $\rho_{\nu\nu} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  und damit nach 1.6.2 von der Gestalt  $\rho_{\nu\nu}(t) = \exp(ix_\nu t)$  für wohlbestimmte  $x_\nu \in \mathbb{R}$ . Da die Eigenräume der unitären Automorphismen  $\rho(t)$  jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$x_\nu \neq x_\mu \Rightarrow e_\nu \perp e_\mu$$

Indem wir jeweils im Erzeugnis der  $e_\nu$  zu festem  $x = x_\nu$  eine Orthonormalbasis wählen, erhalten wir also eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathcal{H}$  mit  $\rho(t)v_\nu = \exp(ix_\nu t)v_\nu$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

*Alternativer Beweis.* Mit den Methoden der Lie-Theorie geht das auch schneller: Nach VI.1.6.3 und VI.1.2.18 ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$  von der Gestalt  $\rho : t \mapsto \exp(tA)$  für genau ein schiefhermisches alias schiefadjungiertes  $A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ , und damit folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Spektralsatz ?? für selbstadjungierte Abbildungen, angewandt auf die selbstadjungierte Abbildung  $iA$ .  $\square$

*Beispiel 3.1.14 (Frequenzmaß im Fall endlicher Dimension).* Gegeben ein Vektor  $v = \sum \alpha_\nu v_\nu$  in unserer in der obigen Proposition 3.1.12 diskutierten endlichdimensionalen Darstellung erhalten wir ein mögliches Paar  $(\mu, \varphi)$  zu Satz 3.1.4, indem wir als Borelmaß  $\mu$  die Linearkombination von Diracmaßen

$$\mu = |\alpha_1|^2 \delta_{x_1} + \dots + |\alpha_n|^2 \delta_{x_n}$$

nehmen und als unitäre Einbettung  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  die Abbildung  $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu) \alpha_\nu v_\nu$ . Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen.

*Übung 3.1.15.* Besitzt jede endlichdimensionale unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  einen zyklischen Vektor? Man finde eine dreidimensionale unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  mit zyklischem Vektor.

*Beispiel 3.1.16 (Frequenzmaß in einem Fall unendlicher Dimension).* Wir betrachten auf  $\mathbb{R}$  das Lebesgue-Maß  $dt$  und die unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$  durch das Verschieben von Funktionen,  $\rho(t)f = \tau_t f$ , deren Stetigkeit in 1.5.7 gezeigt wurde. Eine entsprechend normalisierte Variante der Fouriertransformation induziert in diesem Fall einen unitären Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}; dx/2\pi) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}; dt)$$

Durch stetige Fortsetzung von 2.1.6.2 erkennt man, daß auch für quadratintegrierbare Funktionen  $f$  gilt  $\mathcal{F}(e^{itx} \cdot h) = \rho(t)(\mathcal{F}h)$ . Betrachten wir nun als  $\varphi$  die Verknüpfung dieser Fouriertransformation mit der unitären Einbettung

$$(f^\wedge \cdot) : L^2(\mathbb{R}; (|f^\wedge|^2/2\pi) dx) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}; dx/2\pi)$$

so ergibt sich zum Vektor  $g = (f^\wedge)^\wedge$ , also der Funktion  $g : x \mapsto f(-x)$ , ein mögliches Paar  $(\mu, \varphi)$  mit  $\mu = (|f^\wedge(x)|^2/2\pi) dx$  als Frequenzmaß von  $g$ . Daß es auch das einzig mögliche Paar ist, muß jedoch erst noch gezeigt werden.

3.1.17. Um die eben vorgestellten Sätze zu beweisen gilt es, die Theorie weiter zu entwickeln. Ist  $(\rho, \mathcal{H})$  eine unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$ , so nennen wir einen Vektor  $v \in \mathcal{H}$  **differenzierbar** genau dann, wenn der Grenzwert

$$Sv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t)v - v}{t}$$

existiert. Offensichtlich bilden die differenzierbaren Vektoren einen Teilraum  $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}$  und  $S = S_\rho : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}$  ist eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, von der ich bereits verraten will, daß sie der **infinitesimale Erzeuger** unserer Darstellung heißt, obwohl wir noch nicht wissen, in welcher Weise diese Abbildung

denn nun unsere Darstellung erzeugt. Man beachte jedoch, daß weder der Teilraum der differenzierbaren Vektoren abgeschlossen zu sein braucht noch unser infinitesimaler Erzeuger stetig.

**Definition 3.1.18.** Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **selbstadjungiert** genau dann, wenn sie ihre eigene Adjungierte ist. Ist in Formeln  $\mathcal{H}$  unser Hilbertraum und  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  unsere lineare Abbildung, so heißt in Formeln ausgedrückt  $A$  selbstadjungiert genau dann, wenn gilt

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$$

3.1.19. Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **schiefadjungiert** genau dann, wenn sie das Negative ihrer Adjungierten ist. Eine lineare Abbildung  $S$  ist demnach schiefadjungiert genau dann, wenn  $iS$  selbstadjungiert ist.

**Proposition 3.1.20.** *Ist  $(\rho, \mathcal{H})$  eine unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$ , in der sämtliche Vektoren differenzierbar sind, so ist ihr infinitesimaler Erzeuger  $S$  stetig und schiefadjungiert und für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit der Exponentialfunktion von Operatoren aus II.7.5.23 gilt*

$$\rho(t) = \exp(tS)$$

*Beweis.* Sicher gilt ganz allgemein für alle differenzierbaren Vektoren  $v, w$  unserer Darstellung die Formel

$$\langle Sv, w \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\rho(t)v - v}{t}, w \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle v, \frac{\rho(-t)w - w}{t} \right\rangle = -\langle v, Sw \rangle$$

Sind alle Vektoren von  $\mathcal{H}$  differenzierbar, in Formeln  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}$ , so ist demnach  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  eine schiefadjungierte lineare Abbildung. Die Stetigkeit von  $S$  folgt damit aus der im Anschluß bewiesenen Proposition 3.2.1, nach der schlicht alle selbstadjungierten und damit natürlich auch alle schiefadjungierten Selbstabbildungen eines Hilbertraums stetig sind. Damit folgt dann, daß für alle  $v \in \mathcal{H}$  die Abbildung  $t \mapsto \exp(-tS)\rho(t)v$  differenzierbar ist und die Ableitung Null hat, wie der Leser in der anschließenden Übung 3.1.22 selbst ausarbeiten mag. Nach II.7.2.11 ist diese Abbildung also konstant und die Proposition ist bewiesen.  $\square$

3.1.21. Um unitäre Darstellungen von Geradengruppen zu verstehen, gilt es also, schiefadjungierte oder äquivalent selbstadjungierte Operatoren zu studieren, und damit werden wir uns nun zunächst beschäftigen.

*Übung 3.1.22.* Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , eine stetige lineare Abbildung  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  und eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$  zeige man, daß auch die Abbildung  $t \mapsto \exp(tS)f(t)$  differenzierbar ist mit der Ableitung  $S \exp(tS)f(t) + \exp(tS)f'(t)$ . Hinweis: Man beachte dazu die Differenzierbarkeit von  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), t \mapsto tS$ , von  $\exp : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  bei Null nach IV.1.2.17 und von der Operation  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  nach IV.1.4.5.

*Übung 3.1.23.* Man zeige, daß für jedes Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}$  der translationsinvariante Teilraum  $\mathcal{H} = L^2(K; dx)^\wedge \subset L^2(\mathbb{R}; dt)$  aller Fouriertransformierten quadratintegrierbarer Funktionen mit Träger in  $K$  in Bezug auf die Darstellung von  $\mathbb{R}$  durch Translationen vollständig aus differenzierbaren Vektoren besteht und daß der infinitesimale Erzeuger  $S$  in diesem Fall schlicht das negative Ableiten  $-\partial$  ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Gleichung  $\exp(-t\partial)f = \tau_t f$  und der Taylorentwicklung?

*Übung 3.1.24.* Man zeige: Ein Vektor aus einer unitären Darstellung von  $\mathbb{R}$  ist differenzierbar im Sinne von 3.1.17 genau dann, wenn die Funktion  $x$  in Bezug auf sein Frequenzmaß quadratintegrierbar ist. Ist weiter  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  die kanonische Einbettung im Sinne von 3.1.10 zu solch einem Vektor  $v$ , so gilt

$$Sv = \varphi(ix)$$

## 3.2 Selbstadjungierte Operatoren

**Proposition 3.2.1 (Hellinger-Toeplitz).** *Jede lineare Abbildung von einem Hilbertraum in einen weiteren Hilbertraum, die eine Adjungierte besitzt, ist stetig.*

*Beweis.* Sei  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  unsere lineare Abbildung und  $B : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  ihre Adjungierte, es gelte also  $\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle$  für alle  $v \in \mathcal{H}$  und  $w \in \mathcal{H}'$ . Die schieflinaren Abbildungen

$$T_w : v \mapsto \langle Av, w \rangle$$

sind stetig, da sie auch als  $v \mapsto \langle v, Bw \rangle$  geschrieben werden können. Die Werte der stetigen linearen Abbildungen  $T_w$  mit  $\|w\| = 1$  sind auf jedem Vektor  $v \in \mathcal{H}$  beschränkt durch  $c(v) = \|A(v)\|$ . Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 3.2.4, das wir gleich im Anschluß diskutieren, gibt es also  $C$  mit  $\|T_w\| \leq C$  für alle  $w$  der Länge Eins alias mit

$$\langle Av, w \rangle \leq C\|v\|\|w\|$$

für alle  $v \in \mathcal{H}$  und  $w \in \mathcal{H}'$ . Das hinwiederum zeigt  $\|Av\|^2 \leq C\|v\|\|Av\|$  und damit  $\|Av\| \leq C\|v\|$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Als auf dem Einheitsball beschränkte lineare Abbildung ist damit  $A$  stetig nach II.6.9.13.  $\square$

**Definition 3.2.2.** Wir nennen eine Menge von stetigen Operatoren zwischen normierten Vektorräumen **gleichmäßig beschränkt** oder lateinisierend **uniform beschränkt** genau dann, wenn die Menge ihrer Operatornormen eine reelle obere Schranke besitzt.

3.2.3. Es wird hierbei nicht vorausgesetzt, daß unsere Operatoren alle von demselben Raum ausgehen oder in demselben Raum landen. Wir denken also in Formeln an eine Menge von stetigen Operatoren  $T_i : V_i \rightarrow W_i$ .

**Satz 3.2.4 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit).** *Eine Menge stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jeden Vektor des Ausgangsraums die Normen seiner Bilder unter unseren Operatoren eine beschränkte Menge bilden.*

3.2.5. Dieses Resultat wird auch als **Satz von Banach-Steinhaus** zitiert. Eine alternative äquivalente Formulierung lautet: Eine Menge stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jede Gerade in unserem Ausgangsraum die Menge der Restriktionen unserer Operatoren auf diese Gerade gleichmäßig beschränkt ist.

*Beweis.* Wir zeigen nur die nichttriviale Implikation. Sei  $V$  unser Ausgangsraum und  $\mathcal{T}$  unsere Menge von stetigen Operatoren. Es gilt also, die Implikation

$$\left( \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tv\| < \infty \quad \forall v \in V \right) \Rightarrow \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty$$

zu zeigen. Dazu betrachten wir in  $V$  die abgeschlossenen Teilmengen

$$V_n = \{v \in V \mid \|Tv\| \leq n \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Nach Voraussetzung ist  $V$  die Vereinigung aller  $V_n$  und nach dem Satz von Baire 3.2.7, den wir im Anschluß beweisen, besitzt folglich mindestens eines der  $V_n$  einen inneren Punkt. Natürlich gilt  $V_n = nV_1$ , also hat dann auch  $V_1$  einen inneren Punkt und wegen  $V_1 + V_1 \subset V_2$  ist damit der Ursprung ein innerer Punkt von  $V_2$ . Folglich gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $B(0; \varepsilon) \subset V_2$  und das zeigt  $\|v\| < \varepsilon \Rightarrow \|Tv\| \leq 2 \quad \forall T \in \mathcal{T}$  alias  $\|T\| \leq 2/\varepsilon \quad \forall T \in \mathcal{T}$ .  $\square$

**Definition 3.2.6.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Ein Element  $x \in A$  heißt ein **innerer Punkt von  $A$**  oder genauer ein “innerer Punkt von  $A$  in Bezug auf  $X$ ” genau dann, wenn  $A$  eine Umgebung von  $x$  in  $X$  ist.

**Satz 3.2.7 (Baire'scher Kategoriensatz).** *In einem vollständigen metrischen Raum hat jede abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ohne innere Punkte auch selbst keine inneren Punkte.*

3.2.8. Die Bezeichnung "Baire'scher Kategoriensatz" kommt daher, daß Baire eine Teilmenge "von erster Kategorie" nennt, wenn sie eine abzählbare Vereinigung ist von Mengen, deren Abschluß jeweils keinen inneren Punkt enthält. Mit dieser Terminologie kann man den Satz dann auch umformulieren zu der Aussage, daß "in jedem vollständigen metrischen Raum das Komplement einer Menge von erster Kategorie dicht liegt".

*Ergänzung 3.2.9.* Der Baire'sche Kategoriensatz gilt mit fast demselben Beweis auch für jeden lokal kompakten Hausdorff-Raum. Statt der Vollständigkeit benutzt man beim Beweis dann [II.6.10.8](#).

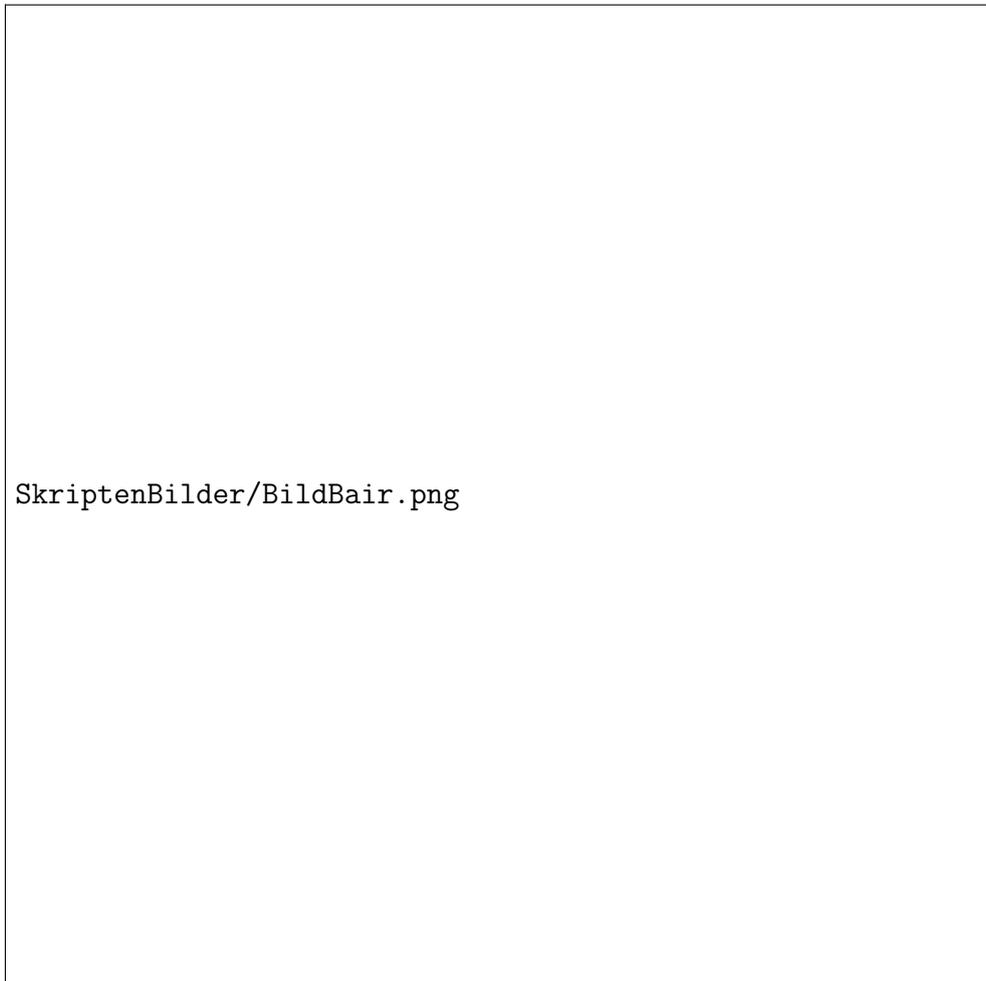
*Beweis.* Sei  $X$  unser vollständiger Raum und seien  $A_1, A_2, \dots$  abgeschlossene Teilmengen. Wir argumentieren durch Widerspruch. Unter einem Ball verstehen wir stets einen Ball mit positivem Radius. Hätte die Vereinigung  $A = \bigcup A_i$  einen inneren Punkt, so enthielte sie einen abgeschlossenen Ball  $B_0$ . Da  $A_1$  keinen inneren Punkt hat, kann der zugehörige offene Ball nicht in  $A_1$  enthalten sein, und es gibt folglich einen abgeschlossenen Ball  $B_1 \subset B_0$  mit  $B_1 \cap A_1 = \emptyset$ . Wir dürfen dabei sogar annehmen, daß der Radius von  $B_1$  kleiner als 1 ist. Da auch  $A_2$  keinen inneren Punkt hat, gibt es weiter einen abgeschlossenen Ball  $B_2 \subset B_1$  mit  $B_2 \cap A_2 = \emptyset$  und wir dürfen sogar annehmen, daß der Radius von  $B_2$  kleiner als  $1/2$  ist. Indem wir immer so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge von abgeschlossenen Bällen  $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$ , deren Radien gegen Null streben und deren Schnitt die Menge  $A$  nicht trifft. Wegen  $A \supset B_0$  muß der Schnitt dann leer sein. Die Zentren unserer Bälle bilden jedoch eine Cauchy-Folge, und deren Grenzwert liegt notwendig im Schnitt aller unserer Bälle. Dieser Widerspruch beendet den Beweis.  $\square$

*Übung 3.2.10.* In einem vollständigen metrischen Raum ist der Schnitt einer abzählbaren Familie offener dichter Teilmengen zumindest noch dicht.

*Ergänzung 3.2.11.* Hier noch eine witzige wenn auch unwesentliche Anwendung. Es gibt ja eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die an allen irrationalen Stellen stetig ist und an allen rationalen Stellen unstetig, zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q}; \\ 1/q & x = p/q \text{ unkürzbarer Bruch mit } q \geq 1. \end{cases}$$

Es gibt jedoch keine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die an allen rationalen Stellen stetig ist und an allen irrationalen Stellen unstetig: Für jede Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Die Bild soll illustrieren, wie mit der Methode aus dem Beweis des Satzes von Baire [3.2.7](#) die Annahme, die Papierebene sei eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen ohne innere Punkte, zum Widerspruch geführt werden kann. Die abgeschlossenen Bälle  $B_i$  sollen hier die Kreisscheiben sein, von denen ich der besseren Übersichtlichkeit halber nur die Ränder eingezeichnet habe.

ist nämlich

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt eine Umgebung } V \text{ von } x \text{ mit} \\ |f(y) - f(z)| \leq 1/n \quad \forall y, z \in V \end{array} \right\}$$

offen in  $\mathbb{R}$ , und  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  ist genau die Menge der Stetigkeitsstellen von  $f$ . Also sind die Komplemente  $A_n = \mathbb{R} \setminus U_n$  abgeschlossen und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  ist die Menge der Unstetigkeitsstellen. Wäre diese Vereinigung  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so wäre die Vereinigung  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$  ganz  $\mathbb{R}$  und nach dem Baire'schen Kategoriensatz 3.2.7 müßte dann ein  $A_n$  oder ein  $\{q\}$  einen inneren Punkt haben, im Widerspruch zu  $A_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Definition 3.2.12.** Wir sagen, ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum sei **kompakt getragen** genau dann, wenn es in unserem Raum ein Kompaktum gibt, dessen Komplement eine Nullmenge ist.

3.2.13. Ist  $\mu$  ein kompakt getragenes Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $T$  die Multiplikation  $(x \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$  mit der Identität auf  $\mathbb{R}$ , so ist  $T$  selbstadjungiert.

**Satz 3.2.14 (Lokale Struktur selbstadjungierter Operatoren).** Ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein selbstadjungierter Operator und  $v \in \mathcal{H}$  ein Vektor, so gibt es genau ein Paar  $(\mu, \varphi) = (\mu_v, \varphi_v)$  bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  und einer unitären Einbettung  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  mit  $\varphi(1) = v$  und  $\varphi(xf) = T(\varphi(f)) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ .

3.2.15. Der Beweis wird im Anschluß an 3.4.14 gegeben. Wir stellen die Aussage dieses Satzes graphisch dar im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ (x \cdot) \downarrow & & \downarrow T \\ L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ 1 & \mapsto & v \end{array}$$

Hier meint  $1 \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  die konstante Funktion Eins und  $(x \cdot)$  das Multiplizieren mit der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$ . Ich nenne  $\varphi_v$  im folgenden die **kanonische Einbettung zu  $v$**  und  $\mu_v$  das **Spektralmaß von  $v$** .

3.2.16. In der Quantenmechanik modelliert man ein "physikalisches System" als einen Hilbertraum, einen "Zustand" des Systems als einen von Null verschiedenen Vektor und die Messung eines reellen Parameters als einen möglicherweise unbeschränkten selbstadjungierten Operator mit der Maßgabe, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand gerade das auf Gesamtmasse Eins normierte Spektralmaß unseres

Zustands sein soll. Den Fall unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren besprechen wir allerdings erst in 3.11.5. Messungen mit Werten in allgemeineren Meßräumen werden modelliert als Teilungen  $\Phi$  der Identität im Sinne von 3.6.3 und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand  $v$  ist dann das auf Gesamtmasse Eins normierte Maß  $\langle v, \Phi v \rangle$ .

*Beispiel 3.2.17 (Spektralmaß im endlichdimensionalen Fall).* Gegeben ein endlichdimensionaler Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit einem selbstadjungierten Operator  $T$  und ein Vektor  $v \in \mathcal{H}$  können wir sein Spektralmaß  $\mu = \mu_v$  und die kanonische Einbettung  $\varphi = \varphi_v$  nach 3.2.14 wie folgt erhalten: Wir schreiben  $v = v_1 + \dots + v_n$  als Summe von paarweise orthogonalen Eigenvektoren zu Eigenwerten  $x_1, \dots, x_n$  und nehmen als Spektralmaß von  $v$  das Maß

$$\mu = \|v_1\|^2 \delta_{x_1} + \dots + \|v_n\|^2 \delta_{x_n}$$

und als Einbettung  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  die Abbildung  $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu) v_\nu$ . Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen. Hinweis: Nach 1.3.12 kann unser Raum von quadratintegrierbaren Funktionen nur endlichdimensional sein, wenn das Maß  $\mu$  eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist.

### 3.3 Spektren in Banach-Algebren

**Definition 3.3.1.** Eine **Banach-Algebra** ist ein Banachraum  $(A, \|\cdot\|)$  mit einer bilinearen Verknüpfung  $A \times A \rightarrow A$  derart, daß  $A$  mit dieser Verknüpfung als Multiplikation zu einem Ring im Sinne von ?? wird und daß gilt

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad \forall a, b \in A$$

In anderen Worten fordern wir also, daß unsere Verknüpfung assoziativ ist und daß dafür ein neutrales Element  $1 = 1_A$  existiert. Ein Element  $a$  heißt invertierbar genau dann, wenn es ein  $b \in A$  gibt mit  $ab = ba = 1$ . Wird nicht explizit das Gegenteil gesagt, nehmen wir  $\mathbb{C}$  als Grundkörper an. Meinen wir ausnahmsweise den Grundkörper  $\mathbb{R}$ , so sprechen wir von einer **reellen Banach-Algebra**. Wir verwenden in Formeln oft die Abkürzung  $\lambda 1_A = \lambda$  für  $\lambda$  aus dem jeweiligen Grundkörper.

3.3.2. Gegeben eine von Null verschiedene Banachalgebra  $A \neq 0$  gilt stets  $\|1_A\| \geq 1$ , denn in diesem Fall haben wir  $\|1_A\| > 0$  und  $\|1_A\| \leq \|1_A\| \|1_A\|$ . In der Literatur wird oft für Banachalgebren zusätzlich zu den hier gegebenen Axiomen auch noch  $\|1_A\| = 1$  gefordert, aber das gefällt mir nicht, da es den Fall  $A = 0$  ausschließt. Die zusätzliche Bedingung  $\|1_A\| = 1$  hat allerdings

hinwiederum den Vorteil, daß es mit ihr einen expliziten Zusammenhang zwischen dem “Spektralradius” eines Elements  $a \in A$  im Sinne von 3.3.16 und den Normen seiner Potenzen gibt, vergleiche ??.

*Beispiel 3.3.3.* Alle stetigen linearen Selbstabbildungen eines vorgegebenen Banachraums bilden mit der Operatornorm eine Banachalgebra, vergleiche II.7.5.9 und II.6.9.25.

*Ergänzung 3.3.4.* Man kann auf jeder Banachalgebra eine neue Norm konstruieren, indem man den durch Multiplikation gegebenen Ringhomomorphismus  $A \hookrightarrow \mathcal{B}(A)$ ,  $a \mapsto (a \cdot)$  betrachtet und die Einschränkung der Operatornorm nimmt. Auch mit dieser Norm ist  $A$  eine Banachalgebra, das Bild unserer Einbettung kann nämlich beschrieben werden als die Menge aller stetigen Endomorphismen von  $A$ , die mit allen Rechtsmultiplikationen  $(\cdot b)$  kommutieren, und ist deshalb abgeschlossen. Unsere so neu definierte Norm  $\|a\|'$  ist dann äquivalent zu alten Norm, in der Tat gilt offensichtlich  $\|a\|' \leq \|a\| \leq \|a\|' \|1_A\|$ , und im Fall  $A \neq 0$  gilt für unsere neue Norm auch offensichtlich  $\|1_A\|' = 1$ . Wenn wir bereits zu Beginn  $\|1_A\| = 1$  haben, so erhalten wir nichts Neues, es gilt offensichtlich einfach  $\|a\|' = \|a\|$ . Ich nenne diese Norm die **kanonische Norm** auf unserer Banachalgebra.

**Definition 3.3.5.** Das **Spektrum** eines Elements  $x$  einer Banachalgebra  $A$  ist die Menge

$$\sigma(x) = \sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - x) \text{ ist nicht invertierbar in } A\}$$

Reden wir vom Spektrum eines Operators auf einem Banach-Raum alias einer stetigen linearen Abbildung  $T : E \rightarrow E$  von besagtem Banach-Raum in sich selbst, so meinen wir sein Spektrum in Bezug auf die Banachalgebra aller stetigen linearen Selbstabbildungen unseres Banach-Raums als da heißt die Menge aller  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die  $(T - \lambda \text{id}) : E \rightarrow E$  nicht stetig invertierbar ist.

*Beispiel 3.3.6.* Jede Norm auf  $\mathbb{C}^n$  liefert eine Operatornorm auf dem Matrizenring  $M(n \times n; \mathbb{C})$ , der diesen Ring zu einer Banachalgebra macht. Das Spektrum einer Matrix ist in diesem Fall genau die Menge ihrer Eigenwerte.

*Übung 3.3.7.* Versehen wir  $\mathbb{N}$  mit dem Zählmaß und betrachten den Operator  $T$  auf  $L^2(\mathbb{N})$  mit  $(Tf)(n) = f(n+1)$ , so gehört die Null zum Spektrum von  $T$ , ist aber kein Eigenwert von  $T$ . Genauer zeige man, daß das Spektrum von  $T$  genau die abgeschlossene Einheitskreisscheibe ist. Andererseits zeige man, etwa mit Fouriertheorie, daß das Spektrum des in derselben Weise auf  $L^2(\mathbb{Z})$  erklärten Operators der Einheitskreis ist. Ganz anders als im endlichdimensionalen Fall kann das Spektrum eines Operator also größer werden, wenn wir ihn auf einen unter unserem Operator stabilen Teilraum einschränken.

*Ergänzung 3.3.8.* Das Spektrum des Schrödinger-Operators, der ein quantenmechanisches Elektron im elektrischen Potential eines Protons beschreibt, besitzt viele isolierte Punkte. Sie entsprechen genau den Frequenzen, in die das Licht eines angeregten Wasserstoffgases beim Durchgang durch ein Prisma zerfällt. Unter diesem Blickwinkel ist die von Hilbert gewählte Bezeichnung als "Spektrum" besonders passend.

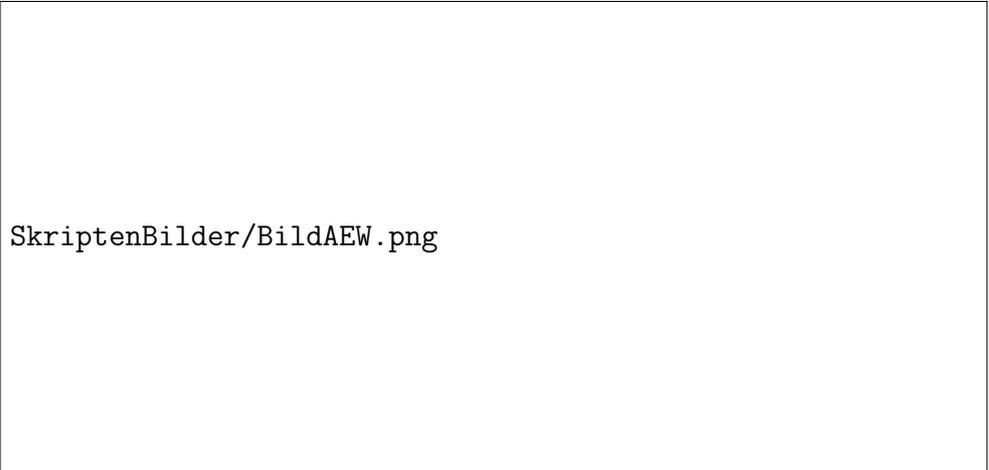
**Proposition 3.3.9 (Spektrum eines Multiplikationsoperators).** *Gegeben ein Maßraum  $(X, \mu)$  und darauf eine  $L^\infty$ -Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  im Sinne von 1.3.2 und  $p \in [0, \infty]$  ist der durch Multiplikation mit unserer Funktion erklärte Operator*

$$(f \cdot) : L^p(X; \mu) \rightarrow L^p(X; \mu)$$

*stetig. Ist unser Maßraum  $\sigma$ -endlich, so ist weiter die Operatornorm unseres Multiplikationsoperators das essentielle Supremum  $\|f\|_\infty$  von  $f$  aus 1.3.5 und sein Spektrum ist die Menge*

$$\sigma(f \cdot) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(f^{-1}(U)) > 0 \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } \lambda\}$$

*Beweis.* Hat  $f$  einen Repräsentanten mit  $|f(x)| \leq C$  für alle  $x \in X$ , so folgt  $|f(x)g(x)| \leq C|g(x)|$  für alle  $x \in X$ . Diese Ungleichung bleibt erhalten beim Potenzieren mit  $p$ , Integrieren über  $X$  und Ziehen der  $p$ -ten Wurzel. Das zeigt  $\|(f \cdot)\| \leq \|f\|_\infty$  für  $p < \infty$ . Ist andererseits  $0 < a < \|f\|_\infty$ , so gibt es  $A \subset X$  meßbar von positivem Maß mit  $|f(x)| \geq a \forall x \in A$ . Ist  $X$  sogar  $\sigma$ -endlich, so können wir zusätzlich sogar  $\mu(A)$  endlich annehmen. Dann liegt die charakteristische Funktion  $[A]$  in  $L^p(X; \mu)$  und ist dort nicht Null, und wir erkennen unschwer, daß gilt  $\|f \cdot [A]\| \geq a\|[A]\|$ . Es folgt umgekehrt  $\|(f \cdot)\| \geq a$  und damit  $\|(f \cdot)\| \geq \|f\|_\infty$ . Damit ist die erste Aussage gezeigt im Fall  $p < \infty$ . Der Fall  $p = \infty$  bleibe dem Leser überlassen. Für die Beschreibung des Spektrums reicht es, indem wir  $f$  durch  $f - \lambda$  ersetzen, den Fall  $\lambda = 0$  zu betrachten. Gibt es für  $\lambda = 0$  eine Umgebung  $U$  mit  $\mu(f^{-1}(U)) = 0$ , so können wir für unsere fast überall definierte Funktion  $f$  auch einen Repräsentanten  $f$  wählen, der keine Werte in  $U$  annimmt, und dann ist  $f^{-1}$  beschränkt und der zugehörige Multiplikationsoperator stetig und invers zu  $(f \cdot)$ . Also gehört in diesem Fall  $\lambda = 0$  nicht zum Spektrum. Gibt es dahingegen für  $\lambda = 0$  keine Umgebung  $U$  mit  $\mu(f^{-1}(U)) = 0$ , so finden wir in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung eine Teilmenge  $A_\varepsilon$  endlichen positiven Maßes, und deren charakteristische Funktion  $[A_\varepsilon]$  ist ein von Null verschiedener Vektor in  $L^p(X; \mu)$  mit der Eigenschaft  $\|f[A_\varepsilon]\|_p \leq \varepsilon\|[A_\varepsilon]\|_p$ . Da also unser Multiplikationsoperator von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verkürzt, kann er unmöglich eine stetige Umkehrung besitzen: Selbst wenn er bijektiv wäre,



SkriptenBilder/BildAEW.png

Eine beschränkte stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und eine meßbare Funktion alias ein Vektor  $g \in L^p(\mathbb{R}; \lambda)$ , der vom Multiplikationsoperator  $(f \cdot)$  sehr viel kürzer gemacht wird. Indem wir eine geeignete Folge derartiger Vektoren  $g_n$  nehmen, die alle dieselbe Norm haben aber immer kleineren Träger, erkennen wir, daß der Multiplikationsoperator  $(f \cdot)$  nicht stetig invertierbar sein kann, als da heißt, daß sein Spektrum den Nullpunkt enthält.

müßte seine Umkehrabbildung von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verlängern und wäre mithin nie und nimmer stetig.  $\square$

*Übung 3.3.10.* Gegeben eine beschränkte stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zeige man, daß das Spektrum des durch Multiplikation mit  $f$  erklärten Operators auf  $L^p(\mathbb{R}; dx)$  genau der Abschluß des Bildes  $\overline{f(\mathbb{R})}$  ist. Was ist die Operatornorm dieses Operators? Hinweis: 3.3.9.

*Übung 3.3.11.* Man zeige, daß für  $a \in \mathbb{R}$  der durch  $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$  gegebene Verschiebungsoperator  $\tau_a : L^2(\mathbb{R}; dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; dx)$  als Spektrum die Einheitskreislinie hat im Fall  $a \neq 0$  und die einpunktige Menge  $\{1\}$  im Fall  $a = 0$ . Hinweis: 2.1.13 und 3.3.10.

*Übung 3.3.12.* Man gebe einen Operator mit Spektrum  $\{0\} \cup [1, 2]$  an.

**Lemma 3.3.13.** *Gegeben eine Banachalgebra  $A$  ist für jedes Element  $x \in A$  einer Norm  $\|x\| < 1$  die Differenz  $(1 - x)$  invertierbar in  $A$ .*

*Beweis.* Die absolut konvergente Reihe  $1 + x + x^2 + \dots$  liefert nach II.7.5.16 ein Inverses.  $\square$

**Lemma 3.3.14.** *Die invertierbaren Elemente einer Banachalgebra bilden eine offene Teilmenge  $A^\times \subset A$ .*

*Beweis.* Nach 3.3.13 besitzt das Einselement eine Umgebung aus invertierbaren Elementen. Andererseits ist die Multiplikation mit jeder Einheit ein Homöomorphismus von  $A$  auf sich selbst, der Einheiten zu Einheiten macht. Das Lemma folgt.  $\square$

**Lemma 3.3.15.** *Das Spektrum eines Elements einer Banachalgebra ist stets eine kompakte Teilmenge der komplexen Zahlenebene und ist enthalten in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit der Norm unseres Elements als Radius.*

*Beweis.* Das Spektrum ist abgeschlossen, da sein Komplement offen ist nach 3.3.14. Es ist beschränkt, da für  $|\lambda| > \|x\|$  die Differenz  $\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$  stets invertierbar ist nach 3.3.13, und dies Argument liefert auch gleichzeitig die behauptete Schranke.  $\square$

3.3.16. Der **Spektralradius** eines Elements  $x$  einer Banachalgebra  $A$  ist definiert als

$$\rho(x) = \rho_A(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(x)\}$$

Ist das Spektrum leer, so erhalten wir folglich  $-\infty$  als Spektralradius. Man kann zeigen, daß dieser Fall nur bei der Banachalgebra  $A = 0$  auftritt, aber der Beweis dieser Tatsache liegt noch außerhalb unserer Reichweite. Das vorhergehende Lemma 3.3.15 liefert die Abschätzung  $\rho(x) \leq \|x\|$ . Das Beispiel einer von Null verschiedenen nilpotenten Matrix zeigt, daß hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

**Lemma 3.3.17 (Polynomialer spektraler Abbildungssatz).** *Gegeben ein Element  $x$  einer Banachalgebra  $A$  und ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  ist das Spektrum des Bildes von  $x$  unter  $P$  das Bild des Spektrums von  $x$  unter  $P$ . In Formeln gilt also*

$$\sigma_A(P(x)) = P(\sigma_A(x))$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $P$  nicht das Nullpolynom. Gegeben  $\lambda \in \mathbb{C}$  schreiben wir  $P(X) - \lambda$  als Produkt von Linearfaktoren  $P(X) - \lambda = \gamma(X - \mu_1) \dots (X - \mu_r)$  und dann sind die  $\mu_i$  genau die Stellen, an denen unser Polynom den Wert  $\lambda$  annimmt, in Formeln  $P^{-1}(\lambda) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ . Setzen wir nun  $x$  ein, so folgt  $P(x) - \lambda = \gamma(x - \mu_1) \dots (x - \mu_r)$  und die linke Seite ist nicht invertierbar, also  $\lambda \in \sigma_A(P(x))$ , genau dann, wenn einer der Faktoren auf der rechten Seite nicht invertierbar ist, wenn also  $\mu \in \sigma_A(x)$  existiert mit  $P(\mu) = \lambda$ .  $\square$

*Übung 3.3.18.* Man zeige: Ist  $x$  ein invertierbares Element einer Banachalgebra, so gilt  $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(x)\}$ . Hinweis:  $(x - \lambda)(\lambda x)^{-1} = (\lambda^{-1} - x^{-1})$ .

*Übung 3.3.19.* Für jeden unitären Automorphismus  $x$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  ist das Spektrum von  $x$  als Element der Banachalgebra  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  enthalten in der Kreislinie  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Hinweis: Aus 3.3.13 folgt leicht, daß besagtes Spektrum in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe enthalten sein muß. Dann beachte man, daß dasselbe für das Spektrum von  $x^{-1}$  gelten muß und wende 3.3.18 an.

### 3.4 Spektren selbstadjungierter Operatoren

**Proposition 3.4.1 (Spektralradius und Operatornorm).** *Für jeden selbstadjungierten Operator  $T$  auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum stimmen Spektralradius und Operatornorm überein, in Formeln*

$$\rho(T) = \|T\|$$

3.4.2. Unsere Formel zeigt zumindest für jeden selbstadjungierten Operator auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum, daß sein Spektrum nicht leer sein kann. Später werden wir unsere Formel allgemeiner für “normale” Operatoren zeigen.

*Beweis.* Sei  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  unser Operator. Gegeben ein Vektor  $v$  der Länge Eins gilt  $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^2v \rangle \leq \|v\| \|T^2v\| = \|T^2v\|$ . Das zeigt  $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ . Die andere Ungleichung gilt eh, womit wir für jeden selbstadjungierten Operator  $T$  folgern

$$\|T\|^2 = \|T^2\|$$

Da unser Raum  $\mathcal{H}$  nicht Null ist, finden wir in  $\mathcal{H}$  eine Folge von Einheitsvektoren  $v_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^2 v_n\| = \|T^2\|$ . Wegen  $\|T^2 v_n\| \leq \|T\| \|T v_n\| \leq \|T\|^2 = \|T^2\|$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T v_n\| = \|T\|$  zumindest falls  $\|T\| \neq 0$ , und im Fall  $\|T\| = 0$  ist das eh klar. Wir setzen nun  $c = \|T\|$  und behaupten, daß  $c^2$  zum Spektrum von  $T^2$  gehört. In der Tat gilt ja

$$\|(T^2 - c^2)v_n\|^2 = \langle v_n, (T^4 - 2c^2 T^2 + c^4)v_n \rangle = \|T^2 v_n\|^2 - 2c^2 \|T v_n\|^2 + c^4$$

und das strebt für  $n \rightarrow \infty$  offensichtlich gegen Null. Damit haben wir per definitionem  $c^2 \in \sigma(T^2)$  und es folgt  $\|T^2\| \leq \rho(T^2)$  und, da wir die andere Abschätzung nach 3.3.16 bereits kennen,  $\|T^2\| = \rho(T^2)$ . Der spektrale Abbildungssatz 3.3.17 zeigt jedoch  $\rho(T^2) = \rho(T)^2$  und wegen  $\|T^2\| = \|T\|^2$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 3.4.3 (Spektraleigenschaften selbstadjungierter Operatoren).** *Jeder selbstadjungierte Operator  $T$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  hat ein rein reelles Spektrum, in Formeln  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Ist  $T$  selbstadjungiert, so gilt  $\langle v, Tv \rangle = \langle Tv, v \rangle = \overline{\langle v, Tv \rangle}$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ , mithin ist  $\langle v, Tv \rangle$  stets reell. Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  erhalten wir so wegen der offensichtlichen Abschätzung  $|\operatorname{Im} z| \leq |z| \forall z \in \mathbb{C}$  von der Mitte ausgehend die Ungleichungen

$$|\operatorname{Im} \lambda| \|v\|^2 \leq |\langle (T - \lambda)v, v \rangle| \leq \|(T - \lambda)v\| \|v\|$$

und damit  $|\operatorname{Im} \lambda| \|v\| \leq \|(T - \lambda)v\|$ . Unter der Annahme  $\lambda \notin \mathbb{R}$  ist demnach die Abbildung  $(T - \lambda)$  injektiv und nach 3.4.7 hat sie sogar abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig. Andererseits ist mit demselben Argument auch  $(T - \lambda)^* = (T - \bar{\lambda})$  injektiv und damit hat  $(T - \lambda)$  nach 1.7.9 dichtes Bild. Zusammen folgt, daß  $(T - \lambda)$  invertierbar sein muß, so daß  $\lambda$  nicht zum Spektrum von  $T$  gehören kann.  $\square$

*Übung 3.4.4.* Eine stetige Abbildung von einem vollständigen metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum, die keinen Abstand verkleinert, ist injektiv mit abgeschlossenem Bild, und die auf dem Bild definierte Umkehrabbildung ist gleichmäßig stetig.

*Übung 3.4.5.* Ein beschränkter selbstadjungierter Operator  $T$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  heißt **positiv semidefinit** genau dann, wenn gilt

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

Man zeige, daß das Spektrum eines positiv semidefiniten Operators stets in der nichtnegativen reellen Zahlengeraden enthalten ist. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von 3.4.3.

**Lemma 3.4.6.** *Eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum, die keinen Vektor verkürzt, hat abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig.*

3.4.7. Dieselbe Aussage folgt offensichtlich auch, wenn es eine positive reelle Zahl gibt derart, daß unsere Abbildung jeden Vektor höchstens um diesen Faktor verkürzt.

*Beweis.* Ist allgemeiner  $f : V \rightarrow W$  eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum und existiert eine Konstante  $c > 0$  mit  $\|f(v)\| \geq c\|v\| \quad \forall v \in V$ , so ist das Bild von  $f$  abgeschlossen, denn jede konvergente Folge  $f(v_0), f(v_1), \dots$  im Bild  $f(V)$  ist Cauchy, also ist auch  $v_0, v_1, \dots$  Cauchy in  $V$  und konvergiert gegen ein  $v \in V$ , und dann muß  $f(v)$  der Grenzwert der  $f(v_i)$  sein, der damit auch in  $f(V)$  liegt.  $\square$

*Übung 3.4.8.* Genau dann besteht das Spektrum eines selbstadjungierten Operators aus einem einzigen Punkt  $\lambda$ , wenn unser Operator die Multiplikation mit dem Skalar  $\lambda$  auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum ist. Hinweis: 3.4.1.

**Lemma 3.4.9 (Anwenden stetiger Funktionen auf Operatoren).** *Gegeben ein selbstadjungierter Operator  $T$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  gibt es genau einen stetigen  $\mathbb{C}$ -linearen Ringhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\sigma(T)) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto f(T) \end{aligned}$$

*vom Ring aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Spektrum von  $T$  in den Ring aller beschränkten Operatoren unseres Hilbertraums, der die Einbettung  $\sigma(T) \hookrightarrow \mathbb{R}$  auf den Operator  $T$  wirft, und dieser Ringhomomorphismus wirft konjugierte Funktionen auf adjungierte Operatoren, in Formeln  $\bar{f}(T) = f(T)^*$ .*

3.4.10. Die Stetigkeit ist hier gemeint in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf  $\mathcal{C}(\sigma(T))$  und die Operatornorm auf  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Schreiben wir im folgenden  $f(T)$  für eine stetige auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion, so meinen wir, daß der Operator  $T$  im Sinne des vorhergehenden Lemmas in ihre Einschränkung  $f|_{\sigma(T)}$  eingesetzt werden soll. Ich habe dieser Aussage nur den Status eines Lemmas gegeben, da sie sich als eine direkte Konsequenz aus dem Spektralsatz 3.6.11 ergeben wird und unter diesem Blickwinkel nur ein Schritt zum Beweis dieses zentralen Resultats ist.

*Beweis.* Der Teilring  $\mathbb{C}[t] \subset \mathcal{C}(\sigma(T))$  aller Einschränkungen von Polynomfunktionen liegt nach Weierstraß III.3.2.13 dicht im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Gegeben ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  haben wir nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz  $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$ , und hat  $P$  reelle Koeffizienten, so ist auch  $P(T)$  selbstadjungiert und es folgt  $\|P(T)\| = \|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$  wegen der Gleichheit von Norm und Spektralradius bei selbstadjungierten Operatoren 3.4.1 auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum. Ist  $P$  komplex, so können wir immer noch  $P = A + iB$  schreiben mit reellen Polynomen  $A, B$  und folgern

$$\|P(T)\| \leq \|A(T)\| + \|B(T)\| \leq \|A|_{\sigma(T)}\|_\infty + \|B|_{\sigma(T)}\|_\infty \leq 2\|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$$

Der offensichtliche Ringhomomorphismus  $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $P \mapsto P(T)$  faktorisiert also über einen stetigen Ringhomomorphismus  $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , und dessen eindeutig bestimmte stetige Ausdehnung auf  $\mathcal{C}(\sigma(T))$  nach 1.4.17 ist die gesuchte Abbildung und ist wieder ein Ringhomomorphismus aufgrund der Stetigkeit der Multiplikationen. Ist  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein Polynom, so ist  $P(T)$  offensichtlich adjungiert zu  $\bar{P}(T)$ . Im allgemeinen ist  $f(T)$  Grenzwert in Bezug auf die Operatornorm gewisser  $P(T)$  und die Behauptung  $\bar{f}(T) = f(T)^*$  folgt ohne weitere Schwierigkeiten.  $\square$

*Übung 3.4.11.* Gegeben ein Maßraum  $(X, \mu)$  und eine beschränkte meßbare Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist das Multiplizieren mit  $g$  ein selbstadjungierter Operator  $T$  auf  $L^2(X; \mu)$ . Gegeben  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist  $f(T)$  ist dann das Multiplizieren mit der Funktion  $f \circ g$ .

*Übung 3.4.12.* Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \end{array}$$

mit  $T, T'$  selbstadjungiert kommutiert für jede stetige Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  auch das entsprechende Diagramm mit  $f(T), f(T')$  statt  $T, T'$ , in Formeln  $AT = T'A \Rightarrow Af(T) = f(T')A$ .

*Übung 3.4.13.* Wird ein selbstadjungierter Operator  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum in einer geeigneten Basis gegeben durch eine Diagonalmatrix  $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ , so wird  $f(T)$  in derselben Basis gegeben durch die Diagonalmatrix  $\text{diag}(f(x_1), \dots, f(x_n))$ .

**Proposition 3.4.14 (Spektraler Abbildungssatz).** *Ist  $T$  selbstadjungiert und  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so hat  $f(T)$  das Spektrum*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

*Beweis.* Gehört  $\lambda \in \mathbb{C}$  nicht zum Bild von  $f$ , so ist  $f - \lambda$  invertierbar in  $\mathcal{C}(\sigma(T))$  und damit  $f(T) - \lambda \text{id}$  invertierbar in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  und wir haben  $\lambda \notin \sigma(f(T))$ . Das zeigt von der behaupteten Gleichheit die Inklusion  $\subset$ . Gehört  $\lambda \in \mathbb{C}$  zum Bild von  $f$ , sagen wir  $\lambda = f(x)$  für  $x \in \sigma(T)$ , so ist  $f$  der gleichmäßige Grenzwert einer Folge  $P_0, P_1, \dots$  von Polynomen mit  $P_n(x) = \lambda$ . Also ist  $P_n(T) - \lambda \text{id}$  nicht invertierbar für alle  $n$  und damit auch  $f(T) - \lambda \text{id}$  nicht invertierbar nach 3.3.14. Das zeigt die andere Inklusion  $\supset$ .  $\square$

*Beweis von 3.2.14.* Gegeben ein Vektor  $v \in \mathcal{H}$  betrachten wir die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \langle v, f(T)v \rangle \end{array}$$

Um den Riesz'schen Darstellungssatz 3.5.2 anwenden zu können, gilt es zu zeigen, daß unter dieser Abbildung nichtnegative reelle Funktionen nichtnegative reelle Zahlen liefern. Das ist aber klar, da jede nichtnegative reelle Funktion ein Quadrat ist, so daß wir haben  $\langle v, f(T)v \rangle = \|\sqrt{f}(T)v\|^2$ . Es gibt nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 3.5.2 also ein und sogar genau ein Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  mit

$$\int f(t) \mu\langle t \rangle = \langle v, f(T)v \rangle$$

für alle stetigen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit kompaktem Träger. Für dieses Maß  $\mu$  hat die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{H} \\ f & \mapsto & f(T)v \end{array}$$

dann die Eigenschaft  $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2 \mu$ . Damit faktorisiert sie erstens über das Bild der offensichtlichen Abbildung  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$  und läßt sich nach 1.4.12 zweitens von diesem Bild zu einer unitären Einbettung  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  erweitern und wir haben ein mögliches Paar  $(\mu, \varphi)$  gefunden. Um zu sehen, daß es auch das einzig mögliche Paar ist, müssen wir nur im Beweis einige Schritte rückwärts gehen: Gegeben ein Paar  $(\mu, \varphi)$  haben wir ja für jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  offensichtlich  $\varphi(P) = P(T)v$  und folglich  $\int P \mu = \langle v, P(T)v \rangle$ . Ein kompakt getragenes Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  wird jedoch nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 3.5.2 und dem Approximationssatz von Weierstraß III.3.2.9 durch die Kenntnis der Integrale aller Polynome nach diesem Maß bereits eindeutig festgelegt.  $\square$

*Übung 3.4.15.* Gegeben ein selbstadjungierter Operator  $T$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  verschwindet das Spektralmaß  $\mu$  jedes Vektors auf dem Komplement des Spektrums unseres Operators, in Formeln  $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(T)) = 0$ . In anderen Worten paßt also unsere kanonische Einbettung in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}(\sigma(T)) & \rightarrow & \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{L}^2(\sigma(T); \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

bei dem die obere Horizontale durch  $f \mapsto f(T)v$  gegeben wird.

3.4.16. Wir können nun den Satz über die lokale Struktur unitärer Darstellungen der reellen Zahlengeraden 3.1.4 zeigen im Fall, daß alle Vektoren unserer Darstellung  $(\mathcal{H}, \rho)$  differenzierbar sind. In der Tat ist dann der infinitesimale Erzeuger  $S$  unserer Darstellung schiefadjungiert und folglich  $iS$  selbstadjungiert. Dann aber finden wir nach 3.2.14 genau ein Paar  $(\mu, \varphi)$  bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  und einer unitären Einbettung  $\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  mit  $\varphi(1) = v$ , die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \\ (x \cdot) \downarrow & & \downarrow iS \\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Damit kommutiert das Diagramm auch, wenn wir beide Vertikalen mit  $-it$  multiplizieren und darauf  $\exp$  anwenden, und das zeigt die in 3.1.4 behauptete Existenz von  $(\mu, \varphi)$  in diesem Fall. Der Nachweis der Eindeutigkeit im vorliegenden Fall, also immer noch unter der Annahme, daß alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar sind, mag dem Leser überlassen bleiben.

**Definition 3.4.17.** Gegeben ein positiv semidefiniter selbstadjungierter Operator  $T$  auf einem Hilbertraum erklären wir

$$\sqrt{T}$$

als den positiv semidefiniten Operator, der daraus durch Anwenden der Funktion  $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$  entsteht. Das ist erlaubt, da nach 3.4.5 für das Spektrum gilt  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Definition 3.4.18.** Gegeben ein beschränkter Operator  $A$  auf einem Hilbertraum ist  $A^*A$  selbstadjungiert und positiv semidefinit und wir setzen

$$|A| := \sqrt{A^*A}$$

*Übung 3.4.19.* Jeder beschränkte Operator  $A$  auf einem Hilbertraum besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt

$$A = DP$$

mit  $P$  positiv semidefinit und  $D$  einer partiellen Isometrie im Sinne von ?? mit  $\ker D = (\operatorname{im} P)^\perp$ . In einer solchen Darstellung gilt stets  $P = |A|$ . Man nennt diese Darstellung auch die **Polarzerlegung** von  $A$ . Ebenso besitzt er auch eine eindeutige Darstellung als Produkt  $A = P'D'$  mit  $P'$  selbstadjungiert positiv semidefinit und  $D'$  einer partiellen Isometrie derart, daß gilt  $\operatorname{im} D' = (\ker P')^\perp$ . Hinweis: ??.

### 3.5 Der Riesz'sche Darstellungssatz

**Definition 3.5.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger. Eine Linearform  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **nichtnegativ** genau dann, wenn sie jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet.

**Satz 3.5.2 (Darstellungssatz von Riesz).** *Ist  $X$  ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum, so liefert das Bilden des Integrals eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Borelmaße auf } X\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Nichtnegative Linearformen auf } \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})\} \\ \mu & \mapsto & (f \mapsto \int f \mu) \end{array}$$

*Ergänzung 3.5.3.* Dieser Satz gilt allgemeiner für jeden lokal kompakten separablen Hausdorffraum  $X$ , vergleiche VI.17.2.3. Auf der linken Seite sind nichtnegative Borelmaße gemeint, die also durchaus auch den Wert  $\infty$  annehmen dürfen, nur eben nicht auf Kompakta. Statt nichtnegativen reell-linearen Abbildungen  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  mag man gleichbedeutend komplexlineare Abbildungen  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten, die nichtnegativ sind in dem Sinne, daß sie jeder nichtnegativen reellen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnen.

3.5.4. Für jedes Kompaktum  $K \subset X$  in unserem endlichdimensionalen reellen Raum  $X$  ist die Einschränkung einer nichtnegativen Linearform  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Raum  $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen mit Träger in  $K$  stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. In der Tat gibt es offensichtlich eine stetige nichtnegative Funktion  $h \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ , die auf unserem Kompaktum  $K$  konstant Eins ist. Für  $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  gilt dann  $-\|f\|_\infty h \leq f \leq \|f\|_\infty h$  und Anwenden von  $\Lambda$  liefert  $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(h) \|f\|_\infty$ .

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $X = \mathbb{R}^n$ . Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Sicher wird die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  erzeugt durch den Mengerring aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle. Sicher wird sie auch erzeugt durch den Mengerring  $\mathcal{D}$ , der daraus durch Anwenden eines beliebigen Vektorraumautomorphismus von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  entsteht. Wählen wir nun unseren Automorphismus so, daß er keine der Koordinatenhyperebenen von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  auf eine Koordinatenhyperebene abbildet, dann ist für  $D \in \mathcal{D}$  offensichtlich das Integral seiner charakteristischen Funktion  $[D]$  nach der letzten Koordinate  $\int [D] dy$  stetig mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}^n$  und wir können für jede nichtnegative Linearform  $\Lambda$  wie oben die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_\Lambda : \mathcal{D} &\rightarrow [0, \infty) \\ D &\mapsto \Lambda(\int [D] dy) \end{aligned}$$

betrachten. Nun zeigt der Satz von Dini II.6.10.9 zusammen mit 3.5.4, daß  $\tilde{\mu}$  ein Prämaß auf  $\mathcal{D}$  ist, und nach dem Maßerweiterungssatz IV.6.2.10 besitzt dies Prämaß genau eine Fortsetzung zu einem Borelmaß  $\tilde{\mu}$  auf  $X \times \mathbb{R}$ . Schließlich erklären wir ein Borelmaß  $\mu = \mu_\Lambda$  auf  $X$ , indem wir für jede Borelmenge  $B \subset X$  setzen

$$\mu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0, 1])$$

Damit haben wir eine Abbildung  $\Lambda \mapsto \mu$  in die Gegenrichtung konstruiert und müssen nur noch zeigen, daß unsere beiden Abbildungen zueinander invers sind. Wir beginnen mit der Situation  $\nu \mapsto \Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu$  und zeigen die Gleichheit von Maßen  $\mu = \nu$ . Nach Fubini stimmen die Maße  $\tilde{\mu}$  und  $\nu \boxtimes dy$  auf  $\mathcal{D}$  überein und nach dem Maßerweiterungssatz IV.6.2.10 sind sie folglich gleich. Damit folgt dann für jede Borelmenge  $B \subset X$  sofort  $\nu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0, 1]) = \mu(B)$ . Nun gehen wir umgekehrt von  $\Lambda$  aus, betrachten also die Situation  $\Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu \mapsto \Gamma$  und zeigen die Gleichheit von Linearformen  $\Gamma = \Lambda$ . Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf allen nichtnegativen Funktionen  $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  denselben Wert  $\Gamma(f) = \Lambda(f)$  annehmen. Nun läßt sich jedoch das offene durch  $X \times \{0\}$  und den Graphen von  $f$  begrenzte Gebiet

$$G = \{(x, y) \mid 0 < y < f(x)\}$$

als die Vereinigung einer aufsteigenden Folge  $D_0 \subset D_1 \subset \dots$  von Mengen aus  $\mathcal{D}$  darstellen. Nach dem Satz von Dini II.6.10.9 gilt dann  $\int [D_r] dy \rightarrow f$  gleichmäßig und folglich  $\Lambda(\int [D_r] dy) \rightarrow \Lambda(f)$  für  $r \rightarrow \infty$ . Da  $\tilde{\mu}$  per definitionem invariant ist unter Verschiebung in der letzten Koordinate, haben wir nach IV.6.6.7 notwendig  $\tilde{\mu} = \mu \boxtimes dy$ . Also strebt  $\Lambda(\int [D_r] dy)$  auch gegen

$$\tilde{\mu}(G) = (\mu \boxtimes dy)(G) = \int f(x) \mu(x) = \Gamma(f) \quad \square$$



SkriptenBilder/BildDSA.png

Eine Menge des Mengenrings  $\mathcal{D}$  von Teilmengen von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , der durch Drehung um  $45^\circ$  aus dem Mengenring aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle entsteht.

*Übung 3.5.5.* Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und sei weiter  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Linearform mit der Eigenschaft, daß für alle Kompakta  $K \subset X$  ihre Restriktion auf  $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. So ist  $\Lambda$  die Differenz zweier nichtnegativer Linearformen. Hinweis: Für  $f \in \mathcal{C}_c(X)$  mit  $f \geq 0$  setze man

$$\Lambda_+(f) = \sup\{\Lambda(g) \mid 0 \leq g \leq f\}$$

und zeige, daß das endlich ist mit  $\Lambda_+(f+h) = \Lambda_+(f) + \Lambda_+(h)$  für  $f, h \geq 0$  und  $\Lambda_+(af) = a\Lambda_+(f)$  für  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Gegeben  $f \in \mathcal{C}_c(X)$  setze man  $\Lambda_+(f) = \Lambda_+(f_+) - \Lambda_+(f_-)$  für  $f = f_+ - f_-$  die Zerlegung in einen positiven und einen negativen Teil wie in [IV.6.5.1](#) und zeige, daß  $\Lambda_+ : \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$  nichtnegativ und linear ist. Schließlich zeige man, daß auch  $\Lambda_+ - \Lambda$  nichtnegativ ist.

### 3.6 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

**Definition 3.6.1.** Seien  $(X, \mathcal{M})$  ein Maßraum und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Ein auf  $X$  definiertes  **$\mathcal{H}$ -teilraumwertiges Maß** ist eine Abbildung  $E$ , die jeder meßbaren Menge  $M \in \mathcal{M}$  einen abgeschlossenen Teilraum  $E(M) \subset \mathcal{H}$  zuordnet derart, daß gilt:

1. Für je zwei disjunkte Mengen  $M, M'$  aus  $\mathcal{M}$  sind die zugehörigen Teilräume orthogonal, in Formeln  $M \cap M' = \emptyset \Rightarrow E(M) \perp E(M')$ ;
2. Für jede abzählbare Familie  $(M_\nu)_{\nu \in N}$  von meßbaren Mengen mit Vereinigung  $M$  ist das Erzeugnis der  $E(M_\nu)$  ein dichter Teilraum von  $E(M)$ .

3.6.2. Aus der ersten Bedingung folgt über den Fall  $M = M' = \emptyset$  insbesondere  $E(\emptyset) = 0$ . Das Konzept eines teilraumwertigen Maßes scheint mir besonders gut verständlich. Bei der expliziten Arbeit erweist sich jedoch das gleichwertige Konzept eines projektorwertigen Maßes als praktischer, das wir als nächstes diskutieren. Die Äquivalenz beider Konzepte dürfen sie als [Übung 3.6.4](#) selbst ausarbeiten.

**Definition 3.6.3.** Sei  $(X, \mathcal{M})$  ein Maßraum und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  heißt ein auf  $X$  definiertes **projektorwertiges Maß** genau dann, wenn die Operatoren  $\Phi(M)$  alle selbstadjungiert und idempotent sind, also nach [1.7.8](#) orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Teilräume, und wenn darüber hinaus gilt:

1. Aus  $M \cap M' = \emptyset$  folgt  $\Phi(M) \circ \Phi(M') = 0$ ;
2. Für jede aufsteigende Folge meßbarer Mengen  $M_0 \subset M_1 \subset \dots$  mit Vereinigung  $M$  gilt  $\Phi(M_n)v \rightarrow \Phi(M)v \quad \forall v \in \mathcal{H}$ .

Ein projektorwertiges Maß mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\Phi(X) = \text{id}_{\mathcal{H}}$  nennen wir eine **Teilung der Identität von  $\mathcal{H}$** .

*Übung 3.6.4.* Sei  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Wir erhalten zueinander inverse Bijektionen zwischen teilraumwertigen Maßen und projektorwertigen Maßen mittels der Zuordnungen  $E \mapsto \Phi_E$  mit  $\Phi_E(M)$  der orthogonalen Projektion auf  $E(M)$  und  $\Phi \mapsto E_\Phi$  mit  $E_\Phi(M) = \text{im } \Phi(M)$  dem Bild des Projektors  $\Phi(M)$ .

*Übung 3.6.5.* Ist  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ein projektorwertiges Maß, so ist für jeden Vektor  $v \in \mathcal{H}$  die Zuordnung  $M \mapsto \langle v, \Phi(M)v \rangle$  ein nichtnegatives endliches Maß  $\langle v, \Phi v \rangle$  auf  $(X, \mathcal{M})$ , und stimmen bei zwei projektorwertigen Maßen für alle Vektoren  $v$  diese nichtnegativen Maße überein, so stimmen die besagten projektorwertigen Maße bereits selbst überein. Hinweis: Gegeben ein orthogonaler Projektor alias selbstadjungierter Idempotenter  $P$  auf einem Hilbertraum gilt  $\ker P = \{v \mid \langle v, Pv \rangle = 0\}$ .

3.6.6. Gegeben ein Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  bezeichne  $\mathcal{L}^\infty(X)$  den Vektorraum aller beschränkten meßbaren Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Supremumsnorm. Man erkennt leicht, daß die meßbaren Stufenfunktionen darin einen dichten Teilraum bilden.

**Lemma 3.6.7 (Integration nach projektorwertigen Maßen).** *Gegeben ein Meßraum  $(X, \mathcal{M})$ , ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und ein projektorwertiges Maß  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gibt es genau eine stetige lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\infty(X) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \int f \Phi = \int f(x) \Phi \langle x \rangle \end{aligned}$$

*vom Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen auf  $X$  in den Raum aller beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum mit der Eigenschaft, daß der charakteristischen Funktion jeder meßbaren Menge der entsprechende Projektor zugeordnet wird, in Formeln  $\int [M] \Phi = \Phi(M) \forall M \in \mathcal{M}$ .*

*Beweis.* Auf meßbaren Stufenfunktionen  $s : X \rightarrow \mathbb{C}$  muß unsere Abbildung, wenn es sie denn überhaupt gibt, gegeben sein durch die Formel

$$\int s \Phi = \sum_{z \in \mathbb{C}} z \cdot \Phi(s^{-1}(z))$$

Wir haben gewonnen, sobald wir zeigen können, daß mit dieser Regel für jede Stufenfunktion  $s$  die Abschätzung  $\|\int s \Phi\| \leq \|s\|_\infty$  gilt, da sich unsere Abbildung dann nach 1.4.17 und 3.6.6 auf genau eine Weise stetig und linear

vom Raum aller Stufenfunktionen auf den Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen fortsetzen läßt. Sei also  $s$  eine meßbare Stufenfunktion, die wir etwa als  $s = c_1[M_1] + \dots + c_n[M_n]$  schreiben können mit  $M_1, \dots, M_n$  paarweise disjunkt und meßbar. Es gilt, für alle  $v \in \mathcal{H}$  zu zeigen

$$\left\| \left( \int s \Phi \right) v \right\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

oder ausgeschrieben

$$\|c_1 \Phi(M_1)v + \dots + c_n \Phi(M_n)v\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

Nun bilden jedoch die  $v_i = \Phi(M_i)v$  zusammen mit einem weiteren  $w$  eine Zerlegung  $v = v_1 + \dots + v_n + w$  von  $v$  in eine Summe von paarweise orthogonalen Vektoren, und durch Quadrieren beider Seiten sehen wir, daß unsere Behauptung äquivalent ist zu der offensichtlichen Aussage

$$\|c_1 v_1\|^2 + \dots + \|c_n v_n\|^2 \leq \|s\|_\infty^2 (\|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2 + \|w\|^2) \quad \square$$

*Übung 3.6.8.* Seien  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ein projektorwertiges Maß. Gegeben  $v \in \mathcal{H}$  und  $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$  gilt

$$\left\langle v, \left( \int f \Phi \right) v \right\rangle = \int f \langle v, \Phi v \rangle$$

für das in 3.6.5 definierte Maß  $\langle v, \Phi v \rangle$  auf  $(X, \mathcal{M})$ .

*Übung 3.6.9 (Funktorialität des Integrals).* Ist  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen und sind auf einem Meßraum  $(X, \mathcal{M})$  projektorwertige Maße  $\Phi$  in  $\mathcal{H}$  und  $\Phi'$  in  $\mathcal{H}'$  gegeben mit der Eigenschaft  $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A \quad \forall M \in \mathcal{M}$  oder in Kurzschreibweise  $A \circ \Phi = \Phi' \circ A$ , so gilt für jede beschränkte meßbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  die Identität

$$A \circ \left( \int f \Phi \right) = \left( \int f \Phi' \right) \circ A$$

**Definition 3.6.10.** Ein projektorwertiges Maß auf den Borelmengen eines topologischen Raums heißt **kompakt getragen** genau dann, wenn es Kompakta gibt, deren Komplement der Nulloperator zugeordnet wird.

**Satz 3.6.11 (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren).**

1. Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte kompakt getragene} \\ \text{Teilungen der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Selbstadjungierte} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad \int x \Phi(x)$$

2. Für die dem selbstadjungierten Operator  $T$  entsprechende Teilung der Identität  $\Phi_T$  ist das Spektrum  $\sigma(T)$  von  $T$  das kleinste Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}$  mit  $\Phi_T(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ .
3. Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  und selbstadjungierte Operatoren  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$  mit  $AT = T'A$  gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße  $\Phi, \Phi'$  und jede Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  die Identität

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

3.6.12. In diesem Satz ist  $\mathbb{R}$  mit seiner durch die Borelmengen gegebenen Struktur eines Meßraums zu verstehen. Die folgende Übung 3.6.17 zeigt, daß die durch einen selbstadjungierten Operator definierte Teilung der Identität die Zerlegung in Eigenräume ?? verallgemeinert. Die letzte Aussage 3.6.11.3 verallgemeinert dann unsere Erkenntnis ??, nach der  $A$  zumindest schon mal Eigenräume von  $T$  in Eigenräume von  $T'$  zum selben Eigenwert abbilden muß.

*Beispiel* 3.6.13. Sei  $\mathcal{H} = L^2([0, 1]; \lambda)$  und  $T = (x \cdot)$  der Operator  $f \mapsto Tf$  mit  $(Tf)(x) = xf(x)$ . So kann die zugehörige Teilung der Identität  $\Phi = \Phi_T$  beschrieben werden durch die Vorschrift, daß  $\Phi(M)$  die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion von  $M$  oder besser von  $(M \cap [0, 1])$  ist, in Formeln  $\Phi(M) = (([M] \cap [0, 1]) \cdot) : L^2([0, 1]; \lambda) \rightarrow L^2([0, 1]; \lambda)$ .

*Ergänzung* 3.6.14. Wir werden später auch zeigen, daß dieser Satz immer noch gilt, wenn wir darin “selbstadjungiert” durch “unitär” und  $\mathbb{R}$  durch  $S^1$  ersetzen. Noch allgemeiner werden wir “normale” Operatoren auf einem Hilbertraum definieren als Operatoren, die mit ihrem Adjungierten kommutieren, und zeigen, daß der obige Satz auch dann noch gilt, wenn wir darin überall “selbstadjungiert” durch “normal” und  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{C}$  ersetzen. Und schließlich will ich auch noch erwähnen, daß der erste Teil immer noch gilt, wenn man oben links die Forderung “kompakt getragen” fallen läßt und oben rechts auch sogenannte “unbeschränkte Operatoren” im Sinne von 3.11.5 zuläßt.

*Ergänzung* 3.6.15. Der besonders einfache Fall kompakter selbstadjungierter Operatoren wird in VI.10.6.4 unabhängig behandelt.

3.6.16. Der Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren wird uns bis zum Ende des anschließenden Abschnitts beschäftigen. Zunächst einmal zeigt 3.6.18 unter anderem, daß die im Satz erklärte Abbildung in der Tat jedem kompakt getragenen projektorwertigen Maß auf  $\mathbb{R}$  einen selbstadjungierten Operator zuordnet. Dann konstruieren wir in 3.7.6 eine Abbildung  $T \mapsto \Phi_T$  in die Gegenrichtung und zeigen in 3.7.8 und 3.7.10, daß unsere beiden Konstruktionen zueinander invers sind. Der zweite Teil des Satzes folgt

aus 3.6.21 und der letzte Teil aus 3.7.5 mit der in 3.7.6 gegebenen Beschreibung von  $\Phi_T$ .

*Übung 3.6.17.* Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und  $(e_i)_{i \in I}$  eine Hilbertbasis von  $\mathcal{H}$  aus Eigenvektoren von  $T$ , sagen wir mit  $Te_i = \lambda_i e_i$ , so hat für die im Sinne von 3.6.11 zugehörige Zerlegung  $\Phi = \Phi_T$  der Identität und jede Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  der zugehörige Projektor  $\Phi(M)$  als Bild den Abschluß der Summe aller Eigenräume zu Eigenwerten aus  $M$ , in Formeln

$$\text{im}(\Phi(M)) = \overline{\langle e_i \mid \lambda_i \in M \rangle}$$

**Lemma 3.6.18 (Integration nach projektorwertigem Maß, Eigenschaften).** Gegeben  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum,  $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X)$  beschränkt und meßbar,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ein projektorwertiges Maß gilt

1.  $\int \bar{f} \Phi = (\int f \Phi)^*$
2.  $\int fg \Phi = (\int f \Phi) \circ (\int g \Phi)$
3.  $\|\int f \Phi\| \leq \|f\|_\infty$

*Beweis.* Das alles ist für Stufenfunktionen leicht explizit zu sehen und folgt dann durch Grenzübergang im allgemeinen. Die Details können dem Leser überlassen bleiben. Man beachte, daß in Teil 2 das Produkt der Funktionen  $f$  und  $g$  gemeint ist, nicht etwa ihre Verknüpfung.  $\square$

*Übung 3.6.19.* Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit einer Teilung  $\Phi$  der Identität und  $f$  beschränkt und meßbar und  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein Polynom haben wir

$$P\left(\int f \Phi\right) = \int (P \circ f) \Phi$$

*Übung 3.6.20.* Seien  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum,  $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$  beschränkt und meßbar,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine Teilung der Identität. So gilt für alle  $v \in \mathcal{H}$  die Abschätzung

$$\left\| \left( \int f \Phi \right) v \right\| \geq (\inf_{x \in X} |f(x)|) \|v\|$$

**Lemma 3.6.21 (Spektrum eines Integrals).** Ist  $\Phi$  eine auf  $\mathbb{C}$  definierte kompakt getragene Teilung der Identität eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  und  $T = \int x \Phi(x)$ , so ist  $\sigma(T)$  das kleinste Kompaktum  $K \subset \mathbb{C}$  mit  $\Phi(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ .

*Beweis.* Ist  $K \subset \mathbb{C}$  ein Kompaktum mit  $\Phi(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ , so ist nach 3.6.18 für  $\lambda \notin K$  der Operator  $\int_K (x - \lambda)^{-1} \Phi \langle x \rangle$  invers zu  $\int_K (x - \lambda) \Phi \langle x \rangle = T - \lambda$  und es folgt  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Das zeigt  $\sigma(T) \subset K$ . Andererseits ist für  $\lambda \notin \sigma(T)$  der Operator  $T - \lambda$  invertierbar, folglich existiert  $c > 0$  derart, daß  $T - \lambda$  von Null verschiedene Vektoren höchstens um den Faktor  $c$  verkürzt. Alle von Null verschiedenen Vektoren aus dem Bild von  $\Phi(B(\lambda; c/2))$  werden jedoch von  $T - \lambda$  nach 3.6.18 mindestens um den Faktor  $c/2$  verkürzt, da die Funktion  $(x - \lambda)$  auf  $B(\lambda; c/2)$  eben beschränkt ist durch  $c/2$ , woraus wir sofort  $\Phi(B(\lambda; c/2)) = 0$  folgern. Damit erhalten wir dann auch leicht  $\Phi(H) = 0$  für jedes Kompaktum aus dem Komplement von  $\sigma(T)$ , und da dies Komplement wie jede offene Teilmenge der komplexen Zahlenebenen als eine abzählbare Vereinigung von Kompakta dargestellt werden kann, folgt  $\Phi(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$ .  $\square$

**Lemma 3.6.22 (Vertauschen von Integral und Grenzübergang).** *Seien  $(X, \mathcal{M})$  ein Meßraum,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ein projektorwertiges Maß. Konvergiert eine Folge  $f_n$  meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen eine Funktion  $f$ , so gilt  $(\int f_n \Phi) v \rightarrow (\int f \Phi) v$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ .*

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f = 0$  annehmen. Gegeben  $\varepsilon > 0$  bilden dann die

$$X_n = X_n^\varepsilon = \{x \in X \mid |f_\nu(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \nu \geq n\}$$

eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen mit Vereinigung  $X$ . Aus den Eigenschaften eines projektorwertigen Maßes folgt  $\Phi(X_n)v \rightarrow \Phi(X)v$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Nun schreiben wir

$$\int f_n \Phi = \int_{X_n} f_n \Phi + \int_{X \setminus X_n} f_n \Phi$$

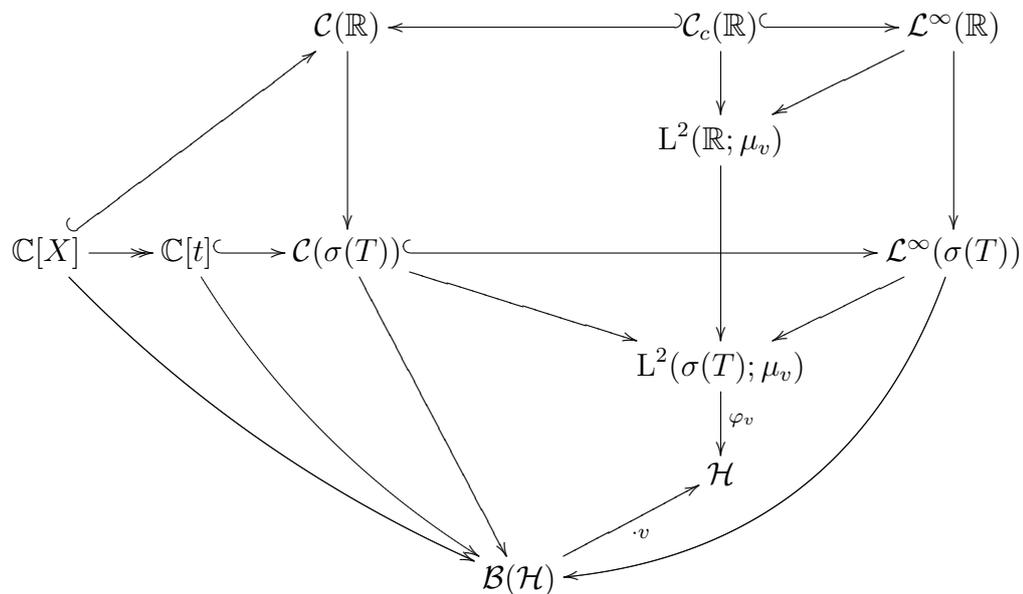
Das erste Integral liefert einen Operator der Operatornorm  $\leq \varepsilon$ , und für  $C$  eine simultane Schranke der  $\|f_n\|_\infty$  liefert das zweite Integral einen Operator der Operatornorm  $\leq C$ , der mit  $v$  dasselbe tut wie mit  $\Phi(X)v - \Phi(X_n)v$ . Gegeben  $v$  sinkt der Betrag von  $(\int f_n \Phi) v$  also für hinreichend großes  $n$  unter  $\varepsilon\|v\| + \varepsilon$ , und da das für jedes positive  $\varepsilon$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

*Übung 3.6.23.* Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und  $\Phi = \Phi_T$  die zugehörige Teilung der Identität, so gilt für jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die Formel  $f(T) = \int f \Phi$ . Hinweis: Man beginne mit dem polynomialen Fall.

*Übung 3.6.24.* Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist  $\mu$  ein kompakt getragenes Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $T$  die Multiplikation mit  $x$  auf  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ , so ist der Projektor  $\Phi(M)$  der zugehörigen Teilung  $\Phi$  der Identität für eine Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion  $[M]$  von  $M$  und der Operator  $\int f\Phi$  für  $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$  ist schlicht die Multiplikation  $(f \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ . Hinweis: Man berechne  $(\int x\Phi\langle x \rangle)(h)$  für  $h$  quadratintegrierbar vermittels einer Approximation der Identität auf einem geeigneten Kompaktum von  $\mathbb{R}$  durch immer feinere Stufenfunktionen.

### 3.7 Beweis des Spektralsatzes

3.7.1. Das folgende Diagramm faßt den Aufbau des sogenannten “Funktionalkalküls” in der hier gegebenen Darstellung zusammen:



Wir gehen aus von der Vertikale links außen, dem Einsetzen unseres selbstadjungierten Operators  $T$  in Polynome aus  $\mathbb{C}[X]$ . Nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz und der Gleichheit von Norm und Spektralradius faktorisiert sie über den Ring  $\mathbb{C}[t]$  aller polynomialen Funktionen auf dem Spektrum, und zwar durch eine in Bezug auf die sup-Norm stetige Abbildung, die sich von dort mithilfe des Approximationssatzes von Weierstraß stetig auf den Ring  $\mathcal{C}(\sigma(T))$  aller stetigen Funktionen auf dem Spektrum fortsetzen läßt. Gegeben ein Vektor  $v \in \mathcal{H}$  führt diese Fortsetzung zu einer nichtnegativen Linearform  $f \mapsto \langle v, f(T)v \rangle$  auf  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  und mit dem Riesz’schen Darstellungssatz zum sogenannten Spektralmaß  $\mu_v$  unseres Vektors und wieder durch stetige Fortsetzung zur kanonischen Einbettung  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$ , die im

Diagramm durch die Verknüpfung des mit  $\varphi_v$  bezeichneten Pfeils mit dem darüberstehenden Pfeil dargestellt ist, der eh einen Isomorphismus darstellt. Diese kanonischen Einbettungen schließlich verwenden wir dann, um auch das Einsetzen unseres Operators in meßbare beschränkte Funktionen  $f$  zu erklären durch die Vorschrift  $f(T)v := \varphi_v(f)$ , wie wir im folgenden genauer ausführen werden.

**Definition 3.7.2 (Anwenden meßbarer Funktionen auf Operatoren).** Gegeben ein selbstadjungierter Operator  $T$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und meßbar erklären wir eine Abbildung

$$f(T) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

durch die Vorschrift  $f(T)v := \varphi_v(f)$  für  $\varphi_v : L^2(\mathbb{R}; \mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$  die kanonische Einbettung zu  $v$  im Sinne von 3.2.15. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 3.4.15 das Spektralmaß  $\mu_v$  jedes Vektors  $v \in \mathcal{H}$  auf dem Komplement des Spektrums von  $T$  verschwindet. Schreiben wir  $f(T)$  für eine meßbare Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , so setzen wir implizit voraus, daß  $f|_{\sigma(T)}$  beschränkt sein soll, und meinen das Anwenden dieser Einschränkung auf  $T$ .

3.7.3. Sobald wir den Spektralsatz zur Verfügung haben, können wir  $f(T)$  auch als  $f(T) = \int f(x)\Phi_T\langle x \rangle$  schreiben, wie in 3.7.8 ausgeführt wird, und dann die Aussagen des anschließenden Lemmas 3.7.4 aus 3.6.23, 3.6.18 und 3.6.22 folgern. Das anschließende Lemma ist also nur für den Beweis des Spektralsatzes von Bedeutung. Das Anwenden geeigneter Funktionen auf Operatoren ist auch als **Funktionalkalkül** bekannt.

**Lemma 3.7.4 (Eigenschaften des Funktionalkalküls).** Sei  $T$  ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und sei  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$  meßbar und beschränkt.

1. Ist  $f$  stetig, so stimmt unser eben in 3.7.2 definiertes  $f(T)$  mit unserem in 3.4.9 durch polynomiale Approximation definierten  $f(T)$  überein.
2. Die Abbildung  $f(T)$  ist linear und stetig und für ihre Operatornorm gilt  $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$ .
3. Die adjungierte Abbildung zu  $f(T)$  ist  $f(T)^* = \bar{f}(T)$ .
4. Ist  $g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere meßbare und beschränkte Abbildung, so haben wir  $(f \cdot g)(T) = f(T) \circ g(T)$ .
5. Konvergiert eine Folge  $f_n$  meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen  $f$ , so gilt  $f_n(T)v \rightarrow f(T)v$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ .

*Beweis.* 1. Das folgt sofort aus den Definitionen, wir hatten ja unsere kanonische Einbettung  $\varphi$  gerade konstruiert als die stetige Fortsetzung der Abbildung  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $f \mapsto f(T)v$ .

2. Die Abschätzung  $\|f(T)v\| \leq \|f\|_\infty \|v\|$  folgt auch sofort aus den Definitionen, aber die Linearität unserer Abbildung  $f(T)$  muß noch gezeigt werden. Klar ist immerhin, daß gegeben eine Folge  $f_n$  beschränkter meßbarer Funktionen auf  $\sigma(T)$ , die für das Spektralmaß  $\mu$  eines Vektors  $v$  im Hilbertraum  $L^2(\sigma(T); \mu)$  gegen eine weitere beschränkte meßbare Funktion auf  $\sigma(T)$  konvergiert, notwendig gilt

$$f_n(T)v \rightarrow f(T)v$$

Um nun die Additivität  $f(T)(v+w) = f(T)v + f(T)w$  zu zeigen, suchen wir eine Folge  $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$  stetiger Funktionen mit  $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , die fast überall punktweise gegen  $f$  konvergiert, und zwar fast überall bezüglich der Summe der Spektralmaße der Vektoren  $v, w$  und  $v+w$ . Die Behauptung folgt dann im Grenzwert aus der Linearität der  $f_n(T)$  für die stetigen Funktionen  $f_n$ . In derselben Weise zeigen wir  $f(T)(\lambda v) = \lambda f(T)(v)$  und damit die Linearität von  $f(T)$ .

3. Es gilt für je zwei Vektoren  $v, w$  zu zeigen  $\langle f(T)v, w \rangle = \langle v, \bar{f}(T)w \rangle$ . Für stetige  $f$  wissen wir das bereits aus 3.4.9. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir eine Folge  $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$  stetiger Funktionen mit  $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , die fast überall punktweise gegen  $f$  konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von  $v$  und  $w$ . Es folgt  $\langle f_n(T)v, w \rangle = \langle v, \bar{f}_n(T)w \rangle$  für alle  $n$  und  $f_n(T)v \rightarrow f(T)v$  sowie  $\bar{f}_n(T)w \rightarrow \bar{f}(T)w$  und damit die Behauptung.

4. Es reicht, für alle  $v, w \in \mathcal{H}$  die Formel  $\langle (f \cdot g)(T)v, w \rangle = \langle g(T)v, \bar{f}(T)w \rangle$  zu zeigen. Für stetige  $f, g$  folgt das aus 3.4.9. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir Folgen  $f_n, g_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$  von stetigen Funktionen mit  $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  und  $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ , die fast überall punktweise gegen  $f$  bzw.  $g$  konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von  $v$  und  $w$ , und gehen zum Grenzwert über.

5. Das folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz aus den Definitionen.  $\square$

*Übung 3.7.5 (Funktorialität des Funktionalkalküls).* Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \end{array}$$

mit  $T, T'$  selbstadjungiert kommutiert für jede beschränkte meßbare Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  auch das entsprechende Diagramm mit  $f(T), f(T')$  statt  $T, T'$ , in Formeln  $AT = T'A \Rightarrow Af(T) = f(T')A$ . Hinweis: Man erinnere sich an 3.4.12 und finde für  $v \in \mathcal{H}$  eine Folge stetiger durch  $\|f\|_\infty$  beschränkter Funktionen, die bezüglich der Summe der Spektralmaße von  $v$  und  $Av$  fast überall gegen  $f$  strebt.

**Lemma 3.7.6 (Identitätsteilung zu einem selbstadjungierten Operator).** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit einem selbstadjungierten Operator  $T$  sind die Operatoren  $[M](T)$  für Borelmengen  $M \subset \mathbb{R}$  die Projektoren einer kompakt getragenen Teilung  $\Phi_T$  der Identität von  $\mathcal{H}$ .*

3.7.7. Hier meint  $[M] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die charakteristische Funktion der Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  und  $[M](T)$  den Operator auf  $\mathcal{H}$ , der daraus im Rahmen unseres Funktionalkalküls durch Anwenden auf  $T$  entsteht.

*Beweis.* Die charakteristische Funktion  $[M]$  von  $M$  ist reellwertig und idempotent, in Formeln  $[M]^2 = [M]$ , folglich ist  $[M](T)$  selbstadjungiert und idempotent. Aus  $M \cap M' = \emptyset$  folgt weiter  $[M] \cdot [M'] = 0$  und nach 3.7.4 damit  $[M](T) \circ [M'](T) = 0$ . Als nächstes bemerken wir, daß nach 3.7.4.5 für jede aufsteigende Folge  $M_0 \subset M_1 \subset \dots$  von meßbaren Mengen mit Vereinigung  $M$  und für alle  $v \in \mathcal{H}$  die Folge der  $[M_n](T)v$  gegen  $[M](T)v$  konvergiert. Schließlich bemerken wir noch, daß die Definition 3.7.2 für die konstante Funktion 1 auf dem Spektrum die Gleichung  $[\sigma(T)](T) = \text{id}$  liefert und sind fertig.  $\square$

**Lemma 3.7.8 (Rekonstruktion eines Operators aus seiner Identitätsteilung).** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit einem selbstadjungierten Operator  $T$  und zugehöriger Teilung der Identität  $\Phi_T$  im Sinne von 3.7.6 haben wir stets*

$$T = \int x \Phi_T \langle x \rangle$$

3.7.9. Der Beweis zeigt sogar allgemeiner für jede meßbare beschränkte Funktion  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$  die Identität

$$f(T) = \int f(x) \Phi_T \langle x \rangle$$

Sobald der Spektralsatz also einmal bewiesen ist, wird das Anwenden meßbarer Funktionen auf selbstadjungierte Operatoren sehr einfach.

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf jedem Vektor  $v \in \mathcal{H}$  denselben Wert annehmen. Ist  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  die kanonische Einbettung zu  $v$ , so folgt aus den Definitionen die Gleichung

$$\varphi(s) = \left( \int s(x) \Phi_T \langle x \rangle \right) (v)$$

erst für die charakteristische Funktion  $s$  jeder Borelmenge, dann für jede meßbare Stufenfunktion und dann wegen der Stetigkeit beider Seiten in Bezug auf die Supremumsnorm für jede beschränkte meßbare Funktion auf  $\sigma(T)$ , insbesondere auch für die Funktion  $s(x) = x$ .  $\square$

**Lemma 3.7.10.** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit einer kompakt getragenen auf  $\mathbb{R}$  definierten Teilung  $\Phi$  der Identität und zugehörigem selbstadjungierten Operator  $T = \int x \Phi \langle x \rangle$  haben wir stets*

$$\Phi = \Phi_T$$

*Beweis.* Es gilt zu zeigen  $[M](T) = \Phi(M)$  für jede Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$ . Da hier beide Seiten orthogonale Projektionen sind, reicht es zu zeigen

$$\langle v, [M](T)v \rangle = \langle v, \Phi(M)v \rangle$$

für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Hier sind nun aber beide Seiten kompakt getragene Borelmaße, weshalb wir nach 3.5.2 und 3.5.4 und III.3.2.9 nur zeigen müssen, daß sie für jede Polynomfunktion  $P$  dasselbe Integral liefern. Die linke Seite ist per definitionem das Spektralmaß  $\mu$  des Vektors  $v$  für den Operator  $T$ , für  $\mu$  das Maß auf der linken Seite haben wir also

$$\int P(t) \mu \langle t \rangle = \langle v, P(T)v \rangle$$

Das Maß  $\nu$  auf der rechten Seite hinwiederum hat die Eigenschaft

$$\int P(t) \nu \langle t \rangle = \left\langle v, \left( \int P \Phi \right) v \right\rangle$$

erst einmal für jede meßbare Stufenfunktion  $P$  aber dann wegen der Stetigkeit beider Seiten unter der Norm gleichmäßiger Konvergenz in  $P$  sogar für jede beschränkte meßbare Funktion  $P$  und damit auch für jede Polynomfunktion  $P$ . Damit folgt die Behauptung dann aus 3.6.19.  $\square$

*Übung 3.7.11.* (Vorbereitung für 3.10.7.) Gegeben ein selbstadjungierter Operator  $T$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit zugehöriger Teilung der Identität  $\Phi_T$  kann für jede abgeschlossene Teilmenge  $C \triangleleft \mathbb{R}$  das Bild des zugehörigen Projektors beschrieben werden als

$$\begin{aligned} \text{im } \Phi_T(C) &= \{v \in \mathcal{H} \mid \inf_{\lambda \in C} \|(T - \lambda)v\| = 0\} \\ &= \{v \in \mathcal{H} \mid \mu_v(\mathbb{R} \setminus C) = 0 \text{ für } \mu_v \text{ das Spektralmaß von } v\} \end{aligned}$$

### 3.8 Spektralzerlegung unitärer Darstellungen

**Satz 3.8.1 (Spektralzerlegung unitärer Darstellungen).** Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad (\rho : t \mapsto \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle)$$

3.8.2. Gegeben eine unitäre Darstellung  $(\mathcal{H}, \rho)$  von  $\mathbb{R}$  gibt es also genau eine Teilung  $\Phi = \Phi_\rho$  der Identität von  $\mathcal{H}$  auf  $\mathbb{R}$  mit

$$\rho(t) = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{itx} \Phi\langle x \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Diese Teilung der Identität nennen wir das **zu unserer Darstellung gehörige projektorwertige Maß** und die zugehörigen  $\Phi(M)$  nennen wir **Spektralprojektoren**. In der Hoffnung, dadurch die zugrundeliegende Struktur deutlicher zu machen, formuliere ich auch noch eine koordinatenfreie Variante des Satzes, deren Beweis dem Leser überlassen sei: Gegeben eine Geraden-Gruppe  $G$  mit Charaktergruppe  $\hat{G}$  und ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \hat{G} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } G \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad (\rho : g \mapsto \int \chi(g) \Phi\langle \chi \rangle)$$

Diese Aussage gilt auch für die additive Gruppe eines beliebigen endlich-dimensionalen reellen Vektorraums, ja sogar für die Gruppen  $S^1$ ,  $\mathbb{Z}$  und in voller Allgemeinheit für jede “separable lokal kompakte Hausdorff’sche kommutative topologische Gruppe”, aber in dieser Allgemeinheit werden wir sie nicht beweisen.

*Übung 3.8.3.* Gegeben ein Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  und die unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  durch Automorphismen von  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ , bei der  $t \in \mathbb{R}$  durch Multiplikation mit  $e^{itx}$  operiert, ist für das zugehörige projektorwertige Maß  $\Phi$  der einer Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  zugeordnete Projektor  $\Phi(M)$  gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion  $[M]$  von  $M$ .

*Übung 3.8.4.* Betrachten wir auf  $\mathbb{R}$  das Lebesguemaß  $dt$  und die unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$  durch das Verschieben von Funktionen,  $\rho(t)f = \tau_t f$ , deren Stetigkeit in 1.5.7 gezeigt wurde, so hat für das zugehörige projektorwertige Maß  $\Phi$  der einer Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  zugeordnete Projektor  $\Phi(M)$  die Gestalt  $\mathcal{F} \circ ([M] \cdot) \circ \mathcal{F}^{-1}$  für  $\mathcal{F}$  die wie in 2.1.1 normalisierte Fouriertransformation.

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Nachweis der Surjektivität. Sind alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar, so existiert nach 3.1.20 ein selbst-adjungierter Operator  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\rho(t) = \exp(tiT)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ist  $\Phi = \Phi_T$  die nach 3.6.11 zu  $T$  gehörige Teilung der Identität, in Formeln  $T = \int x\Phi\langle x \rangle$ , so folgt mit 3.6.23 angewandt auf  $f(x) = \exp(itx)$  sofort

$$\rho(t) = \exp(tiT) = \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle$$

und wir haben bereits ein mögliches  $\Phi$  gefunden. Im allgemeinen finden wir mit 3.9.2 und dem Bilden sukzessiver orthogonaler Komplemente in unserer Darstellung eine Familie  $(\mathcal{H}_\iota, \rho_\iota)_{\iota \in I}$  von paarweise orthogonalen Unterdarstellungen, deren Summe dicht liegt und in denen jeweils jeder Vektor differenzierbar ist. Für jedes  $\iota \in I$  finden wir dann nach dem bereits Bewiesenen eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Teilung  $\Phi_\iota$  der Identität von  $\mathcal{H}_\iota$  mit

$$\rho_\iota(t) = \int e^{itx} \Phi_\iota\langle x \rangle$$

Die Summe dieser teilraumwertigen Maße im Sinne von 3.8.5 ist dann eine Teilung  $\Phi$  der Identität von  $\mathcal{H}$  mit

$$\rho(t)v = \left( \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle \right) v$$

erst für alle  $v$  aus einem der  $\mathcal{H}_\iota$ , aber dann wegen der Linearität und Stetigkeit beider Seiten sogar für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Das zeigt die Surjektivität. Um die Eindeutigkeit von  $\Phi$  zu zeigen, beachten wir zunächst, daß die in 3.6.5 erklärten Maße  $\langle \Phi v, v \rangle$  für  $v \in \mathcal{H}$  unser  $\Phi$  bereits eindeutig festlegen. Nach 3.6.8 entspricht aber die Fouriertransformierte des Maßes  $\langle \Phi v, v \rangle$  unter der Identifikation  $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{R}}, t \mapsto (x \mapsto e^{itx})$  gerade der Funktion  $t \mapsto \langle \rho(t)v, w \rangle$ , und nach 2.3.19 wird ein reelles Maß durch seine Fouriertransformierte bereits eindeutig festgelegt.  $\square$

**Lemma 3.8.5.** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , eine Familie  $(\mathcal{H}_\iota)_{\iota \in I}$  von paarweise orthogonalen Teilräumen mit dichter Summe und Teilungen  $\Phi_\iota$  der Identität auf jedem  $\mathcal{H}_\iota$  erhalten wir eine Teilung der Identität auf  $\mathcal{H}$  durch die Vorschrift*

$$\text{im } \Phi(M) = \overline{\sum_{\iota \in I} \text{im } \Phi_\iota(M)}$$

*Beweis.* Dem Leser überlassen. Man nutze 3.6.4.  $\square$

**Definition 3.8.6.** Ein Homomorphismus zwischen Darstellungen  $(\mathcal{H}, \rho)$  und  $(\mathcal{H}', \rho')$ , auch genannt ein **Verflechtungsoperator**, ist eine stetige lineare Abbildung  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  mit  $A\rho(t) = \rho'(t)A$  für alle Elemente  $t$  der dargestellten Gruppe.

**Satz 3.8.7 (Funktorialität der Spektralzerlegung).** *Gegeben unitäre Darstellungen von  $\mathbb{R}$  in Hilberträumen  $\mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{H}'$  sind die Verflechtungsoperatoren  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  genau die stetigen linearen Abbildungen mit der Eigenschaft, daß für die zugehörigen projektorwertigen Maße  $\Phi, \Phi'$  und jede Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  gilt*

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

*Beweis.* Daß alle stetigen linearen Abbildungen mit dieser Eigenschaft Verflechtungsoperatoren sind, scheint mir offensichtlich. Sei nun umgekehrt  $A$  ein Verflechtungsoperator und  $M \subset \mathbb{R}$  eine Borelmenge. Natürlich reicht es,  $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$  auf einem dichten Teilraum von  $\mathcal{H}$  zu zeigen. Mithilfe von 3.9.2 können wir uns also auf den Fall beschränken, daß unsere beiden Darstellungen jeweils ganz aus differenzierbaren Vektoren bestehen. Dann gilt jedoch für die infinitesimalen Erzeuger  $S, S'$  offensichtlich  $A \circ S = S' \circ A$  und die Behauptung folgt aus der Funktorialität des Spektralmaßes im Fall selbstadjungierter Operatoren 3.6.11.3.  $\square$

*Beweis von Satz 3.1.4 zur lokalen Struktur unitärer Darstellungen.* Gegeben eine unitäre Darstellung  $(\rho, \mathcal{H})$  von  $\mathbb{R}$  betrachten wir die zugehörige Teilung  $\Phi$  der Identität und zu jedem Vektor  $v \in \mathcal{H}$  das Maß  $\mu = \langle \Phi v, v \rangle$  nach 3.6.5 und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto (\int f \Phi) v \end{aligned}$$

Nach 3.6.8 gilt hier  $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2 \mu$ . Folglich faktorisiert  $\varphi$  über das Bild von  $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$  und läßt sich nach 1.4.17 von diesem Bild stetig zu einer unitären Einbettung  $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  ausdehnen. Die Formel  $\varphi(e^{itx} \cdot f) = \rho(t)(\varphi(f))$  folgt für alle Funktionen  $f$  mit beschränktem meßbaren Repräsentanten aus 3.6.18.2 und dann auf ganz  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$  durch stetige Fortsetzung. Damit haben wir die Existenz eines Paares  $(\mu, \varphi)$  mit den in 3.1.4 behaupteten Eigenschaften nachgewiesen. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, gehen wir von einem möglichen Paar  $(\mu, \varphi)$  aus. Aus 3.8.7 und 3.8.3 folgt

$$\Phi(M) \circ \varphi = \varphi \circ ([M] \cdot)$$

und durch Anwenden beider Seiten auf die konstante Funktion 1 und Bilden des Skalarprodukts mit  $v$  weiter  $\langle v, \Phi(M)v \rangle = \mu(M)$ , womit die Eindeutigkeit von  $\mu$  bereits gezeigt wäre. Andererseits zeigt die vorige Gleichung auch

$\varphi([M]) = \Phi(M)v$ , und das legt  $\varphi$  wegen der Linearität auf meßbaren Stufenfunktionen und dann wegen der Stetigkeit auf allen quadratintegrierbaren Funktionen fest.  $\square$

### 3.9 Operationen von Maßen auf Darstellungen

3.9.1. Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\Phi$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Teilung der Identität von  $\mathcal{H}$  und  $\rho : t \mapsto \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle$  die dazu wie in 3.8.1 gebildete unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  in  $\mathcal{H}$ . Wenn wir einmal von unserem Satz 3.8.1 ausgehen, so kann man leicht sehen, daß für  $M \subset \mathbb{R}$  beschränkt und meßbar das Bild des zugehörigen Projektors (im  $\Phi(M)$ )  $\subset \mathcal{H}$  jeweils ganz aus differenzierbaren Funktionen besteht und daß der infinitesimale Erzeuger dort durch das Integral  $\int it\Phi\langle t \rangle$  beschrieben werden kann. Wir werden nun für jede unitäre Darstellung der Gruppe  $\mathbb{R}$  oder allgemeiner einer Geradengruppe  $G$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und jedes komplexe Maß  $\mu \in M(\mathbb{R})$  bzw.  $\mu \in M(G)$  einen beschränkten Operator

$$\mu* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

eingeführen, die “Operation durch Konvolution”, von der wir später die Formel  $\mu* = \int \mu^\wedge(x)\Phi\langle x \rangle$  zeigen werden. Die Konvolution mit  $\mu$  wird also mit dem Integral seiner Fouriertransformierten  $\mu^\wedge \in C^b(\mathbb{R})$  nach dem zu unserer Darstellung gehörigen projektorwertigen Maß übereinstimmen. Obwohl das alles noch nicht bewiesen ist, zeigt es uns doch schon eine Möglichkeit, auch ohne die Existenz von  $\Phi$  zu kennen, gewisse Teilräume “mit Frequenzbeschränkungen” zu definieren. Beim Beweis des folgenden technischen Lemmas, das wir bei unserer Herleitung der Spektralzerlegung unitärer Darstellungen von  $\mathbb{R}$  gebraucht und bereits im Vorgriff verwendet haben, ist dann der wesentliche Punkte der Nachweis, daß diese Teilräume aus differenzierbaren Vektoren bestehen und daß ihre Vereinigung dicht liegt.

**Lemma 3.9.2.** *Es ist möglich, simultan in jeder unitären Darstellung  $\mathcal{H}$  von  $\mathbb{R}$  eine aufsteigende Folge von unitären Unterdarstellungen  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \dots$  so zu wählen, daß (1) in jedem  $\mathcal{H}_i$  jeder Vektor differenzierbar ist, daß (2) deren Vereinigung dicht liegt, und daß (3) jeder Verflechtungsoperator  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  auch  $\mathcal{H}_i$  nach  $\mathcal{H}'_i$  abbildet.*

*Beweis.* In 3.9.10 werden wir zu jeder abgeschlossenen Teilmenge  $C \subset \mathbb{R}$  eine unitäre Unterdarstellung  $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}$  erklären und zwar derart, daß aus  $C \subset D$  folgt  $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}_D$  und daß jeder Verflechtungsoperator  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  auch  $\mathcal{H}_C$  in  $\mathcal{H}'_C$  abbildet. In 3.9.13 zeigen wir, daß für  $C$  kompakt  $\mathcal{H}_C$  aus differenzierbaren Vektoren besteht. Aus 3.9.14 folgt schließlich, daß die Vereinigung der besagten Unterdarstellungen zu den kompakten Intervallen  $[-n, n]$  dicht liegt in unserer ursprünglichen Darstellung.  $\square$

**Definition 3.9.3 (Operationen von Maßen auf Darstellungen).** Gegeben eine unitäre Darstellung  $(\mathcal{H}, \rho)$  einer Geradengruppe  $G$  erklären wir für jedes komplexe Maß  $\mu \in M(G)$  eine lineare Abbildung  $\mu * : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $v \mapsto \mu * v$  durch die Vorschrift

$$\mu * v = \int \rho(t)v \mu\langle t \rangle$$

wobei das Integral im Sinne von 1.7.11 zu verstehen ist, also charakterisiert wird durch  $\langle w, \mu * v \rangle = \int \langle w, \rho(t)v \rangle \mu\langle t \rangle$  für alle  $w \in \mathcal{H}$ .

3.9.4. Wir werden in VI.11.8.7 sogar die Integration von Funktionen mit Werten in Banachräumen und in noch allgemeineren Räumen diskutieren und dann erkennen, daß die Faltung von Maßen mit Funktionen aus 2.5.9 und 2.5.12 jedenfalls für kompakt getragene Maße gerade die analoge Operation von Maßen auf den nun nicht mehr unitären Darstellungen von  $\mathbb{R}$  durch Verschiebung auf den Funktionenräumen  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  bzw.  $L^p(\mathbb{R})$  ist.

*Beispiele 3.9.5.* Ist  $\mu = \delta_t$  ein Diracmaß, so gilt  $\mu * v = \rho(t)(v)$ . Durch diese Gleichheit motiviert vereinfachen wir unsere Notation und schreiben kurz

$$\rho(t)(v) = t * v$$

Ist  $\mu = a_1\delta_{t(1)} + \dots + a_n\delta_{t(n)}$  eine Linearkombination von Diracmaßen, so gilt mit dieser Notation  $\mu * v = a_1t(1) * v + \dots + a_nt(n) * v$ . In der Tat ist unsere Operation von Maßen sicher eine bilineare Abbildung  $M(G) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ .

*Übung 3.9.6.* Gegeben unitäre Darstellungen  $(\mathcal{H}, \rho)$  und  $(\mathcal{H}', \rho')$  einer Geradengruppe  $G$  und ein Verflechtungsoperator  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  zeige man für jedes komplexe Maß  $\mu \in M(G)$  und alle  $v \in \mathcal{H}$  die Formel  $\mu * (Av) = A(\mu * v)$ .

**Lemma 3.9.7 (Stetigkeit der Konvolution).** Gegeben eine unitäre Darstellung  $\mathcal{H}$  einer Geradengruppe  $G$  gilt für jedes komplexe Maß  $\mu \in M(G)$  und jeden Vektor  $v \in \mathcal{H}$  die Abschätzung

$$\|\mu * v\| \leq \|\mu\| \cdot \|v\|$$

mit  $\|\mu\|$  der Variationsnorm unseres Maßes aus 2.4.3.

*Beweis.* Für alle  $w \in \mathcal{H}$  haben wir

$$|\langle w, \mu * v \rangle| = \left| \int \langle w, t * v \rangle \mu\langle t \rangle \right| \leq \int |\langle w, t * v \rangle| |\mu\langle t \rangle| \leq \|\mu\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

Setzen wir hier  $w = \mu * v$ , so ergibt sich die Behauptung sofort.  $\square$

**Lemma 3.9.8 (Assoziativität der Konvolution).** *Gegeben eine unitäre Darstellung  $\mathcal{H}$  einer Geradengruppe  $G$  und Maße  $\mu, \nu \in M(G)$  und ein Vektor  $v \in \mathcal{H}$  gilt stets*

$$\mu * (\nu * v) = (\mu * \nu) * v$$

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten mit jedem Vektor  $w \in \mathcal{H}$  dasselbe Skalarprodukt haben. Wir finden nun nach den Definitionen

$$\begin{aligned} \langle w, \mu * (\nu * v) \rangle &= \int \langle w, t * (\nu * v) \rangle \mu \langle t \rangle \\ &= \int \langle (-t) * w, \nu * v \rangle \mu \langle t \rangle \\ &= \int \left( \int \langle (-t) * w, s * v \rangle \nu \langle s \rangle \right) \mu \langle t \rangle \\ \langle w, (\mu * \nu) * v \rangle &= \int \langle w, x * v \rangle (\mu * \nu) \langle x \rangle \\ &= \int \langle w, (s + t) * v \rangle (\mu \boxtimes \nu) \langle s, t \rangle \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt so aus dem Satz von Fubini.  $\square$

**Lemma 3.9.9.** *Sei  $\mathcal{H}$  eine unitäre Darstellung einer Geradengruppe  $G$  und  $\mu_n \in M(G)$  eine Folge von nichtnegativen Maßen mit  $\mu_n(G) = 1$  und der Eigenschaft, daß für jede offene Umgebung  $U$  des neutralen Elements  $0 \in G$  fast alle unserer Maße auf  $G \setminus U$  verschwinden. So gilt für jeden Vektor  $v \in \mathcal{H}$  die Formel*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n * v = v$$

*Beweis.* Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  des neutralen Elements mit  $\|t * v - v\| \leq \varepsilon$  für alle  $t \in U$ . Falls  $n$  so groß ist, daß gilt  $\mu_n(G \setminus U) < \varepsilon$ , so haben wir demnach

$$|\langle w, \mu_n * v - v \rangle| = \left| \int \langle w, t * v - v \rangle \mu_n \langle t \rangle \right| \leq \int |\langle w, t * v - v \rangle| \mu_n \langle t \rangle \leq \varepsilon \|w\|$$

$\square$

**Definition 3.9.10.** Gegeben eine Geradengruppe  $G$  notieren wir die Inverse der abstrakten Fouriertransformation  $\mathcal{M}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\hat{G})$  von den Schwartzmaßen in die Schwartzfunktionen aus 2.3.14 als  $h \mapsto h^\vee$ . Gegeben eine unitäre Darstellung  $\mathcal{H}$  von  $G$  und eine abgeschlossene Teilmenge  $C \subseteq \hat{G}$  setzen wir

$$\mathcal{H}_C = \{v \in \mathcal{H} \mid h^\vee * v = 0 \text{ für alle } h \in \mathcal{S}(\hat{G}) \text{ mit } h|_C = 0\}$$

Nach 3.9.7 ist das ein abgeschlossener Teilraum und wegen der Kommutativität der Konvolution ist er sogar eine Unterdarstellung. Offensichtlich folgt aus  $C \subset D$  auch  $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}_D$ .

3.9.11. Im folgenden will ich versuchen klar zu machen, daß man sich diesen Raum denken kann als die Menge aller Vektoren, die “keine spektralen Anteile zu Charakteren außerhalb von  $C$  besitzen”.

*Beispiel 3.9.12.* Gegeben  $f \in \mathcal{S}(\hat{G})$  mit Träger in  $C$  gilt  $f^\vee * \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_C$ . In der Tat haben wir ja  $h^\vee * (f^\vee * v) = (h^\vee * f^\vee) * v = (h \cdot f)^\vee * v = 0$  für alle  $h \in \mathcal{S}(\hat{G})$  mit  $h \cdot f = 0$ .

**Lemma 3.9.13.** *Für jede unitäre Darstellung  $\mathcal{H}$  einer Geradengruppe  $G$  und jedes Kompaktum  $C \subset \hat{G}$  besteht  $\mathcal{H}_C$  aus differenzierbaren Vektoren.*

*Beweis.* Wir behaupten zunächst für alle  $v \in \mathcal{H}_C$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\hat{G})$  mit  $\varphi|_C = 1$  die Formel

$$\varphi^\vee * v = v$$

Aus den Definitionen folgt schon mal, daß für jede weitere derartige Funktion  $\phi$  gilt  $\phi^\vee * v = \varphi^\vee * v$ . Es reicht demnach, unsere Formel für ein derartiges  $\varphi$  zu zeigen, das wir konstant Eins auf einem  $C$  und den Ursprung umfassenden Intervall annehmen dürfen, so daß insbesondere für  $r \geq 1$  auch  $\varphi_r = \varphi \circ (r^{-1} \cdot)$  auf  $C$  konstant Eins ist. Damit hängt also  $\varphi_r^\vee * v$  gar nicht von  $r \geq 1$  ab. Unsere Formel ist mithin gezeigt, sobald wir nachweisen, daß  $\langle \varphi_r^\vee * v, w \rangle$  für alle  $w$  bei  $r \rightarrow \infty$  gegen  $\langle v, w \rangle$  strebt. Ist nun  $\lambda$  ein Haarmaß auf  $G$  und  $\varphi^\vee = \psi \lambda$ , so haben wir  $\varphi_r^\vee = r(\psi \circ (r \cdot)) \lambda$  und

$$\langle w, \varphi_r^\vee * v \rangle = \int \langle w, t * v \rangle r \psi(rt) \lambda \langle t \rangle = \int \langle w, (u/r) * v \rangle \psi(u) \lambda \langle u \rangle$$

und das strebt nach dem Satz über dominierte Konvergenz bei  $r \rightarrow \infty$  gegen  $\langle v, w \rangle$ . Damit ist die oben behauptete Formel bewiesen. Um nun zu zeigen, daß  $v \in \mathcal{H}$  differenzierbar ist, beschränken wir uns auf den Fall  $G = \mathbb{R}$ . Für jede Funktion  $\psi$  aus dem Schwartzraum strebt dann  $(\tau_t \psi - \psi)/t$  für  $t \rightarrow 0$  in der  $L^1$ -Norm gegen  $\psi'$  und damit ist  $\psi \lambda * v$  differenzierbar nach 3.9.7 mit Ableitung  $\psi' \lambda * v$ .  $\square$

**Lemma 3.9.14.** *Gegeben eine unitäre Darstellung  $\mathcal{H}$  einer Geradengruppe  $G$  liegt die Vereinigung der  $\mathcal{H}_C$  über alle Kompakta  $C \subset \hat{G}$  dicht in  $\mathcal{H}$ .*

*Beweis.* Nach VII.3.3.8 liegt  $\mathcal{M}(G) * \mathcal{H}$  dicht in  $\mathcal{H}$ . Nach 3.9.16 liegt  $\mathcal{C}_c^\infty(\hat{G})^\vee$  dicht in  $\mathcal{M}(G)$  für die Variationsnorm. Nach 3.9.7 liegt dann auch  $\mathcal{C}_c^\infty(\hat{G})^\vee * \mathcal{H}$  dicht in  $\mathcal{H}$ .  $\square$

*Übung 3.9.15.* Gegeben ein Maßraum  $X$  definiert für jede quadratintegrierbare Funktion  $g \in L^2(X)$  das Multiplizieren mit  $g$  eine stetige lineare Abbildung  $(g \cdot) : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$  mit der Operatornorm  $\|g\|_2$ .

**Lemma 3.9.16.** *Die Fouriertransformierten glatter Funktionen mit kompaktem Träger auf der reellen Zahlengeraden bilden einen dichten Teilraum im Raum aller integrierbaren Funktionen auf der reellen Zahlengeraden.*

*Beweis.* Zunächst einmal liegt der Schwartzraum dicht im Raum aller integrierbaren Funktionen, es reicht also für jede Funktion des Schwartzraums  $f \in \mathcal{S}$  eine Folge  $g_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  anzugeben mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n^\wedge - f\|_1 = 0$ . Dazu schreiben wir  $f = g^\wedge$  mit  $g \in \mathcal{S}$  und wählen  $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  mit  $h|_{[-1,1]} = 1$  und betrachten die Funktionen  $h_n$  mit  $h_n(x) = h(x/n)$  und setzen  $g_n = h_n g$ . Jetzt behaupte ich

$$(g_n)^{(i)} \rightarrow g^{(i)}$$

in der  $L^2$ -Norm für  $i = 0, 1, 2$ , also für die Funktionen selbst und für ihre erste und zweite Ableitung. Sobald das gezeigt ist, folgern wir  $y^i g_n^\wedge \rightarrow y^i g^\wedge$  in der  $L^2$ -Norm für  $i = 0, 1, 2$  und damit  $(1+y^2)g_n^\wedge \rightarrow (1+y^2)g^\wedge$  in der  $L^2$ -Norm. Da aber  $(1+y^2)^{-1}$  selbst quadratintegrierbar ist, folgt mit 3.9.15 sofort  $g_n^\wedge \rightarrow g^\wedge$  in der  $L^1$ -Norm. Warum aber gilt  $(h_n g)^{(i)} \rightarrow g^{(i)}$  in der  $L^2$ -Norm? Nun, wir finden eine Schranke  $C$  für  $|h - 1|$  und eine Schranke  $M$  mit  $|g(x)| \leq Mx^{-2}$  für  $x \geq 1$  und folgern  $|h_n g - g| = |h_n - 1| \cdot |g| \leq MCx^{-2}$  für  $x \geq 1$ . Für  $|x| \leq n$  verschwindet andererseits diese Differenz identisch, und so folgt

$$\|h_n g - g\|_2 \leq 2MC \int_n^\infty x^{-2} dx$$

und das strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Die Behauptung für die höheren Ableitungen zeigt man ähnlich.  $\square$

### 3.10 Variationen zum Spektralsatz

**Satz 3.10.1 (Simultane Spektralzerlegung).** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  haben wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kompakt getragene auf} \\ \mathbb{R}^n \text{ definierte Teilungen} \\ \Phi \text{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} n\text{-Tupel } (T_1, \dots, T_n) \text{ von paar-} \\ \text{-weise kommutierenden selbst-} \\ \text{-adjungierten Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \quad \mapsto \quad (\int x_1 \Phi, \dots, \int x_n \Phi)$$

*Gegeben eine stetige lineare Abbildung  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  von Hilberträumen und paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren  $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  sowie  $T'_1, \dots, T'_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$  mit  $AT'_\nu = T'_\nu A$  für  $1 \leq \nu \leq n$  haben wir für die zugehörigen projektorwertigen Maße  $\Phi, \Phi'$  und jede Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  weiter die Identität*

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

3.10.2. Der Beweis variiert den Beweis des Spektralsatzes 3.6.11 und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Wir beginnen mit einer sehr groben Abschätzung für die Operatornorm eines polynomialen Ausdrucks in paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren.

**Lemma 3.10.3.** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und darauf paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren  $T_1, \dots, T_n$  und ein kompaktes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  mit  $\sigma(T_\nu) \subset (a, b)$  für  $1 \leq \nu \leq n$  gilt für jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  die Abschätzung*

$$\|P(T_1, \dots, T_n)\| \leq \sup\{P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_\nu \in [a, b] \forall \nu\}$$

*Beweis.* Bezeichne  $\Phi_\nu$  die nach dem Spektralsatz 3.6.11 durch  $T_\nu$  definierte Teilung der Identität von  $\mathcal{H}$ . Wir bilden für jedes  $r$  die äquidistante Unterteilung  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$  und betrachten die Intervalle  $I_i = (a_{i-1}, a_i]$  und die Operatoren

$$S_\nu^r = \sum_{i=1}^r a_i \Phi_\nu(I_i)$$

Nach dem Spektralsatz gilt in der Operatornorm  $S_\nu^r \rightarrow T_\nu$  für  $r \rightarrow \infty$  und daraus ergibt sich sofort ebenfalls in der Operatornorm

$$P(S_1^r, \dots, S_n^r) \rightarrow P(T_1, \dots, T_n) \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Der Operator  $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$  kann hinwiederum wie folgt beschrieben werden: Man betrachte für jedes  $n$ -Tupel  $(i(1), i(2), \dots, i(n))$  von Indizes aus  $\{1, \dots, r\}$  den Projektor  $\Phi_1(I_{i(1)}) \circ \dots \circ \Phi_n(I_{i(n)})$ . Die Bilder dieser  $r^n$  Projektoren bilden eine Zerlegung unseres Hilbertraums  $\mathcal{H}$  in  $r^n$  paarweise orthogonale abgeschlossene Teilräume und unser Operator  $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$  operiert auf dem entsprechenden Teilraum als der Skalar  $P(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(n)})$ . Im Fall  $n = 2$  etwa ist das genau der Wert, den unser Polynom an der oberen linken Ecke des Rechtecks  $I_{i(1)} \times I_{i(2)}$  annimmt. Damit ist klar, daß die Norm von  $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$  in der behaupteten Weise abgeschätzt werden kann, und dasselbe ergibt sich im Grenzwert auch für die Norm von  $P(T_1, \dots, T_n)$ .  $\square$

*Beweis von 3.10.1.* Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Seien  $T_1, \dots, T_n$  paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Lemma 3.10.3 zeigt, daß es ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$  gibt derart, daß für jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  gilt

$$\|P(T_1, \dots, T_n)\| \leq \|P|_K\|_\infty$$

Daraus folgern wir die Existenz und Eindeutigkeit der durch gestrichelte Pfeile angedeuteten stetigen Ringhomomorphismen im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \hookrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) & & \end{array}$$

und haben so bereits das Anwenden einer stetigen Funktion auf einen selbstadjungierten Operator verallgemeinert zum Anwenden einer stetigen Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  auf ein  $n$ -Tupel von paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren. Wie beim Beweis von 3.2.14 im Anschluß an 3.4.14 folgern wir, daß es für jeden Vektor  $v \in \mathcal{H}$  genau ein Paar  $(\mu, \varphi)$  gibt bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  und einer unitären Einbettung  $\varphi : L^2(\mathbb{R}^n; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$  mit  $\varphi(1) = v$  und  $\varphi \circ (x_i \cdot) = T_i \circ \varphi$  für  $1 \leq i \leq n$ . Wie in 3.7.2 folgende zeigen wir dann, daß es für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  meßbar und beschränkt genau einen Operator  $f(T_1, \dots, T_n)$  gibt mit  $f(T_1, \dots, T_n)v = \varphi(f)$  für  $\varphi$  die kanonische Einbettung zu  $v$  wie eben, und daß wir so eine Teilung der Identität mit den gewünschten Eigenschaften erhalten. Der Rest des Beweises ist vollständig analog zum Beweis des Spektralsatzes aus 3.7 und mag dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

**Korollar 3.10.4 (Spektralsatz für unitäre Operatoren).** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  haben wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf der Kreislinie } S^1 \text{ definierte} \\ \text{Teilungen } \Phi \text{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Automorphismen} \\ \text{des Hilbertraums } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \quad \mapsto \quad \int_{S^1} z \Phi\langle z \rangle$$

*Beweis.* Nach 3.6.18 liefert für jede Teilung der Identität auf der Kreislinie besagtes Integral einen unitären Automorphismus unseres Hilbertraums. Daß diese Konstruktion eine Bijektion liefert, folgt mit mit 3.3.19 aus dem etwas allgemeineren Fall 3.10.6 sogenannter “normaler” Operatoren.  $\square$

**Definition 3.10.5.** Ein Operator auf einem Hilbertraum heißt **normal** genau dann, wenn er mit seinem Adjungierten vertauscht. In Formeln ist also ein Operator  $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  normal genau dann, wenn gilt  $NN^* = N^*N$ . Insbesondere ist jeder selbstadjungierte und jeder unitäre Operator normal. Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Hilbertraums ist normal genau dann, wenn er diagonalisierbar ist mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Eigenräumen, und für jedes projektorwertige Maß  $\Phi$  auf einem Meßraum und jede beschränkte meßbare komplexwertige Funktion  $f$  auf besagtem Raum ist  $\int f \Phi$  normal.

**Korollar 3.10.6 (Spektralsatz für normale Operatoren).**

1. Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{C} \text{ definierte kompakt getragene} \\ \text{Teilungen der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Normale} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad \int z\Phi\langle z \rangle$$

2. Für die einem normalen Operator  $N$  entsprechende Teilung der Identität  $\Phi_N$  ist das Spektrum  $\sigma(N)$  von  $N$  das kleinste Kompaktum  $K \subset \mathbb{C}$  mit  $\Phi_N(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$  und der adjungierte Operator wird gegeben durch das Integral

$$N^* = \int \bar{z}\Phi_N\langle z \rangle$$

3. Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  und normale Operatoren  $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $N' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$  mit  $AN = N'A$  gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße  $\Phi, \Phi'$  und jede Borelmenge  $M \subset \mathbb{C}$  darüberhinaus

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

*Beweis.* Jeder normale Operator  $N$  läßt sich in eindeutiger Weise darstellen als

$$N = R + iI$$

mit kommutierenden selbstadjungierten Operatoren  $R$  und  $I$ , nämlich mit  $R = (N + N^*)/2$  und  $I = (N - N^*)/2i$ . Betrachten wir zu  $R$  und  $I$  die simultane Spektralzerlegung, d.h. die auf  $\mathbb{R}^2$  definierte kompakt getragene Teilung  $\Phi$  der Identität von  $\mathcal{H}$  mit

$$R = \int x\Phi\langle x, y \rangle \quad \text{und} \quad I = \int y\Phi\langle x, y \rangle$$

so erhalten wir unter der Identifikation  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$  eine Teilung  $\Phi$  der Identität auf  $\mathbb{C}$  mit

$$N = \int z\Phi\langle z \rangle$$

Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben, für Teil 3 benutze man das anschließende Lemma 3.10.7.  $\square$

**Lemma 3.10.7.** Gegeben  $N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  und  $N' : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$  normale Operatoren auf Hilberträumen und  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  eine stetige lineare Abbildung mit  $AN = N'A$  gilt auch für ihre Adjungierten  $AN^* = N'^*A$ .

*Beweis.* Seien  $\Phi_N, \Phi_{N'}$  die zugehörigen Teilungen der Identität auf  $\mathbb{C}$ . Zunächst einmal gilt es, 3.7.11 auf den Fall normaler Operatoren zu verallgemeinern. Das zeigt dann  $A\Phi_N(C) = \Phi_{N'}(C)A$  erst für  $C \not\subseteq \mathbb{C}$  und dann durch die Betrachtung geeigneter Differenzmengen auch allgemeiner für halboffene Rechtecke der Gestalt  $C = (a, b] \times i(c, d]$ . Jetzt schreiben wir  $N^*$  und  $N'^*$  als Grenzwert von Riemannsummen wie im Beweis von 3.10.3 und das Lemma folgt.  $\square$

*Übung 3.10.8.* Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit einer Teilung  $\Phi$  der Identität und  $f$  beschränkt und meßbar und  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein Polynom haben wir nach 3.6.19 die Identität

$$P\left(\int f\Phi\right) = \int (P \circ f)\Phi$$

Man zeige diese Identität nun für beliebige beschränkte meßbare Funktionen  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 3.11 Unbeschränkte Operatoren

3.11.1. In der Literatur trifft man unitäre Darstellungen von  $\mathbb{R}$  meist in einer mehr traditionellen Tracht als sogenannte “unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren” an. Ich stelle hier dieses Konzept vor und erkläre in Satz 3.11.9 seine Beziehung zu unitären Darstellungen, beweise von diesem Satz jedoch nur noch einen Teil.

**Definition 3.11.2.** Unter einer **partiell definierten linearen Abbildung** von einem Vektorraum  $V$  in einen Vektorraum  $W$  verstehen wir ein Paar  $(\mathcal{D}, T)$  bestehend aus einem Untervektorraum  $\mathcal{D} \subset V$  und einer linearen Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow W$ . Wir notieren solch eine partiell definierte lineare Abbildung auch  $T : V \dashrightarrow W$  und schreiben  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$  und nennen diesen Untervektorraum den **Definitionsbereich von  $T$** . Ist  $V$  ein normierter Vektorraum und  $\mathcal{D} \subset V$  dicht, so sprechen wir von einer **dicht definierten linearen Abbildung  $V \dashrightarrow W$** .

*Beispiel 3.11.3.* Ein typisches Beispiel für eine dicht definierte lineare Abbildung wäre  $V = W = L^2(\mathbb{R}; dx)$  mit dem Teilraum  $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}; dx) \cap C^1(\mathbb{R}) \mid f' \in L^2(\mathbb{R}; dx)\}$  als Definitionsbereich und dem Ableiten  $Tf = f'$  als linearer Abbildung.

**Definition 3.11.4.** Gegeben  $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}'$  eine dicht definierte lineare Abbildung von Hilberträumen erklären wir eine weitere partiell definierte lineare Abbildung  $T^* : \mathcal{H}' \dashrightarrow \mathcal{H}$ , ihre **adjungierte Abbildung**, indem wir den Teilraum  $\mathcal{D}(T^*) = \{v' \in \mathcal{H}' \mid v \mapsto \langle v', Tv \rangle \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(T)\}$  als ihren

Definitionsbereich wählen und dann  $T^* : \mathcal{D}(T^*) \rightarrow \mathcal{H}$  unter Verwendung des Satzes von Riesz 1.7.4 erklären durch die Vorschrift

$$\langle T^*v', v \rangle = \langle v', Tv \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(T), v' \in \mathcal{D}(T^*)$$

**Definition 3.11.5.** Ein **unbeschränkter selbstadjungierter Operator** auf einem Hilbertraum ist eine dicht definierte lineare Abbildung von unserem Hilbertraum in sich selber, die mit ihrer Adjungierten zusammenfällt, in Formeln  $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}$  mit  $T^* = T$ . Mit gefordert wird hier implizit insbesondere auch die Gleichheit der Definitionsbereiche  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ .

3.11.6. Mich befriedigt diese Terminologie nicht vollständig, da natürlich auch alle beschränkten selbstadjungierten Operatoren Beispiele für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren sind. Stattdessen stets von “nicht notwendig beschränkten” selbstadjungierten Operatoren zu reden, wäre aber auch wieder umständlich.

**Lemma 3.11.7.** Für jedes nichtnegative Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  ist das Paar  $(\mathcal{D}, T)$  bestehend aus dem Teilraum  $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}; \mu) \mid xf \in L^2(\mathbb{R}; \mu)\}$  und der Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ ,  $f \mapsto xf$  ein **unbeschränkter selbstadjungierter Operator** auf  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ . Hierbei meint  $x$  die Identität auf  $\mathbb{R}$ .

*Beweis.* Per definitionem besteht  $\mathcal{D}(T^*)$  aus allen  $g \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  derart, daß sich die Abbildung  $f \mapsto \int \bar{g}xf\mu$  stetig von  $\mathcal{D}$  auf ganz  $L^2(\mathbb{R}; \mu)$  fortsetzen läßt. Die Inklusion  $\mathcal{D}(T^*) \supset \mathcal{D}$  scheint mir damit offensichtlich. Läßt sich andererseits für vorgegebenes  $g \in L^2$  unsere Abbildung stetig von  $\mathcal{D}$  nach  $L^2$  fortsetzen, so wird diese Fortsetzung nach 1.7.4 gegeben durch das Integrieren gegen eine Funktion  $h \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  als  $f \mapsto \int \bar{h}f\mu$ . Insbesondere gilt also für jede glatte Funktion  $f$  mit kompaktem Träger  $\int \bar{g}xf\mu = \int \bar{h}f\mu$  und daraus folgt mit 2.1.26 dann  $\bar{g}x = \bar{h}$  fast überall, also  $xg \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$  und damit  $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}$ .  $\square$

*Beispiel 3.11.8.* Ich komme nocheinmal auf das Beispiel 3.11.3 zurück. Gegeben  $f, g \in \mathcal{D}$  gilt ja sicher

$$\int_a^b \bar{g}f' = \bar{g}f \Big|_a^b - \int_a^b \bar{g}'f$$

und wegen  $\bar{g}f \in L^1$  finden wir Folgen  $a_n, b_n$  mit  $a_n \rightarrow -\infty$ ,  $b_n \rightarrow \infty$  und  $(\bar{g}f)(a_n) \rightarrow 0$ ,  $(\bar{g}f)(b_n) \rightarrow 0$ . Daraus folgern wir

$$\langle g, Tf \rangle = -\langle Tg, f \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}$$

Mithin unterscheidet sich in diesem Fall der Operator  $(iT)^*$  vom Operator  $iT$  höchstens dadurch, daß er eventuell einen größeren Definitionsbereich hat.

Und den hat er in unserem Fall in der Tat, zum Beispiel gehört zu besagtem Definitionsbereich auch noch jede stetige Funktion, die auf  $(-\infty, a]$  und  $[a, \infty)$  stetig differenzierbar ist und deren Ableitung dort jeweils quadratintegrierbar ist. Genauer erhalten wir eine Erweiterung unseres Operators zu einem selbstadjungierten Operator, wenn wir  $t$  statt  $x$  schreiben und den folgenden Satz 3.11.9 auf die unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}$  auf  $L^2(\mathbb{R}; dt)$  anwenden, bei der  $t \in \mathbb{R}$  durch Verschiebung um  $t$  operiert, in Formeln  $\rho(t) = \tau_t$ .

**Satz 3.11.9.** *Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  liefert das Bilden des infinitesimalen Erzeugers  $S_\rho$  zu einer unitären Darstellung  $\rho$  im Sinne von 3.1.17 eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Unbeschränkte selbstadjungierte} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\rho \quad \mapsto \quad (\mathcal{H}^1, -iS_\rho)$$

*Beweis.* Wir zeigen hier nur, daß wir so eine Abbildung erhalten. Das einzige Problem dabei ist zu zeigen, daß der adjungierte Operator zu  $iS_\rho$  auch keinen größeren Definitionsbereich hat als  $\mathcal{H}^1$ . Das folgt jedoch sofort aus der lokalen Darstellung 3.1.4 in Verbindung mit 3.11.7. Daß die so konstruierte Abbildung eine Bijektion ist, wird erst später gezeigt werden.  $\square$

3.11.10. Gegeben ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  folgern wir aus dem vorhergehenden Satz 3.11.9 in Verbindung mit dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 3.8.1 sogar ein kommutatives Dreieck von Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} & & \\ \nearrow \sim & & \sim \searrow \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Unbeschränkte selbstadjungierte} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & \int x\Phi\langle x \rangle \end{array}$$

Hier ist der fragliche Operator nur auf den  $v \in \mathcal{H}$  mit  $\int |x| \langle v, \Phi v \rangle < \infty$  definiert, für  $\langle v, \Phi v \rangle$  das in 3.6.5 erklärte Maß, und für diese  $v$  ist er definiert durch die Bedingung

$$\left\langle w, \left( \int x\Phi\langle x \rangle \right) v \right\rangle = \int x \langle w, \Phi v \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Weiter meint  $\nearrow$  unsere Bijektion aus dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 3.8.1 und  $\searrow$  unsere Bijektion aus dem vorhergehenden

Satz 3.11.9 und das a priori völlig unmotiviert Vorzeichen in 3.11.9 habe ich nur eingeführt, damit ein kommutatives Dreieck entsteht, ohne daß wir irgendwo anders ein noch unnatürlicheres Vorzeichen einführen müßten.

3.11.11. In der Quantenmechanik modelliert man die Menge aller möglichen Zustände eines vorgegebenen physikalischen Systems als die Menge  $\mathbb{P}\mathcal{H}$  aller eindimensionalen Teilräume eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$ . Messungen mit zwei möglichen Resultaten – Ja oder Nein – modelliert man als abgeschlossene Teilräume  $T \subset \mathcal{H}$ . Wenden wir auf einen Zustand  $\mathbb{C}v \in \mathbb{P}\mathcal{H}$  eine Messung  $T$  an, so gilt es, den Vektor  $v$  auf den vorgegebenen Teilraum  $T \subset \mathcal{H}$  zu projizieren vermittels des zugehörigen orthogonalen Projektors  $\text{pr}_T$ , und das Verhältnis von  $\text{pr}_T(v)$  zu  $\|v\|^2$  wird dann interpretiert als die Wahrscheinlichkeit  $P(v)$  für das Meßergebnis “Ja”, in Formeln

$$P(v) = \frac{\|\text{pr}_T(v)\|^2}{\|v\|^2}$$

Feinere Messungen, die als Meßergebnisse etwa beliebige reelle Zahlen liefern können, modelliert man als Teilungen  $\Phi$  der Identität von  $\mathcal{H}$ , die etwa auf der reellen Zahlengeraden definiert sind, und interpretiert dann für jede Borelmenge  $M \subset \mathbb{R}$  den Projektor  $\Phi(M)$  in der Weise, daß  $\|\Phi(M)v\|^2/\|v\|^2$  die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß der Zustand  $\mathbb{C}v$  bei unserer Messung ein Resultat aus  $M$  liefert.

*Übung 3.11.12.* Ist  $\Phi$  eine kompakte getragene auf  $\mathbb{R}$  definierte Teilung der Identität eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  und  $T$  der zugehörige selbstadjungierte Operator, so ist  $\langle Tv, v \rangle / \|v\|^2$  der Erwartungswert für das Ergebnis, das man erhält, wenn man die durch  $\Phi$  beschriebene Messung auf den Zustand  $\mathbb{C}v$  anwendet. Das ist im übrigen genau die Zahl, für die wir im Beweis von ?? die Bezeichnung als “Rayleigh-Quotient” eingeführt hatten.

3.11.13. Eine partiell definierte lineare Abbildung von Banachräumen heißt ein **abgeschlossener Operator** genau dann, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im Produktraum. Das ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Abgeschlossenheit für Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß für eine konvergente Folge  $v_n$  im Definitionsbereich unseres Operators, für die auch die Folge der Bilder  $Tv_n$  konvergiert, der Grenzwert  $v$  auch im Definitionsbereich unseres Operators liegt und zusätzlich gilt  $Tv_n \rightarrow Tv$ . Man kann zeigen, daß jeder unbeschränkte selbstadjungierte Operator abgeschlossen ist.



# Kapitel VI

## Mannigfaltigkeiten und Liegruppen

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten, insbesondere David Stotz.

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Matrix-Liegruppen</b>	<b>762</b>
1.1	Einfache Darstellungen der Drehgruppen	762
1.2	Tangentenraum und Exponentialabbildung	766
1.3	Topologischer Zusammenhang	775
1.4	Ergänzungen zum Zusammenhangsbegriff*	778
1.5	Liealgebren von Matrix-Liegruppen	780
1.6	Homomorphismen von Matrix-Liegruppen	785
1.7	Drehgruppe und Spingruppe	791
1.8	Quaternionale Gruppen	792
<b>2</b>	<b>Endlichdimensionale Darstellungen</b>	<b>794</b>
2.1	Darstellungen und ihre Ableitungen	794
2.2	Einfache Darstellungen der Spingruppe	800
2.3	Haar'sches Maß für Matrix-Liegruppen	808
2.4	Vollständig reduzible Darstellungen	812
2.5	Kugelfunktionen*	816
<b>3</b>	<b>Ergänzungen zur Topologie</b>	<b>822</b>
3.1	Inneres und Abschluß	822

3.2	Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .	825
3.3	Kompakte Räume . . . . .	826
3.4	Konstruktion topologischer Räume . . . . .	829
3.5	Kompakte topologische Eins-Mannigfaltigkeiten* .	835
3.6	Produkttopologie . . . . .	838
3.7	Topologische Gruppen . . . . .	841
3.8	Quotienten nach Gruppenwirkungen . . . . .	843
3.9	Projektive Räume . . . . .	845
3.10	Eigentliche Abbildungen* . . . . .	848
3.11	Separierte Abbildungen* . . . . .	851
<b>4</b>	<b>Mannigfaltigkeiten und Liegruppen . . . . .</b>	<b>852</b>
4.1	Geringte Räume . . . . .	852
4.2	Mannigfaltigkeiten . . . . .	856
4.3	Tangentialräume . . . . .	862
4.4	Das Tangentialbündel . . . . .	870
4.5	Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	877
4.6	Integralkurven und Flüsse . . . . .	881
4.7	Die Lie-Klammer von Vektorfeldern . . . . .	885
4.8	Lieklammer und adjungierte Darstellung . . . . .	890
4.9	Quotienten und homogene Räume . . . . .	897
4.10	Abelsche Liegruppen . . . . .	902
4.11	Morphismen von Tori . . . . .	908
<b>5</b>	<b>Vektorraumbündel und Felder . . . . .</b>	<b>910</b>
5.1	Lineare Algebra mit Vektorraumbündeln . . . . .	910
5.2	Felder auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	915
5.3	Differentialformen . . . . .	918
5.4	Integration auf abstrakten Mannigfaltigkeiten . . .	920
5.5	Wohin? . . . . .	921
5.6	Lie-Ableitung . . . . .	922
5.7	Kotangentialbündel, Wohin? . . . . .	926
5.8	Das viel später bei $G$ -Strukturen . . . . .	927
5.9	Satz von Frobenius, wohin? . . . . .	932
<b>6</b>	<b>Struktur kompakter Liegruppen . . . . .</b>	<b>936</b>

6.1	Maximale Tori in kompakten Liegruppen . . . . .	936
6.2	Klassifikation im Rang Eins . . . . .	940
6.3	Weylgruppen kompakter Liegruppen . . . . .	945
6.4	Klassifikation der kompakten Liegruppen . . . . .	947
<b>7</b>	<b>Spiegelungsgruppen . . . . .</b>	<b>966</b>
7.1	Endliche Spiegelungsgruppen . . . . .	966
7.2	Alkovengeometrie . . . . .	971
7.3	Affine Spiegelungsgruppen . . . . .	980
7.4	Fundamentaltbereiche . . . . .	990
7.5	Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe . . . . .	992
7.6	Coxetergraphen und Klassifikation . . . . .	996
7.7	Struktur affiner Spiegelungsgruppen . . . . .	1009
<b>8</b>	<b>Wurzelsysteme . . . . .</b>	<b>1012</b>
8.1	Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen . . . . .	1012
8.2	Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme . . . . .	1017
8.3	Basen von Wurzelsystemen . . . . .	1023
8.4	Unzerlegbare Wurzelsysteme . . . . .	1028
8.5	Klassifikation von Wurzelsystemen . . . . .	1030
<b>9</b>	<b>Altes zu Wurzelsystemen, noch nötig? . . . . .</b>	<b>1034</b>
9.1	Wichtige Ergänzung für Weyl'sche Nennerformel . . . . .	1034
<b>10</b>	<b>Funktionen auf kompakten Liegruppen . . . . .</b>	<b>1035</b>
10.1	Das Haar-Maß auf Liegruppen . . . . .	1035
10.2	Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	1035
10.3	$G$ -Strukturen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	1039
10.4	Funktionen auf kompakten Matrix-Liegruppen . . . . .	1040
10.5	Matrixkoeffizienten . . . . .	1041
10.6	Kompakte Operatoren . . . . .	1044
10.7	Uniforme Strukturen . . . . .	1049
10.8	Konvolution auf topologischen Gruppen . . . . .	1051
10.9	Der Satz von Peter und Weyl . . . . .	1054
10.10	Faltungsoperation auf Darstellungen . . . . .	1057
10.11	Charaktere . . . . .	1061
10.12	Einfache Darstellungen . . . . .	1062

<b>11</b>	<b>Allgemeine stetige Darstellungen</b>	<b>1069</b>
11.1	Topologische Algebra	1069
11.2	Kompakt-offene Topologie	1072
11.3	Beispiele für stetige Darstellungen	1077
11.4	Stetige Induktion	1080
11.5	Geometrische Interpretation der Induktion	1085
11.6	Der Satz von Hahn-Banach	1088
11.7	Filter auf topologischen Räumen	1094
11.8	Von-Neumann-Räume	1095
11.9	Kompakt getragene Maße	1097
11.10	Von-Neumann-Darstellungen	1098
11.11	Hauptseriendarstellungen von $SL(2; \mathbb{R})$	1101
11.12	Einfache $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln für $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$	1107
11.13	Darstellungen als Moduln über der Maß-Algebra	1109
<b>12</b>	<b>Unitäre Darstellungen</b>	<b>1112</b>
12.1	Irreduzible unitäre Darstellungen von $SL(2; \mathbb{R})$	1112
12.2	Unitäre $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln	1114
12.3	Unitarisierbarkeit	1115
12.4	Unitäre Induktion	1116
12.5	Weitere Beispiele stetiger Darstellungen mit Kategorien, ALT	1118
<b>13</b>	<b>Stetige Darstellungen von Lie-Gruppen</b>	<b>1119</b>
13.1	Differenzieren vektorwertiger Funktionen	1119
13.2	Glatte Vektoren	1122
13.3	Algebraisierung	1127
13.4	Beispiel komplexer Gruppen	1131
13.5	Kohomologische Induktion	1133
13.6	Zulässigkeit irreduzibler unitärer Darstellungen	1136
13.7	Halbeinfaches, später	1138
<b>14</b>	<b>Ab hier noch nicht in der Vorlesung dran</b>	<b>1139</b>
14.1	Wohin?	1139
14.2	Wohin?	1140
14.3	Klassifikation kompakter Liegruppen, Schrott	1140

<b>15</b>	<b>Weiteres zu Liegruppen</b> . . . . .	<b>1141</b>
15.1	Muß woanders hin, Sammelsurium . . . . .	1141
15.2	Die adjungierte Darstellung . . . . .	1143
15.3	Liegruppen . . . . .	1143
15.4	Märchen: Lie-Gruppen und Liealgebren . . . . .	1144
<b>16</b>	<b>Steinbruch und Schrotthalde</b> . . . . .	<b>1146</b>
16.1	Gemischte Übungen . . . . .	1146
16.2	Zusammenhänge . . . . .	1147
16.3	Mannigfaltigkeiten, alt . . . . .	1150
16.4	Alter Beweis, wohl ganz Schrott . . . . .	1153
16.5	Schrott . . . . .	1155
<b>17</b>	<b>Radonmaße und Haar'sche Maße</b> . . . . .	<b>1156</b>
17.1	Stetige Funktionen auf topologischen Räumen . . . . .	1156
17.2	Der Riesz'sche Darstellungssatz . . . . .	1158
17.3	Haar'sche Maße . . . . .	1163
17.4	Der Satz von Tychonoff . . . . .	1170
<b>18</b>	<b>Unbefriedigende Versuche</b> . . . . .	<b>1172</b>
18.1	Restbestände . . . . .	1172
18.2	Radon-Maße, ALT . . . . .	1172

---

# 1 Matrix-Liegruppen

## 1.1 Einfache Darstellungen der Drehgruppen

1.1.1. Zur besseren Motivation der im folgenden entwickelten Theorie bespreche ich zunächst die Klassifikation der endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe. Ich beginne mit einer kurzen Klärung einiger Grundbegriffe der Darstellungstheorie, die in ?? ausführlicher besprochen werden.

**Definition 1.1.2.** Eine **Darstellung**, englisch und französisch **representation**, einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  ist ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum  $V$  und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

Oft bezeichnen wir eine Darstellung abkürzend mit demselben Symbol wie den zugrundeliegenden Vektorraum. Gegeben eine Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$  bezeichnet oft  $\rho_V$  den zugehörigen Gruppenhomomorphismus  $\rho_V : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ .

1.1.3. Im Fall  $V = k^n$  ist  $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n; k)$  die Gruppe der invertierbaren  $(n \times n)$ -Matrizen. Ist der Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  dann auch noch injektiv, so “stellt  $\rho$  die abstrakte Gruppe  $G$  dar als eine konkrete Gruppe von Matrizen”. Daher rührt die Bezeichnung “Darstellung”.

1.1.4. Sei  $G$  eine Gruppe,  $k$  ein Körper und  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. So induziert die Bijektion  $\mathrm{Ens}(G, \mathrm{Ens}(V, V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(G \times V, V)$  aus 1.2.2.26 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Darstellungen} \\ G \rightarrow \mathrm{GL}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} G\text{-Operationen } G \times V \rightarrow V \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array} \right\}$$

wobei wir mit einer “ $G$ -Operation durch  $k$ -lineare Abbildungen” eine  $G$ -Operation  $G \times V \rightarrow V$  auf der Menge  $V$  im Sinne von ?? meinen mit der Eigenschaft, daß gilt  $g(v + w) = gv + gw$  und  $g(\lambda v) = \lambda(gv) \quad \forall g \in G, \lambda \in k$  und  $v, w \in V$ . Gegeben eine Darstellung  $V$  schreiben wir im Lichte dieser Erkenntnis oft statt  $(\rho_V(g))(v)$  auch einfach nur  $gv$ .

*Beispiel 1.1.5.* Jeder Vektorraum  $V$  wird eine Darstellung seiner Automorphismengruppe  $G = \mathrm{GL}(V)$  mittels  $\rho = \mathrm{id}$ . Diese Darstellung heißt die **Standarddarstellung von  $\mathrm{GL}(V)$** .

*Beispiel 1.1.6.* Jeder Vektorraum  $V$  wird eine Darstellung jeder beliebigen Gruppe  $G$  mittels der **trivialen Operation**  $\rho(g) = \mathrm{id}_V \quad \forall g \in G$ .

*Beispiel 1.1.7.* Gegeben eine Gruppe  $G$  und eine  $G$ -Menge  $X$  und ein Körper  $k$  wird der Raum der Funktionen  $V = \text{Ens}(X, k)$  eine Darstellung von  $G$  mittels der Vorschrift

$$(gf)(x) := f(g^{-1}x) \quad \forall g \in G, x \in X$$

Zum Beispiel operiert die Drehgruppe  $\text{SO}(3)$  auf der Kugelschale  $S^2$ , und damit wird der Raum  $\text{Ens}(S^2, \mathbb{R})$  aller reellwertigen Funktionen auf der Kugelschale eine reelle Darstellung der Drehgruppe.

*Beispiel 1.1.8.* Eine Darstellung  $(V, \rho)$  der Gruppe  $\mathbb{Z}$  anzugeben bedeutet nach [1.3.3.11](#) nichts anderes, als einen Automorphismus  $A \in \text{GL}(V)$  des Vektorraums  $V$  anzugeben, nämlich den Automorphismus  $A = \rho(1)$ . Die zugehörige Darstellung wird dann gegeben durch den Gruppenhomomorphismus  $\rho_A : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(V)$  mit  $n \mapsto A^n$ .

**Definition 1.1.9.** Seien  $V, W$  Darstellungen einer Gruppe  $G$  über einem festen Körper  $k$ . Ein **Homomorphismus von Darstellungen** oder **Verflechtungsoperator** oder englisch **intertwining operator** ist eine  $k$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  derart, daß gilt

$$f(gv) = gf(v) \quad \forall v \in V, g \in G$$

Ein **Isomorphismus von Darstellungen** ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei Darstellungen  $V$  und  $W$ , so schreiben wir auch  $V \cong W$  und sagen,  $V$  und  $W$  seien **isomorph**.

*Ergänzung 1.1.10.* Zusammenfassend haben wir so für jede Gruppe  $G$  und jeden Körper  $k$  eine Kategorie  $\text{Mod}_k^G$  konstruiert, die ‘‘Kategorie aller Darstellungen der Gruppe  $G$  über dem Körper  $k$ ’’. Im Rahmen der Kategorientheorie können wir diese Kategorie auch beschreiben als die Kategorie

$$\text{Mod}_k^G = \text{Cat}([G], \text{Mod}_k)$$

im Sinne von ?? aller Funktoren von der Ein-Objekt-Kategorie  $[G]$  aus ?? in die Kategorie  $\text{Mod}_k$  aller  $k$ -Vektorräume.

*Beispiel 1.1.11.* Sind  $(V, A)$  und  $(W, B)$  Vektorräume mit Automorphismus, so ist ein Homomorphismus der zugehörigen Darstellungen  $(V, \rho_A)$  und  $(W, \rho_B)$  der Gruppe  $\mathbb{Z}$  eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

kommutiert. In der Tat folgt aus  $fA = Bf$  nämlich  $fA^n = B^n f$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 1.1.12.** Sei  $G$  eine Gruppe.

1. Eine Teilmenge  $W \subset V$  einer Darstellung  $V$  von  $G$  heißt eine **Unterdarstellung** genau dann, wenn  $W$  ein unter  $G$  stabiler Untervektorraum ist, in Formeln  $g \in G, w \in W \Rightarrow gw \in W$ .
2. Eine Darstellung  $V$  von  $G$  heißt **irreduzibel** oder **einfach**, wenn sie genau zwei Unterdarstellungen hat. Das heißt in anderen Worten, daß einerseits  $V$  nicht der Nullraum ist, und daß andererseits  $0$  und  $V$  die einzigen Unterdarstellungen von  $V$  sind.

1.1.13. Zum Beispiel ist jede eindimensionale Darstellung irreduzibel. Unsere Darstellung  $\text{Ens}(S^2, \mathbb{R})$  der Drehgruppe  $\text{SO}(3)$  ist nicht irreduzibel, denn die konstanten Funktionen oder auch die stetigen Funktionen bilden jeweils eine Unterdarstellung.

**Satz 1.1.14 (Einfache Darstellungen der ebenen Drehgruppe).** *Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der Kreislinie  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  sind sämtlich eindimensional und werden klassifiziert durch die ganzen Zahlen. Genauer erhalten wir eine Bijektion*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache stetige endlichdimensionale} \\ \text{komplexe Darstellungen der Kreislinie } S^1, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift  $n \mapsto (\mathbb{C}, \rho_n)$  mit  $\rho_n(z) = z^n \in \text{GL}(1; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$  für alle  $z \in S^1$ .

1.1.15. Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der ebenen Drehgruppe  $\text{SO}(2)$  sind damit auch klassifiziert, denn es gibt einen, ja sogar genau zwei stetige Gruppenisomorphismen  $\text{SO}(2) \xrightarrow{\sim} S^1$ .

1.1.16. Mit einer stetigen Darstellung  $(V, \rho)$  ist hier schlicht gemeint, daß  $\rho$  stetig sein soll. Im Fall topologischer Vektorräume  $V$  unendlicher Dimension muß die Stetigkeit allerdings sorgfältiger formuliert werden.

*Beweis.* Sei  $\rho : S^1 \rightarrow \text{GL}(V)$  eine von Null verschiedene endlichdimensionale komplexe Darstellung. Da die  $\rho(g)$  paarweise kommutieren, besitzen sie nach ?? einen simultanen Eigenvektor  $v \in V \setminus 0$ . Die von diesem Eigenvektor erzeugte Gerade ist dann jedoch eine Unterdarstellung, folglich ist jede einfache endlichdimensionale komplexe Darstellung unserer Gruppe, wie im übrigen jede einfache endlichdimensionale komplexe Darstellung einer beliebigen kommutativen Gruppe, eindimensional. Folglich wird sie gegeben durch einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , und diese stetigen Gruppenhomomorphismen kennen wir bereits aus [V.1.6.4](#).  $\square$

**Satz 1.1.17 (Einfache Darstellungen der räumlichen Drehgruppe).**

Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der räumlichen Drehgruppe werden klassifiziert durch ihre Dimension. Genauer liefert die Dimension eine Bijektion mit den ungeraden natürlichen Zahlen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \text{Darstellungen der Drehgruppe } \mathrm{SO}(3), \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 3, 5, \dots\}$$

1.1.18. Der Satz gilt analog auch für die einfachen reellen Darstellungen der räumlichen Drehgruppe. Die einfache Darstellung der Dimension 1 ist die triviale Darstellung und die einfache reelle Darstellung der Dimension 3 die Standarddarstellung  $\mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$  bzw.  $\mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(3; \mathbb{C})$ . Die einfache reelle Darstellung der Dimension 5 kann man konstruieren als den Raum aller symmetrischen Matrizen mit Spur Null unter der durch die Konjugation gegebenen Operation. Der Beweis des Satzes wird erst in 2.2.12 gegeben.

*Ergänzung* 1.1.19. Insbesondere beinhaltet der vorhergehende Satz die Behauptung, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\rho : \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  konstant ist. Will man das explizit einsehen, kann man zum Beispiel argumentieren wie folgt: Wir erhalten ja für jeden von Null verschiedenen Vektor  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  eine Einbettung  $\varphi_v : \mathrm{SO}(2) \hookrightarrow \mathrm{SO}(3)$ , indem wir etwa jeder ebenen Drehung in geeigneter Weise eine räumliche Drehung um die entsprechende Achse zuordnen. In Formeln können wir von  $\varphi_{e_3}(A) := \mathrm{diag}(A, 1)$  ausgehen und  $\varphi_v$  so finden, daß gilt  $g\varphi_v g^{-1} = \varphi_{gv}$  für alle  $v \in \mathbb{R}^3$  und  $g \in \mathrm{SO}(3)$ . Der Einfachheit der Notation halber wählen wir einen festen stetigen Isomorphismus  $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(2)$  und fassen unsere Abbildungen so als stetige Gruppenhomomorphismen  $\varphi_v : S^1 \hookrightarrow \mathrm{SO}(3)$  auf. Nach V.1.6.4 gibt es für jedes  $v$  ein  $n = n(v) \in \mathbb{Z}$  mit

$$\rho(\varphi_v(z)) = z^n \quad \forall z \in S^1$$

Andererseits gibt es eine Drehung  $g \in \mathrm{SO}(3)$  mit  $g(v) = -v$ , und für diese Drehung gilt  $g\varphi_v(z)g^{-1} = \varphi_v(z)^{-1}$  für alle  $z \in S^1$ . Wenden wir auf diese Identität  $\rho$  an, so folgt für alle  $z \in S^1$  die von der Mitte aus zu entwickelnde Identität

$$z^n = \rho(\varphi_v(z)) = \rho(g\varphi_v(z)g^{-1}) = \rho(\varphi_v(z)^{-1}) = z^{-n}$$

und wir finden erst  $n(v) = 0$  für alle  $v$ , und mithilfe des ‘‘Satzes vom Fußball’’ ?? dann, daß  $\rho$  konstant sein muß.

*Übung* 1.1.20. Gegeben ein Gruppenhomomorphismus  $H \rightarrow G$  können wir jede Darstellung  $V$  von  $G$  zurückziehen zu einer Darstellung  $\mathrm{res}_G^H V$  von  $H$ . Man zeige, daß wir beim Zurückziehen mit einem inneren Automorphismus  $G \rightarrow G$  eine zur ursprünglichen Darstellung isomorphe Darstellung erhalten.

*Übung 1.1.21.* Gegeben eine Darstellung  $(V, \rho)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  erhalten wir eine Darstellung  $(V^*, \rho^*)$  auf dem Dualraum durch die Vorschrift  $\rho^*(g) = (\rho(g^{-1}))^\top$ . Sie heißt die **kontragrediente Darstellung** zur Darstellung  $(V, \rho)$ . Man zeige, daß eine endlichdimensionale Darstellung einfach ist genau dann, wenn die zugehörige kontragrediente Darstellung einfach ist. Man gebe ein Beispiel für eine eindimensionale Darstellung, die nicht zu ihrer kontragredienten Darstellung isomorph ist.

*Übung 1.1.22.* Man zeige, daß die Quaternionen als reeller Vektorraum eine irreduzible Darstellung der Gruppe  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  aus ?? bilden.

## 1.2 Tangentialraum und Exponentialabbildung

1.2.1. Ich erinnere an die natürliche Topologie auf einem endlichdimensionalen reellen Raum II.6.9.22. Ich erinnere an den Begriff einer glatten Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Raums IV.7.7.12.

**Satz 1.2.2 (Untergruppen als Untermannigfaltigkeiten).** *Jede abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist eine glatte Untermannigfaltigkeit ohne Rand im Raum aller Endomorphismen unseres Vektorraums.*

1.2.3. Bezeichne  $V$  unseren endlichdimensionalen reellen Vektorraum. Man beachte, daß wir von unserer Gruppe  $G \subseteq \text{Aut } V$  keineswegs fordern, daß sie abgeschlossen sein soll im endlichdimensionalen Vektorraum  $\text{End } V$ , vergleiche die Erläuterungen in II.6.5.27. Ausgeschrieben fordern wir vielmehr nur für jede Folge in  $G$ , die bezüglich irgendeiner Norm auf  $\text{End } V$  gegen einen Punkt von  $\text{Aut } V$  konvergiert, daß auch dieser Punkt bereits in  $G$  liegen soll. Eine abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums nennen wir eine **Matrix-Liegruppe**.

*Beispiele 1.2.4.* Typische Beispiele für Matrix-Liegruppen sind: Die Gruppen  $\text{GL}(n; \mathbb{R}) = \text{Aut } \mathbb{R}^n$ ,  $\text{GL}(n; \mathbb{C}) = \text{Aut}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n \subset \text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$  und  $\text{GL}(n; \mathbb{H}) \subset \text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^n$  für den Schiefkörper  $\mathbb{H}$  der Quaternionen aus ??; die Gruppen  $\text{SL}(n; \mathbb{R}) \subset \text{Aut } \mathbb{R}^n$  und  $\text{SL}(n; \mathbb{C}) \subset \text{Aut } \mathbb{C}^n$  aller reellen bzw. komplexen Matrizen mit Determinante Eins; die Gruppen  $\text{O}(n) \subset \text{Aut } \mathbb{R}^n$  und  $\text{U}(n) \subset \text{Aut } \mathbb{C}^n$  aller orthogonalen bzw. unitären Matrizen und darin die Untergruppen  $\text{SO}(n)$  und  $\text{SU}(n)$  aller Matrizen mit Determinante Eins; die Gruppen aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen, oder aller reellen oder komplexen Diagonalmatrizen, jeweils zu einer fest vorgegebenen Zahl von Zeilen und Spalten.

*Vorschau 1.2.5.* Unter einer **Liegruppe** versteht man ganz allgemein eine glatte Mannigfaltigkeit  $G$  mit einer Gruppenstruktur derart, daß die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  und die Inversenbildung  $G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x^{-1}$

beide glatt sind. Hierbei versteht man unter Mannigfaltigkeiten nicht nur eingebettete Mannigfaltigkeiten, sondern allgemeiner abstrakte Mannigfaltigkeiten, wie wir sie in 4.2.1 diskutieren werden. Wir werden dort sehen, wie sich unsere Argumente in diesem Rahmen verallgemeinern lassen. Die Terminologie erinnert an den Begründer der Theorie, den norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842–1899).

1.2.6. Wir zeigen obigen Satz 1.2.2 zusammen mit einer genaueren Aussage, die wir im folgenden formulieren. Dazu erinnern wir für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  an die Exponentialabbildung

$$\begin{aligned} \exp : \text{End } V &\rightarrow \text{Aut } V \\ X &\mapsto \sum_{\nu \geq 0} X^\nu / \nu! \end{aligned}$$

aus II.7.5.21. Sie ist eine glatte Abbildung nach IV.5.4.7 und ihr Differential am Ursprung ist die Identität nach IV.1.2.17.

**Definition 1.2.7.** Eine Abbildung von einer Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen endlichdimensionalen reellen Raum heißt **glatt** genau dann, wenn die daraus durch Vorschalten einer beliebigen Karte unserer Untermannigfaltigkeit entstehende Abbildung glatt ist im Sinne von IV.5.4.1.

**Definition 1.2.8.** Eine Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler reeller Räume heißt **glatt** genau dann, wenn ihre Verknüpfung mit der Einbettung der zweiten Untermannigfaltigkeit glatt ist im Sinne von 1.2.7. Ein **Diffeomorphismus** von glatten Untermannigfaltigkeiten ist eine glatte bijektive Abbildung mit glatter Umkehrabbildung.

*Übung 1.2.9.* Eine Karte einer glatten Untermannigfaltigkeit ohne Rand eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums im Sinne von IV.4.3.15 ist nichts anderes als ein Diffeomorphismus zwischen einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^k$  und einer offenen Teilmenge unserer Mannigfaltigkeit.

1.2.10. Für das folgende erinnere ich an den Begriff des Tangentialraums  $T_x M$  einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  an einer Stelle  $x \in M$ , wie er in IV.7.3.1 als Untervektorraum des Richtungsraums  $T_x M \subset \vec{X}$  eingeführt wurde. Im Fall einer Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $M \subset V$  notieren wir das Urbild  $\text{trans}^{-1}(T_x M) \subset V$  dieses Tangentialraums unter unserer kanonischen Identifikation

$$\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen dem Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums aus ?? oft abkürzend auch mit  $T_x M \subset V$ . Insbesondere haben wir

im Fall einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums  $M \subseteq X$  in stets  $T_x M = \vec{X}$ , und im Fall einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $M \subseteq V$  in unserer abkürzenden Notation  $T_x M = V$ .

**Satz 1.2.11 (Tangentialraum und Exponentialabbildung).** *Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Für jede abgeschlossene Untergruppe seiner Automorphismengruppe  $G \triangleleft \text{Aut } V$  kann der Tangentialraum beim neutralen Element  $T_e G$  der Untermannigfaltigkeit  $G \subset \text{End } V$  beschrieben werden als*

$$T_e G = \text{trans}\{X \in \text{End } V \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset G\}$$

und die Verknüpfung  $\exp \circ \text{trans}^{-1} : T_e G \rightarrow G$  liefert einen Diffeomorphismus im Sinne von 1.2.8 zwischen einer offenen Umgebung der Null im Tangentialraum  $T_e G$  und einer offenen Umgebung des neutralen Elements  $e \in G$ .

*Beispiel 1.2.12.* Der Satz gilt a fortiori auch für jeden endlichdimensionalen komplexen oder quaternionalen Vektorraum und kann am Beispiel der Untergruppe  $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$  der Kreislinie besonders gut veranschaulicht werden: In diesem Fall haben wir  $T_1 S^1 = i\mathbb{R}$ .

*Beweis von 1.2.2 und 1.2.11.* Wir zeigen zunächst einmal, daß die Menge

$$\mathfrak{g} := \{X \in \text{End } V \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset G\}$$

ein Untervektorraum des Endomorphismenraums ist. Nach dem Umkehrsatz IV.4.1.2 definiert ja die Exponentialabbildung  $\text{End } V \rightarrow \text{Aut } V$  einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung  $A$  der Null und einer offenen Umgebung  $B$  der Identität. Jetzt brauchen wir eine Formel, die ich als eigenständiges Lemma formuliere.

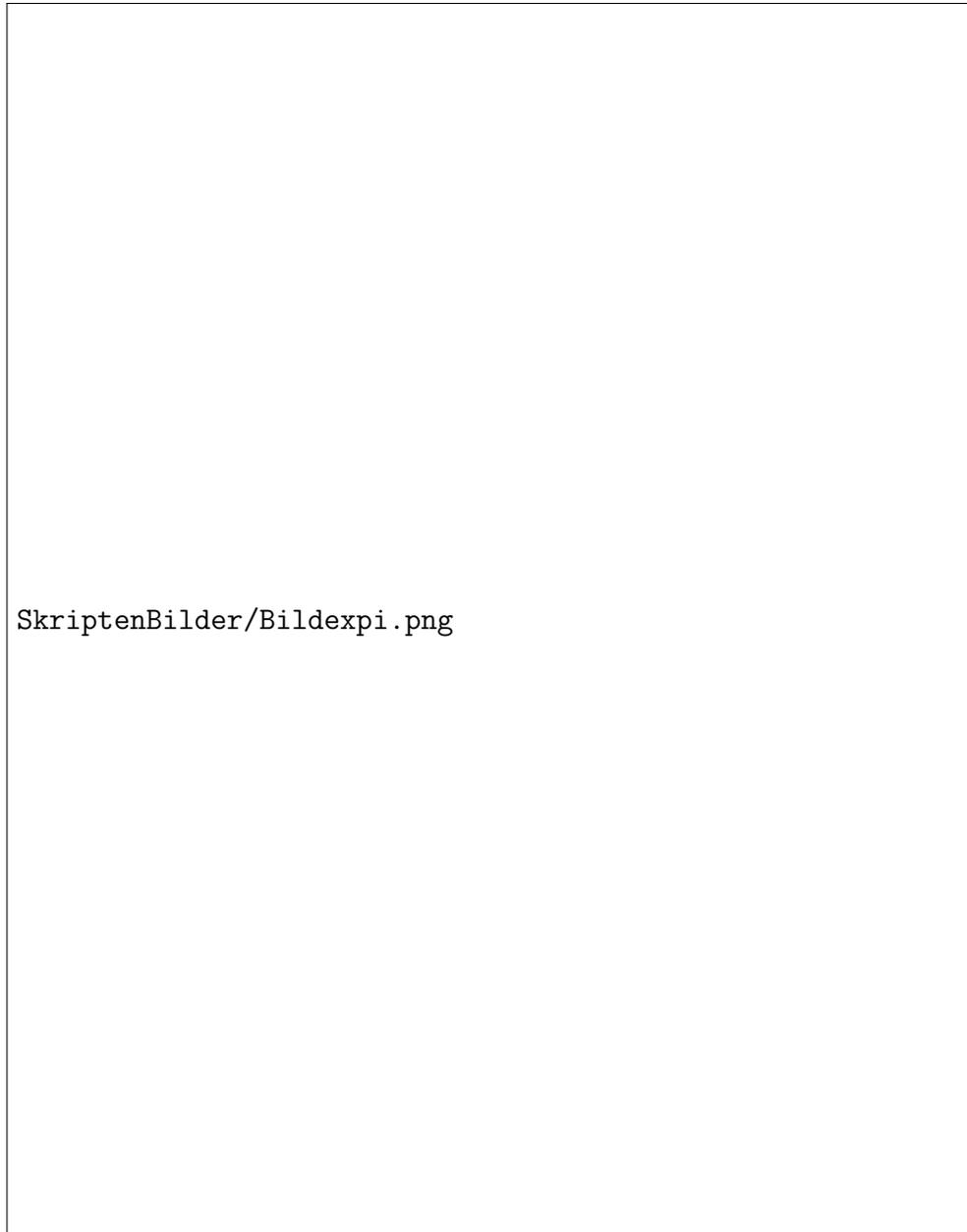
**Lemma 1.2.13 (Produktformel von Trotter).** *Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, so gilt für alle  $X, Y \in \text{End } V$  die Formel*

$$\exp(X + Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(\frac{X}{n}\right) \exp\left(\frac{Y}{n}\right) \right)^n$$

*Beweis.* Für kleine  $t \in \mathbb{R}$  gilt sicher

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp(Z(t))$$

für eine wohldefinierte glatte Kurve  $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{End } V$ . Ein Vergleich der Differentiale zeigt  $\dot{Z}(0) = X + Y$  und folglich  $Z(t) = t(X + Y) + t\eta(t)$  für  $\eta$



Der besseren Anschaulichkeit halber habe ich hier nicht den Tangentialraum  $T_1S^1 = i\mathbb{R}$  an die Kreislinie eingezeichnet, sondern den “zum Fußpunkt 1 verschobenen” affinen Raum  $1 + T_1S^1 \subset \mathbb{C}$ . Die kleinen Pfeile deuten die Exponentialabbildung an, genauer die Abbildung  $1 + ia \mapsto \exp ia$ .

stetig bei Null mit Funktionswert Null. So ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n &= \exp\left(Z\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(nZ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(X + Y + \eta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

und das strebt für  $n \rightarrow \infty$  offensichtlich gegen  $\exp(X + Y)$ .  $\square$

Unsere Menge  $\mathfrak{g}$  aller  $X \in \text{End } V$  mit  $\exp(\mathbb{R}X) \subset G$  vom Beginn des Beweises ist nun sicher für jede Untergruppe  $G$  stabil unter der Multiplikation mit reellen Zahlen, und nach der Produktformel von Trotter 1.2.13 gilt im Fall einer abgeschlossenen Untergruppe  $G$  auch  $X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow (X + Y) \in \mathfrak{g}$ . Damit ist die Menge  $\mathfrak{g}$  in der Tat ein Untervektorraum von  $\text{End } V$ . Wir wählen nun zu diesem Untervektorraum ein Komplement  $\mathfrak{t}$  und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: \text{End } V &\rightarrow \text{Aut } V \\ X + Y &\mapsto (\exp X)(\exp Y) \end{aligned}$$

für alle  $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{t}$ . Offensichtlich ist  $\psi^{-1}(G)$  stabil unter der Addition von Vektoren aus  $\mathfrak{g}$ . Weiter hat  $\psi$  bijektives Differential bei Null und induziert folglich nach dem Umkehrsatz IV.4.1.2 oder besser seiner glatten Variante IV.5.4.14 einen Diffeomorphismus  $\psi: A \xrightarrow{\sim} B$  zwischen geeigneten offenen Umgebungen der Null in  $\text{End } V$  bzw. der Identität in  $\text{Aut } V$ . Wenn wir zeigen können, daß  $\psi$  für hinreichend kleine  $A$  und  $B$  sogar eine Bijektion

$$\psi: A \cap \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} B \cap G$$

induziert, so liefert die Umkehrabbildung von  $\psi$  eine Plättung im Sinne von IV.4.3.2 der Gruppe  $G$  um das neutrale Element. Die Umkehrabbildung von  $(g \cdot) \circ \psi$  liefert dann auch eine Plättung um ein beliebiges Element  $g \in G$  und 1.2.2 ist bewiesen und 1.2.11 folgt aus dem Beweis gleich auch noch mit. Also müssen wir nur noch die behauptete Eigenschaft von  $\psi$  zeigen. Da  $\psi^{-1}(G)$  stabil ist unter der Addition von Vektoren aus  $\mathfrak{g}$ , reicht es zu zeigen, daß die Null ein offener Punkt von  $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$  ist, daß es also eine Umgebung der Null in  $\mathfrak{t}$  gibt, die  $\psi^{-1}(G)$  nur in Null trifft. Nun ist aber  $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$  sicher stabil unter der Multiplikation mit ganzen Zahlen. Wäre außerdem die Null ein Häufungspunkt von  $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ , so fänden wir nach dem anschließenden technischen Lemma 1.2.14 ein von Null verschiedenes  $X \in \mathfrak{t}$  mit  $\mathbb{R}X \subset \psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$  im Widerspruch zu unserer Annahme  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g} = 0$ .  $\square$

**Lemma 1.2.14.** *Ist eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums stabil unter der Multiplikation mit allen ganzen Zahlen und ist der Ursprung ein Häufungspunkt unserer Teilmenge, so enthält unsere Teilmenge eine Gerade durch den Ursprung.*



Die  $\mathfrak{g}$ -Linie zusammen mit den parallelen gestrichelten Linien stellen die unter Addition mit Vektoren aus  $\mathfrak{g}$  stabile Menge  $\psi^{-1}(G)$  dar.

*Beweis.* Sei  $M$  unser endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $C \subset M$  unsere abgeschlossene Teilmenge. Wir wählen eine Norm  $|\cdot|$  auf  $M$ . Nach unseren Annahmen finden wir eine Nullfolge  $c_n$  in  $C \setminus \{0\}$ . Bezeichnet  $\beta_n$  die kleinste ganze Zahl über  $1/|c_n|$ , so haben wir offensichtlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n c_n| = 1$  und nach Heine-Borel besitzt die Folge  $\beta_n c_n$  eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß sie bereits selbst konvergiert, sagen wir gegen ein  $d \in C$ , in Formeln  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n c_n = d$ . Sicher gilt dann  $|d| = 1$ . Ist weiter  $t \in \mathbb{R}$  beliebig, so gibt es wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$  eine Folge von ganzen Zahlen  $\gamma_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n / \beta_n = t$  und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n c_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n / \beta_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n c_n) = td$$

Da  $C$  abgeschlossen ist, folgt  $\mathbb{R}d \subset C$ . □

*Ergänzende Übung 1.2.15.* Man folgere direkt aus 1.2.14, daß jede zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ein Untervektorraum ist. Hinweis: Induktion.

*Beispiel 1.2.16.* Der Tangentialraum an  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$  beim neutralen Element ist  $\mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ . Der Tangentialraum an  $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$  beim neutralen Element ist die Menge  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$  aller  $(n \times n)$ -Matrizen mit Spur Null. In der Tat beachte man die Formel

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{tr} A)$$

die für komplexe obere Dreiecksmatrizen offensichtlich ist und für beliebige komplexe Matrizen mit dem Satz über die Trigonalisierbarkeit ?? daraus folgt, daß beide Seiten konstant sind auf Konjugationsklassen, daß also beide Seiten für alle Matrizen  $A$  und alle invertierbaren Matrizen  $B$  auf  $A$  und  $BAB^{-1}$  denselben Wert annehmen. Diese Formel zeigt, daß  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$  unter der Exponentialabbildung in  $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$  landet, und daraus folgt bereits  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R}) \subset T_e \mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$ . Andererseits umfaßt  $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$  keine Umgebung der Einheitsmatrix in  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ , und daraus folgt  $T_e \mathrm{SL}(n; \mathbb{R}) \neq \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ . Beides zusammen zeigt dann die Gleichheit  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R}) = T_e \mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$ . Ein besseres Argument liefert später 1.6.15.

*Beispiel 1.2.17.* Der Tangentialraum beim neutralen Element  $e = I$  der Gruppe  $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$  ist der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen

$$T_I \mathrm{O}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$$

Um das zu sehen, wenden wir 1.2.11 an. In der Tat folgt aus  $X + X^T = 0$  sofort  $I = \exp(tX + tX^T) = \exp(tX) \exp(tX^T) = \exp(tX) \exp(tX)^T$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und umgekehrt folgt für  $X \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  aus  $\exp(tX) \exp(tX)^T = I$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  durch Bilden der Ableitung nach  $t$  bei  $t = 0$  auch sofort

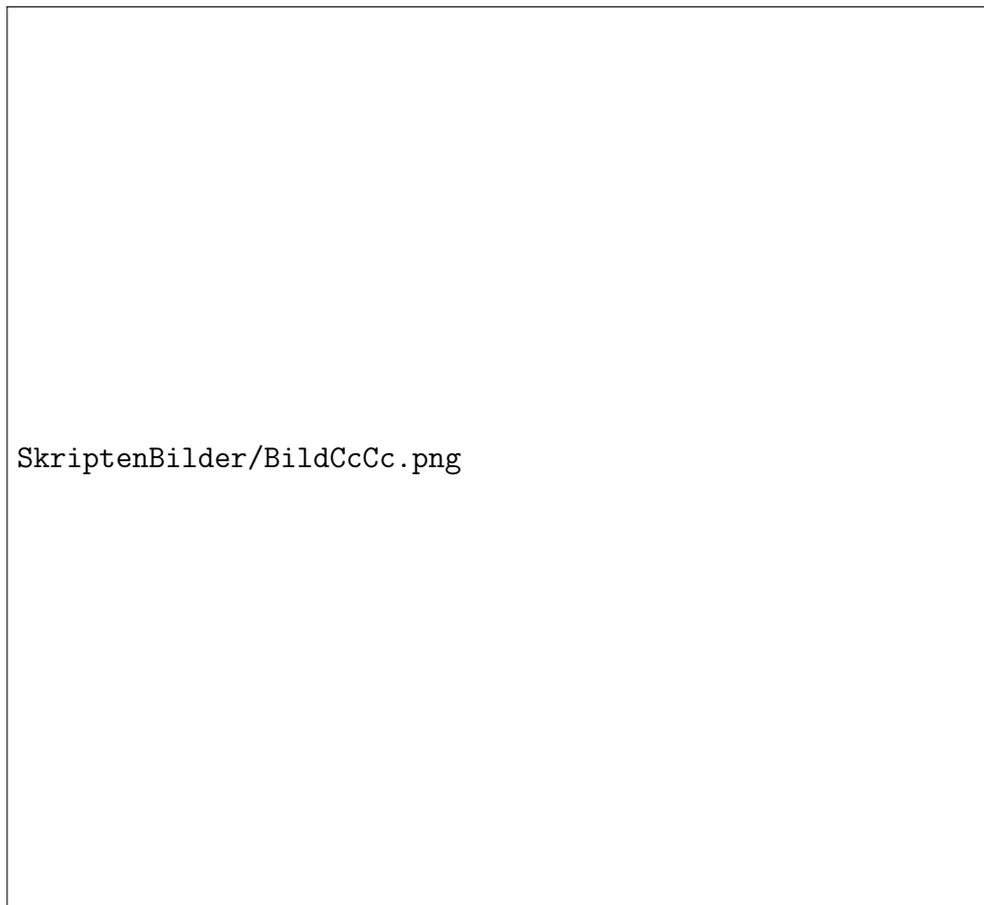


Illustration zum Beweis von [1.2.14](#). Die Kreislinie stellt den Einheitskreis dar, die Kreuzchen, Kringelchen und Punkte die ersten Folgenglieder  $c_0, c_1, c_2$  und ihre Vielfachen.

$X + X^T = 0$ . Die Bestimmung des Tangentialraums liefert für die Dimension sofort  $\dim \mathcal{O}(n) = n(n-1)/2$ . Die Untergruppe  $\mathrm{SO}(n) \subset \mathcal{O}(n)$  ist nach IV.3.4.14 zusammenhängend und als Urbild von 1 unter  $\det$  auch abgeschlossen. Da ihr Komplement als Urbild von  $(-1)$  unter  $\det$  ebenfalls abgeschlossen ist, und da dies Komplement darüber hinaus auch zusammenhängend, ja sogar homöomorph zu  $\mathrm{SO}(n)$  ist, erhalten wir damit eine Darstellung von  $\mathcal{O}(n)$  als eine disjunkte Vereinigung von zwei offenen zusammenhängenden Teilmengen.

*Übung 1.2.18.* Man zeige: Der Tangentialraum beim neutralen Element  $e = I$  der Gruppe  $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^T = I\}$  der unitären Matrizen ist der Raum der schiefhermiteschen Matrizen

$$\mathrm{T}_I \mathrm{U}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^T = 0\}$$

Hinweis: Es geht auch noch allgemeiner, vergleiche 1.2.26.

*Übung 1.2.19.* Ich erinnere an das Kreuzprodukt auf einem dreidimensionalen orientierten reellen euklidischen Vektorraum  $V$ . Gegeben ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum  $V$  liefert mit dieser Begriffsbildung die Wahl einer Orientierung einen Vektorraumisomorphismus

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e \mathcal{O}(V) \\ \vec{v} &\mapsto (\vec{v} \times) \end{aligned}$$

Der Automorphismus  $\exp(\vec{v} \times)$  bedeutet geometrisch eine Drehung um die Achse  $\mathbb{R}\vec{v}$  mit Winkel  $\|\vec{v}\|$  im Bogenmaß. Ist genauer  $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $V$ , so zeige man für die Matrix  $\exp(t\vec{v}_1 \times)$  in dieser Basis die Formel

$${}_{\mathcal{B}} [\exp(t\vec{v}_1 \times)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

*Ergänzung 1.2.20.* Die Exponentialabbildungen  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$  und ebenso  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$  sind nicht surjektiv. In der Tat sind alle nicht nilpotenten Matrizen der zugehörigen Liealgebren über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar, folglich sind alle nicht unipotenten Matrizen im Bild der Exponentialabbildung über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar. In beiden Gruppen gibt es jedoch auch Elemente, wie etwa den  $(2 \times 2)$ -Jordanblock zum Eigenwert  $-1$ , die weder unipotent noch über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar sind, und die folglich nicht zum Bild der Exponentialabbildung gehören können.

*Übung 1.2.21 (Beispiel für eine bijektive Exponentialabbildung).* Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Die Logarithmusreihe liefert eine inverse Abbildung.

*Übung 1.2.22 (Beispiel für eine surjektive Exponentialabbildung).* Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller komplexen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen eine Surjektion  $\exp : \text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(2; \mathbb{C})$  ist. Hinweis: Jordan-Zerlegung und 1.2.21. Man folgere, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller komplexen invertierbaren Matrizen eine Surjektion ist.

*Übung 1.2.23.* Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller reellen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Jordan-Zerlegung und 1.2.21 und II.7.4.11.

*Übung 1.2.24 (Beispiel für eine nicht surjektive Exponentialabbildung).* Ist  $x = x_s + x_n$  die additive Jordanzerlegung einer Matrix  $x \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  oder  $x \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ , so ist  $\exp x = (\exp x_s)(\exp x_n)$  die multiplikative Jordanzerlegung von  $\exp x$ . Man folgere, daß der  $(2 \times 2)$ -Jordanblock zum Eigenwert  $-1$  nicht zum Bild von  $\exp : \text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(2; \mathbb{R})$  gehören kann, obwohl er durchaus zur Zusammenhangskomponente der Einheitsmatrix gehört.

*Übung 1.2.25.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und ein Vektor  $v \in V$  hat die Matrix-Liegruppe  $G = \{g \in \text{Aut } V \mid gv = v\}$  am neutralen Element den Tangentialraum  $T_e G = \{x \in \text{End } V \mid xv = 0\}$ . Des weiteren hat die Matrix-Liegruppe  $G = \{g \in \text{Aut } V \mid gv \in \mathbb{R}v\}$  am neutralen Element den Tangentialraum  $T_e G = \{x \in \text{End } V \mid xv \in \mathbb{R}v\}$ .

*Übung 1.2.26.* Sind  $V, W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und ist  $\omega : V \times V \rightarrow W$  bilinear und  $G \subset \text{GL}(V)$  die Gruppe aller  $g$  mit  $\omega(gv, gw) = \omega(v, w)$  für alle  $v, w \in V$ , so besteht  $\text{Lie } G \subset \text{End}(V)$  genau aus allen Endomorphismen  $X$  mit  $\omega(Xv, w) + \omega(v, Xw) = 0$  für alle  $v, w \in V$ .

### 1.3 Topologischer Zusammenhang

1.3.1. Um zu zeigen, daß eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe einer Matrix-Liegruppe bereits durch ihren Tangentialraum am neutralen Element eindeutig festgelegt wird, ist der topologische Zusammenhangsbegriff besonders bequem. Wir diskutieren ihn und seine Beziehung zum Begriff des Wegzusammenhangs aus IV.3.4.1 an dieser Stelle gleich in voller Allgemeinheit.

**Definition 1.3.2.** Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend** genau dann, wenn er nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen schreiben läßt.

1.3.3. Gleichbedeutend könnten wir natürlich auch fordern, daß unser nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen schreiben läßt. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes nennen wir nach unseren allgemeinen Konventionen zusammenhängend genau dann, wenn sie zusammenhängend ist als topologischer Raum mit der induzierten Topologie.

1.3.4. In der Literatur wird meist auch die leere Menge zusammenhängend genannt. Mir scheint das jedoch unnatürlich, da sich mit dieser Konvention jeder zusammenhängende Raum in eine Vereinigung von zwei disjunkten offenen zusammenhängenden Teilmengen zerlegen ließe.

*Beispiel 1.3.5.* Ein diskreter topologischer Raum ist zusammenhängend genau dann, wenn er aus genau einem Punkt besteht.

*Ergänzende Übung 1.3.6 (Die Sinuskurve des Topologen).* Man betrachte in  $\mathbb{R}^2$  die Vereinigung des Graphen der Funktion  $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin(1/x)$  mit der  $y$ -Achse und zeige, daß diese Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

**Satz 1.3.7.** *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, daß alle nichtleeren reellen Intervalle zusammenhängend sind. In der Tat, wäre ein reelles Intervall  $I$  die disjunkte Vereinigung  $I = U \sqcup V$  von zwei nichtleeren offenen Teilmengen, so wäre die Abbildung  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \in U$  und  $f(x) = 1$  für  $x \in V$  stetig, da eben unter dieser Abbildung Urbilder offener Mengen, ja sogar beliebiger Mengen stets wieder offen wären. Die Existenz einer derartigen Abbildung steht jedoch im Widerspruch zum Zwischenwertsatz II.3.2.6. Also sind alle nichtleeren reellen Intervalle zusammenhängend. Nun argumentieren wir durch Widerspruch. Sei  $X$  nicht leer und nicht zusammenhängend, also die disjunkte Vereinigung  $X = U \sqcup V$  zweier nichtleerer offener Teilmengen. Gäbe es einen Weg  $\varphi : [a, b] \rightarrow X$  mit  $\varphi(a) \in U$  und  $\varphi(b) \in V$ , so wäre  $[a, b] = \varphi^{-1}(U) \sqcup \varphi^{-1}(V)$  eine disjunkte Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  in zwei nichtleere offene Teilmengen, und das stünde im Widerspruch zu unserem Erkenntnis, daß Intervalle zusammenhängend sind. Also kann es keinen solchen Weg geben und  $X$  ist auch nicht wegzusammenhängend.  $\square$

*Ergänzende Übung 1.3.8.* Das Bild eines zusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets wieder zusammenhängend. Die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind genau die nichtleeren Intervalle.

**Lemma 1.3.9.** *Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung, so ist unser Raum zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist.*



Ein Teil der Sinuskurve des Topologen, die in der Nähe der  $y$ -Achse  
allerdings schwer zu zeichnen ist

*Beweis.* Wegen 1.3.7 müssen wir nur zeigen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen zusammenhängend bereits wegzusammenhängend impliziert. Nach IV.3.4.2 sind unter den gegebenen Voraussetzungen die Wegzusammenhangskomponenten offen. Ist unser Raum nicht leer und nicht wegzusammenhängend, so hat er mindestens zwei Wegzusammenhangskomponenten, und nehmen wir eine dieser Komponenten und die Vereinigung der Übrigen, so erhalten wir eine Überdeckung durch zwei nichtleere offene Teilmengen. Also ist unter diesen Voraussetzungen unser Raum auch nicht zusammenhängend.  $\square$

**Proposition 1.3.10.** *Eine zusammenhängende Matrix-Liegruppe wird von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.*

*Vorschau 1.3.11.* In 3.7.13 zeigen wir dieselbe Aussage allgemeiner für beliebige sogenannte “topologische Gruppen”.

*Beweis.* Die von einer Umgebung  $U$  des neutralen Elements erzeugte Untergruppe  $H \subset G$  ist offen in unserer Gruppe  $G$ , da für jedes  $h \in H$  auch seine Umgebung  $hU$  in  $H$  enthalten ist. Dann sind auch alle Linksnebenklassen  $Hg$  unserer Untergruppe offen in  $G$ . Als Bahnen der Linksoperation von  $H$  auf  $G$  sind sie aber paarweise disjunkt, und für  $G$  zusammenhängend folgt dann aus 1.3.9 bereits, daß es nur eine einzige Linksnebenklasse geben kann, also  $H = G$ .  $\square$

**Korollar 1.3.12.** *Haben zwei zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums denselben Tangentialraum beim neutralen Element, so stimmen sie überein.*

*Beweis.* Nach Lemma 1.3.10 wird eine zusammenhängende Matrix-Liegruppe von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt. Wegen 1.2.11 umfaßt das Bild der Exponentialabbildung stets eine Umgebung des neutralen Elements, folglich wird eine zusammenhängende Matrix-Liegruppe stets vom Bild ihres Tangentialraums beim neutralen Element unter der Exponentialabbildung erzeugt.  $\square$

## 1.4 Ergänzungen zum Zusammenhangsbegriff\*

1.4.1. Der folgende Abschnitt wird in dieser Vorlesung erst später relevant werden, er sollte jedoch vor 6.4.15 irgendwann mal drankommen.

**Lemma 1.4.2.** *Das Bild eines zusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets zusammenhängend.*

*Beweis.* Es reicht, wenn wir für eine stetige Surjektion  $f : X \rightarrow Y$  aus  $Y$  nicht zusammenhängend folgern, daß auch  $X$  nicht zusammenhängend ist. Ist jedoch  $Y = Y_0 \sqcup Y_1$  eine Zerlegung in zwei offene, disjunkte, nichtleere Teilmengen, so auch  $X = f^{-1}(Y_0) \sqcup f^{-1}(Y_1)$ . Ist weiter  $Y$  leer, so auch  $X$ . Das Lemma folgt.  $\square$

**Lemma 1.4.3.** *Für einen topologischen Raum sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Raum ist zusammenhängend;*
2. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen Raum mit der diskreten Topologie ist einwertig;*
3. *Jede stetige Abbildung von unserem Raum in einen zweielementigen Raum mit der diskreten Topologie ist einwertig.*

1.4.4. Wir verwenden hier unsere Konvention 1.2.2.8, nach der eine Abbildung einwertig heißt genau dann, wenn ihr Bild aus genau einem Element besteht.

*Beweis.*  $1 \Rightarrow 2$  folgt aus 1.4.2, da das Bild einer stetigen Abbildung unseres zusammenhängenden Raums in einen diskreten Raum notwendig zusammenhängend und diskret ist und damit aus einem einzigen Punkt bestehen muß.  $2 \Rightarrow 3$  ist klar.  $3 \Rightarrow 1$  zeigt man durch Widerspruch: Ist unser Raum nicht zusammenhängend, so ist er entweder leer und die einzige Abbildung in unseren zweielementigen Raum ist nicht einwertig, oder er besitzt eine Zerlegung in zwei disjunkte nichtleeren offenen Teilmengen. Dann aber können wir eine stetige nicht einwertige Abbildung in unsere zweielementige Menge angeben durch die Vorschrift, daß sie auf der einen Teilmenge das eine Element als Wert annehmen soll und auf der anderen das andere.  $\square$

1.4.5. Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  ist zusammenhängend genau dann, wenn  $A$  ein nichtleeres Intervall ist. Das folgt aus Lemma 1.4.3 mit dem Zwischenwertsatz. Wir sehen insbesondere, daß die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{Q}$  genau die einelementigen Teilmengen sind. Topologische Räume mit dieser Eigenschaft heißen **total unzusammenhängend**.

**Definition 1.4.6.** Eine **Zusammenhangskomponente** eines topologischen Raums ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge.

**Lemma 1.4.7.** 1. *Jeder Punkt eines topologischen Raums liegt in genau einer Zusammenhangskomponente besagten Raums.*

2. *Ist eine Teilmenge eines topologischen Raums zusammenhängend, so ist auch ihr Abschluß zusammenhängend. Insbesondere sind die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raums stets abgeschlossen.*

3. Ist  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raums  $X$  mit nichtleerem Schnitt  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ , so ist auch die Vereinigung  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  zusammenhängend.

*Beweis.* 2. Sei  $A$  unsere zusammenhängende Teilmenge. Da nach Annahme  $A$  nicht leer ist, gilt dasselbe für  $\bar{A}$ . Ist  $\bar{A}$  nicht zusammenhängend, so zerfällt  $\bar{A}$  also in zwei nichtleere disjunkte abgeschlossene Teilmengen  $\bar{A} = A_1 \sqcup A_2$ . Nach der Definition von  $\bar{A}$  kann keines der  $A_i$  schon  $A$  enthalten, also ist  $A = (A_1 \cap A) \sqcup (A_2 \cap A)$  eine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen, und damit ist auch  $A$  nicht zusammenhängend im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. Wir setzen  $Y = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ . Sei  $Y = U \cup V$  eine Zerlegung von  $Y$  in zwei offene disjunkte Teilmengen. Es gilt zu zeigen, daß  $U$  oder  $V$  schon ganz  $Y$  sein muß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen  $U \cap \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ . Da die  $A$  zusammenhängend sind, folgt dann schon  $U \supset A$  für alle  $A$  und damit  $U = Y$ .

1. Nach 3 ist die Vereinigung über alle zusammenhängenden Teilmengen, die einen gegebenen Punkt enthalten, selbst zusammenhängend.  $\square$

*Übung 1.4.8.* Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raums eine zusammenhängende Umgebung, so sind seine Zusammenhangskomponenten offen.

1.4.9. Wir geben einen alternativen Beweis für den Satz 1.3.7, nach dem jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Sei dazu  $X$  unser Raum. Als wegzusammenhängender Raum ist  $X$  nicht leer. Ist  $x \in X$  ein Punkt, so ist  $X$  die Vereinigung über die Bilder aller Wege  $\gamma$  in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$ , in Formeln

$$X = \bigcup_{\gamma(0)=x} \gamma([0, 1])$$

Alle diese Bilder  $\gamma([0, 1])$  sind zusammenhängend als Bilder zusammenhängender Mengen und ihr Schnitt ist nicht leer, denn er enthält  $x$ . Nach 1.4.7.3 ist also  $X$  zusammenhängend.

*Übung 1.4.10.* Man zeige: Das Achsenkreuz  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$  ist nicht homöomorph zur Zahlengerade  $\mathbb{R}$ .

## 1.5 Liealgebren von Matrix-Liegruppen

1.5.1. Im Lichte von 1.3.12 stellt sich sofort die Frage, welche reellen Untervektorräume in  $\text{End } V$  denn von der Gestalt  $T_e G$  sind für abgeschlossene Untergruppen  $G \triangleleft \text{Aut } V$ . Eine notwendige Bedingung liefert der folgende Satz.

**Proposition 1.5.2 (Stabilität von  $T_eG$  unter dem Kommutator).** Für jede abgeschlossene Untergruppe  $G \triangleleft \text{Aut } V$  der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  ist ihr Tangentialraum beim neutralen Element  $T_eG$  stabil unter dem Bilden des Kommutators, d.h. mit  $X$  und  $Y$  gehört auch  $XY - YX$  zu  $T_eG$ .

*Beweis.* Für jedes  $g \in \text{Aut } V$  betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \text{int}(g) : \text{End } V &\rightarrow \text{End } V \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

Ihr Differential bei der Einheitsmatrix notieren wir  $\text{Ad}(g)$ . Da  $\text{int}(g)$  linear ist, wird  $\text{Ad}(g)$  durch dieselbe Formel gegeben wie  $\text{int}(g)$ . Unter der zusätzlichen Voraussetzung  $g \in G$  stabilisiert  $\text{int}(g)$  die Menge  $G$  und induziert folglich eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : T_eG &\rightarrow T_eG \\ X &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

Insbesondere verläuft für alle  $Y \in T_eG$  die Kurve  $t \mapsto \exp(tY)X \exp(-tY)$  ganz in  $T_eG$ . Damit liegt auch ihr Geschwindigkeitsvektor bei  $t = 0$  in  $T_eG$ , und der ist nach der Produktregel gerade der Kommutator  $YX - XY$ .  $\square$

1.5.3. Natürlich ist  $g \mapsto \text{int}(g)$  aus dem vorhergehenden Beweis eine Darstellung  $\text{Aut } V \rightarrow \text{GL}(\text{End } V)$  und liefert damit auch eine Darstellung  $G \rightarrow \text{GL}(\text{End } V)$ . Unsere Erkenntnisse aus dem Beweis lassen sich dann auch dahingehend formulieren, daß für diese Darstellung von  $G$  der Teilraum  $T_eG$  eine Unterdarstellung ist. Diese Darstellung

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(T_eG)$$

heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Matrix-Liegruppe  $G$ , und daher rührt auch die Notation  $\text{Ad}$ . Wir werden diese Konstruktion in 4.8 ausführlich besprechen. Der Kommutator wird oft notiert in der Form

$$YX - XY = [X, Y]$$

und heißt auch die **Lie-Klammer**. Einen Vektorraum  $A$  über einem Körper  $k$  mit einer  $k$ -bilinearen Verknüpfung  $A \times A \rightarrow A$  bezeichnet man ganz allgemein als eine  **$k$ -Algebra**, vergleiche ???. Gegeben eine Matrix-Liegruppe  $G$  wird demnach der Tangentialraum beim neutralen Element  $T_eG$  mit der Verknüpfung  $(X, Y) \mapsto [X, Y]$  eine  $\mathbb{R}$ -Algebra. Sie heißt die **Lie-Algebra von  $G$**  und wird notiert

$$\text{Lie } G := T_eG$$

*Übung 1.5.4.* Ist  $A$  eine endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Algebra und  $G \subset \text{GL}(A)$  ihre Automorphismengruppe, so besteht  $\text{Lie } G \subset \text{End}(A)$  genau aus allen **Derivationen von  $A$** , als da heißt, aus allen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $d : A \rightarrow A$  mit der Eigenschaft  $d(ab) = (da)b + a(db)$  für alle  $a, b \in A$ .

*Übung 1.5.5.* Ist  $G$  eine Matrix-Liegruppe und  $N \triangleleft G$  ein abgeschlossener Normalteiler, so gilt für alle  $X \in \text{Lie } G$  und  $Y \in \text{Lie } N$  sogar  $[X, Y] \in \text{Lie } N$ . In der in ?? eingeführten Terminologie ist also die Liealgebra eines Normalteilers stets ein Lie-Ideal.

*Ergänzung 1.5.6.* Unter einer **partiellen Matrix-Liegruppe** verstehen wir eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset \text{Aut}(V)$  der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums derart, daß (1) die Identität zu  $M$  gehört und daß es (2) eine Umgebung  $U$  der Identität gibt mit den Eigenschaften  $(U \cap M)(U \cap M) \subset M$  und  $(U \cap M)^{-1} \subset M$ . Jede offene Umgebung der Identität in einer partiellen Matrix-Liegruppe ist natürlich auch ihrerseits eine partielle Matrix-Liegruppe. Wir nennen zwei partielle Matrix-Liegruppen **äquivalent** genau dann, wenn es eine Umgebung der Identität gibt, die mit beiden denselben Schnitt hat. Eine Äquivalenzklasse unter dieser Äquivalenzrelation nennen wir einen **Matrix-Liegruppenkeim**. Das Bilden des Tangentialraums beim neutralen Element liefert nun eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Matrix-Liegruppenkeime} \\ \text{in } \text{Aut}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Unter-Liealgebren} \\ \text{von } \text{End}(V) \end{array} \right\}$$

und die inverse Abbildung ordnet jeder Unter-Liealgebra  $\mathfrak{g} \subset \text{End}(V)$  den Matrix-Liegruppenkeim zu, der durch das Bild hinreichend kleiner offener Umgebungen der Null in  $\mathfrak{g}$  unter der Exponentialabbildung repräsentiert wird. Wir zeigen das erst in 5.9.4, es folgt aus dem sogenannten "Frobenius-Theorem" 5.9.2.

1.5.7. Unter einer **Lie-Algebra** über einem Körper  $k$  versteht man im allgemeinen eine  $k$ -Algebra  $\mathfrak{g}$ , deren Verknüpfung in diesem Zusammenhang meist  $(x, y) \mapsto [x, y]$  notiert wird, mit der Eigenschaft  $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ , in der darüber hinaus die **Jacobi-Identität**

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

gilt für alle  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ . Daß in unseren Algebren  $\text{Lie } G$  diese Formeln gelten, rechnet man mühelos nach. Daß gerade diese Formeln einen mit der Theorie der Liegruppen aufs engste verwobenen Typ von Algebra definieren, erkennt man mit der vorhergehenden Bemerkung in Anbetracht des Satzes von Ado, nach dem sich jede endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra als Unter-Liealgebra in die Algebra  $\text{End}(V)$  der Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums einbetten läßt.



SkriptenBilder/BildKLD.png

Dieses Bild soll die zur Formel von eben äquivalente Formel

$$[A, B] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\exp(-tA) \exp(-tB) \exp(tA) \exp(tB) - I)$$

anschaulich machen im Fall der in 1.5.8 behandelten Drehgruppe für  $B = E_1$  und  $A = E_2$ . Die  $x$ -Achse kommt darin senkrecht aus dem Papier, und das Bild zeigt, wie ein Punkt auf der  $x$ -Achse “in der Höhe 1 oberhalb der Papierebene” sich bewegt, wenn wir erst ein bißchen um die  $x$ -Achse drehen—dabei bleibt er fest—dann dasselbe bißchen um die  $y$ -Achse, dann um die  $x$ -Achse in der Gegenrichtung und schließlich um die  $y$ -Achse in der Gegenrichtung, jeweils um denselben kleinen Winkel, im Bild etwa  $1/2$  im Bogenmaß. Machen wir diesen Winkel kleiner, so werden die Effekte des Drehens um die  $y$ -Achse in der Aufsicht in etwa linear kleiner, genauer hat der erste vertikale Pfeil die Länge  $\sin t$ , aber der Effekt des Drehens um die  $x$ -Achse wird quadratisch kleiner, genauer hat der krumme eher horizontale Pfeil die Länge  $t \sin t$ . Ich finde, man sieht ganz gut, daß die Differenz von Ausgangs- und Endpunkt unseres Pfeilweges gegen eine quadratisch kleine Drehung um die  $z$ -Achse strebt, wie es auch unsere Formel  $[E_1, E_2] = E_3$  vorhersagt.

*Beispiel 1.5.8 (Anschauung für die Liealgebra der Drehgruppe).* Man kann die Lie-Klammer auf der Liealgebra einer Matrix-Liegruppe auch symmetrischer verstehen mithilfe der Formel

$$[A, B] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\exp(tA) \exp(tB) - \exp(tB) \exp(tA))$$

die man leicht über die Taylorentwicklung nachrechnet. Beachtet man, daß  $t \mapsto \exp(tX)$  ein und nach 1.6.3 sogar der einzige differenzierbare Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow G$  mit Geschwindigkeitsvektor  $X$  beim neutralen Element ist, so kann man diese Formel dahingehend interpretieren, daß die Lie-Klammer mißt, inwieweit zwei “infinitesimale Elemente” unserer Gruppe kommutieren. Zum Beispiel ergibt sich die Liealgebra der Drehgruppe  $\mathrm{SO}(3)$  mit 1.2.17 als die Liealgebra  $\mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$  aller reellen schiefsymmetrischen  $(3 \times 3)$ -Matrizen. Als Basis mag man die drei Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Deren Kommutatoren werden gegeben durch die leicht zu verifizierenden Formeln  $[E_1, E_2] = E_3$ ,  $[E_2, E_3] = E_1$  und  $[E_3, E_1] = E_2$ . Nun beschreibt

$$\exp(tE_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

eine Drehung um die  $x$ -Achse mit Winkel  $t$  und  $\exp(tE_2), \exp(tE_3)$  bedeuten ähnlich Drehungen um die  $y$ -Achse bzw. die  $z$ -Achse. Um die Lie-Klammer anschaulich zu interpretieren gilt es damit einzusehen, daß “ein kleines bißchen Drehen um die  $x$ -Achse gefolgt von einem kleinen bißchen Drehen um die  $y$ -Achse sich vom Effekt derselben Operationen in der umgekehrten Reihenfolge unterscheidet um ein quadratisch kleines bißchen Drehen um die  $z$ -Achse, bis auf einen kubisch kleinen Fehler”. Diese Aussage scheint mir der Anschauung durchaus zugänglich zu sein. Man bemerke auch, daß  $e_i \mapsto E_i$  einen Vektorraumisomorphismus  $\psi: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$  definiert, unter dem das Kreuzprodukt der Lieklammer entspricht. Es ist eine gute Übung zu zeigen, daß mit dieser Notation  $\exp(\psi(v))$  die Matrix einer Drehung mit Drehachse  $\mathbb{R}v$  und Drehwinkel  $\|v\|$  ist.

*Übung 1.5.9.* Man zeige, daß jeder echte abgeschlossene Normalteiler der Drehgruppe  $\mathrm{SO}(3)$  trivial ist. Hinweis: 1.5.5 zeigt, daß unser Normalteiler diskret sein muß, 3.7.17 zeigt weiter, daß er im Zentrum von  $\mathrm{SO}(3)$  liegen muß.

**Definition 1.5.10.** Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Ein **Algebren-Homomorphismus** ist eine lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist.

1.5.11. Gegeben ein Körper  $k$  und ein  $k$ -Vektorraum  $V$  wird  $\text{End } V$  eine Liealgebra mit der Verknüpfung  $[X, Y] = XY - YX$ . Man notiert diese Liealgebra meist  $\mathfrak{gl}(V)$ . Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  ist im allgemeinen keineswegs jede reelle Unter-Liealgebra  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  der Tangentialraum im neutralen Element einer Matrix-Liegruppe  $G \curvearrowright \text{GL}(V)$ . Das Problem ist, daß die vom Bild der Exponentialabbildung erzeugte Untergruppe keineswegs abgeschlossen zu sein braucht, wie zum Beispiel der Fall  $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \text{diag}(i, \alpha i) \subset \text{End } \mathbb{C}^2$  für irrationales reelles  $\alpha$  zeigt. Jedoch gibt es auf der fraglichen Untergruppe, auch wenn sie nicht abgeschlossen in  $\text{GL}(V)$  ist, doch stets genau eine Struktur von glatter Mannigfaltigkeit im Sinne von 4.2.7 derart, daß die Einbettung differenzierbar ist und ihr Tangential den Tangentialraum unserer Mannigfaltigkeit mit  $\mathfrak{g}$  identifiziert. Mehr dazu lernt man in der Differentialgeometrie.

1.5.12 (**Liealgebren von Schnitten**). Aus 1.2.11 folgt für abgeschlossene Untergruppen der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $G, H \curvearrowright \text{Aut } V$  die Formel

$$\text{Lie}(G \cap H) = (\text{Lie } G) \cap (\text{Lie } H)$$

Allgemeiner gilt für eine beliebige Familie  $(G_i)_{i \in I}$  von abgeschlossenen Untergruppen auch

$$\text{Lie} \bigcap_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \in I} \text{Lie } G_i$$

Diese Bemerkung hätte auch schon direkt im Anschluß an 1.2.11 stehen können. Ich habe sie nur deshalb hierher verschoben, um sie bereits mit der Bezeichnung  $\text{Lie } G$  statt  $T_e G$  formulieren zu können. Mit 4.6.23 wird dann dasselbe auch für abgeschlossene Untergruppen einer abstrakten Liegruppen folgen.

## 1.6 Homomorphismen von Matrix-Liegruppen

**Satz 1.6.1 (Einparameteruntergruppen von  $\text{GL}(V)$ ).** *Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum, so ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(V)$  von der Gestalt  $\varphi(t) = \exp(tA)$  für genau ein  $A \in \text{End } V$ .*

1.6.2. Die stetigen Gruppenhomomorphismen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  haben wir bereits in V.1.6.2 bestimmt. Die Argumentation hier ist im Wesentlichen dieselbe.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $A$  folgt aus  $\varphi'(0) = A$ . Nur die Existenz von  $A$  ist also noch zu zeigen. Wir wählen eine beliebige Norm auf dem Vektorraum  $\text{End } V$ . Nun liefert für hinreichend kleines  $r > 0$  die Exponentialfunktion sicher eine Injektion  $\exp : B(0; r) \hookrightarrow \text{GL}(V)$  mit offenem Bild  $U \subseteq \text{GL}(V)$  und stetiger Umkehrabbildung  $U \xrightarrow{\sim} B(0; r)$ . Das Bild  $V := \exp(B(0; r/2))$  des Balls mit dem halben Radius hat dann offensichtlich die Eigenschaft, daß es für jedes  $Z = \exp(D) \in U$  genau eine Wurzel in  $V$  gibt, als da heißt genau ein  $Y := \sqrt{Z} \in V$  mit  $Y^2 = Z$ , nämlich  $Y = \exp(D/2)$ . Insbesondere besitzt also jedes  $Z \in V$  genau eine Wurzel in  $V$ . Gegeben ein stetiger Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(V)$  finden wir nun sicher ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset V$  und ein  $D \in B(0; r/2)$  mit  $\varphi(\varepsilon) = \exp(D)$ . Es folgt

$$\varphi(\varepsilon/2) = \sqrt{\exp(D)} = \exp(D/2)$$

und induktiv  $\varphi(\varepsilon/2^n) = \exp(D/2^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $A = D/\varepsilon$ , so gilt mithin  $\varphi(t) = \exp(tA)$  erst für alle  $t = \varepsilon/2^n$ , aber da beide Seiten Gruppenhomomorphismen sind, dann auch für alle  $t = m\varepsilon/2^n$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ , und da beide Seiten stetig sind, schließlich für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 1.6.3 (Einparameteruntergruppen von Matrix-Liegruppen).** *Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine Matrix-Liegruppe  $G$  sind genau die Abbildungen  $t \mapsto \exp(tX)$  für  $X \in \text{Lie } G$ , und verschiedene  $X$  liefern auch verschiedene Homomorphismen.*

*Beweis.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und eine abgeschlossene Untergruppe  $G \subseteq \text{GL}(V)$  ist nach 1.6.1 jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  jedenfalls schon mal von der Gestalt  $t \mapsto \exp(tA)$  für ein  $A \in \text{End } V$ , und nach 1.2.11 landet die Abbildung  $t \mapsto \exp(tA)$  in der Untergruppe  $G$  genau dann, wenn  $A$  zum Tangentialraum  $T_e G$  unserer Untergruppe gehört.  $\square$

**Proposition 1.6.4.** 1. *Gegeben  $f : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zwischen glatten Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler reeller Räume und  $x \in M$  ein Punkt gibt es genau eine lineare Abbildung, das*  
**Differential**

$$d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

*derart, daß für jede Karte  $(W, \varphi)$  von  $M$  mit  $W \subset \mathbb{R}^k$  und  $\varphi(p) = x$  für ein  $p \in W$  gilt  $d_x f \circ d_p \varphi = d_p(f \circ \varphi)$ .*

2. *Gegeben zwei differenzierbare Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow L$  von Untermannigfaltigkeiten erfüllen die Differentiale für jeden Punkt  $x \in M$  die*  
**Kettenregel**

$$d_{f(x)} g \circ d_x f = d_x(g \circ f)$$

und das Differential der Einbettung einer offenen Teilmenge in unsere Mannigfaltigkeit ist an jeder Stelle die Identität.

1.6.5. Wir arbeiten hier mit Untermannigfaltigkeiten, es ist also etwa  $Y$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $N \subset Y$  eine Teilmenge mit den in IV.7.7.2 spezifizierten lokalen Plättbarkeitseigenschaften. Wir fassen mit diesen Notationen dann beide Seiten der Gleichheit aus unserer Proposition auf als lineare Abbildungen  $\mathbb{R}^k \rightarrow \vec{Y}$  vom Umgebungsraum unserer Karte  $W$  in den Richtungsraum des Umgebungsraums  $Y$  der Untermannigfaltigkeit  $N$ , und fassen insbesondere  $f \circ \varphi$  auf als eine Abbildung  $W \rightarrow Y$ . Differentiale derartiger Abbildungen kennen wir nämlich bereits aus IV.1.2.2 oder bei halboffenem  $W$  aus IV.1.2.9.

*Beweis.* Per definitionem induziert für jede Karte wie in der Proposition das Differential  $d_p \varphi$  einen Isomorphismus des Umgebungsraums unserer Karte mit dem Tangentialraum  $T_x M$ . Für jede Karte finden wir also genau eine Abbildung

$$d_x f : T_x M \rightarrow \vec{Y}$$

mit der in der Proposition geforderten Verträglichkeitsbedingung für diese eine Karte. Die Kettenregel zeigt dann, daß alle auf diese Weise definierten Abbildungen übereinstimmen, und es bleibt nur zu zeigen, daß die so definierte Abbildung auch tatsächlich in  $T_{f(x)} N$  landet. Mithilfe einer Plättung von  $N$  oder auch mithilfe von IV.4.3.17 finden wir jedoch eine Karte  $(V, \psi)$  von  $N$  um  $f(p)$  und eine offene Umgebung  $U \subset Y$  von  $f(p)$  und eine glatte Abbildung  $\zeta : U \rightarrow V$  mit  $\zeta \psi = \text{id}_V$  und folglich  $\psi(\zeta(y)) = y$  für alle  $y \in \psi(V)$ . Nun können wir natürlich eine Karte  $(W, \varphi)$  von  $M$  um  $x$  wählen mit  $f(\varphi(W)) \subset \psi(V)$ , und dann zeigt die Identität  $f \varphi = \psi \zeta f \varphi$ , daß unsere Abbildung  $d_x f$  tatsächlich in  $T_{f(x)} N$  landen muß. Für den Beweis von Teil 2 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß darüber hinaus gilt  $M = \varphi(W)$  und  $N = \psi(V)$ . Dann gehen wir aus von der Identität  $g f \varphi = g \psi \zeta f \varphi$  und kennzeichnen der Übersichtlichkeit halber die erst durch die Proposition erklärten Differentiale durch einen Querstrich als  $\bar{d}$ , um sie von den bereits bekannten Differentialen für differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume abzusetzen. So finden wir dann mit der Kettenregel aus der Analysis und unseren Definitionen

$$\begin{array}{rcc} d_p(gf\varphi) & = & d_p(g\psi\zeta f\varphi) = d_q(g\psi) \circ d_{f(x)} \zeta \circ d_p(f\varphi) \\ \parallel & & \parallel \\ \bar{d}_x(gf) \circ d_p \varphi & & \bar{d}_{f(x)} g \circ d_q \psi \circ d_{f(x)} \zeta \circ \bar{d}_x f \circ d_p \varphi \\ & & \parallel \\ & & \bar{d}_{f(x)} g \circ \bar{d}_x f \circ d_p \varphi \end{array}$$

mit  $q$  erklärt durch  $\psi(q) = f(x)$ , wo die letzte Gleichung daher kommt, daß gilt  $\zeta\psi = \text{id}_V$ , denn damit ist  $d_{f(x)}\zeta : T_{f(x)}N \rightarrow V$  notwendig invers zu  $d_q\psi : V \xrightarrow{\sim} T_{f(x)}N$ .  $\square$

*Beispiel 1.6.6.* Für  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Abbildung von einem halboffenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  in eine Mannigfaltigkeit  $M$  wird unsere lineare Abbildung  $d_t\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T_{\gamma(t)}M$  natürlich gegeben durch die Multiplikation mit einem wohlbestimmten Vektor aus  $T_{\gamma(t)}M$ , den man in Anlehnung an IV.1.2.13 wieder

$$(d_p\gamma)(1) = \gamma'(p) = \dot{\gamma}(p)$$

notiert und den **Geschwindigkeitsvektor** nennt.

*Übung 1.6.7.* Man zeige, daß für  $n \in \mathbb{Z}$  das Differential beim neutralen Element des Potenzierens auf der Kreislinie  $S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^n$  die Multiplikation mit  $n$  auf dem Tangentialraum ist.

**Satz 1.6.8 (Homomorphismen von Matrix-Liegruppen).** *Jeder stetige Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  von Matrix-Liegruppen ist glatt und sein Differential beim neutralen Element  $d_e\varphi$  ist ein Homomorphismus von Liealgebren mit der Eigenschaft  $\exp \circ d_e\varphi = \varphi \circ \exp$ .*

1.6.9. Etwas ausführlicher geschrieben behauptet die Formel aus dem Satz, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G & \xrightarrow{d_e\varphi} & \text{Lie } H \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

kommutiert. Der Satz gilt auch für abstrakte Liegruppen und wird in dieser Allgemeinheit in 4.8.8 formuliert. Der Beweis bleibt derselbe.

*Beispiel 1.6.10.* Man erinnere sich an die Erkenntnis aus IV.1.5.8, nach der das Differential an die Determinante bei der Einheitsmatrix die Spur ist. Als Korollar aus unserem Satz erkennen wir damit, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{tr}} & \mathbb{C} \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ \text{GL}(n; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

kommutiert, was wir in 1.2.16 bereits elementar gezeigt hatten. Umgekehrt kann man aus diesem Diagramm auch unschwer folgern, daß das Differential an die Determinante bei der Einheitsmatrix die Spur sein muß.

*Beweis.* Jede Einparameteruntergruppe von  $G$  liefert durch Nachschalten von  $\varphi$  eine Einparameteruntergruppe von  $H$ . Aus unserer Beschreibung der Einparameteruntergruppen 1.6.3 folgt so unmittelbar, daß es eine Abbildung  $\tilde{\varphi} : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } H$  geben muß, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \text{Lie } H \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

zum Kommutieren bringt und die darüber hinaus mit allen Streckungen vertauscht, in Formeln  $\tilde{\varphi}(sX) = s\tilde{\varphi}(X)$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  und  $X \in \text{Lie } G$ . Wenden wir  $\varphi$  auf beide Seiten von Trotter's Produktformel 1.2.13 an, so folgt weiter  $\tilde{\varphi}(X + Y) = \tilde{\varphi}(X) + \tilde{\varphi}(Y)$  und damit die Linearität von  $\tilde{\varphi}$ . Da im Diagramm beide Vertikalen Diffeomorphismen zwischen einer offenen Umgebung der Null in der jeweiligen Liealgebra und einer offenen Umgebung des neutralen Elements in der jeweiligen Gruppe liefern, können wir folgern, daß  $\varphi$  auf einer offenen Umgebung des neutralen Elements von  $G$  glatt ist mit Differential  $d_e\varphi = \tilde{\varphi}$ . Wegen  $\varphi = (\varphi(g)\cdot) \circ \varphi \circ (g^{-1}\cdot)$  ist dann  $\varphi$  auch für jedes andere Gruppenelement  $g \in G$  glatt in einer Umgebung desselben und damit eine glatte Abbildung. Um schließlich zu zeigen, daß  $d_e\varphi$  ein Homomorphismus von Liealgebren ist, gehen wir aus vom kommutativen Diagramm von Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \text{int } x \downarrow & & \downarrow \text{int } \varphi(x) \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Indem man darin zu den Differentialen an den neutralen Elementen übergeht und die Kettenregel 1.6.4 beachtet, erhält man das kommutative Diagramm von reellen Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{d_e\varphi} & T_e H \\ \text{Ad } x \downarrow & & \downarrow \text{Ad } \varphi(x) \\ T_e G & \xrightarrow{d_e\varphi} & T_e H \end{array}$$

Gegeben  $X, Y \in \text{Lie } G$  mit Bildern  $\bar{X}, \bar{Y} \in \text{Lie } H$  erhalten wir nun nach dem bereits Bewiesenen  $\varphi(\exp(tX)) = \exp(t\bar{X})$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und dann folgt

$$d_e\varphi : \text{Ad}(\exp(tX))(Y) \mapsto \text{Ad}(\exp(t\bar{X}))(\bar{Y})$$

nach dem vorhergehenden kommutativen Diagramm mit  $x = \exp(tX)$ , angewandt auf  $Y \in T_e G$ . Dann muß aber nach der Kettenregel  $d_e\varphi = d_0(d_e\varphi)$

auch den Geschwindigkeitsvektor bei  $t = 0$  der Kurve  $t \mapsto \text{Ad}(\exp(tX))(Y)$  auf den Geschwindigkeitsvektor bei  $t = 0$  der Kurve  $t \mapsto \text{Ad}(\exp(t\bar{X}))(\bar{Y})$  abbilden, und nach 1.5.2 oder besser seinem Beweis läßt sich diese Erkenntnis in der Tat schreiben als die behauptete Verträglichkeit des Differentials unseres Gruppenhomomorphismus mit der Lieklammer

$$d_e\varphi : [X, Y] \mapsto [\bar{X}, \bar{Y}] \quad \square$$

*Übung 1.6.11.* Bezeichne  $S^1$  die Gruppe aller komplexen Zahlen der Norm Eins. Man zeige, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  die Gestalt  $z \mapsto z^n$  hat für genau ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Hinweis: V.1.6.2. Man konstruiere des weiteren eine Bijektion zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen  $(S^1)^m \rightarrow (S^1)^n$  und der Menge  $\text{Mat}(n \times m; \mathbb{Z})$  aller  $(n \times m)$ -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen.

*Übung 1.6.12.* Man zeige, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus  $\text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$  von der Gestalt  $(\text{int } g)$  ist für genau ein  $g \in \text{SO}(3)$ . Hinweis: Man erinnere sich, daß die Liealgebra von  $\text{SO}(3)$  identifiziert werden kann mit dem  $\mathbb{R}^3$  mit Kreuzprodukt, und diskutiere, welche linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit dem Kreuzprodukt verträglich sind.

*Übung 1.6.13.* Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum. Man zeige: Ist  $M \subset X$  eine glatte Untermannigfaltigkeit, so ist auch das Tangentialbündel  $TM \subset X \times \bar{X}$  aus IV.7.3.1 eine glatte Untermannigfaltigkeit. Weiter liefern für jede glatte Abbildung  $f : M \rightarrow N$  in eine weitere glatte eingebettete Mannigfaltigkeit auch die Differentiale  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  eine glatte Abbildung  $df : TM \rightarrow TN$ . Hinweis: IV.4.3.14.

*Übung 1.6.14.* Das Differential des Invertierens  $\text{inv} : G \rightarrow G$  auf einer Matrix-Liegruppe beim neutralen Element ist die Punktspiegelung am Ursprung auf dem Tangentialraum, in Formeln  $d_e \text{inv} = ((-1)\cdot) : T_e G \rightarrow T_e G$ .

*Übung 1.6.15 (Liealgebra eines Kerns).* Gegeben ein glatter Homomorphismus von Matrix-Liegruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  zeige man mit 1.2.11 die Formel  $\text{Lie}(\ker \varphi) = \ker(d_e \varphi)$  und allgemeiner für  $K \subset H$  eine abgeschlossene Untergruppe

$$\text{Lie}(\varphi^{-1}(K)) = \{x \in \text{Lie } G \mid (d_e \varphi)(x) \in \text{Lie } K\}$$

Daraus folgt im Übrigen mit IV.1.5.8 auch sofort die in 1.2.16 bereits elementar gezeigte Beziehung  $\text{Lie}(\text{SL}(n; \mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$ . Mit 4.6.23 wird dasselbe auch allgemeiner für abstrakte Liegruppen folgen.

*Übung 1.6.16 (Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten).* Gegeben ein  $G$  eine Matrix-Liegruppe und  $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$  ein glatter Automorphismus von  $G$  ist die Liealgebra der Gruppe der Fixpunkte  $G^\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = g\}$  von

$\varphi$  genau die Menge der Fixpunkte des Differentials  $d_e\varphi$  in der Liealgebra, in Formeln

$$\text{Lie}(G^\varphi) = (\text{Lie } G)^{d_e\varphi}$$

Mit 4.6.23 wird dasselbe auch allgemeiner für abstrakte Liegruppen, vergleiche etwa ??.

1.6.17. Die wichtigsten Methoden zur Berechnung von Liealgebren sind für uns Bemerkung 1.5.12, die beiden vorhergehenden Übungen sowie 2.1.10.

## 1.7 Drehgruppe und Spingruppe

**Proposition 1.7.1 (Drehgruppe und Spingruppe).** *Es gibt einen stetigen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  mit Kern  $\{\pm \text{id}\}$ .*

*Übung 1.7.2.* Folgern Sie aus der Proposition, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  konstant oder surjektiv ist, und daß es für je zwei stetige surjektive Gruppenhomomorphismen  $\phi, \psi$  ein  $g \in \text{SO}(3)$  gibt mit  $\phi = (\text{int } g) \circ \psi$ .

*Beweis.* Wir betrachten die adjungierte Darstellung der **Spingruppe**  $\text{SU}(2)$ . Sie ist eine dreidimensionale reelle Unterdarstellung der Darstellung von  $\text{SU}(2)$  auf  $\text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C})$  durch Konjugation, und die Elemente dieser Unterdarstellung erzeugen zusammen mit der Einheitsmatrix ganz  $\text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C})$  als komplexen Vektorraum. Der Kern unserer adjungierten Darstellung besteht folglich genau aus den Matrizen aus  $\text{SU}(2)$ , die mit allen Matrizen von  $\text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C})$  kommutieren, und das ist eben der Schnitt der Vielfachen der Einheitsmatrix mit unserer Gruppe  $\text{SU}(2)$  alias die Untergruppe  $\{\pm \text{id}\}$ . Auf dem Raum  $\mathfrak{su}(2) := \text{Lie } \text{SU}(2)$  aller schieferhermiteschen Matrizen mit Spur Null definiert aber nun die Vorschrift  $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$  eine negativ definite symmetrische Bilinearform, wie man leicht nachrechnet, die offensichtlich unter allen Konjugationen invariant ist. Versehen wir  $\mathfrak{su}(2)$  mit dem Negativen dieser Bilinearform als Skalarprodukt, so liefert die adjungierte Darstellung also einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{Ad} : \text{SU}(2) \rightarrow \text{O}(\mathfrak{su}(2))$$

mit Kern  $\{\pm \text{id}\}$ . Da  $\text{SU}(2)$  zusammenhängend ist, muß dieser Gruppenhomomorphismus bereits in  $\text{SO}(\mathfrak{su}(2))$  landen, und da der Kern diskret ist, muß unser Gruppenhomomorphismus nach ?? eine injektive Abbildung auf den Lie-Algebren induzieren. Nach Dimensionsvergleich muß diese injektive Abbildung dann sogar ein Isomorphismus sein, so daß nach 1.6.8 das Bild von  $\text{Ad}$  eine Umgebung des neutralen Elements umfaßt. Da aber  $\text{SO}(\mathfrak{su}(2))$  zusammenhängend ist, muß folglich  $\text{Ad}$  bereits surjektiv sein.  $\square$

*Übung 1.7.3.* Man zeige, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus  $SU(2) \rightarrow SU(2)$  von der Gestalt  $(\text{int } g)$  ist für ein  $g \in SU(2)$ . Hinweis: 1.6.12.

## 1.8 Quaternionale Gruppen

1.8.1. Die Behauptungen des vorhergehenden Abschnitts kann man alternativ auch im Bild der Quaternionen verstehen. Wir erinnern an den Schiefkörper der Quaternionen

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

aus ?? mit den Rechenregeln  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  und insbesondere an die quaternionale Konjugation

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$$

mit der Eigenschaft  $\overline{q\bar{w}} = \bar{w}q$ . Man setzt  $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$  und  $\text{Re}(q) = (q + \bar{q})/2$ , also  $\text{Re}(a + bi + cj + dk) = a$ .

1.8.2. Alle Kugelschalen  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  sind glatte Mannigfaltigkeiten. Auf  $S^0$ ,  $S^1$  und  $S^3$  induziert die Multiplikation in  $\mathbb{R}$ , den komplexen Zahlen  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  bzw. den Quaternionen  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$  aus ?? sogar die Struktur einer Liegruppe. Für das Modell des Schiefkörpers der Quaternionen aus dem Beweis von ?? stimmt die Gruppe  $S^3$  der Quaternionen der Länge Eins überein mit der Gruppe  $SU(2)$ . Es scheint mir anschaulich klar und ist auch formal nicht schwer nachzurechnen, daß der Tangentialraum beim neutralen Element  $T_1S^3$  genau der Raum der rein imaginären Quaternionen  $Q = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \{w \in \mathbb{H} \mid \bar{w} = -w\}$  ist. Die adjungierte Darstellung der  $S^3$  darauf geschieht wie immer durch Konjugation, ein invariantes Skalarprodukt können wir in diesem Fall leicht explizit angeben durch die Vorschrift  $\langle v, w \rangle = \text{Re}(v\bar{w})$ , und dafür bilden  $i, j, k$  dann eine Orthonormalbasis.

*Ergänzende Übung 1.8.3.* Die Lösungsmenge in den Quaternionen der Gleichung  $X^2 = -1$  ist genau die Kugelschale aller Quaternionen vom Betrag Eins mit Realteil Null.

*Übung 1.8.4.* Wir haben in II.1.4.3 gesehen, daß jeder Automorphismus des Körpers  $\mathbb{R}$  die Identität ist, und in ??, daß jeder stetige Automorphismus des Körpers  $\mathbb{C}$  die Identität oder die komplexe Konjugation ist. Man zeige nun, daß jeder stetige Automorphismus des Schiefkörpers  $\mathbb{H}$  durch die Konjugation mit einem invertierbaren Körperelement gegeben wird und konstruiere eine Identifikation besagter Automorphismengruppe mit der  $SO(3)$ .

1.8.5. Für  $n \in \mathbb{N}$  lassen wir die Gruppe  $GL(n; \mathbb{H})$  aller invertierbaren  $(n \times n)$ -Matrizen mit quaternionalen Einträgen auf  $\mathbb{H}^n$  operieren, indem wir Vektoren

als Spaltenmatrizen auffassen und als Operation  $(A, v) \mapsto Av$  das Produkt von Matrizen nehmen. Diese Operation identifiziert  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{H})$  mit der Gruppe  $\mathrm{Mod}_{\mathbb{H}}^{\times} \mathbb{H}^n$  der Automorphismen von  $\mathbb{H}^n$  aufgefaßt als  $\mathbb{H}$ -Rechtsmodul im Sinne von ???. Erklären wir auf  $\mathbb{H}^n$  eine Norm mittels der Vorschrift  $\|q\|^2 = \bar{q}^{\top} q = |q_1|^2 + \dots + |q_n|^2$ , so wird die Menge der normerhaltenden Matrizen aus  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{H})$  eine kompakte Untergruppe

$$\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{H})$$

Die Notation  $\mathrm{Sp}$  steht für “symplektisch” und hat den folgenden Hintergrund: Zunächst erhalten wir eine mit der Matrixmultiplikation verträgliche Einbettung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{H}) &\hookrightarrow \mathrm{Mat}(2m \times 2n; \mathbb{C}) \\ A + Bj &\mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \quad \forall A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{C}) \end{aligned}$$

wie man über die Relation  $zj = j\bar{z}$  für  $z \in \mathbb{C}$  leicht nachrechnet. Im Fall  $m = n$  besteht  $\mathrm{Sp}(n)$  per definitionem gerade aus den unitären Matrizen im Bild, also

$$\mathrm{Sp}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \right\} \cap \mathrm{U}(2n)$$

Setzen wir  $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n; \mathbb{C})$ , so folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(n) &= \{M \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n; \mathbb{C}) \mid JMJ^{-1} = \bar{M} \text{ und } \bar{M}^{\top} M = I\} \\ &= \{M \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n; \mathbb{C}) \mid M^{\top} JM = J \text{ und } \bar{M}^{\top} M = I\} \\ &= \mathrm{Sp}(n; \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2n) \end{aligned}$$

wobei  $\mathrm{Sp}(n; \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n; \mathbb{C})$  die Gruppe aller Matrizen ist, die die kanonische symplektische Form  $(v, w) \mapsto v^{\top} Jw$  auf  $\mathbb{C}^{2n}$  invariant lassen.

## 2 Endlichdimensionale Darstellungen

### 2.1 Darstellungen und ihre Ableitungen

2.1.1. In diesem Abschnitt mag der Leser unter einer Liegruppe je nach Kenntnisstand eine Matrix-Liegruppe oder auch eine abstrakte Liegruppe verstehen. Unter einer reellen bzw. komplexen **endlichdimensionale Darstellung** einer Liegruppe  $G$  verstehen wir stets eine stetige Darstellung im Sinne von 1.1, also ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem endlichdimensionalen reellen bzw. komplexen Vektorraum  $V$  mit einem stetigen Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ . Statt  $\rho(g)(v)$  schreiben wir auch oft abkürzend  $gv$ . Wollen wir die bei Liegruppen meist implizit zugrundegelegte Annahme der Stetigkeit besonders betonen, so reden wir auch von **stetigen endlichdimensionalen Darstellungen**.

*Beispiel 2.1.2.* Der  $\mathbb{R}^3$  ist in offensichtlicher Weise eine Darstellung der Liegruppe  $\mathrm{SO}(3)$ . Dasselbe gilt für die Räume  $\mathbb{R}[X, Y, Z]^m$  aller Polynomfunktionen auf  $\mathbb{R}^3$ , die homogen sind vom Grad  $m$ , für die Operation gegeben durch das "Verschieben von Funktionen", in Formeln  $(gf)(p) = f(g^{-1}p)$  für alle  $g \in \mathrm{SO}(3)$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$  und  $f \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ .

**Definition 2.1.3.** Sei  $k$  ein Körper. Eine **Darstellung** einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über  $k$  ist ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum  $V$  und einem Homomorphismus von Liealgebren  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

*Beispiel 2.1.4.* Ist  $G$  eine Liegruppe und  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  eine stetige Darstellung durch Automorphismen eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums, so wird  $V$  nach 1.6.8 eine Darstellung der Liealgebra  $\mathrm{Lie} G$  mittels des Differentials beim neutralen Element, das wir oft abkürzen zu

$$d\rho = d_e\rho : \mathrm{Lie} G \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Diese Darstellung der Liealgebra  $\mathrm{Lie} G$  heißt die **abgeleitete Darstellung** zur Darstellung unserer Liegruppe  $G$ .

*Beispiel 2.1.5.* Die Darstellung  $\rho_n : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $z \mapsto z^n$  der Kreislinie hat das Differential  $d_e\rho_n : \lambda \mapsto n\lambda$  für  $\lambda \in T_1S^1 = i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = T_1\mathbb{C}^\times$ .

*Übung 2.1.6.* Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra. Für  $x \in \mathfrak{g}$  erkläre man  $(\mathrm{ad} x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  durch die Vorschrift  $(\mathrm{ad} x) : y \mapsto [x, y]$ . Man zeige, daß  $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  ein Homomorphismus von Liealgebren ist. Er heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Liealgebra.

**Definition 2.1.7.** Sei  $k$  ein Körper. Eine **Operation** einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über  $k$  auf einem  $k$ -Vektorraum  $V$  ist eine bilineare Abbildung  $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ ,

$(x, v) \mapsto xv$  mit der Eigenschaft

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und  $x(yv)$  mit  $x y v$  abkürzen.

*Übung 2.1.8.* Seien  $k$  ein Körper,  $\mathfrak{g}$  eine  $k$ -Liealgebra und  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. So induziert die Identifikation  $\text{Ens}(\mathfrak{g} \times V, V) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\mathfrak{g}, \text{Ens}(V, V))$  aus [1.2.2.26](#) eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Operationen von } \mathfrak{g} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Liealgebrenhomomorphismen} \\ \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \end{array} \right\}$$

Eine Operation ist also “im wesentlichen dasselbe wie eine Darstellung”.

2.1.9. Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellung  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  einer Liegruppe und  $x \in \text{Lie } G$  und  $v \in V$  berechnet man  $xv \in V$  zweckmäßig, indem man das Auswerten  $a_v : \text{GL}(V) \rightarrow V$  hinter  $\rho$  dahinterhängt. Da  $a_v$  Restriktion einer linearen Abbildung  $a_v : \text{End}(V) \rightarrow V$  und damit sein eigenes Differential ist, in Formeln  $da_v = a_v$  oder ganz pedantisch  $da_v \circ \text{trans} = \text{trans} \circ a_v$ , ergibt sich so für die Operation eines Elements  $x$  der Liealgebra auf einem Vektor  $v$ , daß  $xv$  das Bild von  $x$  unter dem Differential beim neutralen Element der Abbildung  $a_v \circ \rho : G \rightarrow V$ , also der Abbildung  $g \mapsto gv$  sein muß. Halten wir noch eine Kurve  $\mathbb{R} \rightarrow G$  mit Geschwindigkeit  $x$  bei  $t = 0$  davor, zum Beispiel die Kurve  $t \mapsto \exp(tx)$ , ergibt sich für die Operation eines Elements  $x$  der Liealgebra auf einem Vektor  $v$  einer Darstellung die Formel

$$xv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\exp tx)v - v}{t}$$

*Übung 2.1.10 (Liealgebra einer Isotropiegruppe).* Ist  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine stetige endlichdimensionale Darstellung einer Liegruppe und  $v \in V$  ein Vektor, so gilt für die Liealgebra der Isotropiegruppe

$$\text{Lie}(G_v) = \{x \in \text{Lie } G \mid xv = 0\}$$

Hinweis: Man mag [1.2.25](#) anwenden.

*Übung 2.1.11.* Sei  $V$  ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht  $V$  zu einer Darstellung von  $\mathfrak{gl}(V)$ , der **Standarddarstellung** von  $\mathfrak{gl}(V)$ . Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist sie die Ableitung der offensichtlichen Darstellung der Matrix-Liegruppe  $G = \text{GL}(V)$  durch Automorphismen von  $V$ .

*Beispiel 2.1.12.* Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra. Die **triviale Operation**  $xv = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $v \in V$  macht jeden Vektorraum  $V$  zu einer Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Den Grundkörper  $k$  versehen mit dieser trivialen Operation nennt man die **triviale Darstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra. Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und lassen wir eine Liegruppe derart darauf operieren, daß jedes Gruppenelement als die Identität operiert, so erhalten wir als Ableitung die triviale Operation von  $\text{Lie } G$  auf  $V$ .

*Übung 2.1.13.* Gegeben zwei Darstellungen  $(V, \rho)$  und  $(W, \sigma)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  wird der Raum  $\text{Hom}_k(V, W)$  aller  $k$ -linearen Homomorphismen zu einer Darstellung mittels der Vorschrift, daß für  $f : V \rightarrow W$  linear und  $g \in G$  der Morphismus  $gf$  gegeben sein soll durch  $gf = \sigma(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$  alias

$$(gf)(v) = g(f(g^{-1}v)) \quad \forall v \in V$$

Wir nennen diese Operation auf dem Homomorphismenraum die **Operation durch Konjugation**. Man zeige: Gegeben zwei stetige endlichdimensionale Darstellungen  $V, W$  einer Liegruppe  $G$  ist auch die Operation durch Konjugation von  $G$  auf  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  stetig, und die abgeleitete Operation der Liealgebra wird für  $x \in \text{Lie } G$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  dadurch gegeben, daß für alle  $v \in V$  gilt

$$(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv)$$

2.1.14. Ich erinnere daran, daß wir in 1.1.9 einen Homomorphismenraum von Darstellungen  $V, W$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  definiert hatten als eine  $k$ -lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  mit der Eigenschaft  $\varphi(gv) = g\varphi(v) \quad \forall v \in V, g \in G$ . Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen in Übereinstimmung mit unserer Notation  $\text{Mod}_k^G$  aus 1.1.10 für die Kategorie dieser Darstellungen als  $\text{Mod}^G(V, W)$  oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,

$$\text{Mod}_k^G(V, W)$$

Motiviert durch 2.1.19 verwenden wir aber für diesen Raum auch oft die alternative Notation  $\text{Hom}_k^G(V, W)$  und im Fall  $V = W$  schreiben wir auch  $\text{End}_k^G(V)$ .

**Definition 2.1.15.** Ein **Homomorphismenraum von Darstellungen** oder auch **Verflechtungsoperator** zwischen zwei Darstellungen  $V, W$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper  $k$  ist eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  derart, daß gilt  $\varphi(xv) = x\varphi(v) \quad \forall v \in V, x \in \mathfrak{g}$ . Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen  $\text{Mod}^{\mathfrak{g}}(V, W)$  oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,

$$\text{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W)$$

Zwei Darstellungen heißen **isomorph** genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Die Umkehrabbildung dieses Isomorphismus ist dann notwendig auch ein Homomorphismus von Darstellungen.

**Satz 2.1.16 (Morphismen unter Liegruppen und Liealgebren).** *Gegeben endlichdimensionale stetige reelle Darstellungen  $V, W$  einer Liegruppe  $G$  sind alle Homomorphismen unserer Darstellungen von  $G$  auch Homomorphismen zwischen den abgeleiteten Darstellungen der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ , in Formeln*

$$\text{Mod}_{\mathbb{R}}^G(V, W) \subset \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{g}}(V, W)$$

*Ist  $G$  zusammenhängend, so gilt hier sogar Gleichheit, jeder mit den Operationen der Lie-Algebra verträgliche Vektorraumhomomorphismus ist also notwendig bereits mit den Operationen der Gruppe verträglich, in Formeln*

$$\text{Mod}_{\mathbb{R}}^G(V, W) = \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{g}}(V, W)$$

*Ergänzung 2.1.17.* In der Sprache der Kategorientheorie ?? bilden sowohl die Darstellungen einer Gruppe als auch die Darstellungen einer Liealgebra mit den Verflechtungsoperatoren als Morphismen jeweils eine Kategorie. Der vorstehende Satz 2.1.16 sagt in dieser Sprache, daß das Differenzieren im Sinne von ?? einen Funktor von der Kategorie der endlichdimensionalen stetigen Darstellungen einer Liegruppe in die Kategorie der Darstellungen ihrer Liealgebra liefert, und daß dieser Funktor im Fall einer zusammenhängenden Liegruppe sogar volltreu ist im Sinne von ??.

*Beweis.* Ist  $f : V \rightarrow W$  ein Verflechtungsoperator, so gilt sicher  $f(gv) = g(f(v))$  für alle  $g \in G$  und  $v \in V$ . Werten wir die Differentiale beider Abbildungen  $G \rightarrow W$  beim neutralen Element auf  $x$  aus, so folgt  $f(xv) = x(f(v))$  wie behauptet. Umgekehrt folgt aber aus  $f(xv) = x(f(v))$  auch  $f(\exp(tx)v) = \exp(tx)(f(v))$  für alle  $t$ . Ist unsere Gruppe zusammenhängend, so wird sie aber vom Bild der Exponentialabbildung erzeugt, und das zeigt dann  $f(gv) = g(f(v))$  für alle  $g \in G$ .  $\square$

*Übung 2.1.18 (Invarianten von Liegruppen und Liealgebren).* Für eine Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$  verwenden wir wie in ?? die Notation

$$V^G := \{v \in V \mid gv = v \quad \forall g \in G\}$$

für die  **$G$ -invarianten Vektoren von  $V$** . Für eine Darstellung  $V$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid xv = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen die Elemente von  $V^{\mathfrak{g}}$  die  **$\mathfrak{g}$ -invarianten Vektoren von  $V$** . Man zeige in Anlehnung an 2.1.16: Ist  $G$  eine Liegruppe mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$  und sei  $V$  eine Darstellung von  $G$  in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so sind alle unter der Gruppe invarianten Vektoren auch invariant unter ihrer Liealgebra, in Formeln  $V^G \subset V^{\mathfrak{g}}$ , und für zusammenhängendes  $G$  gilt sogar

$$V^G = V^{\mathfrak{g}}$$

*Übung 2.1.19.* Sind  $V, W$  Darstellungen einer Gruppe über einem Körper  $k$ , so sind die Verflechtungsoperatoren genau die Invarianten im Raum aller linearen Abbildungen unter der Operation durch Konjugation, in Formeln gilt also

$$\text{Mod}_k^G(V, W) = \text{Hom}_k(V, W)^G$$

*Übung 2.1.20.* Sind  $V, W$  Darstellungen einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper  $k$ , so wird der Homomorphismenraum  $\text{Hom}_k(V, W)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  durch die Vorschrift  $(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V$  und  $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ , und mit dieser Operation von  $\mathfrak{g}$  auf dem Homomorphismenraum gilt

$$\text{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W) = \text{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$$

Die Sinnhaftigkeit der hier auf  $\text{Hom}_k(V, W)$  erklärten  $\mathfrak{g}$ -Operation wird durch 2.1.13 belegt.

**Definition 2.1.21.** Ein Untervektorraum  $U$  einer Darstellung  $V$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  heißt eine **Unterdarstellung** genau dann wenn gilt  $xv \in U \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in U$ . Wir sagen in diesem Zusammenhang auch,  $U$  sei **stabil unter  $\mathfrak{g}$** . Eine von  $V$  verschiedene Unterdarstellung  $U \subsetneq V$  heißt eine **echte Unterdarstellung** von  $V$ .

*Beispiele 2.1.22.* Gegeben eine Darstellung  $V$  sind natürlich ganz  $V$  und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild einer Unterdarstellung von  $V$  eine Unterdarstellung von  $W$  und das Urbild einer Unterdarstellung von  $W$  eine Unterdarstellung von  $V$ . Insbesondere ist  $\ker \varphi$  eine Unterdarstellung von  $V$  und  $\text{im } \varphi$  eine Unterdarstellung von  $W$ .

**Satz 2.1.23 (Unterdarstellungen zu Liegruppen und Liealgebren).** *Ein Untervektorraum einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung einer zusammenhängenden Liegruppe ist stabil unter unserer Liegruppe genau dann, wenn er stabil ist unter ihrer Liealgebra.*

*Beweis.* Sei  $G$  unsere zusammenhängende Liegruppe,  $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$  ihre Liealgebra und  $V$  unsere Darstellung. Jeder  $G$ -stabile Teilraum ist offensichtlich

auch  $\mathfrak{g}$ -stabil. Jeder  $\mathfrak{g}$ -stabile Teilraum ist auch  $(\exp \mathfrak{g})$ -stabil wegen der Kommutativität des Diagramms in 1.6.8. Damit ist er dann auch  $G$ -stabil, denn jede zusammenhängende Liegruppe wird vom Bild ihrer Exponentialabbildung erzeugt nach 1.3.10 oder ausführlicher nach dem Beweis von 1.3.12.  $\square$

**Definition 2.1.24.** Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

**Korollar 2.1.25.** Gegeben eine zusammenhängende Liegruppe liefert das Ableiten von Darstellungen eine Einbettung von Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale} \\ \text{stetige reelle Darstellungen} \\ \text{unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache Darstellungen} \\ \text{ihrer Liealgebra} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Einfache Darstellungen bleiben einfach beim Übergang zur Liealgebra nach 2.1.23, nichtisomorphe bleiben nichtisomorph nach 2.1.16.  $\square$

2.1.26. Gegeben ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  gibt es auf der Menge  $V \times V$  genau eine Struktur als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum derart, daß die Einbettung in die erste Komponente  $\text{can} : V \rightarrow V \times V, v \mapsto (v, 0)$  reell-linear ist und daß für die Multiplikation mit  $i \in \mathbb{C}$  gilt  $i(v, 0) = (0, v)$ . Wir bezeichnen diesen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit

$$V_{\mathbb{C}}$$

und nennen ihn die **Komplexifizierung** des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$ . Weiter kürzen wir meist  $(v, 0) = v$  ab und können dann jedes Element von  $V_{\mathbb{C}}$  eindeutig schreiben in der Form  $v + iw$  mit  $v, w \in V$ . Das Vorschalten unserer Einbettung  $\text{can} : V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}$  liefert für jeden  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W$  eine Bijektion

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$$

Die Abbildung  $c : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  gegeben durch  $(v + iw) \mapsto (v - iw)$  für beliebige  $v, w \in V$  ist schieflinear, als da heißt, sie erfüllt die Regel  $c(za) = \bar{z}c(a)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $a \in V_{\mathbb{C}}$ , und für jeden  $c$ -stabilen komplexen Teilraum  $W \subset V$  entspricht die reell-lineare Einbettung  $W^c \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}$  der Fixpunkte von  $c$  in  $W$  nach  $V_{\mathbb{C}}$  unter obiger Bijektion einem Isomorphismus  $(W^c)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W$ . Noch allgemeiner liefert sogar für jeden komplexen Vektorraum  $W$  mit einer schieflinearen Involution  $c$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $(W^c)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W$  von komplexen Vektorräumen.

*Ergänzung 2.1.27.* Eine alternative und besser verallgemeinerbare Konstruktion der Komplexifizierung wird in ?? besprochen. Ist genauer  $V$  ein reeller Vektorraum, so ist der mithilfe des Tensorprodukts konstruierte Vektorraum  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  kanonisch isomorph zur hier sozusagen zu Fuß konstruierten Komplexifizierung von  $V$ .

*Übung 2.1.28.* Diese Übung setzt 2.1.26 fort. Gegeben reelle Vektorräume  $V, V'$  und ein komplexer Vektorraum  $W$  induziert die Einschränkung vermittels der kanonischen Einbettungen auch eine Bijektion von Räumen bilinear Abbildungen

$$\text{Bil}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}} \times V'_{\mathbb{C}}, W) \xrightarrow{\sim} \text{Bil}_{\mathbb{R}}(V \times V', W)$$

Man zeige weiter, daß für jede reelle Liealgebra  $L$  die in dieser Weise auf ihrer Komplexifizierung erklärte bilineare Verknüpfung  $L_{\mathbb{C}}$  zu einer komplexen Liealgebra macht.

**Korollar 2.1.29.** *Für jede zusammenhängende Liegruppe liefert das Differenzieren gefolgt von der kanonischen Erweiterung auf die Komplexifizierung der Liealgebra eine Einbettung von Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale} \\ \text{stetige komplexe Darstellungen} \\ \text{unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache Darstellungen} \\ \text{ihrer komplexifizierten} \\ \text{Liealgebra} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Ist  $G$  eine Liegruppe und  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine stetige Darstellung durch Automorphismen eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums, so liefert das Differential beim neutralen Element einen Homomorphismus von reellen Liealgebren  $d\rho : \text{Lie } G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ . Vermittels der universellen Eigenschaft der Komplexifizierung können wir diesen Homomorphismus auf genau eine Weise zu einer komplexlinearen Abbildung

$$(\text{Lie } G)_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

fortsetzen, die dann offensichtlich ein Homomorphismus von komplexen Liealgebren alias eine Darstellung der komplexen Liealgebra  $(\text{Lie } G)_{\mathbb{C}}$  sein muß. Das ist die Darstellung von  $(\text{Lie } G)_{\mathbb{C}}$ , die im Korollar gemeint ist. Natürlich ist ein komplexer Teilraum  $W \subset V$  stabil unter  $\text{Lie } G$  genau dann, wenn er stabil ist unter  $(\text{Lie } G)_{\mathbb{C}}$ . Zusammen mit 2.1.23 folgt das Korollar.  $\square$

## 2.2 Einfache Darstellungen der Spingruppe

2.2.1. Jetzt können wir auch unser Versprechen einlösen und die Klassifikation 1.1.17 der einfachen Darstellungen der Drehgruppe herleiten. Wir beginnen dem einfacheren Fall der Spingruppe  $\text{SU}(2)$ .

**Satz 2.2.2 (Einfache Darstellungen der Spingruppe).** *Bis auf Isomorphismus gibt es in jeder Dimension genau eine irreduzible stetige komplexe Darstellung der Spingruppe, die Dimension liefert mithin eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \text{Darstellungen der Spingruppe } \mathrm{SU}(2) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, 3, \dots\}$$

2.2.3. Ich meine hier auf der linken Seite genauer Darstellungen bis auf Isomorphismus, habe es aber nicht explizit dazugeschrieben, um die Notation nicht zu überladen. Dieser Satz gilt im Gegensatz zum entsprechenden Satz im Fall der Drehgruppe  $\mathrm{SO}(3)$  nicht analog für reelle Darstellungen. Zum Beispiel besitzt die Spingruppe überhaupt keine reelle stetige irreduzible Darstellung der Dimension Zwei.

*Übung 2.2.4.* Man zeige, daß  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$  und  $\mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$  als reelle Liealgebren nicht isomorph sind. Man folgere, daß die Spingruppe überhaupt keine reelle stetige irreduzible Darstellung der Dimension Zwei besitzt. Sobald wir auf Liegruppen integrieren können und invariante Skalarprodukte zur Verfügung haben, wird das auch einfacher zu sehen sein.

*Beweis.* Natürlich operiert die  $\mathrm{SU}(2)$  auf der komplexen Ebene  $\mathbb{C}^2$ . Damit operiert unsere Gruppe auch auf dem Raum  $\mathrm{Ens}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$  aller Abbildungen  $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , der so eine unendlichdimensionale komplexe Darstellung wird. In Formeln wird diese Operation gegeben durch die Formel

$$(gP)(x) = P(g^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^2, g \in \mathrm{SU}(2)$$

die äquivalent ist zur vielleicht anschaulicheren Bedingung  $(gP)(gx) = P(x)$ . Der Teilraum  $L(m) = \mathbb{C}[X, Y]^m \subset \mathbb{C}[X, Y]$  aller polynomialen Abbildungen, die homogen sind vom Grad  $m$ , ist in diesem Abbildungsraum eine Unterdarstellung der Dimension  $(m+1)$  mit der Basis  $Y^m, XY^{m-1}, \dots, X^m$ , und die Operation von  $\mathrm{SU}(2)$  auf dieser Unterdarstellung ist offensichtlich stetig. Um nachzuweisen, daß sie auch irreduzibel ist, berechnen wir die abgeleitete Operation der Liealgebra

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} A = 0, \bar{A} = -A^\top\}$$

Die abgeleitete Operation von  $A \in \mathfrak{su}(2)$  auf  $P \in L(m)$  geschieht nach 2.1.9 durch

$$AP = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\exp tA)P - P}{t}$$

Für  $v \in \mathbb{C}^2$  folgt wegen der Linearität des Auswertens an der Stelle  $v$  und da die Kurven  $t \mapsto \exp(-tA)v$  und  $t \mapsto v - tAv$  beide bei  $t = 0$  mit derselben

Geschwindigkeit  $-Av$  durch den Punkt  $v$  laufen

$$(AP)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(\exp(-tA)v) - P(v)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(v - tAv) - P(v)}{t}$$

Das bedeutet jedoch gerade das Anwenden des Vektorfelds  $v \mapsto -Av$  auf unsere Funktion  $P$ , und bezeichnet  $a_{ij}$  den Eintrag der Matrix  $A$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte, so bedeutet es das Anwenden des Differentialoperators  $(-a_{11}X - a_{12}Y)\partial_x + (-a_{21}X - a_{22}Y)\partial_y$  auf unser Polynom  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ . Diese Formeln definieren sogar eine komplexlineare Operation der Liealgebra  $\mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$ . Nun beachten wir  $\mathfrak{su}(2) \cap i\mathfrak{su}(2) = 0$  in  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ , so daß die komplexlineare Erweiterung nach 2.1.26 der Einbettung  $\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  auf  $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$  notwendig eine Injektion und dann mit Dimensionsvergleich sogar eine Bijektion

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$$

liefert. Unter dieser Identifikation muß dann offensichtlich die aus der Komplexifizierung unserer reell-linearen Operation von  $\mathfrak{su}(2)$  entstehende komplexlineare Operation von  $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$  auf  $L(m)$  der durch unsere expliziten Formeln gegebenen komplexlinearen Operation von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  entsprechen. Unter unserer Operation wirken also die Elemente

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  wie die Differentialoperatoren  $-X\partial_x + Y\partial_y$ ,  $-Y\partial_x$  und  $-X\partial_y$ . Insbesondere bilden die Vektoren  $Y^m, XY^{m-1}, \dots, X^m$  eine Basis von  $L(m)$  aus Eigenvektoren von  $h$  zu den Eigenwerten  $m, m-2, \dots, -m$  und  $e$  und  $f$  induzieren Isomorphismen zwischen Eigenräumen zu benachbarten Eigenwerten. Unsere Darstellung für die komplexifizierte Liealgebra ist damit in der Tat irreduzibel, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung müßte nach ?? einen Eigenvektor von  $h$  enthalten und damit bereits die ganze Darstellung sein. Um zu zeigen, daß unsere Gruppe keine anderen irreduziblen komplexen Darstellungen besitzt, reicht es nach 2.1.29, dasselbe für ihre komplexifizierte Liealgebra zu prüfen. Das zeigen wir gleich anschließend als Satz 2.2.6.  $\square$

*Ergänzung 2.2.5.* In der Physik lernt man die hier mit  $e$  und  $f$  bezeichneten Elemente auch als **Leiteroperatoren** oder **Kletteroperatoren** kennen. Die aus der Physik vertrauten weniger übersichtlichen Formeln werden Sie jedoch erst in 2.4.18 sehen, wenn wir ein invariantes Skalarprodukt wählen und zu einer Orthonormalbasis übergehen. In der Physik rechnet man auch oft mit

den sogenannten **Pauli-Matrizen**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $i\mathfrak{su}(2)$  bilden.

**Satz 2.2.6 (Einfache Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ).** 1. Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ;

2. Ist  $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$  eine Basis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  mit  $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$  und  $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$ , so zerfällt jede einfache Darstellung  $L$  der Dimension  $m+1$  unter  $\tilde{h}$  in eindimensionale Eigenräume

$$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \dots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

zu den Eigenwerten  $m, m-2, \dots, 2-m, -m$ , und aus  $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$  folgt  $\tilde{f} : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$  sowie  $\tilde{e} : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$ .

2.2.7. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung  $\mathbb{C}$ , die Standarddarstellung  $\mathbb{C}^2$  und die "adjungierte Darstellung", die wir in 2.1.6 eingeführt haben. Eine explizite Beschreibung der anderen einfachen Darstellungen wird im Beweis gegeben.

*Ergänzung 2.2.8.* Der Satz gilt mit demselben Beweis allgemeiner über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null, und er folgt daraus ohne Schwierigkeiten über jedem Körper der Charakteristik Null. In positiver Charakteristik sind die Verhältnisse jedoch komplizierter.

*Beweis.* Daß es zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung  $L(m)$  mit den versprochenen Eigenschaften gibt, wissen wir bereits aus dem Beweis von 2.2.2. Explizit läßt sich eine derartige Darstellung auch mit etwas weniger Vorzeichen angeben. Die Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  hat ja die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ . Mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen prüft man leicht explizit, daß die Abbildung  $\rho : \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[X, Y])$  gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \rho(e) &= X\partial_y \\ \rho(f) &= Y\partial_x \\ \rho(h) &= X\partial_x - Y\partial_y \end{aligned}$$

eine Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  ist, daß die homogenen Polynome von festem Totalgrad  $m$  eine Unterdarstellung  $L(m) = \mathbb{C}[X, Y]^m$  der Dimension  $d = m + 1$  mit Basis  $w_i = Y^i X^{m-i}$  für  $i = 0, \dots, m$  bilden. In dieser Basis wird die Operation von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  auf  $L(m)$  beschrieben durch die Formeln

$$\begin{aligned} ew_i &= iw_{i-1} \\ fw_i &= (m-i)w_{i+1} \\ hw_i &= (m-2i)w_i \end{aligned}$$

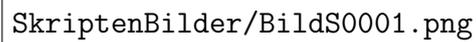
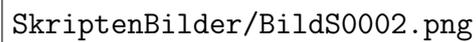
wo wir  $w_{-1} = w_{m+1} = 0$  verstehen. Die Darstellungen  $L(m)$  sind einfach, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung  $0 \neq U \subset L(m)$  enthält notwendig einen Eigenvektor zu  $h$ , also eines der  $w_i$ , und daraus folgt sofort  $U = L(m)$ . Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Wir müssen jedoch noch zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben endlichen Dimension isomorph sind. Sei dazu zunächst  $\rho : \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  irgendeine Darstellung. Bezeichne  $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$  den Eigenraum von  $\rho(h)$  zum Eigenwert  $\mu \in \mathbb{C}$ . So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2}$$

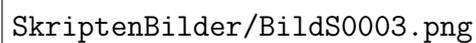
denn aus  $hv = \mu v$  folgt  $hev = ehv + [h, e]v = e\mu v + 2ev = (\mu + 2)ev$  und der zweite Fall ergibt sich ähnlich aus  $[h, f] = -2f$ . Ist  $V$  endlichdimensional und  $V \neq 0$ , so gibt es sicher  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $V_\lambda \neq 0$  aber  $V_{\lambda+2} = 0$ . Für  $v \in V_\lambda$  folgt dann  $ev = 0$  und  $hv = \lambda v$ . Wir schreiben  $f^i v$  für den Vektor, der aus  $v$  durch  $i$ -maliges Anwenden von  $f$  entsteht. Man wendet nun entweder 3.4.17 an oder prüft direkt per Induktion die Formeln

$$\begin{aligned} hf^i v &= (\lambda - 2i)f^i v && \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v &= i(\lambda - i + 1)f^{i-1} v && \text{für alle } i \geq 1. \end{aligned}$$

Die erste folgt unmittelbar aus unserer Erkenntnis  $fV_\mu \subset V_{\mu-2}$ , für die zweite muß etwas mehr gerechnet werden. Insbesondere ist nach diesem Formeln der von den  $f^i v$  mit  $i \geq 0$  aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist  $V$  zusätzlich einfach und  $v \neq 0$ , so müssen die  $f^i v$  demnach ganz  $V$  aufspannen. Gilt  $f^i v \neq 0$ , so sind  $v, fv, \dots, f^i v$  Eigenvektoren von  $h$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir  $V$  endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich  $d \geq 1$  mit  $f^d v = 0$ . Wählen wir  $d$  kleinstmöglich, so ist  $v, fv, \dots, f^{d-1} v$  eine Basis von  $V$ , also  $d = \dim V$ . Weiter folgt aus  $f^d v = 0$  auch  $0 = ef^d v = d(\lambda - d + 1)f^{d-1} v$  und mithin  $\lambda = d - 1$ , da wir ja  $d \neq 0$  und  $f^{d-1} v \neq 0$  vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  derselben endlichen Dimension  $d$  isomorph sind, da nämlich die Matrizen von  $\rho(e)$ ,  $\rho(f)$  und  $\rho(h)$  in der Basis  $v, fv, \dots, f^{d-1} v$  nur von  $d$  abhängen.  $\square$

A rectangular box containing the text "SkriptenBilder/BildS0001.png".A rectangular box containing the text "SkriptenBilder/BildS0002.png".

Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  in zwei Basen. Die nach rechts weisenden Pfeile stellen jeweils die Operation von  $e$  dar, die nach links weisenden Pfeile die Operation von  $f$  und die Schleifen die Operation von  $h$ .

A rectangular box containing the text "SkriptenBilder/BildS0003.png".

Die Operation auf dem von den  $v_i = f^i v$  aufgespannten Teilraum, in derselben Weise zu interpretieren wie die obenstehenden Darstellungen.

2.2.9. Die expliziten Formeln für die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen der  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von  $h$ . Setzen wir genauer  $w_i = u_{m-2i}$ , so erhalten wir für  $L(m)$  eine Basis bestehend aus  $u_m, u_{m-2}, \dots, u_{-m}$  und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned} eu_j &= ((m-j)/2)u_{j+2} \\ fu_j &= ((m+j)/2)u_{j-2} \\ hu_j &= ju_j \end{aligned}$$

*Ergänzende Übung 2.2.10.* Ist  $V$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und sind weder Null noch Eins Eigenwerte von  $h = \text{diag}(1, -1)$ , in Formeln  $V_0 = V_1 = 0$ , so folgt bereits  $V = 0$ .

*Übung 2.2.11.* Man zeige: Ist  $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$  eine Basis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  mit  $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$  und  $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$ , so gilt  $[\tilde{e}, \tilde{f}] = c\tilde{h}$  für einen Skalar  $c \neq 0$ .

**Satz 2.2.12 (Einfache Darstellungen der räumlichen Drehgruppe).**

*Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der Drehgruppe werden klassifiziert durch ihre Dimension. Genauer liefert die Dimension eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \text{Darstellungen der Drehgruppe } \text{SO}(3) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 3, 5, \dots\}$$

*Beweis von 2.2.12.* Wir erinnern uns an die stetige Surjektion  $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  mit Kern  $\{+1, -1\}$  aus 1.8.2. Das Zurückholen mit dieser Surjektion liefert nach der universellen Eigenschaft der Restklassengruppe ?? und III.3.2.16 eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Drehgruppe und den Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Spingruppe, auf denen das Negative der Einheitsmatrix trivial operiert. Das sind aber offensichtlich genau die Darstellungen  $L(m) = \mathbb{C}[X, Y]^m$  für gerades  $m$  alias die einfachen Darstellungen ungerader Dimension.  $\square$

*Ergänzende Übung 2.2.13.* Die Räume  $L_{\mathbb{R}}(m) = \mathbb{R}[X, Y]^m$  aller homogenen Polynomfunktionen auf  $\mathbb{R}^2$  vom Grad  $m$  sind unter der von der offensichtlichen Wirkung von  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}^2$  induzierten Operation einfache reelle Darstellungen der Gruppe  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$  und jede stetige einfache endlichdimensionale Darstellung von  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$  ist isomorph zu genau einer dieser Darstellungen. Hinweis: 2.2.7.

*Ergänzende Übung 2.2.14.* Gegeben ein Körper  $k$  und eine Darstellung  $\rho : \mathfrak{sl}(2; k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2; k)$  mit ihrer Standardbasis  $e, h, f$  mit

Kommutatoren  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$  liefert der in der assoziativen Algebra  $\text{End}_k(V)$  zu interpretierende Ausdruck

$$4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h) + 2)$$

einen mit der Operation unserer Liealgebra verträglichen Endomorphismus von  $V$ . Im Fall der einfachen  $(m+1)$ -dimensionalen Darstellung  $L(m)$  der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  ist dieser Endomorphismus die Multiplikation mit dem Skalar  $m(m+2)$ . Hinweis: Tapfer rechnen. Dieser Operator ist im übrigen das einfachste Beispiel eines sogenannten **Casimir-Operators**, vergleiche ??.

*Ergänzende Übung 2.2.15.* Man betrachte die Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2; k)$  mit ihrer Standardbasis  $e, h, f$  und Kommutatoren  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ . Man prüfe per Induktion, daß allgemeiner als im Beweis von Satz 2.2.6 für jeden Vektor  $v$  einer Darstellung besagter Liealgebra mit  $ev = 0$  gilt

$$\begin{aligned} hf^i v &= f^i(h - 2i)v && \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v &= if^{i-1}(h - i + 1)v && \text{für alle } i \geq 1. \end{aligned}$$

*Ergänzende Übung 2.2.16.* Man zeige, daß jede endlichdimensionale Darstellung  $V$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Hinweis: Man zerlege besagte Darstellung zunächst in die Haupträume des in 2.2.14 eingeführten Casimir-Operators und ziehe sich so auf den Fall zurück, daß die einfachen Subquotienten unserer Darstellung  $V$  paarweise isomorph sind, sagen wir zu  $L(m)$ . Dann zeige man, daß  $f^m$  einen Isomorphismus  $\text{Hau}(h; m) \xrightarrow{\sim} \text{Hau}(h; -m)$  zwischen den Haupträumen von  $h$  zu den entsprechenden Eigenwerten liefert. Schließlich folgere man aus 3.4.17 unter Verwendung von  $f^{m+1}v = 0$ , daß  $h$  auf  $\text{Hau}(h; m)$  diagonal operiert, und argumentiere von da ausgehend. Man zeige dasselbe Resultat auch im Fall reeller Koeffizienten und, wenn man in Algebra bewandert ist, über einem beliebigen Grundkörper der Charakteristik Null. Eine Verallgemeinerung des Resultats auf allgemeinere, sogenannte “halbeinfache” Liealgebren wird in ?? gezeigt.

*Ergänzende Übung 2.2.17.* Jede endlichdimensionale Darstellung der Liegruppen  $SU(2)$  und  $SO(3)$  und  $SL(2; \mathbb{R})$  ist eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen. Hinweis: 2.2.16. Im Fall der beiden ersten Gruppen wird 2.3.1 einen alternativen Zugang liefern.

*Übung 2.2.18.* Man betrachte die Darstellung von  $GL(n; \mathbb{R})$  auf dem Raum  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^{(d)}$  der homogenen Polynome vom Grad  $d$  durch

$$(gP)(x) = P(g^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, g \in GL(n; \mathbb{R})$$

und zeige, daß in der abgeleiteten Darstellung der Liealgebra die Basismatrix  $E_{ij}$  mit einer Eins in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte und Null sonst wie der Differentialoperator  $-X_j\partial_i$  operiert. Es scheint mir nun offensichtlich, daß wir mit diesen Operatoren jedes von Null verschiedene homogene Polynom in ein von Null verschiedenes homogenes Monom überführen können, und ein solches Monom in jedes andere vom selben Grad. Man folgere, daß diese Darstellungen sämtlich irreduzibel sind.

*Ergänzende Übung 2.2.19.* Für alle  $n \geq 1$  bilden die homogenen Polynome vom Grad  $d$  eine irreduzible Darstellung

$$\mathcal{O}^d(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{(d)}$$

der Gruppe  $GL(n; \mathbb{C})$  sowie ihrer Untergruppen  $GL(n; \mathbb{R})$  und  $U(n)$ . Für  $n \geq 2$  bleiben sie irreduzibel unter  $SL(n; \mathbb{C})$ ,  $SL(n; \mathbb{R})$  und  $SU(n)$ . In der Tat besteht  $\text{Lie } SU(n)$  aus den Fixpunkten einer schieflinaren Involution auf  $\text{Lie } SL(n; \mathbb{C})$  und die Einbettung liefert folglich einen Isomorphismus  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} SU(n) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } SL(n; \mathbb{C})$ . Auf diese Weise können wir uns auf  $SL(n; \mathbb{C})$  und dann sogar  $GL(n; \mathbb{C})$  zurückziehen. Nun überlegt man sich wie in 2.2.18, daß die Elemente der Lie-Algebra als  $x_i\partial_j$  wirken. Es scheint mir nun offensichtlich, daß wir mit diesen Operatoren jedes von Null verschiedene homogene Polynom in ein von Null verschiedenes homogenes Monom überführen können, und ein solches Monom in jedes andere vom selben Grad.

### 2.3 Haar'sches Maß für Matrix-Liegruppen

**Satz 2.3.1 (Vollständige Reduzibilität).** *Jede stetige endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Matrix-Liegruppe ist eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

*Ergänzung 2.3.2.* Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf gewisse unendlichdimensionale Darstellungen wird in 11.10.8 diskutiert.

*Beweis.* Nach dem im folgenden bewiesenen Lemma 2.3.12 finden wir auf unserer Darstellung stets ein unter der Gruppenoperation invariantes Skalarprodukt. Nun argumentieren wir durch Induktion über die Dimension unserer Darstellung. Ist sie Null, so ist nichts zu zeigen. Sonst besitzt sie eine einfache Unterdarstellung, und deren orthogonales Komplement ist auch eine Unterdarstellung, auf die wir dann nur noch die Induktionsannahme anzuwenden brauchen.  $\square$

2.3.3. Dieser Satz gilt sowohl für reelle wie auch für komplexe Darstellungen. Im Fall der einelementigen Gruppe besagt der Satz schlicht, daß sich jeder

endlichdimensionale Vektorraum als eine direkte Summe von eindimensionalen Teilräumen schreiben läßt. Ein rein algebraischer Beweis für eine analoge Aussage im Fall von Darstellungen der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  wird in Übung 2.2.16 erklärt. Wenn wir diese algebraische Aussage aus dem vorhergehenden Satz 2.3.1 ableiten wollen, muß jedoch der Satz zur Verfügung stehen, nach dem jede endlichdimensionale Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{su}(2)$  zu einer Darstellung der Liegruppe  $SU(2)$  integriert werden kann.

*Beispiel 2.3.4.* Die offensichtliche zweidimensionale Darstellung von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

auf  $\mathbb{R}^2$  läßt sich nicht als direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen schreiben, denn sie hat nur eine einzige eindimensionale Unterdarstellung, die Gerade  $\mathbb{R}e_1$ . Die Kompaktheit der dargestellten Gruppe ist also für unseren Satz 2.3.1 wesentlich.

**Definition 2.3.5.** Eine **stetige positive Dichte** auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Borelmaß, dessen Restriktion auf jede Karte durch das Produkt des Lebesgue-Maßes mit einer stetigen positiven Funktion dargestellt werden kann.

**Definition 2.3.6.** Ein **Haar-Maß**, genauer ein **linksinvariantes Haar-Maß** auf einer Matrix-Liegruppe  $G$  ist eine stetige positive Dichte  $\mu$  auf  $G$  im Sinne von 2.3.5 mit  $\mu(xA) = \mu(A)$  für alle  $x \in G$  und alle Borelmengen  $A \subset G$ .

*Vorschau 2.3.7.* Ganz allgemein definiert man ein Haar-Maß auf einer topologischen Gruppe als ein von Null verschiedenes nichtnegatives linksinvariantes "Radonmaß" und zeigt Existenz und Eindeutigkeit für beliebige lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppen, vergleiche 17.3.2 und 17.3.3. In unserem speziellen Fall entsprechen jedoch nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 17.2.3 die Radonmaße eineindeutig den Borelmaßen, weshalb unser Haar-Maß hier auch im Sinne der allgemeinen Definition ein Haar-Maß ist.

**Satz 2.3.8 (Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Maße).** *Auf jeder Matrix-Liegruppe gibt es ein Haar'sches Maß, und je zwei Haar'sche Maße auf derselben Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen konstanten Faktor  $a > 0$ .*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist klar, da sich je zwei stetige positive Dichten offensichtlich nur um das Produkt mit einer stetigen positiven Funktion unterscheiden, die im Fall von zwei Haar-Maßen eben auch linksinvariant und

damit konstant sein muß. Um die Existenz zu zeigen, erinnern wir die Einbettung  $G \hookrightarrow \text{Aut}(V)$  unserer Matrix-Liegruppe. Sei  $k$  die Dimension von  $G$ . Sicher gibt es eine alternierende  $k$ -Multilinearform  $\omega_e \in \text{Alt}^k(\text{End } V)$  mit der Eigenschaft, daß ihre Restriktion  $\omega_e \in \text{Alt}^k(T_e G)$  nicht verschwindet. Wir wählen sie beliebig aber fest und erklären eine  $k$ -Form oder genauer ein Feld von  $k$ -Formen  $\omega$  auf  $\text{Aut}(V)$  durch die Vorschrift

$$\omega_g = (g^{-1} \cdot)^{\top} \omega_e$$

in der Notation aus IV.7.1.13. So erhalten wir eine stetige  $k$ -Form  $\omega$  auf  $\text{Aut}(V)$  mit der Eigenschaft  $(h \cdot)^* \omega = \omega$  alias  $(h \cdot) : \omega \rightsquigarrow \omega$  für alle  $h \in \text{Aut}(V)$ . Das in IV.7.4.2 erklärte zugehörige Maß  $|\omega|$  auf der eingebetteten  $k$ -Mannigfaltigkeit  $G$  ist dann die gesuchte positive stetige linksinvariante Dichte.  $\square$

*Beispiel 2.3.9.* Wir erhalten ein Haar'sches Maß auf  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ , indem wir das gewöhnliche Lebesgue-Maß von  $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  einschränken und mit der Funktion  $A \mapsto |\det A|^{-n}$  multiplizieren. Speziell ist  $|x|^{-1} dx$  ein Haar'sches Maß auf der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{R}^\times$ .

*Übung 2.3.10.* Man gebe auf  $\mathbb{C}^\times$  und allgemeiner auf  $\text{GL}(n; \mathbb{C})$  ein Haar'sches Maß an.

2.3.11. Auf einer kompakten Matrix-Liegruppe  $G$  ist jedes Haar-Maß  $\mu$  auch rechtsinvariant, in Formeln  $\mu(Ag) = \mu(A)$  für alle  $g \in G$ . In der Tat ist für jedes feste  $g \in G$  mit  $\mu$  auch die Vorschrift  $A \mapsto \mu(Ag)$  ein linksinvariantes Haar-Maß, also gibt es nach 2.3.8 eine Konstante  $c_g$  mit  $\mu(A) = c_g \mu(Ag)$  für alle  $A$ . Für kompaktes  $G$  gilt aber  $0 < \mu(G) < \infty$ . Setzen wir also in der vorhergehenden Gleichung  $A = G$ , so folgt wie gewünscht  $c_g = 1$ .

**Lemma 2.3.12.** *Auf jeder endlichdimensionalen stetigen reellen oder komplexen Darstellung einer kompakten Matrix-Liegruppe gibt es ein invariantes Skalarprodukt.*

*Beweis.* Bezeichne  $K$  unsere kompakte Matrix-Liegruppe und  $V$  unsere Darstellung. Nach 2.3.8 gibt es ein Haar'sches Maß  $\mu$  auf  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, ist nach IV.6.5.4 jede stetige Funktion integrierbar. Ist nun  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  irgendein Skalarprodukt, so definiert die Formel

$$(v, w) = \int_K b(gv, gw) \mu\langle g \rangle$$

ein  $K$ -invariantes Skalarprodukt, i.e. es gilt  $(gv, gw) = (v, w) \quad \forall g \in K$ . Damit das richtig ist, muß a priori  $\mu$  ein rechtsinvariantes Haarmaß sein. Im kompakten Fall wissen wir aber bereits, daß linksinvariante Haarmaße auch rechtsinvariant sind und umgekehrt.  $\square$

SkriptenBilder/BildHaMa.png

Die Intervalle zwischen je zwei Zweierpotenzen müssen für ein Haar'sches Maß auf der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen jeweils dasselbe Maß haben. Man sieht so zumindest qualitativ recht gut, daß die Massebelegung gegen den Ursprung hin immer dichter werden muß.

*Übung 2.3.13.* Man zeige:  $U(n) \subset GL(n; \mathbb{C})$  ist eine maximale kompakte Untergruppe und gegeben eine beliebige kompakte Untergruppe  $K \subset GL(n; \mathbb{C})$  gibt es stets  $g \in GL(n; \mathbb{C})$  mit  $gKg^{-1} \subset U(n)$ . Man zeige auch die analoge Aussage im Fall  $O(n) \subset GL(n; \mathbb{R})$ . Hinweis: 2.3.12.

*Übung 2.3.14.* Gegeben eine stetige Darstellung  $\rho : S^1 \rightarrow GL(V)$  der Kreislinie  $S^1$  durch Automorphismen eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums  $V$  zerfällt unser Raum als eine direkte Summe von Teilräumen

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

mit  $V_n = \{v \in V \mid \rho(z)v = z^n v \ \forall z \in S^1\}$ . Hierbei werden dann natürlich fast alle der  $V_n$  nur aus dem Nullvektor bestehen und die direkte Summe ist im Sinne von ?? zu interpretieren. Einen alternativen Zugang, der mit sehr viel weniger Analysis auskommt und stattdessen von der Jordan'schen Normalform ausgeht, wird in ?? skizziert. Eine Verallgemeinerung auf Tori wird in 2.4.12 besprochen.

## 2.4 Vollständig reduzible Darstellungen

**Lemma 2.4.1.** *Jeder Verflechtungsoperator zwischen einfachen Darstellungen ist entweder die Nullabbildung oder ein Isomorphismus.*

2.4.2. Sind insbesondere  $L \not\cong M$  nichtisomorphe einfache Darstellungen einer Gruppe  $G$ , so folgt  $\text{Hom}^G(L, M) = 0$ . Sind  $L$  und  $M$  dahingegen isomorphe einfache Darstellungen und ist  $\varphi : L \xrightarrow{\sim} M$  ein Isomorphismus, so liefert das Nachschalten von  $\varphi$  eine Bijektion  $\text{End}^G(L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}^G(L, M)$  und das Vorschalten von  $\varphi$  eine Bijektion  $\text{End}^G(M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}^G(L, M)$ .

*Beweis.* Für einen Verflechtungsoperator  $\varphi : L \rightarrow M$  ist das Bild stets eine Unterdarstellung im  $\varphi \subset M$ . Aus  $\varphi \neq 0$  und  $M$  einfach folgt also  $\varphi$  surjektiv. Für einen Verflechtungsoperator  $\varphi : L \rightarrow M$  ist weiter der Kern stets eine Unterdarstellung  $\ker \varphi \subset L$ . Aus  $\varphi \neq 0$  und  $L$  einfach folgt also  $\ker \varphi = 0$  und damit  $\varphi$  injektiv. Sind also  $M$  und  $L$  beide einfach und ist  $\varphi$  nicht Null, so ist  $\varphi$  bijektiv.  $\square$

**Lemma 2.4.3 (von Schur).** *Die einzigen Verflechtungsoperatoren einer einfachen komplexen endlichdimensionalen Darstellung mit sich selbst sind die skalaren Vielfachen der Identität.*

*Beweis.* Jeder Eigenraum eines Endomorphismus einer Darstellung muß eine Unterdarstellung sein. Jeder Eigenraum eines Endomorphismus einer einfachen

Darstellung ist also der ganze Raum oder der Nullraum. Da jeder Endomorphismus eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen Raums über  $\mathbb{C}$  mindestens einen Eigenwert hat, folgt das Lemma.  $\square$

2.4.4. Für jede komplexe endlichdimensionale einfache Darstellung  $L$  einer Gruppe  $G$  liefert unser Schur'sches Lemma in Formeln einen Isomorphismus

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}}^G L$$

vermittels  $\lambda \mapsto \lambda \text{id}_L$ . Eine allgemeinere Variante des Schur'schen Lemmas findet man in ???. Es ist hierbei wesentlich, mit komplexen Darstellungen oder allgemeiner Darstellungen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zu arbeiten: Für die durch die Einbettung  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$  gegebene Darstellung von  $S^1$  auf  $\mathbb{C}$  etwa hätten wir  $\text{End}_{\mathbb{R}}^{S^1} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ , für die triviale Darstellung dahingegen  $\text{End}_{\mathbb{R}}^{S^1} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ .

*Übung 2.4.5.* Für je zwei komplexe endlichdimensionale einfache Darstellung  $L, M$  einer Gruppe  $G$  gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^G(L, M) \leq 1$ .

*Übung 2.4.6 (Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte).* Zwei invariante Skalarprodukte auf einer irreduziblen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Darstellung einer Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen positiven Skalar, ja je zwei invariante Bilinearformen und im Komplexen auch je zwei invariante Sesquilinearformen auf einer irreduziblen endlichdimensionalen Darstellung unterscheiden sich höchstens um einen Skalar. Hinweis: Man beachte die Identifikationen  $\text{Bil}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, V^*)$  nach ??? und analog für  $\text{Sesq}(V)$  die Menge der Sesquilinearformen  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum die Identifikation  $\text{Sesq}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\overline{V}, V^*)$  mit  $s \mapsto f_s$  und  $f_s$  gegeben durch  $f_s(\bar{v}) : w \mapsto s(v, w)$  mit  $\overline{V}$  dem komplex konjugierten Vektorraum nach ???. Dann wende man 2.4.5 an.

*Übung 2.4.7.* Unter einer **unitären Darstellung** einer Gruppe versteht man eine Darstellung durch unitäre Automorphismen eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums oder allgemeiner eines Hilbertraums. Man zeige: Sind  $U, V$  zwei nichtisomorphe endlichdimensionale einfache Unterdarstellungen einer unitären Darstellung, so stehen  $U$  und  $V$  aufeinander senkrecht. Hinweis: Orthogonale Projektion ???.

2.4.8. Wie bereits der Fall der trivialen Gruppe zeigt, sind die bei einer Zerlegung einer Darstellung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen auftretenden Unterdarstellungen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt: Ein endlichdimensionaler Vektorraum etwa kann auf viele verschiedene Arten als direkte Summe eindimensionaler Teilräume dargestellt werden. Die

folgenden Bemerkungen erläutern, was im Allgemeinen bei der Zerlegung in eine direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen an Eindeutigkeit noch zu retten ist.

**Definition 2.4.9.** Eine Darstellung einer Gruppe heißt **vollständig reduzibel** oder auch **halbeinfach** genau dann, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist.

2.4.10. Ist  $V$  eine endlichdimensionale halbeinfache komplexe Darstellung einer Gruppe  $G$  und sind  $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_m$  und  $V = L'_1 \oplus \dots \oplus L'_{m'}$  zwei Zerlegungen in eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen, so gilt  $m = m'$  und es gibt eine Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_m$  mit  $L'_i \cong L_{\sigma(i)}$  für alle  $i$ . In der Tat läßt sich nach 2.4.1 und 2.4.3 die Vielfachheit einer einfachen Darstellung  $L$  als Unterdarstellung in einer solchen Zerlegung darstellen als die Dimension des Raums von Verflechtungsoperatoren  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^G(L, V)$ . Weiter gilt für jede einfache Darstellung  $L$  von  $G$  in unserer Darstellung  $V$  die Gleichheit von Untervektorräumen

$$\bigoplus_{L_i \cong L} L_i = \bigoplus_{L'_j \cong L} L'_j$$

denn diese Untervektorräume lassen sich wieder nach 2.4.1 beschreiben als das Erzeugnis der Bilder aller Verflechtungsoperatoren  $L \rightarrow V$  von unserer einfachen Darstellung  $L$  zur gegebenen Darstellung. Wir bezeichnen diesen Untervektorraum mit  $V_L \subset V$ . Er heißt die **isotypische Komponente** in  $V$  vom Typ  $L$ . Natürlich erhalten wir dann für  $V$  die **Zerlegung in isotypische Komponenten**

$$V = \bigoplus_{L \in \text{irr } G} V_L$$

wo sich die Summe über die Menge  $\text{irr } G$  aller Isomorphieklassen von einfachen endlichdimensionalen komplexen Darstellungen von  $G$  erstreckt. Im Fall einer unitären Darstellung stehen die isotypischen Komponenten paarweise senkrecht aufeinander nach 2.4.7.

*Ergänzung 2.4.11.* Analoge Aussagen gelten auch für nicht notwendig endlichdimensionale halbeinfache Darstellungen über beliebigen Körpern, ja sogar für halbeinfache Moduln über beliebigen Ringen, vergleiche ??.

*Beispiel 2.4.12.* Dies Beispiel verallgemeinert 2.3.14. Ist  $T$  eine kompakte abelsche Matrix-Liegruppe und  $V$  eine endlichdimensionale stetige komplexe Darstellung von  $T$ , so hat die isotypische Zerlegung die Gestalt

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(T)} V_{\chi}$$

wobei  $\chi$  wie angedeutet über alle Charaktere von  $T$  alias alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $T \rightarrow \mathbb{C}^\times$  läuft und  $V_\chi$  beschrieben werden kann als

$$V_\chi := \{v \in V \mid tv = \chi(t)v \ \forall t \in T\}$$

Insbesondere im Fall eines Torus  $T$  heißen die  $\chi \in \mathfrak{X}(T)$  mit  $V_\chi \neq 0$  die **Gewichte von  $T$  in  $V$**  und werden nach französisch **poids** auch notiert in der Form

$$P(V) = P_T(V) := \{\chi \in \mathfrak{X}(T) \mid V_\chi \neq 0\}$$

Die isotypischen Komponenten  $V_\chi$  ihrerseits heißen, immer noch im Fall der Darstellungen einer kompakten abelschen Liegruppe, die **Gewichtsräume** unserer Darstellung.

*Übung 2.4.13.* Jede endlichdimensionale komplexe einfache Darstellung der Drehgruppe hat unter der Einschränkung auf die Gruppe der Drehungen um eine feste Achse isotypische Komponenten der Dimension höchstens Eins, und die zu den Komponenten der Dimension Eins gehörigen Parameter bilden in  $\mathbb{Z}$  ein Intervall mit Zentrum im Ursprung, in Formeln

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}^{S^1}(\chi_n, L(m)) = \begin{cases} 1 & |n| \leq m/2; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz 2.4.14 (Kanonische Zerlegung).** *Seien  $G$  eine kompakte Matrix-Liegruppe und  $\operatorname{irr} G$  ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von  $G$ . So liefert für jede komplexe endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $G$  das Auswerten einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{L \in \operatorname{irr} G} L \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}^G(L, V) \xrightarrow{\sim} V$$

2.4.15. Unter diesem Isomorphismus entspricht  $L \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}^G(L, V)$  gerade der  $L$ -isotypischen Komponente  $V_L$  von  $V$  aus 2.4.10.

*Beweis.* Gilt der Satz für zwei Darstellungen  $V$  und  $W$ , so offensichtlich auch für ihre Summe  $V \oplus W$ . Da nach 2.3.1 unsere Darstellung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen zerfällt, müssen wir ihn damit nur noch für  $V$  einfach zeigen. In diesem Fall folgt er aber aus der Schur'schen Lemma 2.4.1.  $\square$

*Übung 2.4.16.* Gegeben eine endlichdimensionale unitäre Darstellung  $V$  einer Liegruppe  $G$  gilt für die abgeleitete Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  die Identität

$$\langle xv, w \rangle + \langle v, xw \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v, w \in V$$

*Ergänzende Übung 2.4.17.* Man zeige, daß in einer endlichdimensionalen unitären Darstellung einer Liegruppe jedes Element der Liealgebra als diagonalisierbare Matrix mit rein imaginären Eigenwerten operiert. Man folgere, daß jede endlichdimensionale unitäre Darstellung  $(V, \rho)$  der Gruppe  $SL(2; \mathbb{R})$  konstant ist, in Formeln  $\rho(g) = \text{id} \quad \forall g \in SL(2; \mathbb{R})$ . Hinweis: Jede unitäre endlichdimensionale Darstellung dieser Gruppe entsteht durch Restriktion einer Darstellung von  $SL(2; \mathbb{C})$  und besitzt jedenfalls ein invariantes Skalarprodukt unter der Restriktion auf  $SU(2)$ , so daß auch  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  mit rein imaginären Eigenwerten operieren muß.

*Ergänzende Übung 2.4.18.* Wir erinnern an unsere  $(m+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung  $\mathbb{C}[X, Y]^m = L(m)$  der Spingruppe  $SU(2)$  aus dem Beweis von 2.2.2 mit ihrer Basis  $w_\nu = Y^\nu X^{m-\nu}$  für  $0 \leq \nu \leq m$ . Man wähle ein invariantes Skalarprodukt. In der Physik verwendet man statt  $m$  als Parameter lieber  $\frac{m}{2} = j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  und bezeichnet die auf Länge Eins normierten Vektoren  $w_\nu$  mit

$$|j, j - \nu\rangle := w_\nu / \|w_\nu\|$$

Damit bilden dann die Vektoren  $|j, \mu\rangle$  für  $\mu = j, j-1, \dots, -(j-1), -j$  eine Orthonormalbasis von  $L(m)$ . Schließlich schreibt man  $e = J_+$ ,  $f = J_-$  und  $h/2 = J_z$ . Man prüfe in dieser Notation die Formeln

$$\begin{aligned} J_z |j, \mu\rangle &= \mu |j, \mu\rangle \\ J_\pm |j, \mu\rangle &= \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu \pm 1)} |j, \mu \pm 1\rangle \\ &= \sqrt{(j \pm \mu + 1)(j \mp \mu)} |j, \mu \pm 1\rangle \end{aligned}$$

Hinweis: Beim Rechnen in mathematischer Terminologie mag man davon ausgehen, daß  $e - f$  zu  $\mathfrak{su}(2; \mathbb{C})$  gehört, so daß nach 2.4.16 für jedes invariante Skalarprodukt gelten muß  $\langle (e - f)w_\nu, w_{\nu+1} \rangle + \langle w_\nu, (e - f)w_{\nu+1} \rangle = 0$ .

## 2.5 Kugelfunktionen\*

2.5.1 (**Zerlegung von Funktionen auf der Kreislinie**). In der unitären Darstellung der Kreislinie  $S^1 \cong SO(2)$  auf dem Raum  $L^2(S^1)$  der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Kreislinie durch Verschieben von Funktionen tritt jede endlichdimensionale einfache Darstellung der Kreislinie genau einmal als Unterdarstellung auf, in Formeln

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{S^1}(\chi_n, L^2(S^1)) = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Des weiteren ist die Summe all dieser endlichdimensionalen Unterdarstellungen ein dichter Teilraum des Hilbertraums  $L^2(S^1)$ , in dem sie im übrigen

nach 2.4.7 paarweise senkrecht stehen. Mit  $\chi_n$  meinen wir hier den Vektorraum  $\mathbb{C}$  mit derjenigen  $S^1$ -Operation, unter der  $z$  durch Multiplikation mit  $\chi_n(z) = z^n$  operiert. Diese ganzen Aussagen sind nur eine Umformulierung von Satz V.1.6.9, nach dem die Charaktere  $\chi_n : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  eine Hilbertbasis von  $L^2(S^1)$  bilden.

*Übung 2.5.2.* Jede endlichdimensionale Unterdarstellung von  $L^2(S^1)$  ist stetig. Hinweis: Fourierentwicklung.

**Satz 2.5.3 (Zerlegung von Funktionen auf der Kugelschale).** *In der unitären Darstellung durch Verschieben von Funktionen der Drehgruppe  $SO(3)$  auf dem Raum  $L^2(S^2)$  der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Kugelschale tritt jede endlichdimensionale einfache Darstellung der Drehgruppe genau einmal als Unterdarstellung auf, in Formeln*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}^{\operatorname{SO}(3)}(L(2l), L^2(S^2)) = 1 \text{ für } l \in \mathbb{N}$$

und die Summe all dieser Unterdarstellungen ist ein dichter Teilraum des Hilbertraums  $L^2(S^2)$ , in dem sie nach 2.4.7 im übrigen paarweise aufeinander senkrecht stehen.

2.5.4. Insbesondere erhalten wir eine Hilbertbasis unseres Funktionenraums  $L^2(S^2)$ , indem wir in jeder unserer einfachen Unterdarstellungen eine Orthonormalbasis wählen und alle diese Basen zusammenfassen. Wir erklären in 2.5.7 folgende, wie man diese Basisvektoren nach Wahl einer festen gerichteten Achse besonders geschickt wählen kann: Die so ausgezeichneten Funktionen heißen dann die **Kugelfunktionen** oder auch **Kugelflächenfunktionen**.

2.5.5. Im Anschluß zeigen wir zusätzlich, daß der Raum der unter allen Rotationen um die  $z$ -Achse invarianten Funktionen aus der einfachen Unterdarstellung  $\mathcal{H}^l \subset L^2(S^2)$  der Dimension  $2l + 1$  erzeugt wird vom sogenannten “ $l$ -ten Legendre-Polynom”  $P_l(z)$ , aufgefaßt als Funktion der  $z$ -Koordinate auf der Kugelschale. Die Wahl der Bezeichnung  $\mathcal{H}^l$  für unsere einfachen Unterdarstellungen geht auf das Wort “harmonisch” zurück, das sich die fraglichen Funktionenräume hinwiederum verdienen als Eigenräume des “Laplace-Operators auf der Kugelschale”, aber darauf will ich hier noch nicht eingehen.

*Ergänzung 2.5.6.* Man kann auch für die höherdimensionalen Sphären  $S^n$  mit  $n \geq 1$  zeigen, daß in  $L^2(S^n)$  die irreduziblen Darstellungen von  $SO(n + 1)$  jeweils höchstens einmal vorkommen. Ganz allgemein nennt man homogene Räume “sphärisch”, wenn sie die Eigenschaft haben, daß in geeigneten Funktionenräumen keine einfachen Darstellungen mit höheren Multiplizitäten auftreten.

*Beweis.* Wir betrachten die Räume homogener Polynome in drei Veränderlichen  $\mathbb{C}[X, Y, Z]^l$ . Eine Polynomfunktion  $P$ , die homogen ist vom Grad  $d$ , erfüllt die Gleichung  $P(\lambda v) = \lambda^d P(v)$  für alle  $v \in \mathbb{R}^3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mithin definiert die Einschränkung für alle  $d \geq 0$  eine Einbettung

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]^l \hookrightarrow \mathcal{C}(S^2)$$

wobei die Polynome von geradem bzw. ungeradem Grad in den Räumen aller unter der Punktspiegelung am Ursprung geraden bzw. ungeraden Funktionen  $\mathcal{C}(S^2)^+$  bzw.  $\mathcal{C}(S^2)^-$  landen. Bezeichnet  $\mathcal{C}^l$  das Bild von  $\mathbb{C}[X, Y, Z]^l$  in  $\mathcal{C}(S^2)$ , so haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0 &\subset \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{C}^4 \subset \dots \subset \mathcal{C}(S^2)^+ \\ \mathcal{C}^1 &\subset \mathcal{C}^3 \subset \mathcal{C}^5 \subset \dots \subset \mathcal{C}(S^2)^- \end{aligned}$$

da ja ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]^l$  dieselbe Einschränkung auf die Sphäre hat wie das Polynom  $(X^2 + Y^2 + Z^2)P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]^{l+2}$ . Die Dimensionen ergeben sich leicht zu

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}^l &= \dim \mathbb{C}[X, Y, Z]^l \\ &= \dim \mathbb{C}[X, Y]^{\leq l} \\ &= 1 + 2 + \dots + l + (l + 1) \\ &= (l + 1)(l + 2)/2 \end{aligned}$$

Nun sind alle  $\mathcal{C}^l$  offensichtlich stabil unter der Drehgruppe  $SO(3)$  und die konstanten Funktionen  $\mathcal{C}^0$  bzw. die linearen Funktionen  $\mathcal{C}^1$  bilden irreduzible Darstellungen der Dimensionen Eins bzw. Drei. Wir zeigen als nächstes, daß für  $l \geq 2$  das orthogonale Komplement  $\mathcal{H}^l$  von  $\mathcal{C}^{l-2}$  in  $\mathcal{C}^l$  eine irreduzible Darstellung der Dimension  $2l + 1$  ist. Die Dimension ergibt sich durch direkte Rechnung und besonders anschaulich durch die Betrachtung geeigneter Treppenbilder. Die Irreduzibilität folgern wir induktiv mithilfe unserer Erkenntnisse über die Struktur irreduzibler Darstellungen der Drehgruppe aus [2.2.12](#), [2.4.13](#). Zunächst beachten wir dazu für  $S^1 \subset SO(3)$  die Gruppe der Drehungen um die  $z$ -Achse und  $\chi_n$  die entsprechende einfache Darstellung von  $S^1$ , daß  $\chi_l$  in  $\mathcal{C}^l$  vorkommt, in Formeln

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{S^1}(\chi_l, \mathcal{C}^l) \neq 0$$

In der Tat ist  $(x + iy)^l$  eine Funktion, die sich entsprechend unter  $S^1$  transformiert. Per Induktion bzw. expliziter Betrachtung im Fall  $l = 0, 1$  wissen wir nach [1.1.14](#) auch, daß dieses Gewicht von  $S^1$  in  $\mathcal{C}^{l-2}$  nicht vorkommt. Folglich muß es in  $\mathcal{H}^l$  vorkommen, und aus Dimensionsbetrachtungen folgt dann, daß

$\mathcal{H}^l$  irreduzibel ist. Die Dichtheit des Raums der Polynomfunktionen im Raum aller stetigen Funktionen folgt mit Stone-Weierstrass III.3.2.9, die Dichtheit von  $\mathcal{C}(S^2)$  in  $L^2(S^2)$  mit V.1.5.1. Vereinbaren wir noch die Bezeichnungen  $\mathcal{H}^0 = \mathcal{C}^0$  und  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{C}^1$ , so bildet demnach die Summe aller  $\mathcal{H}^l$  einen dichten Teilraum

$$\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^l \subset L^2(S^2)$$

Bezeichne nun  $\text{pr}_l : L^2(S^2) \rightarrow \mathcal{H}^l$  die orthogonale Projektion. Sie ist sicher ein Homomorphismus von Darstellungen. Ist  $L(m)$  eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung der Drehgruppe und  $\varphi : L(m) \rightarrow L^2(S^2)$  ein Homomorphismus von Darstellungen, so folgt  $\text{pr}_l \circ \varphi = 0$  für  $m \neq 2l$  nach 2.4.3, und gilt auch noch  $\text{pr}_l \circ \varphi = 0$  für  $m = 2l$ , so folgt  $\varphi = 0$ . Mithin liefert für alle  $l \in \mathbb{N}$  das Verknüpfen mit  $\text{pr}_l$  eine Einbettung und dann sogar einen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\text{SO}(3)}(L(2l), L^2(S^2)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\text{SO}(3)}(L(2l), \mathcal{H}^l)$$

und damit folgt unser Satz aus dem Schur'schen Lemma 2.4.1.  $\square$

2.5.7. Nach unseren Erkenntnissen über einfache Darstellungen der Drehgruppe bilden in jedem  $\mathcal{H}^l$  die unter allen Drehungen um die  $z$ -Achse  $S^1 \subset \text{SO}(3)$  invarianten Funktionen einen eindimensionalen Teilraum  $(\mathcal{H}^l)^{S^1}$ . Um Erzeuger dieser Teilräume zu finden, gehen wir aus von der offensichtlichen Einbettung

$$\mathbb{C}[z] \hookrightarrow \mathcal{C}(S^2)^{S^1}$$

unter der sicher Polynome vom Grad  $\leq d$  in  $\mathcal{H}^0 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^d$  landen. Unser Skalarprodukt auf  $L^2(S^2)$  schränkt nach IV.6.9.7 ein zu dem Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}[z]$ , das gegeben wird durch die Formel

$$\langle g, f \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 \bar{g}(z) f(z) dz$$

Mithin finden wir Erzeuger von  $(\mathcal{H}^l)^{S^1}$ , wenn wir auf die durch Potenzen von  $z$  gegebene angeordnete Basis  $z^0, z^1, z^2, \dots$  des Polynomrings  $\mathbb{C}[z]$  in Bezug auf besagtes Skalarprodukt das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden. Die so entstehenden Polynome sind bis auf einen konstanten Faktor die sogenannten **Legendre-Polynome**  $P_0, P_1, P_2, \dots$ . Der Faktor wird hierbei üblicherweise so gewählt, daß gilt  $P_l(1) = 1$ . Mit dieser Normalisierung können besagte Polynome dann auch durch die explizite Formel

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l$$

beschrieben und durch die Rekursion  $(l+1)P_{l+1} = (2l+1)zP_l - P_{l-1}$  berechnet werden, und ihre Quadratnorm ergibt sich aus den Formeln

$$\langle P_k, P_l \rangle = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{k,l}$$

die der Leser zur Übung selbst prüfen mag. Die ersten Legendre-Polynome sind  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = z$ ,  $P_2 = (3z^2 - 1)/2$ . Ausführliche Tafelwerke findet man in Bibliotheken und im Netz.

2.5.8. In der Liealgebra der räumlichen Drehgruppe haben wir in 1.5.8 eine Basis  $E_1, E_2, E_3$  ausgezeichnet, deren Kommutatoren durch  $[E_1, E_2] = E_3$  und die beiden durch zyklische Vertauschung der Indizes entstehenden Formeln gegeben werden. In der komplexifizierten Liealgebra  $\mathfrak{so}(3)_{\mathbb{C}}$  liefern dann die Ausdrücke  $h = 2iE_3$ ,  $e = E_2 - iE_1$  und  $f = -E_2 - iE_1$  eine Basis, in der die Klammern die Form  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$  haben. Nach 2.2.18 wirkt  $E_3$  als der Differentialoperator  $y\partial_x - x\partial_y$  und annulliert insbesondere alle Polynome, die nur von  $z$  abhängen. Wir erhalten also in  $L^2(S^2)$  ein Orthogonalsystem mit dichtem Erzeugnis, wenn wir zu den Legendre-Polynomen  $P_l$  noch alle  $e^m P_l$  und  $f^m P_l$  für  $0 < m \leq l$  dazunehmen, und normieren wir alle diese Funktionen auf die Länge Eins, indem wir sie durch ihre Norm teilen, so erhalten wir eine Hilbertbasis  $L^2(S^2)$  bestehend aus den sogenannten **Kugelfunktionen**

$$Y_{l,m} := \begin{cases} e^m P_l / \|e^m P_l\| & 0 < m \leq l; \\ P_l / \|P_l\| & m = 0; \\ f^{-m} P_l / \|f^{-m} P_l\| & 0 > m \geq -l. \end{cases}$$

Um zu einer expliziteren Beschreibung zu kommen, bemerken wir, daß nach 2.2.18 unser  $e$  auf komplexwertigen Polynomen wirkt wie der Differentialoperator  $z(-i\partial_y - \partial_x) + (x + iy)\partial_z$ . Dann prüfen wir  $(i\partial_y + \partial_x)(x + iy) = 0$  und erhalten folglich  $e^m P_l = (x + iy)^m \partial_z^m P_l$ . Ähnlich ergibt sich auch die Formel  $f^m P_l = -(x - iy)^m \partial_z^m P_l$ . In Kugelkoordinaten  $(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$  nach IV.3.2.11 haben wir  $x + iy = e^{i\varphi} \sin \vartheta$ . Bis auf einen Normierungsfaktor werden unsere Kugelfunktionen also in Kugelkoordinaten gegeben durch den Ausdruck  $e^{im\varphi} (\sin^m \vartheta) P_l^{(m)}(\cos \vartheta)$ . Um den Normierungsfaktor auch noch zu bestimmen, gehen wir von unserer Formel für die Norm eines Legendre-Polynoms aus, die schon einmal

$$Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta)$$

liefert. Nun zeigen die Formeln in 2.4.18, daß das Anwenden von  $e$  auf  $\tilde{Y}_{l,m}$  die Norm um den Faktor  $\sqrt{(l+m+1)(l-m)}$  ändert, wohingegen das Anwenden von  $f$  auf  $\tilde{Y}_{l,m}$  die Norm um den Faktor  $\sqrt{(l-m+1)(l+m)}$  ändert.

Das zeigt induktiv, daß unsere Kugelfunktionen beschrieben werden können durch die Formel

$$Y_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} (\sin^m \vartheta) P_l^{(m)}(\cos \vartheta)$$

Unser Casimir-Operator  $4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h) + 2)$  aus 2.2.14 schreibt sich in unserer alten Basis der Liealgebra  $-4(\rho(E_1)^2 + \rho(E_2)^2 + \rho(E_3)^2)$ , und eine kurze Rechnung zeigt, daß dieser Ausdruck ohne den Vorfaktor 4 auf Polynomfunktionen auf  $\mathbb{R}^3$  wirkt als der Differentialoperator

$$2(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$$

Nach unseren Erkenntnissen aus 2.2.14 müssen unsere Kugelfunktionen  $Y_{l,m}$ , wenn wir sie etwa als homogene Funktionen vom Grad  $l$  auf  $\mathbb{R}^3$  auffassen, Eigenfunktionen dieses Differentialoperators sein zum Eigenwert  $l(l+1)$ . Mit etwas Rechnung folgt, daß dieser Differentialoperator der ‘‘Laplace-Operator auf der Sphäre’’ ist und unsere Kugelfunktionen heißen als Eigenfunktionen dieses ‘‘sphärischen Laplace-Operators’’ auf Englisch auch **spherical harmonics**.

### 3 Ergänzungen zur Topologie

Unser nächstes Ziel ist es, die Methoden der Analysis auszudehnen von der Betrachtung von Teilmengen normierter Vektorräume auf die Betrachtung von abstrakten Räumen wie zum Beispiel dem Raum aller dreielementigen Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ , dem Raum aller Geraden durch den Nullpunkt des  $\mathbb{R}^3$ , oder dem für die Entwicklung der klassischen Mechanik besonders wichtigen Kotangentenbündel einer Mannigfaltigkeit alias der disjunkten Vereinigung der Dualräume ihrer Tangentialräume. In diesem Abschnitt bauen wir die in II.6.5 eingeführte Sprache der Topologie zu einem diesen Anforderungen angepaßten Begriffsapparat aus. Vorausgesetzt werden nur Grundbegriffe der Mengenlehre und Kenntnisse über die reellen Zahlen, und die eigentliche Schwierigkeit liegt darin, beim hohen Abstraktionsgrad nicht die Anschauung zu verlieren. Geometrische Aussagen, wie zum Beispiel, daß nicht jeder geschlossene Weg im Raum aller Geraden durch den Nullpunkt des  $\mathbb{R}^3$  zusammenziehbar ist, zeigen wir erst in der algebraischen Topologie.

#### 3.1 Inneres und Abschluß

3.1.1. Ich gehe im folgenden davon aus, daß dem Leser die Grundtatsachen und Grundbegriffe zu topologischen Räumen im Umfang von II.6.5 vertraut sind. Insbesondere handelt es sich dabei um die Definition einer Topologie, die Begriffe offen und abgeschlossen, Umgebung eines Punktes, Stetigkeit einer Abbildung, die auf Teilmengen eines topologischen Raums induzierte Topologie, und den topologischen Zusammenhangsbegriff nach 1.3.

**Definition 3.1.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum wie in II.6.5 und  $M \subset X$  eine Teilmenge.

1. Es gibt eine größte offene Teilmenge  $\text{Of}_X(M) = \text{Of}(M) = M^\circ$  von  $X$ , die in  $M$  enthalten ist, nämlich die Vereinigung über alle offenen Teilmengen  $U$  von  $X$ , die in  $M$  enthalten sind.  $M^\circ$  heißt der **offene Kern** oder auch das **Innere**, englisch **interior** von  $M$  in  $X$ .
2. Es gibt eine kleinste abgeschlossene Teilmenge  $\text{Cl}_X(M) = \text{Cl}(M) = \bar{M}$  von  $X$ , die  $M$  umfaßt, nämlich den Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen  $A$  von  $X$ , die  $M$  umfassen. Diese Menge  $\bar{M}$  heißt wie in II.6.5.31 der **Abschluß**, englisch **closure** von  $M$  in  $X$ .
3. Man definiert den **Rand** oder genauer den **topologischen Rand** von  $M$  in  $X$  als  $\partial_X M = \partial M = \bar{M} \setminus M^\circ$ . Er ist stets abgeschlossen in  $X$ . Die Herkunft der Bezeichnung  $\partial M$  für den Rand von  $M$  wird in IV.7.7.8 diskutiert.

*Beispiele 3.1.3.* Für eine beliebige Teilmenge  $M$  der abgeschlossenen Kreisscheibe  $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ , die die offene Kreisscheibe umfaßt, ist der offene Kern von  $M$  in  $\mathbb{R}^2$  die offene Kreisscheibe, der Abschluß  $M$  in  $\mathbb{R}^2$  die abgeschlossene Kreisscheibe, und der Rand  $M$  in  $\mathbb{R}^2$  die Kreislinie. Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  ist natürlich der offene Kern von  $X$  in  $X$  ebenso wie der Abschluß von  $X$  in  $X$  schlicht  $X$  selber, und der Rand von  $X$  in  $X$  ist leer.

**Lemma 3.1.4.** *Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $M, N \subset X$  Teilmengen.*

1. *Es gilt  $\overline{X \setminus M} = X \setminus M^\circ$  und  $(X \setminus M)^\circ = X \setminus \overline{M}$ .*
2. *Es gilt  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$  und  $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$ .*

*Beweis.* 1. Wir rechnen

$$X \setminus M^\circ = X \setminus \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subset M}} U = \bigcap_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subset M}} (X \setminus U) = \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ A \supset (X \setminus M)}} A = \overline{X \setminus M}$$

Die Gleichheit  $(X \setminus M)^\circ = X \setminus \overline{M}$  ergibt sich, wenn wir in der schon bewiesenen Gleichheit auf beiden Seiten das Komplement nehmen und  $M$  durch  $X \setminus M$  ersetzen.

2.  $\overline{M \cup N}$  ist abgeschlossen und umfaßt  $M$  und  $N$ , also auch  $\overline{M}$  und  $\overline{N}$ . Andererseits ist  $\overline{M} \cup \overline{N}$  abgeschlossen und umfaßt  $M \cup N$ , also auch  $\overline{M \cup N}$ . Die Gleichheit  $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$  zeigt man analog.  $\square$

*Übung 3.1.5.* Man zeige, daß im allgemeinen  $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$ . Welche Inklusion gilt stets?

*Übung 3.1.6.* Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn für alle Teilmengen  $M \subset X$  gilt  $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ .

**Definition 3.1.7.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $M \subset X$  eine Teilmenge und  $p \in X$  ein Punkt. So benutzt man die Sprechweisen

$$\begin{aligned} p \in M^\circ &\Leftrightarrow p \text{ ist } \mathbf{innerer Punkt} \text{ von } M; \\ p \in \overline{M} &\Leftrightarrow p \text{ ist } \mathbf{Berührungspunkt} \text{ von } M; \\ p \in \partial M &\Leftrightarrow p \text{ ist } \mathbf{Randpunkt} \text{ von } M. \end{aligned}$$

Hier ist wieder zu beachten, daß es ganz entscheidend von  $X$  abhängt, welche Punkte nun innere Punkte, Berührungspunkte oder Randpunkte von  $M$  sind.

**Lemma 3.1.8.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $M \subset X$  eine Teilmenge und  $p \in X$  ein Punkt. So gilt:*

1.  $p \in M^\circ \Leftrightarrow M$  ist eine Umgebung von  $p$ ;
2.  $p \in \overline{M} \Leftrightarrow M$  trifft jede Umgebung von  $p$ ;
3.  $p \in \partial M \Leftrightarrow M$  und  $X \setminus M$  treffen jede Umgebung von  $p$ .

*Beweis.* 1 ist klar nach den Definitionen. Für 2 bemerken wir, daß nach Lemma 3.1.4.1 gilt

$$\begin{aligned} p \in \overline{M} &\Leftrightarrow p \notin (X \setminus M)^\circ \\ &\Leftrightarrow X \setminus M \text{ ist keine Umgebung von } p \\ &\Leftrightarrow \text{jede Umgebung von } p \text{ trifft } M. \end{aligned}$$

Sicher gilt weiter  $p \in \partial M \Leftrightarrow p \in \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$ . Nun folgt 3 aus der eben unter 2 bewiesene Aussage.  $\square$

*Übung 3.1.9.* Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist offen genau dann, wenn sie mit jedem Punkt auch eine ganze Umgebung dieses Punktes umfaßt.

*Ergänzende Übung 3.1.10.* Diese Übung liefert ein Beispiel für eine folgenabgeschlossene aber nicht abgeschlossene Teilmenge eines Hausdorffraums. Wir betrachten auf der Menge  $\text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aller Abbildungen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die "Topologie der punktweisen Konvergenz": Eine Teilmenge  $U \subset \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist in Bezug auf diese Topologie offen genau dann, wenn es für jedes  $f \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  und eine endliche Teilmenge  $E \subset \mathbb{R}$  gibt mit

$$(|g(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in E) \Rightarrow g \in U$$

Man zeige, daß das in der Tat eine Topologie ist, daß in dieser Topologie je zwei verschiedene Funktionen disjunkte Umgebungen besitzen, und daß die meßbaren Funktionen darin eine unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene aber nicht topologisch abgeschlossene Teilmenge bilden. Konvergenz von Folgen verstehen wir hier im Sinne von II.6.3.1. Unsere "Topologie der punktweisen Konvergenz" wird sich im übrigen in 3.6.1 folgende als ein Spezialfall der sogenannten "Produkttopologie" erweisen.

*Ergänzende Übung 3.1.11.* Unter einer **Umgebungsbasis** eines Punktes in einem topologischen Raum versteht man wie in II.2.1.23 ein System von Umgebungen besagten Punktes derart, daß jede Umgebung unseres Punktes mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt. Man zeige: Besitzt in einem topologischen Raum jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so ist jede unter Konvergenz von Folgen abgeschlossene Teilmenge bereits abgeschlossen, und jede "folgenstetige" Abbildung in einen weiteren topologischen Raum ist bereits stetig.

*Ergänzende Übung 3.1.12.* Man zeige, daß bei für jede konvexe Teilmenge  $C \subset \mathbb{R}^n$ , die ganz  $\mathbb{R}^n$  als affinen Raum erzeugt, bereits gilt  $\bar{C} = \overline{C^\circ}$ .

### 3.2 Topologische Mannigfaltigkeiten

**Definition 3.2.1.** Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ein **Homöomorphismus** oder auch eine **topologische Abbildung** genau dann, wenn sie stetig und bijektiv ist und zusätzlich die inverse Abbildung auch stetig ist. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph** genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus gibt. In Formeln schreiben wir dann  $X \cong Y$ .

*Übung 3.2.2.* Ist ein  $\mathbb{R}^n$  homöomorph zur reellen Geraden  $\mathbb{R}$ , so folgt  $n = 1$ . In Formeln gilt also  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \Rightarrow n = 1$ . Hinweis: Das Komplement eines beliebigen Punktes in  $\mathbb{R}$  ist nicht wegzusammenhängend.

*Übung 3.2.3.* Je zwei nichtleere offene konvexe Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind homöomorph. Sind unsere Mengen zusätzlich beschränkt, so gibt es sogar einen Homöomorphismus zwischen ihren Abschlüssen, der Homöomorphismen zwischen ihren Rändern induziert.

**Definition 3.2.4.** Eine stetige Abbildung topologischer Räume heißt eine **topologische Einbettung** oder kürzer **Einbettung** genau dann, wenn sie einen Homöomorphismus mit ihrem Bild induziert, für die induzierte Topologie auf besagtem Bild.

*Übung 3.2.5.* Man zeige, daß die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung ist.

3.2.6. Wir erinnern daran, daß ein topologischer Raum  $X$  **Hausdorff** heißt genau dann, wenn je zwei verschiedene Punkte darin disjunkte Umgebungen besitzen. Gleichbedeutend wird auch die Bezeichnung **separiert** verwendet.

*Beispiel 3.2.7.* Jeder metrische Raum ist Hausdorff. Die Klumpentopologie auf einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist nicht Hausdorff. Die koendliche Topologie auf einer unendlichen Menge ist nicht Hausdorff.

**Definition 3.2.8.** Eine  **$d$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand** oder kurz  **$d$ -Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Hausdorffraum  $X$  derart, daß gilt: Jeder Punkt  $p \in X$  besitzt eine offene Umgebung, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ .

3.2.9. Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie “parakompakt” sein soll, oder sogar noch stärker, daß ihre Topologie “eine abzählbare Basis” haben soll. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen, bis jetzt sind sie für uns belanglos.

3.2.10. Bis jetzt haben wir unter “Mannigfaltigkeiten” stets “eingebettete  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten mit Rand” im Sinne von IV.7.7.2 verstanden. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welcher Begriff jeweils gemeint ist.

3.2.11. Genau dann ist ein Hausdorffraum eine  $d$ -Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^d$ .

*Beispiele* 3.2.12. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit. Die Sphäre  $S^d$  ist eine  $d$ -Mannigfaltigkeit.

*Beispiel* 3.2.13. Welche Fälle die Bedingung “Hausdorff” in der Definition einer Mannigfaltigkeit ausschließt, erkennt man am Beispiel der **Zahlengeraden mit verdoppeltem Nullpunkt**. Wir betrachten genauer die disjunkte Vereinigung  $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$  von  $\mathbb{R}$  mit einer einelementigen Menge  $\{\tilde{0}\}$  und die Abbildung  $\pi : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $\pi(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\pi(\tilde{0}) = 0$ . Auf  $\tilde{\mathbb{R}}$  erklären wir eine Topologie durch die Vorschrift “ $U$  ist offen in  $\tilde{\mathbb{R}}$  genau dann, wenn  $\pi(U)$  offen ist in  $\mathbb{R}$ ”. In diesem topologischen Raum haben 0 und  $\tilde{0}$  in  $\tilde{\mathbb{R}}$  keine disjunkten Umgebungen, aber jeder Punkt besitzt eine zu  $\mathbb{R}$  homöomorphe offene Umgebung.

*Übung* 3.2.14. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension mindestens zwei ist zusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung “abgeschlossen”, ist dann aber schwerer zu zeigen.

*Übung* 3.2.15. Jede Wegzusammenhangskomponente einer Mannigfaltigkeit ist in unserer Mannigfaltigkeit sowohl offen als auch abgeschlossen. Eine Mannigfaltigkeit ist insbesondere wegzusammenhängend genau dann, wenn sie zusammenhängend ist.

### 3.3 Kompakte Räume

**Definition 3.3.1.** Ein topologischer Raum heißt **kompakt** genau dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

3.3.2. Ist  $X$  unser topologischer Raum, so fordern wir also in Formeln ausgedrückt, daß es für jedes System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  ein endliches Teilsystem  $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$  gibt mit  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$ . Die Konventionen sind, was den Begriff der Kompaktheit angeht, nicht einheitlich. Die hier gewählte Konvention ist im englischen Sprachraum weit verbreitet. Bourbaki und mit ihm die meisten französischen und auch viele andere Autoren nennen die in unserem Sinne kompakten Räume nur **quasikompakt** und fordern von kompakten Räumen zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft. Eine

Teilmenge eines topologischen Raums, deren Abschluß kompakt ist, nennt man **relativ kompakt**.

3.3.3. Nach II.6.10.3 ist ein metrischer Raum “folgenkompakt”, als da heißt kompakt im Sinne von II.6.7.1 genau dann, wenn er für seine metrische Topologie kompakt ist im Sinne unserer abstrakten Definition 3.3.1.

*Beispiele* 3.3.4. Eine Menge mit der diskreten Topologie ist kompakt genau dann, wenn sie endlich ist. Eine Menge mit der Klumpentopologie ist stets kompakt.

3.3.5. Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. So sind gleichbedeutend nach unseren Definitionen (1)  $A$  ist kompakt (mit der induzierten Topologie) und (2) für jedes System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  finden wir ein endliches Teilsystem  $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$  mit  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$ .

**Lemma 3.3.6.** *Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist stets abgeschlossen.*

*Beweis.* Durch Widerspruch. Sei  $X$  unser Hausdorffraum und  $A \subset X$  eine kompakte Teilmenge. Ist  $A$  nicht abgeschlossen, so gibt es  $x \in \overline{A} \setminus A$ . Für jedes  $a \in A$  finden wir dann in  $X$  disjunkte offene Umgebungen  $U_a$  und  $V_a$  von  $a$  und  $x$ . Natürlich gilt  $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$ , also gibt es auch endlich viele  $a, \dots, b \in A$  mit  $A \subset U_a \cup \dots \cup U_b$ . Als endlicher Schnitt offener Mengen ist dann jedoch auch  $V_a \cap \dots \cap V_b$  offen und nach Konstruktion gilt  $A \cap V_a \cap \dots \cap V_b = \emptyset$  im Widerspruch zu unserer Annahme  $x \in \overline{A}$ .  $\square$

**Lemma 3.3.7.** *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist stets kompakt.*

*Beweis.* Sei  $X$  unser kompakter Raum und  $A \subset X$  abgeschlossen. Ist  $\mathcal{U}$  ein System von offenen Teilmengen von  $X$ , deren Vereinigung  $A$  umfaßt, so schließen wir

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \\ &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_k \\ &\Rightarrow A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ .  $\square$

**Satz 3.3.8.** *Das Bild eines kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets kompakt.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  kompakt. Es gilt zu zeigen, daß auch  $f(X)$  kompakt ist. Sei dazu  $\mathcal{U}$  ein System von offenen Teilmengen von  $Y$ . So gilt

$$\begin{aligned} f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U &\Rightarrow X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U) \\ &\Rightarrow X = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k) \\ &\Rightarrow f(X) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ . □

**Definition 3.3.9.** Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **abgeschlossen** genau dann, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist.

**Satz 3.3.10.** *Eine stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist stets abgeschlossen. Eine stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist stets ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $X$  kompakt,  $Y$  Hausdorff und  $f : X \rightarrow Y$  stetig und bijektiv. Es reicht zu zeigen, daß  $f$  abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. Aber in der Tat gilt ja  $A \triangleleft X \Rightarrow A$  kompakt  $\Rightarrow f(A)$  kompakt  $\Rightarrow f(A) \triangleleft Y$  nach 3.3.7 und 3.3.8 und 3.3.6. □

3.3.11. Die Hausdorff-Eigenschaft und die Kompaktheit sind Antagonisten: Die Hausdorff-Eigenschaft verlangt nach vielen offenen Mengen, die Kompaktheit nach wenigen. Ist beides gleichzeitig erfüllt, so kann man nach dem vorhergehenden Satz 3.3.10 keine zusätzlichen Mengen als offen deklarieren, ohne die Kompaktheit zu verlieren, und nicht weniger offene Mengen nehmen, ohne die Hausdorff-Eigenschaft zu verlieren.

**Satz 3.3.12.** *Eine stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren kompakten Raum ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an.*

*Beweis.* Ist  $X$  kompakt und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f(X) \subset \mathbb{R}$  auch kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Haben wir zusätzlich  $X \neq \emptyset$ , so folgt  $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$ . □

*Übung 3.3.13.* Man sagt, ein System  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen einer Menge  $X$  habe **nichtleere endliche Schnitte** genau dann, wenn für jedes endliche Teilsystem  $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$  der Schnitt  $\bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$  nicht leer ist. Man zeige: Ein topologischer Raum  $X$  ist kompakt genau dann, wenn für jedes System  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  mit nichtleeren endlichen Schnitten auch der gesamte Schnitt nicht leer ist, in Formeln  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ .

*Übung 3.3.14.* Sind  $A, B$  disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums  $X$ , so gibt es disjunkte offene Mengen  $U, V \subseteq X$  mit  $A \subset U$  und  $B \subset V$ . Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß  $A$  nur aus einem Punkt besteht.

*Übung 3.3.15.* In einem kompakten Hausdorffraum läßt sich jede Umgebung eines Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern. Hinweis: 3.3.14.

*Übung 3.3.16.* Die Abbildung  $(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \exp(it)$  ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

3.3.17. Aus der Analysis vertraute Kriterien für Abgeschlossenheit, Stetigkeit, Kompaktheit etc. über Eigenschaften von Folgen übertragen sich erst auf beliebige topologische Räume, wenn man den Begriff der Folge zu dem des Filters verallgemeinert. Wir stellen das zurück bis zum Beweis des Satzes von Tychonoff 17.4.7. Daß “folgenabgeschlossen” keineswegs “abgeschlossen” impliziert, hatten wir schon in 3.1.10 gesehen.

### 3.4 Konstruktion topologischer Räume

3.4.1 (**Vergleich verschiedener Topologien auf derselben Menge**). Gegeben Topologien  $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(X)$  auf derselben Menge  $X$  sagt man,  $\mathcal{T}$  sei **größergleich** oder auch **feiner** als  $\mathcal{T}'$  und  $\mathcal{T}'$  sei **kleinergleich** oder auch **gröber** als  $\mathcal{T}$  genau dann, wenn gilt

$$\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$$

3.4.2. Sind  $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$  Topologien auf ein- und derselben Menge  $X$ , für  $i$  aus einer Indexmenge  $I$ , so ist offensichtlich auch ihr Schnitt  $\mathcal{T} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$  eine Topologie.

**Definition 3.4.3.** Ist  $X$  eine Menge und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von Teilmengen von  $X$ , so definiert man auf  $X$  die **von  $\mathcal{E}$  erzeugte Topologie**  $\langle \mathcal{E} \rangle$  als den Schnitt in  $\mathcal{P}(X)$  über alle Topologien auf  $X$ , die  $\mathcal{E}$  umfassen, alias die kleinste Topologie auf  $X$ , die  $\mathcal{E}$  umfaßt.

3.4.4 (**Von Mengensystem erzeugte Topologie, explizite Beschreibung**). Natürlich ist  $\langle \mathcal{E} \rangle$  damit die kleinste Topologie auf  $X$ , die  $\mathcal{E}$  umfaßt. Wir können  $\langle \mathcal{E} \rangle$  alternativ auch wie folgt beschreiben: Zunächst bilden wir das Mengensystem  $\tilde{\mathcal{E}} = \{U \subset X \mid \exists V_1, \dots, V_k \in \mathcal{E} \text{ mit } U = V_1 \cap \dots \cap V_k\}$  aller endlichen Schnitte von Mengen aus  $\mathcal{E}$ , mitgemeint ist hier  $X \in \tilde{\mathcal{E}}$  als der “Schnitt über gar keine Menge aus  $\mathcal{E}$ ”, und anschließend bilden wir das

Mengensystem  $\langle \mathcal{E} \rangle = \{W \subset X \mid \text{Es gibt } \mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{E}} \text{ mit } W = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\}$  aller beliebigen Vereinigungen von Mengen aus  $\tilde{\mathcal{E}}$ , mitgemeint ist hier  $\emptyset \in \langle \mathcal{E} \rangle$  als die "Vereinigung über gar keine Menge aus  $\tilde{\mathcal{E}}$ ". In der Tat ist auch das so konstruierte Mengensystem  $\langle \mathcal{E} \rangle$  eine Topologie auf  $X$ , und für jede Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  mit  $\mathcal{T} \supset \mathcal{E}$  folgt umgekehrt erst  $\mathcal{T} \supset \tilde{\mathcal{E}}$  und dann  $\mathcal{T} \supset \langle \mathcal{E} \rangle$ .

**Definition 3.4.5.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Ein Mengensystem  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt eine **Subbasis** der Topologie  $\mathcal{T}$  genau dann, wenn es die Topologie erzeugt, in Formeln  $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{T}$ . Es heißt eine **Basis** der Topologie genau dann, wenn die offenen Mengen unseres topologischen Raums  $X$  gerade alle beliebigen Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{E}$  sind.

*Übung 3.4.6.* Seien  $Y$  ein topologischer Raum,  $f : Y \rightarrow X$  eine Abbildung und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  ein Mengensystem. So ist  $f$  stetig für die von  $\mathcal{E}$  erzeugte Topologie auf  $X$  genau dann, wenn die Urbilder aller  $V \in \mathcal{E}$  offen sind in  $Y$ .

*Beispiel 3.4.7.* Die übliche Topologie auf  $\mathbb{R}$  aus II.6.5.9 können wir in dieser Terminologie besonders elegant beschreiben als die Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt  $\{x \mid x < a\}$  und allen Teilmengen der Gestalt  $\{x \mid x > a\}$  für beliebige  $a \in \mathbb{R}$ .

**Definition 3.4.8.** Seien  $X$  eine Menge,  $Y_i$  topologische Räume indiziert durch  $i \in I$  und  $f_i : Y_i \rightarrow X$  Abbildungen. Die größte Topologie auf  $X$ , für die alle diese Abbildungen stetig werden, heißt die **Finaltopologie** auf  $X$  in Bezug auf unsere Familie von Abbildungen.

3.4.9. Es gilt noch zu zeigen, daß solch eine größte Topologie tatsächlich existiert. Dazu beachte man, daß die Vorschrift  $U \subseteq X \Leftrightarrow (f_i^{-1}(U) \subseteq Y_i \ \forall i \in I)$  eine Topologie auf  $X$  definiert. Es scheint mir nun klar, daß für diese Topologie alle  $f_i$  stetig sind, und daß alle anderen Topologien mit besagter Eigenschaft in dieser explizit gegebenen Topologie enthalten sein müssen. Damit haben wir sogar eine explizite Beschreibung der Finaltopologie erhalten.

**Satz 3.4.10 (Universelle Eigenschaft der Finaltopologie).** Seien  $f_i : Y_i \rightarrow X$  wie in 3.4.8. Versehen wir  $X$  mit der Finaltopologie, so ist eine Abbildung  $g : X \rightarrow W$  in einen weiteren topologischen Raum  $W$  stetig genau dann, wenn alle  $g \circ f_i : Y_i \rightarrow W$  stetig sind.

*Beweis.* Mit  $g$  sind natürlich auch alle  $g \circ f_i$  stetig. Sind umgekehrt alle  $g \circ f_i$  stetig, so folgt aus  $V \subseteq Z$  natürlich  $f_i^{-1}(g^{-1}(V)) \subseteq Y_i$  für alle  $i$  und damit  $g^{-1}(V) \subseteq X$  nach unserer expliziten Beschreibung der Finaltopologie.  $\square$

3.4.11. Sind  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  zwei Topologien auf  $X$ , für die die Aussage des vorhergehenden Satzes gilt, so liefert die Identität stetige Abbildungen  $(X, \mathcal{T}) \rightarrow$

$(X, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ , woraus wir folgern  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ . Die Finaltopologie auf  $X$  kann also auch charakterisiert werden als die einzige Topologie auf  $X$ , für die die Aussage des vorhergehenden Satzes gilt.

*Übung 3.4.12 (Transitivität finaler Familien).* Seien  $g_{ij} : Z_{ij} \rightarrow Y_i$  und  $f_i : Y_i \rightarrow X$  Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Tragen die  $Y_i$  die finalen Topologien für die  $g_{ij}$  und trägt  $X$  die finale Topologie für die  $f_i$ , so trägt  $X$  auch die finale Topologie für die  $f_i g_{ij}$ . Trägt andererseits  $X$  die finale Topologie bezüglich der  $f_i g_{ij}$ , so trägt  $X$  auch die finale Topologie bezüglich der  $f_i$ .

3.4.13. Ist  $f : Y \rightarrow X$  eine Surjektion, so heißt die Finaltopologie auf  $X$  auch die **Quotiententopologie**. Eine Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  von topologischen Räumen heißt **final** genau dann, wenn die Topologie auf  $X$  mit der Finaltopologie zu  $f$  übereinstimmt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets final.

3.4.14. Übung 3.4.12 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei finalen Abbildungen stets final ist, und daß die Verknüpfung  $f \circ g$  von zwei stetigen Abbildungen nur dann final sein kann, wenn  $f$  final ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung final, die eine stetige Rechtsinverse alias einen stetigen **Schnitt** besitzt, d.h. für die es eine stetige Abbildung  $s$  gibt mit  $f \circ s = \text{id}$ .

3.4.15. Gegeben eine Familie topologischer Räume  $(Y_i)$  versehen wir ihre disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup Y_i$  mit der Finaltopologie bezüglich der Inklusionen, wenn nichts anderes gesagt wird. Eine Teilmenge der disjunkten Vereinigung ist also offen genau dann, wenn ihr Schnitt mit jedem  $Y_i$  offen ist. Die so topologisierte disjunkte Vereinigung heißt auch die **topologische Summe** der  $Y_i$ .

3.4.16. Mit unserem neuen Begriff können wir II.6.5.35 umformulieren wie folgt: Ist  $X = \bigcup U_i$  eine offene Überdeckung oder eine endliche abgeschlossene Überdeckung, so trägt  $X$  die Finaltopologie bezüglich der Einbettungen der  $U_i$  und  $\bigsqcup U_i \rightarrow X$  ist final. Dasselbe gilt sogar allgemeiner für jede "lokal endliche" abgeschlossene Überdeckung, wie in 3.4.17 diskutiert wird.

*Übung 3.4.17.* Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein System  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen von  $X$  heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der Teilmengen unseres Systems trifft. Man zeige: Gegeben eine lokal endliche Überdeckung eines topologischen Raums durch abgeschlossene Teilmengen trägt unser Raum die Finaltopologie in Bezug auf die Einbettungen der Teilmengen unserer Überdeckung.

*Übung 3.4.18.* Jede stetige surjektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorff-Raum ist final. Hinweis: 3.3.10.

*Übung 3.4.19.* Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **offen** genau dann, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist. Man zeige: Jede stetige offene Surjektion ist final.

*Übung 3.4.20.* Ist  $f : Y \rightarrow X$  final und  $Z \subset X$  offen oder abgeschlossen, so ist auch  $f : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$  final.

*Übung 3.4.21 (Finalität ist lokal in der Basis).* Sei  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Besitzt  $X$  eine offene Überdeckung  $\mathcal{Z}$  oder eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung  $\mathcal{Z}$  derart, daß  $f : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$  final ist für alle  $Z \in \mathcal{Z}$ , so ist auch  $f$  selbst final. Hinweis: Eigenständige Beweise sind willkommen, aber man kann die Aussage aus 3.4.16 und 3.4.12 ableiten. Mit der “Basis” ist hier im übrigen der Raum  $X$  gemeint. In Kombination mit 3.4.14 sehen wir insbesondere, daß alle diejenigen stetigen Abbildungen final sind, die “lokal stetige Schnitte besitzen”.

*Beispiel 3.4.22.* Wir konstruieren das **Möbiusband**. Dazu betrachten wir auf  $[0, 1] \times [-1, 1]$  die Äquivalenzrelation  $\sim$ , die erzeugt wird von  $(0, y) \sim (1, -y)$ . Die Menge der Äquivalenzklassen versehen wir mit der Quotiententopologie, und fertig ist das Möbiusband. Als Übung zeige man, daß unser so konstruiertes Möbiusband kompakt ist.

*Beispiel 3.4.23.* Wir zeigen, wie man mit unserem Formalismus zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  verkleben kann. Wir brauchen dazu als “Kleber” eine Menge  $Z$  und Abbildungen  $f : Z \rightarrow X$ ,  $g : Z \rightarrow Y$ . Dann betrachten wir auf der disjunkten Vereinigung  $Y \sqcup X$  die Äquivalenzrelation  $\sim$  erzeugt von  $f(z) \sim g(z) \quad \forall z \in Z$  und nehmen als Topologie auf der Verklebung

$$Y \sqcup_Z X = (Y \sqcup X) / \sim$$

die Finaltopologie zu den beiden offensichtlichen Abbildungen  $X \rightarrow Y \sqcup_Z X$ ,  $Y \rightarrow Y \sqcup_Z X$ .

*Ergänzende Übung 3.4.24.* Sei  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Surjektion auf einen Hausdorffraum. Man zeige: Besitzt  $X$  eine lokal endliche Überdeckung durch Kompakta, deren Urbilder unter  $f$  auch kompakt sind, so ist  $f$  final. Hinweis: 3.4.21.

*Beispiel 3.4.25 (Stetigkeit der Nullstellen eines Polynoms).* Gegeben  $n \geq 1$  betrachte man die Abbildung  $s : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , die jedem  $n$ -Tupel  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  das  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  der Koeffizienten des Polynoms

$$T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$



Versuch einer graphischen Darstellung unserer Konstruktion des Möbiusbands. Der besseren Vorstellung halber habe ich hier das Rechteck  $[0, 5] \times [-1, 1]$  gezeichnet und die Identifikationsvorschrift für die senkrechten Kanten durch mit = bezeichnete Linien beispielhaft angedeutet.



Man erhält eine stetige Abbildung des Möbiusbands nach  $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  mittels der Formel  $(t, \tau) \mapsto (\tau e^{\pi i t}, \sqrt{1 - \tau^2} \cos^2 \pi t)$ . Anschaulich gesprochen verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. Das Bild ist eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**. In dieser Anschauung für das Möbiusband bezahlt man in gewisser Weise mit der Selbstdurchdringung für die gute Sichtbarkeit des Randkreises.

zuordnet. Die Abschätzung ?? zeigt, daß Urbilder von Kompakta unter  $s$  stets wieder kompakt sind. Nach 3.4.24 ist unsere Abbildung  $s$  also final. Damit ist  $s$  auch abgeschlossen, denn für  $A \subset \mathbb{C}^n$  haben wir  $s^{-1}(s(A)) = \bigcup_{\pi \in \mathcal{S}_n} \pi(A)$  für die Operation der symmetrischen Gruppe auf  $\mathbb{C}^n$  durch Vertauschung der Koordinaten. Aus  $A \Subset \mathbb{C}^n$  folgt also erst  $s^{-1}(s(A)) \Subset \mathbb{C}^n$  als endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen und dann  $s(A) \Subset \mathbb{C}^n$  aufgrund der Finalität von  $s$ . Speziell sind auch  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow s(\mathbb{R}^n)$  und  $s : (\mathbb{R}^\times)^n \rightarrow s((\mathbb{R}^\times)^n)$  final nach 3.4.20. Das zeigt insbesondere, daß im reellen Vektorraum aller normierten reellen Polynome vom Grad  $n$  die über  $\mathbb{R}$  zerfallenden Polynome eine abgeschlossene Teilmenge bilden, und daß darin die offene Teilmenge der Polynome ohne Nullstelle bei Null in  $(n + 1)$  Zusammenhangskomponenten zerfällt, die durch die Zahl der mit Vielfachheit genommenen positiven Nullstellen der in ihnen enthaltenen Polynome charakterisiert werden können.

*Übung 3.4.26.* Sei  $n$  ungerade. Man zeige, daß im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller normierten reellen Polynome vom Grad  $n$  die Polynome mit genau einer reellen Nullstelle eine offene Teilmenge bilden, und daß das Bilden dieser einzigen reellen Nullstelle auf dieser offenen Teilmenge eine stetige reelle Funktion ist.

**Definition 3.4.27.** Seien  $Y$  eine Menge,  $X_i$  topologische Räume indiziert durch  $i \in I$  und  $f_i : Y \rightarrow X_i$  Abbildungen. Die kleinste Topologie auf  $Y$ , für die alle die  $f_i$  stetig werden, heißt die **Initialtopologie** oder auch die **Kofinaltopologie** auf  $Y$  in Bezug auf unsere Familie von Abbildungen.

3.4.28. Der Schnitt aller Topologien auf  $Y$ , für die alle  $f_i$  stetig sind, hat sicher auch diese Eigenschaft und ist folglich die kleinste Topologie mit dieser Eigenschaft. Das zeigt, daß solch eine kleinste Topologie wirklich existiert. Etwas expliziter kann man die Initialtopologie beschreiben als die Topologie auf  $Y$ , die von allen  $f_i^{-1}(U)$  mit  $i \in I$  und  $U \Subset X_i$  erzeugt wird.

**Satz 3.4.29 (Universelle Eigenschaft der Initialtopologie).** Seien  $f_i : Y \rightarrow X_i$  wie in 3.4.27. Versehen wir  $Y$  mit der Initial-Topologie und ist  $Z$  ein topologischer Raum und  $g : Z \rightarrow Y$  eine Abbildung, so ist  $g$  stetig genau dann, wenn alle  $f_i \circ g : Z \rightarrow X_i$  stetig sind.

*Beweis.* Mit  $g$  sind natürlich auch alle  $f_i \circ g$  stetig. Sind umgekehrt alle  $f_i \circ g$  stetig, so ist die Finaltopologie zu  $g$  auch eine Topologie auf  $Y$ , für die alle  $f_i$  stetig sind. Folglich umfaßt die Finaltopologie zu  $g$  unsere Initialtopologie und  $g$  ist stetig.  $\square$

3.4.30. Analog wie in 3.4.11 zeigt man, daß auch die Initialtopologie auf  $Y$  charakterisiert werden kann als die einzige Topologie, für die die Aussage des vorhergehenden Satzes 3.4.29 gilt.

*Übung 3.4.31 (Transitivität initialer Familien).* Seien  $h_i : X \rightarrow Y_i$  und  $g_{ji} : Y_i \rightarrow Z_{ji}$  Familien von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Trägt  $X$  die initiale Topologie für die  $h_i$  und tragen die  $Y_i$  die initialen Topologien für die  $g_{ji}$ , so trägt  $X$  auch die initiale Topologie für die  $g_{ji}h_i$ . Trägt andererseits  $X$  die initiale Topologie bezüglich der  $g_{ji}h_i$ , so trägt  $X$  auch die initiale Topologie bezüglich der  $h_i$ .

*Beispiel 3.4.32.* Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$  eine Teilmenge, so stimmt die auf  $Y$  induzierte Topologie überein mit der Initialtopologie zur Inklusion  $Y \hookrightarrow X$ . Ganz allgemein nennen wir eine stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  **initial** genau dann, wenn  $Y$  die Initialtopologie trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem topologischen Raum stets initial.

3.4.33. Übung 3.4.31 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Abbildungen stets initial ist, und daß Verknüpfung  $g \circ h$  von zwei stetigen Abbildungen nur dann initial sein kann, wenn  $h$  initial ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung initial, die eine stetige Linksinverse besitzt.

*Ergänzung 3.4.34.* In der Homotopietheorie arbeitet man oft mit sogenannten **CW-Komplexen**. Darunter versteht man einen Hausdorffraum  $X$  mit einer Familie von stetigen Abbildungen  $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \rightarrow X$  von geschlossenen Bällen  $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  nach  $X$  derart, daß gilt:

1. Die Restriktionen unserer Abbildungen auf die offenen Bälle sind Homöomorphismen auf ihr Bild  $\varphi_\alpha : (D^{n(\alpha)} \setminus S^{n(\alpha)}) \xrightarrow{\sim} \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \setminus S^{n(\alpha)})$  und unser Raum  $X$  ist als Menge die disjunkte Vereinigung der Bilder der offenen Bälle  $X = \bigsqcup_\alpha \varphi_\alpha(D^{n(\alpha)} \setminus S^{n(\alpha)})$ ;
2. Für jedes  $\alpha$  ist  $\varphi_\alpha(S^{n(\alpha)})$  enthalten in einer endlichen Vereinigung von Bildern von anderen  $\varphi_\beta$  mit  $n(\beta) < n(\alpha)$ ;
3. Der Raum  $X$  trägt die finale Topologie in Bezug auf die Familie der  $\varphi_\alpha : D^{n(\alpha)} \rightarrow X$ .

Die zweite Bedingung heißt auf Englisch “closure finiteness”, die Dritte “weak topology”, daher die Terminologie.

### 3.5 Kompakte topologische Eins-Mannigfaltigkeiten\*

3.5.1. Dieser Abschnitt ist für das Weitere entbehrlich. Er dient im Wesentlichen dazu, den Leser zu überzeugen, daß die bisher entwickelten abstrakten Begriffsbildungen immer noch eine enge Beziehung zur Anschauung haben.

**Satz 3.5.2 (Klassifikation kompakter Eins-Mannigfaltigkeiten).** *Jede eindimensionale zusammenhängende kompakte topologische Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur Kreislinie  $S^1$ .*

3.5.3. Weitere Resultate in dieser Richtung kann man etwa in [FR84], Seite 139 folgende finden. Wir schicken dem eigentlichen Beweis ein Lemma voraus.

**Lemma 3.5.4.** *Läßt sich ein zusammenhängender Hausdorffraum schreiben als Vereinigung von zwei offenen zu  $\mathbb{R}$  homöomorphen Teilmengen, so ist er homöomorph zur Zahlengeraden  $\mathbb{R}$  oder zur Kreislinie  $S^1$ .*

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum und seien  $\varphi, \psi : \mathbb{R} \hookrightarrow X$  offene stetige Einbettungen, deren Bilder  $X$  überdecken. Da  $X$  zusammenhängend ist, haben wir  $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ . Sicher ist  $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$  offen in  $\mathbb{R}$ , folglich ist jede Zusammenhangskomponente dieser Menge ein offenes Intervall. Wäre solch eine Zusammenhangskomponente beschränkt, sagen wir  $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R})) = (a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , so folgte  $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b)) = (\psi^{-1} \circ \varphi)([a, b])$ , und da  $\varphi([a, b])$  kompakt und damit abgeschlossen ist, wäre  $(\psi^{-1} \circ \varphi)((a, b))$  sowohl offen als auch abgeschlossen und damit ganz  $\mathbb{R}$  und es folgte  $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} X$  und wir wären fertig. Wir dürfen also annehmen, jede Zusammenhangskomponente von  $\varphi^{-1}(\psi(\mathbb{R}))$  sei ein unbeschränktes Intervall. Folglich besitzt dieser Raum und damit auch  $\varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R})$  entweder eine oder zwei Zusammenhangskomponenten. Wir beginnen mit dem Fall einer Komponente. Indem wir notfalls  $\varphi$  bzw.  $\psi$  durch ihre Verknüpfung mit  $t \mapsto -t$  ersetzen, dürfen wir annehmen, daß es  $a, b \in \mathbb{R}$  gibt derart, daß  $\varphi$  und  $\psi$  Homöomorphismen

$$(-\infty, a) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{R}) \cap \psi(\mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} (b, \infty)$$

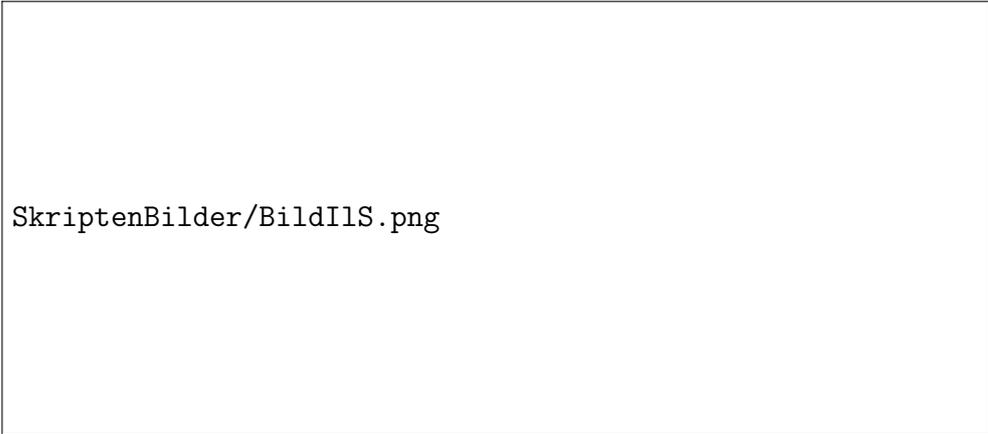
induzieren. Die Verknüpfung ist also streng monoton. Wäre sie streng monoton fallend, so hätten wir

$$\lim_{x \nearrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = \psi(b) = \lim_{y \searrow b} \psi(y)$$

im Widerspruch zur Wahl von  $a$  und  $b$ . Also ist unsere Verknüpfung streng monoton wachsend und gegeben  $c, d$  mit  $\varphi(c) = \psi(d)$  haben wir

$$X = \psi((-\infty, d]) \cup \varphi([c, \infty))$$

wobei  $\varphi(c) = \psi(d)$  der einzige gemeinsame Punkt dieser beiden Mengen ist. Sie sind beide abgeschlossen in  $X$ , da ihre Urbilder unter  $\psi$  und  $\varphi$  es sind, und daraus folgt dann, daß  $X$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}$ . Im Fall zweier Komponenten argumentieren wir analog.  $\square$



SkriptenBilder/BildI1S.png

Illustration zum Beweis von [3.5.4](#).

*Beweis von Satz 3.5.2.* Sei  $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$  eine offene Überdeckung durch zu  $\mathbb{R}$  homöomorphe Teilmengen. Wir können die Mengen unserer Überdeckung so anordnen, daß  $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i$  für jedes  $i \geq 1$  zusammenhängend ist. Ist  $i$  minimal derart, daß  $U_1 \cup \dots \cup U_i$  nicht homöomorph ist zu  $\mathbb{R}$ , so muß nach dem Lemma diese Vereinigung bereits homöomorph zu  $S^1$  sein, und damit als nichtleere abgeschlossene und offene Teilmenge mit ganz  $X$  zusammenfallen.  $\square$

### 3.6 Produkttopologie

**Definition 3.6.1.** Ist  $(Y_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume, so ist die **Produkttopologie** auf dem kartesischen Produkt  $\prod_{i \in I} Y_i$  definiert als die kofinale Topologie zu den Projektionen auf die Koordinaten  $\text{pr}_j : \prod Y_i \rightarrow Y_j$ .

3.6.2. Abstrakt gefaßt erhalten wir so genau das Produkt im Sinne der Kategorientheorie ?? im Spezialfall der Kategorie der topologischen Räume.

3.6.3. Ausformuliert bedeutet diese Definition: Alle  $\text{pr}_j$  sind stetig, und eine Abbildung  $g : Z \rightarrow \prod Y_i$  von einem topologischen Raum  $Z$  in das Produkt ist stetig genau dann, wenn alle  $\text{pr}_j \circ g : Z \rightarrow Y_j$  es sind. Etwas expliziter liefert die Konstruktion der Kofinaltopologie, daß die Produkttopologie auf  $\prod Y_i$  erzeugt wird durch alle Mengen der Form  $\text{pr}_i^{-1}(U_i)$  für  $i \in I$  und  $U_i \subseteq Y_i$ . Eine Basis der Topologie wird folglich gegeben durch alle endlichen Schnitte solcher Mengen, d.h. durch die "offenen Quader"

$$U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} Y_i$$

mit  $U_{i_\nu} \subseteq Y_{i_\nu}$  für paarweise verschiedene  $i_\nu$ .

3.6.4. Auf einem endlichen Produkt metrischer Räume liefert die Produktmetrik stets die Produkttopologie. Speziell stimmt auf dem  $\mathbb{R}^n$  die Produkttopologie überein mit der natürlichen Topologie aus II.6.9.22.

*Übung 3.6.5.* Das Produkt von einer Familie von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung zwischen den Produkten der jeweiligen Räume. Sind hier alle Abbildungen Einbettungen, so auch ihr Produkt. Sind alle Abbildungen initial, so auch ihr Produkt.

3.6.6. Das Produkt einer Familie von finalen Abbildungen muß keineswegs final sein. Das Produkt einer Familie von offenen Surjektionen ist jedoch wieder eine offene Surjektion und damit nach 3.4.19 final. Des weiteren zeigen wir in ??, daß auch das Produkt einer finalen Surjektion mit der Identität auf einem lokal kompakten Raum wieder final ist.

*Übung 3.6.7.* Für jeden topologischen Raum  $X$  ist die diagonale Abbildung  $\Delta : X \rightarrow X \times X, x \mapsto (x, x)$  eine Einbettung. Man zeige: Genau dann ist  $X$  Hausdorff, wenn die Diagonale  $\Delta(X) \subset X \times X$  eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts  $X \times X$  ist.

*Übung 3.6.8.* Stimmen zwei stetige Abbildungen von einem topologischen Raum in einen Hausdorffraum auf einer dichten Teilmenge überein, so sind sie gleich. Hinweis: Zusammen liefern unsere beiden stetigen Abbildungen eine Abbildung in das kartesische Produkt, unter der das Urbild der Diagonale wegen 3.6.7 abgeschlossen sein muß.

*Ergänzende Übung 3.6.9.* Ein Produkt von abgeschlossenen Teilmengen ist stets eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts. Allgemeiner zeige man für topologische Räume  $X, Y$  und Teilmengen  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  die Gleichheit  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$  des Abschlusses des Produkts mit dem Produkt der Abschlüsse.

*Übung 3.6.10.* Für beliebige topologische Räume  $X, Y, Z$  ist die offensichtliche Abbildung  $X \times Y \times Z \rightarrow (X \times Y) \times Z$  ein Homöomorphismus.

*Ergänzende Übung 3.6.11.* Man zeige, daß die Menge aller  $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  mit  $x \leq y$  abgeschlossen ist. Man folgere, daß bei Grenzwerten von Funktionen mit Werten in  $\overline{\mathbb{R}}$  Ungleichungen erhalten bleiben. Hinweis: 3.1.6.

*Ergänzende Übung 3.6.12.* Sind  $f, g : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $(y, \tau) \mapsto \tau f(y) + (1 - \tau)g(y)$  stetig.

*Ergänzende Übung 3.6.13.* Das Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $n$  und  $m$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n + m$ .

*Ergänzende Übung 3.6.14.* Jede kompakte  $d$ -Mannigfaltigkeit  $X$  läßt sich stetig in einen  $\mathbb{R}^n$  einbetten. Hinweis: Man findet für jedes  $x \in X$  eine stetige Abbildung  $f_x : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die injektiv ist auf einer offenen Umgebung  $U_x$  von  $x$ . Endlich viele dieser  $U_x$  überdecken  $X$ .

*Übung 3.6.15.* Man zeige: Das Produkt von zwei kompakten Räumen ist kompakt. Der Satz von Tychonoff 17.4.7 wird uns sagen, daß sogar ein beliebiges Produkt von kompakten Räumen kompakt ist.

*Ergänzende Übung 3.6.16.* Gegeben topologische Räume  $X, Y$  und Kompakta  $K \subset X$  sowie  $L \subset Y$  und  $W \subset X \times Y$  mit  $K \times L \subset W$  gibt es  $U \subset X$  und  $V \subset Y$  mit  $K \subset U$  und  $L \subset V$  und  $U \times V \subset W$ .

3.6.17. Die Projektionen eines Produkts von topologischen Räumen auf seine Faktoren sind im allgemeinen nicht abgeschlossen. Zum Beispiel ist die sogenannte Hyperbel  $\{(x, y) \mid xy = 1\}$  eine abgeschlossene Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , ihre Projektion auf die  $x$ -Achse ist jedoch keine abgeschlossene Teilmenge der Zahlengerade  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 3.6.18 (Finalität der Projektionen).** *Die Projektionen eines Produkts von topologischen Räumen auf einen beliebigen Faktor sind offene Abbildungen. Die Projektionen eines Produkts von nichtleeren topologischen Räumen auf einen beliebigen Faktor sind final.*

*Beweis.* Ersteres folgt unmittelbar aus der Definition der Produkttopologie. Letzteres kann man alternativ aus 3.4.19 folgern, wonach jede offene stetige Surjektion final ist, oder aus 3.4.14, wonach jede stetige Abbildung mit einem stetigen Schnitt final ist.  $\square$

**Satz 3.6.19 (Zusammenhang von Produkten).** *Ein Produkt von topologischen Räumen ist zusammenhängend genau dann, wenn alle Faktoren zusammenhängend sind.*

3.6.20. Um diesen Satz so prägnant formulieren zu können, müssen wir unsere Konvention zugrundelegen, nach der die leere Menge kein zusammenhängender topologischer Raum ist.

*Beweis.* Ist das Produkt zusammenhängend, so nach 1.4.2 auch die Faktoren als Bilder der stetigen Projektionen. Für die Rückrichtung prüfen wir unser Zusammenhangskriterium 1.4.3. Sei  $(Y_i)_{i \in I}$  unsere Familie von topologischen Räumen und  $f : \prod Y_i \rightarrow \{0, 1\}$  stetig. Gilt  $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ , so folgt  $f^{-1}(0) \supset U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} Y_i$  für geeignete nichtleere offene Teilmengen  $U_{i_1} \subseteq Y_{i_1}, \dots, U_{i_k} \subseteq Y_{i_k}$ . Aber da  $Y_i$  zusammenhängend ist, folgt  $f(x) = f(y)$ , wenn sich  $x$  und  $y$  nur in der  $i$ -ten Koordinate unterscheiden. Also gilt  $f^{-1}(0) = \prod_{i \in I} Y_i$ .  $\square$

*Ergänzende Übung 3.6.21.* Man zeige, daß es keinen topologischen Raum  $X$  gibt derart, daß  $X \times X$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}$ . Hinweis: Man zeige, daß für  $X$  zusammenhängend mit mehr als einem Punkt das Komplement eines Punktes in  $X \times X$  auch zusammenhängend ist. Man zeige allgemeiner, daß es keine zwei topologischen Räume  $X, Y$  mit jeweils mindestens zwei Punkten so gibt, daß  $X \times Y$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}$ . Höherdimensionale Analoga zeigen wir in ??.

*Ergänzende Übung 3.6.22.* Man zeige, daß für jeden topologischen Raum  $X$  die Abbildung  $\text{Exp} \times \text{id} : [0, 1] \times X \rightarrow S^1 \times X$  final ist. Hinweis: 3.4.14 und 3.4.21.

*Ergänzende Übung 3.6.23.* Auf dem Produkt einer abzählbaren Familie metrischer Räume existieren stets Metriken, die die Produkt-Topologie induzieren. Hinweis: Man mag sich an II.6.7.17 orientieren. Weiter zeige man, daß das Produkt einer abzählbaren Familie kompakter metrischer Räume kompakt ist.

*Ergänzung 3.6.24.* In 17.4.7 zeigen wir allgemeiner aber auch mühsamer, daß beliebige Produkte kompakter Räume kompakt sind.

### 3.7 Topologische Gruppen

**Definition 3.7.1.** Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe  $G$  mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung  $G \times G \rightarrow G$  und die Inversenabbildung  $G \rightarrow G$  stetig sind.

*Ergänzung 3.7.2.* Manche Autoren fordern von ihren topologischen Gruppen zusätzlich auch noch die Hausdorff-Eigenschaft, aber ich schließe mich dieser Konvention nicht an.

*Beispiele 3.7.3.* Die Gruppen  $GL(n; \mathbb{R})$  sind topologische Gruppen in der von der natürlichen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum aller reellen  $(n \times n)$ -Matrizen induzierten Topologie. Jeder normierte Vektorraum ist mit der Addition als Verknüpfung und der metrischen Topologie eine topologische Gruppe.

*Übung 3.7.4.* Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist mit der induzierten Topologie selbst eine topologische Gruppe. Jedes Produkt topologischer Gruppen ist mit der Produkttopologie wieder eine topologische Gruppe.

*Ergänzende Übung 3.7.5.* Die Einheiten jeder Banach-Algebra bilden mit der metrischen Topologie eine topologische Gruppe. Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums bilden eine abgeschlossene Untergruppe in der Einheitengruppe der Banach-Algebra der beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum.

*Übung 3.7.6.* Ein Gruppenhomomorphismus von topologischen Gruppen ist stetig genau dann, wenn er stetig ist beim neutralen Element.

*Übung 3.7.7.* Gegeben eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch ihr Abschluß eine Untergruppe.

*Übung 3.7.8.* In jeder topologischen Gruppe ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements eine Untergruppe, ja sogar ein Normalteiler. Man nennt sie meist die **Einszusammenhangskomponente**. Die Einszusammenhangskomponente einer topologischen Gruppe  $G$  wird meist  $G^\circ$  notiert.

3.7.9. Ein stetiger Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine topologische Gruppe heißt eine **Einparameteruntergruppe** unserer topologischen Gruppe. Ich finde es etwas unglücklich, daß solch eine Einparameteruntergruppe gar keine Untergruppe ist, aber so ist nun mal die übliche Terminologie. II.6.9.11 bestimmt insbesondere die

Einparameteruntergruppen der additiven Gruppe eines normierten reellen Vektorraums, 1.6.3 die Einparameteruntergruppen von Matrix-Liegruppen.

3.7.10. Gegeben eine topologische Gruppe ist die Linkstranslation mit  $x \in G$  ein Homöomorphismus  $(x \cdot) : G \rightarrow G$ . In der Tat können wir sie beschreiben als die Verknüpfung

$$G \xrightarrow{(x, \text{id})} G \times G \xrightarrow{m} G$$

wo  $x$  für die konstante Abbildung  $G \rightarrow G$  mit Bild  $x$  steht, die ja stets stetig ist. Damit ist  $(x \cdot)$  sicher stetig. Mit demselben Argument ist aber auch ihre Inverse  $(x^{-1} \cdot)$  stetig. In derselben Weise folgt, daß auch die Rechtstranslationen  $(\cdot x)$  und die Konjugationen  $g \mapsto xgx^{-1}$  Homöomorphismen sind für alle  $x \in G$ .

3.7.11. Jede offene Untergruppe einer topologischen Gruppe ist auch abgeschlossen als das Komplement der Vereinigung ihrer nichttrivialen Linksnebenklassen.

*Übung 3.7.12.* Ist  $G$  eine Hausdorff'sche topologische Gruppe und  $A \subset G$  eine abelsche Untergruppe, so ist auch der Abschluß  $\bar{A}$  unserer Untergruppe abelsch. In der Tat folgt aus  $aba^{-1}b^{-1} = 1$  für alle  $a, b \in A$  dasselbe zunächst für alle  $a \in A, b \in \bar{A}$  und dann für alle  $a, b \in \bar{A}$ .

**Lemma 3.7.13.** *Eine zusammenhängende topologische Gruppe wird von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.*

*Beweis.* In der Tat erzeugt in jeder topologischen Gruppe jede Umgebung des neutralen Elements eine offene Untergruppe. Nach 3.7.11 ist diese offene Untergruppe auch abgeschlossen. Ist unsere Gruppe zusammenhängend, so muß sie also bereits mit besagter Untergruppe übereinstimmen.  $\square$

*Übung 3.7.14.* Man zeige, daß eine zusammenhängende topologische Gruppe mit einer separablen Umgebung des neutralen Elements stets separabel ist, d.h. eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Hinweis: Gegeben eine offene Teilmenge  $U \subseteq G$  ist die Multiplikation  $U^n \rightarrow G$  stets offen.

**Definition 3.7.15.** Eine Operation einer topologischen Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $X$  heißt **stetig** genau dann, wenn die zugehörige Abbildung  $G \times X \rightarrow X$  stetig ist.

*Übung 3.7.16.* Die Operationen einer topologischen Gruppe auf sich selbst durch Linkstranslation, Rechtstranslation und Konjugation sind stetig.

*Übung 3.7.17.* Jeder diskrete Normalteiler einer zusammenhängenden topologischen Gruppe liegt bereits im Zentrum besagter Gruppe.

### 3.8 Quotienten nach Gruppenwirkungen

3.8.1. Operiert eine Gruppe  $G$  stetig auf einem topologischen Raum  $X$ , so versehen wir den **Bahnenraum**  $X/G$  stets mit der Quotiententopologie zur Projektion  $X \twoheadrightarrow X/G$ . Hierbei kommt es auf die Topologie von  $G$  nicht an, wir können uns etwa  $G$  mit der diskreten Topologie versehen denken. Die Stetigkeitsbedingung bedeutet dann schlicht, daß  $G$  durch stetige Abbildungen operiert. Die Bequemlichkeit, mit der man im Rahmen der Theorie der topologischen Räume Quotienten bilden kann, scheint mir ein ganz wesentlicher Grund für ihre Allgegenwart in der Mathematik.

**Lemma 3.8.2.** *Operiert eine Gruppe  $G$  stetig auf einem topologischen Raum  $X$ , so ist die Quotientenabbildung  $X \twoheadrightarrow X/G$  offen. Insbesondere ist für jeden weiteren topologischen Raum  $Y$  auch das Produkt mit der Identität  $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times X/G$  final.*

*Beweis.* Das Urbild des Bildes einer offenen Menge ist die Vereinigung all ihrer mit der Gruppenoperation verschobenen Kopien und damit offen. Das Produkt unserer Abbildung mit der Identität auf einem beliebigen Raum ist damit auch offen und nach 3.4.19 als stetige offene Surjektion final.  $\square$

*Übung 3.8.3.* Ist  $Y \rightarrow X$  eine stetige  $G$ -äquivalente Abbildung von topologischen Räumen mit einer stetigen Operation einer Gruppe  $G$ , und ist  $Y \rightarrow X$  initial, so ist auch die induzierte Abbildung  $Y/G \rightarrow X/G$  initial. Hinweis: Es gilt zu zeigen, daß jede für die Quotiententopologie auf  $Y/G$  offene Menge auch für die Initialtopologie offen ist.

*Übung 3.8.4 (Zusammenhangskomponenten von Bahnräumen).* Man zeige: Operiert eine zusammenhängende topologische Gruppe  $G$  stetig auf einem topologischen Raum  $X$ , so ist  $X$  zusammenhängend genau dann, wenn  $X/G$  zusammenhängend ist. Allgemeiner: Operiert eine zusammenhängende topologische Gruppe  $G$  stetig auf einem topologischen Raum  $X$ , so induziert die Quotientenabbildung  $X \twoheadrightarrow X/G$  eine Bijektion zwischen der Menge  $\mathcal{Z}(X) \subset \mathcal{P}(X)$  der Zusammenhangskomponenten von  $X$  und der Menge  $\mathcal{Z}(X/G) \subset \mathcal{P}(X/G)$  der Zusammenhangskomponenten von  $X/G$ .

*Übung 3.8.5.* Man zeige, daß die Gruppen  $\mathrm{SO}(n)$  zusammenhängend sind. Hinweis: Man zeige zunächst mit 3.4.18, daß die Operation auf der  $n$ -Sphäre  $S^n$  einen Homöomorphismus  $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \xrightarrow{\sim} S^n$  liefert, und argumentiere mit Induktion über  $n$  und 3.8.4. Man zeige weiter, daß auch die Gruppen  $\mathrm{SU}(n)$  zusammenhängend sind.

3.8.6. Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und eine Untergruppe  $H \subset G$  ist die Operation von  $G$  auf  $G/H$  stetig. In der Tat betrachte man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G/H & \rightarrow & G/H \end{array}$$

und beachte, daß die linke Vertikale nach 3.8.2 auch final ist. Ist allgemeiner  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige offene Surjektion von topologischen Räumen, die äquivariant ist für Operationen einer Gruppe  $G$  auf beiden Räumen, in Formeln  $f(gx) = gf(x)$ , und ist  $G$  mit einer Topologie versehen, für die die Operation auf  $X$  stetig ist, so ist auch die Operation auf  $Y$  stetig.

*Übung 3.8.7.* Gegeben ein homogener Raum  $X$  einer topologischen Gruppe  $G$  gibt es genau eine Topologie auf  $X$  derart, daß für jeden Punkt  $x \in X$  das Anwenden  $G \rightarrow X, g \mapsto gx$  eine finale Abbildung ist. Wir nennen sie die **Topologie als homogener Raum** auf  $X$ .

*Übung 3.8.8.* Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und eine normale Untergruppe  $H \subset G$  ist der Quotient  $G/H$  mit seiner Quotiententopologie und der induzierten Verknüpfung eine topologische Gruppe. Der Quotient  $G/G^\circ$  einer Gruppe nach ihrer Einszusammenhangskomponente heißt die **Komponentengruppe** von  $G$ . Ist  $G^\circ$  offen in  $G$ , so ist besagte Komponentengruppe diskret.

*Ergänzung 3.8.9.* Gegeben eine Umgebung  $U \subset G$  des neutralen Elements einer topologischen Gruppe gibt es stets eine weitere Umgebung  $V \subset G$  des neutralen Elements mit  $V^2 \subset U$  alias  $xy \in U \forall x, y \in V$ . In der Tat gibt es eine Umgebung von  $(1, 1)$  in  $G \times G$ , die unter der Verknüpfung in  $U$  landet, und jede solche Umgebung umfaßt eine Umgebung der Gestalt  $A \times B$  für Umgebungen  $A, B$  von  $1 \in G$ . Der Schnitt  $A \cap B$  ist dann die gesuchte Umgebung  $V$  des neutralen Elements.

**Lemma 3.8.10.** *Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist abgeschlossen genau dann, wenn der Quotient nach unserer Untergruppe Hausdorff ist.*

*Beweis.* Seien  $G \supset H$  unsere Gruppen. Ist der Quotient  $G/H$  Hausdorff, so sind seine Punkte abgeschlossen, und damit ist auch  $H$  abgeschlossen in  $G$  als Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von  $G/H$ . Für die Umkehrung gilt es zu zeigen, daß die Diagonale  $\Delta_{G/H}$  in  $G/H \times G/H$  abgeschlossen ist. Die Abbildung  $G \times G \rightarrow G/H \times G/H$  ist aber nach 3.8.2 als Komposition finaler Abbildungen oder alternativ als Produkt offener stetiger Surjektionen auch selbst final. Es reicht also zu zeigen, daß das Urbild der Diagonale  $\Delta_{G/H}$  in  $G \times G$  abgeschlossen ist. Dies Urbild kann aber auch beschrieben werden als das Urbild von  $H$  unter der Abbildung  $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ .  $\square$

*Übung 3.8.11.* Operiert eine topologische Gruppe  $G$  stetig auf einem topologischen Raum  $X$  und ist  $N \subset G$  ein Normalteiler, dessen Elemente  $X$  punktweise festhalten, so ist auch die induzierte Operation von  $G/N$  auf  $X$  stetig.

*Übung 3.8.12.* Gegeben  $G \supset H \supset K$  eine topologische Gruppe mit zwei Normalteilern ist der Isomorphismus aus dem noetherschen Isomorphiesatz ?? ein Homöomorphismus  $G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$ .

*Übung 3.8.13.* Man zeige, daß die Einbettung  $U(n) \hookrightarrow GL(n; \mathbb{C})$  einen Homöomorphismus  $U(n)/O(n) \xrightarrow{\sim} GL(n; \mathbb{C})/GL(n; \mathbb{R})$  induziert.

### 3.9 Projektive Räume

**Definition 3.9.1.** Die **projektiven Räume**  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  für  $n \geq 0$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  erhält man als die Menge aller reellen bzw. komplexen bzw. quaternionalen Geraden durch den Nullpunkt in  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Wir versehen unsere projektiven Räume mit der Quotiententopologie bezüglich der offensichtlichen Surjektionen

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0 &\twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K} \\ x &\mapsto \mathbb{K}x \end{aligned}$$

Die natürliche Operation von  $GL(n+1; \mathbb{K})$  auf  $\mathbb{K}^{n+1}$  induziert eine Operation auf  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ , zumindest wenn man im Fall der Quaternionen noch besser aufpaßt, in der Definition des projektiven Raums quaternionale Geraden als von Null verschiedene zyklische Unterrechtsmoduln vom  $\mathbb{H}^n$  erklärt, und in der Definition der Projektion entsprechend  $\mathbb{H}x$  zu  $x\mathbb{H}$  abändert.

**Proposition 3.9.2 (Projektive Räume).** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  ist der projektive Raum  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$  und die in 3.9.1 darauf definierte Topologie stimmt überein mit der Topologie als homogener Raum in Bezug auf die offensichtliche Operation von  $GL(n+1; \mathbb{K})$ .

*Übung 3.9.3.* Man zeige, daß  $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$  homöomorph ist zu einer Kreislinie  $S^1$ ,  $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$  homöomorph zur Kugelschale  $S^2$ , und  $\mathbb{P}^1 \mathbb{H}$  homöomorph zur 4-Sphäre  $S^4$ . Man zeige weiter, daß  $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$  homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben.

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Nachweis, daß auf dem Komplement des Ursprungs  $\mathbb{K}^d \setminus 0$  die von  $\mathbb{K}^d$  induzierte Topologie übereinstimmt mit der Topologie, die diese Menge als homogener Raum von  $GL(d; \mathbb{K})$  erhält. Dieses Erkenntnis formulieren wir als eigenständiges Lemma.

**Lemma 3.9.4.** *Versehen wir  $\mathbb{K}^d \setminus 0$  mit der von  $\mathbb{K}^d$  induzierten Topologie, so liefert das Anwenden auf einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor eine finale Abbildung  $\mathrm{GL}(d; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^d \setminus 0$ .*

*Beweis des Lemmas.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere Abbildung das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis  $\pi : A \mapsto A e_1$  ist. Nach 3.4.21 reicht es, für jeden Vektor  $v \neq 0$  eine offene Umgebung  $U$  zu finden derart, daß  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  final ist. Nach 3.4.14 reicht es, besagte offene Umgebung  $U$  so zu finden, daß  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  einen stetigen Schnitt besitzt. Dazu wählen wir zu unserem von Null verschiedenen Vektor  $v$  eine invertierbare Matrix  $A = (a_1 | a_2 | \dots | a_d)$  mit erster Spalte  $a_1 = v$  und nehmen als  $U = \mathbb{K}^d \setminus \langle a_2, \dots, a_d \rangle$  das Komplement des Erzeugnisses ihrer anderen Spalten und als stetigen Schnitt auf  $U$  die Abbildung  $w \mapsto (w | a_2 | \dots | a_d)$ , die jedem  $w \in U$  die Matrix zuordnet, die aus  $A$  entsteht beim Ersetzen der ersten Spalte durch  $w$ .  $\square$

Um zu zeigen, daß unsere projektiven Räume die Topologie als homogener Raum von  $\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{K})$  tragen, betrachten wir die Abbildungen

$$\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$$

von denen die Erste gegeben wird durch das Anwenden auf  $e_1$ . Versehen wir  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  mit seiner Topologie als homogener Raum von  $\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{K})$ , so sind nach 3.9.4 beide Abbildungen stetig und nach 3.4.14 ist auch die Zweite final. Damit stimmt auf  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  die Topologie als homogener Raum überein mit der Topologie aus unserer Definition 3.9.1. Die Hausdorff-Eigenschaft folgt dann aus 3.8.10, da die Isotropiegruppen unseres homogenen Raums  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  offensichtlich abgeschlossen sind. Identifizieren wir in  $\mathbb{R}$ -linearer Weise  $\mathbb{K}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  und bezeichnen mit  $S = S^{n-1} \subset \mathbb{K}^{n+1}$  die Menge aller Vektoren der Länge Eins für das Standard-Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , eine hochdimensionale Sphäre, so erhalten wir eine stetige Surjektion  $S \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$ . Als Bilder kompakter Räume sind demnach unsere projektiven Räume kompakt. Somit müssen wir nur noch für jeden Punkt eine zu  $\mathbb{K}^n$  homöomorphe offene Umgebung finden. Wir betrachten dazu einen beliebigen endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $W$  und zeigen, daß für jede affine Hyperebene  $H \subset W$ , die den Ursprung vermeidet, die Injektion  $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$  gegeben durch  $v \mapsto \langle v \rangle$  eine offene Einbettung ist. Ist in der Tat  $\vec{H} \subset W$  der Untervektorraum der Richtungsvektoren unserer affinen Hyperebene  $H$ , so ist  $\pi^{-1}(\pi(H)) = W \setminus \vec{H}$  offen in  $W \setminus 0$ . Mithin hat unsere Injektion  $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$  offenes Bild. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm



Illustration zum Beweis von [3.9.2](#)

$$\begin{array}{ccc}
 & W \setminus \vec{H} & \\
 \swarrow & & \searrow \pi \\
 H & \xrightarrow{\quad} & i_H(H)
 \end{array}$$

Der linke schräge Pfeil ordnet jedem Punkt den Schnittpunkt mit  $H$  der durch ihn verlaufenden Ursprungsgeraden zu. Er ist stetig, denn ist  $\lambda_H : W \rightarrow k$  die Linearform, deren Niveaufäche zum Wert Eins gerade  $H$  ist, so wird er gegeben durch die Formel  $w \mapsto \lambda_H(w)^{-1}w$  oder im quaternionalen Fall besser  $w \mapsto w\lambda_H(w)^{-1}$ . Er ist nach 3.4.14 sogar final, da er einen Schnitt besitzt, eben die Einbettung  $H \hookrightarrow W \setminus \vec{H}$ . Der rechte schräge Pfeil ist final, da diese Eigenschaft nach 3.4.21 lokal ist in der Basis. Zusammen folgt, daß die horizontale Bijektion ein Homöomorphismus  $H \xrightarrow{\sim} i_H(H)$  sein muß. Damit ist  $\mathbb{P}W$  in der Tat eine Mannigfaltigkeit.  $\square$

*Übung 3.9.5.* Sei  $V$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Wir betrachten in  $\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V)$  alle Paare bestehend aus einer Halbebene und einer Halbgeraden auf ihrem Rand, also alle Paare  $(H, L)$ , für die es  $v, w \in V$  gibt mit  $H = \mathbb{R}_{\geq 0}w + \mathbb{R}v$  und  $L = \mathbb{R}_{> 0}v$ . Man zeige, daß die Menge aller derartigen Paare ein homogener Raum für  $GL(V)$  ist und daß dieser homogene Raum kompakt ist.

*Übung 3.9.6.* Man zeige, daß die Gruppe  $GL(n; \mathbb{R})^+$  aller reellen  $(n \times n)$ -Matrizen mit positiver Determinante zusammenhängend ist. Hinweis: Induktion über  $n$ . Aus 3.9.4 folgert man unschwer, daß im Fall  $n > 1$  für den homogenen Raum  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  unserer Gruppe seine Topologie als homogener Raum mit der offensichtlichen Topologie übereinstimmt, so daß dieser homogene Raum zusammenhängend ist. Damit müssen wir nach 3.8.4 nur noch zeigen, daß die Isotropiegruppe eines Punktes zusammenhängend ist.

*Übung 3.9.7.* Versehen wir  $\mathbb{R}^d \setminus 0$  mit der von  $\mathbb{R}^d$  induzierten Topologie, so liefert für  $d > 1$  das Anwenden auf einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor eine finale Abbildung  $SL(d; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus 0$ . Dasselbe gilt im Komplexen.

### 3.10 Eigentliche Abbildungen\*

**Definition 3.10.1.** Eine Abbildung von topologischen Räumen  $X \rightarrow Y$  heißt **eigentlich** genau dann, wenn sie stetig ist und wenn darüber hinaus für jeden weiteren Raum  $Z$  die erweiterte Abbildung  $X \times Z \rightarrow Y \times Z$  abgeschlossen ist. Auf Französisch verwendet man den Begriff **propre**, auf Deutsch sagt man alternativ auch **universell abgeschlossen**.

3.10.2. Wir zeigen in 3.11.7, daß eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist.

**Lemma 3.10.3 (Eigentliche Abbildungen auf einen Punkt).** *Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn die konstante Abbildung von besagtem Raum auf den einpunktigen Raum eigentlich ist.*

*Beweis.* Sei  $X$  kompakt und  $Z$  beliebig. Ich denke mir  $X$  vertikal und  $Z$  horizontal. Sei  $A \subseteq X \times Z$  abgeschlossen und  $z \in Z$  gegeben derart, daß  $A$  die vertikale Faser bei  $z$  nicht trifft, in Formeln  $A \cap (X \times \{z\}) = \emptyset$ . So gibt es für jedes  $x \in X$  offene Umgebungen  $U_x \subseteq X$  von  $x$  und  $V_x \subseteq Z$  von  $z$  mit  $A \cap (U_x \times V_x) = \emptyset$ . Endlich viele  $U_x$  überdecken nun aber  $X$  und der Schnitt der zugehörigen  $V_x$  ist eine offene Umgebung von  $z$ , die die Projektion von  $A$  nicht trifft. Also ist die konstante Abbildung von einem Kompaktum auf einen einpunktigen Raum eigentlich. Die Umkehrung ist für uns weniger wichtig. Um sie zu zeigen, betrachten irgendein System abgeschlossener Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  mit nichtleeren endlichen Schnitten und müssen nach 3.3.13 nur zeigen, daß auch sein gesamter Schnitt nicht leer ist. Dazu bilden wir den Raum

$$Z = X \sqcup \{\infty\}$$

mit der Topologie, für die die offenen Teilmengen gerade alle Teilmengen sind, die entweder  $\infty$  vermeiden oder ein  $A \in \mathcal{A}$  umfassen. Aufgrund unserer Annahme an  $\mathcal{A}$  liegt  $\infty$  im Abschluss von  $X \subset Z$ . Betrachten wir die Diagonale  $\Delta \subset X \times Z$ , so muß das Bild ihres Abschlusses  $\bar{\Delta}$  unter der Projektion auf die zweite Koordinate ganz  $Z$  sein. Es gibt also ein  $x \in X$  mit  $(x, \infty) \in \bar{\Delta}$  und daraus folgt sofort  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ .  $\square$

*Übung 3.10.4 (Die Eigenschaft “eigentlich” ist lokal in der Basis).* Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Genau dann ist  $f$  eigentlich, wenn die induzierten Abbildungen  $f^{-1}(U) \rightarrow U$  eigentlich sind für alle  $U \in \mathcal{U}$ .

*Übung 3.10.5.* Die Verknüpfung eigentlicher Abbildungen ist eigentlich. Eine Einbettung ist eigentlich genau dann, wenn sie abgeschlossen ist. Ist  $f \circ g$  eigentlich und  $g$  surjektiv, so ist auch  $f$  eigentlich. Landet  $f$  in einem Punkt, so spezialisiert die letzte Behauptung zur Aussage, daß stetige Bilder von Kompakta stets kompakt sind.

*Ergänzung 3.10.6.* Leser, die bereits mit Faserprodukten ?? vertraut sind, werden leicht zeigen können, daß gegeben eine eigentliche Abbildung  $X \rightarrow Y$  und eine beliebige stetige Abbildung  $Z \rightarrow Y$  auch die erweiterte Abbildung

$X \times_Y Z \rightarrow Z$  eigentlich ist. Insbesondere bedeutet das im Fall von einpunktigem  $Z$ , daß alle Fasern einer eigentlichen Abbildung kompakt sind, und im Fall einer kompakten Teilmenge  $K \subset Y$  ergibt sich mit 3.10.5 und 3.10.3, daß die Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen kompakt sind. Man kann zeigen, daß eine stetige Abbildung eigentlich ist genau dann, wenn sie abgeschlossen ist und alle ihre Fasern kompakt sind.

*Übung 3.10.7.* Sind  $X \rightarrow Y$  und  $X' \rightarrow Y$  eigentlich, so auch  $(X \sqcup X') \rightarrow Y$ . Ist insbesondere  $Z \rightarrow Y$  stetig und sind Teilräume  $X, X' \subset Z$  gegeben mit  $X \rightarrow Y$  und  $X' \rightarrow Y$  eigentlich, so ist auch  $(X \cup X') \rightarrow Y$  eigentlich mit der vorhergehenden Übung 3.10.5.

**Proposition 3.10.8.** *Operiert eine kompakte topologische Gruppe  $G$  auf einem Hausdorff-Raum  $X$ , so ist auch der Bahnenraum  $X/G$  Hausdorff.*

*Ergänzung 3.10.9.* Ich hätte hier viel lieber einen Beweis gehabt, der das Konzept eigentlicher Abbildungen vermeidet, aber mir ist keiner eingefallen.

*Beweis.* Wegen der Kompaktheit von  $G$  ist die Projektion  $G \times X \rightarrow X$  eigentlich. Damit ist auch die Wirkung eigentlich als Komposition der Projektion mit dem Homöomorphismus  $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X, (g, x) \mapsto (g, gx)$ . Damit ist auch das Produkt der Wirkung mit der Identität auf  $X$  eine eigentliche Abbildung  $G \times X \times X \rightarrow X \times X$ , und schalten wir  $\text{id} \times \Delta$  davor, so erkennen wir mit 3.6.7 und 3.10.5, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (gx, x) \end{aligned}$$

eigentlich ist. Insbesondere ist ihr Bild  $\Gamma \subset X \times X$  abgeschlossen und das Komplement offen. Dann ist aber nach 3.8.1 und 3.8.2 auch das Bild dieses Komplements in  $X/G \times X/G$  offen und die Diagonale in  $X/G \times X/G$  ist folglich abgeschlossen.  $\square$

*Ergänzung 3.10.10.* Ganz allgemein heißt die Operation einer topologischen Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $X$  **eigentlich** genau dann, wenn die Abbildung  $G \times X \rightarrow X \times X, (g, x) \mapsto (gx, x)$  aus dem Beweis von 3.10.8 eigentlich ist. Die zweite Hälfte dieses Beweises zeigt, daß bei einer eigentlichen Operation der Bahnenraum stets Hausdorff ist.

*Übung 3.10.11.* Gegeben eine kompakte Hausdorff'sche Gruppe enthält jede Umgebung des neutralen Elements eine unter Konjugation stabile offene Umgebung des neutralen Elements.

### 3.11 Separierte Abbildungen\*

**Definition 3.11.1.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **separiert** genau dann, wenn die Diagonale  $X \subset X \times_Y X$  abgeschlossen ist.

*Beispiele 3.11.2.* Die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt ist nach 3.6.7 separiert genau dann, wenn der fragliche Raum Hausdorff alias separiert ist. Jede topologische Einbettung ist separiert. Ist in einem kartesischen Diagramm topologischer Räume ein Ursprungspfeil separiert, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.

**Definition 3.11.3.** Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **relativ Hausdorff** genau dann, wenn je zwei verschiedene Punkte unserer Teilmenge disjunkte Umgebungen im ursprünglichen Raum besitzen.

*Übung 3.11.4.* Eine stetige Abbildung ist separiert genau dann, wenn alle ihre Fasern relativ Hausdorff'sch sind im Sinne von 3.11.3. Jede Verknüpfung separierter Abbildungen ist separiert.

**Lemma 3.11.5.** *Ist  $f \circ g$  eigentlich und  $f$  separiert, so ist auch  $g$  eigentlich.*

3.11.6. Landet  $f$  in einem Punkt, so spezialisiert dieses Lemma zu der aus 3.3 bekannten Aussage, daß stetige Bilder von Kompakta in Hausdorffräumen abgeschlossen sind.

*Beweis.* Seien  $g : Z \rightarrow X$  und  $f : X \rightarrow Y$ . Wir betrachten zum Morphismus  $g$  das in  $\text{Top}_Y$  kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Z \times_Y X & \longrightarrow & X \times_Y X \end{array}$$

aus ?? und sehen, daß mit der diagonalen Einbettung  $X \hookrightarrow X \times_Y X$  auch die Abbildung  $(\text{id}, g) : Z \rightarrow Z \times_Y X$  eine abgeschlossene Einbettung ist. Der Morphismus  $g$  ergibt sich als deren Verknüpfung mit dem eigentlichen Morphismus  $Z \times_Y X \rightarrow X$ .  $\square$

**Lemma 3.11.7.** *Eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen ist eigentlich genau dann, wenn das Urbild jedes Kompaktums kompakt ist.*

*Beweis.* Daß Urbilder von Kompakta unter eigentlichen Abbildungen stets kompakt sind, haben wir bereits in 3.10.6 gesehen. Daß eine stetige Abbildung von kompakten Hausdorffräumen eigentlich ist, folgt aus 3.11.5 und 3.10.3. Das Lemma folgt damit aus 3.10.4 und 3.10.6.  $\square$

## 4 Mannigfaltigkeiten und Liegruppen

In diesem Abschnitt geht es um abstrakte, d.h. nicht notwendig eingebettete differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ich definiere sie als spezielle geringte Räume mit dem Hintergedanken, daß man mit diesem Formalismus auch ihre algebraischen Verwandten, die algebraischen Varietäten, effizient behandeln kann. Ich denke aber davon abgesehen auch, daß dieser Zugang nicht weniger anschaulich und technisch wenn nicht einfacher, so doch eleganter ist als die übliche Vorgehensweise: In der Tat sind in dieser Sprache Untermannigfaltigkeiten gerade die Teilmengen, die mit der induzierten Struktur eines geringten Raums zu Mannigfaltigkeiten werden, und die finale Struktur eines geringten Raums auf Quotienten liefert unmittelbar die Struktur besagter Quotienten als Mannigfaltigkeit mitsamt der zugehörigen universellen Eigenschaft. Der folgende Abschnitt taucht als identische Kopie auch in ?? bei der Einführung algebraischer Varietäten auf.

### 4.1 Geringte Räume

**Definition 4.1.1.** Sei  $k$  ein Kring. Unter einer  $k$ -**Ringalgebra** verstehen wir ein Paar  $(R, \varphi)$  bestehend aus einem Ring  $R$  und einem Ringhomomorphismus  $\varphi : k \rightarrow R$ , dessen Bild im Zentrum von  $R$  liegt und der meist vom Leser erraten werden muß. Von einer  $k$ -Teilringalgebra fordern wir, daß sie das Bild dieses ausgezeichneten Ringhomomorphismus umfassen soll. In ?? hatten wir derartige Strukturen im Fall eines Körpers  $k$  bereits kennengelernt.

**Definition 4.1.2.** Sei  $k$  ein Kring. Ein  $k$ -**geringter Raum**  $X = (X, \mathcal{O})$  ist ein topologischer Raum  $X$  mitsamt einer Vorschrift  $\mathcal{O}$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  eine  $k$ -Teilringalgebra  $\mathcal{O}(U) \subset \text{Ens}(U, k)$  in der  $k$ -Ringalgebra aller Abbildungen von  $U$  nach  $k$  zuordnet, deren Elemente **reguläre Funktionen auf  $U$**  heißen und von denen wir fordern:

Ist  $\mathcal{U}$  ein System offener Teilmengen von  $X$  und  $V := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  seine Vereinigung, so ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow k$  regulär genau dann, wenn ihre Restriktionen auf alle  $U \in \mathcal{U}$  regulär sind.

4.1.3. Unter anderem impliziert unsere Definition, daß alle konstanten Funktionen regulär sind, d.h. daß für jedes  $U \subseteq X$  die konstanten Abbildungen von  $U$  nach  $k$  in  $\mathcal{O}(U)$  liegen: Eine Teilringalgebra muß nämlich nach unseren Definitionen stets das Einselement der ursprünglichen Ringalgebra enthalten.

*Ergänzung 4.1.4.* In der Sprache der Garbentheorie, die ich hier noch vermeiden will, würde man  $\mathcal{O}$  als eine  $k$ -Ringalgebren-Untergarbe der  $k$ -Ringalgebren-Garbe aller  $k$ -wertigen Funktionen bezeichnen. Im Zusammenhang mit

Schemata und Supermannigfaltigkeiten wird eine noch allgemeinere Definition des Konzepts eines geringten Raums benötigt. Wenn wir betonen wollen, daß wir den hier erklärten einfacheren Begriff meinen, reden wir genauer von einem **durch Funktionen  $k$ -geringten Raum**.

*Beispiel 4.1.5.* Erste Beispiele sind die  $\mathbb{R}$ -geringten Räume  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$ , die entstehen, wenn wir  $\mathbb{R}^n$  mit seiner natürlichen Topologie versehen und als reguläre Funktionen auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  alle stetig differenzierbaren Funktionen nehmen.

**Definition 4.1.6.** Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  zwei  $k$ -geringte Räume. Eine Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  heißt ein **Morphismus von  $k$ -geringten Räumen** genau dann, wenn sie stetig ist und wenn das Davorschalten unserer Abbildung reguläre Funktionen zu regulären Funktionen macht, wenn also in Formeln aus  $U \subseteq Y$  und  $f \in \mathcal{O}_Y(U)$  folgt  $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ . Die Menge aller Morphismen von  $X$  nach  $Y$  bezeichnen wir mit  $\text{Ger}_k(X, Y)$  oder auch kurz  $\text{Ger}(X, Y)$ . Ein **Isomorphismus von  $k$ -geringten Räumen** ist ein bijektiver Morphismus, dessen Umkehrabbildung auch ein Morphismus ist.

*Beispiel 4.1.7.* Morphismen  $\mathbb{R}$ -geringter Räume von  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$  nach  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{C}^1)$  sind genau die  $\mathcal{C}^1$ -Abbildungen. In der Tat ist jede  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung offensichtlich ein Morphismus, und umgekehrt sind für jeden Morphismus  $\varphi$  die  $\varphi_j := x_j \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq m$  notwendig  $\mathcal{C}^1$ -Funktionen, als da heißt, jeder Morphismus ist auch umgekehrt eine  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung.

4.1.8. Sind auf ein und derselben Menge  $X$  mehrere Strukturen als  $k$ -geringter Raum gegeben, so bilden wir ihren Schnitt, indem wir diejenigen Mengen offen nennen, die in jeder unserer Strukturen offen sind, und diejenigen Funktion regulär, die in jeder unserer Strukturen regulär sind. Dieser Schnitt ist dann offensichtlich auch eine Struktur als  $k$ -geringter Raum auf  $X$ .

4.1.9. Gegeben zwei Strukturen als  $k$ -geringter Raum auf derselben Menge  $X$  nennen wir die eine **größergleich** als die andere genau dann, wenn die Identität ein Morphismus von  $X$  mit dieser Struktur in  $X$  mit der anderen Struktur ist. Salopp gesprochen sind also größere Strukturen solche "mit mehr offenen Mengen oder mehr regulären Funktionen oder beidem". Auf diese Weise erhalten wir eine partielle Ordnung auf der Menge aller Strukturen als  $k$ -geringter Raum auf einer vorgegebenen Menge  $X$ .

**Definition 4.1.10.** Seien  $X$  eine Menge,  $Y_i$  beliebige  $k$ -geringte Räume indiziert durch  $i \in I$  und  $\varphi_i : Y_i \rightarrow X$  Abbildungen. Die größte Struktur eines  $k$ -geringten Raums auf  $X$ , für die alle  $\varphi_i$  Morphismen werden, heißt die **finale Struktur auf  $X$**  in Bezug auf unsere Familie von Abbildungen.

4.1.11. Wir müssen zeigen, daß solch eine größte Struktur auch tatsächlich existiert. Dazu geben wir sie einfach explizit an: Als Topologie nehmen wir die Finaltopologie,  $U \subset X$  ist also offen genau dann, wenn seine Urbilder  $\varphi_i^{-1}(U)$  offen sind in  $Y_i$  für alle  $i \in I$ . Als reguläre Funktionen auf  $U \subseteq X$  nehmen wir dann alle Funktionen  $f : U \rightarrow k$  derart, daß  $f \circ \varphi_i$  regulär ist auf  $\varphi_i^{-1}(U)$  für alle  $i \in I$ . Es scheint mir nun klar, daß das eine Struktur als  $k$ -geringter Raum auf  $X$  mit den geforderten Eigenschaften ist, und dann ist es sicher auch die größte derartige Struktur.

**Definition 4.1.12.** Ist  $\psi : Y \rightarrow X$  ein Morphismus von  $k$ -geringten Räumen und trägt  $X$  die finale Struktur, so nennen wir  $\psi$  **final**.

*Übung 4.1.13.* Für  $m \leq n$  ist die Projektion auf die ersten Koordinaten  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  final in Bezug auf die in 4.1.5 erklärten  $\mathcal{C}^1$ -Strukturen  $\mathbb{R}$ -geringter Räume.

**Satz 4.1.14 (Universelle Eigenschaft der finalen Struktur).** Seien  $\varphi_i : Y_i \rightarrow X$  wie in 4.1.10. Versehen wir  $X$  mit der finalen Struktur, so ist eine Abbildung  $\psi : X \rightarrow Z$  in einen weiteren  $k$ -geringten Raum  $Z$  ein Morphismus genau dann, wenn alle  $\psi \circ \varphi_i : Y_i \rightarrow Z$  Morphismen sind.

*Beweis.* Das folgt direkt aus unserer expliziten Beschreibung der finalen Struktur in 4.1.11.  $\square$

*Übung 4.1.15 (Transitivität finaler Familien).* Seien  $g_{ij} : Z_{ij} \rightarrow Y_i$  und  $f_i : Y_i \rightarrow X$  Familien von  $k$ -geringten Räumen und Morphismen. Tragen die  $Y_i$  die finalen Strukturen für die  $g_{ij}$  und trägt  $X$  die finale Struktur für die  $f_i$ , so trägt  $X$  auch die finale Struktur für die  $f_i g_{ij}$ . Trägt andererseits  $X$  die finale Struktur bezüglich der  $f_i g_{ij}$ , so trägt  $X$  auch die finale Struktur bezüglich der  $f_i$ .

4.1.16. Ein Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  von  $k$ -geringten Räumen heißt **final** genau dann, wenn  $X$  die finale Struktur in Bezug auf die einelementige Familie  $f$  trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem  $k$ -geringten Raum stets final.

4.1.17. Übung 4.1.15 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen stets final ist, und daß die Verknüpfung  $f \circ g$  von zwei Morphismen nur dann final sein kann, wenn  $f$  final ist. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, d.h. für den es einen Morphismus  $s$  gibt mit  $f \circ s = \text{id}$ .

4.1.18. Gegeben eine Familie  $k$ -geringter Räume  $(Y_i)$  versehen wir ihre disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup Y_i$  mit der finalen Struktur bezüglich der Inklusionen, wenn nichts anderes gesagt wird.

**Definition 4.1.19.** Seien  $Y$  eine Menge,  $X_i$  beliebige  $k$ -geringte Räume indiziert durch  $i \in I$  und  $\psi_i : Y \rightarrow X_i$  Abbildungen. Die kleinste Struktur eines  $k$ -geringten Raums auf  $Y$ , für die alle unsere  $\psi_i$  Morphismen werden, heißt die **initiale Struktur auf  $Y$**  in Bezug auf unsere Familie von Abbildungen.

4.1.20. Der Schnitt aller Strukturen auf  $Y$ , für die alle unsere  $\psi_i$  Morphismen sind, hat sicher auch diese Eigenschaft und ist folglich die kleinste Struktur mit dieser Eigenschaft. Das zeigt, daß solch eine kleinste Struktur tatsächlich existiert. Wir geben eine explizite Beschreibung im Fall einer einelementigen Familie in 4.1.24.

**Satz 4.1.21 (Universelle Eigenschaft der initialen Struktur).** Seien  $\psi_i : Y \rightarrow X_i$  wie in 4.1.19. Versehen wir  $Y$  mit der initialen Struktur und ist  $Z$  ein  $k$ -geringter Raum und  $\varphi : Z \rightarrow Y$  eine Abbildung, so ist  $\varphi$  ein Morphismus genau dann, wenn alle  $\psi_i \circ \varphi : Z \rightarrow X_i$  Morphismen sind.

*Beweis.* Mit  $\varphi$  sind natürlich auch alle  $\psi_i \circ \varphi$  Morphismen. Sind umgekehrt alle  $\psi_i \circ \varphi$  Morphismen, so ist die finale Struktur zu  $\varphi$  auch eine Struktur auf  $Y$ , für die alle  $\psi_i$  Morphismen sind. Folglich umfaßt die finale Struktur zu  $\varphi$  unsere initiale Struktur, und damit ist  $\varphi$  ein Morphismus.  $\square$

*Übung 4.1.22 (Transitivität initialer Familien).* Seien  $h_i : X \rightarrow Y_i$  und  $g_{ji} : Y_i \rightarrow Z_{ji}$  Familien von  $k$ -geringten Räumen und Morphismen. Trägt  $X$  die initiale Struktur für die  $h_i$  und tragen die  $Y_i$  die initialen Strukturen für die  $g_{ji}$ , so trägt  $X$  auch die initiale Struktur für die  $g_{ji}h_i$ . Trägt andererseits  $X$  die initiale Struktur für die  $g_{ji}h_i$ , so trägt  $X$  auch die initiale Struktur bezüglich der  $h_i$ .

*Ergänzung 4.1.23.* Diese Aussagen und ihr Beweis sind ebenso wie die Aussagen zur Transitivität finaler Familien völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen 3.4.31, 3.4.12 im Kontext topologischer Räume. Sie wären noch allgemeiner sinnvoll und richtig für eine beliebige Kategorie mit einem treuen Funktor in die Kategorie der Mengen, ja mit etwas mehr Mühe bei der Formulierung sogar für einen beliebigen treuen Funktor.

4.1.24. Ist  $Y \subset X$  eine Teilmenge eines  $k$ -geringten Raums, so nennen wir die initiale Struktur zur Einbettung die **induzierte Struktur** eines  $k$ -geringten Raums auf  $Y$  und notieren sie  $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ . Explizit kann man die induzierte Struktur beschreiben wie folgt: Als Topologie auf  $Y$  erhält man die von  $X$  induzierte Topologie, und eine Funktion  $g$  auf  $V \subseteq Y$  ist regulär genau dann, wenn es für alle  $y \in V$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  von  $y$  in  $X$  gibt und eine Funktion  $f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $g|_{U \cap V} = f|_{U \cap V}$ . Ganz allgemein nennen wir einen Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  **initial** genau dann, wenn  $Y$  die initiale Struktur trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem  $k$ -geringten Raum stets initial.

4.1.25. Übung 4.1.22 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Morphismen stets initial ist, und daß Verknüpfung  $g \circ h$  von zwei Morphismen nur dann initial sein kann, wenn  $h$  initial ist. Insbesondere ist jeder Morphismus initial, zu dem es einen linksinversen Morphismus gibt.

**Definition 4.1.26.** Ist  $\psi : Y \hookrightarrow X$  ein injektiver Morphismus von  $k$ -geringten Räumen und trägt  $Y$  die initiale Struktur, so nennen wir  $\psi$  eine **Einbettung** von  $k$ -geringten Räumen. In der algebraischen Geometrie ist hierfür auch die Bezeichnung **Immersion** gebräuchlich, in der Differentialgeometrie versteht man jedoch unter einer Immersion meist etwas anderes.

4.1.27. Nach 4.1.25 ist die Verknüpfung von zwei Einbettungen wieder eine Einbettung. Besonders oft werden uns **offene Einbettungen** und **abgeschlossene Einbettungen** begegnen, bei denen zusätzlich gefordert wird, daß sie als Abbildungen topologischer Räume offen bzw. abgeschlossen sind, oder gleichbedeutend, daß ihr Bild offen bzw. abgeschlossen ist.

Übung 4.1.28. Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung eines  $k$ -geringten Raums  $X$ , so trägt  $X$  die finale Struktur in Bezug auf die Einbettungen  $U_i \hookrightarrow X$ . Eine Abbildung  $X \rightarrow Y$  in einen weiteren  $k$ -geringten Raum ist also genau dann ein Morphismus, wenn ihre Restriktionen auf alle  $U_i$  Morphismen sind.

Übung 4.1.29 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von  $k$ -geringten Räumen  $f : Y \rightarrow X$  final, so ist auch für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  die induzierte Abbildung  $f^{-1}(U) \rightarrow U$  final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt  $f : Y \rightarrow X$  ein Morphismus von  $k$ -geringten Räumen und besitzt  $X$  eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  derart, daß  $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$  für alle  $U \in \mathcal{U}$  final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

## 4.2 Mannigfaltigkeiten

**Definition 4.2.1.** Sei  $k$  ein Krings und  $\mathcal{M}$  eine Menge von  $k$ -geringten Räumen. Unter einer **Mannigfaltigkeit mit Modellen  $\mathcal{M}$**  oder kurz einer  **$\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit** verstehen wir einen  $k$ -geringten Hausdorffraum derart, daß jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die als  $k$ -geringter Raum isomorph ist zu einer offenen Teilmenge eines unserer Modelle aus  $\mathcal{M}$ . Ein **Morphismus von Mannigfaltigkeiten** ist ein Morphismus der zugrundeliegenden  $k$ -geringten Räume. Ein **Isomorphismus** ist ein bijektiver Morphismus, dessen Umkehrung auch ein Morphismus ist.

4.2.2. Die meisten Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß der zugrundeliegende topologische Raum "parakompakt" sein soll oder sogar, daß er separabel ist im Sinne von IV.6.3.13, d.h. eine abzählbare Basis der

Topologie besitzt. Alle diese Bedingungen sind jedoch erst später von Belang, ich will sie deshalb lieber im Bedarfsfall jeweils explizit fordern. Ein Beispiel für eine nicht separable Mannigfaltigkeit ist jede überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie, auf der alle Funktionen “regulär” sind. Ein Beispiel für eine nicht parakompakte Mannigfaltigkeit findet man etwa in ??.

*Beispiele 4.2.3.* Die folgende Tabelle liefert die gebräuchlichsten Beispiele. Das Symbol  $\mathcal{C}^p$  für  $p \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\omega\}$  stehe im Fall  $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  für die Struktur von  $\mathbb{R}$ -geringtem Raum, in der genau die  $p$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen regulär sind. Bei  $p = 0$  vereinbaren wir, daß das genau die stetigen Funktionen sein mögen, bei  $p = \infty$  die glatten Funktionen und bei  $p = \omega$  die analytischen Funktionen. Dahingegen steht  $(\mathbb{C}, \mathcal{O}^{\text{an}})$  für den  $\mathbb{C}$ -geringten Raum, für den genau die holomorphen Funktionen regulär sind, und bei  $(\mathbb{C}^d, \mathcal{O}^{\text{an}})$  sind allgemeiner die komplex-analytischen Funktionen gemeint.

Modelle $\mathcal{M}$	Übliche Bezeichnung für $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeiten
$(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^0)$	topologische $d$ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand
$(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)$	$d$ -dimensionale $\mathcal{C}^p$ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand
$(\mathbb{C}, \mathcal{O}^{\text{an}})$	Riemann'sche Flächen
$(\mathbb{C}^d, \mathcal{O}^{\text{an}})_{d \in \mathbb{N}}$	komplex-analytische Mannigfaltigkeiten
$(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)_{d \in \mathbb{N}}$	$\mathcal{C}^p$ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand
$(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)$	$(d + 1)$ -dimensionale $\mathcal{C}^p$ -Mannigfaltigkeiten mit Rand
$((\mathbb{R}_{\leq 0})^d, \mathcal{C}^p)$	$d$ -dimensionale $\mathcal{C}^p$ -Mannigfaltigkeiten mit Ecken

Für Morphismen in den jeweiligen Kategorien schreiben wir auch oft das Symbol für den fraglichen Typ von Funktionen und schreiben also etwa  $\mathcal{O}^{\text{an}}(X, Y)$  für die Menge aller Morphismen von einer Riemann'schen Fläche  $X$  in eine Riemann'sche Fläche  $Y$ .

4.2.4. Eine offene Einbettung von einer offenen Teilmenge eines Modells in eine derartige Mannigfaltigkeit nennen wir eine **Karte**. Ein **Atlas** einer Mannigfaltigkeit ist eine Familie von Karten, deren Bilder die ganze Mannigfaltigkeit überdecken. Nach 4.1.28 trägt eine Mannigfaltigkeit in Bezug auf jeden Atlas die finale Struktur.

*Beispiel 4.2.5.* Die auf den Seiten eines Atlanten abgebildeten Karten identifizieren jeweils einen Teil der Erdoberfläche mit einem Teil der entsprechenden Papierebene, die hinwiederum als Teilmenge eines  $\mathbb{R}^2$  aufgefaßt werden kann. Das motiviert die eben für allgemeine Mannigfaltigkeiten eingeführte

Terminologie.

*Übung 4.2.6.* Gegeben Modelle  $\mathcal{M}$  und eine Menge  $X$  ist eine vorgegebene Familie  $(W_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  mit  $W_\lambda$  offen in Modellen aus  $\mathcal{M}$  und  $\varphi_\lambda : W_\lambda \hookrightarrow X$  jeweils einer Injektion ein Atlas für die Struktur einer  $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit auf  $X$  genau dann, wenn (1) die Finaltopologie auf  $X$  in Bezug auf die  $\varphi_\lambda$  Hausdorff ist, wenn (2) für alle  $\lambda, \mu \in \Lambda$  die Mengen  $W_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}(\varphi_\mu(W_\mu))$  offen sind in  $W_\lambda$  und wenn (3) die **Kartenwechsel**

$$\varphi_{\mu\lambda} : W_{\lambda\mu} \rightarrow W_{\mu\lambda}$$

Morphismen von geringten Räumen sind. Wegen  $\varphi_{\lambda\mu} \circ \varphi_{\mu\lambda} = \text{id}$  sind sie dann sogar Isomorphismen.

4.2.7. Wir konzentrieren uns im folgenden auf den Fall von  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand und nennen sie **glatte Mannigfaltigkeiten**.

*Ergänzung 4.2.8.* Gegeben  $p \geq q$  scheint es mir klar, daß man jede  $\mathcal{C}^p$ -Mannigfaltigkeit auf genau eine Weise so mit der Struktur einer  $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit versehen kann, daß Karten Karten bleiben. Für diejenigen Leser, die mit der Sprache der Kategorien und Funktoren vertraut sind, will ich das auch noch in voller Allgemeinheit formulieren: Gegeben zwei Mengen von Modellen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  und ein Funktor  $F$  von der Kategorie aller offenen Teilmengen von Modellen aus  $\mathcal{M}$  in die Kategorie der  $\mathcal{M}'$ -Mannigfaltigkeiten, der die zugrundeliegende Menge nicht ändert und die Struktur als geringter Raum höchstens vergrößert im Sinne von 4.1.9, erhalten wir ganz allgemein einen Funktor

$$F : \mathcal{M}\text{-Mannigfaltigkeiten} \rightarrow \mathcal{M}'\text{-Mannigfaltigkeiten}$$

der dadurch charakterisiert werden kann, daß er die zugrundeliegende Menge nicht ändert und daß für jede Karte  $U \rightarrow X$  der ursprünglichen  $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit  $FU \rightarrow FX$  eine offene Einbettung in die neu konstruierte  $\mathcal{M}'$ -Mannigfaltigkeit ist. Zum Beispiel können wir so jede Riemann'sche Fläche als eine zweidimensionale reelle  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit auffassen.

**Lemma 4.2.9 (Projektive Räume als glatte Mannigfaltigkeiten).** *Die projektiven Räume  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  werden mit der finalen Struktur zur von  $\mathbb{K}^{n+1}$  induzierten  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$  glatte Mannigfaltigkeiten.*

4.2.10. Dasselbe gilt für die reell-analytischen und im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  auch für die komplex-analytischen Strukturen. Im Fall  $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$  kann man die Struktur als Riemann'sche Fläche alternativ erklären als die finale Struktur zu den beiden Abbildungen  $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$  gegeben durch  $z \mapsto \langle z, 1 \rangle$  und  $z \mapsto \langle 1, z \rangle$ . Das ist insofern einfacher, als diese Beschreibung ohne den Begriff komplexanalytischer Funktionen in mehreren Veränderlichen auskommt.



Eine Mannigfaltigkeit mit zwei Karten und dem zugehörigen Kartenwechsel



Illustration zum Beweis von [4.2.9](#)

*Beweis.* Wir wissen nach 3.9.2 bereits, daß unsere Räume Hausdorff sind. Somit müssen wir nur noch um jeden Punkt eine Karte finden. Sei dazu  $v \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$  ein Repräsentant unseres Punktes,  $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$  eine lineare Hyperebene mit  $v \notin H$  und  $U \subseteq \mathbb{P}^n \mathbb{K}$  die Menge aller nicht in  $H$  enthaltenen Geraden. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} w & \in & \mathbb{K}^{n+1} \setminus H \rightarrow U \\ \downarrow & & \downarrow \parallel \\ (w\mathbb{K}) \cap (v + H) & \in & (v + H) \rightarrow U \end{array}$$

ist dann die obere Horizontale final nach 4.1.29 und die linke Vertikale glatt, wie man durch explizite Rechnung prüft. Damit ist dann auch die untere Horizontale final nach 4.1.17 und als bijektive finale Abbildung muß sie ein Homöomorphismus sein.  $\square$

*Ergänzende Übung 4.2.11.* Man konstruiere einen Diffeomorphismus  $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{P}^3 \mathbb{R}$  von glatten Mannigfaltigkeiten. Hinweis: Man betrachte geeignete finale Morphismen von  $S^3$  auf beide Seiten. Hierzu mag die in 1.8.2 diskutierte Spingruppe helfen.

**Proposition 4.2.12 (über Untermannigfaltigkeiten).** *Für eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Teilmenge ist eine  $d$ -dimensionale  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit im Sinne der Definition IV.4.3.2, ist also lokal  $\mathcal{C}^1$ -plättbar.*
2. *Unsere Teilmenge ist mit ihrer von  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$  induzierten Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums eine  $d$ -Mannigfaltigkeit im Sinne der vorstehenden Definition 4.2.1.*

4.2.13. Analoges gilt mit demselben Beweis auch für  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit  $0 \leq k \leq \infty$  und für Mannigfaltigkeiten mit Ecken.

*Beweis.* Die einzige Richtung, die einen Beweis verdient, ist  $2 \Rightarrow 1$ . Wir geben dazu unserer Teilmenge den Namen  $M$ . Ist  $M$  mit seiner induzierten Struktur eine  $d$ -Mannigfaltigkeit im Sinne von 4.2.1, so gibt es insbesondere für jeden Punkt  $p \in M$  einen Isomorphismus von geringten Räumen

$$\varphi : W \rightarrow \varphi(W) \subseteq M$$

mit  $p \in \varphi(W)$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^k$ . Proposition IV.4.3.14 zeigt dann, daß  $M$  eine eingebettete Mannigfaltigkeit ist, wenn wir nur zeigen können, daß  $\varphi$  als Abbildung in den  $\mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar ist mit injektivem Differential

an jeder Stelle von  $W$ . Daß hier  $\varphi$  stetig differenzierbar ist, folgt aus einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 4.1.7: Auch für  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  sind die Morphismen von  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen  $(W, \mathcal{C}^1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$  genau die stetig differenzierbaren Abbildungen  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Daß sein Differential überall injektiv ist, erkennt man, indem man die Koordinatenfunktionen  $x_1, \dots, x_d$  auf  $W$  als Funktionen auf  $\varphi(W)$  betrachtet. Nach Definition der induzierten Struktur lassen sich alle diese Koordinatenfunktionen stetig differenzierbar auf eine offene Umgebung von  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  ausdehnen. Ist  $q \in W$  der Punkt mit  $\varphi(q) = p$ , so sind die Bilder unter  $d_q\varphi$  der Standardbasis des  $\mathbb{R}^d$  gewisse Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  derart, daß die Richtungsableitungen in Richtung dieser Vektoren unserer Ausdehnungen  $f_1, \dots, f_d$  jeweils Eins sind auf der Ausdehnung der entsprechenden Koordinate und Null auf den Ausdehnungen aller anderen Koordinaten, in Formeln

$$((d_q\varphi)\partial_i)(f_j) = (\partial_i(f_j \circ \varphi))(q) = (\partial_i(x_j))(q) = \delta_{ij}$$

Das zeigt die Injektivität des Differentials.  $\square$

**Proposition 4.2.14 (Produkt von Mannigfaltigkeiten).** *Gegeben zwei glatte Mannigfaltigkeiten  $M, N$  kann ihr Produkt*

$$M \times N$$

*auf genau eine Weise mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen werden derart, daß eine Abbildung  $f : X \rightarrow M \times N$  von einer glatten Mannigfaltigkeit in unser Produkt glatt ist genau dann, wenn  $\text{pr}_1 \circ f$  und  $\text{pr}_2 \circ f$  es sind.*

4.2.15. Versehen mit dieser Struktur nennen wir  $M \times N$  das **Produkt** der glatten Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ . Das ist per definitionem dann auch das Produkt in der Kategorie der Mannigfaltigkeiten im Sinne der Kategorientheorie ???. Der Beweis zeigt im übrigen, daß die Produktmannigfaltigkeit die Produkttopologie trägt. Das Produkt von  $\mathbb{R}^m$  mit  $\mathbb{R}^n$  ist offensichtlich  $\mathbb{R}^{m+n}$  mit seiner üblichen Struktur als glatte Mannigfaltigkeit. Die Proposition gilt analog auch für unsere anderen Typen von Mannigfaltigkeiten, sogar für solche mit Ecken, mit Ausnahme des Falls von "Mannigfaltigkeiten mit Rand". Betrachten wir speziell für  $f$  die Identität auf  $M \times N$ , so erkennen wir, daß die Projektionen eines Produkts auf seine Faktoren glatt sind.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist klar. Die Existenz zeigen wir, indem wir  $M \times N$  mit der finalen Struktur in Bezug auf alle Abbildungen

$$(\varphi \times \psi) : V \times W \rightarrow M \times N$$

versehen, für  $\varphi : V \rightarrow M$  und  $\psi : W \rightarrow N$  Karten von  $M$  bzw. von  $N$ . Ist  $M$  eine  $m$ -Mannigfaltigkeit und  $N$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit, so haben wir hier  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  und denken uns  $V \times W \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$  versehen mit seiner von  $(\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{C}^\infty)$  induzierten Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums. Aus der Beschreibung 4.2.6 einer Mannigfaltigkeit durch einen verträglichen Atlas folgt, daß  $M \times N$  mit dieser Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums in der Tat eine glatte Mannigfaltigkeit wird, die die gewünschten Eigenschaften hat.  $\square$

4.2.16. Jedes Produkt von Einbettungen ist wieder eine Einbettung. Sind also in Formeln  $X \hookrightarrow M$  und  $Y \hookrightarrow N$  Einbettungen von glatten Mannigfaltigkeiten, so ist auch  $X \times Y \hookrightarrow M \times N$  ein Einbettung. Das folgert man mühelos aus den universellen Eigenschaften.

**Definition 4.2.17.** Eine **Liegruppe** ist eine Gruppe  $G$  mit einer Struktur als glatte Mannigfaltigkeit derart, daß die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$  und die Inversenbildung  $G \rightarrow G$  beide glatt sind und daß der zugrundeliegende topologische Raum separabel ist.

4.2.18. Die vorhergehende Bemerkung 4.2.16 zeigt, daß unsere Matrix-Liegruppen aus 1.2.3 auch tatsächlich Liegruppen in diesem abstrakten Sinne sind. Die Separabilität wird insbesondere bei der Diskussion homogener Räume wichtig werden und vereinfacht auch die Diskussion von Maß und Integral auf unseren Gruppen wesentlich, ohne dabei interessante Anwendungen auszuschließen.

*Übung 4.2.19.* Gegeben zwei Liegruppen  $G, H$  ist auch ihr Produkt  $G \times H$  mit der komponentenweisen Verknüpfung eine Liegruppe.

*Übung 4.2.20.* Die Quotientengruppe  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  wird mit der finalen Struktur zur kanonischen Projektion eine Liegruppe, die isomorph ist zu  $(S^1)^n$ .

### 4.3 Tangentialräume

**Definition 4.3.1.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein  $k$ -geringter Raum und  $x \in X$  ein Punkt. Die  $k$ -Ringalgebra  $\mathcal{O}_{X,x}$  aller **Keime regulärer Funktionen bei  $x$**  ist definiert durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{(U, f) \mid U \text{ offene Umgebung von } x \text{ und } f \in \mathcal{O}(U) \text{ regulär}\} / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  dadurch erklärt wird, daß gilt  $(U, f) \sim (V, g)$  genau dann, wenn die Funktionen  $f$  und  $g$  auf einer hinreichend kleinen in  $U \cap V$  enthaltenen Umgebung  $W$  von  $x$  übereinstimmen. Für jeden Homomorphismus  $k$ -geringter Räume  $\varphi : X \rightarrow Y$  induziert das Zurückholen von Funktionen  $k$ -lineare Ringhomomorphismen

$$(\circ\varphi) : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

auf den Funktionskeimen in der Gegenrichtung, und für offene Einbettungen sind diese Homomorphismen offensichtlich Isomorphismen.

4.3.2. Ist  $E$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $X \subseteq E$  eine offene Teilmenge,  $x \in X$  ein Punkt und  $v \in \vec{E}$  ein Richtungsvektor, so liefert das Bilden der Richtungsableitung bei  $x$  in Richtung  $v$  im Sinne von IV.1.2.3 eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} D_v : \mathcal{O}_{X,x} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto (D_v f)(x) \end{aligned}$$

und die Zuordnung  $v \mapsto D_v$  liefert eine lineare Injektion  $\vec{E} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}^*$  des Richtungsraums von  $E$  in den Dualraum des Raums der Funktionskeime. Ist  $F$  ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum,  $Y \subseteq F$  eine offene Teilmenge und  $\varphi : X \rightarrow Y$  glatt, so kommutiert mit diesen Einbettungen in den Vertikalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \vec{E} & \xrightarrow{d_x \varphi} & \vec{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{X,x}^* & \xrightarrow{(\circ \varphi)^\top} & \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}^* \end{array}$$

In der Tat gilt für jede glatte Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $\varphi(x)$  und den Vektor  $w = (d_x \varphi)v$  die Identität  $(D_w f)(\varphi(x)) = (D_v (f \circ \varphi))(x)$ : Wir können sie nämlich umschreiben zur Identität  $(d_{\varphi(x)} f \circ d_x \varphi)(v) = (d_x (f \circ \varphi))(v)$ , und diese folgt aus der Kettenregel IV.1.3.1.

**Definition 4.3.3.** Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $x \in X$  ein Punkt. Der **Tangentialraum an  $X$  im Punkt  $x$**  ist der Untervektorraum

$$T_x X \subset \mathcal{O}_{X,x}^*$$

derjenigen Linearformen  $\partial : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Raum der Funktionskeime an besagtem Punkt, die unter einer und damit nach 4.3.2 gleichbedeutend jeder Karte um  $x$  einer Richtungsableitung entsprechen. Ein Element des Tangentialraums heißt auch ein **Tangentialvektor an  $X$  im Punkt  $x$** . Gegeben solch ein Tangentialvektor  $\partial = v \in T_x X$  schreiben wir, wenn wir ihn auf eine Funktion  $f$  anwenden wollen, für die entsprechende Linearform statt  $v$  manchmal auch  $D_v$  und nennen  $D_v f$  die **Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$** .

4.3.4. Offensichtlich hat der Tangentialraum an jeder Stelle dieselbe Dimension wie die Mannigfaltigkeit. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum

$E$  und eine offene Teilmenge  $X \subseteq E$  liefert für jeden Punkt  $x \in X$  das Bilden der Richtungsableitung einen Isomorphismus

$$\text{can} : \vec{E} \xrightarrow{\sim} T_x X$$

Er ist so kanonisch, daß man ihn meist nicht explizit notiert.

**Definition 4.3.5.** Ist  $\varphi : X \rightarrow Y$  ein glatter Morphismus glatter Mannigfaltigkeiten, so definiert für jeden Punkt  $x \in X$  das Transponieren des Zurückholens von Funktionskeimen  $(\circ\varphi) : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung auf den Tangentialräumen, das **Differential von  $\varphi$  bei  $x$** , das wir notieren als

$$d_x \varphi : T_x X \rightarrow T_{\varphi(x)} Y$$

In der Tat dürfen wir, um das einzusehen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $X$  bzw.  $Y$  offene Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume  $E$  bzw.  $F$  sind, und diesen Fall haben wir bereits in 4.3.2 erledigt.

*Übung 4.3.6 (Der Tangentialraum als Funktor).* Gegeben glatte Morphismen von glatten Mannigfaltigkeiten  $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$  gilt für alle  $x \in X$  die **Kettenregel**

$$d_x(\psi \circ \varphi) = (d_{\varphi(x)} \psi) \circ (d_x \varphi)$$

Sie ist in diesem Zusammenhang als Gleichheit von linearen Abbildungen  $T_x X \rightarrow T_{\psi(\varphi(x))} Z$  zu verstehen. Weiter gilt  $d_x(\text{id}) = \text{id} : T_x X \rightarrow T_x X$ . Wie in 4.3.11 ausgeführt wird, ist also der Tangentialraum ein Funktor von der Kategorie der punktierten  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der reellen Vektorräume.

4.3.7. Das Differential einer konstanten Abbildung ist an jedem Punkt Null. In der Tat faktorisiert eine konstante Abbildung über eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit, und deren Tangentialräume sind eben Null. Die Kettenregel liefert dann die Behauptung.

*Übung 4.3.8.* Gegeben eine glatte reellwertige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Mannigfaltigkeit und ein Punkt  $x \in X$  und ein Tangentialvektor  $v \in T_x X$  haben wir

$$D_v f = \text{can}^{-1}((d_x f)(v))$$

für  $\text{can} : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} T_{f(x)} \mathbb{R}$  die kanonische Identifikation aus 4.3.4. Meist wird diese kanonische Identifikation nicht explizit notiert und man schreibt kurzerhand  $D_v f = (d_x f)(v)$ . Durch diese Formel erklären wir dann auch allgemeiner die **Richtungsableitung**  $D_v f$  einer glatten Funktion  $f : X \rightarrow W$  mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $W$ . Diese Richtungsableitung ist dann ein Vektor  $D_v f := (d_x f)(v) \in W$ .

4.3.9. In IV.7.3.1 hatten wir den Tangentialraum an eine in einen endlichdimensionalen reellen Raum  $E$  eingebettete Mannigfaltigkeit  $X$  in einem Punkt  $x \in X$  definiert als einen geeigneten Untervektorraum von  $\vec{E}$ , der dort  $T_x X$  hieß und den ich in dieser Bemerkung der Klarheit halber mit  $T_x^c X \subset \vec{E}$  bezeichnen will. Dieser Untervektorraum  $T_x^c X$  kann mit dem in 4.3.3 erklärten abstrakten Tangentialraum  $T_x X$  identifiziert werden vermittels der Verknüpfung  $T_x X \rightarrow T_x E \xrightarrow{\sim} \vec{E}$  des Differential der Einbettung mit dem Inversen der kanonischen Identifikation aus 4.3.4, wie der Leser selbst prüfen mag.

4.3.10. Das Differential einer offenen Einbettung  $\varphi : Y \rightarrow X$  ist in jedem Punkt  $x \in Y$  ein Isomorphismus  $d_x \varphi : T_x Y \xrightarrow{\sim} T_x X$ .

*Ergänzung* 4.3.11. Unsere Definition des Tangentialraums mag künstlich wirken, und sie ist es auch. Ich skizziere deshalb noch eine in meinen Augen natürlichere Beschreibung im Rahmen der Kategorientheorie. Bezeichne  $\mathcal{C}^1$ -Mgf die Kategorie der  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten und  $\mathcal{C}^1$ -Mgf\* die Kategorie der punktierten  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten. Morphismen sind diejenigen  $\mathcal{C}^1$ -Abbildungen, die den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführen. Ein Funktor von  $\mathcal{C}^1$ -Mgf\* in eine weitere Kategorie heiße **lokal** genau dann, wenn er alle offenen Einbettungen zu Isomorphismen macht. Sei schließlich

$$i : \mathcal{C}^1\text{-Mgf}_{\text{aff}}^* \hookrightarrow \mathcal{C}^1\text{-Mgf}^*$$

die volle Unterkategorie, deren Objekte punktierte offene Teilmengen endlichdimensionaler affiner Räume sind, und  $i$  der Einbettungsfunktor. Ein **Tangentialraumfunktor** ist dann ein Paar  $(T, \Phi)$  bestehend aus einem lokalen Funktor

$$\begin{array}{ccc} T : \mathcal{C}^1\text{-Mgf}^* & \rightarrow & \mathbb{R}\text{-Mod} \\ (X, x) & \mapsto & T_x X \\ \varphi \downarrow & \mapsto & d_x \varphi \downarrow \\ (Y, y) & \mapsto & T_y Y \end{array}$$

mitsamt einer Isotransformation  $\Phi : T \circ i \xrightarrow{\sim} \text{Diff}$  zwischen seiner Restriktion  $T \circ i$  auf  $\mathcal{C}^1\text{-Mgf}_{\text{aff}}^*$  und dem **Differentialfunktor**  $\text{Diff} : \mathcal{C}^1\text{-Mgf}_{\text{aff}}^* \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$ . Dieser Differentialfunktor hinwiederum ist dabei dadurch erklärt, daß er jeder punktierten offenen Teilmenge  $x \in U \subseteq E$  eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums  $E$  den Richtungsraum  $\vec{E}$  zuordnet und jeder stetig differenzierbaren Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  mit  $\varphi(x) = y$  für  $y \in V \subseteq F$  die lineare



Zwei glatte injektive Immersionen mit demselben Bild, die besagtes Bild in zwei verschiedenen Weisen mit der Struktur einer Untermannigfaltigkeit im Sinne von Warner versehen.

Abbildung  $d_x\varphi : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ , zusammengefaßt

$$\begin{array}{ccc} \text{Diff} : & \mathcal{C}^1\text{-Mgf}_{\text{aff}}^* & \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod} \\ & (x \in U \subseteq E) & \mapsto \vec{E} \\ & \varphi \downarrow & \mapsto d_x\varphi \downarrow \\ & (y \in V \subseteq F) & \mapsto \vec{F} \end{array}$$

In nochmal anderen Worten fordern wir also von unserem Paar  $(T, \Phi)$ , daß es das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1\text{-Mgf}_{\text{aff}}^* & \xrightarrow{\text{Diff}} & \mathbb{R}\text{-Mod} \\ \downarrow i & \searrow \Phi & \parallel \\ \mathcal{C}^1\text{-Mgf}^* & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}\text{-Mod} \end{array}$$

$\sim$

zum Kommutieren bringt in dem Sinne, daß der Doppelpfeil eine Isotransformation ist zwischen den beiden Verknüpfungen der Funktoren auf den Kanten unseres Quadrats. Es ist leicht zu sehen, daß solch ein Tangentialraumfunktors im wesentlichen eindeutig bestimmt ist. Ist genauer  $(T', \Phi')$  ein weiterer Tangentialraumfunktors, so existiert genau eine Transformation  $C : T \Rightarrow T'$  derart, daß das Diagramm von Transformationen

$$\begin{array}{ccc} Ti & \xrightarrow{Ci} & T'i \\ \Phi \uparrow \wr & & \wr \uparrow \Phi' \\ \text{Diff} & \xlongequal{\quad} & \text{Diff} \end{array}$$

kommutiert, und dies  $C$  ist auch stets eine Isotransformation. Das alles ist leicht zu prüfen. Es kann auch formal aus ?? gefolgert werden, aber dieser Zugang illustriert eher die Trivialität der dabei verwendeten Resultate der Kategorientheorie, als daß er hier Substantielles beitragen könnte.

*Ergänzung 4.3.12.* Im Vorhergehenden haben wir schlicht ein mögliches Paar  $(T, \Phi)$  explizit konstruiert, und zwar den Funktor  $T$  auf Objekten in 4.3.3, den Funktor  $T$  auf Morphismen in 4.3.5, und die Isotransformation  $\Phi$  in 4.3.4. Die von einem Funktor ganz allgemein geforderten Eigenschaften haben Sie für dieses  $T$  in Übung 4.3.6 geprüft, und die Lokalität dieses Funktors  $T$  haben wir in 4.3.10 erwähnt. Auch andere Konstruktionen sind möglich und üblich. Besonders beliebt ist eine Konstruktion, bei der man  $T_x X$  erklärt als die Menge aller Äquivalenzklassen von  $\mathcal{C}^1$ -Kurven  $\gamma : I \rightarrow X$  mit  $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  und  $\gamma(0) = x$  und der Äquivalenzrelation, daß  $\gamma \sim \kappa$  gleichbedeutend sein soll zu  $(\varphi^{-1}\gamma)'(0) = (\varphi^{-1}\kappa)'(0)$  für jede Karte  $\varphi$  um  $x$ . Ich überlasse es dem Leser zur Übung, diese nur auf dem Niveau der Objekte gegebene Abbildungsvorschrift zu einem Tangentialraumfunktors  $(T, \Phi)$  auszubauen.

*Ergänzung* 4.3.13. Statt mit  $\mathcal{C}^1$ -Mgf<sub>aff</sub><sup>\*</sup> könnten wir in 4.3.11 ebensogut auch mit der noch kleineren Unterkategorie  $\mathcal{C}^1$ -Mgf<sub>koor</sub><sup>\*</sup> arbeiten, deren Objekte punktierte offene Teilmengen  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  sind für  $n \in \mathbb{N}$ . Statt mit dem Differentialfunktorkönnen wir dann noch expliziter mit dem **Jacobi-Funktor**  $\mathcal{C}^1$ -Mgf<sub>koor</sub><sup>\*</sup>  $\rightarrow \mathbb{R}$ -Mod arbeiten, der jeder punktierten offenen Teilmenge  $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  den  $\mathbb{R}^n$  zuordnet und jeder  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  mit  $\varphi(p) = q$  für  $q \in V \subseteq \mathbb{R}^m$  die durch die Jacobimatrix bei  $p$  gegebene lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Dieser Zugang ist zwar in gewisser Weise elementarer, transportiert aber in meinen Augen weniger Anschauung. Deshalb ziehe ich den zuvor erklärten Zugang vor.

4.3.14. Eine glatte Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten heißt eine **Immersion** genau dann, wenn ihr Differential an jeder Stelle injektiv ist. Hier wird nicht gefordert, daß unsere Abbildung ein Homöomorphismus auf ihr Bild sein muß, ja noch nicht einmal, daß sie selbst injektiv sein muß. Manche Quellen, zum Beispiel [War83], verwenden den Begriff einer Untermannigfaltigkeit als Synonym für das, was wir und auch er eine “injektive Immersion” nennen würden. Ich mag die in [War83] verwendete Terminologie nicht, da ein- und dieselbe Teilmenge einer Mannigfaltigkeit im Sinne dieser Terminologie verschiedene Strukturen als Untermannigfaltigkeit tragen kann.

*Übung* 4.3.15. Man bestimme für  $p \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$  den Kern des Differentials bei  $p$  der kanonischen Projektion auf den projektiven Raum  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ .

4.3.16 (**Tangentialraum eines Produkts**). Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten  $X, Y$  und Punkte  $x \in X$  sowie  $y \in Y$  induzieren die Differentiale der Projektionen einen Vektorraumisomorphismus

$$\text{can} = (d_{(x,y)} \text{pr}_1, d_{(x,y)} \text{pr}_2)^\top : T_{(x,y)}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} T_x X \times T_y Y$$

zwischen dem Tangentialraum des Produkts und dem Produkt der Tangentialräume. Die Notation lehnt sich an die in ?? vereinbarten Konventionen an: Vektoren aus direkten Summen werden als Spalten mit Einträgen in den Summanden aufgefaßt und der obere Index  $\top$  in obiger Formel transponiert die gegebene Zeilenmatrix von Homomorphismen zu einer Spaltenmatrix. Der behauptete Isomorphismus folgt sofort aus der expliziten Beschreibung der Produktmannigfaltigkeit durch Karten. Die inverse Abbildung kann entsprechend geschrieben werden als  $\text{can}^{-1} = (d_x(\text{id}_X, y), d_y(x, \text{id}_Y))$ , wobei das  $y$  vorne und das  $x$  hinten jeweils die entsprechenden konstanten Abbildungen meinen.

*Übung 4.3.17.* Eine glatte Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten heißt eine **Submersion** genau dann, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Man zeige, daß jede surjektive Submersion final ist. Man zeige, daß das Produkt von Submersionen eine Submersion ist.

*Übung 4.3.18.* Gegeben Abbildungen  $f : Z \rightarrow X$  und  $g : Z \rightarrow Y$  von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und  $z \in Z$  haben wir

$$\text{can} \circ d_z(f, g) = (d_z f, d_z g) : T_z Z \rightarrow T_x X \times T_y Y$$

*Beispiel 4.3.19.* Gegeben eine Liegruppe  $G$  mit neutralem Element  $e \in G$  und Verknüpfung  $m : G \times G \rightarrow G$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{(e,e)}(G \times G) & \xrightarrow{d_{(e,e)}m} & T_e G \\ \downarrow \text{can} & & \parallel \\ T_e G \times T_e G & \xrightarrow{+} & T_e G \end{array}$$

Salopp gesprochen ist also “das Differential der Verknüpfung die Summe”. Um das zu sehen muß man nur bemerken, daß  $d_{(e,e)}m$  linear ist und daß die Inverse der Vertikale links  $(A, 0)$  abbildet auf  $\text{can}^{-1}(A, 0) = (d_e(\text{id}, e))(A)$ . Nun ist die Verknüpfung

$$G \xrightarrow{(\text{id}, e)} G \times G \xrightarrow{m} G$$

die Identität. Daraus folgt  $(d_{(e,e)}m) \text{can}^{-1}(A, 0) = A$  durch Übergang zu den Differentialen. Ebenso zeigen wir  $(d_{(e,e)}m) \text{can}^{-1}(0, B) = B$  und mittels der Linearität folgt dann wie behauptet

$$(d_{(e,e)}m) \text{can}^{-1}(A, B) = A + B$$

*Beispiel 4.3.20.* Das Differential beim neutralen Element der Inversenabbildung auf einer Liegruppe ist die Multiplikation mit  $(-1)$ , in Formeln

$$(d_e \text{inv})(A) = -A$$

In der Tat ist die Verknüpfung  $G \xrightarrow{(\text{id}, \text{inv})} G \times G \xrightarrow{m} G$  konstant und ihr Differential folglich Null. Andererseits läßt es sich mit der Kettenregel und unter Verwendung des vorhergehenden Beispiels 4.3.19 auch darstellen als die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc} T_e G & \xrightarrow{d_e(\text{id}, \text{inv})} & T_e(G \times G) & \xrightarrow{d_e m} & T_e G \\ \parallel & & \text{can} \downarrow & & \parallel \\ T_e G & \xrightarrow{(\text{id}, d_e \text{inv})} & T_e G \times T_e G & \xrightarrow{+} & T_e G \end{array}$$

Aus der Tatsache, daß diese Verknüpfung Null ist, folgt sofort unsere Behauptung.

4.3.21. Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen und  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\gamma : I \rightarrow X$  eine glatte Abbildung, so definieren wir den **Geschwindigkeitsvektor von  $\gamma$  zum Zeitpunkt  $t$**  als

$$\dot{\gamma}(t) = (d_t\gamma)(1) \in T_{\gamma(t)}X$$

Gemeint ist mit dieser Formel der Wert des Differentials  $d_t\gamma : T_tI \rightarrow T_{\gamma(t)}X$  auf dem Bild von  $1 \in \mathbb{R}$  unter der kanonischen Identifikation  $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} T_tI$ .

**Satz 4.3.22 (Einparameteruntergruppen von Liegruppen).** *Alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine Liegruppe  $G$  sind glatt und wir erhalten eine Bijektion*

$$\{\text{stetige Gruppenhomomorphismen } \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G\} \xrightarrow{\sim} T_eG$$

*indem wir jedem stetigen Gruppenhomomorphismus  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  seine Geschwindigkeit  $\dot{\gamma}(0)$  zum Zeitpunkt Null zuordnen.*

4.3.23. Der Beweis des Satzes braucht einige Vorbereitungen, genauer wird er sich als Konsequenz der präziseren Aussage 4.6.5 ergeben. Zunächst diskutieren wir nun Tangentialbündel und Vektorfelder sowie deren Flüsse auf Mannigfaltigkeiten. Dann konstruieren wir im Satz die Umkehrabbildung, indem wir jeden Tangentialvektor am neutralen Element unserer Liegruppe durch Verschiebung mittels der Linksmultiplikation mit Gruppenelementen zu einem glatten Vektorfeld auf der ganzen Gruppe ausdehnen und diejenigen Integralkurven dieser Vektorfelder betrachten, die zum Zeitpunkt Null durchs neutrale Element laufen. Wir werden in diesem Zusammenhang auch sehen, daß stetige Gruppenhomomorphismen zwischen Liegruppen immer glatt sind.

*Übung 4.3.24.* Sei  $G$  eine Liegruppe. Man bestimme das Differential am neutralen Element der Abbildung  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 4.4 Das Tangentialbündel

**Lemma 4.4.1 (Das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit).** *Gegeben eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  gibt es auf der disjunkten Vereinigung*

$$TX = \bigsqcup_{x \in X} T_xX$$

*ihrer Tangentialräume genau eine Struktur als glatte  $2n$ -Mannigfaltigkeit derart, daß wir für jede Karte  $\varphi : W \hookrightarrow X$  von  $X$  eine Karte von  $TX$  erhalten, indem wir auf  $\hat{W} := W \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  die Abbildung  $\hat{\varphi} : \hat{W} \rightarrow TX$  erklären durch die Vorschrift*

$$\hat{\varphi} : (p, v) \mapsto (d_p\varphi)(v)$$

4.4.2. Die so definierte glatte Mannigfaltigkeit  $TX$  wird in der Folge sogar mit der noch feineren Struktur eines “glatten Vektorraumbündels auf  $X$ ” versehen. Mit dieser Struktur heißt sie dann das **Tangentialbündel** von  $X$ .

*Beweis.* Nach 4.2.6 müssen wir nur zeigen, daß (1) die Finaltopologie in Bezug auf alle unsere  $\hat{\varphi}$  Hausdorff ist und daß (2) die zugehörigen Kartenwechsel glatt sind. (1) sei dem Leser überlassen, (2) erkennt man wie folgt: Sind  $(W_\lambda, \varphi_\lambda)$  und  $(W_\mu, \varphi_\mu)$  Karten von  $X$ , so ist  $\hat{\varphi}_\lambda^{-1}(\hat{\varphi}_\mu(\hat{W}_\mu)) = W_{\lambda\mu} \times \mathbb{R}^n$  offen in  $\hat{W}_\lambda$  und die zugehörigen Kartenwechsel lassen sich in den Notationen von 4.2.6 mithilfe der Kartenwechsel  $\varphi_{\mu\lambda}$  von  $X$  beschreiben durch die Vorschrift  $\hat{\varphi}_{\mu\lambda} : (p, v) \mapsto (\varphi_{\mu\lambda}(p), (d_p\varphi_{\mu\lambda})(v))$  und sind in der Tat Morphismen von geringten Räumen.  $\square$

4.4.3. Im vorhergehenden verwenden wir sowohl das Differential  $d_p\psi : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  im Sinne der Analysis IV.1.2.3 für  $\psi : U \rightarrow V$  eine Abbildung von offenen Teilmengen reeller Räume  $U \subseteq E$  und  $V \subseteq F$ , als auch das Differential  $d_x\varphi : T_xX \rightarrow T_{\varphi(x)}Y$  nach 4.3.5.

*Übung 4.4.4.* Für jede glatte Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von glatten Mannigfaltigkeiten liefern die Differentiale eine glatte Abbildung

$$d\phi : TX \rightarrow TY$$

Ist  $\phi$  eine Einbettung im Sinne von 4.1.26, so auch  $d\phi$ .

*Übung 4.4.5 (Tangentialbündel eines Produkts).* Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten  $X, Y$  liefern die Differentiale der Projektionen des Produkts  $X \times Y$  auf die Faktoren einen Diffeomorphismus  $T(X \times Y) \xrightarrow{\sim} TX \times TY$ .

*Übung 4.4.6 (Tangentialbündel eines affinen Raums).* Gegeben  $E$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $X \subseteq E$  eine offene Teilmenge erhalten wir einen Diffeomorphismus

$$\text{can} : X \times \vec{E} \xrightarrow{\sim} TX$$

durch die Vorschrift, daß jedem Paar  $(x, v)$  dasjenige Element von  $T_xX$  zugeordnet wird, das durch die Richtungsableitung bei  $x$  in Richtung  $v$  gegeben wird, also durch  $f \mapsto (D_v f)(x)$  für alle Funktionskeime  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ . Ist  $F$  ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und  $Y \subseteq F$  eine offene Teilmenge und  $\phi : X \rightarrow Y$  glatt, so kommutiert mit den eben erklärten kanonischen Isomorphismen in den Vertikalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{d\phi} & TY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \vec{E} & \longrightarrow & Y \times \vec{F} \end{array}$$

mit der durch  $(p, v) \mapsto (\phi(p), (d_p\phi)(v))$  gegebenen unteren Horizontalen.

*Übung 4.4.7 (Tangentialbündel eingebetteter Mannigfaltigkeiten).* Ist  $E$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $X \subset E$  eine Untermannigfaltigkeit und bezeichnet  $T^c X \subset X \times \vec{E}$  das Tangentialbündel, wie es speziell für Untermannigfaltigkeiten in IV.7.3.3 erklärt wurde, so liefern unsere Identifikationen  $T_x^c X \xrightarrow{\sim} T_x X$  aus 4.3.9 auch einen Diffeomorphismus

$$T^c X \xrightarrow{\sim} TX$$

mit dem hier in voller Allgemeinheit für abstrakte Mannigfaltigkeiten erklärten Tangentialbündel  $TX$ .

**Definition 4.4.8.** Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

1. Ein “glattes Möchtegern-Bündel von reellen Vektorräumen” oder kurz ein “Möchtegern- $\mathbb{R}$ -Bündel”  $E = (E, p) = (p : E \rightarrow X)$  auf  $X$  ist ein Datum bestehend aus einer glatten Mannigfaltigkeit  $E$ , seinem **Totalraum**, einer glatten Abbildung  $p : E \rightarrow X$ , seiner **Projektion**  $p$ , sowie einer  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur auf jeder Faser  $E_x = p^{-1}(x)$ .
2. Ein **Morphismus** von einem Möchtegern- $\mathbb{R}$ -Bündel  $(E, p)$  in ein weiteres  $(F, q)$  ist eine glatte Abbildung  $h : E \rightarrow F$  mit  $qh = p$  derart, daß für alle  $x \in X$  die auf den Fasern induzierte Abbildung  $h : E_x \rightarrow F_x$  linear ist.
3. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  heißt der Raum  $X \times V$  mit seiner offensichtlichen Struktur als Möchtegern- $\mathbb{R}$ -Bündel das **triviale  $\mathbb{R}$ -Bündel auf  $X$  mit Faser  $V$** .
4. Ein  **$n$ -dimensionales  $\mathbb{R}$ -Bündel auf  $X$**  ist ein Möchtegern- $\mathbb{R}$ -Bündel  $(E, p)$ , bei dem jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt derart, daß das davon auf  $U$  induzierte Möchtegern- $\mathbb{R}$ -Bündel  $(p : p^{-1}(U) \rightarrow U)$  isomorph ist zum trivialen  $\mathbb{R}$ -Bündel  $U \times \mathbb{R}^n$  auf  $U$ . Ein solcher Isomorphismus oder etwas allgemeiner auch ein Isomorphismus mit einem  $\mathbb{R}$ -Bündel der Gestalt  $U \times V$  für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  heißt dann eine **Bündelkarte**. Eine Abbildung  $U \times V \rightarrow E$ , die in diesem Sinne eine Bündelkarte auf ihr Bild liefert, nennen wir kurzerhand auch eine Bündelkarte. Statt von  $\mathbb{R}$ -Bündeln reden wir oft auch ausführlicher von **reellen glatten Vektorraumbündeln** oder noch kürzer **Vektorbündeln** und machen deren Dimension nicht notwendig explizit.

*Übung 4.4.9.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest gewählt. Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $p : E \rightarrow X$  eine Abbildung. Sei weiter eine Familie von Tripeln  $(V_\alpha, U_\alpha, \varphi_\alpha)$  gegeben mit  $V_\alpha$  einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum,  $U_\alpha \subseteq X$  einer offenen Teilmenge und  $\varphi_\alpha : U_\alpha \times V_\alpha \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_\alpha)$  einer Bijektion, die mit den offensichtlichen Projektionen beider Seiten auf  $U_\alpha$  verträglich ist. Nehmen wir zusätzlich an, daß (1) für alle  $\alpha, \beta$  die Verknüpfung

$$\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\alpha \xrightarrow{\sim} (U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\beta$$

ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist und daß (2) die  $U_\alpha$  unsere Mannigfaltigkeit  $X$  überdecken, so gibt es auf  $(E, p)$  genau eine Struktur als Vektorbündel, für die alle unsere  $\varphi_\alpha$  Bündelkarten sind.

*Beispiel 4.4.10.* Wir erinnern daran, daß nach 4.4.1 das Tangentialbündel einer glatten  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  genau eine Struktur als glatte  $2n$ -Mannigfaltigkeit besitzt derart, daß wir für jede Karte  $\varphi : W \hookrightarrow X$  von  $X$  eine Karte von  $TX$  erhalten, indem wir auf  $\hat{W} := W \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  die Abbildung  $\hat{\varphi} : \hat{W} \rightarrow TX$  erklären durch die Vorschrift  $\hat{\varphi} : (x, v) \mapsto (d_x \varphi)(v)$ . Unser Tangentialbündel besitzt nun nach der vorhergehenden Übung sogar genau eine Struktur als glattes Vektorraumbündel derart, daß wir für jede Karte  $\varphi : W \hookrightarrow X$  eine Bündelkarte erhalten durch das Bilden der Komposition

$$\varphi(W) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi^{-1} \times \text{id}} W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\hat{\varphi}} TX$$

*Ergänzung 4.4.11.* Ähnlich wie für den Tangentialraum gibt es auch für das Tangentialbündel verschiedene Konstruktionen. Ich will im folgenden analog zu 4.3.11 in der Sprache der Kategorientheorie formulieren, worauf es wirklich ankommt. Zunächst einmal definieren wir dazu eine Kategorie

Vekb

von Vektorbündeln auf Mannigfaltigkeiten. Objekte sind Paare  $(X, E)$  mit  $X$  einer glatten Mannigfaltigkeit und  $E$  einem endlichdimensionalen glatten reellen Vektorbündel auf  $X$ , Morphismen  $(X, E) \rightarrow (Y, F)$  sind Paare  $(g, \tilde{g})$  mit  $g : X \rightarrow Y$  glatt und  $\tilde{g} : E \rightarrow F$  einer glatten Abbildung, die  $g$  hochhebt in dem Sinne, daß gilt  $\pi_F \circ \tilde{g} = g \circ \pi_E$ , und die lineare Abbildungen  $\tilde{g} : E_x \rightarrow F_{g(x)}$  zwischen den Fasern der Bündelprojektionen induziert. Das Vergessen des Bündels liefert einen Funktor

$$B : \text{Vekb} \rightarrow \text{Mgf}$$

in die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. Wie in 4.3.11 betrachten wir weiter die volle Unterkategorie  $i : \text{Mgf}_{\text{aff}} \hookrightarrow \text{Mgf}$  aller Mannigfaltigkeiten, die

offene Teilmengen endlichdimensionaler reeller affiner Räume sind. Weiter betrachten wir den “Differentialfunktorkomplex”

$$\text{Diff} : \text{Mgf}_{\text{aff}} \rightarrow \text{Vekb}$$

der jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq E$  eines endlichdimensionalen affinen Raums das Vektorbündel  $U \times \vec{E}$  auf  $U$  zuordnet und jeder glatten Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  mit  $V \subseteq F$  den Morphismus

$$\begin{aligned} U \times \vec{E} &\rightarrow V \times \vec{F} \\ (x, \vec{v}) &\mapsto (\varphi(x), d_x(\vec{v})) \end{aligned}$$

Unter einem **Tangentialbündelfunktorkomplex** verstehen wir nun ein Paar  $(T, \Phi)$  bestehend aus einem Funktor  $T : \text{Mgf} \rightarrow \text{Vekb}$  mit  $B \circ T = \text{id}$  und einer Isotransformation  $\Phi : Ti \xrightarrow{\cong} \text{Diff}$  zwischen der Restriktion unseres Funktors auf offene Teilmengen affiner Räume und unserem Differentialfunktorkomplex selbst. Solch ein Paar ist wieder im wesentlichen eindeutig bestimmt in derselben Weise, wie wir das für den Tangentialraumfunktorkomplex in 4.3.11 formuliert hatten, und die vorhergehenden Teile dieses Abschnitts hatten in diesem Licht im wesentlichen den Inhalt, ein mögliches Paar  $(T, \Phi)$  explizit anzugeben.

**Definition 4.4.12.** Gegeben eine Abbildung  $p : Y \rightarrow X$  von Mengen versteht man unter einem **Schnitt** von  $p$  eine Abbildung  $s : X \rightarrow Y$  mit  $p \circ s = \text{id}_X$ . Ein glatter Schnitt eines glatten Vektorraumbündels  $p : E \rightarrow X$  ist insbesondere eine glatte Abbildung  $s : X \rightarrow E$  mit  $p \circ s = \text{id}_X$ . Wir notieren die Menge aller derartigen glatten Schnitte

$$\mathcal{C}_X^1(X, E)$$

Ein Schnitt des Tangentialbündels einer Mannigfaltigkeit heißt ein **Vektorfeld** auf besagter Mannigfaltigkeit.

*Beispiel 4.4.13.* Gegeben ein glattes Vektorraumbündel  $E \rightarrow X$  ist der **Nullschnitt**, der jedem Punkt  $x \in X$  die Null  $0 \in E_x$  in der Faser über  $x$  zuordnet, stets ein glatter Schnitt. Mithilfe von 4.4.6 identifiziert man die Vektorfelder auf offenen Teilmengen affiner Räume im Sinne von IV.3.1.2 mit den Vektorfeldern im hier erklärten Sinn.

4.4.14. Ein Vektorraumbündel muß keineswegs global, als da heißt als Bündel auf ganz  $X$ , isomorph sein zu einem trivialen Bündel, es kann vielmehr “verdrillt” sein: Man stelle sich etwa auf der Kreislinie  $S^1$  das “möbiusbandartige”



Versuch der graphischen Darstellung eines “möbiusbandartig verdrehten” Geradenbündels auf der Kreislinie. Das entsprechend “doppelt verdrehte” Geradenbündel wäre übrigens isomorph zum trivialen Bündel.

Geradenbündel vor, dessen Totalraum man erhält als den Bahnenraum  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$  für die Operation von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^2$  mittels der Vorschrift

$$n * (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$$

Auch Tangentialbündel werden im allgemeinen “verdrillt” sein. So besagt etwa der Satz von Igel ??, daß es auf der Kugelschale  $S^2$  kein stetiges Vektorfeld ohne Nullstelle gibt. Das scheint mir auch anschaulich zumindest einleuchtend und impliziert insbesondere, daß das Tangentialbündel  $TS^2$  an die Kugelschale nicht isomorph sein kann zum trivialen Bündel  $S^2 \times \mathbb{R}^2$ . Ist das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit isomorph zum trivialen Bündel der entsprechenden Dimension, gilt also in Formeln  $TX \cong X \times \mathbb{R}^d$  mit  $d = \dim X$ , so heißt unsere Mannigfaltigkeit **parallelisierbar**.

**Satz 4.4.15 (Tangentialbündel von Liegruppen).** *Für jede Liegruppe  $G$  liefert das Verschieben von Tangentialvektoren am neutralen Element mit Linksmultiplikationen einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln*

$$\begin{aligned} G \times T_e G &\xrightarrow{\sim} TG \\ (g, B) &\mapsto (d_e(g \cdot))(B) \end{aligned}$$

*Analoges gilt für das Verschieben mit Rechtsmultiplikationen.*

4.4.16. Insbesondere ist also jede Liegruppe parallelisierbar und damit auch die dreidimensionale Sphäre  $S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ . Außer  $S^0, S^1, S^3$  gibt es nebenbei bemerkt nur noch eine einzige weitere parallelisierbare Sphäre, nämlich die  $S^7$ . Deren Parallelisierbarkeit hängt eng mit der Existenz der sogenannten “Oktaven” zusammen, einer reell achtdimensionalen sogenannten “Kompositionsalgebra”, vergleiche ??.

*Beweis.* Unsere Abbildung aus dem Satz ist glatt als Einschränkung der Verknüpfung  $TG \times TG \xrightarrow{\sim} T(G \times G) \rightarrow TG$  der kanonischen Identifikation mit dem Differential der Multiplikation unserer Gruppe. In der Tat bildet die erste dieser Abbildungen nach 4.3.16 ja  $(0, B) \in T_g G \times T_e G$  ab auf  $d_e(g, \mathrm{id})(B)$ , und unter  $dm$  wird das weiter abgebildet auf  $(d_{(g,e)}m \circ d_e(g, \mathrm{id}))(B)$ . Wegen  $m \circ (g, \mathrm{id}) = (g \cdot)$  ist das aber nichts anderes als  $d_e(g \cdot)(B)$ . Bezeichnet  $\pi : TG \rightarrow G$  die Projektion unseres Bündels, so erhalten wir ähnlich eine inverse Abbildung, indem wir die Komposition

$$TG \xrightarrow{(\pi, \mathrm{id})} G \times TG \hookrightarrow TG \times TG \rightarrow T(G \times G) \xrightarrow{d\varphi} TG$$

betrachten mit  $\varphi : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g^{-1}h$ . Unter ihr geht nämlich  $A \in T_g G$  auf  $(d_g(g^{-1} \cdot))(A) \in T_e G$ .  $\square$

## 4.5 Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

4.5.1. Ein Vektorfeld  $A$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  hatten wir bereits in 4.4.12 erklärt als einen Schnitt des Tangentialbündels. In Formeln ist ein Vektorfeld also eine Abbildung  $A : X \rightarrow TX$  mit  $\pi \circ A = \text{id}_X$  für  $\pi : TX \rightarrow X$  die kanonische Projektion. Meist betrachten wir **glatte Vektorfelder**, für die also  $A$  eine glatte Abbildung ist. Wir schreiben oft  $A_x$  für den Wert des Vektorfelds  $A$  an der Stelle  $x \in X$ , so daß stets gilt  $A_x \in T_x X$ .

**Definition 4.5.2.** Gegeben ein Vektorfeld  $A$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  und eine glatte Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  erklären wir eine weitere Funktion  $(Af) : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$(Af)(x) := A_x(f_x)$$

Hier meint  $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$  den Funktionskeim von  $f$  an der Stelle  $x \in X$ . Wir sagen dann, die Funktion  $Af$  entstehe durch **Ableiten der Funktion  $f$  in Richtung des Vektorfelds  $A$** . Des weiteren können wir auch das Vektorfeld  $fA$  bilden, das durch Multiplikation des Vektorfelds  $A$  mit der Funktion  $f$  entsteht.

**Definition 4.5.3.** Gegeben eine glatte Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von Mannigfaltigkeiten und Vektorfelder  $A$  auf  $X$  und  $B$  auf  $Y$  sagen wir, unsere Vektorfelder seien  **$\phi$ -verwandt** und schreiben

$$\phi : A \rightsquigarrow B$$

genau dann, wenn gilt  $(d_x \phi)(A_x) = B_{\phi(x)}$  für alle  $x \in X$ . Ebenso sagen wir, Funktionen  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  seien  **$\phi$ -verwandt** und schreiben auch schon mal  $\phi : g \rightsquigarrow f$  genau dann, wenn gilt  $g = f \circ \phi$ . In diagrammatischer Schreibweise ist die Verwandtschaft  $\phi : A \rightsquigarrow B$  von Vektorfeldern gleichbedeutend zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ TX & \xrightarrow{d\phi} & TY \end{array}$$

*Übung 4.5.4.* Verwandte glatte Funktionen haben in Bezug auf verwandte Vektorfelder verwandte Ableitungen. Ist also in Formeln  $\phi : X \rightarrow Y$  glatt und gilt  $\phi : A \rightsquigarrow B$  für Vektorfelder und  $\phi : g \rightsquigarrow f$  für Funktionen, so folgt  $\phi : Ag \rightsquigarrow Bf$ . Anders formuliert gilt für jede glatte Funktion  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  die Identität

$$A(f \circ \phi) = (Bf) \circ \phi$$

Ebenso haben wir unter denselben Voraussetzungen auch die Verwandtschaft von Vektorfeldern  $\phi : gA \rightsquigarrow fB$ .

4.5.5. Will man ein Vektorfeld  $A$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  explizit angeben, so wird man einen Atlas wählen und für jede Karte  $\varphi_\lambda : W_\lambda \rightarrow X$  dasjenige Vektorfeld  $\sum_{i=1}^d a_i \partial_i$  auf  $W_\lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  angeben, das  $\varphi_\lambda$ -verwandt ist zu  $A$ . Hier sind die  $a_i$  dann Funktionen  $a_i : W_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind umgekehrt Vektorfelder auf den Definitionsbereichen der Karten eines Atlas gegeben, so kommen sie in dieser Weise von einem Vektorfeld auf unserer Mannigfaltigkeit her genau dann, wenn für je zwei Karten ihre entsprechenden Einschränkungen unter dem Kartenwechsel verwandt sind.

*Beispiel 4.5.6.* Die Kreislinie  $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\|_2 = 1\}$  kann überdeckt werden durch die beiden Karten  $\varphi_\pm : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , deren Inverse man durch stereographische Projektion ?? von den Polen  $(0, \pm 1)$  erklärt. Nach II.7.6.17 werden sie gegeben durch

$$\varphi_\pm(x) = \left( \frac{2x}{1+x^2}, \pm \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir die Koordinaten zur Karte  $\varphi_+$  nun  $u$ . Der Kartenwechsel ergibt sich mit direkter Rechnung oder allgemeinen Erkenntnissen zu Möbiustransformationen ?? und ?? als das Invertieren

$$\varphi_{+-} : x \mapsto u^{-1}$$

Ein Vektorfeld auf der Kreislinie anzugeben bedeutet damit, Funktionen  $a_-(x)$  und  $a_+(u)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  so anzugeben, daß gilt  $\varphi_{+-} : a_-(x)\partial_x \rightsquigarrow a_+(u)\partial_u$ . Erinnern wir schließlich IV.3.1.25, so läuft das hinaus auf die Identität

$$a_-(u^{-1})(-u^2)\partial_u = a_+(u)\partial_u$$

alias  $a_+(u) = -u^2 a_-(u^{-1})$  für alle  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ . Ein stetiges Vektorfeld auf der Sphäre anzugeben meint also, eine stetige Funktionen  $a_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  so anzugeben, daß  $-u^2 a_-(u^{-1})$  einen Grenzwert hat für  $u \rightarrow 0$ , daß also vage gesprochen  $a_-$  nicht gar zu schlimm wächst für  $u \rightarrow \infty$ .

*Beispiel 4.5.7.* Zur Abschreckung hier auch noch das Beispiel der Kugelschale oder Sphäre  $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|_2 = 1\}$ . Sie kann überdeckt werden durch die beiden Karten  $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ , deren Inverse man durch stereographische Projektion ?? von den Polen  $(0, 0, \pm 1)$  erklärt. Nach II.7.6.17 werden sie gegeben durch

$$\varphi_\pm(x, y) = \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \pm \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

Der Kartenwechsel ergibt sich mit direkter Rechnung oder allgemeinen Erkenntnissen zu Möbiustransformationen ?? und ?? zur Inversion am Einheitskreis

$$\varphi_{+-} : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir die Koordinaten zur Karte  $\varphi_+$  nun  $(u, v)$ . Ein Vektorfeld auf der Sphäre anzugeben bedeutet damit, Funktionen  $e(u, v), f(u, v)$  auf  $\mathbb{R}^2$  so anzugeben, daß gilt  $\varphi_{+-} : a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y \rightsquigarrow e(u, v)\partial_u + f(u, v)\partial_v$ . Erinnern wir schließlich IV.3.1.25, so läuft das hinaus auf die Identität

$$a(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2))((v^2 - u^2)\partial_u - 2uv\partial_v) + b(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2))((u^2 - v^2)\partial_v - 2uv\partial_u) = e(u, v)\partial_u + f(u, v)\partial_v$$

alias

$$e(u, v) = (v^2 - u^2)a(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2)) - 2uvb(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2))$$

$$f(u, v) = (u^2 - v^2)b(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2)) - 2uva(u/(u^2 + v^2), v/(u^2 + v^2))$$

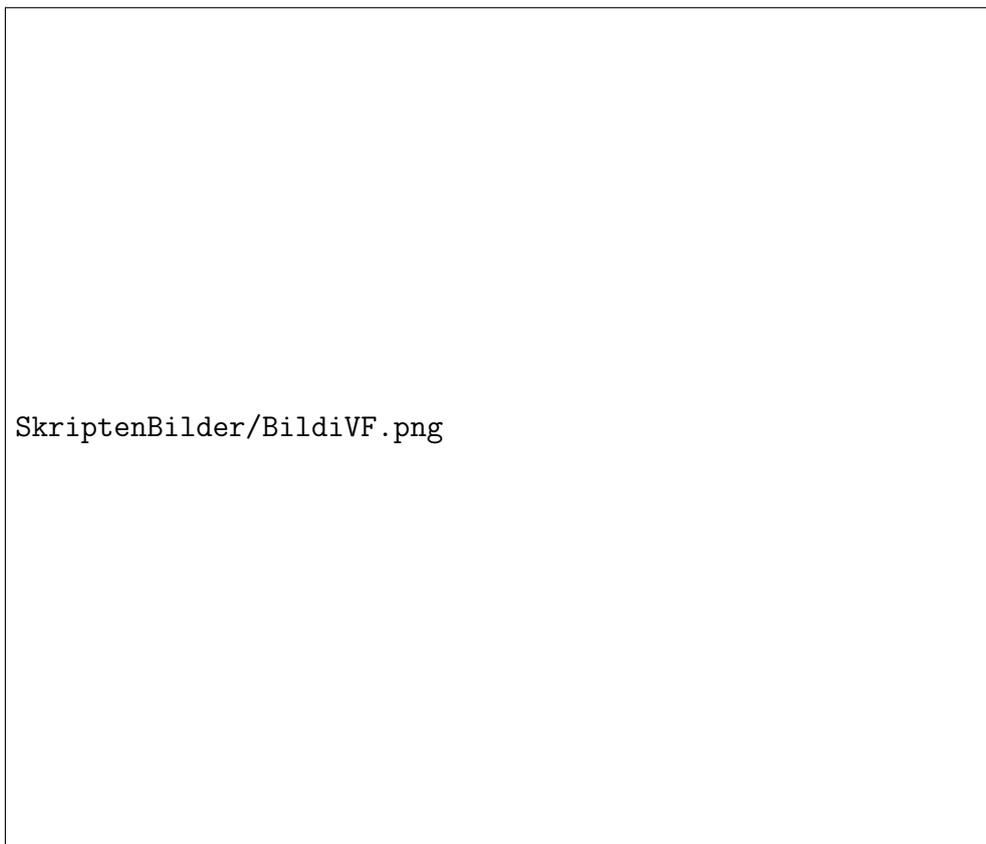
für alle  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ . Ein stetiges Vektorfeld auf der Sphäre anzugeben meint also, stetige Funktionen  $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  so anzugeben, daß die rechte Seite der Ausdrücke in den beiden vorhergehenden Gleichungen jeweils einen Grenzwert hat für  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ .

**Definition 4.5.8.** Ein Vektorfeld auf einer Liegruppe heißt **linksinvariant** genau dann, wenn es unter allen Linksmultiplikationen zu sich selbst verwandt ist. Analog erklärt man **rechtsinvariante** Vektorfelder. Ist  $G$  unsere Liegruppe, so ist also in Formeln ein Vektorfeld  $A : G \rightarrow TG$  linksinvariant genau dann, wenn gilt  $(g \cdot) : A \rightsquigarrow A$  für alle  $g \in G$ , und rechtsinvariant genau dann, wenn gilt  $(\cdot g) : A \rightsquigarrow A$  für alle  $g \in G$ .

*Beispiel 4.5.9.* Die linksinvarianten Vektorfelder auf der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  sind genau diejenigen Vektorfelder, die wir in unserer ursprünglichen Begrifflichkeit konstant genannt hätten, die also konstanten Abbildungen  $V \rightarrow V$  entsprechen. Ein Vektorfeld auf der Liegruppe  $\mathbb{C}^\times$  ist linksinvariant genau dann, wenn es anschaulich betrachtet invariant ist unter allen Drehstreckungen der komplexen Zahlenebene. Die linksinvarianten Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^\times$  sind genau die Vektorfelder  $cx\partial_x$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

**Satz 4.5.10 (Invariante Vektorfelder auf Liegruppen).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  sind alle linksinvarianten Vektorfelder auf besagter Liegruppe glatt und das Auswerten beim neutralen Element liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{linksinvariante Vektorfelder} \\ G \rightarrow TG \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} T_e G$$



Ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Kreislinie. Alle Pfeile sind gleich lang gemeint. Da die Kreislinie eine kommutative Liegruppe ist, stimmen hier links- und rechtsinvariante Vektorfelder überein.

Dasselbe gilt analog auch für rechtsinvariante Vektorfelder.

*Beweis.* Wir können die inverse Abbildung explizit angeben, indem wir zu  $A_e \in T_e G$  das Vektorfeld  $A : G \rightarrow TG$  bilden, das jedem  $g \in G$  den Wert des Differentials an die Multiplikation  $TG \times TG \xrightarrow{\sim} T(G \times G) \rightarrow TG$  auf  $(g, A_e)$  zuordnet.  $\square$

*Übung 4.5.11.* Für welche Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  ist  $f\partial_x + g\partial_y$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf  $\mathbb{C}^\times$ , wo  $x$  den Realteil und  $y$  den Imaginärteil einer komplexen Zahl bedeuten mögen?

*Übung 4.5.12.* Für welche Funktionen  $f(a, b)$  und  $g(a, b)$  ist  $f\partial_a + g\partial_b$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und Spalten und Determinante Eins, wo  $a$  und  $b$  die beiden Einträge der ersten Zeile bedeuten mögen?

## 4.6 Integralkurven und Flüsse

**Definition 4.6.1.** Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $A : X \rightarrow TX$  ein Vektorfeld. Eine **Integralkurve** unseres Vektorfelds ist eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow X$  von einem halboffenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $X$  mit

$$\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Eine **maximale Integralkurve** ist eine Integralkurve, die nicht zu einer auf einem echt größeren reellen Intervall definierten Integralkurve erweitert werden kann. Ist  $p \in X$  gegeben, so verstehen wir unter einer **Integralkurve mit Anfangswert**  $p$  oder kurz einer **Integralkurve zu**  $p$  eine Integralkurve  $(\gamma, I)$  mit  $0 \in I$  und  $\gamma(0) = p$ .

*Übung 4.6.2.* Verwandte Vektorfelder haben verwandte Integralkurven. Ist genauer  $\phi : X \rightarrow Y$  eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten und ist  $A$  ein Vektorfeld auf  $X$  und  $B$  ein dazu unter  $\phi$  verwandtes Vektorfeld auf  $Y$ , so ist für jede Integralkurve  $\gamma$  von  $A$  auch  $\phi \circ \gamma$  eine Integralkurve von  $B$ .

**Satz 4.6.3 (Picard-Lindelöf auf Mannigfaltigkeiten).** *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit gibt es zu jedem Anfangswert eine größte Integralkurve, und diese hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall.*

*Ergänzung 4.6.4.* Die weitergehenden Aussagen von [IV.5.2.6](#) übertragen sich entsprechend, aber die Übertragung ihres Beweises benötigt Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen.

*Beweis.* Das folgt ohne Schwierigkeiten in derselben Weise wie bei der Herleitung des Satzes über die globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen IV.5.2.6 aus der lokalen Existenz und Eindeutigkeit IV.5.2.3, wenn man beachtet, daß jeder Punkt unserer Mannigfaltigkeit ja im Bild einer Karte liegt. Beim Nachweis der Eindeutigkeit der größten Integralkurve mit vorgegebenem Anfangswert benötigen wir im Übrigen zum ersten Mal die Hausdorff-Eigenschaft unserer Mannigfaltigkeiten, und zwar an der Stelle, an der wir bemerken, daß die Menge der Parameter, an denen zwei vorgegebene Integralkurven mit demselben Definitionsbereich übereinstimmen, abgeschlossen ist in dem fraglichen Definitionsbereich.  $\square$

**Satz 4.6.5 (Integralkurven linksinvarianter Vektorfelder).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  und darauf ein linksinvariantes Vektorfeld  $A$  ist die maximale Integralkurve  $\gamma = \gamma_A$  unseres Vektorfelds mit Anfangswert  $\gamma(0) = e$  für alle Zeiten definiert und kann charakterisiert werden als der eindeutig bestimmte glatte Gruppenhomomorphismus  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  mit  $\dot{\gamma}(0) = A_e$ .*

4.6.6. Dieser Satz liefert die in 4.3.22 behauptete Klassifikation der glatten Einparameteruntergruppen einer Liegruppe.

*Beweis.* Mit  $\gamma$  ist auch  $t \mapsto g\gamma(t)$  eine Integralkurve unseres linksinvarianten Vektorfelds  $A$ , für alle  $g \in G$ . Ebenso sind auch alle "zeitverschobenen" Integralkurven wieder Integralkurven, das gilt ja bei jedem zeitunabhängigen Vektorfeld. Wäre nun  $\gamma : (a, b) \rightarrow G$  die maximale Integralkurve mit Anfangswert  $\gamma(0) = e$  und wäre etwa  $b \neq \infty$ , so wäre  $t \mapsto \gamma(b/2)\gamma(t - b/2)$  ebenfalls eine Integralkurve, die auf  $(a + b/2, b + b/2)$  definiert wäre und auf dem gemeinsamen Definitionsbereich mit  $\gamma$  übereinstimmte. Also könnte  $\gamma$  doch nicht maximal gewesen sein, und dieser Widerspruch zeigt, daß die maximalen Integralkurven linksinvarianter Vektorfelder für alle Zeiten definiert sein müssen. Dasselbe Argument zeigt dann  $\gamma(t) = \gamma(s)\gamma(t - s)$  für alle reellen  $s, t$  und damit sind unsere maximalen Integralkurven Gruppenhomomorphismen. Umgekehrt gilt für jeden glatten Gruppenhomomorphismus  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  die Identität  $\gamma(t + s) = \gamma(t)\gamma(s)$  und damit  $\dot{\gamma}(t) = d_e(\gamma(t) \cdot) \dot{\gamma}(0)$ , was ja gerade bedeutet, daß  $\gamma$  eine Integralkurve des linksinvarianten Vektorfelds  $A$  ist, die den Ursprung mit der Geschwindigkeit  $\dot{\gamma}(0) = A_e$  durchläuft.  $\square$

**Definition 4.6.7.** Wir definieren für jede Liegruppe  $G$  ihre **Exponentialabbildung**  $\exp : T_e G \rightarrow G$  durch die Vorschrift

$$\begin{array}{ccc} \exp : T_e G & \rightarrow & G \\ A & \mapsto & \gamma_A(1) \end{array}$$

für  $\gamma_A : \mathbb{R} \rightarrow G$  die glatte Einparameteruntergruppe mit  $\dot{\gamma}_A(0) = A$ .

4.6.8. Das  $s$ -fache eines Vektorfelds hat offensichtlich als Integralkurven die mit  $s$ -facher Geschwindigkeit durchlaufenen Integralkurven des ursprünglichen Vektorfelds. In Formeln gilt für alle  $s \in \mathbb{R}$  also  $\gamma_{sA}(t) = \gamma_A(st)$  und damit  $\exp(sA) = \gamma_A(s)$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ ,  $A \in T_eG$ .

*Übung 4.6.9.* Man beschreibe die Exponentialabbildung für die Liegruppe  $(\mathbb{R}, +)$ . Man beschreibe die Exponentialabbildung für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, aufgefaßt als Liegruppe.

**Satz 4.6.10 (Eigenschaften der Exponentialabbildung).** *Für jede Liegruppe  $G$  ist die Exponentialabbildung  $\exp : T_eG \rightarrow G$  glatt und ihr Differential am Ursprung entspricht unter den üblichen Identifikationen der Identität auf  $T_eG$ .*

4.6.11. Ganz präzise formuliert behauptet also unser Satz, daß die Komposition  $T_eG \xrightarrow{\sim} T_0(T_eG) \rightarrow T_eG$  der kanonischen Abbildung aus 4.3.4 mit  $d_0(\exp)$  die Identität ist. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird im Anschluß an 4.6.15 gegeben.

4.6.12. Da ihr Differential bei Null bijektiv ist, liefert die Exponentialabbildung  $\exp : T_eG \rightarrow G$  einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung der Null im Tangentialraum  $T_eG$  und einer offenen Umgebung des neutralen Elements  $e$  in unserer Gruppe  $G$ .

4.6.13. Mit 1.6.3 folgt, daß die hier definierte Exponentialabbildung im Fall von Matrix-Liegruppen unter den entsprechenden Identifikationen mit der Exponentialabbildung für Matrizen zusammenfällt.

**Definition 4.6.14.** Für ein Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$ , das zu jedem Anfangswert  $q \in X$  eine größte Integralkurve  $\gamma_q : I_q \rightarrow X$  besitzt, erklären wir seinen **Fluß** als die Abbildung

$$\Phi : (t, q) \mapsto \gamma_q(t)$$

von der Menge  $\tilde{X} = \{(t, q) \in \mathbb{R} \times X \mid t \in I_q\}$ , dem sogenannten **Definitionsbereich des Flusses**, in unsere Mannigfaltigkeit.

**Satz 4.6.15 (Flüsse von Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten).** *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit hat sein Fluß offenen Definitionsbereich und ist ebenfalls glatt.*

*Beweis.* Das folgt ohne Schwierigkeiten aus dem in IV.5.5.2 behandelten Fall, daß unsere glatte Mannigfaltigkeit eine offene Teilmenge eines reellen affinen Raums ist.  $\square$

*Beweis von Satz 4.6.10 zur Exponentialabbildung.* Wir betrachten die Abbildung  $\mathbb{R} \times T_e G \rightarrow G$  gegeben durch  $(t, A) \mapsto \gamma_A(t)$  und zeigen, daß sie glatt ist. Dazu reicht es sicher zu zeigen, daß die Abbildung  $\mathbb{R} \times G \times T_e G \rightarrow G \times T_e G$  gegeben durch  $(t, g, A) \mapsto (g\gamma_A(t), A)$  glatt ist. Diese Abbildung ist jedoch glatt als der Fluß eines glatten Vektorfelds auf  $X = G \times T_e G$ , nämlich des Vektorfelds  $(g, A) \mapsto (d_e(g \cdot)A, 0)$ , wobei rechts die Null von  $T_A(T_e G)$  gemeint ist und wir genau genommen eigentlich die Verknüpfung unseres Vektorfelds mit den kanonischen Identifikationen  $T_{(g,A)}X \xrightarrow{\sim} T_g G \times T_A(T_e G)$  beschrieben haben. Damit wissen wir schon mal, daß unsere Exponentialabbildung glatt ist. Ihr Differential beim Ursprung von  $T_e G$  muß bis auf die üblichen Identifikationen die Identität sein, da ja für alle  $A \in T_e G$  der Weg  $t \mapsto tA$  in  $T_e G$  mit Geschwindigkeitsvektor  $A$  bei  $t = 0$  unter  $\exp$  zum Weg  $t \mapsto \exp(tA) = \gamma_A(t)$  wird, der per definitionem auch den Geschwindigkeitsvektor  $A$  bei  $t = 0$  hat.  $\square$

**Satz 4.6.16 (Homomorphismen von Liegruppen).** *Jeder stetige Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  von Liegruppen ist glatt, und für sein Differential  $d\varphi$  beim neutralen Element gilt  $\exp \circ d\varphi = \varphi \circ \exp$ .*

4.6.17. Etwas ausführlicher geschrieben behauptet die Formel aus dem Satz ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{d\varphi} & T_e H \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

*Beweis.* Das wurde im Fall von Matrix-Liegruppen bereits in 1.6.8 gezeigt. Der Beweis im allgemeinen ist derselbe.  $\square$

**Korollar 4.6.18.** *Auf einer topologischen Gruppe gibt es höchstens eine Struktur als glatte Mannigfaltigkeit, die sie zu einer Liegruppe macht.*

*Beweis.* Gegeben zwei derartige Strukturen ist die Identität nach 4.6.16 ein Diffeomorphismus zwischen unserer Gruppe mit der einen Struktur und unserer Gruppe mit der anderen Struktur.  $\square$

**Korollar 4.6.19.** *Ein stetiger Gruppenhomomorphismus von einer zusammenhängenden Liegruppe in eine weitere Liegruppe wird bereits durch sein Differential beim neutralen Element eindeutig festgelegt.*

*Beweis.* Nach 4.6.16 und 4.6.10 wird unser Gruppenhomomorphismus durch sein Differential zumindest in einer Umgebung des neutralen Elements eindeutig festgelegt. Eine zusammenhängende Liegruppe wird aber nach 3.7.13 bereits von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.  $\square$

*Übung 4.6.20.* In jeder Liegruppe gibt es eine Umgebung des neutralen Elements, die keine Untergruppe außer der einpunktigen Untergruppe umfaßt.

*Übung 4.6.21.* Zwei abgeschlossene zusammenhängende Untergruppen einer Liegruppe, die dieselbe Liealgebra haben, stimmen überein.

*Übung 4.6.22.* Man zeige, daß der Fluß eines linksinvarianten Vektorfelds  $X$  auf einer Liegruppe  $G$  durch die Formel  $X^t g = g \exp(tX_e)$  beschrieben werden kann. Man beschreibe in ähnlicher Weise auch den Fluß eines rechtsinvarianten Vektorfelds.

*Übung 4.6.23.* Gegeben eine Liegruppe  $G$  mit einer abgeschlossenen Untergruppe  $H$  gilt  $\text{Lie } H = \{X \in \text{Lie } G \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset H\}$ .

*Übung 4.6.24.* Gegeben eine glatte Operation  $G \times X \rightarrow X$  einer Liegruppe  $G$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  und  $x \in X$  ein Punkt und  $G_x$  seine Isotropiegruppe gilt  $T_e G_x = \ker d_e(\cdot x)$  für  $(\cdot x)$  die Abbildung  $G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto gx$ . Hinweis: Man überlege sich, daß gegeben  $A \in T_e G$  die Kurve  $t \mapsto \exp(tA)x$  entweder für alle  $t$  die Geschwindigkeit Null hat oder für kein  $t$ .

## 4.7 Die Lie-Klammer von Vektorfeldern

**Lemma 4.7.1.** Gegeben differenzierbare Vektorfelder  $A, B : U \rightarrow \vec{X}$  auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  gibt es genau ein Vektorfeld  $[A, B] : U \rightarrow \vec{X}$  mit der Eigenschaft

$$[A, B]f = A(Bf) - B(Af) \quad \forall f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

4.7.2. Dies Feld  $[A, B]$  heißt die **Lie-Klammer** oder auch der **Kommutator** der Felder  $A$  und  $B$ . Seine anschauliche Bedeutung wird in 4.7.6 diskutiert. Differenzierbarkeit ist im Sinne von IV.1.2.2 gemeint. Der folgende Beweis wird zeigen, daß die fragliche Gleichung sogar für alle  $C^2$ -Funktionen  $f$  gilt.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $X = \mathbb{R}^n$  annehmen. Unsere beiden Felder haben dann die Gestalt

$$\begin{aligned} A &= a_1 \partial_1 + \dots + a_n \partial_n \\ B &= b_1 \partial_1 + \dots + b_n \partial_n \end{aligned}$$

mit  $a_i, b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und wir finden

$$\begin{aligned} ABf &= \sum a_i \partial_i \sum b_j \partial_j f = \sum a_i (\partial_i b_j) \partial_j f + a_i b_j \partial_i \partial_j f \\ BAf &= \sum b_j \partial_j \sum a_i \partial_i f = \sum b_j (\partial_j a_i) \partial_i f + b_j a_i \partial_j \partial_i f \end{aligned}$$

und damit schließlich  $ABf - BAf = Cf$  für

$$C = \sum_j \left( \sum_i a_i(\partial_i b_j) - b_i(\partial_i a_j) \right) \partial_j$$

Damit haben wir gleichzeitig sogar eine explizite Formel für den Kommutator zweier Vektorfelder erhalten.  $\square$

**Übung 4.7.3 (Verträglichkeit von Verwandtschaft und Lieklammer).** Verwandte stetig differenzierbare Vektorfelder haben verwandte Lieklammern. Sind genauer und in Formeln  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  offene Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume und ist  $\phi : U \rightarrow V$  eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung und sind  $A, B$  stetig differenzierbare Vektorfelder auf  $U$  und  $\tilde{A}, \tilde{B}$  stetig differenzierbare Vektorfelder auf  $V$ , so gilt

$$(\phi : A \rightsquigarrow \tilde{A} \text{ und } \phi : B \rightsquigarrow \tilde{B}) \quad \Rightarrow \quad \phi : [A, B] \rightsquigarrow [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

4.7.4. Gegeben ein glattes Vektorfeld  $A$  auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen affinen Raums schreiben wir im folgenden

$$A^t q$$

für die Stelle  $A^t q \in U$ , an der der Punkt  $q \in U$  landet, wenn er sich für die Zeitspanne  $t$  mit dem Fluß des Vektorfelds  $A$  treiben läßt.

**Proposition 4.7.5 (zur Lieklammer von Vektorfeldern).** Sind  $A, B$  glatte Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$ , so gilt im Richtungsraum  $\vec{X}$  für alle  $p \in U$  die Gleichung

$$[A, B]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (B^t A^t p - A^t B^t p)$$

4.7.6 (**Anschauliche Bedeutung der Lieklammer**). Anschaulich gesprochen mißt die Lieklammer zweier Vektorfelder im Lichte dieser Proposition, inwieweit die zugehörigen Flüsse vertauschen oder lateinisierend “kommutieren”, d.h. welchen Unterschied es macht, ob sich ein gegebener Punkt für ein festes kleines Zeitintervall erst mit dem einen und dann mit dem anderen Vektorfeld treiben läßt oder umgekehrt. Ein alternativer Beweis der Proposition unter Verwendung der Lie-Ableitung wird in 5.6.14 diskutiert.

*Beweis.* Betrachten wir den Fluß  $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$  unseres Vektorfelds  $A$  und setzen den entsprechenden Bildungen für  $B$  einen Hut auf, so erhalten wir

$$B^s A^t p - A^t B^s p = \hat{\Phi}(s, \Phi(t, p)) - \Phi(t, \hat{\Phi}(s, p))$$



SkriptenBilder/BildKoFu.png

In der Situation und den Notationen von [IV.3.1.23](#) finden wir  $[\partial_x, \partial_\vartheta] = [\partial_x, -y\partial_x + x\partial_y] = \partial_y$ . Die zugehörigen Flüsse sind Verschiebung in  $x$ -Richtung und Rotation um den Ursprung. Setzen wir genauer  $A = \partial_x$  und  $B = \partial_\vartheta$ , gilt  $A^t(p_1, p_2) = (p_1 + t, p_2)$  und  $B^t(p_1, p_2) = ((\cos t)p_1 - (\sin t)p_2, (\sin t)p_1 + (\cos t)p_2)$ . Mit diesen Formeln ist der Kommutator der Flüsse schnell berechnet, und das Ergebnis scheint mir auch der Anschauung gut zugänglich zu sein.

Diese Funktion ist glatt als Funktion von  $(s, t) \in W \subseteq \mathbb{R}^2$  für eine hinreichend kleine offene Umgebung  $W$  des Ursprungs und es gilt, sie bis zu den Termen der Ordnung Zwei in eine Potenzreihe zu entwickeln. Auf den beiden Koordinatenachsen  $s = 0$  und  $t = 0$  ist unsere Funktion konstant Null, weshalb wir nach der Taylorformel als einzigen Term der Ordnung Zwei ein konstantes Vielfaches von  $st$  erhalten werden. Um hier den Koeffizienten von  $st$  zu bestimmen, entwickeln wir zunächst einmal den Fluß  $\Phi$  bis zur Ordnung Zwei um  $(0, p)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $X = \mathbb{R}^n$  annehmen. Die Koordinaten nennen wir  $v_1, \dots, v_n$ . Nach der Taylorformel IV.2.2.5 gilt

$$\begin{aligned}\Phi(t, p + v) &= \Phi(0, p) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} v_i + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} t^2 + \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i \partial t} v_i t + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i \partial v_j} v_i v_j + \dots\end{aligned}$$

wobei alle partiellen Ableitungen an der Stelle  $(0, p)$  auszuwerten sind und Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  liefern und die Pünktchen Terme höherer Ordnung andeuten. Unsere Taylorformel IV.2.2.5 hatten wir nur für reellwertige Funktionen gezeigt, formal gilt es also hier, sie auf alle Komponenten unserer Abbildung  $\Phi$  anzuwenden. Ich habe die daranzumultiplizierenden Skalare hier hinter die fraglichen Vektoren geschrieben in der Hoffnung, daß so die Taylorreihe besser wiederzuerkennen ist. Nun gilt ja  $\Phi(0, p + v) = p + v$ , womit die partiellen Ableitungen ohne Zeitanteil leicht zu bestimmen sind und insbesondere der letzte Term oben wegfällt. Weiter ist  $\Phi(t, q) = A^t q$  die Integralkurve zu  $q$ , woraus folgt  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, q) = A_q$ . Damit hat unsere Entwicklung also die Gestalt

$$\Phi(t, p + v) = p + A_p t + v + ct^2 + \sum \frac{\partial A}{\partial v_i} v_i t + \dots$$

mit einem unbekanntem Vektor  $c$ . Nun wenden wir unseren Satz IV.2.3.6 über das Rechnen mit Approximationen an und erhalten für  $\Phi(t, \hat{\Phi}(s, p))$  die Entwicklung

$$\begin{aligned}\Phi(t, \hat{\Phi}(s, p)) &= \Phi(t, p + B_p s + \hat{c} s^2 + \dots) \\ &= p + A_p t + B_p s + \hat{c} s^2 + ct^2 + \sum \frac{\partial A}{\partial v_i} (B_p)_i st + \dots\end{aligned}$$

wobei der Index  $i$  unten an der Klammer bedeutet, daß von fraglichem Vektor die  $i$ -te Komponente zu nehmen ist. Vertauschen wir nun die Rollen von  $A$  und  $B$  sowie von  $s$  und  $t$  und ziehen die so entstehenden Ausdrücke voneinander ab, so erhalten wir wie erwartet nur einen gemischten quadratischen Term, und der ist

$$\left( \sum \frac{\partial B}{\partial v_i} (A_p)_i - \frac{\partial A}{\partial v_i} (B_p)_i \right) st \quad \square$$

4.7.7. Manchmal ist auch die alternative Darstellung

$$[A, B]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (B^{-t} A^{-t} B^t A^t p - p)$$

nützlich. Um sie herzuleiten, betrachte man die auf einer Umgebung des Ursprungs in  $\mathbb{R}^2$  definierte glatte Funktion  $(s, t) \mapsto B^{-s} A^{-t} B^s A^t p - p$ . Sie verschwindet längs der Koordinatenachsen, so daß wir wieder nur zeigen brauchen, daß  $[A, B]_p$  ihre gemischte partielle Ableitung  $\partial^2 / \partial s \partial t$  am Ursprung ist. Um das zu prüfen betrachten wir die glatte Funktion

$$(x, y, z, w) \mapsto B^x A^y B^z A^w p - p$$

und erhalten mit der Kettenregel

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial w}$$

jeweils ausgewertet am Ursprung. Hier heben sich jedoch der erste und letzte Term gegeneinander weg und die verbleibenden Terme liefern gerade die gemischte partielle Ableitung von  $B^s A^t p - A^t B^s p$ , von der wir bereits aus dem Beweis von 4.7.5 wissen, daß sie mit  $[A, B]_p$  zusammenfällt.

*Übung 4.7.8.* Sind  $A, B$  glatte Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$ , so gilt im Richtungsraum  $\vec{X}$  für alle  $p \in U$  auch die Gleichung

$$[A, B]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (A^{-t} B^t A^t p - B^t p)$$

**Proposition 4.7.9 (über kommutierende Vektorfelder).** *Zwei glatte Vektorfelder  $A, B$  auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse lokal kommutieren, wenn es also in Formeln für jeden Punkt  $p \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit*

$$A^t B^s p = B^s A^t p \quad \forall s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

*Beweis.* Kommutieren die Flüsse, so auch die Vektorfelder nach 4.7.5. Kommutieren umgekehrt die Vektorfelder und hat das erste Feld bei  $p$  keine Nullstelle, so wählen wir mit IV.5.5.6 lokale Koordinaten derart, daß das erste Vektorfeld gerade  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  wird. Dann hat das zweite Vektorfeld die Gestalt

$$a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

wobei  $a_2, \dots, a_n$  konstant sind in  $x_1$ . Der Fluß des zweiten Feldes ist also invariant unter Verschiebung in die  $x_1$ -Richtung, d.h. unter dem Fluss des ersten Feldes, und die Behauptung folgt. Verschwinden beide Felder bei  $p$ , ist die Behauptung eh klar.  $\square$

*Übung 4.7.10.* Gegeben glatte paarweise kommutierende Vektorfelder, die an einer gegebenen Stelle linear unabhängig sind, finden wir stets lokale Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  um diese Stelle, in der unsere Vektorfelder die Gestalt  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}$  haben.

## 4.8 Lieklammer und adjungierte Darstellung

**Lemma 4.8.1.** *Gegeben glatte Vektorfelder  $A, B : X \rightarrow TX$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  gibt es genau ein glattes Vektorfeld  $[A, B] : X \rightarrow TX$  mit der Eigenschaft*

$$[A, B]f = A(Bf) - B(Af) \quad \forall f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$$

*Beweis.* Das folgt leicht aus dem in 4.7.1 behandelten Fall von Vektorfeldern auf offenen Teilmengen affiner Räume und der in 4.5.5 besprochenen Darstellung von Vektorfeldern in Karten.  $\square$

**Definition 4.8.2.** Dieses Feld  $[A, B]$  heißt die **Lieklammer** oder auch der **Kommutator** der Felder  $A$  und  $B$ . Die anschauliche Bedeutung dieser Konstruktion wurde bereits in 4.7.5 erklärt.

4.8.3. Der reelle Vektorraum aller glatten Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit wird mit dieser Lieklammer zu einer Liealgebra im Sinne von 1.5.7, genauer eine Unter-Liealgebra der Liealgebra aller Endomorphismen des Vektorraums der glatten Funktionen auf unserer Mannigfaltigkeit.

*Übung 4.8.4.* Verwandte Vektorfelder haben verwandte Lieklammern. Hinweis: Wir wissen bereits, daß das Anwenden von Vektorfeldern auf Funktionen mit Verwandtschaft verträglich ist.

4.8.5. Die linksinvarianten Vektorfelder auf einer Liegruppe bilden nach 4.8.4 einen unter der Lieklammer stabilen Teilraum im Raum aller glatten Vektorfelder. Dasselbe gilt für die rechtsinvarianten Vektorfelder.

**Definition 4.8.6.** Gegeben eine Liegruppe  $G$  versehen wir den Tangentialraum im neutralen Element  $T_e G$  mit derjenigen Struktur einer Liealgebra, für die das Fortsetzen zu einem linksinvarianten Vektorfeld ein Liealgebrenhomomorphismus in die Liealgebra der glatten Vektorfelder auf  $G$  ist. Den Raum  $T_e G$  mit dieser Struktur einer Liealgebra nennen wir die **Lie-Algebra der Liegruppe  $G$**  und notieren ihn

$$\text{Lie } G$$

*Ergänzung 4.8.7.* Daß wir hier die linksinvarianten Vektorfelder bevorzugen, hängt damit zusammen, daß wir auch die allgemeinen linearen Gruppen  $GL(V)$  und die Endomorphismenringe  $\text{End } V$  stets in der Weise definieren, daß sie von links auf  $V$  operieren. Unsere Konventionen passen dann in der in ?? erklärten Weise so zusammen, daß dem Kommutator von linksinvarianten Derivationen der Kommutator von Endomorphismen entspricht. HIER FEHLT NOCH EIN WESENTLICHES ARGUMENT. Die Beziehung zur entsprechenden Konstruktion mit rechtsinvarianten Vektorfeldern klärt 4.8.20.

**Satz 4.8.8.** *Das Differential beim neutralen Element eines stetigen Homomorphismus von Liegruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  ist ein Homomorphismus von Liealgebren*

$$d_e\varphi : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } H$$

Wir kürzen ihn oft zu  $d\varphi$  ab.

*Beweis.* Der größte Teil dieses Satzes wurde bereits in 4.6.16 gezeigt. Offen ist nur noch, daß das fragliche Differential mit dem Kommutator verträglich ist. Man sieht jedoch leicht ein, daß das linksinvariante Vektorfeld zu  $A \in T_e G$  unter  $\varphi$  verwandt ist zum linksinvarianten Vektorfeld zu  $(d_e\varphi)(A) \in T_e H$  auf  $H$ . Die Behauptung folgt nun, da das Bilden des Kommutators nach 4.8.4 Verwandtschaft respektiert.  $\square$

4.8.9. Die Exponentialabbildung einer Liegruppe  $G$  schreiben wir von nun an meist  $\exp : \text{Lie } G \rightarrow G$  und unser kommutatives Diagramm aus 4.6.17 erhält damit die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G & \xrightarrow{d\varphi} & \text{Lie } H \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

4.8.10. Gegeben ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und eine Liegruppe  $G$  und ein stetiger Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  notieren wir die Verknüpfung  $d_e\rho : T_e G \rightarrow T_e GL(V)$  mit der kanonischen Identifikation  $T_e GL(V) \xrightarrow{\sim} \text{End } V = \mathfrak{gl}(V)$  auch

$$d\rho = d_e\rho : \text{Lie } G \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Nach 4.8.8 ist diese Abbildung auch ein Homomorphismus von Liealgebren. Wir nennen ihn das **Differential der Darstellung**  $\rho$ .

4.8.11. Gegeben eine Gruppe  $G$  definiert jedes Element  $x \in G$  einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \text{int } x : G & \rightarrow & G \\ y & \mapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

Er heißt die **Konjugation mit  $x$**  oder auch der durch  $x$  definierte **innere Automorphismus**, auf Englisch **interior automorphism**, daher die Notation. Mehr dazu findet man in ???. Ist  $G$  eine Liegruppe, so ist  $\text{int } x$  für jedes  $x \in G$  eine glatte Abbildung  $G \rightarrow G$ .

**Lemma 4.8.12 (Adjungierte Darstellung).** *Ist  $G$  eine Liegruppe und ordnen wir jedem Gruppenelement  $x \in G$  das Differential am neutralen Element der Konjugation mit  $x$  zu und setzen  $\text{Ad}(x) := d_e(\text{int } x) : T_e G \rightarrow T_e G$ , so erhalten wir einen Homomorphismus von Liegruppen*

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\mapsto \text{Aut}(T_e G) \\ x &\mapsto \text{Ad } x \end{aligned}$$

Ist weiter  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Liegruppen, so kommutiert für alle  $x \in G$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{d_e \varphi} & T_e H \\ \text{Ad } x \downarrow & & \downarrow \text{Ad } \varphi(x) \\ T_e G & \xrightarrow{d_e \varphi} & T_e H \end{array}$$

*Beispiel 4.8.13.* Für  $G = \text{GL}(n; \mathbb{K})$  oder allgemeiner  $G = \text{Aut } V$  mit  $V$  einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist  $\text{int } x$  die Einschränkung einer linearen Abbildung auf  $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  bzw.  $\text{End } V$ , die durch dieselbe Formel gegeben wird. Das Differential einer linearen Abbildung ist aber an jeder Stelle schlicht die Abbildung selber, unter der kanonischen Identifikation des Tangentialraums mit dem Raum selber, so daß wir erhalten

$$(\text{Ad } x)(A) = xAx^{-1}$$

4.8.14. Vermittels des Differentials der Konjugation  $\text{Ad}$  wird nach 4.8.12 also der Tangentialraum einer Liegruppe beim neutralen Element eine Darstellung unserer Liegruppe. Diese Darstellung heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Liegruppe, und diese Terminologie motiviert auch erst recht eigentlich die Notation  $\text{Ad}$ .

*Beweis.* Zunächst einmal zeigen wir, daß  $\text{Ad}$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Nun gilt aber offensichtlich  $\text{int}(xz) = \text{int}(x) \circ \text{int}(z)$  und nach der Kettenregel folgt daraus  $d_e \text{int}(xz) = d_e(\text{int } x) \circ d_e(\text{int } z)$  alias in unserer Notation  $\text{Ad}(xz) = \text{Ad}(x) \circ \text{Ad}(z)$  für alle  $x, z \in G$ . Dann zeigen wir, daß  $\text{Ad}$  eine glatte Abbildung ist. Dazu gehen wir aus von der glatten Abbildung  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xyx^{-1}$ , die nach 4.4.4 eine glatte Abbildung auf den

Tangentialbündeln  $T(G \times G) \rightarrow TG$  liefert. Mit einigen kanonischen Identifikationen und Einbettungen liefert das ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 G \times TG & \hookrightarrow & TG \times TG & \xrightarrow{\sim} & T(G \times G) & \longrightarrow & TG \\
 \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 G \times T_e G & \longrightarrow & & & & & T_e G
 \end{array}$$

dessen untere Zeile  $(x, v) \mapsto (\text{Ad } x)(v)$  dann auch eine glatte Abbildung sein muß. Das zeigt, daß  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } T_e G$  glatt ist. Das kommutative Diagramm im letzten Teil unseres Lemmas ergibt sich schließlich, indem man im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\varphi} & H \\
 \text{int } x \downarrow & & \downarrow \text{int } \varphi(x) \\
 G & \xrightarrow{\varphi} & H
 \end{array}$$

zu den Differentialen an den neutralen Elementen übergeht. □

**Definition 4.8.15.** Das Differential im Sinne von 4.8.10 der adjungierten Darstellung  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(T_e G)$  wird notiert als

$$\text{ad} := d_e \text{Ad} : \text{Lie } G \rightarrow \mathfrak{gl}(T_e G)$$

*Beispiel 4.8.16.* Im Fall der Gruppen  $G = \text{GL}(n; \mathbb{K})$  oder allgemeiner der Gruppen  $G = \text{Aut } V$  haben wir  $(\text{ad } A)(B) = AB - BA$ . In der Tat ist das Auswerten an  $B \in \text{End } V$  eine lineare Abbildung  $\text{aus}_B : \text{End}(\text{End } V) \rightarrow \text{End } V$ , es gilt also  $d_e(\text{aus}_e \circ \text{Ad}) = \text{aus}_B \circ \text{ad}$ . Nun gilt weiter  $(\text{aus}_B \circ \text{Ad})(x) = (\text{Ad } x)(B) = xBx^{-1}$ . Um das Differential dieser Abbildung zu berechnen, schreiben wir sie als Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Aut } V & \rightarrow & \text{End } V \times \text{End } V & \rightarrow & \text{End } V \\
 x & \mapsto & (x, x^{-1}), & (y, z) & \mapsto & yBz
 \end{array}$$

Hier ist nun das Differential der ersten Abbildung beim neutralen Element nach 4.3.20 gegeben durch  $A \mapsto (A, -A)$  und das Differential der zweiten beim Bild des neutralen Elements nach IV.1.4.5 durch  $(C, D) \mapsto (CB + BD)$  und das Differential der Verknüpfung ist folglich gegeben durch  $A \mapsto AB - BA$ . Damit erhalten wir schließlich  $(\text{ad } A)(B) = AB - BA = [A, B]$  wie gewünscht.

**Proposition 4.8.17 (Differential der adjungierten Darstellung).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  gilt für alle  $X, Y \in \text{Lie } G$  die Formel*

$$(\text{ad } X)(Y) = [X, Y]$$

4.8.18. Rechts steht hier der Kommutator der beiden Vektorfelder, die durch linksinvariante Fortsetzung zweier Tangentialvektoren am neutralen Element entstehen, oder vielmehr der Wert dieses Kommutatorfeldes am neutralen Element. Links dahingegeben steht salopp gesprochen das Differential der von der Operation durch Konjugation unserer Liegruppe auf sich selbst induzierten Operation auf dem Tangentialraum beim neutralen Element. Wir geben für die Proposition zwei Beweise.

*Erster Beweis.* Wir verwenden im folgenden meist dieselbe Notation für linksinvariante Vektorfelder und ihre Werte beim neutralen Element, und deuten nur in Ausnahmefällen den Unterschied durch einen Index  $e$  an. Der Fluß eines linksinvarianten Feldes  $X$  wird nach 4.6.22 gegeben durch

$$X^t g = g \exp(tX)$$

für alle  $g \in G$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Bezeichne  $\log$  die Umkehrung von  $\exp$  in einer kleinen Umgebung des neutralen Elements. Da die Lieklammer Verwandtschaft respektiert und da das Differential des Logarithmus bis auf kanonische Identifikationen die Identität ist, liefert die Darstellung 4.7.8 des Kommutators zweier Vektorfelder die Relation

$$\begin{aligned} [X, Y]_e &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\log(X^{-t} Y^t X^t e) - \log(Y^t e)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\log(e^{tX} e^{tY} e^{-tX}) - \log(e^{tY})) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\text{Ad}(e^{tX})(tY) - tY) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Ad}(e^{tX})(Y) - Y) \\ &= (\text{ad } X)(Y) \quad \square \end{aligned}$$

*Zweiter Beweis.* Dieser Beweis ist zwar etwas länger, dafür aber unabhängig von unseren Erkenntnissen 4.7.5 über den Zusammenhang zwischen der Lieklammer von Vektorfeldern und dem Kommutieren der zugehörigen Flüsse. Um Klammern zu sparen, kürzen wir  $\text{ad}(X) = \text{ad}_X$  ab. Es reicht, für jede glatte Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  zu zeigen

$$[X, Y]f = (\text{ad}_X Y)f$$

Dazu beachten wir zunächst  $\text{ad}_X Y = \partial_t (\text{Ad } e^{tX})(Y)$ , wobei wir hier und im Rest des Beweises alle partiellen Ableitungen als ausgewertet bei Null verstehen. Das Anwenden auf eine glatte Funktion  $f$  gefolgt vom Auswerten oder "Evaluieren"  $\text{ev}_g$  an einem Gruppenelement  $g$  ist eine Linearform auf dem Raum aller glatten Vektorfelder und damit auch auf dem Raum aller linksinvarianten Vektorfelder, wir haben demnach auch

$$\text{ev}_g(\text{ad}_X Y)f = \partial_t \text{ev}_g((\text{Ad } e^{tX})(Y))f$$

Jetzt beachten wir die Verwandtschaften

$$\begin{aligned} (\text{int } h) : Y &\rightsquigarrow (\text{Ad } h)(Y) \\ (\text{int } h) : f \circ (\text{int } h) &\rightsquigarrow f \end{aligned}$$

woraus sofort folgt  $(\text{int } h) : Y(f \circ \text{int } h) \rightsquigarrow ((\text{Ad } h)(Y))(f)$  alias

$$(Y(f \circ \text{int } h)) \circ (\text{int } h)^{-1} = ((\text{Ad } h)(Y))(f)$$

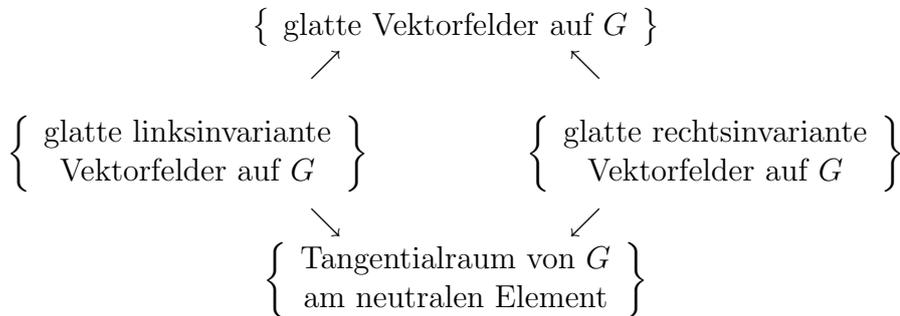
und damit

$$\begin{aligned} \text{ev}_g(\text{ad}_X Y)f &= \partial_t \text{ev}_g((\text{Ad } e^{tX})(Y))f \\ &= \partial_t (Y(f \circ \text{int } e^{tX})(e^{-tX} g e^{tX})) \\ &= \partial_t \partial_s (f \circ \text{int } e^{tX})(e^{-tX} g e^{tX} e^{-sY}) \\ &= \partial_t \partial_s f(g e^{tX} e^{sY} e^{-tX}) \\ &= \partial_t \partial_s f(g e^{tX} e^{sY}) - \partial_t \partial_s f(g e^{sY} e^{tX}) \\ &= (X(Yf))(g) - (Y(Xf))(g) \end{aligned}$$

Dieser Beweis verwendet die Exponentialabbildung nicht wirklich: Statt  $e^{tX}$  und  $e^{sY}$  könnten wir darin ebenso irgendwelche anderen glatten Wege verwenden, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  bzw.  $s = 0$  mit der Geschwindigkeit  $X$  bzw.  $Y$  durch das neutrale Element fahren.  $\square$

4.8.19. Gegeben eine Liegruppe  $G$  folgt aus der Beschreibung 1.6.15 der Liealgebra des Kerns eines Liegruppenhomomorphismus unmittelbar  $\text{Lie}(\ker \text{Ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ . Dieser Teilraum heißt im Übrigen für eine beliebige Liealgebra  $\mathfrak{g}$  das **Zentrum** der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ .

*Ergänzende Übung* 4.8.20. Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Wir betrachten das Diagramm



wo die beiden unteren Pfeile durch das Auswerten am neutralen Element definiert werden. Die obere Hälfte unseres Diagramms besteht aus Lie-Algebren

und Lie-Algebren-Homomorphismen. Die beiden unteren Pfeile sind Isomorphismen und versehen den Tangentialraum am neutralen Element  $T_e G$  mit zwei Lie-Algebra-Strukturen. Der Leser möge als Übung zeigen, daß hier die Lieklammer für die eine Struktur auf  $T_e G$  gerade das Negative der Lieklammer für die andere Struktur ist. Hinweis: Man fasse die Inversenabbildung  $G \xrightarrow{\sim} G^{\text{opp}}$  auf als Homomorphismus in die Gruppe mit der opponierten Multiplikation.

*Übung 4.8.21.* Das linksinvariante Vektorfeld auf der Gruppe  $G = \text{GL}(2; \mathbb{R})$ , dessen Wert beim neutralen Element durch die Matrix  $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$  gegeben wird, muß sich als Linearkombination der partiellen Ableitungen nach den Matrixeinträgen  $\sum f_{ij} \partial_{ij}$  mit gewissen glatten Funktionen  $f_{ij}$  als Koeffizienten schreiben lassen. Man berechne diese Funktionen und prüfe explizit, daß die linksinvariante Fortsetzung in diesem Fall ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, wenn wir  $M(2 \times 2; \mathbb{R})$  mit der durch den üblichen Kommtator gegebenen Struktur einer Liealgebra versehen. Mutige rechnen dasselbe allgemeiner für  $G = \text{GL}(n; \mathbb{R})$  und auch für rechtsinvariante Felder, beachten dabei jedoch die vorhergehende Übung 4.8.20.

**Satz 4.8.22 (Liegruppen versus Liealgebren).** *1. Jede endlichdimensionale reelle Liealgebra ist isomorph zur Liealgebra einer wegweise einfach zusammenhängenden Liegruppe.*  
*2. Sind  $G, H$  Liegruppen und ist  $G$  wegweise einfach zusammenhängend, so liefert das Differenzieren eine Bijektion*

$$\text{GrpTop}(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Alg}_{\mathbb{R}}(\text{Lie } G, \text{Lie } H)$$

*zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $H$  und der Menge aller Homomorphismen von reellen Liealgebren von  $\text{Lie } G$  nach  $\text{Lie } H$ .*

*Beweis.* Ich werde diesen Satz nicht beweisen. Man findet ihn in den meisten Büchern über Liegruppen, etwa in [HN91]. Daß das Differenzieren im Fall einer zusammenhängenden Liegruppe  $G$  stets eine Injektion liefert, haben wir bereits als Korollar 4.6.19 gezeigt.  $\square$

4.8.23. Die inverse Abbildung zur Bijektion in unserem Satz nennt man auch das **Integrieren**. Man würde etwa sagen, daß unter gewissen Umständen ein Homomorphismus von Liealgebren zu einem Homomorphismus von Liegruppen integriert werden kann. Den Spezialfall der Gruppe  $G = \mathbb{R}$  haben wir bereits in 4.3.22 kennengelernt. Der Fall  $G = S^1$ ,  $H = \mathbb{R}$  zeigt, daß die Bedingung  $G$  wegweise einfach zusammenhängend für die Surjektivität im zweiten Teil unseres Satzes notwendig ist.

4.8.24. Der Satz impliziert insbesondere, daß zwei wegweise einfach zusammenhängende Liegruppen mit isomorphen Liealgebren bereits isomorph sein müssen: In der Tat läßt sich sogar jeder Isomorphismus ihrer Liealgebren zu einem Isomorphismus der Liegruppen selber integrieren.

*Ergänzung* 4.8.25. Leser, die mit der Begrifflichkeit adjungierter Funktoren vertraut sind, mögen Satz 4.8.22 über die Beziehung von Liegruppen zu endlichdimensionalen Liealgebren auffassen als die Beschreibung eines Linksadjungierten des Funktors, der jeder Liegruppe ihre Liealgebra zuordnet: Dieser Linksadjungierte ordnet jeder endlichdimensionalen Liealgebra  $\mathfrak{g}$  “die einfach zusammenhängende Liegruppe  $G$  mit  $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$ ” zu.

*Übung* 4.8.26 (**Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten, Variante**). Gegeben  $G$  eine Liegruppe und  $\Phi \subset \text{GrpTop}^\times G$  eine Menge von Automorphismen von  $G$  ist die Liealgebra der abgeschlossenen Untergruppe  $G^\Phi = \{g \in G \mid \varphi(g) = g \ \forall \varphi \in \Phi\}$  der Fixpunkte von  $\Phi$  genau die Menge der Fixpunkte in der Liealgebra, in Formeln

$$\text{Lie}(G^\Phi) = (\text{Lie } G)^\Phi$$

Hier ist rechts die abgeleitete Operation gemeint, ausgeschrieben hätten wir also  $\text{Lie}(G^\Phi) = \{X \in \text{Lie } G \mid (d_e \varphi)(X) = X \ \forall \varphi \in \Phi\}$ . Hinweis: Man kombiniere 1.6.16 und 1.5.12.

*Übung* 4.8.27 (**Liealgebra eines Zentralisators**). Gegeben eine Liegruppe  $G$  und ein Element  $h \in G$  gilt stets  $\text{Lie } Z_G(h) = \{X \in \text{Lie } G \mid (\text{Ad } h)(X) = X\}$ . Gegeben eine Liegruppe  $G$  und eine Teilmenge  $H \subset G$  gilt stets  $\text{Lie } Z_G(H) = \{X \in \text{Lie } G \mid (\text{Ad } h)(X) = X \ \forall h \in H\}$ . Hinweis: Man wende 1.6.16 an auf  $\phi = \text{int } h$  bzw. 4.8.26 auf  $\Phi = \{\text{int } h \mid h \in H\}$ .

*Übung* 4.8.28. Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung  $G \rightarrow \text{GL}(V)$  einer Liegruppe mit der abgeleiteten Darstellung ihrer Liealgebra zeige man die Formel

$$g(X(g^{-1}v)) = ((\text{Ad } g)(X))v \quad \forall g \in G, X \in \text{Lie } G, v \in V$$

*Übung* 4.8.29. Man zeige, daß gegeben eine Liegruppe  $G$  für jedes Gruppenelement  $g \in G$  die Abbildung  $\text{Ad}(g)$  ein Liealgebrenhomomorphismus ist.

## 4.9 Quotienten und homogene Räume

**Satz 4.9.1.** *Jede abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe ist bereits eine Untermannigfaltigkeit und damit selbst eine Liegruppe.*

*Beweis.* Mutatis mutandis wie im Fall 1.2.2 von Matrix-Liegruppen.  $\square$

4.9.2. Die Lie-Algebra einer abgeschlossenen Untergruppe einer Liegruppe  $H \triangleleft G$  besteht nach 4.6.23 genau aus allen Tangentialvektoren am neutralen Element der ursprünglichen Liegruppe derart, daß die zugehörige Einparameteruntergruppe ganz in unserer Untergruppe verläuft, in Formeln

$$\text{Lie } H = \{X \in \text{Lie } G \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset H\}$$

**Satz 4.9.3 (Quotientenkonstruktion).** *Sei  $G$  eine Liegruppe und  $H \triangleleft G$  eine abgeschlossene Untergruppe.*

1. *Versehen mit der finalen Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums bezüglich der Projektion  $\pi : G \rightarrow G/H$  ist  $G/H$  eine glatte Mannigfaltigkeit.*
2. *Jeder Punkt von  $G/H$  besitzt eine offene Umgebung  $U$  derart, daß  $\pi$  über  $U$  einen glatten Schnitt besitzt, und für jeden solchen glatten Schnitt  $s : U \rightarrow G$  ist die Abbildung  $U \times H \rightarrow G$ ,  $(x, h) \mapsto s(x)h$  eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten.*

4.9.4. Die zweite Eigenschaft des Quotienten besagt insbesondere, daß die Projektion  $G \rightarrow G/H$  eine glatte Submersion im Sinne von 4.3.17 sein muß. In der Terminologie der Hauptfaserbündel, die wir in 5.8.1 einführen, besagt die zweite Eigenschaft genauer, daß  $G$  mit seiner  $H$ -Rechtsoperation und der offensichtlichen Projektion auf den Quotienten ein glattes  $H$ -Hauptfaserbündel auf  $G/H$  ist. Wir erinnern Teil zwei auch in der Sprechweise, die **Quotientenabbildung sei lokal trivial**.

*Ergänzung 4.9.5.* In meinen Augen ist eine der wesentlichen Motivationen für die Entwicklung der Begrifflichkeit abstrakter Mannigfaltigkeiten, daß es diese Sprache erlaubt, die Methoden der Analysis auf Quotientenräume auszudehnen. Stetigkeitsbetrachtungen für Quotienten gelingen bereits mit dem Formalismus der topologischen Räume, Differenzierbarkeitsbetrachtungen aber erst mit dem Formalismus der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. In diesem Sinne beginnt also an dieser Stelle die Belohnung für die ganze Arbeit, die wir seit dem Beginn dieses Abschnitts in die Entwicklung der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gesteckt haben.

*Beweis.* Nach 3.8.10 ist der Quotient mit seiner Quotiententopologie schon einmal Hausdorff. Wir wählen nun ein Vektorraumkomplement  $V \subset \text{Lie } G$  von  $\text{Lie } H$  und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : V \times H &\rightarrow G \\ (X, h) &\mapsto (\exp X)h \end{aligned}$$



Illustration zum Beweis des Satzes über Quotientenmannigfaltigkeiten. Hier ist etwa  $G \cong \mathbb{R}^2$  die Papierebene, das neutrale Element ist als fetter Punkt eingezeichnet, und  $H \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  bestünde aus lauter horizontalen Linien.

Nach Wahl von  $V$  ist ihr Differential in  $(0, 1)$  bijektiv, folglich gibt es offene Umgebungen  $A \subseteq V$  von Null und  $B \subseteq H$  von 1 derart, daß  $\varphi$  eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten

$$\varphi : A \times B \hookrightarrow G$$

induziert. Ich will nun zeigen, daß  $A$  so zu einer offenen Umgebung  $A_v \subseteq V$  von Null verkleinert werden kann, daß  $\varphi$  sogar eine Injektion

$$\varphi : A_v \times H \hookrightarrow G$$

induziert. Ganz allgemein ist  $\varphi(X_1, h_1) = \varphi(X_2, h_2)$  gleichbedeutend zur Identität  $\exp(X_2)^{-1} \exp(X_1) = h_2 h_1^{-1}$ . Da  $H$  eine Mannigfaltigkeit ist für die induzierte Topologie, gibt es  $U \subseteq G$  mit  $U \cap H = B$ . Sicher können wir  $A$  so verkleinern zu  $A_v$ , daß für  $X_1, X_2 \in A_v$  stets gilt  $\exp(X_2)^{-1} \exp(X_1) \in U$ . Dann folgt aus  $\varphi(X_1, h_1) = \varphi(X_2, h_2)$  mit  $X_1, X_2 \in A_v$  jedoch erst

$$\exp(X_2)^{-1} \exp(X_1) = h_2 h_1^{-1} \in U \cap H = B$$

und dann  $\exp(X_1) = \exp(X_2) h_2 h_1^{-1}$  und daraus wegen der Injektivität von  $\varphi$  auf  $A \times B$  wieder  $(X_1, 1) = (X_2, h_2 h_1^{-1})$  alias  $(X_1, h_1) = (X_2, h_2)$ . Mithin induziert  $\varphi$  für unser so verkleinertes  $A_v$  eine Injektion  $\varphi : A_v \times H \hookrightarrow G$ . Mit Rechtsverschiebung durch  $h \in H$  erkennen wir, daß ihr Differential an jeder Stelle bijektiv ist. Folglich ist diese Injektion eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten und liefert wegen 4.1.29 auch eine offene Einbettung von  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen  $A_v \hookrightarrow G/H$ . Verknüpfen wir diese Einbettung mit den Automorphismen  $(g \cdot) : G/H \rightarrow G/H$ , so erkennen wir, daß  $G/H$  in der Tat eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und folgern auch die zweite Aussage des Satzes sofort.  $\square$

*Übung 4.9.6.* Gegeben ein homogener Raum  $X$  einer Liegruppe  $G$  derart, daß die Isotropiegruppe eines Punktes abgeschlossen ist, gibt es genau eine Struktur als Mannigfaltigkeit auf  $X$  derart, daß für jeden Punkt  $x \in X$  das Anwenden  $G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto gx$  eine finale Abbildung ist.

4.9.7. Wichtige Mannigfaltigkeiten dieser Bauart sind die reellen und die komplexen **Graßmann-Mannigfaltigkeiten**

$$\text{Gr}(m; V) = \{W \subset V \mid \dim W = m\}$$

für einen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraum  $V$  sowie die reellen und die komplexen **Stiefel-Mannigfaltigkeiten**  $V_q(W)$  aller angeordneten Orthonormalsysteme mit  $q$  Vektoren in einem vorgegebenen euklidischen Vektorraum  $W$ . Auf allen diesen Mannigfaltigkeiten, sofern sie nicht leer sind, operiert eine kompakte Gruppe transitiv. Mithin sind sie alle auch selbst kompakt.

*Übung 4.9.8.* Man zeige für einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  der Dimension  $n$ , daß die Dimension der Graßmann'schen seiner  $m$ -dimensionalen Teilräume gegeben wird durch die Formel

$$\dim(\text{Gr}(m; V)) = m(n - m)$$

**Proposition 4.9.9.** *Ist  $G$  eine Liegruppe und  $N \subset G$  ein abgeschlossener Normalteiler, so ist auch  $G/N$  eine Liegruppe.*

*Erster Beweis.* Das Produkt von Submersionen ist eine Submersion, das Produkt von Surjektionen ist eine Surjektion, und surjektive Submersionen sind final nach 4.3.17. Mithin ist  $G \times G \twoheadrightarrow G/N \times G/N$  final und damit die Multiplikation  $G/N \times G/N \rightarrow G/N$  glatt.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Da Finalität lokal ist in der Basis nach 4.1.29, und da die Projektionen eines Produkts von Mannigfaltigkeiten auf seine Faktoren final sind, folgt aus der lokalen Trivialität des Quotientenmorphisms nach 4.9.3 unmittelbar, daß auch  $G \times G \twoheadrightarrow G/N \times G/N$  final und damit die Multiplikation  $G/N \times G/N \rightarrow G/N$  glatt ist.  $\square$

*Übung 4.9.10.* Ist  $G$  eine Liegruppe und  $H \subset G$  eine abgeschlossene Untergruppe, so ist die Operation  $G \times G/H \rightarrow G/H$  glatt.

**Definition 4.9.11.** Eine Mannigfaltigkeit  $X$  mit einer transitiven Operation einer Liegruppe  $G$  derart, daß für jeden Punkt  $x \in X$  die Operation einen Diffeomorphismus  $G/G_x \xrightarrow{\sim} X$  induziert, heißt auch ein **homogener Raum** für unsere Liegruppe  $G$ . Zum Beispiel ist die Kugelschale ein homogener Raum für die Drehgruppe.

**Proposition 4.9.12.** *Eine Mannigfaltigkeit mit einer transitiven Operation einer Liegruppe ist stets ein homogener Raum für besagte Liegruppe.*

4.9.13. Beim Beweis dieser Proposition geht wesentlich ein, daß wir bei unserer Definition einer Liegruppe die Separabilität mit gefordert hatten.

*Beweis.* Sei  $G \times X \rightarrow X$  unser homogener Raum. Gegeben  $x \in X$  liefert das Anwenden auf  $x$  wegen der universellen Eigenschaft des Quotienten eine glatte bijektive Abbildung  $G/G_x \rightarrow X$  vom Quotienten nach der Isotropiegruppe von  $x$  in unseren homogenen Raum. Nach Übung 4.6.24 ist deren Differential injektiv beim Bild des neutralen Elements in  $G/G_x$ , und mit Verschieben folgt, daß es überall injektiv sein muß. Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, daß es überall bijektiv sein muß. In allen Anwendungen, die mir einfallen, ist nun die Identität

$$\dim G = \dim X + \dim G_x$$

eh klar und der Rest des Beweises damit überflüssig. Auch diese Identität kann man jedoch aus unseren Annahmen folgern, wenn man sich erinnert, daß wir ja von unseren Liegruppen die Separabilität fordern. Gälte nun unsere Identität nicht, so hätten ja die Tangentialräume von  $G/G_x$  eine Dimension  $k < \dim X := n$  und nach Übergang zu Karten würde folgen, daß es eine offene Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  gäbe und eine abzählbare Familie  $(U_\nu, \varphi_\nu)$  mit  $U_\nu \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $\varphi_\nu : U_\nu \rightarrow W$  stetig differenzierbar derart, daß die Bilder  $\varphi_\nu(U_\nu)$  bereits ganz  $W$  überdecken. Das ist jedoch unmöglich, da diese Bilder nach IV.6.8.6 alle Lebesgue-Nullmengen sind.  $\square$

*Ergänzung 4.9.14.* Mit etwas mehr Mühe kann man im vorhergehenden Beweis von 4.9.12 die Argumentation mit dem Lebesgue-Integral auch durch eine Argumentation mit dem dem Baire'schen Kategoriensatz V.3.2.7 ersetzen.

*Beispiel 4.9.15.* Versieht man  $\mathbb{R}$  mit der diskreten Topologie, so erhält man eine "nicht separable nulldimensionale Liegruppe"  $\mathbb{R}_d$ , und die Identität  $\mathbb{R}_d \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein bijektiver stetiger Gruppenhomomorphismus, der kein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist.

*Übung 4.9.16.* Ist  $\varphi : G \rightarrow H$  ein stetiger Homomorphismus von Liegruppen mit abgeschlossenem Bild, so induziert  $\varphi$  einen Isomorphismus von Liegruppen  $(G/\ker \varphi) \xrightarrow{\sim} \text{im } \varphi$ . Hinweis: 4.9.12. Auch hier ist die Separabilität von  $G$  wesentlich.

## 4.10 Abelsche Liegruppen

**Lemma 4.10.1 (Charakterisierungen abelscher Liegruppen).** *Für eine zusammenhängende Liegruppe  $G$  sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Liegruppe  $G$  ist abelsch;*
2. *Ihre Liealgebra  $\text{Lie } G$  ist abelsch;*
3. *Die Exponentialabbildung definiert einen Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der Liealgebra in unsere Liegruppe  $\text{Lie } G \rightarrow G$ ;*
4. *Die Exponentialabbildung definiert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\text{Lie } G \rightarrow G$ .*

*Beweis.* Wir beginnen mit (1)  $\Leftrightarrow$  (2) und bemerken dazu, daß für jede zusammenhängende Liegruppe gilt

$$\begin{aligned}
 G \text{ abelsch} &\Leftrightarrow \text{Int } g = \text{id} : G \rightarrow G && \forall g \in G \\
 &\Leftrightarrow \text{Ad } g = \text{id} : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } G && \forall g \in G \\
 &\Leftrightarrow \text{ad } X = 0 : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } G && \forall X \in \text{Lie } G \\
 &\Leftrightarrow [X, Y] = 0 && \forall X, Y \in \text{Lie } G
 \end{aligned}$$

wobei wir zweimal das Korollar 4.6.19 verwenden, wonach ein Homomorphismus von einer zusammenhängenden Liegruppe in eine weitere Liegruppe bereits durch sein Differential beim neutralen Element eindeutig festgelegt wird. Für (1)  $\Rightarrow$  (3) bemerken wir, daß für abelsches  $G$  und  $X, Y \in \text{Lie } G$  beliebig ja auch  $t \mapsto \exp(tX) \exp(tY)$  ein Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow G$  ist, und berechnen wir seine Geschwindigkeit bei  $t = 0$ , so folgt  $\exp(tX) \exp(tY) = \exp(t(X + Y))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und damit  $\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y)$ . Die Exponentialabbildung ist also ein Gruppenhomomorphismus. Ihr Bild  $\exp(\text{Lie } G)$  ist dann eine Untergruppe von  $G$ , die offen ist, da sie eine offene Umgebung des neutralen Elements umfaßt. Wegen  $G$  zusammenhängend folgt daraus  $\exp$  surjektiv, und das zeigt (3)  $\Rightarrow$  (4). Schließlich ist (4)  $\Rightarrow$  (1) offensichtlich.  $\square$

**Proposition 4.10.2 (Abelsche Liegruppen).** *Jede zusammenhängende abelsche Liegruppe ist isomorph zu genau einer Gruppe der Gestalt*

$$S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

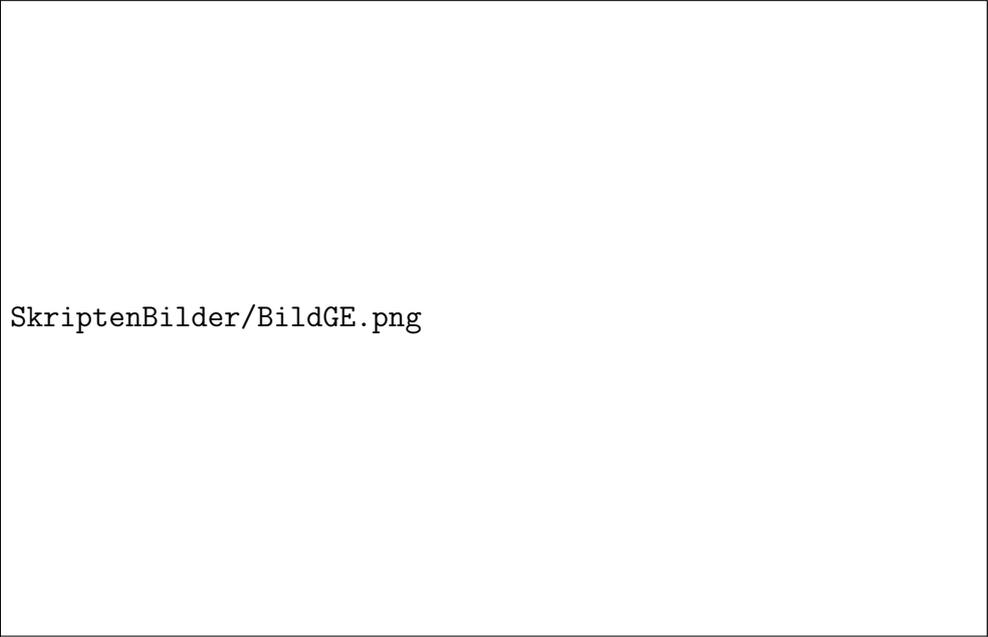
*Beweis.* Sei  $G$  unsere Liegruppe. Nach 4.9.16 und 4.10.1 induziert die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus  $\text{Lie } G / \ker(\exp) \xrightarrow{\sim} G$  und der Kern  $\ker(\exp) \subset \text{Lie } G$  ist eine diskrete Untergruppe. Nun kann man die Klassifikation 4.10.7 diskreter Untergruppen endlichdimensionaler reeller Vektorräume anwenden.  $\square$

*Ergänzung 4.10.3.* Wir hätten diesen Satz auch für Matrix-Liegruppen bereits formulieren und beweisen können. Dennoch sind dieser Satz und sein Beweis in meinen Augen eine gute Illustration für die Kraft unserer neuen abstrakteren Methoden.

4.10.4. Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist diskret genau dann, wenn es eine Umgebung des neutralen Elements gibt, die unsere Untergruppe nur im neutralen Element trifft. Eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist abgeschlossen, da für eine beliebig vorgegebene Norm jede Cauchy-Folge in unserer diskreten Untergruppe bis auf endlich viele Glieder konstant sein muß.

*Übung 4.10.5.* Eine diskrete Untergruppe einer Hausdorff'schen topologischen Gruppe ist stets abgeschlossen. Hinweis: Sonst gäbe es einen Punkt außerhalb unserer Untergruppe derart, daß jede seiner Umgebungen Punkte aus besagter Untergruppe enthält.

*Übung 4.10.6.* Man bestimme alle stetigen Gruppenhomomorphismen zwischen zwei beliebigen zusammenhängenden abelschen Liegruppen.



SkriptenBilder/BildGE.png

Die fetten Punkte stellen Elemente einer diskreten Untergruppe der Verschiebungsgruppe der Papierebene dar, bezüglich des durch einen Kringel markierten Ursprungs. Die Kreuzchen stellen Elemente der Projektion  $p(L)$  unseres Gitters  $L$  auf den als gestrichelte Linie eingezeichneten Teilraum  $v^\perp$ .

**Satz 4.10.7 (Diskrete Untergruppen reeller Vektorräume).** *Eine Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist diskret genau dann, wenn sie als Untergruppe von einer linear unabhängigen Teilmenge unseres Vektorraums erzeugt wird.*

*Beweis.* Das Gruppenerzeugnis einer linear unabhängigen Teilmenge ist offensichtlich diskret. Um auch die andere Implikation zu zeigen, versehen wir unseren endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und argumentieren durch Induktion über die Dimension. Nach 3.3.4 trifft unsere diskrete Untergruppe  $L \subset V$  jedes Kompaktum in einer endlichen Menge. Ist  $L$  trivial, so ist der Satz klar. Sonst finden wir in  $L \setminus \{0\}$  einen Vektor  $v$  kürzester Länge. Wir bezeichnen dann mit  $p : V \rightarrow v^\perp$  die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement von  $v$  und behaupten, daß auch  $p(L)$  diskret ist. Sonst finden wir nämlich in  $p(L) \setminus \{0\}$  Vektoren beliebig kleiner Länge. Gegeben  $a \in p(L)$  hat jedoch sein Urbild in  $L$  die Gestalt

$$p^{-1}(a) \cap L = a + cv + \mathbb{Z}v \quad \text{mit } |c| \leq 1/2$$

Insbesondere hat  $a + cv$  die quadrierte Länge  $\|a + cv\|^2 \leq \|a\|^2 + \frac{1}{4}\|v\|^2$ , und für  $0 < \|a\| < \frac{1}{2}\|v\|$  erhielten wir Vektoren in  $L \setminus \{0\}$ , die noch kürzer wären als  $v$ . Dieser Widerspruch zeigt, daß  $p(L)$  diskret liegen muß. Nach Induktionsannahme finden wir also linear unabhängige  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r \in v^\perp$ , die  $p(L)$  erzeugen. Sind dann  $v_i \in L$  Urbilder der  $\bar{v}_i$ , so sind  $v, v_1, \dots, v_r$  linear unabhängig in  $V$  und erzeugen  $L$ .  $\square$

**Definition 4.10.8.** Eine topologische Gruppe heißt ein **Torus** oder präziser ein **kompakter Torus** genau dann, wenn sie isomorph ist zu einem Produkt von endlich vielen Kopien der Kreislinie  $S^1$ . Die Zahl der benötigten Kopien ist nach 4.6.18 wohlbestimmt und heißt der **Rang** unseres Torus.

4.10.9. Nach der Klassifikation in 4.10.2 zusammenhängender abelscher Liegruppen kann man Tori auch charakterisieren als abelsche kompakte zusammenhängende Liegruppen.

**Definition 4.10.10.** Eine topologische Gruppe heißt **topologisch zyklisch** genau dann, wenn es ein Element darin gibt, dessen Erzeugnis dicht liegt. Solch ein Element heißt dann ein **topologischer Erzeuger**.

4.10.11. Nach 3.7.12 ist jede topologisch zyklische topologische Gruppe kommutativ.

**Proposition 4.10.12.** *Jeder kompakte Torus ist topologisch zyklisch.*

4.10.13. In 4.10.17 geben wir sogar die vollständige Klassifikation aller topologisch zyklischen Liegruppen, aber für den weiteren Fortgang der Theorie ist das nicht mehr von Belang.

*Beweis.* Wir zeigen genauer, daß für  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$  gleichbedeutend sind:

- (1)  $\bar{a} \in \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$  ist *kein* topologischer Erzeuger;
- (2) Die Elemente  $1, a_1, \dots, a_k$  sind linear abhängig über  $\mathbb{Q}$ ;
- (3) Es gibt einen surjektiven stetigen Homomorphismus von Liegruppen  $\varphi: \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  mit  $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$ .

Hier ist (3)  $\Rightarrow$  (1) offensichtlich und (1)  $\Rightarrow$  (3) ergibt sich, da der Quotient nach dem Abschluß des Erzeugnisses von  $\bar{a}$  ja nach 4.10.2 ein nichttrivialer Torus sein muß. Weiter muß jeder Morphismus wie in (3) die Gestalt

$$\overline{(b_1, \dots, b_k)} \mapsto \overline{n_1 b_1 + \dots + n_k b_k}$$

haben für geeignete  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ , nicht alle Null wegen der Surjektivität, und  $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$  bedeutet dann  $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n_0$  für ein  $n_0 \in \mathbb{Z}$  und damit (2). Dasselbe Argument zeigt aber auch (2)  $\Rightarrow$  (3). Folglich ist in der Tat jeder kompakte Torus topologisch zyklisch.  $\square$

*Ergänzung* 4.10.14. Im Verlauf des vorhergehenden Beweises haben wir unter anderem gezeigt, daß für  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$  genau dann  $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}^k$  in  $\mathbb{R}^k$  dicht liegt, wenn  $1, a_1, \dots, a_k$  linear unabhängig sind über  $\mathbb{Q}$ . Der Beweis dieser Aussage im Rahmen der Lie-Theorie scheint mir besonders transparent.

*Ergänzende Übung* 4.10.15 (**Untergruppen reeller Vektorräume**). Eine Untergruppe  $L$  der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  ist abgeschlossen genau dann, wenn es in  $V$  eine linear unabhängige Familie von Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  gibt und ein  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$  und

$$L = \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_k + \mathbb{Z}v_{k+1} + \dots + \mathbb{Z}v_n$$

Hinweis: Eine abgeschlossene Untergruppe ist stets glatt und ihre Einszusammenhangskomponente  $L^\circ$  ist abgeschlossen. Da  $V/L^\circ$  die Quotiententopologie trägt, ist das Bild von  $L$  darin auch abgeschlossen. Man mag auch elementar ohne alle Liethorie mit 1.2.15 und 4.10.7 argumentieren.

*Ergänzende Übung* 4.10.16. Die diskreten Untergruppen von  $\mathbb{C}^\times$  sind genau die Gruppen, die von einer Einheitswurzel oder einer invertierbaren komplexen Zahl außerhalb des Einheitskreises oder je einem Element dieser beiden Arten erzeugt werden.

**Proposition 4.10.17 (Topologisch zyklische kompakte Liegruppen).**

*Eine kompakte Liegruppe ist topologisch zyklisch genau dann, wenn sie abelsch ist mit zyklischer Komponentengruppe.*

4.10.18. Diese Proposition wird in 6.4.15 noch gebraucht, wo wir zeigen, daß der Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe stets zusammenhängend ist. Stärkere Aussagen, die im folgenden nicht mehr gebraucht werden, faßt dann der anschließende Satz 4.10.19 zusammen.

*Beweis.* Jede topologisch zyklische Gruppe ist abelsch nach 3.7.12 und jeder Quotient einer topologisch zyklischen Gruppe ist offensichtlich auch topologisch zyklisch. Es bleibt zu zeigen, daß jede kompakte abelsche Liegruppe mit zyklischer Komponentengruppe topologisch zyklisch ist. Sei dazu  $G$  unsere Gruppe und  $g \in G$  ein Repräsentant eines Erzeugers der Komponentengruppe  $G/G^\circ$ . Diese Komponentengruppe ist endlich, sagen wir von der Ordnung  $|G/G^\circ| = m$ . Es folgt  $g^m \in G^\circ$ , und da  $G^\circ$  ein Torus ist, finden wir  $a \in T$  mit  $a^m = g^m$ . Indem wir  $g$  durch  $a^{-1}g$  ersetzen, dürfen wir also  $g^m = 1$  annehmen, und dann erhalten wir einen Isomorphismus  $G^\circ \times (G/G^\circ) \xrightarrow{\sim} G$  mittels der Abbildungsvorschrift  $(b, \bar{g}) \mapsto bg^n$ . Ein topologischer Erzeuger dieses Produkts ist aber offensichtlich jedes Paar  $(c, \bar{g})$ , bei dem wir  $c$  so wählen, daß  $c^m$  ein topologischer Erzeuger von  $G^\circ$  wird. Das schließlich ist nach 4.10.12 stets möglich.  $\square$

**Satz 4.10.19 (Klassifikation topologisch zyklischer Liegruppen).** *Jede topologisch zyklische Liegruppe ist entweder isomorph zu  $\mathbb{Z}$  oder aber isomorph zu  $S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  für eine wohlbestimmte Zahl  $r \geq 0$  von Kopien von  $S^1$  und ein wohlbestimmtes  $m \geq 1$ .*

*Beweis.* Der kompakte Fall wurde bereits im Beweis der Proposition 4.10.17 vollständig geklärt. Es bleibt zu zeigen, daß jede nichtkompakte topologisch zyklische Liegruppe isomorph ist zu  $\mathbb{Z}$ . Nach Übung 4.10.20 ist unsere Gruppe ja isomorph zum Produkt ihrer Komponentengruppe mit ihrer Einszusammenhangskomponente. Die Einszusammenhangskomponente muß ein kompakter Torus sein, da unsere Gruppe sonst einen surjektiven Gruppenhomomorphismus auf die nicht topologisch zyklische Gruppe  $\mathbb{R}$  hätte. Desgleichen muß die Komponentengruppe zyklisch sein, und im nichtkompakten Fall muß die Komponentengruppe dann natürlich unendlich zyklisch sein. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß das Produkt eines nichttrivialen kompakten Torus mit  $\mathbb{Z}$  nicht topologisch zyklisch sein kann.  $\square$

*Übung 4.10.20.* Man zeige, daß jede abelsche Liegruppe  $G$  isomorph ist zum Produkt ihrer Einszusammenhangskomponente  $G^\circ$  mit ihrer Komponentengruppe  $G/G^\circ$ , einer diskreten Gruppe. Hinweis: Man beschränke sich der Einfachheit halber auf den Fall, daß die Komponentengruppe endlich erzeugt ist. Wenn die entsprechenden Vorkenntnisse vorhanden sind, kann man sehr elegant mit ?? und ?? argumentieren: Die exakte Sequenz  $G^\circ \hookrightarrow G \rightarrow G/G^\circ$  muß spalten, da  $G^\circ$  divisibel und mithin eine injektive abelsche Gruppe ist.

### 4.11 Morphismen von Tori

4.11.1. Die Menge der stetigen Gruppenhomomorphismen von einer topologischen Gruppe  $G$  nach  $S^1$  notieren wir

$$\mathfrak{X}(G) := \text{GrpTop}(G, S^1)$$

Offensichtlich bildet  $\mathfrak{X}(G)$  eine Untergruppe der Einheitengruppe des Rings  $\mathcal{C}(G)$  mit seiner punktweisen Verknüpfung. Wir notieren jedoch die Verknüpfung in  $\mathfrak{X}(G)$  additiv in der Hoffnung, daß das anschaulicher wirkt. Elemente  $\lambda \in \mathfrak{X}(G)$  schreiben wir in der Form  $e^\lambda$ , wenn wir sie als komplexwertige Funktionen auffassen und insbesondere, wenn wir sie als komplexwertige Funktionen addieren wollen, so daß also im Ring  $\mathcal{C}(G)$  gilt  $e^{\lambda+\mu} = e^\lambda e^\mu$ . Gegeben ein stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  induziert das Vorschalten von  $\varphi$  in der Gegenrichtung einen Homomorphismus diskreter abelscher Gruppen

$$(\circ\varphi) : \mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$$

4.11.2. Ist  $G$  eine Liegruppe, so liefert für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus  $\chi : G \rightarrow S^1$ , ja sogar für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  das Differential gefolgt von der offensichtlichen Identifikation  $T_1\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $d_e\chi : \text{Lie } G \rightarrow \mathbb{C}$  und dann mit der universellen Eigenschaft der Komplexifizierung auch eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $d_e\chi : \text{Lie}_{\mathbb{C}} G \rightarrow \mathbb{C}$ , also ein Element  $d_e\chi \in (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^*$  des Dualraums. Nach der Produktregel ist  $\chi \mapsto d_e\chi$  ein Gruppenhomomorphismus  $\mathfrak{X}(G) \rightarrow (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^*$ , und man sieht auch leicht, daß er natürlich ist in  $G$ , daß also für jeden Homomorphismus von Liegruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(H) & \rightarrow & (\text{Lie}_{\mathbb{C}} H)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}(G) & \rightarrow & (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^* \end{array}$$

kommutiert, mit  $(\circ\varphi)$  und dem Transponierten des komplexifizierten Differentials  $(d\varphi)^\top$  in den Vertikalen. Ist  $G$  zusammenhängend, so liefert die

Vorschrift  $\chi \mapsto d_e\chi$  sogar eine Injektion

$$\mathfrak{X}(G) \hookrightarrow (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^*$$

Es ist dann üblich, diese Injektion schlicht als Einbettung einer Teilmenge zu denken und zu schreiben und insbesondere  $d_e\chi$  auch schlicht  $\chi$  zu notieren.

*Ergänzung 4.11.3.* In der Fouriertheorie hatten wir für verschiedene kommutative topologische Gruppen auch die Notation  $\text{GrpTop}(G, S^1) = \hat{G}$  eingeführt und diese Menge als die Menge der unitären Charaktere von  $G$  bezeichnet. Im nichtkommutativen Fall meint  $\hat{G}$  jedoch meist die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler unitärer Darstellungen, und im Fall nichtkommutativer Gruppen sind diese keineswegs alle eindimensional.

**Lemma 4.11.4.** *Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $H$  ein Torus, so induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen den stetigen Gruppenhomomorphismen von  $G \rightarrow H$  und den Morphismen abelscher Gruppen  $\mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$  in die Gegenrichtung,*

$$\text{GrpTop}(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(\mathfrak{X}(H), \mathfrak{X}(G))$$

*Beweis.* Gilt die Aussage für zwei Tori  $H_1$  und  $H_2$ , so auch für ihr Produkt  $H = H_1 \times H_2$ . Es reicht also, den Fall  $H \cong S^1$  zu prüfen, und der ist evident.  $\square$

*Übung 4.11.5.* Man zeige, daß eine Sequenz von kompakten abelschen Gruppen  $T' \rightarrow T \rightarrow T''$  exakt ist genau dann, wenn die auf den Charaktergruppen induzierte Sequenz  $\mathfrak{X}(T'') \rightarrow \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(T')$  exakt ist. Hinweis: 4.11.6.

*Ergänzende Übung 4.11.6 (Kompakte abelsche Liegruppen).* Der Funktor  $\mathfrak{X}$  liefert sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Kompakte abelsche} \\ \text{Liegruppen} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Endlich erzeugte abelsche} \\ \text{diskrete Gruppen} \end{array} \right\}^{\text{opp}} \\ G & \mapsto & \mathfrak{X}(G) \end{array}$$

Um das zu sehen, zeige man die Aussage des Lemmas 4.11.4 allgemeiner für  $H$  eine nicht notwendig zusammenhängende kompakte abelsche Liegruppe. Hinweis: 4.10.20. Des weiteren prüfe man für jede zyklische, ja für jede endliche kommutative Gruppe  $G$ , daß es Isomorphismen  $G \cong \mathfrak{X}(G)$  gibt. Diese sind jedoch im allgemeinen unkanonisch.

*Ergänzung 4.11.7.* Sind  $G$  und  $H$  abelsche lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppen, so erhalten wir in derselben Weise eine Bijektion

$$\text{GrpTop}(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{GrpTop}(\hat{H}, \hat{G})$$

mit  $\hat{G}$  der Pontrjagin-dualen Gruppe, die wir in V.2.7.1 angesprochen hatten. *Erkläre hier kompakt-offene Topologie!*

## 5 Vektorraumbündel und Felder

### 5.1 Lineare Algebra mit Vektorraumbündeln

5.1.1. Wir verwenden im folgenden die Sprache der Kategorientheorie  $??$ . Ganz allgemein erklären wir zu jeder Kategorie  $\mathcal{C}$  das zugehörige Gruppoid  $\mathcal{C}^\times$  als die Kategorie mit denselben Objekten, aber nur den Isomorphismen der ursprünglichen Kategorie als Morphismen.

**Definition 5.1.2.** Bezeichnet  $\text{Mod}_k(n)$  die Kategorie der  $n$ -dimensionalen  $k$ -Vektorräume, so definieren wir einen **Gruppoid-Funktor  $F$  über  $k$  vom Typ  $(m; n)$**  oder auch kurz einen  $(m; n)$ -**Gruppoid-Funktor** als einen Funktor zwischen den entsprechenden Gruppoidkategorien von Vektorräumen

$$F : \text{Mod}_k(n)^\times \rightarrow \text{Mod}_k(m)^\times$$

5.1.3. Ausformuliert ist ein  $(m; n)$ -Gruppoid-Funktor also eine Zuordnung, die jedem  $n$ -dimensionalen  $k$ -Vektorraum  $V$  einen  $m$ -dimensionalen  $k$ -Vektorraum  $F(V)$  zuordnet und jedem Vektorraumisomorphismus  $f : V \xrightarrow{\sim} W$  einen Vektorraumisomorphismus  $F(f) : F(V) \xrightarrow{\sim} F(W)$  derart, daß für jeden  $n$ -dimensionalen  $k$ -Vektorraum  $V$  gilt  $F(\text{id}_V) = \text{id}_{F(V)}$  und, wann immer  $f, g$  verknüpfbare Isomorphismen sind,  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ .

*Beispiele 5.1.4.* Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist die Vorschrift  $V \mapsto V^\top$ ,  $f \mapsto (f^\top)^{-1}$ , die jedem  $n$ -dimensionalen Raum seinen Dualraum zuordnet und jedem Isomorphismus das Inverse der transponierten Abbildung, ein  $(n; n)$ -Gruppoidfunktor. Für beliebige natürliche Zahlen  $r, n \geq 0$  ist die  $r$ -te Tensorpotenz  $V \mapsto V^{\otimes r}$ ,  $f \mapsto f^{\otimes r}$  aus  $??$  ein  $(n^r; n)$ -Gruppoidfunktor. Für beliebige natürliche Zahlen  $r, n \geq 0$  ist die  $r$ -te äußere Potenz  $V \mapsto \bigwedge^r V$ ,  $f \mapsto \bigwedge^r f$  aus  $??$  ein Gruppoidfunktor und ebenso ihre noch wichtigere und einfachere zu konstruierende Verknüpfung mit dem Dualisieren  $V \mapsto \text{Alt}^r V$  aus [IV.7.1.1](#) oder auch  $??$  mit  $f \mapsto (f^\top)^{-1}$  in der Notation [IV.7.1.13](#). Gegeben Gruppoidfunktionen  $F, G$  der Typen  $(l; m)$  bzw.  $(m; n)$  ist  $F \circ G$  ein Gruppoidfunktor vom Typ  $(l; n)$ .

**Definition 5.1.5.** Ein Gruppoidfunktor über  $\mathbb{R}$  heißt **stetig** bzw. **glatt** genau dann, wenn die Abbildungen  $F : \text{Hom}^\times(V, W) \rightarrow \text{Hom}^\times(F(V), F(W))$  stetig bzw. glatt sind.

5.1.6. Aus [1.6.8](#) folgt unmittelbar, daß die Bedingungen “stetig” und “glatt” in diesem Zusammenhang gleichbedeutend sind, aber mit diesem doch nicht ganz offensichtlichen Resultat will ich die Darstellung hier nicht belasten.

*Beispiele 5.1.7.* Im Fall  $k = \mathbb{R}$  sind alle Gruppoidfunktionen aus [5.1.4](#) glatt.

5.1.8 (**Anwenden von Gruppoidfunktoren auf Bündel**). Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit  $X$ , ein glattes  $n$ -dimensionales Vektorraumbündel  $p : E \rightarrow X$  im Sinne von 4.4.8.4 und ein glatter  $(m; n)$ -Gruppoidfunktoren  $F$  über  $\mathbb{R}$  gibt es auf der disjunkten Vereinigung

$$F(E) := \bigsqcup_{x \in X} F(E_x)$$

genau eine Struktur als glattes  $m$ -dimensionales Vektorraumbündel auf  $X$  derart, daß für jede Bündelkarte  $f : U \times V \rightarrow E$  mit  $U \subseteq X$  und  $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$  die Abbildung  $U \times F(V) \hookrightarrow F(E)$  gegeben durch  $(x, w) \mapsto (F(f_x))(w)$  eine Bündelkarte von  $F(E)$  ist. Hierbei verstehen wir  $f_x$  als den Isomorphismus  $f_x : V \xrightarrow{\sim} E_x$  gegeben durch  $f : (x, v) \mapsto f_x(v)$ . Um das einzusehen, muß man nur prüfen, daß die Kartenwechsel der so erklärten Bündelkarten glatt sind, und das folgt unmittelbar aus der Glattheit des Gruppoidfunktors  $F$ . Wir können so zu jedem glatten Vektorraumbündel  $E$  insbesondere das duale Bündel  $E^*$ , die äußeren Potenzen  $\bigwedge^r E$  und die Tensorpotenzen  $E^{\otimes r}$  bilden. Wenden wir dahingegen den Identitätsfunktoren  $\text{Id}$  auf ein Vektorraumbündel  $E$  an, so erhalten wir trivialerweise  $\text{Id}(E) = E$ .

*Übung 5.1.9.* Man zeige: Gegeben stetige bzw. glatte Schnitte  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  eines Bündels  $E$  ist  $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_r$  ein stetiger bzw. glatter Schnitt des Bündels  $\bigwedge^r E$ .

5.1.10 (**Gruppoidfunktoren mit mehreren Eingängen**). Es scheint mir sinnvoll, bereits hier die Sache noch etwas weiter zu treiben. So erklären wir etwa einen  $(n; l, m)$ -Gruppoidfunktoren über einem Körper  $k$  als einen Funktoren

$$B : \text{Mod}_k(l)^\times \times \text{Mod}_k(m)^\times \rightarrow \text{Mod}_k(n)^\times$$

Im Fall  $k = \mathbb{R}$  nennen wir ihn **glatt** genau dann, wenn die zugehörigen Abbildungen auf Morphismenräumen glatt sind. Für beliebige  $l, m \in \mathbb{N}$  ist etwa die direkte Summe ein glatter  $(l + m; l, m)$ -Gruppoidfunktoren  $(V, W) \mapsto V \oplus W$ , das Tensorprodukt ein glatter  $(lm; l, m)$ -Gruppoidfunktoren  $(V, W) \mapsto V \otimes W$ , und das Bilden den Homomorphismenraums  $(V, W) \mapsto \text{Hom}(V, W)$  ebenfalls ein glatter  $(lm; l, m)$ -Gruppoidfunktoren mit einer Vorschrift auf den Morphismen, die der Leser selbst erraten mag. Die Verallgemeinerung auf Gruppoidfunktoren mit mehr als zwei Eingängen scheint mir offensichtlich und möge vom Leser selbst dazugedacht werden.

5.1.11 (**Anwenden von Gruppoidfunktoren auf mehrere Bündel**). Gegeben auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  zwei glatte Vektorraumbündel  $p : E \rightarrow X$  und  $q : F \rightarrow X$  der Dimensionen  $l$  und  $m$  sowie ein glatter  $(n; l, m)$ -Gruppoidfunktoren  $B$  über  $\mathbb{R}$  gibt es auf der disjunkten Vereinigung

$$B(E, F) := \bigsqcup_{x \in X} B(E_x, F_x)$$

genau eine Struktur als glattes  $n$ -dimensionales Vektorraumbündel auf  $X$  derart, daß für beliebige über derselben offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  erklärte Bündelkarten  $f : U \times V \hookrightarrow E$  und  $g : U \times W \hookrightarrow F$  unserer beiden Bündel die Abbildung  $U \times B(V, W) \rightarrow B(E, F)$  gegeben durch  $(x, h) \mapsto (B(f_x, g_x))(h)$  eine Bündelkarte von  $B(E, F)$  ist. Die Verallgemeinerung auf Gruppoidfunktoren mit mehr als zwei Eingängen scheint mir offensichtlich und möge vom Leser dazugedacht werden.

*Beispiele* 5.1.12. Wir können so insbesondere zu je zwei glatten Vektorraumbündeln  $D$  und  $E$  ihre Summe  $D \oplus E$ , ihr Tensorprodukt  $D \otimes E$ , sowie das sogenannte Hom-Bündel  $\text{Hom}(D, E)$  bilden.

*Ergänzung* 5.1.13. Noch allgemeiner kann man auch den Körper wechseln und etwa Funktoren  $F : \text{Mod}_{\mathbb{R}}(l)^{\times} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{C}}(n)^{\times}$  auf  $l$ -dimensionale reelle Bündel anwenden und so  $n$ -dimensionale komplexe Bündel erhalten, oder umgekehrt mit einem Funktor in die Gegenrichtung komplexe zu reellen Bündeln machen. Da wir jedoch komplexe Bündel an dieser Stelle noch gar nicht eingeführt haben, sei nur erwähnt, daß sich alles in diesem Abschnitt Gesagte unmittelbar auf diesen Fall verallgemeinern läßt. Zum Beispiel konstruiert man so zu jedem reellen Bündel seine Komplexifizierung.

*Übung* 5.1.14. Man zeige: Gegeben stetige bzw. glatte Schnitte  $\sigma, \tau$  von Bündeln  $E, F$  ist  $(\sigma, \tau) : x \mapsto (\sigma(x), \tau(x))$  ein stetiger bzw. glatter Schnitt des Bündels  $E \oplus F$  und  $\sigma \otimes \tau : x \mapsto \sigma(x) \otimes \tau(x)$  ein stetiger bzw. glatter Schnitt des Bündels  $E \otimes F$ .

**5.1.15 (Transformationen liefern Bündelmorphismen).** Für jede Transformation  $\tau : A \Rightarrow B$  von glatten Gruppoidfunktoren mit zwei Eingängen, die wir in diesem Zusammenhang als Funktoren nach  $\text{Mod}_{\mathbb{R}}$  verstehen, und je zwei glatte Vektorraumbündel  $E, F$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  liefern die zugehörigen Abbildungen  $\tau : A(E_x, F_x) \rightarrow B(E_x, F_x)$  einen Bündelmorphismus  $\tau : A(E, F) \xrightarrow{\sim} B(E, F)$  im Sinne von 2. Wir erhalten auf diese Weise sogar einen Funktor von der vollen Unterkategorie

$$\text{Cat}^{\infty}(\text{Mod}_{\mathbb{R}}(l)^{\times} \times \text{Mod}_{\mathbb{R}}(m)^{\times}, \text{Modfg}_{\mathbb{R}})$$

der glatten Funktoren aus der Funktorkategorie ?? in die Kategorie der glatten Vektorbündel. Insbesondere liefert jede Isotransformation von Gruppoidfunktoren einen Bündelisomorphismus.

*Beispiele* 5.1.16. Unsere Isotransformation  $\text{can} : V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W)$  aus ?? liefert etwa, wenn wir sie zu einer Isotransformation von Funktoren  $\text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\times} \times \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\times} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$  umschreiben, für je zwei glatte Vektorraumbündel  $E, F$  auf derselben glatten Mannigfaltigkeit  $X$  einen natürlichen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$\text{can} : E^* \otimes F \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(E, F)$$

Das Auswerten liefert für jedes glatte Bündel  $E$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  einen Bündelmorphismus  $\text{ev} : E^* \otimes E \rightarrow X \times \mathbb{R}$  zum trivialen eindimensionalen Bündel. Die Verallgemeinerung auf Gruppoidfunktoren mit einer beliebigen endlichen Zahl von Eingängen scheint mir offensichtlich und möge vom Leser selbst dazugedacht werden. Im Fall von nur einem Eingang liefert etwa die durch Evaluation gegebene Isotransformation  $\text{Id} \xrightarrow{\sim} B$  vom Identitätsfunktoren in den Bidualraumfunktoren aus ?? für jedes glatte Vektorraumbündel  $E$  einen natürlichen Isomorphismus mit seinem Bidualen

$$E \xrightarrow{\sim} E^{**}$$

**5.1.17 (Gruppoidfunktoren und Darstellungen).** Für jedes Monoid  $G$  betrachte man nun die Kategorie  $[G]$  mit einem einzigen Objekt und für jedes  $g \in G$  einem Morphismus von diesem Objekt zu sich selber. Gegeben ein  $n$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum  $V$  erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien in Gestalt des Funktors  $[\text{GL}(V)] \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_k^\times(n)$ , der das einzige Objekt auf  $V$  wirft und auf Morphismen durch die offensichtliche Abbildung gegeben wird. Mit ?? folgern wir, daß dieser Funktor auch eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\text{Mod}_k^\times(n), \text{Modfg}_k) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}([\text{GL}(V)], \text{Modfg}_k)$$

induziert. Nun ist die rechte Seite nach 1.1.10 nichts anderes als die Kategorie der Darstellungen von  $\text{GL}(V)$ , und im Fall  $k = \mathbb{R}$  erhalten wir so auch für jeden  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Cat}^\infty(\text{Mod}_{\mathbb{R}}^\times(n), \text{Modfg}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} \text{Modfg}_{\mathbb{R}}^{\text{GL}(V)}$$

zwischen der Kategorie der glatten Gruppoidfunktoren und der Kategorie der stetigen alias glatten Darstellungen. Ähnlich entsprechen Gruppoidfunktoren mit mehreren Einträgen Darstellungen von Produkten mehrerer allgemeiner linearer Gruppen.

*Beispiel* 5.1.18 (**Der Betrag eines eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums**). Eine endlichdimensionale, ja sogar eine eindimensionale glatte Darstellung von  $\mathbb{R}^\times = \text{GL}(\mathbb{R})$  ist insbesondere der Betrag  $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times$ . Ein zugehöriger Gruppoidfunktoren kann wie folgt konstruiert werden: Wir bilden zu jedem eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  seinen **Betrag**  $|V|$ , einen orientierten eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, wie folgt: Zunächst betrachten wir die Menge aller Paare  $(v, \varepsilon)$  mit  $v \in V$  einem Vektor und  $\varepsilon$  einer Orientierung von  $V$ . Auf dieser Menge betrachten wir die kleinste Äquivalenzrelation mit  $(v, \varepsilon) \sim (-v, -\varepsilon)$ . Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit  $|V|$  und die Äquivalenzklasse von  $(v, \varepsilon)$  heiße  $[v, \varepsilon]$ . Auf dieser Menge  $|V|$  gibt es

nun offensichtlich genau eine Vektorraumstruktur derart, daß für jede Orientierung  $\varepsilon$  von  $V$  die Vorschrift  $v \mapsto [v, \varepsilon]$  ein Vektorraumisomorphismus  $V \xrightarrow{\sim} |V|$  ist, und damit haben wir bereits unseren Vektorraum  $|V|$  konstruiert. Des weiteren erklären wir eine Abbildung  $V \rightarrow |V|$ ,  $v \mapsto |v|$  durch die Vorschrift, daß für  $v \neq 0$  gilt  $|v| = [v, \varepsilon_v]$  mit  $\varepsilon_v$  der Orientierung, für die  $v$  eine orientierte Basis ist, ergänzt durch die Vorschrift  $|0| = 0$ . Diese Abbildung  $v \mapsto |v|$  ist nicht linear, vielmehr gilt  $|\lambda v| = |\lambda| |v|$  für alle  $v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir versehen nun  $|V|$  mit der Orientierung, für die alle  $|v|$  mit  $v \in V \setminus 0$  positiv orientiert sind. Jeder Isomorphismus von eindimensionalen Räumen  $\phi : V \xrightarrow{\sim} W$  induziert in offensichtlicher Weise einen orientierungserhaltenden Isomorphismus  $|\phi| : |V| \xrightarrow{\sim} |W|$  mit  $|\phi|(|v|) = |\phi(v)|$  für alle  $v \in V$ . So erhalten wir dann schließlich den gewünschten  $(1, 1)$ -Gruppoidfunktorkonstruktor, der zur durch den Betrag gegebenen eindimensionalen Darstellung von  $\mathbb{R}^\times$  gehört.

*Ergänzung 5.1.19 (von Darstellungen zu Gruppoidfunktoren).* Es ist auch nicht schwer, im allgemeinen einen quasiinversen Funktor zu unserer Äquivalenz aus 5.1.17 explizit anzugeben: Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung  $W$  von  $\mathrm{GL}(V)$  alias ein Gruppenhomomorphismus  $\rho : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  konstruiert man einen Gruppoidfunktorkonstruktor  $F_\rho$  dazu etwa mittels der Vorschrift

$$F_\rho(V') := \mathrm{Hom}_k^\times(V, V') \times_{\mathrm{GL}(V)}^\rho W$$

Hierzu erinnern wir ??, wonach es ganz allgemein für  $W$  ein  $k$ -Vektorraum und  $G$  eine Gruppe und  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  ein Gruppenhomomorphismus und  $Y$  ein  $G$ -Torsor auf dem balancierten Produkt  $Y \times_G^\rho W$  genau eine Struktur als  $k$ -Vektorraum gibt derart, daß für alle  $y \in Y$  die Abbildung  $w \mapsto [y, w]$  einen Vektorraumisomorphismus  $W \xrightarrow{\sim} Y \times_G W$  liefert.

*Ergänzung 5.1.20.* Gegeben ein  $n$ -dimensionales glattes Vektorraumbündel  $E$ , ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und eine endlichdimensionale stetige alias glatte Darstellung  $\rho : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  verwende ich für  $F_\rho(E)$  auch gerne die Abkürzung

$$\rho(E)$$

Ist zum Beispiel  $\rho : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(V^*)$ ,  $g \mapsto (g^\top)^{-1}$  die Kontragrediente der Standarddarstellung, so liefern uns die vorherigen Konstruktionen für  $n$ -dimensionale glatte Bündel  $E$  natürliche Isomorphismen  $E^* \xrightarrow{\sim} \rho(E)$ , und die offensichtlichen Gruppenhomomorphismen  $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W) \rightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W)$  beziehungsweise  $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W) \rightarrow \mathrm{GL}(V \oplus W)$  führen zum Tensorprodukt beziehungsweise der direkten Summe von Vektorbündeln. Bei der Konstruktion des dualen Bündels oder des Tensorprodukts bzw. der direkten Summe zweier Bündel scheint mir dieser Formalismus eher verwirrend als hilfreich. Gewisse Konstruktionen werden aber in dieser Sprache auch einfacher: Betrachten wir zum Beispiel den Betrag der Determinante  $\rho : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathbb{R}^\times$

oder dessen Inverses, so erhalten wir Konstruktionen, die jedem glatten reellen Vektorraumbündel  $E$  die glatten reellen Vektorraumbündel  $|\det E|$  und  $|\det E|^{-1}$  zuordnen. Man könnte stattdessen auch für vorgegebenes  $n$  den Gruppoidfunktorkonstruktions betrachten, der jedem reellen Vektorraum den eindimensionalen Raum der translationsinvarianten signierten Borelmaße auf unserem Raum zuordnet, aber das ist arg weit hergeholt. Dennoch ist unsere Konstruktion des Betrags der Determinante eines Bündels keine bloße Spielerei: Wir werden in ?? etwa sehen, daß für eine kompakte Mannigfaltigkeit  $X$  die stetigen Schnitte des Bündels

$$|\det TX|^{-1}$$

als signierte Borelmaße auf  $X$  aufgefaßt werden können, und zwar erhalten wir so genau alle diejenigen signierten Borelmaße, die unter jeder Karte verwandt sind zum Produkt des Lebesgue-Maßes mit einer stetigen Funktion. Derartige signierte Borelmaße heißen “stetige Dichten”. Die Konstruktion dieses “Bündels der Dichten” paßt also auch in unseren allgemeinen begrifflichen Rahmen.

## 5.2 Felder auf Mannigfaltigkeiten

5.2.1. Unter einem **Feld** versteht man ganz allgemein einen Schnitt eines Bündels, und im besonderen einen Schnitt eines Bündels auf einer Mannigfaltigkeit, das durch Anwenden eines glatten Gruppoidfunktors aus dem Tangentialbündel hervorgeht. Wenn ich hervorheben will, daß letztere Bedeutung gemeint ist, spreche ich von einem **natürlichen Feld**. Heißt unser Gruppoidfunktorkonstruktions  $F$ , so rede ich auch von einem  **$F$ -Feld**. Übliche Bezeichnungen für derartige Bündel und Felder auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  faßt die folgende Tabelle zusammen, in der  $\max = \dim X$  zu verstehen ist.

Vektorraumbündel	übliche Bezeichnung	Bezeichnung der Schnitte
$X \times \mathbb{R}$	triviales Bündel	skalares Feld, Funktion
$TX$	Tangentialbündel	Vektorfeld
$T^*X$	<b>Kotangentialbündel</b>	<b>Kovektorfeld</b>
$(T^*X)^{\otimes r} \otimes (TX)^{\otimes s}$		<b>Tensorfeld, <math>r</math>-fach kovariant, <math>s</math>-fach kontravariant</b>
$\bigwedge^k T^*X$	<b><math>k</math>-Formen-Bündel</b>	<b><math>k</math>-Form, Differentialform</b>
$\bigwedge^{\max} T^*X$	<b>kanonisches Bündel</b>	<b>Volumenform</b>
$ \bigwedge^{\max} T^*X $	<b>Dichtebündel</b>	<b>Dichte</b>
$ \bigwedge^{\max} T^*X ^{1/2}$	<b>Halbdichtenbündel</b>	<b>Halbdichte</b>
$\text{or}_X^{\mathbb{R}}$	<b>Orientierungsbündel</b>	

Das Orientierungsbündel  $\text{or}_X^{\mathbb{R}}$  ist definiert durch das Anwenden des Gruppenhomomorphismus  $GL(n; \mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^\times$ , der jeder invertierbaren Matrix das Vorzeichen ihrer Determinante zuordnet. Es trägt mehr Struktur als nur die Struktur eines eindimensionalen reellen Vektorraumbündels, wir gehen darauf in ?? noch ausführlich ein.

**Definition 5.2.2 (Verwandtschaft von Feldern).** Sei  $\phi : X \rightarrow Y$  eine glatte Abbildung von Mannigfaltigkeiten, deren Differential an jeder Stelle ein Isomorphismus ist. Derartige Abbildungen heißen auch **étale**. Sei  $n$  die gemeinsame Dimension unserer Mannigfaltigkeiten und sei  $F$  ein  $(m; n)$ -Gruppoidfunktors. Zwei  $F$ -Felder  $\sigma : X \rightarrow F(TX)$  und  $\tau : Y \rightarrow F(TY)$  heißen **verwandt unter**  $\phi$  und wir schreiben  $\phi : \sigma \rightsquigarrow \tau$  genau dann, wenn gilt

$$\tau(\phi(x)) = (F(d_x \phi))(\sigma(x)) \quad \forall x \in X$$

Natürlich hat jedes Feld für derartige Abbildungen genau einen Rückwärtsverwandten, und ist unsere Abbildung sogar ein Diffeomorphismus, so hat es auch genau einen Vorwärtsverwandten. Auch in dieser Allgemeinheit ist Verwandtschaft transitiv im Sinne von IV.3.1.18.

5.2.3. Ist  $D$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $X \subseteq D$  eine offene Teilmenge und  $F$  ein glatter Gruppoidfunktors, so induziert unsere kanonische Identifikation  $X \times \vec{D} \xrightarrow{\sim} TX$  aus 4.4.6 in offensichtlicher Weise eine Identifikation  $X \times F(\vec{D}) \xrightarrow{\sim} F(TX)$ , mithilfe derer wir  $F$ -Felder  $\sigma$  auf  $X$  identifizieren können mit Abbildungen  $\hat{\sigma} : X \rightarrow F(\vec{D})$ . Zum Beispiel entspricht so ein Kovektorfeld auf  $X \subseteq D$  einer Abbildung  $X \rightarrow \vec{D}^*$  und eine  $k$ -Form auf  $X$  einer Abbildung  $X \rightarrow \text{Alt}^k(\vec{D})$ .

5.2.4. Ist  $E$  ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und  $Y \subseteq E$  eine offene Teilmenge und  $\phi : X \rightarrow Y$  étale, so sind zwei  $F$ -Felder  $\sigma, \tau$  unter  $\phi$

verwandt genau dann, wenn für die zugehörigen Abbildungen  $\hat{\sigma} : X \rightarrow F(\vec{D})$  und  $\hat{\tau} : Y \rightarrow F(\vec{E})$  gilt  $F(d_x\phi) : \hat{\sigma}(x) \mapsto \hat{\tau}(\phi(x))$  für alle  $x \in X$  unter  $F(d_x\phi) : F(\vec{D}) \xrightarrow{\sim} F(\vec{E})$ .

5.2.5. Will man für einen vorgegebenen glatten  $(m; n)$ -Gruppoidfunktoren ein  $F$ -Feld  $\tau$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  explizit angeben, so wird man wie im Fall von Vektorfeldern 4.5.5 einen Atlas wählen und für jede Karte von besagtem Atlas  $\varphi_\lambda : W_\lambda \rightarrow X$  diejenige Abbildung  $\hat{\tau} : W_\lambda \rightarrow F(\mathbb{R}^d)$  angeben, die dem unter  $\varphi_\lambda$  zu  $\tau$  verwandten  $F$ -Feld auf  $W_\lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  unter der Identifikation in 5.2.3 entspricht. Sind umgekehrt  $F$ -Felder auf den Definitionsbereichen der Karten eines Atlas gegeben, so kommen sie in dieser Weise von einem  $F$ -Feld auf unserer Mannigfaltigkeit her genau dann, wenn für je zwei Karten ihre entsprechenden Einschränkungen unter Kartenwechseln verwandt sind.

5.2.6 (**Rückzug**). Das Vorhergehende erweitert unsere Verwandtschaftsbegriffe aus IV.3.1.16 auf allgemeinere Felder, aber um den Preis, daß wir nur recht spezielle, eben étale Abbildungen  $\phi$  zulassen dürfen. Nur wenn wir von einem ko- oder kontravarianten Funktor  $F : \text{Modfg}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Modfg}_{\mathbb{R}}$  auf allen endlich erzeugten  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ausgehen, erklären wir für die zugehörigen  $F$ -Felder allgemeiner Verwandtschaft  $\phi : \sigma \rightsquigarrow \tau$  unter beliebigen glatten Abbildungen  $\phi$ . Im kovarianten Fall erklären wir diese Verwandtschaft durch dieselbe Bedingung

$$\tau(\phi(x)) = (F(d_x\phi))(\sigma(x)) \quad \forall x \in X$$

Im kontravarianten Fall gilt es zu beachten, daß der zugehörige Gruppoidfunktoren, den wir auf unser Tangentialbündel anwenden, einem Isomorphismus  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  den Isomorphismus  $F(\varphi)^{-1} : F(V) \xrightarrow{\sim} F(W)$  zuordnet. Folgerichtig erklären wir in diesem Fall Verwandtschaft durch die Bedingung

$$(F(d_x\phi))\tau(\phi(x)) = \sigma(x) \quad \forall x \in X$$

Letzterer Fall ist besonders wichtig, da in diesem Fall jedes  $F$ -Feld  $\tau$  auf  $Y$  unter jeder glatten Abbildung genau einen Rückwärtsverwandten hat, der eben durch besagte Formel gegeben wird. Man notiert diesen Rückwärtsverwandten

$$\phi^*\tau$$

und nennt ihn den **Rückzug von**  $\tau$ . Auch in dieser Allgemeinheit ist Verwandtschaft transitiv im Sinne von IV.3.1.18.

5.2.7. Sind  $D, E$  endlichdimensionale reelle Räume und  $X \subseteq D$  sowie  $Y \subseteq E$  offene Teilmengen und  $F : \text{Modfg}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Modfg}_{\mathbb{R}}$  ein kontravarianter Funktor und  $\phi : X \rightarrow Y$  eine glatte Abbildung, so sind zwei  $F$ -Felder  $\sigma, \tau$  unter  $\phi$

verwandt genau dann, wenn für die zugehörigen Abbildungen  $\hat{\sigma} : X \rightarrow F(\vec{D})$  und  $\hat{\tau} : Y \rightarrow F(\vec{E})$  gilt  $F(d_x\phi) : \hat{\tau}(\phi(x)) \mapsto \hat{\sigma}(x)$  für alle  $x \in X$  unter  $F(d_x\phi) : F(\vec{E}) \xrightarrow{\sim} F(\vec{D})$ .

### 5.3 Differentialformen

**Definition 5.3.1.** Ein **Differentialform vom Grad  $k$**  oder kurz  **$k$ -Form** auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  ist ein Schnitt  $X \rightarrow \text{Alt}^k TX$  des Bündels der alternierenden  $k$ -Multilinearformen zum Tangentialbündel. Den Raum der glatten  $k$ -Formen auf  $X$  notieren wir  $\Omega^k(X)^\infty$  und meist abkürzend

$$\Omega^k(X)$$

5.3.2. Vermittels unserer Identifikation  $\bigwedge^k T^*X \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^k TX$  nach ?? und 5.1.15 dürfen wir unsere Differentialformen ebensogut als Schnitte der  $k$ -ten äußeren Potenz des Kotangentialbündels auffassen. Ist weiter  $X \subseteq E$  eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums  $E$ , so können wir mithilfe unserer Identifikation  $TX \xrightarrow{\sim} X \times \vec{E}$  aus 4.4.6 eine  $k$ -Form ebensogut auch auffassen als Abbildung  $X \rightarrow \text{Alt}^k \vec{E}$ . In diesem Sinne waren also unsere Differentialformen aus IV.7.2 auf offenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume ein Spezialfall für den allgemeinen Begriff von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.

5.3.3. Eine relative Differentialform im Sinne von IV.7.2 auf einer Untermannigfaltigkeit  $X \subset E$  positiver Kodimension alias eine Abbildung  $X \rightarrow \text{Alt}^k \vec{E}$  ist nicht dasselbe wie eine Differentialform im hier erklärten Sinne: Salopp gesprochen liegt der Unterschied darin, daß unsere  $k$ -Formen hier an jeder Stelle  $p \in X$  nur je  $k$  Tangentialvektoren aus  $T_p X$  eine Zahl zuordnen, im Gegensatz zu unseren relativen Differentialformen im Sinne von IV.7.2, die sogar je  $k$  beliebigen Vektoren des Richtungsraums  $\vec{E}$  eine Zahl zuordneten. Allerdings liefert jede relative Differentialform auf einer Untermannigfaltigkeit durch Einschränkung auch eine "absolute" Differentialform auf besagter Untermannigfaltigkeit. Hier ist vielleicht auch der richtige Moment für das Eingeständnis, daß das Konzept einer relativen Differentialform vom höheren Standpunkt aus gesehen ziemlich sinnlos ist und allein durch den didaktischen Aufbau der Theorie motiviert war.

5.3.4. Nach 5.2.6 liefert jede glatte Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von Mannigfaltigkeiten Abbildungen  $\phi^* : \Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^k(X)$  in die Gegenrichtung, die man das **Zurückholen von Differentialformen** nennt. Sie verallgemeinern unseren Rückzug von Differentialformen aus IV.7.2.9, erfüllen die bei Verwandtschaftsbeziehungen üblichen Identitäten  $\text{id}^*(\omega) = \omega$  und  $\phi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi)^*$ ,

und sind verträglich mit dem Dachprodukt, in Formeln

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$$

**Lemma 5.3.5 (Äußere Ableitung).** *Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $X$  gibt es genau eine Abbildung*

$$d : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X)$$

*mit der Eigenschaft, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow X$  und alle  $\omega \in \Omega^k(X)$  gilt  $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$ , mit unserer äußeren Ableitung aus IV.7.6.3 als rechter Seite.*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, da unsere Mannigfaltigkeit ja durch Bilder von Karten überdeckt wird. Die Existenz folgt aus IV.7.6.8, das uns sagt, daß es nicht darauf ankommt, in welcher Karte wir lokal die äußere Ableitung unserer Differentialform berechnen.  $\square$

5.3.6. Auch in dieser Allgemeinheit sind Nullformen schlicht Funktionen und Einsformen Kovektorfelder. Jeder glatten Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Mannigfaltigkeit ordnet die äußere Ableitung nach 5.3.5 also ein Kovektorfeld  $df$  zu. Dieses Kovektorfeld ist demnach dadurch definiert, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  gilt  $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$ . Es kann aber alternativ auch wie folgt beschrieben werden: Eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  hat ja in jedem Punkt  $p \in M$  nach 4.3.5 ein Differential  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ . Mithilfe der natürlichen Identifikation  $T_{f(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$  können wir unser Differential mithin als Linearform auf dem Dualraum  $d_p f \in T_p^* M$  auffassen und die Zuordnung  $M \rightarrow T^* M$ ,  $p \mapsto d_p f$  als ein Kovektorfeld. Dieses Kovektorfeld notieren wir auch  $df$  und überlassen dem Leser den Nachweis, daß es mit unserem mittels 5.3.5 erklärten Kovektorfeld  $df$  übereinstimmt. In diesem Fall kommt es also nicht darauf an, ob wir das gerade  $d$  oder das kurve  $d$  verwenden. Wir nennen dieses Kovektorfeld  $df$  das **Differential von  $f$** .

**Lemma 5.3.7.** *Sind  $\omega$  und  $\eta$  glatte Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit, so gilt für ihr Produkt die **Leibniz-Regel***

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta$$

**Lemma 5.3.8.** *Für jede glatte Differentialform  $\omega$  auf einer Mannigfaltigkeit gilt*

$$d(d\omega) = 0$$

**Lemma 5.3.9.** *Verwandte Differentialformen haben verwandte äußere Ableitungen. Ist genauer und in Formeln  $\phi : X \rightarrow Y$  eine glatte Abbildung von Mannigfaltigkeiten und  $\omega$  eine glatte Differentialform auf  $Y$ , so gilt*

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$$

*Beweis.* Diese drei Lemmata folgen unmittelbar aus der Definition der äußeren Ableitung in 5.3.5 und ihren bereits bewiesenen Analoga IV.7.6.6, IV.7.6.7 und IV.7.6.8 für den Fall offener Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume.  $\square$

5.3.10. Die Existenz einer äußeren Ableitung mit den in den drei vorhergehenden Lemmata formulierten bemerkenswerten Eigenschaften ist eine Besonderheit der Differentialformen, die für allgemeinere Felder keine Entsprechung hat. Der Kalkül der Differentialformen wird sich insbesondere auch aufgrund dieser bemerkenswerten Eigenschaften als außerordentlich bequem und nützlich erweisen.

## 5.4 Integration auf abstrakten Mannigfaltigkeiten

5.4.1. Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $X$  hatten wir in 5.2.1 eine Dichte auf  $X$  erklärt als einen Schnitt des Dichtebündels  $|\Lambda^{\max}T^*X|$ . Wir nennen eine solche Dichte **nichtnegativ** genau dann, wenn ihr Wert an keiner Stelle  $x \in X$  eine negativ orientierte Basis von  $|\Lambda^{\max}T_x^*X|$  ist. Zum Beispiel ist für jede Volumenform  $\omega$  auf  $X$  ihr Betrag  $|\omega|$  eine nichtnegative Dichte auf  $X$ . Insbesondere kann jede Dichte  $\mu$  auf  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  in eindeutiger Weise geschrieben werden als

$$\mu = a(x)|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|$$

mit  $a : W \rightarrow \mathbb{R}$ , und eine derartige Dichte auf  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  ist nichtnegativ genau dann, wenn gilt  $a(x) \geq 0 \quad \forall x \in W$ .

**Definition 5.4.2.** Gegeben auf  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  eine meßbare nichtnegative Dichte  $\mu = a(x)|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|$  und eine meßbare Teilmenge  $B \subset W$  erklären wir das Integral unserer Dichte über besagte Teilmenge in  $[0, \infty]$  durch die Vorschrift

$$\int_B \mu := \int_B a(x) \, d^n x$$

**Satz 5.4.3 (Maß einer nichtnegativen Dichte).** *Gegeben eine separable Mannigfaltigkeit  $X$  und darauf eine nichtnegative meßbare Dichte  $\mu$  existiert genau ein topologisches Maß  $\tilde{\mu}$  auf  $X$  mit der Eigenschaft, daß das Maß jeder*

Borelmenge  $A \subset X$ , die ganz im Bild einer Karte  $\varphi : W \rightarrow X$  enthalten ist, gegeben wird durch

$$\tilde{\mu}(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \mu$$

5.4.4. Hier meint  $\varphi^* \mu$  die auf  $W$  zurückgeholte Dichte, und deren Integral ist im Sinne von 5.4.2 zu verstehen.

5.4.5. Sobald der Satz einmal bewiesen ist, machen wir in der Notation keinen Unterschied mehr zwischen einer nichtnegativen meßbaren Dichte und dem zugehörigen Maß. Gegeben eine meßbare Volumenform  $\omega$  bezeichnet dann insbesondere  $|\omega|$  sowohl die zugehörige Dichte als auch das zugehörige Maß.

*Beweis.* Der Beweis von IV.7.4.2 kann fast ohne Änderungen übernommen werden. Der wesentliche Punkt ist wieder der Nachweis, daß für  $\psi : V \rightarrow X$  eine weitere Karte mit  $\psi(V) = \varphi(W)$  gilt

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \mu = \int_{\psi^{-1}(A)} \psi^* \mu$$

Bezeichnet jedoch  $g := \varphi^{-1} \circ \psi : V \xrightarrow{\sim} W$  den Kartenwechsel und haben wir  $\varphi^* \mu = a(x) |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi^* \mu &= g^* \varphi^* \mu \\ &= g^*(a |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|) \\ &= (a \circ g) |\det dg| |dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n| \end{aligned}$$

wo ich in der Hoffnung, dadurch das Verständnis zu fördern, dieselben Koordinaten auf  $\mathbb{R}^n$  einmal  $x_i$  nenne, wenn sie nämlich auf  $W$  zu verstehen sind, und dann wieder  $y_i$ , wenn sie auf  $V$  zu verstehen sind. Die behauptete Gleichheit der Integrale folgt nun wie im Beweis von IV.7.4.2 aus der Transformationsformel IV.6.8.1.  $\square$

## 5.5 Wohin?

5.5.1. Gegeben eine reellen Mannigfaltigkeit  $X$  und ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $W$  können wir den Formalismus der Differentialformen wie in VIII.1.5.8 auf  $W$ -wertige Differentialformen verallgemeinern. So erhalten wir insbesondere eine äußere Ableitung

$$d: \Omega^k(X) \otimes W \rightarrow \Omega^{k+1}(X) \otimes W$$

für  $k \geq 0$ .

5.5.2. Ist auf  $X$  eine fast-komplexe Struktur gegeben, als da heißt eine Struktur als komplexes Vektorbündel alias einen Automorphismus  $J$  mit  $J^2 = -\text{id}$  auf dem Tangentialbündel, so erhalten wir auch eine Struktur als komplexes Vektorbündel auf dem Kotangentialbündel  $T^*X$ . Setzen wir  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*X = : T_{\mathbb{C}}^*X$ , so erhalten wir mit ?? einen Isomorphismus  $T_{\mathbb{C}}^*X \xrightarrow{\sim} T^*X \oplus \overline{T^*X}$  von komplexen Vektorbündeln. Mit ?? liefert er Isomorphismen von komplexen Vektorbündeln

$$\bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i T^*X \otimes \bigwedge^j \overline{T^*X} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k T_{\mathbb{C}}^*X$$

5.5.3. Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  der komplexen Dimension  $n$  ist das Tangentialbündel  $TX$  der zugrundeliegenden reellen Mannigfaltigkeit in natürlicher Weise ein komplexes Vektorraumbündel der komplexen Dimension  $n$ . Gegeben ein glatter Schnitt  $\omega$  von  $\bigwedge^i T^*X \otimes \bigwedge^j \overline{T^*X}$  prüft man in Koordinaten leicht, daß  $d\omega$  bereits in  $\bigwedge^{i+1} T^*X \otimes \bigwedge^j \overline{T^*X} \oplus \bigwedge^i T^*X \otimes \bigwedge^{j+1} \overline{T^*X}$  landet. Die besagten Komponenten notieren wir  $\partial\omega$  und  $\bar{\partial}\omega$  und erhalten so eine kanonische Zerlegung  $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$ .

## 5.6 Lie-Ableitung

**Definition 5.6.1 (Lie-Ableitung).** Gegeben ein glattes Vektorfeld  $\xi$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  und ein glattes Feld  $T$ , genauer ein glattes natürliches Feld im Sinne von 5.2.1, definiert man ein Feld derselben Art, seine **Lie-Ableitung**

$$\mathcal{L}_{\xi}T$$

wie folgt: Man bezeichne für  $x \in X$  und kleine  $t \in \mathbb{R}$  mit  $\xi^t(x) \in X$  den Punkt, bei dem der Punkt  $x$  landet, wenn er sich für die Zeit  $t$  mit dem Fluß des Vektorfelds  $\xi$  treiben läßt. Dann sind die  $\xi^t$  für kleine  $t$  Diffeomorphismen einer festen offenen Umgebung  $U$  von  $p \in X$  mit offenen Teilmengen  $\xi^t(U) \subseteq X$ . Bezeichne  $T^{[t;\xi]} = T^{[t]}$  das Feld auf  $U$ , das unter  $\xi^t$  zum ursprünglichen Feld  $T$  auf  $\xi^t(U)$  verwandt ist, in Formeln

$$\xi^t : T^{[t]} \rightsquigarrow T$$

Die  $T^{[t]}$  bilden dann ein von  $t$  abhängiges Feld auf  $U$  und wir definieren

$$(\mathcal{L}_{\xi}T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T^{[t]})_p - T_p}{t}$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß diese Grenzwerte existieren und daß  $\mathcal{L}_{\xi}T$  wieder ein glattes Feld ist. Das überlassen wir dem Leser und leiten nur unter der Annahme der Existenz explizite Formeln her. Mit etwas mehr Sorgfalt

kann man zusammen mit den expliziten Formeln aber auch unschwer die Existenz der fraglichen Grenzwerte zeigen.

*Ergänzung 5.6.2 (Felder mit verschwindender Lie-Ableitung).* Seien  $\xi$  ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  und  $T$  ein glattes Feld auf  $X$ . Ist  $\mathcal{L}_\xi T$  das Nullfeld, so folgt  $\xi^t : T \rightsquigarrow T$  für alle  $U \subseteq X$  und  $t \in \mathbb{R}$  derart, daß der Fluß  $\xi^t(x)$  definiert ist für alle  $x \in U$ . In Worten ist demnach ein Feld mit invarianter Lie-Ableitung nach einem vorgegebenen Vektorfeld "invariant unter dem Fluß von besagtem Vektorfeld". In der Tat hat dann die Abbildung  $s \mapsto (T^{[s]})_p$  an jeder Stelle ihres Definitionsintervalls die Ableitung Null, denn wir haben für kleines  $h \neq 0$  sicher

$$d\xi^s : \frac{1}{h} ((T^{[s+h]})_p - (T^{[s]})_p) \mapsto \frac{1}{h} ((T^{[h]})_q - T_q)$$

mit  $q = \xi^s(p)$ , und für  $h \rightarrow 0$  strebt die rechte Seite nach unseren Annahmen gegen Null.

*Beispiel 5.6.3.* Gegeben eine **Riemann'sche Mannigfaltigkeit** alias eine glatte Mannigfaltigkeit  $X$  mit einem ausgezeichneten glatten symmetrischen Tensorfeld  $g \in \text{Sym}^2(TX)$ , das an jeder Stelle ein Skalarprodukt ist, versteht man unter einem **Killing-Feld** ein glattes Vektorfeld  $\xi$  auf  $X$  mit  $\mathcal{L}_\xi g = 0$ . In anderen Worten ist also ein Killing-Feld ein Vektorfeld  $\xi$ , dessen Fluß Isometrien  $\xi^t : U \xrightarrow{\sim} \xi^t(U)$  liefert, wo immer er definiert ist.

*Beispiel 5.6.4 (Lie-Ableitung von Funktionen).* Im Fall eines skalaren Feldes  $T$  alias einer glatten Funktion  $f$  haben wir offensichtlich

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi f$$

In Worten ist die Lie-Ableitung einer Funktion also schlicht die Funktion, die daraus durch das Anwenden des fraglichen Vektorfelds entsteht.

5.6.5 (**Lie-Ableitung versus kovariante Ableitung**). Die Lie-Ableitung einer Funktion an einer gegebenen Stelle hängt nur vom Wert des ableitenden Vektorfelds an besagter Stelle ab. Das ist bei Lie-Ableitung allgemeinerer Felder nicht mehr so: Die Lie-Ableitung eines Feldes an einer gegebenen Stelle wird im allgemeinen von den Werten des ableitenden Vektorfelds in einer Umgebung der fraglichen Stelle abhängen und keineswegs nur von seinem Wert an besagter Stelle. Das ist ein fundamentaler Unterschied zur kovarianten Ableitung [VII.3.13.6](#), die auch in Richtung isolierter Tangentialvektoren wohldefiniert ist und beim Ableiten nach Vektorfeldern  $\xi$  der Identität  $\nabla_{f\xi} = f\nabla_\xi$  gehorcht. Dahingegen haben wir für die Lie-Ableitung im allgemeinen  $\mathcal{L}_{f\xi} \neq f\mathcal{L}_\xi$ .

*Beispiel 5.6.6 (Lie-Ableitung von Vektorfeldern).* Im Fall eines Vektorfeldes  $T = \eta$  gilt nach IV.3.1.19 für jede glatte Funktion  $f$  die Identität  $(\eta f)^{[t]} = \eta^{[t]} f^{[t]}$  und damit

$$(\mathcal{L}_\xi(\eta f))(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\eta^{[t]} f^{[t]})(p) - (\eta f^{[t]})(p) + (\eta f^{[t]})(p) - (\eta f)(p)}{t}$$

Wählen wir uns lokale Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  auf  $U$  und schreiben  $\eta^{[t]} = a_1 \partial_1 + \dots + a_n \partial_n$  mit  $a_i = a_i(x, t)$  glatt auf  $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  und betrachten ebenfalls auf  $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  die glatte Funktion  $(x, t) \mapsto f^{[t]}(x)$ , so liefert die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitung  $\partial_t$  nach  $t$  mit den partiellen Ableitungen  $\partial_i$  nach den  $x_i$ , daß unser Limes mit  $((\mathcal{L}_\xi \eta) f)(p) + (\eta(\xi f))(p)$  identifiziert werden kann. Für jede glatte Funktion  $f$  gilt mithin  $\xi(\eta f) = \mathcal{L}_\xi(\eta f) = (\mathcal{L}_\xi \eta) f + \eta(\xi f)$ , und daraus ergibt sich für je zwei Vektorfelder unmittelbar die Identität

$$\mathcal{L}_\xi \eta = [\xi, \eta]$$

*Ergänzung 5.6.7.* Mit 5.6.2 können wir nun auch eine weitere Herleitung von Proposition 4.7.9 über kommutierende Vektorfelder geben: Kommutieren zwei Vektorfelder, so verschwindet ja nach 5.6.4 die Lie-Ableitung des Ersten nach dem Zweiten, also ist nach 5.6.2 das Erste invariant unter dem Fluß des Zweiten, und dann muß natürlich auch der Fluß des Ersten mit dem Fluß des Zweiten kommutieren.

*Beispiel 5.6.8.* Für die Lie-Ableitungen des Tensorprodukts irgendwelcher natürlichen Felder  $S, T$  gilt offensichtlich

$$\mathcal{L}_\xi(S \otimes T) = (\mathcal{L}_\xi S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_\xi T)$$

und Verjüngungen vertauschen mit der Lie-Ableitung. Speziell gilt die **Leibniz-Regel**  $\mathcal{L}_\xi(fT) = (\xi f)T + f(\mathcal{L}_\xi T)$  für jede glatte Funktion  $f$  und jedes glatte natürliche Feld  $T$ .

**5.6.9 (Lie-Ableitung und äußere Ableitung).** Im Spezialfall von Differentialformen vertauscht die Lie-Ableitung auch mit der äußeren Ableitung, in Formeln

$$\mathcal{L}_\xi(d\omega) = d(\mathcal{L}_\xi \omega)$$

Das Argument geht wie zuvor: Zunächst impliziert die Verwandtschaft  $\xi^t : \omega^{[t]} \rightsquigarrow \omega$  nach 5.3.9 auch eine Verwandtschaft  $\xi^t : d(\omega^{[t]}) \rightsquigarrow d\omega$ . Wählen wir nun wieder lokale Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  auf  $U$  und schreiben  $\omega^{[t]} = \sum a_I dx_I$  mit  $a_I = a_I(x, t)$  glatt auf  $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , so haben wir per definitionem  $\mathcal{L}_\xi \omega = \sum \partial_t a_I dx_I$  und die Behauptung folgt wieder aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen  $\partial_i$  nach den  $x_i$  mit der partiellen Ableitung  $\partial_t$  nach  $t$ .

5.6.10 (**Kontraktion von Differentialformen**). Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper. Gegeben eine alternierende  $(k+1)$ -Multilinearform  $\omega \in \text{Alt}^{k+1}(V)$  und  $v \in V$  definiert man eine alternierende  $k$ -Multilinearform  $i_v\omega \in \text{Alt}^k(V)$  durch die Vorschrift

$$i_v\omega(v_1, \dots, v_k) := \omega(v, v_1, \dots, v_k)$$

Der Buchstabe  $i$  steht wohl für "insertion". Offensichtlich gilt  $i_v i_w = -i_w i_v$ . Unsere Definition IV.7.1.8 des Dachprodukts liefert weiter unmittelbar

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge (i_v\eta)$$

Gegeben ein Vektorfeld  $\xi$  und eine  $(k+1)$ -Form  $\omega$  erklärt man entsprechend die  $k$ -Form  $i_\xi\omega$ .

5.6.11 (**Lie-Ableitung von Differentialformen**). Für die Lie-Ableitung von Differentialformen gilt die Formel

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$$

In der Tat prüft man ohne Schwierigkeiten, daß beide Seiten Operatoren  $D$  mit der Eigenschaft  $D(\omega \wedge \eta) = (D\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (D\eta)$  sind. Es reicht damit aus, unsere Formel für Funktionen und ihre Differentiale zu zeigen. Im Fall einer Funktion  $f$  liefern jedoch nach 5.6.4 die Formeln auf beiden Seiten  $\xi f$ , und im Fall ihres Differentials  $df$  liefern nach 5.6.9 die Formeln auf beiden Seiten  $d(\xi f)$ . Damit ist auch unsere allgemeine Formel hergeleitet.

5.6.12 (**Lie-Ableitung nach einer Lie-Klammer**). Die Lie-Ableitung jeglicher Art von Feldern liefert stets eine Operation der Lie-Algebra der Vektorfelder auf dem Raum der jeweiligen Tensorfelder, in Formeln

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}$$

Das kann für die üblichen Tensorfelder unschwer aus den obigen Formeln gefolgert werden, entstehen doch diese Felder recht direkt aus den Vektorfeldern selber. Für allgemeinere Felder wie etwa Felder von Dichten oder Halbdichten, die zu weniger vertrauten stetigen endlichdimensionalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppen über  $\mathbb{R}$  gehören, muß man hier allerdings sorgfältiger argumentieren.

*Übung 5.6.13.* Gegeben  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Umgebung des Ursprungs und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion, die auf beiden Koordinatenachsen verschwindet, gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t)}{t^2} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \right|_{(0,0)}$$

*Ergänzung 5.6.14 (Anschauliche Interpretation der Lie-Klammer).* Ich diskutiere nun noch einen alternativen Zugang zu unserem Satz 4.7.5, der die Lie-Klammer zweier Vektorfelder anhand ihrer Flüsse anschaulich interpretiert. Betrachten wir die Funktion  $f : (s, t) \mapsto A^s B^t p - B^t A^s p$ , so gilt es nach 5.6.13, die partielle Ableitung  $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}|_{(0,0)}$  zu berechnen. Schalten wir  $B^{-r}$  davor und betrachten  $g : (r, s, t) \mapsto B^{-r} A^s B^t p - B^{-r} B^t A^s p$ , so ist  $g$  identisch Null auf der Ebene  $t = 0$  und es folgt  $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s}|_{(0,0,0)} = 0$  und damit  $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}|_{(0,0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}|_{(0,0)}$ . Schalten wir  $(s, t) \mapsto (t, s, t)$  vor, so finden wir, daß unser Grenzwert auch die gemischte partielle Ableitung am Ursprung von

$$(s, t) \mapsto B^{-t} A^s B^t p - A^s p$$

ist. Bezeichnet nun  $A^{[t]} = A^{[t,B]}$  das unter  $B^t$  zu  $A$  verwandte Vektorfeld, in Formeln  $B^t : A^{[t]} \rightsquigarrow A$ , so gilt  $B^{-t} A^s B^t = (A^{[t]})^s$ , da offensichtlich verwandte Vektorfelder auch verwandte Flüsse haben. Damit können wir unsere Abbildung umschreiben zu

$$(s, t) \mapsto (A^{[t]})^s p - A^s p$$

Die partielle Ableitung nach  $s$  dieser Differenz am Ursprung ergibt sich unmittelbar zu  $A_p^{[t]} - A_p$ , und weiter partiell Ableiten nach  $t$  liefert wie gewünscht die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_B A$ , von der wir bereits nach 5.6.6 wissen, daß sie gerade der Kommutator  $[B, A]$  ist.

## 5.7 Kotangentiale Bündel, Wohin?

*Das folgende scheint mir eine wunderbare Motivation für das Einführen abstrakter Mannigfaltigkeiten und Differentialformen, aber ich weiß noch nicht recht, wo es hingehören soll.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$  und eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  bezeichnen wir den Dualraum ihres Tangentialraums an einer Stelle  $x \in M$  als den **Kotangentialraum**  $T_x^* M = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x M, \mathbb{R})$  von  $M$  bei  $x$  und nennen die disjunkte Vereinigung dieser Kotangentialräume das **Kotangentiale Bündel**

$$T^* M = \bigsqcup_{x \in M} T_x^* M$$

unserer Mannigfaltigkeit. Im Gegensatz zum Tangentialbündel  $TM \subset \vec{X} \times X$  ist unser Kotangentiale Bündel nicht mehr in natürlicher Weise eine eingebettete Mannigfaltigkeit. Dennoch werden wir darauf eine natürliche Topologie erklären und sogar sehr viel stärker die “Struktur einer abstrakten Mannigfaltigkeit”. Der sogenannte “Hamilton’sche Formalismus” der klassischen

Mechanik wird sich dann als natürliche Konsequenz ergeben in einer Weise, die hier kurz geschildert werden soll, um den Aufbau des Formalismus zu motivieren. Der Klarheit halber gehen wir gleich von einer abstrakten Mannigfaltigkeit  $M$  aus. Für jede "glatte" Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $U \subseteq M$  erklären wir zunächst ihr "Differential", einen Schnitt  $df : U \rightarrow T^*M$ ,  $x \mapsto d_x f$  der kanonischen Projektion  $\pi : T^*M \rightarrow M$  des Kotangentialbündels. Ist  $U \subseteq M$  offen und  $q_1, \dots, q_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  ein "Koordinatensystem" auf  $U$ , so bilden an jeder Stelle  $x \in U$  die  $d_x q_i \in T_x^*M$  eine Basis des Kotangentialraums, und wir erklären die zum Koordinatensystem der  $q_i$  gehörigen "Impulskoordinaten" auf  $\pi^{-1}(U) \subset T^*M$  als die Funktionen  $p_i : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\eta = p_1(\eta) d_x q_1 + \dots + p_n(\eta) d_x q_n$$

für alle  $x \in U$  und  $\eta \in T_x^*M$ . Kürzen wir nun  $q_i \circ \pi = q_i$  ab, so bilden  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$  ein Koordinatensystem auf  $\pi^{-1}(U) \subset T^*M$ . Betrachten wir nun die sogenannte "Hamilton-Funktion"  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  und die Wege  $\gamma : I \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset T^*M$  für  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall mit

$$(q_i \circ \gamma)' = \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \gamma \quad \text{und} \quad (p_i \circ \gamma)' = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \circ \gamma$$

so beschreiben die  $\pi \circ \gamma : I \rightarrow M$  genau die möglichen Bewegungen unseres mechanischen Systems. Die Hamiltonfunktion wird im Fall einer Bewegung eines Systems von  $n$  Massepunkten unter Zwangsbedingungen  $M \subset \mathbb{E}^n$  in einem Potentialfeld gegeben als die Summe von kinetischer und potentieller Energie, wobei wir annehmen, daß das Potential durch eine Funktion auf  $M$  beschrieben wird und die kinetische Energie a priori durch eine Funktion auf dem Tangentialbündel, die wir dann aber vermittels der durch das kanonische Skalarprodukt gegebenen Identifikation von Tangentialbündel und Kotangentialbündel in eine Funktion auf dem Kotangentialbündel übersetzen.

## 5.8 Das viel später bei $G$ -Strukturen

**Definition 5.8.1.** Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Lie-Gruppe. Ein **glatter  $G$ -Torsor auf  $X$**  oder kurz  **$G$ -Torsor** ist ein Paar  $(P, \pi)$  bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $P$  mit einer glatten Rechtsoperation von  $G$  und einer Projektion  $\pi : P \rightarrow X$  derart, daß unsere Projektion  $G$ -äquivariant ist für die triviale  $G$ -Rechtsoperation auf  $X$  und "lokal trivial" in dem Sinne, daß es für jeden Punkt von  $X$  eine offene Umgebung  $U$  und einen  $G$ -äquivarianten Diffeomorphismus  $U \times G \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U)$  gibt, für den das folgende

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\sim} & \pi^{-1}(U) \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & = & U \end{array}$$

Ein **Morphismus von  $G$ -Torsoren**  $P \rightarrow Q$  über einer festen Mannigfaltigkeit  $X$  ist eine glatte  $G$ -äquivariante Abbildung über  $X$ .

5.8.2. Gegeben ein Liegruppe  $G$  ist ein  $G$ -Torsor auf einer einpunktigen Mannigfaltigkeit nichts anderes als ein  $G$ -Torsor im Sinne von ?? ?? oder genauer ein  $G$ -Rechtstorsor im Sinne von ???. In vielen Quellen bezeichnet man unsere  $G$ -Torsoren auf  $X$  auch als  $G$ -**Hauptfaserbündel** auf  $X$ , englisch **principal bundle**, französische **fibré principal**.

*Beispiel* 5.8.3. Gegeben eine Liegruppe  $G$  mit einer abgeschlossenen Untergruppe  $H$  ist die Projektion  $G \rightarrow G/H$  ein  $H$ -Hauptfaserbündel nach 4.9.3.

*Beispiel* 5.8.4 (**Von Vektorraumbündeln zu Torsoren und zurück**). Gegeben ein glattes  $n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel  $E$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  und ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  erklären wir einen  $\text{GL}(V)$ -Torsor  $Y \rightarrow X$ , indem wir als Faser  $Y_x$  bei  $x \in X$  den  $\text{GL}(V)$ -Torsor  $Y_x = \text{Hom}_{\mathbb{R}}^{\times}(V, E_x)$  aller Isomorphismen von  $V$  mit der Faser  $E_x$  von  $E$  bei  $x$  nehmen und mit der durch Vorschalten erklärten Rechtsoperation von  $\text{GL}(V)$  versehen. Die Struktur einer Mannigfaltigkeit auf  $Y$  wird mittels der Bündelkarten von  $E$  in der hoffentlich offensichtlichen Weise definiert. Wir notieren diesen Torsor

$$Y = \text{Hom}_{\mathbb{R}}^{\times}(V, E)$$

Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und ein  $\text{GL}(V)$ -Torsor  $Y \rightarrow X$  bilden wir umgekehrt ein  $n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel  $E$  als das balancierte Produkt

$$E = Y \times_{\text{GL}(V)} V$$

*Ergänzung* 5.8.5. Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß diese Konstruktionen sogar eine Äquivalenz von Kategorien liefern zwischen der Kategorie der  $n$ -dimensionalen Vektorraumbündel auf  $X$  mit Bündelisomorphismen im Sinne von 4.4.8.2 als Morphismen und der Kategorie der  $\text{GL}(V)$ -Torsoren auf  $X$  mit Isomorphismen von Torsoren als Morphismen. Im übrigen zeigt die Definition unmittelbar, daß jeder Morphismus von Torsoren bereits ein Isomorphismus ist. Die Automorphismengruppe eines Torsors heißt die **Eichgruppe** unseres Torsors.

**Definition 5.8.6.** Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $X$ , eine Liegruppe  $G$ , einen  $G$ -Torsor  $Y \rightarrow X$  und eine stetige, mithin glatte reelle endlichdimensionale Darstellung  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(F)$  erklären wir ein glattes Vektorraumbündel auf  $X$  in hoffentlich selbsterklärender Weise als das balancierte Produkt

$$Y \times_G F$$

5.8.7. Ist speziell  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G = \mathrm{GL}(V)$  und  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  die Identität, so spezialisiert diese Konstruktion zu unserer Konstruktion aus 5.8.4. Man könnte die Konstruktion aus der vorhergehenden Definition auch selbst noch in zwei Schritte zerlegen, von denen der erste zu jedem Homomorphismus von Liegruppen  $G \rightarrow H$  und jedem  $G$ -Torsor  $Y$  auf  $X$  den  $H$ -Torsor  $Y \times_G H$  auf  $X$  konstruiert, und der zweite dann im Fall  $H = \mathrm{GL}(F)$  die bereits in 5.8.4 gegebene Konstruktion ist. So weit will es jedoch hier noch nicht treiben.

**Definition 5.8.8.** Gegeben eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  liefert das Tangentialbündel  $\mathrm{TX}$  nach 5.8.15 einen  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ -Torsor  $Y \rightarrow X$ . Alle stetigen reellen endlichdimensionalen Darstellungen von  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$  führen dann mit 5.8.19 zu weiteren Vektorraumbündeln. Ich nenne das auf diese Weise zu einer stetigen reellen endlichdimensionalen Darstellung  $\rho : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(F)$  konstruierte Vektorraumbündel das  **$\rho$ -Bündel auf  $X$**  und nenne seine Schnitte  **$\rho$ -Felder**.

*Beispiel 5.8.9.* Das Kotangentialbündel

5.8.10. *Jetzt erkläre, wie Schnitte in Karten aussehen, und warum Fasern so und so aussehen.*

5.8.11. Ich will nun Satz 10.1.3 von Matrix-Liegruppen auf beliebige Liegruppen verallgemeinern und muss dazu erklären, was Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten sind und wie diese integriert werden. Zunächst erinnere ich an den Begriff eines reellen Vektorraumbündels auf einer Mannigfaltigkeit, wobei wir sowohl unsere Mannigfaltigkeit als auch unser Bündel stets als glatt annehmen wollen.

Ist nun  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $p : E \rightarrow X$  ein  $\mathbb{R}$ -Bündel, so erklären wir das duale  $\mathbb{R}$ -Bündel  $E^* \rightarrow X$ , indem wir auf der disjunkten Vereinigung

$$E^* = \bigsqcup_{x \in X} E_x^*$$

der Dualräume der Fasern von  $p$  mit der hoffentlich offensichtlichen Projektion  $q : E^* \rightarrow X$  die einzige Struktur eines  $\mathbb{R}$ -Bündels betrachten derart, dass für jede Bündelkarte von  $E$   $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$  die Verknüpfung

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} U \times (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{N} q^{-1}(U)$$

eine Bündelkarte von  $E^*$  ist.

Hierbei soll die erste Abbildung von der kanonischen Identifikation  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n)^*$  herkommen und die zweite Abbildung von den Inversen der Transponierten  $E_x^* \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n)^*$  der durch die ursprüngliche Bündelkarte von  $E$  gegebenen Identifikationen  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} E_x$  für  $x \in U$ .

**Definition 5.8.12.** Das zum Tangentialbündel  $TX$  an eine Mannigfaltigkeit  $X$  duale Bündel heißt das *Kotangentialbündel* und wird notiert als

$$(TX)^* = T^*X$$

Seine Fasern

$$(T^*X)_x = (T_x X)^*$$

notiert man auch  $T_x^*X$  und nennt die Faser bei  $x$  den *Kotangentialraum* an  $X$  bei  $x$ .

Ein *Kovektorfeld* ist ein Schnitt des Kotangentialbündels.

*Beispiel 5.8.13.* Gegeben eine glatte Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  können wir ein glattes Kovektorfeld

$$df : X \longrightarrow T^*X$$

erklären durch die Vorschrift

$$(df)_x = d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

mit der kanonischen Identifikation  $T_p \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  für alle  $p \in \mathbb{R}$ .

**Definition 5.8.14.** Gegeben ein  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel  $p : E \rightarrow X$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  und  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir ein weiteres  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel  $\text{Alt}^k E$  auf  $X$ , indem wir auf der disjunkten Vereinigung

$$\text{Alt}^k E = \sqcup_{x \in X} \text{Alt}^k E_x$$

mit der hoffentlich offensichtlichen Projektion  $q : \text{Alt}^k E \rightarrow X$  die einzige Struktur eines  $\mathbb{R}$ -Bündels betrachten derart, dass für jede Bündelkarte  $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$  von  $E$  die offensichtliche Abbildung

$$U \times \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow q^{-1}(U)$$

eine Bündelkarte von  $\text{Alt}^k E$  ist.

*Owwwups, ab hier isses plötzlich topologisch!*

**Definition 5.8.15.** Gegeben ein  $n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel  $E$  auf einem topologischen Raum  $X$  und ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  erklären wir ein  $\mathrm{GL}(V)$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$ , indem wir als Faser  $Y_x$  bei  $x \in X$  den  $\mathrm{GL}(V)$ -Torsor  $Y_x = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}^{\times}(V, E_x)$  aller Isomorphismen von  $V$  mit der Faser  $E_x$  von  $E$  bei  $x$  nehmen und mit der durch Vorschalten erklärten Rechtsoperation von  $\mathrm{GL}(V)$  versehen. Die Topologie auf  $Y$  wird mittels der Bündelkarten von  $E$  in der hoffentlich offensichtlichen Weise definiert. Wir notieren dieses Hauptfaserbündel

$$Y = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}^{\times}(V, E)$$

**Definition 5.8.16.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und ein  $\mathrm{GL}(V)$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$  bilden wir umgekehrt ein  $n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel  $E$  als das balancierte Produkt

$$E = Y \times_{\mathrm{GL}(V)} V$$

*Ergänzung 5.8.17.* Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß diese Konstruktionen sogar eine Äquivalenz von Kategorien liefern zwischen der Kategorie der  $n$ -dimensionalen Vektorraumbündel auf  $X$  mit Bündelisomorphismen als Morphismen und der Kategorie der  $\mathrm{GL}(V)$ -Hauptfaserbündel auf  $X$  mit Isomorphismen von Hauptfaserbündeln als Morphismen.

5.8.18. Ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit, so erhalten wir in derselben Weise eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der  $n$ -dimensionalen glatten reellen Vektorraumbündel auf  $X$  und der Kategorie der glatten  $\mathrm{GL}(V)$ -Hauptfaserbündel auf  $X$ .

**Definition 5.8.19.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$  und eine stetige reelle endlichdimensionale Darstellung  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(F)$  erklären wir ein Vektorraumbündel als das balancierte Produkt

$$Y \times_G F$$

in hoffentlich selbsterklärender Weise. Ist  $G$  eine Liegruppe und  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $Y \rightarrow X$  ein glattes  $G$ -Hauptfaserbündel, so erhalten wir in derselben Weise ein glattes Vektorraumbündel.

*Jetzt irgendwie weiter bis zum Haar-Maß*

**Definition 5.8.20.** Das Haar-Maß auf einer kompakten Liegruppe, das der ganzen Gruppe Maß Eins gibt, nennen wir das **normierte Haar-Maß** unserer kompakten Liegruppe.

5.8.21. Wir können nun mit identischen Beweisen viele unserer Resultate für kompakte Matrix-Liegruppen auf beliebige kompakte Liegruppen verallgemeinern. Ich erwähne insbesondere:

**Lemma 5.8.22.** *Auf jeder stetigen endlichdimensionalen Darstellung einer kompakten Liegruppe gibt es ein invariantes Skalarprodukt.*

**Satz 5.8.23 (Vollständige Reduzibilität).** *Jede stetige endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Liegruppe läßt sich als die direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen schreiben.*

**Satz 5.8.24 (Isotypische Zerlegung).** *Sei  $G$  eine kompakte Liegruppe und  $\mathcal{L}$  ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von  $G$ . So liefert für jede komplexe endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $G$  das Auswerten einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{L \in \mathcal{L}} L \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^G(L, V) \xrightarrow{\sim} V$$

5.8.25. Die Beweise dieser Sätze können wie gesagt wortwörtlich von den Beweisen im Spezialfall von Matrix-Liegruppen 2.3.12, 2.3.1 und 2.4.14 übernommen werden.

## 5.9 Satz von Frobenius, wohin?

**Definition 5.9.1.** Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Eine  $d$ -dimensionale **Distribution**  $D$  auf  $U$  ist eine Zuordnung, die jedem Punkt  $p \in U$  einen  $d$ -dimensionalen Teilraum

$$D(p) \subset \vec{X}$$

zuordnet. Eine derartige Distribution heißt **glatt** genau dann, wenn es glatte Vektorfelder auf  $U$  gibt, deren Werte an jedem Punkt  $p \in U$  den Raum  $D(p)$  aufspannen. Eine glatte Distribution heißt **involutiv** genau dann, wenn diejenigen glatten Vektorfelder auf  $U$ , die an jeder Stelle  $p$  Werte in unserem Teilraum  $D(p)$  annehmen, im Raum aller glatten Vektorfelder auf  $U$  eine Unter-Liealgebra bilden, wenn also in Formeln für je zwei glatte Vektorfelder  $A, B : U \rightarrow \vec{X}$  mit  $A_p, B_p \in D(p) \forall p \in U$  gilt  $[A, B]_p \in D(p) \forall p \in U$ .

**Satz 5.9.2 (von Frobenius).** *Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $D$  eine glatte  $d$ -dimensionale Distribution auf  $U$ . Genau dann ist  $D$  involutiv, wenn man für jeden Punkt  $q \in U$  eine offene Umgebung  $V \subseteq U$  und darauf Koordinaten  $y_1, \dots, y_n$  so finden kann, daß für alle  $p \in V$  gilt*

$$D(p) = \langle (\partial/\partial y_1)_p, \dots, (\partial/\partial y_d)_p \rangle$$

*Beweis.* Die einzige Schwierigkeit besteht darin, aus der Involutivität der Distribution die Existenz der fraglichen lokalen Koordinatensysteme zu folgern. Indem wir  $U$  notfalls verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es glatte Vektorfelder  $A^1, \dots, A^d : U \rightarrow \vec{X}$  gibt, deren Werte an jeder Stelle  $p \in U$  den Raum  $D(p)$  aufspannen. Insbesondere hat dann  $A^1$  keine Nullstelle und wir finden nach Satz IV.5.5.6 über die Normalform eines Vektorfelds, wenn wir  $U$  notfalls noch weiter verkleinern, Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  auf  $U$  mit  $A^1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß unsere Vektorfelder  $A^i$  für  $i \geq 2$  keinen  $(\frac{\partial}{\partial x_1})$ -Anteil haben alias in der Gestalt

$$A^i = a_2^i \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_n^i \frac{\partial}{\partial x_n}$$

geschrieben werden können mit  $a_j^i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ . Zu diesen Feldern  $A^i$  für  $2 \leq i \leq n$  gibt es dann natürlich jeweils genau ein verwandtes Feld  $\tilde{A}^i$  auf der Hyperfläche  $W := \{p \in U \mid x_1(p) = x_1(q)\}$ . Da nach 4.7.3 verwandte Felder verwandte Lieklammern haben, erzeugen die  $\tilde{A}^i$  eine involutive  $(d-1)$ -Distribution auf  $W$ , und wenn wir bereit sind,  $W$  noch etwas zu verkleinern, so gibt es nach Induktionsannahme auf  $W$  Koordinaten  $y_2, \dots, y_n$  mit

$$\langle \tilde{A}_p^2, \dots, \tilde{A}_p^d \rangle = \langle (\partial/\partial y_2)_p, \dots, (\partial/\partial y_d)_p \rangle \quad \forall p \in W$$

Verkleinern wir  $U$  hinreichend weiter, so liefert das Vergessen der ersten Koordinate eine glatte Abbildung  $\pi : U \rightarrow W$ , vermittels derer wir die Koordinaten  $y_2, \dots, y_n$  zu Funktionen auf  $U$  zurückziehen können, die dann zusammen mit  $y_1 := x_1$  auch ein Koordinatensystem einer Umgebung von  $q$  bilden. Das Vektorfeld  $A^1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  bezüglich  $(x_1, \dots, x_n)$  ist dann auch das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial y_1}$  bezüglich  $(y_1, \dots, y_n)$ . Es reicht nun zu zeigen, daß auf einer Umgebung von  $q$  das Anwenden jedes unserer Felder  $A^i$  auf jede der Funktionen  $y_j$  mit  $d+1 \leq j \leq n$  die Nullfunktion liefert, denn dann tauchen eben in der Darstellung

$$A^i = b_1^i \frac{\partial}{\partial y_1} + b_2^i \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + b_n^i \frac{\partial}{\partial y_n}$$

nur die  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  für  $1 \leq j \leq d$  mit von Null verschiedenen Koeffizienten auf. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigen wir das nur für  $j = n$  und nehmen  $d < n$  an. Für  $i = 1$  ist die Aussage eh klar, aber dieser Fall kann auch im folgenden Argument ohne Schaden noch mitlaufen. Aus der Involutivität unserer Distribution folgt  $[A^1, A^i] = \sum c_k^i A^k$  für geeignete glatte Funktionen

$c_k^i$ , und das liefert hinwiederum für die  $(A^i(y_n))$  das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(A^i(y_n)) = \sum_{k=1}^d c_k^i A^k(y_n)$$

Schränken wir diese Identitäten von glatten Funktionen ein auf die Fasern von  $\pi : U \rightarrow W$ , so bedeuten sie homogene lineare Systeme von Differentialgleichungen von Funktionen in  $y_1$ . Wählen wir  $U$  so klein, daß alle Fasern von  $\pi$  zusammenhängend sind, so gibt es zu jedem Anfangswert nach IV.5.3.1 genau eine Lösung auf jeder Faser. Bei Punkten  $p \in W$  ist aber nach Konstruktion der Koordinaten  $y_i$  der fragliche Wert  $(A^i(y_n))(p) = (\tilde{A}^i(y_n))(p) = 0$ , folglich bilden unsere Funktionen  $A^i(y_n)$  auf jeder Faser die Null-Lösung und verschwinden also auf ganz  $U$ .  $\square$

*Ergänzung 5.9.3.* Unter einer **partiellen Unter-Liegruppe** einer Liegruppe verstehen wir wie in 1.5.6 eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset G$  derart, daß (1) die Identität zu  $M$  gehört und daß es (2) eine Umgebung  $U$  der Identität gibt mit den Eigenschaften  $(U \cap M)(U \cap M) \subset M$  und  $(U \cap M)^{-1} \subset M$ .

**Lemma 5.9.4 (Unter-Liealgebren und partielle Unter-Liegruppen).** *Ist  $G$  eine Liegruppe und  $\mathfrak{h} \subset \text{Lie } G$  eine Lie-Unteralgebra, so ist für eine hinreichend kleine Umgebung  $V \subseteq \mathfrak{h}$  des Ursprungs das Bild  $M = \exp(V) \subset G$  eine partielle Lie-Untergruppe.*

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{h} \subset T_e G$  ein Untervektorraum, so ist für eine hinreichend kleine Umgebung  $V \subseteq \mathfrak{h}$  des Ursprungs das Bild  $M = \exp(V) \subset G$  nach ?? schon mal eine Untermannigfaltigkeit und die linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  zu Elementen von  $\mathfrak{h}$  erzeugen eine  $(\dim \mathfrak{h})$ -dimensionale linksinvariante Distribution  $D_{\mathfrak{h}}$  auf  $G$ . Ist  $\mathfrak{h} \subset T_e G$  eine Lie-Unteralgebra, so erkennt man leicht, daß diese Distribution auch involutiv und rechtsinvariant sein muß. Nun finden wir mithilfe des Frobenius-Theorems 5.9.2 eine offene Umgebung  $W \subseteq G$  des neutralen Elements und darauf ein Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n) : W \xrightarrow{\sim} (-1, 1)^n$  derart, daß das neutrale Element dem Nullvektor entspricht und daß für  $d = \dim \mathfrak{h}$  gilt

$$D_{\mathfrak{h}}(p) = \langle (\partial/\partial x_1)_p, \dots, (\partial/\partial x_d)_p \rangle \quad \forall p \in W$$

Ist dann  $V \subseteq \mathfrak{h}$  eine konvexe Umgebung des neutralen Elements mit der Eigenschaft  $\exp(V)\exp(V) \subset W$ , so behaupte ich

$$\exp(V)\exp(V) \subset \{p \in W \mid x_{d+1}(p) = \dots = x_n(p) = 0\}$$

In der Tat, gehen wir für  $X, Y \in V$  erst mit dem Weg  $t \mapsto \exp(tX)$  vom neutralen Element nach  $\exp X$  und dann mit dem Weg  $s \mapsto \exp(X)\exp(sY)$

weiter nach  $\exp(X)\exp(Y)$ , so liegen die Geschwindigkeitsvektoren beider Wege an jeder Stelle in unserer Distribution  $D_{\mathfrak{h}}$ , was die Behauptung zeigt. Andererseits gibt es eine offene Umgebung  $A \subseteq W$  des neutralen Elements mit  $\exp(V) \cap A = \{p \in A \mid x_{d+1}(p) = \dots = x_n(p) = 0\}$ . Wählen wir  $U \subseteq A$  hinreichend klein, so können wir sicher erreichen, daß gilt  $(\exp(V) \cap U)(\exp(V) \cap U) \subset A$  und damit nach dem vorhergehenden  $(\exp(V) \cap U)(\exp(V) \cap U) \subset \exp(V)$ . Man erkennt damit, daß  $\exp(V) \subset G$  in der Tat eine partielle Lie-Untergruppe ist.  $\square$

**Satz 5.9.5 (Unter-Liegruppen zu Unter-Liealgebren).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  und eine Unter-Liealgebra  $\mathfrak{h} \subset \text{Lie } G$  gibt es auf der von  $(\exp \mathfrak{h})$  erzeugten Untergruppe  $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle \subset G$  genau eine Struktur als Liegruppe derart, daß die Injektion  $H \hookrightarrow G$  ein glatter Gruppenhomomorphismus ist und ihr Differential beim neutralen Element einen Isomorphismus von Lie-Algebren  $\text{Lie } H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$  induziert.*

5.9.6. Man beachte, daß wir keineswegs fordern, daß  $H$  die von  $G$  induzierte Topologie trägt. Etwa im Fall, daß  $G$  ein kompakter Torus ist, kann das ja auch keineswegs erwartet werden.

*Beweis.* Wir finden eine offene konvexe Umgebung des Ursprungs  $V \subseteq \mathfrak{h}$  wie in 5.9.4, so daß also  $\exp(V)\exp(V)$  in einer Umgebung  $W$  des neutralen Elements mit der Distribution  $D_{\mathfrak{h}}$  angepaßten Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n) : W \xrightarrow{\sim} (-1, 1)^n$  landet. Dann versehen wir  $H$  mit der finalen Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringsten Raums zur Familie der Abbildungen

$$(h \cdot) \circ \exp : V \rightarrow H$$

für  $h \in H$ . Der Rest des Arguments kann dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

5.9.7. Ich sollte diskutieren, unter welchen Umständen sich ein Liealgebrenhomomorphismus von der Liealgebra einer Liegruppe in die glatten Vektorfelder einer Mannigfaltigkeit zu einer Gruppenoperation integrieren läßt. Das sollte doch wohl möglich sein, wenn alle Integralkurven der Vektorfelder aus dem Bild auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind und außerdem unsere Liegruppe einfach zusammenhängend ist.

## 6 Struktur kompakter Liegruppen

### 6.1 Maximale Tori in kompakten Liegruppen

**Lemma 6.1.1.** *Seien  $K \supset N$  eine kompakte Liegruppe und eine abgeschlossene normale Untergruppe. Sind  $N$  und  $K/N$  Tori, so ist auch  $K$  ein Torus.*

6.1.2. Diese Aussage hätten wir auch schon viel früher zeigen können. Ich habe sie hierher gestellt, weil sie gleich beim Beweis des Satzes 6.1.7 über maximale Tori gebraucht werden wird. Die analoge Aussage gilt im nichtkompakten Fall nicht mehr: Zum Beispiel finden wir in der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen mit drei Zeilen und Spalten einen Normalteiler, der isomorph ist zur Liegruppe  $\mathbb{R}$ , so daß der Quotient danach isomorph ist zur Liegruppe  $\mathbb{R}^2$ . Dennoch ist unsere Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen nicht kommutativ.

*Beweis.* Wäre  $K$  nicht zusammenhängend, so könnte auch  $K/N$  nicht zusammenhängend sein, etwa nach 3.8.4. Also ist  $K$  zusammenhängend und wir müssen nach 4.10.1 und 4.10.9 nur zeigen, daß seine Liealgebra abelsch ist. Nach 2.3.12 finden wir nun auf  $\text{Lie } K$  ein  $(\text{Ad } K)$ -invariantes Skalarprodukt. Das liefert eine Zerlegung von  $\text{Lie } K$  in ein Produkt von  $(\text{Ad } K)$ -stabilen und damit auch  $\text{ad}(\text{Lie } K)$ -stabilen Teilräumen alias Idealen

$$\text{Lie } K = \text{Lie } N \oplus (\text{Lie } N)^\perp$$

Die Projektion definiert nun aber offensichtlich einen Isomorphismus von Liealgebren  $(\text{Lie } N)^\perp \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(K/N)$ , woraus folgt, daß  $\text{Lie } K$  abelsch ist.  $\square$

**Definition 6.1.3.** Unter einem **Torus in einer topologischen Gruppe** versteht man eine Untergruppe, die mit der induzierten Topologie ein Torus oder genauer ein kompakter Torus im Sinne von 4.10.8 ist. Unter einem **maximalen Torus** versteht man einen Torus, der nicht in einem anderen Torus echt enthalten ist.

**Definition 6.1.4.** Gegeben eine Gruppe  $G$  und darin eine Teilmenge  $T \subset G$  setzen wir

$$Z_G(T) = \{g \in G \mid gtg^{-1} = t \quad \forall t \in T\}$$

und nennen diese Untergruppe den **Zentralisator von  $T$  in  $G$** .

**Lemma 6.1.5.** *Der Zentralisator eines maximalen Torus  $T$  in einer kompakten Liegruppe  $G$  hat als Einszusammenhangskomponente genau den besagten Torus selbst, in Formeln*

$$Z_G(T)^\circ = T$$

6.1.6. In 6.4.15 zeigen wir, daß in einer kompakten *zusammenhängenden* Liegruppe der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend sein muß, so daß für  $G$  zusammenhängend sogar gilt  $Z_G(T) = T$ . Der Beweis dieses Resultats basiert jedoch auf dem Satz über maximale Tori 6.1.7, und unser Lemma hinwiederum wird beim Beweis des Satzes über maximale Tori gebraucht.

*Beweis.* Sei  $G$  unsere kompakte Liegruppe und  $T \subset G$  ein maximaler Torus. In Formeln behauptet die Proposition  $Z_G(T)^\circ = T$ . Nach 4.6.21 reicht es,  $\text{Lie } Z_G(T) = \text{Lie } T$  zu zeigen. Für jedes  $x \in \text{Lie } Z_G(T)$  ist aber  $\mathbb{R} \times T \rightarrow G$ ,  $(a, t) \mapsto \exp(ax)t$  ein Gruppenhomomorphismus, und hätten wir  $x \notin \text{Lie } T$ , so wäre das Bild dieses Gruppenhomomorphismus eine zusammenhängende abelsche Untergruppe von  $G$ , die  $T$  echt umfaßt. Der Abschluß dieses Bildes wäre dann auch noch kompakt und damit nach 4.10.2 ein Torus. Dieser Torus müßte  $T$  echt umfassen, und dann könnte  $T$  nicht maximal gewesen sein.  $\square$

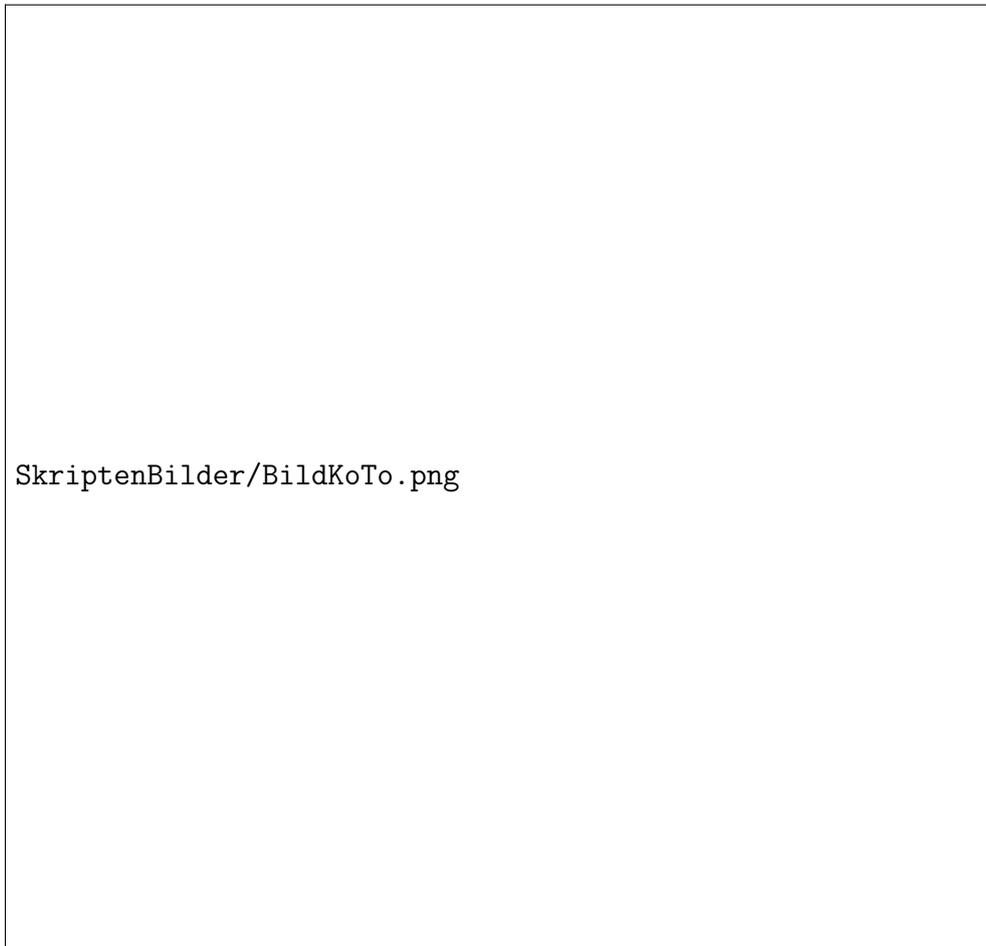
**Satz 6.1.7 (über maximale Tori).** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe gehört jedes Element zu einem maximalen Torus und je zwei maximale Tori sind konjugiert.*

*Übung 6.1.8.* Man zeige, daß in der Gruppe  $U(n)$  die unitären Diagonalmatrizen einen maximalen Torus bilden, und zeige direkt, daß in diesem Fall je zwei maximale Tori konjugiert sind. Hinweis: Eine Menge von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen ist simultan diagonalisierbar nach ??.

*Beweis.* Seien  $G$  unsere zusammenhängende kompakte Liegruppe. Aus Dimensionsgründen gibt es in  $G$  einen maximalen Torus  $T$ . Wir zeigen im folgenden

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

Der Satz folgt, denn ist dann  $S \subset G$  ein weiterer maximaler Torus, so finden wir nach 4.10.12 einen topologischen Erzeuger  $s \in S$  und ein  $g \in G$  mit  $s \in gTg^{-1}$  und damit  $S \subset gTg^{-1}$  und so  $S = gTg^{-1}$ . Es bleibt also wie oben in Formelsprache behauptet zu zeigen, daß die Konjugierten eines festen maximalen Torus bereits die ganze Gruppe überdecken. Das zeigen wir durch vollständige Induktion über die Dimension unserer Gruppe. Der Fall einer nulldimensionalen Gruppe ist klar. Ist ganz allgemein  $Z \subset G$  das Zentrum und  $Z^\circ$  seine Einszusammenhangskomponente, so ist  $TZ^\circ$  nach 4.10.9 ein Torus und es folgt  $T \supset Z^\circ$ . Nach 6.1.1 ist dann auch  $T/Z^\circ \subset G/Z^\circ$  ein maximaler Torus, und ist  $Z^\circ$  nicht trivial, so folgt unsere Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Wir dürfen also  $Z^\circ$  trivial alias  $Z$  diskret und damit endlich annehmen und dürfen auch annehmen, daß  $G$  positive Dimension



Dies Bild soll illustrieren, daß in der Gruppe  $SO(3)$  aller Drehungen des Raums je zwei maximale Tori konjugiert sind. In der Tat ist in dieser Gruppe jeder maximale Torus eindimensional und besteht aus den Drehungen zu einer festen Drehachse. Je zwei maximale Tori sind dann konjugiert, da eben je zwei Drehachsen ihrerseits durch eine Drehung ineinander überführt werden können, wie im Bild durch den gestrichelten Pfeil angedeutet.

hat, also nicht nur aus einem Punkt besteht. Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir nun zunächst

$$\bigcup_{g \in G} g(T \setminus Z)g^{-1} = G \setminus Z \quad (*)$$

Haben wir das gezeigt, so gehen wir auf beiden Seiten zum Abschluß in  $G$  über. Der Abschluß der rechten Seite ist sicher  $G$ . Der Abschluß von  $T \setminus Z$  ist  $T$ , da in einer kompakten Gruppe positiver Dimension auch jeder maximale Torus positive Dimension haben muß, was man etwa daran erkennt, daß der Abschluß des Bildes jeder Einparameteruntergruppe ein Torus ist. Der Abschluß der linken Seite umfaßt also  $\bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$ , aber er muß sogar mit dieser Vereinigung zusammenfallen, da sie abgeschlossen ist als Bild einer stetigen Abbildung von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum  $G \times T \rightarrow G$ . Es reicht also, wenn wir aus der Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung (\*) folgern unter der zusätzlichen Annahme, daß  $G$  endliches Zentrum hat und nicht nur aus einem Punkt besteht. Nach 4.10.1 hat dann  $G$  mindestens die Dimension zwei, und insbesondere ist nach 3.2.14 mit  $G$  auch  $G \setminus Z$  zusammenhängend. Es reicht also, wenn wir zeigen, daß

$$\bigcup_{g \in G} g(T \setminus Z)g^{-1}$$

sowohl offen als auch abgeschlossen ist in  $G \setminus Z$ . Daß es abgeschlossen ist in  $G \setminus Z$  folgt aus der Identität

$$\bigcup_{g \in G} g(T \setminus Z)g^{-1} = \left( \bigcup_{g \in G} gTg^{-1} \right) \setminus Z$$

zusammen mit unserer Erkenntnis, daß die Vereinigung auf der rechten Seite abgeschlossen ist in  $G$ . Um zu zeigen, daß es auch offen ist, müssen wir nur für jeden Punkt  $t \in T \setminus Z$  nachweisen, daß eine ganze Umgebung von  $t$  zu  $\bigcup_{g \in G} g(T \setminus Z)g^{-1}$  gehört. Da  $t$  nicht im Zentrum von  $G$  liegt, dürfen wir auf die Einszusammenhangskomponente seines Zentralisators  $K := Z_G(t)^\circ$  die Induktionsvoraussetzung anwenden und finden erst  $K = \bigcup_{g \in K} gTg^{-1}$  und als Folgerung dann auch  $K \setminus Z = \bigcup_{g \in K} g(T \setminus Z)g^{-1}$ . Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times (K \setminus Z) &\rightarrow G \\ (g, k) &\mapsto gkg^{-1} \end{aligned}$$

und sind fertig mit dem Umkehrsatz, wenn wir nur zeigen können, daß sie an der Stelle  $(1, t)$  surjektives Differential hat. Gleichbedeutend können wir

natürlich zeigen, daß die Abbildung  $G \times K \rightarrow G$ ,  $(g, k) \mapsto t^{-1}gk g^{-1}$  an der Stelle  $(1, 1)$  surjektives Differential hat. Nun ist aber dieses Differential gerade die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Lie } G \times \text{Lie } K &\rightarrow \text{Lie } G \\ (x, y) &\mapsto (\text{Ad } t^{-1})(x) + y - x \end{aligned}$$

und nach 4.8.26 wissen wir um die Gleichung

$$\text{Lie } K = \ker(\text{Ad } t - \text{id}) = \ker(\text{Ad } t^{-1} - \text{id})$$

Andererseits ist  $\text{Ad } t$  diagonalisierbar über  $\mathbb{C}$  nach 2.3.12, es muß ja auch auf der Restriktion der adjungierten Darstellung von  $G$  auf  $T$  ein  $T$ -invariantes Skalarprodukt geben, und bezüglich dieses Skalarprodukts ist  $\text{Ad } t$  dann sogar unitär. Ebenso ist auch  $(\text{Ad } t)^{-1} - \text{id}$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar. Für jeden diagonalisierbaren Endomorphismus  $f$  eines endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums  $V$  gilt aber  $V = \ker f \oplus \text{im } f$ . Diese Identität wenden wir an auf die Komplexifizierung  $V = \text{Lie}_{\mathbb{C}} G$  der Liealgebra von  $G$  mit  $f = (\text{Ad } t)^{-1} - \text{id}$  und folgern die Surjektivität unseres Differentials zunächst nach Komplexifizierung, aber damit dann auch schon auf  $\text{Lie } G$  selbst.  $\square$

**Korollar 6.1.9.** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist das Zentrum der Schnitt aller maximalen Tori.*

*Beweis.* Jedes Element des Zentrums liegt in einem maximalen Torus, also in jedem dazu konjugierten Torus, also in jedem maximalen Torus. Liegt umgekehrt ein Element in jedem maximalen Torus, so kommutiert es mit jedem Element jedes maximalen Torus.  $\square$

*Übung 6.1.10.* Die maximalen abelschen Unteralgebren der Liealgebra einer kompakten Liegruppe sind genau die Liealgebren der maximalen Tori.

*Übung 6.1.11.* Eine maximale abelsche Unteralgebra einer Liealgebra liefert eine maximale abelsche Unteralgebra unter jeder Erweiterung des Grundkörpers.

## 6.2 Klassifikation im Rang Eins

**Satz 6.2.1 (Kompakte Liegruppen vom Rang Eins).** *Jede zusammenhängende kompakte Liegruppe mit eindimensionalen maximalen Tori ist isomorph zu genau einer der Liegruppen  $\text{SO}(3)$ ,  $\text{SU}(2)$  oder  $S^1$ .*

6.2.2. Die nach 6.1.7 wohldefinierte Dimension eines maximalen Torus in einer kompakten Liegruppe heißt auch der **Rang** unserer kompakten Liegruppe, daher der Name des Satzes. Im folgenden notieren wir für jede Liegruppe  $G$  ihre komplexifizierte Liealgebra im Sinne von 2.1.26 mit  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} G$ .

*Beweis.* Sei  $G$  unsere Gruppe. Wir nehmen  $\dim G > 1$  an und müssen zeigen, daß  $G$  isomorph ist zu  $SO(3)$  oder zu  $SU(2)$ . Wir zeigen zunächst  $\dim G = 3$ . Sei dazu  $T \subset G$  ein maximaler Torus und  $\mathfrak{g} := \text{Lie}_{\mathbb{C}} G$  die komplexifizierte Liealgebra. Die komplexe Konjugation induziert eine schieflineare Involution  $c : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , deren Invarianten in natürlicher Weise mit der ursprünglichen Liealgebra  $\text{Lie } G$  selbst identifiziert werden können. Jetzt zerlegen wir  $\mathfrak{g}$  unter der adjungierten Operation des maximalen Torus wie in 2.4.12 in Gewichtsräume

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{X}(T)} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

In Formeln haben wir also  $\mathfrak{g}^{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{Ad } t)(X) = \alpha(t)X \ \forall t \in T\}$ . Hier gilt  $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ , wie der Leser unschwer nachrechnet. Weiter gilt die Formel  $c(\mathfrak{g}^{\alpha}) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$ , denn für  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$  und alle  $t \in T$  haben wir notwendig

$$\begin{aligned} (\text{Ad } t)(c(X)) &= c(\text{Ad } t)X \\ &= c(\alpha(t)X) \\ &= \alpha(t)^{-1}c(X) \end{aligned}$$

Hier verwenden wir, daß  $\alpha(t)$  stets eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis ist, und für diese fällt das Inverse mit dem komplex Konjugierten zusammen. Da unser maximaler Torus nach 6.1.5 zumindest die Einszusammenhangskomponente seines eigenen Zentralisators ist—daß unser maximaler Torus sogar genau sein eigener Zentralisator ist, zeigen wir erst später—folgt mit 4.8.27 zunächst  $\text{Lie } T = \text{Lie } Z_G(T) = \{X \in \text{Lie } G \mid (\text{Ad } t)(X) = X \ \forall t \in T\}$  und dann auch in der Komplexifizierung  $\mathfrak{g}^0 = \text{Lie}_{\mathbb{C}} T$ . Ist die Dimension unserer Gruppe größer als Eins, so gibt es folglich mindestens ein  $\alpha \in \mathfrak{X}(T) \setminus 0$  mit  $\mathfrak{g}^{\alpha} \neq 0 \neq \mathfrak{g}^{-\alpha}$ . Jetzt wählen wir einen Erzeuger  $\gamma$  der Charaktergruppe  $\mathfrak{X}(T)$  unseres maximalen Torus und  $m > 0$  kleinstmöglich mit  $\mathfrak{g}^{m\gamma} \neq 0$ . Wählen wir dann  $X \in \mathfrak{g}^{m\gamma}$  von Null verschieden, so haben wir  $[X, c(X)] \neq 0$ , da sonst die  $c$ -Invarianten in  $\mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}c(X)$  eine zweidimensionale abelsche Unter algebra von  $\text{Lie } G$  bildeten, im Widerspruch zu 6.1.10. Also ist  $[X, c(X)]$  eine Basis von  $\mathfrak{g}^0$ . Jetzt betrachten wir in  $\mathfrak{g}$  den Untervektorraum

$$V = \mathbb{C}c(X) \oplus \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{n\gamma}$$

Er ist offensichtlich stabil unter  $\text{ad } X$  und  $\text{ad } c(X)$ , folglich hat der Kommutator  $[\text{ad } X, \text{ad } c(X)] = \text{ad}[X, c(X)]$  Spur Null auf  $V$ , und damit auch  $\text{ad}(H)$  für alle  $H \in \text{Lie}_{\mathbb{C}} T$ . Bezeichnen wir der Einfachheit halber das Differential von  $\gamma$  auch mit  $\gamma : \text{Lie } T \rightarrow \mathbb{C}$ , so erhalten wir für alle  $H \in \text{Lie } T$  nach 4.11.2 die Identität

$$0 = \text{tr}(\text{ad } H : V \rightarrow V) = -m\gamma(H) + \sum_{n \geq m} n\gamma(H) \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^{n\gamma})$$



SkriptenBilder/BildRg0001.png

Versuch einer graphischen Darstellung dessen, was wir über  $\mathfrak{g} \supset V$  in der Mitte des Beweises von 6.2.1 wissen. Die fetten Punkte stellen Basisvektoren von  $\mathfrak{g}$  dar, die fetten Punkte in einer Vertikalen Basisvektoren eines Gewichtsraums  $\mathfrak{g}^\alpha$ .

Daraus folgt sofort  $\dim \mathfrak{g}^{m\gamma} = 1$  und  $\dim \mathfrak{g}^{n\gamma} = 0$  für  $n > m$ . Wenden wir dieselbe Überlegung mit  $-\gamma$  an statt mit  $\gamma$ , oder beachten wir alternativ unsere Symmetrie  $c$ , so erhalten wir  $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3$  wie gewünscht. Andererseits wissen wir, daß  $\text{Lie } G$  triviales Zentrum hat, da ja nach 6.1.10 jede maximale abelsche Unteralgebra von  $\text{Lie } G$  eindimensional ist, so daß also die maximalen abelschen Unteralgebren von  $\text{Lie } G$  genau die eindimensionalen Teilräume sind. Die adjungierte Darstellung

$$G \rightarrow \text{GL}(\text{Lie } G)$$

hat nach 4.8.19 also injektives Tangential. Wählen wir mithilfe von 2.3.12 ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt auf  $\text{Lie } G$ , so hat durch Dimensionsvergleich der induzierte Homomorphismus

$$G \rightarrow \text{SO}(\text{Lie } G)$$

bijektives Tangential beim neutralen Element und ist folglich eine stetige Surjektion mit diskretem, also endlichem Kern. Ist diese Surjektion ein Isomorphismus, so gilt  $G \cong \text{SO}(3)$  und wir sind fertig. Sonst wenden wir das im Anschluß bewiesene Lemma 6.2.3 an und sind auch fertig.  $\square$

**Lemma 6.2.3.** *Ist  $\varphi : G \rightarrow \text{SO}(3)$  ein surjektiver stetiger Homomorphismus mit endlichem Kern von kompakten zusammenhängenden Liegruppen, so gilt  $G \cong \text{SU}(2)$  oder  $G \cong \text{SO}(3)$ .*

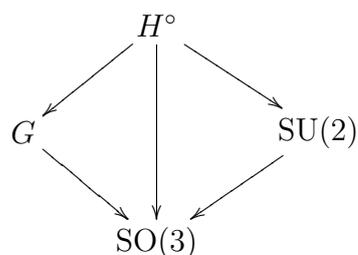
6.2.4. Ich gebe drei verschiedene Beweise. Der erste baut nur auf in dieser Vorlesung bereits bewiesenen Resultaten auf, die anderen setzen jeweils verschiedene zusätzliche Kenntnisse voraus.

*Erster Beweis.* Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G & \xrightarrow{\sim} & \text{Lie } \text{SO}(3) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & \text{SO}(3) \end{array}$$

Die Exponentialabbildung ist für zusammenhängende kompakte Liegruppen nach 6.1.7 stets surjektiv. Aus der expliziten Beschreibung der Exponentialabbildung der Drehgruppe in 1.2.19 erkennt man, daß das Urbild  $\exp^{-1}(\text{id}) \subset \text{Lie } \text{SO}(3)$  eine disjunkte Vereinigung von konzentrischen Kugelschalen  $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots$  der Radien  $0, 1, 2, \dots$  bezüglich eines geeigneten Skalarprodukts ist, wobei  $K_0$  nur aus dem Ursprung besteht, aber doch noch als "entartete Kugelschale" durchgehen mag. Unter  $\exp : \text{Lie } G \rightarrow G$  müssen alle diese

Kugelschalen oder genauer deren Urbilder  $K_n^g \subset \text{Lie } G$  jeweils auf einen einzigen Punkt der diskreten Untergruppe  $\ker \varphi$  abgebildet werden, und die Vereinigung dieser Bilder ist auch ganz  $\ker \varphi$ . Insbesondere geht die Kugelschale  $K_1^g$  mit Radius Eins auf einen einzigen Punkt  $z \in G$ . Durch diesen Punkt  $z$  laufen notwendig alle nichtkonstanten Einparameteruntergruppen  $\gamma$  von  $G$ , ja es gibt für jedes derartige nichtkonstante  $\gamma$  sogar ein  $t$  mit  $\gamma(t) = z = \gamma(-t)$ , und das zeigt sofort  $z^2 = e$ . Induktiv folgt  $\exp(K_n^g) = z^n$ . Die einzig möglichen Fälle sind also  $|\ker \varphi| = 1$  und  $|\ker \varphi| = 2$ . Im ersten Fall ist  $\varphi$  ein Isomorphismus. In jedem Fall mag man einen surjektiven stetigen Gruppenhomomorphismus  $\phi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  wählen und die Liegruppe  $H = \{(g, s) \in G \times \text{SU}(2) \mid \varphi(g) = \phi(s)\}$  betrachten mitsamt dem offensichtlichen stetigen Gruppenhomomorphismus  $H \rightarrow \text{SO}(3)$ . Die Einszusammenhangskomponente  $H^\circ$  von  $H$  paßt in ein kommutatives Diagramm von Liegruppen der Gestalt



Auf den Liealgebren induzieren alle Morphismen dieses Diagramms Isomorphismen, folglich sind alle Morphismen dieses Diagramms surjektiv. Da aber der Kern der Vertikale  $H^\circ \rightarrow \text{SO}(3)$  nach unseren bisherigen Erkenntnissen, nun angewandt auf  $H^\circ$  statt auf  $G$ , auch höchstens zwei Elemente haben kann, müssen im zweiten Fall die oberen schrägen Pfeile beide Isomorphismen sein. Wir folgern  $G \cong H^\circ \cong \text{SU}(2)$ .  $\square$

*Zweiter Beweis.* Dieser Beweis setzt Kenntnisse in Überlagerungstheorie voraus. Da die Sphäre  $\text{SU}(2) \cong S^3$  wegweise einfach zusammenhängend ist nach ??, und da  $G \rightarrow \text{SO}(3)$  sicher eine Überlagerung ist, existiert nach ?? ein Lift von  $s : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{s} : \text{SU}(2) \rightarrow G$  mit  $1 \mapsto 1$ . Wir zeigen, daß dieser Lift ein Gruppenhomomorphismus ist. In der Tat sind aber sowohl  $m \circ (\tilde{s} \times \tilde{s})$  als auch  $\tilde{s} \circ m$  Lifts der Abbildung  $s \circ m : \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  mit  $(1, 1) \mapsto 1$  und stimmen folglich überein. Da der Kern eines und jedes surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  aus zwei Elementen besteht, muß in der Sequenz  $\text{SU}(2) \rightarrow G \rightarrow \text{SO}(3)$  einer der beiden Pfeile ein Isomorphismus sein.  $\square$

*Dritter Beweis.* Dieser Beweis setzt zusätzliche Kenntnisse über Darstellungstheorie voraus, genauer die Tatsache, daß nach 10.9.7 außer dem Neutralen

jedes Element einer kompakten topologischen Gruppe auch auf mindestens einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung nichttrivial operiert. Ist unsere Surjektion  $G \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  kein Isomorphismus, so hat  $G$  nach 10.9.7 auch irreduzible Darstellungen, die nicht von irreduziblen Darstellungen von  $\mathrm{SO}(3)$  herkommen. Wegen der Klassifikation der Darstellungen der Liealgebra hat  $G$  also eine irreduzible Darstellung gerader Dimension. Darin ist die von  $\exp(\mathrm{Lie} G)$  erzeugte Untergruppe aber nach 1.5.9 isomorph zu  $\mathrm{SU}(2)$  und wir erhalten so einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ . Dieser muß bijektiv sein, da sonst  $G$  nach 10.9.7 auch irreduzible Darstellungen besitzen müßte, die nicht von irreduziblen Darstellungen von  $\mathrm{SU}(2)$  herkommen. Die einfachen Darstellungen der  $\mathrm{SU}(2)$  liefern jedoch bereits alle einfachen endlichdimensionalen Darstellungen seiner komplexifizierten Liealgebra.  $\square$

### 6.3 Weylgruppen kompakter Liegruppen

**Satz 6.3.1 (Starrheit kompakter Tori).** *Seien  $S$  und  $T$  kompakte Tori und sei  $\varphi : Z \rightarrow \mathrm{GrpTop}(S, T)$  eine durch einen zusammenhängenden topologischen Raum  $Z$  parametrisierte Familie stetiger Gruppenhomomorphismen  $S \rightarrow T$ , die stetig vom Parameter  $z \in Z$  abhängt in dem Sinne, daß die induzierte Abbildung  $Z \times S \rightarrow T$  stetig ist. So ist unsere Familie  $\varphi$  konstant.*

6.3.2. Der Satz gilt mit demselben Beweis für beliebige kompakte abelsche Liegruppen, aber der Fall von Tori ist für das Weitere besonders wichtig. Eine gewisse Intuition mag V.1.6.5 geben.

*Beweis.* Gegeben  $z \in Z$  bezeichnen wir den zugehörigen Homomorphismus mit  $\varphi_z : S \rightarrow T$ . Für beliebige  $s \in S$ ,  $t \in T$  ist

$$Z_{s,t} := \{z \in Z \mid \varphi_z(s) = t\}$$

abgeschlossen in  $Z$ . Für  $n \geq 1$  betrachten wir nun in einer beliebigen Gruppe  $G$  die Teilmenge  $G[n] := \{g \in G \mid g^n = 1\}$  aller Elemente, deren Ordnung  $n$  teilt. In unserem Fall sind  $S[n]$  und  $T[n]$  endlich und jeder Gruppenhomomorphismus schickt sicher  $S[n]$  nach  $T[n]$ . Für  $s \in S[n]$  haben wir also eine endliche Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen

$$Z = \bigcup_{t \in T[n]} Z_{s,t}$$

Da  $Z$  zusammenhängend ist, muß für  $s \in S$  von endlicher Ordnung also  $\varphi_z(s)$  unabhängig sein von  $z$ . Da jedoch die Elemente endlicher Ordnung in unserem Torus  $S$  dicht liegen, folgt daraus, daß  $\varphi_z$  unabhängig ist von  $z$ .  $\square$

**Definition 6.3.3.** Der **Normalisator** einer Untergruppe  $H$  in einer Gruppe  $G$  ist definiert als die Untergruppe  $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$  von  $G$ .

**Proposition 6.3.4.** Gegeben  $S \subset G$  ein Torus in einer topologischen Gruppe liegt die Einszusammenhangskomponente seines Normalisators bereits in seinem Zentralisator, in Formeln

$$(N_G S)^\circ \subset Z_G S$$

*Beweis.* Wir wenden Proposition 6.3.1 über die Starrheit von Tori an auf die Abbildung  $\varphi : (N_G S)^\circ \rightarrow \text{GrpTop}(S, S)$ ,  $g \mapsto \text{int } g$  und folgern  $\text{int } g$  konstant, also  $\text{int } g = \text{int } e = \text{id}_S$  für alle  $g \in (N_G S)^\circ$ .  $\square$

**Definition 6.3.5.** Die **Weylgruppe**  $W = W(G, T)$  einer kompakten Liegruppe, genauer eines Paares  $G \supset T$  bestehend aus einer kompakten Liegruppe mitsamt einem maximalen Torus, ist der Quotient des Normalisators unseres Torus nach dem Torus selbst, in Formeln

$$W = (N_G T)/T$$

*Beispiel 6.3.6.* Der Normalisator des maximalen Torus  $T$  aller Diagonalmatrizen in der unitären Gruppe  $U(n)$  besteht genau aus allen Matrizen, die die simultanen Eigenräume  $\mathbb{C}e_\nu$  unserer Diagonalmatrizen permutieren, als da heißt aus allen unitären Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben. In diesem Fall bilden die Permutationsmatrizen ein Repräsentantensystem für die Weylgruppe.

*Beispiel 6.3.7.* Im Fall der Drehgruppe  $SO(3)$  besteht ein maximaler Torus aus allen Drehungen um eine feste Achse und sein Normalisator aus allen Drehungen, die besagte Achse in sich selber überführen, aber nicht notwendig punktweise festhalten. Die Weylgruppe besteht aus zwei Elementen, und Repräsentanten des nicht neutralen Elements sind alle Drehungen, die besagte Achse “auf den Kopf stellen”.

**Korollar 6.3.8.** Ist  $G$  eine kompakte Liegruppe und  $T \subset G$  ein maximaler Torus, so ist die Weylgruppe  $W = (N_G T)/T$  endlich.

*Bweis.* Wir haben  $(N_G T)^\circ = (Z_G T)^\circ = T$  nach 6.3.4 und 6.1.5, folglich ist  $(N_G T)/T$  diskret als topologischer Raum. Dieser Raum ist jedoch auch kompakt und folglich endlich.  $\square$

*Übung 6.3.9.* Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung  $V$  einer Liegruppe  $G$  und ein Torus  $T \subset G$  induziert die Operation seines Normalisators  $N_G T$  durch Konjugation auf  $T$  natürlich eine Operation von  $N_G T$  auf der Charaktergruppe  $\mathfrak{X}(T)$ . Man zeige für die Gewichtsräume von  $V$  unter  $T$  aus 2.4.12 die Formel

$$nV_\chi = V_{n\chi} \quad \text{für alle } n \in N_G(T) \text{ und } \chi \in \mathfrak{X}(T).$$

## 6.4 Klassifikation der kompakten Liegruppen

**Definition 6.4.1.** Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe nennen wir auch ein **Gitter**. Unter einer **Gitterspiegelung** oder auch kurz **Spiegelung** verstehen wir einen Automorphismus eines Gitters derart, daß sein Quadrat die Identität ist und die Untergruppe der Elemente, die auf ihr Negatives gehen, unendlich zyklisch. Unter einer **Wurzel zu einer Gitterspiegelung** verstehen wir ein Element unseres Gitters derart, daß sich jeder Punkt unseres Gitters von seinem Spiegelbild um ein ganzzahliges Vielfaches des besagten Elements unterscheidet.

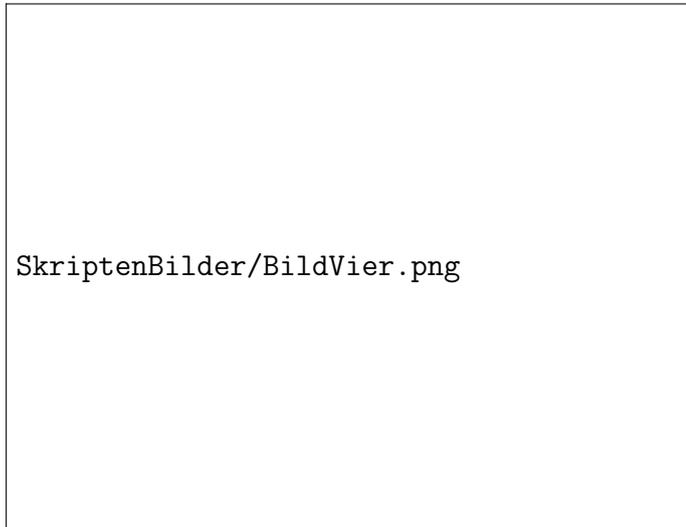
6.4.2. Ist  $X$  ein Gitter und  $s : X \rightarrow X$  eine Gitterspiegelung und  $\alpha \in X$  dazu eine Wurzel, so gibt es genau eine Linearform  $\alpha^\vee : X \rightarrow \mathbb{Z}$  mit

$$s\lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in X$$

wo wir für das Auswerten von  $\chi \in X^* = \text{Hom}(X, \mathbb{Z})$  auf  $\lambda \in X$  die symmetrischere Notation  $\chi(\lambda) = \langle \lambda, \chi \rangle$  verwendet haben. Die Linearform  $\alpha^\vee$  heißt dann die **Kowurzel** zur Wurzel  $\alpha$  der Spiegelung  $s$ . Wegen  $s\alpha = -\alpha$  gilt stets  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ , und umgekehrt ist auch für jedes Paar  $(\alpha, \alpha^\vee)$  mit  $\alpha \in X$  und  $\alpha^\vee \in X^*$  und  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  die Abbildung  $s_{\alpha, \alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  eine Gitterspiegelung. Das Negative einer Wurzel zu einer Gitterspiegelung ist stets wieder eine Wurzel zu derselben Gitterspiegelung, und zu jeder Gitterspiegelung  $s$  gibt es mindestens zwei und höchstens vier Wurzeln: Genauer sind die beiden Erzeuger der unendlich zyklischen Gruppe  $X^{-s}$  aller Vektoren  $\lambda \in X$  mit  $s\lambda = -\lambda$  stets mögliche Wurzeln, und nehmen die zugehörigen Kowurzeln auf  $X$  nur gerade Werte an, so sind die Doppelten besagter Erzeuger auch noch mögliche Wurzeln. Damit sind dann aber auch bereits alle Möglichkeiten ausgeschöpft.

*Übung 6.4.3.* Die Transponierte einer Gitterspiegelung ist stets eine Gitterspiegelung des dualen Gitters und jedes Paar von Wurzel und Kowurzel zu einer Gitterspiegelung ist ein Paar von Kowurzel und Wurzel zu ihrer Transponierten.

**Definition 6.4.4.** Eine **endliche Gitterspiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Gitters, die von Spiegelungen erzeugt wird. Eine **stabile Wurzelwahl** für eine endliche Gitterspiegelungsgruppe ist eine Teilmenge des zugrundeliegenden Gitters, die (1) stabil ist unter der Spiegelungsgruppe, die (2) aus Wurzeln zu Spiegelungen der Spiegelungsgruppe besteht und die (3) zu jeder Spiegelung der Spiegelungsgruppe genau zwei Wurzeln enthält, von denen die eine dann natürlich die Negative der anderen sein muß.



Eine Gitterspiegelung, zu der es vier Wurzeln gibt.



Eine Gitterspiegelung, zu der es nur zwei Wurzeln gibt.

*Ergänzung 6.4.5.* In der Literatur trifft man statt endlichen Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl meist das äquivalente Konzept eines **Wurzeldatums** an. Darunter versteht man ein Datum

$$(X, R, X^\vee, R^\vee, \phi, \tau)$$

bestehend aus zwei Gittern  $X, X^\vee$ , einer bilinearen Abbildung  $\phi : X \times X^\vee \rightarrow \mathbb{Z}$ , die das eine Gitter mit dem Dualen des anderen identifiziert und üblicherweise  $(\lambda, \nu) \mapsto \langle \lambda, \nu \rangle$  notiert wird, sowie endlichen Teilmengen  $R \subset X$  und  $R^\vee \subset X^\vee$  mitsamt einer Bijektion  $\tau : R \xrightarrow{\sim} R^\vee$ , die üblicherweise  $\alpha \mapsto \alpha^\vee$  notiert wird, so daß gilt  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 \forall \alpha \in R$  und  $\beta \in R \Rightarrow \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$  und  $\beta^\vee \in R^\vee \Rightarrow \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in R^\vee$  und  $\alpha \in R \Rightarrow 2\alpha \notin R$  und  $\alpha^\vee \in R^\vee \Rightarrow 2\alpha^\vee \notin R^\vee$ . Diese Begrifflichkeit hat den Vorteil, eine zusätzliche Symmetrie sichtbar zu machen in dem Sinne, daß unmittelbar klar wird, was unter dem **dualen Wurzeldatum** zu verstehen ist. Jedes derartige Wurzeldatum liefert eine Gitterspiegelungsgruppe auf dem Gitter  $X$  mit Spiegelungen  $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  und stabiler Wurzelwahl  $R$ , und umgekehrt können wir aus den Spiegelungen und Wurzeln  $R$  auch unschwer unser Wurzeldatum zurückgewinnen.

**Definition 6.4.6.** Gegeben  $G \supset T$  eine kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus definiert man das zugehörige **Wurzelsystem**

$$R = R(G, T) \subset \mathfrak{X}(T)$$

als die Menge aller von Null verschiedenen Gewichte im Sinne von 2.4.12 der komplexifizierten Liealgebra von  $G$  unter der adjungierten Operation von  $T$ .

*Beispiel 6.4.7 (Wurzelsystem der unitären Gruppen).* Wir besprechen den Fall der unitären Gruppen  $G = U(n)$ . Als maximalen Torus  $T$  können wir nach 6.1.8 etwa die unitären Diagonalmatrizen nehmen. Eine Basis des Charaktergitters  $\mathfrak{X}(T)$  über  $\mathbb{Z}$  bilden die  $\varepsilon_i : T \rightarrow S^1$ , die jeder unitären diagonalen Matrix ihren  $i$ -ten Diagonaleintrag zuordnen, für  $1 \leq i \leq n$ . Die Operation der Weylgruppe auf dem Charaktergitter identifiziert unsere Weylgruppe nach 6.3.6 mit der Gruppe aller Permutationen der  $\varepsilon_i$  und wir erhalten so einen kanonischen Isomorphismus  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ . Die Einbettung  $\text{Lie } U(n) \hookrightarrow M(n \times n; \mathbb{C})$  führt zu einem Isomorphismus  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} U(n) \xrightarrow{\sim} M(n \times n; \mathbb{C})$  von Liealgebren, etwa nach 2.1.26, da ja  $\text{Lie } U(n)$  die Fixpunktmenge einer schieflinaren Involution auf  $M(n \times n; \mathbb{C})$  ist. Als Wurzelsystem ergibt sich so die Menge

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$$

und der zur Wurzel  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$  gehörende Wurzelraum  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} U(n))^\alpha$  entspricht unter unserer Identifikation mit den quadratischen Matrizen der Gerade  $\mathbb{C}E_{ij}$



Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu  $U(2)$ . In diesem Fall haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der anschaulich orthogonalen Spiegelung an der zu den Wurzeln senkrechten Geraden durch den Ursprung.

aller Matrizen, denen nur in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  ein von Null verschiedener Eintrag erlaubt ist.

**Satz 6.4.8 (Klassifikation der kompakten Liegruppen).** *Ordnen wir jeder zusammenhängenden kompakten Liegruppe die Charaktergruppe eines maximalen Torus zu mitsamt der Operation der zugehörigen Weylgruppe und dem zugehörigen Wurzelsystem, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhängende} \\ \text{kompakte Liegruppen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Gitterspiegelungsgruppen} \\ \text{mit stabiler Wurzelwahl} \end{array} \right\}$$

$$G \quad \mapsto \quad W(G, T) \ltimes \mathfrak{X}(T) \supset R(G, T)$$

6.4.9. Da nach 6.1.7 je zwei maximale Tori einer kompakten Liegruppe zueinander konjugiert sind, hängt unsere Abbildung nicht von der Wahl eines maximalen Torus ab. Im folgenden zeigen wir zunächst nur, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift in der Tat eine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen liefert. Wendet man genauer 6.3.9 auf die adjungierte Darstellung an, so folgt schon mal, daß die Weylgruppe die Wurzeln permutiert. Weiter zeigt Proposition 6.4.18, daß jede Wurzel des Wurzelsystems auch Wurzel zu genau einer durch ein Element der Weylgruppe gegebenen Spiegelung auf der Charaktergruppe des maximalen Torus ist. Dann zeigt 6.4.29, daß die Spiegelungen zu Wurzeln die Weylgruppe erzeugen und daß keine anderen Elemente der Weylgruppe als Gitterspiegelungen auf der Charaktergruppe des maximalen Torus operieren.

*Beispiel 6.4.10.* Wir setzen die in 6.4.7 begonnene Diskussion des Falls  $G = U(n)$  fort. Die Spiegelung zur Wurzel  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$  entspricht unter der offensichtlichen Identifikation  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$  der Transposition  $(i, j)$ , und in der Tat erzeugen diese Transpositionen die symmetrische Gruppe. Die zugehörige Kowurzel entspricht der Abbildung  $S^1 \rightarrow T$  gegeben durch

$$z \mapsto \text{diag}(1, \dots, z, \dots, z^{-1}, \dots, 1)$$

mit einem  $z$  an der  $i$ -ten Stelle, einem  $z^{-1}$  an der  $j$ -ten Stelle und Einsen sonst. In der Notation  $\varepsilon_i^* : z \mapsto \text{diag}(1, \dots, z, \dots, 1)$  mit einem  $z$  an der  $i$ -ten Stelle hat die Kowurzel zur Wurzel  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$  also die Gestalt  $\alpha^\vee = \varepsilon_i^* - \varepsilon_j^*$ .

*Übung 6.4.11.* Man zeichne das Charaktergitter mit Wurzelsystem und zugehörigen Spiegelebenen der Weylgruppe für die kompakten zusammenhängenden Liegruppen  $SU(3)$  und  $SO(4)$ .

SkriptenBilder/BildS.png

Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu  $S^1$ . In diesem Fall ist die Menge der Wurzeln leer und die Gitterspiegelungsgruppe besteht nur aus dem neutralen Element.

SkriptenBilder/BildSU.png

SkriptenBilder/BildSOS.png

Die Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl zu  $SU(2)$  und  $SO(3)$ . In diesen Fällen haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der Punktspiegelung am Ursprung. Das Gitter zu  $SU(2)$  kann man als Quotient des Gitters zu  $U(2)$  verstehen, das Gitter zu  $SO(3)$  als Untergitter des Gitters zu  $SU(2)$ .

**Proposition 6.4.12 (Bilder von Tori).** *Gegeben ein Homomorphismus von kompakten Liegruppen sind die maximalen Tori des Bildes gerade die Bilder der maximalen Tori.*

*Beweis.* Weil wir eh nur am Bild unseres Homomorphismus interessiert sind, dürfen wir ihn auch gleich surjektiv annehmen. Sei also  $\varphi : G \rightarrow H$  ein surjektiver Homomorphismus von kompakten Liegruppen. Ist  $S \subset H$  ein maximaler Torus, so finden wir dazu nach 4.10.17 einen topologischen Erzeuger  $s \in S$  und dazu ein Urbild in der Einszusammenhangskomponente  $t \in G^\circ$  und darüber nach 6.1.7 einen maximalen Torus  $T \subset G$  mit  $t \in T$ . Dann haben wir offensichtlich  $\varphi(T) = S$ . Da je zwei maximale Tori in  $G$  konjugiert sind, ist dann auch umgekehrt das Bild jedes maximalen Torus von  $G$  ein maximaler Torus von  $H$ .  $\square$

**Proposition 6.4.13 (Homomorphismen und Weylgruppen).** *Unter einem surjektiven Homomorphismus mit zentralem Kern von zusammenhängenden kompakten Liegruppen ist das Urbild jedes maximalen Torus ein maximaler Torus und das Urbild seines Normalisators der Normalisator seines Urbilds und wir erhalten so einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Weylgruppen.*

*Beweis.* Sei  $\varphi : G \rightarrow H$  unser surjektiver Homomorphismus. Da  $G$  zusammenhängend ist, liegt nach 6.1.9 sein Zentrum in jedem maximalen Torus  $T \subset G$ . Nach Annahme haben wir dann erst recht  $\ker \varphi \subset T$  und folglich  $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$ . Da wir bereits nach 6.4.12 wissen, daß jeder maximale Torus in  $H$  das Bild eines maximalen Torus in  $G$  ist, folgt die erste Behauptung. Die beiden weiteren Behauptungen folgen nun ohne weitere Schwierigkeiten, für eine formale Argumentation scheint mir das Neunerlemma ?? besonders übersichtlich. Die benötigten Rechnungen macht 6.4.14 explizit.  $\square$

*Übung 6.4.14.* Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  und Teilmengen  $A, B \subset H$  gilt  $\varphi^{-1}(AB) = \varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)$ . Gegeben eine Teilmenge  $S \subset H$  und ein Element  $g \in G$  gilt mit der ad hoc erfundenen der Situation angepaßten nur hier gültigen Notation  $\bar{a}$  für das Inverse eines Gruppenelements  $a$  des weiteren die Äquivalenz  $g\varphi^{-1}(S)\bar{g} \subset \varphi^{-1}(S) \Leftrightarrow \varphi(g)\overline{S\varphi(g)} \subset S$ .

**Proposition 6.4.15.** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend.*

6.4.16. Diese Proposition dient vorerst nur dazu, im folgenden Beweis die Notation zu vereinfachen und uns zu erlauben, dort stets  $Z_G(S)$  statt  $Z_G(S)^\circ$  zu schreiben. Ihr Korollar 6.4.28 wird jedoch zum Abschluß dieses Abschnitts noch eine entscheidende Rolle spielen.

*Beweis.* Sei  $G$  unsere Gruppe,  $S \subset G$  unser Torus und  $x \in Z_G(S)$  ein Element seines Zentralisators. Sicher ist  $B = \overline{\langle x, S \rangle}$  abelsch und kompakt und  $B/B^\circ$  ist topologisch erzeugt von  $\bar{x}$  und mithin zyklisch. Damit ist aber  $B$  topologisch zyklisch nach 4.10.17 und liegt folglich in einem maximalen Torus von  $G$ . Wir folgern, daß  $Z_G(S)$  die Vereinigung aller der maximalen Tori von  $G$  ist, die  $S$  umfassen. Nach 1.4.7.3 ist  $Z_G(S)$  dann zusammenhängend als Vereinigung einer Familie zusammenhängender Teilmengen mit nichtleerem Schnitt.  $\square$

**Korollar 6.4.17.** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist jeder maximale Torus sein eigener Zentralisator.*

*Beweis.* In jeder kompakten Liegruppe ist jeder maximale Torus die Einzusammenhangskomponente seines Zentralisators nach 6.1.5, und ist unsere Liegruppe zusammenhängend, so ist der Zentralisator unseres Torus bereits zusammenhängend nach 6.4.15.  $\square$

**Proposition 6.4.18 (Wurzeln und ihre Spiegelungen).** *Seien  $G \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalem Torus,  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$  das Charaktergitter,  $R \subset \mathfrak{X}$  das Wurzelsystem und  $W = W(G, T)$  die Weylgruppe. So gilt für jede Wurzel  $\alpha \in R$ :*

1. *Der Wurzelraum  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^\alpha$  ist eindimensional und kein positives Vielfaches von  $\alpha$  ist auch positives Vielfaches einer anderen Wurzel  $\beta$ , in Formeln gilt für  $\beta \in R$  also  $(\alpha \neq \beta) \Rightarrow (\mathbb{N}\alpha \cap \mathbb{N}\beta = 0)$ ;*
2. *Es gibt genau ein Element der Weylgruppe  $s = s_\alpha \in W$ , das auf  $\mathfrak{X}$  als Spiegelung operiert mit  $s(\alpha) = -\alpha$ ;*
3. *Es gibt ein  $\alpha^\vee : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in \mathfrak{X}$ .*

*Beweis.* 1. Wir betrachten die Einzusammenhangskomponente des Kerns von  $\alpha$ , den Torus  $S := (\ker \alpha)^\circ \subset T$ , und bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Z_G(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T/S & \longrightarrow & Z_G(S)/S \end{array}$$

Ein Beispiel für diese Konstruktion wird in 6.4.19 skizziert. Die obere Horizontale ist offensichtlich die Einbettung eines maximalen Torus, und wegen 6.4.12 gilt dasselbe für die untere Horizontale. Die obere und damit auch die untere Horizontale ist weiter wegen  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^\alpha \subset \text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_G(\ker \alpha) \subset \text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_G(S)$  keine Bijektion. Aus Dimensionsgründen haben wir  $T/S \cong S^1$ . Nach der

Klassifikation der Gruppen vom Rang Eins 6.2.1 ist folglich  $Z_G(S)/S$  dreidimensional und das Wurzelsystem dieser Gruppe in Bezug auf den Torus  $T/S$  besteht genau aus den beiden von  $\pm\alpha$  auf  $T/S$  induzierten Charakteren, in Formeln  $R(Z_G(S), T) = \{\alpha, -\alpha\}$ . Andererseits kann die komplexifizierte Liealgebra des Zentralisators mithilfe von 4.8.27 und 2.1.18 auch dargestellt werden als

$$\text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_G(S) = (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^{\text{Ad}(S)} = (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^{\text{ad}(\text{Lie } S)} = \bigoplus_{\ker d\beta \supset \ker d\alpha} (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^{\beta}$$

Hier verwenden wir im zweiten Schritt, daß  $S$  zusammenhängend ist, und im Dritten die Formel  $\text{Lie } S = \ker d\alpha$ . Aus dem Vergleich dieser beiden Beschreibungen von  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_G(S)$  als Darstellung von  $T$  folgt sofort Teil 1. Weiter folgt  $\text{Lie } Z_G(\ker \alpha) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } Z_G(S)$ , was wir später noch brauchen werden.

2. Nach 6.4.15 wissen wir, daß  $Z_G(S)$  zusammenhängend ist. Wenn wir das nicht wüßten, könnten wir im Übrigen den Beweis in derselben Weise führen und müßten nur stets statt  $Z_G(S)$  seine Einszusammenhangskomponente betrachten. Ein mögliches  $s \in W$  erhält man, indem man das nicht-triviale Element der Weylgruppe von  $Z_G(S)/S$  bezüglich  $T/S$  mithilfe von 6.4.13 unter unserem Homomorphismus  $Z_G(S) \rightarrow Z_G(S)/S$  in die Weylgruppe  $W(Z_G(S), T)$  von  $Z_G(S)$  bezüglich  $T$  zurückholt, die ja offensichtlich als Untergruppe von  $W(G, T)$  aufgefaßt werden kann. In der Tat haben wir nach 4.11.5 eine kurze exakte Sequenz

$$\mathfrak{X}(T/S) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(S)$$

Unser  $s$  operiert per definitionem vorne durch  $-1$ , und da es einen Repräsentanten in  $Z_G(S)$  hat, muß es hinten als die Identität operieren. Sein Quadrat operiert auf  $\mathfrak{X}(T)$  also durch einen Automorphismus von endlicher Ordnung, der darüber hinaus unipotent ist, also den einzigen Eigenwert Eins hat. Damit muß dies Quadrat nach ?? auf  $\mathfrak{X}(T)$  die Identität sein. Das zeigt, daß  $s$  als Gitterspiegelung auf  $\mathfrak{X}(T)$  operiert. Die Eindeutigkeit folgt ähnlich, da das Produkt von zwei möglichen Wahlen  $s, t \in W$  durch einen unipotenten Automorphismus von endlicher Ordnung auf  $\mathfrak{X}(T)$  operieren muß.

3. Die Surjektion  $\alpha : T \rightarrow S^1$  induziert eine kurze exakte Sequenz  $\ker \alpha \hookrightarrow T \twoheadrightarrow S^1$  und damit nach 4.11.5 in der Gegenrichtung eine kurze exakte Sequenz  $\mathfrak{X}(S^1) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\ker \alpha)$  alias

$$\mathbb{Z}\alpha \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\ker \alpha)$$

Die Operation von  $s$  induziert natürlich die Multiplikation mit  $(-1)$  auf  $\mathbb{Z}\alpha$ . Sie induziert jedoch zusätzlich die Identität auf  $\mathfrak{X}(\ker \alpha)$ , da  $Z_G(\ker \alpha)$  nach

der Bemerkung zu Schluß des Beweises von Teil 1 dieselbe Liealgebra hat wie die a priori größere Gruppe  $Z_G(S)$  und folglich  $s$  in  $Z_G(\ker \alpha) = Z_G(S)$  repräsentiert wird. Die Abbildung  $\mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(T)$ ,  $\lambda \mapsto (\lambda - s\lambda)$  faktorisiert somit über  $\mathbb{Z}\alpha$  und liefert daher einen Gruppenhomomorphismus  $\alpha^\vee : \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  und  $\alpha^\vee \circ s = -\alpha^\vee$ . Die Abbildung  $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  ist also auf  $\mathbb{Z}\alpha$  die Multiplikation mit  $(-1)$  und auf der Fixpunktmenge von  $s$  die Identität und muß folglich mit  $s$  übereinstimmen.  $\square$

*Beispiel 6.4.19.* Im Fall  $G = U(n)$  und  $T$  den Diagonalmatrizen und  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$  wird  $S = \ker \alpha$  die Gruppe der unitären Diagonalmatrizen, die an der  $i$ -ten Stelle denselben Eintrag haben wie an der  $j$ -ten Stelle. Der Zentralisator dieser Untergruppe besteht aus allen unitären Matrizen, die höchstens auf der Diagonalen und an den Stellen mit Indizes  $(i, j)$  oder  $(j, i)$  von Null verschiedene Einträge haben. Man kann damit leicht einen Isomorphismus  $SU(2)/\{\pm \text{id}\} \xrightarrow{\sim} Z_G(S)/S$  angeben.

*Übung 6.4.20.* Ein Element eines maximalen Torus in einer kompakten Liegruppe liegt in keinem anderen maximalen Torus genau dann, wenn es im Kern keiner Wurzel liegt.

*Übung 6.4.21.* Ein Element eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe liegt im Zentrum genau dann, wenn es im Kern jeder Wurzel liegt.

6.4.22. Seien  $G \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. Die vorhergehende Übung 6.4.21 liefert uns eine linksexakte Sequenz  $Z(G) \hookrightarrow T \rightarrow \prod_{\alpha \in R} S^1$  mit dem Auswerten aller Wurzeln als rechtem Pfeil. Gehen wir zu den Charaktergruppen über, so erhalten wir mit 4.11.5 eine exakte Sequenz

$$\langle R \rangle \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(Z(G))$$

Genau dann hat also unsere Gruppe  $G$  triviales Zentrum, wenn die Wurzeln die Charaktergruppe des maximalen Torus erzeugen, und genau dann ist das Zentrum diskret, wenn das von den Wurzeln erzeugte Gitter endlichen Index in der Charaktergruppe hat.

*Ergänzung 6.4.23 (Rang-Eins-Untergruppen zu Wurzeln).* Ist  $G \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalem Torus, so gibt es für jede Wurzel  $\alpha \in R(G, T)$  genau eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe  $G_\alpha$  vom Rang Eins mit  $\text{Lie}_{\mathbb{C}}(G_\alpha) \supset (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^\alpha$ . Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Gegeben so ein  $G_\alpha$  ist sicher  $\text{Lie}_{\mathbb{C}}(G_\alpha)$  stabil unter der komplexen Konjugation und muß folglich mit  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^\alpha$  auch  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^{-\alpha}$  enthalten und damit die von beiden Räumen erzeugte Unterliealgebra, die wir mit  $\mathfrak{g}_\alpha$  bezeichnen. Diese Unterliealgebra ist nach 6.4.18.1 von

der Dimension höchstens drei und sie muß surjektiv und folglich vermittels eines Isomorphismus in den Notationen des vorhergehenden Beweises auf  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_G(S)/S$  gehen. Unsere Unteralgebra ist offensichtlich auch stabil unter der komplexen Konjugation, folglich schneidet sie  $\text{Lie } Z_G(S)$  in einer Unter- algebra  $\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{R}}$ , die unter der Projektion isomorph auf  $\text{Lie } Z_G(S)/S$  alias  $\mathfrak{su}(2)$  abgebildet wird. Invertieren wir diesen Isomorphismus, so erhalten wir einen Homomorphismus von Liealgebren

$$\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \text{Lie } Z_G(S)$$

mit Bild  $\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{R}}$ , der sich nach 4.6.21 oder 15.1.2, die wir jedoch beide noch nicht bewiesen haben, integrieren läßt zu einem Homomorphismus von Liegruppen

$$\text{SU}(2) \rightarrow Z_G(S)$$

Das Bild dieses Homomorphismus ist dann eine Untergruppe  $G_{\alpha}$  mit den gewünschten Eigenschaften. Deren Eindeutigkeit geht aus dem Beweis hervor. Unser  $\alpha^{\vee}$  entspricht in diesem Bild der von unserem Homomorphismus induzierten Abbildung eines geeigneten maximalen Torus von  $\text{SU}(2)$  nach  $T$ .

**Definition 6.4.24.** Ein Automorphismus eines Vektorraums über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik heißt eine **Spiegelung** genau dann, wenn er eine Hyperebene punktweise festhält und einen Vektor außerhalb dieser **Spiegelebene** auf sein Negatives wirft.

6.4.25. Seien  $G \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. Die Weylgruppe  $W(G, T)$  operiert auch auf dem reellen Vektorraum  $\text{Lie } T$ . Die Spiegelung  $s_{\alpha}$  zu einer Wurzel  $\alpha \in R(G, T)$  hält darin die Hyperebene  $\ker(d\alpha)$  punktweise fest und operiert folglich auch auf  $\text{Lie } T$  als Spiegelung mit der Spiegelebene  $\ker(d\alpha)$ . Die Zusammenhangskomponenten des Komplements

$$\text{Lie } T \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \ker(d\alpha)$$

der Vereinigung aller Spiegelebenen zu Spiegelungen  $s_{\alpha}$  heißen **Alkoven** und die Menge aller Alkoven bezeichnen wir mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\text{Lie } T)$ . Sicher permutiert die Weylgruppe  $W$  die Spiegelebenen  $\ker(d\alpha) \subset \text{Lie } T$ , folglich erhalten wir auch eine Operation der Weylgruppe  $W$  auf der Menge  $\mathcal{A}$  aller Alkoven.

**Proposition 6.4.26.** Gegeben  $G \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus gilt:

1. Die Weylgruppe  $W = W(G, T)$  wird von den Spiegelungen  $s_{\alpha}$  zu Wurzeln  $\alpha \in R(G, T)$  erzeugt;

2. Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe als Spiegelungen auf  $\text{Lie } T$ ;
3. Die Weylgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge der Alkoven in  $\text{Lie } T$ , in Formeln liefert also für jeden Alkoven  $A$  das Anwenden eine Bijektion  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ ,  $w \mapsto wA$ .

*Ergänzung 6.4.27.* Teile des anschließenden Beweises werden wir später im Rahmen der allgemeinen Theorie endlicher Spiegelungsgruppen noch besser verstehen können. Insbesondere kann man ganz allgemein zeigen, daß jede endliche von Spiegelungen erzeugte Gruppe von Automorphismen eines endlichen reellen Vektorraums frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert, die in dieser Allgemeinheit zu verstehen sind als die Zusammenhangskomponenten des Komplements der Vereinigung aller Spiegelebenen zu Spiegelungen unserer Gruppe.

*Beweis.* Wir zeigen etwas technischer die beiden folgenden Aussagen:

1. Die Operation der Weylgruppe auf der Menge aller Alkoven ist frei;
2. Die Operation der von allen Spiegelungen  $s_\alpha$  an Wurzeln  $\alpha$  erzeugten Untergruppe auf der Menge aller Alkoven ist transitiv.

Hier und im folgenden meinen wir mit Alkoven stets Zusammenhangskomponenten des Komplements der Vereinigung aller Spiegelebenen von Spiegelungen  $s_\alpha \in W$  zu Wurzeln  $\alpha \in R$ . Erst im nachhinein wird klar werden, daß das auch die Vereinigung aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus  $W$  ist. Zusammen liefern unsere beiden technischen Aussagen sofort, daß die Weylgruppe frei und transitiv auf der Menge aller Alkoven operiert und von den Spiegelungen an Wurzeln erzeugt wird, also die Aussagen 1 und 3 der Proposition. Um auch die zweite Aussage der Proposition abzuleiten, beachten wir, daß es nach 2.3.12 oder einfacher ?? auf  $\text{Lie } T$  ein  $W$ -invariantes Skalarprodukt gibt, so daß eine Spiegelung aus  $W$  durch ihre Spiegelebene bereits eindeutig festgelegt wird. Hätten wir zusätzlich zu den  $s_\alpha$  noch eine weitere Spiegelung  $s$  in  $W$ , so müßte deren Spiegelebene nach ?? einen Alkoven  $A$  treffen und es folgte  $sA = A$  im Widerspruch zur Freiheit der Operation. Es reicht folglich, wenn wir unsere beiden technischen Aussagen zeigen.

Wir beginnen mit der Ersten. Es gilt zu zeigen, daß ein Element der Weylgruppe, das einen Alkoven festhält, bereits die Identität ist. Aber bildet ein Element der Weylgruppe einen Alkoven auf sich selber ab, so hat es in diesem Alkoven auch einen Fixpunkt, sagen wir den Schwerpunkt einer Bahn der Untergruppe, die von besagtem Element erzeugt wird. Unser Element der Weylgruppe wird also repräsentiert im Zentralisator eines Elements

$X \in \text{Lie } T$ , auf dem das Differential keiner Wurzel verschwindet. Für jeden Punkt  $X \in \text{Lie } T$ , der vom Differential keiner Wurzel annulliert wird, gilt aber  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_G(X) = \text{Lie}_{\mathbb{C}} T$  und damit  $\text{Lie } Z_G(X) = \text{Lie } T$ . Weil nun nach 6.4.28 der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammenhängend ist, folgt  $Z_G(X) = T$  und unser Element der Weylgruppe war die Identität.

Nun zeigen wir die Zweite unserer technischen Aussagen. Bezeichnen  $W' \subset W$  die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe. Wir wählen wieder ein  $W$ -invariantes Skalarprodukt auf  $\text{Lie } T$  und finden wir für beliebige Vektoren  $v, w \in \text{Lie } T$  ein  $x \in W'$  derart, daß der Abstand  $\|v - xw\|$  kleinstmöglich wird. Dann können  $v$  und  $xw$  durch keine Spiegelebene einer Wurzelspiegelung mehr getrennt werden, da ja sonst aus elementargeometrischen Gründen für  $s_{\alpha}$  die Spiegelung an besagter Spiegelebene  $v$  und  $s_{\alpha}xw$  noch näher aneinander wären. Also liegen  $v$  und  $xw$  für jede Spiegelebene einer Wurzelspiegelung in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven.  $\square$

**Lemma 6.4.28.** *In einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe ist der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammenhängend.*

*Beweis.* Der Zentralisator eines Elements der Liealgebra fällt zusammen mit dem Zentralisator der Gerade durch besagtes Element, dann auch mit dem Zentralisator ihres Bildes unter der Exponentialabbildung, und dann schließlich auch mit dem Zentralisator des Abschlusses dieses Bildes. Dieser Abschluß aber ist eine kompakte abelsche Liegruppe, als da heißt ein Torus, und wir können 6.4.15 anwenden.  $\square$

6.4.29. Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe als Gitterspiegelungen auf dem Charaktergitter des zugehörigen maximalen Torus. Das folgt mit 6.4.30 leicht aus 6.4.26.

6.4.30. Gegeben eine abelsche kompakte Liegruppe  $T$  liefert das Ableiten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{Lie } T, i\mathbb{R}) \\ \alpha &\mapsto d\alpha \end{aligned}$$

die im Fall eines Torus sogar injektiv ist. Hierbei fassen wir den Charakter  $\alpha$  als Gruppenhomomorphismus  $\alpha : T \rightarrow S^1$  auf und  $S^1$  als Untergruppe  $S^1 \subset \mathbb{C}^{\times}$  mit Liealgebra  $\text{Lie } S^1 = i\mathbb{R} \subset \text{Lie } \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C}$ . Man sieht nun leicht ein, daß diese Einbettung einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(T), i\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } T$$

induziert, der auch natürlich ist in  $T$  in dem Sinne, daß jeder Homomorphismus in eine weitere abelsche kompakte Liegruppe  $\varphi : T \rightarrow S$  ein kommutatives Diagramm liefert der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(T), i\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Lie} T \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(S), i\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Lie} S \end{array}$$

Gegeben  $G \supset T$  eine kompakte zusammenhängende Liegruppe mit einem maximalen Torus wirkt also insbesondere ein Element der Weylgruppe  $W(G, T)$  auf  $\mathrm{Lie} T$  als Spiegelung genau dann, wenn es auf  $\mathfrak{X}(T)$  als Gitterspiegelung wirkt.

6.4.31. Ich erinnere daran, wie wir in 2.1.26 jedem reellen Vektorraum  $V$  einen komplexen Vektorraum  $V_{\mathbb{C}}$  mitsamt einer  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung  $\mathrm{can} : V \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  zugeordnet hatten derart, daß das Vorschalten von  $\mathrm{can}$  für jeden komplexen Vektorraum  $W$  eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$$

liefert. Ähnlich bilden wir auch zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe  $X$  und jedem Körper  $k$  einen  $k$ -Vektorraum  $X_k$  als den Dualraum des Raums der Homomorphismen von abelschen Gruppen  $\mathrm{Ab}(X, k)$  von  $X$  nach  $k$  mit seiner offensichtlichen Struktur eines  $k$ -Vektorraums, in Formeln

$$X_k = \mathrm{Ab}(X, k)^*$$

Das Auswerten liefert dann einen Gruppenhomomorphismus  $\mathrm{can} : X \rightarrow X_k$  und für jeden  $k$ -Vektorraum  $W$  liefert das Vorschalten von  $\mathrm{can}$  eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_k(X_k, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(X, W)$$

Zum Beispiel liefert der offensichtliche Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z}^n \rightarrow k^n$  einen Vektorraumisomorphismus  $(\mathbb{Z}^n)_k \xrightarrow{\sim} k^n$ . Man sagt auch,  $X_k$  entstehe aus  $X$  durch **Erweiterung der Skalare**, und sobald Sie mit dem Tensorprodukt über Ringen vertraut sind, werden Sie einen kanonischen Isomorphismus  $X_k \xrightarrow{\sim} X \otimes_{\mathbb{Z}} k$  kennenlernen und merken, daß die durch das Tensorprodukt erklärte Erweiterung der Skalare viel "besser" ist, da sie auch im Fall einer nicht notwendig endlich erzeugten abelschen Gruppe  $X$  funktioniert. Schreiben wir  $V_{\mathbb{C}}$ , so muß der Leser von nun an aus dem Kontext erschließen, ob die Komplexifizierung eines reellen Vektorraums  $V$  oder vielmehr die Erweiterung einer endlich erzeugten abelschen Gruppe  $V$  zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum gemeint ist.

6.4.32. Mit unseren neuen Notationen liefert etwa das Ableiten wie in 6.4.30 für jede kompakte abelsche Liegruppe  $T$  einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen  $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{Lie } T, i\mathbb{R})$  und einen Isomorphismus von komplexen Vektorräumen  $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (\text{Lie}_{\mathbb{C}} T)^*$  der zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum erweiterten Charaktergruppe mit dem Dualraum der komplexifizierten Liealgebra.

6.4.33. Gegeben eine endliche Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl  $W \curvearrowright X \supset R$  bilden wir eine quadratische Matrix mit ganzzahligen Einträgen, die **Cartan-Matrix**, wie folgt: Sei  $A \subset X_{\mathbb{R}}$  ein Alkoven und  $S = S(A) \subset R$  die Menge aller  $\alpha \in R$  derart, daß gilt  $\alpha^{\vee}(A) \subset \mathbb{R}_{>0}$  und daß die zugehörige Spiegelebene  $\ker \alpha^{\vee}$  eine **Wand** von  $A$  ist in dem Sinne, daß der Schnitt  $(\ker \alpha^{\vee}) \cap \bar{A}$  bereits  $\ker \alpha^{\vee}$  erzeugt. Die Wurzeln aus  $S$  heißen auch die **in Bezug auf  $A$  einfachen Wurzeln** oder englisch **simple roots**, deshalb der Buchstabe  $S$ . Unsere Cartan-Matrix ist dann die ganzzahlige  $(S \times S)$ -Matrix alias Abbildung  $S \times S \rightarrow \mathbb{Z}$  mit Einträgen

$$(\langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle)_{\alpha, \beta \in S}$$

Da nach 6.4.26 je zwei Alkoven konjugiert sind unter der Weylgruppe, ist diese Matrix unabhängig von der Wahl des Alkoven  $A$ . Als  $(r \times r)$ -Matrix mit  $r = |S|$  ist sie natürlich nur wohldefiniert bis auf Konjugation mit einer Permutationsmatrix alias simultane Umnummerierung aller Zeilen und Spalten.

*Beispiel* 6.4.34. Wir setzen die Diskussion des Falls  $G = U(n)$  aus 6.4.10 fort. Die  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  liefern unter can eine Basis von  $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{R}}$ , deren Elemente wir mit denselben Symbolen bezeichnen. Die Elemente der Weylgruppe permutieren die Vektoren dieser Basis und wir erhalten so einen Isomorphismus der Weylgruppe mit der Gruppe aller Permutationen unserer Basis. Die Spiegelebene zur Transposition  $(i, j)$  ist die Menge aller  $\sum a_k \varepsilon_k$  mit  $a_i = a_j$  und ein Alkoven ist etwa die Menge  $A$  aller  $\sum a_k \varepsilon_k$  mit  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Sein Abschluß ist die Menge  $\bar{A}$  aller  $\sum a_k \varepsilon_k$  mit  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Die Wände dieses Alkoven sind die Spiegelebenen der Transpositionen  $(i, i+1)$  benachbarter Indizes, und die zugehörigen einfachen Wurzeln sind die  $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$  für  $1 \leq i \leq (n-1)$ . Die Cartanmatrix schließlich hat für diese Anordnung der einfachen Wurzeln Zweier auf der Diagonale,  $(-1)$  auf beiden Nebendiagonalen, und sonst sind alle Einträge Null. All das kann man in diesem Fall noch direkt einsehen. Wie man im Fall allgemeinerer kompakter Gruppen vorgeht, wird in 8 besprochen.

**Lemma 6.4.35 (Paare von Wurzeln).** *Sei eine endliche Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl  $R$  gegeben. So gilt für je zwei nichtproportionale Wurzeln  $\alpha, \beta$  die Abschätzung  $0 \leq \langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle \langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle < 4$ . Genauer wird der*

Winkel zwischen je zwei nichtproportionalen Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  bezüglich jedes Spiegelungsgruppeninvarianten Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  gegeben durch

$$4 \cos^2(\text{Winkel zwischen } \alpha \text{ und } \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$$

und je zwei nichtorthogonale Wurzeln haben das Längenverhältnis

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$$

*Beweis.* Beides folgt sofort aus der Formel  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ , die man für jedes Spiegelungsgruppeninvariante Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  daraus folgert, daß die Abbildung  $\lambda \mapsto \lambda - 2((\lambda, \beta)/(\beta, \beta))\beta$  die Wurzel  $\beta$  auf ihr Negatives wirft und das orthogonale Komplement von  $\beta$  punktweise festhält: Also muß sie mit unserer Spiegelung  $s_\beta : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \beta$  übereinstimmen.  $\square$

6.4.36. Die in 6.4.33 erklärten Cartan-Matrizen endlicher Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl haben typischerweise nur sehr wenige von Null verschiedene Einträge, auf der Diagonalen stehen nur Zweier, außerhalb der Diagonalen sind alle Einträge nichtpositiv, und es gilt

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$$

sowie  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$ . Es ist deshalb sehr viel übersichtlicher, die in der Cartan-Matrix enthaltene Information graphisch darzustellen im sogenannten **Dynkin-Diagramm**, das wie folgt gebildet wird: Man malt zunächst für jede Wurzel  $\alpha \in S(A)$  einen dicken Punkt. Dann verbindet man je zwei verschiedene Punkte  $\alpha \neq \beta$  durch einen  $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta^\vee, \alpha \rangle)$ -fachen Strich bzw. gar nicht, falls gilt  $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = 0$ . Schließlich versieht man die 2-fachen und 3-fachen Striche mit einem Pfeil in Richtung der Wurzel  $\alpha$  mit  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$ , d.h. in Richtung der kürzeren Wurzel bezüglich eines und damit jedes unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts.

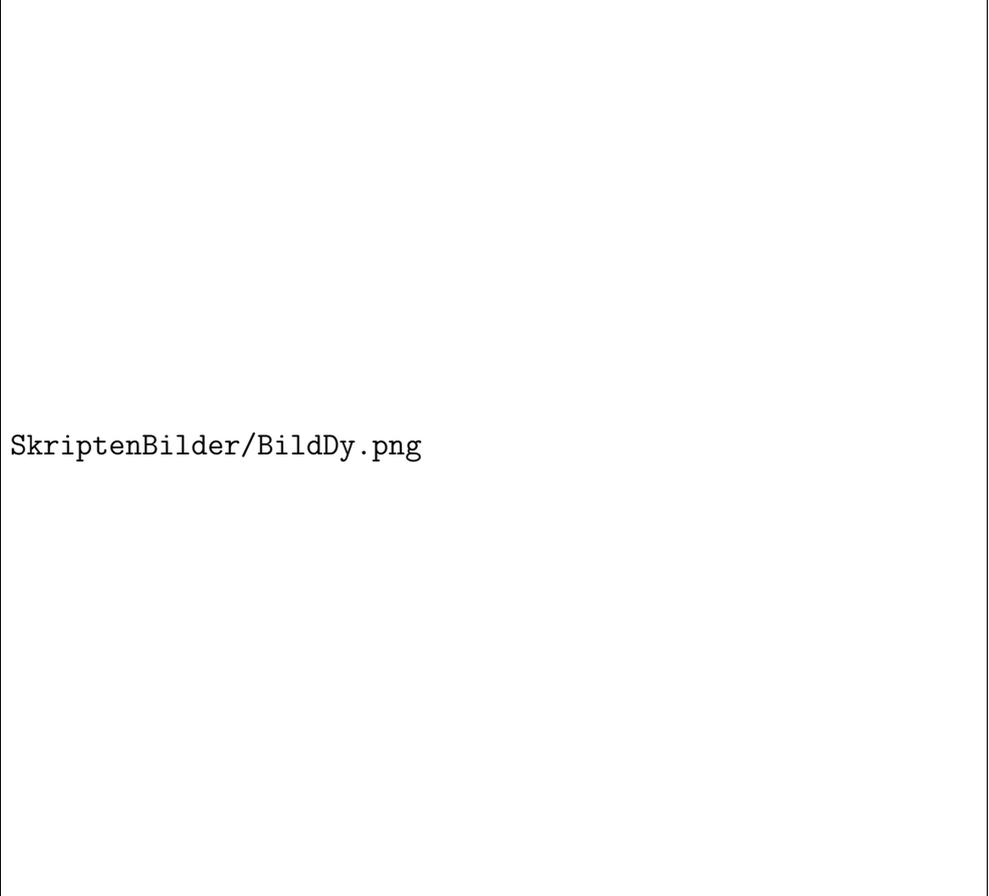
*Beispiel 6.4.37.* Das Dynkindiagramm zur Gruppe  $U(n)$  wäre etwa das Diagramm  $A_{n-1}$  in nebenstehendem Bild.

**Satz 6.4.38 (Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum).** *Ordnen wir jeder kompakten Liegruppe das Dynkindiagramm der zugehörigen Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zusammenhängende} \\ \text{kompakte Liegruppen} \\ \text{mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Multimengen} \\ \text{von Diagrammen aus} \\ \text{der nebenstehenden Liste} \end{array} \right\}$$



Diese Bilder deuten die Möglichkeiten für die Lage zweier nicht linear abhängiger Wurzeln  $\alpha, \beta$  an, und zwar der Reihe nach für die Fälle  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0, 1, 2, 3$ . Daß die gezeigten Winkel die einzig möglichen sind, folgert man leicht aus der in [III.1.1.14](#) gegebenen Wertetabelle für den Cosinus. In den Fällen 2 bzw. 3 sind dabei nur Paare von Wurzeln verschiedener Länge aus den linken bzw. rechten unteren Bild gemeint, und im oben links dargestellten Fall 0 müssen unsere Wurzeln, anders als das Bild suggerieren mag, nicht notwendig dieselbe Länge haben. Die Gesamtheit der jeweils dargestellten Vektoren stellt jeweils alle Wurzeln dar, die aus  $\alpha$  oder  $\beta$  durch sukzessives Anwenden der zugehörigen Spiegelungen  $s_\alpha$  und  $s_\beta$  hervorgehen.



SkriptenBilder/BildDy.png

Als Dynkin-Diagramme kompakter zusammenhängender Liegruppen kommen genau alle endlichen disjunkten Vereinigungen der in diesem Bild dargestellten Diagramme vor, wie wir im folgenden zeigen werden. Daß jedenfalls keine anderen Diagramme in Betracht kommen, werden wir in 7.6.8 sehen. Die Zahl  $n$  meint jeweils die Zahl der Knoten. Die unteren Schranken an  $n$  dienen nur dazu, Verdopplungen zu vermeiden. So wäre etwa  $D_3 = A_3$  und  $E_5 = D_5$  und  $D_2$  wäre gar nicht zusammenhängend und fiel mit  $A_1 \sqcup A_1$  zusammen.

6.4.39. Der Beweis dieses Satzes wird uns noch eine ganze Weile beschäftigen. Das Diagramm  $A_n$  würde dem Quotienten  $U(n)/Z$  der unitären Gruppe  $U(n)$  nach ihrem Zentrum entsprechen, das im übrigen explizit als  $Z = S^1 \text{id}$  angegeben werden kann.

## 7 Spiegelungsgruppen

### 7.1 Endliche Spiegelungsgruppen

**Definition 7.1.1.** Eine lineare Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **lineare Spiegelung** genau dann, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene, und wenn wir uns nicht in Charakteristik Zwei befinden. Wir nennen die Fixpunktmenge einer Spiegelung auch ihre **Spiegelhyperebene** oder abkürzend **Spiegelebene**.

**7.1.2 (Formelhafte Darstellung von Spiegelungen).** Sei  $k$  ein Körper einer Charakteristik  $\text{char } k \neq 2$  und  $V$  ein  $k$ -Vektorraum und  $s : V \rightarrow V$  eine Spiegelung. Wir notieren  $V^s$  ihre Fixpunktmenge alias Spiegelebene. Wegen unserer Annahme  $\text{char } k \neq 2$  hat jedes  $v \in V$  die Zerlegung  $v = (v + sv)/2 + (v - sv)/2$ . Wir folgern die Zerlegung  $V = V^s \oplus V^{-s}$  von  $V$  in Eigenräume von  $s$  zu den Eigenwerten  $\pm 1$ . Insbesondere ist der Eigenraum zum Eigenwert  $-1$  unserer Spiegelung stets eine Gerade, in Formeln  $\dim_k V^{-s} = 1$ . Ist  $V$  ein Vektorraum und  $V^*$  sein Dualraum, so schreiben wir für den Wert  $f(\lambda)$  von  $f \in V^*$  an einer Stelle  $\lambda \in V$  auch  $\langle f, \lambda \rangle$  oder sogar  $\langle \lambda, f \rangle$ . Wählen wir nun in  $V$  einen Eigenvektor  $\alpha$  unserer Spiegelung  $s$  zum Eigenwert  $-1$  und diejenige Linearform  $\alpha^\vee \in V^*$  mit  $\ker \alpha^\vee = V^s$  und  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ , so gilt

$$s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

für alle  $\lambda$  in  $V = k\alpha \oplus V^s$ . Umgekehrt erhalten wir für beliebige  $\alpha \in V$ ,  $\alpha^\vee \in V^*$  mit  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  eine Spiegelung  $s_{\alpha, \alpha^\vee}$  durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} s_{\alpha, \alpha^\vee} : V &\rightarrow V \\ \lambda &\mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \end{aligned}$$

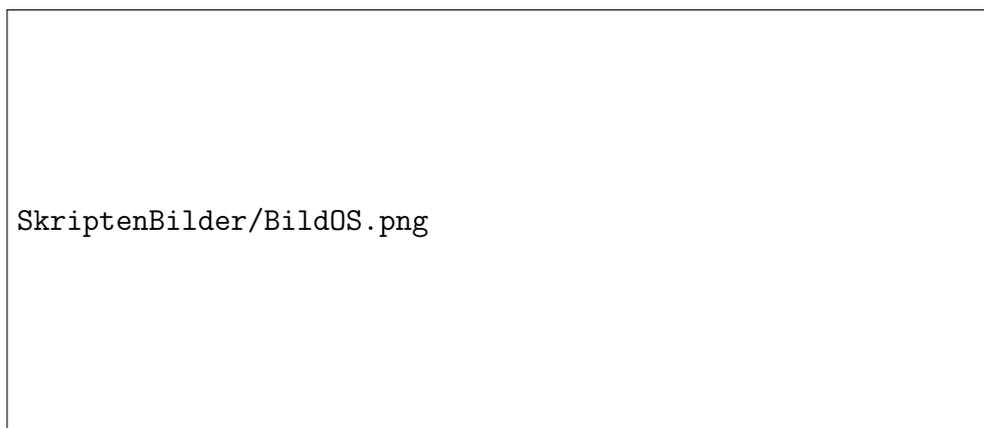
**7.1.3 (Orthogonale Spiegelungen).** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper und ist die Spiegelung  $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)$  auf  $V$ , in Formeln  $(s\lambda, s\mu) = (\lambda, \mu) \quad \forall \lambda, \mu \in V$ , so gilt offensichtlich  $V^s = \alpha^\perp = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}$  und wir haben

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall \lambda \in V$$

In der Tat nehmen beide Seiten offensichtlich auf  $\lambda = \alpha$  und auf jedem  $\lambda \in \alpha^\perp$  denselben Wert an. In anderen Worten bildet der zu unserem Skalarprodukt gehörige Isomorphismus  $V \xrightarrow{\sim} V^*$ ,  $\lambda \mapsto (\lambda, \cdot)$  den Vektor  $2\alpha/(\alpha, \alpha)$  auf  $\alpha^\vee$  ab.



Eine Spiegelung, die nicht orthogonal wäre für ein übliches Skalarprodukt auf der Papierebene.



Eine Spiegelung, die orthogonal ist für jedes übliche Skalarprodukt auf der Papierebene.

Dasselbe gilt auch allgemeiner, wenn wir über einem beliebigen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik arbeiten und  $(\ , \ )$  eine unter  $s_{\alpha, \alpha^\vee}$  invariante symmetrische Bilinearform ist mit der Eigenschaft  $(\alpha, \alpha) \neq 0$ .

**Definition 7.1.4.** Eine **endliche Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper, die von Spiegelungen erzeugt wird.

**Lemma 7.1.5.** *Gegeben eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper gibt es auf unserem Vektorraum stets ein unter dieser Gruppe invariantes Skalarprodukt.*

*Beweis.* Sei  $k$  unser angeordneter Körper und  $V$  unser Vektorraum und  $G$  unsere endliche Gruppe von Automorphismen von  $V$ . Sei  $b : V \times V \rightarrow k$  irgendein Skalarprodukt. Wir erhalten ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt durch die Vorschrift  $i(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$ .  $\square$

**Lemma 7.1.6.** *Haben zwei Spiegelungen einer endlichen Spiegelungsgruppe dieselbe Spiegelebene, so stimmen sie überein.*

*Beweis.* Sei  $V$  ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und  $W \subset \text{GL}(V)$  unsere endliche Spiegelungsgruppe. Seien  $s, t \in W$  zwei Spiegelungen und  $H = V^s = V^t$  die gemeinsame Spiegelebene. Nach 7.1.5 gibt es ein  $W$ -invariantes Skalarprodukt auf  $V$ . Für jedes  $W$ -invariante Skalarprodukt auf  $V$  gilt dann  $V = H \oplus H^\perp$ , und sowohl  $s$  als auch  $t$  operieren als die Identität auf  $H$  und als  $-1$  auf  $H^\perp$ .  $\square$

*Übung 7.1.7.* Man zeige, daß die transponierte Abbildung zu einer Spiegelung  $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : V \rightarrow V$  die Spiegelung  $s^\top = s_{\alpha^\vee, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$  ist, wobei wir in der zweiten Identität unter  $\alpha$  das durch Auswerten an  $\alpha$  definierte Element des Bidualraums  $V^{**}$  verstehen.

**Definition 7.1.8.** Unter einem **euklidischen Vektorraum** verstehen wir hier und im Folgenden stets einen Vektorraum über einem angeordneten Körper, der mit einem Skalarprodukt versehen ist. Unter einer **orthogonalen Spiegelung** oder noch präziser einer **orthogonalen linearen Spiegelung** verstehen wir eine Spiegelung auf einem euklidischen Vektorraum, die das Skalarprodukt erhält. Eine orthogonale Spiegelung in einem euklidischen Vektorraum wird natürlich durch ihre Spiegelebene bereits eindeutig festgelegt. Unter einer **endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine endliche Gruppe von orthogonalen Automorphismen eines euklidischen Vektorraums, die von Spiegelungen erzeugt wird.



Die vier Spiegelebenen der Diedergruppe  $D_4$ . Die acht “Kuchenstücke”, jeweils ohne ihren Rand, sind die zugehörigen “Alkoven” oder “Weylkammern”, und man überlegt sich leicht, daß je zwei Alkoven durch genau ein Element unserer Spiegelungsgruppe ineinander überführt werden.

*Beispiel 7.1.9.* Wir betrachten in der reellen euklidischen Ebene  $r$  Geraden durch den Ursprung derart, daß “je zwei benachbarte Geraden denselben Winkel  $\pi/r$  einschließen”. Diese  $r$  Geraden sind die Spiegelebenen einer endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe, der sogenannten **Diedergruppe**  $D_r$ . Sie besteht aus den  $r$  Spiegelungen an unseren  $r$  Geraden sowie den  $r$  Drehungen um die Winkel  $2\pi\nu/r$  für  $\nu = 0, 1, \dots, r-1$ .

*Beispiel 7.1.10.* Wir betrachten im  $\mathbb{R}^n$  für  $1 \leq i < j \leq n$  die Hyperebenen  $H_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_j\}$ . Die orthogonale Spiegelung  $s$  an der Hyperebene  $H_{i,j}$  kann auch beschrieben werden als die Vertauschung der  $i$ -ten und der  $j$ -ten Koordinate,  $s(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$ , denn besagte Vertauschung ist orthogonal und  $H_{i,j}$  ist die Menge ihrer Fixpunkte. Diese Spiegelungen erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe, die in offensichtlicher Weise isomorph ist zur symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_n$ .

*Beispiel 7.1.11.* Die orthogonalen Spiegelungen an denjenigen Ebenen des  $\mathbb{R}^3$ , die senkrecht stehen auf den Kantenmitten der Kanten eines im Ursprung zentrierten Tetraeders, erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe, die isomorph ist zur Gruppe aller 24 Permutationen der vier Ecken unseres Tetraeders.

*Beispiel 7.1.12.* Die orthogonalen Spiegelungen an den Koordinatenebenen des  $\mathbb{R}^n$  erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe mit  $2^n$  Elementen.

7.1.13. Ich erinnere daran, daß nach ?? eine Teilmenge eines Vektorraums über einem angeordneten Körper konvex heißt genau dann, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält.

**Definition 7.1.14.** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und  $W \subset \text{GL}(V)$  eine endliche Spiegelungsgruppe. Die maximalen konvexen Teilmengen im Komplement der Vereinigung aller Spiegelebenen

$$V \setminus \bigcup_{\substack{s \in W \text{ ist} \\ \text{Spiegelung}}} V^s$$

heißen die **Weylkammern** oder **Alkoven** unserer Spiegelungsgruppe.

*Ergänzung 7.1.15.* Im Fall  $k = \mathbb{R}$  und  $\dim V < \infty$  können wir die Alkoven auch als die Zusammenhangskomponenten von besagtem Komplement beschreiben, wenn wir  $V$  mit seiner natürlichen Topologie versehen.

7.1.16. Wir wollen als nächstes zeigen, daß jede endliche Spiegelungsgruppe frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert. Die Transitivität ist

schnell bewiesen: Zunächst finden wir mit 7.1.5 ein invariantes Skalarprodukt. Dann finden wir für beliebige Vektoren  $v, w \in V$  ein  $x \in W$  derart, daß der Abstand  $\|v - xw\|$  kleinstmöglich wird. Dann können  $v$  und  $xw$  durch keine Spiegelebene mehr getrennt werden, da für  $s$  die Spiegelung an besagter Spiegelebene sonst aus elementargeometrischen Gründen  $v$  und  $sxw$  noch näher aneinander wären. Also liegen  $v$  und  $xw$  für jede Spiegelebene in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. Die Freiheit der Operation scheint mir weniger offensichtlich. Um beim Beweis inhaltsreichere Bilder malen zu können, werden wir sie gleich in der etwas allgemeineren Situation affiner Spiegelungsgruppen zeigen. Wir führen diesen Begriff im übernächsten Abschnitt ein. Zunächst treffen wir jedoch geometrische Vorbereitungen.

## 7.2 Alkovengeometrie

**Definition 7.2.1.** Sei  $E$  ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Gegeben  $x, y \in E$  setzen wir

$$\begin{aligned} [x, y] &= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t \leq 1\} \\ [x, y) &= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t < 1\} \\ (x, y] &= \{x + t(y - x) \mid 0 < t \leq 1\} \\ (x, y) &= \{x + t(y - x) \mid 0 < t < 1\} \end{aligned}$$

Mengen dieser Gestalt mit  $x \neq y$  nennen wir **Geradensegmente**, und zwar **abgeschlossene Geradensegmente**, wenn beide **Endpunkte**  $x, y$  dazugehören, und **offene Geradensegmente**, wenn keiner der beiden Endpunkte dazugehört. Insbesondere ist  $[x, x] = (x, x)$  in diesem Sinne ein abgeschlossenes Geradensegment. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums sind zwar abgeschlossene Geradensegmente abgeschlossene Teilmengen des ganzen Raums, offene Geradensegmente jedoch nur offene Teilmengen in der von ihnen erzeugten affinen Gerade.

7.2.2. Ein affiner Teilraum eines affinen Raums heißt wie in ?? eine Hyperlebene genau dann, wenn sein Richtungsraum die Kodimension Eins hat im Richtungsraum unseres ursprünglichen affinen Raums.

**Definition 7.2.3.** Ein System von Hyperlebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jedes Geradensegment in unserem Raum höchstens endlich viele Hyperlebenen unseres Systems trifft.

**Lemma 7.2.4.** *Ein affiner Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperlebenen überdeckt werden.*

*Beweis.* Jeder Punkt  $x$  unseres affinen Raums liegt auf höchstens endlich vielen unserer Hyperebenen. Wenn wir nun mithilfe von ?? einen weiteren Punkt  $y$  außerhalb dieser endlich vielen Hyperebenen wählen, so ist das Segment  $[x, y]$  in keiner unserer Hyperebenen enthalten. Da es unendlich viele Punkte hat, aber nur endlich viele unserer Hyperebenen trifft und zwar in jeweils nur einem Punkt, gibt es auf  $[x, y]$  notwendig Punkte, die in keiner unserer Hyperebenen enthalten sind.  $\square$

7.2.5. Wir erinnern daran, daß eine Teilmenge eines affinen Raums über einem angeordneten Körper konvex heißt genau dann, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält.

**Definition 7.2.6.** Sei  $E$  ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Für jede Hyperebene  $H \subset E$  gibt es in  $E \setminus H$  genau zwei maximale konvexe Teilmengen, die wir die **Halbräume** zu  $H$  oder die  **$H$ -Halbräume** nennen. Ist  $A \subset E$  eine nichtleere konvexe Teilmenge und gilt  $A \cap H = \emptyset$ , so liegt  $A$  in genau einem Halbraum zu  $H$ . Diesen Halbraum bezeichnen wir mit  $H_A^+$  und nennen ihn den  **$H$ -Halbraum von  $A$** . Seine Vereinigung mit der Hyperebene selbst notieren wir  $\bar{H}_A^+ = H_A^+ \cup H$  und nennen sie den **abgeschlossenen  $H$ -Halbraum von  $A$** .

**Definition 7.2.7.** Für jede Hyperebene in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachten wir die dreiteilige Partition unseres Raums in die zwei Halbräume und die Hyperebene selbst und nennen sie die zugehörige “Hyperebenenpartition”. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen betrachten wir die grösste Partition unseres affinen Raums, die feiner ist als diese Hyperebenenpartition für jede der Hyperebenen unseres Systems. Die Stücke der so erklärten Partition heißen die **Facetten zu unserem lokal endlichen System von Hyperebenen**. Als Schnitte konvexer Teilmengen sind sie konvex und nach der Definition einer Partition sind sie nie leer.

7.2.8. Wollen wir das in algebraischer statt in geometrischer Sprechweise formulieren, so müssen wir statt unserem System von Hyperebenen eine Menge  $\Lambda$  von affinen Abbildungen  $\lambda : E \rightarrow k$  betrachten, die Gleichungen unserer Hyperebenen sind, und für jede Dreiteilung dieses Systems  $\Lambda = \Lambda^+ \sqcup \Lambda^0 \sqcup \Lambda^-$  ist die Menge

$$\left\{ v \in E \left| \begin{array}{l} \lambda(v) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda^0 \\ \lambda(v) > 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda^+ \\ \lambda(v) < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda^- \end{array} \right. \right\}$$

entweder leer oder eine Facette. Die “lokale Endlichkeit” unseres Systems von Hyperebenen übersetzt sich dann in die Bedingung, daß auf jedem Geradensegment höchstens endlich viele  $\lambda \in \Lambda$  eine Nullstelle haben dürfen.



Der  $H$ -Halbraum  $H_A^+$  einer konvexen Teilmenge  $A$ , die die Hyperebene  $H$  nicht trifft. Per definitionem gehört  $H$  selbst nicht zu  $H_A^+$  dazu.

**Definition 7.2.9.** Ist  $E$  ein affiner Raum über einem angeordneten Körper, so nennen wir eine Teilmenge  $A \subset E$  ganz allgemein eine **Facette** genau dann, wenn es ein lokal endliches System von Hyperebenen gibt, zu dem unser  $A$  eine Facette im Sinne von 7.2.7 ist. Wir sagen dann auch, daß besagtes System von Hyperebenen “unsere Facette beschreibt”.

7.2.10. Ein- und dieselbe Facette kann im allgemeinen durch sehr verschiedene lokal endliche Systeme von Hyperebenen beschrieben werden. Insbesondere müssen verschiedene Facetten keineswegs disjunkt sein.

**Definition 7.2.11.** Ist  $E$  ein affiner Raum und  $A \subset E$  eine Facette, so definieren wir ihren **Abschluß**  $\bar{A}$  als die Menge aller Punkte  $x \in E$  derart, daß für mindestens einen Punkt  $y \in A$  die Menge  $(x, y]$  ganz in  $A$  enthalten ist.

*Beispiele 7.2.12.* Wegen  $(x, x] = \{x\}$  liegt jede Facette in ihrem Abschluß. In einem eindimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die Facetten genau die Punkte, die offenen Geradensegmente, die offenen Halbgeraden und der ganze Raum. In einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper ist jeder nichtleere affine Teilraum und insbesondere jede einelementige Teilmenge eine Facette. Im allgemeinen ist jeder Halbraum eine Facette und sein Abschluß im Sinne von 7.2.6 fällt mit seinem Abschluß als Facette zusammen.

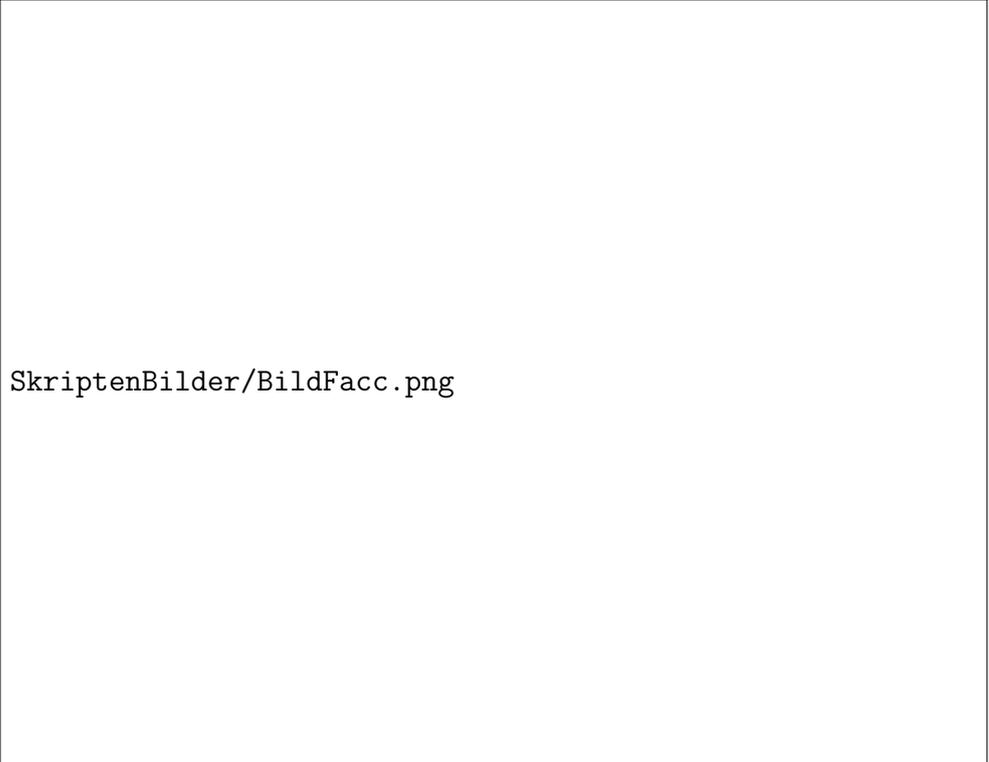
7.2.13. Die Bezeichnung “Facette” wird auch in einer anderen Bedeutung verwendet wie folgt: Ein Schnitt einer endlichen Familie abgeschlossener Halbräume heißt ein **Polyeder** oder präziser ein **konvexer Polyeder**, wenn man betonen will, daß nicht der Polyeder eines Simplicialkomplexes im Sinne von ?? gemeint ist. Das wäre in unserer Terminologie also eine Teilmenge unseres affinen Raums, die man als Abschluß einer Facette zu einem endlichen System von Hyperebenen erhalten kann. Unter einer “Facette” eines solchen Polyeders verstehen nun manche Autoren das, was wir den “Abschluß einer Randfacette unserer ursprünglichen Facette” nennen würden.

7.2.14. Ist  $E$  ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und  $A \subset E$  eine Facette und  $\mathcal{H}$  ein lokal endliches System von Hyperebenen, das sie beschreibt, so haben wir

$$A = \bigcap_{A \subset H} H \cap \bigcap_{A \not\subset H} H_A^+$$

wobei bei beiden Schnitten jeweils nur die Hyperebenen  $H \in \mathcal{H}$  in Betracht gezogen werden. Der Abschluß unserer Facette wird dann gegeben durch

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset H} H \cap \bigcap_{A \cap H = \emptyset} \bar{H}_A^+$$



SkriptenBilder/BildFacc.png

Die drei dargestellten Geraden liefern eine Partition der Papierebene in 19 Facetten, als da wären 3 einpunktige Facetten, 3 offene Geradensegmente, von denen ich eines versucht habe durch ein Klammerpaar anzudeuten, 6 offene Halbgeraden, von denen ich eine versucht habe durch eine Klammer anzudeuten, und 7 sogenannte Alkoven, von denen ich Zwei schraffiert habe. Der Abschluß des dreieckigen Alkoven in der Mitte ist die abgeschlossene Dreiecksfläche, er ist in unserem Fall die Vereinigung von 7 unserer Facetten, nämlich von den 3 Punkten, den 3 offenen Geradensegmenten und der offenen Dreiecksfläche selber.

Insbesondere gilt für jeden Punkt  $y \in A$  offensichtlich  $\bar{A} = \{x \mid [y, x) \subset A\}$ . Haben wir  $k = \mathbb{R}$  und ist unser affiner Raum endlichdimensional und versehen wir ihn mit seiner natürlichen Topologie, so stimmt der oben definierte Abschluß einer Facette überein mit ihrem Abschluß im Sinne der Topologie.

*Übung 7.2.15.* Ist der Schnitt zweier Facetten nicht leer, so ist er wieder eine Facette, deren Abschluß als der Schnitt der Abschlüsse der ursprünglichen Facetten beschrieben werden kann.

*Übung 7.2.16.* Trennt eine Hyperebene  $H$  zwei Facetten  $A$  und  $B$ , so gilt stets  $\bar{A} \cap \bar{B} \subset H$ .

**Lemma 7.2.17.** *Umfaßt eine Facette ein abgeschlossenes Geradensegment, so umfaßt sie auch ein offenes Geradensegment, das seinerseits dieses abgeschlossene Geradensegment umfaßt.*

*Beweis.* Das folgt direkt aus der Definition 7.2.9. □

**Lemma 7.2.18.** *Ist eine Facette in einem abgeschlossenen Halbraum zu einer Hyperebene enthalten, so liegt sie entweder bereits im entsprechenden offenen Halbraum oder aber in der fraglichen Hyperebene.*

*Beweis.* Das folgt direkt aus dem vorhergehenden Lemma 7.2.17 und der Konvexität. □

**Definition 7.2.19.** Die maximalen Facetten im Abschluß einer gegebenen Facette heißen ihre **Randfacetten**.

*Ergänzung 7.2.20.* Ich bin nicht sicher, wie glücklich diese Terminologie ist, in der nun jede Facette eine Randfacette von sich selber ist. Von meinem Sprachempfinden her scheint mir das wenig glücklich. Vielleicht wäre es besser, stattdessen “Abschlußfacetten” zu sagen.

**Lemma 7.2.21.** *Wird eine Facette  $A$  beschrieben durch ein lokal endliches System von Hyperebenen  $\mathcal{H}$ , so beschreibt dieses System auch alle ihre Randfacetten, und diese sind genau alle nichtleeren Schnitte  $B$  der Gestalt*

$$B = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{R}} H \cap \bigcap_{A \not\subset H \notin \mathcal{R}} H_A^+$$

für beliebige Teilmengen  $\mathcal{R} \subset \{H \in \mathcal{H} \mid A \not\subset H\}$ .

*Beweis.* In der Tat ist jeder solche nichtleere Schnitt offensichtlich eine Facette im Abschluß von  $A$ . Ist umgekehrt eine Facette im Abschluß von  $A$  gegeben, so liegt sie sicher auf allen Hyperebenen, auf denen  $A$  liegt, und nach

**7.2.18** liegt sie in Bezug auf alle Hyperebenen aus einem  $A$  beschreibenden System entweder auf der Hyperebene selbst oder in demselben Halbraum wie  $A$ . Folglich liegt jede im Abschluß von  $A$  enthaltene Facette in einem unserer Schnitte.  $\square$

7.2.22. Auf der Menge  $\mathcal{F}(A)$  aller Randfacetten einer Facette  $A$  erhalten wir eine partielle Ordnung durch die Vorschrift

$$B \leq C \Leftrightarrow B \subset \bar{C}$$

und für jede Facette  $C \in \mathcal{F}(A)$  haben wir  $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{F}(A)$ . Nach dem vorhergehenden Lemma 7.2.21 ist der Abschluß einer Facette stets die disjunkte Vereinigung über alle maximalen in besagtem Abschluß enthaltenen Facetten, in Formeln

$$\bar{A} = \bigsqcup_{B \in \mathcal{F}(A)} B$$

Ist  $E$  unser affiner Raum und  $A \subset E$  eine Facette, so gehören zwei verschiedene Punkte aus ihrem Abschluß  $x, y \in \bar{A}$  zu derselben maximalen Facette  $B \subset \bar{A}$  genau dann, wenn es ein offenes ganz in  $\bar{A}$  enthaltenes Geradensegment gibt, das unsere beiden Punkte enthält.

**Definition 7.2.23.** Der von einer Facette erzeugte affine Teilraum heißt der **Träger** unserer Facette. Er kann auch beschrieben werden als der Schnitt aller derjenigen Hyperebenen eines beschreibenden lokal endlichen Systems, die die fragliche Facette enthalten. Eine Facette, deren Träger der ganze Raum ist, heißt ein **Alkoven** oder auch eine **Kammer**. Unter der **Dimension** einer Facette versteht man die Dimension ihres Trägers.

*Übung 7.2.24.* Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die zugehörigen Alkoven genau die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems, und jede nichtleere konvexe Teilmenge von  $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$  liegt in genau einem Alkoven.

*Übung 7.2.25.* Gegeben ein beliebiges System von Hyperebenen  $\mathcal{H}$  in einem affinen Raum  $E$  über einem angeordneten Körper ist das Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems  $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$  die disjunkte Vereinigung seiner maximalen konvexen Teilmengen, und jede nichtleere konvexe Teilmenge ist in genau einer dieser maximalen konvexen Teilmengen enthalten.

**Lemma 7.2.26.** Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen  $\mathcal{H}$  in einem affinen Raum  $E$  über einem angeordneten Körper überdecken die

Abschlüsse der zugehörigen Alkoven ganz  $E$ . Bezeichnet  $\mathcal{A}$  diese Menge von Alkoven, so gilt also in Formeln

$$E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

*Beweis.* Für  $p \in E$  finden wir nach Lemma 7.2.4 eine affine Gerade durch  $p$ , die in keiner unserer Hyperebenen  $H \in \mathcal{H}$  enthalten ist. Dann gibt es auch einen Punkt  $q$  auf unserer Gerade derart, daß das halboffene Geradensegment  $(p, q]$  keine unserer Hyperebenen  $H \in \mathcal{H}$  trifft. Damit liegt aber per definitionem der Punkt  $p$  im Abschluß des Alkoven von  $q$ .  $\square$

**Definition 7.2.27.** Gegeben ein Alkoven heißt eine Hyperebene eine **Wand** unseres Alkoven genau dann, wenn sie der Träger einer Randfacette unseres Alkoven ist. Insbesondere gehört nach 7.2.21 eine Wand eines Alkoven zu jedem lokal endlichen System von Hyperebenen, das besagten Alkoven beschreibt. Die Menge der Wände eines Alkoven  $A$  notieren wir  $\mathcal{H}_A$ .

*Übung 7.2.28.* Eine Hyperebene ist eine Wand eines vorgegebenen Alkoven genau dann, wenn es einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven gibt derart, daß unsere Hyperebene die einzige Hyperebene durch besagten Punkt ist, die unseren Alkoven vermeidet.

**Satz 7.2.29 (Begrenzung eines Alkoven durch seine Wände).** Jeder Alkoven ist der Schnitt über alle ihn umfassenden Halbräume zu seinen Wänden. In Formeln gilt für jeden Alkoven  $A$  also

$$A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A} H_A^+$$

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß jedes Segment  $[x, y]$  mit  $x \in A$  und  $y \notin A$  mindestens eine Wand von  $A$  trifft. Per definitionem gibt es ein lokal endliches System  $\mathcal{H}$  von Hyperebenen, das den Alkoven  $A$  beschreibt. Lassen wir aus diesem System eine Hyperebene weg, die keine Wand von  $A$  ist, so erhalten wir nach 7.2.30 wieder ein lokal endliches System von Hyperebenen, das den Alkoven  $A$  beschreibt. Trifft unser Segment also keine Wand von  $A$ , so können wir die endlich vielen Hyperebenen aus  $\mathcal{H}$ , die es trifft, aus  $\mathcal{H}$  herausnehmen und erhalten nach unserer Vorüberlegung wieder ein System von Hyperebenen, das den Alkoven  $A$  beschreibt. Daraus folgt jedoch  $y \in A$  im Widerspruch zu unserer Annahme.  $\square$

**Lemma 7.2.30.** Gegeben ein Alkoven und ein ihn beschreibendes System von Hyperebenen  $\mathcal{H}$  ist eine Hyperebene  $H \in \mathcal{H}$  eine Wand unseres Alkoven genau dann, wenn es auf  $H$  einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven gibt, der auf keiner anderen Hyperebene aus  $\mathcal{H}$  liegt.



Ein System von Hyperebenen, ein zugehöriger Alkoven als schraffierte Dreiecksfläche, und seine drei Wände als fett eingezeichnete affine Geraden.

*Beweis.* Ist unsere Hyperebene die einzige Hyperebene aus  $\mathcal{H}$  durch besagten Punkt, die den Alkoven nicht trifft, so muß besagter Punkt nach 7.2.21 zu einer Randfacette gehören, die unsere Hyperebene erzeugt. Folglich ist dann unsere Hyperebene eine Wand des besagten Alkoven. Die Umkehrung ist eh klar nach 7.2.28.  $\square$

**Lemma 7.2.31.** *Ist  $\mathcal{H}$  ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper, so ist jede Hyperebene  $H \in \mathcal{H}$  Wand mindestens eines der durch dieses System definierten Alkoven, in Formeln*

$$\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{H}_A$$

*Beweis.* Für  $H \in \mathcal{H}$  finden wir nach 7.2.4 einen Punkt  $q \in H$ , der auf keiner anderen Hyperebene aus  $\mathcal{H}$  liegt. Er liegt nach 7.2.26 im Abschluß eines Alkoven, und unsere Hyperebene ist dann nach 7.2.30 eine Wand dieses Alkoven.  $\square$

7.2.32. Sei  $A$  ein Alkoven zu einem lokal endlichen System von Hyperebenen  $\mathcal{H}$ . Wählt man für jede Hyperebene  $H \in \mathcal{H}$  eine affine Gleichung  $\alpha_H : E \rightarrow k$  mit  $\alpha_H|_A > 0$ , so sind die Wände von  $A$  genau diejenigen  $H \in \mathcal{H}$ , für die sich  $\alpha_H$  nicht als positive Linearkombination gewisser  $\alpha_L$  mit  $L \neq H$  schreiben läßt: Daß für jede Wand  $H$  von  $A$  die Gleichung  $\alpha_H$  diese Bedingung erfüllt, ist eh klar. Daß nur Wände unsere Bedingung erfüllen, ist vielleicht weniger klar, ergibt sich jedoch als eine Konsequenz des Hauptsatzes über lineare Ungleichungen ??.

*Ergänzung 7.2.33.* Die **Vermutung von Hirsch** besagt, daß man in einem beschränkten Alkoven aus  $\mathbb{R}^d$  mit  $n$  Wänden zwischen je zwei seiner Ecken einen Weg aus höchstens  $n - d$  seiner Kanten finden sollte. Hier meinen Ecken nulldimensionale und Kanten eindimensionale Randfacetten unseres Alkoven. Einen Übersichtsartikel zu dieser Vermutung findet man etwa in [KS10], in der der Zweitautor als “note added in press” ein Gegenbeispiel ankündigt. Der Abschluß eines beschränkten Alkoven aus  $\mathbb{R}^d$  heißt im übrigen auch ein **Polytop**.

### 7.3 Affine Spiegelungsgruppen

**Definition 7.3.1.** Eine affine Abbildung von einem affinen Raum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **affine Spiegelung** genau dann, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene. Wir nennen diese Fixpunktmenge dann die **Spiegelebene** oder genauer **Spiegelhyperebene** unserer Spiegelung. Wir werden Spiegelungen

nur in affinen Räumen über Körpern einer von Zwei verschiedenen Charakteristik betrachten.

**Definition 7.3.2.** Unter einer **affinen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine Gruppe von Automorphismen eines endlichdimensionalen affinen Raums über einem angeordneten Körper, die (1) von affinen Spiegelungen erzeugt wird, für die (2) die Spiegelebenen ihrer Spiegelungen ein lokal endliches System von Hyperebenen bilden, und so daß (3) die linearen Anteile der Elemente unserer Gruppe eine endliche Gruppe von Automorphismen des Richtungsraums bilden. Wenn wir von einer affinen Spiegelungsgruppe  $(W, E)$  reden, so ist mit  $E$  der zugrundeliegende endlichdimensionale affine Raum gemeint und mit  $W$  die Gruppe selbst.

7.3.3. Der Rest dieses Abschnitts kann als eine vollständige Klassifikation der reellen affinen Spiegelungsgruppen gelesen werden: Die endlichen Spiegelungsgruppen werden bereits in 7.6.7 im Verbund mit 7.6.5 durch ihre “Coxeter-Graphen” zusammen mit der Dimension ihrer Fixpunktmenge klassifiziert. Nach 7.7.7 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen “essentiellen” Faktor, deren Isomorphieklassen eindeutig bestimmt sind. 8.2.2 gibt dann eine Klassifikation der “essentiellen” affinen Spiegelungsgruppen durch Wurzelsysteme, die hinwiederum nach 8.4.3 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Die unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich werden in 8.5.4 durch ihre “Dynkin-Diagramme” klassifiziert.

*Beispiel 7.3.4.* Betrachten wir in einer reellen affinen Ebene zwei verschiedene aber parallele Geraden und wählen zu jeder dieser Geraden eine Spiegelung, die sie festhält, so erzeugen diese beiden Spiegelungen eine Gruppe von Automorphismen der affinen Ebene. Diese Gruppe ist jedoch nur dann eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne unserer Definition 7.3.2, wenn die linearen Anteile der beiden erzeugenden Spiegelungen übereinstimmen.

**Definition 7.3.5.** Unter einem **affinen euklidischen Raum** verstehen wir hier und im folgenden einen affinen Raum über einem angeordneten Körper, dessen Raum von Richtungsvektoren mit einem Skalarprodukt versehen ist. Eine affine Abbildung zwischen affinen euklidischen Räumen heißt **orthogonal** genau dann, wenn ihr linearer Anteil orthogonal ist. Eine **Spiegelung** oder präziser eine **affine orthogonale Spiegelung** auf einem affinen euklidischen Raum ist eine orthogonale Abbildung, deren Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Unter einer **affinen euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine affine Spiegelungsgruppe, die aus orthogonalen Automorphismen eines endlichdimensionalen affinen euklidischen Raums besteht.



Dieses Bild zeigt die Spiegelhyperebenen von vier ebenen affinen reellen Spiegelungsgruppen. Das sind auch bis auf Konjugation mit Automorphismen der affinen Ebene alle Möglichkeiten für ebene affine reelle Spiegelungsgruppen, die “essentiell” sind in dem Sinne, daß die darin enthaltenen Verschiebungen den Richtungsraum aufspannen. Die Bilder sind so gezeichnet, daß die Spiegelungen an einer Hyperebene in der jeweiligen affinen Spiegelungsgruppe den Spiegelungen auf der Papierebene im Sinne der Schulgeometrie entsprechen.

*Ergänzung 7.3.6.* Gegeben eine Gruppe von orthogonalen Automorphismen eines euklidischen affinen Raums, die die Bedingungen (1) und (2) aus 7.3.2 an eine affine Spiegelungsgruppe erfüllt, ist Bedingung (3) von ebendort automatisch erfüllt, als da heißt, die Gruppe aller linearen Anteile ist endlich. Um das zu sehen, reicht es zu zeigen, daß die Menge aller Normalenvektoren auf Spiegelebenen endlich ist. In der Tat operiert nämlich unsere Gruppe linearer Anteile treu auf dieser Menge, da sie ja deren orthogonales Komplement punktweise festhalten muß. Im reellen können wir nun argumentieren wie folgt: Wäre unsere Menge von Normalenvektoren nicht endlich, so gäbe es wegen der Kompaktheit der Einheitssphäre Spiegelebenen, die beliebig kleine positive Winkel einschließen. Wir zeigen, daß damit auch zwischen den Wänden eines und jedes Alkoven beliebig kleine positive Winkel vorkämen, im Widerspruch zu 7.7.3. In der Tat: Für zwei Spiegelebenen, die sich treffen, gibt es nur endlich viele Spiegelebenen, die die Schnittgerade umfassen. Auf dieser Schnittgeraden finden wir Punkte, die in keiner zusätzlichen Spiegelebene enthalten sind. Solch ein Punkt liegt dann im Abschluß eines Alkoven, und zwei Wände dieses Alkoven, die den besagten Punkt enthalten, schließen dann höchstens denselben Winkel ein wie die beiden Spiegelebenen, von denen wir ausgegangen waren. Sind wir nicht im Reellen, so können wir argumentieren wie folgt: Unterteilen wir die Oberfläche eines Einheitswürfels um den Nullpunkt in noch so kleine Schachfelder, so müßten doch zwei verschiedene Normalengeraden auf Spiegelebenen durch dasselbe Feld gehen. Der Rest des Arguments bleibt dem Leser überlassen.

**Lemma 7.3.7.** *In einer affinen Spiegelungsgruppe haben verschiedene Spiegelungen auch verschiedene Spiegelebenen.*

*Erster Beweis.* Wir finden ja nach 7.1.5 ein Skalarprodukt auf dem Richtungsraum, das unter den linearen Anteilen der Elemente unserer affinen Spiegelungsgruppe invariant ist. Bezüglich jedes solchen Skalarprodukts muß eine Spiegelung dann die orthogonale Spiegelung zu ihrer Spiegelebene sein.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Gegeben zwei Spiegelungen  $s, t$  mit derselben Spiegelebene hat  $(st)$  mindestens einen Fixpunkt und es reicht mithin zu zeigen, daß sein linearer Anteil die Identität ist. Man sieht jedoch unmittelbar, daß der lineare Anteil von  $(st)$  unipotent ist, und wäre er nicht die Identität, so hätte er folglich unendliche Ordnung. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer letzten Forderung an eine affine Spiegelungsgruppe.  $\square$

7.3.8. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe  $(W, E)$  und eine Spiegelung  $s \in W$  mit Spiegelebene  $E^s = H$  schreiben wir die zugehörige Spiegelung

auch  $s = s_H : E \rightarrow E$ . Für beliebiges  $w \in W$  gilt dann  $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$ , denn beide Seiten sind Spiegelungen aus  $W$  mit derselben Spiegelebene.

7.3.9. Gegeben ein endlichdimensionaler affiner euklidischer Raum  $E$  und eine affine Hyperebene  $H \subset E$  schreiben wir die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene  $H$  auch  $s_H : E \rightarrow E$ . Für eine beliebige orthogonale Abbildung  $w : E \rightarrow E$  gilt dann  $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$ , denn beide Seiten sind orthogonale Spiegelungen mit derselben Spiegelebene.

*Ergänzung 7.3.10.* Hier ist im Fall unendlicher Dimension übrigens Vorsicht geboten: In dieser Allgemeinheit könnte es passieren, daß das orthogonale Komplement einer linearen Hyperebene nur aus dem Nullvektor besteht: Sogar das orthogonale Komplement des Raums aller differenzierbaren Funktionen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich des üblichen Skalarprodukts  $\langle f, g \rangle = \int fg$  ist ja schon Null.

*Beispiel 7.3.11.* Wir betrachten die Menge  $\mathcal{H}$  aller derjenigen Geraden in  $\mathbb{R}^2$ , die parallel sind zu einer der Koordinatenachsen und durch einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen. Offensichtlich ist  $\mathcal{H}$  die Menge aller Spiegelebenen einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe und die Alkoven sind gerade die "Felder dieses Rechenpapiers". Allgemeiner können wir natürlich auch die Menge  $\mathcal{H}$  aller derjenigen Hyperebenen in  $\mathbb{R}^n$  betrachten, die parallel sind zu einer der Koordinaten-Hyperebenen und die einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthalten. Im Fall  $n = 1$  sind die Alkoven die offenen Segmente  $(i, i + 1)$ , im Fall  $n = 3$  haben sie die Gestalt von Würfeln.

*Übung 7.3.12.* Eine endliche Gruppe von Bewegungen eines affinen Raums über einem Körper der Charakteristik Null hat stets einen Fixpunkt, genauer ist der Schwerpunkt jeder Bahn ein Fixpunkt.

**Satz 7.3.13 (Geometrie affiner Spiegelungsgruppen).** *Sei  $\mathcal{H}$  ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem endlichdimensionalen euklidischen affinen Raum über einem angeordneten Körper, das unter allen orthogonalen Spiegelungen an seinen Hyperebenen stabil ist. So gilt:*

1. *Unser System  $\mathcal{H}$  ist das System aller Spiegelebenen einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe.*
2. *Für jeden festen Alkoven in Bezug auf  $\mathcal{H}$  erzeugen die Spiegelungen an seinen Wänden bereits die gesamte Spiegelungsgruppe.*
3. *Ist  $A$  ein fester Alkoven und  $w = s_1 \dots s_r$  eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements  $w$  unserer Spiegelungsgruppe als Produkt von Spiegelungen  $s_i$  an den Wänden von  $A$ , so ist die Länge  $r$  dieser Darstellung genau die Zahl der Spiegelebenen  $H \in \mathcal{H}$ , die  $wA$  von  $A$  trennen.*

4. Unsere Spiegelungsgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven.

*Beweis.* Bezeichne  $\mathcal{A}$  die Menge aller Alkoven zu  $\mathcal{H}$  und  $W$  die von den orthogonalen Spiegelungen  $s_H$  mit  $H \in \mathcal{H}$  erzeugte Gruppe von affinen Selbstabbildungen von  $E$ . Daß  $\mathcal{H}$  in der Tat die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus  $W$  ist, wird sich erst am Ende des Beweises herausstellen. Wir wählen einen festen Alkoven  $A \in \mathcal{A}$  und bezeichnen mit

$$W' = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A \rangle$$

die von den Spiegelungen an seinen Wänden erzeugte Untergruppe  $W' \subset W$ . Wir zeigen als erstes, daß  $W'$  transitiv auf  $\mathcal{A}$  operiert. Dazu benutzen wir:

**Lemma 7.3.14.** *Ist  $A \in \mathcal{A}$  ein Alkoven und  $H$  eine Wand von  $A$ , so ist  $H$  die einzige Hyperebene, die  $A$  von  $s_H A$  trennt.*

*Beweis des Lemmas.* Ist  $H$  eine Wand von  $A$ , so gibt es nach 7.2.28 einen Punkt  $p \in \bar{A} \cap H$ , der auf keiner anderen Hyperebene liegt, die  $A$  vermeidet. Eine Hyperebene, die die zwei Facetten trennt, muß jedoch nach 7.2.16 den Schnitt ihrer Abschlüsse umfassen. Jede Hyperebene, die  $A$  von  $s_H A$  trennt, muß also  $p$  enthalten und  $A$  vermeiden und fällt folglich mit  $H$  zusammen.  $\square$

Sei nun  $C \in \mathcal{A}$  ein Alkoven. Wir wählen  $w \in W'$  derart, daß die Zahl der Hyperebenen  $H \in \mathcal{H}$ , die  $A$  von  $wC$  trennen, so klein wie möglich wird. Gälte nicht  $A = wC$ , so gäbe es nach 7.2.29 eine Wand  $H \in \mathcal{H}_A$  von  $A$ , die  $A$  von  $wC$  trennt. Dann würden aber  $s_H A$  und  $wC$  und ebenso  $A$  und  $s_H wC$  von noch weniger Hyperebenen aus  $\mathcal{H}$  getrennt als  $A$  und  $wC$ , im Widerspruch zur Wahl von  $w$ . Es gilt also  $A = wC$  und  $W'$  operiert transitiv auf  $\mathcal{A}$ . Nach dieser Vorbemerkung zeigen wir die Behauptungen des Satzes in der Reihenfolge 2–3–4–1.

2. Jede Hyperebene  $H \in \mathcal{H}$  ist nach 7.2.31 Wand eines geeigneten Alkoven  $C \in \mathcal{A}$ , in Formeln  $H \in \mathcal{H}_C$ . Nach dem Vorhergehenden finden wir  $w \in W'$  mit  $wC = A$ . Offensichtlich gilt weiter  $w\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A$  und wir folgern  $s_H = w^{-1}s_w H w \in W'$  und damit  $W = W'$ .

3. Sei  $w = s_1 \dots s_r$  eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements  $w \in W$  als Produkt von Spiegelungen an Wänden  $H_1, \dots, H_r$  von  $A$ . Für zwei Alkoven  $A, C \in \mathcal{A}$  bezeichne  $d(A, C)$  die Zahl der Hyperebenen aus  $\mathcal{H}$ , die  $A$  und  $C$  trennen. Es gilt zu zeigen  $r = d(A, wA)$ . Wir betrachten dazu die Folge von Alkoven

$$A, s_1 A, s_1 s_2 A, \dots, wA$$



SkriptenBilder/BildGAF.png

Wir hätten hier die Darstellung  $w = stsrtsts$  aber nur sechs Hyperebenen trennen  $A$  von  $wA$ . Die Hyperebene  $H$  wird auch von unserer Folge von Alkoven zweimal gekreuzt, und das führt zur kürzeren Darstellung  $w = st\hat{s}rtst\hat{s} = strtst$ , die nun bereits aus der kleinstmöglichen Zahl von sechs Spiegelungen an Wänden von  $A$  besteht, und die ich durch Pünktchen angedeutet habe.

Zwei aufeinanderfolgende Alkoven  $s_1 \dots s_{i-1}A$  und  $s_1 \dots s_iA$  unserer Folge werden nach 7.3.14 nur durch die Hyperebene  $s_1 \dots s_{i-1}H_i$  getrennt. Es folgt schon  $r \geq d(A, wA)$ . Wäre  $r > d(A, wA)$ , so müßte unsere Folge von Alkoven eine Hyperebene  $H \in \mathcal{H}$  zweimal kreuzen, wir hätten also  $s_1 \dots s_{i-1}H_i = s_1 \dots s_{j-1}H_j$  mit  $r \geq j > i \geq 1$ . Daraus folgte aber  $H_i = s_i \dots s_{j-1}H_j$ , mithin  $s_i = s_i \dots s_{j-1}s_j s_{j-1} \dots s_i$  oder  $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_j$  und unsere Darstellung wäre nicht kürzestmöglich.

4. Wir haben bereits gezeigt, daß  $W$  transitiv auf  $\mathcal{A}$  operiert. Nach 3 folgt aber aus  $wA = A$  schon  $w = \text{id}$ , also operiert  $W$  auch frei.

1. Für eine Spiegelung aus  $W$ , deren Spiegelebene nicht zu  $\mathcal{H}$  gehörte, könnte die Spiegelebene nach 7.2.4 nicht enthalten sein in der Vereinigung der Hyperebenen aus  $\mathcal{H}$  und müßte deshalb einen Alkoven aus  $\mathcal{A}$  treffen. Dann müßte unsere Spiegelung diesen Alkoven auf sich selbst abbilden. Nach 4 ist aber die Identität das einzige Element von  $W$ , das einen Alkoven festhält. Also besteht  $\mathcal{H}$  bereits aus allen Spiegelebenen zu Spiegelungen von  $W$ .  $\square$

*Übung 7.3.15.* Sei  $Q \cong \mathbb{Z}^n$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul von endlichem Rang und  $(\ , \ ) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$  eine positive definite Bilinearform. Man zeige, dass die orthogonalen Spiegelungen an den orthogonalen Komponenten aller Vektoren  $v \in Q$  mit  $(v, v) = 2$  die Spiegelungen einer endlichen Spiegelungsgruppe sind.

**Korollar 7.3.16.** *Erzeugt eine Menge von affinen Spiegelungen eine affine Spiegelungsgruppe, so ist jede Spiegelung dieser Spiegelungsgruppe konjugiert zu einer Spiegelung aus besagter Menge.*

*Beweis.* Sei  $S$  unsere Menge von Spiegelungen,  $W$  die davon erzeugte affine Spiegelungsgruppe, und  $T \subset W$  die Menge aller Konjugierten zu Elementen von  $S$ . Nach 7.3.13 ist  $T$  nun aber bereits die Menge aller Spiegelungen aus der von  $T$  erzeugten Untergruppe von  $W$ .  $\square$

**Definition 7.3.17.** Sei  $W$  eine affine Spiegelungsgruppe,  $A$  ein fester Alkoven und  $S \subset W$  die Menge aller Spiegelungen an Wänden von  $A$ . Eine kürzestmögliche Darstellung von  $w \in W$  als Produkt von Elementen von  $S$  nennt man eine (in Bezug auf  $S$ ) **reduzierte Darstellung** von  $w$ , und die Länge einer reduzierten Darstellung heißt die **Länge**  $l(w) = l_S(w) = l_A(w)$  von  $w$ .

7.3.18. In diesen Notationen haben wir in 7.3.13 also unter anderem gezeigt, daß gilt  $l_A(w) = d(A, wA)$ . Weiter haben wir beim Beweis von 7.3.13 gezeigt, daß gegeben  $s_1, \dots, s_r \in S$  Spiegelungen an Wänden  $H_i$  von  $A$  mit Produkt

$w = s_1 \dots s_r$  und  $L$  eine Spiegelebene von  $W$ , die  $A$  und  $wA$  trennt, es notwendig ein  $i$  gibt mit  $L = s_1 \dots s_{i-1} H_i$  und folglich  $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$ . Ist unsere Darstellung von  $w$  reduziert, in Formeln  $r = l(w)$ , so sind immer nach dem Beweis von 7.3.13 die  $s_1 \dots s_{i-1} H_i$  sogar genau die  $r$  Spiegelebenen, die  $A$  und  $wA$  trennen.

**Proposition 7.3.19.** *Seien  $A, B$  Alkoven und  $L$  eine Spiegelebene zu einer affinen Spiegelungsgruppe. Genau dann trennt  $L$  unsere beiden Alkoven, wenn  $A$  und  $s_L B$  durch weniger Spiegelebenen getrennt werden als  $A$  und  $B$ . In Formeln gilt also*

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \Leftrightarrow d(A, s_L B) < d(A, B)$$

*Beweis.* Es reicht  $\Rightarrow$  zu zeigen, die andere Implikation folgt dann durch Anwenden der einen Implikation auf  $s_L B$  statt auf  $B$ . Wir finden Spiegelungen  $s_1, \dots, s_r$  an Wänden von  $A$  mit  $r = d(A, B)$  und  $B = s_1 \dots s_r A$ . Da  $L$  unsere beiden Alkoven trennt, gibt es nach der vorhergehenden Bemerkung 7.3.18 einen Index  $i$  mit  $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$ . Damit folgt wie gewünscht  $d(A, s_L B) < r$ .  $\square$

**Satz 7.3.20 (Austauschlemma).** *Seien  $W$  eine affine Spiegelungsgruppe,  $A$  ein Alkoven,  $S$  die Menge der Spiegelungen an Wänden von  $A$  und  $l = l_A$  die zugehörige Länge. Seien weiter  $s_1, \dots, s_r \in S$ . Ist  $t$  eine Spiegelung aus  $W$  mit  $l(ts_1 \dots s_r) < l(s_1 \dots s_r)$ , so gibt es einen Index  $i \in [1, r]$ , für den gilt*

$$ts_1 \dots s_i \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

7.3.21. Die letzte Gleichung kann auch umgeschrieben werden zur Gleichung  $s_1 \dots s_i \dots s_r = ts_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$ . Wir können also in Worten die einfache Spiegelung  $s_i$  in der Mitte austauschen gegen die Spiegelung  $t$  ganz vorne ohne das Produkt zu ändern, wenn (und im Fall einer reduzierten Darstellung genau dann, wenn) die Multiplikation mit  $t$  die Länge verkleinert.

*Beweis.* Sei  $t = s_L$  und  $B = s_1 s_2 \dots s_r A$ . Aus der Annahme folgt mit 7.3.19, daß die Spiegelebene  $L$  die Alkoven  $A$  und  $s_1 \dots s_r A$  trennt. Daraus folgt dann mit 7.3.18 sofort  $ts_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$ .  $\square$

*Übung 7.3.22.* Sei  $W$  eine endliche Spiegelungsgruppe,  $A$  ein fester Alkoven und  $l = l_A$  die zugehörige Länge. So gibt es in  $W$  genau ein Element  $w_A$  maximaler Länge, und diese Länge ist die Zahl der Spiegelungen in  $W$ .

*Übung 7.3.23.* Jede nichtreduzierte Darstellung eines Elements einer affinen Spiegelungsgruppe in Bezug auf einen festen Alkoven kann durch Streichen von Faktoren zu einer reduzierten Darstellung desselben Elements gemacht werden.



Illustration zum Austauschlemma. Die Spiegelung an der gezackelten Spiegelhyperebene stellt  $t$  dar,  $s_1 \dots s_i A$  ist der Alkoven mit der Nummer  $i$  und  $s_1 \dots \hat{s}_6 \dots s_i A$  der Alkoven mit der Nummer  $i'$ . Im vorliegenden Fall hätten wir  $ts_1 \dots s_{11} = s_1 \dots s_5 s_7 \dots s_{11}$ .

## 7.4 Fundamentalbereiche

**Definition 7.4.1.** Operiert eine Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  und ist  $Y \subset X$  eine Teilmenge, die die Bahn  $Gp$  jedes Punktes  $p \in X$  in genau einem Punkt trifft, so heißt  $Y$  ein **Fundamentalbereich** oder genauer **mengentheoretischer Fundamentalbereich** für die Operation von  $G$  auf  $X$ .

**Satz 7.4.2 (Alkovenabschlüsse als Fundamentalbereiche).** *Für die natürliche Operation einer affinen Spiegelungsgruppe auf ihrem affinen Raum ist der Abschluß eines jeden Alkoven ein Fundamentalbereich.*

*Beweis.* Seien für den Rest dieses Abschnitts  $E$  ein affiner Raum über einem angeordneten Körper,  $W \subset \text{Aut } E$  eine affine Spiegelungsgruppe,  $\mathcal{H}$  die Menge ihrer Spiegelebenen und  $\mathcal{A}$  die Menge der zugehörigen Alkoven. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit einer Proposition.

**Proposition 7.4.3.** *Sei  $A \subset E$  ein fester Alkoven und  $p \in \bar{A}$  ein Punkt aus dem Abschluß von  $A$ . So gilt*

1. *Der Stabilisator  $W_p$  von  $p$  wird erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden von  $A$ , die  $p$  enthalten. In Formeln gilt also*

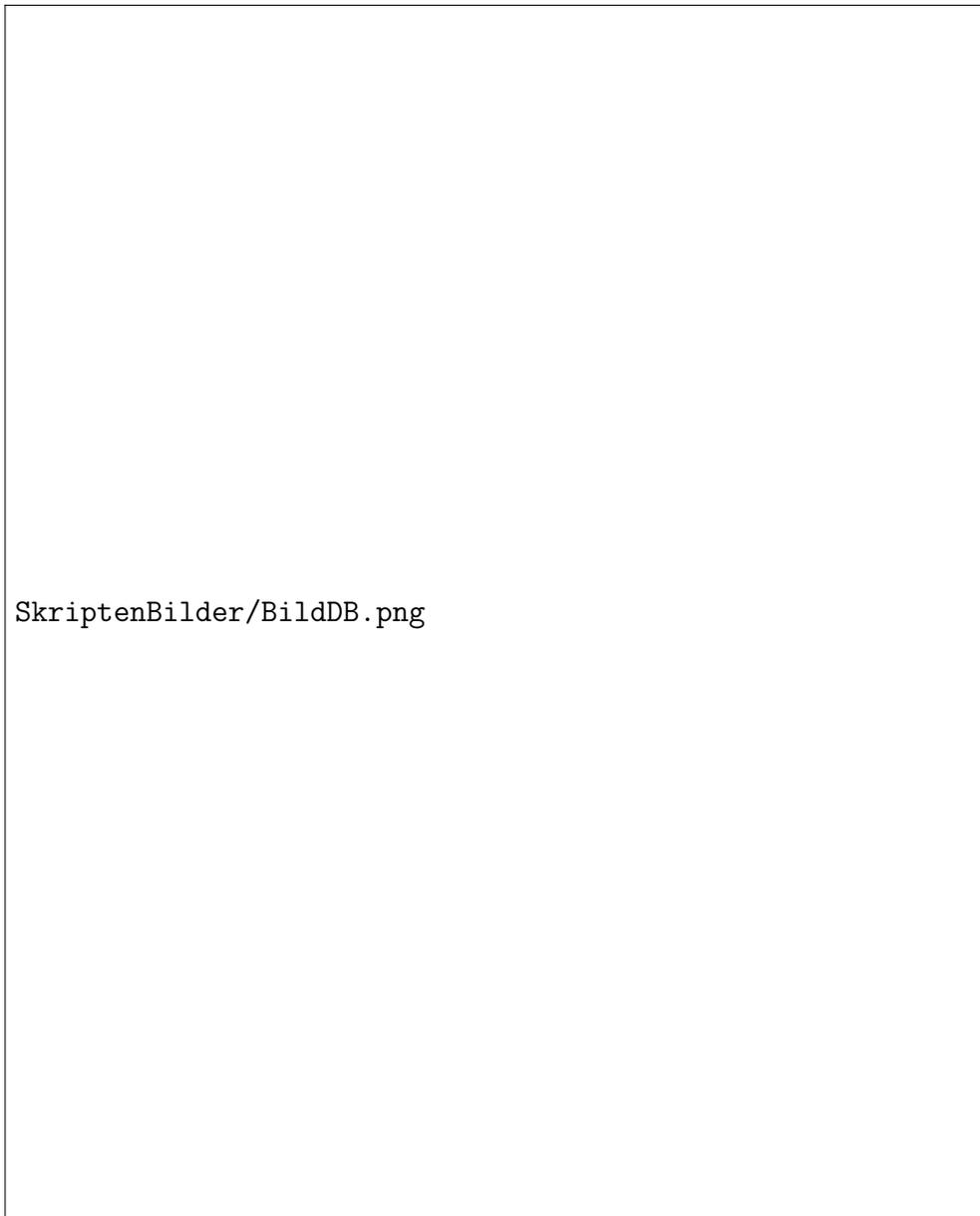
$$W_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$$

2. *Der Stabilisator  $W_p$  von  $p$  operiert frei und transitiv auf der Menge  $\mathcal{A}_p$  aller Alkoven, deren Abschluß  $p$  enthält. In Formeln liefert also  $w \mapsto wA$  eine Bijektion*

$$W_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_p := \{B \in \mathcal{A} \mid p \in \bar{B}\}$$

7.4.4. Insbesondere wird also bei einer affinen Spiegelungsgruppe auch die Isotropiegruppe jedes Punktes von Spiegelungen erzeugt.

*Beweis der Proposition.* Wir setzen  $W'_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$  und zeigen zunächst, daß  $W'_p$  transitiv auf  $\mathcal{A}_p$  operiert, in Formeln  $W'_p A = \mathcal{A}_p$ . Für  $C \in \mathcal{A}_p$  müssen wir dazu  $w \in W'_p$  finden derart, daß gilt  $C = wA$ . Wieder machen wir eine Induktion über die Zahl  $d(A, C)$  der Spiegelebenen, die  $A$  und  $C$  trennen. Ist  $A \neq C$ , so gibt es nach Lemma 7.2.29 eine Wand  $H$  von  $A$ , die  $A$  von  $C$  trennt. Aus  $p \in \bar{A} \cap \bar{C}$  folgt  $p \in H$ . Jetzt ist wieder  $d(A, s_H C) = d(s_H A, C) = d(A, C) - 1$  und mit Induktion finden wir  $w \in W'_p$  so daß gilt  $wA = s_H C$ , also  $s_H wA = C$ . Es folgt wie behauptet  $W'_p A = \mathcal{A}_p$ . Nun ist unsere Abbildung  $W_p \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $w \mapsto wA$  injektiv nach Satz 7.3.13 und offensichtlich liegt ihr Bild in  $\mathcal{A}_p$ . Wir haben aber eben bewiesen, daß die Verknüpfung der beiden Injektionen  $W'_p \hookrightarrow W_p \hookrightarrow \mathcal{A}_p$  eine Surjektion ist. Also sind diese Injektionen beide Bijektionen und die Proposition folgt.  $\square$



Drei Bahnen unter einer affinen Spiegelungsgruppe. Jede hat, wie Satz [7.4.2](#) ganz allgemein behauptet, genau einen Vertreter in dem schraffiert eingezeichneten Alkoven.

Jetzt können wir den Beweis des Satzes zu Ende führen. Sei  $A \subset E$  ein Alkoven und  $p \in E$  ein Punkt unseres affinen Raums. Es gilt zu zeigen, daß die Bahn  $Wp$  von  $p$  den Abschluß  $\bar{A}$  von  $A$  in genau einem Punkt trifft, in Formeln

$$|Wp \cap \bar{A}| = 1$$

Jeder Punkt  $p$  liegt nach 7.2.26 im Abschluß mindestens eines Alkoven, und nach 7.3.13 trifft die Bahn von  $p$  den Abschluß  $\bar{A}$  jedes Alkoven  $A$ , in Formeln  $Wp \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . Wir müssen nur noch zeigen, daß für  $A \in \mathcal{A}$ ,  $p \in \bar{A}$  und  $x \in W$  aus  $xp \in \bar{A}$  folgt  $xp = p$ . Sicher folgt schon mal  $xp \in \overline{x\bar{A}}$  alias  $A$ ,  $x\bar{A} \in \mathcal{A}_{xp}$ , und nach dem vorhergehenden Satz gilt dann  $x \in W_{xp}$ , also  $x xp = xp$ , also  $xp = p$ .  $\square$

*Übung 7.4.5.* Diejenigen Elemente einer affinen Spiegelungsgruppe, die eine vorgegebene Teilmenge des zugrundeliegenden affinen Raums punktweise festhalten, bilden selber eine Spiegelungsgruppe.

7.4.6. Gegeben eine affine euklidische Spiegelungsgruppe  $\mathcal{W}$  auf einem affinen euklidischen Raum  $E$  wird für beliebige  $v, w \in E$  der Abstand  $\|v - zw\|$  minimal genau für die  $z \in \mathcal{W}$ , für die  $v$  und  $zw$  im Abschluß desselben Alkoven liegen: Werden  $v$  und  $zw$  nämlich durch eine Wand getrennt, so gilt für die Spiegelung  $s$  an dieser Wand notwendig  $\|v - zw\| > \|v - szw\|$ .

*Ergänzung 7.4.7.* Hier scheint es sinnvoll zu zeigen, daß für die durch  $A$  definierte Länge  $l$  und  $S_p$  die Menge der Spiegelungen an Wänden von  $A$  durch den Punkt  $p$  und  $W^p$  die Menge aller  $w \in W$  mit  $l(sw) > l(w)$  für alle  $s \in S_p$  die Multiplikation eine Bijektion  $W_p \times W^p \xrightarrow{\sim} W$  definiert und  $l(uv) = l(u) + l(v)$  gilt für  $u \in W_p$ ,  $v \in W^p$ . Man sollte sogar zeigen, daß wir stets Bruhat-kleinste Doppelnebenklassenrepräsentanten und bei zwei endlichen "parabolischen" Untergruppen auch Bruhat-größte Doppelnebenklassenrepräsentanten haben.

## 7.5 Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe

7.5.1. Gegeben zwei Vektoren eines euklidischen Vektorraums sagen wir, sie schließen einen **stumpfen Winkel** bzw. einen **spitzen Winkel** ein genau dann, wenn ihr Skalarprodukt nichtpositiv bzw. nichtnegativ ist.

**Lemma 7.5.2.** *Gegeben zwei verschiedene Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe schließen zwei auf diesen Wänden jeweils senkrecht stehende Vektoren, die in Richtung unseres Alkoven zeigen, stets stumpfe Winkel ein.*

7.5.3. Anschaulich gesprochen schließen also je zwei Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besagten Alkoven “in einem spitzen Winkel ein”.

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Spiegelungsgruppe erzeugt von den orthogonalen Spiegelungen an besagten Wänden  $H$  und  $L$  und seien  $\alpha$  und  $\beta$  Vektoren, die auf diesen Wänden senkrecht stehen und in Richtung unseres Alkoven zeigen. In Formeln behauptet unser Lemma dann  $(\alpha, \beta) \leq 0$ . Sind unsere Wände parallel, so ist die Behauptung eh klar. Sonst können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser affiner euklidischer Raum ein euklidischer Vektorraum ist und beide Spiegelungen linear. Sicher finden wir nun  $v \in H$  mit  $(\beta, v) < 0$ , also  $(\beta, s_L v) > 0$ . Aus  $(\alpha, \beta) > 0$  folgte

$$(\alpha, s_L v) = (s_L \alpha, v) = \left( \alpha - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, v \right) > 0$$

und damit läge  $s_L v$  gleichzeitig auf der Spiegelebene  $s_L H$  und in unserem Alkoven. Das kann aber nicht sein, also gilt  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .  $\square$

7.5.4. Dieses Lemma wäre auch ein natürlicher erster Schritt zur Klassifikation derjenigen Spiegelungsgruppen, die von zwei Spiegelungen erzeugt werden.

**Proposition 7.5.5.** *Wählen wir für jede Wand eines festen Alkoven einer endlichen linearen Spiegelungsgruppe eine lineare Gleichung, so sind diese Gleichungen linear unabhängig als Elemente des Dualraums.*

*Beweis.* Wir wählen zunächst einmal ein invariantes Skalarprodukt. Seien nun  $H_1, \dots, H_n$  die Wände unseres Alkoven und seien  $\alpha_i \in V$  auf  $H_i$  senkrechte Vektoren, die jeweils auf derselben Seite der Hyperebene  $H_i$  liegen wie unser Alkoven. Es reicht zu zeigen, daß die  $\alpha_i$  linear unabhängig sind. Nach 7.5.2 schließen diese Vektoren jedoch paarweise stumpfe Winkel ein, in Formeln  $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$  falls  $i \neq j$ , und wählen wir  $\gamma \in A$ , so gilt  $(\alpha_i, \gamma) > 0$  für alle  $i$ . Die lineare Unabhängigkeit der  $\alpha_i$  folgt damit aus dem anschließenden Lemma 7.5.6.  $\square$

**Lemma 7.5.6.** *Liegen Vektoren eines euklidischen Vektorraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie paarweise stumpfe Winkel ein, so sind sie linear unabhängig.*

7.5.7. Schließen insbesondere  $(n + 1)$  Vektoren eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraums paarweise stumpfe Winkel ein, so können sie nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt liegen.



Illustration zum Beweis von Lemma 7.5.2. Schraffiert eingezeichnet ein Alkoven mit zwei ihn nicht in einem spitzen Winkel einschließenden Wänden  $H$  und  $L$ . Gestrichelt eingezeichnet die Gerade  $s_L H$ , die zeigt, daß es sich nicht um den Alkoven eines Systems von Hyperebenen handeln kann, das aus allen Spiegelebenen einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besteht.



Liegen Vektoren eines euklidischen Vektorraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie nicht paarweise stumpfe Winkel ein, so brauchen sie keineswegs linear unabhängig zu sein. Schließen Vektoren eines euklidischen Vektorraums paarweise stumpfe Winkel ein, liegen aber nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt, so brauchen sie ebensowenig linear unabhängig zu sein.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer endlichen Familie von Vektoren  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ausgehen. Unsere Forderungen sagen in Formeln, daß es einen Vektor  $\gamma$  gibt mit  $(\alpha_i, \gamma) > 0$  für alle  $i$  und daß gilt  $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$  für  $i \neq j$ . Sei nun  $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = 0$  eine verschwindende Linearkombination der  $\alpha_i$ . Es folgt

$$\sum_{i \in I} c_i \alpha_i = \sum_{i \in J} -c_i \alpha_i$$

mit  $I = \{i \mid c_i \geq 0\}$  und  $J = \{i \mid c_i < 0\}$ . Das Skalarprodukt der linken mit der rechten Seite der Gleichung ist nichtpositiv, da unsere Vektoren paarweise stumpfe Winkel einschließen. Also steht auf beiden Seiten der Gleichung der Nullvektor. Wir bilden nun unabhängig das Skalarprodukt beider Seiten mit  $\gamma$  und folgern, daß alle  $c_i$  verschwinden.  $\square$

## 7.6 Coxetergraphen und Klassifikation

**Definition 7.6.1.** Sei  $E$  ein affiner Raum über einem angeordneten Körper  $k$  und  $W \subset \text{Aut } E$  eine affine Spiegelungsgruppe. Sei  $A$  ein Alkoven und  $S \subset W$  die Menge der Spiegelungen an den Wänden von  $A$ . Wir definieren zu diesen Daten eine symmetrische  $S \times S$ -Matrix  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , die sogenannte **Coxetermatrix** unserer Spiegelungsgruppe, durch die Vorschrift, daß der Matrixeintrag in Zeile  $s$  und Spalte  $t$  die Ordnung von  $st$  sein soll, in Formeln

$$m_{s,t} = m(s, t) = \text{ord}(st)$$

7.6.2. Auf der Diagonalen unserer Matrix stehen natürlich nur Einsen und außerhalb sind alle Einträge  $\geq 2$ . Unsere Matrix ist unabhängig von der Wahl des Alkoven  $A$ . Etwas formaler könnten wir in  $\mathcal{A} \times \mathcal{H}$  die Teilmenge  $\mathcal{S}$  aller Paare  $(A, H)$  betrachten, bei denen die Spiegelebene  $H$  eine Wand des Alkoven  $A$  ist, für  $S$  den Bahnenraum  $S = W \setminus \mathcal{S}$  nehmen, und in offensichtlicher Weise eine Matrix  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  erklären, die dann in der Tat von keinerlei Wahlen mehr abhängt. Gegeben eine Menge  $S$  verstehen wir ganz allgemein unter einer ‘‘Coxetermatrix mit durch  $S$  indizierten Zeilen und Spalten’’ eine Abbildung  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  mit  $m(s, t) = m(t, s) \forall s, t \in S$  und  $m(s, s) = 1 \forall s \in S$ .

7.6.3. Die Coxetermatrizen der affinen Spiegelungsgruppen haben typisch nur sehr wenige von Zwei verschiedene Einträge und fast keine Einträge  $> 3$ . Weiter sind die Einträge auf der Diagonalen eh bekannt. Besonders übersichtlich stellt man die in einer Coxetermatrix enthaltene Information deshalb oft in der Form des sogenannten **Coxetergraphen** dar: Man malt einen dicken Punkt, genannt **Knoten**, für jedes Element von  $S$ , einen Strich, genannt

**Kante**, zwischen je zwei Knoten  $s, t \in S$  mit  $m(s, t) \geq 3$ , und schreibt an diese Kante noch die Zahl  $m(s, t)$  im Fall  $m(s, t) > 3$ .

*Beispiel 7.6.4.* Die affine Spiegelungsgruppe, deren Alkoven ein Schachbrettmuster bilden, hat also den Coxetergraphen



und nehmen wir für jedes Schachfeld noch seine beiden Diagonalen als Spiegelhyperebenen hinzu, so hat der Coxetergraph dieser größeren Spiegelungsgruppe die Gestalt



**Proposition 7.6.5 (Charakterisierung endlicher Spiegelungsgruppen durch ihren Coxetergraphen).** *Seien  $V_1, V_2$  reelle euklidische Vektorräume und seien darin  $W_1 \subset \text{GL}(V_1)$ ,  $W_2 \subset \text{GL}(V_2)$  endliche orthogonale Spiegelungsgruppen ohne Fixpunkte außerhalb des Nullpunkts. Genau dann haben  $W_1$  und  $W_2$  dieselbe Coxetermatrix alias denselben Coxetergraphen, wenn es eine lineare Isometrie  $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$  gibt mit  $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$ .*

7.6.6. Noch präziser formuliert zeigen wir: Ist  $A_i \subset V_i$  jeweils ein Alkoven und  $S_i \subset W_i$  jeweils die Menge von Spiegelungen an den Wänden des Alkoven  $A_i$  und ist eine Bijektion  $\xi : S_1 \xrightarrow{\sim} S_2$  gegeben mit  $\text{ord}(st) = \text{ord}(\xi(s)\xi(t))$  für alle  $s, t \in S_1$ , so gibt es eine lineare Isometrie  $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$  mit  $\varphi(A_1) = A_2$  und  $\xi(s) = \varphi s \varphi^{-1}$  für alle  $s \in S_1$ .

*Beweis.* Wir wählen in  $V = V_i$  jeweils einen festen Alkoven  $A = A_i$  und betrachten zu jeder Wand von  $A$  den Normalenvektor, der in Richtung von  $A$  zeigt. Wir erhalten so eine Familie  $(e_s)_{s \in S}$  von Einheitsvektoren in  $V$ . Offensichtlich schließen  $e_s$  und  $e_t$  gerade den Winkel  $\pi - \pi/m_{s,t}$  ein, folglich haben wir

$$(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$$

Nach 7.5.5 sind unsere  $e_s$  linear unabhängig, und da die Spiegelungen an ihren orthogonalen Komplementen nach 7.3.13 die fraglichen Gruppen erzeugen und diese fixpunktfrei operieren, besteht der Schnitt der fraglichen orthogonalen Komplemente nur aus dem Nullvektor und unsere  $e_s$  bilden sogar eine Basis. Jede Identifikation unserer beiden Coxetergraphen zusammen mit der Wahl eines Alkoven in beiden Räumen liefert folglich eine Isometrie  $\varphi$  zwischen unseren Vektorräumen, unter der die Wände des in  $V_1$  gewählten Alkoven in die Wände des in  $V_2$  gewählten Alkoven übergehen. Da die orthogonalen Spiegelungen an diesen Wänden aber nach 7.3.13 bereits die fraglichen Gruppen erzeugen, folgt  $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$ .  $\square$

**Satz 7.6.7 (Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen).** *Genau dann gehört ein Coxetergraph zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn alle seine Zusammenhangskomponenten in der nebenstehenden Liste zu finden sind.*

*Ergänzung 7.6.8.* Die Weylgruppen kompakter Liegruppen operieren nach 6.4.25 als endliche reelle Spiegelungsgruppen auf der Liealgebra eines maximalen Torus und der zugehörige Coxetergraph entsteht nach 6.4.35 aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten durch Kanten der Wertigkeit 4 und Dreifachkanten durch Kanten der Wertigkeit 6 ersetzt. Unser Satz zeigt somit unter anderem auch, daß sämtliche Zusammenhangskomponenten des Dynkindiagramms einer kompakten Liegruppe bereits unter den auf Seite 964 aufgelisteten Diagrammen sein müssen. Daß sich allerdings auch alle diese Diagramme auch tatsächlich als Dynkindiagramme kompakter Liegruppen realisieren lassen, haben wir damit noch nicht gezeigt, und inwieweit eine kompakte Liegruppe durch ihr Dynkindiagramm charakterisiert wird, werden wir noch ausführlich diskutieren müssen.

*Beweis.* Das folgt sofort aus den beiden anschließenden Propositionen, die wir in diesem Abschnitt auch noch beide beweisen.  $\square$

*Übung 7.6.9.* Wir erhalten eine Surjektion der nichtorientierten Ikosaedergruppe alias Coxetergruppe vom Typ  $H_3$  mit Erzeugern  $r, s, t$  und Relationen  $r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^2 = (st)^3 = (rt)^5 = 1$  auf die alternierende Gruppe  $A_5 \subset \mathcal{S}_5$  mittels der Vorschrift  $r \mapsto (13)(24), s \mapsto (12)(34)$  und  $t \mapsto (12)(45)$ . Diese Surjektion induziert einen Isomorphismus  $I \xrightarrow{\sim} A_5$  zwischen der Ikosaedergruppe und der fünften alternierenden Gruppe.

**Proposition 7.6.10 (Coxetermatrizen endlicher Spiegelungsgruppen).**

*Genau dann gehört eine Coxetermatrix  $(m_{s,t})_{s,t \in S}$  zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn ihre **Cosinusmatrix**  $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$  positiv definit ist. Für den Fall  $m_{s,t} = \infty$  vereinbaren wir dabei die Interpretation  $\pi/\infty = 0$ .*

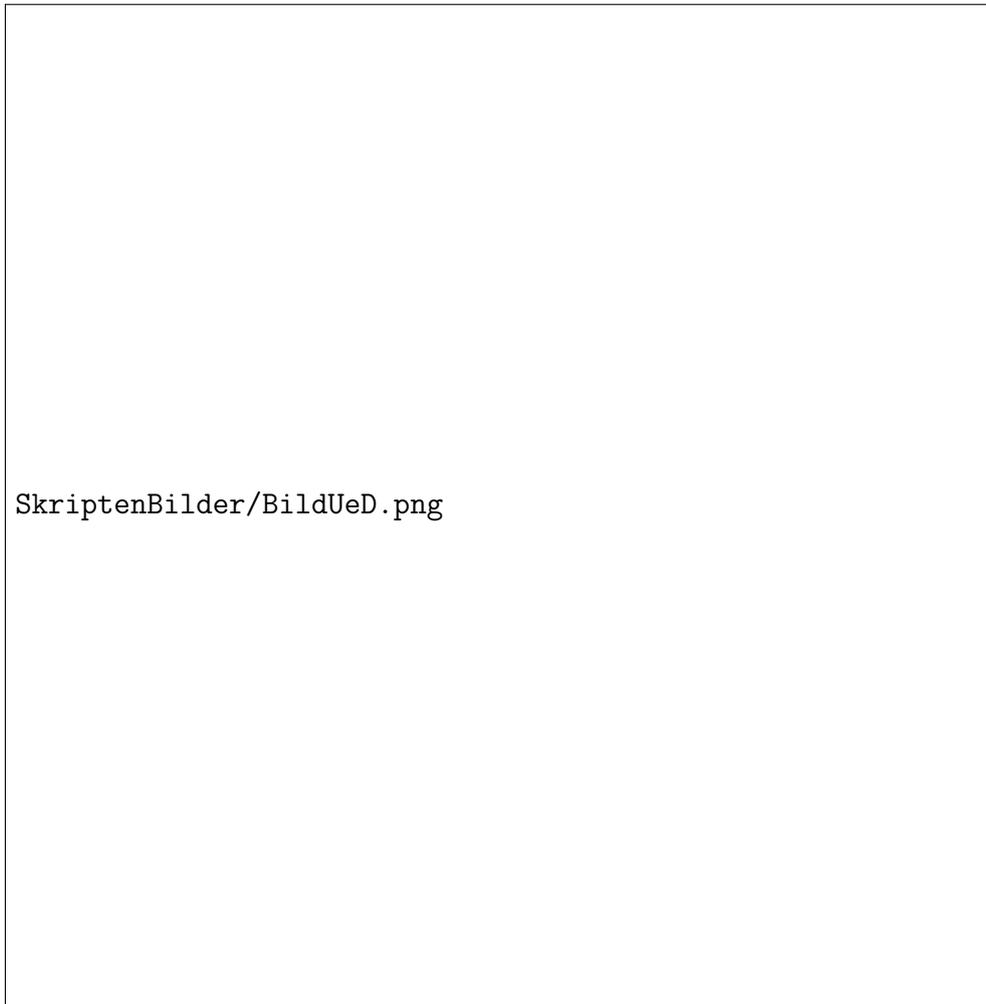
**Proposition 7.6.11 (Coxetergraphen endlicher Spiegelungsgruppen).**

*Die zusammenhängenden Coxetergraphen, deren Cosinusmatrix  $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$  positiv definit ist, sind genau die Graphen der nebenstehenden Liste.*

7.6.12. Wir verwenden im folgenden eine abkürzende Terminologie und nennen einen Coxetergraphen **positiv definit** genau dann, wenn er endlich ist und wenn seine Cosinusmatrix  $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$  positiv definit ist.

SkriptenBilder/BildPDG.png

Dieses Bild zeigt alle zusammenhängenden Coxetergraphen, die zu endlichen reellen Spiegelungsgruppen gehören, als da heißt, für die die Matrix  $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$  positiv definit ist. Hier meint  $n$  jeweils die Zahl der Knoten, und die unteren Schranken an  $n$  dienen nur dazu, Verdopplungen zu vermeiden. So wäre etwa  $I_2(3) = A_2$ ,  $I_2(4) = B_2$ , und  $I_2(5) = H_2$ . Die Auslassungen im Alphabet rühren daher, daß die in 6.4 gegebene Klassifikation der Wurzelsysteme alias der einfachen komplexen Liealgebren zuerst gefunden wurde und manche dieser Wurzelsysteme dieselbe endliche Spiegelungsgruppe als Weylgruppe haben. Es ist eine nette Übung, sich zu überlegen, daß  $H_3$  realisiert werden kann als die Gruppe aller 120 nicht notwendig orientierungserhaltenden Isometrien des  $\mathbb{R}^3$ , die einen Ikosaeder in sich überführen.



Im Fall der unendlichen Diedergruppe haben wir  $(e_s, e_t) = -1$  und folglich  $t e_s = e_s + 2 e_t$  und entsprechend  $s e_t = e_t + 2 e_s$ . Die Fixpunktmenngen beider erzeugenden Spiegelungen fallen zusammen und bilden eine Gerade mit Richtungsvektor  $e_t + e_s$ , die ich gestrichelt eingezeichnet habe und die unter allen Elementen von  $W$  punktweise fest bleibt. Die Gruppe  $W$  besteht aus allen Wörtern in  $s$  und  $t$ , bei denen sich die Buchstaben abwechseln, und je zwei derartige Wörter liefern auch verschiedene Gruppenelemente.

*Beweis von 7.6.10.* Wir zeigen zunächst, daß der Coxetergraph einer endlichen Spiegelungsgruppe stets positiv definit ist. Wir wählen dazu einen Alkoven  $A$  und ein invariantes Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und betrachten zu jeder Wand von  $A$  den Normalenvektor, der in Richtung von  $A$  zeigt. Wir erhalten so eine Familie  $(e_s)_{s \in S}$  von Einheitsvektoren. Offensichtlich schließen  $e_s$  und  $e_t$  gerade den Winkel  $\pi - \pi/m_{s,t}$  ein, folglich haben wir

$$(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$$

Mithin kann ein Coxetergraph nur dann zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe gehören, wenn seine Cosinusmatrix  $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$  positiv definit ist. Wir zeigen nun, daß die positive Definitheit unserer Matrix auch hinreichend ist. Für eine beliebige Menge  $S$  und eine beliebige symmetrische  $S \times S$ -Matrix  $m : S \times S \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$  können wir natürlich den freien Vektorraum  $V = \mathbb{R}S$  über  $S$  bilden mit seiner kanonischen Basis  $(e_s)_{s \in S}$  und darauf eine symmetrische Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  erklären durch die Vorschrift  $(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$ . Unter der Annahme  $m_{s,s} \neq 2$  können wir weiter in  $GL(V)$  die Untergruppe  $W$  betrachten, die erzeugt wird von den linearen Abbildungen mit Fixpunktmenge  $\{v \in V \mid (e_s, v) = 0\}$  und  $(-1)$ -Eigenraum  $\mathbb{R}e_s$ . Ich schlage für die so entstehende Darstellung von  $W$  die Bezeichnung als **wurzlige Darstellung** vor, da in ihr alle erzeugenden “Spiegelungen” verschiedene  $(-1)$ -Eigenräume haben und da sich diese  $(-1)$ -Eigenräume später in gewissen Fällen als die durch die sogenannten “Wurzeln” erzeugten Geraden erweisen werden. Wir bezeichnen diese “Spiegelungen” kurzerhand mit demselben Buchstaben  $s$  wie den entsprechenden Knoten unseres Coxetergraphen, erklären die Länge  $l(w)$  eines Elements von  $W$  als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung als Produkt solcher Spiegelungen  $s$  und behaupten in dieser Situation ganz allgemein:

**Lemma 7.6.13.** *Für alle  $w \in W$  und  $s \in S$  gilt*

$$l(ws) > l(w) \Leftrightarrow w e_s \in \sum_{r \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

7.6.14. Ich kann mir die Bedeutung dieses Lemmas sehr viel besser anhand der kontragredienten Operation von  $W$  auf dem Dualraum  $V^*$  klar machen, für die ich die Bezeichnung **alkovische Darstellung** vorschlage aus Gründen, die im folgenden erläutert werden sollen. Nun ist nämlich die Fixpunktmenge von  $s$  die Hyperebene  $H_s$  aller Linearformen, die auf  $e_s$  verschwinden, und  $s$  vertauscht beide Halbräume zu dieser Hyperebene. Bezeichnen wir mit  $\bar{H}_s^+$  den abgeschlossenen Halbraum, in dem das Auswerten auf  $e_s$  nichtnegative Werte annimmt, und mit  $\bar{A}^+ \subset V^*$  den “abgeschlossenen positiven

Quadranten" alias den Schnitt

$$\bar{A}^+ = \bigcap_{r \in S} \bar{H}_r^+$$

so ist die rechte Seite im Lemma gleichbedeutend zur Bedingung  $w\bar{H}_s^+ \supset \bar{A}^+$ . Mit dem Lemma zeigen wir also, daß die Operation von  $W$  auf  $V^*$  eine gewisse Ähnlichkeit hat mit der Operation einer affinen Spiegelungsgruppe mit abgeschlossenem Alkoven  $\bar{A}^+$ . Zwar liegen in dieser Allgemeinheit die Spiegelebenen im allgemeinen nicht mehr lokal endlich, aber dennoch kann die Theorie weitgehend in analoger Weise entwickelt werden.

*Beweis.* Kennen wir im Lemma die Implikation  $\Rightarrow$ , so erhalten wir automatisch

$$l(ws) < l(w) \Rightarrow wse_s = -we_s \in \sum_{r \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

und damit die Äquivalenz. Die Implikation  $\Rightarrow$  im Lemma zeigen wir durch Induktion über  $l(w)$ . Der Fall  $l(w) = 0$  ist offensichtlich. Gilt  $l(w) > 0$ , so finden wir natürlich  $t \in S$  mit  $l(wt) < l(w)$  und haben notwendig  $t \neq s$ . Indem wir so lange  $s$  oder  $t$  von rechts an  $w$  dranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung  $w = w'u$  mit  $u \in \langle s, t \rangle$ ,  $l(w's) > l(w')$ ,  $l(w't) > l(w')$  und  $l(w) = l(w') + l(u)$ . Natürlich gilt dann auch  $l(us) > l(u)$ . Falls nun gilt  $u \neq w$ , so können wir die Induktionsannahme auf  $u$  anwenden und sogar folgern

$$ue_s \in \mathbb{R}_{\geq 0} e_s + \mathbb{R}_{\geq 0} e_t$$

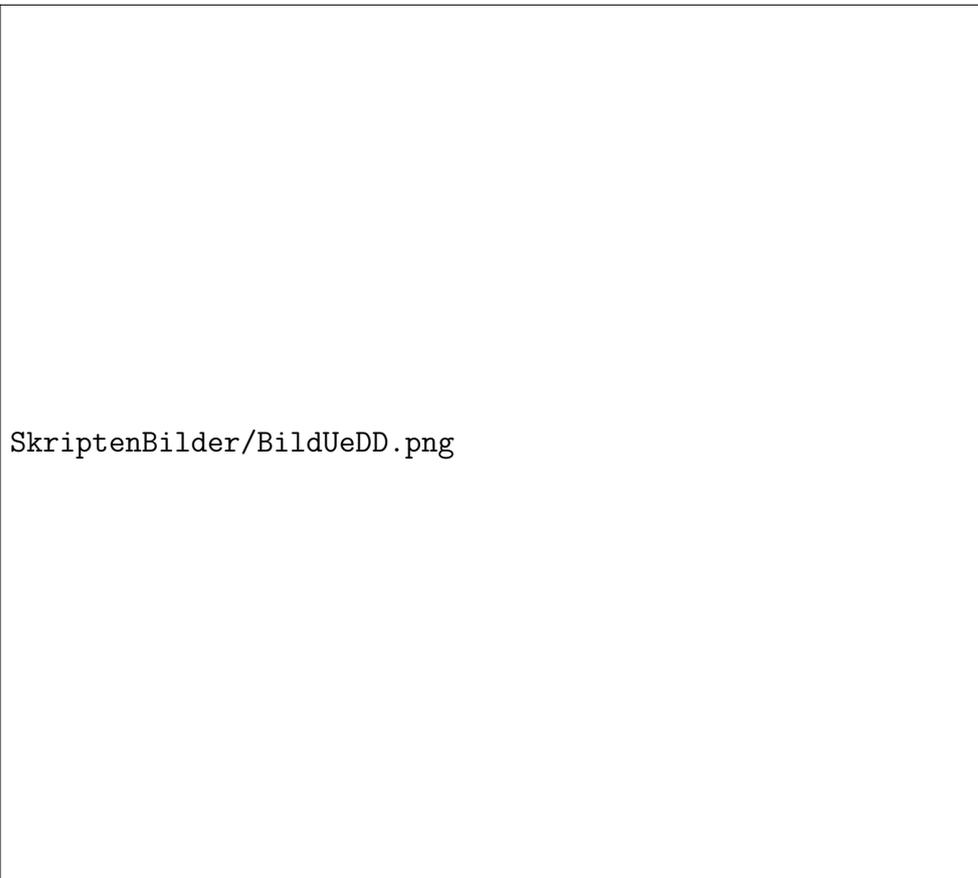
da nämlich  $\mathbb{R}e_s + \mathbb{R}e_t$  stabil ist unter  $\langle s, t \rangle$ . Da in jedem Falle gilt  $u \neq 1$ , können wir dann weiter die Induktionsannahme auf  $w'$  anwenden und erhalten

$$w'e_s \in \sum_{r \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} e_r \quad \text{und} \quad w'e_t \in \sum_{r \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

Zusammen folgt so in der Tat

$$we_s = w'u e_s \in \sum_{r \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

Es bleibt nur noch, den Fall  $u = w$  zu behandeln, also den Fall von Diedergruppen. Hier wird der Fall der unendlichen Diedergruppe durch Inspektion geregelt, der Fall endlicher Diedergruppen folgt schon aus 7.3.13 und kann alternativ auch durch Inspektion leicht geregelt werden.  $\square$



Die kontragrediente Darstellung. Eingezeichnet sind die Vektoren der dualen Basis und die Fixpunkt mengen der “Spiegelungen”  $s, t, sts$  und  $tst$  als gestrichelte Geraden. Die Wirkung von  $s$  und  $t$  ist durch gepunktete Doppelpfeile angedeutet, die jeweils Paare von Punkten verbinden, die vertauscht werden. Vereinigen wir den abgeschlossenen positiven Quadranten mit allen seinen Bildern unter der  $W$ -Operation, so erhalten wir die offene Halbebene  $\{a e_s^* + b e_t^* \mid a + b > 0\}$  vereinigt mit dem Ursprung. Zeichnen wir alle Spiegelebenen ein, so entsteht in dieser offenen Halbebene eine Art “geöffnetes Buch von der Seite betrachtet”, aber natürlich mit unendlich vielen Blättern.

Wir folgern die Proposition und betrachten dazu die Operation von  $W$  auf  $V^*$  wie in Bemerkung 7.6.14. Die Nullstellenmengen des  $W$ -stabilen Systems von Vektoren  $\{w e_s \mid w \in W, s \in S\} \subset V$  bilden ein  $W$ -stabiles System von Hyperebenen  $\mathcal{H}$  in  $V^*$ , und unser Lemma besagt, daß keine dieser Hyperebenen den “offenen positiven Quadranten”

$$A^+ := \bigcap_{r \in S} H_r^+$$

trifft. Insbesondere ist dieser offene positive Quadrant eine maximale konvexe Teilmenge im Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen aus  $\mathcal{H}$ . Je zwei verschiedene derartige maximale konvexe Teilmengen sind disjunkt nach 7.2.25 und mit  $A^+$  ist auch  $wA^+$  solch eine maximale konvexe Teilmenge für alle  $w \in W$ . Schließlich folgt aus  $wA^+ = A^+$  wieder mit Lemma 7.6.13 sofort  $l(ws) > l(w)$  für alle  $s \in S$  alias  $w = \text{id}$ . Folglich sind die  $wA^+$  mit  $w \in W$  paarweise disjunkt. Ist nun  $S$  endlich und unsere Bilinearform auf  $V$  ein Skalarprodukt, so induziert sie ein Skalarprodukt auf  $V^*$  und dieses ist unter  $W$  invariant. Nun können wir aber in unserem endlichdimensionalen reellen euklidischen Vektorraum  $V^*$  jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq V$  ein Volumen  $\text{vol } U \in [0, \infty]$  zuordnen und jede nichtleere offene Teilmenge hat positives Volumen. Ist  $K \subset V^*$  die offene Einheitskugel, so ist sicher  $K \cap A^+$  offen und nicht leer und insbesondere ist  $\text{vol}(K) / \text{vol}(K \cap A^+)$  eine obere Schranke für die Kardinalität von  $W$  und wir folgern  $|W| < \infty$ . Damit ist wiederum  $\mathcal{H}$  endlich und wir folgern mit 7.3.13, daß  $A^+$  ein Alkoven ist für die endliche Spiegelungsgruppe  $W \subset \text{GL}(V^*)$ . Aus den Definitionen folgt dann schließlich, daß der Coxetergraph von  $W$  genau der Coxetergraph ist, von dem wir ausgegangen waren.  $\square$

*Ergänzung 7.6.15.* Betrachten wir für die dreielementige Menge  $S = \{r, s, t\}$  die Coxetermatrix mit  $m_{r,s} = 3$ ,  $m_{s,t} = 5$  und  $m_{r,t} = 2$ , so erhalten wir nach ?? eine endliche orthogonale Spiegelungsgruppe im dreidimensionalen Raum. Die Untergruppe der darin enthaltenen Drehungen enthält Elemente der Ordnungen 5 und 3 und wir folgern damit auf andere Weise die in ?? besprochene Existenz einer endlichen Drehgruppe mit Elementen dieser Ordnungen.

*Erster Beweis von 7.6.11.* Zunächst gilt es zu zeigen, daß alle Coxetergraphen der Liste auf Seite 999 in der Tat positiv definit sind. Mit dem Hurwitz-Kriterium ?? und Induktion sehen wir, daß wir nur zu zeigen brauchen, daß die zugehörigen Coxetermatrizen positive Determinante haben. Diese Rechnungen überlasse ich dem Leser. Im übrigen sind sie eh überflüssig in den Fällen, in denen wir bereits eine endliche reelle Spiegelungsgruppe mit dem

entsprechenden Coxetergraphen explizit angegeben haben, also in den Fällen  $I_2(m)$  nach 7.1.9 und den Fällen  $A_n$  nach 7.1.10. Anschließend gilt es zu zeigen, daß es keine anderen positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen gibt. Dazu prüfe man zunächst für die Coxetergraphen auf Seite 1006, daß die zugehörigen Coxetermatrizen Determinante Null haben, und für die Coxetergraphen auf Seite 1007, daß die zugehörigen Coxetermatrizen negative Determinante haben. Diese Rechnungen überlasse ich wieder dem Leser. Im Rückblick werden auch sie sich zumindest im Fall der Coxetergraphen auf Seite 1006 als überflüssig erweisen, wenn wir nämlich zeigen, daß man diese Coxetergraphen gerade als die Coxetergraphen aller affinen “essentiellen” Spiegelungsgruppen erhält. Nun zeigen wir zwei Lemmata.

**Lemma 7.6.16.** *Lassen wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen einen Knoten mit allen dahin führenden Kanten weg, so bleibt er positiv definit.*

*Beweis.* Das ist klar, da die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Teilraum stets auch ein Skalarprodukt ist.  $\square$

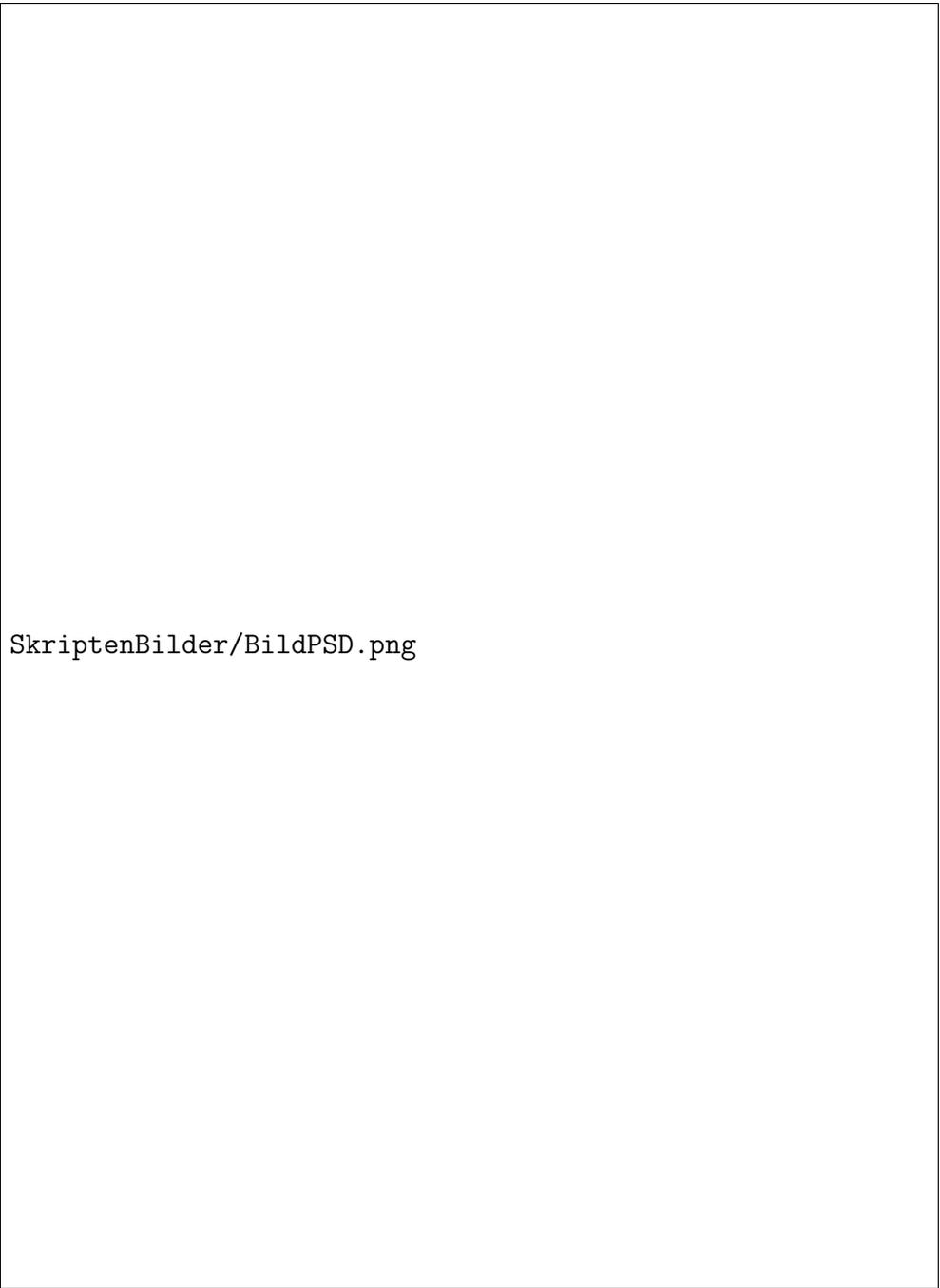
**Lemma 7.6.17.** *Verringern wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen den Koeffizienten einer Kante, so bleibt er positiv definit.*

*Beweis.* Die Cosinusmatrix  $A$  der  $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t}$  hat Einsen auf der Diagonale, aber sonst nur Einträge  $\leq 0$ . Verringern wir den Koeffizienten einer Kante, so erhalten wir eine Matrix  $A'$  mit Einträgen  $a'_{ii} = a_{ii} = 1$  und  $a_{ij} \leq a'_{ij} \leq 0$  falls  $i \neq j$ . Wäre sie nicht positiv definit, so fänden wir einen Vektor  $x \neq 0$  mit  $0 \geq x^T A' x$ . Ausgeschrieben führt das zu  $0 \geq \sum a'_{ij} x_i x_j$ . Ersetzen wir die Einträge von  $x$  durch ihre Beträge, so gilt das erst recht und wir folgern

$$0 \geq \sum a'_{ij} |x_i| |x_j| \geq \sum a_{ij} |x_i| |x_j|$$

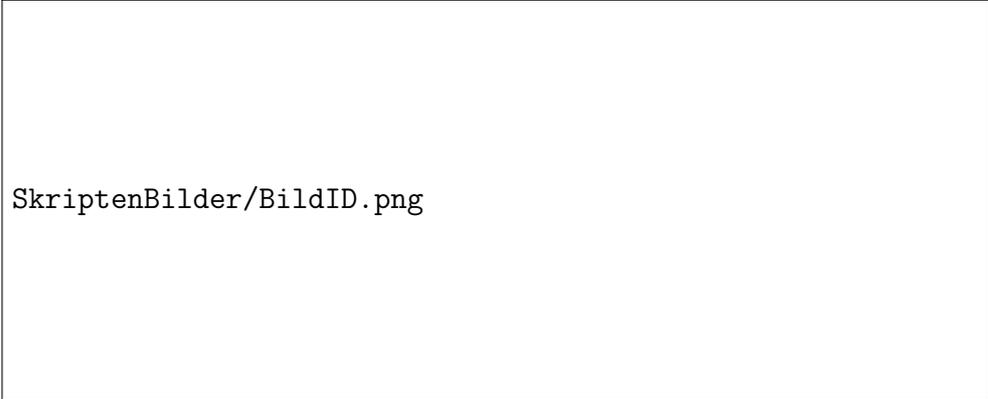
im Widerspruch zu unserer Annahme,  $A$  sei positiv definit.  $\square$

Wir erhalten sofort, daß ein positiv definiten Coxetergraph keinen Zykel enthalten darf, weil wir ja sonst von ihm aus durch das Weglassen von Knoten und Verringern von Koeffizienten zu einem Graph der Gestalt  $\tilde{A}_n$  mit  $n \geq 2$  gelangen könnten, der nun einmal nicht positiv definit ist. Weiter verbieten  $\tilde{C}_n$  bzw.  $\tilde{B}_2$  den Fall von zwei oder mehr Kanten “höherer Wertigkeit”, womit hier und im Folgenden eine Wertigkeit  $\geq 4$  gemeint sei. Wir gehen nun erst einmal die Möglichkeiten für zusammenhängende positiv definite Coxetergraphen ohne Verzweigungspunkt durch. Im Fall von einem Knoten ist eh nur  $A_1$  möglich. Im Fall von zwei Knoten verbietet  $\tilde{A}_1$  den Koeffizienten  $\infty$  und alle anderen Fälle sind bereits in unserer Liste positiv definiten Graphen zu



SkriptenBilder/BildPSD.png

Eine Liste aller zusammenhängenden Coxetergraphen zu essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen. Die Notation kommt daher, daß der Graph der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ  $Z$  stets  $\tilde{Z}$  notiert wird. Der Index ist insbesondere jeweils um eins kleiner als die Knotenzahl.



SkriptenBilder/BildID.png

Zwei indefinite Graphen, die in der Diskussion auch eine Rolle spielen.

finden. Weiter sagt uns  $\tilde{F}_4$ , daß bei fünf oder mehr Knoten eine Kante höherer Wertigkeit nur am Ende vorkommen kann. Wegen  $Z_5$  kommen deshalb als unverzweigte zusammenhängende Graphen mit fünf oder mehr Knoten nur  $A_n$  und  $B_n$  in Betracht. Im Fall von drei oder vier Knoten kommen bei einer höheren Wertigkeit einer Randkante wegen  $\tilde{G}_2$  zusätzlich nur  $H_3$  und  $H_4$  in Betracht, und bei einer höheren Wertigkeit einer Mittelkante wegen  $Z_4$  nur  $F_4$ . Damit ist gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen keine unverzweigten Graphen vergessen haben. Was die verzweigten Graphen angeht, zeigt  $\tilde{D}_n$  mit  $n \geq 5$ , daß ein positiv definiter Coxetergraph höchstens einen Verzweigungspunkt haben kann. Dann zeigt  $\tilde{D}_4$ , daß er sich daselbst nicht in mehr als drei Äste verzweigen kann. Dann zeigt  $\tilde{B}_n$ , daß darin überhaupt keine Kante höherer Wertigkeit vorkommen kann. Dann zeigt  $\tilde{E}_6$ , daß einer der drei Äste nur aus einer Kante besteht, und  $\tilde{E}_7$ , daß ein zweiter der drei Äste aus höchstens zwei Kanten besteht, und  $\tilde{E}_8$ , daß im Fall eines Astes mit einer und eines Astes mit zwei Kanten der dritte Ast höchstens aus vier Kanten bestehen darf. Damit kommen im verzweigten Fall in der Tat nur  $D_n$  und  $E_6, E_7, E_8$  in Frage, und wir haben gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen auch keine verzweigten Graphen vergessen haben.  $\square$

*Zweiter Beweis von 7.6.11.* Kennt man ??, das auch hier bewiesen werden könnte, so muß man zu Anfang des Beweises nur für die zu den Graphen auf Seite 1006 gehörigen Cosinusmatrizen Vektoren des Kerns mit positiven Einträgen angeben, um zu erkennen, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen positiv semidefinit sind, alle ihre echten Untermatrizen jedoch positiv definit. Dann geht der Beweis so weiter wie gehabt.  $\square$

7.6.18. Ich finde an diesem Beweis äußerst bemerkenswert, in welchem Maße er durch die Verwendung unmathematischer Sprache an Klarheit gewinnt, ja recht eigentlich erst verständlich wird. Stellen Sie sich bloß einmal vor, die Coxetergraphen wären noch nicht erfunden und Sie sollten denselben Beweis in der äquivalenten und a priori deutlich präziseren Sprache der Coxetermatrizen führen, ja noch schlimmer, verstehen!

*Ergänzung 7.6.19.* Unter einer **komplexen Spiegelung** versteht man einen Automorphismus eines komplexen Vektorraums, dessen Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Eine **komplexe Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe eines komplexen Vektorraums, die von komplexen Spiegelungen erzeugt wird. Typische Beispiele sind die Gruppen  $G(a, b, n) \subset \text{GL}(n; \mathbb{C})$  für  $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  mit  $b|a$  aller Matrizen mit genau

einem von Null verschiedenen Eintrag in jeder Zeile und Spalte und der Eigenschaft, daß alle Einträge  $a$ -te Einheitswurzeln sind und ihr Produkt eine  $b$ -te Einheitswurzel. In allen diesen Beispielen mit den einzigen Ausnahmen  $G(1, 1, n)$  für  $n \geq 2$  ist  $\mathbb{C}^n$  eine irreduzible Darstellung von  $G(a, b, n)$ , und in besagten Ausnahmefällen ist  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$  eine irreduzible treue Unterdarstellung von  $G(1, 1, n) \cong \mathcal{S}_n$ . Bis auf Isomorphismus und die 34 exzeptionellen komplexen Spiegelungsgruppen  $G_4, \dots, G_{37}$  erhalten wir so alle komplexen Spiegelungsgruppen mit irreduzibler definierender Darstellung.

*Ergänzung 7.6.20.* Natürlich ist es terminologisch unglücklich, daß nun der Begriff einer komplexen Spiegelung auf zwei Arten verstanden werden kann: Einerseits im Sinne von 7.6.19, und andererseits im Sinne von 7.1.1 für den Spezialfall des Grundkörpers  $\mathbb{C}$ . Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

## 7.7 Struktur affiner Spiegelungsgruppen

**Lemma 7.7.1.** *In einem endlichdimensionalen euklidischen Raum ist eine Menge von Vektoren, die paarweise stumpfe Winkel einschließen, stets endlich.*

*Beweis.* Induktion über die Dimension. Ist unser Raum  $n$ -dimensional und  $v$  ein von Null verschiedener Vektor unserer Teilmenge, so schließen nach 7.5.6 höchstens  $n$  unserer Vektoren einen echt stumpfen Winkel mit  $v$  ein. Nach der Induktionsvoraussetzung stehen weiter höchstens endlich viele Vektoren unserer Teilmenge auf  $v$  senkrecht.  $\square$

*Ergänzung 7.7.2.* In ?? werden wir genauer zeigen, daß in einem  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum eine Menge von Vektoren, die paarweise stumpfe Winkel einschließen, höchstens aus  $2n + 1$  Vektoren bestehen kann. Diese Schranke wird auch wirklich erreicht, zum Beispiel wenn man die Vektoren der Standardbasis sowie ihre Negativen betrachtet und dann noch den Nullvektor hinzunimmt.

**Lemma 7.7.3.** *Jeder Alkoven einer affinen Spiegelungsgruppe hat nur endlich viele Wände.*

*Beweis.* Zunächst einmal finden wir nach 7.1.5 ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Gegeben ein Alkoven wählen wir dann zu jeder seiner Wände einen darauf senkrechten Richtungsvektor, der in Richtung des Alkoven zeigt. Nach 7.5.2 schließen diese Vektoren paarweise stumpfe Winkel ein, und nach 7.7.1 bilden sie folglich eine endliche Menge.  $\square$

**Definition 7.7.4.** Eine affine Spiegelungsgruppe heißt **essentiell** genau dann, wenn ihre Translationen den Raum aller Richtungsvektoren aufspannen.

**Definition 7.7.5.** Zwei affine Spiegelungsgruppen  $(W, E)$  und  $(W', E')$  heißen **isomorph** genau dann, wenn es einen affinen Isomorphismus  $E \xrightarrow{\sim} E'$  gibt, unter dem sich  $W$  und  $W'$  entsprechen.

7.7.6. Gegeben affine Spiegelungsgruppen  $(W_1, E_1)$  und  $(W_2, E_2)$  ist auch  $(W_1 \times W_2, E_1 \times E_2)$  eine affine Spiegelungsgruppe in offensichtlicher Weise.

**Satz 7.7.7 (Abspalten eines maximalen endlichen Faktors).** *Jede affine Spiegelungsgruppe  $(W, E)$  ist isomorph zu einem Produkt*

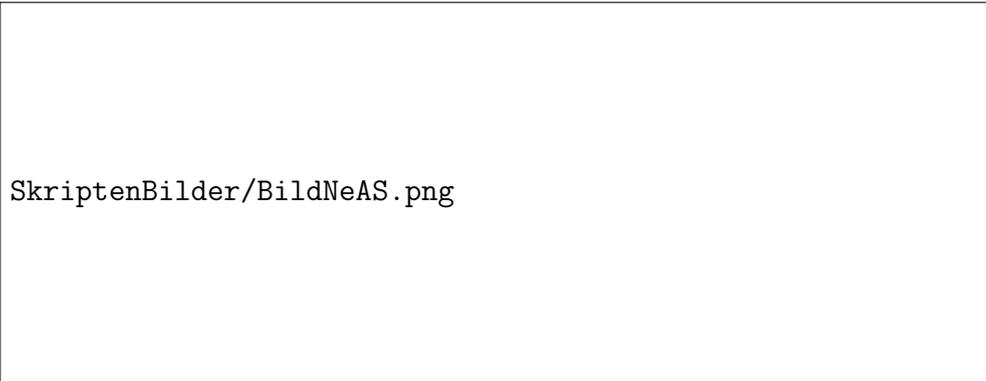
$$(W, E) \cong (W_a, E_a) \times (W_f, E_f)$$

*einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe  $(W_a, E_a)$  mit einer endlichen Spiegelungsgruppe  $(W_f, E_f)$ , und die Isomorphieklassen derartiger Faktoren sind durch  $(W, E)$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Wir dürfen nach 7.1.5 annehmen, daß unsere affine Spiegelungsgruppe orthogonal ist für ein geeignetes Skalarprodukt. Bezeichnet  $T \subset W$  die Untergruppe aller Translationen aus  $W$ , so bildet der lineare Anteil jeder Spiegelung das Vektorraumergzeugnis  $L$  von  $T$  auf sich selbst ab. Folglich liegt der  $(-1)$ -Eigenraum jeder linearisierten Spiegelung entweder in  $L$  oder in  $L^\perp$ . Nennen wir  $W_a$  das Erzeugnis der ersteren Spiegelungen und  $W_f$  das Erzeugnis der letzteren, so liefert die Multiplikation offensichtlich einen Isomorphismus

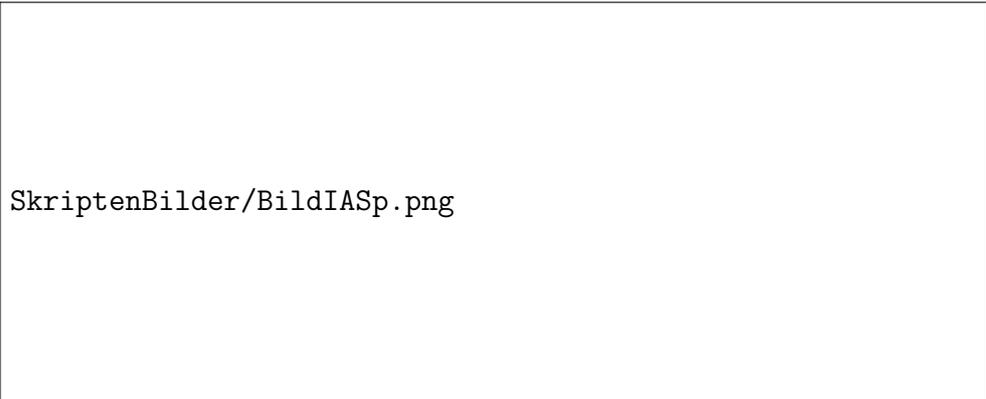
$$W_a \times W_f \xrightarrow{\sim} W$$

Wählen wir  $e \in E$  beliebig und setzen  $E_a = e + L$  und  $E_f = e + L^\perp$ , so operiert  $W_f$  als translationsfreie affine Spiegelungsgruppe auf  $E_f$  und ist mithin endlich. Der Satz ist bewiesen.  $\square$



SkriptenBilder/BildNeAS.png

Die Spiegelebenen einer nicht essentiellen affinen Spiegelungsgruppe



SkriptenBilder/BildIASp.png

Die Spiegelebenen von zwei isomorphen affinen Spiegelungsgruppen

## 8 Wurzelsysteme

Die folgenden Abschnitte können als vollständige Klassifikation der reellen affinen Spiegelungsgruppen gelesen werden. In 7.6.7 haben wir ja bereits die endlichen reellen Spiegelungsgruppen klassifiziert. Nach 7.7.7 dürfen wir uns von nun an auf die Klassifikation der essentiellen affinen Spiegelungsgruppen beschränken. In 8.2.2 konstruiere ich eine eindeutige Entsprechung zwischen den essentiellen affinen Spiegelungsgruppen und sogenannten “Wurzelsystemen”, die im kommenden Abschnitt eingeführt werden. Nach einigen weiteren Vorarbeiten gelingt dann schließlich in 8.5.4 die vollständige Klassifikation dieser Wurzelsysteme, die im übrigen weit über diese Anwendung hinaus eine zentrale Rolle in der Lie Theorie spielen.

### 8.1 Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen

**Definition 8.1.1.** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $k$  der Charakteristik Null. Eine Teilmenge  $R \subset V$  heißt ein **Wurzelsystem** oder präziser ein **reduziertes Wurzelsystem** genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Menge  $R$  ist endlich, erzeugt  $V$ , und enthält nicht den Nullvektor;
2. Für jede Wurzel  $\alpha \in R$  gibt es eine Spiegelung  $s : V \rightarrow V$  im Sinne von 7.1.1 mit  $s(\alpha) = -\alpha$ ,  $s(R) \subset R$  und  $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \quad \forall \beta \in R$ . Für jede Wurzel  $\beta \in R$  soll in anderen Worten die Differenz  $s(\beta) - \beta$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\alpha$  sein;
3. Außer ihrem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel, d.h. für jedes  $\alpha \in R$  gilt  $k\alpha \cap R \subset \{\alpha, -\alpha\}$ .

8.1.2. Die Elemente eines Wurzelsystems nennt man **Wurzeln**. Wir werden gleich sehen, daß es zu jeder Wurzel  $\alpha$  nur eine Spiegelung  $s$  geben kann, die oben Bedingung 2 erfüllt. Wir notieren sie  $s = s_\alpha$  und nennen sie die **Spiegelung zur Wurzel  $\alpha$** . Eine Teilmenge  $R \subset V$ , die nur die obigen Bedingungen 1 und 2 erfüllt, nennt man ein **nichtreduziertes Wurzelsystem**. Die leere Menge ist ein Wurzelsystem im Nullvektorraum.

*Übung 8.1.3 (Das Wurzelsystem  $E_8$ ).* Die Menge  $R$  aller Vektoren aus  $\mathbb{Z}^8$  mit euklidischer Länge  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2 = 8$ , durch vier teilbarer Summe  $a_1 + a_2 + \dots + a_8 \in 4\mathbb{Z}$  und allen Einträgen von derselben Parität  $a_i - a_j \in 2\mathbb{Z} \quad \forall i, j$  ist ein Wurzelsystem in  $\mathbb{Q}^8$  mit 240 Wurzeln. Dieses Wurzelsystem trägt den Namen  $E_8$ . Betrachtet man darin nur diejenigen Elemente, bei denen alle Einträge gerade Parität haben, so erhält man auch ein Wurzelsystem, das den Namen  $B_8$  trägt und zur kompakten Liegruppe  $SO(16)$  gehört.



Das Bild zeigt eine Liste von Wurzelsystemen im Raum der Richtungsvektoren der Papierebene derart, daß jedes Wurzelsystem in einem reellen zweidimensionalen Raum durch eine invertierbare lineare Abbildung in genau eines der vier Systeme der Liste überführt werden kann.

Die Bilder sind darüber hinaus so gewählt, daß die Spiegelung zu jeder Wurzel in der Sprache der Schulgeometrie gerade die orthogonale Spiegelung an der auf besagter Wurzel senkrechten Geraden durch den Ursprung ist.

Wir werden die Vollständigkeit dieser Liste zum Schluß dieses Abschnitts rechtfertigen. Im oben links dargestellten Fall müssen unsere Wurzeln, anders als das Bild suggerieren mag, nicht notwendig dieselbe Länge haben.

*Ergänzung* 8.1.4. Im Abschnitt ?? wird jedem Paar  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  bestehend aus einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  mit einer Cartan'schen Unter- algebra  $\mathfrak{h}$  eine Teilmenge  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$  zugeordnet und das "Wurzelsystem der Liealgebra" genannt. Nach ?? und ?? ist diese Teilmenge in der Tat ein Wurzelsystem im Sinne der vorhergehenden Definition 8.1.1. Wir studieren im folgenden solche Wurzelsysteme zunächst einmal unabhängig von der Theorie der Lie-Algebren. Es wird sich jedoch später herausstellen, daß die Wurzelsysteme in komplexen Vektorräumen im Sinne der vorhergehenden Definition genau die Wurzelsysteme zu komplexen halbeinfachen Lie-Algebren sind. Die vier sogenannten "klassischen" Beispiele werden etwa in ??, ??, ?? und ?? beschrieben. Sehr viel ausführlichere Informationen und übersichtliche Tafeln findet man bei Bourbaki [Bou81].

8.1.5. Ich habe mich in der vorhergehenden Definition an die Terminologie von Bourbaki [Bou81] gehalten. In anderen Quellen fordert man von einem Wurzelsystem schwächer als in 8.1.1 formuliert nicht  $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$  und bezeichnet diejenigen Wurzelsysteme, die diese Bedingung doch erfüllen, als **kristallographisch**. Oft bezeichnet man in der Literatur, insbesondere der angelsächsischen, als Wurzelsysteme auch diejenigen Teilmengen von *reellen euklidischen* Vektorräumen, die die ersten beiden Bedingungen aus 8.1.1 erfüllen und die Eigenschaft haben, daß die orthogonale Spiegelung an der auf einer Wurzel senkrechten Hyperebene stets unser System in sich selber überführt. Man mag derartige Systeme, jedenfalls wenn sie zusätzlich im eben erwähnten Sinn kristallographisch sind, **euklidische Wurzelsysteme** nennen. Nach allen Quellen gibt es jedoch bis auf Isomorphismus nur ein Wurzelsystem in einem eindimensionalen Raum, als da heißt, man bezahlt für die Anschaulichkeit der Definition damit, daß der Begriff eines Isomorphismus von Wurzelsystemen unnatürlich wird und es a priori nicht mehr klar ist, wie sich die Operation der Weylgruppe und andere mithilfe der euklidischen Struktur konstruierte Dinge unter Isomorphismen von Wurzelsystemen verhalten.

**Satz 8.1.6 (Kowurzeln und rationale Form).** *Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und  $R \subset V$  ein Wurzelsystem. So gilt:*

1. Für jede Wurzel  $\alpha \in R$  gibt es genau eine Spiegelung  $s_\alpha : V \rightarrow V$  mit  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  und  $s_\alpha(R) = R$ . Die Linearform  $\alpha^\vee \in V^*$  mit

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in V$$

heißt dann die **Kowurzel** oder **duale Wurzel** zu  $\alpha$ .

2. Die Menge  $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$  aller Kowurzeln ist ein Wurzelsystem in  $V^*$  und für die kanonische Abbildung  $V \rightarrow (V^*)^*$  gilt  $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$ .

3. Genau dann bilden Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$  eine  $k$ -Basis von  $V$ , wenn sie eine  $\mathbb{Q}$ -Basis des von  $R$  in  $V$  aufgespannten  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  bilden.

*Beweis.* Da  $V$  von  $R$  erzeugt wird, gilt sicher  $\dim_{\mathbb{Q}} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \geq \dim_k V$ . Jede Spiegelung  $s_{\alpha} : V \rightarrow V$  wie oben stabilisiert natürlich  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  und liegt in der endlichen Untergruppe  $G = \{g \in \text{GL}(\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}) \mid g(R) \subset R\}$ . Wählen wir mithilfe von 7.1.5 ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ , so muß  $s_{\alpha}$  auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  die orthogonale Spiegelung an der zu  $\alpha$  orthogonalen Hyperebene induzieren. Damit ist  $s_{\alpha}$  eindeutig festgelegt auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  und dann auch auf  $V = \langle R \rangle_k$ . Das zeigt die Eindeutigkeit von  $s_{\alpha}$  und liefert die Kowurzeln  $\alpha^{\vee} \in V^*$ . Sicher nimmt jede Kowurzel  $\alpha^{\vee}$  auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  nur rationale Werte an, d.h. ihre Restriktion auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  gehört zum Dualraum  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$  des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Unter dem durch unser invariantes Skalarprodukt vermittelten Isomorphismus  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  haben wir nun  $\alpha^{\vee}|_{\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}} \mapsto 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ , folglich wird  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$  erzeugt von den Restriktionen der Kowurzeln. Wählen wir eine Basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  von  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  aus Wurzeln und eine Basis  $\beta_1^{\vee}, \dots, \beta_n^{\vee}$  von  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$  aus Restriktionen von Kowurzeln, so ist die Matrix der  $\langle \alpha_i, \beta_j^{\vee} \rangle$  invertierbar und damit sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  bzw.  $\beta_1^{\vee}, \dots, \beta_n^{\vee}$  auch  $k$ -linear unabhängig in  $V$  bzw.  $V^*$ . Es folgt die dritte Behauptung des Satzes. Es bleibt, die zweite Behauptung nachzuweisen. Daß  $R^{\vee}$  ein endliches Erzeugendensystem von  $V^*$  ist, folgt aus dem Vorhergehenden; Daß gilt  $k\alpha^{\vee} \cap R^{\vee} = \{\alpha^{\vee}, -\alpha^{\vee}\}$  desgleichen. Haben wir nun irgendeinen Isomorphismus von Vektorräumen  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} U$  und ist  $R \subset V$  ein Wurzelsystem, so ist natürlich auch  $\varphi(R) \subset U$  ein Wurzelsystem und gegeben  $\beta \in R$  gilt  $\varphi(\beta)^{\vee} = (\varphi^{\top})^{-1}(\beta^{\vee})$  für  $\varphi^{\top} : U^* \rightarrow V^*$  die zu  $\varphi$  transponierte Abbildung. Gegeben  $\alpha \in R$  ist schließlich die transponierte Abbildung zur Spiegelung  $s_{\alpha} = s_{\alpha, \alpha^{\vee}} : V \rightarrow V$  die Spiegelung  $s_{\alpha}^{\top} = s_{\alpha^{\vee}, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$ . Für  $\varphi = s_{\alpha}$  erhalten wir insbesondere

$$(s_{\alpha}\beta)^{\vee} = s_{\alpha}^{\top}(\beta^{\vee}) = \beta^{\vee} - \langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle \alpha^{\vee}$$

Wir sehen daraus, daß  $s_{\alpha}^{\top}$  die Bedingungen erfüllt, die von einer Spiegelung zu  $\alpha^{\vee}$  als Element des Wurzelsystems in  $\text{spe } R^{\vee}$  gefordert werden, und das zeigt gleich auch noch  $\alpha \mapsto (\alpha^{\vee})^{\vee}$ .  $\square$

**Definition 8.1.7.** Gegeben ein Wurzelsystem  $R \subset V$  heißt die von den Spiegelungen zu den Wurzeln erzeugte Untergruppe  $W = W(R) \subset \text{GL}(V)$  die **Weylgruppe** unseres Wurzelsystems.

8.1.8. Der Nullvektor ist der einzige Vektor von  $V$ , der von der Weylgruppe festgehalten wird. In der Tat erzeugen die Kowurzeln den Dualraum, folglich ist der Schnitt ihrer Kerne Null.



SkriptenBilder/BildWdW.png

Beispiel für das Auswerten einer Kowurzel auf einer Wurzel

*Beispiel 8.1.9.* Die Menge  $R = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$  aller Differenzen zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  ist ein Wurzelsystem in  $V = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$ . Wir betrachten  $\varepsilon_i \in V^*$  mit  $\varepsilon_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ . Für  $\alpha = e_i - e_j$  ist dann die Kowurzel  $\alpha^\vee = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ , und die Spiegelung  $s_\alpha$  vertauscht die  $i$ -te mit der  $j$ -ten Koordinate. Insbesondere besteht  $W(R) \cong \mathcal{S}_n$  aus den Permutationen der Koordinaten.

8.1.10. Die Einschränkung auf den  $\mathbb{Q}$ -Spann der Wurzeln  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  definiert eine natürliche Einbettung  $W \subset \text{Aut} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Diese Einbettung identifiziert die Weylgruppe mit einer endlichen Spiegelungsgruppe im Sinne von 7.1.4. Die Alkoven in  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  heißen in diesem Zusammenhang meist **Weylkammern**.

**Lemma 8.1.11.** *Jede Spiegelung in der Weylgruppe eines Wurzelsystems ist eine Spiegelung zu einer Wurzel.*

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $R$  ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über  $\mathbb{Q}$ . Nach 7.3.13 ist jede Spiegelung  $s$  aus der Weylgruppe schon mal konjugiert zu einer Spiegelung zu einer Wurzel  $\beta \in R$ . Wir folgern  $s = ws_\beta w^{-1} = s_{w\beta} = s_\alpha$  mit  $\alpha = w\beta \in R$ .  $\square$

**Lemma 8.1.12 (Paare von Wurzeln).** *Für je zwei nichtproportionale Wurzeln  $\alpha, \beta$  eines Wurzelsystems gilt  $0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$ . Genauer wird der Winkel zwischen je zwei Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  bezüglich jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts  $(\ , \ )$  auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  gegeben durch*

$$4 \cos^2(\text{Winkel zwischen } \alpha \text{ und } \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$$

und je zwei nichtorthogonale Wurzeln haben das Längenverhältnis

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$$

*Beweis.* Beides folgt sofort aus unserer Formel  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ .  $\square$

## 8.2 Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme

8.2.1. Gegeben ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null nennen wir die von seiner Weylgruppe und den Verschiebungen um Wurzeln erzeugte Gruppe von affinen Bewegungen unseres Vektorraums die **affine Weylgruppe** unseres Wurzelsystems und sprechen von der **endlichen Weylgruppe**, wenn wir besonders betonen wollen, daß nicht diese affine Weylgruppe gemeint ist. Ist  $R \subset V$  unser Wurzelsystem, so bezeichnen wir seine affine Weylgruppe mit  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(R)$ . Bezeichnet  $W$



Dies Bild illustriert alle möglichen Lagen für Paare von Wurzeln in einem Wurzelsystem.

die endliche Weylgruppe und  $\langle R \rangle \subset V$  das Wurzelgitter, so haben wir demnach eine kurze exakte Sequenz  $\langle R \rangle \hookrightarrow \mathcal{W} \twoheadrightarrow W$ , wobei die Surjektion jeder affinen Bewegung aus  $\mathcal{W}$  ihren linearen Anteil zuordnet.

**Satz 8.2.2 (Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme).** *Das Bilden der affinen Weylgruppe liefert über jedem angeordneten Körper eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\{\text{Wurzelsysteme}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{essentielle affine Spiegelungsgruppen}\}$$

8.2.3. Der Beweis wird im Folgenden in eine Reihe von Lemmata aufgebrochen. Genauer wird in 8.2.4 gezeigt, daß die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems in der Tat eine essentielle affine Spiegelungsgruppe ist, und in 8.2.8 und seinem Beweis wird eine inverse Abbildung konstruiert. Die Wurzelsysteme selbst werden im Übrigen in 8.5.4 vollständig klassifiziert.

**Lemma 8.2.4.** *Die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems über einem angeordneten Körper ist eine affine Spiegelungsgruppe und ihre Spiegelebenen sind genau die affinen Ebenen  $H_{\alpha,n} = \{v \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle = n\} = \ker(\alpha^\vee) + (n/2)\alpha$  für  $\alpha \in R, n \in \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge  $\mathcal{H} = \{H_{\alpha,n} \mid \alpha \in R, n \in \mathbb{Z}\}$  von Hyperlebenen. Die Spiegelungen  $s_{\alpha,n}$  mit Fixpunktmenge  $H_{\alpha,n}$  und linearem Anteil  $s_\alpha$  stabilisieren  $\mathcal{H}$ , und da  $\mathcal{H}$  auch lokal endlich ist, muß  $\mathcal{H}$  nach 7.3.13 gerade die Menge aller Spiegelebenen der von den  $s_{\alpha,n}$  erzeugten affinen Spiegelungsgruppe  $\mathcal{W}'$  sein. Offensichtlich gilt  $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ , aber da  $s_{\alpha,1}s_{\alpha,0}$  gerade die Verschiebung  $\lambda \mapsto \lambda + \alpha$  um die Wurzel  $\alpha \in R$  ist, gilt auch umgekehrt  $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$  und mithin  $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ .  $\square$

**Definition 8.2.5.** Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe heißt ein Punkt des zugrundeliegenden affinen Raums ein **spezieller Punkt** genau dann, wenn es für jede Spiegelebene unserer Gruppe eine parallele Spiegelebene unserer Gruppe gibt, die durch besagten Punkt geht.

*Übung 8.2.6.* Die speziellen Punkte der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems über einem angeordneten Körper sind genau die Punkte, an denen alle Kowurzeln ganzzahlige Werte annehmen. Sie heißen die **ganzen Gewichte** unseres Wurzelsystems.

**Lemma 8.2.7.** *Für jede affine Spiegelungsgruppe gibt es mindestens einen speziellen Punkt.*



Die acht Vektoren eines Wurzelsystems vom Typ  $B_2$  in der Papierebene und die Spiegelebenen seiner affinen Weylgruppe.

*Beweis.* Betrachten wir einen Alkoven der Spiegelungsgruppe aller linearen Anteile unserer affinen Spiegelungsgruppe und wählen für jede Wand dieses Alkoven einen darauf senkrechten Vektor, so sind besagte Vektoren linear unabhängig nach 7.5.5. Wählen wir zu jeder Spiegelung an einer dieser Wände ein Urbild in der affinen Spiegelungsgruppe, so haben die zugehörigen affinen Spiegelebenen folglich nichtleeren Schnitt. Wir behaupten, daß jeder Punkt aus diesem Schnitt ein spezieller Punkt ist. In der Tat erzeugen ja unsere Urbilder eine Untergruppe unserer affinen Spiegelungsgruppe, die besagten Punkt festhält und die surjektiv auf die Gruppe aller linearen Anteile unserer affinen Gruppe geht.  $\square$

**Lemma 8.2.8.** *Jede essentielle affine Spiegelungsgruppe ist isomorph zur affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems.*

*Beweis.* Sei  $(W, E)$  unsere Spiegelungsgruppe. Wir wählen ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller ihrer Spiegelebenen, und jede Parallelenklasse von Spiegelebenen ist offensichtlich von der Gestalt

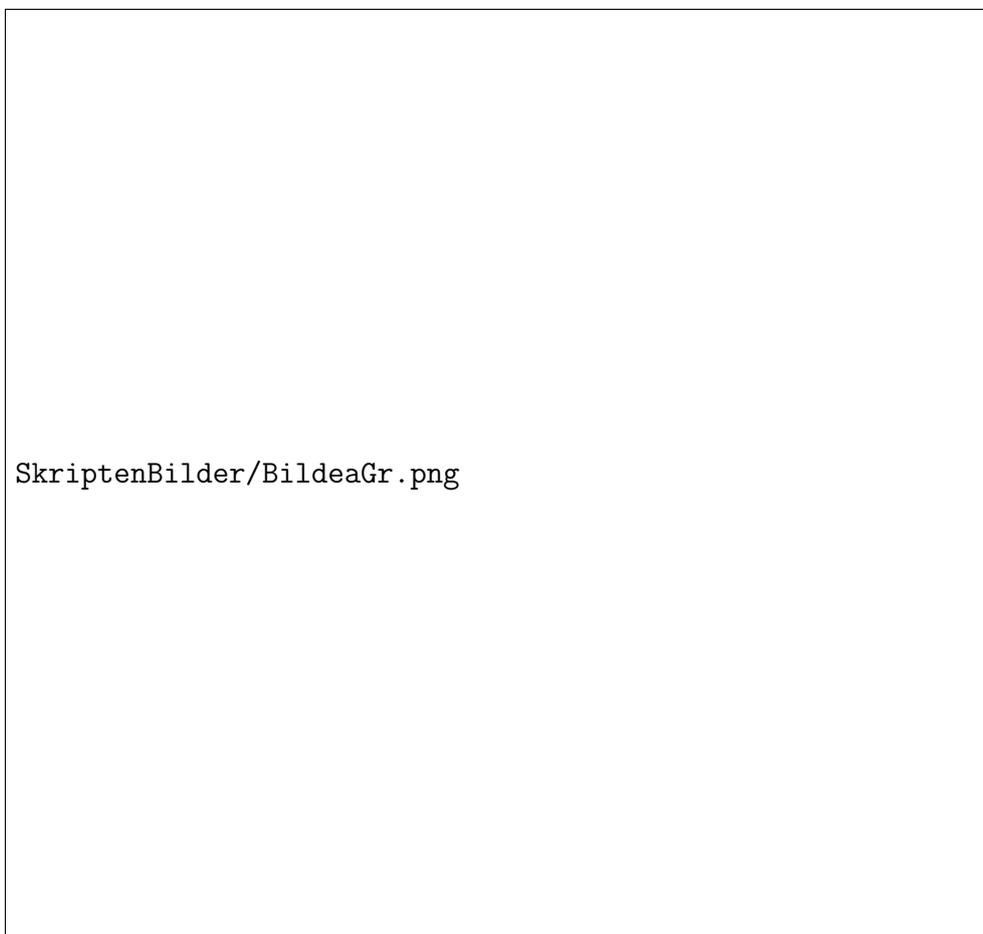
$$\{H + nv\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

für eine Spiegelebene  $H$  und einen darauf senkrechten Richtungsvektor  $v$ . Die Verschiebung um  $\alpha = 2v$  gehört notwendig zu  $W$  als die Verknüpfung  $s_{H+v} \circ s_H$ . Bezeichnet nun  $R$  die Menge aller so konstruierten Vektoren  $\alpha$  und ist  $e \in E$  ein spezieller Punkt und  $W_e$  seine Isotropiegruppe, so schränkt die Verknüpfung in unserer Gruppe ein zu einer Bijektion

$$W_e \times \langle R \rangle \xrightarrow{\sim} W$$

In der Tat liegen nämlich alle Spiegelungen bereits im Bild dieser Abbildung und die Injektivität ist eh klar. Ist  $W$  essentiell, so spannt folglich  $R$  den Raum der Richtungsvektoren auf. Weiter ist mit  $e$  auch  $\alpha + e$  ein spezieller Punkt für alle  $\alpha \in R$ , und das zeigt umgekehrt, daß  $R$  ein Wurzelsystem ist und  $W$  seine affine Weylgruppe.  $\square$

8.2.9. Ist eine endliche lineare reelle Spiegelungsgruppe kristallographisch und ist der Ursprung ihr einziger Fixpunkt, so ist sie die Isotropiegruppe des Ursprungs in einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe. In der Tat besitzt jede Spiegelebene dann eine Gleichung, die auf dem Gitter nur ganzzahlige Werte annimmt. Alle Parallelen durch Gitterpunkte zu Spiegelebenen bilden deshalb ein lokal endliches System von Hyperebenen und nach 7.3.13 ist dieses System das System aller Spiegelebenen einer affinen Spiegelungsgruppe, von der man leicht sieht, daß sie essentiell sein muß.



Eine affine Spiegelungsgruppe, die genau genommen nicht orthogonal ist für die Standardmetrik der Papierebene. Eingezeichnet ein spezieller Punkt  $e$ , doppelt schraffiert ein Alkoven mit  $e$  im Abschluß. Das Sechseck darum besteht aus zwölf Alkoven, die die Bahn des doppelt schraffierten Alkoven unter der Isotropiegruppe  $W_e$  bilden. Durch Verschieben dieses Sechsecks mit den Vektoren des Wurzelgitters erhalten wir “eine überlappungsfreie Überdeckung der Ebene”. Das illustriert unsere Erkenntnis

$$W_e \times \langle R \rangle \xrightarrow{\sim} W$$

aus dem Beweis von Lemma [8.2.8](#).

### 8.3 Basen von Wurzelsystemen

**Definition 8.3.1.** Eine Teilmenge  $\Pi \subset R$  eines Wurzelsystems heißt eine **Basis des Wurzelsystems** genau dann, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1.  $\Pi$  ist eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraums  $V$ ;
2. Schreiben wir eine Wurzel  $\beta \in R$  als Linearkombination  $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$  der Elemente von  $\Pi$ , so liegen die Koeffizienten  $n_\alpha$  entweder alle in  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  oder alle in  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ .

**Definition 8.3.2.** Eine Teilmenge  $R^+ \subset R$  eines Wurzelsystems heißt ein **System positiver Wurzeln** genau dann, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

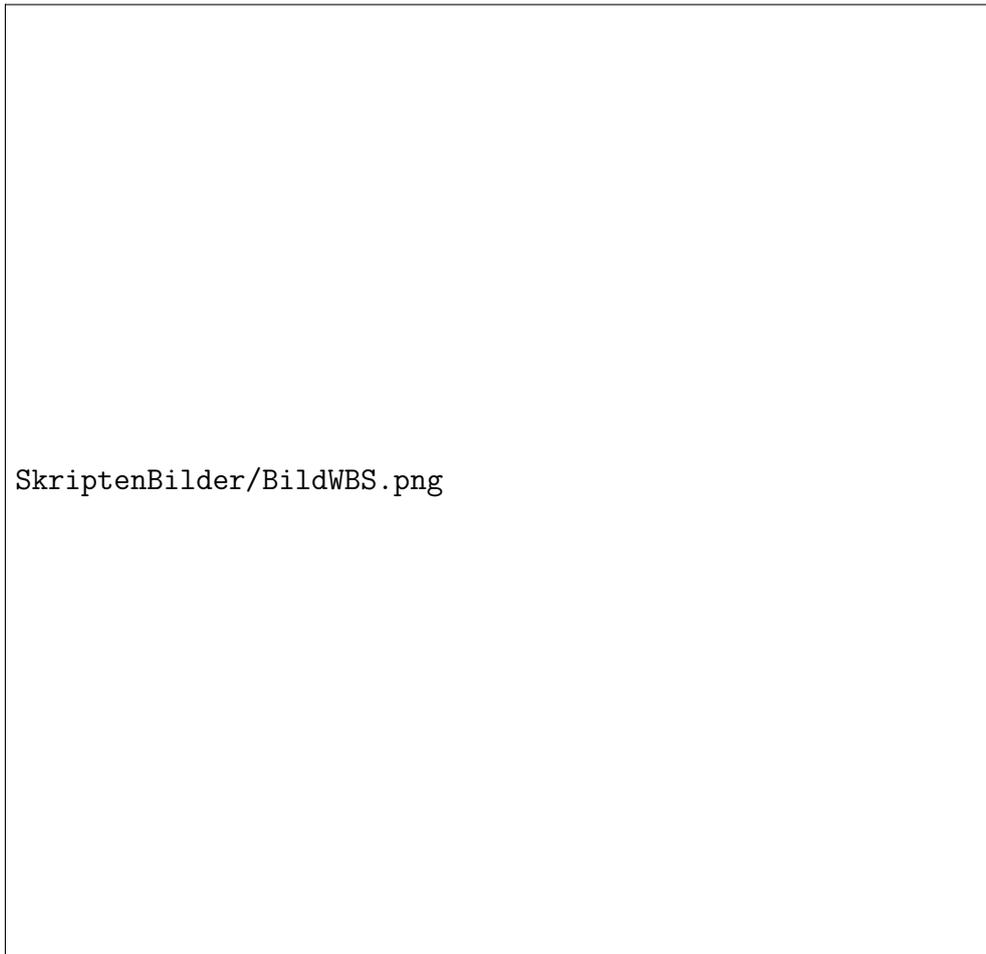
1. Das Wurzelsystem läßt sich schreiben als die disjunkte Vereinigung  $R = R^+ \sqcup (-R^+)$ , d.h. für jede Wurzel  $\alpha \in R$  gilt  $\alpha \in R^+ \Leftrightarrow (-\alpha) \notin R^+$ .
2. Aus  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^+$  und  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R$  folgt  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R^+$ .

**Satz 8.3.3 (Weylkammern, Basen, Systeme positiver Wurzeln).** Gegeben ein Wurzelsystem  $R \subset V$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
 \{ \text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \} & \xrightarrow{6} & \{ \text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \} \\
 4^\vee \uparrow \downarrow 3^\vee & & 4 \uparrow \downarrow 3 \\
 \{ \text{Basen von } R \} & \xrightarrow{5} & \{ \text{Basen von } R^\vee \} \\
 2 \uparrow \downarrow 1 & & 2^\vee \uparrow \downarrow 1^\vee \\
 \{ \text{Systeme positiver Wurzeln in } R \} & \xrightarrow{5} & \{ \text{Systeme positiver Wurzeln in } R^\vee \}
 \end{array}$$

vermittels der Abbildungen, die wir im folgenden genauer beschreiben:

1. Jeder Basis  $\Pi \subset R$  ordnet man als positives System die Menge  $R^+(\Pi)$  aller Wurzeln zu, die sich schreiben lassen als nichtnegative Linearkombination der Basiselemente.
2. Jedem System positiver Wurzeln ordnet man als Basis die Menge aller derjenigen Elemente des Systems zu, die sich nicht als Summe von zwei oder mehr Elementen des besagten Systems schreiben lassen.
3. Jeder Weylkammer im rationalen Spann der Wurzeln ordnet man als Basis des dualen Wurzelsystems die Menge derjenigen Kowurzeln zu, die Gleichungen von Wänden unserer Kammer sind und die auf der Kammer positive Werte annehmen.



Ein Wurzelsystem mit einer Weylkammer, dem zugehörigen System positiver Wurzeln, bestehend aus den drei Wurzeln “in der Niere” und der zugehörigen Basis, bestehend aus den beiden Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$ .

4. Jeder Basis des dualen Wurzelsystems ordnet man als Kammer den Schnitt derjenigen Halbräume zu, auf denen alle Elemente besagter Basis positive Werte annehmen.
5. Jeder Menge von Wurzeln ordnen die beiden unteren horizontalen Pfeile die Menge der zugehörigen Kowurzeln zu.
6. Jeder Kammer in  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$  ordnet die obere Horizontale ihr Bild unter einem und jedem Isomorphismus  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  zu, der von einem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt induziert wird.

*Beweis.* Nur bei den Abbildungen 1 und 6 scheint mir a priori klar, daß sie überhaupt im behaupteten Wertebereich landen. Als nächstes überlegen wir uns das für die in 3 gegebene Abbildung und zeigen dabei insbesondere, daß jedes Wurzelsystem überhaupt Basen besitzt. Wir geben unserer Abbildung den Namen  $\Phi$ , in Formeln gilt für jede Weylkammer  $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  also

$$\Phi(A) = \{\alpha^{\vee} \in R^{\vee} \mid (\ker \alpha^{\vee}) \in \mathcal{H}_A, \langle A, \alpha^{\vee} \rangle \subset \mathbb{Q}_{>0}\}$$

Nach 7.5.5 ist  $\Phi(A)$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$  und dann nach 8.1.6.3 auch von  $V^*$ . Nach 7.3.13 erzeugen weiter die Spiegelungen  $s_{\alpha}$  an den Wänden einer Kammer die gesamte Weylgruppe, nach 8.1.8 ist demnach der Schnitt dieser Wände alias der Schnitt der Kerne der zugehörigen Kowurzeln der Nullraum, folglich bilden die fraglichen Kowurzeln sogar eine Basis von  $V^*$  und  $\Phi(A)$  erfüllt die erste Bedingung an eine Basis eines Wurzelsystems. Stellen wir nun  $\beta^{\vee} \in R^{\vee}$  dar als Linearkombination

$$\beta^{\vee} = \sum_{\alpha \in \Phi(A)} n_{\alpha\beta} \alpha^{\vee}$$

so liegen sicher alle  $n_{\alpha\beta}$  in  $\mathbb{Q}$  und haben sogar alle dasselbe Vorzeichen, da unsere Kowurzel  $\beta^{\vee}$  auf dem Abschluß der Kammer  $A$  und insbesondere auf den Vektoren der zu  $\Phi(A)$  dualen Basis des Vektorraums  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  keine Werte mit verschiedenen Vorzeichen annehmen darf. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß hier alle  $n_{\alpha\beta}$  in  $\mathbb{Z}$  liegen. Da aber alle Alkoven in  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  konjugiert sind zu  $A$  unter  $W$ , ist auch jede Spiegelebene konjugiert zu einer Wand von  $A$  und damit jede Kowurzel zu einer Kowurzel aus  $\Phi(A)$ , in Formeln  $R^{\vee} = W\Phi(A)$ . Die von  $\Phi(A)$  in  $\langle R^{\vee} \rangle_{\mathbb{Q}}$  erzeugte Untergruppe  $\langle \Phi(A) \rangle = \langle \Phi(A) \rangle_{\mathbb{Z}}$  ist aber offensichtlich stabil unter  $W$  und wir folgern  $R^{\vee} \subset \langle \Phi(A) \rangle$ . Unser  $\Phi(A)$  ist also tatsächlich eine Basis von  $R^{\vee}$ . Wir geben nun der Abbildung 4 in die andere Richtung den Namen  $C$ , in Formeln gilt für eine Basis  $\Pi^{\vee}$  von  $R^{\vee}$  also

$$C(\Pi^{\vee}) = \{\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle > 0 \quad \forall \alpha^{\vee} \in \Pi^{\vee}\}$$

Hier ist  $C(\Pi^\vee)$  eine Weylkammer als ein Schnitt von Halbräumen zu Spiegelebenen, der von keiner Spiegelebene getroffen wird, und das hinwiederum folgt, da  $\Pi^\vee$  eine Basis von  $R^\vee$  ist. Wir zeigen schließlich, daß unsere beiden Abbildungen  $C$  und  $\Phi$  zueinander invers sind. Für jede Kammer  $A$  folgt aus Satz 7.2.29 über die Begrenzung eines Alkoven durch sein Wände sofort  $C(\Phi(A)) = A$ . Ist umgekehrt  $\Pi^\vee \subset R^\vee$  eine Basis, so sind die bezüglich  $\Pi^\vee$  positiven Kowurzeln genau die Kowurzeln, die auf der Kammer  $C(\Pi^\vee)$  positive Werte annehmen, und alle Wurzeln aus  $\Phi(C(\Pi^\vee))$  sind insbesondere positive Wurzeln für  $\Pi^\vee$ . Nun ist aber  $\Pi^\vee$  offensichtlich die einzige Basis von  $R^\vee$ , die aus bezüglich  $\Pi^\vee$  positiven Kowurzeln besteht. Also haben wir auch  $\Phi(C(\Pi^\vee)) = \Pi^\vee$ . Damit ist gezeigt, daß die in 3 und 4 angegebenen Abbildungen in der Tat zueinander inverse Bijektionen liefern. Weiter ist offensichtlich, daß wir eine Basis aus ihrem System von positiven Wurzeln zurückgewinnen können durch die in 2 beschriebene Konstruktion. Es ist also klar, daß 1 und 2 zueinander inverse Isomorphismen sind, sobald wir zeigen, daß 1 surjektiv ist, daß also jedes System positiver Wurzeln von einer Basis herkommt. Um das zu zeigen beachten wir:

**Lemma 8.3.4.** *Ist  $R$  ein Wurzelsystem,  $\Pi \subset R$  eine Basis von  $R$  und  $R^+ = R^+(\Pi)$  das zugehörige System positiver Wurzeln, so gilt für alle Wurzeln aus unserer Basis  $\alpha \in \Pi$  die Formel*

$$s_\alpha R^+ = (R^+ \setminus \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

*Beweis.* Formal sieht man dies Lemma leicht ein, denn aus der Definition folgt für  $\alpha$  eine Wurzel von  $\Pi$  schon  $(R^+ + \mathbb{Z}\alpha) \cap R = R^+ \cup \{-\alpha\}$ . Anschaulich bedeutet das Lemma, daß das Bild einer Weylkammer unter der Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch diese Spiegelebene von sich selbst getrennt wird.  $\square$

Sei nun  $P^+$  ein System positiver Wurzeln und  $\Pi$  eine Basis von  $R$  derart, daß  $P^+ \cap R^+(\Pi)$  soviel Elemente hat wie möglich. Wäre  $P^+ \neq R^+(\Pi)$ , so gäbe es  $\alpha \in \Pi$  mit  $\alpha \notin P^+$ . Aber dann hätte  $P^+ \cap R^+(s_\alpha \Pi)$  noch mehr Elemente als  $P^+ \cap R^+(\Pi)$ , im Widerspruch zur Wahl von  $\Pi$ . Also kommt jedes System positiver Wurzeln in der Tat von einer Basis her und die in 1 und 2 angegebenen Abbildungen liefern zueinander inverse Bijektionen. Wir wählen schließlich ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  und betrachten den zugehörigen Isomorphismus  $i : \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \rightarrow \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Gehört eine Basis  $\Pi$  von  $R$  zum Alkoven  $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ , so gehört offensichtlich  $\Pi^\vee$  zum Alkoven  $i(A) \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Damit ist der Satz bewiesen bis auf die Kommutativität des Diagramms, deren Nachweis wir dem Leser überlassen.  $\square$

*Übung 8.3.5.* Ist  $R^+$  ein System positiver Wurzeln eines Wurzelsystems und  $l : W \rightarrow \mathbb{N}$  die zu den zugehörigen einfachen Spiegelungen gebildete Länge, so stimmt die Länge eines Elements  $w \in W$  überein mit der Zahl der positiven Wurzeln, die es zu negativen Wurzeln macht. In Formeln gilt also  $l(w) = |w(R^+) \setminus R^+|$ . Hinweis: 7.3.13.3.

**Korollar 8.3.6.** *Jede Wurzel eines Wurzelsystems gehört zu mindestens einer Basis.*

*Beweis.* Das folgt mit 8.3.3 aus der Erkenntnis 7.2.31, daß jede Spiegelebene Wand von mindestens einer Weylkammer ist.  $\square$

**Korollar 8.3.7.** *Gegeben zwei Basen eines Wurzelsystems gibt es genau ein Element der Weylgruppe, das die eine Basis in die andere Basis überführt.*

*Beweis.* Das folgt aus 8.3.3, da jede endliche Spiegelungsgruppe nach 7.3.13 frei und transitiv auf der Menge ihrer Weylkammern operiert.  $\square$

**Definition 8.3.8.** Ein Wurzelsystem mit einer ausgezeichneten Basis nennen wir ein **basiertes Wurzelsystem**. In einem basierten Wurzelsystem nennt man die Elemente der Basis **einfache Wurzeln**, die zugehörigen Kowurzeln **einfache Kowurzeln**, die zugehörigen Spiegelungen **einfache Spiegelungen** und die zugehörige Weylkammer die **dominante Weylkammer**.

*Ergänzung 8.3.9.* Jedes basierte Wurzelsystem besitzt eine kanonische Involution, die gegeben wird durch die Vorschrift  $v \mapsto -w_\circ v$  für  $w_\circ$  das in Bezug auf die ausgezeichnete Basis längste Element der Weylgruppe nach 7.3.22. Diese Involution macht einfache Wurzeln zu einfachen Wurzeln. Wir nennen sie den **prinzipalen Automorphismus** unseres basierten Wurzelsystems.

8.3.10. Gegeben ein basiertes Wurzelsystem erzeugen die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe, jede Spiegelung ist in der Weylgruppe konjugiert zu einer einfachen Spiegelung, und jede Wurzel ist konjugiert unter der Weylgruppe zu einer einfachen Wurzel. Das alles sind Spezialisierungen von Aussagen aus 7.3.13.

*Übung 8.3.11.* Sei  $\Pi \subset R \subset V$  ein basiertes Wurzelsystem. Bezeichne  $\rho \in V$  die Halbsumme der positiven Wurzeln, in Formeln

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

Man zeige mit 8.3.4 für alle einfachen Wurzeln  $\alpha$  die Formel  $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$  und folgere  $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$  für alle einfachen Wurzeln  $\alpha$ . Man zeige weiter, daß  $x\rho - \rho$  für alle  $x$  aus der Weylgruppe im Wurzelgitter liegt, in Formeln gilt also  $x\rho - \rho \in \langle R \rangle \quad \forall x \in W$ .

*Übung 8.3.12.* Gegeben ein Wurzelsystem  $R$  über einem angeordneten Körper mit einem System positiver Wurzeln  $R^+$  gibt es für seine affine Weylgruppe genau einen Alkoven, der in der dominanten Kammer enthalten ist und in dessen Abschluß der Ursprung liegt. Er heißt der **fundamentale dominante Alkoven**. Alle Wände der dominanten Weylkammer sind auch Wände des fundamentalen dominanten Alkoven.

## 8.4 Unzerlegbare Wurzelsysteme

**Definition 8.4.1.** Zwei Wurzelsysteme  $R \subset V$  und  $R' \subset V'$  über einem Körper  $k$  heißen **isomorph** und wir schreiben  $R \cong R'$  genau dann, wenn es einen Isomorphismus von Vektorräumen  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} V'$  gibt mit  $\varphi(R) = R'$ .

**Definition 8.4.2.** Sind  $R_1 \subset V_1$  und  $R_2 \subset V_2$  Wurzelsysteme über demselben Körper, so definieren wir ihre **Summe**  $R_1 \oplus R_2 \subset V_1 \oplus V_2$  als

$$R_1 \oplus R_2 := R_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times R_2$$

Die Summe zweier Wurzelsysteme ist natürlich wieder ein Wurzelsystem. Ein Wurzelsystem heißt **unzerlegbar**, falls es weder leer ist noch isomorph zu einer Summe von zwei nichtleeren Wurzelsystemen.

**Proposition 8.4.3.** *Ist  $R \subset V$  ein Wurzelsystem, so gibt es genau eine Partition  $R = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_n$  derart, daß  $R_i$  jeweils ein unzerlegbares Wurzelsystem in dem von ihm erzeugten Untervektorraum  $V_i \subset V$  ist und daß die Addition einen Isomorphismus  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n \xrightarrow{\sim} V$  liefert mit*

$$R_1 \oplus \dots \oplus R_n \xrightarrow{\sim} R$$

*Beweis.* Sei  $\simeq$  die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge  $R$  mit der Eigenschaft  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0 \Rightarrow \alpha \simeq \beta$ . Unter dieser Äquivalenzrelation zerlegt man nun  $R$  in Äquivalenzklassen  $R = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_n$ . Der Rest des Beweises bleibt dem Leser überlassen.  $\square$

**Definition 8.4.4.** Gegeben  $V \supset R \supset R^+$  ein Vektorraum mit einem Wurzelsystem und einem System positiver Wurzeln definieren wir eine partielle Ordnung  $\geq$  auf  $V$  durch die Vorschrift  $\mu \geq \lambda$  genau dann, wenn gilt  $\mu \in \lambda + |R^+\rangle$  für  $|R^+\rangle$  das von  $R^+$  erzeugte Untermonoid von  $V$ .

**Proposition 8.4.5.** *Gegeben  $R \supset R^+$  ein unzerlegbares Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln gibt es in  $R$  stets eine **höchste Wurzel**, als da heißt, eine Wurzel  $\gamma \in R$  mit  $\gamma \geq \alpha \quad \forall \alpha \in R$ .*

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß es höchstens eine maximale Wurzel gibt. Sicher gibt es überhaupt eine maximale Wurzel  $\gamma$ . Sicher gilt  $\gamma \in R^+$ . Sicher gilt sogar  $\langle \gamma, \beta^\vee \rangle \geq 0 \quad \forall \beta \in R^+$ , sonst hätten wir ja  $s_\beta(\gamma) > \gamma$ . Ist  $\Pi$  die in  $R^+$  enthaltene Basis von  $R$  und schreiben wir

$$\gamma = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$$

so folgt  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0$  für alle  $\alpha \in \Pi$  mit  $n_\alpha \neq 0$  und  $\beta \in \Pi$  mit  $n_\beta = 0$ . Da wir unser Wurzelsystem unzerlegbar angenommen hatten, folgt sofort  $n_\alpha > 0 \quad \forall \alpha \in \Pi$ . Ist  $\kappa = \sum m_\alpha \alpha$  eine weitere maximale Wurzel, so folgt  $\kappa^\vee = \sum l_\alpha \alpha^\vee$  mit  $l_\alpha > 0$  für alle  $\alpha \in \Pi$  und damit  $\langle \gamma, \kappa^\vee \rangle = \sum l_\alpha \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle > 0$  und

$$s_\kappa(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \kappa^\vee \rangle \kappa$$

ist auch eine Wurzel. Nehmen wir zusätzlich  $\gamma \neq \kappa$  an, so ist nach unseren Erkenntnissen über Paare von Wurzeln dann auch  $\gamma - \kappa$  eine Wurzel. Ist sie positiv, so war  $\kappa$  nicht maximal. Ist sie negativ, so war  $\gamma$  nicht maximal. In jedem Fall erhalten wir einen Widerspruch und es folgt  $\gamma = \kappa$ .  $\square$

**Satz 8.4.6 (Wände des fundamentalen dominanten Alkoven).** *Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem über einem angeordneten Körper mit einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln hat der fundamentale dominante Alkoven seiner affinen Weylgruppe im Sinne von 8.3.12 zusätzlich zu den Wänden der dominanten Weylkammer nur noch eine weitere Wand, und diese zusätzliche Wand besteht aus den Punkten, auf denen die höchste Kowurzel den Wert Eins annimmt.*

8.4.7. Mit der höchsten Kowurzel meinen wir die höchste Wurzel des dualen Wurzelsystems in Bezug auf das durch die Kowurzeln unserer positiven Wurzeln bestimmte System positiver Wurzeln darin. Wir meinen *nicht* die Kowurzel zur höchsten Wurzel.

*Beweis.* Die Spiegelebenen der affinen Weylgruppe sind ja gerade die Punkte, auf denen eine Kowurzel einen ganzzahligen Wert annimmt. Nehmen an einer Stelle alle einfachen Kowurzeln positive Werte an und die höchste Kowurzel einen Wert kleiner als Eins, so nehmen dort alle Kowurzeln einen Wert zwischen Null und Eins an. Der Rest des Arguments kann dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

8.4.8. Die Bilder auf Seite 1006 zeigen die Coxetergraphen der affinen Weylgruppen aller unzerlegbaren Wurzelsysteme.

*Ergänzung 8.4.9.* Gegeben eine nichttriviale endliche Spiegelungsgruppe bezeichnet man den Quotienten

$$2(\text{Zahl der Spiegelungen})/(\text{Zahl der Wände eines Alkoven})$$

als die **Coxeterzahl** unserer endlichen Spiegelungsgruppe. Sie ist eine natürliche Zahl, genauer kann sie auch beschrieben als die Ordnung des Produkts aller Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven: Alle derartigen Produkte, in beliebiger Reihenfolge und für beliebige Alkoven, bilden eine Konjugationsklasse, so daß es hier auf Wahlen nicht ankommt.

*Ergänzung 8.4.10.* Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem  $R$  definiert man seine **duale Coxeterzahl** als  $\langle \rho, \Lambda^\vee \rangle + 1$  für  $\rho$  die Halbsumme der Wurzeln aus einem System positiver Wurzeln und  $\Lambda$  die höchste Wurzel dieses Systems.

## 8.5 Klassifikation von Wurzelsystemen

**Definition 8.5.1.** Gegeben ein Wurzelsystem  $R$  mit Basis  $\Pi$  definiert man seine **Cartan-Matrix** als die  $(\Pi \times \Pi)$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen alias die Abbildung  $(\Pi \times \Pi) \rightarrow \mathbb{Z}$  gegeben durch

$$C(R) = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha, \beta \in \Pi}$$

Diese Matrix hängt nach 8.3.6 im Wesentlichen nicht von der Wahl unserer Basis ab.

*Ergänzung 8.5.2.* Genauer kann man die Menge  $\mathcal{B}$  aller Basen des Wurzelsystems  $R$  betrachten, dann im Produkt  $\mathcal{B} \times R$  die Teilmenge  $\mathcal{T}$  aller Paare  $(\Pi, \alpha)$  bestehend aus einer Basis  $\Pi$  und einer Wurzel  $\alpha \in \Pi$ , und schließlich die Menge

$$\Pi(R) := W \setminus \mathcal{T}$$

der Bahnen der Weylgruppe auf  $\mathcal{T}$ . Diese Menge  $\Pi(R)$  hängt dann von keinerlei Wahlen mehr ab, man mag sie die **universelle Basis** des Wurzelsystems  $R$  nennen, und wir können damit die Cartan-Matrix  $C(R)$  auffassen als eine von keinerlei Wahlen mehr abhängige  $(\Pi(R) \times \Pi(R))$ -Matrix.

8.5.3. Die Cartan-Matrizen zu Wurzelsystemen haben typischerweise nur sehr wenige von Null verschiedene Einträge. Darüber hinaus stehen auf der Diagonalen nur Zweier, außerhalb der Diagonalen sind alle Einträge nichtpositiv, und es gilt

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$$

sowie  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$ . Es ist deshalb möglich, die in der Cartan-Matrix eines Wurzelsystems enthaltene Information sehr übersichtlich graphisch darzustellen durch das sogenannte **Dynkin-Diagramm**, das wie folgt gebildet wird: Man malt zunächst für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Pi$  einen dicken Punkt; dann verbindet man je zwei Punkte  $\alpha \neq \beta$  durch einen  $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)$ -fachen Strich bzw. gar nicht, falls gilt  $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = 0$ ; und schließlich versieht man die 2-fachen und 3-fachen Striche mit einem Pfeil in Richtung der Wurzel  $\alpha$  mit  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$ , d.h. in Richtung der kürzeren Wurzel bezüglich eines und damit jedes unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts.

**Proposition 8.5.4 (Klassifikation von Wurzelsystemen).** *Gegeben ein Körper  $k$  der Charakteristik Null liefert das Bilden des Dynkin-Diagramms eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{unzerlegbare} \\ \text{Wurzelsysteme über } k, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{endliche Diagramme,} \\ \text{die in nebenstehender Liste} \\ \text{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Ein Wurzelsystem aus seinem Dynkindiagramm zu rekonstruieren ist nicht weiter schwer: Man bildet den freien Vektorraum über den Knoten des Diagramms, nennt seine kanonischen Basisvektoren “einfache Wurzeln”, erklärt dann zu jeder einfachen Wurzel eine “einfache Spiegelung” mithilfe der in unserem Diagramm enthaltenen Information, und erhält das Wurzelsystem zurück als die Vereinigung der Bahnen der einfachen Wurzeln unter der von den einfachen Spiegelungen erzeugten “Weylgruppe”. Zerfällt das Dynkindiagramm eines Wurzelsystems in zwei untereinander unverbundene Teile, so kommutieren alle einfachen Spiegelungen zum einen Teil mit allen einfachen Spiegelungen zum anderen Teil, und wir erhalten erst eine Zerlegung der Weylgruppe in ein Produkt zweier miteinander kommutierender Untergruppen und daraus dann auch eine Zerlegung unseres Wurzelsystems. Das Dynkin-Diagramm jedes unzerlegbaren Wurzelsystems muß folglich zusammenhängend sein. Weiter muß die Weylgruppe eines Wurzelsystems auf dem  $\mathbb{Q}$ -Spann der Wurzeln als endliche Spiegelungsgruppe operieren. Der zugehörige Coxetergraph entsteht nach 8.1.12 aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten als Kanten der Wertigkeit 4 interpretiert und Dreifachkanten als Kanten der Wertigkeit 6. Ein kurzer Blick auf Seite 999 zeigt dann, daß nur die Diagramme unserer nebenstehenden Liste als Dynkin-Diagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme in Frage kommen, und die Injektivität der in der Proposition gegebenen Abbildung haben wir bereits zu Beginn des Beweises gezeigt. Es bleibt, ihre Surjektivität nachzuweisen. Das zeigt man, indem man dieses Argument umkehrt: Man betrachtet zunächst zu dem gegebenen Dynkindiagramm den entsprechenden Coxetergraphen, findet nach



Dieses Bild zeigt alle Dynkindiagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme. Wir kennen es bereits von Seite [964](#), wo wir kompakten Liegruppen derartige Bilder zugeordnet hatten. Die Zahl  $n$  meint wie dort jeweils die Zahl der Knoten.

7.6.10 dazu eine lineare endliche reelle Spiegelungsgruppe mit genau einem Fixpunkt, und dazu ein invariantes Skalarprodukt. Ein Wurzelsystem mit dem vorgegebenen Dynkindiagramm erhält man dann, indem man zu jeder Wand eines festen Alkoven einen Vektor positiver Länge wählt, der darauf senkrecht steht und in Richtung unseres Alkoven zeigt, und die Längenverhältnisse dieser Vektoren so einstellt, wie es das gegebene Dynkindiagramm im Lichte von 8.1.12 vorschreibt, so daß also die “einfachen Spiegelungen” auf “einfache Wurzeln” wirken wie von unserem Dynkindiagramm vorgeschrieben. Die Vereinigung aller Bahnen dieser Vektoren unter unserer endlichen Spiegelungsgruppe ist dann jedenfalls eine endliche Teilmenge der von den einfachen Wurzeln erzeugten additiven Gruppe, die offensichtlich alle Eigenschaften eines Wurzelsystems hat mit einer Ausnahme: Es ist nicht a priori klar, warum unsere dritte Bedingung an ein Wurzelsystem, daß außer ihrem Negativen kein Vielfaches einer Wurzel eine Wurzel sein darf, erfüllt sein muß. In anderen Worten wäre es im Fall eines Diagramms mit mehrfachen Kanten a priori möglich, daß wir ein “nichtreduziertes Wurzelsystem” erhalten. Dann müßte es wegen unserer zweiten Bedingung an ein Wurzelsystem jedoch eine Wurzel in unserem nichtreduzierten System geben, deren Doppeltes auch eine Wurzel wäre. Damit gäbe es in unserer Menge drei verschiedene Längen für Wurzeln, im Widerspruch zu unserer Konstruktion, die nur Vektoren in höchstens zwei verschiedenen Längen liefert, da ja alle unsere Dynkindiagramme höchstens eine “bepfeilte Kante” haben.  $\square$

8.5.5. Wir haben damit die affinen reellen Spiegelungsgruppen vollständig klassifiziert: Nach 7.7.7 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen essentiellen Faktor, deren Isomorphieklassen eindeutig bestimmt sind. Nun gibt 7.6.7 im Verbund mit 7.6.5 eine Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen durch ihre Coxeter-Graphen zusammen mit der Dimension ihrer Fixpunktmenge, und 8.2.2 gibt eine Klassifikation der essentiellen affinen Spiegelungsgruppen durch Wurzelsysteme, die hinwiederum nach 8.4.3 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Diese unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich haben wir in 8.5.4 durch ihre Dynkin-Diagramme klassifiziert.

## 9 Altes zu Wurzelsystemen, noch nötig?

### 9.1 Wichtige Ergänzung für Weyl'sche Nennerformel

*Später, bei Nennerformel, braucht nämlich ganze Gewichte.*

**Lemma 9.1.1.** *Die dominante Weylkammer ist enthalten in dem von den positiven Wurzeln erzeugten Kegel.*

*Beweis.* Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die einfachen Wurzeln und  $\omega_1, \dots, \omega_n$  die zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichte. Wir schreiben  $\omega_1 = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$  und müssen zeigen  $a_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Wählen wir ein unter der Weylgruppe invariantes Skalarprodukt  $(\ , \ )$ , so gilt  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$  und folglich  $0 < (\omega_1, \omega_1) = (\omega_1, a_1\alpha_1) = a_1(\alpha_1, \alpha_1)/2$  und damit erhalten wir bereits  $a_1 > 0$ . Bringen wir nun alle Summanden mit  $a_i \geq 0$  auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\omega_1 - \sum_{a_i \geq 0} a_i \alpha_i = \sum_{a_j < 0} a_j \alpha_j$$

und das Skalarprodukt der rechten Seite mit der linken Seite ist  $\leq 0$ , da rechts das  $\alpha_1$  nicht auftreten kann. Also sind beide Seiten Null.  $\square$

*Bemerkung 9.1.2.* Insbesondere schließen je zwei fundamentale dominante Gewichte einen spitzen Winkel ein, in den Notationen des vorhergehenden Beweises gilt nämlich  $(\omega_2, \omega_1) = a_2(\omega_2, \alpha_2) = a_2(\alpha_2, \alpha_2)/2 \geq 0$ . Mithin ist  $\rho = \omega_1 + \dots + \omega_n$  das kürzeste ganze Gewicht im Inneren der dominanten Weylkammer.

## 10 Funktionen auf kompakten Liegruppen

### 10.1 Das Haar-Maß auf Liegruppen

**Definition 10.1.1.** Eine **positive stetige Dichte** auf einer Mannigfaltigkeit ist ein topologisches Maß, dessen Einschränkung auf jede Karte durch das Produkt des Lebesgue-Maßes mit einer positiven stetigen Funktion dargestellt werden kann.

**Definition 10.1.2.** Ein **Haar-Maß** oder genauer ein **linksinvariantes Haar-Maß** auf einer Liegruppe  $G$  ist eine stetige positive Dichte  $\mu$  auf  $G$  im Sinne von 10.1.1 mit  $\mu(xA) = \mu(A)$  für alle  $x \in G$  und alle topologisch meßbaren Mengen  $A \subset G$ .

**Satz 10.1.3 (Existenz und Eindeutigkeit des Haar'schen Maßes).** *Auf jeder Liegruppe gibt es ein Haar'sches Maß, und je zwei Haar'sche Maße unterscheiden sich um einen konstanten Faktor  $c > 0$ .*

10.1.4. Man kann allgemeiner zeigen, daß unsere Haar'schen Maße sogar die einzigen von Null verschiedenen linksinvarianten Borel-Maße auf unserer Liegruppe sind, vergleiche 17.3.3. Das ist für uns jedoch hier nicht von Belang.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist klar, da sich je zwei positive Dichten offensichtlich nur um das Produkt mit einer stetigen positiven Funktion unterscheiden, die im Fall von zwei Haar-Maßen eben auch linksinvariant und damit konstant sein muß.

*Sollte wohl gar keinen eigenen Abschnitt machen, sondern nur wie bei Matrix-Liegruppen reden.* □

### 10.2 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

*Wohin? Eh wohl meist alter Quatsch!*

**Definition 10.2.1.** Gegeben ein  $n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel  $E$  auf einem topologischen Raum  $X$  und ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  erklären wir ein  $GL(V)$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$ , indem wir als Faser  $Y_x$  bei  $x \in X$  den  $GL(V)$ -Torsor

$$Y_x = \text{Hom}_{\mathbb{R}}^{\times}(V, E_x)$$

aller Isomorphismen von  $V$  mit der Faser  $E_x$  von  $E$  bei  $x$  nehmen und mit der durch Vorschalten erklärten Rechtsoperation von  $GL(V)$  versehen. Die Topologie auf  $Y$  wird mittels der Bündelkarten von  $E$  in der hoffentlich offensichtlichen Weise definiert. Wir notieren dieses Hauptfaserbündel

$$Y = \text{Hom}_{\mathbb{R}}^{\times}(V, E)$$

**Definition 10.2.2.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und ein  $\mathrm{GL}(V)$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$  bilden wir umgekehrt ein  $n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel  $E$  als das balancierte Produkt

$$E = Y \times_{\mathrm{GL}(V)} V$$

10.2.3. Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß diese Konstruktionen sogar eine Äquivalenz von Kategorien liefern zwischen der Kategorie der  $n$ -dimensionalen Vektorraumbündel auf  $X$  mit Bündelisomorphismen als Morphismen und der Kategorie der  $\mathrm{GL}(V)$ -Hauptfaserbündel auf  $X$  mit Isomorphismen von Hauptfaserbündeln als Morphismen.

10.2.4. Ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit, so erhalten wir in derselben Weise eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der  $n$ -dimensionalen glatten reellen Vektorraumbündel auf  $X$  und der Kategorie der glatten  $\mathrm{GL}(V)$ -Hauptfaserbündel auf  $X$ .

**Definition 10.2.5.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine topologische Gruppe  $G$  und ein  $G$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$  und eine stetige reelle endlichdimensionale Darstellung  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(F)$  erklären wir ein Vektorraumbündel als das balancierte Produkt

$$Y \times_G F$$

in hoffentlich selbsterklärender Weise. Ist  $G$  eine Liegruppe und  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $Y \rightarrow X$  ein glattes  $G$ -Hauptfaserbündel, so erhalten wir in derselben Weise ein glattes Vektorraumbündel.

*Beispiel 10.2.6.* Gegeben eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  liefert das Tangentialbündel  $TX$  mit 5.8.15 ein  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$ . Verschiedene Darstellungen von  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$  führen dann mit 5.8.19 zu weiteren Vektorraumbündeln. In diesem Kontext übliche Bezeichnungen für gewisse so entstehende Bündel und ihre Schnitte faßt die folgende Tabelle zusammen.

$\rho$	$F$	$Y \times_G F$	Vektorbündel	Schnitt
	$\mathbb{R}^n$	$TX$	Tangentialbündel	Vektorfeld
	$(\mathbb{R}^n)^*$	$T^*X$	<b>Kotangentialbündel</b>	<b>Kovektorfeld</b>
	$\bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$	$\bigwedge^k T^*X$		<b><math>k</math>-Form</b>
$\det^{-1}$	$\mathbb{R}$	$\bigwedge^n T^*X$	<b>Determinantenbündel</b>	<b>Volumenform</b>
$ \det ^{-1}$	$\mathbb{R}$		<b>Dichtebündel</b>	<b>Dichte</b>
$\sqrt{ \det }^{-1}$	$\mathbb{R}$			<b>Halbdichte</b>

Hierbei meint  $\mathbb{R}^n$  die Standarddarstellung,  $(\mathbb{R}^n)^*$  deren kontragrediente Darstellung und  $\bigwedge^k((\mathbb{R}^n)^*) \cong \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$  deren  $k$ -te äußere Potenz. Das Determinantenbündel heißt oft auch das **kanonische Bündel**.

10.2.7. Jetzt erkläre, wie Schnitte in Karten aussehen, und warum Fasern so und so aussehen.

10.2.8. Ich will nun Satz 10.1.3 von Matrix-Liegruppen auf beliebige Liegruppen verallgemeinern und muss dazu erklären, was Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten sind und wie diese integriert werden. Zunächst erinnere ich an den Begriff eines reellen Vektorraumbündels auf einer Mannigfaltigkeit, wobei wir sowohl unsere Mannigfaltigkeit als auch unser Bündel stets als glatt annehmen wollen.

Ist nun  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $p : E \rightarrow X$  ein  $\mathbb{R}$ -Bündel, so erklären wir das duale  $\mathbb{R}$ -Bündel  $E^* \rightarrow X$ , indem wir auf der disjunkten Vereinigung

$$E^* = \bigsqcup_{x \in X} E_x^*$$

der Dualräume der Fasern von  $p$  mit der hoffentlich offensichtlichen Projektion  $q : E^* \rightarrow X$  die einzige Struktur eines  $\mathbb{R}$ -Bündels betrachten derart, dass für jede Bündelkarte von  $E$   $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$  die Verknüpfung

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} U \times (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{N} q^{-1}(U)$$

eine Bündelkarte von  $E^*$  ist.

Hierbei soll die erste Abbildung von der kanonischen Identifikation  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n)^*$  herkommen und die zweite Abbildung von den Inversen der Transponierten  $E_x^* \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n)^*$  der durch die ursprüngliche Bündelkarte von  $E$  gegebenen Identifikationen  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} E_x$  für  $x \in U$ .

**Definition 10.2.9.** Das zum Tangentialbündel  $TX$  an eine Mannigfaltigkeit  $X$  duale Bündel heißt das *Kotangentialbündel* und wird notiert als

$$(TX)^* = T^*X$$

Seine Fasern

$$(T^*X)_x = (T_x X)^*$$

notiert man auch  $T_x^*X$  und nennt die Faser bei  $x$  den *Kotangentialraum* an  $X$  bei  $x$ .

Ein *Kovektorfeld* ist ein Schnitt des Kotangentialbündels.

*Beispiel 10.2.10.* Gegeben eine glatte Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  können wir ein glattes Kovektorfeld

$$df : X \longrightarrow T^*X$$

erklären durch die Vorschrift

$$(df)_x = d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

mit der kanonischen Identifikation  $T_p \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  für alle  $p \in \mathbb{R}$ .

**Definition 10.2.11.** Gegeben ein  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel  $p : E \rightarrow X$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  und  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir ein weiteres  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel  $\text{Alt}^k E$  auf  $X$ , indem wir auf der disjunkten Vereinigung

$$\text{Alt}^k E = \sqcup_{x \in X} \text{Alt}^k E_x$$

mit der hoffentlich offensichtlichen Projektion  $q : \text{Alt}^k E \rightarrow X$  die einzige Struktur eines  $\mathbb{R}$ -Bündels betrachten derart, dass für jede Bündelkarte  $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$  von  $E$  die offensichtliche Abbildung

$$U \times \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow q^{-1}(U)$$

eine Bündelkarte von  $\text{Alt}^k E$  ist.

*Jetzt irgendwie weiter bis zum Haar-Maß*

**Definition 10.2.12.** Das Haar-Maß auf einer kompakten Liegruppe, das der ganzen Gruppe Maß Eins gibt, nennen wir das **normierte Haar-Maß** unserer kompakten Liegruppe.

10.2.13. Wir können nun mit identischen Beweisen viele unserer Resultate für kompakte Matrix-Liegruppen auf beliebige kompakte Liegruppen verallgemeinern. Ich erwähne insbesondere:

**Lemma 10.2.14.** *Auf jeder stetigen endlichdimensionalen Darstellung einer kompakten Liegruppe gibt es ein invariantes Skalarprodukt.*

**Satz 10.2.15 (Vollständige Reduzibilität).** *Jede stetige endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Liegruppe läßt sich als die direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen schreiben.*

**Satz 10.2.16 (Isotypische Zerlegung).** *Sei  $G$  eine kompakte Liegruppe und  $\mathcal{L}$  ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von  $G$ . So liefert für jede komplexe endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $G$  das Auswerten einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{L \in \mathcal{L}} L \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}^G(L, V) \xrightarrow{\sim} V$$

10.2.17. Die Beweise dieser Sätze können wie gesagt wortwörtlich von den Beweisen im Spezialfall von Matrix-Liegruppen 2.3.12, 2.3.1 und 2.4.14 übernommen werden.

### 10.3 $G$ -Strukturen auf Mannigfaltigkeiten

*Wohin??*

**Definition 10.3.1.** Sei  $X$  eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $\rho : G \rightarrow V$  eine reelle  $n$ -dimensionale Darstellung einer Liegruppe  $G$ . Eine  $\rho$ -**Struktur auf  $X$**  ist ein Paar  $(Y, \varphi)$  bestehend aus einem glatten  $G$ -Hauptfaserbündel  $\pi : Y \rightarrow X$  und einem Isomorphismus

$$\varphi : Y \times_G V \xrightarrow{\sim} TX$$

von reellen Vektorraumbündeln auf  $X$ . Im Fall einer Matrix-Liegruppe wie etwa  $G = SO(n)$  oder  $G = SU(n)$  redet man meist von einer  $G$ -**Struktur** und meint damit eine  $\rho$ -Struktur in Bezug auf die offensichtliche Darstellung  $\rho$  unserer Matrix-Liegruppe, also den Fall  $V = \mathbb{R}^n$  bzw.  $V = \mathbb{C}^n$ . Spricht man dahingegen von einer **Spin-Struktur**, so meint man eine  $\rho$ -Struktur in Bezug auf die durch die Komposition  $\text{Spin}(n) \rightarrow SO(n) \hookrightarrow GL(n; \mathbb{R})$  gegebene Darstellung der Spin-Gruppe.

*Beispiel 10.3.2.* Eine  $O(n)$ -Struktur ist “dasselbe” wie eine Riemann’sche Metrik. In der Tat können wir jeder Riemann’schen Metrik  $g$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  eine  $O(n)$ -Struktur  $(Y, \varphi)$  zuordnen, indem wir das  $O(n)$ -Hauptfaserbündel  $Y \rightarrow X$  erklären durch die Vorschrift

$$Y_x = \left\{ f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_x X) \left| \begin{array}{l} f \text{ ist ein Isomorphismus und} \\ g_x \text{ entspricht unter } f \text{ dem} \\ \text{Standardskalarprodukt auf } \mathbb{R}^n \end{array} \right. \right\}$$

mit der durch Vorschalten definierten Rechtsoperation von  $O(n)$ , und dann den Isomorphismus von Vektorraumbündeln  $\varphi : Y \times_{O(n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TX$  durch  $[f, v] \mapsto f(v)$  für  $f \in Y_x$ . Gegeben eine  $O(n)$ -Struktur  $(Y, \varphi)$  erklären wir umgekehrt eine Metrik  $g$  durch die Vorschrift, daß das Skalarprodukt  $g_x$  auf  $T_x X$  unter  $\varphi : Y_x \times_{O(n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T_x X$  dem Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  entsprechen soll. Gehen wir von einer Metrik  $g$  aus und bilden die zugehörige  $O(n)$ -Struktur, so erhalten wir daraus natürlich die ursprüngliche Metrik zurück. Liefern umgekehrt zwei  $O(n)$ -Strukturen  $(Y, \varphi)$  und  $(Y', \varphi')$  dieselbe Metrik auf  $X$ , so gibt es auch genau einen Isomorphismus von Hauptfaserbündeln  $k : Y \xrightarrow{\sim} Y'$  mit  $\varphi' \circ (k \times \text{id}) = \varphi : Y \times_{O(n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TX$ .

10.3.3. In derselben Weise wie im vorhergehenden Beispiel 10.3.2 ausgeführt erhalten wir auch alle anderen Entsprechungen der folgenden Tabelle:

$O(n)$ -Struktur	Riemann'sche Metrik
$SO(n)$ -Struktur	Riemann'sche Metrik und Orientierung
$GL(n; \mathbb{R})^+$ -Struktur	Orientierung
$\{ \det  = 1\}$ -Struktur	Dichte
$SL(n; \mathbb{R})$ -Struktur	Orientierung und Dichte
$GL(n; \mathbb{C})$ -Struktur	fastkomplexe Struktur
$U(n)$ -Struktur	fastkomplexe Struktur und hermitesche Metrik

## 10.4 Funktionen auf kompakten Matrix-Liegruppen

**Lemma 10.4.1.** *Gegeben eine kompakte Matrix-Liegruppe liegen die Matrixkoeffizienten der reellen stetigen endlichdimensionalen Darstellungen dicht im Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf unserer Gruppe in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß III.3.2.7, da ja die darstellenden Funktionen eine Unterringalgebra von  $\mathcal{C}(G; \mathbb{R})$  bilden, die die Punkte trennen muß, da schon die Matrixkoeffizienten der definierenden Darstellung unserer Matrix-Liegruppe die Punkte trennen.  $\square$

**Lemma 10.4.2.** *Gegeben eine kompakte Matrix-Liegruppe liegen die Matrixkoeffizienten der komplexen stetigen endlichdimensionalen Darstellungen dicht im Raum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf unserer Gruppe in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß für komplexwertige Funktionen III.3.2.13, da ja die darstellenden Funktionen eine unter komplexer Konjugation stabile Unterringalgebra von  $\mathcal{C}(G)$  bilden, die die Punkte trennt.  $\square$

**Satz 10.4.3 (Orthonormalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten).** *Sei  $G$  eine kompakte Matrix-Liegruppe. Bilden die  $\rho^\lambda : G \rightarrow GL(d^\lambda; \mathbb{C})$  ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen stetiger einfacher unitärer Darstellungen von  $G$ , so bilden die renormalisierten Matrixkoeffizienten  $\sqrt{d^\lambda} \rho_{ij}^\lambda$  eine Hilbert-Basis von  $L^2(G)$ .*

**Lemma 10.4.4.** *Ist  $G \subset GL(n; \mathbb{R})$  eine kompakte Untergruppe, so sind die Matrixkoeffizienten von  $G$  genau die Restriktionen von Polynomen in den Matrixeinträgen.*

*Beweis.* Das gilt sowohl für Matrixkoeffizienten reeller Darstellungen und Polynome mit reellen Koeffizienten wie für Matrixkoeffizienten komplexer Darstellungen und Polynome mit komplexen Koeffizienten. Beide Fälle sind offensichtlich äquivalent und wir konzentrieren uns der Einfachheit halber auf den komplexen Fall. Die fraglichen Restriktionen liegen dicht in  $\mathcal{C}(G)$  nach Stone-Weierstraß III.3.2.13 und sie bilden offensichtlich einen Teilraum im Raum aller komplexen Matrixkoeffizienten von  $G$ , der stabil ist unter Rechts- und Linkstranslation. Dieser Teilraum ist also eine Summe von Räumen von Matrixkoeffizienten einfacher Darstellungen, und würde hier eine einfache Darstellung fehlen, so könnte unser Teilraum wegen der Orthogonalitätsrelationen 10.4.3 nicht dicht sein.  $\square$

*Beispiel 10.4.5.* Für  $G = S^1$  erhalten wir als Spezialfall die Sätze ?? aus der Theorie der Fourierreihen.

**Satz 10.4.6 (Orthonormalitätsrelationen für Charaktere).** *Die irreduziblen Charaktere einer kompakten Matrix-Liegruppe liegen in Bezug auf die sup-Norm dicht im Raum der stetigen Klassenfunktionen und bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Klassenfunktionen.*

*Beweis.* Die Abbildung  $P : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathcal{C}(G)$  mit  $(Pf)(x) = \int f(g^{-1}xg)dg$  ist eine Projektion auf den Raum der Klassenfunktionen und ist stetig für die sup-Norm. Folglich liegen die Projektionen der Matrixkoeffizienten dicht im Raum der Klassenfunktionen. Die Projektion eines Matrixkoeffizienten einer irreduziblen Darstellung ist jedoch ein Vielfaches ihres Charakters. *Noch vervollständigen*  $\square$

## 10.5 Matrixkoeffizienten

10.5.1. Wir erinnern an ??: Ist  $V$  eine Darstellung einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$ , so definiert man ganz allgemein für  $v \in V$ ,  $\varphi \in V^*$  den **Matrixkoeffizienten**  $c_{\varphi,v} : G \rightarrow k$  durch die Vorschrift  $c_{\varphi,v}(g) = \varphi(gv)$ . Die Matrixkoeffizienten definieren eine Abbildung, die **Matrixkoeffizientenabbildung**

$$\begin{aligned} V^* \otimes_k V &\rightarrow \text{Ens}(G, k) \\ \varphi \otimes v &\mapsto c_{\varphi,v} \end{aligned}$$

10.5.2. Jede Gruppe  $G$  trägt eine natürliche Operation der Gruppe  $G \times G$  vermittelt der Vorschrift  $(x, y)z = xzy^{-1}$ . Diese Operation spezialisiert zu drei Operationen von  $G$  auf sich selbst durch Linksmultiplikation, durch Rechtsmultiplikation mit dem Inversen und durch Konjugation. Gegeben eine Menge  $E$  erhalten wir so auch eine Operation von  $G \times G$  auf  $\text{Ens}(G, E)$  durch die Vorschrift  $((x, y)f)(z) = f(x^{-1}zy)$ , die spezialisiert zu drei Operationen

von  $G$  auf diesem Raum. Wir nennen sie die **linksreguläre Operation**, die **rechtsreguläre Operation** und die **Operation durch Konjugation** und benutzen dafür die abkürzenden Notationen

$$(\acute{x}f)(z) := f(x^{-1}z), \quad (\grave{x}f)(z) := f(zx) \quad \text{und} \quad (\hat{x}f)(z) := f(x^{-1}zx).$$

10.5.3. Sei  $G$  eine Gruppe und  $k$  ein Körper. Jede Abbildung  $f : G \rightarrow k$  ist der Matrixkoeffizient  $c_{\varphi,f}$  der rechtsregulären Darstellung von  $G$  auf  $V = \text{Ens}(G, k)$  für  $\varphi \in V^*$  das Auswerten am neutralen Element. In der Tat rechnen wir  $c_{\varphi,f}(g) = \varphi(\grave{g}f) = (\grave{g}f)(e) = f(g)$ . Analog gilt für die linksreguläre Darstellung von  $G$  auf demselben Raum  $c_{\varphi,f} = f \circ \text{inv}$  für  $\text{inv} : G \rightarrow G$  das Invertieren.

**Lemma 10.5.4 (Darstellende Funktionen).** *Sei  $k$  ein Körper. Für eine  $k$ -wertige Funktion auf einer Gruppe sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller  $k$ -wertigen Funktionen auf unserer Gruppe auf;*
2. *Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Untervektorraum im Raum aller  $k$ -wertigen Funktionen auf unserer Gruppe auf;*
3. *Unsere Funktion ist ein Matrixkoeffizient einer endlichdimensionalen Darstellung unserer Gruppe über  $k$ .*

*Beweis.* Gegeben eine Darstellung einer Gruppe  $G$  durch Automorphismen eines endlichdimensionalen  $k$ -Vektorraums  $V$  liefern die Matrixkoeffizienten eine  $(G \times G)$ -äquivalente Abbildung  $V^* \boxtimes_k V \rightarrow \text{Ens}(G, k)$  unter der Operation aus 10.5.2 rechts. Damit erhalten wir sofort  $3 \Rightarrow 1 \& 2$ . Spannt umgekehrt eine Funktion  $f : G \rightarrow k$  mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum  $V \subset \text{Ens}(G, k)$  auf, so ist  $f$  eben der Matrixkoeffizient dieser endlichdimensionalen Darstellung zum Vektor  $f \in V$  und dem Auswerten am neutralen Element  $\varphi \in V^*$ . Das zeigt  $2 \Rightarrow 3$ . Spannt schließlich  $f$  mit seinen Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Raum auf, so auch  $f \circ \text{inv}$  mit seinen Rechtstranslaten, also ist  $f \circ \text{inv}$  Matrixkoeffizient einer endlichdimensionalen Darstellung, und dann ist  $f$  ein Matrixkoeffizient der kontragredienten Darstellung.  $\square$

**Lemma 10.5.5 (Stetige darstellende Funktionen).** *Für eine stetige komplexwertige Funktion auf einer topologischen Gruppe sind gleichbedeutend:*

1. Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Linkstranslaten einen endlichdimensionalen komplexen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf unserer Gruppe auf;
2. Unsere Funktion spannt zusammen mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen komplexen Untervektorraum im Raum aller Funktionen auf unserer Gruppe auf;
3. Unsere Funktion ist ein Matrixkoeffizient einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung unserer Gruppe.

Analoges gilt für reellwertige Funktionen und allgemeiner für Funktionen mit Werten in einem beliebigen topologischen Körper.

*Beweis.* Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung  $V$  einer topologischen Gruppe  $G$  liefern die Matrixkoeffizienten eine  $(G \times G)$ -äquivalente Abbildung  $V^* \otimes V \rightarrow \mathcal{C}(G)$ . Damit erhalten wir sofort  $3 \Rightarrow 1 \& 2$ . Ist umgekehrt  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und spannt mit ihren Rechtstranslaten einen endlichdimensionalen Teilraum von  $V \subset \mathcal{C}(G)$  auf, so finden wir für diesen Teilraum eine Basis von gewissen  $\hat{x}_1 f, \dots, \hat{x}_n f$ . Da eine Funktion, die an jeder Stelle verschwindet, schon identisch null ist, finden wir Stellen  $y_1, \dots, y_n \in G$  derart, daß die Auswertungen dort eine Basis des Dualraums  $V^*$  liefern. Da die zugehörigen Matrixkoeffizienten  $g \mapsto (\hat{g}\hat{x}_i f)(y_j) = f(y_j g x_i)$  alle stetig sind, muß  $V$  eine stetige Darstellung von  $G$  sein. Und nun ist  $f$  eben der Matrixkoeffizient dieser stetigen endlichdimensionalen Darstellung zum Vektor  $f \in V$  und dem Auswerten am neutralen Element  $\varphi \in V^*$ . Das zeigt  $2 \Rightarrow 3$ . Spannt schließlich  $f$  mit seinen Linkstranslaten einen endlichdimensionalen Raum auf, so auch  $f \circ \text{inv}$  mit seinen Rechtstranslaten, also ist  $f \circ \text{inv}$  Matrixkoeffizient einer endlichdimensionalen Darstellung und dann ist  $f$  ein Matrixkoeffizient der kontragredienten Darstellung.  $\square$

**10.5.6 (Die Ringalgebra der darstellenden Funktionen).** Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Die darstellenden Funktionen bilden in  $\mathcal{C}(G)$  eine unter der komplexen Konjugation stabile Unterringalgebra

$$\mathcal{R}(G)$$

Ist in der Tat  $f = c_{\varphi, v}$  für  $v \in V$  und  $\varphi \in V^*$ , so haben wir  $\bar{f} = c_{\bar{\varphi}, \bar{v}}$  für  $\bar{v} \in \bar{V}$ ,  $\bar{\varphi} \in \bar{V}^*$  im Sinne von ???. Spannen weiter  $f_1, \dots, f_d$  und  $h_1, \dots, h_s$  jeweils einen unter Linkstranslation invarianten Teilraum von  $\mathcal{C}(G)$  auf, so gilt offensichtlich dasselbe für die Produkte  $f_i h_j$ .

*Ergänzende Übung 10.5.7.* Sei  $G$  eine kompakte Liegruppe und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine darstellende Funktion mit  $f(e) = 1$ . Gibt es stets eine stetige Darstellung  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{C})$ , für die wir  $f = \rho_{11}$  haben?

*Ergänzende Übung* 10.5.8. Der Ring der stetigen darstellenden Funktionen auf der Gruppe  $SL(2; \mathbb{R})$  besteht genau aus allen Funktionen, die sich durch Polynome in den vier Matrixeinträgen ausdrücken lassen. Hinweis: 2.2.16.

## 10.6 Kompakte Operatoren

**Definition 10.6.1.** Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen heißt **kompakt** genau dann, wenn sie die Einheitskugel auf eine Menge mit kompaktem Abschluß abbildet.

*Ergänzende Übung* 10.6.2. Eine Komposition von zwei stetigen Operatoren zwischen normierten Vektorräumen ist kompakt, wenn einer der Faktoren kompakt ist.

*Ergänzende Übung* 10.6.3. Die kompakten linearen Abbildungen von einem normierten Vektorraum in einen Banachraum bilden eine abgeschlossene Teilmenge im Raum aller stetigen linearen Abbildungen mit der Operatornorm.

**Satz 10.6.4 (Spektrum kompakter selbstadjungierter Operatoren).** Gegeben ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum ist das Erzeugnis seiner Eigenräume dicht und alle seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten sind endlichdimensional.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{H}$  unser Hilbertraum und  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  unser kompakter selbstadjungierter Operator. Wir zeigen zunächst, daß unter der Annahme  $\mathcal{H} \neq 0$  entweder  $\|T\|$  oder  $-\|T\|$  ein Eigenwert ist, und wiederholen dazu erst einmal den Beginn des Beweises für den Satz über den Spektralradius V.3.4.1. Gegeben ein Vektor  $v$  der Länge Eins gilt  $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^2v \rangle \leq \|v\| \|T^2v\| = \|T^2v\|$ . Das zeigt  $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ . Die andere Ungleichung gilt eh, womit wir für jeden selbstadjungierten Operator  $T$  folgern

$$\|T\|^2 = \|T^2\|$$

Unter der Annahme  $\mathcal{H} \neq 0$  finden wir in  $\mathcal{H}$  eine Folge von Einheitsvektoren  $v_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^2v_n\| = \|T^2\|$ . Wegen  $\|T^2v_n\| \leq \|T\| \|Tv_n\| \leq \|T\|^2 = \|T^2\|$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tv_n\| = \|T\|$  zumindest falls  $\|T\| \neq 0$ , und im Fall  $\|T\| = 0$  ist das eh klar. Wir setzen nun  $c = \|T\|$  und behaupten zunächst, daß  $c^2$  ein Eigenwert von  $T^2$  ist. In der Tat gilt ja

$$\|(T^2 - c^2)v_n\|^2 = \langle v_n, (T^4 - 2c^2T^2 + c^4)v_n \rangle = \|T^2v_n\|^2 - 2c^2\|Tv_n\|^2 + c^4$$

und das strebt für  $n \rightarrow \infty$  offensichtlich gegen Null. Da wir nun  $T$  kompakt angenommen hatten, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die

Folge  $Tv_n$  konvergent annehmen. Im Fall  $c = 0$  ist unsere Behauptung eh klar, und im Fall  $c \neq 0$  folgt erst die Konvergenz von  $T^2v_n$  und dann die Konvergenz der Folge  $c^2v_n$  und damit die Konvergenz der Folge  $v_n$  selber. Gilt nun etwa  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ , so folgt unmittelbar  $\|v\| = 1$  und  $T^2v = c^2v$  und  $c^2$  ist in der Tat ein Eigenwert von  $T^2$ . Aus  $(T + c)(T - c)v = 0$  folgt dann aber auch, daß entweder  $v$  ein Eigenvektor von  $T$  zum Eigenwert  $c$  ist, oder  $(T - c)v$  ein Eigenvektor von  $T$  zum Eigenwert  $-c$ . Damit haben wir gezeigt, daß in der Tat entweder  $\|T\|$  oder  $-\|T\|$  ein Eigenwert von  $T$  ist. Der Rest des Beweises ist nun schnell erledigt. Wäre das Erzeugnis der Eigenräume nicht dicht, so wäre sein orthogonales Komplement nicht Null und unser Operator hätte darin folglich einen Eigenvektor, Widerspruch. Wäre der Eigenraum zu einem von Null verschiedenen Eigenwert nicht endlichdimensional, so gäbe es darin eine Folge von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren, und deren Bild könnte keine konvergente Teilfolge besitzen, Widerspruch.  $\square$

*Übung 10.6.5.* Ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum ist genau dann kompakt, wenn das Erzeugnis seiner Eigenräume dicht liegt, alle seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten endlichdimensional sind, und wenn zusätzlich in jeder Umgebung von Null fast alle seiner Eigenwerte enthalten sind.

*Ergänzende Übung 10.6.6.* Gegeben ein kompakter Operator  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  von einem Hilbertraum in einen weiteren Hilbertraum gibt es durch eine abzählbare Menge  $N$  indizierte Orthonormalsysteme  $(v_n)_{n \in N}$  von  $\mathcal{H}$  und  $(w_n)_{n \in N}$  von  $\mathcal{H}'$  und  $\lambda_n > 0$  derart, daß für alle  $v \in \mathcal{H}$  gilt

$$T(v) = \sum_{n \in N} \lambda_n \langle v_n, v \rangle w_n$$

Hinweis: Man gehe aus von einer Hilbertbasis aus Eigenvektoren des kompakten selbstadjungierten Operators  $T^*T$ .

**Satz 10.6.7.** *Ein metrischer Raum ist kompakt genau dann, wenn er vollständig und **total beschränkt** ist, als da heißt, er besitzt für jedes  $\varepsilon > 0$  eine endliche Überdeckung durch  $\varepsilon$ -Bälle.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, daß jeder kompakte metrische Raum vollständig ist. In der Tat besitzt ja unter unserer Annahme insbesondere auch jede Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge und muß damit schon selbst konvergent sein. Daß jeder kompakte metrische Raum total beschränkt sein muß, ist eh klar. Sei nun umgekehrt  $X$  vollständig und total beschränkt und sei  $v : \mathbb{N} \rightarrow X$  eine Folge in  $X$ . Wir überdecken  $X$  durch endlich viele Bälle mit Radius 1. In einem dieser Bälle müssen unendlich viele Folgenglieder liegen, und diese bilden eine Teilfolge  $v^1 = v \circ i_1$  für eine geeignete Injektion

$i_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Als nächstes überdecken wir  $X$  durch endlich viele Bälle vom Radius  $1/2$ . In einem dieser Bälle müssen unendlich viele Folgenglieder der Folge  $v^1$  liegen, und diese bilden eine Teilfolge  $v^2 = v^1 \circ i_2$  von  $v^1$ , für eine geeignete Injektion  $i_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Als nächstes überdecken wir  $X$  durch endlich viele Bälle vom Radius  $1/3$ , und indem wir immer so weitermachen erhalten wir eine Kette von Teilfolgen  $v^\nu$  derart, daß Folgenglieder von  $v^\nu$  höchstens den Abstand  $2/\nu$  voneinander haben. Die Folge  $y_\nu = v^\nu(\nu)$  ist dann eine Teilfolge unserer Folge  $v$ , die eine Cauchy-Folge ist und mithin konvergiert.  $\square$

**Definition 10.6.8.** Eine Menge  $\mathcal{F}$  von Abbildungen von einem topologischen Raum  $X$  in einen metrischen Raum heißt **gleichgradig stetig** genau dann, wenn es für jeden Punkt  $x \in X$  und jedes  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U(x, \varepsilon)$  von  $x$  gibt derart, daß gilt

$$y \in U(x, \varepsilon) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \forall f \in \mathcal{F}$$

**Satz 10.6.9 (Arzela-Ascoli).** *Im Raum aller stetigen Abbildungen eines kompakten Raums in einen kompakten metrischen Raum hat eine Teilmenge kompakten Abschluß genau dann, wenn sie gleichgradig stetig ist.*

*Beweis.* Unser Raum von stetigen Abbildungen ist nach II.7.5.30 schon mal vollständig in seiner Metrik der gleichmäßigen Konvergenz. Nach 10.6.7 reicht es also zu zeigen, daß eine Teilmenge darin total beschränkt ist genau dann, wenn sie gleichgradig stetig ist. Die Herleitung gleichgradigen Stetigkeit aus der totalen Beschränktheit überlassen wir dem Leser als Übung 10.6.10. Ist umgekehrt eine Menge  $\mathcal{F}$  von Abbildungen  $f : X \rightarrow M$  gleichgradig stetig, so finden wir ja für jedes  $\varepsilon > 0$  und jeden Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x, \varepsilon)$  von  $x$  derart, daß gilt

$$y \in U(x, \varepsilon) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \forall f \in \mathcal{F}$$

Endlich viele dieser  $U(x, \varepsilon)$  überdecken dann  $X$ , etwa die zu den Punkten  $x_1, \dots, x_r$ , und endlich viele  $\varepsilon$ -Bälle  $B_1, \dots, B_s$  überdecken  $M$ . Für jede Abbildung  $\sigma : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  wählen wir nun wenn möglich eine Funktion  $f_\sigma \in \mathcal{F}$  mit  $f_\sigma(x_i) \in B_{\sigma(i)} \forall i$  und behaupten, daß die Bälle um diese  $f_\sigma$  mit Radius  $4\varepsilon$  bereits ganz  $\mathcal{F}$  überdecken. In der Tat, zu jeder Funktion  $f \in \mathcal{F}$  gibt es ja mindestens ein  $\sigma$  mit  $f(x_i) \in B_{\sigma(i)} \forall i$ . Für solch ein  $\sigma$  existiert dann notwendig auch ein  $f_\sigma$  und es gilt offensichtlich  $d(f(x_i), f_\sigma(x_i)) \leq 2\varepsilon$  für alle  $i$ . Da jedes  $x$  in einem  $U(x_i, \varepsilon)$  liegt, folgt dann jedoch  $d(f(x), f_\sigma(x)) \leq 4\varepsilon$  für alle  $x \in X$ .  $\square$

*Übung 10.6.10.* Man zeige, daß eine Menge von stetigen Abbildungen von einem topologischen Raum in einen metrischen Raum, die total beschränkt ist, schon gleichgradig stetig sein muß.

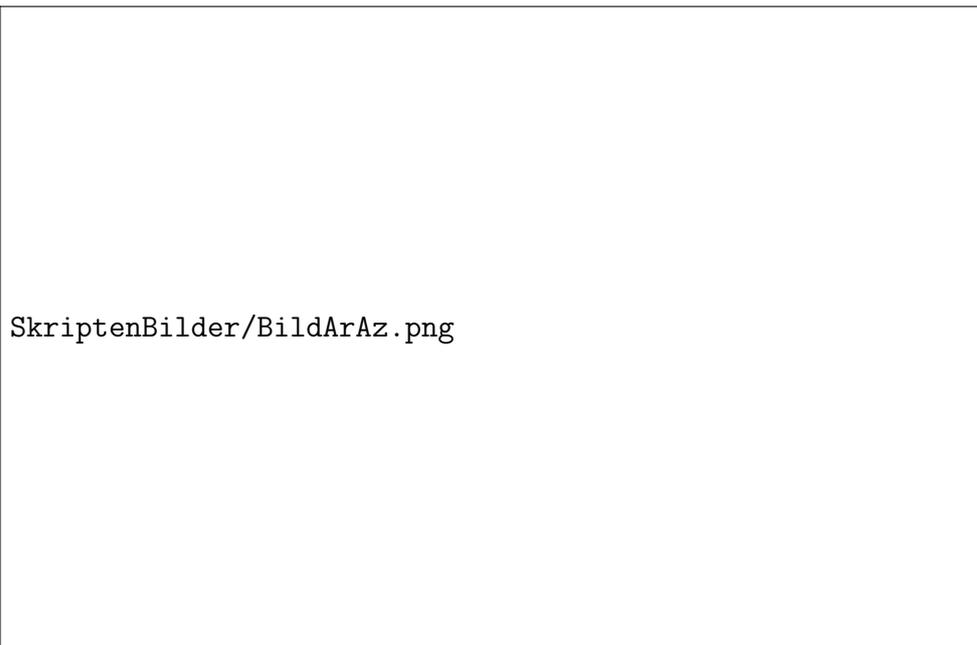


Illustration zum Beweis von Arzela-Ascoli. Die Bälle  $B_i$  sowie die Umgebungen  $U(x_i, \varepsilon)$  sind hier abgeschlossen zu verstehen, das ist im Beweis unerheblich. Im allgemeinen würden sich natürlich unsere Bälle in  $M$  und auch die Umgebungen in  $X$  sehr viel mehr überlappen, aber dann kann man im Bild kaum noch etwas sehen. In unserem Fall wäre das einzig mögliche  $\sigma$  zu  $f$  gegeben durch  $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$ . Alle Funktionen, insbesondere auch  $f$  und  $f_\sigma$ , können auf  $U(x_i, \varepsilon)$  höchstens um  $\varepsilon$  von ihrem Wert bei  $x_i$  abweichen. Ich hoffe, man kann nun sehen, daß  $f$  höchstens um  $4\varepsilon$  von jedem zu  $\sigma$  gewählten  $f_\sigma$  abweichen kann.

*Übung 10.6.11.* Die Kompaktheit des Ausgangsraums ist wesentlich im Satz von Arzela-Ascoli: So ist etwa für die “Dächle-Funktion”  $d(x) = \sup(1 - |x|, 0)$  auf  $\mathbb{R}$  die Menge ihrer verschobenen Kopien  $f_n(x) = d(x - n)$  zwar gleichgradig stetig, hat aber keinen kompakten Abschluß.

**Proposition 10.6.12 (Kompaktheit von Konvolutionsoperatoren).** Gegeben kompakte metrische Räume  $X, Y$  und ein nichtnegatives Borelmaß  $\mu$  auf  $X$  und eine stetige Funktion  $h \in \mathcal{C}(X \times Y)$  erhalten wir einen kompakten Operator  $K : L^2(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$  durch die Abbildungsvorschrift

$$(Kf)(y) = \int_X h(x, y)f(x)\mu(x)$$

*Beweis.* Jede beschränkte meßbare Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist quadratintegrierbar und die Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung liefert  $\|g\|_2 \leq \mu(X)\|g\|_\infty$ . Die Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung sagt uns also, dass der Integrand in unserer Proposition für alle  $y \in Y$  integrierbar ist, und liefert gleichzeitig die Abschätzung

$$|(Kf)(y)| \leq \|h\|_\infty \mu(X) \|f\|_2$$

Jetzt ist aber  $h$  auch gleichmäßig stetig, für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es also ein  $\delta > 0$  mit

$$d(y, z) < \delta \Rightarrow |h(x, y) - h(x, z)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Mit derselben Rechnung wie eben impliziert  $d(y, z) < \delta$  also

$$|(Kf)(y) - (Kf)(z)| \leq \varepsilon \mu(X) \|f\|_2$$

Insgesamt ist also die Menge  $\mathcal{F} = \{Kf \mid \|f\|_2 \leq 1\} \subset \mathcal{C}(Y)$  gleichgradig stetig und sie liegt sogar bereits in  $\mathcal{C}(Y, M)$  für  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|h\|_\infty \mu(X)\}$ . Nach Arzela-Ascoli hat dann  $\mathcal{F}$  kompakten Abschluss in  $\mathcal{C}(Y, M)$  oder gleichbedeutend in  $\mathcal{C}(Y)$  und unser Operator  $K$  ist kompakt.  $\square$

*Ergänzung 10.6.13.* Eine stetige lineare Abbildung von topologischen Vektorräumen heißt ein **Fredholm-Operator** genau dann, wenn ihr Bild abgeschlossen ist und ihr Kern und ihr Kokern endliche Dimension haben. Der **Index** eines Fredholm-Operators  $A : X \rightarrow Y$  ist die Zahl

$$\text{ind}(A) = \dim(\ker A) - \dim(\text{coker } A)$$

Ist  $A : X \rightarrow X$  ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, so zeigt der Spektralsatz, daß  $A - \lambda \text{id}$  Fredholm vom Index Null ist für alle  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ . Man kann das aber auch allgemeiner für einen beliebigen kompakten Operator auf einem Banachraum zeigen.

## 10.7 Uniforme Strukturen

10.7.1. Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit kann nicht sinnvoll von Abbildungen zwischen metrischen Räumen auf Abbildungen zwischen beliebigen topologischen Räumen erweitert werden. Eine derartige Erweiterung gelingt jedoch für Räume mit einer sogenannten “uniformen Struktur” und insbesondere für topologische Gruppen und Teilmengen derselben, wie wir im folgenden diskutieren werden.

**Definition 10.7.2.** Gegeben eine Menge  $X$  und eine Relation auf  $X$  alias eine Teilmenge  $A \subset X \times X$  setzen wir

$$\begin{aligned} A^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in A\} \\ A^2 &:= \{(x, z) \mid \exists y \in A \text{ mit } (x, y) \in A \text{ und } (y, z) \in A\} \end{aligned}$$

**Definition 10.7.3.** Eine **uniforme Struktur** auf einer Menge  $X$  ist ein Mengensystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times X)$  derart, daß gilt:

1.  $\mathcal{A}$  ist stabil unter endlichen Schnitten, und enthält demnach insbesondere auch ganz  $X \times X$ ;
2. Alle Mengen aus  $\mathcal{A}$  umfassen die Diagonale;
3. Mit einer Menge gehört auch jede ihrer Obermengen zu  $\mathcal{A}$ ;
4. Mit  $A$  gehört auch  $A^{-1}$  zu  $\mathcal{A}$ ;
5. Für jedes  $A \in \mathcal{A}$  gibt es ein  $B \in \mathcal{A}$  mit  $B^2 \subset A$ .

Eine Menge mit einer ausgezeichneten uniformen Struktur heißt ein **uniformer Raum**. Die Elemente von  $\mathcal{A}$  nennen wir **verallgemeinerte Abstände** oder auch kürzer nur **Abstände**.

*Beispiel 10.7.4.* Für jede Metrik  $d$  auf einer Menge  $X$  erhält man eine uniforme Struktur  $\mathcal{A}$  auf  $X$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \times X \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow (x, y) \in A)\}$$

Es gibt jedoch in dieser uniformen Struktur im allgemeinen sehr viel mehr Möglichkeiten für verallgemeinerte Abstände als im zugrundeliegenden metrischen Raum.

*Beispiel 10.7.5.* Jede Teilmenge eines uniformen Raums erbt eine uniforme Struktur in offensichtlicher Weise.

*Beispiel 10.7.6.* Auf jeder topologischen Gruppe  $G$  erhält man zwei uniforme Strukturen  $\mathcal{A}_l$  und  $\mathcal{A}_r$  durch die Vorschriften

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_l &:= \{A \subset G \times G \mid \exists V \subseteq G \text{ mit } e \in V \text{ und } (x^{-1}y \in V \Rightarrow (x, y) \in A)\} \\ \mathcal{A}_r &:= \{A \subset G \times G \mid \exists V \subseteq G \text{ mit } e \in V \text{ und } (xy^{-1} \in V \Rightarrow (x, y) \in A)\}\end{aligned}$$

*Beispiel 10.7.7.* Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  mit einem System von Untergruppen  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(G)$ , das stabil ist unter endlichen Schnitten, können wir auf  $G$  eine uniforme Struktur erklären durch die Vorschrift

$$\mathcal{A} := \{A \subset G \times G \mid \exists V \in \mathcal{U} \text{ mit } (x - y \in V \Rightarrow (x, y) \in A)\}$$

**Definition 10.7.8.** Jede uniforme Struktur auf einer Menge  $X$  definiert eine Topologie auf  $X$  wie folgt: Gegeben ein Punkt  $x \in X$  und ein Abstand  $A \in \mathcal{A}$  erklären wir den  **$A$ -Ball um  $x$**  als die Menge

$$B(x; A) = \{y \in X \mid (y, x) \in A\}$$

und nennen eine Menge “offen” genau dann, wenn sie mit einem Element stets auch einen ganzen Ball um besagtes Element enthält.

*Beispiel 10.7.9.* Unsere beiden uniformen Strukturen auf einer topologischen Gruppe aus 10.7.6 geben uns die vorgegebene Topologie zurück.

10.7.10. Bezüglich dieser Topologie auf einem uniformen Raum  $X$  besteht der offene Kern einer Menge  $M \subset X$  genau aus allen Punkten  $p \in M$ , um die es einen Ball  $B(p; A)$  gibt, der auch noch ganz in  $M$  enthalten ist. In der Tat ist diese Menge offen, denn für jedes  $A$  finden wir  $C$  mit  $C^2 \subset A$  und für jeden Punkt  $q \in B(p; C)$  ist damit auch  $B(q; C)$  noch ganz in  $M$  enthalten. Daß unser offener Kern in spe die größtmögliche in  $M$  enthaltene offene Menge ist, ist dann eh klar. Insbesondere ist jeder Ball um einen Punkt auch eine Umgebung von besagtem Punkt. Dahingegen müssen unsere Bälle keineswegs offen sein.

**Definition 10.7.11.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen uniformen Räumen  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  heißt **gleichmäßig stetig** genau dann, wenn es für jedes  $B \in \mathcal{B}$  ein  $A \in \mathcal{A}$  gibt mit  $(f \times f)(A) \subset B$  alias  $f(B(x; A)) \subset B(f(x); B)$  für alle  $x \in X$ .

**Satz 10.7.12 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta).** *Jede stetige Abbildung von einem kompakten uniformen Raum in einen weiteren uniformen Raum ist gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  unsere uniformen Räume und  $f : X \rightarrow Y$  unsere stetige Abbildung. Gegeben  $B \in \mathcal{B}$  wählen wir zunächst  $C \in \mathcal{B}$  mit  $C = C^{-1}$  und  $C^2 \subset B$ . Für jedes  $x \in X$  finden wir dann  $A_x \in \mathcal{A}$  mit  $f(B(x; A_x)) \subset B(f(x); C)$ . Weiter finden wir  $D_x \in \mathcal{A}$  mit  $D_x^2 \subset A_x$  und  $D_x = D_x^{-1}$ . Wegen der Kompaktheit von  $X$  gibt es nun eine endliche Teilmenge  $E \subset X$  derart, daß die Bälle  $B(x; D_x)$  für  $x \in E$  bereits ganz  $X$  überdecken. Jedes  $z \in X$  liegt also in einem  $B(x; D_x)$  für ein  $x \in E$  und damit gilt auch  $B(z; D_x) \subset B(x; D_x^2)$ . Nehmen wir nun  $A = \bigcap_{x \in E} D_x$ , so gibt es für jedes  $z \in X$  ein  $x \in E$  mit  $B(z; A) \subset B(x; D_x^2) \subset B(x; A_x)$ , und das landet unter  $f$  in  $B(f(x); C) \subset B(f(z); C^2) \subset B(f(z); B)$ .  $\square$

*Übung 10.7.13.* Jede stetige Funktion von einem uniformen Raum in einen weiteren uniformen Raum, die außerhalb von einem Kompaktum konstant ist, ist gleichmäßig stetig. Hinweis: Man arbeite zunächst auf dem besagten Kompaktum  $K$  und finde dort zu  $B$  ein  $A$ . Dann betrachte man  $F \in \mathcal{A}$  mit  $F = F^{-1}$  und  $F^2 \subset A$ . Trifft nun ein Ball  $B(z; F)$  das Kompaktum  $K$ , so ist er bereits in einem Ball  $B(y; A)$  mit  $y \in K$  enthalten.

## 10.8 Konvolution auf topologischen Gruppen

**Definition 10.8.1.** Unter einem Maß auf einem topologischen Raum verstehen wir, wenn nichts anderes explizit gesagt wird, stets ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra der topologisch meßbaren Teilmengen. Wollen wir das besonders betonen, so sprechen wir von einem **topologischen Maß**.

10.8.2. Bei der Diskussion von Maßen auf Produkten topologischer Räume steht man im allgemeinen vor dem Problem, daß nicht alle offenen Mengen des Produkts zur Produkt- $\sigma$ -Algebra gehören müssen. Ein topologischer Raum heißt nun seit IV.6.3.13 separabel genau dann, wenn er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Für separable Räume gehören offensichtlich alle offenen Mengen des Produkts zur Produkt- $\sigma$ -Algebra. Sind  $X$  und  $Y$  separable topologische Räume, so liefert das Bilden des Produktmaßes demnach mithilfe von V.2.4.7 eine bilineare Abbildung

$$M(X) \times M(Y) \rightarrow M(X \times Y)$$

**Definition 10.8.3.** Gegeben eine separable topologische Gruppe  $G$  erklären wir in Verallgemeinerung von V.2.5.2 die **Faltung** oder **Konvolution von Maßen**

$$\begin{aligned} M(G) \times M(G) &\rightarrow M(G) \\ (\mu, \nu) &\mapsto \mu * \nu \end{aligned}$$

dadurch, daß sie einem Paar von Maßen  $(\mu, \nu)$  das Bild  $\mu * \nu = m_*(\mu \boxtimes \nu)$  des Produktmaßes  $\mu \boxtimes \nu$  auf  $G \times G$  unter der Multiplikation  $m : G \times$

$G \rightarrow G$  zuordnet. Auf diese Weise wird  $M(G)$  ein Ring, und wir können den Gruppenring  $\mathbb{C}G$  darin als Teilring einbetten, indem wir jedem  $g \in G$  das Dirac-Maß bei  $g$  zuordnen. Die Assoziativität unserer Konvolution zeigt man wie in [V.2.5.6](#).

*Ergänzung 10.8.4.* Arbeitet man mit lokal kompakten Gruppen, so kann man die Forderung der Separabilität umgehen und die Theorie für beliebige lokal kompakte Gruppen entwickeln auf der Basis von sogenannten “Radon-Maßen”, d.h. geeigneten Linearformen auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Von unserem Standpunkt der topologischen Maße aus ist diese Allgemeinheit jedoch schlecht zugänglich, und für unsere Ziele ist sie auch nicht wichtig.

**Definition 10.8.5 (Faltung von Maßen mit stetigen Funktionen).** Ist  $G$  eine separable topologische Gruppe,  $\mu \in M(G)$  ein komplexes Maß auf  $G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und beschränkt, so erklären wir eine weitere stetige beschränkte Funktion  $\mu * f$  auf  $G$  durch die Vorschrift

$$(\mu * f)(x) = \int f(y^{-1}x) \mu\langle y \rangle$$

Es reicht hier, die Stetigkeit im Fall nichtnegativer endlicher Maße  $\mu$  zu zeigen, in dem sie aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt: Für Funktionen auf separablen topologischen Räumen impliziert nämlich nach [3.1.11](#) die Folgenstetigkeit bereits die Stetigkeit.

10.8.6. Die Beschränktheit von  $f$  ist hier wichtig, um die Konvergenz des Integrals zu sichern. Man kann Maße auch “von rechts” an Funktionen falten, dazu betrachte man  $(f * \mu)(x) = \int f(xy) \mu\langle y \rangle$ . Ich will das hier nicht weiter verfolgen, alle diese Konstruktionen werden sich später eh als Spezialfälle der “Wirkung von Maßen auf Darstellungen” erweisen.

*Beispiel 10.8.7.* Ist  $E \subset G$  endlich und  $\mu = \sum_{y \in E} a_y \delta_y$  eine Linearkombination von Diracmaßen mit komplexen Koeffizienten, so haben wir

$$\mu * f = \sum_{y \in E} a_y \gamma_y f$$

Ähnliches gilt allgemeiner für abzählbare Linearkombinationen von Diracmaßen mit einer absolut konvergenten Familie von Koeffizienten.

*Übung 10.8.8.* Sind  $G$  eine separable topologische Gruppe,  $\mu, \nu \in M(G)$  komplexe Maße auf  $G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und beschränkt, so gilt

$$\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$$

**Lemma 10.8.9 (Faltung von Maßen mit  $L^p$ -Funktionen).** Sei  $G$  eine separable topologische Gruppe,  $\mu \in M(G; [0, \infty))$  ein nichtnegatives endliches Maß auf  $G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $L^p$ -Funktion für  $1 \leq p < \infty$  in Bezug auf ein linksinvariantes nichtnegatives  $\sigma$ -endliches Maß  $\lambda$ . So ist die Funktion  $y \mapsto f(y^{-1}x)$  für alle  $x \in G$  außerhalb einer  $\lambda$ -Nullmenge integrierbar in Bezug auf  $\mu$ , die fast überall definierte Funktion  $\mu * f$  gegeben durch

$$(\mu * f)(x) = \int f(y^{-1}x) \mu\langle y \rangle$$

ist wieder eine  $L^p$ -Funktion und es gilt  $\|\mu * f\|_p \leq \mu(G)\|f\|_p$ .

10.8.10. Wir erklären dann die Faltung von komplexen Maßen mit  $L^p$ -Funktionen  $M(G) \times L^p(G; \lambda) \rightarrow L^p(G; \lambda)$ ,  $(\mu, f) \mapsto \mu * f$  durch lineare Fortsetzung. Das Lemma ist eine direkte Verallgemeinerung der entsprechenden Aussage [V.2.5.12](#) aus der Theorie der Fouriertransformationen und ihr Beweis ist eine Kopie, bei der ich nur  $V$  durch  $G$  und  $x - y$  durch  $y^{-1}x$  zu ersetzen hatte.

*Beweis.* Der Satz von Fubini zeigt, daß für jedes Haar-Maß  $\lambda$  das Produktmaß  $\lambda \boxtimes \mu$  unter der Scherung  $S : G \times G \rightarrow G \times G$ ,  $(x, y) \mapsto (y^{-1}x, y)$  invariant ist. Wir behandeln nun zunächst den Fall  $p = 1$ . Für  $f \in L^1(G; \lambda)$  bilden wir die Funktion  $(f \circ \text{pr}_1) : (x, y) \mapsto f(x)$  und nach Fubini gilt

$$(f \circ \text{pr}_1) \in L^1(G \times G; \lambda \boxtimes \mu)$$

Daraus folgt, daß auch  $(f \circ \text{pr}_1 \circ S) : (x, y) \mapsto f(y^{-1}x)$  integrierbar ist unter dem Produktmaß, und der Satz von Fubini zeigt dann die Behauptung. Im Fall von beliebigem  $p$  können wir unsere bis hier gewonnenen Erkenntnisse auf die Funktion  $|f|^p$  anwenden und erhalten so, daß  $y \mapsto |f(y^{-1}x)|^p$  für alle  $x$  außerhalb einer  $\lambda$ -Nullmenge nach  $\mu\langle y \rangle$  integriert werden kann. Bemerkung [V.1.3.7](#) aus dem Kontext der Hölderungleichung angewandt auf die Funktion  $h_x(y) = f(y^{-1}x)$  aus  $L^p(G; \mu)$  und die konstante Funktion 1 aus  $L^q(G; \mu)$  zeigt dann, daß für alle  $x$  außerhalb derselben  $\lambda$ -Nullmenge  $h_x$  nach  $\mu\langle y \rangle$  integrierbar ist. Bezeichnen wir dies Integral wie im Satz mit  $(\mu * f)(x)$ , so zeigt die Hölderungleichung [V.1.3.7](#) weiter

$$|(\mu * f)(x)| \leq \|h_x\|_1 \leq \|1\|_q \|h_x\|_p$$

für alle  $x$  außerhalb unserer  $\lambda$ -Nullmenge. Bilden wir auf beiden Seiten die  $p$ -te Potenz und integrieren über  $\lambda\langle x \rangle$ , so ergibt sich

$$\|\mu * f\|_p^p \leq \mu(G)^{p/q} \left( \int |f(y^{-1}x)|^p \lambda \boxtimes \mu \right) = \mu(G)^{1+p/q} \|f\|_p^p = \mu(G)^p \|f\|_p^p \quad \square$$

*Übung 10.8.11.* Gegeben ein linksinvariantes nichtnegatives  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  auf einer separablen topologischen Gruppe  $G$  und  $f \in L^1(G; \mu)$  zeige man für jedes weitere komplexe Maß  $\lambda \in M(G)$  die Gleichheit von Maßen  $(\lambda * f)\mu = \lambda * (f\mu)$ .

10.8.12 (**Faltung von integrierbaren Funktionen**). Gegeben eine kompakte Liegruppe  $G$  mit normiertem Haar-Maß  $\mu$  und integrierbare Funktionen  $h \in L^1(G; \mu)$ ,  $f \in L^p(G; \mu)$  für  $p \in [1, \infty)$  erklären wir ihre Faltung  $h * f \in L^p(G; \mu)$  als das Daranfalten im Sinne von 10.8.9 des Maßes  $h\mu$ , in Formeln  $h * f = (h\mu) * f$ . Ausgeschrieben gilt also fast überall

$$(h * f)(x) = \int h(y)f(y^{-1}x) \mu\langle y \rangle$$

und 10.8.9 liefert die Abschätzung  $\|h * f\|_p \leq \|h\|_1 \|f\|_p$ . In derselben Weise erhalten wir nach 10.8.5 auch für  $f \in \mathcal{C}(G)$  stetig eine stetige Funktion  $h * f = (h\mu) * f$  mitsamt der Abschätzung  $\|h * f\|_\infty \leq \|h\|_1 \|f\|_\infty$ . Die durch Multiplikation mit dem Maß  $\mu$  nach V.2.4.6 induzierte Einbettung  $L^1(G; \mu) \hookrightarrow M(G)$  ist nach 10.8.11 verträglich mit den jeweiligen Faltungen, in Formeln

$$(f * g)\mu = (f\mu) * (g\mu)$$

Insbesondere ist also auch die Faltung von integrierbaren Funktionen assoziativ.

*Übung 10.8.13.* Man zeige: Gegeben unitäre Charaktere  $\chi, \zeta$  auf der Kreislinie  $S^1$  gilt  $\chi * \chi = \chi$  und  $\chi * \zeta = 0$  falls  $\chi \neq \zeta$ . Was sind für  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  stetig die Eigenwerte und Eigenräume von  $(h*) : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ ?

## 10.9 Der Satz von Peter und Weyl

**Lemma 10.9.1.** Gegeben eine kompakte Liegruppe  $G$  definiert für jede stetige Funktion  $h \in \mathcal{C}(G)$  die Konvolution mit  $h$  einen kompakten Operator

$$(h*) : L^2(G) \rightarrow \mathcal{C}(G)$$

10.9.2. Sobald das Haar'sche Borelmaß 17.3.10 für allgemeine separable kompakte Hausdorff'sche Gruppen zur Verfügung steht, überträgt sich das Lemma und sein Beweis ohne Schwierigkeiten auf diese Allgemeinheit.

*Beweis.* Nach 10.7.12 ist  $h$  gleichmäßig stetig, es gibt also für alle  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $V = V_\varepsilon \subset G$  des neutralen Elements mit  $|h(zx) - h(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \in G$  und  $z \in V$ . Wir folgern mit Cauchy-Schwarz, daß

$$\begin{aligned} (h * f)(z^{-1}y) - (h * f)(y) &= \int_G h(x)f(x^{-1}z^{-1}y) - h(x)f(x^{-1}y) \mu\langle x \rangle \\ &= \int_G (h(zx) - h(x))f(x^{-1}y) \mu\langle x \rangle \end{aligned}$$

für  $z \in V$  betragsmäßig beschränkt ist durch  $\varepsilon \|f\|_2$ . Insbesondere ist für jedes feste  $h$  die Menge aller  $(h * f)$  mit  $\|f\|_2 \leq 1$  gleichgradig stetig. Andererseits sind auch alle Funktionswerte unserer Funktionen  $(h * f)$  mit  $\|f\|_2 \leq 1$  beschränkt durch  $\|h\|_\infty$ , ja sogar durch  $\|h\|_2$ , und das Lemma folgt damit aus dem Satz von Arzela-Azcoli 10.6.9.  $\square$

**Lemma 10.9.3.** *Sei  $G$  eine kompakte Liegruppe. Gegeben  $h, k \in \mathcal{C}(G)$  mit  $\overline{h(x)} = k(x^{-1})$  für alle  $x \in G$  sind  $(h^*)$  und  $(k^*)$  als Operatoren auf  $L^2(G)$  zueinander adjungiert.*

10.9.4. Sobald das Haar'sche Borelmaß 17.3.10 für allgemeine separable kompakte Hausdorff'sche Gruppen zur Verfügung steht, überträgt sich das Lemma und sein Beweis ohne Schwierigkeiten auf diese Allgemeinheit.

10.9.5. Die Operation durch Verschiebung von  $G$  auf  $L^2(G)$  geschieht durch unitäre Operatoren, so dass offensichtlich das Verschieben um  $x \in G$  adjungiert ist zum Verschieben um sein Inverses  $x^{-1} \in G$ . Unser Lemma und diese Aussage haben eine gemeinsame Verallgemeinerung im Rahmen der Faltung von Maßen mit Funktionen, deren Ausarbeitung dem Leser überlassen bleiben möge.

*Beweis.* Gegeben  $f, g \in L^2(G)$  gilt es zu zeigen  $\langle h * f, g \rangle = \langle f, k * g \rangle$  alias

$$\int \int \overline{h(xy^{-1})f(y)}g(x) = \int \int \overline{f(x)k(xy^{-1})}g(y)$$

wobei jeweils über  $x$  und  $y$  integriert werden soll. Um diese Identität einzusehen, müssen wir nur auf einer Seite unserer Gleichung  $x$  mit  $y$  vertauschen. Um unnötiges Nachdenken zu ersparen, scheint es mir am einfachsten, die Rechnung erst für  $f, g$  stetig zu machen und dann das Ergebnis auszudehnen.  $\square$

10.9.6. Gegeben eine kompakte Liegruppe  $G$  und  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $h(x) = \overline{h(x^{-1})}$  ist  $(h^*) : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$  nach 10.9.3 ein selbstadjungierter Operator und nach 10.9.1 auch ein kompakter Operator nach  $\mathcal{C}(G)$ . Seine Eigenräume sind offensichtlich stabil unter allen Rechtstranslationen und seine Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten bestehen aus stetigen darstellenden Funktionen: Stetig, da sie im Bild unseres Operators enthalten sind, darstellend, da die fraglichen Eigenräume sowohl endlichdimensional als auch unter Rechtstranslationen stabil sind.

**Satz 10.9.7 (Peter-Weyl).** *Auf einer kompakten Liegruppe kann jede stetige Funktion beliebig gut gleichmäßig durch darstellende Funktionen approximiert werden.*

*Beweis.* Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\varepsilon > 0$ . Nach 10.7.12 ist  $f$  gleichmäßig stetig, es gibt also eine Umgebung  $V$  des neutralen Elements mit  $|f(zx) - f(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in G$  und  $z \in V$ . Wählen wir nun eine stetige Funktion  $h : G \rightarrow [0, \infty)$  mit Träger in  $V$  und Integral  $\int h = 1$ , so folgt

$$|(h * f)(x) - f(x)| = \left| \int h(z^{-1})(f(zx) - f(x))\mu\langle z \rangle \right| \leq \varepsilon$$

für alle  $x \in G$  und damit

$$\|h * f - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

Nehmen wir nun zusätzlich  $h(z) = h(z^{-1})$  für alle  $z \in G$  an und betrachten die Eigenräume  $L^2(G)_\lambda$  von  $(h*)$ , so liegt nach dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren 10.6.4 ja deren Span  $\bigoplus L^2(G)_\lambda$  dicht in  $L^2(G)$  und wir finden folglich ein  $g$  aus diesem Span mit  $\|g - f\|_2 \leq \varepsilon/\|h\|_2$ . Daraus folgt dann aber

$$\|h * g - h * f\|_\infty \leq \varepsilon$$

und  $\|h * g - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$  und damit haben wir gewonnen, da  $h * g \in \bigoplus_{\lambda \neq 0} L^2(G)_\lambda$  nach unserer Vorbemerkung eine darstellende Funktion ist.  $\square$

**Satz 10.9.8.** *Jede kompakte Liegruppe besitzt eine endlichdimensionale treue Darstellung, ist also isomorph zu einer Matrix-Liegruppe.*

*Beweis.* Gegeben zwei verschiedene Elemente unserer Gruppe gibt es nach dem Satz von Peter-Weyl 10.9.7 stets eine stetige darstellende Funktion, die an diesen beiden Elementen verschiedene Werte annimmt. Für jedes vom neutralen Element verschiedene Gruppenelement gibt es folglich eine stetige endlichdimensionale Darstellung, auf der besagtes Element nicht als die Identität operiert. Ist nun  $G$  unsere kompakte Liegruppe und  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine stetige endlichdimensionale Darstellung, die nicht treu ist, in Formeln  $\ker \rho \neq 1$ , so finden wir ein Element  $x \neq 1$  in  $\ker \rho$  und eine stetige endlichdimensionale Darstellung  $W$ , auf der  $x$  nicht als Identität operiert. Die Summe  $V_1 = V \oplus W$  liefert dann eine Darstellung  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$  mit  $\ker \rho \not\supseteq \ker \rho_1$ . Besäße  $G$  keine treue endlichdimensionale Darstellung, so könnten wir auf diese Weise in  $G$  eine unendliche echt absteigende Folge kompakter Untergruppen konstruieren. Das ist jedoch absurd, da in jedem Schritt entweder die Dimension abnehmen muß oder, wenn diese gleich bleibt, die Zahl der Zusammenhangskomponenten.  $\square$

### 10.10 Faltungsoperation auf Darstellungen

10.10.1. Ist  $V$  eine endlichdimensionale komplexe stetige Darstellung einer kompakten Liegruppe  $G$ , so läßt sich die Operation des Gruppenrings  $\mathbb{C}G$  auf  $V$  erweitern zu einer Operation des Rings  $M(G)$  aller komplexen topologischen Maße durch die Vorschrift

$$\mu * v = \int gv \mu\langle g \rangle$$

Das Integral ist hier im Sinne von V.1.1.1 zu verstehen. Wir betrachten nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L^1(G) & & \\
 & & \cup & \searrow & \\
 \bigoplus_{L \in \text{irr } G} (L^* \otimes_{\mathbb{C}} L) & & L^2(G) & & M(G) \rightarrow \prod_{M \in \text{irr } G} \text{End}_{\mathbb{C}} M \\
 & \searrow & \cup & \cup & \\
 & & \mathcal{C}(G) & & \mathbb{C}G
 \end{array}$$

in dem die Morphismen zwischen den Spalten der Reihe nach zu verstehen sind als die Matrixkoeffizientenabbildung, die Multiplikation mit dem normierten Haar-Maß und durch die Operation von Maßen auf Darstellungen. Im Fall einer endlichen Gruppe sind alle vertikalen Inklusionen Gleichheiten und die Multiplikation mit dem Haar-Maß bedeutet schlicht die Multiplikation mit  $|G|^{-1}$  auf dem Gruppenring  $\mathcal{C}(G) = \mathbb{C}G$ . Nun bestimmen wir genauso wie in ?? die Verknüpfungen in der Horizontalen.

**Satz 10.10.2 (Fouriertransformation und Orthogonalitätsrelationen).**  
*Sei  $G$  eine kompakte Liegruppe.*

1. Sind  $L, M$  irreduzible stetige komplexe Darstellungen von  $G$ , so ist die Verknüpfung

$$L^* \otimes_{\mathbb{C}} L \rightarrow \mathcal{C}(G) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} M$$

der Matrixkoeffizientenabbildung mit der Operation durch Faltung die Nullabbildung im Fall  $M \not\cong L^*$ . Gibt es dahingegen einen Isomorphismus von Darstellungen  $i : M \xrightarrow{\sim} L^*$ , so fällt unsere Verknüpfung zusammen mit dem  $(\dim L)^{-1}$ -fachen der Verknüpfung

$$L^* \otimes_{\mathbb{C}} L \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}} L^* \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}} M$$

des kanonischen Isomorphismus mit der Abbildung  $f \mapsto i \circ f \circ i^{-1}$ .

2. Die Matrixkoeffizientenabbildung liefert eine Injektion mit dichtem Bild

$$\bigoplus_{L \in \text{irr } G} (L^* \otimes_{\mathbb{C}} L) \hookrightarrow L^2(G)$$

und die Bilder der Summanden sind paarweise orthogonale Teilräume. Gegeben ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt auf  $L$  ist das davon induzierte Skalarprodukt auf  $L^* \otimes_{\mathbb{C}} L$  das  $(\dim L)$ -fache des darauf durch Restriktion von  $L^2(G)$  induzierten Skalarprodukts.

10.10.3. Nach dem Lemma von Schur unterscheiden sich zwei Isomorphismen zwischen irreduziblen Darstellungen  $i, j : M \xrightarrow{\sim} L^*$  unter den gegebenen Voraussetzungen höchstens um einen Skalar,  $i = \lambda j$  mit  $\lambda \in k$ . Die zwischen ihren Endomorphismenringen induzierten Isomorphismen  $f \mapsto i \circ f \circ i^{-1}$  und  $f \mapsto j \circ f \circ j^{-1}$  sind also dieselben. Ähnlich überlegt man sich, daß das von einem  $G$ -invarianten Skalarprodukt auf  $L$  induzierte Skalarprodukt auf  $L^* \otimes L$  von dem zuvor gewählten Skalarprodukt gar nicht abhängt.

10.10.4. Der analoge Satz ?? für den Fall einer endlichen Gruppe  $G$  wirkt vielleicht auf den ersten Blick verschieden um einen Faktor  $|G|$ . Unsere Operation durch Faltung hier beinhaltet jedoch die Multiplikation einer stetigen Funktion mit dem normierten Haar-Maß und ist deshalb im Fall einer endlichen Gruppe  $G$  um eben diesen Faktor verschieden von der in ?? betrachteten Operation des Gruppenrings.

10.10.5. Da  $\mathcal{C}(G) \subset L^2(G) \subset L^1(G)$  stetige Einbettungen von normierten Vektorräumen sind und da die Operation stetige Abbildungen  $L^1(G) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} M$  liefert, muß nach den Orthonormalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten insbesondere die orthogonale Projektion auf den Teilraum  $L^* \otimes_{\mathbb{C}} L \subset L^2(G)$  gerade das  $(\dim L)$ -fache der Komposition der Faltungsoperation mit dem kanonischen Isomorphismus  $L^2(G) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} L^* \xrightarrow{\sim} L^* \otimes_{\mathbb{C}} L$  sein.

*Beweis.* 1. Unsere Matrixkoeffizientenabbildung  $V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow \mathcal{C}(G)$  ist ein Homomorphismus von Darstellungen für geeignete Operationen von  $G \times G$  auf beiden Seiten, genauer gilt offensichtlich  $c_{g\varphi, v} = g * c_{\varphi, v}$  und  $c_{\varphi, gv} = c_{\varphi, v} * g^{-1}$  für alle  $g \in G$ . Die Abbildungen aus unserem Satz sind demnach Morphismen zwischen Darstellungen von  $(G \times G)$ . Nach ?? sind diese Darstellungen sogar irreduzibel, so daß als einzige offene Frage bleibt, das Wievielfache des üblichen Isomorphismus im Fall  $M \cong L^*$  genommen werden muß. Es scheint mir besonders übersichtlich, das in physikalischer Notation ausrechnen. Gegeben ein komplexer Vektorraum  $L$  und ein Vektor  $v \in L$  notieren wir  $|v\rangle$  die lineare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow L$ ,  $\lambda \mapsto \lambda v$  und notieren Elemente  $\varphi \in L^*$  des Dualraums als  $\langle \varphi |$ . Für  $\varphi, \psi \in L^*$  und  $v, w \in L$  ergibt sich damit, wenn wir die  $\mathbb{C}$ -linearen

Abbildungen von  $\mathbb{C}$  in sich selber stillschweigend mit  $\mathbb{C}$  identifizieren, für die Operation eines Matrixkoeffizienten auf  $\psi \in L^*$  die Formel

$$(c_{\varphi, v} * \psi)(w) = \int \langle \varphi | g | v \rangle \langle \psi | g^{-1} | w \rangle = \langle \varphi | ( \int g | v \rangle \langle \psi | g^{-1} ) | w \rangle$$

wobei jeweils über  $g \in G$  nach dem normierten Haar-Maß zu integrieren ist und wir unsere Regel V.1.1.3 über das Vertauschen von vektorwertigen Integralen mit linearen Abbildungen verwendet haben. Nun ist das große Integral  $(\int)$  in der Mitte der letzten Formel offensichtlich ein  $G$ -Endomorphismus von  $L$ , d.h. für alle  $h \in G$  gilt  $h \circ (\int) \circ h^{-1} = (\int)$ . Da  $L$  irreduzibel ist, muß diese Summe folglich ein Vielfaches der Identität sein, es gilt also  $(\int) = d \operatorname{id}_L$  für ein  $d \in \mathbb{C}$ . Berechnen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Spur und benutzen wieder V.1.1.3, um sie unter das Integral zu ziehen, so ergibt sich in  $\mathbb{C}$  die Gleichung

$$d \cdot \dim L = \operatorname{tr}(|v\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|v\rangle$$

Durch Einsetzen von  $(\int) = d \operatorname{id}_L$  rechts in der vorigen Formelzeile erhalten wir schließlich die Behauptung in Gestalt der Formel

$$(c_{\varphi, v} * \psi)(w) = \int \langle \varphi | g | v \rangle \langle \psi | g^{-1} | w \rangle = \frac{1}{\dim L} \langle \psi | v \rangle \langle \varphi | w \rangle$$

2. Die Dichtheit des Bildes kennen wir bereits aus 10.9.7. Der Nachweis der behaupteten Orthogonalitäten scheint mir weitgehend aus dem Einführen geeigneter Notationen zu bestehen. Gegeben ein komplexer Vektorraum  $V$  und ein Vektor  $v \in V$  notieren wir manchmal  $\check{v} \in \bar{V}$  denselben Vektor aufgefaßt als Element des konjugierten Vektorraums, so daß also gilt  $\lambda \check{v} = (\bar{\lambda} v)^\check{}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Gegeben ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $L$  liefert die Vorschrift  $\check{v} \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  eine Identifikation  $\bar{L} \xrightarrow{\sim} L^*$ . Unser Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $L$  induziert sicher ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\bar{L}$  durch die Vorschrift

$$\langle \check{v}, \check{w} \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$$

und damit vermittelt unsere Identifikation ein Skalarprodukt auf  $L^*$  und damit auch Skalarprodukte auf den Tensorprodukten  $L^* \otimes L$  und  $\bar{L} \otimes L$ . Unter der kanonischen Abbildung  $\bar{L} \otimes L \xrightarrow{\sim} L^* \otimes L \rightarrow L^2(G)$  geht nun  $\check{v} \otimes w$  auf die Funktion  $g \mapsto \langle v, gw \rangle$  und  $\check{v}_1 \otimes w_1$  entsprechend auf die Funktion  $g \mapsto \langle v_1, gw_1 \rangle$ . Ist nun unser Skalarprodukt  $G$ -invariant, so können wir die erste Funktion umschreiben zu  $\langle v, gw \rangle = \langle g^{-1}v, w \rangle = \langle w, g^{-1}v \rangle$ . Das Skalarprodukt unserer beiden Funktionen in  $L^2(G)$  ergibt sich also mit elementaren

Umformungen und einer Anwendung der im Beweis von Teil 1 erzielten Formeln für die Herleitung der zweiten Gleichung zu

$$\begin{aligned} \int \overline{\langle v, gw \rangle} \langle v_1, gw_1 \rangle &= \int \langle v_1, gw_1 \rangle \langle w, g^{-1}v \rangle \\ &= \frac{1}{\dim L} \langle w, w_1 \rangle \langle v_1, v \rangle \\ &= \frac{1}{\dim L} \langle w, w_1 \rangle \langle \check{v}, \check{v}_1 \rangle \\ &= \frac{1}{\dim L} \langle \check{v} \otimes w, \check{v}_1 \otimes w_1 \rangle \end{aligned}$$

beziehungsweise zu Null falls  $v, w$  zu einer irreduziblen Darstellung gehören und  $v_1, w_1$  zu einer anderen dazu nicht isomorphen.  $\square$

*Übung 10.10.6.* Auf einer kompakten Liegruppe ist das Konvolutionsprodukt von Matrixkoeffizienten zu nichtisomorphen einfachen Darstellungen stets Null. Gegeben eine einfache unitäre Darstellung  $\rho : G \rightarrow U(d)$  gilt dagegen für die Konvolution der Matrixkoeffizienten  $\rho_{ij} * \rho_{kl} = d^{-1} \delta_{jk} \rho_{il}$ .

*Übung 10.10.7.* Eine von Null verschiedene Darstellung  $V$  einer kompakten Liegruppe, für die die Matrixkoeffizientenabbildung  $V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow \mathcal{C}(G)$  injektiv ist, muß irreduzibel sein.

*Übung 10.10.8.* Man zeige, daß für eine kompakte Liegruppe  $G$  die Fouriertransformation von Maßen nach 10.10.1 stets eine Injektion

$$M(G) \hookrightarrow \prod_{M \in \text{irr } G} \text{End}_{\mathbb{C}} M$$

liefert. Hinweis: Man zeige zunächst, daß das Integrieren gegen ein Maß eine Injektion von  $M(G)$  in den Dualraum des Raums der stetigen darstellenden Funktionen liefert, und orientiere sich dann am Beweis der analogen Aussage V.2.3.19 für die übliche Fouriertransformation.

*Übung 10.10.9.* Man beschreibe die Verknüpfung der Matrixkoeffizientenabbildung  $\bigoplus_{L \in \text{irr } G} (L^* \otimes_{\mathbb{C}} L) \rightarrow \mathcal{C}(G)$  mit dem Integral nach dem normierten Haar'schen Maß.

*Übung 10.10.10.* Man gebe die Einschränkungen der irreduziblen Charaktere der Drehgruppe auf einen maximalen Torus explizit an und prüfe an diesem Beispiel mithilfe der Weyl'schen Integrationsformel, daß sie ein Orthonormalsystem bilden.

10.10.11. Die Abbildung  $P : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathcal{C}(G)$  mit

$$(Pf)(x) = \int f(g^{-1}xg) dg$$

ist eine Projektion auf den Raum der Klassenfunktionen und ist stetig für die sup-Norm. Folglich liegen die Projektionen der Matrixkoeffizienten dicht im Raum der Klassenfunktionen. Die Projektion eines Matrixkoeffizienten einer irreduziblen Darstellung ist jedoch ein Vielfaches ihres Charakters. Dieselbe Formel definiert auch eine Projektion auf den Raum der  $L^p$ -Klassenfunktionen, die stetig ist für die  $L^p$ -Norm.

*Ergänzung 10.10.12.* Gegeben eine separable lokal kompakte Hausdorff'sche Gruppe  $G$  und ein kompakter homogener Raum  $X$  von  $G$  mit invariantem Maß kann man ähnlich zeigen, daß  $L^2(X)$  eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen von  $G$  mit endlichen Vielfachheiten ist. Wieder kommt das daher, daß die Konvolutionen mit reellen stetigen kompakt getragenen symmetrischen Funktionen auf  $G$  kompakte Operatoren liefern. Mehr dazu in [?]. Es sollte auch allgemeiner gelten: Für von endlichdimensionalen unitären Darstellungen unitär induzierte, von einer Untergruppe, die topologisch frei wirkt mit kompaktem Quotienten.

## 10.11 Charaktere

10.11.1. Wir erinnern daran, daß wir in ?? für jede endlichdimensionale Darstellung  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  ihren Charakter  $\chi_\rho : G \rightarrow k$  erklärt hatten durch die Formel

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$$

und daß wir so eine Klassenfunktion erhalten, also eine Funktion, die konstant ist auf Konjugationsklassen.

**Satz 10.11.2.** *Gegeben eine kompakte Liegruppe bilden die Charaktere der einfachen komplexen Darstellungen eine Hilbertbasis des Raums aller quadratintegrierbaren Klassenfunktionen auf unserer Gruppe.*

*Beweis.* Die Charaktere nichtisomorpher einfacher Darstellungen stehen aufeinander senkrecht, da das ja nach 10.10.2 bereits die Matrixkoeffizienten tun. Um zu zeigen, daß sie die Länge 1 haben, sei  $L$  eine irreduzible Darstellung mit invariantem Skalarprodukt,  $v_1, \dots, v_d$  eine Orthonormalbasis von  $L$  und  $v_1^*, \dots, v_d^*$  die duale Basis von  $L^*$ , die dann auch eine Orthonormalbasis ist für das induzierte Skalarprodukt. Dann ist  $\chi_L$  das Bild von  $v_1^* \otimes v_1 + \dots + v_d^* \otimes v_d$  unter der Matrixkoeffizientenabbildung, und da dieser Vektor die Länge  $\sqrt{d}$  hat, hat sein Bild die Länge 1. Unsere **irreduziblen Charaktere** bilden also ein Orthonormalsystem und es bleibt zu zeigen, daß sie im Raum der Klassenfunktionen einen dichten Teilraum aufspannen. Das folgt jedoch aus 10.10.11. □

**Proposition 10.11.3 (Charakter-Projektor-Formel).** *Bilden wir für eine endlichdimensionale einfache komplexe Darstellung  $L$  einer kompakten Liegruppe  $G$  den **Projektor**  $e_L \in M(G)$  als das Produkt des Charakters der kontragredienten Darstellung mit der Dimension und multiplizieren noch mit dem normalisiertem Haar'schen Maß, in Formeln*

$$e_L = \chi_{L^*}(\dim L)\mu$$

*so gilt  $e_L * e_L = e_L$  und  $e_L * v = v \forall v \in L$ , für jede nicht zu  $L$  isomorphe endlichdimensionale einfache Darstellung  $M$  gilt dahingegen  $e_L * e_M = 0$  und damit dann natürlich auch  $e_L * w = 0 \forall w \in M$ .*

*Beweis.* Diese Information ist bereits in 10.10.2 enthalten. □

**Satz 10.11.4.** *Wohin? Ist  $V$  eine unitäre Darstellung einer kompakten separablen topologischen Gruppe  $K$ , so sind die  $e_\lambda V$  für  $\lambda \in \hat{K}$  abgeschlossene  $K$ -invariante Teilräume, die paarweise aufeinander senkrecht stehen und deren Summe dicht liegt.*

## 10.12 Einfache Darstellungen

*Kommentar 1.* Hier spätestens 7.4!

**Satz 10.12.1 (Klassifikation der einfachen Darstellungen).** *Seien  $G \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus,  $\mathfrak{X}(T)$  dessen Charaktergitter und  $W = W(G, T)$  die Weylgruppe. So haben wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{endlichdimensionale} \\ \text{stetige komplexe einfache} \\ \text{Darstellungen von } G \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(T)/W$$

$$V \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{die Menge der} \\ \text{extremen Gewichte von } V \end{array} \right\}$$

*Der Begriff eines Gewichts ist hier im Sinne von 2.4.12 zu verstehen. Unter einem extremen Gewicht verstehen wir ein Gewicht, das unter einer (gleichbedeutend: jeder) positiv definiten  $W$ -invarianten  $\mathbb{Z}$ -wertigen Bilinearform auf dem Charaktergitter maximale Länge hat.*

10.12.2. Wir folgern diesen Satz aus der Weyl'schen Integrationsformel, die wir gleich im Anschluß formulieren aber erst zu Ende dieses Abschnitts beweisen.

**Satz 10.12.3.** *Seien  $G \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe und ein maximaler Torus. Erklären wir die Funktion  $j : T \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $j(t) = \det(\text{id} - \text{Ad}_{G/T}(t))$ , so gilt für alle stetigen Klassenfunktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  die Weyl'sche Integrationsformel*

$$\int_G f(g) \langle g \rangle_G = \int_T \frac{j(t)}{|W|} f(t) \langle t \rangle_T$$

10.12.4. Hier bezeichnet  $W$  die Weylgruppe,  $\text{Ad}_{G/T}(t)$  die von der adjungierten Darstellung auf dem Quotienten  $\text{Lie } G / \text{Lie } T$  induzierte Abbildung und  $\langle g \rangle_G$  bzw.  $\langle t \rangle_T$  deuten die Integration über das normalisierte Haarmaß der kompakten Gruppen  $G$  bzw.  $T$  nach den Variablen  $g$  bzw.  $t$  an. Der Beweis der Integrationsformel wird zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Das folgende Lemma soll die Integrationsformel motivieren.

**Lemma 10.12.5.** *Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe  $G$  und ein maximaler Torus  $T \subset G$  induziert die Einbettung unseres Torus einen Homöomorphismus zwischen dem Raum der Bahnen der Weylgruppe auf dem Torus und dem Raum der Konjugationsklassen in unserer Gruppe*

$$T/W \xrightarrow{\sim} \text{Conj}(G)$$

10.12.6. Besonders anschaulich scheint mir diese Aussage im Fall der Drehgruppe  $\text{SO}(3)$ . Das normierte Haar-Maß auf  $G$  hat natürlich ein Bildmaß auf dem Raum der Konjugationsklassen  $\text{Conj}(G)$  und dem entspricht notwendig ein nichtnegatives Borelmaß auf  $T/W$ . Man kann sich mit etwas Mühe auch formal klarmachen, daß dieses wie jedes Borelmaß auf  $T/W$  das direkte Bild eines wohldefinierten  $W$ -invarianten Borelmaßes auf  $T$  sein muß, und die Weyl'sche Integrationsformel 10.12.3 gibt dieses Borelmaß explizit an.

*Beweis.* Die Surjektivität unserer Abbildung folgt sofort aus 6.1.7. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir an, es gebe  $t, s \in T$  und  $g \in G$  mit  $gtg^{-1} = s$ . Dann sind  $T$  und  $gTg^{-1}$  zwei Tori in  $Z_G(s)$ , also gibt es  $h \in Z_G(s)$  mit  $T = hgTg^{-1}h^{-1}$  und wir haben  $y = hg \in N_G(T)$  gefunden mit  $yty^{-1} = s$ . Um schließlich zu zeigen, daß unsere Abbildung ein Homöomorphismus ist, müssen wir nach 3.3.10 nur nachweisen, daß die Konjugationsklassen in einer Hausdorff'schen kompakten Gruppe einen Hausdorffraum bilden. Das folgt jedoch aus 10.12.7.  $\square$

*Übung 10.12.7.* Ein topologischer Raum heißt "lokal kompakt" genau dann, wenn sich jede Umgebung eines beliebigen Punktes zu einer kompakten Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt. Man zeige: Operiert eine kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppe stetig auf einem lokal kompakten

Hausdorffraum, so ist auch der Bahnenraum Hausdorff. Hinweis: Man beginne mit einem Punkt aus einer von zwei Bahnen und wähle dazu eine kompakte Umgebung, die die andere Bahn nicht trifft. Die Aussage gilt im übrigen auch ohne die Annahme lokal kompakt, aber dann kenne ich keinen so direkten Beweis, vergleiche 3.10.8.

10.12.8. Wir schreiben die Gruppenstruktur des Charaktergitters  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$  additiv in der Hoffnung, daß das der Anschauung hilft. Fassen wir Elemente  $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$  dahingegen als konkrete Funktionen  $T \rightarrow \mathbb{C}$  auf, so schreiben wir  $e^\lambda$ , so daß also gilt  $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu} \neq e^\lambda + e^\mu$  für  $\lambda, \mu \in \mathfrak{X}(T)$ . Unsere Funktion  $j$  erhält in diesen Notationen die Gestalt

$$j = \prod_{\alpha \in R} (1 - e^\alpha) = \prod_{\alpha \in R} (e^\alpha - 1)$$

da ja die Zahl der Wurzeln gerade ist. Wir wählen nun ein System positiver Wurzeln  $R^+ \subset R$  im Sinne von 8.3.2 und betrachten ihre Halbsumme  $\rho$ . Im größeren Gruppenring  $\mathbb{C}[\langle R \rangle / 2]$  des halbierten Wurzelgitters behaupten wir nun, daß wir eine Art “Wurzel von  $j$ ” auch als Summe schreiben können:

**Lemma 10.12.9 (Weyl’sche Nennerformel).**

$$\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w\rho}$$

10.12.10. Multiplizieren wir die linke Seite dieser Gleichung mit  $e^\rho$ , so ergibt sich das Produkt der Terme zu positiven Wurzeln aus unserer Produktdarstellung der Funktion  $j$ . Die Funktion  $j$  selber ist also das Quadrat der Norm der linken und dann natürlich auch der rechten Seite unserer Gleichung.

*Hierfür brauche einige Info zu Spiegelungsgruppen! Ich habe aber 9 bereits gemacht, das sollte reichen.*

*Beweis.* Beide Seiten ändern ihr Vorzeichen unter Anwendung einer einfachen Spiegelung, für die linke folgt das aus 8.3.4. Die linke Seite setzt sich zusammen aus Summanden  $e^\lambda$  mit  $\lambda \in \rho - |R^+\rangle$ , wo wir mit  $|R^+\rangle$  das Monoid-Erzeugnis meinen. Es reicht also zu zeigen, daß von diesen  $\lambda$  nur  $\rho$  selbst im Inneren der dominanten Weylkammer liegt. Die fraglichen  $\lambda$  sind aber, soweit sie im Abschluß der dominanten Weylkammer liegen, allesamt kürzer als  $\rho$  für ein und jedes unter der Weylgruppe invariante Skalarprodukt, mit demselben Argument wie im Beweis von ???. Wegen 9.1.2 kommt also nur  $\lambda = \rho$  in Frage. *Besseres Argument von Peter: Für alle von Null verschiedenen  $\mu \in |R^+\rangle$  gibt es einfache Kowurzel, die darauf positiv ist, denn wo alle einfache Kowurzeln nichtpositiv sind ist die antidominante Weylkammer.*  $\square$

*Beweis von 10.12.1.* Wir betrachten die zum Fixpunkt  $(-\rho)$  verschobene sogenannte **dot-Operation** der Weylgruppe auf  $\mathfrak{X}(T)$  und bilden für  $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$  im Gruppenring des Gewichtgitters den Ausdruck

$$A(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w \cdot \lambda}$$

Hier steht  $A$  für “alternierend”. Multiplizieren wir beide Seiten der Weyl’schen Nennerformel mit  $e^{-\rho}$ , so ergibt sich die Identität

$$\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) = A(0)$$

Nun ist der Gruppenring des Charaktergitters  $\mathfrak{X}(T)$  ein Ring von Laurentpolynomen in endlich vielen Veränderlichen und damit insbesondere ein Integritätsbereich und sogar ein faktorieller Ring. Die  $1 - e^{-\alpha}$  für  $\alpha \in R^+$  sind darin paarweise teilerfremd, wie der Leser selbst prüfen mag. Die Identität

$$(1 - e^\alpha)(1 + e^\alpha + \dots + e^{n\alpha}) = (1 - e^{(n+1)\alpha})$$

zeigt dann, daß  $A(0)$  bereits im Gruppenring des Charaktergitters  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$  jedes  $A(\lambda)$  teilt, denn  $e^{w \cdot \lambda} - e^{s_\alpha w \cdot \lambda}$  ist stets ein Vielfaches von einem Ausdruck der Gestalt  $(1 - e^{(n+1)\alpha})$ . Wir können mithin für alle dominanten ganzen  $\lambda$  im Gruppenring des Charaktergitters den Quotienten

$$\chi_\lambda = A(\lambda)/A(0)$$

bilden. Er ist sogar invariant unter der Weylgruppe, denn rechnen wir in einem geeignet vergrößerten Gruppenring und erweitern unseren Bruch mit  $e^\rho$ , so werden Nenner und Zähler unter der Weylgruppe antiinvariant. Wir interpretieren unsere Quotienten nun als unter der Weylgruppe invariante Funktionen auf  $T$  und dehnen sie aus zu Klassenfunktionen  $\chi_\lambda$  auf  $G$ . So erhalten wir ein Orthonormalsystem von Klassenfunktionen, denn mit der Weyl’schen Integrationsformel 10.12.3 ergibt sich

$$\int_G \bar{\chi}_\lambda \chi_\nu = \int_T \frac{\overline{A(\lambda)} A(\nu)}{\overline{A(0)} A(0)} \frac{j}{|W|} = \frac{1}{|W|} \int_T \overline{A(\lambda)} A(\nu) = \delta_{\lambda\nu}$$

Andererseits hat  $A(\lambda)/A(0)$  Leitterm  $e^\lambda$  und daraus folgt, daß die Restriktionen der Funktionen  $\chi_\lambda$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis des Raums  $\mathcal{R}(T)^W$  der  $W$ -invarianten darstellenden Funktionen auf dem Torus  $T$  bilden, ja sogar eine  $\mathbb{Z}$ -Basis des Teilrings  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$ . Ist  $V$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $G$ , so liegt

ihr Charakter sicher in diesem Teilring und wir können ihn mithin darstellen als eine endliche Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\chi_V = \sum_{\nu} n_{\nu} \chi_{\nu}$$

Ist nun  $V$  irreduzibel, so gilt zusätzlich  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$  und daraus folgt sofort  $\chi_V = \chi_{\lambda}$  für ein wohlbestimmtes dominantes ganzes Gewicht  $\lambda$ , das dann natürlich das höchste Gewicht von  $V$  sein muß, und wir erhalten für  $V$  auch gleich die sogenannte **Weyl'sche Charakterformel**

$$\chi_V|_T = \frac{\sum (-1)^{l(w)} e^{w \cdot \lambda}}{\sum (-1)^{l(w)} e^{w \cdot 0}}$$

Das zeigt sofort, daß je zwei einfache Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht isomorph sind. Da weiter die Charaktere dicht liegen müssen im Raum der Klassenfunktionen, zeigt es auch, daß es zu jedem dominanten Gewicht eine einfache Darstellung gibt, die dies höchste Gewicht hat.  $\square$

*Beweis der Weyl'schen Integrationsformel.* Zunächst einmal wählen wir beliebige nirgends verschwindende differenzierbare Volumenformen  $\omega^{G/T}$ ,  $\omega^T$  und  $\omega^G$  auf  $G/T, T$  und  $G$ . Dann interessieren wir uns für die Abbildung

$$\begin{aligned} G/T \times T &\xrightarrow{\varphi} G \\ (gT, t) &\mapsto gtg^{-1} \end{aligned}$$

Sicher gibt es eine glatte Funktion  $c : G/T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi^* \omega^G = c \omega^{G/T} \wedge \omega^T$$

Falls  $\omega^G$  invariant ist unter Konjugation und  $\omega^{G/T}$  invariant unter Linkstranslation, was wir von jetzt an beides annehmen wollen, so hängt offensichtlich  $c$  nur von der zweiten Koordinate ab und kann geschrieben werden als  $c(gT, t) = c(t)$ . In der Tat haben wir ja  $\varphi \circ (h \cdot) = (\text{int } h) \circ \varphi$  für alle  $h \in G$ . Jetzt nehmen wir zusätzlich  $\omega^G$  und  $\omega^T$  auch noch invariant unter Linkstranslation an und betrachten für gegebenes  $t \in T$  die Verknüpfung

$$\begin{aligned} G \times T &\rightarrow G/T \times T &\rightarrow G/T \times T &\xrightarrow{\varphi} G &\rightarrow G \\ (g, \tau) &\mapsto (\bar{g}, \tau) &\mapsto (\bar{g}, t\tau) &\mapsto gt\tau g^{-1} &\mapsto t^{-1}gt\tau g^{-1} \\ T_e G \times T_e T &\rightarrow T_{\bar{e}} G/T \times T_e T &\rightarrow T_{\bar{e}} G/T \times T_t T &\rightarrow T_t G &\rightarrow T_e G \end{aligned}$$

Das Differential  $T_e G \times T_e T \rightarrow T_e G$  unserer Verknüpfung ist gegeben durch  $(X, Y) \mapsto \text{Ad}(t^{-1})X + Y - X$ . Wählen wir irgendeine lineare Linksinverse

$T_e G \rightarrow T_e T$  zur offensichtlichen Einbettung, so erhalten wir einen Isomorphismus  $T_e G \xrightarrow{\sim} T_e G/T \times T_e T$ . Indem wir notfalls  $\omega^G$  noch durch einen Skalar abändern, dürfen wir annehmen, daß sich unter diesem Isomorphismus  $\omega_e^G$  und  $\omega_e^{G/T} \wedge \omega_e^T$  entsprechen. Lassen wir nun bei unserer Sequenz von linearen Abbildungen oben in der untersten Zeile den ersten Pfeil vorne weg und hängen hinten den neu konstruierten Isomorphismus an, so ergibt sich eine Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} T_e G/T \times T_e T & \rightarrow & T_e G/T \times T_t T & \xrightarrow{d\varphi} & T_t G & \rightarrow & T_e G & \rightarrow & T_e G/T \times T_e T \\ c(t)\omega_e^{G/T} \wedge \omega_e^T & \leftarrow & c(t)\omega_e^{G/T} \wedge \omega_t^T & \leftarrow & \omega_t^G & \leftarrow & \omega_e^G & \leftarrow & \omega_e^{G/T} \wedge \omega_e^T \end{array}$$

und die Determinante der Verknüpfung ergibt sich aus der allgemeinen Regel für Determinanten von Block-Dreiecksmatrizen zu  $\det(\text{Ad}_{G/T}(t^{-1}) - \text{id})$ . Ohne die Wahl einer Spaltung von  $T_e T \hookrightarrow T_e G$  hätten wir hier auch mit dem kanonischen Isomorphismus  $\bigwedge^{\max}(V) = \bigwedge^{\max} U \otimes \bigwedge^{\max}(V/U)$  aus ?? arbeiten können. In jedem Fall zeigt unsere Sequenz für diese Wahlen von  $\omega^G, \omega^T$  und  $\omega^{G/T}$  die Formel  $c(t) = \det(\text{Ad}_{G/T}(t^{-1}) - \text{id})$ . Wählen wir nun Orientierungen auf  $G, T$  und  $G/T$ , so erhalten wir für  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig eine Kette von Gleichheiten “bis auf von  $f$  unabhängige multiplikative Konstanten” der Gestalt

$$\int_G f(g) \doteq \int_{\bar{G}} f\omega^G \doteq \int_{\bar{G}/\bar{T} \times \bar{T}} \varphi^*(f\omega^G)$$

wo der Punkt über den Gleichheitszeichen andeutet, daß unsere Gleichungen eben nur bis auf von  $f$  unabhängige von Null verschiedene multiplikative Konstanten gelten und die zweite Gleichung 10.12.11 verwendet: Daß der Abbildungsgrad von  $\varphi$  hier nicht Null sein kann, ergibt sich nachher von selbst aus unserer expliziten Berechnung des Integrals von  $j(t)$ . *Sollte ohne Abbildungsgrad machen. Elemente des Torus, die von keinem nichttrivialen Element der Weylgruppe festgehalten werden, entsprechen unter der Exponentialabbildung etwas, das kleiner ist als das Spiegelebenensystem einer geeigneteten affinen Spiegelungsgruppe. Also auf offener dichter Teilmenge des Torus  $|W|$ -fache Überlagerung...* Für  $f$  eine Klassenfunktion erhalten wir weiter

$$\doteq \int_{\bar{T}} c f \omega^T \doteq \int_T c(t) f(t) \doteq \int_T j(t) f(t)$$

Damit ist bereits gezeigt, daß die Weyl’sche Integrationsformel gilt bis auf eine von der zu integrierenden Funktion  $f$  unabhängige multiplikative Konstante  $K$ . Um diese Konstante  $K$  auch noch zu bestimmen, testen wir auf der konstanten Funktion  $f = 1$  und müssen damit nur noch  $\int_T j(t) = |W|$  zeigen. Dazu erinnern wir uns daran, daß wir ja bereits im Anschluß an die

Weyl'sche Nennerformel in 10.12.10 eine Identität diskutiert hatten, die auch  $j(t) = A(0)\overline{A(0)}$  geschrieben werden kann.  $\square$

10.12.11. Hier haben wir verwendet, daß für  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zusammenhängender kompakter orientierter Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension stets eine Konstante  $g$  existiert mit

$$\int_{\vec{M}} \varphi^* \omega = g \int_{\vec{N}} \omega$$

für alle stetigen Volumenformen  $\omega$  auf  $N$ . Diese Konstante  $g$  ist sogar stets eine ganze Zahl und heißt der "Abbildungsgrad von  $\varphi$ ".

10.12.12. *Frage: Sollte  $\lambda : \text{Lie } T \rightarrow \mathbb{C}$  oder  $\lambda \in (\text{Lie}_{\mathbb{C}} T)^*$  haben und  $e^\lambda : T \rightarrow \mathbb{C}^\times$  definieren durch die Kommutativität von*

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } T & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ T & \xrightarrow{e^\lambda} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

## 11 Allgemeine stetige Darstellungen

### 11.1 Topologische Algebra

**Definition 11.1.1.** Eine **topologische Gruppe** ist wie bereits in 3.7.1 erklärt eine Gruppe  $G$  mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung  $G \times G \rightarrow G$  und die Inversenabbildung  $G \rightarrow G$  stetig sind.

**Definition 11.1.2.** Ein **topologischer Ring** ist ein Ring  $k$  mit einer Topologie derart, daß die Addition und die Multiplikation als Abbildungen  $k \times k \rightarrow k$  stetig sind.

**Definition 11.1.3.** Ein **topologischer Modul** über einem topologischen Ring  $k$  ist ein  $k$ -Modul  $M$  mit einer Topologie derart, daß die Addition  $M \times M \rightarrow M$  und die Multiplikation  $k \times M \rightarrow M$  stetig sind. Die Kategorie aller topologischen  $k$ -Moduln notieren wir  $\text{Modto}_k$ .

**Definition 11.1.4.** Ein **topologischer Körper** ist wie in ?? ein Körper  $k$  mit einer Topologie derart, daß die Addition und die Multiplikation stetig sind als Abbildungen  $k \times k \rightarrow k$  sowie, für die auf  $k^\times$  induzierte Topologie, auch das Bilden des Inversen  $k^\times \rightarrow k^\times$ .

**Definition 11.1.5.** Ein topologischer Modul über einem topologischen Körper heißt ein **topologischer Vektorraum**. Die Kategorie aller komplexen topologischen Vektorräume bezeichnen wir abkürzend mit  $\text{Modto}_\mathbb{C} = \text{Modto}$ .

*Ergänzung 11.1.6.* Es scheint in der Funktionalanalysis üblich, von einem topologischen Vektorraum zusätzlich noch die Hausdorff-Eigenschaft zu fordern. Ich schließe mich dieser Konvention nicht an.

*Ergänzung 11.1.7.* In der vollen Allgemeinheit dieser Definitionen ist nicht klar und im allgemeinen auch nicht richtig, daß die Einheiten offene Teilmengen bilden.

11.1.8. Jeder topologische Modul und jeder topologische Ring sind topologische Gruppen für ihre additive Struktur, da in diesen Fällen ja das Bilden des Inversen gerade die Multiplikation mit  $-1$  ist. Gegeben ein topologischer Körper ist seine multiplikative Gruppe eine topologische Gruppe.

*Beispiele 11.1.9.* Die reellen und die komplexen Zahlen  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  werden mit ihrer natürlichen Topologie topologische Körper. Jeder normierte Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  wird mit seiner metrischen Topologie ein topologischer Vektorraum. In der Zahlentheorie interessiert man sich allgemeiner für lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Körper, die sogenannten "lokalen Körper". Wir diskutieren ihre Klassifikation in ?. Typische Beispiele sind neben  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  die  $p$ -adischen Zahlen  $\mathbb{Q}_p$ .

*Übung 11.1.10.* Der Quotient eines topologischen Vektorraums nach einem Teilraum ist mit seiner Quotiententopologie auch ein topologischer Vektorraum. Jeder Untervektorraum eines topologischen Vektorraums ist mit der induzierten Topologie auch ein topologischer Vektorraum. Hinweis: 3.8.2.

*Übung 11.1.11.* Gegeben ein Untervektorraum eines topologischen Vektorraums ist auch sein Abschluß ein Untervektorraum. Allgemeiner mag man dasselbe auch für jeden Untermodul eines topologischen Moduls zeigen. Hinweis: 3.7.7.

**Satz 11.1.12 (Endlichdimensionale reelle Hausdorff'sche Vektorräume).**

1. *Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ist die natürliche Topologie die einzige Topologie, die ihn zu einem Hausdorff'schen reellen topologischen Vektorraum macht.*
2. *Jeder endlichdimensionale Teilraum eines reellen Hausdorff'schen topologischen Vektorraums ist abgeschlossen.*

*Beweis.* Durch Induktion über die Dimension  $n$  des fraglichen Vektorraums. Der nulldimensionale Fall  $n = 0$  bietet keine Schwierigkeiten. Bezeichne  $(1)_n$  bzw.  $(2)_n$  die erste bzw. zweite Aussage des vorhergehenden Satzes im Fall eines  $n$ -dimensionalen Raums. Wir zeigen im folgenden erst  $(1)_1$  und dann  $(1)_n \Rightarrow (2)_n \Rightarrow (1)_{n+1}$  für alle  $n \geq 1$ .

$(1)_1$  : Dafür reicht es zu zeigen, daß jede Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $\mathbb{R}$ , die diesen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum zu einem topologischen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum macht, entweder die Klumpentopologie oder die natürliche Topologie  $\mathcal{S}$  von  $\mathbb{R}$  ist. Wir nehmen an, daß  $\mathcal{T}$  nicht die Klumpentopologie ist, und zeigen zunächst, daß der Ursprung eine beschränkte  $\mathcal{T}$ -Umgebung besitzt. Gegeben eine  $\mathcal{T}$ -Umgebung  $U$  des Ursprungs gibt es nämlich eine  $\mathcal{T}$ -Umgebung  $V$  des Ursprungs und  $\varepsilon > 0$  mit  $(-\varepsilon, \varepsilon)V \subset U$ . Wäre nun  $V$  unbeschränkt, so wäre  $(-\varepsilon, \varepsilon)V = \mathbb{R}$  und es folgte  $U = \mathbb{R}$  und unsere Topologie  $\mathcal{T}$  wäre doch die Klumpentopologie gewesen. Nun ist die Identität  $(\mathbb{R}, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$  stetig, da für jeden reellen topologischen Vektorraum  $V$  nach Annahme die Multiplikation mit Skalaren  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$  stetig ist, es gilt also  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ . Da aber  $\mathcal{T}$  eine beschränkte offene Umgebung des Ursprungs enthält und stabil ist unter Streckungen und Verschiebungen, folgt sofort  $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ .

$(1)_n \Rightarrow (2)_n$  : Sei also  $H$  ein Hausdorff'scher topologischer Vektorraum und  $V \subset H$  ein  $n$ -dimensionaler Teilraum. Nach  $(1)_n$  kommt die induzierte Topologie auf  $V$  von einer Norm her, und es gibt folglich eine offene Umgebung



Illustration zum Beweis von [11.1.12](#). In der Papierebene  $H$  sind ein endlichdimensionaler Teilraum  $V$  und der Nullpunkt zu sehen, mit gestricheltem Rand eine offene Umgebung  $U$  des Ursprungs in  $H$ , deren Schnitt mit  $V$  beschränkt ist, sowie ein geeignet gestrecktes  $U$ , das unseren vorgegebenen Punkt  $p$  aus dem Komplement von  $V$  enthält. Entfernen wir aus diesem größeren  $U$  das Kompaktum  $\overline{V \cap U}$ , hier ein kompaktes Geradensegment, so erhalten wir eine Umgebung von  $p$ , die  $V$  vermeidet.

$U \Subset H$  des Ursprungs, deren Schnitt mit  $V$  beschränkt ist. Gegeben  $p \in H \setminus V$  erhalten wir nach geeigneter Streckung von  $U$  auch eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , deren Schnitt mit  $V$  beschränkt ist. Dann ist jedoch der Abschluß in  $V$  von  $U \cap V$  kompakt und damit auch abgeschlossen in  $H$  und  $U \setminus \overline{U \cap V}$  ist die gesuchte offene Umgebung von  $p$ , die  $V$  nicht trifft.

$(2)_n \Rightarrow (1)_{n+1}$  : Gegeben ein Hausdorff'scher topologischer Vektorraum  $H$  der Dimension  $\dim_{\mathbb{R}} H = n + 1$  ist nach  $(2)_n$  jede lineare Hyperebene  $V$  abgeschlossen, der Quotientenraum  $H/V$  ist nach 3.8.10 also Hausdorff und trägt damit nach  $(1)_1$  die natürliche Topologie. Dann sind aber alle Linearformen auf  $H$  stetig. Jede Basis von  $H$  liefert nun einen stetigen Isomorphismus  $\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\sim} H$ , da nach Annahme die Multiplikation mit Skalaren  $\mathbb{R} \times H \rightarrow H$  stetig und die Addition stetig sind, und nach dem eben Bewiesenen ist die Umkehrung dieses Isomorphismus auch stetig.  $\square$

**Definition 11.1.13.** Eine **stetige Darstellung** einer topologischen Gruppe  $G$  über einem topologischen Körper  $k$  ist ein topologischer  $k$ -Vektorraum  $V$  mit einer linearen  $G$ -Operation derart, daß die durch die Operation gegebene Abbildung  $G \times V \rightarrow V$  stetig ist. Erwähnen wir den topologischen Körper  $k$  nicht explizit, so meinen wir in der Regel  $k = \mathbb{C}$ . Eine stetige Darstellung heißt **irreduzibel** oder präziser **topologisch irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und jeder abgeschlossene invariante Teilraum entweder die ganze Darstellung oder der Nullraum ist. Eine **unitäre Darstellung** einer topologischen Gruppe  $G$  ist eine stetige Darstellung durch unitäre Automorphismen eines Hilbertraums.

*Beispiele* 11.1.14. Offensichtliche Beispiele für stetige Darstellungen sind die Operation von  $GL(n; \mathbb{C})$  auf  $V = \mathbb{C}^n$  und ihre Restriktionen auf Untergruppen  $G \subset GL(n; \mathbb{C})$ . Besonders interessant ist die Frage nach einer Klassifikation der irreduziblen unitären Darstellungen einer gegebenen topologischen Gruppe. Die Klassifikation der irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppe  $SL(2; \mathbb{R})$  diskutieren wir in ??.

*Übung* 11.1.15. Man zeige, daß alle einfachen unitären Darstellungen von  $\mathbb{R}$  eindimensional sind. Hinweis: Man verwende den Satz V.3.1.4 über die lokale Struktur unitärer Darstellungen von  $\mathbb{R}$  und die Beschreibung IV.6.2.18 von Borelmaßen auf  $\mathbb{R}$  durch ihre Verteilungsfunktion.

## 11.2 Kompakt-offene Topologie

**Definition 11.2.1.** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  bezeichne  $\text{Top}(X, Y)$  die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Gegeben Teilmengen

$K \subset X$  und  $U \subset Y$  bezeichne

$$\mathcal{O}(K, U) \subset \text{Top}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(K) \subset U$ . Die auf  $\text{Top}(X, Y)$  von den Mengen  $\mathcal{O}(K, U)$  für  $K \subset X$  kompakt und  $U \subseteq Y$  offen erzeugte Topologie heißt die **kompakt-offene Topologie**. Wir denken uns Räume stetiger Abbildungen im Zweifelsfall stets mit dieser Topologie versehen und verwenden für den so entstehenden topologischen Raum die beiden Notation

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

*Ergänzung 11.2.2.* Manche Quellen verwenden die Notation  $Y^X = \mathcal{C}(X, Y)$ , aber ich will versuchen, diese exponentielle Schreibweise zu vermeiden. Sie hat den Nachteil, daß in anderen Quellen auch  $Y^X$  die Menge aller Abbildungen  $\text{Ens}(X, Y)$  abkürzt.

*Übung 11.2.3.* Ist  $X$  kompakt, so stimmt die kompakt-offene Topologie auf  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  überein mit der von der Supremumsnorm induzierten Topologie.

*Übung 11.2.4.* Gegeben topologische Räume  $X, Y$  ist diejenige Abbildung  $Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  stetig, die jedem Punkt  $y \in Y$  die Abbildung zuordnet, die ganz  $X$  auf diesen einen Punkt  $y$  wirft.

*Übung 11.2.5.* Gegeben stetige Abbildungen  $f : X' \rightarrow X$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  sind auch die induzierten Abbildungen  $(\circ f) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X', Y)$  und  $(g \circ) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')$  stetig.

**Lemma 11.2.6.** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine Familie topologischer Räume  $(Y_i)$  liefert die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}\left(X, \prod_i Y_i\right) \simeq \prod_i \mathcal{C}(X, Y_i)$$

11.2.7. In kategorieller Sprache ausgedrückt besagt unser Lemma, daß der Funktor  $\mathcal{C}(X, \ ) : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$  verträglich ist mit Produkten.

*Beweis.* Per definitionem ist unsere Abbildung eine Bijektion von Mengen. Für  $K \subset X$  kompakt und  $j$  einen beliebigen aber festen Index und  $U_j \subseteq Y_j$  offen induziert sie sicher eine Bijektion zwischen den Teilmengen  $\mathcal{O}(K, U_j \times \prod_{i \neq j} Y_i)$  und  $\mathcal{O}(K, U_j) \times \prod_{i \neq j} \mathcal{C}(X, Y_i)$ . Diese Mengen erzeugen aber die jeweiligen Topologien.  $\square$

*Ergänzung 11.2.8.* Ist  $X$  lokal kompakt im Sinne von 11.2.10, so folgt Lemma 11.2.6 auch mit der Adjunktion 11.2.13 unmittelbar aus der Erkenntnis ??, daß ein rechtsadjungierter Funktor stets mit Limites vertauscht.

*Übung 11.2.9.* Die stetigen Abbildungen von einem topologischen Raum in eine topologische Gruppe bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompakt-offenen Topologie selbst eine topologische Gruppe. Die stetigen Abbildungen von einem topologischen Raum in einen topologischen Vektorraum bilden unter der punktweisen Verknüpfung und mit der kompakt-offenen Topologie selbst einen topologischen Vektorraum. Hinweis: 11.2.6.

**Definition 11.2.10.** Sei  $(E)$  eine Eigenschaft topologischer Räume. Sagen wir, ein topologischer Raum  $X$  sei **lokal**  $(E)$ , so meinen wir, daß sich jede Umgebung eines beliebigen Punktes von  $X$  verkleinern läßt zu einer Umgebung desselben Punktes, die als topologischer Raum mit der induzierten Topologie die Eigenschaft  $(E)$  hat.

*Ergänzung 11.2.11.* In der Terminologie von Bourbaki wird von einem lokal kompakten Raum zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft gefordert. Ich schließe mich dieser Terminologie nicht an, da sie im Widerspruch steht zu der eben vereinbarten allgemeinen Bedeutung des Adjektivs "lokal". Im Deutschen bringt man diesen Unterschied zumindest in der alten Rechtschreibung dadurch zum Ausdruck, daß man "lokalkompakt" zusammenschreibt, wenn die Hausdorff-Bedingung mit gemeint ist.

11.2.12. Ein kompakter Hausdorff-Raum ist nach 3.3.15 stets lokal kompakt. Stärker zeigen wir: Besitzt in einem Hausdorffraum jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so ist unser Raum bereits lokal kompakt im Sinne von 11.2.10. In der Tat, seien  $X \supset K \supset U \ni p$  unser Raum, ein Kompaktum  $K$ , eine in  $X$  offene Menge  $U$  und ein Punkt. Es gilt, eine offene Umgebung  $B$  von  $p$  zu finden mit  $\bar{B} \subset U$ . Aber nach 3.3.14 finden wir ja  $A, B \Subset K$  disjunkt mit  $K \setminus U \subset A$  und  $p \in B$ . Aus  $B \Subset K$  und  $B \subset U$  folgt erst  $B \Subset U$  und dann  $B \Subset X$ . Der Abschluß  $\bar{B}$  von  $B$  ist derselbe in  $K$  und in  $X$  und trifft  $A$  nicht, woraus folgt  $\bar{B} \subset U$  wie gewünscht.

**Satz 11.2.13 (Adjungierter zu Produkt mit lokal kompaktem Raum).**

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Ist  $Y$  lokal kompakt, so induziert die offensichtliche Bijektion  $\text{Ens}(X \times Y, Z) \rightarrow \text{Ens}(X, \text{Ens}(Y, Z))$  eine Bijektion

$$\text{Top}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

*Beweis.* Sei  $f : X \times Y \rightarrow Z$  stetig und  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  die induzierte Abbildung. Wir zeigen zunächst noch ohne irgendwelche Bedingungen an  $Y$ , daß  $\tilde{f}$  auch stetig ist. Es reicht, diese Stetigkeit an jeder Stelle  $x \in X$  zu zeigen. Gegeben  $K \subset Y$  kompakt und  $U \Subset Z$  offen mit  $\tilde{f}(x) \in \mathcal{O}(K, U)$  gilt es, eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  zu finden mit  $\tilde{f}(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$ . Nun besagt unsere Bedingung gerade  $f(x \times K) \subset U$ , und wir finden natürlich

offene Quadrate  $V_i \times W_i \subseteq X \times Y$  mit  $x \in V_i$  und  $x \times K \subset \bigcup_i V_i \times W_i$  und  $f(V_i \times W_i) \subset U$  für alle  $i$ . Wegen der Kompaktheit von  $K$  finden wir sogar eine endliche Familie offener Quadrate mit dieser Eigenschaft, indiziert sagen wir durch  $1 \leq i \leq n$ . Jetzt nehmen wir  $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$  und haben  $f(V \times K) \subset U$  alias  $\tilde{f}(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$  wie gewünscht. Sei nun umgekehrt  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  stetig und sei  $f : X \times Y \rightarrow Z$  die induzierte Abbildung. Es gilt zu zeigen, daß  $f$  stetig ist an jeder Stelle  $(x, y) \in X \times Y$ . Sei also  $U \subseteq Z$  eine offene Umgebung von  $f(x, y) = (\tilde{f}(x))(y)$ . Nach Annahme ist  $\tilde{f}(x) : Y \rightarrow Z$  stetig und  $Y$  lokal kompakt, folglich gibt es eine kompakte Umgebung  $K$  von  $y$  mit  $(\tilde{f}(x))(K) \subset U$ , also  $\tilde{f}(x) \in \mathcal{O}(K, U)$ . Da  $\tilde{f}$  stetig ist, gibt es dann auch eine Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $\tilde{f}(V) \subset \mathcal{O}(K, U)$ , also mit  $f(V \times K) \subset U$  und damit ist  $V \times K$  die gesuchte Umgebung von  $(x, y)$ , die unter  $f$  nach  $U$  abgebildet wird.  $\square$

11.2.14. In der Terminologie der Kategorientheorie ?? bedeutet dieser Satz übrigens, daß für lokal kompaktes  $Y$  der Funktor  $\mathcal{C}(Y, \_)$  rechtsadjungiert ist zum Funktor  $\_ \times Y$ . Ich folgere in Korollar 11.2.22, daß diese Abbildung im Satz unter der zusätzlichen Annahme, daß auch  $X$  lokal kompakt ist, sogar einen Homöomorphismus  $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$  induziert.

*Ergänzende Übung* 11.2.15. Man zeige, daß für jeden lokal kompakten Raum  $Y$  die Verknüpfung  $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$  stetig ist. Hinweis: Gegeben  $Q \subset V \subseteq Y$  eine kompakte Teilmenge in einer offenen Teilmenge gibt es unter unseren Annahmen stets eine kompakte Teilmenge  $R \subset Y$  und eine offene Teilmenge  $W \subseteq Y$  mit  $Q \subset W \subset R \subset V$ .

*Ergänzung* 11.2.16. Ein Raum  $Y$  heißt **kompakt erzeugt** genau dann, wenn er Hausdorff ist und wenn die offensichtliche Abbildung  $\bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K \rightarrow Y$  final ist, für  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$  das System aller kompakten Teilräume, vergleiche etwa [?]. Man kann zeigen, daß es in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume Produkte gibt, die allerdings nicht mit den üblichen Produkten in der Kategorie aller topologischen Räume übereinstimmen, daß das Darankreuzen einen Rechtsadjungierten hat, der allerdings nicht mit dem Raum der stetigen Abbildungen und seiner kompakt-offenen Topologie übereinstimmt, und daß in dieser Begrifflichkeit auch eine Variante des Exponentialgesetzes gilt.

*Ergänzung* 11.2.17. In anderer Richtung nennt man einen topologischen Raum  $Y$  **exponentiell** genau dann, wenn  $\mathcal{C}(Y, Z)$  für jeden Raum  $Y$  so mit einer Topologie versehen werden kann, daß die natürliche Abbildung eine Adjunktion mit  $\_ \times Y$  liefert. Neben den lokal kompakten Räumen gibt es zwar noch weitere exponentielle Räume, aber ich habe noch nie ein Beispiel gesehen, das so natürlich wäre, daß es mich von der Sinnhaftigkeit dieser Begriffsbildung hätte überzeugen können.

**Korollar 11.2.18.** *Ist  $Y$  lokal kompakt und  $Z$  ein beliebiger topologischer Raum, so ist das Auswerten  $\mathcal{C}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$  stetig.*

*Beweis.* Das Auswerten entspricht unter der Bijektion im Satz der Identität auf  $\mathcal{C}(Y, Z) = X$  rechts.  $\square$

**Lemma 11.2.19 (Reguläre Darstellungen).** *Ist  $G$  eine lokal kompakte Gruppe, so erhalten wir durch die Formeln  $(\acute{x}f)(z) := f(x^{-1}z)$  bzw.  $(\grave{x}f)(z) := f(zx)$  zwei stetige Operationen von  $G$  auf dem Raum  $\mathcal{C}(G)$  aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf unserer Gruppe.*

11.2.20. Diese Darstellungen heißen die **stetige linksreguläre** bzw. die **stetige rechtsreguläre Darstellung** von  $G$ . Eine weitreichende Verallgemeinerung dieses Lemmas werden wir als Satz 11.3.13 beweisen.

*Beweis.* Es gilt, die Stetigkeit zum Beispiel der Rechtsoperation  $\mathcal{C}(G) \times G \rightarrow \mathcal{C}(G)$ ,  $(f, x) \mapsto \acute{x}f$  zu zeigen. Diese ist jedoch mit 11.2.13 gleichbedeutend zu Stetigkeit der Abbildung  $\mathcal{C}(G) \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(f, x, z) \mapsto f(xz)$ , und die Stetigkeit dieser Abbildung folgt aus der Stetigkeit der Verknüpfung in unserer Gruppe und der Stetigkeit der Auswertungsabbildung 11.2.18.  $\square$

*Übung 11.2.21.* Man zeige, daß für jede lokal kompakte Gruppe  $G$  die rechts- und die linksreguläre Darstellung zusammen eine stetige Darstellung von  $G \times G$  auf  $\mathcal{C}(G)$  definieren.

**Korollar 11.2.22.** *Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Sind  $X$  und  $Y$  lokal kompakt, so induziert unsere Bijektion  $\text{Ens}(X \times Y, Z) \rightarrow \text{Ens}(X, \text{Ens}(Y, Z))$  einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

*Ergänzung 11.2.23.* In der alternativen Schreibweise liest sich das  $Z^{X \times Y} \xrightarrow{\sim} (Z^Y)^X$  und wird manchmal das **Exponentialgesetz** genannt. Ich benutze diese Aussage im Weiteren nicht und zeige sie nur der Vollständigkeit halber.

*Beweis.* Die Stetigkeit dieser Abbildung ist nach 11.2.13 gleichbedeutend erst zur Stetigkeit der induzierten Abbildung  $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  und durch erneutes Anwenden von 11.2.13 auch zur Stetigkeit der induzierten Abbildung  $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \times Y \rightarrow Z$ . Diese Stetigkeit folgt jedoch aus 11.2.18, da mit  $X$  und  $Y$  auch  $X \times Y$  lokal kompakt ist. Also ist die im Korollar betrachtete Bijektion stetig und es bleibt nur noch, die Stetigkeit ihrer Umkehrabbildung zu zeigen. Die Stetigkeit dieser Umkehrabbildung ist jedoch nach 11.2.13 gleichbedeutend zur Stetigkeit der induzierten Abbildung  $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \rightarrow Z$ , die hinwiederum stetig sein muß als Verknüpfung von zwei nach 11.2.13 stetigen Abbildungen  $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ .  $\square$

*Übung 11.2.24.* Ist  $X$  ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und  $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{C}$  partiell differenzierbar nach der ersten Variablen mit stetiger partieller Ableitung  $\partial_1 F : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{C}$ , so gilt für die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(X)$ ,  $t \mapsto F(t, \cdot)$  im topologischen Vektorraum  $\mathcal{C}(X)$  die Identität

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = (\partial_1 F)(0, \cdot)$$

### 11.3 Beispiele für stetige Darstellungen

11.3.1. Wir verallgemeinern nun die Argumentation aus 11.2.19, um zum Beispiel auch den Raum aller stetigen Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit mit einer glatten Operation einer Lie-Gruppe als stetige Darstellung erkennen zu können, und beginnen mit weiteren Notationen und Resultaten aus der Topologie.

**Definition 11.3.2.** Sei  $k$  ein topologischer Körper und  $X$  ein topologischer Raum.

1. Ein “topologisches Möchtegern- $k$ -Bündel”  $E = (E, p) = (p : E \rightarrow X)$  auf  $X$  besteht aus einem topologischen Raum  $E$ , dem **Totalraum**, einer stetigen Abbildung  $p : E \rightarrow X$ , der **Projektion**, sowie einer  $k$ -Vektorraumstruktur auf jeder Faser  $E_x = p^{-1}(x)$ .
2. Ein **Morphismus** von einem topologischen Möchtegern- $k$ -Bündel  $(E, p)$  in ein weiteres  $(F, q)$  ist eine stetige Abbildung  $h : E \rightarrow F$  mit  $qh = p$  derart, daß für alle  $x \in X$  die auf den Fasern induzierte Abbildung  $h : E_x \rightarrow F_x$  eine  $k$ -lineare Abbildung ist.
3. Gegeben ein topologischer  $k$ -Vektorraum  $V$  heißt der Raum  $X \times V$  mit seiner offensichtlichen Struktur als topologisches Möchtegern- $k$ -Bündel das **konstante topologische  $k$ -Bündel auf  $X$  mit Faser  $V$** .
4. Ein **topologisches  $k$ -Bündel auf  $X$**  ist ein Möchtegern- $k$ -Bündel  $(E, p)$ , das im folgenden Sinne “lokal trivial” ist: Es gibt einen topologischen  $k$ -Vektorraum  $V$ , so daß jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt mit der Eigenschaft, daß das induzierte Möchtegern- $k$ -Bündel  $(p : p^{-1}(U) \rightarrow U)$  auf  $U$  isomorph ist zum konstanten  $k$ -Bündel  $U \times V$  auf  $U$  mit Faser  $V$ . Wir reden in diesem Fall auch genauer von einem **topologischen  $k$ -Bündel auf  $X$  mit Faser  $V$** .

*Ergänzung 11.3.3.* Außerhalb der Darstellungstheorie versteht man meist unter einem topologischen Vektorraumbündel ein Bündel im obigen Sinne mit Faser  $k^n$ .

*Beispiel 11.3.4.* Jedes glatte Vektorraumbündel auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist in natürlicher Weise auch ein topologisches Vektorraumbündel.

**Definition 11.3.5.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  heißt ein Paar  $Y = (Y, p)$  bestehend aus einem topologischen Raum  $Y$  und einer stetigen Abbildung  $p : Y \rightarrow X$  auch ein **topologischer Raum über  $X$** . Gegeben ein weiterer topologischer Raum  $Z = (Z, q)$  über  $X$  versteht man unter einer **stetigen Abbildung über  $X$**  eine stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow Z$  mit  $qf = p$ . Wir notieren die Menge aller dieser Abbildungen  $\text{Top}_X(Y, Z)$ , und wenn wir sie mit der von  $\mathcal{C}(Y, Z)$  induzierten Topologie als topologischen Raum auffassen, notieren wir diesen Raum

$$\mathcal{C}_X(Y, Z)$$

**Definition 11.3.6.** Gegeben topologische Räume  $Y = (Y, p)$  und  $Z = (Z, q)$  über einem topologischen Raum  $X$  definiert man ihr “faserweises Produkt” oder **Faserprodukt**, einen weiteren topologischen Raum  $Y \times_X Z$  über  $X$ , durch die Vorschrift

$$Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid p(y) = q(z)\}$$

versehen mit der von der Produkttopologie induzierten Topologie und der offensichtlichen Abbildung nach  $X$ .

11.3.7. Ein quadratisches Diagramm von topologischen Räumen der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{c} & Y \\ d \downarrow & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

heißt **kartesisch** genau dann, wenn es gegeben ein topologischer Raum  $T$  und stetige Abbildungen  $f : T \rightarrow Y$  und  $g : T \rightarrow Z$  mit  $af = bg$  genau eine Abbildung  $h : T \rightarrow W$  gibt mit  $ch = f$  und  $dh = g$ . Man sieht sofort, daß das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

mit den entsprechenden Projektionen als unbeschrifteten Pfeilen kartesisch ist. Die universelle Eigenschaft liefert umgekehrt auch für jedes kartesische Quadrat wie oben eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung  $i : Y \times_X Z \xrightarrow{\sim} W$  mit  $ci = \text{pr}_Y$  und  $di = \text{pr}_Z$ , und die üblichen Argumente zeigen, daß sie ein Homöomorphismus sein muß.

**Lemma 11.3.8.** *Gegeben ein topologische Räume  $T, Y, Z$  über einem topologischen Raum  $X$  liefert die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}_X(T, Y \times_X Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_X(T, Y) \times \mathcal{C}_X(T, Z)$$

*Ergänzung 11.3.9.* Gegeben ein topologischer Raum  $T$  über einem topologischen Raum  $X$  ist in kategorieller Terminologie ausgedrückt sogar stärker der Funktor  $\mathcal{C}_X(T, \_) : \text{Top}_X \rightarrow \text{Top}$  verträglich mit beliebigen Produkten.

*Beweis.* Das folgt sofort aus 11.2.6 durch Übergang zu geeigneten Teilräumen mit ihren induzierten Topologien.  $\square$

**Proposition 11.3.10.** *Gegeben ein topologisches Vektorraumbündel  $E \rightarrow X$  ist der Raum der Schnitte  $\mathcal{S}(E) := \mathcal{C}_X(X, E)$  mit der punktweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren ein topologischer Vektorraum.*

11.3.11. Hier fassen wir implizit  $X$  mit seiner durch die Identität gegebenen Struktur als topologischen Raum über sich selber auf.

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Lemma 11.3.8 und der Tatsache, daß im Fall topologischer Vektorbündel auf  $X$  die Addition offensichtlich eine stetige Abbildung  $E \times_X E \rightarrow E$  über  $X$  liefert.  $\square$

**Definition 11.3.12.** Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Unter einem  **$G$ -äquivarianten topologischen Vektorraum über  $X$**  verstehen wir einen topologischen Vektorraum  $E$  über  $X$  mitsamt einer stetigen Operation von  $G$  auf  $E$  derart, daß die Projektion  $E \rightarrow X$  eine  $G$ -äquivariante Abbildung ist und die Operation von  $G$  auf jeder Faser linear.

**Satz 11.3.13 (Darstellungen auf Schnitten äquivarianter Bündel).** *Gegeben  $G \curvearrowright X$  eine stetige Operation einer topologischen Gruppe auf einem lokal kompakten Raum  $X$  und  $G \curvearrowright E$  ein  $G$ -äquivarianter topologischer Vektorraum über  $X$  ist der Raum  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(E)$  der stetigen Schnitte in  $E$  eine stetige Darstellung von  $G$  unter der Operation durch Konjugation.*

*Beweis.* Die Operation wird in Formeln gegeben durch  $(gs)(x) := g(s(g^{-1}x))$  für alle  $g \in G$ ,  $x \in X$  und alle stetigen Schnitte  $s : X \rightarrow E$ . Das einzige Problem ist der Nachweis der Stetigkeit von  $G \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  oder, nach 11.2.13 gleichbedeutend, der Stetigkeit der Abbildung  $G \times \mathcal{S} \times X \rightarrow E$ ,  $(g, s, x) \mapsto g(s(g^{-1}x))$ . Diese folgt jedoch aus der Stetigkeit des Auswertens  $\mathcal{S} \times X \rightarrow E$  mit Standardargumenten.  $\square$

*Beispiel 11.3.14.* Operiert eine Lie-Gruppe  $G$  differenzierbar auf einer Mannigfaltigkeit  $X$ , so ist das Tangentialbündel  $E = TX$  ein  $G$ -äquivarianter topologischer Vektorraum über  $X$  in natürlicher Weise. Dasselbe gilt für das Kotangentialbündel, seine äußeren Potenzen etc. Folglich bilden die stetigen Vektorfelder auf  $X$  in natürlicher Weise eine stetige Darstellung von  $G$ , und dasselbe gilt für die stetigen Kovektorfelder, allgemeineren Differentialformen etc.

## 11.4 Stetige Induktion

**Definition 11.4.1.** Gegeben ein stetiger Homomorphismus  $\varphi : H \rightarrow G$  von einer topologischen Gruppe  $H$  in eine lokal kompakte topologische Gruppe  $G$  und eine stetige Darstellung von  $H$  in einem topologischen Vektorraum  $V$  definieren wir eine stetige Darstellung von  $G$ , die **induzierte Darstellung** oder genauer **stetig induzierte Darstellung**, indem wir den Vektorraum

$$\text{ind}_H^G V = \{f : G \rightarrow V \text{ stetig} \mid f(\varphi(h)x) = hf(x) \forall h \in H, x \in G\}$$

aller  $H$ -äquivarianten stetigen Abbildungen von  $G$  nach  $V$  mit der von  $\mathcal{C}(G, V)$  induzierten Topologie versehen und darauf eine  $G$ -Operation erklären durch die Vorschrift  $(gf)(x) = f(xg) \forall g, x \in G$ .

11.4.2. Diese induzierte Darstellung hängt von  $\varphi$  ab, auch wenn das in der Notation nicht zum Ausdruck kommt. Die Stetigkeit der Operation folgt aus der Stetigkeit der Operation auf  $\mathcal{C}(G, V)$ , die man wie in 11.2.19 zeigt und auch formal folgern kann, indem man 11.3.13 auf das Bündel  $G \times V$  anwendet.

*Beispiel 11.4.3.* Wenn nichts anderes explizit gesagt ist, soll stets implizit gemeint sein, daß  $\varphi : H \rightarrow G$  die Einbettung einer Untergruppe ist. Die induzierte Darstellung der trivialen eindimensionalen Darstellung  $\mathbb{C}$  einer Untergruppe  $H \subset G$  einer lokal kompakten Gruppe etwa ist isomorph zur offensichtlichen Darstellung auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Quotienten  $H \backslash G$ , genauer liefert das Zurückholen von Funktionen unter der Projektion  $G \rightarrow H \backslash G$  einen Isomorphismus von stetigen Darstellungen

$$\mathcal{C}(H \backslash G) \xrightarrow{\sim} \text{ind}_H^G \mathbb{C}$$

Für einen allgemeinen stetigen Gruppenhomomorphismus  $\varphi : H \rightarrow G$  erhalten wir analog einen Isomorphismus  $\mathcal{C}(\varphi(H) \backslash G) \xrightarrow{\sim} \text{ind}_H^G \mathbb{C}$ .

**Definition 11.4.4.** Gegeben eine topologische Gruppe  $G$  und stetige Darstellungen  $V, W$  bezeichnen wir mit

$$\text{Modto}^G(V, W)$$

die Menge aller **Verflechtungsoperatoren**, als da heißt aller stetigen linearen  $G$ -äquivalenten Abbildungen  $V \rightarrow W$ . Die Menge aller stetigen linearen Abbildungen zwischen zwei topologischen Vektorräumen notieren wir  $\text{Modto}(V, W)$ .

11.4.5. ist  $\varphi : H \rightarrow G$  ein stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen, so können wir zu jeder stetigen Darstellung  $W$  von  $G$  die **restringierte Darstellung**

$$\text{res}_G^H W$$

von  $H$  bilden, indem wir denselben topologischen Vektorraum  $\text{res}_G^H W = W$  betrachten und darauf  $h \in H$  operieren lassen durch die Vorschrift  $hw = \varphi(h)w$ . Wir notieren restringierte Darstellungen auch oft mit demselben Symbol wie die ursprüngliche Darstellung.

**Satz 11.4.6 (Frobenius-Reziprozität).** *Seien  $H \rightarrow G$  ein stetiger Homomorphismus von topologischen Gruppen,  $V$  eine stetige Darstellung von  $H$  und  $W$  eine stetige Darstellung von  $G$ . Ist  $G$  lokal kompakt, so liefert das Dahinterschalten des Auswertens beim neutralen Element  $a : \text{ind}_H^G V \rightarrow V$  eine Bijektion*

$$(a\circ) : \text{Modto}^G(W, \text{ind}_H^G V) \xrightarrow{\sim} \text{Modto}^H(\text{res}_G^H W, V)$$

*Beweis.* Wir zeigen den Satz zunächst in dem Fall, daß  $H$  die triviale einelementige Gruppe ist. In dem Fall gilt es zu zeigen, daß gegeben  $W$  eine stetige Darstellung einer lokal kompakten topologischen Gruppe  $G$  und  $V$  ein topologischer Vektorraum das Verknüpfen mit dem Auswerten am neutralen Element  $a : \mathcal{C}(G, V) \rightarrow V$  eine Bijektion

$$(a\circ) : \text{Modto}^G(W, \mathcal{C}(G, V)) \xrightarrow{\sim} \text{Modto}(W, V)$$

liefert. Dazu reicht es, wenn wir zeigen, daß wir eine inverse Abbildung erhalten durch die Vorschrift  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ , wo für  $\varphi : W \rightarrow V$  stetig linear  $\tilde{\varphi} : W \rightarrow \mathcal{C}(G, V)$  definiert sei durch  $(\tilde{\varphi}(w))(x) = \varphi(xw)$ . Offensichtlich ist  $\tilde{\varphi}$  dann  $G$ -äquivalent, und die Stetigkeit von  $\tilde{\varphi}$  folgt mit 11.2.13 aus der Stetigkeit von  $W \times G \rightarrow V$ ,  $(w, x) \mapsto \varphi(xw)$ . Die Identität  $a \circ \tilde{\varphi} = \varphi$  ist dann offensichtlich und liefert die Surjektivität von  $(a\circ)$ . Die Injektivität von  $(a\circ)$  ist leicht einzusehen. Damit haben wir die Frobenius-Reziprozität in diesem Spezialfall gezeigt. Im Fall einer beliebigen Gruppe  $H$  gehen wir aus vom eben im Fall der trivialen Gruppe hergeleiteten Isomorphismus. Unter diesem Isomorphismus entspricht nun die Operation von  $H$  durch Konjugation auf  $\text{Modto}(W, V)$  der Operation von  $H$  auf  $\text{Modto}^G(W, \mathcal{C}(G, V))$  durch  $\tilde{\varphi} \mapsto \tilde{h} \circ \tilde{\varphi}$ , für  $\tilde{h} : \mathcal{C}(G, V) \rightarrow \mathcal{C}(G, V)$  die Konjugation  $(\tilde{h}f)(g) = hf(h^{-1}g)$ . Gehen wir zu den Fixpunkten von  $H$  über, so erhalten wir demnach den gewünschten Isomorphismus der Frobenius-Reziprozität.  $\square$

11.4.7 (**Stetige Induktion als adjungierter Funktor**). Salopp gesprochen wird “die induzierte Darstellung durch die Frobenius-Reziprozität schon im Wesentlichen eindeutig festgelegt”. Um das präzise zu formulieren, beachten wir zunächst, daß das Auswerten beim neutralen Element offensichtlich eine stetige  $H$ -äquivalente Abbildung  $a : \text{res}_G^H \text{ind}_H^G V \rightarrow V$  ist. Ist andererseits  $(I, c)$  ein Paar bestehend aus einer stetigen Darstellung  $I$  von  $G$  und einem Verflechtungsoperator  $c : \text{res}_G^H I \rightarrow V$  mit der Eigenschaft, daß analog wie im Satz die Verknüpfung mit  $c$  für jede stetige Darstellung  $W$  von  $G$  ein Bijektion

$$\text{Modto}^G(W, I) \xrightarrow{\sim} \text{Modto}^H(\text{res}_G^H W, V)$$

liefert, so gibt es im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I & \dashrightarrow & \text{ind}_H^G V & \dashrightarrow & I \\ & \searrow c & \downarrow a & \swarrow c & \\ & & V & & \end{array}$$

eindeutig bestimmte  $G$ -Verflechtungsoperatoren  $\dashrightarrow$ , die die jeweiligen Dreiecke zum Kommutieren bringen, und diese sind zueinander invers wegen der Eindeutigkeit der  $G$ -Verflechtungsoperatoren  $\dashrightarrow$ , die die beiden folgenden Dreiecke zum Kommutieren bringen:

$$\begin{array}{ccc} I & \dashrightarrow & I \\ & \searrow c & \swarrow c \\ & & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{ind}_H^G V & \dashrightarrow & \text{ind}_H^G V \\ & \searrow a & \swarrow a \\ & & V \end{array}$$

In der Sprache der Kategorientheorie kann das Induzieren  $\text{ind}_H^G : \text{Modto}^H \rightarrow \text{Modto}^G$  beschrieben werden als der “linksadjungierte Funktor” zum Restriktieren  $\text{res}_G^H : \text{Modto}^G \rightarrow \text{Modto}^H$ , wo wir mit  $\text{Modto}^G$  die Kategorie aller stetigen Darstellungen einer topologischen Gruppe  $G$  in topologischen Vektorräumen bezeichnen.

11.4.8. Als erste Eigenschaft bemerken wir die **Transitivität der Induktion**: Sind  $K \rightarrow H \rightarrow G$  stetige Homomorphismen lokal kompakter Gruppen und ist  $V$  eine stetige Darstellung von  $K$ , so können wir einen Isomorphismus

$$\text{ind}_H^G(\text{ind}_K^H V) \xrightarrow{\sim} \text{ind}_K^G V$$

erklären als den eindeutig bestimmten  $G$ -Verflechtungsoperator, der mit den offensichtlichen Abbildungen beider Seiten nach  $V$  verträglich ist. In der Tat sieht man leicht ein, daß hier die linke Seite auch ein mögliches  $(I, c)$  im Sinne der vorhergehenden Bemerkung ist. In der Sprache der Kategorientheorie

kann diese Erkenntnis dahingehend formuliert werden, daß wir eine natürliche Äquivalenz von Funktoren  $\text{ind}_H^G \circ \text{ind}_K^H \cong \text{ind}_K^G$  per Adjunktion aus der Gleichheit  $\text{res}_H^K \circ \text{res}_G^H = \text{res}_G^K$  der Restriktionsfunktoren erhalten.

**Definition 11.4.9.** Gegeben ein kommutatives Diagramm von lokal kompakten Gruppen

$$\begin{array}{ccc} M & \rightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \rightarrow & G \end{array}$$

und eine stetige Darstellung  $V$  von  $H$  liefert das Zurückholen von Abbildungen  $G \rightarrow V$  zu Abbildungen  $K \rightarrow V$  eine Verflechtungsoperator über  $K$ , den **Basiswechsel**

$$\text{ind}_H^G V \rightarrow \text{ind}_M^K V$$

11.4.10. Man kann diesen kanonischen Morphismus auch mittels der Frobenius-Reziprozitäten schreiben als das Bild der Identität auf  $\text{ind}_H^G V$  unter den natürlichen Identifikationen und Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Modto}^G(\text{ind}_H^G V, \text{ind}_H^G V) &= \text{Modto}^H(\text{ind}_H^G V, V) \\ &\downarrow \\ \text{Modto}^K(\text{ind}_H^G V, \text{ind}_M^K V) &= \text{Modto}^M(\text{ind}_H^G V, V) \end{aligned}$$

**Definition 11.4.11.** Gegeben eine Gruppe  $G$  und eine  $G$ -Rechtsmenge  $X$  und eine  $G$ -Menge  $Y$  notiert man

$$X \times_G Y$$

den Bahnenraum zu  $X \times Y$  unter der Operation  $g(x, y) = (xg^{-1}, gy)$  alias den Raum der Äquivalenzklassen in  $X \times Y$  unter der Äquivalenzrelation  $(xg, y) \sim (x, gy) \forall g \in G$ . Man nennt  $X \times_G Y$  das **balancierte Produkt** von  $X$  und  $Y$  über  $G$ . Sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume, so verstehen wir  $X \times_G Y$  mit der Quotiententopologie.

**Satz 11.4.12 (Eigenschaften der Induktion).** Sei  $G$  eine lokal kompakte Gruppe mit abgeschlossenen Untergruppen  $H, K \subset G$  und sei  $M = K \cap H$  ihr Schnitt.

1. Ist  $HK$  dicht in  $G$  und ist  $V \in \text{Modto}^H$  eine stetige Darstellung von  $H$  in einem Hausdorff'schen topologischen Vektorraum, so ist der Basiswechsel eine Injektion  $\text{ind}_H^G V \hookrightarrow \text{ind}_M^K V$ .
2. Induziert die Multiplikation einen Homöomorphismus  $H \times_M K \xrightarrow{\sim} G$ , so ist für jede stetige Darstellung  $V$  von  $H$  der Basiswechsel ein Isomorphismus von stetigen Darstellungen

$$\text{ind}_H^G V \xrightarrow{\sim} \text{ind}_M^K V$$

11.4.13. Unsere Bedingung im zweiten Teil ist zum Beispiel stets erfüllt, wenn  $K$  und  $H$  abgeschlossene Untergruppen einer Lie-Gruppe  $G$  sind mit  $G = HK$ , wie man aus der Surjektivität des Differential der Multiplikation  $H \times K \rightarrow G$  leicht folgert. Besonders anschaulich wird der Satz im Lichte der geometrischen Konstruktion induzierter Darstellungen als Schnitte in Bündeln über dem Raum der Nebenklassen 11.5.5.

*Beweis.* 1. Liegt eine Abbildung  $G \rightarrow V$  aus  $\text{ind}_H^G V$  fest auf einer Teilmenge  $K \subset G$ , so liegt sie bereits fest auf  $HK$ , und falls  $V$  Hausdorff ist auch auf dem Abschluß von  $HK$ .

2. Wir haben

$$\begin{aligned} \text{ind}_H^G V &= \{f \in \mathcal{C}(G, V) \mid f(hx) = hf(x) \quad \forall x \in G, h \in H\} \\ \text{ind}_M^K V &= \{f \in \mathcal{C}(K, V) \mid f(hx) = hf(x) \quad \forall x \in K, h \in M\} \end{aligned}$$

und die natürliche Abbildung wird in diesem Bild schlicht das Einschränken  $f \mapsto f|_K$ . Schon wenn wir nur  $G = HK$  fordern, ist unsere natürliche Abbildung offensichtlich injektiv. Gegeben  $f \in \text{ind}_M^K V$  betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \tilde{f}: H \times K &\rightarrow V \\ (h, k) &\mapsto hf(k) \end{aligned}$$

und beachten  $\tilde{f}(hm, k) = \tilde{f}(h, mk)$  für alle  $m \in M$  derart, daß  $\tilde{f}$  eine stetige Abbildung  $\tilde{f}: H \times_M K \rightarrow V$  induziert, die wir aufgrund unserer Annahme auch als stetige Abbildung  $\tilde{f}: G \rightarrow V$  auffassen können. Unsere natürliche Abbildung ist mithin auch surjektiv und wir müssen nur noch die Stetigkeit ihrer Inversen  $f \mapsto \tilde{f}$  zeigen. Nun ist diese Abbildung  $\text{ind}_M^K V \rightarrow \text{ind}_H^G V$  nach 11.2.13 stetig genau dann, wenn im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_M^K V \times H \times K & \rightarrow & V \\ \downarrow & & \parallel \\ \text{ind}_M^K V \times G & \rightarrow & V \end{array}$$

mit oberer Horizontale  $(f, h, k) \mapsto hf(k)$  die untere Horizontale stetig ist. Da aber die obere Horizontale stetig ist und die linke Vertikale als Produkt offener stetiger Surjektionen offen stetig surjektiv und damit nach 3.4.19 final ist, folgt die Stetigkeit der unteren Horizontale.  $\square$

*Gibt es auch Koinduktion? Bourbaki scheint zu zeigen, daß der Raum der Maße unter geeigneten Annahmen mit der Struktur eines von-Neumann-Raums versehen werden kann. Das müßte die Koinduktion der trivialen Darstellung der trivialen Gruppe werden wollen...*

*Übung 11.4.14.* Wie in ?? erhalten wir auch im stetigen Fall beim Zurückziehen einer Darstellung mit einem inneren Automorphismus unserer Gruppe stets eine isomorphe Darstellung. Dasselbe gilt dann auch beim Induzieren einer Darstellung mit einem inneren Automorphismus. Die Transitivität der Induktion liefert dann für den Fall, daß je zwei Darstellungen einer Untergruppe, die sich nur um einen Twist mit der Konjugation durch ein Element der großen Gruppe unterscheiden, isomorphe induzierte Darstellungen liefern.

*Übung 11.4.15.* Man leite aus der Frobenius-Reziprozität ab, daß im Raum der stetigen Funktionen auf der Kugelschale jede einfache Darstellung der Drehgruppe genau einmal als Unterdarstellung auftritt.

*Übung 11.4.16.* Man zeige, daß im Fall endlicher Gruppen  $H \subset G$  die induzierte Darstellung der trivialen eindimensionalen komplexen Darstellung von  $H$  auch beschrieben werden kann als das im Gruppenring von  $G$  von der Summe aller Elemente von  $H$  erzeugte Linksideal.

*Übung 11.4.17.* Man diskutiere die von der eindimensionalen Darstellung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times, n \mapsto a^n$  für festes  $a \in \mathbb{C}^\times$  von der Länge Eins stetig induzierte Darstellung von  $\mathbb{R}$ . Sie hat ein offensichtliches invariantes Skalarprodukt und kann zu einer unitären Darstellung von  $\mathbb{R}$  vervollständigt werden. Was ist die zugehörige Teilung der Identität?

## 11.5 Geometrische Interpretation der Induktion

**Definition 11.5.1.** Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Wie in ?? heißt ein  $G$ -Raum  $X$  **topologisch frei** genau dann, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine offene  $G$ -stabile Umgebung  $U$  besitzt, die isomorph ist zu einem  $G$ -Raum der Gestalt  $W \times G$  für irgendeinen topologischen Raum  $W$ .

*Beispiel 11.5.2.* Die Operation einer abgeschlossenen Untergruppe einer Lie-Gruppe durch Multiplikation von rechts oder links auf besagter Lie-Gruppe ist stets topologisch frei.

11.5.3. Sind  $G \supset H$  topologische Gruppen und ist die Operation von  $H$  auf  $G$  topologisch frei, so ist für jede stetige Darstellung von  $H$  in einem topologischen Vektorraum  $V$  das **assozierte Bündel**

$$G \times_H V$$

in natürlicher Weise ein  $G$ -äquivariantes topologisches Vektorraumbündel über dem homogenen Raum  $G/H$ . Hier meint  $G \times_H V$  kein Faserprodukt, sondern vielmehr das balancierte Produkt im Sinne von [11.4.11](#).

11.5.4. Gegeben topologische Gruppen  $G \supset H$  und ein  $H$ -Raum  $V$  betrachten wir die Projektion  $G \times_H V \rightarrow G/H$  und notieren

$$\mathcal{S}(G \times_H V) = \mathcal{C}_{G/H}(G/H, G \times_H V)$$

die Menge aller stetigen Schnitte dieser Projektion. Ist  $f : G \rightarrow V$  eine stetige Abbildung mit  $f(hg) = hf(g)$  für alle  $h \in H, g \in G$ , so geht die Abbildung  $G \rightarrow G \times V, g \mapsto (g, f(g^{-1}))$  über zu den Quotienten und liefert so einen stetigen Schnitt im assoziierten Bündel  $\tilde{f} \in \mathcal{S}(G \times_H V)$ . Insbesondere erhalten wir für jede stetige Darstellung  $V$  einer Untergruppe  $H$  einer lokal kompakten Gruppe  $G$  eine kanonische lineare Abbildung

$$\text{ind}_H^G V \rightarrow \mathcal{S}(G \times_H V)$$

**Satz 11.5.5 (Geometrische Interpretation der Induktion).** *Sei  $G$  eine lokal kompakte Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, die topologisch frei auf  $G$  operiert. Sei weiter  $V$  eine stetige Darstellung von  $H$ . So induziert die kanonische Abbildung 11.5.4 einen Isomorphismus von stetigen Darstellungen*

$$\text{ind}_H^G V \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(G \times_H V)$$

*Beispiel 11.5.6.* Sind  $H \triangleleft G$  Liegruppen mit Liealgebren  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , so liefert die Operation von  $G$  auf dem Tangentialbündel des homogenen Raums  $G/H$  einen Isomorphismus von topologischen Vektorbündeln

$$G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} T(G/H)$$

Unser Satz 11.5.5 liefert folglich einen Isomorphismus

$$\text{ind}_H^G (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{G/H}(G/H, T(G/H))$$

zwischen der Darstellung von  $G$  durch Verschiebung von Vektorfeldern auf dem Raum der stetigen Vektorfelder auf  $G/H$  und der stetig induzierten Darstellung  $\text{ind}_H^G (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  der durch die adjungierte Operation gegebenen Darstellung von  $H$  auf  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ .

*Beweis.* Wir bemerken zunächst einmal, daß unter unseren Voraussetzungen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \rightarrow & G \times_H V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \rightarrow & G/H \end{array}$$

mit den offensichtlichen Abbildungen kartesisch ist. Jeder stetige Schnitt  $\sigma : G/H \rightarrow G \times_H V$  kommt deshalb her von einer wohlbestimmten stetigen

Abbildung  $G \rightarrow G \times V$  von der Form  $g \mapsto (g, \hat{\sigma}(g))$  für  $\hat{\sigma} : G \rightarrow V$  stetig derart, daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G/H \\ \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G \times V & \xrightarrow{\pi} & G \times_H V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/H \end{array}$$

Das impliziert  $\hat{\sigma}(gh) = h^{-1}\hat{\sigma}(g) \quad \forall h \in H, g \in G$ . Unsere kanonische Abbildung ist also in der Tat eine Bijektion, und es bleibt nur zu zeigen, daß sie auch ein Homöomorphismus ist. Dazu verwenden wir das anschließende Lemma.

**Lemma 11.5.7.** *Sei  $G$  eine lokal kompakte Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, die topologisch frei auf  $G$  operiert. So definiert für einen beliebigen topologischen Raum  $Y$  die offensichtliche Bijektion einen Homöomorphismus*

$$\mathcal{C}(G/H, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(G, Y)^H$$

11.5.8. Ist  $Y$  mit einer stetigen Abbildung nach  $G/H$  versehen, so induziert unser Homöomorphismus natürlich auch einen Homöomorphismus

$$\mathcal{C}_{G/H}(G/H, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{G/H}(G, Y)^H$$

*Beweis.* Die Stetigkeit folgt hier ohne Schwierigkeiten aus der Stetigkeit des Auswertens  $\mathcal{C}(G/H, Y) \times G \rightarrow Y$  und der Erkenntnis, daß mit  $G$  auch  $G/H$  lokal kompakt sein muß. Für die Stetigkeit der Umkehrabbildung betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G, Y)^H \times G & \rightarrow & Y \\ \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{C}(G, Y)^H \times G/H & \rightarrow & Y \end{array}$$

und beachten, daß die linke Vertikale nach 3.8.2 final ist. Folglich impliziert die Stetigkeit der oberen Horizontale die Stetigkeit der unteren Horizontale, und daraus folgt dann die Stetigkeit der Umkehrabbildung  $\mathcal{C}(G, Y)^H \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(G/H, Y)$ .  $\square$

Jetzt behandeln wir unser kartesisches Diagramm vom Beginn des Beweises mit  $\mathcal{C}_{G/H}(G, \ )$  und erhalten mit 11.3.8 einen Homöomorphismus

$$\mathcal{C}_{G/H}(G, G \times V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{G/H}(G, G) \times \mathcal{C}_{G/H}(G, G \times_H V)$$

Schalten wir hier die stetige Einbettung  $\mathcal{C}(G, V) \rightarrow \mathcal{C}_{G/H}(G, G \times V)$ ,  $f \mapsto (\text{id}, f)$  davor und die Projektion auf den zweiten Faktor dahinter und schränken ein auf  $\text{ind}_H^G V$ , so landen wir in  $\mathcal{C}_{G/H}(G, G \times_H V)^H$ , das wir ja nach 11.5.7 stetig identifizieren können mit  $\mathcal{C}_{G/H}(G/H, G \times_H V)$  und erkennen so die Stetigkeit unserer kanonischen Abbildung. Betten wir umgekehrt

$$\mathcal{C}_{G/H}(G/H, G \times_H V) \cong \mathcal{C}_{G/H}(G, G \times_H V)^H$$

in das Produkt ein mit der Identität auf dem ersten Faktor und gehen zurück nach  $\mathcal{C}_{G/H}(G, G \times V)$  und dann weiter nach  $\mathcal{C}(G, V)$ , so erkennen wir auch die Stetigkeit der Umkehrabbildung.  $\square$

## 11.6 Der Satz von Hahn-Banach

**Satz 11.6.1 (Trennungssatz von Hahn-Banach).** *Eine offene konvexe Teilmenge eines reellen topologischen Vektorraums kann von jedem nicht darinliegenden Punkt durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden.*

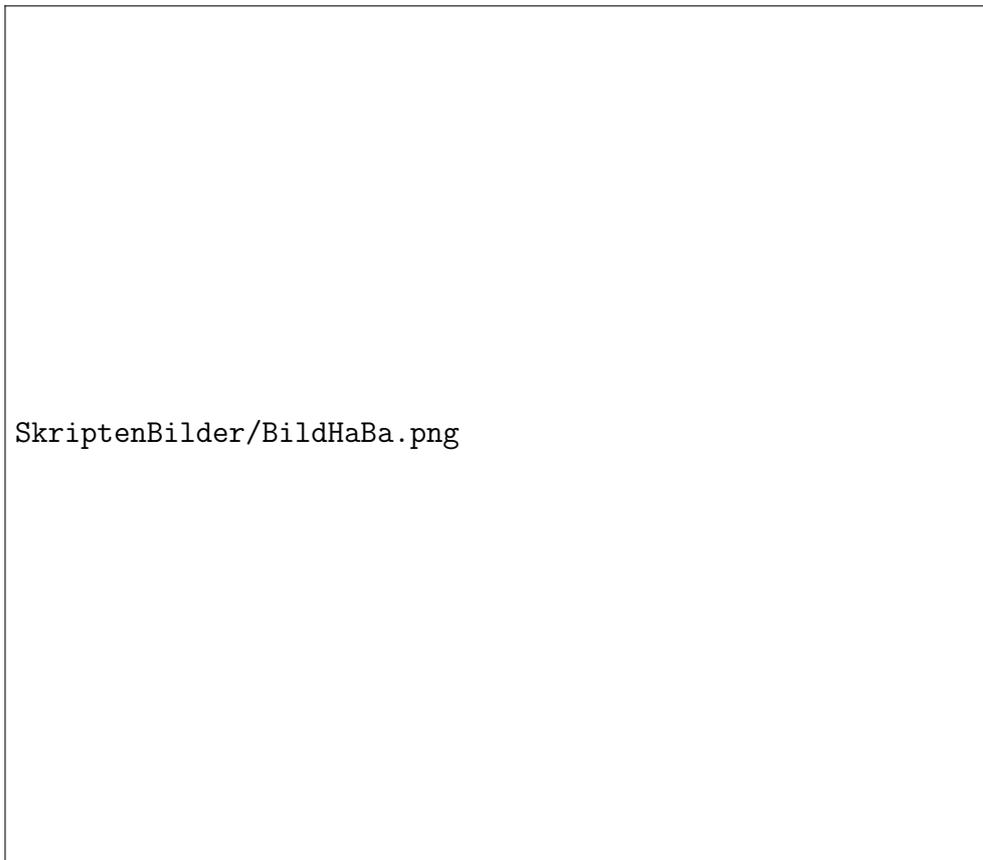
11.6.2. Gegeben eine offene konvexe Teilmenge  $C$  eines reellen topologischen Vektorraums  $V$  und ein Punkt  $v \notin C$  gibt es also in Formeln eine stetige Linearform  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(v) \notin F(C)$ . Der Beweis wird nach einigen eher technischen Vorbereitungen im Anschluß an den Beweis von 11.6.7 geführt werden. In 11.8.12 werden Sie im Fall "lokal konvexer" topologischer Vektorräume die Folgerung des Satzes auch für abgeschlossene konvexe Teilmengen herleiten. Eine Verallgemeinerung unseres Satzes liefert 11.6.9: Eine offene konvexe Teilmenge kann sogar von jeder dazu disjunkten konvexen Teilmenge durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden.

**Definition 11.6.3.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung  $p : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **sublinear** genau dann, wenn gilt  $p(\lambda v) = \lambda p(v) \quad \forall \lambda \geq 0, v \in V$  und  $p(v + w) \leq p(v) + p(w) \quad \forall v, w \in V$ .

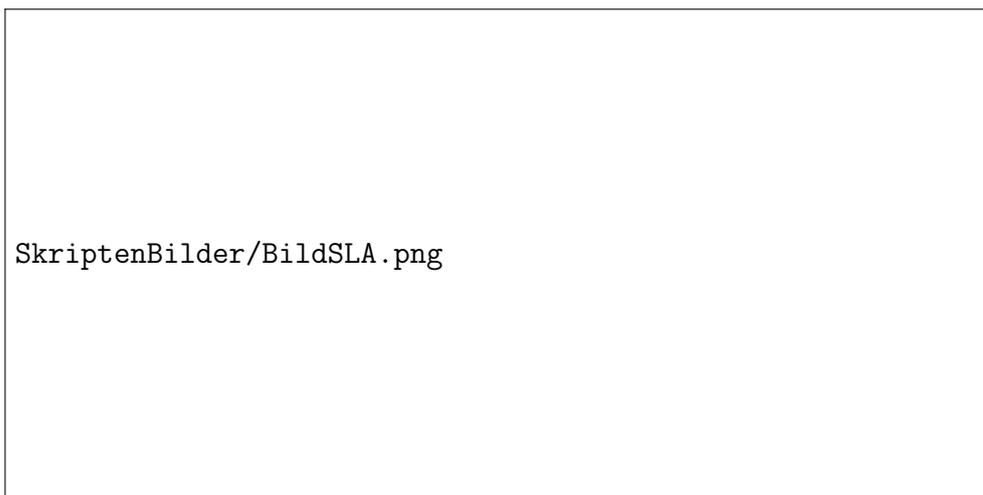
11.6.4. Die sublinearen Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind genau alle Funktionen, deren Restriktionen auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\mathbb{R}_{\leq 0}$  beide linear sind und die darüber hinaus die Eigenschaft haben, daß ihre Steigung auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  mindestens so groß ist wie auf  $\mathbb{R}_{\leq 0}$ .

11.6.5. Auf der Menge  $\mathcal{S}$  aller sublinearen Funktionen auf einem vorgegebenen reellen Vektorraum  $V$  definiert man eine Ordnungsrelation durch die Vorschrift

$$p \leq p' \Leftrightarrow p(v) \leq p'(v) \quad \forall v \in V$$



Anschauung zum Trennungssatz von Hahn-Banach [11.6.1](#)



Der Graph einer sublinearen Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Jede total angeordnete Teilmenge  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$  besitzt in  $\mathcal{S}$  eine untere Schranke. In der Tat, für  $\mathcal{K} = \emptyset$  ist  $p = 0$  eine untere Schranke, und sonst können wir  $s : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  erklären durch

$$s(v) = \inf_{p \in \mathcal{K}} p(v)$$

Die Einschränkung auf Geraden zeigt sofort  $\infty > s(v) > -\infty$  für alle  $v \in V$ . Daß die so erklärte Funktion  $s : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sublinear ist, erkennt man auch ohne Schwierigkeiten.

**Lemma 11.6.6.** *Eine sublineare Funktion auf einem reellen Vektorraum ist minimal in der Menge aller sublinearen Funktionen auf besagtem Vektorraum genau dann, wenn sie linear ist.*

*Beweis.* Daß jede lineare Funktion eine minimale sublineare Funktion ist, erkennt man wieder durch Einschränkung auf alle Geraden. Sei nun umgekehrt  $p$  eine beliebige sublineare Funktion. Für alle  $a \in V$  betrachten wir dann die Funktion  $p_a : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  gegeben durch

$$p_a(v) = \inf \{ p(v + ta) - tp(a) \mid t \geq 0 \}$$

Da für alle  $t \geq 0$  offensichtlich gilt

$$-p(-x) \leq p(x + ta) - tp(a) \leq p(x)$$

ist dies Infimum eine reelle Zahl. Wir behaupten weiter, daß auch  $p_a$  sublinear ist. Den Nachweis von  $p_a(\lambda v) = \lambda p_a(v)$  für  $\lambda > 0$  überlassen wir dem Leser, für  $\lambda = 0$  ist diese Gleichung eh klar. Um schließlich auch die zweite Forderung an die Subadditivität nachzuweisen, bemerken wir, daß es für beliebige  $v, w \in V$  und jedes  $\varepsilon > 0$  nichtnegative Zahlen  $t_1, t_2$  gibt mit

$$\begin{aligned} p_a(v) &\geq p(v + t_1 a) - t_1 p(a) - \varepsilon \\ p_a(w) &\geq p(w + t_2 a) - t_2 p(a) - \varepsilon \end{aligned}$$

und mit  $t = t_1 + t_2$  ergibt sich durch Addition

$$\begin{aligned} p_a(v) + p_a(w) &\geq p(v + t_1 a) + p(w + t_2 a) - tp(a) - 2\varepsilon \\ &\geq p(v + w + ta) - tp(a) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war, ist damit die Sublinearität von  $p_a$  nachgewiesen. Offensichtlich gilt stets  $p_a \leq p$ . Ist nun  $p$  eine minimale sublineare Funktion, so gilt notwendig  $p = p_a$  für alle  $a \in V$ , also insbesondere  $p(x) \leq p(x + a) - p(a)$  alias  $p(x + a) \geq p(x) + p(a)$ . Damit ist  $p$  linear.  $\square$

**Lemma 11.6.7 (Satz von Hahn-Banach über dominierte Fortsetzung).** Seien  $V \supset W$  ein reeller Vektorraum mit einem Teilraum. Sei  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  linear und  $p : V \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear. Gilt  $f \leq p$  an jeder Stelle von  $W$ , so gibt es eine Erweiterung von  $f$  zu einer linearen Abbildung  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F \leq p$  an jeder Stelle von  $V$ .

11.6.8. Dieses Lemma kann auch dahingehend formuliert werden, daß sich "jede durch eine vorgegebene sublineare Abbildung  $p$  dominierte Linearform auf einem Teilraum zu einer durch dieselbe sublineare Abbildung  $p$  dominierte Linearform auf dem ganzen Raum fortsetzen läßt", deshalb die Terminologie.

*Beweis.* Wir bilden zunächst die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{p} : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \inf_{w \in W} \{p(v-w) + f(w)\} \end{aligned}$$

Wegen  $p(v-w) \geq p(-w) - p(-v)$  liegt das fragliche Infimum in  $\mathbb{R}$  und wir haben sogar die Abschätzung  $\tilde{p}(v) \geq -p(-v)$ . Wir behaupten, daß auch  $\tilde{p}$  sublinear ist. Hier ist  $\tilde{p}(\lambda v) = \lambda \tilde{p}(v)$  für  $\lambda > 0$  und  $\lambda = 0$  offensichtlich und wir müssen nur noch

$$\tilde{p}(v_1) + \tilde{p}(v_2) \geq \tilde{p}(v_1 + v_2)$$

zeigen für alle  $v_1, v_2 \in V$ . Das geht wie zuvor: Für jedes  $\varepsilon > 0$  finden wir  $w_1, w_2 \in W$  mit

$$\begin{aligned} \tilde{p}(v_1) &\geq p(v_1 - w_1) + f(w_1) - \varepsilon \\ \tilde{p}(v_2) &\geq p(v_2 - w_2) + f(w_2) - \varepsilon \end{aligned}$$

und durch Addition mit  $w_1 + w_2 = w$

$$\tilde{p}(v_1) + \tilde{p}(v_2) \geq p(v_1 + v_2 - w) + f(w) - 2\varepsilon$$

Weil das für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt

$$\tilde{p}(v_1) + \tilde{p}(v_2) \geq \tilde{p}(v_1 + v_2)$$

und das war ja gerade zu zeigen. Nun existiert nach 11.6.5 und dem Zorn'schen Lemma eine minimale sublineare Funktion  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F \leq \tilde{p}$ , und wegen 11.6.6 ist sie linear. Nach Konstruktion gilt aber auch  $F|_W \leq \tilde{p}|_W \leq f$  und wieder mit 11.6.6 folgt  $F|_W = f$ .  $\square$

*Beweis des Satzes von Hahn-Banach 11.6.1.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $0 \in C$  annehmen. Dann betrachten wir das sogenannte

**Minkowski-Funktional** zu  $C$ , als da heißt die Funktion  $p_C : V \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch die Vorschrift

$$p_C(x) = \inf\{\lambda \mid \lambda \geq 0, x \in \lambda C\}$$

Sie ist offensichtlich sublinear und bildet unsere offene konvexe Menge  $C$  in das halboffene Intervall  $[0, 1)$  ab. Für die lineare Funktion  $f : \mathbb{R}v \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(v) = 1$  gilt dann  $f \leq p_C|_{\mathbb{R}v}$ , wir können sie also ausdehnen zu einer Linearform  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F \leq p_C$ . Diese Linearform ist stetig, weil sie eine offene Umgebung der Null auf eine beschränkte Menge abbildet, genauer geht ja  $C$  nach  $(-\infty, 1)$  und damit  $C \cap (-C)$  nach  $(-1, 1)$ . Andererseits gilt  $F(v) = 1$ , also  $F(v) \notin F(C)$ .  $\square$

**Korollar 11.6.9 (Trennungssatz von Hahn-Banach, Variante).** *Gegeben ein reeller topologischer Vektorraum  $V$  und disjunkte konvexe Teilmengen  $A, B \subset V$  mit  $B$  offen gibt es  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig linear mit*

$$F(A) \cap F(B) = \emptyset$$

11.6.10. Eine offene konvexe Teilmenge eines reellen topologischen Vektorraums kann also salopp gesprochen von jeder dazu disjunkten konvexen Teilmenge durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden.

*Beweis.* Sicher ist  $C = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$  offen und konvex und aus  $A \cap B = \emptyset$  folgt  $0 \notin C$ . Nach 11.6.1 finden wir also  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig linear mit  $0 \notin F(C)$  und daraus folgt  $F(A) \cap F(B) = \emptyset$ .  $\square$

**Korollar 11.6.11 (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach).** *Gegeben ein normierter Vektorraum läßt sich jede stetige Linearform auf einem Teilraum auf den ganzen Raum fortsetzen zu einer stetigen Linearform derselben Norm.*

11.6.12. In Übung 11.8.13 werden Sie einen Teil dieser Aussage allgemeiner für beliebige lokal konvexe topologische Vektorräume zeigen.

*Beweis.* Wenn wir das für reelle Vektorräume zeigen können, folgt es auch für komplexe Vektorräume, denn das Bilden des Realteils liefert für jeden komplexen Vektorraum offensichtlich eine Bijektion zwischen komplexen Linearformen und reellen Linearformen, unter der sich im Fall normierter Vektorräume die stetigen Linearformen mit vorgegebener Norm entsprechen. Nun geben wir zwei Argumente für den reellen Fall. (1) Man wende den Satz von Hahn-Banach über dominierte Fortsetzung 11.6.7 an auf die durch ein geeignetes Vielfaches der Norm dominierte Linearform auf unserem Teilraum, und

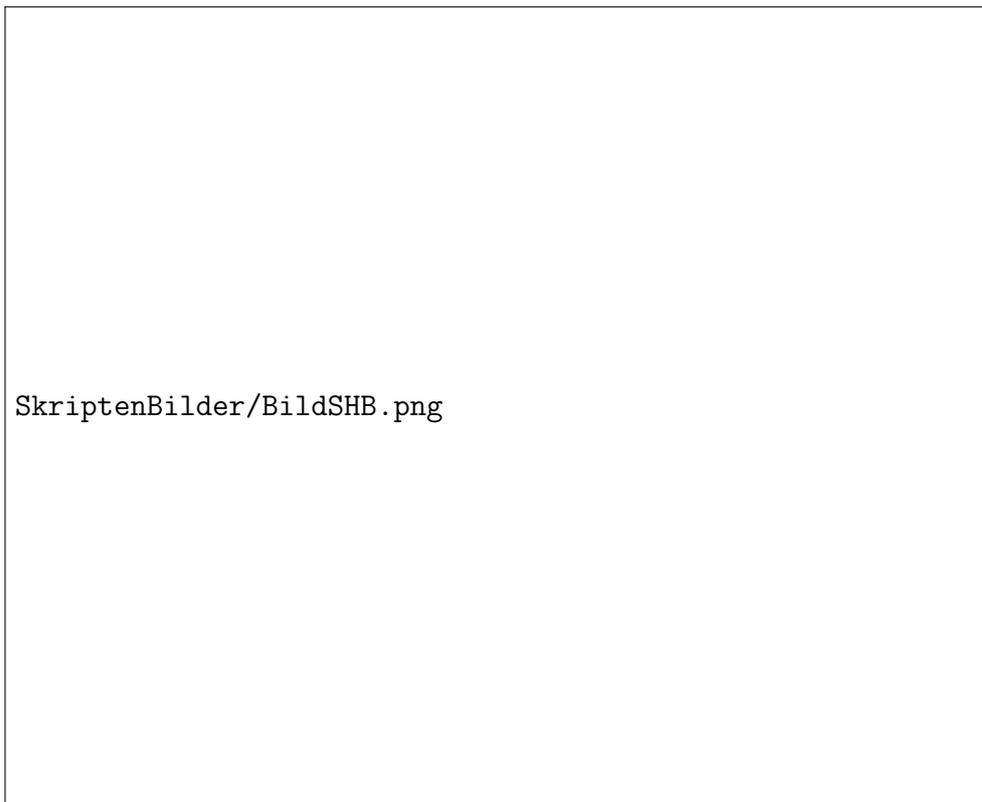


Illustration zum Trennungssatz [11.6.9](#). Beim Beweis des Fortsetzungssatzes wäre  $B$  ein offener Ball um den Ursprung und  $A$  ein diesen Ball berührender affiner Teilraum, was leider schwer bildlich darzustellen ist.

fertig. (2) Geometrischer kann man auch wie folgt argumentieren: Die Null kann schlicht durch Null fortgesetzt werden. Für eine von Null verschiedene stetige Linearform auf einem Teilraum wende man den Trennungssatz von Hahn-Banach 11.6.9 an und trenne die Menge  $A$  der Punkte, auf denen unsere Linearform den Wert Eins annimmt, von dem größten offenen Ball  $B$ , der diese Menge nicht trifft. Die "trennende Linearform" muß auf  $A$  konstant sein, da sie sonst auf  $A$  alle Werte annehmen würde, und ein geeignetes Vielfaches ist auf  $A$  konstant Eins und ist damit die gesuchte Fortsetzung.  $\square$

## 11.7 Filter auf topologischen Räumen

**Definition 11.7.1.** Sei  $X$  eine Menge. Ein System von Teilmengen  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt ein **Filter auf  $X$**  genau dann, wenn es stabil ist unter endlichen Schnitten und dem Bilden von Obermengen. In Formeln fordern wir also

1.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$  sowie  $X \in \mathcal{F}$ ;
2.  $A \in \mathcal{F}$  und  $B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ .

Unter einem **echten Filter** verstehen wir einen Filter, der nicht die ganze Potenzmenge ist. Gleichbedeutend ist die Forderung  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ . In vielen Quellen wird auch ein Filter abweichend definiert als das, was wir hier einen echten Filter nennen.

*Bemerkung 11.7.2.* Unter der Bijektion  $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$ , die jeder Teilmenge die charakteristische Funktion ihres Komplements zuordnet, entsprechen die Filter genau den Idealen unseres Funktionenrings.

*Beispiele 11.7.3.* Ist  $X$  eine Menge und  $x \in X$  ein Punkt, so ist das System aller Teilmengen von  $X$ , die  $x$  enthalten, ein Filter. Ist  $x_0, x_1, \dots$  eine Folge in  $X$ , so ist das System derjenigen Teilmengen von  $X$ , die fast alle Folgenglieder enthalten, ein Filter. Ist  $Y \subset X$  eine unendliche Teilmenge von  $X$ , so ist das System derjenigen Teilmengen von  $X$ , die fast alle Elemente von  $Y$  enthalten, ein Filter. Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  ein Punkt, so bilden alle Umgebungen von  $x$  einen Filter, den **Umgebungsfilter**  $\mathcal{U}_x$  von  $x$ . Das leere Mengensystem ist kein Filter.

**Definition 11.7.4.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  ein Filter und  $x \in X$  ein Punkt. Wir sagen, der **Filter  $\mathcal{F}$  konvergiert gegen den Punkt  $x$**  genau dann, wenn jede Umgebung von  $x$  zum Filter  $\mathcal{F}$  gehört, in Formeln  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$ . Wir sagen, der **Filter  $\mathcal{F}$  konvergiert** genau dann, wenn es einen Punkt  $x \in X$  gibt derart, daß  $\mathcal{F}$  gegen  $x$  konvergiert.

*Übung 11.7.5.* Ist  $X$  ein Hausdorffraum und konvergiert ein echter Filter gegen die Punkte  $x$  und  $y$  aus  $X$ , so gilt  $x = y$ .

*Übung 11.7.6.* Viele Aussagen verallgemeinern sich von metrischen auf beliebige topologische Räume, wenn man “Folgen durch Filter ersetzt”. Als Beispiel zeige man, daß für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen gleichbedeutend sind: (1)  $f$  ist stetig und (2)  $f$  ist **filterstetig**, d.h. für jeden Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  mit Grenzwert  $x \in X$  konvergiert der **Bildfilter**  $f_*\mathcal{F} := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$  gegen  $f(x)$ .

11.7.7. Eine uniforme Struktur im Sinne von 10.7.3 auf einer Menge  $X$  kann beschrieben werden als ein Filter auf  $X \times X$ , dessen Elemente sämtlich die Diagonale umfassen, und das darüber hinaus noch weitere Eigenschaften hat.

## 11.8 Von-Neumann-Räume

**Definition 11.8.1.** Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein uniformer Raum im Sinne von 10.7.3. Ein Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt ein **Cauchy-Filter** genau dann, wenn es für jeden Abstand  $A \in \mathcal{A}$  ein  $x \in X$  gibt mit  $B(x; A) \in \mathcal{F}$ . Ein uniformer Raum heißt **vollständig** genau dann, wenn darin jeder Cauchy-Filter konvergiert. Man fordert hier nur die Existenz, nicht die Eindeutigkeit des Grenzwerts.

*Beispiel 11.8.2.* Ein Filter  $\mathcal{F}$  auf einer abelschen topologischen Gruppe  $G$  ist ein **Cauchy-Filter** genau dann, wenn es für jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq G$  ein  $g \in G$  gibt mit  $gU \in \mathcal{F}$ .

*Übung 11.8.3.* Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen uniformen Raums ist vollständig.

**Definition 11.8.4.** Ein reeller topologischer Vektorraum heißt **lokal konvex** genau dann, wenn sich jede Umgebung eines beliebigen Punktes zu einer konvexen Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt. Ein **von-Neumann-Raum** ist ein lokal konvexer vollständiger Hausdorff’scher topologischer Vektorraum.

*Übung 11.8.5.* Für jede konvexe Teilmenge eines reellen topologischen Vektorraums bilden auch ihre inneren Punkte eine konvexe Teilmenge.

11.8.6. Wenn wir nichts dazusagen, so denken wir uns einen von-Neumann-Raum meist über  $\mathbb{C}$ . Der Begriff des von-Neumann-Raums kommt meines Wissens in der Literatur noch nicht vor. Mir schien es jedoch für das Folgende hilfreich, eine griffige Bezeichnung zur Verfügung zu haben, und da die Vollständigkeit allgemeiner topologischer Vektorräume zuerst von John von Neumann in [vN35] diskutiert wurde, im Übrigen im Hinblick auf die Integration vektorwertiger Funktionen, schlage ich diese Terminologie vor.

**Satz 11.8.7 (Integration vektorwertiger Funktionen).** *Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mu \in M(X)$  ein komplexes Maß auf  $X$  und  $f : X \rightarrow V$  eine stetige Abbildung in einen von-Neumann-Raum, deren Bild  $f(X)$  kompakten Abschluß hat. So gibt es in unserem von-Neumann-Raum genau einen Vektor*

$$\int f \mu = \int f(x) \mu \langle x \rangle$$

*derart, daß gilt  $\langle L, \int f \mu \rangle = \int \langle L, f \rangle \mu$  für jede stetige Linearform  $L$  auf  $V$ .*

11.8.8. Der Satz gilt analog und mit einem analogen Beweis auch für reelle Maße und reelle von-Neumann-Räume. Sicher wäre es natürlicher, allgemeiner beliebige meßbare Abbildungen zu integrieren, aber dann muß die Frage der Integrierbarkeit diskutiert werden und man stößt auch auf die Schwierigkeit, daß die Summe meßbarer Abbildungen nicht meßbar zu sein braucht, wenn unser Vektorraum keine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Diese Bedingung ist zwar in typischen Anwendungen stets erfüllt, aber das stets zu erwähnen und zu prüfen lenkt auch wieder von den eigentlich interessanten Fragestellungen ab.

11.8.9. In [V.1.1.1](#) diskutieren wir Integrierbarkeit und Integral für meßbare Abbildungen eines Maßraums in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum und in [V.1.1.1](#) erklären wir ein Integral für stetige Abbildungen eines kompakten reellen Intervalls in einen Banachraum. Das hier definierte Integral verallgemeinert den letzteren Integralbegriff und stimmt auf dem Schnitt der jeweiligen Definitionsbereiche auch mit dem ersten Integralbegriff überein.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt sogar für jeden lokal konvexen Hausdorffschen topologischen Vektorraum, da es auf solchen Räumen nach [11.8.5](#) und dem Satz von Hahn-Banach [11.6.1](#) für je zwei verschiedene Vektoren eine stetige Linearform gibt, die auf ihnen verschiedene Werte annimmt. Um die Existenz zu zeigen, dürfen wir annehmen, daß unser Maß reell und nichtnegativ ist. Gegeben eine Umgebung  $U$  der Null in  $V$  sagen wir, eine Funktion  $g : X \rightarrow V$  sei eine “ $U$ -gute Approximation von  $f$ ” genau dann, wenn gilt  $g(x) - f(x) \in U \quad \forall x \in X$ . Für jede Umgebung der Null  $U \subset V$  betrachten wir nun alle meßbaren Stufenfunktionen  $g : X \rightarrow V$ , die  $U$ -gute Approximationen von  $f$  sind. Da unter unseren Annahmen  $f(X)$  in einem Kompaktum liegt, gibt es für alle  $U$  derartige Approximationen. Die Menge aller “naiven” Integrale  $U$ -guter Approximationen von  $f$  durch meßbare Stufenfunktionen  $g$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{I}_U = \mathcal{I}_U(f)$ . Ist  $U$  konvex, so liegt offensichtlich die Differenz von je zwei Elementen von  $\mathcal{I}_U$  in  $\mu(X)(U + (-U))$ . Lassen wir  $U$  über alle konvexen Umgebungen der Null in  $V$  laufen, so erzeugen unsere

Mengen  $\mathcal{I}_U$  folglich einen Cauchy-Filter in  $V$ . Wir finden unseren Vektor  $\int f\mu$  als den Grenzwert dieses Cauchy-Filters. Die geforderte Verträglichkeit mit jeder stetigen Linearform folgt, indem wir als  $U$  speziell die Mengen aller der Vektoren nehmen, auf denen die gewählte Linearform betragsmäßig unter einer vorgegebenen Schranke bleibt.  $\square$

11.8.10. Sei  $f : X \rightarrow V$  eine stetige Abbildung von einem topologischen Raum in einen von-Neumann-Raum mit  $\overline{f(X)}$  kompakt. Ist  $\mu \in M(X; [0, \infty))$  ein endliches nichtnegatives Maß und landet  $f$  in einer offenen oder abgeschlossenen konvexen Menge  $C$ , so gilt  $\int f\mu \in \mu(X)C$ . Um das zu zeigen muß man nur bemerken, daß nach 11.6.1 bzw. 11.8.12 eine offene bzw. abgeschlossene konvexe Menge von jedem Punkt außerhalb durch eine stetige Linearform getrennt werden kann.

*Übung* 11.8.11. Sei  $f : X \rightarrow V$  eine stetige Abbildung von einem topologischen Raum in einen von-Neumann-Raum mit  $\overline{f(X)}$  kompakt und  $\mu \in M(X)$  ein komplexes Maß. Man zeige: Unser Integral  $\int f\mu$  aus 11.8.7 ist linear in  $f$  und in  $\mu$ . Ist  $\varphi : Z \rightarrow X$  eine stetige Abbildung von einem weiteren topologischen Raum nach  $X$  und  $\nu \in M(Z)$  ein komplexes Maß auf  $Z$ , so gilt für alle stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow V$  mit  $\overline{f(X)}$  kompakt die Formel

$$\int_Z (f \circ \varphi) \nu = \int_X f (\varphi_* \nu)$$

Ist  $L : V \rightarrow V'$  eine stetige lineare Abbildung in einen weiteren von-Neumann-Raum, so gilt  $\int (L \circ f)\mu = L(\int f\mu)$ . Man folgere, daß für  $X = A \sqcup B$  eine Zerlegung in zwei disjunkte meßbare Teilmengen stets gilt  $\int_X f = \int_A f + \int_B f$ .

*Übung* 11.8.12. Man zeige, daß in einem lokal konvexen reellen topologischen Vektorraum auch jede abgeschlossene konvexe Teilmenge von jedem nicht darin liegenden Punkt durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden kann. Gegeben eine abgeschlossene konvexe Teilmenge  $C$  eines lokal konvexen reellen topologischen Vektorraums  $V$  und ein Punkt  $v \notin C$  gibt es also in Formeln eine stetige Linearform  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(v) \notin F(C)$ . Hinweis: 11.6.9.

*Übung* 11.8.13. Man zeige, daß in einem lokal konvexen topologischen Vektorraum jede stetige Linearform auf einem Untervektorraum zu einer stetigen Linearform auf dem ganzen Vektorraum fortgesetzt werden kann. Hinweis: Man kopiere den geometrischen Beweis des Fortsetzungssatzes 11.6.11.

## 11.9 Kompakt getragene Maße

**Definition 11.9.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $K \subset X$  eine Teilmenge. Die topologischen Maße auf  $X$ , die auf allen zu  $K$  disjunkten topologisch

meßbaren Mengen verschwinden, nennen wir die **von  $K$  getragenen Maße**. Die von irgendeinem Kompaktum getragenen Maße nennen wir **kompakt getragene Maße** und notieren sie je nach ihrem Wertebereich

$$M_1(X) = M_1(X; \mathbb{C}) \supset M_1(X; \mathbb{R}) \supset M_1(X; [0, \infty)) \subset M_1(X; [0, \infty])$$

11.9.2. Jedes kompakt getragene komplexe Maß läßt sich sogar darstellen als eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen positiven kompakt getragenen Maßen. Um das zu sehen, stellen wir es dar als eine endliche Linearkombination von endlichen positiven Maßen und schränken dann alle diese Maße ein auf ein geeignetes Kompaktum. Mit dieser Erkenntnis sieht man leicht, daß V.2.2.9 analog auch für Räume von kompakt getragenen topologischen Maßen gilt.

11.9.3. Sind  $X$  und  $Y$  separable topologische Räume, so liefert das Bilden des Produktmaßes mithilfe von V.2.2.9 bzw. mithilfe der vorhergehenden Bemerkung Abbildungen

$$M_1(X) \otimes_{\mathbb{C}} M_1(Y) \rightarrow M_1(X \times Y)$$

11.9.4. Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist das Bild eines kompakt getragenen Maßes auch selbst kompakt getragen und wir erhalten so eine komplexlineare Abbildung

$$f_* : M_1(X) \rightarrow M_1(Y)$$

**Definition 11.9.5.** Gegeben eine separable topologische Gruppe  $G$  bilden unter unserer Konvolution von Maßen aus 10.8.3 die kompakt getragenen Maße einen Teilring, so daß wir insgesamt eine Kette von Ringen

$$\mathbb{C}G \subset M_1(G) \subset M(G)$$

erhalten, wenn wir die erste Einbettung dadurch erklären, daß jedem  $g \in G$  das Dirac-Maß bei  $g$  zugeordnet werden soll.

## 11.10 Von-Neumann-Darstellungen

**Definition 11.10.1.** Eine **von-Neumann-Darstellung** einer topologischen Gruppe ist eine stetige Darstellung in einem von-Neumann-Raum.

**Definition 11.10.2 (Operationen von Maßen auf Darstellungen).** Gegeben eine von-Neumann-Darstellung  $V$  einer topologischen Gruppe  $G$ , ein

Vektor  $v \in V$  sowie ein kompakt getragenes komplexes Maß  $\mu \in M_1(G)$  definieren wir den Vektor  $\mu v \in V$  als das Integral

$$\mu v = \int_G gv \mu\langle g \rangle$$

oder genauer  $\mu v = \int_K gv \mu\langle g \rangle$  im Sinne von 11.8.7 für ein und jedes Kompaktum  $K \subset G$ , das unser Maß trägt.

11.10.3. Ist  $\mu$  ein fest gewähltes Haar'sches Borelmaß und  $f \in L^1(G; \mu)$  eine integrierbare Funktion mit kompaktem Träger, so setzen wir

$$f * v = f *_{\mu} v = (f\mu)v$$

für  $f\mu$  das durch das Integrieren von  $f$  bezüglich  $\mu$  erklärte Maß. Ist  $G$  kompakt, so verstehen wir  $f * v$  stets in Bezug auf das durch die Bedingung  $\mu(G) = 1$  normalisierte Haar'sche Maß. Ist  $\mu$  ein linksinvariantes Haar'sches Maß, so gilt offensichtlich für jedes Gruppenelement  $g \in G$  die Verwandtschaft  $(g \cdot) : \mu \rightsquigarrow \mu$  und für jede Funktion  $f$  auch  $(g \cdot) : f \rightsquigarrow \acute{g}f$  und damit für  $f \in L^1(G; \mu)$  notwendig  $(g \cdot) : f\mu \rightsquigarrow (\acute{g}f)\mu$ . Daraus hinwiederum folgt für  $f$  integrierbar mit kompaktem Träger die Formel

$$g(f *_{\mu} v) = (\acute{g}f) *_{\mu} v$$

Man kann das im Fall separabler Gruppen auch aus 11.13.2 folgern, indem man dort ein Maß zum Dirac-Maß bei  $g$  spezialisiert, aber das scheint mir auch wieder unnötig kompliziert.

11.10.4. Die beiden folgenden Sätze erklären, warum es sinnvoll sein mag, unter den vielen denkbaren Arten stetiger Darstellungen topologischer Gruppen gerade die von-Neumann-Darstellungen von separablen lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppen zu betrachten.

11.10.5. In einer topologischen Gruppe gilt für jede Umgebung  $U$  des neutralen Elements die Inklusion  $\bar{U} \subset UU$ . In der Tat können wir folgern  $x \notin UU \Rightarrow xU^{-1} \cap U = \emptyset \Rightarrow x \notin \bar{U}$ , da  $xU^{-1}$  eine Umgebung von  $x$  ist, die  $U$  nicht trifft.

**Definition 11.10.6.** Gegeben eine Darstellung  $V$  einer Gruppe  $K$  heißt ein Vektor  $v \in V$  ein  **$K$ -endlicher Vektor** genau dann, wenn er mit seinen Bildern unter allen  $k \in K$  einen endlichdimensionalen Teilraum von  $V$  aufspannt. Die Menge aller  $K$ -endlichen Vektoren ist eine Unterdarstellung  $V_K \subset V$ , in Formeln setzen wir also

$$V_K = \{v \in V \mid \dim\langle Kv \rangle < \infty\}$$

11.10.7. Die Notation  $V_K$  kann alternativ auch den Raum der “Koinvarianten” unter der Operation von  $K$  auf  $V$  bedeuten. Welche Bedeutung jeweils gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. In 10.5.4 hatten wir gezeigt, daß die  $K$ -endlichen Vektoren der rechtsregulären Darstellung einer Gruppe  $K$  mit den  $K$ -endlichen Vektoren der linksregulären Darstellung zusammenfallen und hatten diese Funktionen auf unserer Gruppe die “darstellenden Funktionen” genannt. In 10.5.5 hatten wir Analoges für die stetigen regulären Darstellungen einer topologischen Gruppe gezeigt.

**Satz 11.10.8 (Dichtheit der  $K$ -endlichen Vektoren).** *In jeder von-Neumann-Darstellung einer separablen kompakten Hausdorff’schen Gruppe  $K$  liegen die  $K$ -endlichen Vektoren dicht.*

*Beweis.* Sei  $V$  unsere Darstellung und  $w \in V$  ein Vektor und  $U \subset V$  eine Umgebung der Null. Es gilt zu zeigen  $V_K \cap (w + U) \neq \emptyset$ . Wir wählen dazu in  $V$  mithilfe von 11.10.5 eine abgeschlossene konvexe Umgebung  $C$  der Null mit  $C + C \subset U$ . Sicher finden wir dann eine kompakte Umgebung  $\Omega \subset K$  des neutralen Elements mit  $\Omega w \subset w + C$  und  $f : K \rightarrow [0, \infty)$  stetig mit  $\text{supp } f \subset \Omega$  und  $\int f \mu = 1$  für  $\mu$  das normierte Haar-Maß von  $K$ . Mit 11.8.10 folgt  $f * w \in w + C$ . Nun ist  $Kw$  kompakt, folglich finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon Kw \subset C$ . Nach dem Satz von Peter und Weyl 10.9.7 gibt es für dieses  $\varepsilon$  eine darstellende Funktion  $h : K \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\|h - f\|_\infty < \varepsilon$  und folglich

$$h * w \in f * w + C \subset w + C + C \subset w + U$$

Dies  $h * w$  ist dann der gesuchte  $K$ -endliche Vektor in  $w + U$ . □

**Korollar 11.10.9 (Irreduzible Darstellungen kompakter Gruppen).** *Jede irreduzible von-Neumann-Darstellung einer separablen kompakten Hausdorff’schen Gruppe ist endlichdimensional.*

*Beweis.* Sei  $K$  unsere Gruppe und  $V$  unsere Darstellung. Nach 11.10.8 gibt es in  $V$  einen von Null verschiedenen  $K$ -endlichen Vektor  $v$  und  $\langle Kv \rangle_{\mathbb{C}} \subset V$  ist nach 11.1.12 abgeschlossen als endlichdimensionaler Teilraum eines Hausdorff’schen topologischen Vektorraums. Aus der Irreduzibilität von  $V$  folgt dann  $\langle Kv \rangle_{\mathbb{C}} = V$ . □

**Satz 11.10.10 (Induktion von von-Neumann-Darstellungen).** *Gegeben ein stetiger Homomorphismus von lokal kompakten Gruppen macht der zugehörige Induktionsfunktorkomplex von von-Neumann-Darstellungen zu von-Neumann-Darstellungen.*

*Beweis.* Jeder abgeschlossene Untervektorraum eines von-Neumann-Raums ist nach 11.8.3 ein von-Neumann-Raum. Der Satz folgt damit aus dem anschließenden Lemma 11.10.11. □

**Lemma 11.10.11 (Vollständigkeit von Funktionenräumen).** *Ist  $X$  lokal kompakt und  $A$  eine vollständige abelsche topologische Gruppe, so ist auch  $\mathcal{C}(X, A)$  eine vollständige abelsche topologische Gruppe für die kompakt-offene Topologie und die punktweise Verknüpfung.*

*Beweis.* Gegeben  $U \subset A$  schreiben wir für das Bild von  $U^n \subset A^n$  unter der Verknüpfung auch kurz  $U^n \subset A$ . Sei  $\mathcal{F}$  ein Cauchy-Filter in  $\mathcal{C}(X, A)$ . Gegeben  $x \in X$  erzeugen die  $U \subseteq A$  mit  $\mathcal{O}(x, U) \in \mathcal{F}$  offensichtlich einen Cauchy-Filter  $\mathcal{F}_x$  in  $A$ . Da  $A$  vollständig ist, konvergieren die Filter  $\mathcal{F}_x$  in  $A$ . Wir betrachten nun die Abbildung  $f : X \rightarrow A$ , die jedem  $x \in X$  einen Grenzwert des Filters  $\mathcal{F}_x$  zuordnet, und behaupten, daß  $f$  stetig ist und daß unser Filter  $\mathcal{F}$  gegen  $f$  konvergiert. Gegeben ein Punkt  $x \in X$ , eine offene unter Inversenbildung stabile Umgebung  $U$  des neutralen Elements in  $A$  und eine kompakte Umgebung  $K$  von  $x$  gibt es  $h \in \mathcal{C}(X, A)$  mit  $h\mathcal{O}(K, U) \in \mathcal{F}$ . Natürlich gilt dann auch  $\mathcal{O}(y, h(y)U) \in \mathcal{F}$  für alle  $y \in K$  und wir folgern  $f(y)U \cap h(y)U \neq \emptyset$  alias  $f(y) \in h(y)U^2$  für alle  $y \in K$ . Verkleinern wir nun  $K$  zu einer kompakten Umgebung von  $x$  derart, daß zusätzlich auch noch gilt  $h(K) \subset h(x)U$ , so folgt

$$f(K) \subset h(x)U^3 \subset f(x)U^5$$

und  $f$  ist in der Tat stetig. Es gilt nun noch zu zeigen, daß  $\mathcal{F}$  gegen  $f$  konvergiert. Indem wir unseren Filter mit  $f^{-1}$  verschieben, dürfen wir annehmen, daß alle  $\mathcal{F}_x$  gegen das neutrale Element unserer Gruppe  $A$  konvergieren. Es gilt dann zu zeigen, daß  $\mathcal{F}$  gegen das neutrale Element von  $\mathcal{C}(X, A)$  konvergiert, daß also für beliebige  $K \subset X$  kompakt und  $U \subseteq A$  offen um das neutrale Element gilt  $\mathcal{O}(K, U) \in \mathcal{F}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierfür  $U$  stabil unter Inversenbildung annehmen. Da  $\mathcal{F}$  Cauchy ist, gibt es jedenfalls  $h \in \mathcal{C}(X, A)$  mit  $h\mathcal{O}(K, U) \in \mathcal{F}$ . Für alle  $x \in K$  muß hier  $h(x)U$  jede Umgebung des neutralen Elements in  $A$  treffen, es folgt also erst  $h(K) \subset U^2$  und dann  $\mathcal{O}(K, U^3) \in \mathcal{F}$ .  $\square$

### 11.11 Hauptseriendarstellungen von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$

**Definition 11.11.1.** In der Gruppe  $G = \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$  betrachten wir die Untergruppe  $B$  der oberen Dreiecksmatrizen. Gegeben  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  betrachten wir den Gruppenhomomorphismus  $\rho_{\lambda, \varepsilon} : B \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit

$$\rho_{\lambda, \varepsilon}(b) = |b_{11}|^\lambda (\mathrm{sgn}(b_{11}))^\varepsilon$$

der entsteht durch das Bilden des oberen linken Eintrags  $b \mapsto b_{11}$  gefolgt von einem beliebigen stetigen Homomorphismus  $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , vergleiche [V.1.6.6](#).

Der Leser mag zur Übung prüfen, daß wir so genau alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $B \rightarrow \mathbb{C}^\times$  erhalten. Indem wir  $b \in B$  durch die Multiplikation mit dem Wert des entsprechenden Gruppenhomomorphismus auf  $\mathbb{C}$  operieren lassen, erhalten wir eindimensionale stetige Darstellungen  $\mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon}$  von  $B$ . Die stetig induzierten Darstellungen

$$\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon}$$

heißen die **stetigen Hauptseriendarstellungen** von  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ , und zwar spricht man im Fall  $\varepsilon = 0$  von der **geraden Hauptserie** und im Fall  $\varepsilon = 1$  von der **ungeraden Hauptserie**.

**Satz 11.11.2 (Einfache Hauptserien von  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ ).** *Gegeben ein Paar  $(\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{C} \times \{0, 1\}$  ist die zugehörige stetige Hauptserie  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon}$  der Gruppe  $G = \text{SL}(2; \mathbb{R})$  irreduzibel genau dann, wenn gilt  $\lambda \notin \varepsilon + 2\mathbb{Z}$ .*

11.11.3. Salopp gesprochen sind also “fast alle” Hauptserien von  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$  irreduzibel. Als besonders interessant werden sich die übrigen Fälle erweisen.

11.11.4. *Das sollte Teil des Beweises werden!* Mit Ausnahme von  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{1,1}$  ist es nicht schwer zu sehen, daß die Hauptseriendarstellungen  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon}$  mit  $\lambda \in \varepsilon + 2\mathbb{Z}$  in der Tat nicht irreduzibel sind: Gilt etwa  $-\lambda = m \in \mathbb{N}$  und ist  $\varepsilon$  von derselben Parität wie  $m$ , so erkennt man für die einfache endlichdimensionale Darstellung  $L(m)$  von  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$

$$0 \neq \text{Modto}^B(L(m), \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon}) \xrightarrow{\sim} \text{Modto}^G(L(m), \text{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon})$$

mit expliziter Rechnung und Frobenius-Reziprozität, so daß unsere Hauptserie eine nach 11.1.12 abgeschlossene Unterdarstellung hat. Der einfachste Fall ist hier der Fall  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{0,0}$  des Raums aller  $B$ -linksinvarianten stetigen Funktionen  $G \rightarrow \mathbb{C}$ , in dem offensichtlich die konstanten Funktionen einen unter allen Rechtstranslationen invarianten Teilraum bilden. Dual mag man sich überlegen, daß  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{2,0}$  gerade aus den stetigen Volumenformen auf dem Quotienten  $B \backslash G$  besteht, und daß für jede Wahl der Orientierung das Integrieren einen von Null verschiedenen Homomorphismus von Darstellungen  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{2,0} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert. Ähnlich definiert das Multiplizieren zu einer Volumenform gefolgt vom Integrieren dieser Form auch allgemeiner  $G$ -äquivariante Paarungen

$$\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon} \times \text{ind}_B^G \mathbb{C}_{2-\lambda,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{C}$$

und alles, was unter Paarung mit allen Vektoren aus unseren endlichdimensionalen Unterdarstellungen nach Null geht, ist selbst eine abgeschlossene Unterdarstellung, diesmal von endlicher Kodimension. Sobald wir den Satz bewiesen haben, ist also nur noch offen, ob  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{1,1}$  irreduzibel ist. *Der Beweis ist an dieser Stelle noch unvollständig!*

*Beweis.* Bezeichne  $N \subset B$  die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. Unsere Definition der induzierten Darstellungen liefert offensichtliche abgeschlossene Einbettungen

$$\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda, \epsilon} \hookrightarrow \operatorname{ind}_N^G \mathbb{C}$$

Die Rechtswirkung von  $G = \operatorname{SL}(2; \mathbb{R})$  auf der Zeilenmatrix  $e_2 = (0, 1)$  induziert andererseits nach 3.9.7 einen Homöomorphismus  $N \backslash G \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus 0$  mit dem Raum der von Null verschiedenen Zeilenmatrizen und damit einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\kappa : \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \xrightarrow{\sim} \operatorname{ind}_N^G \mathbb{C}$$

gegeben durch  $(\kappa f)(g) = f(e_2 g)$ . Das Urbild unserer Hauptserie unter diesem Isomorphismus besteht gerade aus allen Funktionen  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$  mit  $(\kappa f)(bg) = \rho_{\lambda, \epsilon}(b)((\kappa f)(g))$  für alle  $b \in B$  alias

$$f\left((0, 1) \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} g\right) = |\beta|^\lambda (\operatorname{sgn} \beta)^\epsilon f((0, 1)g)$$

für alle  $\beta \in \mathbb{R}^\times$  und  $g \in \operatorname{SL}(2; \mathbb{R})$  alias

$$f(\beta^{-1}x, \beta^{-1}y) = |\beta|^\lambda (\operatorname{sgn} \beta)^\epsilon f(x, y)$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}^\times$ . Verwenden wir zusätzlich die Identifikation  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$  und notieren wie üblich  $z$  die Identität auf  $\mathbb{C}$  und betrachten  $K = \operatorname{SO}(2)$ , so liefert die Restriktion auf den Einheitskreis  $S^1 \subset \mathbb{C}$  auf den  $K$ -endlichen Vektoren für offensichtlich für alle  $\lambda$  Isomorphismen

$$\begin{aligned} (\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda, 0})_K &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[z^2, z^{-2}] \\ (\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda, 1})_K &\xrightarrow{\sim} z\mathbb{C}[z^2, z^{-2}] \end{aligned}$$

mit den geraden bzw. ungeraden trigonometrischen Polynomen, aufgefaßt als Funktionen auf dem Einheitskreis. Das Urbild der Funktion  $z^n$  auf der Kreislinie ist dann offensichtlich die Funktionen  $v_{n, \lambda} : z \mapsto |z|^{-\lambda} (z/|z|)^n$  auf  $\mathbb{C} \setminus 0$ . Die Wirkung eines Elements  $A$  der Lie-Algebra auf einem glatten Vektor  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$  ist gegeben durch

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\exp tA)f - f}{t}$$

In unserem Fall haben wir für jeden Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$  auch

$$(Af)(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y)(\exp tA)) - f(x, y)}{t}$$

Nun hat der Weg  $t \mapsto (x, y)(\exp tA)$  bei  $t = 0$  denselben Geschwindigkeitsvektor wie der Weg  $t \mapsto (x, y)(I + tA)$  oder in Koordinaten ausgeschrieben der Weg  $t \mapsto (x + xta_{11} + yta_{21}, y + xta_{12} + yta_{22})$  für  $a_{ij}$  die Einträge der Matrix  $A \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ . Unser Geschwindigkeitsvektor bei  $(x, y)$  ist also  $(xa_{11} + ya_{21})\partial_x + (xa_{12} + ya_{22})\partial_y$ . Nun gehen wir über zur Operation der komplexifizierten Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und wählen darin die Basis

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ X &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ Y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, daß  $H$  eine Basis von  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} K$  ist und die Lie-Klammern durch  $[H, X] = 2X$ ,  $[H, Y] = 2Y$ ,  $[X, Y] = H$  gegeben werden. Diese Elemente der komplexifizierten Lie-Algebra operieren dann durch Differentialoperatoren wie folgt:

$$\begin{aligned} H &\mapsto -i(y\partial_x - x\partial_y) &= \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - z\frac{\partial}{\partial z} \\ X &\mapsto \frac{1}{2}(ix\partial_x - iy\partial_y + x\partial_y + y\partial_x) &= i\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} \\ Y &\mapsto \frac{1}{2}(-ix\partial_x - iy\partial_y + x\partial_y + y\partial_x) &= -iz\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Hier sind ganz links Wirtinger-Ableitungen aus VIII.1.5.6 gemeint. Unsere Funktionen  $v_{n,\lambda} : z \mapsto |z|^{-\lambda}(z/|z|)^n$  lassen sich nun auf der längs der negativen reellen Achse geschlitzten komplexen Zahlenebene schreiben als

$$v_{n,\lambda} : z \mapsto z^{-n/2-\lambda/2}\bar{z}^{n/2-\lambda/2}$$

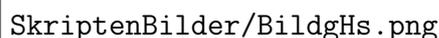
mit  $a^\mu = \exp(\mu \log a)$  für  $\log$  den Hauptzweig des Logarithmus. Mit dem Wirtingerkalkül VIII.1.5.9 erhalten wir dann sehr übersichtlich

$$\begin{aligned} H v_{n,\lambda} &= n v_{n,\lambda} \\ X v_{n,\lambda} &= -(i/2)(n + \lambda)v_{n+2,\lambda} \\ Y v_{n,\lambda} &= -(i/2)(n - \lambda)v_{n-2,\lambda} \end{aligned}$$

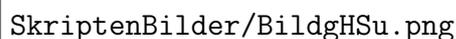
Der Wirtinger-Kalkül ist hier nicht eigentlich nötig, die Rechnung wird aber vergleichsweise mühsam und unübersichtlich, wenn man ihn vermeiden will. Den Faktor  $i$  können wir noch wegnormalisieren, indem wir bei festem  $\lambda$  zu den Vektoren  $w_{2n} = (-i)^n v_{2n}$  und  $w_{2n+1} = (-i)^n v_{2n+1}$  übergehen, und damit ergeben sich dann schließlich die besonders übersichtlichen Formeln

$$\begin{aligned} H w_n &= n w_n \\ X w_n &= (1/2)(\lambda + n)w_{n+2} \\ Y w_n &= (1/2)(\lambda - n)w_{n-2} \end{aligned}$$

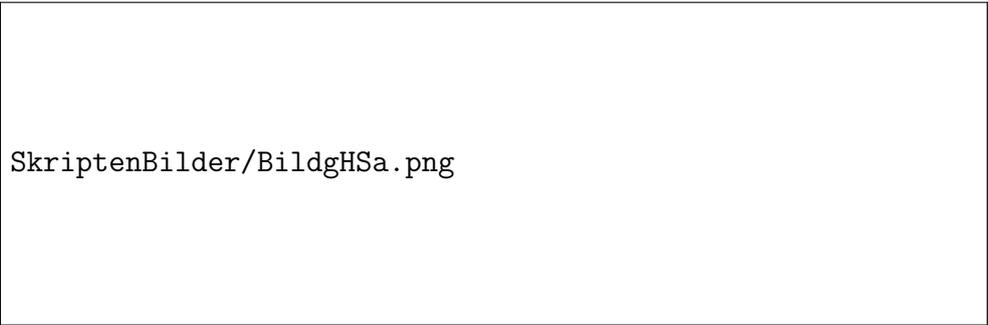
Sie sind es, die der nebenstehenden Abbildung zugrunde liegen. Jetzt ist der Beweis zwar noch nicht fertig, meine Geduld aber am Ende.  $\square$



Schematische Darstellung der geraden Hauptseriendarstellungen. Jeder fette Punkt steht für ein  $w_n$ , die oberen und nach rechts weisenden Pfeile deuten die Wirkung von  $2X$  an, die unteren und nach links weisenden Pfeile die Wirkung von  $2Y$ , und die auf ihren eigenen Ausgangspunkt weisenden Pfeile die Operation von  $H$ . Wir erkennen, daß diese Formeln eine Darstellung der Liealgebra liefern, die irreduzibel ist für  $\lambda \notin \varepsilon + 2\mathbb{Z}$ . Im Fall  $\lambda \in \varepsilon + 2\mathbb{Z}$  und  $\lambda \leq 0$  besitzt unsere Darstellung die einfache Darstellung der Dimension  $-\lambda + 1$  als Untermodul und der Quotient nach diesem Untermodul ist eine direkte Summe von zwei irreduziblen Darstellungen, den sogenannten diskreten Serien. Im Fall  $\lambda \in \varepsilon + 2\mathbb{Z}$  und  $\lambda = 1$  zerfällt unsere Darstellung in die direkte Summe von zwei irreduziblen Darstellungen, den sogenannten Grenzwerten von diskreten Serien. Im Fall  $\lambda \in \varepsilon + 2\mathbb{Z}$  und  $\lambda \geq 2$  schließlich finden wir die einfache Darstellung der Dimension  $\lambda - 1$  als Quotient und der Kern der Surjektion darauf zerfällt in eine direkte Summe von zwei irreduziblen Darstellungen, von denen der Leser leicht zeigen kann, daß sie isomorph sind zu uns bereits bekannten diskrete Serien.



Zwei diskrete Serien als Untermoduln der geraden Hauptserie im Fall  $\lambda = 4$



SkriptenBilder/BildgHSa.png

Ein fünfdimensionaler irreduzibler Untermodul der geraden Hauptserie im  
Fall  $\lambda = -4$



SkriptenBilder/BildgHSd.png

Zerfallen der ungeraden Hauptserie in zwei Grenzwerte diskreter Serien im  
Fall  $\lambda = 1$

11.11.5. Um die Irreduzibilität zu zeigen, sollten [V.1.7.12](#) und [10.11.4](#) hilfreich sein.

11.11.6. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß der sogenannte Casimir-Operator  $4YX + H(H+2)$  auf den Hauptserien mit Parameter  $\lambda$  wie die Multiplikation mit dem Skalar  $\lambda(\lambda - 2)$  wirkt.

11.11.7. Die diskreten Serien sollten als “abgeschlossener Teilraum der holomorphen Schnitte” in unitär von  $K$  induzierten Darstellungen realisiert werden.

## 11.12 Einfache $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln für $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$

Ich will nun diejenigen irreduziblen Darstellungen  $V$  der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  klassifizieren, die unter  $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  in eine direkte Summe von Eigenräumen zu ganzzahligen Eigenwerten zerfallen. Nach ?? operiert der Casimir-Operator aus [2.2.14](#) als Skalar, es gibt also  $c \in \mathbb{C}$  mit

$$4fev = cv - h(h+2)v \quad \forall v \in V$$

alias

$$\begin{aligned} 4fev &= (c+4)v - (h+2)^2v \\ 4efv &= (c+4)v - (h-2)^2v \end{aligned}$$

Sowohl  $fe$  als auch  $ef$  operieren also auf jedem  $h$ -Eigenraum  $V_n$  als Skalar und die Kompositionen der beiden Abbildungen

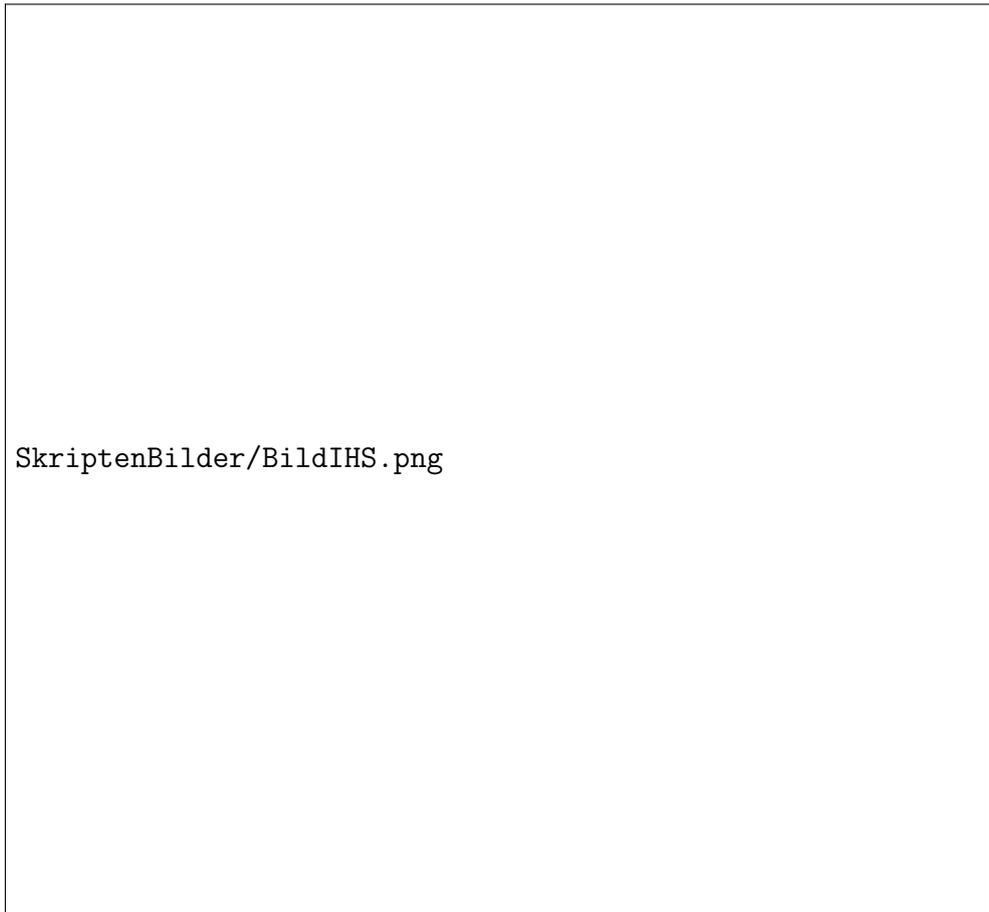
$$V_n \begin{array}{c} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{array} V_{n+2}$$

sind entweder beide Null oder es ist keine von beiden Null, und wir haben genauer

$$fe = 0 \Leftrightarrow c + 4 + (n+2)^2 \Leftrightarrow ef = 0$$

Wir erkennen so, daß gegeben eine einfache Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ , die unter  $h$  in Eigenräume zu ganzzahligen Eigenwerten zerfällt, die  $h$ -Gewichtsräume höchstens eindimensional sein können und daß die Angabe des Skalars  $c$  und eines  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $V_n \neq 0$  den irreduziblen  $\mathfrak{g}$ - $K$ -Modul  $V$  bereits bis auf Isomorphismus festlegt. Genauer finden wir, daß es nur die folgenden Möglichkeiten gibt:

1.  $(c+4) \neq m^2$  für alle  $m \in 2\mathbb{Z}$  und  $V_m \neq 0 \Leftrightarrow m \in 2\mathbb{Z}$ ;



Darstellung der Parameter  $\lambda \in \mathbb{C}$ , bei denen die geraden bzw. ungeraden Hauptseriendarstellungen  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda, \varepsilon}$  einfach und unitarisierbar sind.

2.  $(c + 4) \neq m^2$  für alle  $m \in 2\mathbb{Z} + 1$  und  $V_m \neq 0 \Leftrightarrow m \in 2\mathbb{Z} + 1$ ;
3.  $(c + 4) = n^2$  für  $n \in \mathbb{Z}$  und wir sind in genau einem der folgenden drei Fälle:
  - (a)  $V_m \neq 0 \Leftrightarrow m \in \{n + 2, n + 4, \dots\}$ ;
  - (b)  $V_m \neq 0 \Leftrightarrow m \in \{n, n - 2, \dots, -n\}$ ;
  - (c)  $V_m \neq 0 \Leftrightarrow m \in \{-n - 2, -n - 4, \dots\}$ .

Daß es alle dieser Darstellungen auch tatsächlich gibt, haben wir bereits in ?? gesehen.

**Satz 11.12.1.** *Sei  $G = \mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) \supset K = \mathrm{SO}(2)$  und  $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} G$ .*

1. *Zu jeder irreduziblen Darstellung  $\lambda$  von  $K$  und jedem  $c \in \mathbb{C}$  gibt es bis auf Isomorphismus genau einen irreduziblen  $\mathfrak{g}$ - $K$ -Modul  $V$  mit zentralem Charakter  $c$ , in dem  $\lambda$  als  $K$ -isotypische Komponente vorkommt;*
2. *Alle irreduziblen  $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln lassen sich als Subquotienten, ja sogar als Unterdarstellungen unserer Hauptseriendarstellungen realisieren.*

### 11.13 Darstellungen als Moduln über der Maß-Algebra

*Scheint mir zwar nett und natürlich, aber hier noch unnütz. Wird nötig bei unitären Darstellungen.*

**Lemma 11.13.1.** *Sei  $V$  eine von-Neumann-Darstellung einer topologischen Gruppe  $G$ . Für jedes kompakt getragene Maß  $\mu \in M_c(G)$  ist die Operation  $v \mapsto \mu v$  ein stetiger Endomorphismus von  $V$ .*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\mu$  ein endliches positives Maß mit Träger im Kompaktum  $K \subset G$ . Da wir gleichmäßige Stetigkeit im Zusammenhang mit uniformen Strukturen nicht diskutieren wollen, zeigen wir die wesentliche Aussage hier explizit. Gegeben eine Umgebung  $U$  der Null in  $V$  und  $g \in G$  und  $v \in V$  gibt es Umgebungen  $W_g$  von  $g$  und  $U_g$  von  $v$  mit

$$W_g U_g \subset gv + U$$

Endlich viele  $W_g$  überdecken  $K$ . Bezeichnet  $U_K$  den Schnitt der zugehörigen  $U_g$ , so folgt aus  $w \in U_K$  und  $k \in K$  schon  $kw - kw \in U + (-U)$ . Ist nun  $C$  eine abgeschlossene konvexe Umgebung der Null von  $V$ , so finden wir zunächst eine Umgebung  $U$  der Null mit  $U + (-U) \subset C$  und dann eine Umgebung  $U_K$  von  $v$  mit  $kv - kw \in C$  für alle  $k \in K$  und  $w \in U_K$ . Damit folgt dann

$$\mu v - \mu w \in \mu(G)C$$

für alle  $w \in U_K$ . Da nach 11.10.5 jede Umgebung der Null eine abgeschlossene konvexe Umgebung der Null enthält, ergibt sich das Lemma.  $\square$

**Satz 11.13.2 (Darstellungen als Moduln über der Maß-Algebra).** *Jede von-Neumann-Darstellung einer separablen topologischen Gruppe wird mit der Operation V.3.9.3 zu einem Modul über der Algebra der kompakt getragenen komplexen Maße auf besagter Gruppe.*

*Beweis.* Sei  $V$  unsere von-Neumann-Darstellung und  $G$  unsere topologische Gruppe. Die einzige Schwierigkeit liegt im Nachweis des Assoziativgesetzes

$$(\mu\nu)v = \mu(\nu v)$$

für alle  $v \in V$  und  $\mu, \nu \in M_c(G)$ . Es gilt dazu, die Gleichheit

$$\int_{G \times G} ghv (\mu \boxtimes \nu)\langle g, h \rangle = \int_G g \left( \int_G hv \nu\langle h \rangle \right) \mu\langle g \rangle$$

nachzuweisen. Da  $g$  einen stetigen Endomorphismus von  $V$  liefert, dürfen wir nach 11.8.11 rechts auch noch  $g$  unter das Integral ziehen. Die Gleichheit der Integrale folgt damit aus der vektorwertigen Version des Satzes von Fubini 11.13.4.  $\square$

**Lemma 11.13.3 (Vektorwertige Integrale mit Parametern).** *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(Y, \nu)$  ein kompakter Raum mit einem komplexen topologischen Maß. Ist  $f : X \times Y \rightarrow V$  eine stetige Abbildung in einen von-Neumann-Raum, so ist  $x \mapsto \int_Y f(x, y)\nu\langle y \rangle$  eine stetige Abbildung  $X \rightarrow V$ .*

*Beweis.* Nach 11.2.13 ist die von  $f$  induzierte Abbildung  $X \rightarrow \mathcal{C}(Y, V)$  stetig und es muß nur gezeigt werden, daß das Integrieren eine stetige Abbildung  $\mathcal{C}(Y, V) \rightarrow V$  liefert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir unser Maß nichtnegativ annehmen. Nach 11.10.5 läßt sich aber jede Umgebung des Ursprungs von  $V$  zu einer abgeschlossenen konvexen Umgebung  $C$  verkleinern, und nach 11.8.10 landet die Umgebung  $\mathcal{O}(Y, C)$  der Null von  $\mathcal{C}(Y, V)$  unter dem Integrieren bereits in  $\nu(Y)C$ .  $\square$

**Lemma 11.13.4 (Eine vektorwertige Version des Satzes von Fubini).** *Seien  $X$  und  $Y$  separable topologische Räume und  $\mu \in M_1(X)$ ,  $\nu \in M_1(Y)$  kompakt getragene komplexe Maße. Ist  $f : X \times Y \rightarrow V$  eine stetige Abbildung in einen von-Neumann-Raum, so gilt*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y \rangle = \int_X \left( \int_Y f(x, y)\nu\langle y \rangle \right) \mu\langle x \rangle$$

*Beweis.* Das Doppelintegral auf der rechten Seite ist sinnvoll, da nach [11.13.3](#) das innere Integral stetig von  $x \in X$  abhängt. Um die Gleichheit der beiden Integrale zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Maße als nichtnegativ annehmen und müssen nur prüfen, daß jede stetige  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $V \rightarrow \mathbb{R}$  auf beiden Seiten dieselben Werte annimmt. Das folgt jedoch aus dem gewöhnlichen Satz von Fubini.  $\square$

## 12 Unitäre Darstellungen

### 12.1 Irreduzible unitäre Darstellungen von $SL(2; \mathbb{R})$

**Satz 12.1.1.** *Die isotypischen Komponenten unter  $K = SO(2)$  einer irreduziblen unitären Darstellung von  $G = SL(2; \mathbb{R})$  sind höchstens eindimensional.*

12.1.2. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst gegen Ende dieses Abschnitts gegeben.

**Satz 12.1.3 (Schur'sches Lemma für unitäre Darstellungen).** *Alle Endomorphismen einer irreduziblen unitären Darstellung sind Skalare.*

12.1.4. Für diesen und den nächsten Satz werden keinerlei Voraussetzungen an die dargestellte Gruppe benötigt, die man also auch einfach als diskret annehmen kann.

*Beweis.* Sei  $G$  die dargestellte Gruppe und  $\mathcal{H}$  unsere irreduzible unitäre Darstellung. Mit einem Endomorphismus  $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  unserer Darstellung sind auch die mit seinem Adjungierten  $B^*$  gebildeten Operatoren  $(B + B^*)/2$  und  $(B - B^*)/2i$  Endomorphismen unserer Darstellung  $\mathcal{H}$ . Sie sind darüberhinaus selbstadjungiert. Besteht das Spektrum von  $(B + B^*)/2$  nicht nur aus einem Punkt, so liefern nach dem Spektralsatz V.3.6.11.3 die Projektoren zu  $(-\infty, a]$  und zu  $(a, \infty)$  für geeignetes  $a \in \mathbb{R}$  eine "verallgemeinerte Eigenraumzerlegung" von  $\mathcal{H}$  in zwei von Null verschiedene orthogonale und  $G$ -invariante Teilräume. Dasselbe gilt für  $(B - B^*)/2i$ . Da wir unsere Darstellung irreduzibel angenommen hatten, müssen diese selbstadjungierten Operatoren beide ein einpunktiges Spektrum haben. Nach V.3.4.8 werden sie dann gegeben durch die Multiplikation mit reellen Skalaren, und damit ist notwendig  $B$  selbst ein komplexer Skalar.  $\square$

**Korollar 12.1.5 (Dichtesatz für unitäre Darstellungen).** *Sei  $\mathcal{H}$  eine irreduzible unitäre Darstellung einer Gruppe  $G$ . Gegeben  $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{H}$  linear unabhängig und  $v'_1, \dots, v'_r \in \mathcal{H}$  beliebig gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein Element des Gruppenrings  $\mu \in \mathbb{C}G$  mit*

$$\|\mu v_i - v'_i\| < \varepsilon \quad \text{für } 1 \leq i \leq r$$

*Beweis.* Es gilt, für die unitäre Darstellung von  $G$  auf  $\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H} = \mathcal{H}^r$  zu zeigen, daß das Erzeugnis  $\mathbb{C}G(v_1, \dots, v_r)$  der  $G$ -Bahn des  $r$ -Tupels  $(v_1, \dots, v_r)$  dicht liegt. Sicher ist der Abschluß dieses Erzeugnisses ein  $G$ -invarianter Teilraum und der Projektor  $P$  auf besagten Teilraum gehört zum Endomorphismenring  $\text{Modto}^G(\mathcal{H}^r)$ , den wir aufgrund des Schur'schen Lemmas 12.1.3

mit dem Matrizenring  $M(r \times r; \mathbb{C})$  identifizieren können, dessen Operation als eine Art “Matrixmultiplikation” aufgefaßt werden kann, wenn wir unsere  $r$ -Tupel als Spalten schreiben, was wir von nun an durch einen hochgestellten “Transponierindex”  $\top$  andeuten werden. Da jedoch auch das Tupel  $(v_1, \dots, v_r)^\top$  selbst zu unserem Teilraum gehört, haben wir notwendig  $P(v_1, \dots, v_r)^\top = (v_1, \dots, v_r)^\top$ . Setzen wir nun  $P$  als Matrix an und beachten die lineare Unabhängigkeit der  $v_i$ , so folgt  $P = \text{id}$  in  $\text{Modto}^G(\mathcal{H}^r)$ .  $\square$

**Korollar 12.1.6.** *Sei  $G$  eine lokal kompakte separable topologische Gruppe und  $K \subset G$  eine kompakte Untergruppe. Sei  $\mathcal{H}$  eine irreduzible unitäre Darstellung von  $G$ . Gegeben  $\lambda \in \hat{K}$  und  $v_1, \dots, v_r \in e_\lambda \mathcal{H}$  linear unabhängig und  $v'_1, \dots, v'_r \in e_\lambda \mathcal{H}$  beliebig und  $\varepsilon > 0$  gibt es ein Maß  $\mu \in e_\lambda M_c(G) e_\lambda$  mit*

$$\|\mu v_i - v'_i\| < \varepsilon \quad \text{für } 1 \leq i \leq r$$

*Beweis.* Zunächst finden wir  $\tilde{\mu} \in \mathbb{C}G$  wie im Dichtesatz 12.1.5, dann nehmen wir  $\mu = e_\lambda \tilde{\mu} e_\lambda$ .  $\square$

**Lemma 12.1.7.** *Ein kompakt getragenes Maß auf  $G = \text{SL}(2; \mathbb{R})$ , das auf jeder stetigen einfachen endlichdimensionalen Darstellung durch Null operiert, ist bereits selbst Null.*

*Beweis.* Es reicht, den Fall reeller Maße zu betrachten. Sei also  $\mu \in M_1(G; \mathbb{R})$  gegeben. Aus unseren Annahmen folgt mithilfe von ??, daß für jede Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich als Polynom in den Matrixkoeffizienten darstellen läßt, bereits gilt  $\mu f = 0$  und damit

$$(\mu f)(e) = \int f(g^{-1}) \mu \langle g \rangle = 0$$

Da aber unser Maß kompakten Träger hat und sich auf einem Kompaktum nach Stone-Weierstraß jede stetige Funktion beliebig gut durch polynomiale Funktionen approximieren läßt, folgt für alle stetigen Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  sofort  $\mu f = 0$  und insbesondere  $\int f(g^{-1}) \mu \langle g \rangle = 0$ .  $\square$

**Lemma 12.1.8.** *Für die Gruppen  $G = \text{SL}(2; \mathbb{R}) \supset K = \text{SO}(2)$  gilt: Gegeben  $\lambda \in \hat{K}$  eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung und  $e_\lambda \in M(K)$  der zugehörige Projektor besteht der Teilraum  $e_\lambda M_1(G) e_\lambda \subset M(G)$  aus paarweise kommutierenden Maßen.*

*Beweis.* Gegeben  $\mu, \nu \in e_\lambda M_1(G) e_\lambda$  gilt es zu zeigen  $\mu\nu - \nu\mu = 0$ . Nach 12.1.7 reicht es zu zeigen, daß  $\mu\nu - \nu\mu$  auf jeder stetigen einfachen endlichdimensionalen Darstellung  $E$  von  $G$  durch Null operiert. Das ist jedoch klar, da für diese Darstellungen die  $K$ -isotypischen Komponenten  $e_\lambda E$  eindimensional sind.  $\square$

*Beweis von Satz 12.1.1.* Gibt es in der isotypischen Komponente  $e_\lambda \mathcal{H}$  ein Paar linear unabhängiger Vektoren, so finden wir beschränkte Operatoren  $F, G : e_\lambda \mathcal{H} \rightarrow e_\lambda \mathcal{H}$  mit  $FG \neq GF$  und damit notgedrungen auch einen Vektor  $v \in e_\lambda \mathcal{H}$  mit  $FGv \neq GFv$ . Nach 12.1.6 finden wir dann für alle  $\varepsilon > 0$  ein Maß  $\mu \in e_\lambda M_1(G)e_\lambda$  mit

$$\|\mu w - Fw\| \leq \varepsilon \|w\|$$

für alle  $w \in \langle v, Gv \rangle$ . Des weiteren finden wir für alle  $\eta > 0$  ein Maß  $\nu \in e_\lambda M_1(G)e_\lambda$  mit

$$\|\nu w - Gw\| \leq \eta \|w\|$$

für alle  $w$  im Vektorraumzeugnis  $\langle v, \mu v \rangle$ . Zusammen ergibt sich also das folgende Bild, an dem an den senkrechten Strichen jeweils obere Schranken für die Abstände der durch sie verbundenen Vektoren stehen:

$$\begin{array}{ccc}
 FGv & & GFv \\
 \left| \begin{array}{c} \leq \varepsilon \cdot \|G\| \cdot \|v\| \\ \mu Gv \\ \leq \|\mu\| \cdot \eta \cdot \|v\| \\ \mu \nu v \end{array} \right. & & \left| \begin{array}{c} \leq \|G\| \cdot \varepsilon \cdot \|v\| \\ G \mu v \\ \leq \eta \cdot \|\mu\| \cdot \|v\| \\ \nu \mu v \end{array} \right.
 \end{array}$$

und wo  $\|G\|$  und  $\|\mu\|$  die Normen der entsprechenden Operatoren auf der isotypischen Komponente meinen. Wählen wir erst  $\varepsilon$  hinreichend klein für  $\|G\|$  und  $\|v\|$  und dazu unser  $\mu$  und dann wieder  $\eta$  hinreichend klein für  $\|\mu\|$  und  $\|v\|$ , so finden wir  $\mu, \nu$  derart, daß die Abstände in den Vertikalen kleiner werden als jede vorgegebene positive Schranke. Damit steht aber  $FGv \neq GFv$  im Widerspruch zur Identität  $\mu \nu v = \nu \mu v$ , die wir bereits aus 12.1.8 kennen. □

### 12.2 Unitäre g-K-Moduln

Ist  $V$  eine unitäre Darstellung einer Liegruppe  $G$ , so gilt für je zwei glatte Vektoren  $v, w \in V^\infty$  und jedes  $A \in \text{Lie } G$  die Identität

$$\langle \exp(tA)v, w \rangle = \langle v, \exp(-tA)w \rangle$$

und daraus folgt sofort

$$\langle Av, w \rangle = -\langle v, Aw \rangle$$

und für Elemente der komplexifizierten Liealgebra  $D \in \text{Lie}_\mathbb{C} G$  folgt

$$\langle Dv, w \rangle = -\langle v, \bar{D}w \rangle$$

Insbesondere haben wir in unserem Fall

$$\langle Xv, w \rangle = -\langle v, Yw \rangle$$

und damit

$$\langle Xv, Xv \rangle = -\langle v, YXv \rangle$$

Wir erkennen so, daß es auf einer irreduziblen Hauptseriendarstellung  $\text{ind}_B^G \mathbb{C}_{\lambda, \epsilon}$  nur dann ein invariantes Skalarprodukt geben kann, wenn gilt

$$0 > (\lambda + n)(\lambda - n - 2) = \lambda(\lambda - 3) - n(n + 2)$$

für alle  $n \in \epsilon + 2\mathbb{Z}$ . Das ist für  $\epsilon = 0$  gleichbedeutend zu  $0 > \lambda(\lambda - 2)$  alias  $1 > (\lambda - 1)^2$  und das gilt für  $\lambda \in 1 + i\mathbb{R}$  sowie  $\lambda \in (2, 0)$ . Für  $\epsilon = 1$  ist es hinwiederum gleichbedeutend zu

$$0 > \lambda(\lambda - 2) + 1$$

alias  $0 > (\lambda - 1)^2$  und hier kommt nur  $\lambda \in 1 + i\mathbb{R}^x$  in Frage.

Dieselben Argumente zeigen, daß von den endlichdimensionalen einfachen Darstellungen nur die triviale Darstellung unitarisierbar sein kann, daß aber die diskreten Serien und ihre Grenzwerte auch infinitesimal unitarisierbar sind.

### 12.3 Unitarisierbarkeit

Gegeben ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  erinnern wir seinen komplex-konjugierten Vektorraum  $\bar{V}$  aus ?? an seinen Dualraum  $V^*$ . Wir erhalten eine Bijektion

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, V^*) \xrightarrow{\sim} \{ \text{Sesquilinearformen auf } V \}$$

indem wir jedem Homomorphismus  $\varphi$  die Sesquilinearform  $s_\varphi$  zuordnen, die gegeben wird durch  $s_\varphi(v, w) = (\varphi(v))(w)$ . Um zu verstehen, welche Homomorphismen hermiteschen Sesquilinearformen entsprechen, beachten wir den kanonischen Isomorphismus  $\bar{V}^* \xrightarrow{\sim} \overline{V^*}$  gegeben durch  $f \mapsto c \circ f$  für  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Konjugation. Zu  $\varphi : \bar{V} \rightarrow V^*$  betrachten wir nun die transponierte Abbildung  $\varphi^T : V^{**} \rightarrow \bar{V}^*$ , schalten die kanonischen Einbettungen  $b : V \hookrightarrow V^{**}$  davor und die Identifikation  $(c \circ) : \bar{V}^* \rightarrow \overline{V^*}$  dahinter. Die so entstehende lineare Abbildung

$$c \circ \varphi^T \circ b : V \rightarrow \overline{V^*}$$

ist natürlich auch eine lineare Abbildung  $\bar{V} \rightarrow V^*$ , und unsere obige Bijektion induziert nun eine Bijektion

$$\{ \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, V^* \mid \varphi = c \circ \varphi^T \circ b \} \xrightarrow{\sim} \{ \text{hermitesche Sesquilinearformen auf } V \}$$

## 12.4 Unitäre Induktion

12.4.1. Ist  $X$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit, so liefert jede endlichdimensionale  $\mathcal{C}^\infty$ -Darstellung  $E$  der Gruppe  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  ein Vektorraumbündel  $E_X$  auf  $X$  in kanonischer Weise, und ist  $\varphi : U \hookrightarrow X$  eine offene Einbettung oder allgemeiner eine étale  $\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus  $\varphi^* E_X \xrightarrow{\sim} E_U$ , der es uns insbesondere erlaubt, Schnitte zurückzuziehen. Zur natürlichen Darstellung auf  $\mathbb{R}^n$  gehört das Tangentialbündel  $TX$ , zu ihrer Dualen das Kotangentialbündel  $T^*X$ , zu  $\det^{-1} : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  das sogenannte **kanonische Bündel**  $\omega_X$  und zu  $|\det^{-1}| : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  das **Bündel der lokalen Dichten**

$$D_X$$

Die Schnitte in diesem Bündel nennen wir **Dichten auf  $X$**  und notieren die stetigen Dichten bzw. die stetigen Dichten mit kompaktem Träger  $\mathcal{D}(X) \supset \mathcal{D}_c(X)$ . Auf  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  definieren wir eine ausgezeichnete Dichte  $d^n x$ , und eine beliebige stetige Dichte hat die Gestalt  $a d^n x$  mit  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Ist weiter  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  gegeben und  $\varphi : V \rightarrow U$  étale, so haben wir  $\varphi^*(a d^n x) = (a \circ \varphi) |\det d\varphi| d^n x$ .

**Satz 12.4.2 (Integration von Dichten).** *Gegeben eine  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  gibt es genau eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\mathcal{D}_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto \int_X \omega$  derart, daß für jede Karte  $\varphi : U \rightarrow X$  und jedes  $\omega$  mit Träger in  $U$  gilt  $\int_X \omega = \int_U \varphi^* \omega$ .*

*Beweis.* Dem Leser überlassen.  $\square$

**Definition 12.4.3.** Das Geradenbündel zur Darstellung  $\sqrt{|\det^{-1}|} : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  nennen wir das **Bündel der lokalen Halbdichten auf  $X$**  und notieren es  $D_X^{1/2}$ . Die Räume der Schnitte bzw. der Schnitte mit kompaktem Träger in dieses Bündel bezeichnen mit

$$\mathcal{D}^{1/2}(X) \supset \mathcal{D}_c^{1/2}(X)$$

und nennen solche Schnitte **Halbdichten auf  $X$** .

12.4.4. Ganz offensichtlich ist das Produkt zweier Halbdichten eine Dichte, und wir erhalten ein Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{D}_c^{1/2}(X)$  der stetigen Halbdichten mit kompaktem Träger auf  $X$  durch die Vorschrift

$$\langle s, t \rangle = \int_X st$$

Die Vervollständigung dieses Raums notieren wir  $L^2(X)$  und haben somit jeder Mannigfaltigkeit  $X$  in kanonischer Weise einen reellen Hilbertraum zugeordnet, den **Hilbertraum der quadratintegrierbaren Halbdichten**

**auf**  $X$ . Operiert eine diskrete Gruppe  $G$  auf  $X$  durch Diffeomorphismen, so wird offensichtlich  $L^2(X)$  eine (reelle) unitäre Darstellung von  $G$ . Ist  $G$  eine Lie-Gruppe und  $G \times X \rightarrow X$  eine  $C^\infty$ -Operation, so zeige man zur Übung, daß  $L^2(X)$  sogar eine unitäre Darstellung der topologischen Gruppe  $G$  wird.

**Definition 12.4.5.** Ist  $G \supset H$  eine Lie-Gruppe mit einer abgeschlossenen Untergruppe und  $E$  eine unitäre Darstellung von  $H$ , so definieren wir eine unitäre Darstellung

$$\text{uind}_H^G E$$

von  $G$ , die **unitär induzierte Darstellung**, als die Vervollständigung des Raums der stetigen Schnitte mit kompaktem Träger im Bündel  $D_{G/H}^{1/2} \otimes_{\mathbb{R}} (G \times_H E)$  über  $G/H$ .

12.4.6. Betrachten wir den Charakter  $\delta : H \rightarrow \mathbb{R}^\times$  mit

$$\delta(h) = |\det(\text{Ad } h : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h})|^{-1/2}$$

so liefert jede Wahl einer von Null verschiedenen Halbdichte an der Stelle  $\bar{1} \in G/H$  einen  $G$ -äquivalenten Bündelisomorphismus

$$G \times_H \mathbb{R}_\delta \xrightarrow{\sim} D_{G/H}^{1/2}$$

und damit  $G$ -äquivalente Einbettungen

$$\text{uind}_H^G E \hookrightarrow \mathcal{S}_c(D_{G/H}^{1/2} \otimes_{\mathbb{R}} (G \times_H E)) \hookrightarrow \text{ind}_H^G (E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_\delta)$$

Ist speziell  $G/H$  kompakt, so erhalten wir eine stetige Einbettung mit dichtem Bild  $\text{ind}_H^G (E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_\delta) \hookrightarrow \text{uind}_H^G E$ .

Sei nun  $K \subset G$  kompakt. Das Bild der  $K$ -endlichen Vektoren aus  $\text{ind}$  ist also ein dichter Teilraum von  $\text{uind}$ , und ist  $\text{ind}$  in Bezug auf  $K$  zulässig, so induziert unsere Einbettung eine Bijektion zwischen den  $K$ -endlichen Vektoren.

Wo???????? Um auch einmal eine unitäre Darstellungen anzugeben, greifen wir der Entwicklung der Theorie etwas vor, setzen die in ?? ausgeführte Definition eines Radon-Maßes als bekannt voraus und zeigen

**Lemma 12.4.7.** *Es operiere eine lokal kompakte topologische Gruppe  $G$  stetig auf einem lokal kompakten Hausdorff-Raum  $X$  und es sei  $\mu$  ein  $G$ -invariantes Radon-Maß auf  $X$ . So ist  $L^2(X, \mu)$  unter der Operation durch Translation eine unitäre Darstellung von  $G$ .*

*Beweis.* Sicher operiert  $G$  als abstrakte Gruppe durch unitäre Automorphismen auf  $L^2(X, \mu)$ . Um die Stetigkeit von  $G \times L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$  zu zeigen reicht es deshalb, für alle  $f$  aus einer dichten Teilmenge von  $L^2(X, \mu)$  die Stetigkeit von  $G \rightarrow L^2(X, \mu)$ ,  $g \mapsto gf$  nachzuweisen.

Da  $\mu$  ein Radon-Maß ist, liegen die stetigen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  mit kompaktem Träger dicht in  $L^2(X, \mu)$ . Gegeben  $K \subset X$  kompakt stimmt auf dem Raum  $\mathcal{C}_K(X)$  der stetigen Funktionen mit Träger in  $K$  die Sup-Norm-Topologie überein mit der von  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  induzierten Topologie. Gegeben  $L \subset G$  kompakt ist nach ?? also die Operation  $L^{-1} \times \mathcal{C}_K(X) \rightarrow \mathcal{C}_{LK}(X)$  stetig. Für beliebige  $f \in \mathcal{C}_!(X)$  ist mithin die Abbildung  $G \rightarrow L^2(X, \mu)$ ,  $g \mapsto gf$  stetig.  $\square$

Ist insbesondere  $G$  lokal kompakt Hausdorff'sch und wählen wir ein linksinvariantes Haar-Maß  $dg$  auf  $G$  wie es in ?? definiert wird, so wird  $L^2(G, dg)$  mit der linksregulären Operation eine unitäre Darstellung von  $G$ .

## 12.5 Weitere Beispiele stetiger Darstellungen mit Kategorien, ALT

**Definition 12.5.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

1. Eine **topologische Gruppe über  $X$**  ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie  $\text{Top}_X$  der topologischen Räume über  $X$ .
2. Ein **topologischer Vektorraum  $E$  über  $X$**  ist eine topologische Gruppe  $E$  über  $X$  mitsamt einer stetigen Abbildung  $\mathbb{C} \times E \rightarrow E$ , die kommutiert mit der Projektion beider Seiten auf  $X$  und die jede Faser der Projektion  $E \rightarrow X$  zu einem topologischen Vektorraum macht.

*Beispiel 12.5.2.* Jedes Vektorraumbündel über  $X$  ist ein topologischer Vektorraum über  $X$ . Ist speziell  $X$  ein topologischer Raum und  $V$  ein topologischer Vektorraum, so ist  $X \times V$  ein topologischer Vektorraum über  $X$  in natürlicher Weise.

**Proposition 12.5.3.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

1. Gegeben eine topologische Gruppe  $E$  über  $X$  ist der Raum der Schnitte  $\mathcal{S}(E) = \text{Top}_X(X, E)$  mit der punktweisen Verknüpfung eine topologische Gruppe.
2. Gegeben ein topologischer Vektorraum über  $X$  ist der Raum der Schnitte mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein topologischer Vektorraum.

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Korollar 11.3.8.  $\square$

## 13 Stetige Darstellungen von Lie-Gruppen

### 13.1 Differenzieren vektorwertiger Funktionen

13.1.1. In der Analysis, genauer in IV.1.2.2, haben wir unter anderem das Differenzieren von Abbildungen von einer halboffenen Teilmenge eines normierten reellen Raums in einen normierten reellen Vektorraum besprochen. Es ist nun so, daß die dort gegebenen Definitionen, Resultate und Beweise sich ohne Schwierigkeiten verallgemeinern lassen auf den Fall von Abbildungen von einer halboffenen Teilmenge eines normierten reellen Raums oder auch einer offenen Teilmenge einer Mannigfaltigkeit in einen beliebigen reellen Hausdorff'schen topologischen Vektorraum. Wir formulieren im Folgenden als Referenz die Definitionen und Resultate in dieser Allgemeinheit, überlassen die Beweise jedoch im Wesentlichen dem Leser.

**Definition 13.1.2.** Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $V$  ein Hausdorff'scher topologischer Vektorraum,  $U \subset E$  eine halboffene Teilmenge und  $f : U \rightarrow V$  eine Abbildung. Wir nennen  $f$  **differenzierbar an der Stelle**  $p \in U$  genau dann, wenn es eine stetige lineare Abbildung  $L : \vec{E} \rightarrow V$  gibt derart, daß gilt

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(p + \vec{h}) - f(p) - L\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Gibt es solch eine Abbildung  $L$ , so ist sie wohlbestimmt, heißt das **Differential von  $f$  bei  $p$**  und wird notiert  $L = : d_p f$ . Im Spezialfall  $E = \mathbb{R}$  vereinbaren wir des weiteren die Notation  $f'(p) := (d_p f)(1)$ .

13.1.3. Nehmen wir hier an, daß die Topologie auf  $V$  von einer Norm herkommt, so erhalten wir modulo der üblichen Identifikation von  $V$  mit seinem eigenen Richtungsraum unsere bisherige Definition IV.1.2.2.

**Satz 13.1.4 (Kettenregel, erste Variante).** Seien  $U, V$  normierte reelle Räume und  $W$  ein Hausdorff'scher topologischer Vektorraum. Seien  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  halboffene Teilmengen und seien  $f : A \rightarrow V$ ,  $g : B \rightarrow W$  Abbildungen mit  $f(A) \subset B$ . Ist  $f$  differenzierbar in  $p \in A$  und  $g$  differenzierbar in  $f(p) \in B$ , so ist auch  $g \circ f$  differenzierbar in  $p \in A$  und es gilt

$$d_p(g \circ f) = (d_{f(p)}g) \circ (d_p f)$$

*Beweis.* Man kopiere den Beweis des Spezialfalls IV.1.3.1. □

**Definition 13.1.5.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow V$  eine Abbildung in einen Hausdorff'schen topologischen Vektorraum und  $p \in$

$M$  ein Punkt. Wir nennen  $f$  **differenzierbar bei  $p$**  genau dann, wenn für eine oder nach der Kettenregel 13.1.4 gleichbedeutend jede Karte  $\varphi : U \rightarrow M$  die Komposition  $f \circ \varphi : U \rightarrow V$  differenzierbar ist. In diesem Fall können wir für alle  $p \in M$  das Differential

$$d_p f : T_p M \rightarrow V$$

definieren durch die Eigenschaft  $d_p f \circ d_q \varphi = d_q(f \circ \varphi)$  für eine und jede Karte  $\varphi : U \rightarrow M$  mit  $\varphi(q) = p$ .

**Satz 13.1.6 (Kettenregel, zweite Variante).** *Sei  $f : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten,  $g : N \rightarrow W$  eine Abbildung von  $N$  in einen Hausdorff'schen topologischen Vektorraum  $W$  und  $p \in M$  ein Punkt. Ist  $g$  differenzierbar in  $f(p) \in N$ , so ist auch  $g \circ f$  differenzierbar in  $p$  und es gilt*

$$d_p(g \circ f) = (d_{f(p)} g) \circ (d_p f) : T_p M \rightarrow W$$

**Satz 13.1.7 (Kettenregel, dritte Variante).** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und seien  $V, W$  Hausdorff'sche topologische Vektorräume. Sei  $f : M \rightarrow V$  eine Abbildung und  $L : V \rightarrow W$  eine stetige lineare Abbildung. Ist  $f : M \rightarrow V$  differenzierbar an einer Stelle  $p \in M$ , so ist auch  $L \circ f$  differenzierbar in  $p$  und es gilt*

$$d_p(L \circ f) = L \circ (d_p f) : T_p M \rightarrow W$$

**Satz 13.1.8 (Komponentenregel).** *Seien  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $V_1, V_2$  Hausdorff'sche topologische Vektorräume und  $f = (f_1, f_2) : U \rightarrow V_1 \times V_2$  eine Abbildung. Genau dann ist  $f$  differenzierbar bei  $p \in M$ , wenn  $f_1$  und  $f_2$  es sind, und dann gilt für die Differentiale die Formel*

$$d_p f = (d_p f_1, d_p f_2) : T_p M \rightarrow V_1 \times V_2$$

13.1.9. Als Folgerung aus der Komponentenregel und der zweiten Variante der Kettenregel ergibt sich insbesondere die übliche **Summenregel** für das Differential der Summe zweier Abbildungen.

**Satz 13.1.10 (Mittelwertsatz).** *Sei  $V$  ein Hausdorff'scher topologischer Vektorraum,  $a < b$  reelle Zahlen und  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  eine differenzierbare Abbildung. Sei  $C \subset V$  konvex mit  $\gamma'(t) \in C$  für alle  $t \in [a, b]$ . Ist  $C$  offen oder abgeschlossen in  $V$ , so folgt*

$$\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C$$

*Beweis.* Man kopiere den Beweis von II.7.2.11. □

**Satz 13.1.11 (Differential und partielle Ableitungen).** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow V$  eine Abbildung in einen lokal konvexen Hausdorff'schen topologischen Vektorraum. Existieren alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  auf ganz  $U$  und sind stetig als Funktionen  $U \rightarrow V$ , so ist  $f$  differenzierbar an jeder Stelle  $p \in U$  mit Differential

$$d_p f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right) : \mathbb{R}^n \rightarrow V$$

*Bemerkung 13.1.12.* Die lokale Konvexität erlaubt es hier, ganz genauso wie im als [IV.1.5.1](#) behandelten Fall von Funktionen mit Werten in normierten Vektorräumen mit dem Mittelwertsatz [13.1.10](#) zu argumentieren.

**Definition 13.1.13.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $V$  ein Hausdorff'scher topologischer Vektorraum. Wir definieren induktiv, welche Abbildungen  $f : M \rightarrow V$  wir als Abbildungen **von der Klasse  $\mathcal{C}^k$**  bezeichnen: Für  $k = 0$  sollen es genau die stetigen Abbildungen sein und für  $k \geq 1$  genau alle differenzierbaren Abbildungen, deren Differential  $df : TM \rightarrow V$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$  ist. Ist eine Abbildung von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  für alle  $k$ , so nennen wir sie eine  **$\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung** oder auch eine **glatte Abbildung**.

**Lemma 13.1.14 (Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen).** Seien  $M, N$  glatte Mannigfaltigkeiten und  $V$  ein lokal konvexer Hausdorff'scher topologischer Vektorraum. Eine Abbildung  $f : M \times N \rightarrow V$  ist glatt genau dann, wenn (1) für jeden Punkt  $p \in M$  die Abbildung  $N \rightarrow V$ ,  $y \mapsto f(p, y)$  glatt ist und außerdem (2) für jeden Punkt  $q \in N$  die Abbildung  $M \rightarrow V$ ,  $x \mapsto f(x, q)$  glatt ist.

*Beweis.* Das ist nur eine koordinatenfreie Umformulierung von [13.1.11](#).  $\square$

*Übung 13.1.15.* Seien  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $V$  ein Hausdorff'scher topologischer Vektorraum. Sind  $f : M \rightarrow V$  und  $g : N \rightarrow M$  glatt, so ist auch  $f \circ g : N \rightarrow V$  glatt.

*Übung 13.1.16.* Eine Abbildung von einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  in einen Hausdorff'schen topologischen Vektorraum ist von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  existieren und stetig sind.

*Übung 13.1.17 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).* Man zeige für stetige Abbildungen von einem halboffenen reellen Intervall  $I$  in einen von-Neumann-Raum  $V$  den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Gegeben eine stetige Funktion  $f : I \rightarrow V$  und ein Punkt  $a \in I$  ist die Funktion

$$F : I \rightarrow V \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

die einzige differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow V$  mit  $F' = f$  und  $F(a) = 0$ .

## 13.2 Glatte Vektoren

**Definition 13.2.1.** Sei  $V$  eine von-Neumann-Darstellung einer Lie-Gruppe  $G$ . Ein Vektor  $v \in V$  heißt ein  $\mathcal{C}^k$ -**Vektor** genau dann, wenn die Abbildung  $G \rightarrow V$ ,  $g \mapsto gv$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung ist im Sinne von 13.1.13. Für einen  $\mathcal{C}^1$ -Vektor  $v$  liefert das Differential von  $g \mapsto gv$  im neutralen Element eine lineare Abbildung  $T_e G \rightarrow V$ , deren Effekt auf Elementen wir  $X \mapsto Xv$  notieren. Einen  $\mathcal{C}^\infty$ -Vektor nennen wir auch einen **glatten Vektor**. Die Menge aller glatten Vektoren von  $V$  bezeichnen wir mit

$$V^\infty \subset V$$

13.2.2. Für die vorstehende Definition und einige der folgenden Sätze benötigen wir die Vollständigkeit unserer Darstellungen nicht. Ich habe sie nur deshalb bei den Voraussetzungen mit hinzugenommen, da es mir übersichtlicher schien, stets mit ein- und derselben Klasse von Darstellungen zu arbeiten.

*Übung 13.2.3.* Genau dann ist in der Situation der Definition 13.2.1 ein Vektor  $v \in V$  glatt, wenn es eine nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq G$  gibt derart, daß die Abbildung  $U \rightarrow V$ ,  $g \mapsto gv$  glatt ist.

### Satz 13.2.4 (Operation der Lie-Algebra auf den glatten Vektoren).

Sei  $V$  eine von-Neumann-Darstellung einer Lie-Gruppe  $G$ . So gilt:

1. Die glatten Vektoren bilden einen  $G$ -stabilen Teilraum  $V^\infty \subset V$ .
2. Aus  $v \in V^\infty$  und  $X \in T_e G$  folgt  $Xv \in V^\infty$ , und wir erhalten so auf  $V^\infty$  eine Operation der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  der linksinvarianten Vektorfelder.
3. Die Operation  $\mathfrak{g} \times V^\infty \rightarrow V^\infty$  ist  $G$ -äquivariant, d.h. für alle  $g \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  und  $v \in V^\infty$  gilt

$$g(Xv) = ((\text{Ad } g)X)(gv)$$

*Beweis.* Gegeben  $h \in G$  und  $v \in V^\infty$  ist  $g \mapsto g(hv)$  die Verknüpfung der glatten Abbildung  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto gh$  mit dem Anwenden auf  $v$ . Das zeigt nach 13.1.15 die erste Behauptung. Betrachten wir

$$\begin{aligned} G &\rightarrow V \\ h &\mapsto ghg^{-1}v \end{aligned}$$

so ergibt sich durch Berechnung des Differentials mittels unserer Kettenregeln 13.1.7 und 13.1.6 und der zwei Zerlegungen unserer Abbildung als

$h \mapsto hg^{-1}v \mapsto ghg^{-1}v$  und  $h \mapsto ghg^{-1} \mapsto ghg^{-1}v$  die zur dritten Behauptung äquivalente Formel

$$g(X(g^{-1}v)) = ((\text{Ad } g)X)v$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung müssen wir zunächst für  $v \in V^\infty$  und  $X \in \mathfrak{g}$  nachzuweisen, daß gilt  $Xv \in V^\infty$ . Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(\cdot v)} & V \\ (g \cdot) \downarrow & & \downarrow g \\ G & \xrightarrow{(\cdot v)} & V \end{array}$$

Mit unseren Kettenregeln 13.1.6 und 13.1.7 folgern wir die Darstellung  $gXv = d_g(\cdot v) \circ d_e(g \cdot)(X)$  und können somit  $g \mapsto gXv$  schreiben als die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc} G & \rightarrow & T_e G \times G & \xrightarrow{\sim} & TG & \xrightarrow{d(\cdot v)} & V \\ g & \mapsto & (X, g) & \mapsto & (d_e(g \cdot))(X) & & \end{array}$$

Mit 13.1.15 zeigt das  $Xv \in V^\infty$  und wir müssen nur noch prüfen, daß wir auf diese Weise eine Darstellung unserer Lie-Algebra erhalten. Dazu halten wir  $v \in V^\infty$  fest und fassen beide Seiten der bereits bewiesenen Formel  $g(X(g^{-1}v)) = ((\text{Ad } g)X)v$  auf als Abbildungen  $G \rightarrow V$ . Die rechte Seite schreibt sich als Verknüpfung  $g \mapsto (\text{Ad } g)(X) \mapsto ((\text{Ad } g)(X))(v)$  von Abbildungen  $G \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow V$ . Hier ist die erste Abbildung glatt und die zweite stetig linear und das Differential beim neutralen Element  $e \in G$  bildet  $Y \in T_e G$  nach einer Kettenregel ab auf  $((\text{ad } Y)(X))v = [Y, X]v$ . Die linke Seite schreiben wir als Verknüpfung der beiden Abbildungen  $G \rightarrow G \times G, g \mapsto (g, g^{-1})$  und  $G \times G \rightarrow V, (g, h) \mapsto g(X(hv))$ . Sie sind beide glatt, die zweite nach 13.1.14. Das Differential bei  $(e, e)$  der zweiten Abbildung bildet  $(Y, Z)$  ab auf  $YXv + XZv$ : In der Tat ist  $(Y, 0)$  das Bild von  $Y$  unter dem Differential bei  $e$  der Einbettung  $G \rightarrow G \times G, g \mapsto (g, e)$ , und wir folgern mit der Kettenregel  $(Y, 0) \mapsto YXv$  und analog ergibt sich  $(0, Z) \mapsto XZv$ . Das Differential von  $g \mapsto g(X(g^{-1}v))$  bildet dann nach der Kettenregel notwendig  $Y \in T_e G$  ab auf  $YXv - XYv$  und wir folgern  $[Y, X]v = YXv - XYv$  wie gewünscht.  $\square$

**Definition 13.2.5.** Gegeben eine stetige Darstellung  $V$  einer Lie-Gruppe  $G$  in einem Hausdorff'schen topologischen Vektorraum sowie  $X \in T_e G$  und  $v \in V$  schreiben wir ganz allgemein

$$Xv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(tX)v - v}{t}$$

falls dieser Grenzwert existiert und nennen ihn dann die **Richtungsableitung von  $v$  in Richtung  $X$** .

**Lemma 13.2.6 (Kriterium für glatte Vektoren).** *Sei  $V$  eine von-Neumann-Darstellung einer Lie-Gruppe  $G$ .*

1. *Genau dann ist  $v \in V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Vektor, wenn seine Richtungsableitung  $Xv$  existiert für alle  $X \in \mathbb{T}_e G$  und stetig abhängt von  $X$ .*
2. *Genau dann ist  $v \in V$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Vektor, wenn  $v$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Vektor ist und alle seine Richtungsableitungen  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektoren sind.*

*Bemerkung 13.2.7.* In der Literatur habe ich als Definition für glatte Vektoren oft die a priori schwächere Bedingung gefunden, daß beliebige wiederholte Richtungsableitungen existieren sollen. Dann stößt man jedoch auf die technische Schwierigkeit, daß der Zusammenhang zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit a priori nur für partielle Differenzierbarkeit in den Richtungen paarweise kommutierender Vektorfelder bewiesen ist.

*Beweis.* 1. Wir zeigen nur die schwierige Implikation. Existiert die Richtungsableitung  $Xv$  für alle  $X \in \mathbb{T}_e G$ , so existiert mit demselben Beweis wie für 13.2.4.3 auch für alle  $g \in G$  die Richtungsableitung  $Xgv$  und es gilt

$$Xgv = g((\text{Ad } g^{-1})(X))v$$

Wählen wir nun eine Basis  $Z_1, \dots, Z_n$  von  $\mathbb{T}_e G$ , so induziert die glatte Abbildung  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ ,  $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\exp t_1 Z_1) \dots (\exp t_n Z_n)$  einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung des Ursprungs  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und einer offenen Umgebung  $g(U) \subseteq G$  des neutralen Elements. Unter unseren Annahmen ist nun die Abbildung  $\psi : U \rightarrow V$ ,  $t \mapsto g(t)v$  stetig partiell differenzierbar: Im Fall  $n = 2$  hätten wir zum Beispiel

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_2} = g(t)(Z_2 v) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_1} = Z_1(g(t)v) = g(t)((\text{Ad } g(t))^{-1}(Z_1))v$$

und der Ausdruck ganz rechts ist stetig in  $t$ , da nach Annahme  $X \rightarrow Xv$  stetig ist in  $X \in \mathfrak{g}$ . Damit ist  $G \rightarrow V$ ,  $x \mapsto xv$  stetig differenzierbar zunächst auf  $g(U)$  und dann auch auf ganz  $G$ .

2. Die Komposition des Differentials  $\mathbb{T}G \rightarrow V$  von  $g \mapsto gv$  mit dem durch Linkstranslation definierten Diffeomorphismus  $G \times \mathbb{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}G$  wird gegeben durch die Vorschrift  $(g, X) \mapsto gXv$ . Um  $v$  als  $\mathcal{C}^k$ -Vektor zu entlarven reicht es nach 13.1.14 also zu zeigen, daß die Abbildungen  $G \rightarrow V$ ,  $g \mapsto gXv$  alle von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$  sind.  $\square$

**Proposition 13.2.8 (Glatte Vektoren der regulären Darstellung).** *Die glatten Vektoren der stetigen linksregulären Darstellung  $\mathcal{C}(G)$  einer Lie-Gruppe  $G$  sind genau die glatten Funktionen auf  $G$ . Bezeichnen wir weiter*

für  $X \in \mathfrak{g} = T_e G$  mit  $X_r$  seine Fortsetzung zu einem rechtsinvarianten Vektorfeld auf  $G$ , so gilt für alle  $f \in C^\infty(G)$  die Formel

$$Xf = -X_r f$$

*Beweis.* Ist eine stetige Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ein glatter Vektor der linksregulären Darstellung  $\mathcal{C}(G)$ , so muß auch die Verknüpfung  $g \mapsto \acute{g}f \mapsto (\acute{g}f)(e) = f(g^{-1})$  glatt sein als Verknüpfung der glatten Abbildung  $G \rightarrow \mathcal{C}(G)$  mit dem Auswerten am neutralen Element, einer stetigen linearen Abbildung  $\mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ . Ist umgekehrt  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  glatt und bezeichnet  $X_r$  die Fortsetzung von  $X \in T_e G$  zu einem rechtsinvarianten Vektorfeld auf  $G$ , so behaupten wir, daß die Richtungsableitung  $Xf$  existiert und gegeben wird durch  $Xf = -X_r f$ . Um das nachzuweisen müssen wir nur prüfen, daß gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\exp tX)^{-1}g) - f(g)}{t} = (-X_r f)(g)$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz für  $g$  aus einem beliebigen festen Kompaktum in  $G$ . Das folgt jedoch aus 11.2.24. Nach 13.2.6 sind damit alle glatten Funktionen auch glatte Vektoren der linksregulären Darstellung.  $\square$

*Übung 13.2.9.* Gegeben ein homogener Raum  $X$  einer Liegruppe  $G$  sind die glatten Vektoren in der Darstellung  $\mathcal{C}(X)$  der stetigen Funktionen auf  $X$  genau die glatten Funktionen,  $\mathcal{C}(X)^\infty = C^\infty(X)$ , und die Wirkung von  $A \in \text{Lie } G$  auf einer Funktion fällt zusammen mit dem Negativen der Wirkung desjenigen glatten Vektorfelds  $\hat{A}$  auf  $X$ , das gegeben wird durch  $\hat{A}_x = (d_e(\cdot x))(A)$  für  $(\cdot x) : G \rightarrow X$  das "Anwenden auf  $x$ ". Gegeben ein endlichdimensionales  $G$ -äquivariantes Vektorraumbündel auf  $X$  sind allgemeiner die glatten Vektoren im Raum seiner stetigen Schnitte genau die glatten Schnitte. Hinweis: Man fasse diese Räume von Schnitten auf als Teilräume in einem Raum von Funktionen auf  $G$ .

**Satz 13.2.10 (Dichtigkeit der glatten Vektoren).** *In einer von-Neumann-Darstellung einer Liegruppe liegen die glatten Vektoren stets dicht.*

*Beweis.* Sei  $G$  unsere Liegruppe und  $\mu$  ein fest gewähltes linksinvariantes Haarmaß auf  $G$ . Gegeben eine Umgebung  $U$  eines Vektors  $v \in V$  finden wir mit denselben Argumenten wie beim Beweis von 11.10.8 eine glatte Funktion mit kompaktem Träger  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$  mit  $f *_\mu v \in U$ . Es reicht also,  $f *_\mu v$  als glatten Vektor zu entlarven. Aber ist  $\Omega \subseteq G$  eine offene Umgebung des neutralen Elements mit kompaktem Abschluß,  $\bar{\Omega}$ , so ist  $K = \bar{\Omega} \cdot (\text{supp } f)$  kompakt in  $G$  und die Verknüpfung

$$G \rightarrow \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathcal{C}(K) \rightarrow V$$

der glatten Abbildung  $g \mapsto \acute{g}f$  mit der stetigen linearen Restriktion auf  $K$  gefolgt der stetigen linearen Abbildung  $*_{\mu}v$  ist eine glatte Abbildung, die auf  $\Omega$  übereinstimmt mit  $g \mapsto g(f *_{\mu} v)$ . Nach 13.2.3 ist damit in der Tat  $f *_{\mu} v$  ein glatter Vektor unserer Darstellung.  $\square$

**Definition 13.2.11.** *Sollte allgemeiner auf separablen glatten Mannigfaltigkeiten!* Gegeben eine separable Liegruppe  $G$  bezeichnen wir mit  $M_c^{\infty}(G)$  den Raum aller Maße auf  $G$  der Gestalt  $f\mu$  für  $\mu$  ein rechts- oder linksinvariantes Haarmaß auf  $G$  und  $f \in C_c^{\infty}(G)$  einer glatten Funktion mit kompaktem Träger. Die Elemente dieses Raums bezeichnen wir als **glatte kompakt getragene Maße** auf  $G$ .

*Bemerkung 13.2.12.* Für jede Wahl von einem rechts- oder linksinvarianten Haarmaß liefert offensichtlich die Multiplikation mit besagtem Haarmaß eine Bijektion  $C_c^{\infty} \xrightarrow{\sim} M_c^{\infty}(G)$ . Des weiteren liefert jede Wahl einer Orientierung auf  $G$  eine Bijektion  $\Omega_c^{\dim G}(G) \xrightarrow{\sim} M_c^{\infty}(G)$  zwischen dem Raum der glatten kompakt getragenen Volumenformen auf  $G$  und dem Raum aller glatten kompakt getragenen Maße auf  $G$ .

*Übung 13.2.13.* Gegeben eine separable Liegruppe  $G$  bilden die glatten kompakt getragenen Maße ein beidseitiges Ideal  $M_c^{\infty}(G) \subset M_c(G)$  im Raum aller kompakt getragenen Maße auf  $G$ .

**Proposition 13.2.14.** *In jeder von-Neumann-Darstellung  $V$  einer Liegruppe  $G$  ist  $M_c^{\infty}(G) * V$  ein dichter, aus glatten Vektoren bestehender Teilraum.*

*Beweis.* Das haben wir beim Beweis von 13.2.10 bereits mit gezeigt.  $\square$

**Definition 13.2.15.** Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $K \subset G$  eine kompakte Untergruppe. Eine stetige Darstellung  $V$  von  $G$  nennen wir  **$K$ -zulässig** genau dann, wenn für jede stetige endlichdimensionale Darstellung  $E$  von  $K$  gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_K(E, V) < \infty$$

**Satz 13.2.16 (Differenzierbarkeit  $K$ -endlicher Vektoren).** *Ist  $G$  eine Liegruppe,  $K \subset G$  eine kompakte Untergruppe und  $V$  eine  $K$ -zulässige von-Neumann-Darstellung von  $G$ , so sind alle  $K$ -endlichen Vektoren von  $V$  glatt und bilden einen  $\mathfrak{g}$ -stabilen Teilraum*

$$V_K \subset V_{\infty}$$

*Beweis.* Wir wissen bereits nach 13.2.14, daß  $M_c^{\infty}(G) * V$  dicht liegt in  $V$  und aus glatten Vektoren besteht. Da nach 11.13.1 die Konvolution mit kompakt getragenen Maßen stetig ist, muß für alle  $\lambda \in \hat{K}$  auch  $e_{\lambda} M_c^{\infty}(G) * V$  dicht

liegen in  $e_\lambda * V = V(\lambda)$ . Ist  $V(\lambda)$  endlichdimensional, so folgt Gleichheit und  $V(\lambda)$  besteht in der Tat aus glatten Vektoren. Daß  $V_K \cap V_\infty$  stabil ist unter  $\mathfrak{g}$ , folgt sogar für eine beliebige Untergruppe  $K \subset G$  sofort daraus, daß die Operation  $\mathfrak{g} \times V_\infty \rightarrow V_\infty$  nach 13.2.4 eine  $G$ -äquivalente und damit insbesondere auch eine  $K$ -äquivalente Abbildung ist.  $\square$

### 13.3 Algebralisierung

**Proposition 13.3.1.** *Seien  $G \supset K$  eine separable Liegruppe und eine kompakte Untergruppe und sei  $E$  eine  $K$ -zulässige von-Neumann-Darstellung von  $G$ . Gegeben  $e \in E_K$  ein  $K$ -endlicher Vektor und  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  stetige Linearform ist der Matrixkoeffizient  $G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \mapsto \langle f, ge \rangle$  eine analytische Funktion.*

**Korollar 13.3.2.** *Seien  $G \supset K$  eine separable Liegruppe und eine kompakte Untergruppe, die jede Zusammenhangskomponente von  $G$  trifft. Sei  $E$  eine  $K$ -zulässige von-Neumann-Darstellung von  $G$ . So liefern das Bilden der  $K$ -endlichen Vektoren und das Bilden des Abschlusses zueinander inverse Bijektionen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{abgeschlossene } G\text{-stabile} \\ \text{Teilräume von } E \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{unter } K \text{ und } \mathfrak{g} \text{ stabile} \\ \text{Teilräume von } E_K \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Gegeben  $E' \subset E$  ein abgeschlossener  $G$ -stabiler Teilraum ist offensichtlich  $E'_K \subset E_K$  eine  $\mathfrak{g}$ -Unterdarstellung. Ist umgekehrt  $V \subset E_K$  eine  $\mathfrak{g}$ -Unterdarstellung und  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Linearform, die auf  $V$  verschwindet, und  $v \in V$  ein Vektor, so verschwindet für den Matrixkoeffizienten  $g \mapsto \langle f, gv \rangle$  alle partiellen Ableitungen bei  $g = 1$ , als da heißt diese analytische Funktion ist identisch Null. Da jedoch im lokal konvexen Raum  $E$  gilt  $\overline{V} = \bigcap \ker f$  mit Schnitt über alle  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  stetig linear mit  $f(V) = 0$  folgt  $G\overline{V} \subset \overline{V}$  und dann mit Stetigkeit auch  $G\overline{V} \subset \overline{V}$ .

Unsere beiden Abbildungsvorschriften liefern also in der Tat Abbildungen zwischen den fraglichen Mengen. Die Formel  $E' = \overline{E'_K}$  ist eh klar, und wir müssen nur noch  $(\overline{V})_K = V$  zeigen. Da aber  $e_\lambda \overline{V} \subset e_\lambda V = e_\lambda V$  gilt folgt  $\overline{V}(\lambda) = V(\lambda)$ .  $\square$

*Bemerkung 13.3.3.* Hier definiere vielleicht  $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln!

**Korollar 13.3.4.** *Seien  $G \supset K$  eine Liegruppe und eine kompakte Untergruppe, die sämtliche Komponenten von  $G$  trifft. So liefert das Bilden der  $K$ -endlichen Vektoren eine Inklusion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible unitäre } K\text{-zulässige} \\ \text{Darstellungen von } G \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible} \\ \mathfrak{g}\text{-}K\text{-Moduln} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Gegeben eine irreduzible unitäre Darstellung  $E$  von  $G$  bilden wir zu  $E_K$  die “duale Darstellung”  $E_K^\otimes = \bigoplus_{\lambda \in \hat{K}} E(\lambda)^*$  und die konjugierte Darstellung  $\bar{E}_K$  und erhalten aus dem invarianten Skalarprodukt auf  $E$  einen von Null verschiedenen  $\mathfrak{g}$ -Modulhomomorphismus  $\bar{E}_K \rightarrow E_K^\otimes$ . Da  $E_K$  einfach ist, ist der Raum dieser Homomorphismen eindimensional, und je zwei Homomorphismen, die von einem Skalarprodukt auf  $E_K$  herkommen, unterscheiden sich höchstens um eine positive reelle Konstante. Wir können also  $E$  aus  $E_K$  zurückgewinnen, indem wir das bis auf einen Skalar eindeutige bestimmte  $\mathfrak{g}$ -invariante Skalarprodukt auf  $E_K$  nehmen und komplettieren. Die Operation von  $G$  liegt dann fest auf  $E_K$ , da dort alle Ableitungen der Matrixkoeffizienten bekannt sind, und muß auf  $E$  durch stetige Fortsetzung gegeben sein.  $\square$

**Definition 13.3.5.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Differentialoperator auf  $U$  ist eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$D : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

die sich beschreiben läßt durch eine endliche Summe der Gestalt  $D = \sum a_\alpha \partial^\alpha$  in Multiindex-Schreibweise, mit  $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$ . Die  $a_\alpha$  sind durch die lineare Abbildung  $D$  schon eindeutig festgelegt. Die Ordnung von  $D$  ist erklärt als  $\text{ord}(D) = \max\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\}$  bzw.  $\text{ord}(D) = -\infty$  für den Null-Operator  $D = 0$ . Ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Differentialoperator heißt **analytisch** genau dann, wenn alle  $a_\alpha$  analytische Funktionen sind. Ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Differentialoperator  $D$  heißt **elliptisch** genau dann, wenn er nicht Null ist und wenn für  $k = \text{ord}(D)$  die Funktion  $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch den Ausdruck  $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha X^\alpha$  keine Nullstellen hat außerhalb von  $U \times 0$ .

**Satz 13.3.6.** *Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $D : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$  ein elliptischer analytischer Differentialoperator, so besteht der Kern von  $D$  aus analytischen Funktionen.*

Allgemeiner erklärt man für eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$ , welche linearen Abbildungen  $D : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  man  $\mathcal{C}^\infty$ -Differentialoperatoren nennt, und das Symbol  $\sigma(D)$  eines Operators der Ordnung  $k$  wird eine Abbildung  $T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Differentialoperator  $D$  heißt nun elliptisch genau dann, wenn die Nullstellenmenge von  $\sigma(D)$  genau der Nullschnitt von  $T^*M$  ist. Wieder besteht der Kern eines elliptischen analytischen Differentialoperators auf einer analytischen Mannigfaltigkeit aus analytischen Funktionen. Ist speziell  $G$  eine Lie-Gruppe so trägt  $G$  genau eine Struktur als analytische Gruppe derart, daß die Exponentialabbildung  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  analytisch ist. Für diese analytische Struktur sind alle links- und alle rechtsinvarianten Vektorfelder

analytisch. Gegeben  $X_1, \dots, X_n$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$  und gedacht als linksinvariante Vektorfelder ist dann offensichtlich  $\sum X_i^2$  ein analytischer elliptischer Differentialoperator auf  $G$ . Ist nun speziell  $K \subset G$  eine kompakte Untergruppe und  $X_1, \dots, X_n$  eine Orthonormalbasis für ein  $K$ -invariantes Skalarprodukt auf  $\mathfrak{g}$ , so wird  $D = \sum X_i^2$  ein  $K$ -invarianter analytischer elliptischer Differentialoperator auf  $G$ . Der induzierte Operator auf  $E_\infty$  kommutiert also mit der  $K$ -Operation, insbesondere stabilisiert  $D$  jedes  $E(\lambda)$  für  $\lambda \in \hat{K}$ .

Dann gibt es jedoch ein normiertes Polynom  $P \in \mathbb{C}[T]$  derart, daß  $P(D)$  ganz  $E(\lambda)$  annulliert. Das zeigt, daß für  $e \in E(\lambda)$  und  $\varphi \in E^*$  für den Matrixkoeffizient  $c_{\varphi,e}(g) = \langle \varphi, ge \rangle$  gilt  $(P(D)c_{\varphi,e})(1) = 0$ . Da das auch gilt, wenn wir  $\varphi$  durch  $\varphi \circ g$  ersetzen, folgt  $P(D)c_{\varphi,e} = 0$  und  $c_{\varphi,e}$  ist analytisch.

*Beispiel 13.3.7.* Wir betrachten in  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  die maximale kompakte Untergruppe  $K = \mathrm{SO}(2)$  und interessieren uns für die zugehörigen  $(\mathfrak{g}, K)$ -Moduln. In  $G$  betrachten wir die Untergruppen  $G \supset B \supset T$  mit  $B$  den oberen Dreiecksmatrizen und  $T$  den Diagonalmatrizen und bezeichnen mit  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$  ihre komplexifizierten Lie-Algebren. Weiter setzen wir  $T_c = T \cap K = \{\pm \mathrm{id}\}$  und betrachten die Morphismen von Lie-Paaren

$$(\mathfrak{g}, K) \leftarrow (\mathfrak{b}, T_c) \rightarrow (\mathfrak{h}, T_c)$$

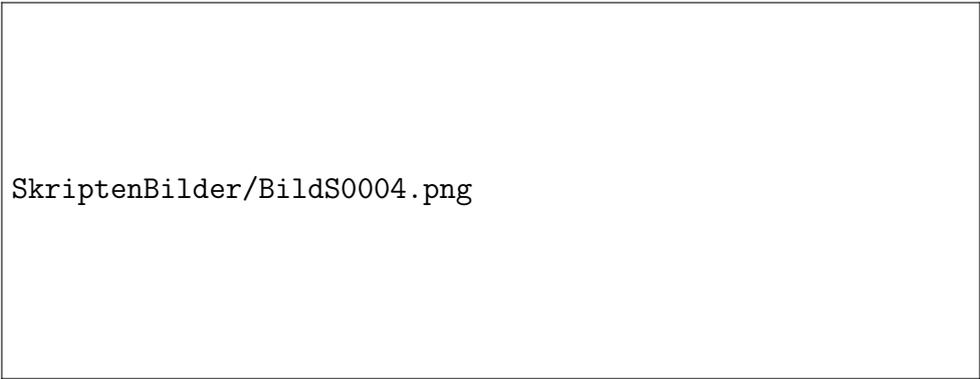
wobei  $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{h}$  den nichtdiagonalen Eintrag zu Null macht. Dann beginnen wir mit den eindimensionalen  $(\mathfrak{h}, T_c)$ -Moduln  $\mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon}$  für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  und bilden die  $(\mathfrak{g}, K)$ -Moduln

$$\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}, T_c}^{\mathfrak{g}, K} \mathrm{res}_{\mathfrak{h}, T_c}^{\mathfrak{b}, T_c} \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon}$$

Sie heißen die algebraischen Hauptseriendarstellungen. Explizit besteht solch ein  $\mathfrak{g}$ - $K$ -Modul aus allen Vektoren von

$$\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon} = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{b})}(U(\mathfrak{g}), \mathbb{C}_{\lambda,\varepsilon})$$

auf denen die Operation von Lie  $K$  lokal endlich ist und sich zu einer Operation von  $K$  integrieren läßt und für die diese integrierte Operation auf  $T_c$  mit der durch  $\varepsilon$  vorgegebenen Operation übereinstimmt. Wählen wir in unserem Fall  $e, f, h \in \mathfrak{g}$  die Standardbasis, so kann man sich  $\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda}$  veranschaulichen durch das nebenstehende Bild, das man aus dem Bild aus dem Beweis von 2.2.6 ableitet, indem man  $\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda} = (\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{-\lambda})^*$  beachtet. Wieder stellen die rechtsgerichteten Pfeile die Operation von  $e$  dar und die linksgerichteten Pfeile die Operation von  $f$  und die Schleifen die Operation von  $h$ . Ein beliebiger Vektor von  $\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda}$  ist jedoch eine formale und möglicherweise unendliche Linearkombination der im Bild dargestellten Vektoren.



SkriptenBilder/BildS0004.png

### 13.4 Beispiel komplexer Gruppen

**Definition 13.4.1.** Sei  $G \supset B \supset T$  eine halbeinfache komplexe algebraische Gruppe, eine Borel und ein maximaler Torus. Wir fassen sie auf als reelle Lie-Gruppen, wählen eine eindimensionale Darstellung  $\mathbb{C}_\lambda$  des maximalen Torus mit  $\lambda : T \rightarrow \mathbb{C}^\times$  einem stetigen Gruppenhomomorphismus, restringieren zu  $B$  mittels der kanonischen Surjektion  $B \twoheadrightarrow T$  und bilden die induzierten Darstellungen

$$\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda$$

Wir werden gleich zeigen, daß diese Darstellungen zulässig sind. Alle zu solchen Darstellungen infinitesimal äquivalenten Darstellungen und insbesondere ihre  $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln heißen **Hauptseriendarstellungen** von  $G$ .

*Ergänzung 13.4.2.* Ist allgemeiner  $G$  eine beliebige reelle reduktive Lie-Gruppe, so hat man für die Definition der Hauptserie unser  $B$  zu ersetzen durch eine minimale parabolische Untergruppe.

**Lemma 13.4.3.** *Alle Hauptseriendarstellungen sind zulässig.*

*Beweis.* Jede maximal kompakte Untergruppe  $K \subset G$  trifft  $B$  in einem maximalen Torus  $K \cap B = T_c$  von  $K$  und dann haben wir  $K/T_c \xrightarrow{\sim} G/B$ . Mit dem allgemeinen Lemma ?? folgt ein Isomorphismus von  $K$ -Darstellungen  $\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda \xrightarrow{\sim} \operatorname{ind}_{T_c}^K \mathbb{C}_\lambda$  und damit für jede irreduzible Darstellung  $E \in \hat{K}$  ein Isomorphismus

$$\operatorname{Linto}^K(E, \operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Linto}^{T_c}(E, \mathbb{C}_\lambda)$$

Dieser Raum hat also genau die Dimension des  $T_c$ -Gewichtsraums von  $E$  zum Gewicht  $\lambda : T_c \rightarrow \mathbb{C}^\times$  und ist damit insbesondere endlichdimensional.  $\square$

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $B \subset G$  eine abgeschlossene Untergruppe und  $E \in \operatorname{Linto}^B$  eine stetige Darstellung von  $B$ . Die kanonische Abbildung  $\operatorname{ind}_B^G E \rightarrow E$  von stetigen Darstellungen von  $B$  induziert eine kanonische Abbildung  $\mathcal{C}^\infty(\operatorname{ind}_B^G E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty E$  von Darstellungen von  $\operatorname{Lie} B = \mathfrak{b}$  und damit einen kanonischen Homomorphismus von Darstellungen von  $\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}$  der Gestalt

$$\mathcal{C}^\infty(\operatorname{ind}_B^G E) \rightarrow \operatorname{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(\mathcal{C}^\infty E)$$

wo wir rechts das Induzieren von Darstellungen *reeller* Lie-Algebren meinen.

**Proposition 13.4.4.** *Sei  $G \supset B \supset T$  eine halbeinfache komplexe Gruppe algebraische mit einer Borel'schen Untergruppe und einem maximalem Torus. Sei  $K \subset G$  eine maximal kompakte Untergruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{k}$ . So induziert die kanonische Abbildung  $\mathcal{C}^\infty(\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda) \rightarrow \operatorname{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda$  einen Isomorphismus zwischen den  $K$ -endlichen Vektoren links und den  $\mathfrak{k}$ -endlichen Vektoren rechts.*

*Beweis.* Ist  $N \subset G$  das unipotente Radikal der bezüglich  $T$  zu  $B$  opponierten Borel'schen, so liefert die Multiplikation eine offene Einbettung  $N \times B \hookrightarrow G$  mit dichtem Bild. Nach ?? liefert folglich die kanonische Abbildung eine Inklusion

$$\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda \hookrightarrow \operatorname{ind}_1^N \mathbb{C}_\lambda$$

Gehen wir zu  $\mathcal{C}^\infty$ -Vektoren über, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda) & \hookrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\operatorname{ind}_1^N \mathbb{C}_\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{ind}_\mathfrak{b}^g \mathbb{C}_\lambda & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{ind}_0^n \mathbb{C}_\lambda \end{array}$$

in dem die untere Horizontale ein Isomorphismus ist nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ?. Schränken wir uns in der oberen Zeile ein auf die skalar analytischen Vektoren, so wird nach dem im Anschluß bewiesenen Lemma 13.4.5 die rechte Vertikale eine Injektion, und aus dem Diagramm folgt dasselbe für die linke Vertikale. Da die  $K$ -endlichen Vektoren in zulässigen Darstellungen skalar analytisch sind, erhalten wir also eine Injektion

$$(\operatorname{ind}_B^G \mathbb{C}_\lambda)_K \hookrightarrow \operatorname{ind}_\mathfrak{b}^g \mathbb{C}_\lambda$$

und müssen nur noch zeigen, daß die Dimensionen der  $\operatorname{Hom}_\mathfrak{k}(E, \cdot)$  für alle  $E \in \hat{K}$  auf beiden Seiten übereinstimmen. Aber diese Dimension ist ja dieselbe wie die von  $\operatorname{Hom}_\mathfrak{k}(E, \operatorname{ind}_{\mathfrak{k} \cap \mathfrak{t}}^{\mathfrak{k}} \mathbb{C}_\lambda) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{k} \cap \mathfrak{t}}(E, \mathbb{C}_\lambda)$  und die Behauptung folgt damit aus der Tatsache, daß  $T \cap K$  zusammenhängend ist.  $\square$

**Lemma 13.4.5.** *Sei  $N$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{n}$ . So induziert die kanonische Abbildung*

$$\mathcal{C}^\infty(\operatorname{ind}_1^N \mathbb{C}) \rightarrow \operatorname{ind}_0^n \mathbb{C}$$

*eine Inklusion auf den skalar analytischen Vektoren. (Sollte sehr viel allgemeiner machen, so daß es direkt klar wird für  $\operatorname{ind}_B^G$ .)*

*Beweis.* Sortieren wir die Definitionen aus, so ist unsere Abbildung schlicht die Abbildung  $\mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow (U(\mathfrak{n}))^*$ , die von der Paarung  $U(\mathfrak{n}) \times \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathbb{C}$  herkommt, die durch das Anwenden eines Differentialoperators gefolgt vom Auswerten beim neutralen Element erklärt wird. Unser Lemma folgt dann aus der Tatsache, daß eine analytische Funktion auf einer zusammenhängenden analytischen Varietät schon durch ihre Taylorreihe in einem einzigen Punkt festgelegt wird.  $\square$

Bis hierher waren noch alle Lie-Algebren reell, ihre Darstellungen jedoch reell-lineare Darstellungen in komplexen Vektorräumen.

Jetzt wollen wir den Raum der  $k$ -endlichen Vektoren in  $\text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{-\lambda}$  näher untersuchen. Wir können diese induzierte Darstellung nach ?? ja identifizieren mit  $(\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{-\lambda})^*$ . Jetzt gehen wir zu komplexen Lie-Algebren über. Dazu erinnern wir uns daran, daß  $\mathfrak{g}$  eine komplexe Lie-Algebra ist, und wählen darin eine spaltende reelle Form  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  mit spaltender Cartan  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  derart, daß gilt  $\text{Lie } T = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . So erhalten wir eine schieflinare Involution  $c : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  mit  $c(aX) = \bar{a}X$  für alle  $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{C}$ . Weiter wählen wir eine Chevalley-Involution  $\sigma : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  mit  $\sigma/\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = -\text{id}$ . Ihre Komplexifizierung bezeichnen wir ebenfalls mit  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Dann ist die reell-lineare Involution  $\vartheta = \sigma \circ c$  von  $\mathfrak{g}$  eine Cartan-Involution, d.h. ihre Fixpunktmenge ist die Lie-Algebra einer maximal kompakten Untergruppe  $K$  von  $G$ . Benutzen wir nun die Identifikationen

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \times \bar{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\text{id} \times c} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2$$

mit  $X \otimes a \mapsto (Xa, X\bar{a})$ , so entspricht die komplexifizierte Cartan-Involution der Involution  $(X, Y) \mapsto (\sigma Y, \sigma X)$  von  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  und  $(\text{Lie } K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  entspricht dem Bild der Einbettung  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}^2, X \mapsto (X, \sigma X)$ . Ebenso geht  $b \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  unter unserer Identifikation nach  $b^2$  und  $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  nach  $\mathfrak{h}^2$ . Die Linearform  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  wird ein Paar  $(\mu, \nu) \in \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ , und da  $\lambda$  Differential ist eines Homomorphismus  $\lambda : T \rightarrow \mathbb{C}^x$  muß die Restriktion von  $\lambda$  auf  $\text{Lie}(T \cap K)$  alias  $\mu - \nu$  ein ganzes Gewicht sein. Wir erhalten so

$$\text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{-\lambda} = (\text{prod}_{\mathfrak{b}^2}^{\mathfrak{g}^2} \mathbb{C}_{-\lambda})^* = (\Delta(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \Delta(-\nu))^*$$

wo die beiden Kopien von  $\mathfrak{g}$  auf den beiden Tensorfaktoren unabhängig operieren. Nun beachten wir weiter

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \Delta(-\nu), \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta(-\mu), \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta(-\nu), \mathbb{C})) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta(-\mu), \Delta(-\nu)^*)$$

Verfolgen wir die Operation von  $k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , so erkennen wir, daß die  $k$ -endlichen Vektoren oben genau den Vektoren unten entsprechen, die ad-endlich sind für die natürliche  $\mathfrak{g}$ -Bimodulstruktur auf  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta(-\mu), (\Delta(-\nu)^*)^{\sigma})$ . Das sind aber nach ?? auch genau die ad-endlichen Vektoren von

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta(-\mu), \nabla(-\nu))$$

## 13.5 Kohomologische Induktion

**Definition 13.5.1.** Ein **Lie-Paar**  $(\mathfrak{g}, K) = (\mathfrak{g}, K, i, a)$  ist ein Quadrupel bestehend aus einer endlichdimensionalen komplexen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , einer komplexen algebraischen Gruppe  $K$ , einem Homomorphismus  $i : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$  von der Lie-Algebra  $\mathfrak{k}$  von  $K$  nach  $\mathfrak{g}$ , und einem Homomorphismus  $a : K \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$

von algebraischen Gruppen von  $K$  in die Automorphismengruppe der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  derart, daß die beiden folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} K \times \mathfrak{k} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \mathfrak{k} & & \mathfrak{k} & \xrightarrow{da} & \text{End } \mathfrak{g} \\ \text{id} \times i \downarrow & & \downarrow i & & i \downarrow & & \parallel \\ K \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{a} & \mathfrak{g} & & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End } \mathfrak{g} \end{array}$$

In Worten soll also  $i$  eine  $K$ -äquivalente Abbildung sein und das Differential von  $a$  soll übereinstimmen mit  $\text{ad} \circ i$ , und in Formeln ausgedrückt fordern wir  $i((\text{Ad } k)X) = (a(k))(i(X)) \quad \forall k \in K, X \in \mathfrak{k}$  und  $(da)(X) = \text{ad}(iX) \quad \forall X \in \mathfrak{k}$ .

*Bemerkung 13.5.2.* Ist  $K$  zusammenhängend, so folgt die erste Bedingung schon aus der Zweiten, die ja liefert, daß  $i$  für die abgeleiteten Operationen von  $\mathfrak{k}$  ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Ist  $K$  endlich, so ist die zweite Bedingung stets erfüllt.

*Beispiel 13.5.3.* Ist  $G$  eine Lie-Gruppe,  $K \subset G$  eine kompakte Untergruppe,  $\mathfrak{g} = (\text{Lie } G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  die Komplexifizierung von  $\mathfrak{g}$  und  $K_{\mathbb{C}}$  die Komplexifizierung von  $K$ , so ist  $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$  ein Lie-Paar in offensichtlicher Weise.

**Definition 13.5.4.** Sei  $(\mathfrak{g}, K)$  ein Lie-Paar. Ein  $(\mathfrak{g}, K)$ -Modul ist ein komplexer Vektorraum  $V$  mit einer Operation von  $\mathfrak{g}$  und einer algebraischen Operation von  $K$  derart, daß die beiden folgenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind:

1. Die Operation  $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$  ist  $K$ -äquivalent für die durch  $a$  gegebene Operation von  $K$  auf  $\mathfrak{g}$ .
2. Das Differential  $\mathfrak{k} \times V \rightarrow V$  der Operation von  $K$  stimmt überein mit der Restriktion vermittelt  $i$  der Operation  $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ .

Die Kategorie  $(\mathfrak{g}, K)$ -Mod aller  $(\mathfrak{g}, K)$ -Moduln ist eine abelsche  $\mathbb{C}$ -Kategorie in offensichtlicher Weise.

*Beispiel 13.5.5.* Ist  $G$  eine Lie-Gruppe,  $K \subset G$  eine kompakte Untergruppe und  $V$  eine  $K$ -zulässige von-Neumann-Darstellung von  $G$  im Sinne von 13.2.15, so ist der Teilraum  $V_K$  der  $K$ -endlichen Vektoren ein  $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$ -Modul nach 13.2.16.

*Beispiel 13.5.6.* Ist  $(\mathfrak{g}, K)$  ein Lie-Paar mit zusammenhängendem  $K$ , so ist das Vergessen der  $K$ -Operation ein volltreuer Funktor  $(\mathfrak{g}, K)$ -Mod  $\rightarrow$   $\mathfrak{g}$ -Mod, dessen Bild aus allen Darstellungen der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  besteht, auf denen die durch  $i$  gegebene Operation von  $\text{Lie } K$  lokal endlich ist und zu einer Operation von  $K$  integriert werden kann. Ist  $K$  halbeinfach und einfach zusammenhängend, so sind das genau alle Darstellungen von  $\mathfrak{g}$  mit lokal endlicher Operation von  $\text{Lie } K$ .

*Beispiel 13.5.7.* Ist andererseits  $i$  ein Isomorphismus  $\text{Lie } K \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ , so ist das Vergessen der  $\mathfrak{g}$ -Operation eine Äquivalenz  $(\mathfrak{g}, K)\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} K\text{-Mod}$  zwischen der Kategorie der  $(\mathfrak{g}, K)$ -Moduln und der Kategorie aller rationalen Darstellungen von  $K$ .

**Definition 13.5.8.** Ein **Morphismus von Lie-Paaren**  $\varphi : (\mathfrak{h}, L) \rightarrow (\mathfrak{g}, K)$  ist ein Paar bestehend aus einem Morphismus  $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  von Lie-Algebren und einem Morphismus  $\varphi : L \rightarrow K$  von algebraischen Gruppen derart, daß die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} L \times \mathfrak{h} & \rightarrow & \mathfrak{h} & & \text{Lie } L & \hookrightarrow & \mathfrak{h} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K \times \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} & & \text{Lie } K & \hookrightarrow & \mathfrak{g} \end{array}$$

kommutieren. Gegeben ein Morphismus von Lie-Paaren  $\varphi : (\mathfrak{h}, L) \rightarrow (\mathfrak{g}, K)$  haben wir offensichtlich einen Restriktionsfunktork

$$\text{res}_{\mathfrak{g}, K}^{\mathfrak{h}, L} : (\mathfrak{g}, K)\text{-Mod} \rightarrow (\mathfrak{h}, L)\text{-Mod}$$

**Satz 13.5.9.** Gegeben ein Morphismus von Lie-Paaren  $\varphi : (\mathfrak{h}, L) \rightarrow (\mathfrak{g}, K)$  besitzt der zugehörige Restriktionsfunktork einen Rechtsadjungierten, die sogenannte **Induktion**

$$\text{ind}_{\mathfrak{h}, L}^{\mathfrak{g}, K} : (\mathfrak{h}, L)\text{-Mod} \rightarrow (\mathfrak{g}, K)\text{-Mod}$$

*Bemerkung 13.5.10.* In der Literatur wird dieser Funktork auch oft die Koinduktion genannt und  $\text{prod}$  notiert. Ich will jedoch ganz strikt den Rechtsadjungierten eines Restriktionsfunktork Induktion nennen und den Linksadjungierten, den es etwas seltener gibt, die Koinduktion oder Produktion.

*Beweis.* Offensichtlich können wir jeden Morphismus von Lie-Paaren zerlegen als

$$(\mathfrak{h}, L) \rightarrow (\mathfrak{g}, L) \rightarrow (\mathfrak{g}, K)$$

Es reicht also, das Theorem in den Fällen  $K = L$  und  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  zu zeigen. Sei also  $M \in (\mathfrak{h}, L)\text{-Mod}$ . Auf  $\text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} M = \text{Hom}_{U(\mathfrak{h})}(U(\mathfrak{g}), M)$  mit der offensichtlichen Operation von  $L(\mathbb{C})$  ist die Operation  $\mathfrak{g} \times \text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} M \rightarrow \text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} M$  schon mal  $L(\mathbb{C})$ -äquivariant. Im Teilraum  $\text{Alg}_L(\text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} M)$  aller  $L$ -algebraischen Vektoren bilden wir dann den Teilraum aller Vektoren, für die auch die zweite Bedingung von 13.5.4 erfüllt ist, auf denen also die von der  $L$ -Operation herrührende Operation von  $\text{Lie } L$  verträglich ist vermittels  $i$  mit der offensichtlichen  $\mathfrak{g}$ -Operation, und das ist unser gesuchtes

$$\text{ind}_{\mathfrak{h}, L}^{\mathfrak{g}, L} M \subset \text{Alg}_L(\text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} M) \subset \text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} M$$

Im anderen Fall  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  bilden wir zunächst die induzierte Darstellung von Darstellungen algebraischer Gruppen  $\text{ind}_L^K M$ , betrachten darauf die  $\mathfrak{g}$ -Operation, die aus der  $\mathfrak{g}$ -Operation  $\mathfrak{g} \otimes M \rightarrow M$  entsteht durch die Tensoridentität

$$\text{ind}_L^K(\mathfrak{g} \otimes M) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \otimes \text{ind}_L^K M$$

und definieren

$$\text{ind}_{\mathfrak{g},L}^{\mathfrak{g},K} M \subset \text{ind}_L^K M$$

als den Teilraum aller Vektoren, für die auch die zweite Bedingung von 13.5.4 erfüllt ist, auf denen also die von der  $K$ -Operation herrührende Operation von  $\text{Lie } K$  verträglich ist vermittelt  $i$  mit der eben konstruierten  $\mathfrak{g}$ -Operation. Das Prüfen der Eigenschaften verschieben wir auf später. Die Tensoridentität ist hier im Rahmen der Darstellungstheorie algebraischer Gruppen zu verstehen, in dem sie sogar ohne jede Endlichkeitsbedingung an die darantensorierte Darstellung gültig ist.  $\square$

**Lemma 13.5.11.** *Für jedes Lie-Paar  $(\mathfrak{g}, K)$  hat die Kategorie  $(\mathfrak{g}, K)$ -Mod genügend Injektive.*

*Beweis.* Im Fall  $K = 1$  ist das ein allgemeines Resultat, sogar die Kategorie aller Moduln über einem beliebigen Ring hat genügend Injektive nach ???. Gegeben  $M \in (\mathfrak{g}, K)$ -Mod wählen wir nun zunächst eine Einbettung  $M \hookrightarrow I$  in einem injektiven  $\mathfrak{g}$ -Modul und betrachten dann den davon induzierten Morphismus  $M \hookrightarrow \text{ind}_{\mathfrak{g},1}^{\mathfrak{g},K} I$ . Die rechte Seite ist ein injektiver  $(\mathfrak{g}, K)$ -Modul, da  $\text{Mod}^{(\mathfrak{g},K)}(N, \text{ind}_{\mathfrak{g},1}^{\mathfrak{g},K} I) = \text{Mod}^{\mathfrak{g}}(N, I)$  exakt ist in  $N \in (\mathfrak{g}, K)$ -Mod.  $\square$

**Definition 13.5.12.** Die höheren Derivierten dieser Induktionsfunktoren heißen die **kohomologischen Induktionsfunktoren**

$$R^i \text{ind}_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K} : (\mathfrak{h}, L)\text{-Mod} \rightarrow (\mathfrak{g}, K)\text{-Mod}$$

## 13.6 Zulässigkeit irreduzibler unitärer Darstellungen

**Definition 13.6.1.** Eine Lie-Gruppe heißt **halbeinfach** genau dann, wenn sie zusammenhängend ist und eine halbeinfache Lie-Algebra hat.

**Satz 13.6.2.** *Sei  $G$  eine halbeinfache Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum.*

1. *Es gibt maximal kompakte Untergruppen, und je zwei sind konjugiert.*
2. *Gegeben eine maximal kompakte Untergruppe  $K \subset G$  gibt es eine auflösbare abgeschlossene Untergruppe  $H \subset G$  derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus  $K \times H \xrightarrow{\sim} G$  induziert.*

*Bemerkung 13.6.3.* Die zweite Aussage heißt die Iwasawa-Zerlegung und erscheint meist in der Gestalt und Notation  $G = KAN$ .

**Proposition 13.6.4.** *Sei  $G$  eine halbeinfache Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum und  $K \subset G$  eine maximal kompakte Untergruppe. Für jede irreduzible stetige endlichdimensionale Darstellung  $E$  von  $G$  und alle  $\lambda \in \hat{K}$  gilt  $\dim_{\mathbb{C}} e_{\lambda} E \leq (\dim_{\mathbb{C}} \lambda)^2$ .*

*Beweis.* Nach dem Satz von Lie ?? finden wir  $v \in E$  ungleich Null mit  $Hv \subset \mathbb{C}v$ . Es folgt  $\text{Span}_{\mathbb{C}} Kv = E$  und damit liegt  $\mathcal{C}(K) * v$  dicht in  $E$ . Daraus folgt hinwiederum  $\mathcal{C}(K) * v = E$ . Wir kennen aber bereits nach dem Satz von Peter-Weyl die Formel  $\dim_{\mathbb{C}} e_{\lambda} \mathcal{C}(K) = (\dim_{\mathbb{C}} \lambda)^2$ .  $\square$

**Proposition 13.6.5.** *Sei  $G$  eine halbeinfache Lie-Gruppe mit einer treuen endlichdimensionalen Darstellung (und folglich endlichem Zentrum). Sei  $K \subset G$  eine maximal kompakte Untergruppe. So gilt für alle  $\lambda \in \hat{K}$  im Ring  $e_{\lambda} M_c(G) e_{\lambda}$  die Identität  $P_m$  aus ?? mit  $m = m((\dim \lambda)^2)$  im Sinne von ??.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, daß es für  $\mu \in M_c(G)$  mit  $\mu \neq 0$  auch eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung  $E$  von  $G$  gibt derart, daß  $\mu$  nicht durch Null auf  $E$  operiert. Da Lie  $G$  halbeinfach angenommen war, ist jede endlichdimensionale Darstellung von  $G$  halbeinfach nach dem Satz von Weyl. Wir müssen also nur eine endlichdimensionale Darstellung von  $G$  finden, auf der  $\mu$  nicht durch Null operiert.

Betrachten wir nun unsere treue Darstellung  $G \hookrightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ , so ist die induzierte Operation von  $G$  auf dem Polynomring in den Matrixkoeffizienten  $\mathbb{C}[X_{ij}]$  eine direkte Summe stetiger endlichdimensionaler Darstellungen. Wenden wir auf solch eine polynomiale Funktion  $f$  unser Maß  $\mu$  an und werten das Resultat aus im neutralen Element von  $G$ , so erhalten wir schlicht

$$(\mu f)(e) = \int_G f(g^{-1}) \mu(g)$$

Andererseits liegen nach Stone-Weierstraß die Einschränkungen unserer polynomialen Funktionen auf ein beliebiges Kompaktum  $\Omega$  von  $G$  dicht in  $\mathcal{C}(\Omega)$  bezüglich der sup-Norm. Aus  $\mu f = 0$  für alle polynomialen Funktionen folgt also  $\int_G f(g^{-1}) \mu(g) = 0$  für alle stetigen Funktionen auf  $G$  und damit  $\mu = 0$ . Seien nun  $\mu_1, \dots, \mu_m \in e_{\lambda} M_c(G) e_{\lambda}$  gegeben mit  $P_m(\mu_1, \dots, \mu_m) = \mu \neq 0$ . So gibt es eine einfache endlichdimensionale Darstellung  $E$  von  $G$ , auf der  $\mu$  nicht durch Null operiert. Dann operiert  $\mu$  auch nicht durch Null auf  $e_{\lambda} E$  und die Behauptung folgt aus der Dimensionsabschätzung 13.6.4.  $\square$

**Lemma 13.6.6.**  $\dim e_{\lambda} H \leq (\dim \lambda)^2$ .

*Beweis.* Sonst fände Teilraum  $V \subset e_\lambda H$  endlicher aber größerer Dimension. Für  $m = m((\dim \lambda)^2)$  im Sinne von ?? fände nach ebendiesem Lemma  $F_1, \dots, F_m \in \text{End } e_\lambda H$  stetig und  $v \in e_\lambda H$  mit  $P_m(F_1, \dots, F_m)(v) \neq 0$ , durch Fortsetzen geeigneter Endomorphismen von  $V$ . Betrachte nun den von allen  $F_{i(1)} \dots F_{i(\nu)}(v)$  mit  $0 \leq \nu \leq m$  und  $1 \leq i(1), \dots, i(\nu) \leq m$  aufgespannten Teilraum von  $e_\lambda H$ . Nach 12.1.6 finden wir  $\mu_1 \in M_c(G)_\lambda$  mit  $\|\mu_1 w - F_1(w)\| < \varepsilon \|w\|$  für alle Elemente  $w$  dieses Teilraums und damit ist

$$(P_m(\mu_1, F_2, \dots, F_m) - P_m(F_1, \dots, F_m))(v) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \text{sgn}(\sigma) F_{\sigma(1)} \dots (\mu_1 - F_1) \dots F_{\sigma(m)} v$$

in der Norm beschränkt durch  $m! C^{m-1} \varepsilon \|v\|$  für  $C$  eine simultane Schranke der Operatornormen der  $F_i$ . Wählen wir ein  $\mu_1$  zu hinreichend kleinem  $\varepsilon > 0$ , so folgt

$$P_m(\mu_1, F_2, \dots, F_m)(v) \neq 0.$$

Induktiv finden wir so auch  $\mu_2, \dots, \mu_m \in M_c(G)_\lambda$  mit  $P_m(\mu_1, \dots, \mu_m)(v) \neq 0$  im Widerspruch zu Proposition 13.6.5.  $\square$

### 13.7 Halbeinfaches, später

- Definition 13.7.1.**
1. Eine Lie-Gruppe heißt **halbeinfach** genau dann, wenn sie zusammenhängend ist und eine halbeinfache Lie-Algebra hat.
  2. Eine Lie-Gruppe heißt **linear** genau dann, wenn sie eine treue stetige endlichdimensionale Darstellung besitzt.

**Satz 13.7.2.** *In jeder linearen halbeinfachen Lie-Gruppe gibt es eine maximal kompakte Untergruppe, und je zwei maximal kompakte Untergruppen sind konjugiert.*

Eine stetige Darstellung einer reductiven Lie-Gruppe  $G$  heißt **zulässig** genau dann, wenn sie  $K$ -zulässig ist für eine und damit jede maximal kompakte Untergruppe  $K \subset G$ .

## 14 Ab hier noch nicht in der Vorlesung dran

### 14.1 Wohin?

**Definition 14.1.1 (Tensorprodukt von Darstellungen).** Gegeben zwei Darstellungen  $V, W$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  macht ihr Tensorprodukt  $V \otimes_k W$  zu einer Darstellung mittels der Regel

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

*Bemerkung 14.1.2.* Natürlich ist  $V \otimes_k W$  sogar in natürlicher Weise eine Darstellung von  $G \times G$ . Die Darstellung in der Definition entsteht daraus durch Einschränken mittels der diagonalen Einbettung  $G \hookrightarrow G \times G$ .

*Beispiel 14.1.3.* Operiert eine Gruppe auf einem Vektorraum  $V$ , so operiert sie in natürlicher Weise auch auf dem Vektorraum  $\text{Bil}(V)$  aller Bilinearformen auf  $V$ . Der natürliche Isomorphismus

$$\text{Bil}(V) \xrightarrow{\sim} (V \otimes V)^*$$

ist dann ein Isomorphismus von Darstellungen.

**Lemma 14.1.4.** Sind  $V, W$  endlichdimensionale stetige Darstellungen einer Liegruppe  $G$ , so wird die Operation der Liealgebra auf  $\text{Hom}(V, W)$  bzw.  $V \otimes W$  gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} (Xf)(v) &= X(f(v)) - f(Xv) \\ X(v \otimes w) &= (Xv) \otimes w + v \otimes (Xw) \end{aligned}$$

*Bemerkung 14.1.5.* Speziell wird die Operation der Liealgebra auf der kontragradierten Darstellung  $V^*$  gegeben durch  $(Xf)(v) = -f(Xv)$ .

*Beweis.* Wir zeigen nur die zweite Formel. Es gilt, das Differential der Verknüpfung

$$G \rightarrow \text{End } V \times \text{End } W \rightarrow \text{End}(V \otimes W)$$

im neutralen Element zu berechnen. Die zweite Abbildung ist bilinear, ihr Differential wird folglich durch ?? gegeben. Damit ergibt sich als Differential

$$X \mapsto (d\rho_V(X), d\rho_W(X)) \mapsto d\rho_V(X) \otimes \text{id}_W + \text{id}_V \otimes d\rho_W(X)$$

□

## 14.2 Wohin?

**Proposition 14.2.1.** *Wohin? Nötig? Sei  $G$  ein Liegruppe und  $H \subset G$  eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe. So gibt es auf  $G/H$  genau zwei  $G$ -invariante Orientierungen.*

*Beweis.* Wir wählen eine Orientierung auf  $T_{eH}(G/H)$ . Für jedes  $g \in G$  liefert Verschieben mit  $g$  eine Orientierung auf  $T_{gH}(G/H)$ . Diese Orientierung hängt nur von der Nebenklasse  $gH$  ab, da Verschieben mit  $h \in H$  die Orientierung auf  $T_{eH}(G/H)$  erhält. Mithilfe lokaler Schnitte der Projektion  $G \rightarrow G/H$  erkennt man leicht, daß unsere Orientierungen auch stetig vom Fußpunkt abhängen.  $\square$

## 14.3 Klassifikation kompakter Liegruppen, Schrott

**Satz 14.3.1.** *Jede kompakte Untergruppe einer  $GL(n, \mathbb{R})$  ist eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und kann beschrieben werden als die simultane Nullstellenmenge einer endlichen Familie von Polynomen in den Matrixeinträgen.*

*Bemerkung 14.3.2.* In Formeln gibt es also für jede kompakte Untergruppe  $K \subset GL(n, \mathbb{R})$  Polynome  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_{ij}]_{i,j=1}^n$  in den  $n^2$  Veränderlichen  $X_{ij}$  derart, daß gilt  $K = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid f_1(A) = \dots = f_r(A) = 0\}$ . Zum Beispiel ist die orthogonale Gruppe  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = E\}$  die simultane Nullstellenmenge der  $n^2$  Polynome

$$X_{r1}X_{1s} + X_{r2}X_{2s} + \dots + X_{rn}X_{ns} - \delta_{rs} \quad \text{für } 1 \leq r, s \leq n.$$

*Bemerkung 14.3.3.* Für diejenigen, die bereits etwas über Spiegelungsgruppen Bescheid wissen, sei hier kurz der Zusammenhang angerissen. Bezeichne  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  den Einheitskreis.

**Satz 14.3.4.** *Sei  $K \subset GL(n, \mathbb{R})$  eine kompakte Untergruppe.*

1. *Jede zusammenhängende kommutative Untergruppe von  $K$  läßt sich zu einer maximalen zusammenhängenden kommutativen Untergruppe von  $K$  vergrößern.*
2. *Je zwei maximale kommutative zusammenhängende Untergruppen  $T \subset K$  sind zueinander konjugiert und es existieren für sie stetige Gruppenisomorphismen  $S^1 \times \dots \times S^1 \xrightarrow{\sim} T$ . Man nennt diese Untergruppen die **maximalen Tori** von  $K$ .*

3. In der abelschen Gruppe  $\text{Top}(T, S^1)$  aller stetigen Abbildungen von  $T$  nach  $S^1$  ist die Menge der stetigen Gruppenhomomorphismen eine endlich erzeugte Untergruppe  $\mathfrak{X}(T) \cong \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ .
4. Bezeichnet  $N = N_K(T)$  den Normalisator von  $T$  in  $K$ , so operiert  $N$  auf  $\mathfrak{X}(T)$  und sein Bild ist eine endliche Gitterspiegelungsgruppe  $W \subset \text{Ab}^\times(\mathfrak{X}(T))$ .
5. Auf diese Weise erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kompakte zusammen-} \\ \text{-hängende Liegruppen,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Gitterspiegelungsgrup-} \\ \text{-pen mit stabiler Wurzelwahl,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

## 15 Weiteres zu Liegruppen

### 15.1 Muß woanders hin, Sammelsurium

*Bemerkung 15.1.1.* Hier sind die Darstellungen ungerader Dimension von reellem Typ und die Darstellungen gerader Dimension von quaternionalem Typ. In der Tat gibt es in jeder Dimension bis auf Isomorphismus nur eine irreduzible Darstellung, also ist jede einfache komplexe Darstellung isomorph zu ihrer kontragredienten Darstellung und es gibt keine einfachen Darstellungen von komplexem Typ. Den Darstellungen ungerader Dimension bleibt also gar nichts anderes übrig als reell zu sein. Die einfache zweidimensionale komplexe Darstellung andererseits ist von quaternionalem Typ nach ???. Folglich kommt auch ihr Tensorprodukt  $V(2) \otimes_{\mathbb{C}} V(2n+1) \cong V(2) \otimes_{\mathbb{R}} V(2n+1)_{\mathbb{R}}$  mit jeder einfachen Darstellung ungerader Dimension her von einer Darstellung über  $\mathbb{H}$  und folglich besitzt auch dieses Tensorprodukt einen schieflinearen äquivarianten Automorphismus  $J$  mit  $J^2 = -\text{id}$ . Dasselbe gilt dann auch für seine isotypischen Komponenten, und mit ??? erkennen wir so, daß alle einfachen Darstellung gerader Dimension von quaternionalem Typ sind.

**Lemma 15.1.2.** *Ist  $G$  eine kompakte Liegruppe, so ist jeder Liealgebrenhomomorphismus  $\mathfrak{su}(2) \rightarrow \text{Lie } G$  das Differential eines Homomorphismus von Liegruppen  $\text{SU}(2) \rightarrow G$ .*

*Bemerkung 15.1.3.* Das ist ein Spezialfall eines allgemeinen Resultats, nach dem für je zwei Liegruppen  $H, G$  mit  $H$  einfach zusammenhängend das Differential eine Bijektion  $\text{Grpto}(H, G) \xrightarrow{\sim} \text{Alg}_{\mathbb{R}}(\text{Lie } H, \text{Lie } G)$  liefert. Wir geben jedoch für den oben angegebenen Fall einen eigenständigen Beweis, um die Theorie kompakter Liegruppen in größerer Eigenständigkeit entwickeln zu können.

*Beweis.* Da jede kompakte Liegruppe nach ?? eine treue unitäre endlichdimensionale Darstellung besitzt, reicht es aus zu zeigen, daß jeder Homomorphismus von Liealgebren  $\mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{u}(n)$  das Differential eines Homomorphismus von Liegruppen  $SU(2) \rightarrow U(n)$  ist. Wir wissen aber aus ??, daß sich in der Tat jede endlichdimensionale unitäre Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{su}(2)$  zu einer Darstellung der Liegruppe  $SU(2)$  integrieren läßt.  $\square$

*Bemerkung 15.1.4.* Für die Killingform auf  $\mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$  haben wir  $\kappa(E_i, E_j) = -2\delta_{ij}$ . Folglich ist  $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$  ein skalares Vielfaches des Casimir-Operators. Auf den  $C^\infty$ -Funktionen auf der Kugelschale wirkt das wie ein skalares Vielfaches des Laplace-Operators, der den Funktionswert an einer Stelle vergleicht mit dem Durchschnitt der Funktionswerte in einer kleinen Umgebung. Man überlege sich das für einen Pol und folgert es aus der Drehinvarianz unseres Operators für jede Stelle. Die isotypischen Komponenten von  $C^\infty(S^2)$  sind also die Eigenräume des Laplace-Operators. Diese isotypischen Komponenten bestehen aus polynomialen Funktionen, da diese bereits dicht liegen nach Stone-Weierstraß etc. Um die Nullgewichtsräume bezüglich der infinitesimalen Rotation um die  $z$ -Achse in den isotypischen Komponenten zu erhalten, müssen wir also auf die Basis  $z^0, z^1, z^2, \dots$  bezüglich der Metrik

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{S^2} \overline{f(z)} g(z) dS \\ &= \int_{-1}^1 \overline{f(z)} g(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \end{aligned}$$

die Gram-Schmid'sche Orthonormalisierung anwenden. *Gleiche ab mit 2.5.*

*Bemerkung 15.1.5.* Die Notation  $e, h, f$  für die Standardbasis der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  wie wir sie oben eingeführt hatten ist ein weit verbreiteter Standard. Manchmal heißt  $e$  ein **Erzeugungsoperator** und  $f$  dual ein **Vernichtungsoperator**. Eine andere gebräuchliche Notation anstelle von  $e, h, f$  ist  $x, h, y$ .

*Übung 15.1.6. Später.* Jede endlichdimensionale Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  ist **selbstdual**, als da heißt isomorph zu ihrer kontragredienten Darstellung.

*Beispiel 15.1.7.* Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra über dem Körper  $k$ . Für eine Linearform  $\lambda \in \mathfrak{g}^*$  auf  $\mathfrak{g}$  ist die Abbildung  $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(k), X \mapsto \lambda(X)$  eine Darstellung genau dann, wenn  $\lambda$  auf dem von allen Kommutatoren  $[x, y]$  erzeugten Untervektorraum  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$  verschwindet. Wir bezeichnen diese Darstellung dann mit  $k_\lambda$  und erhalten so eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^* & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{eindimensionale Darstellungen von } \mathfrak{g}, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \lambda & \mapsto & k_\lambda \end{array}$$

Diejenigen Linearformen auf  $\mathfrak{g}$ , die auf  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  verschwinden, nennt man auch die **Charaktere von  $\mathfrak{g}$** . Diese Bezeichnung wird jedoch auch noch für viele andere verwandte aber verschiedene Konzepte benutzt.

**Definition 15.1.8.** Ist  $U \subset V$  eine Unterdarstellung, so gibt es genau eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf  $V/U$  derart, daß  $\text{can} : V \rightarrow V/U$  ein Homomorphismus von Darstellungen wird. Man nennt  $V/U$  die **Quotientendarstellung**.

*Bemerkung 15.1.9.* Nehmen wir hier speziell  $W = k$  die triviale Darstellung, so heißt  $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$  die **kontragrediente Darstellung** zu  $V$ . Explizit wird die Operation von  $\mathfrak{g}$  auf  $V^*$  gegeben durch die Formel

$$(xf)(v) = -f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, f \in V^*, v \in V$$

Offensichtlich ist dann die kanonische Abbildung  $V \rightarrow (V^*)^*$  ein Homomorphismus von Darstellungen. Nehmen wir umgekehrt  $V = k$  die triviale Darstellung, so ist auch die offensichtliche Abbildung  $W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(k, W)$  ein Isomorphismus von Darstellungen.

*Übung 15.1.10.* Ist  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow k$  eine eindimensionale Darstellung einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$ , so wird die kontragrediente Darstellung gegeben durch  $-\lambda$ , in Formeln  $(k_\lambda)^* \cong k_{-\lambda}$ .

## 15.2 Die adjungierte Darstellung

*Beispiel 15.2.1.* Die für jede eingebettete Liegruppe in ?? erklärte Abbildung  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\text{Lie } G)$  ist eine Darstellung von  $G$ , genannt die **adjungierte Darstellung**.

**Definition 15.2.2.** Für jede Liealgebra  $\mathfrak{g}$  betrachtet man die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{ad} = \text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{End } \mathfrak{g} \\ x &\mapsto \text{ad } x = [x, \ ] \end{aligned}$$

Ausgeschrieben gilt also  $(\text{ad } x)(y) = [x, y]$  für alle  $y \in \mathfrak{g}$ . Die Jacobi-Identität zeigt, daß wir so einen Homomorphismus von Liealgebren  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  erhalten. Man nennt  $(\mathfrak{g}, \text{ad})$  die **adjungierte Darstellung** von  $\mathfrak{g}$ .

*Bemerkung 15.2.3.* Ist  $\mathfrak{g}$  die Liealgebra einer Liegruppe  $G$ , so entsteht die adjungierte Darstellung der Liealgebra durch Differenzieren aus der adjungierten Darstellung der Liegruppe.

## 15.3 Liegruppen

*Übung 15.3.1.* Man zeige, daß alle Elemente einer kompakten Untergruppe von  $\text{GL}(n; \mathbb{C})$  diagonalisierbare Matrizen sind, deren sämtliche Eigenwerte Norm 1 haben.

*Beispiel 15.3.2.*  $\mathbb{R}^n$  ist eine Lie-Gruppe mit der Addition als Verknüpfung. Dasselbe gilt für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum.

*Beispiel 15.3.3.* Offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  tragen stets in natürlicher Weise die Struktur einer  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Mit dieser Struktur ist  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  eine Lie-Gruppe. Dasselbe gilt für  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{(2n)^2}$ .

## 15.4 Märchen: Lie-Gruppen und Liealgebren

**Satz 15.4.1** (Ein-Parameter-Untergruppen). *Ist  $G$  eine Liegruppe und  $T_e G$  ihr Tangentialraum im neutralen Element  $e \in G$ , so erhalten wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Glatte Gruppenhomomorphismen} \\ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow G \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} T_e G$$

$$\varphi \mapsto \dot{\varphi}(0)$$

indem wir jedem glatten Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  seine Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}(0)$  zum Zeitpunkt Null zuordnen.

*Bemerkung 15.4.2.* Ein glatter Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  heißt auch eine **Ein-Parameter-Untergruppe** von  $G$ , deshalb der Name des Satzes.

*Beispiel 15.4.3.* II.6.9.11 bestimmt insbesondere die Ein-Parameter-Untergruppen der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums.

*Beispiel 15.4.4.* Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto \exp(tA) = 1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

ist die Ein-Parameter-Untergruppe mit Geschwindigkeitsvektor  $A$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , für alle  $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) = T_e \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ . Analoges gilt für  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  und  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ .

*Beispiel 15.4.5.* Der Tangentialraum an  $S^1$  am neutralen Element 1 ist die imaginäre Achse,  $T_1 S^1 = \mathbb{R}i$ . Die Ein-Parameter-Untergruppen der  $S^1$  sind die Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto \exp(ait)$  mit  $a \in \mathbb{R}$ . Ganz genauso geht es mit der Gruppe  $S^3$ . Wir haben als Ein-Parameter-Untergruppen die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow S^3 \\ t &\mapsto \exp(tq) \end{aligned}$$

für  $q$  rein imaginär, also  $\bar{q} = -q$ . In der Tat folgt aus  $\bar{q} = -q$  schon

$$\begin{aligned} \|\exp(tq)\|^2 &= \exp(tq) \cdot \overline{\exp(tq)} \\ &= \exp(tq) \cdot \exp(t\bar{q}) \\ &= \exp(tq) \exp(-tq) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Definition 15.4.6.** Die Liealgebra  $\text{Lie } G$  der Lie-Gruppe  $G$  ist der Vektorraum  $T_e G$  mit der Lie-Klammer

$$[A, B] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\varphi_A(t)\varphi_B(t) - \varphi_B(t)\varphi_A(t)),$$

wobei die Differenz natürlich nur in einer Karte um das neutrale Element gebildet werden kann als ein Element des den Definitionsbereich der Karte umfassenden Vektorraums, der Grenzwert unter der kanonischen Identifikation dieses Vektorraums mit dem Tangentialraum am neutralen Element jedoch unabhängig ist von der Karte.

*Übung 15.4.7.* Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Die Logarithmusreihe liefert eine inverse Abbildung.

*Bemerkung 15.4.8.* Man prüft leicht, daß  $\mathfrak{g} = \text{End } V$  mit der Lie-Klammer  $[X, Y] = XY - YX$  zu einer reellen Liealgebra wird. Unter der Liealgebra

$\text{Lie } G$

unserer abgeschlossenen Untergruppe  $G \triangleleft \text{Aut } V$  verstehen wir den Vektorraum  $T_e G$  mit der induzierten Lie-Klammer. Um die Bedeutung des Konzepts einer Liealgebra zu erklären, gebe ich ohne Beweis und sogar ohne vollständige Definitionen zwei grundlegende Sätze an. Wir notieren die Kategorie der Liegruppen mit  $\text{Lgrp}$  und die Kategorie der Liealgebren über einem Körper  $k$  mit  $\text{Lalg}_k$ .

## 16 Steinbruch und Schrotthalde

### 16.1 Gemischte Übungen

*Übung 16.1.1.* Man zeige, daß im allgemeinen für Teilmengen  $M, N$  eines topologischen Raums  $(M \cup N)^\circ \neq M^\circ \cup N^\circ$ . Welche Inklusion gilt stets und warum?

*Übung 16.1.2.* Jede stetige Abbildung  $g$ , für die es einen stetigen Schnitt gibt alias eine stetige Abbildung  $s$  mit  $g \circ s = \text{id}$ , ist final.

*Übung 16.1.3.* Operiert eine topologische Gruppe  $G$  stetig auf einem topologischen Raum  $X$  und ist  $N \subset G$  ein Normalteiler, dessen Elemente  $X$  punktweise festhalten, so ist auch die induzierte Operation von  $G/N$  auf  $X$  stetig.

*Übung 16.1.4.* Sei  $G$  eine Liegruppe. Man bestimme das Differential am neutralen Element der Abbildung  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^3$ .

*Übung 16.1.5.* Für welche Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  ist  $f\partial_x + g\partial_y$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf  $\mathbb{C}^\times$ , wobei  $x$  den Realteil und  $y$  den Imaginärteil einer komplexen Zahl bedeuten mögen?

*Übung 16.1.6.* Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung  $G \rightarrow \text{GL}(V)$  einer Liegruppe mit der abgeleiteten Darstellung ihrer Liealgebra zeige man die Formel

$$g(X(g^{-1}v)) = ((\text{Ad } g)(X))v \quad \forall g \in G, X \in \text{Lie } G, v \in V$$

*Übung 16.1.7.* Ist  $A$  eine endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Algebra und  $G \subset \text{GL}(A)$  ihre Automorphismengruppe, so besteht  $\text{Lie } G \subset \text{End}(A)$  genau aus allen Derivationen von  $A$ .

*Übung 16.1.8.* Man bestimme alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $S^1 \rightarrow (\mathbb{R} \times S^1)$ .

*Übung 16.1.9.* Man zeige, daß im allgemeinen für Teilmengen  $M, N$  eines topologischen Raums  $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$ . Welche Inklusion gilt stets und warum?

*Übung 16.1.10.* Jede stetige Abbildung  $f$ , für die es eine stetige Abbildung  $g$  gibt mit  $g \circ f = \text{id}$ , ist initial.

*Übung 16.1.11.* Gegeben  $G \supset H \supset K$  eine topologische Gruppe mit zwei Normalteilern ist der Isomorphismus aus dem noetherschen Isomorphiesatz ein Homöomorphismus  $G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$ .

*Übung 16.1.12.* Sei  $G$  eine Liegruppe. Man bestimme das Differential bei  $(e, e)$  der Abbildung  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$ .

*Übung 16.1.13.* Für welche Funktionen  $f(a, b)$  und  $g(a, b)$  ist  $f\partial_a + g\partial_b$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und Spalten und Determinante Eins, wobei  $a$  und  $b$  die beiden Einträge der ersten Zeile bedeuten mögen?

*Übung 16.1.14.* Man zeige, daß gegeben eine Liegruppe  $G$  für jedes Gruppenelement  $g \in G$  die Abbildung  $\text{Ad}(g)$  ein Liealgebrenhomomorphismus ist.

*Übung 16.1.15.* Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear und  $G \subset \text{GL}(V)$  die Gruppe aller  $g$  mit  $\omega(gv, gw) = \omega(v, w)$  für alle  $v, w \in V$ , so besteht  $\text{Lie } G \subset \text{End}(V)$  genau aus allen Endomorphismen  $X$  mit  $\omega(Xv, w) + \omega(v, Xw) = 0$  für alle  $v, w \in V$ .

*Übung 16.1.16.* Man bestimme alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{R}^\times \rightarrow S^1$ .

## 16.2 Zusammenhänge

16.2.1. Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Lie-Gruppe. Nach 5.8.1 ist ein glattes  $G$ -Hauptfaserbündel auf  $X$  ein Paar  $(P, \pi)$  bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $P$  mit einer glatten Rechtsoperation von  $G$  und einer Projektion  $\pi : P \rightarrow X$  derart, daß unsere Projektion  $G$ -äquivariant ist für die triviale  $G$ -Rechtsoperation auf  $X$  und "lokal trivial" in dem Sinne, daß es für jeden Punkt von  $X$  eine offene Umgebung  $U$  und einen  $G$ -äquivarianten Diffeomorphismus  $U \times G \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U)$  gibt, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\sim} & \pi^{-1}(U) \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & = & U \end{array}$$

**Definition 16.2.2.** Ich erinnere VII.3.13.13 folgende. Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $G$  eine Lie-Gruppe, und  $\pi : P \rightarrow X$  ein glattes  $G$ -Hauptfaserbündel auf  $X$ . Die Projektion  $\pi : P \rightarrow X$  induziert eine Tangentialabbildung  $d\pi : TP \rightarrow TX$  und damit eine Surjektion von Vektorraumbündeln  $TP \rightarrow \pi^*TX$ . Ein **Zusammenhang**  $\nabla$  auf  $P$  ist eine  $G$ -äquivariante Spaltung dieser Surjektion

$$\nabla : \pi^*TX \hookrightarrow TP$$

16.2.3. Der Raum aller Zusammenhänge auf dem trivialen Bündel  $P = X \times G$  ist in natürlicher Weise in Bijektion zum Raum  $\Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}$  aller 1-Formen auf  $X$  mit Werten in  $\mathfrak{g} = T_e G$ . In der Tat haben wir für  $P = X \times G$  ein kommutatives Diagramm mit offensichtlichen horizontalen Abbildungen und

vertikalen Identifikationen

$$\begin{array}{ccc} TP & \rightarrow & \pi^*TX \\ \downarrow & & \downarrow \\ TX \times T_eG \times G & \xrightarrow{\sim} & TX \times TG \rightarrow TX \times G \end{array}$$

Eine Spaltung  $\nabla$  liefert insbesondere eine faserweise lineare Abbildung

$$TX = TX \times \{e\} \rightarrow TX \times T_eG \rightarrow \mathfrak{g}$$

und so eine  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $A = A_\nabla$  auf  $X$ . Umgekehrt bezeichne  $g^r : G \rightarrow G, h \mapsto hg$  die Rechtsmultiplikation mit  $g \in G$ . Mit dieser Notation bestimmt  $A \in \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}$  einen Zusammenhang durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \nabla_A : TX \times G &\rightarrow TX \times TG \\ (v, g) &\mapsto (v, (d_e g^r \circ A)(v)) \end{aligned}$$

Sei nun  $Y$  eine zweite Mannigfaltigkeit,  $H$  eine zweite Lie-Gruppe, und  $\pi : Q \rightarrow Y$  ein  $H$ -Hauptfaserbündel auf  $Y$ . Gegeben  $\psi : X \rightarrow Y$  und einen Homomorphismus von Lie-Gruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  verstehen wir unter einem  $\varphi$ -Lift von  $\psi$  eine Abbildung  $\tilde{\psi} : P \rightarrow Q$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & Q \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

kommutiert und daß gilt  $\tilde{\psi}(pg) = \tilde{\psi}(p)\varphi(g) \quad \forall p \in P, g \in G$ . Gegeben Zusammenhänge  $\nabla : \pi^*TX \rightarrow TP$  und  $\tilde{\nabla} : \pi^*TY \rightarrow TQ$  auf  $P$  und  $Q$  nennen wir so einen  $\varphi$ -Lift horizontal genau dann, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^*TX & \xrightarrow{\nabla} & TP \\ \downarrow & & \downarrow d\tilde{\psi} \\ \pi^*TY & \xrightarrow{\tilde{\nabla}} & TQ \end{array}$$

kommutiert, für die von  $d\psi : TX \rightarrow TY$  und  $\tilde{\psi}$  festgelegte vertikale Abbildung links. Sind wieder  $P = X \times G$  und  $Q = Y \times H$  triviale Bündel, so wird ein  $\varphi$ -Lift von  $\psi$  festgelegt durch die Abbildung  $f = f_{\tilde{\psi}} : X \rightarrow H, f(x) = \text{pr}_2(\tilde{\psi}(x, e))$ , und gegeben so ein  $f$  erhalten wir  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_f$  durch

$$\tilde{\psi}(x, g) = (\psi(x), f(x)\varphi(g))$$

Ist weiter  $T_eH = \mathfrak{h}$  die Lie-Algebra von  $H$  und sind die Zusammenhänge gegeben durch 1-Formen  $A \in \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}$  und  $B \in \Omega^1(Y) \otimes \mathfrak{h}$ , so ist  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_f$

horizontal genau dann, wenn mit den offensichtlichen vertikalen Abbildungen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TX \times G & \xrightarrow{\nabla_A} & TX \times TG \\ \downarrow & & \downarrow \\ TY \times H & \xrightarrow{\nabla_B} & TY \times TH \end{array}$$

kommutiert. Bezeichnet  $h^l : H \rightarrow H$  die Linksmultiplikation mit  $h \in H$ , so wird das Differential  $d\tilde{\psi}$  von  $\tilde{\psi}$  gegeben durch die Vorschrift

$$d_{(x,g)}\tilde{\psi}(v, w) = (d_x\psi(v), (d_{f(x)}\varphi(g))^r \circ d_x f)(v) + (d_{\varphi(g)}f(x)^l \circ d_g\varphi)(w)$$

Wenden wir nun  $d_{(x,g)}\tilde{\psi}$  an auf  $\nabla_A(v, g) = (v, (d_e g^r \circ A)(v))$  und vergleichen das Resultat mit unserem Ausdruck für  $\nabla_B(d_x\psi(v), f(x)\varphi(g))$ , so ergibt sich als Horizontalitätsbedingung

$$d_{f(x)}\varphi(g)^r \circ d_x f + d_{\varphi(g)}f(x)^l \circ d_g\varphi \circ d_e g^r \circ A = d_e(f(x)\varphi(g))^r \circ B \circ d_x\psi$$

Beachten wir nun  $(f(x)\varphi(g))^r = \varphi(g)^r \circ f(x)^r$ , also  $d(f(x)\varphi(g))^r = d\varphi(g)^r \circ df(x)^r$ , und beim mittleren Term  $f(x)^l \circ \varphi \circ g^r = \varphi(g)^r \circ f(x)^l \circ \varphi$ , also  $df(x)^l \circ d\varphi \circ dg^r = d\varphi(g)^r \circ df(x)^l \circ d\varphi$ , so können wir unsere Bedingung umschreiben zu

$$(d_e f(x)^r)^{-1}(d_x f) + \text{Ad } f(x) \circ d_e \varphi \circ A = B \circ d_x \psi$$

Diese Gleichheit von Abbildungen  $T_x X \rightarrow T_e H$  ist also die korrekte Verallgemeinerung der Formel für die Transformation eines Zusammenhangs unter der Eichgruppe, die man im Spezialfall  $\psi = \text{id}$ ,  $\varphi = \text{id}$  erhält. Andererseits sagt diese Formel auch, daß gegeben ein Zusammenhang auf dem trivialen Bündel die  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form des zurückgeholten Zusammenhangs gerade die zurückgeholte 1-Form des ursprünglichen Zusammenhangs sein muss. Betrachten wir speziell eine komplexe algebraische Gruppe  $G$  und holomorphe Zusammenhänge auf dem trivialen  $G$ -Hauptfaserbündel über einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene  $U \subseteq \mathbb{C}$  und identifizieren solche Zusammenhänge mit  $\mathfrak{g}$ -wertigen 1-Formen  $B(t) dt$ , so transformiert ein Element der Eichgruppe  $f : U \rightarrow G$  unseren Zusammenhang  $B(t) dt$  in

$$(d_t f)f(t)^{-1} + (\text{Ad } f(t))B(t) dt$$

Hier haben wir wie üblich  $(d_t f)f(t)^{-1}$  geschrieben für die Abbildung  $T_t U \rightarrow T_{f(t)} G \rightarrow T_e G$ , die sich aus dem Differential von  $f$  bei  $t$  und dem Differential der Rechtsmultiplikation mit  $f(t)^{-1}$  zusammensetzt.

### 16.3 Mannigfaltigkeiten, alt

**Definition 16.3.1.** Eine  $d$ -dimensionale  $\mathcal{C}^1$ -**Mannigfaltigkeit** ist ein Hausdorff'scher  $\mathbb{R}$ -geringter Raum derart, daß jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die mit ihrer induzierten Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums isomorph ist zu einer offenen Teilmenge des Halbraums  $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , versehen mit der von  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^1)$  induzierten Struktur. Eine  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung zwischen  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten ist ein Morphismus  $\mathbb{R}$ -geringter Räume.

16.3.2. Daß diese Definition sinnvoll ist, wird sich erst bei der weiteren Entwicklung der Theorie herausstellen. Ich hoffe jedoch, daß sie zumindest einigermaßen anschaulich ist.

**Lemma 16.3.3.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1}$  mit der induzierten  $\mathcal{C}^1$ -Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raumes versehen. Ein Morphismus  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Immersion von  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen genau dann, wenn  $\varphi$  einen Homöomorphismus auf sein Bild induziert und  $d_x \varphi$  injektiv ist für alle  $x \in U$ .

*Beweis.* Eine Immersion von geringten Räumen induziert per definitionem stets einen Homöomorphismus auf ihr Bild. Weiter ist jede Verknüpfung von Immersionen wieder eine Immersion. Wir brauchen also die Injektivität von  $d_x \varphi$  nur im Fall  $k = 1$  zu zeigen. Wäre aber dann  $d_x \varphi$  nicht injektiv bei  $x = p$ , so hätten alle Funktionen  $f \circ \varphi$  für eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^b$  verschwindende Ableitungen bei  $p$  und  $\varphi$  könnte keine Immersion gewesen sein. Die andere Implikation wird ähnlich gezeigt wie ?? und wir überlassen die Details dem Leser.  $\square$

16.3.4. In der Differentialgeometrie versteht man unter einer Immersion von Mannigfaltigkeiten meist einen injektiven Morphismus mit injektivem Differential an jeder Stelle. Eine Immersion in diesem Sinne muß keinesfalls eine Immersion von geringten Räumen in unserem "kategorientheoretischen" Sinn sein.

**Definition 16.3.5.** Eine **Karte** einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Paar  $(W, \varphi)$  bestehend aus einer offenen Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  oder  $W \subseteq \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{d-1}$  und einer offenen Immersion  $\varphi : W \hookrightarrow M$ . Ein **Atlas** einer Mannigfaltigkeit ist eine Familie von Karten, deren Bilder  $M$  überdecken. Der **Kartenwechsel** von einer Karte  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  zu einer Karte  $(W_\beta, \varphi_\beta)$  ist die Veknüpfung  $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ .

16.3.6. Gegeben eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem topologischen Atlas, dessen Kartenwechsel alle stetig differenzierbar sind, liefert die kofinale Struktur zu den  $\mathcal{C}^1$ -Strukturen auf den Karten die Struktur einer  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit auf unserer topologischen Mannigfaltigkeit. Man erhält so

die in der Literatur gebräuchlichste Definition, nach der eine Mannigfaltigkeit ein Hausdorff-Raum ist mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel differenzierbar sind.

**Definition 16.3.7.** Ein **Tangentialvektor** an eine  $d$ -Mannigfaltigkeit  $M$  in einem Punkt  $x \in M$  ist eine Zuordnung  $v$ , die jeder Karte  $(W, \varphi)$  um  $x$  einen Vektor  $v(W, \varphi) \in \mathbb{R}^d$  zuordnet derart, daß für je zwei Karten  $(W, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  mit  $\varphi(p) = x = \psi(q)$  gilt

$$d_p(\psi^{-1} \circ \varphi) : v(W, \varphi) \mapsto v(V, \psi)$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an eine Mannigfaltigkeit  $M$  in einem Punkt  $x$  bildet in offensichtlicher Weise einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, den **Tangentialraum**  $T_x M$  der Mannigfaltigkeit  $M$  bei  $x$ .

16.3.8. Offensichtlich liefert für jede  $d$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und jede Karte  $(W, \varphi)$  um einen Punkt  $x \in M$  die Zuordnung  $v \mapsto v(W, \varphi)$  einen Isomorphismus

$$i_{(W, \varphi)} : T_x M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$$

*Übung 16.3.9.* Ist  $E$  ein endlichdimensionaler Vektorraum, so erhalten wir für alle  $x \in E$  einen kanonischen Isomorphismus  $E \xrightarrow{\sim} T_x E$ , indem wir jedem Vektor  $e \in E$  den Tangentialvektor  $(W, \varphi) \mapsto (d_x(\varphi^{-1}))(e)$  zuordnen.

**Lemma 16.3.10.** *Gegeben eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten  $f : M \rightarrow N$  und ein Punkt  $x \in M$  gibt es genau eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, die **Tangentialabbildung***

$$d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

mit der folgenden Eigenschaft: Ist

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ W & \xrightarrow{\tilde{f}} & V \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit Karten als vertikalen Abbildungen und gilt  $\varphi(\tilde{x}) = x$  für ein  $\tilde{x} \in W$ , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{d_x f} & T_{f(x)} N \\ i_{(W, \varphi)} \downarrow & & \downarrow i_{(V, \psi)} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{d_{\tilde{x}} \tilde{f}} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

wobei in der unteren Horizontalen unser übliches Differential aus ?? gemeint ist.

*Beweis.* Dem Leser überlassen.  $\square$

**Lemma 16.3.11.** *Gegeben differenzierbare Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$  gilt für jeden Punkt  $x \in X$  die Formel*

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$$

*Beweis.* Dem Leser überlassen.  $\square$

**Definition 16.3.12.** *Schlecht, zu kompliziert, gesättigt habe ich bereits in anderer Bedeutung. Eine volle Unterkategorie der Kategorie  $\text{Ger}_k$  der  $k$ -geringten Räume heißt **gesättigt** genau dann, wenn sie mit einem Raum auch jede seiner offenen Teilmengen mit ihrer induzierten Struktur enthält.*

**Definition 16.3.13.** Ein Funktor von einer gesättigten vollen Unterkategorie  $\mathcal{K}^* \subset \text{Ger}_k^*$  der Kategorie der punktierten  $k$ -geringten Räume in eine weitere Kategorie heißt ein **lokaler Funktor** genau dann, wenn er alle offenen Immersionen zu Isomorphismen macht.

**Satz 16.3.14.** *Sei  $k$  ein Ring,  $\mathcal{M}$  eine Klasse von  $k$ -geringten Räumen und  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ -Mgf eine gesättigte Unterkategorie, die  $\mathcal{M}$  umfaßt.*

1. *Jeder lokale Funktor  $F : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{C}$  in eine weitere Kategorie  $\mathcal{C}$  läßt sich zu einem lokalen Funktor  $F : \mathcal{M}\text{-Mgf}^* \rightarrow \mathcal{C}$  ausdehnen.*
2. *Diese Ausdehnung ist im wesentlichen eindeutig. Sind sogar stärker  $G, H : \mathcal{M}\text{-Mgf}^* \rightarrow \mathcal{C}$  zwei beliebige lokale Funktoren, so läßt sich jede Transformation  $G|_{\mathcal{K}^*} \rightarrow F|_{\mathcal{K}^*}$  auf genau eine Weise zu einer Transformation  $G \rightarrow F$  ausdehnen.*

*Beweis.* Das ist im wesentlichen eine Tautologie. Um unseren Funktor auszudehnen wählen wir für jedes Objekt  $(X, x) \in \mathcal{M}\text{-Mgf}^*$ , das nicht bereits zu  $\mathcal{K}^*$  gehört, eine offene Immersion  $(U, u) \hookrightarrow (X, x)$  mit  $(U, u) \in \mathcal{K}^*$  und setzen schlicht  $F(X, x) = F(U, u)$ . Den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser.  $\square$

16.3.15. Leser mit weitergehenden Kenntnissen in Kategorientheorie können den Satz auch dahingehend verstehen, daß die Einbettung  $\mathcal{K}^* \hookrightarrow \mathcal{M}\text{-Mgf}^*$  nach Lokalisierung am System aller offener Immersionen eine Äquivalenz von Kategorien wird.

**Definition 16.3.16.** Wir betrachten die Kategorie  $\mathcal{K}$  aller offenen Teilmengen irgendwelcher  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^p)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und definieren den **Differentialfunkt**

$$\begin{aligned} \mathrm{d}: \mathcal{K}^* &\rightarrow \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}} \\ (U, u) &\mapsto \mathbb{R}^n && \text{falls } U \subseteq \mathbb{R}^n \\ \downarrow f &\mapsto \downarrow \mathrm{d}_u f \\ (V, v) &\mapsto \mathbb{R}^m && \text{falls } V \subseteq \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Ein **Tangentialraumfunkt**  $T$  ist ein Paar  $(T, \varphi)$  bestehend aus einem lokalen Funktor  $T : \mathrm{Mgf}^* \rightarrow \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}}$  und einer Äquivalenz der Einschränkung von  $T$  auf die Kategorie offener Teilmengen irgendwelcher  $\mathbb{R}^n$  mit dem Differentialfunkt.

16.3.17. Nach 16.3.14 existieren solche Tangentialraumfunktoren und sind im wesentlichen eindeutig, als da heißt: Zwischen je zwei Tangentialraumfunktoren  $(T, \varphi)$  und  $(T', \varphi')$  gibt es genau eine Äquivalenz  $\eta : T \xrightarrow{\sim} T'$  mit  $\varphi' \circ \eta|_{\mathcal{K}^*} = \varphi : T|_{\mathcal{K}^*} \xrightarrow{\sim} \mathrm{d}$ . Es gibt verschiedene Möglichkeiten, solch einen Tangentialraumfunkt explizit anzugeben, die auf mich alle etwas verkrampft wirken.

## 16.4 Alter Beweis, wohl ganz Schrott

*Alter Beweis von 3.5.2.* Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Ist  $X$  ein Hausdorffraum und  $f : [0, 1] \rightarrow X$  eine stetige Injektion, so induziert  $f$  nach 3.3.10 einen Homöomorphismus  $f : [0, 1] \xrightarrow{\sim} f[0, 1]$  und folglich auch Homöomorphismen  $f : Y \xrightarrow{\sim} f(Y)$  für beliebige Teilmengen  $Y \subset [0, 1]$ . Darüber hinaus ist  $f[0, 1]$  als Bild eines Kompaktums abgeschlossen.

2. Gegeben  $X$  Hausdorff'sch und  $f, g : [0, 1] \rightarrow X$  stetig injektiv gilt

$$f[0, 1] \subset g[0, 1] \Leftrightarrow f(0, 1) \subset g(0, 1)$$

Die Richtung  $\Leftarrow$  folgt sofort aus der Stetigkeit. Für  $\Rightarrow$  bemerken wir, daß nach unseren Voraussetzungen die Verknüpfung  $g^{-1} \circ f : [0, 1] \hookrightarrow [0, 1]$  eine stetige Injektion ist und damit streng monoton sein muß.

3. Seien  $X$  ein Hausdorffraum und  $f, g : [0, 1] \rightarrow X$  stetige Injektionen. Sind die Bilder  $f(0, 1)$  und  $g(0, 1)$  des offenen Intervalls  $(0, 1)$  unter  $f$  und  $g$  offen in  $X$ , so trifft jede Zusammenhangskomponente  $Z$  des Schnitts  $f[0, 1] \cap g[0, 1]$  die Menge der Bilder der Endpunkte  $\{f(0), f(1), g(0), g(1)\}$ . In der Tat wäre sonst  $Z$  auch eine Zusammenhangskomponente des Schnitts  $f(0, 1) \cap g(0, 1)$ . Dieser Schnitt ist jedoch homöomorph zu einer offenen Teilmenge von  $(0, 1)$ , mithin hätten wir  $Z \subseteq f(0, 1) \cap g(0, 1)$  nach 1.4.8 und damit wäre  $Z$  offen in  $X$

nach II.6.5.29. Andererseits haben wir aber auch  $Z \not\subset f[0, 1] \cap g[0, 1] \not\subset X$ , d.h.  $Z$  ist auch abgeschlossen in  $X$ . Als zusammenhängende Teilmenge müsste  $Z$  dann sogar eine Zusammenhangskomponente von  $X$  sein und insbesondere  $f[0, 1]$  umfassen und damit doch die Menge der Bilder der Endpunkte treffen.

4. Sei  $X$  ein Hausdorffraum und seien  $f, g : [0, 1] \rightarrow X$  stetige Injektionen mit  $f(0, 1)$  und  $g(0, 1)$  offen in  $X$ . Haben wir zusätzlich weder  $f(0, 1) \subset g(0, 1)$  noch  $g(0, 1) \subset f(0, 1)$ , so ist jede Zusammenhangskomponente  $Z$  des Schnitts  $f[0, 1] \cap g[0, 1]$  von der Form  $Z = f[0, a]$  oder  $Z = f[a, 1]$  für ein  $a \in [0, 1]$  mit  $f(a) \in \{g(0), g(1)\}$ . In der Tat reicht es nach dem Vorhergehenden, diese Behauptung unter der Annahme  $f(0) \in Z$  zu zeigen. Aber dann folgt aus 1.4.5 schon  $Z = f[0, a]$  für ein  $a \in [0, 1]$ , und nach Schritt 3 und unserer Annahme kommt hier  $a = 1$  nicht in Betracht. Wäre nun  $f(a) \in g(0, 1)$ , so gäbe es auch ein  $\epsilon > 0$  mit  $f[a, a + \epsilon) \subset g(0, 1)$  im Widerspruch zur Wahl von  $a$ . Also haben wir  $f(a) \in \{g(0), g(1)\}$ .

5. Ist  $X$  nun eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit, so finden wir stetige Injektionen  $f_i : [0, 1] \rightarrow X$  ( $i = 1, \dots, n$ ) derart, daß die Bilder  $f_i(0, 1)$  des offenen Intervalls  $(0, 1)$  offen sind und ganz  $X$  überdecken. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir auch annehmen,  $n$  sei minimal möglich. Insbesondere gibt es dann natürlich keine Inklusionen der Gestalt  $f_i(0, 1) \subset f_j(0, 1)$  mit  $i \neq j$ . Wir können (ohne  $n$  zu ändern) darüberhinaus erreichen, daß die  $2n$  Punkte  $f_i(0), f_i(1)$  für  $1 \leq i \leq n$  paarweise verschieden sind: Zum Beispiel gibt es ja ein  $j$  mit  $f_1(0) \in f_j(0, 1)$ , dann folgt  $f_1[0, \epsilon) \subset f_j(0, 1)$  für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$ , dann können wir  $f_1$  abändern zu  $\tilde{f}_1$  mit  $\tilde{f}_1(0) = f_1(a)$  für beliebiges  $a \in [0, \epsilon)$ , und diese Freiheit ermöglicht es uns offensichtlich, endlich viele vorgegebene Punkte zu vermeiden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, es gelte  $f_1(1) \in f_2(0, 1)$ . Sei  $Z \subset f_1[0, 1] \cap f_2[0, 1]$  diejenige Zusammenhangskomponente dieses Schnitts, die  $f_1(1)$  enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir auch  $f_2(0) \in Z$  annehmen, so daß also für geeignete  $a, b \in (0, 1)$  gilt

$$Z = f_1[a, 1] = f_2[0, b]$$

Wäre  $Z$  die einzige Zusammenhangskomponente des Schnitts, so könnten wir eine stetige Injektion  $f : [-a, 1] \rightarrow X$  definieren durch die Vorschrift

$$t \mapsto \begin{cases} f_1(t + a) & t \in [-a, 0]; \\ f_2(t) & t \in [0, 1], \end{cases}$$

und  $f(-a, 1) = f_1(0, 1) \cup f_2(0, 1)$  wäre offen in  $X$ . Damit geraten wir aber in Widerspruch zur Annahme der Minimalität von  $n$ , also ist dieser Fall nicht möglich und  $f_1[0, 1] \cap f_2[0, 1]$  hat noch eine zweite Zusammenhangskomponente  $Z'$ . Diese zweite Zusammenhangskomponente hat notwendig die Gestalt

$Z' = f_1[0, c] = f_2[d, 1]$ , insbesondere ist  $f_1[0, 1] \cup f_2[0, 1] = f_1(0, 1) \cup f_2(0, 1)$  sowohl offen als auch abgeschlossen in  $X$ . Ist  $X$  zusammenhängend, so muß diese Vereinigung schon ganz  $X$  sein, es folgt  $X = f_1[0, a] \cup f_2[0, d]$  sowie  $f_1(0) = f_2(d), f_1(a) = f_2(0)$ . Darüber hinaus sind das die beiden einzigen Elemente von  $f_1[0, a] \cap f_2[0, d]$ . Mit 3.4.18 folgt daraus dann schließlich  $X \cong S^1$ .  $\square$

## 16.5 Schrott

*Alter Beweis für 4.2.9.* Wir wissen nach 3.9.2 bereits, daß unsere Räume Hausdorff sind. Bezeichne nun  $(x_0; x_1; \dots; x_n)$  das Bild in  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  eines von Null verschiedenen Punktes  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Wir betrachten die Abbildungen  $i_\nu : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$ , die an der  $\nu$ -ten Stelle eine 1 einfügen und das Bild in  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  nehmen. Zum Beispiel haben wir  $i_0(x_1, \dots, x_n) = (1; x_1; \dots; x_n)$ . Es reicht zu zeigen, daß alle  $i_\nu$  offene Immersionen sind. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\nu = 0$ . Sicher ist das Bild von  $i_0$  eine offene Teilmenge, wir nennen sie mal  $U \subseteq \mathbb{P}^n \mathbb{K}$ . Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{x_0 = 0\} & \twoheadrightarrow & U \\ \downarrow & & \parallel \\ x_0^{-1}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n & \rightarrow & U \end{array}$$

Die obere Horizontale ist final nach 4.1.29. Die linke Vertikale ist auch eine Submersion, da sie ein Rechtsinverses besitzt, zum Beispiel die Abbildung  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$ . Also ist die untere Horizontale, unser  $i_0$ , ein Isomorphismus.  $\square$

## 17 Radonmaße und Haar'sche Maße

### 17.1 Stetige Funktionen auf topologischen Räumen

**Definition 17.1.1.** Ein topologischer Raum heißt  $T_4$  genau dann, wenn sich je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen unseres Raums zu disjunkten offenen Teilmengen vergrößern lassen. Ein topologischer Raum heißt **normal** genau dann, wenn er  $T_4$  und Hausdorff ist.

*Ergänzung 17.1.2.* Die Bezeichnung  $T_4$  steht für das **vierte Trennungsaxiom**. Das Trennungsaxiom  $T_2$  ist synonym zu Hausdorff. Die Trennungsaxiome  $T_0$  und  $T_3$  spielen für uns keine Rolle.

*Beispiel 17.1.3.* Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal, siehe 3.3.14.

**Lemma 17.1.4.** *Jeder metrische Raum ist normal.*

*Beweis.* Sei  $(X, d)$  unser metrischer Raum. Gegeben  $Y, Z \subset X$  disjunkte abgeschlossene Teilmengen sind sicher  $U = \{x \in X \mid d(Y, x) < d(Z, x)\}$  und  $V = \{x \in X \mid d(Z, x) < d(Y, x)\}$  disjunkte offene Teilmengen mit  $U \supset Y$  und  $V \supset Z$ , wo wir für  $A \subset X$  die Notation  $d(A, x) = \inf\{d(y, x) \mid y \in A\}$  verwenden nebst der Erkenntnis II.6.2.22, daß die Abbildung  $x \mapsto d(A, x)$  stets stetig ist.  $\square$

**Satz 17.1.5 (Tietze's Erweiterungslemma).** *Jede stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Teilmenge eines normalen Raums in ein nichtleeres reelles Intervall läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung des ganzen Raums in besagtes Intervall.*

17.1.6. Wir behandeln zunächst als speziellsten Spezialfall das sogenannte Lemma von Urysohn und im Anschluß den Fall der Intervalle  $[0, 1]$  und  $[0, 1]$ . Der allgemeine Fall bleibt von da an dem Leser überlassen.

**Lemma 17.1.7 (von Urysohn).** *Gegeben ein normaler Raum  $X$  und disjunkte abgeschlossene Teilmengen  $A, B \subset X$  gibt es stets eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f|_A = 0$  und  $f|_B = 1$ .*

*Beispiel 17.1.8.* Im Fall eines metrischen Raums ist das leicht zu sehen: Die Abbildung

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (d(A, x), d(B, x)) \end{aligned}$$

ist in diesem Fall nämlich stetig mit Werten im ersten Quadranten ohne Ursprung, in Formeln mit Werten in  $Q = (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \setminus (0, 0)$ . Ist nun  $h : Q \rightarrow [0, 1]$  eine stetige Abbildung derart, daß  $h$  auf der Achse  $\mathbb{R}_{>0} \times 0$  konstant Eins ist und auf der Achse  $0 \times \mathbb{R}_{>0}$  konstant Null, so ist die Abbildung  $f = h \circ g : X \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $f|_A = 0$  und  $f|_B = 1$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit einer Vorüberlegung: Ist  $X$  normal und sind Teilmengen  $C \subset U \subset X$  gegeben mit  $C \not\subseteq X$  und  $U \subseteq X$ , so gibt es eine offene Menge  $W \subseteq X$  mit

$$C \subset W \subset \overline{W} \subset U$$

Um das einzusehen nehme man disjunkte offene Umgebungen  $W$  von  $C$  und  $D$  von  $X \setminus U$ , dann gilt nämlich  $C \subset W \subset \overline{W} \subset X \setminus D \subset U$ . Wir finden nach unserer Vorüberlegung also  $U(0) \subseteq X$  mit

$$A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset X \setminus B$$

Wir finden weiter  $U(1/2) \subseteq X$  mit

$$\overline{U(0)} \subset U(1/2) \subset \overline{U(1/2)} \subset X \setminus B$$

und indem wir so weitermachen finden wir induktiv für alle  $r \in [0, 1)$  der Form  $r = k/2^n$  mit  $k \in \mathbb{N}$  eine offene Menge  $U(r) \subset X \setminus B$  derart, daß gilt  $r < r' \Rightarrow \overline{U(r)} \subset U(r')$ . Schließlich setzen wir noch  $U(1) = X$  und definieren  $f : X \rightarrow [0, 1]$  durch

$$f(x) = \inf\{r \in [0, 1] \mid x \in U(r)\}$$

Sicher gilt  $f|_A = 0$ ,  $f|_B = 1$ . Wir müssen nur noch zeigen, daß  $f$  stetig ist. Für  $0 < t < 1$  finden wir schon mal

$$\begin{aligned} f^{-1}([0, t)) &= \bigcup_{r < t} U(r) && \subseteq X \\ f^{-1}((t, 1]) &= \bigcup_{r > t} X \setminus U(r) \\ &= \bigcup_{r' > t} X \setminus \overline{U(r')} && \subseteq X \end{aligned}$$

Da aber die Intervalle  $[0, t)$  und  $(t, 1]$  die metrische Topologie auf  $[0, 1]$  erzeugen, ist  $f$  damit nach 3.4.6 stetig.  $\square$

*Beweis des Erweiterungslemmas 17.1.5.* Jetzt zeigen wir das Erweiterungslemma für das Intervall  $[0, 1]$ . Sei wieder  $X$  unser Raum und  $Y \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge und  $f : Y \rightarrow [0, 1]$  eine stetige Abbildung. Wir suchen  $F : X \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $F|_Y = f$ . Nach Urysohn finden wir  $F_0 : X \rightarrow [0, 1/3]$  stetig mit  $f(x) \leq 1/3 \Rightarrow F_0(x) = 0$  und  $f(x) \geq 2/3 \Rightarrow F_0(x) = 1/3$  für alle  $x \in Y$ . Es folgt

$$F_0(x) \leq f(x) \leq 2/3 + F_0(x)$$

für alle  $x \in Y$ . Nun nehmen wir die Funktion  $f_1 = f - F_0 : Y \rightarrow [0, 2/3]$  und finden  $F_1 : X \rightarrow [0, (1/3)(2/3)]$  mit  $F_1(x) \leq f_1(x) \leq (2/3)^2 + F_1(x) \quad \forall x \in Y$  und mithin

$$F_0(x) + F_1(x) \leq f(x) \leq (2/3)^2 + F_0(x) + F_1(x)$$

für alle  $x \in Y$ . Wir machen immer so weiter und konstruieren schließlich  $F$  als Summe der gleichmäßig konvergenten Reihe

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots$$

die gegen eine stetige Funktion strebt wegen II.6.6.4. Jetzt zeigen wir das Erweiterungslemma noch für das Intervall  $[0, 1)$ . Wir benutzen dieselben Notationen wie eben und finden nach dem Vorhergehenden jedenfalls eine stetige Erweiterung von  $f$  zu einer stetigen Abbildung  $F : X \rightarrow [0, 1]$ . Dann ist natürlich  $F^{-1}(1)$  abgeschlossen in  $X$  und disjunkt zu  $Y$ . Wir finden also  $G : X \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $G|_Y = 1$  und  $G|_{F^{-1}(1)} = 0$  und  $H = \inf(F, G)$  ist unsere gesuchte stetige Erweiterung von  $f$ . Den Rest des Beweises können wir getrost dem Leser überlassen.  $\square$

*Übung 17.1.9.* Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum läßt sich jede auf einer kompakten Teilmenge definierte stetige reellwertige Funktion stetig auf den ganzen Raum fortsetzen, und zwar sogar zu einer Funktion mit kompaktem Träger.

*Übung 17.1.10.* Jede offene Teilmenge eines lokal kompakten separablen Hausdorff-Raums  $X$  läßt sich darstellen als abzählbare Vereinigung von Mengen der Gestalt  $\{x \mid f(x) > 0\}$  für  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  stetig mit kompaktem Träger.

## 17.2 Der Riesz'sche Darstellungssatz

17.2.1. Unter einem **Borelmaß** auf einem topologischen Raum verstehen wir wie in IV.6.1.15 ein topologisches Maß, das auf allen Kompakta unseres Raums endliche Werte annimmt. Diese Terminologie ist gängig, aber kein universeller Standard. Wir werden jedoch Borelmaße eh nur auf separablen lokal kompakten Hausdorffräumen verwenden, für die die Konventionen der meisten Autoren dieselben Borelmaße liefern.

**Definition 17.2.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger. Eine Linearform  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **nichtnegativ** genau dann, wenn sie jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet. Solch eine nichtnegative Linearform nennen wir auch ein **Radon-Maß** oder genauer ein **nichtnegatives Radon-Maß** auf unserem topologischen Raum, obwohl sie durchaus kein Maß im Sinne einer Funktion auf einer  $\sigma$ -Algebra IV.6.1.9 ist. Man beachte, daß wir von unserer Linearform keinerlei Stetigkeitseigenschaften fordern.

**Satz 17.2.3 (Riesz'scher Darstellungssatz).** *Für jeden lokal kompakten separablen Hausdorffraum  $X$  liefert das Bilden des Integrals eine eindeutige Entsprechung*

$$\{\text{Borelmaße auf } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Radonmaße auf } X\}$$

17.2.4. In anderen Worten können wir also jede nichtnegative Linearform durch genau ein Borelmaß darstellen, deshalb auch die Bezeichnung als Darstellungssatz. Will man auf die Forderung verzichten, daß  $X$  separabel sein soll, so muß man an die Maße auf der linken Seite der Bijektion zusätzliche Forderungen stellen, damit das Bilden des Integrals eine Bijektion liefert, vergleiche etwa [Hal70] oder [Rud87]: Eine Möglichkeit ist, nur solche Borelmaße zu betrachten, bei denen (1) das Maß jeder meßbaren Menge das Infimum der Maße der sie umfassenden offenen Mengen ist und bei denen (2) daß Maß jeder offenen Menge und jeder Menge endlichen Maßes das Supremum der Maße der in ihr enthaltenen Kompakta ist. Betrachten wir zum Beispiel eine überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie und das topologische Maß, das jeder abzählbaren Menge Null zuordnet und jeder überabzählbaren Menge Unendlich, so ist das Integral jeder stetigen Funktion mit kompaktem Träger null, obwohl unser Maß nicht identisch verschwindet. Allerdings ist in diesem Fall auch unsere Regularitätsbedingung (2) nicht erfüllt. Meines Erachtens sind auf topologischen Räumen Radonmaße der eigentlich natürliche Begriff und es ist nicht sinnvoll, mit Borelmaßen zu arbeiten in einer Allgemeinheit, in der sie nicht mehr dasselbe wie Radonmaße liefern, also jenseits separabler lokal kompakter Hausdorff-Räume. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit dem Nachweis, daß nichtnegative Linearformen automatisch gewisse Stetigkeitseigenschaften haben.

**Lemma 17.2.5 (Stetigkeitseigenschaften nichtnegativer Linearformen).** *Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  und eine nichtnegative Linearform  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Kompaktum  $K \subset X$  ist die Einschränkung von  $\Lambda$  auf den Raum  $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen mit Träger in  $K$  stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.*

*Beweis.* Das Lemma von Urysohn oder genauer 17.1.9 liefert eine stetige nichtnegative Funktion  $h \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ , die auf unserem Kompaktum  $K$  konstant Eins ist. Für  $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  gilt dann  $-\|f\|_\infty h \leq f \leq \|f\|_\infty h$  und Anwenden von  $\Lambda$  liefert  $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(h) \|f\|_\infty$ .  $\square$

*Ergänzung 17.2.6.* Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  versteht man unter einem **signierten Radon-Maß auf  $X$**  eine Linearform  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum  $K \subset X$  die

Einschränkung von  $\Lambda$  auf den Raum  $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen mit Träger in  $K$  stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

*Beweis des Riesz'schen Darstellungssatzes 17.2.3.* Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung und betrachten die  $\sigma$ -Algebra aller topologisch meßbaren Mengen in  $X \times \mathbb{R}$ . Wir behaupten, daß sie bereits erzeugt wird von den "Graphenflächen"

$$G(f) = \{(x, t) \mid 0 \leq t < f(x)\}$$

für alle nichtnegativen  $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  sowie ihren verschobenen Kopien  $\{(x, t) \mid 0 \leq t + a < f(x)\}$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ . Um das nachzuweisen, reicht es zu zeigen, daß die von den verschobenen Graphenflächen erzeugte  $\sigma$ -Algebra bereits alle Quader  $U \times [a, b)$  mit  $U \subseteq X$  offen enthält. Sicher dürfen wir uns hier auf Quader  $U \times [0, b)$  beschränken, und nach 17.1.10 dürfen wir sogar annehmen, daß gilt  $U = \{x \mid f(x) > 0\}$  für eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  mit kompaktem Träger. Dann aber erhalten wir für den fraglichen Quader die Darstellung

$$U \times [0, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G(\inf(nf, b))$$

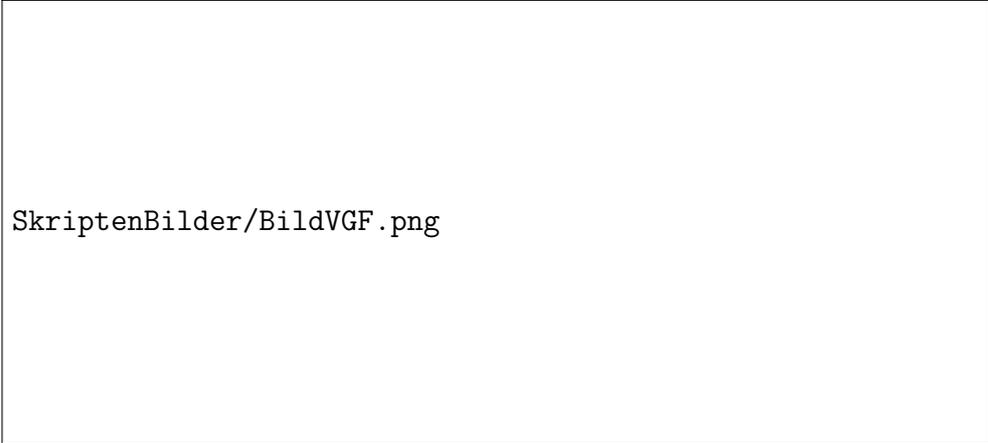
Bezeichne nun  $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X \times \mathbb{R})$  den von allen verschobenen Graphenflächen erzeugten Mengerring und bezeichne  $\lambda$  das Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}$ . Wir behaupten, daß für alle  $G \in \mathcal{G}$  die Abbildung

$$\begin{aligned} f_G : X &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto \lambda(G \cap \text{pr}_1^{-1}(x)) \end{aligned}$$

stetig ist. Um das zu sehen, betrachten wir für alle stetigen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  den "Halbraum"

$$H(f) = \{(x, t) \mid t < f(x)\}$$

Sicher gilt  $H(f) \cap H(g) = H(\inf(f, g))$  und  $H(f) \cup H(g) = H(\sup(f, g))$ . Betrachten wir die leere Menge und die ganze Menge auch als Halbräume, so ist das System aller Halbräume mithin stabil unter endlichen Schnitten und endlichen Vereinigungen. Die von allen Halbräumen erzeugte Mengenalgebra besteht nach 17.2.9 folglich aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Differenzmengen von derartigen Halbräumen. Insbesondere ist jede Menge  $G \in \mathcal{G}$  eine endliche disjunkte Vereinigung von Mengen der Gestalt  $H(f) \setminus H(g)$  mit  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und das zeigt, daß  $f_G$  stetig ist für alle  $G \in \mathcal{G}$ . Wir behaupten nun, daß für  $\Lambda : \mathcal{C}_c(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative Linearform die Zuordnung  $G \mapsto \Lambda(f_G)$  sogar ein Prämaß auf  $\mathcal{G}$  ist. In der Tat folgt das aus der Stetigkeitseigenschaft 17.2.5 nichtnegativer Linearformen mit dem



SkriptenBilder/BildVGF.png

Eine verschobene Graphenfläche

Satz von Dini II.6.10.9, der besagt, daß auf einem Kompaktum jede monotone Folge stetiger reellwertiger Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, bereits gleichmäßig konvergieren muß. Jede nichtnegative Linearform auf  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  liefert so erst ein Prämaß auf  $\mathcal{G}$  und mit dem Erweiterungssatz von Caratheodory IV.6.2.10 dann ein topologisches Maß  $\pi_\Lambda$  auf  $X \times \mathbb{R}$ . Wir erhalten schließlich ein topologisches Maß  $\mu_\Lambda$  auf  $X$ , indem wir für jede topologisch meßbare Teilmenge  $A \subset X$  setzen

$$\mu_\Lambda(A) = \pi_\Lambda(A \times [0, 1))$$

Dieses Maß  $\mu_\Lambda$  ist endlich auf Kompakta, da wir nach 17.1.9 für jedes Kompaktum  $K$  die konstante Funktion Eins auf  $K$  zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger  $h : X \rightarrow [0, \infty)$  ausdehnen können, und aus  $K \times [0, 1) \subset G(h)$  folgt dann sofort  $\mu_\Lambda(K) \leq \Lambda(h)$ . Damit haben wir zu unserer durch das Integrieren erklärten Abbildung im Darstellungssatz eine Abbildung in die Gegenrichtung konstruiert, der man ohne Schwierigkeiten ansieht, daß sie eine Rechtsinverse ist, in Formeln  $\int f \mu_\Lambda = \Lambda(f)$ . Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Abbildung aus unserem Satz injektiv ist, als da heißt, daß verschiedene Borel-Maße  $\mu \neq \nu$  auf  $X$  auch verschiedene Funktionale auf  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  liefern. Sicher liefern sie verschiedene Maße  $\mu \boxtimes \lambda \neq \nu \boxtimes \lambda$  auf  $X \times \mathbb{R}$  und wegen der Eindeutigkeitsaussage im Maßerweiterungssatz IV.6.2.10 nehmen sie dann auch auf mindestens einer Menge  $G \in \mathcal{G}$  verschiedene Werte an. Mit Fubini folgt daraus aber, daß  $\mu$  und  $\nu$  verschieden sind auf  $f_G \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ .  $\square$

*Übung 17.2.7.* Jedes signierte Radon-Maß auf einem lokal kompakten Hausdorffraum ist die Differenz von zwei nichtnegativen Radon-Maßen. Hinweis: Man orientiert sich an den Hinweisen zu V.3.5.5.

*Übung 17.2.8.* Gegeben ein lokal kompakter separabler Hausdorff-Raum  $X$  liefert das Bilden des Produkts mit dem Lebesgue-Maß eine Bijektion

$$\{\text{Borel-Maße auf } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{translationsinvariante Borel-Maße auf } X \times \mathbb{R}\}$$

17.2.9. Die von einem endlichen System  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  von Teilmengen einer gegebenen Menge  $X$  erzeugte Mengenalgebra kann man beschreiben als das System aller Mengen, die man erhält, wenn man erst für alle  $I \subset \Lambda$  die paarweise disjunkten Mengen

$$A_{(I)} = \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda \cap \bigcap_{\lambda \notin I} (X \setminus A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \notin I} A_\lambda$$

bildet und dann Vereinigungen derartiger  $A_{(I)}$  nimmt. Nimmt man Vereinigungen derartiger  $A_{(I)}$  mit  $I \neq \emptyset$ , so ergibt sich der von den  $A_\lambda$  erzeugte Mengering. Die von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen

Menge erzeugte Mengenalgebra ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenalgebren. Der von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugte Mengenring ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenringe.

*Übung 17.2.10 (Regularität von Borelmaßen).* Man zeige: Gegeben ein Borelmaß auf einem separablen lokal kompakten Hausdorffraum ist das Maß jeder topologisch meßbaren Menge das Infimum über die Maße der sie umfassenden offenen Mengen und das Supremum über die Maße der darin enthaltenen Kompakta. Hinweis: Der von den Kompakta eines topologischen Raums erzeugte Mengenring läßt sich nach 17.2.9 beschreiben als das Mengensystem aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Komplementen eines Kompaktums in einem anderen. In einem separablen lokal kompakten Hausdorffraum ist nun jede offene Menge die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Kompakta und durch Bilden von Komplementen auch jede kompakte Menge Schnitt einer absteigenden Folge offener relativ kompakter Mengen. A fortiori gilt letzteres auch für das Komplement eines Kompaktums in einem anderen. Jetzt kann man mit der Proposition über die Konstruktion von Maßerweiterungen IV.6.2.15 in Verbindung mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Caratheodory IV.6.2.10 wie im in IV.6.7.1 diskutierten Fall von  $\mathbb{R}^n$  argumentieren.

17.2.11. *Wohin?* Im Fall einer étalen Abbildung von separablen Räumen  $\phi : X \rightarrow Y$  gibt es zu jedem topologischen Maß  $\mu$  auf  $Y$  genau ein topologisches Maß  $\nu$  auf  $X$  mit der Eigenschaft, daß für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$ , die von  $\emptyset$  homöomorph auf eine offene Teilmenge  $\Phi(U) \subseteq Y$  abgebildet wird, gilt

$$\phi : \nu|_U \rightsquigarrow \mu|_{\phi(U)}$$

Mir ist nicht klar, wie das sinnvoll zu notieren ist. Vielleicht  $\nu = \phi^! \mu$ ?

### 17.3 Haar'sche Maße

17.3.1. Wir erinnern zunächst an einige der in 10.5.2 eingeführten Notationen. Jede Gruppe  $G$  trägt eine natürliche Operation der Gruppe  $G \times G$  mittels der Vorschrift  $(x, y)z = xzy^{-1}$ . Diese Operation spezialisiert zu drei Operationen von  $G$  auf sich selbst durch (1) Linksmultiplikation, (2) Rechtsmultiplikation mit dem Inversen und (3) Konjugation. Gegeben eine Menge  $E$  erhalten wir so auch eine Operation von  $G \times G$  auf  $\text{Ens}(G, E)$  durch die Vorschrift  $((x, y)f)(z) = f(x^{-1}zy)$ , die spezialisiert zu drei Operationen von  $G$  auf diesem Raum. Wir nennen sie die **linksreguläre Operation**, die **rechtsreguläre Operation** und die **Operation durch Konjugation** und

benutzen dafür die abkürzenden Notationen

$$(\acute{x}f)(z) := f(x^{-1}z), \quad (\grave{x}f)(z) := f(zx) \quad \text{und} \quad (\hat{x}f)(z) := f(x^{-1}zx).$$

**Definition 17.3.2.** Unter einem **Haar-Maß** oder genauer einem **links-invarianten Haar-Maß** auf einer topologischen Gruppe  $G$  verstehen wir ein von Null verschiedenes nichtnegatives Radonmaß  $\mu$  mit der Eigenschaft  $\mu(\acute{x}f) = \mu(f)$  für alle  $x \in G$  und  $f \in \mathcal{C}_c(G, \mathbb{R})$ .

**Satz 17.3.3 (Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Maße).** *Auf jeder lokal kompakten Hausdorff'schen topologischen Gruppe gibt es ein Haar'sches Maß, und je zwei Haar'sche Maße auf einer derartigen topologischen Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen konstanten positiven reellen Faktor.*

17.3.4. Wir geben hier einen Beweis der Existenz, der den Satz von Tychonoff 17.4.7 verwendet. Diesen Satz zeigen wir im Anschluß mit Hilfe des Auswahlaxioms. Es ist natürlich merkwürdig, das Auswahlaxiom zu verwenden bei der Konstruktion von etwas, das im Wesentlichen eindeutig ist. Einen etwas längeren Beweis, der ohne das Auswahlaxiom auskommt, kann man in [?] finden.

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $\mathcal{C}_c^+(G)$  die Menge aller  $f \in \mathcal{C}_c(G, \mathbb{R})$  mit  $f \geq 0$ . Gegeben  $f, g \in \mathcal{C}_c^+(G)$  mit  $g \neq 0$  gibt es  $x_1, \dots, x_n \in G$  und  $c_1, \dots, c_n \geq 0$  mit

$$f(z) \leq \sum_{i=1}^n c_i g(x_i z) \quad \forall z \in G$$

Wir definieren  $(f : g) \in \mathbb{R}$  als das Infimum der möglichen  $\sum_{i=1}^n c_i$  für alle Wahlen wie eben und haben für alle  $f, f_1, f_2, h \in \mathcal{C}_c^+(G)$  offensichtlich

1.  $(\acute{x}f : g) = (f : g) \quad \forall x \in G$ ;
2.  $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$ ;
3.  $(cf : g) = c(f : g) \quad$  für beliebiges  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ;
4.  $f_1 \leq f_2 \Rightarrow (f_1 : g) \leq (f_2 : g)$ ;
5.  $(f : g) \leq (f : h)(h : g) \quad$  falls  $h \neq 0$ ;
6.  $f \neq 0 \Rightarrow (f : g) > 0$ .

Jetzt wählen wir ein für allemal ein festes  $w \in \mathcal{C}_c^+(G)$  mit  $w(e) \neq 0$ . Es existiert, denn das neutrale Element besitzt eine offene Umgebung mit kompaktem Abschluß und wir können nach Urysohn 17.1.7 eine stetige Funktion

von diesem Abschluß nach  $[0, 1]$  finden, die auf seinem Rand Null ist und beim neutralen Element Eins. Dann dehnen wir diese stetige Funktion durch Null aus auf die ganze Gruppe. Jetzt betrachten wir für jedes von Null verschiedene  $g \in \mathcal{C}_c^+(G)$  die Abbildung

$$\begin{aligned} \mu_g : \mathcal{C}_c^+(G) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ f &\mapsto \mu_g(f) = (f : g)/(w : g) \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind zu verstehen als Approximationen unseres Haar'schen Maßes, normalisiert durch die Bedingung  $\mu_g(w) = 1$ . Sicher gilt für diese Approximationen:

1.  $\mu_g(\acute{x}f) = \mu_g(f)$ ;
2.  $\mu_g(cf) = c\mu_g(f)$  für beliebiges  $c \geq 0$ ;
3.  $\mu_g(f_1 + f_2) \leq \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2)$ ,

und für beliebige von Null verschiedene  $f, g \in \mathcal{C}_c^+(G)$  gelten die Abschätzungen

$$(f : w) = \frac{(f : w)(w : g)}{(w : g)} \geq \mu_g(f) \geq \frac{(f : g)}{(w : f)(f : g)} = \frac{1}{(w : f)}$$

Wir zeigen sogar

**Lemma 17.3.5.** *Seien  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^+(G)$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. So gibt es eine offene Umgebung  $V = V(f_1, f_2, \varepsilon)$  von  $e \in G$  derart, daß für alle  $g \in \mathcal{C}_c^+(V) \setminus 0$  gilt*

$$\mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) \leq \mu_g(f_1 + f_2) + \varepsilon$$

*Beweis.* Zunächst einmal finden wir eine Funktion  $h \in \mathcal{C}_c^+(G)$  mit  $h(z) = 1 \forall z \in \text{supp}(f_1 + f_2)$ . Diese Funktion halten wir für den folgenden Beweis fest. Gegeben ein  $\delta > 0$ , das am Schluß genügend klein gewählt werden muß, setzen wir nun  $f = f^\delta = f_1 + f_2 + \delta h$  und betrachten die Funktionen  $h_\nu = h_\nu^\delta = f_\nu/f$ , stetig fortgesetzt durch Null auf die Nullstellenmenge von  $f$ . Wegen der in 10.7.13 gezeigten gleichmäßigen Stetigkeit der  $h_\nu$  finden wir eine offene Umgebung  $V = V(\delta, f_1, f_2)$  des neutralen Elements mit  $|h_\nu(z) - h_\nu(y)| < \delta$  falls  $y \in zV$  für  $\nu = 1, 2$ . Nehmen wir nun irgendein  $g \in \mathcal{C}_c^+(G)$  mit  $g \neq 0$  und wählen irgendwelche  $c_i \geq 0$  und  $x_i \in G$  mit

$$f(z) \leq \sum_{i=1}^n c_i g(x_i z) \quad \forall z,$$

so folgt unter der Zusatzbedingung  $\text{supp}(g) \subset V$  bereits

$$\begin{aligned} f_\nu(z) &\leq \sum_{i=1}^n c_i g(x_i z) h_\nu(z) \\ &\leq \sum_{i=1}^n c_i g(x_i z) (h_\nu(x_i^{-1}) + \delta) \end{aligned}$$

da ja gilt  $g(x_i z) \neq 0 \Rightarrow x_i z \in V \Rightarrow z \in x_i^{-1} V$ . Immer unter unserer Zusatzbedingung  $\text{supp}(g) \subset V$  folgt weiter erst

$$(f_\nu : g) \leq \sum c_i (h_\nu(x_i^{-1}) + \delta)$$

und wegen  $h_1 + h_2 \leq 1$  dann

$$\begin{aligned} (f_1 : g) + (f_2 : g) &\leq \sum c_i (1 + 2\delta) \\ (f_1 : g) + (f_2 : g) &\leq (f : g)(1 + 2\delta) \\ &\leq ((f_1 + f_2 : g) + \delta(h : g))(1 + 2\delta) \\ \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) &\leq (\mu_g(f_1 + f_2) + \delta\mu_g(h))(1 + 2\delta) \\ &\leq (\mu_g(f_1 + f_2) + \delta(h : w))(1 + 2\delta) \end{aligned}$$

Das Lemma folgt, wenn wir zu Beginn  $\delta$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  klein genug wählen und das zugehörige  $V$  nehmen.  $\square$

Setzen wir für  $f \neq 0$  nun  $I_f = [(w : f)^{-1}, (f : w)]$ , so gilt nach einer früheren Abschätzung  $\mu_g(f) \in I_f$  für alle  $f \neq 0$ . Damit kann man  $\mu_g$  auffassen als einen Punkt des Produkts

$$I = \prod_{0 \neq f \in \mathcal{C}_c^+(G)} I_f$$

Mit der Produkttopologie wird  $I$  ein Kompaktum nach dem Satz von Tychonoff 17.4.7, den wir im Anschluß beweisen. Für  $V \subset G$  eine offene Umgebung des neutralen Elements betrachten wir nun

$$K_V = \overline{\{\mu_g \mid \text{supp } g \subset V\}} \subset I$$

Sicher gilt  $V \subset W \Rightarrow K_V \subset K_W$  und wir folgern, daß es ein  $\mu \in I$  gibt mit  $\mu \in K_V \forall V$ . Wir verstehen nun  $\mu$  als eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{C}_c^+(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

indem wir  $\mu(f)$  als die Projektion von  $\mu$  auf seine  $f$ -Komponente definieren für  $f \neq 0$  und  $\mu(0) = 0$  setzen. Dann behaupten wir, daß das so erklärte  $\mu$  additiv ist und mit der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren vertauscht. Gegeben  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^+(G)$  und  $\varepsilon > 0$  und  $V$  eine Umgebung des neutralen

Elements finden wir ja nach der Definition der Produkttopologie ein  $g \in \mathcal{C}_c^+(V)$  mit

$$|\mu(f_i) - \mu_g(f_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, 2.$$

Es folgt für  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^+(G)$  bereits  $\mu(cf) = c\mu(f)$  falls  $c \geq 0$ ,  $\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$  sowie  $\mu(\dot{x}f) = \mu(f) \quad \forall x \in G$ . Für beliebiges  $f \in \mathcal{C}_c(G)$  setzen wir  $f^\pm = \sup(\pm f, 0)$  und  $\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-)$  und haben damit die Existenz eines Haar'schen Maßes nachgewiesen. Wir zeigen nun noch die Eindeutigkeit. Gegeben zwei Haarmaße  $\mu, \nu$  auf einer lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe  $G$  benutzen wir dazu im Folgenden die Konvention, nach der über die Variable  $x$  nach  $\mu$  und über die Variable  $y$  nach  $\nu$  integriert werden möge. Damit finden wir nach 17.3.7 oder im separablen Fall auch alternativ nach Fubini IV.6.6.18 für  $f, h \in \mathcal{C}_c(G, \mathbb{R})$  beliebig

$$\begin{aligned} \mu(f)\nu(h) - \nu(f)\mu(h) &= \int f(x)h(y) - f(y)h(x) \\ &= \int f(x)h(x^{-1}y) - f(y)h(x) \\ &= \int f(yx)h(x^{-1}) - f(y)h(x) \\ &= \int f(x^{-1}yx)h(x^{-1}) - f(y)h(x) \end{aligned}$$

und unter der zusätzlichen Annahme, daß  $h$  nichtnegativ und symmetrisch sei, in Formeln  $h \geq 0$  und  $h(x) = h(x^{-1}) \quad \forall x \in G$ , ergibt sich die Abschätzung

$$|\mu(f)\nu(h) - \nu(f)\mu(h)| \leq \mu(h) \sup |f(x^{-1}yx) - f(y)|$$

wobei das Supremum über alle  $x \in \text{supp } h$  und  $y \in G$  zu bilden ist. Indem wir die gleichmäßige Stetigkeit von  $f$  nach 10.7.13 ausnützen und  $h$  mit sehr kleinem Träger um das neutrale Element herum wählen, finden wir bei festem  $f \geq 0$  mit  $f \neq 0$  für alle  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung des neutralen Elements derart, daß für alle  $h \geq 0$  mit  $h \neq 0$  und Träger in dieser Umgebung  $U(f, \varepsilon)$  gilt

$$\left| \frac{\nu(h)}{\mu(h)} - \frac{\nu(f)}{\mu(f)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(f)}$$

Daraus folgt dann die Eindeutigkeit sehr schnell. □

*Übung 17.3.6.* Ein Haarmaß auf einer lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe ordnet jeder von Null verschiedenen nichtnegativen Funktion mit kompaktem Träger eine positive Zahl zu. Hinweis: Man erinnere sich an den Beginn des Beweises des Satzes zur Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Maße.

**Proposition 17.3.7 (Produkte von Radonmaßen).** *Seien gegeben lokal kompakte Hausdorffräume  $X, Y$  mit Radonmaßen  $\mu, \nu$ .*

1. Es gibt genau ein Radonmaß  $\mu \boxtimes \nu$  auf dem Produktraum  $X \times Y$  mit

$$\int f(x)g(y)(\mu \boxtimes \nu)\langle x, y \rangle = \left( \int f(x)\mu\langle x \rangle \right) \left( \int g(y)\nu\langle y \rangle \right)$$

für alle  $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  und  $g \in \mathcal{C}_c(Y, \mathbb{R})$ .

2. Für alle  $h \in \mathcal{C}_c(X \times Y; \mathbb{R})$  gehört die Abbildung  $x \mapsto \int h(x, y)\nu\langle y \rangle$  zu  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  und es gilt  $\int h(x, y)(\mu \boxtimes \nu)\langle x, y \rangle = \int (\int h(x, y)\nu\langle y \rangle)\mu\langle x \rangle$ .

Insbesondere darf auch in dieser Situation die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

*Bemerkung 17.3.8.* Gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  und ein Kompaktum  $K \subset X$  bezeichne  $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  den Raum aller Funktionen mit Träger in  $K$ , versehen mit seiner sup-Norm. So ist jedes positive Funktional  $\varphi : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ , denn es gibt  $h \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  mit  $h \geq 0$  und  $h_K = 1$ , und für  $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  folgt aus  $\|f\| \leq 1$  sofort  $|\varphi(f)| = |\varphi(f^+) - \varphi(f^-)| \leq \varphi(h)$ .

*Beweis.* Ist  $X$  ein beliebiger topologischer Raum und  $Y$  kompakt, so macht die offensichtliche Identifikation  $\text{Ens}(X \times Y, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \text{Ens}(Y, \mathbb{R}))$  jede stetige Abbildung  $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer stetigen Abbildung  $X \rightarrow \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$  für die sup-Norm auf  $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ , vergleiche 11.2.13. Sind also  $X$  und  $Y$  lokal kompakte Hausdorffräume und ist  $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit kompaktem Träger, so ist auch  $x \mapsto \int h(x, y)\nu\langle y \rangle$  stetig mit kompaktem Träger. Das zeigt schon mal, daß das Doppelintegral im zweiten Teil des Satzes existiert wie behauptet. Insbesondere erhalten wir so ein Radonmaß auf  $X \times Y$ , das die Bedingung aus Teil 1 erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß es das einzige ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß sich für beliebige Kompakta  $K \subset X$  und  $L \subset Y$  jedes  $h \in \mathcal{C}_{K \times L}(X \times Y, \mathbb{R})$  beliebig gut gleichmäßig approximieren läßt durch endliche Linearkombinationen von externen Produkten  $u \boxtimes v$  mit  $u \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$  und  $v \in \mathcal{C}_L(Y, \mathbb{R})$ . Auf dem kompakten Raum  $Z$ , der aus  $X \times Y$  entsteht, wenn man den Abschluß des Komplements von  $K \times L$  zu einem Punkt  $*$  identifiziert, bilden diese Linearkombinationen aber zusammen mit der Eins eine Unteralgebra von  $\mathcal{C}(Z, \mathbb{R})$ , die die Punkte trennt. Damit sagt uns Stone-Weierstraß III.3.2.7, daß wir beliebige  $h \in \mathcal{C}(Z, \mathbb{R})$  beliebig gut durch Elemente dieser Unteralgebra approximieren können, und Funktionen mit  $h(*) = 0$  sogar beliebig gut durch Linearkombinationen von externen Produkten  $u \boxtimes v$ .  $\square$

**Definition 17.3.9.** Unter einem **Haar'schen Borelmaß** oder genauer einem **linksinvarianten Haar'schen Borelmaß** auf einer topologischen Gruppe  $G$  verstehen wir ein von Null verschiedenes nichtnegatives Borelmaß  $\mu$  mit der Eigenschaft  $\mu(gA) = \mu(A)$  für jede Borelmenge  $A \subset G$  und alle  $g \in G$ .

**Korollar 17.3.10 (über Haar'sche Borelmaße).** *Auf jeder separablen lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe gibt es ein Haar'sches Borelmaß, und je zwei Haar'sche Borelmaße auf einer derartigen topologischen Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen konstanten positiven reellen Faktor.*

*Ergänzung 17.3.11.* Die Forderung der Separabilität ist notwendig, um die Eindeutigkeit bis auf einen konstanten Faktor zu sichern. Ist zum Beispiel  $G$  eine überabzählbare Gruppe mit der diskreten Topologie, so wäre das Zählmaß ein Haar'sches Borelmaß in unserem Sinne, aber auch das Maß, das jeder abzählbaren Teilmenge das Maß Null zuordnet und jeder überabzählbaren Teilmenge das Maß Unendlich. In diesem Fall gälte die Eindeutigkeit bis auf einen konstanten Faktor also nicht. Man kann die Eindeutigkeit Haar'scher Borelmaße durch zusätzliche Forderungen an die fraglichen Borelmaße auch in dieser Allgemeinheit sichern, vergleiche etwa [?]. Diesen Aufwand will ich jedoch vermeiden, da den meisten von uns aller Voraussicht nach kaum einmal lokal kompakte topologische Gruppen begegnen werden, die nicht zusätzlich auch noch separabel sind.

*Beweis.* Man kombiniere den Satz 17.3.3 über die Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Maße mit dem Riesz'schen Darstellungssatz 17.2.3.  $\square$

*Übung 17.3.12.* Gegeben ein Haar'sches Borelmaß auf einer separablen lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe hat jede nichtleere offene Teilmenge positives Maß. Hinweis: 17.3.6.

**Satz 17.3.13 (Maße auf Quotienten).** *Gegeben eine lokal kompakte Hausdorff'sche Gruppe  $G$  und eine abgeschlossene Untergruppe  $H \triangleleft G$ , beide unimodular, sowie Haar-Maße  $\mu_G$  auf  $G$  und  $\mu_H$  auf  $H$ , gibt es genau ein Radonmaß  $\mu_{G/H}$  auf  $G/H$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $f \in \mathcal{C}_c(G)$  gilt*

$$\int f(x)\mu_G\langle x \rangle = \int_{G/H} \left( \int_H f(xy)\mu_H\langle y \rangle \right) \mu_{G/H}\langle xH \rangle$$

17.3.14. Sicher gibt es eine kompakte Umgebung  $V \subset G$  des neutralen Elements. Dann ist  $K := (V^{-1} \text{supp } f) \cap H$  ein Kompaktum von  $H$  und alle Funktionen  $y \mapsto f(xy)$  mit  $x \in V$  haben Träger in  $K$ . Nach 17.2.5 ist nun unser Radonmaß  $\mu_H$  stetig auf  $\mathcal{C}_K(H, \mathbb{R})$  für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Nach 10.7.13 ist weiter  $f$  gleichmäßig stetig, für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es also eine Umgebung  $U$  des neutralen Elements mit  $|f(xy) - f(y)| < \varepsilon$  für alle  $x \in U$  und  $y \in H$ . Wenn  $U \subset V$  annehmen etc. etc.

*Beweis.* Noch nicht ausgearbeitet.  $\square$

*Ergänzung 17.3.15.* Ein **Gitter** in einer unimodularen lokal kompakten Hausdorff'schen Gruppe ist eine diskrete Untergruppe mit der Eigenschaft, daß der Quotient danach endliches Volumen hat.

## 17.4 Der Satz von Tychonoff

17.4.1. Der Satz von Tychonoff besagt, daß das Produkt über eine beliebige Familie von kompakten Räumen kompakt ist. Der Beweis wird nach einigen Vorbereitungen zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Den einfacheren Fall einer abzählbaren Familie kompakter metrischer Räume sollten Sie bereits als Übung 3.6.23 erledigt haben. Ich erinnere an die Grundlagen zu Filtern nach 11.7.

**Definition 17.4.2.** Ein Filter  $\mathcal{F}$  auf einer Menge  $X$  heißt ein **Ultrafilter** genau dann, wenn er ein echter Filter ist und wenn für jede Teilmenge  $A \subset X$  entweder  $A$  selbst oder sein Komplement  $X \setminus A$  zu  $\mathcal{F}$  gehört.

*Beispiel 17.4.3.* Ist  $X$  eine Menge und  $x \in X$  ein Punkt, so ist das System aller Teilmengen von  $X$ , die  $x$  enthalten, ein Ultrafilter.

**Lemma 17.4.4.** *Die Ultrafilter auf einer Menge sind genau die maximalen echten Filter auf besagter Menge, und jeder echte Filter läßt sich vergrößern zu einem Ultrafilter.*

*Beweis.* Ein Ultrafilter ist offensichtlich maximal. Ist umgekehrt  $\mathcal{F}$  ein echter Filter aber kein Ultrafilter, so gibt es  $B \subset X$  mit  $B \notin \mathcal{F}$  und  $X \setminus B \notin \mathcal{F}$ . Wir behaupten, daß entweder gilt  $B \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}$  oder  $(X \setminus B) \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}$ . Sonst gäbe es nämlich  $F, G \in \mathcal{F}$  mit  $B \cap F = \emptyset$  und  $(X \setminus B) \cap G = \emptyset$ , und damit  $F \cap G = \emptyset$  im Widerspruch zur Annahme, daß  $\mathcal{F}$  ein echter Filter ist. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $B \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}$ . Dann bilden alle Obermengen zu solchen Schnitten selbst einen echten Filter  $\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$  mit  $B \in \tilde{\mathcal{F}}$  und  $\mathcal{F}$  war kein maximaler echter Filter. Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit dem Zorn'schen Lemma ?? □

*Bemerkung 17.4.5.* Unter der Bijektion  $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$ , die jeder Teilmenge die charakteristische Funktion ihres Komplements zuordnet, entsprechen die Ultrafilter genau den maximalen Idealen, die ja auch als maximale echte Ideale definiert sind.

**Lemma 17.4.6.** *Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn jeder Ultrafilter in besagtem Raum konvergiert.*

*Beweis.*  $\Rightarrow$ ). Sei  $X$  unser Raum. Ist  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  ein echter Filter, so hat die Familie  $(F)_{F \in \mathcal{F}}$  und dann erst recht die Familie  $(\bar{F})_{F \in \mathcal{F}}$  nichtleere endliche Schnitte. Mit Übung 3.3.13 folgt  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F} \neq \emptyset$ . Wählen wir  $x$  aus diesem Schnitt und  $U$  eine Umgebung von  $x$ , so gilt  $U \cap F \neq \emptyset$  für alle  $F \in \mathcal{F}$ . Aus  $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$  folgt dann  $(X \setminus U) \notin \mathcal{F}$ , und wenn  $\mathcal{F}$  sogar ein Ultrafilter ist folgt weiter  $U \in \mathcal{F}$ . Also konvergiert dann  $\mathcal{F}$  gegen  $x$ .

$\Leftarrow$ ). Ist  $X$  nicht kompakt, so finden wir wieder nach Übung 3.3.13 eine Familie  $(A_i)_{i \in I}$  abgeschlossener Teilmengen mit nichtleeren endlichen Schnitten, für die gilt  $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ . Alle Mengen, die einen Schnitt von endlich vielen unserer  $A_i$  umfassen, bilden einen echten Filter. Folglich gibt es auch einen Ultrafilter, der alle  $A_i$  enthält. Nun besitzt aber jeder Punkt von  $x$  eine Umgebung, die eines der  $A_i$  nicht trifft und die also nicht in unserem Ultrafilter liegt. Daher kann unser Ultrafilter gegen keinen Punkt  $x \in X$  konvergieren.  $\square$

**Satz 17.4.7 (Tychonoff).** *Das Produkt über eine beliebige Familie von kompakten Räumen ist kompakt.*

*Beweis.* Sei  $(Y_i)_{i \in I}$  unsere Familie von kompakten Räumen und sei  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter im Produktraum. Für jedes  $i \in I$  betrachten wir in  $Y_i$  den Ultrafilter

$$\mathcal{F}_i = \{F \subset Y_i \mid F \times \prod_{j \neq i} Y_j \in \mathcal{F}\}$$

Da die  $Y_i$  kompakt sind, gibt es  $y_i \in Y_i$  so daß  $\mathcal{F}_i$  gegen  $y_i$  konvergiert. Dann konvergiert aber offensichtlich  $\mathcal{F}$  gegen  $y = (y_i)_{i \in I}$ .  $\square$

**17.4.8 (Ein folgenkompakter nicht kompakter Raum).** Damit können wir auch ein Beispiel für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten Raum angeben: Der Raum  $\text{Ens}(\mathbb{R}, [0, 1])$ , aufgefaßt als Produkt von Kopien des kompakten Intervalls  $[0, 1]$ , ist kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Die borelmeßbaren Funktionen bilden darin eine folgenabgeschlossene, aber nicht abgeschlossene Teilmenge, wie wir bereits in 3.1.10 gesehen haben. Folglich bilden die borelmeßbaren Funktionen mit der induzierten Topologie auch einen folgenkompakten aber nicht kompakten topologischen Raum.

## 18 Unbefriedigende Versuche

### 18.1 Restbestände

**Definition 18.1.1.** Ein **komplexes Radon-Maß** auf einem topologischen Raum ist eine Abbildung von der  $\sigma$ -Algebra aller Borel-Mengen in die komplexen Zahlen, die sich als endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen positiven Radon-Maßen darstellen läßt. Wir bezeichnen den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller komplexen Radon-Maße auf einem topologischen Raum  $X$  mit  $M(X)$ .

**Lemma 18.1.2.** *Gegeben ein Radon-Maß auf einem lokal kompakten Hausdorffraum gibt es eine größte offene Teilmenge vom Maß Null. Ihr Komplement heißt der **Träger** des Maßes.*

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß die Vereinigung aller offenen Teilmengen vom Maß Null auch Maß Null hat. Sonst enthielte sie jedoch wegen der inneren Regularität ein Kompaktum von echt positivem Maß, und dies Kompaktum müsste eine endliche Überdeckung besitzen durch offene Mengen vom Maß Null. Widerspruch!  $\square$

**Lemma 18.1.3.** *Gegeben ein komplexes Radon-Maß auf einem lokal kompakten Hausdorffraum gibt es eine größte offene Teilmenge derart, daß jede darin enthaltene Borel-meßbare Teilmenge Maß Null hat. Ihr Komplement heißt wieder der **Träger** des Maßes.*

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß die Vereinigung aller offenen Teilmengen mit besagter Eigenschaft auch besagte Eigenschaft hat. Sonst enthielte diese Vereinigung jedoch eine Borel-meßbare Teilmenge mit einem von Null verschiedenen Maß, und dann auch ein Kompaktum mit einem von Null verschiedenen Maß, und das besäße eine endliche Partition in Teilmengen vom Maß Null. Widerspruch!  $\square$

**Lemma 18.1.4.** *Jede mit der Addition und der Multiplikation mit nichtnegativen reellen Zahlen verträgliche Abbildung vom Raum der endlichen positiven Radon-Maße auf einem topologischen Raum in einen komplexen Vektorraum läßt sich auf genau eine Weise fortsetzen zu einer komplexlinearen Abbildung vom Raum aller komplexen Radon-Maße in besagten komplexen Vektorraum.*

*Beweis.* Das ist klar.  $\square$

### 18.2 Radon-Maße, ALT

*Kommt von woanders, vielleicht hier geeignet einbauen*

- Definition 18.2.1.**
1. Ein Borel-Maß heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung von endlichem Maß besitzt.
  2. Ein Borel-Maß heißt **von innen regulär** genau dann, wenn das Maß jeder Borel-Menge das Supremum ist über die Maße aller in ihr enthaltenen Kompakta. Ein Borel-Maß heißt **von außen regulär** genau dann, wenn das Maß jeder Borel-Menge das Infimum ist über die Maße aller sie enthaltenden offenen Mengen. Ein Borel-Maß heißt **regulär** genau dann, wenn es von innen und außen regulär ist.
  3. Ein **Radon-Maß** oder genauer ein **positives Radon-Maß** auf einem topologischen Raum ist ein lokal endliches von innen reguläres Borel-Maß.

18.2.2. Manche Autoren wie z.B. [Hal70] verwenden die Begriffe “Borel-Menge” und “Borel-Maß” in einer leicht anderen Bedeutung. Ich halte mich an [?, ?].

**Lemma 18.2.3.** *Gegeben ein Radon-Maß auf einem topologischen Raum gibt es eine größte offene Teilmenge vom Maß Null. Ihr Komplement heißt der **Träger** des Maßes.*

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß die Vereinigung aller offenen Teilmengen vom Maß Null auch Maß Null hat. Sonst enthielte sie jedoch wegen der inneren Regularität ein Kompaktum von echt positivem Maß, und dies Kompaktum müsste eine endliche Überdeckung besitzen durch offene Mengen vom Maß Null. Widerspruch!  $\square$



# Kapitel VII

## Mist und Versuche

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Steinbruch-Halde</b> . . . . .	<b>1178</b>
1.1	Gliederung der Darstellungstheorie . . . . .	1178
1.2	Lösungen von Übungen . . . . .	1179
1.3	Zur Überlagerung von Mannigfaltigkeiten . . . . .	1181
1.4	Zu Riemann'schen Flächen . . . . .	1182
1.5	Alte Beweise . . . . .	1183
1.6	Versuch Differentialform auf beliebiger Mannigfaltigkeit . . . . .	1183
1.7	Integration über Fasern . . . . .	1185
1.8	Etwas zur Lie-Theorie . . . . .	1187
1.9	Parametrisierte Minimalflächen nach Weierstraß . . . . .	1187
1.10	Minimax-Theorem von von Neumann . . . . .	1188
1.11	Hilbert-Schmidt-Operatoren . . . . .	1188
1.12	Spuren in Hilberträumen . . . . .	1190
1.13	Faserungskriterium von Ehresmann . . . . .	1193
1.14	Tangentenumlaufzahl . . . . .	1194
<b>2</b>	<b>Unausgegrenztes zum Lebesgue-Integral</b> . . . . .	<b>1198</b>
2.1	Dichten . . . . .	1198
2.2	Translationsinvariante Maße auf Produkträumen . . . . .	1198
<b>3</b>	<b>Klassische Mechanik</b> . . . . .	<b>1200</b>
3.1	Die Newton'schen Bewegungsgleichungen . . . . .	1200
3.2	Planetenbewegung . . . . .	1205

3.3	Systeme mit Zwangsbedingungen . . . . .	1210
3.4	Versuch, Überblick zu schaffen . . . . .	1221
3.5	Wohin? . . . . .	1223
3.6	Hamilton-Versuch . . . . .	1224
3.7	Noch angucken . . . . .	1230
3.8	Krümmungsbegriffe . . . . .	1230
3.9	Symplektische Form auf dem Kotangentialbündel . . . . .	1232
3.10	Geodäten . . . . .	1234
3.11	Krümmung von Kurven . . . . .	1235
3.12	Krümmung von Flächen im Raum . . . . .	1238
3.13	Paralleltransport auf gekrümmten Räumen . . . . .	1242
3.14	Wohin? . . . . .	1251
3.15	Relativistische Raumzeit . . . . .	1252
3.16	Die Bewegungsgleichungen geladener Teilchen . . . . .	1259
3.17	Die Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	1263
3.18	Lorentzgruppe, noch Schrott . . . . .	1265
3.19	Schrott . . . . .	1266
3.20	Der Spannungstensor . . . . .	1268
3.21	Versuch zur Verschränkung . . . . .	1270
3.22	Laplace-Operator auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	1272
<b>4</b>	<b>Schrotthalde zur Analysis . . . . .</b>	<b>1273</b>
4.1	Lipschitzstetigkeit des Flusses . . . . .	1273
4.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	1276
4.3	Alter Beweis Umkehrsatz . . . . .	1285
4.4	Landau-Symbole . . . . .	1287
4.5	Ergänzungen für nicht $\sigma$ -endliche Maße . . . . .	1287
4.6	Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen . . . . .	1290
4.7	Markov-Ketten . . . . .	1291
4.8	Unendliche Produkte von Maßräumen . . . . .	1294
4.9	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	1295
4.10	Brown'sche Bewegung . . . . .	1299
4.11	Bedingte Erwartung . . . . .	1302
4.12	Borel-Cantelli . . . . .	1308

4.13	Altes Beispiel Integral 2-Form . . . . .	1309
4.14	Topologischer Dualraum . . . . .	1311
4.15	Topologischer Dualraum . . . . .	1315
4.16	Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen . . . . .	1320

---

# 1 Steinbruch-Halde

## 1.1 Gliederung der Darstellungstheorie

1.1.1. Eine Darstellung einer Gruppe  $G$  ist ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem Vektorraum und einem Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Ist der Vektorraum definiert über einem Körper positiver Charakteristik, so spricht man von einer **modularen Darstellung**. Oft tragen die Gruppe oder der Vektorraum hier noch zusätzliche Strukturen und von besagtem Gruppenhomomorphismus wird eine gewisse Verträglichkeit mit diesen Strukturen gefordert. Die am meisten untersuchten Fälle diskutiere ich im folgenden etwas ausführlicher.

1.1.2. Ist  $G$  eine topologische Gruppe und unser Vektorraum ein topologischer Vektorraum über einem topologischen Körper und ist zusätzlich die durch  $\rho$  definierte Abbildung  $G \times V \rightarrow V$  stetig, so spricht man von einer **stetigen Darstellung**. Besonders wichtig ist die Variante der **unitären Darstellung**, bei der die Gruppe durch unitäre Automorphismen stetig auf einem Hilbertraum operiert.

1.1.3. Ist  $G$  eine algebraische Gruppe und  $V$  definiert über demselben Körper wie  $G$  und ist  $V$  Vereinigung von endlichdimensionalen unter  $G$  stabilen Teilräumen  $U$ , für die jeweils die von  $\rho$  definierte Abbildung  $G \times U \rightarrow U$  algebraisch ist, so heißt  $\rho$  eine **rationale Darstellung**.

1.1.4. In allen diesen Situationen sind die Grundfragen dieselben, und zwar:

1. Wie sehen die irreduziblen Darstellungen aus, also diejenigen von Null verschiedenen Darstellungen, in denen es außer dem Nullraum keine echten, im topologischen Fall keine echten abgeschlossenen, unter der Gruppenoperation invarianten Teilräume gibt?
2. Wie kann eine allgemeine Darstellung im Prinzip aus irreduziblen Darstellungen aufgebaut werden?
3. Wie sind gewisse "natürlich gegebene" Darstellungen aus irreduziblen Darstellungen aufgebaut?

1.1.5. Die Antworten hängen wesentlich von der betrachteten Gruppe ab. Für diesen groben Überblick sortieren wir unsere Gruppen wie folgt:

	abelsch	nichtabelsch
endliche abstrakte Gruppen		
unendliche abstrakte Gruppen		
kompakte topologische Gruppen		
nichtkompakte topologische Gruppen		

abstrakte Gruppen	abelsch	nichtabelsch
endlich		
unendlich		

topologische Gruppen	abelsch	nichtabelsch
kompakt		
nichtkompakt		

algebraische Gruppen	abelsch	auflösbar	reduktiv	beliebig
Charakteristik Null				
positive Charakteristik				

## 1.2 Lösungen von Übungen

1. Die Abbildungen  $\tilde{f}$  und  $\hat{f}$  der Kugelkoordinaten und zylindrischen Koordinaten liefern Diffeomorphismen

$$\begin{aligned} \tilde{g} : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 \setminus H \\ (r, \varphi, \vartheta) &\mapsto (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \\ \hat{g} : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 \setminus H \\ (r, \varphi, z) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \end{aligned}$$

mit  $H$  der Halbebene  $H = \{(x, y, z) \mid x \leq 0, y + 0\}$ . Die erste Formel ergibt sich wegen  $\tilde{f} = f \circ \tilde{g}$  aus der Transformationsformel, da wir nach ?? die Funktionaldeterminante der Kugelkoordinatenabbildung bereits kennen, sie ist gegeben durch  $\det d\tilde{g} = r^2 \cos \vartheta$ . Bei  $\hat{g}$  finden wir als Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Determinante  $|\det d_{(r, \varphi, z)} \hat{g}| = r$  und wegen  $\hat{f} = f \circ \hat{g}$  folgt so auch die zweite Gleichung aus der Transformationsformel. Für Teil (c) brauchen wir nur bemerken, daß gilt  $d_p A = A$  an jeder Stelle  $p$  und folglich  $|\det dA| = |\det A|$  konstant ist. Damit folgt er wieder aus der Transformationsformel.

2. (a) Sicher definiert  $F$  ganz allgemein eine Abbildung  $F : \mathbb{C} \setminus 1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Weiter haben wir für  $w, z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 1$  sicher

$$\begin{aligned} F(z) = w &\Leftrightarrow (z-1)w = -i(z+1) \\ &\Leftrightarrow zw + zi = w - i \\ &\Leftrightarrow w \neq -i \text{ und } z \frac{w-i}{w+i} \end{aligned}$$

So erkennen wir, daß  $F$  eine Bijektion  $F : \mathbb{C} \setminus 1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus -i$  induziert mit Umkehrabbildung  $G : w \mapsto \frac{w-i}{w+i}$ . Weiter gilt  $|G(w)|^2 = \frac{w-i}{w+i} \cdot \frac{\bar{w}+i}{\bar{w}-i} = \frac{|w|^2+i(w-\bar{w})+1}{|w|^2-i(w-\bar{w})+1} = \frac{|w|^2+1-2Imw}{|w|^2+1+2Imw}$  und das ist  $< 1$  genau dann, wenn  $Imw$  positiv ist. Folglich induzieren  $F$  und  $G$  zueinander inverse Bijektionen  $U \xrightarrow{\sim} V$ .

- (b) Schreiben wir  $w = u + iv$  für Elemente von  $V$ , so gilt

$$\begin{aligned} F(x+iy) &= -i \frac{x+iy+1}{x+iy-1} \\ &= -i \frac{(x+iy+1)(x-iy-1)}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{-i(x^2+y^2+2iy-1)}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} + i \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \\ &= u(x,y) + iv(x,y) \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich also zu

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{+4(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^2} & \frac{-2(x-1)^2+2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} \\ \frac{-2x((x-1)^2+y^2)-(1-x^2-y^2)2(x-1)}{\dots} & \frac{-2y((x-1)^2+y^2)-2y(1-x^2-y^2)}{\dots} \end{array} \right)$$

und nach einiger Vereinfachung

$$2((x-1)^2+y^2)^{-2} \begin{pmatrix} 2(x-1)y & y^2-(x-1)^2 \\ y^2-(x-1)^2 & 2(x-1)y \end{pmatrix}$$

und die Funktionaldeterminante wird

$$4((x-1)^2+y^2)^{-4} (4(x-1)^2y^2 - (y^2-(x-1)^2)^2) = 4((x-1)^2+y^2)^{-2}$$

Wir erhalten mit der Transformationsformel nun

$$\begin{aligned} \int_V \frac{f(u, v)}{v^2} dudv &= \int_u \frac{f(F(x, y))}{\left(\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)} \frac{4}{((x-1)^2+y^2)^2} dx dy \\ &= \int_u \frac{f(F(x, y))}{(1-x^2-y^2)^2} dx dy \end{aligned}$$

wie behauptet.

Ich habe ein etwas schlechtes Gewissen, sie durch diese furchtbaren Rechnungen zu jagen. Die inversen Bijektionen  $F$  und  $G$  sind Spezialfälle sogenannter “Möbius-Transformationen” und können sehr anschaulich verstanden werden. Die Funktionaldeterminante findet man einfacher, wenn man weiß, daß für  $a \in \mathbb{C}$  die lineare Abbildung  $(a \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  als Endomorphismus des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$  die Determinante  $|a|^2$  hat. Die beste lineare Approximation an  $F : z \mapsto -i \frac{z+1}{z-1}$  bei  $z$  ist ja sicher die Multiplikation mit

$$F'(z) = -i \frac{(z-1) - (z+1)}{(z-1)^2} = \frac{2i}{(z-1)^2}$$

und wegen  $d_z F = (F'(z) \cdot)$  ergibt sich

$$|\det dF| = |F'(z)|^2 = \frac{4}{|z-1|^4} = \frac{4}{((x-1)^2 + y^2)^2}$$

was doch etwas weniger Rechenaufwand erfordert.

### 1.3 Zur Überlagerung von Mannigfaltigkeiten

1.3.1. (*Wohl später, bei Überlagerungstheorie*) Ist  $\psi : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung topologischer Räume und trägt  $X$  die Struktur eines  $k$ -geringten Raums, so erklären wir die **relative initiale Struktur** eines  $k$ -geringten Raums auf  $Y$  als die kleinste Struktur, für die  $\psi$  ein Morphismus ist und die die vorgegebene Topologie auf  $Y$  umfaßt. Diese Struktur ist also “initial relativ zur vorgegebenen Topologie auf  $Y$ ”. Ihre Existenz ist evident, ebenso ihre universelle Eigenschaft: Für jedes kommutative Diagramm aus stetigen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & Y & \end{array}$$

mit  $Z \rightarrow X$  einem Morphismus  $k$ -geringter Räume ist auch  $Z \rightarrow Y$  ein Morphismus  $k$ -geringter Räume.

*Beispiel 1.3.2.* Ist  $\psi : Y \rightarrow X$  eine étale Abbildung und  $Y$  ein Hausdorffraum und  $X$  eine  $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit, so macht die relative initiale Struktur auch  $Y$  zu einer  $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit.

## 1.4 Zu Riemann'schen Flächen

1.4.1. Die Operation einer diskreten Gruppe  $G$  auf einem lokal kompakten Raum  $X$  ist eigentlich genau dann, wenn für je zwei Kompakta  $K, L \subset X$  die Menge aller  $g \in G$  mit  $K \cap gL \neq \emptyset$  endlich ist.

**Proposition 1.4.2.** *Ist  $X$  eine Riemann'sche Fläche mit einer holomorphen eigentlichen Operation einer diskreten Gruppe  $G$ , so ist auch der Bahnraum  $X/G$  mit seiner finalen Struktur eines  $\mathbb{C}$ -geringten Raums eine Riemann'sche Fläche.*

*Beweis.* Der Bahnraum ist Hausdorff nach VI.3.10.10, da die Operation eigentlich ist. Weiter folgt aus dieser Annahme mit 1.4.1, daß jeder Punkt  $x \in X$  eine endliche Isotropiegruppe  $G_x$  hat und eine offene Umgebung  $U$  mit  $g \notin G_x \Rightarrow U \cap gU = \emptyset$ . Sicher können wir  $U$  sogar als  $G_x$ -stabil annehmen. Wählen wir darauf nun mithilfe von ?? eine  $G_x$ -invariante Riemann'sche Metrik und betrachten bezüglich dieser Metrik für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  den Ball um  $x$  mit Radius  $\epsilon$ , so können wir nach ?? darüber hinaus sogar  $U$  wegweise einfach zusammenhängend und biholomorph zu einer echten offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  annehmen. Dann ist  $U$  nach dem Riemann'schen Abbildungssatz VIII.3.5.1 biholomorph zur offenen Einheitskreisfläche, und nach ?? finden wir sogar eine biholomorphe Identifikation, unter der  $x$  dem Ursprung entspricht. Die Wirkungen von den Elementen der  $G_x$  müssen dann nach ?? Drehungen entsprechen, und die Behauptung folgt damit aus 1.4.3.  $\square$

*Übung 1.4.3.* Für  $n \neq 0$  ist die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^n$  final für die holomorphe Struktur eines  $\mathbb{C}$ -geringten Raums auf  $\mathbb{C}$ .

1.4.4. Die einzigen fixpunktfreien Automorphismen der Riemann'schen Fläche  $\mathbb{C}$  sind die Translationen. Insbesondere kann  $\mathbb{C}$  nur für Riemann'sche Flächen mit abelscher Fundamentalgruppe der Totalraum einer universellen Überlagerung sein. Nehmen wir aus  $\mathbb{C}$  zwei Punkte heraus, so ist die universelle Überlagerung der dadurch entstehenden Riemann'schen Fläche folglich biholomorph zur offenen Einheitskreisscheibe. Für jede holomorphe Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die mehr als einen Wert nicht annimmt, liefert also der Liftungssatz ?? eine holomorphe Funktion mit Werten in der offenen Einheitskreisscheibe. Diese muß konstant sein nach dem Satz von Liouville VIII.1.6.6, und das liefert den **Satz von Picard**, nach dem jede nichtkonstante holomorphe

Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  alle komplexen Zahlen mit höchstens einer Ausnahme als Werte annehmen muß.

## 1.5 Alte Beweise

## 1.6 Versuch Differentialform auf beliebiger Mannigfaltigkeit

Soviel zur Anschauung unseres Integralbegriffs. Jetzt bauen wir den allgemeinen Formalismus auf. Betrachten wir nocheinmal unsere Proposition ??, so sehen wir, daß  $\int_M \omega$  schon durch die Kenntnis der  $\varphi^*\omega$  für alle Karten  $\varphi$  von  $M$  eindeutig festgelegt wird. Die  $(\varphi^*\omega)_x$  hängen aber per definitionem nur davon ab, welche Werte  $\omega_{\varphi(x)}$  auf  $p$ -Tupeln von Vektoren des Tangentialraums  $T_{\varphi(x)}M$  annimmt. Das führt uns zu folgender

**Definition 1.6.1.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $M \subset V$  eine eingebettete  $n$ -Mannigfaltigkeit. Eine  **$p$ -Form  $\omega$  auf  $M$**  ist eine Vorschrift  $x \mapsto \omega_x$ , die jedem Punkt  $x \in M$  eine alternierende  $p$ -Multilinearform  $\omega_x \in \text{Alt}^p(T_x M)$  auf dem Tangentialraum  $T_x M$  an  $M$  in  $x$  zuordnet.

Gegeben eine Karte  $(W, \varphi)$  von  $M$  und eine  $p$ -Form  $\omega$  auf  $M$  definieren wir dann eine  $p$ -Form  $\varphi^*\omega$  auf  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  wie zuvor durch

$$(\varphi^*\omega)_x = (d_x \varphi)^t(\omega_{\varphi(x)})$$

wo wir nun  $d_x \varphi$  als eine Abbildung  $d_x \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\varphi(x)}M$  auffassen. Sind  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  und  $(W_\beta, \varphi_\beta)$  zwei Karten und  $\varphi_{\alpha\beta} : W_{\beta\alpha} \rightarrow W_{\alpha\beta}$  der Kartenwechsel, so haben wir natürlich  $\varphi_{\alpha\beta}^*(\varphi_\alpha^*\omega) = \varphi_\beta^*\omega$  auf  $W_{\beta\alpha}$ . Ist umgekehrt für jede Karte  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  einer Kartenüberdeckung von  $M$  eine  $p$ -Form  $\omega_\alpha$  auf  $W_\alpha$  gegeben derart, daß gilt  $\varphi_{\beta\alpha}^*(\omega_\alpha) = \omega_\beta$  auf  $W_{\beta\alpha}$  für je zwei Karten  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  und  $(W_\beta, \varphi_\beta)$  unserer Überdeckung, so gibt es offensichtlich genau eine  $p$ -Form  $\omega$  auf  $M$  mit  $\varphi_\alpha^*\omega = \omega_\alpha$  für alle  $\alpha$ .

*Beispiel 1.6.2.* Um eine 2-Form auf der Kugelschale  $M = S^2$  anzugeben, können wir wie folgt vorgehen: Wir betrachten den Nordpol  $n^+ = (0, 0, 1)$  und die Abbildung

$$\psi_+ : S^2 \setminus n^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$$

die jedem Punkt  $a \in S^2 \setminus n^+$  den Schnittpunkt der Geraden durch  $a$  und  $n^+$  mit der  $xy$ -Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  zuordnet. Die inverse Abbildung  $\varphi_+ = (\psi_+)^{-1}$  ist schon mal eine Karte, analog konstruieren wir auch eine Karte  $\varphi_-$  für das Komplement des Südpols  $(0, 0, -1)$ .

Der Kartenwechsel ergibt sich mit etwas Rechnen als die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_{-+} : \mathbb{R}^2 \setminus 0 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0 \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{x^2+y^2}(x, y)\end{aligned}$$

Eine 2-Form auf  $\mathbb{R}^2$  hat die Gestalt  $f dx \wedge dy$  für eine wohlbestimmte Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Holen wir sie zurück mit unserem Kartenwechsel, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi^*(f dx \wedge dy) &= (f \circ \varphi) d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= -\frac{f \circ \varphi}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy\end{aligned}$$

Eine 2-Form auf der Kugelschale  $S^2$  anzugeben bedeutet also nichts anderes, als zwei Funktionen  $f_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  anzugeben mit

$$f_+(x, y) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} f_-\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

für so ein Funktionenpaar gibt es eben genau eine 2-Form  $\omega$  auf  $S^2$  mit  $\varphi_{\pm}^* \omega = f_{\pm} dx \wedge dy$ .

Jetzt wollen wir schließlich in einem letzten Schritt unsere Mannigfaltigkeiten von ihren Einbettungen befreien.

**Definition 1.6.3.** Eine  $n$ -Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffraum  $M$  mitsamt einer Familie  $(W_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$  von Paaren bestehend aus einer offenen Teilmenge  $W_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$  und einer Abbildung  $\varphi_{\alpha} : W_{\alpha} \rightarrow M$ , den **Definitionskarten von  $M$** , derart, daß gilt:

1. Die Abbildungen  $\varphi_{\alpha}$  sind offene stetige Injektionen.
2. Die Kartenwechsel  $\varphi_{\beta}^{-1} \circ \varphi_{\alpha} = \varphi_{\beta\alpha} : W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$  für  $W_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha}^{-1}(\varphi_{\beta}(W_{\beta}))$  sind  $C^{\infty}$ -Abbildungen.

1.6.4. In der Literatur werden oft zusätzliche Bedingungen an die Topologie einer Mannigfaltigkeit gestellt, meist Parakompaktheit oder Separabilität. Wir werden solche Zusatzbedingungen stets explizit erwähnen.

**Definition 1.6.5.** Eine  $p$ -Form  $\omega$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Familie  $\omega_{\alpha}$  von  $p$ -Formen auf den Definitionskarten  $W_{\alpha}$  derart, daß für alle Kartenwechsel gilt  $\omega_{\beta} = \varphi_{\alpha\beta}^* \omega_{\alpha}$ . Eine  $p$ -Form  $\omega$  heißt stetig, differenzierbar,  $C^{\infty}$  etc. genau dann, wenn alle  $\omega_{\alpha}$  es sind.

Wir bezeichnen mit  $\Omega^p(M)$  den Raum aller  $C^{\infty}$ - $p$ -Formen auf  $M$  und mit  $\Omega_C^p(M)$  den Unterraum aller beliebig oft differenzierbaren  $p$ -Formen mit kompaktem Träger.

**Satz 1.6.6.** *Definition Integral.*

## 1.7 Integration über Fasern

**Definition 1.7.1.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Submersion von glatten Mannigfaltigkeiten im Sinne von VI.4.3.17 und  $\omega \in \Omega^p(X)$  eine stetige  $p$ -Form derart, daß  $f : (\text{supp } \omega) \rightarrow Y$  eigentlich ist. Seien weiter  $X$  und  $Y$  orientiert. Wir nehmen zusätzlich an, daß der Grad  $p$  unserer Differentialform mindestens die Faserdimension  $c = \dim X - \dim Y$  ist. So können wir für  $q = p - c$  eine stetige  $q$ -Form  $\int_f \omega$  auf  $Y$  erklären wie folgt: Gegeben  $y \in Y$  und Tangentialvektoren  $v_1, \dots, v_q \in T_y Y$  und  $x \in f^{-1}(y)$  und  $w_1, \dots, w_c \in T_x f^{-1}(y)$  setzen wir

$$\omega[v_1, \dots, v_q](w_1, \dots, w_c) := \omega(w_1, \dots, w_c, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_q)$$

für beliebige  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_q \in T_x X$  mit  $d_x f : \tilde{v}_i \mapsto v_i$ . Die linke Seite ist wohldefiniert, da sich andere Lifts  $\hat{v}_i \in T_x X$  von unseren ausgewählten Lifts  $v_i$  nur um Vektoren unterscheiden, die tangential an die Faser sind, in Formeln  $\hat{v}_i - \tilde{v}_i \in T_x f^{-1}(y)$ , so daß  $w_1, \dots, w_c, (\hat{v}_i - \tilde{v}_i)$  stets linear abhängig sein muß. Damit ist für alle  $v_1, \dots, v_q \in T_y Y$  unser  $\omega[v_1, \dots, v_q]$  eine wohldefinierte stetige  $c$ -Form auf der Faser, die von  $v_1, \dots, v_q$  in alternierender und multilinearer Weise abhängt, und wir können  $\int_f \omega$  erklären durch

$$\left( \int_f \omega \right) (v_1, \dots, v_q) = \int_{f^{-1}(y)} \omega[v_1, \dots, v_q]$$

wobei  $f^{-1}(y)$  mit der durch die Orientierungen von  $X$  und  $Y$  gegebenen Orientierung versehen wird. *Das ist leider noch schwammig, ich habe über die guten Vorzeichenwahlen noch nicht nachgedacht.* Speziell erhalten wir so auf den kompakt getragenen Formen eine Abbildung

$$\int_f : \Omega_1^p(X) \rightarrow \Omega_1^{p-c}(Y)$$

1.7.2. Jetzt muß natürlich gezeigt werden, daß für Submersionen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  von orientierten Mannigfaltigkeiten gilt

$$\int_g \left( \int_f \omega \right) = \int_{g \circ f} \omega$$

Des weiteren muß gezeigt werden, daß gegeben ein kartesisches Diagramm  $f \circ g = h \circ k$  von glatten Mannigfaltigkeiten mit Submersionen  $f, k$  stets gilt

$$h^* \left( \int_f \omega \right) = \int_k (g^* \omega)$$

**Proposition 1.7.3.** *Das Integral der auf dem Raum der invertierbaren komplexen quadratischen Matrizen mit  $(n + 1)$  Zeilen und Spalten bis auf Vorzeichen erklärten komplexwertigen Differentialform  $\pm(\det)^{-(n+1)}dz_{00} \wedge \dots \wedge dz_{nn}$  über die unitäre Gruppe  $U(n + 1)$  hat bis auf Vorzeichen den Wert*

$$\prod_{\nu=0}^n \frac{(2\pi i)^{\nu+1}}{\nu!} = \pm \int_{U(n+1)} (\det)^{-(n+1)} dz_{00} \wedge \dots \wedge dz_{nn}$$

*Beweis.* Wir rechnen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \longmapsto & \text{diag}(1, A) & \\ \\ U(n) \hookrightarrow & U(n + 1) \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \ni (x_0 + iy_0, \dots, x_n + iy_n) \\ & \downarrow p & \uparrow \wr \\ & S^{2n+1} \hookrightarrow & \mathbb{R}^{2n+2} \ni (x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) \end{array}$$

mit der linken Vertikale  $p$  gegeben durch das Anwenden auf den ersten Vektor der Standardbasis  $\vec{a}_0 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{2n+2}$ . Dazu integrieren wir zunächst über die Fasern von  $p$  und dann über die Sphäre. Wir wählen als Basis des Tangentialraums an  $S^{2n+1}$  in  $\vec{a}_0$  die anderen Vektoren der Standardbasis und notieren sie  $\vec{b}_0, \vec{a}_1, \vec{b}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_n$ . Als Urbilder im Tangentialraum  $T_E U(n + 1)$  für diese Vektoren kommen beliebige hermitesche Matrizen  $A_\nu$  für  $1 \leq \nu \leq n$  und  $B_\nu$  für  $0 \leq \nu \leq n$  in Frage mit  $A_\nu \vec{a}_0 = \vec{a}_n$  und  $B_\nu \vec{a}_0 = \vec{b}_\nu$ . Als einfache Wahl bieten sich für  $\nu \geq 1$  die komplexen Matrizen  $A_\nu = E_{\nu 0} - E_{0\nu}$  und  $B_\nu = iE_{\nu 0} + iE_{0\nu}$  sowie  $B_0 = iE_{00}$  an. Hier verwende ich die übliche Notation für die Standardbasis des Matrizenrings, habe jedoch die erste Zeile und Spalte jeweils mit Null indiziert. Es scheint mir nun einfacher, unsere integrierte Differentialform zunächst einmal auszuwerten auf den Vektoren  $(\vec{a}_\nu - i\vec{b}_\nu)/2$ ,  $(\vec{a}_\nu + i\vec{b}_\nu)/2$  und  $i\vec{b}_0$  des komplexifizierten Tangentialraums  $T_{\vec{a}_0}^{\mathbb{C}} S^{2n+1}$ . Mögliche Urbilder sind dann die Vektoren  $E_{\nu 0}$ ,  $-E_{0\nu}$  und  $-E_{00}$  des komplexifizierten Tangentialraums  $T_E^{\mathbb{C}} U(n + 1)$ , der kanonisch isomorph ist zu  $T_E GL(n + 1; \mathbb{C})$ . Verjüngen alias partielles Auswerten gegen diese Vektoren des komplexifizierten Tangentialraums der Faser beim neutralen Element liefert dann am neutralen Element die Form  $\pm dz_{11} \wedge \dots \wedge dz_{nn}$ . Sei das Integral der zugehörigen invarianten komplexwertigen Differentialform auf  $U(n)$  etwa  $\pm C_n$  und bekannt als Induktionsvoraussetzung. Nun finden wir leicht  $(\vec{a}_\nu - i\vec{b}_\nu) \wedge (\vec{a}_\nu + i\vec{b}_\nu) = 2i\vec{a}_\nu \wedge \vec{b}_\nu$  und damit ist

$$\pm (\vec{b}_0 \wedge \vec{a}_1 \wedge \vec{b}_1 \wedge \dots \wedge \vec{a}_n \wedge \vec{b}_n) i^{n+1} 2^{-n}$$

das Dachprodukt aller Vektoren unserer neuen Basis von  $T_{\vec{a}_0}^{\mathbb{C}} S^{2n+1}$ . Integrieren wir  $(\det)^{-(n+1)} dz_{00} \wedge \dots \wedge dz_{nn}$  über die Faser, so ergibt sich mithin  $\pm C_n$  mal eine invariante komplexwertige Differentialform auf  $S^{2n+1}$ , die das Dachprodukt unserer neuen Vektoren auf  $\pm 1$  wirft und das Dachprodukt  $\vec{b}_0 \wedge \vec{a}_1 \wedge \vec{b}_1 \wedge \dots \wedge \vec{a}_n \wedge \vec{b}_n$  folglich auf  $\pm i^{n+1} 2^n$ , womit wir insgesamt die Beziehung

$$\pm C_{n+1} = i^{n+1} 2^n C_n (\text{Oberfläche der Kugel } S^{2n+1})$$

folgern. Das Volumen der Kugel vom Radius  $r$  im  $\mathbb{R}^{2(n+1)}$  ist bekanntlich  $\pi^{n+1} r^{2(n+1)} / (n+1)!$  und die Oberfläche der Einheitskugel  $S^{2n+1}$  ist die Ableitung bei  $r = 1$  alias  $2\pi^{n+1}/n!$ , so daß wir schließlich finden  $\pm C_{n+1} = ((2\pi i)^{n+1}/n!) C_n$ . Mit der explizit leicht zu prüfenden Formel  $C_1 = 2\pi i$  als Induktionsbasis ergibt sich dann schließlich unsere Proposition.  $\square$

## 1.8 Etwas zur Lie-Theorie

**Satz 1.8.1.** *Eine kompakte Lie-Gruppe operiere auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit. So ist die Menge der Fixpunkte eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, deren Komponenten allerdings unterschiedliche Dimensionen haben können.*

*Beweis.* Da unsere Mannigfaltigkeit  $X$  parakompakt ist, besitzt sie eine Riemann'sche Metrik. Da unsere Lie-Gruppe  $K$  kompakt ist, finden wir sogar eine invariante Riemann'sche Metrik. Für  $x \in X$  liefert die Exponentialabbildung einen  $K$ -äquivarianten Homöomorphismus von einem kleinen offenen Ball  $B$  um den Nullpunkt im Tangentialraum  $T_x X$  auf eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$ . Er identifiziert also  $B \cap (T_x X)^K$  mit  $U \cap X^K$  und zeigt den Satz.  $\square$

1.8.2. *für die Fälle mit Ecken, nicht hier!* Ist  $X$  eine halboffene Teilmenge eines reellen affinen Raums  $E$ , so erklären wir die entsprechende Richtungsableitung durch  $(D_v f)(x) = (d_x f)(v)$ .

## 1.9 Parametrisierte Minimalflächen nach Weierstraß

1.9.1. Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar. Die Abbildung  $F$  heißt **winkeltreu** genau dann, wenn an jeder Stelle von  $U$  die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F}{\partial x}$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}$  aufeinander senkrecht stehen, dieselbe Länge haben und nicht Null sind. In der Notation der Wirtinger-Ableitung

$$\partial F = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

aus ?? ist das äquivalent zu der Forderung, daß die Funktion  $\partial F : U \rightarrow \mathbb{C}^3$  in der Quadrik  $Q = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid a^2 = b^2 + c^2 = 0\}$  außerhalb des Nullpunkts landen soll. Nun liefert die durch II.5.1.5 motivierte Abbildungsvorschrift  $(m, n) \mapsto (m^2 - n^2, i(m^2 + n^2), 2mn)$  eine Surjektion mit zweielementigen Fasern von  $\mathbb{C}^2 \setminus 0$  auf  $Q \setminus 0$ . Ist  $U$  einfach zusammenhängend, so finden wir mithin  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\partial F = (g^2 - f^2, i(g^2 + f^2), 2gf)$$

Ein Satz von Weierstraß besagt nun, daß für eine derartige winkeltreue Abbildung  $F$  das Bild  $F(U)$  eine Minimalfläche ist genau dann, wenn  $f$  und  $g$  holomorph sind.

## 1.10 Minimax-Theorem von von Neumann

1.10.1. Gegeben zwei Mengen  $X, Y$  und eine Abbildung  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  gilt sicher

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} f(x, b) &\leq f(a, b) \quad \forall a, b \\ \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y) &\leq \sup_{y \in Y} f(a, y) \quad \forall a \\ \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y) &\leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) \end{aligned}$$

Im allgemeinen haben wir natürlich keine Gleichheit, etwa ist im Fall  $X = Y$  und  $f(x, y) = \delta_{xy}$  und  $|X| > 1$  offensichtlich die linke Seite Null und die rechte Seite Eins.

## 1.11 Hilbert-Schmidt-Operatoren

1.11.1. Gegeben Hilberträume  $V$  und  $W$  wird ihr **Hilbertprodukt**  $V \hat{\otimes} W$  definiert als die Vervollständigung ihres "algebraischen" Tensorprodukts  $V \otimes W$  in Bezug auf das offensichtliche Skalarprodukt. Ist also  $(v_i)_{i \in I}$  eine Hilbertbasis von  $V$  und  $(w_j)_{j \in J}$  eine Hilbertbasis von  $W$ , so bilden die  $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$  eine Hilbertbasis von  $V \hat{\otimes} W$ .

1.11.2. Für  $\sigma$ -endliche Maßräume und mit unserer Definition des Produktmaßes 4.5.5 sogar für beliebige Maßräume  $(X, \mu)$  und  $(Y, \nu)$  gilt dann, daß das äußere Produkt von Funktionen einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2(X; \mu) \hat{\otimes} L^2(Y; \nu) \xrightarrow{\sim} L^2(X \times Y; \mu \otimes \nu)$$

liefert: Offensichtlich ist ja das äußere Produkt von Funktionen schon einmal mit den Skalarprodukten verträglich und wir erhalten so insbesondere eine

injektive Abbildung  $L^2(X; \mu) \otimes L^2(Y; \nu) \rightarrow L^2(X \times Y; \mu \otimes \nu)$ ,  $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ , von der nur noch gezeigt werden muß, daß ihr Bild dicht liegt. Nun liegt aber das Erzeugnis der charakteristischen Funktionen von Mengen endlichen Maßes stets dicht im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen. Jede Teilmenge endlichen Maßes von  $X \times Y$  läßt sich einbetten in die Vereinigung einer Folge paarweise disjunkter Quader mit in beiden Seiten endlichem Maß, deren Gesamtmaß nur um ein Weniges größer ist. Nehmen wir dann von dieser Folge nur ein hinreichend langes Anfangsstück, so wird das Gesamtmaß wieder nur um ein Geringes kleiner. So sehen wir, daß die fraglichen Produkte dicht liegen.

*Übung 1.11.3.* (Hinweis: 4.5.4.) Gegeben eine Familie  $(X_i, \mu_i)_{i \in I}$  von Maßräumen mit disjunkter Vereinigung  $(X, \mu)$  liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$\widehat{\bigoplus_{i \in I} L^2(X_i; \mu_i)} \xrightarrow{\sim} L^2(X; \mu)$$

1.11.4. Gegeben ein Hilberträume  $\mathcal{H}'$ ,  $\mathcal{H}$  liefert die Identifikation  $\bar{\mathcal{H}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}'^*$  des konjugierten Raums mit dem topologischen Dualraum eine Injektion  $\mathcal{H}' \otimes \bar{\mathcal{H}} \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ . Man zeigt unschwer, daß sie stetig ist für das offensichtliche Skalarprodukt auf dem Tensorprodukt und die Operatornorm auf dem Raum der beschränkten Operatoren, so daß sie sich in eindeutiger Weise stetig auf die Vervollständigung des Tensorprodukts fortsetzen läßt zu einer Abbildung

$$\mathcal{H}' \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$$

Die Operatoren im Bild dieser Abbildung heißen **Hilbert-Schmidt-Operatoren**.

Wir behaupten nun, daß unsere Fortsetzung auch injektiv ist. Sei dazu  $(v_i)_{i \in I}$  eine Hilbertbasis von  $\mathcal{H}$  und  $(v'_i)_{i \in I}$  eine Hilbertbasis von  $\mathcal{H}'$ . Sicher bilden die  $v'_i \otimes \bar{v}_j$  eine Hilbertbasis von  $\mathcal{H}' \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$ . Jedem  $\sum a_{ij}(v'_i \otimes \bar{v}_j)$  aus  $\mathcal{H}' \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$  können wir nun den Operator  $A$  zuordnen, der  $b = \sum b_j v_j$  auf  $Ab = \sum_i (\sum_j a_{ij} b_j) v'_i$  abbildet: Die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung liefert erst  $|\sum_j a_{ij} b_j|^2 \leq \sum_j |a_{ij} b_j|^2 \leq (\sum_j |a_{ij}|^2)(\sum_j |b_j|^2)$  und durch Summation über  $i$  dann

$$\sum_{i,j} |a_{ij} b_j|^2 \leq \left( \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right) \left( \sum_j |b_j|^2 \right)$$

Folglich ist  $Ab$  wirklich ein wohldefinierter Vektor von  $\mathcal{H}'$  ist, und wir erhalten zusätzlich die Abschätzung

$$\|Ab\| \leq \left( \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|b\|$$

Damit haben wir sogar eine explizite Beschreibung unserer stetigen Fortsetzung erhalten, der man ihre Injektivität unmittelbar ansieht.

1.11.5. Gegeben ein Hilbert-Schmidt-Operator  $A$  bezeichnet man seine Norm als Element des Hilbertraums  $\mathcal{H}' \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$  auch mit  $\|A\|_2$  oder  $\|A\|_{\text{HS}}$  und nennt diese Norm die **Hilbert-Schmidt-Norm**. Das Ende des vorhergehenden Beweises liefert insbesondere die Abschätzung  $\|A\| \leq \|A\|_2$  der Operatornorm durch die Hilbert-Schmidt-Norm.

1.11.6. Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist in der Operatornorm ein Grenzwert einer Folge von Operatoren endlichen Ranges und ist damit nach VI.10.6.3 insbesondere kompakt.

## 1.12 Spuren in Hilberträumen

**Definition 1.12.1.** Ein beschränkter Operator  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  zwischen zwei Hilberträumen heißt **spurbar** oder auch **nuklear** genau dann, wenn er kompakt ist und wenn der Ausgangsraum eine Hilbertbasis  $(v_i)_{i \in I}$  besitzt mit

$$\sum_{i \in I} \|Av_i\| < \infty$$

*Ergänzung 1.12.2.* Es ist hier eigentlich unnötig, die Kompaktheit noch extra zu fordern, denn sie folgt bereits aus unseren sonstigen Annahmen. Ich habe diese Forderung nur deshalb mit zu unserer Definition hinzugenommen, da man so für die weitere Entwicklung der Theorie nur die deutlich einfachere Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren benötigt. Um die Kompaktheit zu folgern, kann man so argumentieren: Ist  $A$  nicht kompakt, so ist auch  $|A| = \sqrt{A^*A}$  nicht kompakt, und man findet unter Zuhilfenahme der Spektraltheorie des selbstadjungierten Operators  $|A|$  ein  $\lambda > 0$  derart, daß das Anwenden des  $\lambda$ -fachen der charakteristischen Funktion von  $[\lambda, \infty)$  auf  $|A|$  einen Operator  $B$  mit einem unendlichdimensionalen Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda$  liefert, der auf dem orthogonalen Komplement dieses Eigenraums verschwindet. Dieses  $B$  hinwiederum kann man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zerlegen als  $B_n + R_n$  mit  $R_n$  positiv definit und  $B_n$  vom Rang  $n$  mit den einzigen Eigenwerten 0 und  $\lambda$ . Nach Konstruktion gilt nun

$$\sum_{i \in I} \|Av_i\| = \sum_{i \in I} \langle |A|v_i, v_i \rangle \geq \sum_{i \in I} \langle Bv_i, v_i \rangle \geq \sum_{i \in I} \langle B_nv_i, v_i \rangle = n\lambda$$

für jede Hilbertbasis, wo wir uns bei der letzten Gleichung bereits auf den im folgenden bewiesenen Satz stützen.

**Satz 1.12.3 (Spuren in Hilberträumen).** Gegeben ein spurbarer Operator  $A$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  konvergiert für jede Hilbertbasis  $(v_i)_{i \in I}$  von  $\mathcal{H}$  die Summe der  $\langle v_i, Av_i \rangle$  gegen dieselbe Zahl

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i \in I} \langle v_i, Av_i \rangle$$

Diese Zahl  $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{C}$  heißt dann die **Spur** unseres spurbaren Operators.

1.12.4. Insbesondere folgt durch Anwenden dieses Satzes auf den Operator  $|A|$  die Bedingung aus der Definition für jede Hilbertbasis, sobald wir sie für eine Hilbertbasis kennen.

*Beispiel 1.12.5.* Gegeben ein Operator  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  auf einem Hilbertraum kann es durchaus passieren, daß für eine Hilbertbasis  $(v_i)_{i \in I}$  die Summe  $\sum_{i \in I} \langle v_i, Tv_i \rangle$  konvergiert und daß für eine andere Hilbertbasis dieselbe Summe divergiert. Zum Beispiel konvergiert unsere Summe für die Standardbasis von  $L^2(\mathbb{Z})$  und  $T$  dem Verschieben alias die Basis  $(z^n)$  von  $L^2(S^1)$  und  $T = (z \cdot)$ . Wählen wir allerdings eine hinreichend kleine Umgebung  $U \Subset S^1$  des neutralen Elements, so wird  $(z \cdot) : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$  auf diesem unendlichdimensionalen Teilraum von der Identität kaum abweichen, und für jedes unendliche Orthogonalsystem  $(w_i)_{i \in I}$  dieses Raums wird  $\sum \langle w_i, Tw_i \rangle$  divergieren. Ähnlich sieht man, daß für einen selbstadjungierten Operator  $T$  die Summe  $\sum_{i \in I} \langle v_i, Tv_i \rangle$  nur dann für alle Hilbertbasen konvergieren kann, wenn  $T$  kompakt ist.

*Beweis.* Indem wir die Spektraltheorie kompakter Operatoren auf  $A^*A$  anwenden, erkennen wir, daß jeder Operator endlichen Ranges spurbar ist. Wir zeigen den Satz zunächst einmal in diesem Fall. Dazu dürfen wir sicher  $A$  vom Rang Eins annehmen, etwa  $(\operatorname{im} A) = \mathbb{C}w$  mit  $w \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ . Insbesondere gilt dann  $Av_i = c_i w$  für geeignete  $c_i \in \mathbb{C}$ , und entwickeln wir  $w = \sum \lambda_i v_i$ , so folgt  $Aw = \sum \lambda_i Av_i = \sum \lambda_i c_i w$ . Für die Spur  $c$  von  $A$  im Sinne der linearen Algebra nach ?? haben wir per definitionem  $Aw = cw$  und damit  $c\|w\|^2 = \langle w, Aw \rangle = \sum \lambda_i c_i \|w\|^2$ . Andererseits finden wir aber auch  $\langle v_i, Av_i \rangle = \langle v_i, c_i w \rangle = c_i \lambda_i$ , und das liefert unmittelbar die Behauptung. Als nächstes behandeln wir den Fall, daß  $A$  positiv semidefinit ist, also selbstadjungiert mit  $\langle v, Av \rangle \geq 0$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . In diesem Fall liefert der Spektralsatz für kompakte Operatoren VI.10.6.4 eine Folge  $(A_n)_{n \geq 0}$  von positiv semidefiniten Operatoren endlichen Ranges mit  $A_n \rightarrow A$  in der Operatornorm und  $A_{n+1} - A_n$  positiv semidefinit für alle  $n$ . Für je zwei Hilbertbasen  $(v_i)_{i \in I}$  und  $(w_j)_{j \in I}$  folgt dann mit einer Anwendung des Satzes über monotone Konver-

genz IV.6.4.9 in einem trivialem Spezialfall

$$\begin{aligned}
 \sum \langle v_i, Av_i \rangle &= \sum \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_i, A_n v_i \rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \langle v_i, A_n v_i \rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \langle w_j, A_n w_j \rangle \quad \text{wegen } \text{rk } A_n < \infty \\
 &= \sum \lim_{n \rightarrow \infty} \langle w_j, A_n w_j \rangle = \sum \langle w_j, Aw_j \rangle
 \end{aligned}$$

Genau dann ist also die eine dieser Summen endlich, wenn es die andere ist, und dann liefern sie beide dieselbe nichtnegative reelle Zahl. Ist schließlich  $A$  ein beliebiger spurbarer Operator, so ziehen wir die Spektraltheorie kompakter Operatoren heran, um mit geringerem Aufwand als im allgemeinen Fall die Polarzerlegung  $A = D|A|$  im Sinne von V.3.4.19 herzuleiten. Indem wir "immer mehr Eigenräume von  $A$  dazunehmen", finden damit sogar eine Folge  $A_n$  von Operatoren endlichen Ranges derart, daß gilt  $A_n \rightarrow A$  und  $|A_n| \rightarrow |A|$  in der Operatornorm und daß zusätzlich  $|A_{n+1}| - |A_n|$  stets positiv semidefinit ist. Mit  $A$  ist per definitionem auch  $|A|$  spurbar, und dieselbe Rechnung wie eben, in der wir nur statt dem Satz über monotone Konvergenz den Satz über dominierte Konvergenz IV.6.5.10 in einem trivialen Spezialfall anwenden, zeigt die Behauptung.  $\square$

*Übung 1.12.6.* Ist  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  ein beschränkter Operator zwischen Hilberträumen und ist  $A$  spurbar, so sind auch der im Sinne von ?? komplex konjugierte Operator  $\bar{A} : \bar{\mathcal{H}} \rightarrow \bar{\mathcal{H}'}$  spurbar, und im Fall  $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$  gilt

$$\text{tr}(\bar{A}) = \overline{\text{tr}(A)}$$

**Proposition 1.12.7.** *Ist  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  ein beschränkter Operator zwischen Hilberträumen und ist  $A$  spurbar, so ist auch der adjungierte Operator  $A^*$  spurbar und im Fall  $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$  gilt*

$$\text{tr}(A^*) = \overline{\text{tr}(A)}$$

*Beweis.* Gegeben ein kompakter Operator  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  zwischen Hilberträumen besitzt  $\mathcal{H}$  eine Hilbertbasis  $(v_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  derart, daß  $(Av_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  ein System paarweise orthogonaler Vektoren in  $\mathcal{H}'$  ist. In der Tat ist sicher auch  $A^*A$  kompakt, und eine Hilbertbasis von  $\mathcal{H}$  aus Eigenvektoren dieses selbstadjungierten Operators leistet das Gewünschte. Setzen wir nun  $\lambda_\nu = \|Av_\nu\|$ , so bilden die  $w_\nu := \lambda_\nu^{-1}Av_\nu$  für die  $\nu$  mit  $\lambda_\nu \neq 0$  eine Hilbertbasis von  $\overline{(\text{im } A)} = (\ker A^*)^\perp$  mit  $Av_\nu = \lambda_\nu w_\nu$  und  $A^*w_\nu = \lambda_\nu v_\nu$ . Ergänzen wir diese  $w_\nu$  zu einer Hilbertbasis von  $\mathcal{H}'$  und benutzen diese Hilbertbasen zum Testen der Spurbarkeit, so sehen wir, daß  $A$  spurbar ist genau dann, wenn gilt

$\sum \lambda_\nu < \infty$ , und daß das weiter genau dann gilt, wenn  $A^*$  spurbar ist. Die explizite Formel für die Beziehung beider Spuren folgt unmittelbar aus den Definitionen.  $\square$

*Übung 1.12.8. Ich hab sie nicht gemacht!* Sind  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  und  $B : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  beschränkte Operatoren zwischen Hilberträumen und ist  $A$  spurbar, so sind auch  $AB$  und  $BA$  spurbar und es gilt

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

*Ergänzung 1.12.9.* Ein beschränkter Operator  $A : X \rightarrow Y$  zwischen normierten Vektorräumen heißt ganz allgemein **nuklear** genau dann, wenn es Folgen  $f_n \in X^*$  und  $y_n \in Y$  gibt mit  $\sum \|f_n\| \|y_n\| < \infty$  derart, daß für alle  $x \in X$  gilt

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) y_n$$

Sicher ist jeder nukleare Operator kompakt: In der Tat ist er der Grenzwert in der Operatortopologie einer Folge  $A_n$  von Operatoren endlichen Ranges und damit kompakt nach [VI.10.6.3](#).

### 1.13 Faserungskriterium von Ehresmann

**Satz 1.13.1 (Faserungskriterium von Ehresmann).** *Jede eigentliche Submersion von einer glatten Mannigfaltigkeit auf eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit ist eine Faserung.*

1.13.2. Wir brauchen für diesen Satz nicht vorauszusetzen, daß unsere Submersion surjektiv ist.

*Beweis.* Wir zeigen genauer, daß es für jede eigentliche Submersion  $p : X \rightarrow (-1, 1)^n$  einen Diffeomorphismus  $p^{-1}(0) \times (-1, 1)^n \xrightarrow{\sim} X$  über  $(-1, 1)^n$  gibt. Um das zu sehen, wählt man mithilfe einer Partition der Eins Liftungen der Standardvektorfelder  $\partial_i$  auf der Basis  $(-1, 1)^n$  zu Vektorfeldern auf  $X$ . Da  $p$  eigentlich ist, sind die maximalen Integralkurven dieser Felder stets auf offenen Intervallen der Länge 2 definiert. Bewegen wir  $x \in p^{-1}(0)$  mit den Flüssen dieser Felder der Reihe nach in die Fasern über  $(t_1, 0, \dots, 0)$ ,  $(t_1, t_2, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , so erhalten wir den gesuchten Diffeomorphismus.  $\square$

**Definition 1.13.3.** Eine **Flachheitsstruktur** auf einem glatten  $n$ -dimensionalen reellen Vektorbündel  $E$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  ist eine Untergarbe  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{X,E}^\infty$  von reellen Vektorräumen in der Garbe seiner glatten Schnitte, die (1) lokal isomorph ist zur kontaktanten Garbe  $\mathbb{R}^n$  und für die (2) die Multiplikation einen Garbenisomorphismus  $\mathcal{C}_X^\infty \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{X,E}^\infty$  liefert.

**Satz 1.13.4 (Flache Zusammenhänge und Flachheitsstrukturen).** Sei  $E$  ein glattes  $n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$ . Die Zuordnung, die jedem flachen Zusammenhang die Garbe seiner flachen Schnitte zuordnet, liefert eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{flache Zusammenhänge } \nabla \\ \text{auf dem Bündel } E \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Flachheitsstrukturen} \\ \mathcal{F} \subset \mathcal{C}_E^\infty \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Jeder Zusammenhang zeichnet gewisse Vektoren im Tangentialraum an den Totalraum  $E$  unseres Bündels als “horizontal” aus, und im Fall eines flachen Zusammenhangs bilden diese horizontalen Vektoren eine involutive Distribution. Ist  $X$  eine offene Kreisscheibe, so gehört jeder Punkt von  $E$  nach dem Satz von Frobenius VI.5.9.2 zu genau einer maximalen Integralmannigfaltigkeit dieser Distribution, und diese wird von der Bündelprojektion diffeomorph auf  $X$  abgebildet.  $\square$

## 1.14 Tangentenumlaufzahl

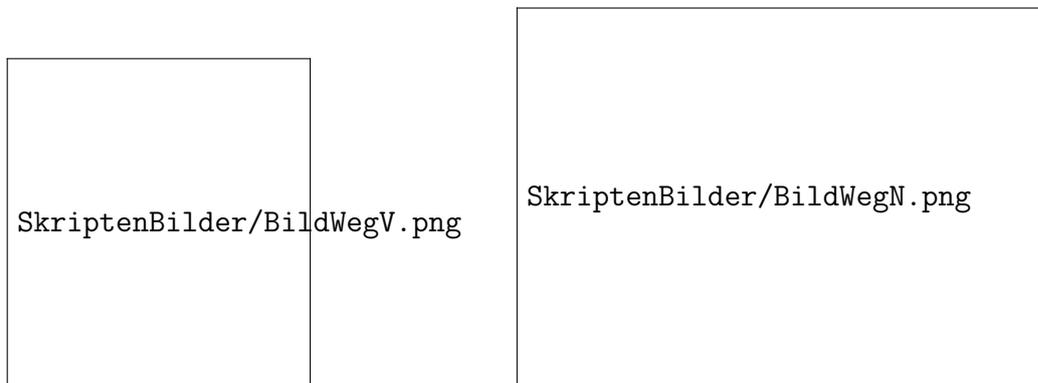
**Definition 1.14.1.** Gegeben eine stetig differenzierbare periodische Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $P > 0$  und nirgends verschwindender Ableitung erklären wir ihre **Tangentenumlaufzahl** als die Umlaufzahl des Weges  $\gamma' : [0, P] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  um den Ursprung.

**Satz 1.14.2 (Tangentenumlaufzahl eingebetteter Wege).** Ist eine stetig differenzierbare periodische Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $P > 0$  und nirgends verschwindender Ableitung injektiv auf  $[0, P)$ , so ist ihre Tangentenumlaufzahl Eins oder minus Eins.

*Beweis.* Wir behandeln zunächst den Spezialfall, daß unser Weg ganz in der abgeschlossenen oberen Halbebene verläuft, in Formeln  $\text{Im } \gamma(t) \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und daß es  $\varepsilon \in (0, P/2)$  gibt mit  $\gamma(t) = t$  für  $|t| \geq 2\varepsilon$ . Im Anschluß zeigen wir dann, wie man sich auf diesen Fall zurückziehen kann. Zunächst überlegt man sich, daß für jede stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die “Tangenten-Sekanten-Abbildung”

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (s, t) &\mapsto \begin{cases} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} & s \neq t; \\ \gamma'(s) = \gamma'(t) & s = t, \end{cases} \end{aligned}$$

stetig ist, vergleiche auch II.3.2.8. Unter unseren Annahmen im Satz landet besagte Abbildung sogar bereits in  $\mathbb{C}^\times$ . In unserem Spezialfall gilt sogar zusätzlich  $\gamma'(t) = 1$  für  $|t| \leq \varepsilon$ . Damit hat  $\gamma' : [0, P] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  dieselbe Umlaufzahl wie  $\gamma' : [\varepsilon, P] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , und dieser Weg ist aufgrund der Stetigkeit der



Dies Bild soll illustrieren, wie man sich durch das Einfügen horizontaler Stücke im Satz 1.14.2 über die Tangentenumlaufzahl eingebetteter Wege auf den im Beweis zuerst betrachteten Fall zurückziehen kann.



Illustration der Homotopien aus dem Beweis von 1.14.2. Links die Sekanten-Tangenten-Abbildung  $\phi$  oder genauer der Definitionsbereich ihrer Einschränkung auf das Quadrat  $[0, P]^2$ . Schraffiert eingezeichnet die Stellen, an denen unsere Abbildung konstant Eins ist. Restriktion auf die gestrichelt eingezeichnete Linie liefert den Weg  $\varphi/\varepsilon$ . Rechts die “Verbindungsvektorenabbildung”  $\psi$  oder genauer der Definitionsbereich ihrer Einschränkung auf das Quadrat  $[\varepsilon, P - \varepsilon]^2$ .

Tangenten-Sekanten-Abbildung homotop in  $\mathbb{C}^\times$  zum Weg  $\varphi : [\varepsilon, P] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  von Sekantenvektoren

$$\varphi(t) = \gamma(t) - \gamma(t - \varepsilon)$$

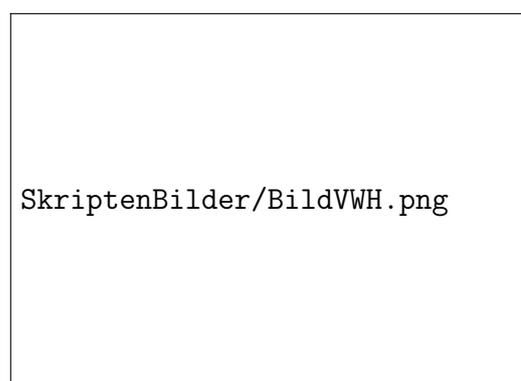
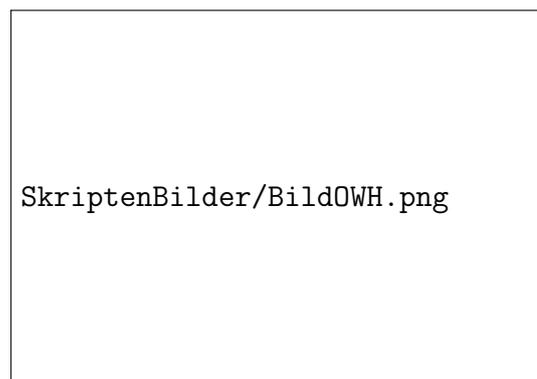
Der Weg  $\varphi$  hinwiederum ist konstant für  $t \in [P - \varepsilon, P]$ , so daß das Einschränken auf das Intervall  $[\varepsilon, P - \varepsilon]$  seine Umlaufzahl um den Ursprung nicht ändert. Der so eingeschränkte Weg  $\varphi$  ist nun seinerseits die Restriktion auf die Diagonale der Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : [\varepsilon, P - \varepsilon]^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (s, t) &\mapsto \gamma(s) - \gamma(t - \varepsilon) \end{aligned}$$

Auf dem Teil unseres Quadrats mit  $s \geq t$ , also dem Teil unter oder schlimmstenfalls auf der Diagonale, landet diese Abbildung  $\psi$  sogar in  $\mathbb{C}^\times$ . Damit ist unser auf das Intervall  $[\varepsilon, P - \varepsilon]$  eingeschränkter Weg  $\varphi$  in  $\mathbb{C}^\times$  homotop zur Verknüpfung des Wegs  $[\varepsilon, P - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}^\times, s \mapsto \gamma(s)$  mit dem Weg  $[\varepsilon, P - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}^\times, t \mapsto \gamma(-\varepsilon) - \gamma(t - \varepsilon)$ . In Worten ist  $\varphi$  in  $\mathbb{C}^\times$  homotop zur Verknüpfung eines Weges, der unter Vermeidung des Ursprungs auf oder oberhalb der reellen Achse von einem Punkt mit positivem Realteil zu einem Punkt mit negativem Realteil wandert, mit einem weiteren Weg, der in derselben Weise aber nun in der unteren Halbebene zurückwandert. Nach ?? hat damit  $\varphi$  die Umlaufzahl 1 um den Ursprung. Schließlich bleibt nur noch, von unserem Spezialfall auf den allgemeinen Fall zu schließen. Dazu wählen wir unter den Punkten auf unserem Weg mit maximalem bzw. minimalen Imaginärteilen diejenigen mit maximalem Realteil, trennen unseren Weg an diesen beiden Stellen auf und fügen jeweils ein horizontales Stück gleicher und hinreichend großer Länge ein. Dabei ändert sich die Tangentenumlaufzahl nicht, und wenn die eingefügten Stücke nur groß genug sind, erhalten wir auch wieder eine Einbettung.  $\square$



Der Weg der Tangenten ist homotop zum Weg gewisser Sekanten.



Der Weg der Sekanten ist homotop zur Verknüpfung der beiden Wege  
"bewege die Pfeilspitze herum" und dann "bewege das Pfeilende herum".

## 2 Unausgegorenes zum Lebesgue-Integral

### 2.1 Dichten

**Definition 2.1.1.** *Wohin?* Unter einer **Dichte** auf einer Mannigfaltigkeit verstehen wir ein Borelmaß, für das das Bild einer Lebesgue-Nullmenge unter einer Karte stets eine Nullmenge ist. Unter einer **Dichte** auf einer Mannigfaltigkeit verstehen wir eine Vorschrift  $D$ , die jeder Karte  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  eine meßbare Funktion  $D_\alpha : W_\alpha \rightarrow [0, \infty)$  zuordnet derart, daß für alle Kartenwechsel  $\varphi_{\beta\alpha} : W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$  auf  $W_{\alpha\beta}$  gilt

$$D_\alpha = (D_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}) |\det d\varphi_{\alpha\beta}|$$

Sind alle die Funktionen  $D_\alpha$  stetig bzw. positiv, so sprechen wir von einer **stetigen** bzw. **positiven Dichte**.

**Proposition 2.1.2 (Maß zu einer Dichte).** *Gegeben eine Dichte  $D$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es genau ein topologisches Maß  $\mu = \mu_D$  auf  $M$  derart, daß für jede Karte  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  und jede topologisch meßbare Menge  $A \subset \varphi_\alpha(W_\alpha)$  gilt*

$$\mu(A) = \int_{\varphi_\alpha^{-1}(A)} D_\alpha(x) \, d^k x$$

*Jede in  $M$  enthaltene Mannigfaltigkeit echt kleinerer Dimension ist für solch ein Maß eine Nullmenge und jede stetige Dichte liefert ein Borelmaß.*

**Beispiel 2.1.3.** Auf jeder Untermannigfaltigkeit eines  $\mathbb{R}^n$  erhalten wir eine positive stetige Dichte, indem wir jeder Karte  $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$  die Funktion  $D_\alpha(x) = \text{vol}(d_x \varphi_\alpha)$  auf  $W_\alpha$  zuordnen. Das zu dieser Dichte gehörige Maß ist dann genau unser Flächenmaß aus IV.6.9.1.

*Beweis.* Sehr ähnlich zum Beweis von IV.6.9.1 und dem Leser überlassen.  $\square$

### 2.2 Translationsinvariante Maße auf Produkträumen

*Das soll ganz woanders hin!*

**Lemma 2.2.1.** *Gegeben ein lokal kompakter separabler Hausdorffraum  $X$  liefert das Bilden des Produkts mit dem Lebesguemaß  $\lambda$  eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Topologische Maße auf } X, \\ \text{die endlich sind auf Kompakta} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Topologische Maße auf } X \times \mathbb{R}, \\ \text{die endlich sind auf Kompakta} \\ \text{und invariant unter Translation} \end{array} \right\}$$

$$\mu \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad \qquad \qquad \mu \otimes \lambda$$

*Beweis.* Sicher erhalten wir eine Linksinverse zur Abbildung aus dem Lemma, indem wir jedem topologischen Maß  $\pi$  auf  $X \times \mathbb{R}$  das Maß  $\bar{\pi}$  auf  $X$  zuordnen mit

$$\bar{\pi}(A) = \pi(A \times [0, 1])$$

für alle topologisch meßbaren  $A \subset X$ . Wir sind fertig, wenn wir zeigen, daß das auch eine Rechtsinverse ist, daß also für jedes translationsinvariante topologische Maß  $\pi$  auf  $X \times \mathbb{R}$ , das endlich ist auf Kompakta, notwendig gilt  $\pi = \bar{\pi} \otimes \lambda$ . Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Erweiterungssatz von Hahn IV.6.2.10 reicht es, für alle topologisch meßbaren  $A \subset X$  und  $B \subset \mathbb{R}$  die Gleichheit  $\pi(A \times B) = \bar{\pi}(A)\lambda(B)$  zu zeigen, wo  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$  zu verstehen ist. Es reicht sogar aus, das für alle  $A$  mit kompaktem Abschluß nachzuweisen. Dann sind jedoch beide Seiten als Funktionen von  $B$  translationsinvariante topologische Maße auf  $\mathbb{R}$ , die endlich sind auf Kompakta. Folglich sind sie Vielfache des Lebesgue-Maßes und das Lemma ergibt sich sofort.  $\square$

### 3 Klassische Mechanik

#### 3.1 Die Newton'schen Bewegungsgleichungen

3.1.1. Um die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu formulieren, wählen wir zusätzlich zu unserer Zeit  $\mathbb{T}$  aus ?? und unserem Anschauungsraum  $\mathbb{E}$  aus ?? noch einen  $\mathbb{R}_{>0}$ -Torsor  $\mathbb{M}_{>0}$  im Sinne von ??, dessen Elemente wir **Massen** nennen. Ein Element dieses Torsors ist zum Beispiel das in der französischen Revolution gewählte **Gramm**  $g \in \mathbb{M}_{>0}$ , das dadurch bestimmt ist, daß 1000 g in etwa die Masse eines Wasserwürfels der Kantenlänge 0,1 m ist. Den zugehörigen orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum notieren wir

$$[[\text{Masse}]] = \mathbb{M} := \mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} \mathbb{M}_{>0}$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen beschreiben die Bewegung eines Körpers oder Teilchens in Abhängigkeit von seiner Masse, die etwa bestimmt werden kann durch das Aufwiegen mit Wasser und Bestimmung des benötigten Wasservolumens oder, wenn man es genauer braucht, durch den Vergleich mit der Masse eines im "Bureau international des poids et mesures" in Sèvres bei Paris seit 1889 sorgsam gehüteten Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung, des sogenannten **Urkilogramms**.

3.1.2. Gegeben ein bewegtes Teilchen im Sinne der Newton'schen Mechanik alias eine Abbildung

$$\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$$

von der Zeit oder allgemeiner einem halboffenen Intervall dieser nach ?? angeordneten Menge in den Anschauungsraum, ist ihr Differential IV.1.2.2, wenn es denn existiert, eine Abbildung  $\dot{\gamma} : t \mapsto d_t \gamma, \mathbb{T} \rightarrow \text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$ . Unter unserer Identifikation  $\text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}}) \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$  aus ?? wird dieses Differential zu einer Abbildung

$$\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$$

Man nennt  $\dot{\gamma}(t)$  die **Geschwindigkeit** oder präziser die **vektorielle Geschwindigkeit** unseres Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ .

3.1.3. Seien gegeben ein reeller Vektorraum  $V$ , ein orientierter eindimensionaler reeller Vektorraum  $L$ , ein Skalarprodukt mit Einheiten  $s : V \otimes V \rightarrow L^{\otimes 2}$  im Sinne von ??, sowie ein weiterer eindimensionaler orientierter Vektorraum  $T$ . In dieser Situation erhalten wir durch Darantensorieren von  $T^{\otimes 2}$  offensichtlich auf  $V \otimes T$  ein Skalarprodukt mit Einheiten in  $L \otimes T$ .

3.1.4. Das kanonische Skalarprodukt auf  $\vec{\mathbb{E}}$  liefert insbesondere auf  $\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$  ein Skalarprodukt mit Einheiten in  $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ . Die zugehörige Länge im Sinne von ?? des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\gamma}(t) \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$  heißt die **absolute Geschwindigkeit**  $\|\dot{\gamma}(t)\| \in (\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)_{\geq 0}$  unseres Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ .

3.1.5. Um unserer Notation der Einheiten etwas an Schwere zu nehmen, vereinbaren wir für unsere eindimensionalen Vektorräume von Einheiten die Notation als Erzeugnis eines üblichen Erzeugers in verdoppelten Erzeugerklammern, also etwa

$$\begin{aligned}\vec{\mathbb{T}} &= \langle\langle s \rangle\rangle && \text{mit } s \text{ für "Sekunde";} \\ \mathbb{L} &= \langle\langle m \rangle\rangle && \text{mit } m \text{ für "Meter";} \\ \mathbb{M} &= \langle\langle g \rangle\rangle && \text{mit } g \text{ für "Gramm".}\end{aligned}$$

Weiter notieren wir bei unseren eindimensionalen Räumen die duale Basis des Dualraums statt  $v^\top$  meist lieber  $v^{-1}$  oder  $1/v$ , so daß wir den Dualraum  $\vec{\mathbb{T}}^*$  des Raums der Zeitspannen auch schreiben könnten als  $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  oder  $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle\langle s^{-1} \rangle\rangle$ . Schließlich lassen wir in diesem Zusammenhang die  $\otimes$ -Zeichen meist weg und schreiben für ganze Zahlen  $r \in \mathbb{Z}$  kürzer  $v^r$  für unser Element  $v^{\otimes r} \in V^{\otimes r}$  aus ???. So wäre etwa  $\langle\langle m^2 \rangle\rangle = \mathbb{L}^{\otimes 2}$  eine Notation für den eindimensionalen orientierten reellen Vektorraum, dessen nichtnegative Elemente man meist "Flächen" nennt und den wir manchmal statt mit  $\mathbb{L}^{\otimes 2}$  auch mit [Fläche] bezeichnen werden. In derselben Weise schreiben wir etwa  $m/s$  für den Vektor  $m \otimes s^{\otimes(-1)}$  aus  $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$  und notieren diesen Raum auch  $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* = \langle\langle m/s \rangle\rangle$ .

3.1.6. Das Differential der vektoriellen Geschwindigkeit ist, wenn es denn existiert, hinwiederum eine Abbildung  $\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$  oder in unserer neuen Notation

$$\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$$

Man nennt  $\dot{\gamma}(t)$  die **Beschleunigung** oder genauer die **vektorielle Beschleunigung** unseres Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ .

3.1.7. Unter einem **Kraftfeld** versteht man eine Abbildung

$$F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$$

wo im Sinne unserer neuen Notation  $\langle\langle g/s^2 \rangle\rangle = \mathbb{M} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$  zu verstehen ist. Der Buchstabe  $F$  erinnert an englisch **force**. Unter der **Newton'schen Bewegungsgleichung** für ein Teilchen einer Masse  $m \in \mathbb{M}$  im Kraftfeld  $F$  versteht man die Forderung "Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" und in Formeln ausgedrückt die Gleichheit

$$F \circ \gamma = m\dot{\gamma}$$

von Abbildungen  $\mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$ , der die Bewegung  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$  unseres Teilchens gehorchen soll.

3.1.8. Unter einem **Gravitationsfeld** versteht man eine Abbildung

$$G : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$$

und die von einem derartigen Feld auf ein Teilchen der Masse  $m$  ausgeübte Kraft wird gegeben durch die Gleichung

$$F = mG$$

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen beliebiger Masse in einem Gravitationsfeld  $G$  lautet damit

$$\ddot{\gamma} = G \circ \gamma$$

und ist aufzufassen als eine Gleichheit von Abbildungen  $\mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$ .

*Beispiel 3.1.9 (Flugbahn eines geworfenen Massenpunktes).* An der Erdoberfläche kann das Gravitationsfeld lokal recht gut approximiert werden durch das konstante Feld  $(9,8)\vec{m}/s^2$ , wobei  $\vec{m} \in \vec{\mathbb{E}}$  denjenigen einen Meter langen Vektor bezeichnet, der an der gegebenen Stelle in Richtung des Erdmittelpunkts zeigt. Bezeichnet nun  $t : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$  die Identifikation der reellen Zahlengeraden mit der Zeitachse mittels der Abbildungsvorschrift  $t : x \mapsto t_0 + xs$  für einen beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  und unsere Zeiteinheit Sekunde  $s \in \vec{\mathbb{T}}$ , so werden die Ableitungen der Verknüpfung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $x \mapsto \gamma(t_0 + xs)$  nach der Kettenregel gegeben durch

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{dx} = s \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\gamma}{(dx)^2} = s \frac{d^2\gamma}{(dt)^2} \frac{dt}{dx} = s^2 \frac{d^2\gamma}{(dt)^2}$$

Hier ist nun natürlich alles mögliche implizit zu verstehen, aber das alles auszuschreiben führt zu ungenießbaren Formeln. So ergibt sich für die Bewegung eines Teilchens, etwa einer Kanonenkugel, bei Vernachlässigung des Luftwiderstands die für die Artillerie offensichtlich fundamentale Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\gamma}{(dx)^2} = (9,8)\vec{m}$$

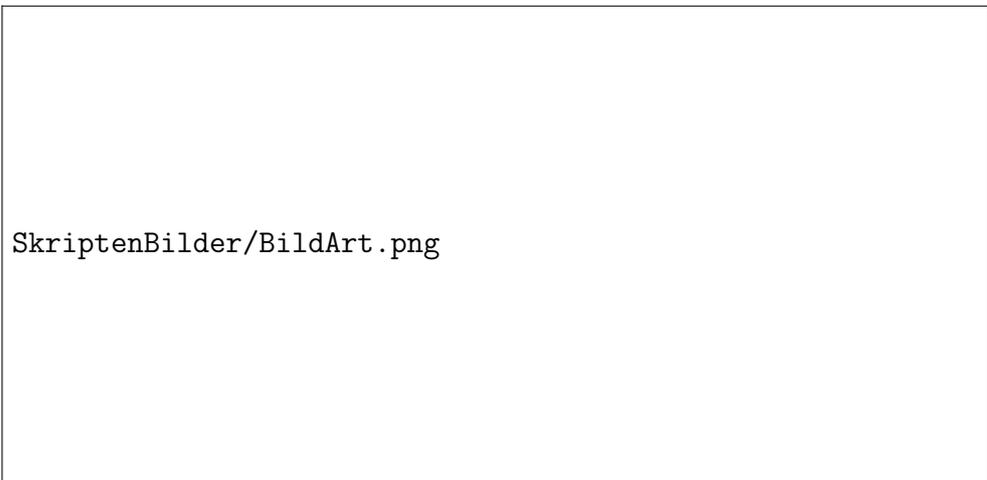
Deren allgemeine Lösung ergibt sich durch direktes Integrieren zu

$$\gamma(xs + t_0) = (4,9)x^2\vec{m} + x\vec{a} + p_0$$

mit  $\vec{a} \in \vec{\mathbb{E}}$  einem festen Richtungsvektor und  $p_0 \in \mathbb{E}$  einem festen Ort, und durch Einsetzen von  $xs = \tau$  erhalten wir

$$\gamma(\tau + t_0) = (4,9)\tau^2(\vec{m}/s^2) + \tau\vec{v}_0 + p_0$$

mit  $\vec{v}_0 = \vec{a}/s$  der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0$  und  $p_0 \in \mathbb{E}$  dem Ort zum Zeitpunkt  $t_0$ .



SkriptenBilder/BildArt.png

Die Flugbahn einer Kanonenkugel ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstands eine Parabel im Sinne von [II.4.7.5](#). Die Bezeichnung “Parabel” kommt eben nicht umsonst vom griechischen Wort für “Werfen”.

*Beispiel 3.1.10.* Wollen wir etwa wissen, in welcher Entfernung eine an einer Stelle  $p_0 \in \mathbb{E}$  unter einem gegebenen Winkel  $\vartheta$  gegen die Horizontale mit einer gegebenen Mündungsgeschwindigkeit  $v_0 \in \langle\langle \text{m/s} \rangle\rangle$  abgeschossene Kugel einschlägt, so betrachten wir einen vertikalen einen Meter langen Vektor  $\vec{m}_v = -\vec{m}$  und einen horizontalen einen Meter langen Vektor in Richtung der Mündung  $\vec{m}_h$  und finden für die Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0 = a\vec{m}_v/s + b\vec{m}_h/s$  die Bahnkurve

$$\gamma(t + t_0) = -(4, 9)t^2 \vec{m}_v/s^2 + ta \vec{m}_v/s + tb \vec{m}_h/s + p_0$$

Die Zeit, nach der die Kugel wieder den Boden erreicht, ist folglich die Lösung der Gleichung  $(-4, 9)t^2/s^2 + ta/s = 0$  alias  $t = (a/(4, 9))s$ . Der Einschlagsort ist mithin

$$p_0 + \frac{ab}{4, 9}\vec{m}_h$$

Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$  und Abschlußwinkel  $\vartheta$  berechnen sich aus  $a$  und  $b$  mittels  $v_0 = (\sqrt{a^2 + b^2})\text{m/s}$  und  $\tan \vartheta = a/b$ . Wir finden aber auch umgekehrt für  $v_0 = c(\text{m/s})$  die Identitäten  $\sin \vartheta = a/c$  und  $\cos \vartheta = b/c$  alias  $a = c \sin \vartheta$  und  $b = c \cos \vartheta$ . Der Abschlußwinkel, unter dem die Kugel am weitesten kommt, ist das Maximum von  $(\cos \vartheta \sin \vartheta)$  für  $\vartheta \in [0, \pi/2]$  alias das Maximum von  $\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$ . Der optimale Abschlußwinkel ist also  $\pi/4 = 45^\circ$ , und die Kugel schlägt dann bei einer Mündungsgeschwindigkeit von  $v_0 = c(\text{m/s})$  in einer Entfernung von  $(c/(9, 8))$  m ein.

3.1.11. A priori könnte man auch eine konsistente Theorie formulieren, die zwei Arten von Massen postuliert, als da heißt zwei  $\mathbb{R}_{>0}$ -Torsoren  $\mathbb{M}_{\text{sch}}^+$  und  $\mathbb{M}_{\text{tr}}^+$ , und in der jedem Teilchen zwei Arten von Masse, seine **schwere Masse**  $m_{\text{sch}} \in \mathbb{M}_{\text{sch}}^+$  sowie seine **träge Masse**  $m_{\text{tr}} \in \mathbb{M}_{\text{tr}}^+$  zugeordnet würden. Wir hätten dann die beiden zugehörigen eindimensionalen reellen Vektorräume  $\mathbb{M}_{\text{sch}}$  und  $\mathbb{M}_{\text{tr}}$  zu bilden. Ein Kraftfeld hätte per definitionem Werte in  $\vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{M}_{\text{tr}}$  und die Bewegungsgleichung in diesem Kraftfeld hätte die Gestalt

$$m_{\text{tr}}\ddot{\gamma} = F \circ \gamma$$

Dahingegen würde ein Gravitationsfeld Werte in  $\vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{M}_{\text{tr}} \otimes \mathbb{M}_{\text{sch}}^*$  annehmen und die jeweils auf unser Teilchen wirkende Kraft durch die Multiplikation des Gravitationsfelds wäre mit seiner schweren Masse  $m_{\text{sch}}$  zu berechnen. Mit der Waage mäße man also die schwere Masse und durch die Beobachtung etwa von Stößen mit einem "Referenzteilchen" und Ausnützen der im folgenden noch zu besprechenden "Impulserhaltung" die träge Masse. Ein durch viele Experimente bestätigtes Prinzip der klassischen Mechanik ist nun jedoch die **Gleichheit von träger und schwerer Masse**, so daß wir stets  $m_{\text{sch}} = m_{\text{tr}}$  annehmen und ohne nähere Spezifikation schlicht von der **Masse** eines Teilchens reden werden.

### 3.2 Planetenbewegung

3.2.1. In der Terminologie von IV.5 folgende ist unsere Bewegungsgleichung ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bis auf eine geeignete Identifikation der Zeitachse  $\mathbb{T}$  mit der reellen Zahlengeraden  $\mathbb{R}$ . Die allgemeine Theorie IV.5.1.3 legt uns die Reduktion auf ein System mit doppelt so vielen Gleichungen erster Ordnung nahe. In unserem konkreten Fall betrachten wir dazu den sogenannten **Phasenraum**  $\mathbb{E} \times (\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)$  aller Paare  $(r, v)$  bestehend aus einem Ort  $r \in \mathbb{E}$  und einer Geschwindigkeit  $v \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ . Jede differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$  liefert uns eine Abbildung in den Phasenraum

$$\psi := (\gamma, \dot{\gamma}) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E} \times (\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)$$

Damit erfüllt  $\gamma$  die Newton'schen Bewegungsgleichungen  $m\ddot{\gamma} = F \circ \gamma$  genau dann, wenn  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{1}{m} F \circ \psi_1 \end{aligned}$$

erfüllt. In geometrischer Sprache kann eine Lösung  $\psi$  dieses letzteren Systems als Integralkurve eines Vektorfelds auf dem Phasenraum interpretiert werden, oder genauer als Integralkurve eines "Geschwindigkeitsfeldes": Dabei vereinbaren wir für jeden affinen Raum  $X$  oder auch jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$ , daß wir unter einem **Geschwindigkeitsfeld auf  $U$**  eine Abbildung

$$A : U \rightarrow \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$$

verstehen wollen. Unter Integralkurven derartiger Felder  $A$  verstehen wir dann Abbildungen  $\psi : I \rightarrow U$  auf halboffenen Zeitintervallen  $I \subset \mathbb{T}$  mit

$$\dot{\psi} = A \circ \psi$$

Unter vernünftigen Annahmen, etwa für jedes stetig differenzierbare Kraftfeld  $F$ , gibt es dann nach dem Satz von Picard-Lindelöf IV.5.1.11 zu jedem Punkt  $(x_0, v_0)$  des Phasenraums und jedem Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  genau eine maximale Integralkurve

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{E} \times (\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)$$

mit  $t_0 \in I$  und  $\psi(t_0) = (x_0, v_0)$  alias genau eine maximale Lösung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}$  der Bewegungsgleichungen mit vorgegebenem Ort  $x_0 = \gamma(t_0)$  und vorgegebener Geschwindigkeit  $v_0 = \dot{\gamma}(t_0)$  zum vorgegebenen Zeitpunkt  $t_0$ .

3.2.2. Unter einem **Potential** eines Kraftfelds  $F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$  versteht man eine differenzierbare Abbildung  $V : \mathbb{E} \rightarrow \langle\langle gm^2/s^2 \rangle\rangle$  mit der Eigenschaft

$$-(d_x V)(v) = \langle F(x), v \rangle \quad \forall x \in \mathbb{E}, v \in \vec{\mathbb{E}}$$

Anders gesagt fordern wir von einem Potential also, daß das Negative seines Differentials  $-dV : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^* \otimes \langle\langle gm^2/s^2 \rangle\rangle$  unter der durch unser kanonisches Skalarprodukt  $\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \langle\langle m^2 \rangle\rangle$  gegebenen Identifikation  $\text{can} : \vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^* \otimes \langle\langle m^2 \rangle\rangle$  dem Kraftfeld  $F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$  entspricht.

**Satz 3.2.3 (Energieerhaltung).** *Für die Bewegung  $\gamma$  eines Massepunktes der Masse  $m$  in einem Kraftfeld mit Potential  $V$  erhalten wir eine Invariante der Bewegung alias eine von der Zeit  $t$  unabhängige Konstante durch den Ausdruck*

$$\frac{m}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + V(\gamma(t))$$

3.2.4. Der erste Summand heißt die **kinetische Energie**, der zweite die **potentielle Energie**, und das Lemma ist ein Spezialfall des allgemeinen physikalischen Prinzips der **Energieerhaltung**.

*Beweis.* Ableiten nach  $t$  liefert mit unserer Formel IV.1.4.5 für das Differential bilinearer Abbildungen

$$m \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + (d_{\gamma(t)} V)(\dot{\gamma}(t)) = \langle m \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle - \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0 \quad \square$$

3.2.5 (**Planetenbewegung**). Stellen wir uns nun einmal vor, wir wären Newton. Kepler hat bereits aus den akribischen Beobachtungen von Tycho Brahe herausdestilliert, daß die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht. Wir gehen von der zumindest nicht unvernünftigen Annahme aus, daß die von der Sonne ausgehende Gravitationskraft mit wachsendem Abstand “schwächer wird in derselben Weise, wie sich ein Gas verdünnen würde, das von der Sonne ausgeschwitzt wird und sich, indem es mit konstanter Geschwindigkeit nach allen Seiten von der Sonne wegströmt, im Weltraum verteilt”. Dann ist klar, daß durch jede in der Sonne zentrierte Kugelschale in einer festen Zeitspanne dieselbe Gasmenge strömen muß. Da aber die Oberfläche einer Kugelschale vom Radius  $r$  ein festes Vielfaches  $r^2$  ist, muß unser Gas in einem Abstand  $r$  von der Sonne eine Dichte (Konstante mal  $1/r^2$ ) haben. Durch derartige Überlegungen motiviert machen wir für das Gravitationsfeld  $G$  der Sonne den Ansatz

$$G(x) = c \cdot \frac{S - x}{\|S - x\|^3}$$

für  $S \in \mathbb{E}$  den Ort der Sonne, den wir uns fest denken, und  $c \in \langle\langle m^3/s^2 \rangle\rangle$  eine Konstante. Ist  $M$  die Masse unseres Planeten, so ist  $MG$  das zu unserer Bewegung gehörige Kraftfeld und dieselbe Rechnung wie in IV.3.1.12 liefert uns für dieses Feld das Potential

$$V(x) = -\frac{Mc}{\|S - x\|}$$

Nun setzen wir die Bewegung unseres Planeten an als

$$\gamma(t) = S + \vec{\gamma}(t)$$

für  $\vec{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$ . Da ein **Zentralfeld** vorliegt, die auf unseren Planeten wirkende Kraft zeigt nämlich stets in Richtung der Sonne, ist auch das mit Einheiten, genauer als Element von  $\vec{\mathbb{E}} \otimes \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$  verstandene Kreuzprodukt

$$L := \vec{\gamma}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t)$$

aus ?? eine Invariante der Bewegung: In der Tat ergibt sich seine zeitliche Ableitung zu

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t) + \vec{\gamma}(t) \times \ddot{\vec{\gamma}}(t) = 0$$

Multiplizieren wir diese Invariante noch mit der Masse des Planeten, so erhalten wir den sogenannten “Drehimpuls” des Planeten um die Sonne. Ist diese Invariante Null, so liegt eine Lösung vor, bei der unser Planet auf geradem Wege in die Sonne stürzt oder sich umgekehrt längs eines Sonnenstrahls von der Sonne entfernt. Ist diese Invariante nicht Null, was wir von nun an annehmen wollen, so muß unser Planet in derjenigen Ebene durch die Sonne bleiben, auf der unser invarianter Vektor senkrecht steht, und kann nie in die Sonne stürzen. Wir wählen in dieser Ebene nun ein Orthogonalsystem  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  bestehend aus zwei Vektoren gleicher Länge  $l = \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\|$  und gehen zu Polarkoordinaten über, betrachten also etwa die Abbildung

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} &\rightarrow \vec{\mathbb{E}} \\ (r, \varphi) &\mapsto r((\cos \varphi)\vec{e}_1 + (\sin \varphi)\vec{e}_2) \end{aligned}$$

Da wir bereits wissen, daß die Bewegung in einer Ebene bleiben muß und nicht durch die Sonne führt, können wir  $\vec{\gamma}(t) = P(r(t), \varphi(t))$  ansetzen, zumindest für  $t$  aus einem kleinen Zeitintervall. Wir erhalten

$$\dot{\vec{\gamma}} = \dot{r}((\cos \varphi)\vec{e}_1 + (\sin \varphi)\vec{e}_2) + r\dot{\varphi}(-(\sin \varphi)\vec{e}_1 + (\cos \varphi)\vec{e}_2)$$

und insbesondere

$$\langle \dot{\vec{\gamma}}, \dot{\vec{\gamma}} \rangle = l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2)$$

Der Energieerhaltungssatz liefert damit, daß die Gesamtenergie

$$\frac{M}{2}l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - \frac{Mc}{rl} = E$$

eine Konstante der Bewegung ist. Dasselbe gilt für die Länge unseres Kreuzprodukts alias den Drehimpuls und damit für

$$r^2\dot{\varphi} = D$$

Insbesondere gilt unter unseren Annahmen stets  $\dot{\varphi} \neq 0$ . Wir wollen nun zeigen, daß diese beiden Gleichungen bereits implizieren, daß unsere Bewegung auf einem Kegelschnitt mit der Sonne in einem Brennpunkt geschehen muß. Die Kunst dabei besteht darin, die vollständige Berechnung der Bewegung zu vermeiden, die auf kompliziertere Ausdrücke führt. Vielmehr interessieren wir uns vorerst nur für die Form der Bahnkurve. Der zeitliche Ablauf, in dem sie durchlaufen wird, folgt dann aus dem Energieerhaltungssatz, aber die Berechnung der so entstehenden Integrale wollen wir vermeiden. Dazu bilden wir aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, die die Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung in Polarkoordinaten ausdrücken, eine einzige Gleichung, in der die zeitlichen Ableitungen unserer neuen Koordinaten nur in der Kombination  $\dot{r}/\dot{\varphi}$  vorkommen: Dieser Quotient ist nämlich von der Parametrisierung der Bahnkurve durch die Zeit unabhängig. Teilen wir etwa das Quadrat der zweiten Gleichung aus der ersten Gleichung weg, so ergibt sich mit

$$\frac{Ml^2}{2r^4} \left( \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \right)^2 + \frac{Ml^2}{2r^2} - \frac{Mc}{rlD^2} = \frac{E}{D^2}$$

eine Gleichung der gewünschten Form. Da nun gilt  $\dot{\varphi} \neq 0$ , können wir auch den Radius als Funktion des Winkels schreiben,  $r = r(\varphi)$ . Da auch der Radius bei Lösungen mit von Null verschiedenem Drehimpuls nie Null wird, können wir weiter auch den inversen Radius als Funktion des Winkels schreiben,  $u(\varphi) := 1/r(\varphi)$ . Für die Ableitung  $u'$  von  $u$  nach dem Winkel erhalten wir dann

$$u' = -r'/r^2 = -\dot{r}/\dot{\varphi}r^2$$

und unsere Differentialgleichung erhält die Gestalt

$$(u')^2 + u^2 + Au = B$$

mit  $A = 2c/D^2l^3$  und  $B = 2E/Ml^2D^2$ . Ableiten nach  $\varphi$  liefert

$$2u'u'' + 2uu' + Au' = 0$$

Alle Lösungen müssen auf dem Teil ihres Definitionsbereichs, auf dem die Ableitung  $u'$  nicht verschwindet, demnach auch die Differentialgleichung

$$2u'' + 2u = -A$$

lösen. Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Eine Basis des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung bilden  $u_1(\vartheta) = \sin \vartheta$  und  $u_2(\vartheta) = \cos \vartheta$ . Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist etwa  $u_s(\vartheta) = -A/2$ . Die allgemeine Lösung ist also  $u(\vartheta) = b \cos(\vartheta - \vartheta_0) - A/2$  für Konstanten  $b, \vartheta_0$ . Indem wir das in unsere ursprüngliche Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir  $b^2 - A^2/4 = B$  alias  $b = \pm \sqrt{B + A^2/4}$ . Damit ist unser Problem gelöst. Wir prüfen gleich noch, daß die Lösungen Kegelschnitte sein müssen.

3.2.6. Jetzt gilt es, eine Ellipse mit einem Brennpunkt im Ursprung  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten zu schreiben. Nach der Diskussion auf Seite ?? lautet die entsprechende Gleichung

$$r + \sqrt{(r \cos \varphi - a)^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = c$$

für  $(a, 0)$  den zweiten Brennpunkt und  $((a+c)/2, 0)$  den Schnittpunkt unserer Ellipse mit der positiven  $x$ -Achse. Wir subtrahieren  $r$  auf beiden Seiten, quadrieren zu

$$r^2 - 2ar \cos \varphi + a^2 = r^2 - 2cr + c^2$$

und elementare Umformungen liefern

$$r = \frac{c^2 - a^2}{2c - 2a \cos \varphi}$$

Durch Ändern der Parameter zu  $\beta = a/c$  und  $\alpha = (c^2 - a^2)/2c$  landen wir bei der Gleichung

$$r = \frac{\alpha}{1 - \beta \cos \varphi}$$

Um unsere obige Gleichung zu prüfen, dürfen wir die Durchlaufgeschwindigkeit beliebig wählen, so etwa auch  $\varphi(t) = t$ . Damit erhalten wir  $\dot{\varphi} = 1$  und

$$\dot{r} = \frac{-\alpha\beta \sin t}{(1 - \beta \cos t)^2} = \frac{-\beta \sin t}{\alpha} r^2$$

und Einsetzen in unsere obige Gleichung liefert

$$\frac{Mt^2}{2\alpha^2} \beta^2 \sin^2 t + \frac{Mt^2}{2\alpha^2} (1 - 2\beta \cos t + \beta^2 \cos^2 t) - \frac{Mc}{\alpha D^2} (1 - \beta \cos t) = \frac{E}{D^2}$$

Hier ist aber in der Tat die linke Seite unabhängig von  $t$  falls gilt

$$\frac{Ml^2}{\alpha^2} = \frac{Mc}{\alpha l D^2}$$

alias  $\alpha = l^3 D^2 / c$ . Wir sehen so, daß in der Tat unsere Ellipsen mögliche Lösungskurven sein müssen.

*Ergänzung 3.2.7.* Daß die Lösungskurven Kegelschnitte sein müssen, kann man unschwer einsehen, indem man nachrechnet, daß der sogenannte **Runge-Lenz-Vektor**

$$\frac{1}{c} \dot{\vec{\gamma}} \times L + \frac{\vec{\gamma}}{\|\vec{\gamma}\|}$$

eine Invariante der Bewegung sein muß. Dieser Zugang gefällt mir aber weniger, da man den Runge-Lenz-Vektor dabei “vom Himmel fallen lassen muß”.

### 3.3 Systeme mit Zwangsbedingungen

*Beispiel 3.3.1.* Wir untersuchen nun zunächst das Verhalten *eines* Massepunktes, dessen Bewegung auf eine Fläche im Raum eingeschränkt ist. Als physikalisches Modell mag man sich ein nasses Seifenstück denken, das in der Schwerelosigkeit und ohne Reibung im leeren Tank einer Raumfähre herumrutscht, in den es ein übermütiger Astronaut mit Schwung hat hineingleiten lassen. Wir modellieren diesen Tank als eine zweidimensionale glatte Untermannigfaltigkeit ohne Rand  $M \subset \mathbb{E}$  im Sinne von IV.7.7.12 des Anschauungsraums. Zu jedem Zeitpunkt übt unsere Fläche eine Kraft auf unser Teilchen aus, deren Richtung—das jedenfalls scheint mir eine physikalisch sinnvolle Annahme—senkrecht zur Fläche steht und deren Größe gerade so bemessen ist, daß sie das Teilchen auf der Fläche hält. Die Bewegung während eines halboffenen Zeitintervalls  $I \subset \mathbb{T}$  wird unter dieser Annahme beschrieben durch eine zweimal differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  mit der Eigenschaft

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$$

für alle Zeiten  $t \in I$ . Formal betrachtet liegt  $\ddot{\gamma}(t)$  zwar in  $\vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$  und unsere Tangentialräume aus IV.7.3.1 sind für alle Punkte  $p \in M$  vielmehr Untervektorräume  $T_p M \subset \vec{\mathbb{E}}$ , aber die Bedingung des Senkrechtstehens ist dennoch sinnvoll. In mathematischer Terminologie ausgedrückt bewegt sich unser Teilchen im Lichte von 3.10.2 demnach mit konstanter absoluter Geschwindigkeit längs einer “Geodäte von  $M$ ”. Bewegt sich unser Teilchen zusätzlich in einem Kraftfeld  $F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$  und hat die Masse  $m$ , so lauten die Bewegungsgleichungen analog

$$m\ddot{\gamma}(t) - F(\gamma(t)) \perp T_{\gamma(t)}M$$

für alle Zeiten  $t \in I$ . Bevor wir Lösungswege diskutieren, besprechen wir zunächst ein etwas komplizierteres System.

*Beispiel 3.3.2.* Denken wir uns nun zwei durch einen starren masselosen Stab positiver Länge  $l \in \mathbb{L}_{>0}$  verbundene Punkte der Massen  $m_1, m_2 \in \mathbb{M}_{>0}$ , also eine Art Hantel, die während eines halboffenen Zeitintervalls  $I \subset \mathbb{T}$  in der Schwerelosigkeit durch den Weltraum torkelt. Eine Bewegung unserer Hantel wird dann beschrieben durch zwei Abbildungen  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{E}$  mit  $\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = l$  für alle Zeiten  $t \in I$ , also durch eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  unseres halboffenen Zeitintervalls  $\mathbb{T}$  in die Untermannigfaltigkeit

$$M = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{E}^2 \mid \|r_1 - r_2\| = l\}$$

Hier und im folgenden gilt es zu beachten, daß die Einträge in Tupeln keineswegs immer reelle Zahlen zu sein brauchen: So meinen im vorhergehenden etwa  $r_1, r_2$  Punkte des Anschauungsraums  $\mathbb{E}$  und können ihrerseits durch die Wahl eines Koordinatensystems mit Elementen des  $\mathbb{R}^3$  identifiziert werden, so daß man unser Paar  $(r_1, r_2)$  nach der Wahl geeigneter Koordinaten auch mit einem Sextupel von reellen Zahlen identifizieren könnte. Nach dem Newton'schen Prinzip "actio gleich reactio" gilt  $Z_1 = -Z_2$  für die vom Stab auf die jeweiligen Massepunkte ausgeübten "Zwangskräfte". Des weiteren scheint mir die Annahme natürlich, daß diese Kräfte stets in Richtung unseres Stabes wirken, daß also gilt

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= a(t)(\gamma_1(t) - \gamma_2(t)) \\ Z_2(t) &= a(t)(\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) \end{aligned}$$

für unbekanntes  $a : I \rightarrow \langle\langle \text{g/s}^2 \rangle\rangle$ . Damit erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\gamma}_1(t) &= a(t)(\gamma_1(t) - \gamma_2(t)) \\ m_2 \ddot{\gamma}_2(t) &= a(t)(\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) \end{aligned}$$

für  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \rightarrow M$ . Um diese Gleichungen als Geodätengleichung zu interpretieren, berechnen wir zunächst das orthogonale Komplement des Tangentialraums von  $M$ . Per definitionem ist  $M$  eine Niveaufläche der Funktion  $f : (r_1, r_2) \mapsto \|r_1 - r_2\|^2$ , und das Differential dieser Abbildung bei  $r = (r_1, r_2)$  ergibt sich mit [IV.1.4.5](#) zu

$$d_r f : (h_1, h_2) \mapsto 2\langle r_1 - r_2, h_1 \rangle - 2\langle r_1 - r_2, h_2 \rangle$$

Der Kern dieser Abbildung ist der Tangentialraum  $T_r M$ , und wir erkennen, daß für alle  $r = (r_1, r_2) \in M$  der Vektor  $(r_1 - r_2, r_2 - r_1)$  auf  $T_r M$  senkrecht

steht, da nämlich für das offensichtliche  $\langle\langle m^2 \rangle\rangle$ -wertige Skalarprodukt auf dem Richtungsraum  $\vec{\mathbb{E}}^2 = \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}}$  des Raums  $\mathbb{E}^2$  das Skalarprodukt dieses Vektors mit allen weiteren Vektoren dasselbe ist wie die Hälfte des Wertes von  $d_r N$  auf den fraglichen weiteren Vektoren. Definieren wir nun zusätzlich auf  $\vec{\mathbb{E}}^2$  das **massebehaftete Skalarprodukt**

$$\langle , \rangle_m : \vec{\mathbb{E}}^2 \times \vec{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \langle\langle gm^2 \rangle\rangle$$

durch  $\langle (r_1, r_2), (s_1, s_2) \rangle_m = m_1 \langle r_1, s_1 \rangle + m_2 \langle r_2, s_2 \rangle$ , so wird das bezüglich dieses massebehafteten Skalarprodukts orthogonale Komplement von  $T_r M$  aufgespannt von  $((r_1 - r_2)/m_1, (r_2 - r_1)/m_2)$ . Dieser Vektor liegt zwar eigentlich von seinen Einheiten her in  $\vec{\mathbb{E}}^2 \otimes \mathbb{M}^*$ , aber da es uns eh nur auf seine Richtung ankommt, dürfen wir das ignorieren. Wir sehen so, daß unsere Bewegungsgleichungen zusammengefaßt werden können zur Bedingung

$$\ddot{\gamma}(t) \perp_m T_{\gamma(t)} M$$

wobei  $\perp_m$  das Senkrechtstehen in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt meint. In mathematischer Terminologie sind die möglichen Bewegungen also gerade die verallgemeinerten Geodäten auf  $M$  in Bezug auf unser massebehaftetes Skalarprodukt. Wirken zusätzlich noch externe Kräfte, sind etwa unsere Massepunkte elektrisch geladen und bewegt sich unsere Hantel in einem Raum mit einem elektrischen Feld und einem Gravitationsfeld, beschreiben etwa  $F_1, F_2 : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$  die auf die jeweiligen Massepunkte wirkenden externen Kräfte, so bilden wir die “massebereinigte externe Gesamtkraft”

$$Q : \mathbb{E}^2 \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^2 \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$$

mit  $Q(r_1, r_2) = (F_1(r_1)/m_1, F_2(r_2)/m_2)$ , und unsere Bewegungsgleichungen an  $\gamma : I \rightarrow M$  erhalten allgemeiner die Gestalt

$$\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_m T_{\gamma(t)} M$$

3.3.3. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall eines Systems von  $N$  Massepunkten der Massen  $m_1, \dots, m_N$ , deren Bewegung in der Weise eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte  $(r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{E}^N$  sich stets auf einer fest vorgegebenen Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{E}^N$  befindet. Man mag hier etwa an unsere Hantel aus Beispiel 3.3.2, an unser Seifenstück im Tank aus Beispiel 3.3.1, an ein Doppelpendel, und noch an vieles andere mehr denken. Auch dieser Allgemeinheit haben unsere Bewegungsgleichungen an  $\gamma : I \rightarrow M$  die Form

$$\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_m T_{\gamma(t)} M$$

für alle Zeiten  $t \in I$ , wobei  $\perp_m$  das Senkrechtstehen bezüglich des massebehafteten Skalarprodukts und  $Q = (F_1/m_1, \dots, F_N/m_N)$  die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte meint. Um das physikalisch zu rechtfertigen, mag man vom sogenannten **d'Alembert'schen Prinzip** ausgehen, nach dem "die Zwangskräfte unter infinitesimalen Verrückungen keine Arbeit verrichten". Wird also an einer Stelle  $p \in M$  auf unser System die Zwangskraft  $Z = (Z_1, \dots, Z_N) \in \vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle \text{g/s}^2 \rangle\rangle$  ausgeübt, und ist  $\varphi : (-a, a) \rightarrow M$  ein glatter Weg in  $M$  mit  $\varphi(0) = p$ , dann soll, so mag man dies Prinzip formelhaft verstehen, stets gelten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \langle Z, \varphi'(\zeta) \rangle d\zeta = 0$$

alias  $\langle Z, \varphi'(0) \rangle = 0$ . Das bedeutet aber nun eben gerade  $Z \perp T_p M$  für das offensichtliche Skalarprodukt auf  $\vec{\mathbb{E}}^N$ , und für die massebereinigte Zwangskraft  $\tilde{Z} = (Z_1/m_1, \dots, Z_N/m_N)$  haben wir dann natürlich auch  $\tilde{Z} \perp_m T_p M$  in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt. Damit liefern die Newton'schen Gleichungen wie behauptet die Relation

$$\ddot{\gamma}(t) = Q(\gamma(t)) + \tilde{Z}(\gamma(t))$$

alias  $\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_m T_{\gamma(t)} M$ .

*Beispiele 3.3.4.* Das Vorhergehende gilt natürlich nur für Systeme ohne Reibung. Im Fall unserer Hantel beinhaltet das d'Alembert'sche Prinzip, daß Zwangskräfte ausschließlich in Richtung des Stabes ausgeübt werden und dem Prinzip "actio gleich reactio" gehorchen. Im Fall dreier schwerer Perlen, die auf einem masselos gedachten Seilring aufgefädelt sind, liefert das d'Alembert'sche Prinzip dahingegen bei genauerer Betrachtung, daß auf jede Perle Zwangskräfte nur in den Richtungen ausgeübt werden, in denen das Seil sie verläßt, und daß alle diese Kräfte gleich groß sind, daß also anschaulich gesprochen die Seilspannung konstant ist. Auch das wirkt physikalisch vernünftig.

3.3.5. Sei nun  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\varphi : W \hookrightarrow M$  eine Karte unserer Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{E}^N$  von Zwangsbedingungen, die wir  $n$ -dimensional annehmen. Wir verwenden griechische Buchstaben  $\nu, \mu$  für Indizes mit  $1 \leq \nu, \mu \leq N$  mit  $N$  der Zahl unserer Massepunkte und lateinische Buchstaben  $i, j, k, l$  für Indizes mit  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ . Ein mit einem griechischen Index versehenes Symbol wird so im folgenden stets ein Punkt des Anschauungsraums  $\mathbb{E}$  oder seines Richtungsraums  $\vec{\mathbb{E}}$  sein, eventuell noch tensoriert mit eindimensionalen Räumen von Einheiten. Ein mit einem lateinischen Index versehenes Symbol dahingegen wird stets eine Zahl oder ein Element eines eindimensionalen Raums von

Einheiten sein. Wir schreiben  $\varphi(W) = U \subseteq M$  für das Bild unserer Karte

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (r_1(x_1, \dots, x_n), \dots, r_N(x_1, \dots, x_n))$$

und verwenden oft die Abkürzung  $x_i \circ \varphi^{-1} = x_i$  für die durch unsere Karte gegebenen Koordinaten  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Oft kürzen wir weiter auch  $x_i \circ \gamma$  zu  $x_i$  ab, so daß wir etwa schreiben können

$$\gamma_\nu(t) = r_\nu(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Indem wir das  $t$  aus der Notation weglassen, ergeben sich für die Geschwindigkeit und Beschleunigung unserer  $N$  Teilchen die Formeln

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_\nu &= \frac{\partial r_\nu}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial r_\nu}{\partial x_n} \dot{x}_n \\ \ddot{\gamma}_\nu &= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_j \dot{x}_k + \sum_j \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j} \ddot{x}_j \end{aligned}$$

Die griechischen Indizes zeigen hierbei an, daß diese Gleichungen in  $\mathbb{E}$  bzw.  $\vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  bzw.  $\vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s^2 \rangle\rangle$  oder genauer als Gleichungen von Abbildungen von einem halboffenen Intervall der Zeitachse  $I \subset \mathbb{T}$  in besagte Räume zu verstehen sind. Da weiter für  $x \in W$  der Tangentialraum  $T_{\varphi(x)}M$  an  $M$  bei  $\varphi(x)$  nach IV.7.3.1 von den ausgewertet bei  $x$  zu verstehenden Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = \left( \frac{\partial r_1}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial r_N}{\partial x_l} \right)$$

für  $1 \leq l \leq n$  aufgespannt wird, besagt unsere Bedingung des Senkrechtstehens auf dem Tangentialraum  $\dot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_m T_{\gamma(t)}M$  für das massebehaltete Skalarprodukt genau, daß für alle  $l$  gilt

$$\sum_{\nu,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_j \dot{x}_k + \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j - \sum_\nu \left\langle F_\nu \circ r_\nu, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \right\rangle = 0$$

Wir nennen die  $l$ -te dieser Gleichungen im folgenden die  **$l$ -te Bewegungsgleichung**. Um sie übersichtlicher zu schreiben, betrachtet man den sogenannten **Phasenraum** oder genauer **Geschwindigkeitsphasenraum**

$$T\mathbb{E}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle = \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$$

wobei  $T\mathbb{E}^N$  das Tangentialbündel aus IV.7.3.1 meint und das erste Tensorprodukt faserweise zu verstehen ist. Weiter betrachtet man die Abbildung

$$K : T\mathbb{E}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle, \quad ((r_\nu, v_\nu))_\nu \mapsto \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\langle v_\nu, v_\nu \rangle}{2}$$

für  $r_\nu \in \mathbb{E}$  und  $v_\nu \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  und nennt sie die **kinetische Energie**. Nach Übung VI.1.6.13, die Ihnen auch hier nicht schwer fallen sollte, ist nun das Tangentialbündel von  $M$  eine Untermannigfaltigkeit  $TM \subset T\mathbb{E}^N$  und unsere Karte  $\varphi : W \xrightarrow{\sim} U$  liefert eine Karte  $d\varphi : W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TU \subseteq TM$  mittels der Abbildungsvorschrift

$$d\varphi : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (d_{(x_1, \dots, x_n)}\varphi)(y_1, \dots, y_n)$$

Wir können demnach  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  als ein lokales Koordinatensystem auf  $TM$  auffassen. Es heißt das **natürliche lokale Koordinatensystem des Tangentialbündels** zu dem vorgegebenen lokalen Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n)$  unserer Mannigfaltigkeit. In derselben Weise ist weiter auch das mit Einheiten  $\langle\langle 1/s \rangle\rangle$  versehene Tangentialbündel eine Untermannigfaltigkeit

$$TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \subset T\mathbb{E}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$$

Sie heißt der **Phasenraum** oder genauer der **Geschwindigkeitsphasenraum unseres Systems mit Zwangsbedingungen**, und wir erweitern unser Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n)$  in derselben Weise durch die Funktionen  $y_i := y_i \otimes \text{id} : TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  zum “natürlichen” Koordinatensystem mit Einheiten  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  auf dem Phasenraum. Der  $v_\nu$ -Anteil eines Punktes des Phasenraums wird in diesen Koordinaten gegeben durch den Ausdruck

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j} y_j$$

wo beide Ausdrücke als Geschwindigkeiten alias Elemente von  $\vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  zu verstehen sind. Die Einschränkung unserer kinetischen Energie  $K$  auf den Phasenraum des Systems mit Zwangsbedingungen hat in diesen Koordinaten folglich die Gestalt

$$K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\nu, j, k} \frac{m_\nu}{2} \left\langle \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_k} \right\rangle y_j y_k$$

In der Notation IV.1.5.11 folgt sofort

$$\frac{\partial K}{\partial y_l} = \sum_{\nu, j} m_\nu \left\langle \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \right\rangle y_j$$

wo wir darauf bestehen, daß diese partiellen Ableitungen der kinetischen Energie  $K : TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$  in Bezug auf das mit Einheiten behaftete kanonische lokale Koordinatensystem des Geschwindigkeitsphasenraums zu verstehen ist, da ja überhaupt partielle Ableitungen nur in einem

solchen Rahmen überhaupt sinnvoll erklärt werden können. Betrachten wir nun eine glatte Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  für  $I \subset \mathbb{T}$  ein halboffenes Zeitintervall. Zusammen mit ihrem Differential  $\dot{\gamma} = d\gamma$  liefert sie eine Abbildung  $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \rightarrow TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ , wo das Tensorprodukt wieder faserweise zu verstehen ist. Interpretieren wir die  $y_i$  weiter als Koordinaten des Geschwindigkeitsphasenraums oder genauer als Abbildungen  $y_i : TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) &= \sum_{\nu, i, j, k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_k \dot{x}_j \\ &\quad + \sum_{\nu, i, j, k} m_\nu \left\langle \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial x_l \partial x_k} \right\rangle \dot{x}_k \dot{x}_j \\ &\quad + \sum_{\nu, j} m_\nu \left\langle \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j \end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme unserer  $l$ -ten Bewegungsgleichung können demnach dargestellt werden in der Form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma})$$

Den letzten Term in unserer  $l$ -ten Bewegungsgleichung bezeichnen wir mit  $Q_l := \sum_\nu \langle F_\nu \circ r_\nu, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \rangle$ , nennen ihn eine **generalisierte Kraft**, und erhalten damit die  $l$  Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) - Q_l \circ \gamma = 0$$

3.3.6. Bisher haben wir unsere Kräfte als mit Einheiten  $\langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$  versehene Vektorfelder aufgefaßt. Benutzen wir nun unsere durch das Skalarprodukt in Einheiten  $\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  gegebene Identifikation  $\vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^* \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2}$ , um sie stattdessen als mit Einheiten in  $\langle\langle gm^2/s^2 \rangle\rangle$  versehene Kovektorfelder aufzufassen, und fassen  $F$  entsprechend als ein mit denselben Einheiten versehenes Kovektorfeld auf  $\mathbb{E}^N$  auf, also als Abbildung  $F : \mathbb{E}^N \rightarrow (\vec{\mathbb{E}}^*)^N \otimes \langle\langle gm^2/s^2 \rangle\rangle$ , so hat das unter der Karte zurückgezogene Kovektorfeld die Gestalt

$$\varphi^* F = \sum_{l=1}^n Q_l dx_l$$

und unsere generalisierten Kräfte zeigen ihre eigentliche Bedeutung. Ist dann weiter  $V : \mathbb{E}^N \rightarrow \langle\langle gm^2/s^2 \rangle\rangle$  ein Potential für unsere Kraft  $F$ , in Formeln

$F = -dV$ , so folgt

$$\varphi^*F = -d(V \circ \varphi) = -\sum_{l=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_l} dx_l$$

und wir finden mit den üblichen Abkürzungen für die generalisierten Kräfte die Darstellung  $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial x_l}$ , die wir je nachdem wie es paßt als eine Identität von Funktionen auf  $U$  oder auf  $W$  denken können. Fassen wir nun  $V$  durch Vorschalten der Bündelprojektion als Funktion auf dem Geschwindigkeitsphasenraum  $TU \otimes \vec{T}^*$  des Bildes unserer Karte auf, so verschwinden natürlich die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial V}{\partial y_i}$  bezüglich unseres Systems  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  von natürlichen Koordinaten des Geschwindigkeitsphasenraums. Bilden wir also die **Lagrangefunktion**

$$L = V - K$$

als Differenz zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie unseres Systems, ausgedrückt in den zum Koordinatensystem  $x_1, \dots, x_n$  von  $U \subseteq M$  gehörigen natürlichen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  des Geschwindigkeitsphasenraums  $TU \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ , so erfüllt für eine mögliche Bewegung  $\gamma : I \rightarrow M$  die zugehörige Abbildung in den Phasenraum  $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \rightarrow TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  die sogenannten **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_l} \right) \circ (\gamma, \dot{\gamma}) = 0 \quad \text{für } 1 \leq l \leq n.$$

3.3.7. Von ihrer Struktur her ist diese Bedingung an unsere Bewegung  $\gamma$  ein System impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Um sie zu einem System expliziter Differentialgleichungen erster Ordnung umzuschreiben, führen wir die sogenannten **kanonischen Impulse** ein durch die Vorschrift

$$p_i := \frac{\partial K}{\partial y_i} = -\frac{\partial L}{\partial y_i}$$

Die kanonischen Impulse sind demnach Funktionen auf dem Phasenraum  $TM \otimes \vec{T}^*$  oder genauer seiner offenen Teilmenge  $TU \otimes \vec{T}^*$ , und zwar Funktionen mit Werten in  $\langle\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle\rangle$ , die nur von unserem System von Ortskoordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und den Massen unserer Massepunkte abhängen. Zusammen mit den Ortskoordinaten erhalten wir damit ein weiteres lokales Koordinatensystem mit Einheiten  $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$  auf dem Phasenraum  $TM \otimes \vec{T}^*$ . Um das zu sehen und insbesondere auch, um die geometrische Bedeutung der kanonischen Impulse besser zu verstehen, schieben wir einige allgemeine mathematische Betrachtungen ein.

3.3.8. Gegeben ganz allgemein eine eingebettete Mannigfaltigkeit  $M$  erklären wir das sogenannte **Kotangentialbündel von  $M$**  zunächst rein mengentheoretisch als die disjunkte Vereinigung der Dualräume der Tangentialräume von  $M$ , in Formeln

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times (T_x M)^*$$

Es ist üblich, den Dualraum des Tangentialraums an einer Stelle  $x \in M$  mit  $T_x^*M := (T_x M)^*$  abzukürzen und als **Kotangentialraum an  $M$  bei  $x$**  anzusprechen. In VI.4.2.1 werden wir abstrakte Mannigfaltigkeiten einführen und in VI.5.2.1 unser Kotangentialbündel  $T^*M$  mit der Struktur einer “abstrakten Mannigfaltigkeit” versehen, aber so weit will ich hier noch nicht gehen. Für jede glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist nun ihr Differential aus VI.1.6.4 an jeder Stelle  $x \in M$  eine lineare Abbildung  $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)}\mathbb{R}$ , die wir durch Nachschalten der natürlichen Identifikation  $T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$  auch als Element des Dualraums  $d_x f \in T_x^*M$  auffassen können. So liefert also jedes differenzierbare  $f$  eine Abbildung  $df : M \rightarrow T^*M$ ,  $x \mapsto d_x f$ . Insbesondere liefern die Differentiale der Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  wohlbestimmte Schnitte  $dx_1, \dots, dx_n$  des Kotangentialbündels über  $U$ . Man überzeugt sich leicht, daß diese  $d_x x_i$  an jeder Stelle  $x \in U$  eine Basis des zugehörigen Kotangentialraums  $T_x^*M$  bilden. Erklären wir also Funktionen

$$p_i : T^*U \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Kotangentialbündel als die Koordinaten zu dieser Basis, in Formeln  $p_i : \sum_{i=1}^n \alpha_i (d_x x_i) \mapsto \alpha_i$ , und erklären Funktionen  $x_i : T^*U \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift, daß sie auf  $T_x^*U$  den Wert  $x_i(x)$  annehmen sollen, so liefert das Funktionensystem  $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$  eine Bijektion

$$T^*U \xrightarrow{\sim} W \times \mathbb{R}^n$$

von der wir in ?? zeigen werden, daß sie ein Isomorphismus von abstrakten Mannigfaltigkeiten ist. Man nennt  $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$  auch das zu den lokalen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  von  $M$  gehörige **kanonische Koordinatensystem des Kotangentialbündels**.

3.3.9. In unserem speziellen Fall eines Systems von Massepunkten mit Zwangsbedingungen können wir die Diskussion abstrakter Mannigfaltigkeiten noch vermeiden, indem wir bemerken, daß das massebehaftete Skalarprodukt Vektorraumisomorphismen

$$\kappa_m : T_x M \otimes \vec{T}^* \xrightarrow{\sim} T_x^* M \otimes \langle\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle\rangle$$

induziert. Damit induziert es auch die Bijektion der oberen Horizontale des folgenden Diagramms, wo rechts das Tensorprodukt wieder “faserweise” zu verstehen ist.

$$\begin{array}{ccc} TM \otimes \vec{T}^* & \xrightarrow{\sim} & T^*M \otimes \langle\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle\rangle \\ p_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ \langle\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle\rangle & = & \langle\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle\rangle \end{array}$$

Auf der rechten Seite stehen unsere “geometrisch” erklärten Funktionen  $p_i : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  aus 3.3.8, die ja auf den Kotangentialräumen  $T_x^*M$  linear sind und folglich Abbildungen  $T^*M \otimes \langle\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle\rangle$  induzieren, die ich auch mit Auf der linken Seite dahingegen stehen die algebraisch erklärten kanonischen Impulse  $p_i = \frac{\partial K}{\partial y_i}$  aus 3.3.7. Nun zeigen wir die Kommutativität des Diagramms, und darin besteht dann auch die versprochene geometrische Interpretation unserer kanonischen Impulse. In der Tat haben wir ja

$$K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\nu, i, j} \frac{m_\nu}{2} \left\langle \frac{\partial r_\nu}{\partial x_i}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j} \right\rangle y_i y_j$$

und folglich

$$\frac{\partial K}{\partial y_l} = \sum_{\nu, j} m_\nu \left\langle \frac{\partial r_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial r_\nu}{\partial x_l} \right\rangle y_j$$

Diese Funktion auf dem Geschwindigkeitsphasenraum hinwiederum ist linear auf jeder Faser und kann auch beschrieben werden durch die Vorschrift “nimm an jeder Stelle  $x \in M$  das massebehaftete Skalarprodukt mit  $(x, \partial_l) \in T_x M$ ”. Da nun an jeder Stelle  $x \in M$  die Basis  $\partial_1, \dots, \partial_l$  des Tangentialraums  $T_x M$  dual ist zur Basis  $d_x x_1, \dots, d_x x_n$  des Kotangentialraums  $T_x^*M$ , stimmt diese Funktion in der Tat mit der zurückgeholten kanonischen Koordinate des Kotangentialraums überein.

3.3.10. Die kinetische Energie auf dem Phasenraum läßt sich mithilfe unserer neuen Funktionen  $p_i$  auch darstellen als

$$K = \frac{1}{2} \sum_i p_i y_i$$

und wir finden für ihre partielle Ableitung nach  $x_l$  im System der Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  die Darstellung

$$\frac{\partial K}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_l} y_i$$

Nun kommen wir auf unsere Euler-Lagrange-Gleichung zurück. Betrachten wir für die Bewegung  $\gamma : I \rightarrow M$  unseres Systems den zugehörigen Weg

$\psi = (\gamma, \dot{\gamma}) : I \rightarrow TM \otimes \overline{\mathbb{T}}^*$  im Phasenraum und kürzen wieder  $p_i \circ \psi = p_i$  ab, so liest sich die  $l$ -te Euler-Lagrange-Gleichung als

$$\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial x_l}$$

Hier ist die partielle Ableitung rechts noch im natürlichen Koordinatensystem des Tangentialbündels  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  zu verstehen. Jetzt gehen wir zum kanonischen Koordinatensystem  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  des Kotangentialbündels über, das wir vermittels der vom massebehafteten Skalarprodukt induzierten Bijektion auch als ein Koordinatensystem des Tangentialbündels auffassen können. Obwohl die ersten  $n$  Koordinaten dieser beiden Koordinatensysteme übereinstimmen, in Formeln  $x_i = q_i$ , sind die partiellen Ableitungen auch nach diesen ersten Koordinaten doch im allgemeinen verschieden, da sie ja auch vom Rest der Koordinaten abhängen. Das ist eben der Grund, aus dem wir von nun an für ein- und dieselbe Funktion die zwei verschiedenen Notationen  $x_i = q_i$  verwenden: Bei  $\partial/\partial q_i$  meinen wir von nun an partielles Ableiten im Koordinatensystem  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , bei  $\partial/\partial x_i$  dahingegen partielles Ableiten im Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ . In diesen Notationen finden wir dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_l} &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_l} \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial L}{\partial x_l} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_l} p_i \\ \frac{\partial K}{\partial q_l} &= \frac{1}{2} \sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial q_l} \end{aligned}$$

Für  $H = 2K - L = K + V$  die totale Energie, auch genannt die **Hamilton-Funktion**, ergibt sich damit  $\frac{\partial H}{\partial q_l} = -\frac{\partial L}{\partial x_l}$ , so daß wir unsere  $l$ -te Bewegungsgleichung auch in der Form

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

schreiben können. Andererseits gilt

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = \frac{\partial V}{\partial p_l} + \frac{\partial K}{\partial p_l} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial p_l} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} y_l + \frac{1}{2} \sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial p_l}$$

unter unserer Annahme, daß das Potential  $V$  nicht von den Geschwindigkeiten  $y_i$  abhängt. Da  $x_i = q_i$  nicht von den Impulsen abhängt, verschwindet rechts der erste Summand. Der letzte Summand schließlich darf faserweise berechnet werden, und auf jeder Faser bestehen lineare Beziehungen  $y_i = \sum_j \alpha_{ij} p_j$  mit konstanten  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ . Die explizite Beschreibung dieser linearen Beziehungen in 3.3.5 zeigt darüber hinaus  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . So erkennen

wir schließlich  $\frac{\partial H}{\partial p_l} = y_l$ , und da wir ja nur Wege im Phasenraum der Gestalt  $\psi = (\gamma, \dot{\gamma})$  betrachten, folgt als weitere Bewegungsgleichung

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}$$

Zusammenfassend erfüllt unsere Bewegung, aufgefaßt als Abbildung in den Phasenraum und ausgedrückt in beliebigen Ortskoordinaten  $q_i = x_i$  und den zugehörigen kanonischen Impulskordinaten  $p_i$ , also auch die **Hamilton'schen Gleichungen**

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \text{und} \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \quad \text{für } 1 \leq l \leq n.$$

### 3.4 Versuch, Überblick zu schaffen

Sei nun  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\varphi : W \hookrightarrow M$  eine Karte unserer Mannigfaltigkeit  $M$  von Zwangsbedingungen, die wir  $n$ -dimensional annehmen. Wir verwenden griechische Buchstaben  $\nu, \mu$  für Indizes mit  $1 \leq \mu, \nu \leq N$  und lateinische Buchstaben  $i, j, k, l$  für Indizes mit  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ . Wir schreiben  $\varphi(W) = U \subseteq M$  für das Bild unserer Karte

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (r_1(x_1, \dots, x_n), \dots, r_N(x_1, \dots, x_n))$$

und verwenden oft die Abkürzung  $x_i \circ \varphi^{-1} = x_i$  für die durch unsere Karte gegebenen Koordinaten  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Oft kürzen wir weiter auch  $x_i \circ \gamma$  zu  $x_i$  ab, so daß wir etwa schreiben können

$$\gamma_\nu(t) = r_\nu(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

3.4.1. Jetzt betrachten wir den sogenannten **Phasenraum**

$$\text{TE}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle = \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$$

der Gesamtheit unserer  $N$  Massepunkte. Ein Punkt dieses Phasenraums ist also in Worten ein Paar bestehend

Weiter betrachten wir die Abbildung

$$K : \text{TE}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle, \quad ((r_\nu, v_\nu))_\nu \mapsto \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\langle v_\nu, v_\nu \rangle}{2}$$

für  $r_\nu \in \vec{\mathbb{E}}$  und  $v_\nu \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  und nennen sie die **kinetische Energie**. Nach [VI.1.6.13](#) ist nun das Tangentialbündel von  $M$  eine Untermannigfaltigkeit

$TM \subset T\mathbb{E}^N$  und unsere Karte  $\varphi : W \xrightarrow{\sim} U$  liefert eine Karte  $d\varphi : W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TU \Subset TM$  mittels der Abbildungsvorschrift

$$d\varphi : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (d_{(x_1, \dots, x_n)}\varphi)(y_1, \dots, y_n)$$

Wir können demnach  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  als ein lokales Koordinatensystem auf dem Tangentialbündel  $TM$  auffassen. Es heißt das **kanonische lokale Koordinatensystem des Tangentialbündels** zu dem vorgegebenen lokalen Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n)$  unserer Mannigfaltigkeit. In derselben Weise ist nun auch das mit Einheiten  $\langle\langle 1/s \rangle\rangle$  versehene Tangentialbündel eine Untermannigfaltigkeit

$$TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \subset T\mathbb{E}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$$

Sie heißt der **Phasenraum** oder genauer **Geschwindigkeitsphasenraum unseres Systems mit Zwangsbedingungen**, und wir erweitern unser Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n)$  in derselben Weise durch die Funktionen  $y_i := y_i \otimes \text{id} : TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  zu einem kanonischen Koordinatensystem mit Einheiten  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  auf dem Phasenraum. Unsere Kräfte, die wir bisher als mit Einheiten  $\langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$  versehene Vektorfelder aufgefaßt haben, fassen wir nun mittels der durch das Skalarprodukt  $\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  gegebenen Identifikation  $\vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^* \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2}$ , als mit Einheiten in  $\langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$  versehene Kovektorfelder auf. Ihre Zusammenfassung  $F$  identifizieren wir entsprechend als ein mit denselben Einheiten versehenes Kovektorfeld auf  $\mathbb{E}^N$ , also als eine Abbildung  $F : \mathbb{E}^N \rightarrow (\vec{\mathbb{E}}^*)^N \otimes \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$  oder etwas allgemeiner eine Abbildung  $F : D \rightarrow (\vec{\mathbb{E}}^*)^N \otimes \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$  für  $D \Subset \mathbb{E}^N$  den Definitionsbereich unseres Feldes, von dem wir nur fordern, daß er unsere durch die Zwangsbedingungen erklärte Mannigfaltigkeit  $M$  umfassen möge. Unter einem **Potential** eines Kraftfeldes unseres Kraftfeldes verstehen wir dann eine Abbildung  $V : D \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$  mit der Eigenschaft  $F = -dV$ .

**Satz 3.4.2.** Die Kräfte und Massen fehlen noch! Sei  $I \subset \mathbb{T}$  ein halboffenes Zeitintervall,  $M \subset \mathbb{E}^N$  eine Mannigfaltigkeit von Zwangsbedingungen,  $(x_1, \dots, x_n)$  ein lokales Koordinatensystem von  $M$  und  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  das zugehörige System von kanonischen Koordinaten des Phasenraums  $TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ . Genau dann erfüllt eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  unsere physikalisch motivierten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\gamma}(t) - Q(\gamma(t)) \perp_m T_{\gamma(t)}M$$

aus 3.3.3, wenn für die zugehörige Abbildung  $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \rightarrow TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  in den Geschwindigkeitsphasenraum die  $n$  sogenannten **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_i} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \circ (\gamma, \dot{\gamma}) = 0$$

gelten, mit  $L = V - K : TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle\rangle$  der Differenz von potentieller und kinetischer Energie, der sogenannten **Lagrange-Funktion**.

### 3.5 Wohin?

3.5.1. Sei  $M$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und  $g : M \rightarrow (T^*M)^{\otimes 2}$  ihre Metrik. Sei  $TM \xrightarrow{\text{can}_g} T^*M$  die von der Metrik induzierte Identifikation des Tangentialbündels mit dem Kotangentialbündel. Sei  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die jedem Kotangentialvektor das halbe Quadrat der Länge des entsprechenden Tangentialvektors zuordnet,

$$H(\xi) = \frac{1}{2}g_{\pi(\xi)}(\text{can}_g^{-1} \xi, \text{can}_g^{-1} \xi)$$

So entspricht der Fluß des symplektischen Gradienten  $\text{grad}_\omega H$  von  $H$  unter  $\text{can}_g$  dem geodätischen Fluß auf  $TM$ . Wir überlegen uns das nur für eine in einen endlichdimensionalen euklidischen Raum  $E$  eingebettete und mit der induzierten Metrik versehene Mannigfaltigkeit  $M \subset E$ . In diesem Fall können die verallgemeinerten Geodäten charakterisiert werden als diejenigen glatten Kurven  $\gamma$  auf  $M$  mit  $\dot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$  für alle Zeiten  $t$ . Betrachten wir also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \hookrightarrow & M \times \vec{E} \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ T^*M & \xleftarrow{a} & M \times \vec{E}^* \end{array}$$

mit den von der Metrik induzierten Vertikalen, so sind die verallgemeinerten Geodäten  $\gamma : I \rightarrow M$  für  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall gerade dadurch charakterisiert, daß die induzierte Abbildung  $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \rightarrow TM$  nach Verlängerung zu  $I \rightarrow M \times \vec{E}^*$  an jeder Stelle einen Geschwindigkeitsvektor hat, dessen zweite Komponente vom Differential der Projektion  $M \times \vec{E}^* \rightarrow T^*M$  zu Null gemacht wird.

Jetzt interessieren wir uns für den Fluß des symplektischen Gradienten  $\text{grad}_\omega H$  auf  $T^*M$ . Genau dann ist  $\varphi : I \rightarrow T^*M$  eine Integralkurve, wenn  $\varphi$  differenzierbar ist mit  $\dot{\varphi}(t) = (\text{grad}_\omega H)(\varphi(t))$  für alle  $t \in I$ . Das ist per definitionem gleichbedeutend zu

$$\omega_{\varphi(t)}(\dot{\varphi}(t), v) = (d_{\varphi(t)}H)(v) \quad \forall t \in I, v \in T_{\varphi(t)}(T^*M)$$

Bezeichne nun  $s : T^*M \rightarrow M \times \vec{E}^*$  den durch das Diagramm induzierten Schnitt der Projektion  $a$ . Per definitionem haben wir für alle  $y \in M \times \vec{E}^*$

$$(a^*\omega)_y(h, k) = \omega_{a(y)}((d_y a)h, (d_y a)k)$$

und folglich

$$\begin{aligned} (a^*\omega)_{s\varphi(t)}((s \circ \varphi)'(t), k) &= \omega_{\varphi(t)}(\dot{\varphi}(t), (da)(k)) \\ &= (d_{\varphi(t)}H)(da)(k) \\ &= (d_{s\varphi(t)}(H \circ a))(k) \end{aligned}$$

Nun können wir nach unseren allgemeinen Überlegungen  $a^*\omega$  explizit beschreiben: Sind  $x_1, \dots, x_n$  lineare Koordinaten auf  $E$  und  $y_1, \dots, y_n$  die zugehörigen Impulskoordinaten alias Koordinaten zur dualen Basis auf  $\vec{E}^*$ , so haben wir

$$a^*\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Sind zusätzlich die  $x_i$  die Koordinaten einer Orthogonalbasis von  $E$ , so gilt weiter

$$H = \left( \sum y_i^2 / 2 \right) \circ s.$$

Damit ergibt sich für  $k = (v, w_1, \dots, w_n)$  mit  $v \in T_{\pi\varphi(t)}M \subset \vec{E}$  und  $(w_1, \dots, w_n) \in \vec{E}^*$  sofort für die linke Seite unserer Gleichung

$$(s \circ \varphi)'_1 w_1 + \dots + (s \circ \varphi)'_n w_n - (s \circ \varphi)'_{n+1} v_1 - \dots - (s \circ \varphi)'_{2n} v_n = (d_{\varphi(t)}H)(da)(k)$$

Setzen wir  $w_1 = \dots = w_n = 0$  und beachten, daß  $H$  von den Ortsvariablen nicht abhängt, so ergibt sich

$$(s\varphi)'_{n+1} v_1 + \dots + (s \circ \varphi)'_{2n} v_n = 0$$

für alle  $(v_1, \dots, v_n) \in T_{s\varphi(t)}M$  was gerade die eine Bedingung war. Die explizite Form von  $H$  liefert  $dH = s^*(\sum y_i dy_i)$ . Damit habe  $a^*(dH) = a^*s^*(\sum y_i dy_i)$  und auf  $k = (0, w_1, \dots, w_n)$  and Stelle  $(s \circ \varphi)(t)$  losgelassen liefert (?)

$$(s \circ \varphi)_{n+1}(t)w_1 + \dots + (s \circ \varphi)_{2n}w_n = (s \circ \varphi)'_1(t)w_1 + \dots + (s \circ \varphi)'_n w_n$$

und damit die zweite benötigte Gleichung. □

### 3.6 Hamilton-Versuch

Ich will das im folgenden parallel einen Schritt nach dem anderen erst ohne Einheiten in Koordinaten und dann abstrakt zu entwickeln.

3.6.1. Wir arbeiten mit  $N$  Teilchen, die sich im  $\mathbb{R}^3$  bewegen. Der Zustand unseres Systems wird durch ein Element des  $\mathbb{R}^{3N}$  beschrieben, seine zeitliche

Entwicklung durch eine Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ , das Kraftfeld modellieren wir als Abbildung  $F : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  und die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\gamma}_i(t) = F_i(\gamma(t)) \quad 1 \leq i \leq 3N$$

für  $m_1 = m_2 = m_3$  die Masse des ersten Teilchens,  $m_4 = m_5 = m_6$  die Masse des zweiten Teilchens etc. Als System erster Ordnung umgeschrieben suchen wir statt  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  Abbildungen  $(\gamma, \alpha) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$  mit

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= \alpha_i \\ \dot{\alpha}_i &= m_i^{-1}(F_i \circ \gamma) \end{aligned}$$

Abstrakt arbeiten wir mit  $N$  Teilchen, die sich im Anschauungsraum  $\mathbb{E}$  bewegen. Der Zustand unseres Systems wird durch ein Element des  $\mathbb{E}^N$  beschrieben, seine zeitliche Entwicklung durch eine Abbildung  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}^N$ , das Kraftfeld modellieren wir als Abbildung  $F : \mathbb{E}^N \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle g/s^2 \rangle\rangle$  und die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_n d^2\gamma_n(t) = F_n(\gamma(t)) \quad 1 \leq n \leq N$$

für  $m_n$  die Masse des  $n$ -ten Teilchens. Es ist vielleicht nicht ganz glücklich, daß mit  $i$  indizierte Buchstaben nun etwas anderes bedeuten als dieselben Buchstaben mit Index  $n$ , aber mir ist keine bessere Notation eingefallen. Als System erster Ordnung umgeschrieben suchen wir statt  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}^N$  Abbildungen  $(\gamma, \alpha) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$  mit

$$\begin{aligned} d\gamma_n &= \alpha_n \\ d\alpha_n &= m_n^{-1}(F_n \circ \gamma) \end{aligned}$$

3.6.2. Notieren wir die Koordinaten auf der ersten Kopie von  $\mathbb{R}^{3N}$  als  $x_i$  und die Koordinaten auf der zweiten Kopie von  $\mathbb{R}^{3N}$  als  $v_i$  und notieren die zugehörigen Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$  als  $\partial_i^x$  und  $\partial_i^v$ , so suchen wir in anderen Worten die Integralkurven des Vektorfelds

$$\sum_{i=1}^{3N} v_i \partial_i^x + m_i^{-1} F_i \partial_i^v$$

wobei  $F_i$  nur von den Ortskoordinaten  $x_i$  abhängt. Abstrakt betrachten wir auf  $\mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$  das "Vektorfeld in Einheiten  $\langle\langle 1/s \rangle\rangle$ " gegeben durch

$$(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) \mapsto (v_1, \dots, v_n, m_1^{-1} F_1(x), \dots, m_n^{-1} F_n(x))$$

mit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^N$  und gesucht sind "durch  $\mathbb{T}$  parametrisierte Integralkurven unseres Vektorfelds in der Einheit  $\langle\langle 1/s \rangle\rangle$ ".

3.6.3. Betrachten wir nun das übliche und das massebehaftete Skalarprodukt

$$s : (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{3N} v_i w_i \quad \text{und} \quad b : (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{3N} m_i v_i w_i$$

auf  $\mathbb{R}^{3N}$  und die beiden Isomorphismen  $\text{can}_s, \text{can}_b : \mathbb{R}^{3N} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{3N})^*$ . Wir haben die Standardbasis  $e_i$  von  $\mathbb{R}^{3N}$  und  $\text{can}_s(e_i) = e_i^*$  von  $(\mathbb{R}^{3N})^*$ . Wir nennen  $y_i : (\mathbb{R}^{3N})^* \rightarrow \mathbb{R}$  die zum Koordinatensystem der  $v_i : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$  dualen Koordinaten, so daß also gilt  $\xi = \sum y_i(\xi) e_i^*$  für  $\xi \in (\mathbb{R}^{3N})^*$ . So haben wir für die Standardbasen  $\text{can}_b : e_i \mapsto m_i e_i^*$  und  $v_i$  ist  $\text{can}_b$ -verwandt zu  $m_i^{-1} y_i$ . Unser Vektorfeld ist folglich  $(\text{id} \times \text{can}_b)$ -verwandt zum Vektorfeld

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i^{-1} y_i \partial_i^x + F_i \partial_i^y$$

auf  $(\mathbb{R}^{3N}) \times (\mathbb{R}^{3N})^*$ , wobei die  $F_i$  nur vom Ort abhängen. Nun erinnern wir die kanonische symplektische Form  $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$  auf  $(\mathbb{R}^{3N}) \times (\mathbb{R}^{3N})^*$ . Das “an erster Stelle Einsetzen” in  $\omega$  macht aus unserem Vektorfeld das Kovektorfeld

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i^{-1} y_i dy_i - F_i dx_i$$

Der erste Summand läßt sich schreiben als  $dK$  mit  $K = \sum y_i^2 / 2m_i$  der Funktion, die unter  $\mu$  verwandt ist zur totalen kinetischen Energie  $b(v, v)/2 = \sum m_i v_i^2 / 2$ . Der zweite Summand läßt sich schreiben als  $dV$ , falls es ein “Potential” unseres Kraftfelds gibt, also eine Funktion  $V : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $-\text{grad} V = F$ , wobei  $V = V(x_1, \dots, x_{3N})$  gemeint ist. Insgesamt erhalten wir also folgende Vorschrift: Man nehme die “Gesamtenergie”  $K + V$  und bilde ihren symplektischen Gradienten: Die Projektionen auf  $\mathbb{R}^{3N}$  der zugehörigen Integralkurven sind unsere Lösungen.

In der abstrakten Sprache hört sich das dann so an: Wir gehen aus vom kanonischen mit Einheit behafteten Skalarprodukt  $s = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  und konstruieren daraus das massebehaftete Skalarprodukt  $b : \mathbb{E}^N \times \mathbb{E}^N \rightarrow \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2}$  mithilfe der Formel

$$b : (v, w) \mapsto \sum_{n=1}^N m_n \langle v_n, w_n \rangle$$

Es liefert einen Isomorphismus

$$\text{can}_b : \mathbb{E}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} (\mathbb{E}^N)^* \otimes \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$$

Die kanonische symplektische Form  $\omega$  auf  $\mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N)^*$  gegeben durch die Vorschrift  $\omega((v, \xi), (w, \zeta)) = \zeta(v) - \xi(w)$  liefert eine kanonische symplektische Form  $\omega$  mit Werten in  $\mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$  auf

$$\mathbb{E}^N \times ((\vec{\mathbb{E}}^N)^* \otimes \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$$

Die **kinetische Energie**  $K : \vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{M} \otimes (\mathbb{L} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)^{\otimes 2}$  ist das um Einheiten ergänzte halbe Längenquadrat unseres massebehafteten Skalarprodukts, in Formeln  $K(v) = b(v, v)/2$ . Unter  $\text{id} \times \text{can}_b$  ist nach der anschließenden Übung 3.6.5 das tautologische Vektorfeld in der Einheit  $\langle\langle 1/s \rangle\rangle$  auf  $\mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle)$  verwandt zum symplektischen Gradienten  $\text{grad}_\omega(K^* \circ \text{pr}_2)$ , in Formeln

$$\begin{aligned} \text{id} \times \text{can}_b : \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{E}^N \times ((\vec{\mathbb{E}}^N)^* \otimes \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle) \\ \tau &\rightsquigarrow \text{grad}_\omega(K^* \circ \text{pr}_2) \end{aligned}$$

Unter einem **Potential** für unser Kraftfeld  $F : \mathbb{E}^N \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^N \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{M}$  aus 3.1.2 verstehen wir eine Abbildung  $V : \mathbb{E}^N \rightarrow \mathbb{M} \otimes (\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$  mit der Eigenschaft, daß ihr Gradient in Bezug auf das gewöhnliche  $\mathbb{L}^{\otimes 2}$ -wertige Skalarprodukt  $s : \vec{\mathbb{E}}^N \times \vec{\mathbb{E}}^N \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  gegeben durch die Formel  $s : (v, w) \mapsto \sum_{n=1}^N \langle v_n, w_n \rangle$  gerade das Negative unseres Kraftfelds ist, in Formeln  $\text{grad}_s V = -F$ . Dann haben wir nach 3.6.6 oder besser einer verfeinerten Version mit Einheiten  $\text{id} \times \text{can}_s : (0, F) \rightsquigarrow \text{grad}_\omega(V \circ \text{pr}_1)$  und die Beziehung unserer beiden Skalarprodukte impliziert

$$\begin{aligned} \text{id} \times \text{can}_b : \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{E}^N \times ((\vec{\mathbb{E}}^N)^* \otimes \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle) \\ (0, \dots, 0, m_1^{-1}F_1, \dots, m_n^{-1}F_n) &\rightsquigarrow \text{grad}_\omega(V \circ \text{pr}_1) \end{aligned}$$

Insgesamt ist also das Vektorfeld in der Einheit  $\langle\langle 1/s \rangle\rangle$  vom Ende von 3.6.2 unter  $\text{id} \times \text{can}_b$  verwandt zum symplektischen Gradienten  $\text{grad}_\omega H$  der sogenannten **Hamilton-Funktion**  $H = V \circ \text{pr}_1 + K^* \circ \text{pr}_2$  und die Projektionen auf den ersten Faktor  $\mathbb{E}^N$  der Integralkurven dieses symplektischen Gradienten sind genau die Lösungen der Newton'schen Bewegungsgleichungen.

*Übung 3.6.4.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$  haben wir für sein Tangentialbündel einen kanonischen Isomorphismus  $\text{TX} \xrightarrow{\sim} X \times \vec{X}$  und für das Tangentialbündel des Tangentialbündels einen kanonischen Isomorphismus  $\text{T}(\text{TX}) \xrightarrow{\sim} (X \times \vec{X}) \times (\vec{X} \times \vec{X})$  und ein Vektorfeld auf  $\text{TX}$  entspricht eineindeutig einer Abbildung  $(X \times \vec{X}) \rightarrow (\vec{X} \times \vec{X})$ . Die Abbildung  $\tau : (x, v) \mapsto (v, 0)$  nenne ich das **tautologische Vektorfeld** auf dem Tangentialbündel des affinen Raums  $X$ , seine Integralkurven sind von der Gestalt  $t \mapsto (x + tv, v)$ . Sei nun  $b : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform und  $K : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $K(v) = b(v, v)/2$ . Sei

weiter  $\text{can}_b : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^*$  die durch unsere Bilinearform gegebene Identifikation und  $K^* : \vec{X}^* \rightarrow \mathbb{R}$  die darunter zu unserem ursprünglichen  $K$  verwandte Funktion. So ist der symplektische Gradient von  $K^* \circ \text{pr}_2$  auf  $X \times \vec{X}^*$  unter  $\text{id} \times \text{can}_b$  verwandt zum tautologischen Vektorfeld  $\tau$  auf  $X \times \vec{X}$ , in Formeln

$$\begin{aligned} \text{id} \times \text{can}_b : X \times \vec{X} &\xrightarrow{\sim} X \times \vec{X}^* \\ \tau &\rightsquigarrow \text{grad}_\omega(K^* \circ \text{pr}_2) \end{aligned}$$

Hinweis: Es mag das Einfachste sein, orthogonale Koordinaten einzuführen und stur zu rechnen.

*Übung 3.6.5.* Die vorhergehende Übung 3.2.3 kann wie folgt mit Einheiten angereichert werden: Haben wir eindimensionale Räume  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  gegeben und nimmt unsere symmetrische nichtausgeartete Bilinearform Werte in  $\mathbb{B}$  an, so haben wir  $\text{can}_b : \vec{X} \otimes \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^* \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ . Unsere Abbildung  $K : \vec{X} \rightarrow \mathbb{B}$  liefert eine Abbildung  $K : \vec{X} \otimes \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} \otimes \mathbb{A}^{\otimes 2}$  und ist unter  $\text{can}_b$  verwandt zu einer Abbildung  $K^* : \vec{X}^* \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} \otimes \mathbb{A}^{\otimes 2}$ . Nun haben wir auf  $X \times (\vec{X}^* \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{B})$  einen kanonische  $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ -wertige symplektische Struktur  $\omega$ . Das Differential  $d(K^* \circ \text{pr}_2)$  ist ein Kovektorfeld mit Werten in  $\mathbb{B} \otimes \mathbb{A}^{\otimes 2}$  auf  $X \times (\vec{X}^* \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{B})$  und der symplektische Gradient  $\text{grad}_\omega(K^* \circ \text{pr}_2)$  ist ein  $\mathbb{A}$ -wertiges Vektorfeld, das unter  $\text{id} \times \text{can}_b$  verwandt ist zum tautologischen  $\mathbb{A}$ -wertigen Vektorfeld  $\tau$  auf  $X \times (\vec{X} \otimes \mathbb{A})$ .

*Übung 3.6.6.* Wir setzen Übung 3.2.3 fort. Sei  $s : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere nichtausgeartete symmetrische Bilinearform. Gegeben eine differenzierbare Funktion  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  können wir ihren Gradienten  $\text{grad}_s V : X \rightarrow \vec{X}$  bilden und dazu auf dem Tangentialbündel  $\text{TX} = X \times \vec{X}$  das Vektorfeld  $\kappa : (x, v) \mapsto (0, -(\text{grad}_s V)(x))$ . Ich behaupte, daß es unter  $\text{id} \times \text{can}_s$  verwandt ist zum symplektischen Gradienten von  $V \circ \text{pr}_1$  auf  $X \times \vec{X}^*$ , in Formeln

$$\begin{aligned} \text{id} \times \text{can}_s : X \times \vec{X} &\xrightarrow{\sim} X \times \vec{X}^* \\ \kappa &\rightsquigarrow \text{grad}_\omega(V \circ \text{pr}_1) \end{aligned}$$

Um das zu zeigen, müssen wir nur prüfen, daß gilt

$$(d_{(x,v)}(\text{id} \times \text{can}_s))(\kappa(x, v)) = (\text{grad}_\omega(V \circ \text{pr}_1))(x, \text{can}_s(v))$$

Auf der linken Seite steht  $(0, \text{can}_s(-(\text{grad}_s V)(x))) = (0, -d_x V)$ . Auf der rechten Seite steht das eindeutig bestimmte Element  $(v, \xi) \in \vec{X} \times \vec{X}^*$  mit der Eigenschaft  $\omega((v, \xi), (w, \zeta)) = (d_x V)(w)$  für alle  $(w, \zeta) \in \vec{X} \times \vec{X}^*$ . Dies Element ist aber offensichtlich gerade  $(v, \xi) = (0, -d_x V)$ , was zu zeigen war.

3.6.7. Von hier ausgehend ist es nicht mehr schwer, krummlinige Koordinaten einzuführen. Interessiert man sich für eine Bewegung unter Zwangsbedingungen, sagen wir auf einer  $n$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^{3N}$ ,

so lauten unsere Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\gamma}_i(t) = F_i(\gamma(t)) + Z_i(t)$$

wo die "externen Kräfte"  $F_i$  etwa von einem Potential  $V$  herrühren mögen und die Zwangskräfte  $Z_i$  die Eigenschaft  $Z_i(t) \perp T_{\gamma(t)}M$  haben und wir darüberhinaus nur wissen, daß sie dafür sorgen, daß die Zwangsbedingungen stets erfüllt sind. Die Bewegung wird also in  $M$  geschehen und so ablaufen, als ob jedenfalls für ein kleines Zeitintervall unsere Zwangskraft ortsabhängig sei, also  $Z : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  mit  $Z(p) \perp T_pM$  für alle  $p \in M$ . Das bedeutet für das Kovektorfeld  $\sum Z_i dx_i$  gerade, daß seine Einschränkung auf  $M$  verschwindet. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} TM & \hookrightarrow & M \times \mathbb{R}^{3N} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ T^*M & \longleftarrow & M \times (\mathbb{R}^{3N})^* & \longleftarrow & \mathbb{R}^{3N} \times (\mathbb{R}^{3N})^* \end{array}$$

dessen Vertikalen durch das massebehaftete Skalarprodukt induziert werden. Wir erhalten einen Schnitt  $h : T^*M \hookrightarrow M \times (\mathbb{R}^{3N})^*$  der Horizontalen  $a$  unten links als das Inverse der linken Vertikale gefolgt von den beiden anderen Abbildungen des linken Quadrats. Mithilfe dieses Schnitts ziehen wir unsere Hamiltonfunktion  $H$  zurück auf das Kotangentenbündel und untersuchen den Fluß ihres symplektischen Gradienten, also den Fluß des Vektorfelds  $\text{grad}_\omega(H \circ h)$  auf  $T^*M$ . Genau dann ist  $\varphi : I \rightarrow T^*M$  eine Integralkurve, wenn  $\varphi$  differenzierbar ist mit  $\varphi'(t) = (\text{grad}_\omega(H \circ h))(\varphi(t))$  für alle  $t \in I$ . Das ist per definitionem gleichbedeutend zu

$$\omega_{\varphi(t)}(\varphi'(t), v) = (d_{\varphi(t)}(H \circ h))(v) \quad \forall t \in I, v \in T_{\varphi(t)}(T^*M)$$

3.6.8. Genau dann ist  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Lösung unserer Bewegungsgleichungen unter Zwangsbedingungen, wenn  $\gamma$  zweimal differenzierbar ist mit

$$(m_n \ddot{\gamma}_n - F_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)))_{n=1}^N \perp T_{\gamma(t)}M$$

in  $\vec{\mathbb{E}}^N$  für alle  $t \in I$ . Genau dann ist also eine Abbildung  $\varphi : I \rightarrow TM$  von der Form  $\varphi = (\gamma, \dot{\gamma})$  für eine Lösung  $\gamma : I \rightarrow M$  unserer Bewegungsgleichungen, wenn  $\varphi$  differenzierbar ist und als Abbildung  $\varphi = (\gamma, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{E}^N \times \vec{\mathbb{E}}^N$  die Gleichungen

$$\dot{\gamma}_n(t) = \alpha_n(t) \quad \text{und} \quad \dot{\alpha}_n(t) = m_n^{-1} F_n(\gamma(t)) + m_n^{-1} Z_n(t)$$

erfüllt für irgendwelche Zwangskräfte  $Z_i(t)$  mit  $(Z_1(t), \dots, Z_n(t)) \perp T_{\gamma(t)}M$ . Das hinwiederum ist gleichbedeutend dazu, daß die verlängerte Abbildung  $\tilde{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^*)^N$  eine Gleichung der Gestalt

$$\tilde{\varphi}'(t) = (\text{grad}_\omega(V + K^*))(\tilde{\varphi}(t)) + \text{can}_\omega^{-1}(\text{pr}_1^* \tilde{Z}(t))$$

erfüllt mit  $\tilde{Z}(t) \in T_{\gamma(t)}^* \mathbb{E}^N$  Kovektoren, deren Einschränkung auf  $T_{\gamma(t)}M$  jeweils verschwindet. Diese Gleichung bedeutet nun nicht anderes als

$$\omega_{\tilde{\varphi}(t)}(\tilde{\varphi}'(t), k) = (d_{\tilde{\varphi}(t)}(V + K^*))(k) + (\text{pr}_1^* \tilde{Z}(t))(k)$$

für alle  $t$  und alle  $k \in \vec{\mathbb{E}}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^*)^N$ . Nun haben wir in ?? bereits gesehen, daß wir durch Zurückholen der kanonischen symplektischen Form auf  $\mathbb{E}^N \times (\vec{\mathbb{E}}^N)^*$  vermittels  $i \circ h$  die kanonische symplektische Form  $\omega^M$  auf  $T^*M$  erhalten. Nun faktorisiert  $\tilde{\varphi}$  ja über  $T^*M$  und wir folgern

$$\omega_{\tilde{\varphi}(t)}^M(\tilde{\varphi}'(t), l) = (d_{\tilde{\varphi}(t)}((V + K^*) \circ i \circ h))(l)$$

was eben genau bedeutet, daß  $\tilde{\varphi}$  eine Integralkurve des symplektischen Gradienten

$$\text{grad}_\omega((V + K^*) \circ i \circ h)$$

sein muß. Wir müssen also nur noch die Existenz einer Lösung für jeden Anfangswert unserer ursprünglichen Gleichung nachweisen, um ihre symplektische Beschreibung zu folgern.

### 3.7 Noch angucken

Bezeichne nun  $a : T^*M \rightarrow M \times \vec{E}^*$  den durch das Diagramm induzierten Schnitt der Projektion  $a$ . Per definitionem haben wir für alle  $y \in M \times \vec{E}^*$

$$(a^*\omega)_y(h, k) = \omega_{a(y)}((d_y a)h, (d_y a)k)$$

und folglich

$$\begin{aligned} (a^*\omega)_{s\varphi(t)}((s \circ \varphi)'(t), k) &= \omega_{\varphi(t)}(\dot{\varphi}(t), (da)(k)) \\ &= (d_{\varphi(t)} H)(da)(k) \\ &= (d_{s\varphi(t)}(H \circ a))(k) \end{aligned}$$

### 3.8 Krümmungsbegriffe

3.8.1. Gegeben ein Zusammenhang in einem Vektorbündel  $E$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  konstruiert man den **Krümmungstensor**  $R \in \Omega^2(M; \text{End } E)$ ,

eine 2-Form mit Werten im Endomorphismenbündel. Ist speziell  $M$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und  $R$  der Riemann'sche Zusammenhang auf dem Tangentialbündel  $E = TM$ , so nimmt der Krümmungstensor als Werte nur schiefadjungierte Endomorphismen der Faser alias Werte jeweils in  $\text{Lie } \mathcal{O}(E_x) \subset \text{Lie } \text{GL}(E_x) = \text{End}(E_x)$  an und es gilt die **Bianchi-Identität**

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$$

für beliebige glatte Vektorfelder  $X, Y, Z$ . Man kann auch für  $X, Y \in T_pM$  die sogenannte **Ricci-Abbildung**  $r_{X,Y} : T_pM \rightarrow T_pM, L \mapsto R(Y, L)X$  betrachten. Deren Spur ist eine symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} \text{Ric} : T_pM \times T_pM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \text{tr}(r_{X,Y}) \end{aligned}$$

Auf 1-Formen kann der Hodge-Laplace-Operator  $\Delta$  geschrieben werden als

$$\Delta = \nabla^* \nabla + \text{Ric}$$

mit  $\nabla$  dem "Zusammenhangs-Laplace". Man kann auf Spin-Mannigfaltigkeiten auch  $\Delta = D^2 = \hat{D}^2$  zerlegen für  $D$  den Dirac-Operator.

**Satz 3.8.2 (Bochner).** *Sei  $M$  ein kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Ist die Ricci-Krümmung  $\text{Ric}$  überall positiv definit, so gilt für die erste Betti-Zahl  $b_1(M) = 0$ .*

3.8.3. Dasselbe gilt für  $M$  zusammenhängend, wenn wir nur annehmen, daß gilt  $\text{Ric} \geq 0$  überall und  $\text{Ric} > 0$  an mindestens einer Stelle. Das alles wird erklärt in [Lawson & Michelson: Spin Geometry] und [Helgason: Spin Geometry].

*Bemerkung 3.8.4.* Gegeben ein Zusammenhang  $\nabla : \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$  gibt es wohlbestimmte  $k$ -lineare Abbildungen

$$\nabla^i : \Omega_X^i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \rightarrow \Omega_{\mathcal{O}_X}^{i+1} \mathcal{F}$$

mit  $\nabla^i(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^i \omega \wedge \nabla \sigma$  wo das Dachprodukt den hoffentlich offensichtlichen Morphismus  $\Omega_X^i \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$  meint. In der Tat liefert unsere Formel sicher einen Morphismus  $\nabla^i : \Omega_X^i \otimes_k \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$  und wir nur  $\nabla^i(\omega f \otimes \sigma) = \nabla^i(\omega \otimes f\sigma)$  prüfen für alle Schnitte  $f$  in  $\mathcal{O}_X$ . In der Tat haben wir aber

$$d(\omega f) \otimes \sigma = (d\omega) \otimes f\sigma + (-1)^{|\omega|} (\omega \wedge df) \otimes \sigma$$

was zu zeigen war. Schließlich ist

$$\nabla^1 \circ \nabla : \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

sogar  $\mathcal{O}_X$ -linear, dann wir finden

$$\begin{aligned} \nabla^1(\nabla(f\sigma)) &= \nabla^1(df \otimes \sigma + f(\nabla\sigma)) \\ &= -df \otimes \nabla\sigma + df \otimes \nabla\sigma \\ &\quad + f(\nabla^1(\nabla\sigma)) \end{aligned}$$

Ist  $\mathcal{F}$  lokal frei von endlichem Rang, so entspricht  $\nabla^1 \circ \nabla$  einem globalen Schnitt von  $\Omega_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F})$ , der die **Krümmung** unseres Zusammenhangs heißt.

### 3.9 Symplektische Form auf dem Kotangentialbündel

3.9.1. Auf dem Kotangentialbündel  $T^*M$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  erklärt man das **kanonische Kovektorfeld** oder auch **Liouville'sche Kovektorfeld**  $\vartheta$  durch die Vorschrift

$$\vartheta_\xi := \xi \circ d_\xi \pi$$

für  $\pi : T^*M \rightarrow M$  die Bündelprojektion und  $d_\xi \pi : T_\xi(T^*M) \rightarrow T_{\pi(\xi)}M$  deren Differential. Das Negative der äußeren Ableitung

$$\omega := -d\vartheta$$

dieses Kovektorfelds heißt die **kanonische symplektische Form** auf dem Kotangentialbündel. Sind  $q_1, \dots, q_n$  lokale Koordinaten auf  $M$ , so sind  $dq_1, \dots, dq_n$  Schnitte in  $T^*M$ , die an jeder Stelle linear unabhängig sind. Wir erhalten also lokale Koordinaten  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  auf  $T^*M$ , indem wir die Funktionen  $p_i : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  dadurch erklären, daß die Restriktion auf die Fasern  $p_i : T_x^*M \rightarrow \mathbb{R}$  an jeder Stelle  $x \in M$  gerade die  $i$ -te Koordinate bezüglich der durch die  $d_x q_i$  gegebenen Basis von  $T_x^*M$  sein soll. In diesen Koordinaten hat unser kanonisches Kovektorfeld die Gestalt

$$\vartheta = \sum p_i dq_i$$

und die kanonische symplektische Form wird

$$\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$$

Insbesondere zeigt diese Darstellung, daß unsere 2-Form  $\omega$  an jeder Stelle nichtausgeartet ist, was dann auch recht eigentlich erst die Bezeichnung als symplektische Form rechtfertigt. Die  $p_i$  heißen die dem Koordinatensystem  $q_1, \dots, q_n$  auf unserer Mannigfaltigkeit zugeordneten **Impulskordinaten** auf dem Kotangentialbündel.

*Übung 3.9.2.* Fassen wir ein glattes Kovektorfeld  $\alpha$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  auf als eine glatte Abbildung  $\alpha : M \rightarrow T^*M$  in das Kotangentialbündel und holen das kanonische Kovektorfeld unter dieser Abbildung zurück, so erhalten wir gerade  $\alpha$  selber, in Formeln  $\alpha^*(\vartheta) = \alpha$  oder in einer anderen Notation  $\alpha : \alpha \rightsquigarrow \vartheta$ .

*Übung 3.9.3. Wohin? Braucht Rückzug!* Gegeben ein glattes Vektorbündel  $\pi : E \rightarrow M$  erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\pi^*E \hookrightarrow TE \rightarrow \pi^*TM$$

von Vektorbündeln auf  $E$ , indem wir die erste Abbildung mithilfe des Differentials der Einbettungen der Fasern und die zweite Abbildung mithilfe des Differentials der Projektion  $\pi$  in hoffentlich offensichtlicher Weise erklären.

**3.9.4 (Funktorialität der kanonischen Formen).** Ist  $\varphi : M \rightarrow N$  ein glatter Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T^*M & \xleftarrow{d^\top\varphi} & \varphi^*T^*N & \xrightarrow{c} & T^*N \\ \pi_M \downarrow & & \pi \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xlongequal{\quad} & M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

indem wir links oben für alle  $x \in M$  die zum Differential  $d_x\varphi : T_xM \rightarrow T_{\varphi(x)}N$  transponierte Abbildung  $d_x^\top\varphi : (\varphi^*T^*N)_x = T_{\varphi(x)}^*N \rightarrow T_x^*M$  nehmen. Für unsere kanonischen Formen gilt dann

$$\begin{aligned} (d^\top\varphi)^*\vartheta^M &= c^*\vartheta^N \\ (d^\top\varphi)^*\omega^M &= c^*\omega^N \end{aligned}$$

Um das einzusehen reicht es, die erste Formel zu zeigen, die Zweite erhält man als deren äußere Ableitung. Nun stimmen aber beide Seiten der behaupteten Identität per definitionem überein mit demjenigen Kovektorfeld auf dem nach  $M$  zurückgeholt Kotangentialbündel von  $N$ , das jedem Tangentialvektor  $v \in T_u(\varphi^*T^*N)$  für  $u = (x, \zeta) \in \varphi^*T^*N$  einem Paar mit  $x \in M$  und  $\zeta \in T_{\varphi(x)}^*N$ , den Wert von  $\zeta$  auf dem Bild von  $v$  unter  $d_x\varphi \circ d_u\pi$  zuordnet. Etwas ausführlicher können wir auch rechnen

$$\begin{aligned} ((d^\top\varphi)^*\vartheta^M)_u &= \vartheta_{(d_x^\top\varphi)(\zeta)}^M \circ d_u(d^\top\varphi) \\ &= (d_x^\top\varphi)(\zeta) \circ \pi_M \circ d_u(d^\top\varphi) \\ &= ((d_x^\top\varphi)(\zeta)) \circ d_u\pi \\ &= \zeta \circ d_x\varphi \circ d_u\pi \\ &= \zeta \circ d\pi_N \circ d_u c \\ &= (c^*\vartheta^N)_u \end{aligned}$$

und damit ist unsere Formel nachgewiesen. Ist speziell  $\varphi$  eine Einbettung und sind  $q_1, \dots, q_n$  lokale Koordinaten auf  $N$  derart, daß  $q_1, \dots, q_m$  lokale Koordinaten auf  $M$  liefern, wohingegen  $q_{m+1}, \dots, q_n$  auf  $M$  konstant sind, so gilt für die Differentiale der zugehörigen Ortskoordinaten  $q_1, \dots, q_n$  auf dem Kotangentenbündel  $T^*N$  natürlich

$$c^*dq_i = \begin{cases} dq_i & 1 \leq i \leq m; \\ 0 & m < i \leq n. \end{cases}$$

Sind nun  $p_1^N, \dots, p_n^N$  die zugehörigen Impulskoordinaten auf dem Kotangentenbündel  $T^*N$  und  $p_1^M, \dots, p_m^M$  die entsprechend zum Koordinatensystem  $q_1, \dots, q_m$  von  $M$  gehörigen Impulskoordinaten auf  $T^*M$ , so liefert unsere Identität

$$(d^\top \varphi)^* \sum_{i=1}^m p_i^M dq_i = c^* \sum_{i=1}^n p_i^N dq_i$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit der  $dq_i$  an jeder Stelle von  $\varphi^*(T^*N)$  folgt für die Impulskoordinaten sofort die Identität

$$p_i^M \circ d^\top \varphi = p_i^N \circ c$$

Insbesondere gilt für jeden Schnitt  $s : T^*M \rightarrow \varphi^*(T^*N)$  von  $d^\top \varphi$  also

$$\begin{aligned} p_i^M &= p_i^N \circ c \circ s & 1 \leq i \leq m \\ q_i &= q_i \circ c \circ s & 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

Die Restriktionen der Ortskoordinaten  $q_i \circ c \circ s$  für  $i > m$  sind nach Annahme konstant, und nur die Restriktionen der "zusätzlichen" Impulskoordinaten  $p_i^N$ , also die Funktionen  $p_i^N \circ c \circ s$  für  $i > m$ , hängen von der Wahl unseres Schnitts  $s$  ab.

### 3.10 Geodäten

**Definition 3.10.1.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller euklidischer Vektorraum und  $M \subset V$  eine glatte eingebettete Mannigfaltigkeit ohne Rand. Wir versehen  $M$  mit der Metrik

$$d_M(x, y) = \inf \left\{ L(\gamma) \mid \begin{array}{l} \gamma \text{ ist ein Weg} \\ \text{in } M \text{ von } x \text{ nach } y \end{array} \right\}$$

wobei die Länge  $L(\gamma)$  im Sinne von II.7.1.1 zu verstehen ist. Eine **Geodäte** von  $M$  ist nun eine stetige auf einem halboffenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte Abbildung

$$\gamma : I \rightarrow M$$

die im Sinne von II.7.3.4 nach der Bogenlänge parametrisiert ist und die “im Kleinen jeweils den kürzesten Weg auf  $M$  geht” in dem Sinne, daß es eine offene Umgebung  $U \subseteq I \times I$  der Diagonale gibt derart, daß für alle Paare  $(a, b) \in U$  gilt

$$d_M(\gamma(a), \gamma(b)) = |a - b|$$

**Satz 3.10.2 (über Geodäten).** *Sei  $E$  ein euklidischer Raum und  $M \subset E$  eine glatte eingebettete Mannigfaltigkeit ohne Rand. Ein Weg in  $M$  ist eine Geodäte genau dann, wenn er die folgenden drei Bedingungen erfüllt: Er ist (1) zweimal stetig differenzierbar, wird (2) mit konstanter absoluter Geschwindigkeit  $\|\gamma'(t)\| = 1$  durchlaufen, und die Ableitung seines Geschwindigkeitsvektors steht (3) stets auf unserer Mannigfaltigkeit senkrecht, in Formeln*

$$\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M \quad \forall t \in I$$

3.10.3. Sei  $E$  ein euklidischer Raum,  $M \subset E$  eine eingebettete Mannigfaltigkeit ohne Rand und  $I$  eine halboffene zusammenhängende Teilmenge eines eindimensionalen reellen Raums. So nennen wir eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  eine **verallgemeinerte Geodäte** genau dann, wenn sie nur die Bedingungen (1) und (3) des vorhergehenden Satzes erfüllt.

### 3.11 Krümmung von Kurven

**Definition 3.11.1.** Gegeben ein euklidischer Raum  $E$  und eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit alias Kurve  $K \subset E$  definiert man ihre **Krümmung** an einer Stelle  $p \in K$  als die Länge der Ableitung des Geschwindigkeitsvektors bei einer Parametrisierung von  $K$  nach der Bogenlänge, in Formeln

$$\kappa(p) = \|\gamma''(b)\|$$

für  $\gamma : W \rightarrow K$  eine Karte mit  $\gamma(b) = p$  und  $\|\gamma'(\tau)\| = 1 \quad \forall \tau \in W$ .

*Beispiel 3.11.2.* Ein Kreis mit Radius  $r$  hat an jeder Stelle die Krümmung  $\kappa = r^{-1}$ . Für eine beliebige Kurve mag man sich die Krümmung an einer Stelle veranschaulichen als das Inverse des Radius derjenigen Kreislinie, die sie in einer Umgebung von besagter Stelle “am besten approximiert”, wie die folgende Proposition ?? präzisiert. Man beachte, daß im ebenen Fall unsere Kurve diesen **Schmiegekreis** im allgemeinen am Berührungspunkt schneiden wird, wie das anschließende Beispiel 3.11.7 deutlich macht.

3.11.3. Gegeben allgemeiner ein euklidischer Raum  $E$  mit Einheiten in einem orientierten eindimensionalen Raum  $L$  im Sinne von ?? muß die Krümmung feiner erklärt werden als

$$\kappa(p) = \|\gamma''(b)\| / \|\gamma'(b)\|^2$$

für eine und jede Parametrisierung mit  $\|\dot{\gamma}'(\tau)\|$  konstant und nicht Null. Insbesondere nimmt unsere Krümmung also Werte in  $L^1$  an, und das ist auch geometrisch vernünftig: Der Kehrwert des Radius eines Schmiegekreises ist eben eine inverse Länge.

**Proposition 3.11.4 (Krümmung einer Bahnkurve).** *Die Krümmung der Bahnkurve eines Teilchens an einer Stelle hängt nur von seiner Geschwindigkeit und Beschleunigung an der vorgegebenen Stelle ab und stimmt überein mit der Länge der orthogonalen Projektion des Beschleunigungsvektors auf die zum Geschwindigkeitsvektor senkrechte Hyperebene, geteilt durch das Quadrat der absoluten Geschwindigkeit. Ist also in Formeln  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Karte einer Kurve, so wird deren Krümmung gegeben durch*

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|\ddot{\gamma}\|^2 - \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle^2 / \|\dot{\gamma}\|^2}}{\|\dot{\gamma}\|^2}$$

3.11.5. Man erinnere sich, daß gegeben Vektoren  $v, w$  in einem euklidischen Vektorraum mit  $v \neq 0$  die orthogonale Projektion  $p$  von  $w$  auf  $\mathbb{R}v$  gegeben wird durch  $p = (\langle v, w \rangle / \|v\|^2)v$ . Für die orthogonale Projektion  $r$  von  $w$  auf die zu  $\mathbb{R}v$  orthogonale Hyperebene gilt dann  $w = p + r$  und  $p$  steht senkrecht auf  $r$ , in Formeln  $\langle p, r \rangle = 0$ . Nach Pythagoras haben wir folglich

$$\|r\|^2 = \|w\|^2 - \|p\|^2 = \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 / \|v\|^2$$

und das interpretiert den Zähler unserer Formel. Ist unser euklidischer Raum dreidimensional und wählen wir darin eine Orientierung, so können wir die Krümmung unserer Kurve auch mithilfe des Kreuzprodukts ?? ausdrücken als  $\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| / \|\dot{\gamma}\|^3$ .

3.11.6. Es mag eine gute Idee sein, sich die Bedeutung der Formel ?? für die Krümmung einer Bahnkurve an einigen Umparametrisierungen qualitativ klarzumachen. Durchlaufen wir etwa unsere Kurve mit der doppelten Geschwindigkeit, so erhalten wir die vierfache Beschleunigung, aber im Bruch für die Krümmung ändert sich nichts. Fahren wir nicht mit konstanter Geschwindigkeit, sondern "geben kräftig Gas, während wir durch unseren Punkt fahren", so ändert sich der Beschleunigungsvektor um einen an die Kurve tangentialen Anteil und im Bruch für die Krümmung ändert sich wieder nichts.

*Beweis.* Natürlich finden wir auch eine Parametrisierung nach der Bogenlänge  $\bar{\gamma} : W \rightarrow K$  mit demselben Bild  $\bar{\gamma}(W) = \gamma(I)$ . Wir notieren die jeweiligen Parameter  $t \in I$  und  $\tau \in W$  und kürzen die Ableitungen nach  $t$  beziehungsweise  $\tau$  ab als  $\dot{\gamma}(t)$  bzw.  $\bar{\gamma}'(\tau)$  etc. Natürlich ist auch  $t$  eine Funktion von  $\tau$  und umgekehrt, so daß wir etwa haben  $t' = \frac{dt}{d\tau}$  und  $\bar{\gamma} = \gamma \circ t$ . Um die

Notation nicht zu überladen, kürzen wir auch meist  $\dot{\gamma} \circ t = \dot{\gamma}$  und  $\ddot{\gamma} \circ t = \ddot{\gamma}$  ab. Die Kettenregel liefert nun

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}' &= \dot{\gamma} \cdot t' \\ \bar{\gamma}'' &= \ddot{\gamma} \cdot (t')^2 + \dot{\gamma} \cdot t''\end{aligned}$$

Weil  $\bar{\gamma}$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt  $1 = \|\bar{\gamma}'\|^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 \cdot (t')^2$ . Durch Ableiten erhalten wir daraus  $0 = 2\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle \cdot (t')^3 + \|\dot{\gamma}\|^2 \cdot 2t't''$  und damit  $\|\dot{\gamma}\| \cdot t'' = -\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle / \|\dot{\gamma}\|^3$ . Setzen wir diese Erkenntnisse zusammen, so ergibt sich für das Quadrat der Krümmung die Darstellung

$$\|\bar{\gamma}''\|^2 = \frac{\|\ddot{\gamma}\|^2}{\|\dot{\gamma}\|^4} - \frac{2\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2}{\|\dot{\gamma}\|^6} + \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle^2}{\|\dot{\gamma}\|^6}$$

und ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, so ergibt sich genau die oben behauptete Formel.  $\square$

*Beispiel 3.11.7.* Gegeben  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und  $p \in I$  eine kritische Stelle  $\dot{g}(p) = 0$  hat der Graph  $\Gamma(g)$  von  $g$  bei  $(p, g(p))$  die Krümmung

$$\kappa = |\ddot{g}(p)|$$

Um das zu sehen, müssen wir nur unsere Proposition ?? auf  $\gamma(t) = (t, g(t))$  mit  $\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{g}(t))$  und  $\ddot{\gamma}(t) = (0, \ddot{g}(t))$  anwenden. Nun ist weiter die Kreislinie mit Radius  $r > 0$  und Zentrum im Ursprung lokal um  $(0, r)$  der Graph der Funktion

$$q : x \mapsto r\sqrt{1 - x^2/r^2}$$

und die Ableitungen dieser Funktion ergeben sich zu

$$\dot{q}(x) = \frac{-2xr}{r^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2/r^2}} \quad \text{und} \quad \ddot{q}(0) = -r$$

Wenn wir der Einfachheit halber  $0 \in I$  und  $p = (0, r) = (0, g(0))$  annehmen, so ist unser Kreis also Schmiegekreis genau dann, wenn gilt  $\ddot{g}(0) = \ddot{q}(0)$  alias  $(g - q)''(0) = 0$ . Damit wird die Taylorentwicklung der Funktion  $(g - q)$  im allgemeinen mit einem Term dritter Ordnung beginnen, es gilt also etwa  $(g - q)(x) = ax^3 + x^3\varepsilon(x)$  für  $\varepsilon$  stetig bei Null mit Funktionswert Null, und haben wir hier  $a \neq 0$ , so wechselt  $(g - q)(x)$  offensichtlich bei  $x = 0$  sein Vorzeichen.

**Satz 3.11.8 (Fenchel'sche Ungleichung).** *Gegeben eine zweimal stetig differenzierbare geschlossene Kurve in einem reellen euklidischen Raum ist das Integral der Krümmung nach der Bogenlänge mindestens  $2\pi$ , und Gleichheit tritt nur im Fall ebener konvexer Kurven auf.*

*Beweis.* Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  unsere Kurve, parametrisiert nach der Bogenlänge. Die Behauptung besagt in Formeln

$$\int_a^b \|\gamma''(t)\| dt \geq 2\pi$$

Kürzen wir  $\gamma' = T$  ab, so ist  $T$  eine geschlossene Kurve auf der Einheitssphäre in  $\vec{E}$ . Diese Kurve kann nicht ganz in einer offenen Hemisphäre verlaufen, da es sonst einen Vektor  $N$  gäbe mit  $\langle N, T(t) \rangle > 0$  für alle  $t$ , so daß  $\langle N, \gamma(t) \rangle$  streng monoton wachsen müßte auf  $[a, b]$ , was aber für geschlossene Kurven unmöglich ist. Nun zeigt das anschließende Lemma, daß eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve einer Länge  $\leq 2\pi$  auf einer Einheitssphäre stets ganz in einer offenen Hemisphäre enthalten sein muß, und das beendet dann den Beweis.  $\square$

### 3.12 Krümmung von Flächen im Raum

**Definition 3.12.1.** Gegeben eine Fläche  $M$  in einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $E$  erklärt man ihre **absolute Schnittkrümmung** an einer vorgegebenen Stelle  $p \in M$  in Richtung einer an die Fläche in  $p$  tangentialen Geraden oder gleichbedeutend in Richtung einer Geraden durch den Nullpunkt im Tangentialraum  $G \subset T_p M$  wie folgt: Man betrachtet die Ebene

$$G^+ = p + (T_p M)^\perp + G$$

die aus der Verschiebung der bei  $p$  auf unserer Fläche senkrecht stehenden Geraden  $p + (T_p M)^\perp$  mit Vektoren aus  $G$  entsteht, und folgert aus 3.12.3, daß es in  $M$  ein Umgebung  $U$  von  $p$  gibt, für die  $U \cap G^+$  eine Kurve ist. Die Krümmung dieser Kurve an der Stelle  $p$  erklären wir dann als unsere **absolute Schnittkrümmung**

$$\kappa_p^{\text{abs}}(M, G) = \kappa_p^{\text{abs}}(G) = \kappa_p(U \cap G^+)$$

Geben wir bei  $p$  zusätzlich einen Normalenvektor  $N_p \in (T_p M)^\perp$  der Länge Eins vor, so geben wir unserer absoluten Schnittkrümmung zusätzlich ein Vorzeichen und setzen  $\kappa_p(G) = \kappa_p^{\text{abs}}(G)$ , falls unsere absolute Schnittkrümmung nicht Null ist und der Mittelpunkt des Schmiegekreises durch  $p$  an die Kurve  $U \cap G^+$  auf der Halbgeraden  $p + \mathbb{R}_{>0} N_p$  liegt, und setzen andernfalls  $\kappa_p(G) = -\kappa_p^{\text{abs}}(G)$ .

3.12.2. Arbeiten wir mit Einheiten  $L$  wie in 3.11.3, so nimmt diese Schnittkrümmung offensichtlich Werte im Dualraum des Längenraums  $L^\top$  an.

*Übung 3.12.3.* Treffen sich zwei Untermannigfaltigkeiten eines endlichdimensionalen affinen Raums  $M, N \subset X$  im Punkt  $p$  und gilt  $T_p M + T_p N = \vec{X}$ , so gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  von  $p$  derart, daß  $U \cap M \cap N$  auch eine Untermannigfaltigkeit von  $X$  ist. Deren Tangentialraum bei  $p$  ist dann der Schnitt der Tangentialräume  $T_p(U \cap M \cap N) = T_p M \cap T_p N$ .

**Proposition 3.12.4 (Zweite Fundamentalform).** *Gegeben eine Fläche  $M$  in einem dreidimensionalen euklidischen Raum  $E$ , ein Punkt  $p \in M$  und ein Normaleneinheitsvektor  $N_p \in \vec{E}$  an  $M$  bei  $p$  gibt es genau eine symmetrische Bilinearform  $\kappa_p$  auf dem Tangentialraum  $T_p M$  mit der Eigenschaft, daß für jeden Einheitsvektor  $v \in T_p M$  gilt*

$$\kappa_p(v, v) = \kappa_p(\mathbb{R}v)$$

mit  $\kappa_p(\mathbb{R}v)$  der Schnittkrümmung in Bezug auf die Gerade  $G = \mathbb{R}v$  und den Normaleneinheitsvektor  $N_p$ .

**Definition 3.12.5.** Diese symmetrische Bilinearform  $\kappa_p$  heißt die **zweite Fundamentalform** unserer Fläche an der vorgegebenen Stelle mit Bezug auf den gewählten Normaleinheitsvektor. Unter der **ersten Fundamentalform** versteht man das vom Skalarprodukt auf  $\vec{E}$  induzierte Skalarprodukt auf dem Tangentialraum  $T_p M$ .

*Wohin?*

**Proposition 3.12.6 (Untermannigfaltigkeiten als Graphen).** *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller euklidischer Raum  $X$  und eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  und ein Punkt  $p \in M$  gilt:*

1. *Es gibt ein Paar  $(U, \varphi)$  bestehend aus einer Umgebung  $U \subseteq T_p M$  des Ursprungs im Tangentialraum und einer glatten Abbildung  $\varphi : U \rightarrow (T_p M)^\perp$  in sein orthogonales Komplement derart, daß gilt  $\varphi(0) = 0$  und  $p + v + \varphi(v) \in M$  für alle  $v \in U$ .*
2. *Ist  $(U', \varphi')$  ein weiteres derartiges Paar, so existiert eine offene Umgebung  $U'' \subset (U \cap U')$  des Ursprungs im Tangentialraum mit  $\varphi|_{U''} = \varphi'|_{U''}$ .*

*Beweis.* Das alles folgt unmittelbar aus dem Satz über implizite Funktionen.  $\square$

3.12.7. Ist speziell  $M$  eine Hyperfläche und wählen wir auf der Gerade  $(T_p M)^\perp$  eine Orientierung und bezeichnen mit  $N_p$  den positiv orientierten Vektor der

Länge Eins, so finden wir insbesondere ein Paar  $(U, \tilde{\varphi})$  mit  $U \subseteq T_p M$  einer Umgebung des Ursprungs und  $\tilde{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt mit  $\tilde{\varphi}(0) = 0$  und  $\varphi(v) = \tilde{\varphi}(v)N_p$  alias

$$p + v + \tilde{\varphi}(v)N_p \in M$$

für alle  $v \in U$ . Sicher hat  $\tilde{\varphi}$  beim Ursprung eine kritische Stelle. Die unser  $\tilde{\varphi}$  beim Ursprung am besten approximierende quadratische Form  $q : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  im Sinne der Taylorentwicklung hängt nach dem zweiten Teil unserer Proposition 3.12.6 nur von  $M$  und der Orientierung auf  $(T_p M)^\perp$  ab und nicht von der Wahl von  $(U, \tilde{\varphi})$ . Ihre Eigenwerte im Sinne von ?? heißen die **Hauptkrümmungen** unserer Hyperfläche bei  $p$  in Bezug auf die gegebene Orientierung von  $(T_p M)^\perp$ .

**Definition 3.12.8.** Ich erinnere und verallgemeinere ?. Gegeben ein Körper  $k$  und ein  $k$ -Vektorraum  $V$  und ein eindimensionaler  $k$ -Vektorraum  $L$  versteht man unter einer **quadratischen Form auf  $V$  mit Werten in  $L$**  eine Abbildung

$$q : V \rightarrow L$$

die sich darstellen läßt in der Gestalt  $q(v) = f_1(v)g_1(v) + \dots + f_r(v)g_r(v)$  mit  $f_i : V \rightarrow k$  und  $g_i : V \rightarrow L$  linear.

3.12.9. In nochmals anderen Worten sagt diese Proposition, daß die Abbildung, die jedem Tangentialvektor der Länge Eins die Schnittkrümmung in der entsprechenden Richtung zuordnet, die Restriktion auf den Einheitskreis einer quadratischen Form auf dem Tangentialraum im Sinne von ?? sein muß. Die Bedeutung dieser quadratischen Form wird im folgenden Beweis besonders deutlich werden: Es ist eben die quadratische Form  $q : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , für die “das Bild der Abbildung  $v \mapsto p + v + q(v)N_p$  unsere Mannigfaltigkeit lokal um  $p$  am besten approximiert”. Im Fall eines euklidischen Raums mit Einheiten wird insbesondere  $q$  eine quadratische Form  $q : T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$  werden, die nach Wahl einer Orientierung von  $(T_p M)^\perp$  auch als eine quadratische Form  $q : T_p M \rightarrow L$  verstanden werden kann.

3.12.10. Die Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungen sollten nun vielleicht am übersichtlichsten für diese quadratische Form im Sinne von ?? verstanden werden. Im Fall mit Einheiten liegen die Hauptkrümmungen in  $L^\top$  und die Gaußkrümmung gehört zu  $L^{-2}$ . Das gefällt mir besser als die nachfolgende Diskussion mithilfe der sogenannten “Weingarten-Abbildung”, für die ich keine anschauliche Interpretation kenne.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $E = \mathbb{R}^3$  und  $p = 0$  annehmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß unser Normalenvektor bei  $p$  der dritte Vektor  $N_p = e_3$  der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  ist. Dann muß unsere Fläche lokal um  $p$  ein Graph sein, es

gibt also eine Umgebung der Null  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$  glatt mit

$$\Gamma(\varphi) = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in W\} \subset M$$

Die halbe Hesse-Matrix  $\frac{1}{2}H(f)$  definiert dann nach 3.11.7 ein Skalarprodukt mit den gesuchten Eigenschaften auf  $\mathbb{R}^2 = T_pM$ .  $\square$

*Übung 3.12.11.* Ist  $(W, \varphi)$  eine Karte einer Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  und  $q \in W$  ein Punkt und  $N_{\varphi(q)}$  ein Normalenvektor bei  $\varphi(q)$  auf  $M$ , so entspricht die zugehörige zweite Fundamentalform auf  $T_pM$  unter  $d_q\varphi$  der Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$ , die gegeben wird durch die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{xx}(q), N_{\varphi(q)} \rangle & \langle \varphi_{yx}(q), N_{\varphi(q)} \rangle \\ \langle \varphi_{xy}(q), N_{\varphi(q)} \rangle & \langle \varphi_{yy}(q), N_{\varphi(q)} \rangle \end{pmatrix}$$

der Skalarprodukte der partiellen Ableitungen von  $\varphi$  mit dem gewählten Normaleneinheitsvektor.

3.12.12. Gegeben ein dreidimensionaler euklidischer Raum  $E$ , eine glatte Fläche  $M \subset E$ , ein Punkt  $p \in M$  und ein Normaleneinheitsvektor  $N_p \in (T_pM)^\perp$  haben wir auf dem Tangentialraum  $T_pM$  sowohl unser Skalarprodukt  $g = g_p$  als auch unsere zweite Fundamentalform  $\kappa = \kappa_p$  zur Verfügung. Es gibt also eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $S_p \in \text{End}(T_pM)$  mit

$$\kappa_p(v, w) = g_p(v, S_p w)$$

für alle  $v, w \in T_pM$ . Sie heißt die **Weingarten-Abbildung** und ist offensichtlich selbstadjungiert in Bezug auf  $g_p$ . Die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung heißen die **Hauptkrümmungen**, und wenn diese Eigenwerte verschieden sind, heißen die zugehörigen Eigenräume die **Hauptkrümmungsrichtungen**. Die halbe Spur der Weingarten-Abbildung alias der Durchschnitt der Hauptkrümmungen heißt die **mittlere Krümmung** unserer Fläche und die Determinante der Weingarten-Abbildung alias das Produkt der beiden Hauptkrümmungen ihre **Gauss'sche Krümmung**. Letztere hängt im übrigen noch nicht einmal von der Wahl eines Einheitsnormalenvektors ab.

3.12.13. Denken wir uns unsere Fläche als ein Gebilde aus einem biegbaren aber nicht dehnbaren Blech, so können manche Flächen im Raum durch Verbiegen ineinander überführt werden: Zum Beispiel können wir ein plattes Blech zu einem Stück der Oberfläche eines Zylinders verbiegen oder auch zu einer Eistäute, jedoch nicht zu einem Stück der Kugeloberfläche. In anderen Worten ist es nicht möglich, für Stücke der Erdoberfläche Karten anzufertigen, die "längentreu" sind. Genauer wird das aus dem sogenannten

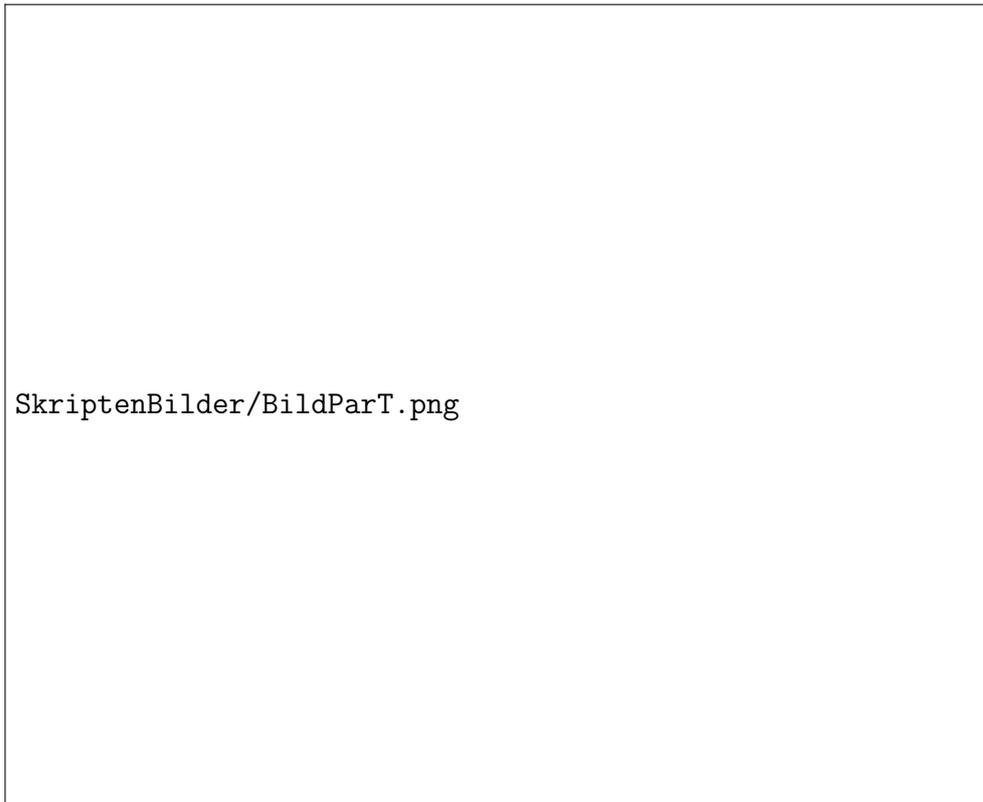
“theorema egregium”, dem “köstlichen Theorem” von Gauß folgen, nach dem sich beim Verbiegen von Blechen im Sinne der vorhergehenden Diskussion ihre Gauss’sche Krümmung nicht ändert. Man nennt deshalb die Gauss’sche Krümmung auch eine Invariante der “inneren Geometrie” unserer Fläche. Im Gegensatz dazu sind die beiden Hauptkrümmungen keine Invarianten der inneren Geometrie: In der Tat sind ja etwa bei einem Stück der Oberfläche eines Zylinders nicht beide Hauptkrümmungen Null, bei einem platten Blech aber doch. Da nun aber die Kugeloberfläche konstante positive Gauss’sche Krümmung hat, ein plattes Blech dahingegen konstante verschwindende Gauss’sche Krümmung, können wir dann folgern, daß diese beiden Flächen auch lokal nicht durch Verbiegen ineinander zu überführen sind. Das Vorzeichen der Gauss’schen Krümmung einer in den euklidischen Raum eingebetteten Fläche kann man wie folgt verstehen: Versuchen wir, ein Papier auf unsere Fläche aufzukleben, so wird es sich im Fall positiver Gauss’scher Krümmung in Falten legen wie beim Verpacken eines Fußballs, oder es wird im Fall negativer Gauss’scher Krümmung reißen, etwa beim Tapezieren des Gipsmodells einer Paßhöhe. Nur im Fall verschwindender Gauss’scher Krümmung läßt sich unser Papier glatt aufkleben, etwa auf eine Eistüte oder auf einen Zylinder. Man hat mir berichtet, eine Firma, die Windschutzscheiben herstellte, hatte das Problem, daß die Scheiben beim Erhitzen und Verbiegen in eine gewisse Form sehr oft barsten. Ein dort als Praktikand tätiger Student der Mathematik erklärte seinen Arbeitgebern dann, daß sie besser nicht versuchen sollten, flaches Glas in eine Fläche mit zu weit von Null abweichender Gauss’scher Krümmung zu verbiegen.

### 3.13 Paralleltransport auf gekrümmten Räumen

**Definition 3.13.1.** Gegeben ein reeller euklidischer Raum  $E$  endlicher Dimension, eine glatte Mannigfaltigkeit  $M \subset E$ , ein Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  und ein Tangentialvektor  $w_{[a]} \in T_{\gamma(a)}M$  definieren wir für jede Unterteilung  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$  ausgehend von  $w_0 := w_{[a]}$  induktiv

$$w_i = \begin{pmatrix} \text{die orthogonale Projektion von} \\ w_{i-1} \in T_{\gamma(a_{i-1})}M \subset \vec{E} \text{ auf } T_{\gamma(a_i)}M \end{pmatrix}$$

Anschaulich gesprochen verschieben wir also unser  $w_0$  parallel im Raum  $E$  das erste Wegstück nach  $\gamma(a_1)$ , projizieren dort orthogonal auf den Tangentialraum, verschieben weiter parallel im Raum  $E$  nach  $\gamma(a_2)$ , projizieren wieder, und so weiter, bis wir bei  $\gamma(b)$  oder genauer im dortigen Tangentialraum  $T_{\gamma(b)}M$  angekommen sind. Falls nun diese Vektoren  $w_r \in T_{\gamma(b)}M$  bei “wachsender Feinheit der Unterteilung gegen einen Vektor  $w_{[b]} \in T_{\gamma(b)}M$



Diese Abbildung stellt eine noch recht schlechte Approximation des Paralleltransports eines Tangentialvektors längs eines Weges innerhalb einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit der Ebene dar. Im Grenzwert wird der parallel transportierte Vektor schlicht der Tangentialvektor derselben Länge “in derselben Richtung längs der Kurve” werden.

konvergieren” oder genauer: Falls es einen Vektor  $w_{[b]} \in T_{\gamma(b)}M$  gibt mit der Eigenschaft, daß zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert derart, daß bei jeder Unterteilung einer Feinheit  $< \delta$  gilt  $\|w_r - w_{[b]}\| < \varepsilon$ , dann sagen wir, der Vektor  $w_{[b]} \in T_{\gamma(b)}M$  entstehe durch **Paralleltransport längs des Weges**  $\gamma$  aus dem Vektor  $w_{[a]} \in T_{\gamma(a)}M$ .

**Definition 3.13.2.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller euklidischer Raum  $E$ , eine glatte Mannigfaltigkeit  $M \subset E$  und eine stetige Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  von einem halboffenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $M$  heißt ein Lift

$$\tilde{\gamma} : I \rightarrow TM$$

von  $\gamma$  in das Tangentialbündel **parallel längs**  $\gamma$  genau dann, wenn für beliebige  $a \leq b$  aus  $I$  der Vektor  $\tilde{\gamma}(b) \in T_{\gamma(b)}M$  durch Paralleltransport längs  $\gamma$  aus dem Vektor  $\tilde{\gamma}(a) \in T_{\gamma(a)}M$  entsteht.

*Ergänzung 3.13.3.* Die euklidische Struktur geht bei diesen Definitionen nur insofern ein, als wir wissen müssen, welche Vektoren zueinander orthogonal sind. Insbesondere können wir Parallelität allgemeiner auch dann noch definieren, wenn auf dem Richtungsraum  $\vec{E}$  unseres Raums  $E$  nur ein “Skalarprodukt in Einheiten” im Sinne von ?? gegeben ist.

**Satz 3.13.4 (über den Paralleltransport).** *Seien gegeben ein endlichdimensionaler reeller euklidischer Raum  $E$ , eine glatte Mannigfaltigkeit  $M \subset E$  und eine glatte Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  von einem halboffenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $M$ . So gilt:*

1. *Es gibt es für jedes  $a \in I$  und jeden Tangentialvektor  $v \in T_{\gamma(a)}M$  genau einen parallelen Lift  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow TM$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(a) = v$ , und dieser Lift ist glatt.*
2. *Ein glatter Lift  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow TM$  von  $\gamma$  in das Tangentialbündel ist parallel längs  $\gamma$  genau dann, wenn für die Verknüpfung unseres Lifts  $\tilde{\gamma}$  mit der Komposition  $j : TM \hookrightarrow M \times \vec{E} \rightarrow \vec{E}$  von Einbettung und Projektion gilt*

$$(j \circ \tilde{\gamma})'(t) \perp T_{\gamma(t)}M \quad \forall t \in I$$

3. *Der Paralleltransport längs eines glatten Weges ist stets eine orthogonale lineare Abbildung zwischen den beteiligten Tangentialräumen.*

3.13.5. Meist wird die infinitesimale Charakterisierung von Parallelität aus dem zweiten Teil dieses Satzes gleich als die Definition derselben gewählt. Dann kann man einerseits schneller voranschreiten, da weniger bewiesen werden muß, andererseits aber kann auch der Kontakt zur Anschauung schneller

verlorengehen. Der vorhergehende Satz gilt entsprechend, wenn man statt der Glattheit von  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  nur die stetige Differenzierbarkeit fordert. Der Beweis bleibt derselbe. Man sieht so, daß der Paralleltransport sogar längs stückweise stetig differenzierbarer Wege sinnvoll definiert ist.

*Beweis.* Für den Beweis dieses Satzes gehen wir wie folgt vor: Zunächst einmal vereinbaren wir die Bezeichnung “infinitesimal parallel” für solche Lifts, die die Bedingung 3.13.4.2 des Satzes erfüllen. Offensichtlich bilden die infinitesimal parallelen Lifts unter der punktweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren einen Untervektorraum im Raum aller Lifts von  $\gamma$ . Weiter ist für jeden infinitesimal parallelen Lift  $\tilde{\gamma}$  die Länge konstant, denn wir haben

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\gamma}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle j \circ \tilde{\gamma}(t), j \circ \tilde{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle (j \circ \tilde{\gamma})'(t), j \circ \tilde{\gamma}(t) \rangle = 0$$

Die Parallelverschiebungen “im Sinne infinitesimaler Lifts” liefern also lineare Abbildungen zwischen den beteiligten Tangentialräumen, die Längen erhalten, und die nach ?? folglich orthogonal sind. Damit folgt die letzte Aussage aus den beiden anderen. Als nächstes zeigen wir, daß infinitesimal parallele Lifts zu beliebigen Anfangswerten existieren und eindeutig sind, und anschließend, daß jeder infinitesimal parallele Lift auch im Sinne von 3.13.2 parallel ist. Damit ist dann der Satz vollständig bewiesen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $I$  offen annehmen. Wir betrachten das “mit  $\gamma$  zurückgeholte Tangentialbündel”

$$\gamma^*(TM) := \{(t, v) \in I \times \vec{E} \mid v \in T_{\gamma(t)}M\}$$

Es ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R} \times \vec{E}$ . Bezeichne  $\text{pr}_p : \vec{E} \rightarrow T_pM$  für alle  $p \in M$  die orthogonale Projektion. Wir erhalten eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} \text{pr} : I \times \vec{E} &\rightarrow \gamma^*(TM) \\ (t, v) &\mapsto (t, \text{pr}_{\gamma(t)}(v)) \end{aligned}$$

indem wir an jeder Stelle  $t$  die zweite Komponente orthogonal auf  $T_{\gamma(t)}M$  projizieren. Auf  $\gamma^*(TM)$  erklären wir nun ein glattes Vektorfeld  $\zeta$ , indem wir für jedes  $(t, v) \in TM$  den Tangentialvektor  $(1, 0) \in T_{(t,v)}(I \times \vec{E})$  betrachten und sein Bild unter dem Differential von  $\text{pr}$  nehmen, in Formeln

$$\zeta_{(t,v)} = (d_{(t,v)} \text{pr})(1, 0)$$

Das so entstehende Vektorfeld  $\zeta$  auf  $\gamma^*(TM)$  hat die Eigenschaft, daß ein Lift  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  infinitesimal parallel ist genau dann, wenn

$$\tilde{\gamma} = (\text{id}, \tilde{\gamma}) : I \rightarrow \gamma^*(TM)$$

eine Integralkurve des Vektorfeldes  $\zeta$  ist. In der Tat haben wir

$$\tilde{\gamma}'(t) = (1, (j \circ \tilde{\gamma})'(t))$$

Da aber nun der Kern des Differentials der Projektion  $(d_{(t,v)} \text{pr}) : \mathbb{R} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R} \times T_{\gamma(t)}M$  sich gerade zu  $0 \times (T_{\gamma(t)}M)^\perp$  ergibt, ist in der Tat  $\tilde{\gamma}$  infinitesimal parallel genau dann, wenn  $\tilde{\gamma}$  eine Integralkurve von  $\zeta$  ist. Offensichtlich ist weiter die Summe je zwei infinitesimal paralleler Lifts  $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$  von  $\gamma$  wieder infinitesimal parallel und für  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist mit  $\tilde{\gamma}$  auch  $\lambda\tilde{\gamma}$  infinitesimal parallel. Daraus können wir folgern, daß für jede Trivialisierung  $\gamma^*(TM) \xrightarrow{\sim} I \times \mathbb{R}^d$  des zurückgeholten Tangentialbündels als glattes Vektorraumbündel unser Vektorfeld  $\zeta$  verwandt ist zu einem Vektorfeld der Gestalt  $(t, v) \mapsto (1, (A(t))(v))$  mit  $A : I \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^d)$  einer glatten Abbildung. Das infinitesimal parallele Liften bedeutet also das Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung, und damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit von "im infinitesimalen Sinne parallelen Lifts" aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz IV.5.3.1 für Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen.

Wir zeigen nun noch, daß infinitesimal parallele Lifts auch in der Tat parallel im Sinne von 3.13.2 sind. Seien dazu  $a \leq b$  in  $I$  und  $w_{[a]} \in T_{\gamma(a)}M$  fest gewählt. Sicher finden wir eine obere Schranke  $B$  für die Normen  $\|\zeta_{(t,v)}\|$  der Vektoren unseres Vektorfelds  $\zeta$  auf dem Kompaktum  $K = \{(t, v) \in \gamma^*(TM) \mid t \in [a, b], \|v\| \leq \|w_{[a]}\|\}$ , wobei die Normen in  $\vec{E}$  bzw. in  $\mathbb{R} \times \vec{E}$  zu verstehen sind, im letzteren Fall als Produktnorm. Für jeden infinitesimal parallelen Lift  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$ , dessen Werte in  $\vec{E}$  höchstens dieselbe Norm haben wie  $w_{[a]}$ , gilt nach dem Schrankensatz II.7.2.14 für  $a \leq t \leq s \leq b$  also schon mal

$$\|(t, \tilde{\gamma}(t)) - (s, \tilde{\gamma}(s))\| \leq B(t - s)$$

in der Produktnorm auf  $\mathbb{R} \times \vec{E}$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es weiter ein  $\delta > 0$  mit

$$\|(t, v) - (s, w)\| \leq \delta \Rightarrow \|\zeta_{(t,v)} - \zeta_{(s,w)}\| \leq \varepsilon$$

für alle  $(t, v), (s, w) \in K$ . Wählen wir also  $\eta_1$  mit  $0 < \eta_1 < \delta/B$ , so folgt aus  $|s - t| < \eta_1$  und jeden infinitesimal parallelen Lift  $\tilde{\gamma}$ , dessen Werte höchstens dieselbe Länge wie  $w_{[a]}$  haben, zunächst

$$\|(t, \tilde{\gamma}(t)) - (s, \tilde{\gamma}(s))\| < \delta$$

und dann mit dem Schrankensatz II.7.2.14 sogar

$$\|(t, \tilde{\gamma}(t)) - (s, \tilde{\gamma}(s))\| \leq (s - t)\varepsilon$$

Andererseits betrachten wir unsere faserweise orthogonale Projektion

$$\text{pr} : I \times \vec{E} \rightarrow \gamma^*(TM)$$

Sie ist glatt, und es gibt für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\eta_2 > 0$  derart, daß die Geschwindigkeit aller Wege der Gestalt  $t \mapsto \text{pr}(t, v)$  für  $\|v\| \leq \|w_{[a]}\|$  sich auf einem Intervall einer Länge  $\leq \eta_2$  im Betrag höchstens um  $\varepsilon$  ändert. Nach dem Schrankensatz II.7.2.14 oder auch dem Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen II.7.2.11 folgt dann für  $0 \leq s - t \leq \eta_2$  und  $\|v\| \leq \|w_{[a]}\|$  mit  $\xi_{(t,v)}$  der Geschwindigkeit von  $\text{pr}(t, v)$  leicht

$$\|\text{pr}(t, v) + (s - t)\xi_{(t,v)} - \text{pr}(s, v)\| \leq (s - t)\varepsilon$$

Für  $(t, v) \in \gamma^*(TM)$  gilt nun aber per definitionem  $\xi_{(t,v)} = \zeta_{(t,v)}$ . Gegeben  $\varepsilon > 0$  finden wir also  $\eta > 0$  derart, daß aus  $0 \leq s - t \leq \eta$  und  $v \in T_{\gamma(t)}M$  mit  $\|v\| \leq \|w_{[a]}\|$  folgt

$$\|(s, \pi_{s,t}(v)) - \text{pr}(s, v)\| \leq 2(s - t)\varepsilon$$

für  $\pi_{s,t} : T_{\gamma(t)}M \rightarrow T_{\gamma(s)}M$  der Paralleltransport im infinitesimalen Sinne. Da nun Vektoren unter orthogonalen Projektionen nicht länger werden können, ergeben sich für jede Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  einer Schrittweite  $\leq \eta$  die Abschätzungen

$$\|w_{[a]}\| = \|w_0\| \geq \|w_1\| \geq \dots \geq \|w_r\|$$

und

$$\|\pi_{a_i, a_{i+1}}(w_i) - w_{i+1}\| \leq 2(a_{i+1} - a_i)\varepsilon$$

Wenn wir nun diese letzteren Ungleichungen aufaddieren und beachten, daß sich die Abstände von Tangentialvektoren bei Paralleltransport im infinitesimalen Sinne nicht ändern, folgt schließlich

$$\|\pi_{b,a}(w_{[a]}) - w_r\| \leq 2(b - a)\varepsilon$$

für alle Unterteilungen einer Schrittweite  $\leq \eta$ . Damit ist also der Paralleltransport im infinitesimalen Sinne in der Tat ein Paralleltransport im Sinne unserer ursprünglichen Definition 3.13.1 und der Satz ist bewiesen.  $\square$

**Definition 3.13.6.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller euklidischer Raum  $E$ , eine glatte Mannigfaltigkeit  $M \subset E$ , ein Tangentialvektor  $v \in T_pM$  und ein glattes Vektorfeld  $\eta : M \rightarrow TM$  definiert man die **kovariante Ableitung**

$$\nabla_v \eta \in T_pM$$

**des Vektorfelds  $\eta$  bei  $p$  in Richtung  $v$**  wie folgt: Zunächst interpretiert man das Vektorfeld  $\eta$  mithilfe der Komposition  $j$  von Einbettung und Projektion  $TM \hookrightarrow M \times \vec{E} \rightarrow \vec{E}$  als eine Abbildung  $(j \circ \eta) : M \rightarrow \vec{E}$ ; dann

betrachtet man die Richtungsableitung dieser vektorwertigen Abbildung in der Richtung  $v$ , in Formeln also den Vektor  $D_v(j \circ \eta) = (d_p(j \circ \eta))(v) \in \vec{E}$ ; und schließlich projiziert man den so entstandenen Vektor  $D_v(j \circ \eta) \in \vec{E}$  orthogonal auf  $T_p M \subset \vec{E}$ . Bezeichnet  $\text{pr}_p : \vec{E} \rightarrow T_p M$  die orthogonale Projektion, so haben wir also in Formeln

$$\nabla_v \eta = \text{pr}_p(D_v(j \circ \eta)) = (\text{pr}_p \circ d_p(j \circ \eta))(v) \in T_p M$$

**3.13.7 (Kovariante Ableitung und Paralleltransport).** Mithilfe unseres Paralleltransports 3.13.4 kann die kovariante Abbildung wie folgt interpretiert werden: Sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  ein glatter Weg mit  $\gamma(0) = p$  und mit Geschwindigkeit  $\gamma'(0) = v$  bei  $p$ . Mittels Paralleltransports längs  $\gamma$  identifiziere man für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  den Tangentialraum  $T_{\gamma(t)} M$  mit  $T_p M$ . Diese Identifikationen erlauben uns, unser Vektorfeld auf dem Weg  $\eta \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$  als eine Abbildung  $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$  aufzufassen, und die Ableitung dieser Abbildung bei  $t = 0$  ist dann unsere kovariante Ableitung, in Formeln

$$h'(0) = \nabla_v \eta$$

Insbesondere ist also ein glattes Vektorfeld  $\eta$  parallel längs eines glatten Weges  $\gamma$  alias ist  $\eta \circ \gamma$  ein paralleler Lift von  $\gamma$ , wenn gilt

$$\nabla_{\gamma'(t)} \eta = 0 \quad \forall t$$

**3.13.8 (Formale Eigenschaften der kovarianten Ableitung).** Unsere kovariante Ableitung von Vektorfeldern hat offensichtlich die folgenden formalen Eigenschaften:

1. Für festes  $p$  ist  $\nabla_v \eta$  über  $\mathbb{R}$  bilinear in  $v$  und  $\eta$ .
2. Für festes  $v$  und festes  $p$  und eine glatte Funktion  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$  gilt die Leibniz-Regel

$$\nabla_v(f\eta) = (d_p f)(v) \cdot \eta + f(\nabla_v \eta)$$

3. Für festes  $\eta$  hängt  $\nabla_v \eta \in TM$  glatt von  $v \in TM$  ab. Ist also in Formeln  $\xi$  ein weiteres glattes Vektorfeld, so ist auch  $\nabla_{\xi} \eta : p \mapsto \nabla_{\xi(p)} \eta$  ein glattes Vektorfeld.

Auf diese Weise haben wir je zwei glatten Vektorfeldern  $\xi, \eta : M \rightarrow TM$  ein drittes glattes Vektorfeld  $\nabla_{\xi}(\eta)$  zugeordnet. Unsere Eigenschaften von oben liefern dann, daß  $\nabla_{\xi} \eta$  in  $\mathbb{R}$ -bilinearer Weise von  $\xi$  und  $\eta$  abhängt und daß für jede glatte Funktion  $f$  gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{f\xi}(\eta) &= f\nabla_{\xi}(\eta) \\ \nabla_{\xi}(f\eta) &= \xi(f) \cdot \eta + f\nabla_{\xi}(\eta) \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet  $\nabla_\xi \eta = 0$  im Lichte von 3.13.7, daß  $\eta$  “entlang der Flußlinien von  $\xi$  parallel ist”. Wäre etwa  $\xi$  ein glattes Vektorfeld auf der Sphäre, das nur an den Polen verschwindet und sonst tangential zu den Breitengraden ist, so würde  $\nabla_\xi \eta = 0$  genau für diejenigen glatten Vektorfelder  $\eta$  gelten, die invariant sind unter allen Rotationen, die die Pole festhalten.

3.13.9 (**Zusammenhänge in Vektorraumbündeln**). Allgemeiner versteht man unter einem **Zusammenhang** in einem beliebigen glatten Vektorraumbündel  $E \rightarrow M$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\infty(TM) \times \mathcal{S}^\infty(E) &\rightarrow \mathcal{S}^\infty(E) \\ (\xi, \eta) &\mapsto \nabla_\xi(\eta) \end{aligned}$$

die jedem glatten Vektorfeld alias Schnitt von  $TM$  und jedem glatten Schnitt von  $E$  einen weiteren glatten Schnitt von  $E$  zuordnet und zwar so, daß wieder für alle glatten Funktionen  $f \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(M)$  unsere Regeln

$$\begin{aligned} \nabla_{f\xi}(\eta) &= f\nabla_\xi(\eta) \\ \nabla_\xi(f\eta) &= \xi(f) \cdot \eta + f\nabla_\xi\eta \end{aligned}$$

gelten. Die zweite dieser Bedingungen heißt wieder die **Leibniz-Regel**. Die erste Bedingung sagt uns, daß wir für die  $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(M)$ -Operation auf dem ersten Tensorfaktor eine  $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(M)$ -lineare Abbildung

$$\mathcal{S}^\infty(TM) \otimes_\mathbb{R} \mathcal{S}^\infty(E) \rightarrow \mathcal{S}^\infty(E)$$

vor uns haben. Sie muß nach ?? einer  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung

$$\mathcal{S}^\infty(E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(M)}(\mathcal{S}^\infty(TM), \mathcal{S}^\infty(E))$$

entsprechen und dann nach ?? auch einer  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung

$$\nabla : \mathcal{S}^\infty(E) \rightarrow \mathcal{S}^\infty(T^*M \otimes E)$$

Die Leibnizregel übersetzt sich in die Bedingung  $\nabla(f\eta) = df \otimes \eta + f(\nabla\eta)$  an letztere Abbildung  $\nabla$ .

3.13.10 (**Der Raum der Zusammenhänge**). Gegeben zwei Zusammenhänge  $\nabla, \nabla'$  auf demselben Vektorraumbündel  $E$  ist ihre Differenz sogar eine  $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(M)$ -lineare Abbildung

$$\mathcal{S}^\infty(E) \rightarrow \mathcal{S}^\infty(T^*M \otimes E)$$

alias ein glatter Schnitt von  $T^*M \otimes \text{End}(E)$  alias eine  $(\text{End } E)$ -wertige 1-Form. Die Zusammenhänge auf  $E$  bilden mithin einen affinen Raum mit Richtungsraum  $\mathcal{S}^\infty(T^*M \otimes \text{End}(E))$ .

**3.13.11 (Zusammenhänge in trivialen Bündeln).** Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $M$  und ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $L$  können wir auf dem trivialen Bündel  $E = M \times L$  einen Zusammenhang  $\nabla^{\text{triv}} : \mathcal{S}^\infty(E) \rightarrow \mathcal{S}^\infty(T^*M \otimes E)$  erklären durch die Vorschrift

$$(\nabla^{\text{triv}}\eta)_p = d_p(\text{pr}_2 \circ \eta)$$

wo  $(\text{pr}_2 \circ \eta) : M \rightarrow L$  a priori ein Differential  $d_p(\text{pr}_2 \circ \eta) : T_pM \rightarrow TL$  hat, das wir aber als Element von  $T_p^*M \otimes L$  auffassen dürfen. Ein beliebiger Zusammenhang auf  $M \times L$  hat nach [3.13.10](#) also die Gestalt

$$\nabla = \nabla^{\text{triv}} + \omega$$

für  $\omega \in \mathcal{S}^\infty(T^*M \otimes \text{End}(L))$  eine  $(\text{End } L)$ -wertige 1-Form auf  $M$ . Gehen wir unsere Übersetzungen durch, so erkennen wir, daß die kovariante Ableitung in Bezug auf diesen Zusammenhang gegeben wird durch die Formel

$$(\nabla_\xi \eta)_p = d_p(\text{pr}_2 \circ \eta) + (\omega_p(\xi_p))(\eta_p)$$

wo  $\omega_p(\xi_p) \in \text{End}(L)$  den durch Auswerten von  $\omega_p$  auf dem Vektor  $\xi_p$  gegebenen Endomorphismus meint. Insbesondere hängt auch bei allgemeinen Zusammenhängen  $(\nabla_\xi \eta)_p$  nur vom Wert  $\xi_p$  des Vektorfelds  $\xi$  bei  $p$  ab und wir können für jeden Tangentialvektor  $v \in T_pX$  und jeden in einer offenen Umgebung von  $p$  definierten glatten Schnitt  $\eta$  eines Bündels  $E$  mit Zusammenhang ein Element der Faser  $\nabla_v \eta \in E_p$  erklären durch die Vorschrift, daß für alle glatten Vektorfelder  $\xi$  mit  $\xi_p = v$  gilt

$$\nabla_v \eta = (\nabla_\xi \eta)_p$$

**3.13.12 (Motivation für Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln).** Gegeben ein Vektorbündel mit einer Riemann'schen Metrik mag man sich speziell für solche Zusammenhänge interessieren, bei denen die Parallelverschiebung längs glatter Wege orthogonale Abbildungen liefert. Gegeben ein komplexes Vektorbündel mag man sich speziell für solche Zusammenhänge interessieren, bei denen die Parallelverschiebung längs glatter Wege komplexe lineare Abbildungen liefert. Um diese und viele weitere Situationen in einem Aufwasch behandeln zu können, erklären wir nun allgemeiner Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln.

**3.13.13.** Seien  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Lie-Gruppe. Nach [VI.5.8.1](#) ist ein glattes  $G$ -Hauptfaserbündel auf  $X$  ein Paar  $(P, \pi)$  bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $P$  mit einer glatten Rechtsoperation von  $G$  und einer Projektion  $\pi : P \rightarrow X$  derart, daß unsere Projektion  $G$ -äquivariant ist

für die triviale  $G$ -Rechtsoperation auf  $X$  und “lokal trivial” in dem Sinne, daß es für jeden Punkt von  $X$  eine offene Umgebung  $U$  und einen  $G$ -äquivarianten Diffeomorphismus  $U \times G \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U)$  gibt, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\sim} & \pi^{-1}(U) \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & = & U \end{array}$$

**Definition 3.13.14.** Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $G$  eine Lie-Gruppe, und  $\pi : P \rightarrow X$  ein glattes  $G$ -Hauptfaserbündel auf  $X$ . Die Projektion  $\pi : P \rightarrow X$  induziert eine Tangentialabbildung  $d\pi : TP \rightarrow TX$  und damit eine Surjektion von Vektorraumbündeln  $TP \twoheadrightarrow \pi^*TX$ . Ein **Zusammenhang**  $\nabla$  auf  $P$  ist eine  $G$ -äquivariante Spaltung dieser Surjektion

$$\nabla : \pi^*TX \hookrightarrow TP$$

3.13.15 (**Zusammenhänge in trivialen Hauptfaserbündeln**). Der Raum aller Zusammenhänge auf dem trivialen Bündel  $P = X \times G$  ist in natürlicher Weise in Bijektion zum Raum  $\Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}$  aller 1-Formen auf  $X$  mit Werten in  $\mathfrak{g} = T_eG$ . In der Tat haben wir für  $P = X \times G$  ein kommutatives Diagramm mit offensichtlichen horizontalen Abbildungen und vertikalen Identifikationen

$$\begin{array}{ccccc} & TP & \twoheadrightarrow & \pi^*TX & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ TX \times T_eG \times G & \xrightarrow{\sim} & TX \times TG & \twoheadrightarrow & TX \times G \end{array}$$

Eine Spaltung  $\nabla$  liefert insbesondere eine faserweise lineare Abbildung

$$TX = TX \times \{e\} \rightarrow TX \times T_eG \rightarrow \mathfrak{g}$$

und so eine  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $A = A_\nabla$  auf  $X$ . Umgekehrt bezeichne  $(\cdot g) : G \rightarrow G, h \mapsto hg$  die Rechtsmultiplikation mit  $g \in G$ . In dieser Notation bestimmt  $A \in \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}$  einen Zusammenhang  $\nabla = \nabla_A$  durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \nabla : TX \times G &\rightarrow TX \times TG \\ (v, g) &\mapsto (v, (d_e(\cdot g) \circ A)(v)) \end{aligned}$$

### 3.14 Wohin?

*Bemerkung 3.14.1.* Gegeben ein Zusammenhang  $\nabla : \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$  gibt es wohlbestimmte  $k$ -lineare Abbildungen

$$\nabla^i : \Omega_X^i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \rightarrow \Omega_{\mathcal{O}_X}^{i+1} \mathcal{F}$$

mit  $\nabla^i(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^i \omega \wedge \nabla \sigma$  wo das Dachprodukt den hoffentlich offensichtlichen Morphismus  $\Omega_X^i \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$  meint. In der Tat liefert unsere Formel sicher einen Morphismus  $\nabla^i : \Omega_X^i \otimes_k \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$  und wir nur  $\nabla^i(\omega f \otimes \sigma) = \nabla^i(\omega \otimes f\sigma)$  prüfen für alle Schnitte  $f$  in  $\mathcal{O}_X$ . In der Tat haben wir aber

$$d(\omega f) \otimes \sigma = (d\omega) \otimes f\sigma + (-1)^{|\omega|}(\omega \wedge df) \otimes \sigma$$

was zu zeigen war. Schließlich ist

$$\nabla^1 \circ \nabla : \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

sogar  $\mathcal{O}_X$ -linear, dann wir finden

$$\begin{aligned} \nabla^1(\nabla(f\sigma)) &= \nabla^1(df \otimes \sigma + f(\nabla\sigma)) \\ &= -df \otimes \nabla\sigma + df \otimes \nabla\sigma \\ &\quad + f(\nabla^1(\nabla\sigma)) \end{aligned}$$

Ist  $\mathcal{F}$  lokal frei von endlichem Rang, so entspricht  $\nabla^1 \circ \nabla$  einem globalen Schnitt von  $\Omega_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F})$ , der die **Krümmung** unseres Zusammenhangs heißt.

### 3.15 Relativistische Raumzeit

3.15.1. In der Modellierung von Zeit und Raum für die Belange der Newton'schen Mechanik in ?? haben wir erst einmal ignoriert, daß die Erde sich um sich selber dreht und dabei gleichzeitig um die Sonne rast, die sich wiederum mit unvorstellbarer Geschwindigkeit um das Zentrum der Milchstraße bewegt, und so weiter, und sind schlicht von einem dreidimensionalen affinen Raum ausgegangen, von dessen Punkten man einige etwa als Kirchturmspitzen oder Zimmerecken angeben kann. Dann haben wir eine Gruppe von "Bewegungen" unseres Raums postuliert und verwendet, um den eindimensionalen Raum der Längen einzuführen, in dem das Pariser Urmeter eine Basis auszeichnet. Zusätzlich haben wir einen orientierten eindimensionalen affinen Raum aller "Zeitpunkte" postuliert und in dessen Richtungsraum die Basis "Sekunde" mithilfe von Tag und ausgezeichnet. In diesem Rahmen ist dann schon klar, was gemeint ist, wenn wir sagen, die Lichtgeschwindigkeit betrage etwa 300 000 Kilometer pro Sekunde.

3.15.2. Sobald wir jedoch dies alles nicht mehr ignorieren, ist es plötzlich gar nicht mehr so klar: Es gibt dann sozusagen gar keinen "festen Raum" mehr, in dem unsere Lichtgeschwindigkeit konstant sein könnte, sondern "alles ist relativ". Denken wir uns etwa zwei Raketen, die in entgegengesetzter

Richtung aneinander vorbeifliegen, und einen Lichtstrahl, der in Richtung der einen Rakete zwischen ihnen hindurchsaust. Müßte in diesem Fall nicht von den beiden Besatzungen für diesen Lichtstrahl eine unterschiedliche Geschwindigkeit gemessen werden? Statt im weiteren stets von "Rakete Eins" und "Rakete Zwei" zu reden, denken wir uns der Klarheit der Darstellung halber lieber den einen Beobachter in einem sehr langen Zug und nennen ihn den Schaffner, und denken uns den anderen Beobachter auf einem Bahnhof, durch den der besagte Zug fährt, und nennen ihn den Bahnhofsvorsteher. Der Schaffner mißt seinen Zug sorgfältig aus und setzt sich genau in die Mitte. Gerade zu dem Zeitpunkt, zu dem sich Schaffner und Bahnhofsvorsteher gegenüberstehen, sehen beide auch noch die Vorder- und die Rücklichter des Zuges aufleuchten. Daraus ziehen sie jedoch unterschiedliche Schlüsse. Der Schaffner sagt: Na klar, die sind gleichzeitig angekommen. Der Bahnhofsvorsteher dahingegen meint: Als diese Lampen ihr Licht ausgesandt haben, das ist ja nun eine kleine Weile her, war die Lokomotive noch näher am Bahnhof als der Schlußwagen, folglich müssen die Lichter des Schlußwagens etwas früher angekommen sein, damit ihr Licht dennoch meine Augen zur selben Zeit erreichen konnte wie das Licht aus den Lampen der Lokomotive.

3.15.3. Wer hat aber denn nun recht? Unmittelbar würde man wohl erst einmal sagen: Der Bahnhofsvorsteher hat recht, denn er bewegt sich nicht; Dann aber erinnert man sich, daß ja auch der Bahnhof selbst durchs Weltall rast und daß es sich auch um unsere zwei Raketen handeln könnte, und dann fällt uns die Entscheidung möglicherweise schon nicht mehr so leicht, wer von beiden denn nun recht hat.

3.15.4. Die "Relativitätstheorie" löst diesen Widerspruch wie folgt auf: Beide haben recht und wir müssen unsere Vorstellung von einer "absoluten Zeit" aufgeben. Was für den einen Beobachter gleichzeitig ist, ist es für den anderen noch lange nicht! Präziser modelliert man in der Relativitätstheorie Raum und Zeit gemeinsam als eine Menge von "Raum-Zeit-Punkten" oder "Ereignissen". Das Aufleuchten eines Vorderlichts unseres Zuges etwa wäre solch ein Ereignis, oder auch das Aufleuchten eines Rücklichts. Jeder unserer beiden Beobachter ordnet jedem solchen Ereignis in einer Weise, die wir noch ausführlich diskutieren werden, vier reelle Zahlen zu: Drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate. Und in unserem speziellen Fall würde eben der Schaffner den beiden fraglichen Aufleucht-Ereignissen dieselbe Zeitkoordinate zuordnen, der Bahnhofsvorsteher dahingegen verschiedene Zeitkoordinaten.

3.15.5. Das hat hinwiederum auch für die Längenmessung Konsequenzen: Der Bahnhofsvorsteher würde ja wohl vernünftigerweise die Länge des Zuges erklären, indem er gleichzeitig in seinem Sinne die Ortskoordinaten von Lokomotive und Schlußwagen bestimmt und die Differenz bildet. Er wird dabei ei-

ne kürzere Länge erhalten als der Schaffner, der seinerseits behaupten würde, der Bahnhofsvorsteher habe etwas früher den Ort der Lokomotive bestimmt und erst etwas später den Ort des Schlußwagens. Wie ist es aber nun um die Breite des Zuges bestellt? Nun, beide messen in der Tat dieselbe Breite für unseren Zug, was die absonderliche Konsequenz hat, daß der Bahnhofsvorsteher mit vollem Recht behaupten wird, ein Zollstock, mit dem der Schaffner die Breite des Zuges gemessen hat, verkürze sich, wenn der Schaffner ihn nun in Richtung des Zuges dreht, um damit die Länge des Zuges auszumessen. Man mache sich jedoch auch bewußt, daß ein Zollstock ja genau genommen aus einer großen Menge von Atomen besteht, deren wechselseitige Position durch elektromagnetische Kräfte bestimmt wird, also in gewisser Weise durch den Austausch von Lichtsignalen. Nach diesen informellen Vorüberlegungen beginnen wir nun mit der präzisen Formulierung.

3.15.6. In der **Relativitätstheorie** modelliert man Raum und Zeit zusammen als eine Menge

$$X$$

von sogenannten **Raum-Zeit-Punkte** oder **Ereignissen** und nennt  $X$  die **Raumzeit**. Die Bewegung einer Fliege etwa wird durch eine Teilmenge von  $X$  beschrieben und Ort und Zeit einer Klausur durch ein Element von  $X$  oder, da eine Klausur ja eine Weile dauert und in einem nicht ganz kleinen Hörsaal stattfindet, vielleicht eher durch eine Teilmenge von  $X$ . Die Ausbreitung des Lichts modellieren wir durch eine Teilmenge

$$\mathcal{L}^+ \subset X^2$$

die wir uns denken wollen als die Menge aller Paare von Raum-Zeit-Punkten  $(p, q) \in X^2$  derart, daß ein an  $p$  stattfindender Lichtblitz an  $q$  gesehen würde. Wir sagen dann,  $q$  liege **lichtartig zu**  $p$ . Um mathematische Präzision zu erreichen, vereinbaren wir explizit  $(p, p) \in \mathcal{L}^+ \forall p \in X$ .

3.15.7. In der **speziellen Relativitätstheorie** nimmt man zusätzlich an, daß  $X$  so mit der Struktur eines vierdimensionalen reellen affinen Raums versehen werden kann, daß  $\mathcal{L}^+$  stabil ist unter der diagonalen Operation des Richtungsraums  $\vec{X}$  auf  $X^2$ , liegt also  $q$  lichtartig zu  $p$ , so liegt auch  $q + v$  lichtartig zu  $p + v$  für jeden Richtungsvektor  $v \in \vec{X}$ , und daß die Menge der **lichtartigen Vektoren**

$$\vec{\mathcal{L}}^+ = \{v \in \vec{X} \mid (p, p + v) \in \mathcal{L}^+\}$$

für ein und damit jedes  $p \in X$  die "Hälfte einer Quadrik vom Typ  $(1, 1, 1, -1)$ " ist, daß es also in Formeln linear unabhängige Linearformen  $x, y, z, t : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$

SkriptenBilder/BildRel.png

Diese Bilder stellen die Sichtweisen des Bahnhofsvorstehers und des Schaffners in 3.15.4 dar. Im linken Schaubild hat der Bahnhofsvorsteher Ort gegen Zeit aufgetragen von Rücklicht, Schaffner und Vorderlicht, wobei seine Zeitachse senkrecht nach oben zeigt und seine Ortsachse waagrecht nach rechts. Er benutzt Einheiten, in denen die Lichtgeschwindigkeit Eins ist, und hat die Lichtbewegung gestrichelt eingetragen. Der Zug fährt halbe

Lichtgeschwindigkeit, und die Zackenlinie durch die beiden “Lampen-gehen-an-Punkte” besteht aus Ereignissen, denen der Schaffner allen dieselbe Zeitkoordinate geben würde, sagen wir die Zeitkoordinate Null. Das rechte Schaubild hat der Schaffner gezeichnet. Die beiden vereinbaren, ihre Einheiten für Längen und Zeiten so zu wählen, daß die Lichtgeschwindigkeit Eins ist. Es fällt ihnen schwer, ihre Maßstäbe zu vergleichen, ohne ihren Streit über Gleichzeitigkeit wieder aufleben zu lassen (*Besser: Maßstab querhalten?*), aber das gelingt mit folgendem Trick:

Beide wählen ihre Orts- und Zeitkoordinaten  $(x(p), t(p)) \in \mathbb{R}^2$  für den Bahnhofsvorsteher bzw.  $(x'(p), t'(p)) \in \mathbb{R}^2$  für den Schaffner eines Ereignisses  $p$  derart, daß für je zwei Ereignisse  $p, q$  gilt

$$(x(p) - x(q))^2 - (t(p) - t(q))^2 = (x'(p) - x'(q))^2 - (t'(p) - t'(q))^2$$

Sie finden so die Umrechnung  $x' = (\sqrt{1 + b^2})x + bt$  und  $t' = bx + (\sqrt{1 + b^2})t + 4/\sqrt{3}$  mit  $b = -\sqrt{1/3}$ . Wie Sie sehen, scheint dem Schaffner sein Zug um den Faktor  $2/\sqrt{3}$  länger als dem Bahnhofsvorsteher.

gibt mit

$$\vec{\mathcal{L}}^+ = \{v \in \vec{X} \mid x(v)^2 + y(v)^2 + z(v)^2 - t(v)^2 = 0, t(v) \geq 0\}$$

Die Elemente des von der Menge der lichtartigen Vektoren erzeugten Kegels **kausale Vektoren** und die Elemente im Komplement dieses Kegels **raumartige Vektoren**. Die Bezeichnung als “kausaler Vektor” soll zum Ausdruck bringen, daß ein Ereignis nur Ereignisse beeinflussen kann, die von ihm aus durch die Addition derartiger Vektoren erreichbar sind, daß also “keine Wirkung schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausgeübt werden kann”.

3.15.8. *Wohin?* Der **Satz von Alexandrov** besagt, daß die Struktur auf  $X$  als vierdimensionaler reeller affiner Raum auf  $X$  bereits durch die Teilmenge  $\mathcal{L}^+ \subset X^2$  eindeutig bestimmt ist, wenn solch eine Struktur überhaupt existiert. Dazu reicht es, für  $X = \mathbb{R}^4$  mit

$$\mathcal{L}^+ = \{(p, q) \in X^2 \mid (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2 - (p_4 - q_4)^2 = 0, q_4 \geq p_4\}$$

zu zeigen, daß alle Bijektionen  $\phi: X \xrightarrow{\sim} X$  mit  $(\phi \times \phi)(\mathcal{L}^+) = \mathcal{L}^+$  notwendig bereits affin sind. Das wird ausgeführt in [Ben92]. Wir können Lichtstrahlen, als da heißt Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor, allein mithilfe der Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  beschreiben als die maximalen Teilmengen  $L \subset X$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $p, q \in L$  gilt  $(p, q) \in \mathcal{L}^+$  oder  $(q, p) \in \mathcal{L}^+$ . Weiter sind drei paarweise verschiedene Ereignisse  $p, q, r$ , deren affines Erzeugnis raumartig ist, genau dann kollinear, wenn die drei von ihnen ausgehenden Lichtkegel keinen Punkt gemeinsam haben: Um das zu prüfen, benutzt man den Satz von Witt, der uns liefert, daß unsere etc.

3.15.9. Auf der Raumzeit  $X$  betrachten wir die kleinste transitive und reflexive Relation  $\mathcal{K}^+$  im Sinne von II.1.2.1, die die Relation  $\mathcal{L}^+$  umfaßt. Explizit haben wir also  $(p, q) \in \mathcal{K}^+$  genau dann, wenn es eine Sequenz von Ereignissen  $p = p_0, p_1, \dots, p_n = q$  gibt mit  $(p_{i-1}, p_i) \in \mathcal{L}^+$  für  $i = 1, \dots, n$ . Wir sagen dann auch,  $q$  liege **kausal** zu  $p$ . Sind Ereignisse  $p, q$  gegeben derart, daß weder  $p$  kausal liegt zu  $q$  noch  $q$  kausal zu  $p$ , so sagen wir, die Ereignisse liegen **raumartig** zueinander.

3.15.10. *Wohin?*

1.) Zwei raumartige Punkte können zeitgleich gemacht werden

Die Punkte unseres Anschauungsraums wie Zimmerecken oder Kirchturmspitzen beschreiben eine Schar paralleler Geraden in unserer Raumzeit, jedenfalls in erster Näherung. Ich hätte das allerdings viel lieber aus einer Eindeutigkeit zusammen mit der Invarianz der Maxwell’schen Gleichungen gefolgert, statt es sozusagen als zusätzliche Annahme über die Beziehung unseres Modells zur materiellen Wirklichkeit hinzuzunehmen.

**Lemma 3.15.11.** *Je zwei quadratische Formen im Sinne von ?? auf dem Richtungsraum der Raumzeit, die auf allen lichtartigen Vektoren verschwinden, sind linear abhängig alias gleich bis auf eine multiplikative Konstante.*

*Beweis.* Sicher reicht es zu zeigen, daß jede quadratische Form auf  $\mathbb{R}^4$ , die auf der Nullstellenmenge  $\mathcal{L}$  des Polynoms  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  verschwindet, ein skalares Vielfaches dieses Polynoms sein muß. Für den Beweis ist mir außer roher Rechnung unter Zuhilfenahme des Satzes über Hauptachsentransformationen, die dem Leser überlassen bleiben möge, nur ein Argument eingefallen, das die Kenntnis gewisser Grundbegriffe der algebraischen Geometrie voraussetzt. Dann kann man bemerken, daß das Polynom  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  im Polynomring mit komplexen Koeffizienten irreduzibel ist. Die Quadrik  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0\}$  ist mithin erst recht irreduzibel, und da der Zariski-Abschluß von  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$  eine komplex dreidimensionale Untervarietät sein muß, wie man an der Dimension des Tangentialraums an einem beliebigen glatten Punkt erkennen kann, liegt  $\mathcal{L}$  bereits Zariski-dicht in  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ . Jedes Polynom, das auf  $\mathcal{L}$  verschwindet, muß also nach dem Hilbert'schen Nullstellensatz ?? ein Vielfaches des Polynoms  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  sein.  $\square$

3.15.12. Der Vektorraum  $Q$  aller homogenen, quadratischen, auf den lichtartigen Vektoren verschwindenden Funktionen  $\vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ist nach 3.15.11 eindimensional und wir erhalten mit diesen Definitionen eine kanonische multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} Q \times \vec{X} \times \vec{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, v, w) &\mapsto \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w)) \end{aligned}$$

und daraus in offensichtlicher Weise eine symmetrische bilineare Abbildung

$$l : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow Q^*$$

die wir die **Lorentzmetrik** nennen, obwohl sie keine Metrik im Sinne von II.6.2.1 ist. Die Einszusammenhangskomponente der Gruppe aller derjenigen affinen Automorphismen der Raumzeit, deren linearer Anteil die Lorentzmetrik invariant läßt, heißt die **Poincaré-Gruppe**, ihre Elemente heißen **Lorentztransformationen**. Die Gruppe ihrer linearen Anteile heißt die **Lorentz-Gruppe**. Die Bahnen der Poincaré-Gruppe auf der Menge  $X^2$  aller Paare von Raum-Zeit-Punkten sind offensichtlich in Bijektion zu den Bahnen der Lorentz-Gruppe auf dem Richtungsraum der Raumzeit  $\vec{X}$ . Wählen wir ein  $q \in Q$ , das auf raumartigen Vektoren positiv ist, so ist jede Faser von  $q : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  über einer positiven Zahl eine Bahn, jede Faser über einer negativen Zahl zerfällt in zwei Bahnen, der einen bestehend aus kausalen

Vektoren und der anderen aus ihren Negativen, und die Nullfaser zerfällt in drei Bahnen: Den Nullpunkt, die von Null verschiedenen lichtartigen Vektoren sowie ihre Negativen. Die Bahnen in der Menge der raumartigen Vektoren bilden unter der durch das Strecken von Vektoren definierten Operation einen  $(\mathbb{R}_{>0})$ -Torsor, den wir

$$L^+$$

notieren und dessen Elemente wir **relativistische Längeneinheiten** nennen. In der klassischen Mechanik hatten wir zwar bereits in ?? den “Torsor der Längeneinheiten” definiert und auch mit  $L^+$  bezeichnet, aber da man kaum je gleichzeitig relativistisch und klassisch arbeiten wird, sollte das nicht stören. Eine ausgezeichnete relativistische Längeneinheit wäre etwa die Bahn

$$m$$

des Richtungsvektors  $\vec{m}$  der Raumzeit, der zwei an beiden Enden des Urmeters in Paris stattfindende Ereignisse verbindet, wenn diese “gleichzeitig” stattfinden oder genauer derart, daß sich die von ihnen ausgehenden Lichtsignale genau in der Mitte unseres Urmeters treffen. Hierbei gehen wir davon aus, daß die Enden unseres Urmeters parallele Geraden in der Raumzeit beschreiben. Die Bahnen in der Menge der kausalen nicht lichtartigen Vektoren bilden unter der durch das Strecken von Vektoren definierten Operation auch einen  $(\mathbb{R}_{>0})$ -Torsor, den wir

$$Z^+$$

notieren und dessen Elemente wir **relativistische Zeiteinheiten** nennen. Eine ausgezeichnete Zeiteinheit wäre etwa die Bahn

$$s$$

des Richtungsvektors  $\vec{s}$  der Raumzeit, der zwei Ereignisse verbindet, von denen das zweite auf derselben Uhr eine Sekunde später stattfindet. Hierbei gehen wir davon aus, daß unsere Uhr eine Gerade in der Raumzeit beschreibt. Diese beiden Torsoren können wir jedoch leicht identifizieren, indem wir die Abbildung

$$i : Z^+ \xrightarrow{\sim} L^+$$

betrachten, die charakterisiert wird durch  $q(i(t)) = -q(t) \forall q \in Q$ . Wir hätten dann etwa  $i(s) = cm$  für  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  die Lichtgeschwindigkeit ausgedrückt in Meter pro Sekunde.

3.15.13. *Präschrott* In der speziellen Relativitätstheorie modelliert man Raum und Zeit als einen vierdimensionalen reellen affinen Raum

$$X$$

aller **Raum-Zeit-Punkte** oder **Ereignisse**. Wir nennen  $X$  die **Raumzeit**. Ort und Zeit einer Klausur etwa werden durch ein Element von  $X$  oder, da eine Klausur ja eine Weile dauert und in einem nicht ganz kleinen Hörsaal stattfindet, vielleicht eher durch eine Teilmenge von  $X$  beschrieben. Die Bewegung einer Fliege wird durch eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $X$  beschrieben und die Bewegung eines Teilchens ohne äußere Einwirkungen durch eine Gerade in  $X$ . Die Ausbreitung des Lichts modellieren wir durch eine Teilmenge

$$\mathcal{L}^+ \subset X^2$$

die wir uns denken als die Menge aller Paare von Raum-Zeit-Punkten  $(p, q) \in X^2$  derart, daß ein an  $p$  stattfindender Lichtblitz an  $q$  gesehen würde. Wir fordern, daß  $\mathcal{L}^+$  stabil ist unter der offensichtlichen diagonalen Wirkung des Richtungsraums  $\vec{X}$  von  $X$  auf  $X^2$  und daß die Menge  $\vec{\mathcal{L}}^+ = \{v \in \vec{X} \mid (p, p+v) \in \mathcal{L}^+\}$  für ein und damit jedes  $p \in X$  die "Hälfte einer Quadrik vom Typ  $(1, 1, 1, -1)$ " sein möge, daß es also in Formeln linear unabhängige Linearformen  $x, y, z, t : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\vec{\mathcal{L}}^+ = \{v \in \vec{X} \mid x(v)^2 + y(v)^2 + z(v)^2 - t(v)^2 = 0, t(v) \geq 0\}$$

Die Elemente von  $\vec{\mathcal{L}}^+$  nennen wir **lichtartige Vektoren**, die Elemente des von der Menge der lichtartigen Vektoren erzeugten Kegels **kausale Vektoren** und die Elemente im Komplement dieses Kegels **raumartige Vektoren**.

### 3.16 Die Bewegungsgleichungen geladener Teilchen

3.16.1. Um die Bewegungsgleichungen geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern zu formulieren, wählen wir zusätzlich zum Torsor der Massen, dessen Elemente wir aus Gründen, die später erläutert werden, von nun an als **Ruhmassen** bezeichnen:

$C$  einen eindimensionalen reellen Vektorraum, dessen Elemente wir **Ladungen** (englisch und französisch **charge**) nennen. Ein Erzeuger dieses Vektorraums ist zum Beispiel das **Coulomb**.

3.16.2. Sei  $k$  ein Körper. Gegeben endlichdimensionale  $k$ -Vektorräume  $V, W$  und eine natürliche Zahl  $p \in \mathbb{Z}$  bezeichnen wir den Raum  $\text{Alt}^p(V) \otimes W$  auch als den Raum aller  **$W$ -wertigen  $p$ -Formen** auf  $V$ . In der Tat kann er leicht identifiziert werden mit dem Raum aller multilinearen alternierenden Abbildungen  $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow W$ .

**Definition 3.16.3.** Ein auf der relativistischen Raumzeit  $X$  aus 3.15 definiertes **elektromagnetisches Feld** ist eine 2-Form  $F$  auf  $X$  mit Werten im

eindimensionalen reellen Vektorraum  $M \otimes C^* \otimes Z$ , also eine Abbildung

$$F : X \rightarrow \text{Alt}^2(\vec{X}) \otimes M \otimes C^* \otimes Z$$

3.16.4. Hier meint  $M$  den Vektorraum zum Torsor aller Ruhemassen und  $C$  den Vektorraum aller Ladungen und  $Z = \mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} Z^+$  den eindimensionalen reellen Vektorraum aller relativistischen Zeitspannen. Die Beziehung zur üblichen Darstellung elektromagnetischer Felder diskutieren wir im folgenden noch ausführlich.

3.16.5. Die Bewegung eines Teilchens wird ja in der Relativitätstheorie ganz allgemein beschrieben durch eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit  $K \subset X$  der Raumzeit, seine "Weltlinie". Wir wollen nun die Weltlinien sogenannter "geladener Teilchen mit positiver Ruhemasse" in einem elektromagnetischen Feld beschreiben. Zunächst einmal fordern wir von diesen Weltlinien, daß ihre Tangentialräume  $T_x K$  außer dem Nullvektor weder raumartige noch lichtartige Vektoren enthalten, daß also salopp gesprochen Teilchen mit positiver Ruhemasse stets unterhalb der Lichtgeschwindigkeit bleiben. Das wiederum bedeutet, daß wir eine bis auf Zeitverschiebung eindeutige Parametrisierung unserer Weltlinie  $K$  nach ihrer "Eigenzeit" finden können: Genauer bilden wir zum Torsor  $Z^+$  der relativistischen Zeiteinheiten den eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$Z = \mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} Z^+$$

und finden für alle  $x \in K$  genau einen Diffeomorphismus

$$\gamma : Z \xrightarrow{\sim} K$$

mit  $\gamma(0) = x$  und der Eigenschaft, daß  $d_\eta \gamma : Z \rightarrow \vec{X}$  jedes  $z \in Z^+$  auf einen Vektor der durch  $z$  repräsentierten Bahn abbildet, und das für alle  $\eta$ . Anschaulich gesprochen parametrisieren wir damit unsere Weltlinie "nach dem Stand einer mitgeführten Uhr, die wir so stellen, daß sie bei  $x$  auf Null steht". Bilden wir dann das Differential von

$$\begin{aligned} d\gamma : Z &\rightarrow \vec{X} \otimes Z^* \\ \eta &\mapsto d_\eta \gamma \end{aligned}$$

so erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} d^2\gamma : Z &\rightarrow \vec{X} \otimes (Z^*)^{\otimes 2} \\ \eta &\mapsto d_\eta^2 \gamma \end{aligned}$$

die man als das relativistische Analogon der Beschleunigung ansehen mag. Die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit der Ladung  $e$  und der Ruhemasse  $m$  im elektromagnetischen Feld  $F$  ist nun die Gleichung

$$m d_\eta^2 \gamma = e \tilde{F}_{\gamma(\eta)}(d_\eta \gamma)$$

und soll für alle Eigenzeiten  $\eta$  als Gleichung in  $M \otimes \vec{X} \otimes (Z^*)^{\otimes 2}$  gelten, wobei nur die Bedeutung von  $\tilde{F}$  noch zu klären ist. Das geschieht im Anschluß.

3.16.6. Um die Bedeutung von  $\tilde{F}$  zu erklären, beginnen wir mit der Einbettung  $\text{Alt}^2(\vec{X}) \subset (\vec{X} \otimes \vec{X})^* = \text{Hom}(\vec{X}, \vec{X}^*)$ . Kombinieren wir sie mit der durch die Lorentzmetrik  $l : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow Q^*$  gegebenen Identifikation  $\vec{X} \otimes Q \xrightarrow{\sim} \vec{X}^*$  oder vielmehr ihrer Inversen, so erhalten wir eine Abbildung

$$\text{Alt}^2(\vec{X}) \rightarrow \text{Hom}(\vec{X}, \vec{X} \otimes Q)$$

Die Abbildung  $Z^+ \times Z^+ \rightarrow Q^*$ ,  $(\alpha[v], \beta[v]) \mapsto (q \mapsto \alpha\beta q(v))$  für  $v \in \vec{X}$  kausal und nicht lichtartig und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$  ist wohldefiniert und induziert einen Isomorphismus  $Z^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} Q^*$  alias  $Q \xrightarrow{\sim} (Z^*)^{\otimes 2}$ , mit dessen Hilfe wir nun eine Abbildung

$$\text{Alt}^2(\vec{X}) \rightarrow \text{Hom}(\vec{X}, \vec{X} \otimes (Z^*)^{\otimes 2})$$

erhalten. Wir notieren sie  $F \mapsto \tilde{F}$  und erhalten in derselben Weise für ein elektromagnetisches Feld  $F : X \rightarrow \text{Alt}^2(\vec{X}) \otimes Z \otimes M \otimes C^*$  die Abbildung

$$\tilde{F} : X \rightarrow \text{Hom}(\vec{X}, \vec{X}) \otimes Z^* \otimes M \otimes C^*$$

3.16.7. Wählen wir Koordinaten  $(x, y, z, t) : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^4$  auf der Raumzeit so, daß mit den induzierten Linearformen auf  $\vec{X}$  die Menge der lichtartigen Vektoren gerade durch

$$\vec{\mathcal{L}}^+ = \left\{ v \in \vec{X} \mid x(v)^2 + y(v)^2 + z(v)^2 - c^2 t(v)^2 = 0, t(v) \geq 0 \right\}$$

gegeben wird, so folgt für unsere Weltlinie  $K$  zunächst einmal, daß  $t$  einen Diffeomorphismus  $t : K \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  liefern muß, so daß wir unsere Weltlinie statt durch ihre Eigenzeit  $\eta$  auch durch die Zeit  $t$  in unserem Koordinatensystem parametrisieren können. Damit hätten wir also eine Parametrisierung unserer Weltlinie als

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), t)$$

wo wir die in der Physik übliche Schreibweise verwenden und verschiedene Abbildungen mit demselben Symbol bezeichnen und nur durch die Bezeichnungen der Variablen klarmachen, welche Abbildung genau gemeint ist. In

unserem Fall haben wir etwa ein Diagramm aus Bijektionen

$$\begin{array}{ccccc}
 t & & \eta & & \tau \\
 \mathbb{R} & \rightarrow & Z & \leftarrow & \mathbb{R} \\
 & \searrow & \gamma \downarrow \gamma & \swarrow & \\
 & & K & & 
 \end{array}$$

bei dem wir alle Pfeile nach unten mit  $\gamma$  bezeichnen, wobei wir jedoch links die Parametrisierung nach der Zeitkoordinate  $t$  unseres Koordinatensystems meinen, in der Mitte die Parametrisierung nach der Eigenzeit  $\eta$  und rechts diejenige Parametrisierung nach  $\tau \in \mathbb{R}$ , die dadurch bestimmt ist, daß die obere rechte Horizontale gerade die Multiplikation mit der durch  $(0, 0, 0, 1)$  gegebenen relativistischen Zeiteinheit  $s \in Z$  sein soll. So wird Verknüpfung von rechts nach links in der oberen Horizontale eine Umparametrisierung durch  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau \mapsto t$  mit der Eigenschaft, daß für  $\dot{x}$  etc. die Ableitung nach  $t$  und  $x'$  etc. die Ableitung nach  $\tau$  stets  $(x', y', z', t')$  in derselben Bahn liegt wie  $(0, 0, 0, 1)$ , daß also gilt

$$\dot{x}^2 t'^2 + \dot{y}^2 t'^2 + \dot{z}^2 t'^2 - c^2 t'^2 = -c^2$$

und wegen  $t' > 0$  ist das gleichbedeutend zu

$$t' = \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

Betrachten wir also in unserem Koordinatensystem die klassische Geschwindigkeit  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , so haben wir  $t' = (1 - \vec{v}^2/c^2)^{-1/2}$  und der sogenannte **relativistische Impuls**

$$\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$$

kann auch verstanden werden als der Vektor der ersten drei Komponenten der Ableitung nach der Eigenzeit  $\vec{p} = m(x', y', z')$ . Wir erhalten so auf der einen Seite unserer Bewegungsgleichung

$$m\gamma'' = \begin{pmatrix} \dot{\vec{p}} t' \\ m t'' \end{pmatrix} = m \frac{d^2 \gamma}{(d\tau)^2}$$

Nun schreiben wir die andere Seite in Koordinaten. Unser elektromagnetisches Feld  $F$  können wir in unserem Koordinatensystem schreiben in der Gestalt

$$\begin{aligned}
 F &= E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt \\
 &\quad + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

mit Funktionen  $E^i, B^i : X \rightarrow M \otimes C^* \otimes Z$ . Man mag diese Funktionen als zwei zeitabhängige Vektorfelder  $E$  und  $B$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  interpretieren, sie heißen dann das elektrische und das magnetische Feld.

3.16.8. Auf der anderen Seite unserer Gleichung dahingegen finden wir

$$\frac{d_\tau \gamma}{d\tau} = \begin{pmatrix} \vec{v} t' \\ t' \end{pmatrix}$$

und nach Einsetzen in das elektromagnetische Feld

$$\begin{pmatrix} E^1 t' + B^3 \dot{y} t' - B^2 \dot{z} t' \\ E^2 t' + B^1 \dot{z} t' - B^3 \dot{x} t' \\ E^3 t' + B^2 \dot{x} t' - B^1 \dot{y} t' \\ -E^1 \dot{x} t' - E^2 \dot{y} t' - E^3 \dot{z} t' \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Komponenten liefern nach Kürzen von  $t'$  die üblichen Gleichungen

$$\dot{\vec{p}} = E + B \times \vec{v}$$

bis auf Faktoren  $c$ , die ich noch vergessen habe und die beim Dualisieren entstehen. Die letzte Gleichung folgt automatisch wegen

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = c^2 t't''$$

und  $x'' = E_1 t'$  etc.

### 3.17 Die Maxwell'schen Gleichungen

3.17.1 (**Die Maxwell'schen Gleichungen**). Die Maxwell'schen Gleichungen übersetzen sich nun in die Gleichungen

$$dF = 0 = d *_l F$$

für ein und jedes  $l : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow L^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  mit der bilinearen Abbildung wie in 3.18.4 und eine beliebige Orientierung, wie wir im folgenden ausführen.

**Lemma 3.17.2.** *Bezeichnen wir die Koordinaten des  $\mathbb{R}^4$  mit  $x, y, z, t$  und betrachten die 2-Form*

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt \\ + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy$$

und setzen  $H = cB$  für eine Konstante  $c \neq 0$ , so ist die Gleichung  $dF = 0$  äquivalent zu den beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum, in Formeln

$$dF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left( \operatorname{div} H = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \right)$$

Betrachten wir zusätzlich die Lorentzmetrik  $l = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2} + dz^{\otimes 2} - c^2 dt^{\otimes 2}$ , so ist die Gleichung  $d(*_l F) = 0$  äquivalent zu den beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum, in Formeln

$$d(*_l F) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left( \operatorname{div} E = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

3.17.3. Hierbei sind  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  in Bezug auf die ersten drei Koordinaten  $x, y, z$  zu bilden und  $*_l$  in Bezug auf die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^4$ . Die im Lemma gegebene Darstellung der Maxwell'schen Gleichungen als  $dF = 0 = d(*_l F)$  macht auch unmittelbar klar, warum und in welcher Weise diese Gleichungen unter Lorentz-Transformationen invariant sind.

*Ergänzung 3.17.4.* Die im Lemma gegebene Darstellung der Maxwell'schen Gleichungen als  $dF = 0 = d(*_l F)$  macht mit der konformen Invarianz des Hodge-\*-Operators auf 2-Formen in vierdimensionalen Räumen sogar klar, daß und wie diese Gleichungen unter konformen Abbildungen invariant sind. Insbesondere sind sie damit invariant unter jeder sogenannten Inversion  $x + \vec{v} \mapsto x + \vec{v}/l(\vec{v}, \vec{v})$ , die jeweils nur auf dem Komplement des Kegels aller zu  $x$  lichtartig liegenden Punkte erklärt ist. In der Tat sind derartige Inversionen nach Übung IV.1.4.15 stets konform.

*Beweis.* Zunächst erhalten wir

$$\begin{aligned} dF &= +E_y^1 dy \wedge dx \wedge dt + E_z^1 dz \wedge dx \wedge dt \\ &\quad + E_x^2 dx \wedge dy \wedge dt + E_z^2 dz \wedge dy \wedge dt \\ &\quad + E_x^3 dx \wedge dz \wedge dt + E_y^3 dy \wedge dz \wedge dt \\ &\quad + B_x^1 dx \wedge dy \wedge dz + B_t^1 dt \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + B_y^2 dy \wedge dz \wedge dx + B_t^2 dt \wedge dz \wedge dx \\ &\quad + B_z^3 dz \wedge dx \wedge dy + B_t^3 dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

und nach Zusammenfassen der Terme sehen wir, daß die Gleichung  $dF = 0$  äquivalent ist zu den ersten beiden Maxwell'schen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} B_x^1 + B_y^2 + B_z^3 &= 0 && \text{alias} \quad \operatorname{div} B = 0 \\ E_y^3 - E_z^2 &= -B_t^1 \\ E_z^1 - E_x^3 &= -B_t^2 \\ E_z^2 - E_y^1 &= -B_t^3 \end{aligned} \right\} \quad \text{alias} \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Nach unseren allgemeinen Formeln liefert weiter das Anwenden des Hodge-\* Operators in Bezug auf die Lorentzmetrik und die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^4$  für  $*_l F$  die Darstellung

$$\begin{aligned} *_l F &= E^1 c^{-1} dy \wedge dz - E^2 c^{-1} dx \wedge dz + E^3 c^{-1} dx \wedge dy \\ &\quad - B^1 c dx \wedge dt - B^2 c dy \wedge dt - B^3 c dz \wedge dt \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} d(*_l F) &= +c^{-1} E_x^1 dx \wedge dy \wedge dz + c^{-1} E_t^1 dt \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - c^{-1} E_y^2 dy \wedge dx \wedge dz - c^{-1} E_t^2 dt \wedge dx \wedge dz \\ &\quad + c^{-1} E_z^3 dz \wedge dx \wedge dy + c^{-1} E_t^3 dt \wedge dx \wedge dy \\ &\quad - c B_y^1 dy \wedge dx \wedge dt - c B_z^1 dz \wedge dx \wedge dt \\ &\quad - c B_x^2 dx \wedge dy \wedge dt - c B_z^2 dz \wedge dy \wedge dt \\ &\quad - c B_x^3 dx \wedge dz \wedge dt - c B_y^3 dy \wedge dz \wedge dt \end{aligned}$$

Nach Zusammenfassen der Terme sehen wir so, daß die Gleichung  $d(*_l F) = 0$  äquivalent ist zu den beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} c^{-1}(E_x^1 + E_y^2 + E_z^3) &= 0 && \text{alias } \operatorname{div} E = 0 \\ \left. \begin{aligned} c(B_y^3 - B_z^2) &= c^{-1} E_t^1 \\ c(B_z^1 - B_x^3) &= c^{-1} E_t^2 \\ c(B_x^2 - B_y^1) &= c^{-1} E_t^3 \end{aligned} \right\} && \text{alias } \operatorname{rot} B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad \square \end{aligned}$$

### 3.18 Lorentzgruppe, noch Schrott

**Lemma 3.18.1.** *Der Stabilisator der Quadrik  $Q = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0\}$  in  $\operatorname{GL}(4; \mathbb{R})$  wird mit  $J = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1)$  gegeben durch*

$$\{A \in \operatorname{GL}(4; \mathbb{R}) \mid AQ = Q\} = \{A \in \operatorname{GL}(4; \mathbb{R}) \mid A^T J A \in \mathbb{R}^\times J\}$$

3.18.2. Hier meint links  $AQ$  das Bild unserer Quadrik  $Q \subset \mathbb{R}^4$ , in Formeln  $AQ = \{Av \mid v \in Q\}$ , und rechts meint  $A^T J A$  das Produkt von  $(4 \times 4)$ -Matrizen.

*Beweis.* Die Inklusion  $\supset$  scheint mir offensichtlich. Für den Nachweis von  $\subset$  ist mir außer roher Rechnung, die dem Leser überlassen bleiben möge, nur ein Argument eingefallen, das die Kenntnis gewisser Grundbegriffe der algebraischen Geometrie voraussetzt: Die Quadrik  $Q_{\mathbb{C}} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0\}$  ist nämlich irreduzibel und der Zariski-Abschluß von  $Q$  in  $Q_{\mathbb{C}}$  ist eine komplex dreidimensionale Untervarietät, wie man an der Dimension des Tangentialraums an einem beliebigen glatten Punkt erkennen kann. Folglich liegt  $Q$  Zariski-dicht in  $Q_{\mathbb{C}}$ , und der Stabilisator von  $Q_{\mathbb{C}}$  in  $\operatorname{GL}(4; \mathbb{C})$  ergibt sich leicht mit dem Nullstellensatz zu  $\{A \in \operatorname{GL}(4; \mathbb{C}) \mid A^T J A \in \mathbb{C}^\times J\}$ .  $\square$

3.18.3. Der Stabilisator der Menge der lichtartigen Vektoren  $\vec{\mathcal{L}} \subset \vec{X}$  in  $SL(\vec{X})$  ist also isomorph zur Einszusammenhangskomponente der Gruppe  $SO(3, 1)$ , die mit  $J$  wie eben definiert ist durch die Vorschrift

$$SO(3, 1) = \{A \in SL(4; \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$$

3.18.4. Die Menge aller von Null verschiedenen quadratischen Formen, die auf allen lichtartigen Vektoren verschwinden und auf allen kausalen Vektoren negativ sind, bildet einen  $\mathbb{R}_{>0}$ -Torsor  $L^+$ . Bezeichnen wir mit  $L$  den zugehörigen orientierten eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so erhalten wir eine multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} L \times \vec{X} \times \vec{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (Q, v, w) &\mapsto \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)) \end{aligned}$$

alias eine nichtausgeartete symmetrische bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{X} \times \vec{X} &\rightarrow L^* \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

### 3.19 Schrott

3.19.1. Die Teilmenge  $Q^+ \subset Q$  der auf allen raumartigen Vektoren positiven quadratischen Funktionen bildet in  $Q$  eine Zusammenhangskomponente des Komplements des Nullvektors. Die ‘‘Wurzelfunktionen’’ auf  $Q^+$ , d.h. die Abbildungen  $Q^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Quadrat die Einschränkung einer linearen Funktion ist, bilden einen eindimensionalen Teilraum  $L \subset \text{Ens}(Q^+, \mathbb{R})$ , und die Teilmenge

$$L^+ \subset L$$

aller positiven Wurzelfunktionen bildet in  $L$  eine Halbgerade alias eine Zusammenhangskomponente des Komplements des Nullvektors. Wir nennen die Elemente von  $L^+$  **relativistische Längeneinheiten**. In der klassischen Mechanik haben wir zwar bereits in ?? den ‘‘Torsor der Längeneinheiten’’ definiert und auch mit  $L^+$  bezeichnet, aber da man kaum je gleichzeitig relativistisch und klassisch arbeiten wird, sollte das nicht stören. Eine ausgezeichnete relativistische Längeneinheit  $l \in L^+$  wäre etwa  $l = q^{-1/2}$  für  $q$  die homogene quadratische Funktion mit  $q(\vec{m}) = 1$ , wo  $\vec{m}$  den Richtungsvektor der Raumzeit bezeichnet, der zwei an beiden Enden des Urmeters in Paris stattfindende Ereignisse verbindet, wenn diese ‘‘gleichzeitig’’ stattfinden oder genauer derart, daß sich die von ihnen ausgehenden Lichtsignale genau in der Mitte unseres Urmeters treffen. Ein anderes ausgezeichnetes Element  $l'$

von  $L^+$  würde durch die Vorschrift  $l' = q'^{-1/2}$  festgelegt für  $q'$  die homogene quadratische Funktion mit  $q'(\vec{s}) = -1$  für  $\vec{s}$  den Richtungsvektor der Raumzeit, der zwei Ereignisse verbindet, von denen das zweite auf derselben Uhr eine Sekunde später stattfindet. Hierbei gehen wir davon aus, daß die Enden unseres Urmeters parallele Geraden in der Raumzeit bilden und daß unsere Uhr eine Gerade in der Raumzeit beschreibt. Wir haben dann  $l' = cl$  für  $c \in \mathbb{R}$  die Zahl der Meter, die das Licht in einer Sekunde zurücklegt. Zwischen den entsprechenden quadratischen Funktionen bestünde dahingegen die Beziehung  $q' = c^{-2}q$ . Nun liefert die Multiplikation eine kanonische Identifikation  $\mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} Q^+ \xrightarrow{\sim} Q$ . Bilden wir umgekehrt zum  $\mathbb{R}_{>0}$ -Torsor  $L^+$  der relativistischen Längeneinheiten den zugehörigen orientierten eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$L = \mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} L^+$$

so können wir einen Isomorphismus  $L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} Q^*$  festlegen durch die Bedingung, daß für die zugehörige multilineare Abbildung  $Q \otimes L \otimes L \rightarrow \mathbb{R}$  und alle  $q \in Q^+$  gilt  $(q, q^{-1/2}, q^{-1/2}) \mapsto 1$ . Damit wird unsere Lorentzmetrik dann schließlich eine vollständig kanonische bilineare Abbildung

$$l : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow L^{\otimes 2}$$

3.19.2. Vermittels eines Gruppenisomorphismus  $\phi : H \xrightarrow{\sim} G$  kann man zunächst einmal in hoffentlich offensichtlicher Weise jeden  $G$ -Torsor zu einem  $H$ -Torsor zurückziehen. Speziell bilden wir zu jedem  $(\mathbb{R}_{>0})$ -Torsor  $T$  und jeder von Null verschiedenen reellen Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}^\times$  einen  $(\mathbb{R}_{>0})$ -Torsor  $T^\alpha$ , indem wir von derselben zugrundeliegenden Menge ausgehen, aber die Wirkung von  $x > 0$  erklären durch  $(xt)^\alpha = x^\alpha t^\alpha$  mit der Konvention, daß wir ein Element  $t \in T$  als  $t^\alpha$  schreiben, wenn wir es als Element des  $(\mathbb{R}_{>0})$ -Torsors  $T^\alpha$  auffassen. Die von Null verschiedenen, homogenen, quadratischen, auf den lichtartigen Vektoren verschwindenden und auf den kausalen Vektoren nicht-positiven Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  bilden nach 3.15.11 einen  $(\mathbb{R}_{>0})$ -Torsor, den ich  $Q^+$  notieren will. Dazu bilden wir nun den  $(\mathbb{R}_{>0})$ -Torsor

$$L^+ = (Q^+)^{-1/2}$$

und nennen dessen Elemente **relativistische Längeneinheiten**. In der klassischen Mechanik haben wir zwar bereits in ?? den “Torsor der Längeneinheiten” definiert und auch mit  $L^+$  bezeichnet, aber da man kaum je gleichzeitig relativistisch und klassisch arbeiten wird, sollte das nicht stören. Eine ausgezeichnete relativistische Längeneinheit  $l \in L^+$  wäre etwa  $l = q^{-1/2}$  für  $q$  die homogene quadratische Funktion mit  $q(\vec{m}) = 1$ , wo  $\vec{m}$  den Richtungsvektor der Raumzeit bezeichnet, der zwei an beiden Enden des Urmeters in Paris

stattfindende Ereignisse verbindet, wenn diese “gleichzeitig” stattfinden oder genauer derart, daß sich die von ihnen ausgehenden Lichtsignale genau in der Mitte unseres Urmeters treffen. Ein anderes ausgezeichnetes Element  $l'$  von  $L^+$  würde durch die Vorschrift  $l' = q'^{-1/2}$  festgelegt für  $q'$  die homogene quadratische Funktion mit  $q'(\vec{s}) = -1$  für  $\vec{s}$  den Richtungsvektor der Raumzeit, der zwei Ereignisse verbindet, von denen das zweite auf derselben Uhr eine Sekunde später stattfindet. Hierbei gehen wir davon aus, daß die Enden unseres Urmeters parallele Geraden in der Raumzeit bilden und daß unsere Uhr eine Gerade in der Raumzeit beschreibt. Wir haben dann  $l' = cl$  für  $c \in \mathbb{R}$  die Zahl der Meter, die das Licht in einer Sekunde zurücklegt. Zwischen den entsprechenden quadratischen Funktionen bestünde dahingegen die Beziehung  $q' = c^{-2}q$ . Nun liefert die Multiplikation eine kanonische Identifikation  $\mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} Q^+ \xrightarrow{\sim} Q$ . Bilden wir umgekehrt zum  $\mathbb{R}_{>0}$ -Torsor  $L^+$  der relativistischen Längeneinheiten den zugehörigen orientierten eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$L = \mathbb{R} \times_{\mathbb{R}_{>0}} L^+$$

so können wir einen Isomorphismus  $L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} Q^*$  festlegen durch die Bedingung, daß für die zugehörige multilineare Abbildung  $Q \otimes L \otimes L \rightarrow \mathbb{R}$  und alle  $q \in Q^+$  gilt  $(q, q^{-1/2}, q^{-1/2}) \mapsto 1$ . Damit wird unsere Lorentzmetrik dann schließlich eine vollständig kanonische bilineare Abbildung

$$l : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow L^{\otimes 2}$$

### 3.20 Der Spannungstensor

3.20.1. Die Bezeichnung “Tensor” kommt von lateinisch “tendere” für “spannen”. Im heutigen Sprachgebrauch ist jedoch der sogenannte “Spannungstensor” nur einer unter vielen. Um diesen Tensor zu verstehen, denken wir uns einen Schraubenschlüssel, mithilfe dessen wir eine festsitzende Radmutter zu lösen versuchen. Wir ziehen mit aller Kraft, aber die Radmutter rührt sich nicht. Die dabei im Schraubenschlüssel auftretenden Spannungen wollen wir nun mathematisch beschreiben. Sei dazu  $\mathbb{E}$  der Anschauungsraum und  $s : \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  das zugehörige kanonische Skalarprodukt im Sinne von ???. Die Punkte des Raums innerhalb des angesetzten Schraubenschlüssels modellieren wir als eine halboffene Teilmenge  $S \subset \mathbb{E}$ . Beim Anziehen deformiert sich unser Schlüssel ein wenig, und diese Deformation modellieren wir als eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{E}$ , die “fast die Einbettung ist” und die jedem Punkt im Schraubenschlüssel den Punkt des Raums zuordnet, in den er durch unsere Deformation bewegt wird. In erster Näherung hat diese Deformation nach IV.1.2.3 an einer Stelle  $p \in S$  des Schraubenschlüssels die

Gestalt

$$\varphi(p + \vec{h}) \sim^1 \varphi(p) + (d_p\varphi)(\vec{h})$$

mit  $d_p\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}} \vec{\mathbb{E}}$  “nah bei der Identität” und insbesondere invertierbar. Der Satz über die Polarzerlegung ?? erlaubt es uns, in eindeutiger Weise  $d_p\varphi = D_p \circ A_p$  zu schreiben mit  $D_p$  orthogonal und  $A_p$  selbstadjungiert positiv definit in Bezug auf unser kanonisches Skalarprodukt. In erster Näherung ist offensichtlich nur  $A_p$  für die Spannungen in unserem Material verantwortlich, und zwar wird unser Material in Richtung der Eigenvektoren zu Eigenwerten  $> 1$  gestreckt und in Richtung der Eigenvektoren zu Eigenwerten  $< 1$  gestaucht. In erster Näherung wird also ein kleines Kügelchen unseres Schraubenschlüssels in ein kleines Ellipsoid deformiert, dessen Hauptachsen die Eigenräume des selbstadjungierten Operators  $A_p$  sind, und dann noch gedreht und verschoben, aber das ist für die Materialspannungen unerheblich. Betrachten wir statt unserem Kügelchen ein kleines Würfelchen, dessen Flächen auf den Vektoren einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $A_p$  senkrecht stehen, so wird es ähnlich in erster Näherung in ein kleines Quaderchen transformiert.

3.20.2. Nun nehmen wir an, unser Material sei so beschaffen, daß das Zusammendrücken mit einer gewissen Kraft  $F$ , vertikal angewandt auf ein flaches Stück unseres Material der Fläche  $s$ , eine Reduktion der Höhe um den Faktor  $(1 - c^{-1} \cdot (F/s))$  bewirkt. Hier hat also die Materialkonstante  $c$  die Einheit (Kraft/Fläche) und der Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  beschreibt ein sehr hartes Material, daß auch unter größten Belastungen kaum nachgibt. Man kann sich nun denken, daß bei gleicher Belastung unser Material härter und härter wird, so daß die Deformation bei gleichbleibender auf unseren Schraubenschlüssel angewandter Kraft als eine Funktion  $A_p = A_p(c)$  aufzufassen wäre, die mit wachsender Härte des Materials  $c \rightarrow \infty$  gegen die Identität  $I \in \text{End } \vec{\mathbb{E}}$  strebt. Dann kann man erwarten, daß der Grenzwert

$$\lim_{c \rightarrow \infty} c(A_p(c) - I) = T_p$$

ein wohldefiniertes Element  $T_p \in (\text{End } \vec{\mathbb{E}}) \otimes \llbracket \text{Kraft/Fläche} \rrbracket$  liefert. Diese Abbildung  $p \rightarrow T_p$  von  $S$  in “die selbstadjungierten Operatoren aus  $\text{End } \vec{\mathbb{E}}$  mit Einheiten (Kraft/Fläche)” heißt der **Spannungstensor**. Bezeichnet also  $\mathbb{M} = \llbracket \text{Masse} \rrbracket$  unseren eindimensionalen reellen Vektorraum der “Massen” aus 3.1.1, so wäre hier wie immer  $\llbracket \text{Kraft} \rrbracket$  zu verstehen als der eindimensionale Raum  $\llbracket \text{Kraft} \rrbracket = \vec{\mathbb{L}} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{M}$  und  $\llbracket \text{Fläche} \rrbracket$  als der eindimensionale Raum  $\llbracket \text{Fläche} \rrbracket = \mathbb{L}^{\otimes 2}$  und damit hätten wir

$$\llbracket \text{Kraft/Fläche} \rrbracket = \vec{\mathbb{L}}^* \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{M}$$

Die Beziehung dieses Spannungstensors zu unserem Begriff des Tensorprodukts von Vektorräumen hat jedoch mit den ganzen hier notierten Tensor-symbolen rein gar nichts zu tun, diese beziehen sich ja nur auf die Einheiten. Wählen wir diese Einheiten beliebig aber fest, so können wir unseren Spannungstensor jedoch auffassen als eine Abbildung  $S \rightarrow \text{End } \vec{\mathbb{E}}$ , oder nach ?? auch als eine Abbildung  $S \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^* \otimes \vec{\mathbb{E}}$ , oder nach Wahl einer Basis von  $\vec{\mathbb{E}}$  auch als Abbildung  $S \rightarrow M(3 \times 3; \mathbb{R})$ . Diese Abbildung transformiert sich dann bei einer anderen Wahl der Basis in der bekannten Weise und ist das archetypische Beispiel dafür, was Physiker oder Ingenieure unter einem Tensor oder genauer einem Tensorfeld oder noch genauer einem  $(1, 1)$ -Tensorfeld auf  $S$  verstehen.

Unter einem  $(r, s)$ -Tensor alias ausführlicher einem “ $r$ -fach kovarianten und  $s$ -fach kontravarianten Tensorfeld” auf einer halboffenen Teilmenge  $S$  eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums  $X$  versteht man allgemeiner eine Abbildung

$$T : S \rightarrow (\vec{X}^*)^{\otimes r} \otimes \vec{X}^{\otimes s}$$

Speziell ist also im Sinne von IV.3.1.4 und IV.3.1.2 ein  $(1, 0)$ -Tensorfeld dasselbe wie ein Kovektorfeld und ein  $(0, 1)$ -Tensorfeld dasselbe wie ein Vektorfeld.

### 3.21 Versuch zur Verschränkung

**Definition 3.21.1.** Unter einem **klassischen quantenmechanischen System** verstehen wir eine unitäre Darstellung  $(\mathcal{H}, \rho)$  des Richtungsraums  $\vec{\mathbb{T}}$  der Zeitachse in einem separablen Hilbertraum

$$\rho : \vec{\mathbb{T}} \rightarrow U(\mathcal{H})$$

3.21.2. Mir ist nicht ganz klar, ob man hier besser noch feiner eine “projektive Darstellung” betrachten sollte.

**Definition 3.21.3.** Ein **Zustand** oder genauer ein **reiner Zustand** unseres Systems ist eine komplexe Gerade in  $\mathcal{H}$ . Sie wird bestimmt durch einen von Null verschiedenen Vektor  $\psi \in \mathcal{H}$  als die davon erzeugte Gerade  $\langle \psi \rangle$ . Der Zustand  $\langle \psi \rangle$  geht in einer Zeitspanne  $t \in \vec{\mathbb{T}}$  über in den Zustand  $\rho(t)\langle \psi \rangle = \langle \rho(t)\psi \rangle$ . Man nennt  $D$  dann auch einen **Dichte-Operator**.

**Definition 3.21.4.** Ein **gemischter Zustand** unseres Systems ist ein beschränkter selbstadjungierter Operator  $D : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  der Spurklasse mit Spur Eins, der positiv semidefinit ist.

3.21.5. Diese Definition kann wie folgt interpretiert werden: Nach 1.12.9 ist jeder Operator von Spurklassen kompakt, und nach VI.10.6.4 gibt es zu unserem Operator folglich eine Hilbertbasis  $(v_i)_{i \in I}$  aus Eigenvektoren zu Eigenwerten  $\lambda_i$ . Positiv semidefinit bedeutet  $\lambda_i \geq 0 \forall i$ , Spur Eins bedeutet  $\sum \lambda_i = 1$ , und unser Operator  $D$  mag als mathematische Beschreibung einer Situation gedacht werden, bei der sich unser System “mit der Wahrscheinlichkeit  $\lambda_i$  im Zustand  $\langle v_i \rangle$  befindet”. Diese Interpretation ist allerdings mit Vorsicht zu genießen, da ja etwa im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$  derselbe Operator  $D$  sowohl gedacht werden könnte als ein System, das sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Zustand  $\langle v_1 \rangle$  wie im Zustand  $\langle v_2 \rangle$  befindet, als auch als ein System, das sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Zustand  $\langle v_1 + v_2 \rangle$  wie im Zustand  $\langle v_1 - v_2 \rangle$  befindet. Ist jedoch  $A$  irgendeine Observable alias ein selbstadjungierter Operator und  $\Phi_A$  die zugehörige Teilung der Eins, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß die zugehörige Messung auf unserem gemischten Zustand ein Resultat in einer Borelmenge  $E \subset \mathbb{R}$  liefert, gegeben durch

$$\sum \lambda_i \langle v_i, \Phi_A(E)v_i \rangle = \sum \langle Dv_i, \Phi_A(E)v_i \rangle = \text{tr}(\Phi_A(E)D)$$

Insbesondere hängen diese Meßergebnisse nicht von unserer Interpretation ab. Physikalisch interpretieren wir auch allgemein einen gemischten Zustand  $D$  als die Vorhersage, daß unser System bei der Messung einer Observablen  $A$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\text{tr}(\Phi_A(E)D)$  ein Resultat in der Borelmenge  $E \subset \mathbb{R}$  liefert.

*Beispiel 3.21.6.* Die gemischten Zustände in einem zweidimensionalen Hilbertraum  $V$  können mit einer abgeschlossenen Vollkugel im dreidimensionalen Raum identifiziert werden, der sogenannten **Bohr-Sphäre**. In der Tat liefert die Angabe des Eigenraums zum größten Eigenwert mitsamt dem zugehörigen Eigenwert in diesem Fall schon unseren Operator fest, so daß wir eine Surjektion von  $\mathbb{P}^1V \times [1/2, 1]$  auf den Raum der Dichteoperatoren erhalten. Es ist leicht zu sehen, daß deren Fasern alle einelementig sind bis auf die Faser über dem Dichteoperator  $(1/2) \text{id}$ , die aus ganz  $\mathbb{P}^1V \times 1/2$  besteht, und identifizieren wir nun in  $\mathbb{P}^1V \times [1/2, 1]$  die “Unterkante”  $\mathbb{P}^1V \times 1/2$  zu einem Punkt, so entsteht in der Tat eine Vollkugel.

3.21.7. Gegeben zwei klassische quantenmechanische Systeme  $(V, \varphi)$ ,  $(W, \psi)$  im Sinne von 3.21.1 ist ihr komplettiertes Tensorprodukt

$$(V \hat{\otimes} W, \varphi \hat{\otimes} \psi)$$

wieder ein klassisches quantenmechanisches System, das wir das **Gesamt-system** nennen. Die reinen Zustände der Gestalt  $\langle v \otimes w \rangle$  eines derartigen

Gesamtsystems heißen **unverschränkt** und werden physikalisch interpretiert als derjenige Zustand des Gesamtsystems, bei dem sich “das erste System im Zustand  $\langle v \rangle$  befindet und das Zweite im Zustand  $\langle w \rangle$ ”. Alle anderen reinen Zustände des Gesamtsystems heißen **verschränkt** oder auf englisch **entangled**. Natürlich bilden die unverschränkten Zustände eine Bahn der Operation des Produkts unitärer Gruppen  $U(V) \times U(W)$  auf  $\mathbb{P}(V \hat{\otimes} W)$ , und im endlichdimensionalen Fall auch das Bild einer Bahn von  $GL(V) \times GL(W)$  auf  $V \otimes W$ . Man mag nun die Methoden der Invariantentheorie anwenden, um diese Bahn von den anderen Bahnen zu trennen.

### 3.22 Laplace-Operator auf Mannigfaltigkeiten

Auf einer Riemann’schen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  erklärt man den **Laplace-Operator**  $\Delta = \Delta_g : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  in Anlehnung an IV.7.9.17 durch die Formel

$$\Delta f = *_g d *_g df$$

Seine anschauliche Bedeutung soll hier nicht thematisiert werden. Stattdessen rechnen wir als Beispiel die Sphäre. Kugelkoordinaten liefern die Karte der sogenannten **Winkelkoordinaten**  $(\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$ . Die bereits in IV.3.2.12 durchgeführte Rechnung liefert für die Riemann’sche Metrik in diesen Koordinaten die Darstellung  $g = d\vartheta^{\otimes 2} + (\sin \vartheta)^2 d\varphi^{\otimes 2}$ . Die Formeln IV.7.9.8 liefern nun für die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^2$  die Formeln

$$\begin{aligned} *_g d\vartheta &= -(\sin \vartheta) d\varphi \\ *_g d\varphi &= (\sin \vartheta)^{-1} d\vartheta \\ *_g (d\varphi \wedge d\vartheta) &= (\sin \vartheta)^{-1} \end{aligned}$$

Damit finden wir für  $f \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$  der Reihe nach

$$\begin{aligned} df &= f_\vartheta d\vartheta + f_\varphi d\varphi \\ *_g df &= -(\sin \vartheta) f_\vartheta d\varphi + (\sin \vartheta)^{-1} f_\varphi d\vartheta \\ d *_g df &= -\cos \vartheta f_\vartheta - (\sin \vartheta) f_{\vartheta\vartheta} d\vartheta \wedge d\varphi - (\sin \vartheta)^{-1} f_{\vartheta\varphi} d\vartheta \wedge d\varphi \\ *_g d *_g df &= (\sin \vartheta)^{-2} f_{\varphi\varphi} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} f_\vartheta + f_{\vartheta\vartheta} \end{aligned}$$

und für den Laplace-Operator auf der Sphäre ergibt sich in Winkelkoordinaten die Darstellung

$$\Delta = \frac{1}{(\sin \vartheta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

## 4 Schrotthalde zur Analysis

### 4.1 Lipschitzstetigkeit des Flusses

**Proposition 4.1.1.** *Gegeben ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums hat sein Fluß offenen Definitionsbereich und ist lokal lipschitzstetig.*

*Beweis.* Sei  $X$  unser endlichdimensionaler reeller Raum,  $U \subseteq X$  unsere offene Teilmenge und  $A : U \rightarrow \vec{X}$  unser lokal lipschitzstetiges Vektorfeld. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, unser Vektorfeld sei lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante  $L$  und die Längen seiner Vektoren seien beschränkt durch eine Konstante  $M$ . Sind  $\gamma_p, \gamma_q : [0, \varepsilon] \rightarrow U$  Integralkurven zu Anfangswerten  $p, q \in U$ , so finden wir für alle  $t \in [0, \varepsilon]$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| &= \left\| p + \int_0^t A(\gamma_p(\tau)) \, d\tau - q - \int_0^t A(\gamma_q(\tau)) \, d\tau \right\| \\ &\leq \|p - q\| + L \int_0^t \|\gamma_p(\tau) - \gamma_q(\tau)\| \, d\tau \end{aligned}$$

und das Lemma von Gronwall [IV.5.3.3](#) liefert für alle  $t \in [0, \varepsilon]$  die Abschätzung

$$\|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| \leq \|p - q\| e^{Lt} \leq \|p - q\| e^{L\varepsilon}$$

Dasselbe Argument liefert dieselbe Abschätzung in Richtung negativer Zeiten, und zusammen mit der Abschätzung  $\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \leq M \cdot |s - t|$ , die für jede Integralkurve sofort aus dem Mittelwertsatz [II.7.2.11](#) folgt, erkennen wir, daß unser Fluß lokal lipschitzstetig sein muß. Um schließlich nachzuweisen, daß sein Definitionsbereich  $\tilde{U}$  offen ist, gehen wir aus von einer Integralkurve  $\gamma_p : [0, \varepsilon] \rightarrow U$  zum Anfangswert  $p$ . Sicher gibt es  $r > 0$  derart, daß alle Punkte mit Abstand höchstens  $r$  vom Bild dieser Integralkurve ein in  $U$  enthaltenes Kompaktum  $K \subset U$  bilden. Für  $q \in U$  mit  $\|p - q\| e^{L\varepsilon} \leq r$  muß nach unserer Abschätzung die maximale Integralkurve  $\gamma_q$  zum Anfangswert  $q$  das Intervall  $I_q \cap [0, \varepsilon]$  nach  $K$  abbilden. Mit [IV.5.1.11](#) folgt  $[0, \varepsilon] \subset I_q$  für alle  $q \in U$  mit  $\|p - q\| e^{L\varepsilon} \leq r$ . Dasselbe Argument funktioniert auch für negative Zeiten und zeigt, daß  $\tilde{U}$  offen ist in  $\mathbb{R} \times U$ .  $\square$

4.1.2. Salopp gesprochen besagt unsere Abschätzung aus dem vorhergehenden Beweis, daß zwei Integralkurven in einem lipschitzstetigen Vektorfeld “höchstens exponentiell auseinanderlaufen können”. Man mag das Argument vom Schluß des Beweises des Satzes über homogene lineare Differentialgleichungen etwas vergrößernd dahingehend zusammenfassen, daß sich eine beliebige Lösung höchstens exponentiell von der Null-Lösung entfernt und folglich nicht in endlicher Zeit ins Unendliche entweichen kann.

**Definition 4.1.3.** Gegeben  $p \in \mathbb{N}$  verstehen wir unter einer Abbildung **der Klasse  $\mathcal{LC}^p$**  zwischen offenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume eine  $\mathcal{C}^p$ -Abbildung mit lokal lipschitzstetiger  $p$ -ter Ableitung.

*Übung 4.1.4.* Die Verknüpfung von Abbildungen der Klasse  $\mathcal{LC}^p$  hat stets wieder diese Eigenschaft. Eine Abbildung in einen  $\mathbb{R}^n$  ist von der Klasse  $\mathcal{LC}^p$  genau dann, wenn das für alle ihre Komponenten zutrifft. Eine Abbildung  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist von der Klasse  $\mathcal{LC}^p$  genau dann, wenn alle ihre partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $p$  existieren und lokal lipschitzstetig sind. Dasselbe gilt, wenn unsere Abbildung nur auf einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^m$  definiert ist.

4.1.5. Für das weitere führen wir eine spezielle Notation ein, um die Darstellung einigermaßen transparent zu halten: Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$  und eine differenzierbare Abbildung  $f : X \rightarrow X$  bezeichnen wir mit  $f' : X \rightarrow \text{End}(\vec{X})$  die Abbildung  $p \mapsto d_p f$ , und das auch dann, wenn  $f$  noch von weiteren Parametern abhängt und nur auf einer offenen Teilmenge von  $X$  definiert ist.

**Lemma 4.1.6.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$ , eine offene Teilmenge  $U \subset X$  und ein Vektorfeld  $A : U \rightarrow \vec{X}$  der Klasse  $\mathcal{LC}^1$  ist auch sein Fluß  $\Phi$  von der Klasse  $\mathcal{LC}^1$  und die Ableitung  $\Phi'$  des Flusses nach dem Ort erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial(\Phi')}{\partial t}(t, x) = A'(\Phi(t, x))\Phi'(t, x)$$

mit der Anfangsbedingung  $\Phi'(0, x) = \text{id}$ .

4.1.7. Die Gleichung aus dem Lemma heißt auch die **Variationsgleichung**. Sie ist für feste  $t$  und  $x$  als eine Gleichung in  $\text{End}(\vec{X})$  zu verstehen. Insbesondere ist rechts das Produkt zweier Endomorphismen gemeint.

*Beweis.* Wir dürfen und werden unser Vektorfeld als lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante  $L$  annehmen. Ist der Fluß  $\Phi$  unseres Feldes für jedes feste  $t$  stetig differenzierbar nach  $x$ , so folgt aus der definierenden Gleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, x) = A(\Phi(t, x))$$

durch Festhalten von  $t$  die Differenzierbarkeit der  $t$ -Ableitung des Flusses nach  $x$  und durch Bilden des Differentials erhalten wir die zweite Hälfte der Gleichungskette

$$\frac{\partial(\Phi')}{\partial t}(t, x) = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)'(t, x) = A'(\Phi(t, x))\Phi'(t, x)$$

Die Differenzierbarkeit von  $\Phi'$  nach  $t$  und die erste Gleichung folgt dann aus IV.2.1.10, da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X = \mathbb{R}^n$  annehmen dürfen und uns dann  $\Phi'$  schlicht als eine Matrix von partiellen Ableitungen denken können. Um nun umgekehrt zu zeigen, daß unser Fluß für jedes  $t$  differenzierbar ist nach  $x$  an einer Stelle  $p$ , nehmen wir an, daß unser Fluß etwa auf  $[0, b] \times W$  definiert sei mit  $W \subseteq U$  einer Umgebung von  $p \in U$  und  $b > 0$  und gehen wir aus von einer Lösung  $\Lambda : [0, b] \rightarrow \text{End } \vec{X}$  der linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t}(t) = A'(\Phi(t, p))\Lambda(t)$$

mit Anfangswert  $\Lambda(0) = \text{id}$ , die ja nach IV.5.3.5 und ?? existiert und eindeutig bestimmt ist. Für diese Lösung zeigen wir

$$\Phi(t, p+h) - \Phi(t, p) - \Lambda(t)h = \|h\| \cdot \eta_t(h)$$

mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta_t(h) = 0$  für alle  $t$ , und das zeigt dann, daß für alle  $t$  die Abbildung  $x \mapsto \Phi(t, x)$  bei  $x = p$  differenzierbar ist. Um nun die behauptete Abschätzung für die Lösung zu erhalten, setzen wir  $\Delta(t, h) = \Phi(t, p+h) - \Phi(t, p)$  und bezeichnen die linke Seite der eben einzeln geschriebenen Gleichung mit  $D(t, h) = \Delta(t, h) - \Lambda(t)h$  und finden

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t}(t, h) &= A(\Phi(t, p+h)) - A(\Phi(t, p)) - A'(\Phi(t, p))\Lambda(t)h \\ &= A'(\Phi(t, p))\Delta(t, h) + \|\Delta(t, h)\|R(\Delta(t, h)) - A'(\Phi(t, p))\Lambda(t)h \\ &= A'(\Phi(t, p))D(t, h) + \|\Delta(t, h)\|R(\Delta(t, h)) \end{aligned}$$

für stetiges  $R$  mit  $R(0) = 0$ . Beachten wir  $D(0, h) = 0$ , so folgt mit Integration

$$D(t, h) = \int_0^t A'(\Phi(\tau, p))D(\tau, h) + \|\Delta(\tau, h)\|R(\Delta(\tau, h)) \, d\tau$$

Aus dem Beweis von ?? wissen wir bereits, daß Integralkurven in lipschitzstetigen Vektorfeldern höchstens exponentiell auseinanderlaufen und daß genauer in Formeln gilt  $\|\Delta(t, h)\| \leq \|h\| e^{Lt}$ . Weiter gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $r_\varepsilon > 0$  mit  $\|v\| < r_\varepsilon \Rightarrow \|R(v)\| < \varepsilon$ . Aus  $\|h\| < r_\varepsilon e^{-Lb}$  folgt also  $R(\Delta(\tau, h)) < \varepsilon$  für  $\tau \in [0, b]$  und damit  $\|\Delta(\tau, h)\|R(\Delta(\tau, h)) < \varepsilon \|h\| e^{Lb}$ . Für alle  $t \in [0, b]$  folgt aus  $\|h\| < r_\varepsilon e^{-Lb}$  also

$$\|D(t, h)\| \leq \int_0^t C \|D(\tau, h)\| \, d\tau + \varepsilon \cdot \|h\| \cdot e^{Lb} \cdot b$$

für  $C$  eine obere Schranke von  $\|A'(\Phi(\tau, p))\|$ . Mit Gronwalls Lemma ergibt sich dann schließlich, daß aus  $\|h\| < r_\varepsilon e^{-Lb}$  folgt

$$\|D(t, h)\| \leq \varepsilon \cdot \|h\| \cdot e^{Lb} \cdot b \cdot e^{tC}$$

und das ist eine Abschätzung der gewünschten Art.  $\square$

**Lemma 4.1.8.** *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum  $X$ , eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  und ein Vektorfeld  $A : U \rightarrow \vec{X}$  der Klasse  $\mathcal{LC}^p$  für ein  $p \in \mathbb{N}$  ist auch sein Fluß  $\Phi$  von der Klasse  $\mathcal{LC}^p$ .*

*Beweis.* Durch vollständige Induktion über  $p$ . Den Fall  $p = 0$  haben wir bereits in ?? behandelt, den Fall  $p = 1$  in ??. Sei also  $p \geq 2$ , sei  $A$  unser  $\mathcal{LC}^p$ -Vektorfeld und  $\Phi(t, x)$  sein Fluß. Per Induktion wissen wir, daß dieser Fluß zumindest von der Klasse  $\mathcal{LC}^{p-1}$  ist, und die definierende Gleichung zeigt dann, daß auch seine zeitliche Ableitung  $\dot{\Phi}$  von der Klasse  $\mathcal{LC}^{p-1}$  sein muß. Es bleibt also nur zu zeigen, daß auch die räumliche Ableitung  $\Phi'$  unseres Flusses von der Klasse  $\mathcal{LC}^{p-1}$  ist. Nach ?? ist diese räumliche Ableitung nun die eindeutig bestimmte Abbildung  $\Lambda : \tilde{U} \rightarrow \text{End } \vec{X}$  mit  $\Lambda(0, x) = \text{id}$  für alle  $x \in U$  und

$$\dot{\Lambda}(t, x) = A'(\Phi(t, x))\Lambda(t, x)$$

Wir schreiben diese Differentialgleichung um als Fluß eines Vektorfelds und betrachten dazu auf  $\tilde{U} \times \text{End } \vec{X}$  das Vektorfeld

$$B : (t, x, v) \mapsto (1, 0, A'(\Phi(t, x))v)$$

Per Induktion wissen wir, daß  $\Phi$  und damit  $B$  von der Klasse  $\mathcal{LC}^{p-1}$  sind. Andererseits liefert für jedes  $x \in U$  die Vorschrift

$$\gamma_x(\tau) = (\tau, x, \Lambda(\tau, x))$$

eine Integralkurve von  $B$ , und zwar die eindeutig bestimmte Integralkurve mit Anfangswert  $(0, x, \text{id})$ , so daß unsere Induktionsannahme zeigt, daß  $\Lambda$  von der Klasse  $\mathcal{LC}^{p-1}$  sein muß.  $\square$

## 4.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

4.2.1. Das folgende Lemma wird auch oft als “lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz” zitiert und unter der noch schwächeren Voraussetzung der “Lipschitz-Stetigkeit” gezeigt. Diese Feinheiten will ich hier jedoch nicht diskutieren.

**Lemma 4.2.2.** *Ist  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $U \subseteq X$  offen und  $A : U \rightarrow \vec{X}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so gibt es zu jedem Punkt  $p \in U$  Integralkurven mit offenem Definitionsbereich, und je zwei Integralkurven  $\gamma : I \rightarrow U$  und  $\phi : J \rightarrow U$  mit demselben Anfangswert stimmen für hinreichend kleines  $\eta > 0$  auf  $I \cap J \cap [-\eta, \eta]$  überein.*

*Beweis.* Wir betrachten für ein halboffenes kompaktes reelles Intervall  $K \subset \mathbb{R}$  mit  $0 \in K$  den Raum

$$\mathcal{C}_p^1(K, X)$$

aller stetig differenzierbaren Wege  $\gamma : K \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = p$  und versehen seinen Richtungsraum  $\mathcal{C}_0^1(K, \vec{X})$  mit der Norm  $\|\varphi\|_\infty + \|\dot{\varphi}\|_\infty$  der gleichmäßigen Konvergenz von Funktion und erster Ableitung. Nach II.7.5.31 erhalten wir so einen vollständigen normierten Vektorraum. Nun betrachten wir in unserem affinen Raum die offene Teilmenge  $\mathcal{C}_p^1(K, U)$  aller in  $U$  verlaufenden Wege und die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p^1(K, U) &\rightarrow \mathcal{C}(K, \vec{X}) \\ (\tau, \gamma) &\mapsto \dot{\gamma} - \tau(A \circ \gamma) \end{aligned}$$

Unter dieser Abbildung geht offensichtlich  $(\tau, \gamma)$  nach Null genau dann, wenn  $\gamma : K \rightarrow U$  eine Integralkurve des reskalierten Feldes  $\tau A$  ist. Bezeichnet  $\kappa$  den konstanten Weg bei  $p$ , so gilt insbesondere  $(0, \kappa) \mapsto 0$ . Wir wenden nun den Satz über implizite Funktionen IV.4.2.8 an. Das Differential von  $F$  ergibt sich mit Summenregel IV.1.4.4, Produktregel IV.1.4.5 und der anschließenden Übung ?? zu

$$(d_{(\tau, \gamma)}F)(h, \alpha) = \dot{\alpha} - h(A \circ \gamma) - \tau(dA \circ (\gamma, \alpha))$$

wo wir  $dA : U \times \vec{X} \rightarrow \vec{X}$ ,  $(x, v) \mapsto (d_x A)(v)$  meinen. Insbesondere haben wir  $(d_{(0, \kappa)}F)(0, \alpha) = \dot{\alpha}$ . Nun ist  $\mathcal{C}_0^1(K, \vec{X}) \rightarrow \mathcal{C}(K, \vec{X})$ ,  $\alpha \mapsto \dot{\alpha}$  eine stetige lineare Bijektion mit stetiger Umkehrung, eben dem Integrieren. Die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen IV.4.2.8 sind also erfüllt und liefern uns die Existenz eines Paares  $(A_1, B_1)$  mit  $0 \in A_1 \subseteq \mathbb{R}$  und  $\kappa \in B_1 \subseteq \mathcal{C}_p^1(K, U)$  derart, daß es für alle  $\tau \in A_1$  genau ein  $\gamma_\tau \in B_1$  gibt mit  $F(\tau, \gamma_\tau) = 0$  alias mit  $\gamma_\tau$  einer Integralkurve des reskalierten Vektorfeldes  $\tau A$ . Gehen wir nun etwa von  $K = [-1, 1]$  aus und wählen  $\tau \neq 0$  in  $A_1$ , so ist  $\gamma(t) = \gamma_\tau(\tau^{-1}t)$  eine auf  $(-\tau, \tau)$  definierte Integralkurve des Vektorfeldes  $A$  zu  $p$  und die Existenzaussage des Lemmas ist gezeigt. Seien andererseits  $\gamma : I \rightarrow U$  und  $\phi : J \rightarrow U$  Integralkurven mit demselben Anfangswert. Besteht  $I \cap J$  nur aus dem Nullpunkt ist die Behauptung eh klar. Sonst ist  $I \cap J$  auch halboffen und für alle  $\tau \in [0, 1]$  sind die Abbildungen  $t \mapsto \gamma(\tau t)$  und  $t \mapsto \phi(\tau t)$  auf  $I \cap J$  definierte Integralkurven zu  $p$  des reskalierten Vektorfeld  $\tau A$ . Für hinreichend kleines  $\tau > 0$  gibt es aber nach dem, was wir gezeigt haben, nur eine derartige Integralkurve und damit folgt auch die zweite Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 4.2.3.** *Ist  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $U \subseteq X$  offen und  $A : U \rightarrow \vec{X}$  ein lipschitzstetiges Vektorfeld, so gibt es zu jedem Punkt  $p \in$*

$U$  Integralkurven mit offenem Definitionsbereich, und je zwei Integralkurven  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow U$  und  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow U$  mit demselben Anfangswert stimmen für hinreichend kleines  $\eta > 0$  auf  $I_1 \cap I_2 \cap [-\eta, \eta]$  überein.

*Erster Beweis.* Für jedes halboffene Intervall  $I$  mit  $0 \in I$  und jeden Weg  $\gamma : I \rightarrow U$  bilden wir den "korrigierten" Weg  $\hat{\gamma} : I \rightarrow X$  durch die Vorschrift

$$\hat{\gamma}(t) = p + \int_0^t A(\gamma(\tau)) \, d\tau$$

so daß also gilt  $\dot{\hat{\gamma}}(t) = A(\gamma(t))$  für alle Zeiten  $t \in I$ . Bezeichnet  $\mathcal{C}(I, Y)$  die Menge aller stetigen Abbildungen von  $I$  in einen metrischen Raum  $Y$ , so ist das Korrigieren eine Abbildung

$$k_p : \mathcal{C}(I, U) \rightarrow \mathcal{C}(I, X) \\ \gamma \mapsto \hat{\gamma}$$

Von hier an nehmen wir zusätzlich  $I$  kompakt an. Dann können wir unseren Wegeraum  $\mathcal{C}(I, X)$  mit der Metrik  $d$  der gleichmäßigen Konvergenz versehen und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\hat{\gamma}(t) - \hat{\psi}(t)\| &= \left\| \int_0^t A(\gamma(\tau)) - A(\psi(\tau)) \, d\tau \right\| \\ &\leq \left| \int_0^t \|A(\gamma(\tau)) - A(\psi(\tau))\| \, d\tau \right| \\ &\leq |t| \cdot L \cdot d(\gamma, \psi) \end{aligned}$$

falls  $A$  lipschitzstetig ist auf  $U$  mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Bezeichnet  $\|I\|$  das Supremum der Beträge der Elemente von  $I$ , so folgt sofort

$$d(\hat{\gamma}, \hat{\psi}) \leq \|I\| \cdot L \cdot d(\gamma, \psi)$$

Nun wählen wir erst  $R > 0$  mit  $\bar{B}(p; R) \subset U$  und dann dazu  $I$  so klein, daß für den konstant bei  $p$  verweilenden Weg  $\kappa : I \rightarrow U$  das Bild von  $\hat{\kappa}$  in  $\bar{B}(p; R/2)$  liegt, daß also gilt  $d(\hat{\kappa}, \kappa) \leq R/2$ , und darüber hinaus auch noch so kurz, daß gilt  $\|I\| \cdot L \leq 1/2$ . Für derartige  $R$  und  $I$  behaupten wir nun, daß das Korrigieren von Wegen  $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$  eine kontrahierende Selbstabbildung auf

$$\mathcal{C}(I, \bar{B}(p; R)) = \bar{B}(\kappa; R)$$

induziert, wo die rechte Seite den abgeschlossenen Ball mit Radius  $R$  im Wegeraum meint, der sein Zentrum im konstant bei  $p$  verweilenden Weg  $\kappa$  hat. In

der Tat folgt ja aus unserer zweiten Annahme an  $I$  sofort  $d(\hat{\gamma}, \hat{\psi}) \leq d(\gamma, \psi)/2$  und für einen Weg  $\gamma \in \bar{B}(\kappa; R)$  folgt insbesondere  $d(\hat{\gamma}, \hat{\kappa}) \leq d(\gamma, \kappa)/2 \leq R/2$ . Wegen  $d(\hat{\kappa}, \kappa) \leq R/2$  folgt mit der Dreiecksungleichung dann aber auch  $d(\hat{\gamma}, \kappa) \leq R$  alias  $\hat{\gamma} \in \bar{B}(\kappa; R)$ . Nun ist unser Wegraum  $\bar{B}(\kappa; R)$  jedoch nach [II.7.5.30](#) vollständig für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz [IV.4.1.8](#) gibt es also genau ein  $\gamma \in \bar{B}(\kappa; R)$  alias genau eine stetige Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \bar{B}(p; R)$  mit  $\hat{\gamma} = \gamma$ , als da heißt mit

$$\gamma(t) = p + \int_0^t A(\gamma(\tau)) \, d\tau \quad \forall t \in I$$

Insbesondere gibt es also für hinreichend kleines  $\varepsilon$  eine auf  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  definierte Integralkurve unseres Vektorfelds mit Anfangswert  $p$ , und die Existenz ist gezeigt. Seien nun  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow U$  und  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow U$  zwei Integralkurven zu  $p$ . Wir wollen zeigen, daß sie für hinreichend kleines  $\eta > 0$  auf  $I_1 \cap I_2 \cap [-\eta, \eta]$  übereinstimmen. Nur im Fall  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$  ist noch etwas zu zeigen. Für hinreichend kleines  $\eta > 0$  ist aber dann sicher  $I_1 \cap I_2 \cap [-\eta, \eta]$  ein halboffenes kompaktes Intervall, das unter beiden Integralkurven nach  $\bar{B}(p; R)$  abgebildet wird, und nehmen wir zusätzlich  $\eta > 0$  so klein, daß gilt  $\eta \cdot L \leq 1/2$ , so zeigt die Eindeutigkeitsaussage aus dem Banach'schen Fixpunktsatz, daß unsere beiden Integralkurven auf  $I_1 \cap I_2 \cap [-\eta, \eta]$  übereinstimmen müssen.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Wir betrachten für ein halboffenes kompaktes reelles Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $0 \in I$  den Raum

$$\mathcal{C}_p^1(I, X)$$

aller stetig differenzierbaren Wege  $\gamma : I \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = p$  und versehen seinen Richtungsraum  $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X})$  mit der Norm  $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_\infty + \|\dot{\varphi}\|_\infty$  der gleichmäßigen Konvergenz von Funktion und erster Ableitung. Nach [II.7.5.31](#) erhalten wir so einen vollständigen normierten Vektorraum. Nun betrachten wir in unserem affinen Raum die offene Teilmenge  $\mathcal{C}_p^1(I, U)$  aller in  $U$  verlaufenden Wege und die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p^1(I, U) &\rightarrow \mathcal{C}(I, \vec{X}) \\ (\tau, \gamma) &\mapsto \dot{\gamma} - \tau(A \circ \gamma) \end{aligned}$$

Unter dieser Abbildung geht offensichtlich  $(\tau, \gamma)$  nach Null genau dann, wenn  $\gamma : I \rightarrow U$  eine Integralkurve des reskalierten Feldes  $\tau A$  ist. Bezeichnet  $\kappa$  den konstanten Weg bei  $p$ , so gilt insbesondere  $(0, \kappa) \mapsto 0$ . Wir wenden nun den Satz über implizite Funktionen [IV.4.2.8](#) an. Das Differential von  $F$  ergibt sich mit Summenregel [IV.1.4.4](#), Produktregel [IV.1.4.5](#) und der anschließenden Übung ?? zu

$$(d_{(\tau, \gamma)} F)(h, \alpha) = \dot{\alpha} - h(A \circ \gamma) - \tau(dA \circ (\gamma, \alpha))$$

wo wir  $dA : U \times \vec{X} \rightarrow \vec{X}$ ,  $(x, v) \mapsto (d_x A)(v)$  meinen. Insbesondere haben wir  $(d_{(0, \kappa)} F)(0, \alpha) = \dot{\alpha}$ . Nun ist  $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \vec{X})$ ,  $\alpha \mapsto \dot{\alpha}$  eine stetige lineare Bijektion mit stetiger Umkehrung, eben dem Integrieren. Die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen sind also erfüllt und liefern uns die Existenz eines Paares  $(A_1, B_1)$  mit  $0 \in A_1 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\kappa \in B_1 \subseteq \mathcal{C}_p^1(I, U)$  derart, daß es für alle  $\tau \in A_1$  genau ein  $\gamma_\tau \in B_1$  gibt mit  $F(\tau, \gamma_\tau) = 0$  alias mit  $\gamma_\tau$  einer Integralkurve des reskalierten Vektorfelds  $\tau A$ . Daraus folgert man leicht die Aussage des Lemmas.  $\square$

*Übung 4.2.4.* Gegeben reelle normierte Räume  $X, Y$  und eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $A : U \rightarrow Y$  ist für jeden kompakten Raum  $I$  auch die induzierte Abbildung  $(A \circ) : \mathcal{C}(I, U) \rightarrow \mathcal{C}(I, Y)$  stetig differenzierbar und ihr Differential an einer Stelle  $\gamma \in \mathcal{C}(I, U)$  wird gegeben durch

$$\begin{aligned} d_\gamma(A \circ) : \mathcal{C}(I, \vec{X}) &\rightarrow \mathcal{C}(I, \vec{Y}) \\ \alpha &\mapsto (dA) \circ (\gamma, \alpha) \end{aligned}$$

Hier meint  $dA$  die Abbildung  $(x, v) \mapsto (d_x A)(v)$  von  $U \times \vec{X}$  nach  $\vec{Y}$  und wir verwenden die offensichtliche Identifikation des Raums  $\mathcal{C}(I, \vec{X})$  mit dem Richtungsraum des affinen Raums  $\mathcal{C}(I, X)$ . Des weiteren verwenden wir auf unseren Räumen von Abbildungen die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

**Satz 4.2.5 (Picard-Lindelöf, lokal lipschitzstetiger Fall).** *Gegeben ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlich-dimensionalen reellen Raums gibt es zu jedem Anfangswert eine größte Integralkurve. Sie hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist dieses Intervall nach oben beschränkt, so verläßt die fragliche Integralkurve für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann einmal endgültig.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, daß je zwei Integralkurven  $\gamma, \psi$  zu demselben Punkt  $p$  mit demselben Definitionsintervall  $I$  übereinstimmen. Wir zeigen dazu, daß sie auf  $I \cap [0, \infty)$  übereinstimmen, für  $I \cap (-\infty, 0]$  argumentiert man analog. Stimmen aber unsere Wege auf  $I \cap [0, \infty)$  nicht überein, so wäre das Supremum  $s$  über alle  $t \in I$  mit  $\gamma|_{[0, t]} = \psi|_{[0, t]}$  nicht das Supremum von  $I$ . Wegen der Stetigkeit gälte  $\gamma(s) = \psi(s)$ , und nach der Eindeutigkeitsaussage im Lemma muß dann auch gelten  $\gamma|_{[0, t + \eta]} = \psi|_{[0, t + \eta]}$  für ein positives  $\eta$  im Widerspruch zur Wahl von  $s$ . Folglich stimmen je zwei Integralkurven zu  $p$  auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein und es gibt genau eine größte Integralkurve zu  $p$ , deren Definitionsbereich eben die



SkriptenBilder/BildIK.png

Eine maximale Integralkurve, deren Definitionsbereich nach oben beschränkt ist und die so jedes Kompaktum wie etwa  $K$  oder  $L$  irgendwann einmal engültig verläßt. In diesem Fall wäre der Definitionsbereich nach unten unbeschränkt und unsere Integralkurve würde für negative Zeiten gegen eine Nullstelle unseres Vektorfeldes konvergieren, die im Zentrum der Spirale liegt.

Vereinigung der Definitionsbereiche aller Integralkurven zu  $p$  ist. Wäre dieser Definitionsbereich nicht offen, so enthielte er sein Supremum oder sein Infimum. Dann könnten wir jedoch um die Bilder dieser Grenzpunkte auch wieder Integralkurven mit offenem Definitionsbereich finden und ankleben und unsere Integralkurve wäre nicht maximal gewesen. Bezeichne schließlich  $A$  unser Vektorfeld und  $U$  seinen Definitionsbereich. Ist  $\gamma : [0, b) \rightarrow U$  wäre eine Integralkurve von  $A$ , deren Bild in einem Kompaktum  $K \subset U$  landet, so ist wegen  $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$  ihre Geschwindigkeit  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  beschränkt auf  $[0, b)$ , mithin wäre  $\gamma$  lipschitzstetig und besäße nach II.7.5.5 oder V.1.4.12 eine stetige Fortsetzung  $\tilde{\gamma} : [0, b] \rightarrow K$ . Die Integralform unserer Differentialgleichung zeigt dann sofort, daß auch  $\tilde{\gamma}$  eine Integralkurve von  $A$  sein muß, mithin kann eine Integralkurve, die ganz in einem Kompaktum  $K \subset U$  verläuft, schon einmal nicht maximal sein. Wir zeigen nun noch, daß eine maximale Integralkurve ab einem gewissen Zeitpunkt auch nicht mehr in besagtes Kompaktum zurückkehren wird. Dazu wählen wir  $\varepsilon > 0$  derart, daß die Menge  $L$  aller Punkte von  $X$  mit Abstand  $\leq \varepsilon$  zu einem Punkt von  $K$  auch noch in  $U$  enthalten ist. Da auch  $L$  kompakt ist, hat unsere Integralkurve dann auch an allen Stellen aus  $L$ , die sie durchläuft, eine gleichmäßig beschränkte Geschwindigkeit. Wann immer unsere maximale Integralkurve einen Punkt aus  $K$  durchläuft, muß sie also noch für eine gewisse von diesem Punkt unabhängige Zeitspanne innerhalb von  $L$  weiterlaufen, da sie ja auch  $L$  irgendwann einmal verlassen muß und das nicht beliebig schnell tun kann. Sind wir näher als diese Zeitspanne am oberen Ende des Definitionsbereichs unserer maximalen Integralkurve, so kann unsere Integralkurve demnach keine Punkte aus  $K$  mehr durchlaufen.  $\square$

**Korollar 4.2.6 (Homogene lineare Differentialgleichungen).** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall,  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $M : I \rightarrow \text{End } V$  lokal lipschitzstetig. So bilden die differenzierbaren Abbildungen  $\gamma : I \rightarrow V$  mit*

$$\dot{\gamma}(t) = M(t)\gamma(t) \quad \forall t \in I$$

*einen Untervektorraum  $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$ , den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung, und für jedes  $t_0 \in I$  definiert das Auswerten einen Isomorphismus  $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} V$ ,  $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$ , den **Anfangswertisomorphismus**.*

4.2.7. Diese Aussage gilt sogar unter der schwächeren Bedingung  $M$  stetig, aber dann wird der Beweis technischer.

*Beweis.* Daß unser Lösungsraum  $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$  ein Untervektorraum ist und daß das Auswerten bei  $t_0$  linear ist, scheint mir beides offensichtlich.

Es bleibt nur, Injektivität und Surjektivität des Auswertens zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dazu  $t_0 = 0$  annehmen. Falls  $I$  nicht offen ist, wählen wir eine lokal lipschitzstetige Fortsetzung von  $M$  auf ein offenes Intervall  $J \supset I$ . Nun erfüllt  $\gamma : I \rightarrow V$  nach IV.5.1.19 unsere Differentialgleichung genau dann, wenn  $(\text{id}, \gamma) : I \rightarrow J \times V$  eine Integralkurve des Vektorfelds  $(z, v) \mapsto (1, M(z)v)$  auf  $J \times V$  ist. Dies Vektorfeld ist lokal lipschitzstetig, also besitzt es nach IV.5.2.6 zu jedem Anfangswert höchstens eine auf  $I$  definierte Integralkurve, und das zeigt die Injektivität. Für den Beweis der Surjektivität reicht es zu zeigen, daß jede maximale Integralkurve des Vektorfelds  $(z, v) \mapsto (1, M(z)v)$  mit Anfangswert  $(0, v_0)$  auf ganz  $J$  definiert ist. Sicher reicht es zu zeigen, daß sie bis zum oberen Ende von  $J$  definiert ist. Sonst gäbe es aber  $b \in J$  derart, daß die Lösung nicht in positiver Richtung über  $[0, b)$  hinaus definiert werden könnte, und mit IV.5.2.6 folgt, daß  $\gamma : [0, b) \rightarrow V$  unbeschränkt wäre. Nun gibt es jedoch  $L$  mit  $\|M(t)\| \leq L$  für alle  $t \in [0, b]$  und es folgt

$$\|\gamma(t)\| = \left\| v_0 + \int_0^t M(\tau)\gamma(\tau) \, d\tau \right\| \leq \|v_0\| + L \int_0^t \|\gamma(\tau)\| \, d\tau$$

und dann dem Lemma von Gronwall IV.5.3.3 sofort  $\|\gamma(t)\| \leq \|v_0\| e^{Lt}$  und das wäre doch beschränkt, nämlich durch  $\|v_0\| e^{Lb}$ .  $\square$

**Lemma 4.2.8 (Gronwall).** *Ist  $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $f : [0, b] \rightarrow [0, \infty)$  stetig und gibt es nichtnegative Konstanten  $L, C$  mit*

$$f(t) \leq L \int_0^t f(\tau) \, d\tau + C$$

*für alle  $t \geq 0$ , so erfüllt  $f$  die Abschätzung  $f(t) \leq C e^{Lt}$ .*

4.2.9. Es scheint mir von der Anschauung her ziemlich klar, daß eine differenzierbare Funktion  $f$  mit der Eigenschaft  $f' \leq f$  höchstens exponentiell wachsen kann. Das Lemma von Gronwall präzisiert und verallgemeinert diese Intuition.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $L$  und  $C$  positiv annehmen. Bezeichnet  $F(t)$  den Wert des obigen Integrals, so folgern wir erst

$$\frac{F'(t)}{LF(t) + C} \leq 1$$

und dann durch Integrieren von 0 bis  $t$  mithilfe der Substitutionsregel weiter  $L^{-1} \log(LF(t) + C) - L^{-1} \log C \leq t$  alias  $\log(LF(t) + C) \leq Lt + \log C$  und durch Exponentieren und das Erinnern unserer Voraussetzungen schließlich

$$f(t) \leq LF(t) + C \leq C e^{Lt} \quad \square$$

**Korollar 4.2.10 (Der inhomogene lineare Fall).** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein halb-offenes Intervall,  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $M : I \rightarrow \text{End } V$  lokal lipschitzstetig und  $f : I \rightarrow V$  stetig. So bilden die differenzierbaren Abbildungen  $\gamma : I \rightarrow V$  mit

$$\dot{\gamma}(t) = M(t)\gamma(t) + f(t) \quad \forall t \in I$$

einen affinen Teilraum  $\mathcal{L}_i \subset \text{Ens}(I, V)$  mit dem Lösungsraum der zugehörigen linearen Gleichung als Raum von Richtungsvektoren und für jedes  $t_0 \in I$  definiert das Auswerten eine Bijektion  $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} V$ ,  $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$ , den **Anfangswertisomorphismus**.

*Beweis.* Die Differenz von je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, und die Summe einer Lösung der homogenen und einer Lösung der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit bleibt nur zu zeigen, daß die inhomogene Gleichung überhaupt eine Lösung besitzt. Ist  $f$  lipschitzstetig, so folgt das ähnlich wie zuvor aus unseren allgemeinen Prinzipien. Wir geben nun aber sogar eine Lösungsmethode an, die Methode der **Variation der Konstanten**. Dazu wählen wir eine Basis  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  des Lösungsraums der homogenen Gleichung und fassen sie zusammen zu einer Lösung  $X : I \rightarrow V^n = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$  der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{X}(t) = M(t)X(t)$$

für Funktionen  $I \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$ . Da die Werte von  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  an jeder Stelle eine Basis von  $V$  bilden, ist  $X(t)$  an jeder Stelle ein Vektorraumisomorphismus. Nun machen wir für die Lösung unserer inhomogenen Gleichung den Ansatz  $\gamma(t) = X(t)c(t)$  mit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar und finden

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= M(t)X(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= M(t)\gamma(t) + X(t)\dot{c}(t) \end{aligned}$$

Unser Ansatz führt also zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung genau dann, wenn gilt  $X(t)\dot{c}(t) = f(t)$  alias  $\dot{c}(t) = X^{-1}(t)f(t)$ . Ein  $c$  mit dieser Eigenschaft existiert aber ganz offensichtlich, eben das Integral der rechten Seite.  $\square$

*Übung 4.2.11.* Man berechne die Entwicklung um den Nullpunkt bis zu den Termen dritten Grades einschließlich für die Lösung mit Anfangswert ?? der Differentialgleichung ??.

*Übung 4.2.12. Scheint unnötig.* Gegeben  $I \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes kompaktes reelles Intervall,  $X$  ein normierter Raum und  $\mathcal{C}^k(I, X)$  der Raum aller Abbildungen von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und aller Ableitungen bis zur  $k$ -ten einschließlich ist das Auswerten eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung

$$I \times \mathcal{C}^k(I, X) \rightarrow X$$

### 4.3 Alter Beweis Umkehrsatz

*Alter Beweis.* Wir wählen je eine Norm  $\| \cdot \|$  auf den zugehörigen Richtungsräumen. Bezeichne  $L = d_p f : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$  die lineare Approximation an  $f$  in  $p$ . Für  $y \in Y$  betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} k_y : U &\rightarrow X \\ x &\mapsto x + L^{-1}(y - f(x)) \end{aligned}$$

Es sollte anschaulich klar sein, daß für  $x \in U$  mit  $f(x)$  nahe bei  $y$  das Bild  $f(k_y(x))$  von  $k_y(x)$  sogar noch näher bei  $y$  liegen muß. Zunächst gilt es aber zu diskutieren, unter welchen Annahmen  $k_y(x)$  wieder in  $U$  liegt. Um das zu klären beachten wir, daß das Differential von  $k_y$  gar nicht von  $y$  abhängt und bei  $x = p$  verschwindet. Da  $d_u k_y$  stetig von  $u \in U$  abhängt, gibt es  $\delta > 0$  so daß gilt  $\|u - p\| \leq \delta \Rightarrow \|d_u k_y\| \leq (1/2)$ . Indem wir  $\delta$  eventuell noch weiter verkleinern dürfen wir zusätzlich annehmen, daß für den abgeschlossenen Ball um  $p$  mit Radius  $\delta$  gilt  $\bar{B}(p; \delta) \subset U$ . Insbesondere folgt dann mit IV.1.3.5 aus  $x, z \in \bar{B}(p; \delta)$  für alle  $y \in Y$  schon

$$\|k_y(x) - k_y(z)\| \leq (1/2)\|x - z\|$$

Weiter haben wir  $k_y(p) = p + L^{-1}(y - f(p))$ , und da  $L^{-1}$  stetig ist, finden wir  $\eta > 0$  derart, daß gilt  $\|y - f(p)\| < \eta \Rightarrow \|k_y(p) - p\| < (\delta/2)$ . Für  $\|y - f(p)\| < \eta$  haben wir also

$$\|x - p\| \leq \delta \Rightarrow \|k_y(x) - k_y(p)\| \leq (\delta/2) \Rightarrow \|k_y(x) - p\| < \delta$$

und folglich bildet für  $\|y\| < \eta$  unser  $k_y$  den abgeschlossenen Ball  $\bar{B}(p; \delta)$  in sich selber, ja sogar in den offenen Ball  $B(p; \delta)$  ab. Wir wissen zusätzlich schon, daß  $k_y$  kontrahierend ist. Für  $\|y - f(p)\| < \eta$  hat also  $k_y$  in  $\bar{B}(p; \delta)$  genau einen Fixpunkt, und dieser Fixpunkt liegt bereits im offenen Ball  $B(p; \delta)$ . Die Fixpunkte von  $k_y : U \rightarrow X$  sind aber genau die  $x \in U$  mit  $f(x) = y$ . Zusammenfassend haben wir also  $\delta > 0$  und  $\eta > 0$  gefunden derart, daß  $B(p; \delta)$  in  $U$  enthalten ist und daß es für jedes  $y \in B(f(p); \eta)$  genau ein  $x \in B(p; \delta)$  gibt mit  $f(x) = y$ . Setzen wir nun  $B = B(f(p); \eta)$  und  $A = f^{-1}(B) \cap B(p; \delta)$ , so liefert  $f$  in der Tat eine Bijektion  $A \xrightarrow{\sim} B$ .  $\square$

**Lemma 4.3.1.** *Seien  $X$  und  $Y$  endlichdimensionale reelle Räume,  $A \subseteq X$  offen und  $f : A \rightarrow Y$  eine stetig differenzierbare Injektion, deren Differential an jeder Stelle ein Isomorphismus ist. So ist  $f(A)$  offen in  $Y$  und die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ist differenzierbar und hat bei  $f(p)$  das Differential  $(d_p f)^{-1}$ .*

*Beweis.* Als erstes zeigen wir, daß  $f(A)$  offen und  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  stetig ist. Dazu müssen wir nach II.6.5.18 nur nachweisen, daß  $f : A \rightarrow Y$  offene Mengen zu offenen Mengen macht. Sei dazu  $D \subseteq A$  offen in  $A$ . Für jedes  $p \in D$  finden wir nach ?? eine offene Teilmenge  $A_p \subseteq D$  mit  $p \in A_p$  und  $f(A_p)$  offen. Dann muß auch  $f(D)$  offen sein als Vereinigung solcher  $f(A_p)$  und  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  ist in der Tat stetig. Um die Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  an einer Stelle  $f(p)$  zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Räume Vektorräume sind und daß gilt  $p = 0$  und  $f(p) = 0$  annehmen. Wir setzen  $L = d_0 f$  und schreiben

$$f(x) = L(x) + \|x\|\varepsilon(x)$$

für eine geeignete Abbildung  $\varepsilon : A \rightarrow Y$ , die stetig ist bei 0 und die dort den Wert Null annimmt. Setzen wir hier  $x = f^{-1}(y)$  ein mit  $y \in f(A)$  und wenden auf beiden Seiten  $L^{-1}$  an, so ergibt sich

$$L^{-1}(y) = f^{-1}(y) + \|f^{-1}(y)\| L^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y)))$$

Nun betrachten die Abbildung  $k : A \rightarrow X$ ,  $g(x) = x - L^{-1}(f(x))$  mit  $d_0 k = 0$ , und da  $d_u k$  stetig von  $u \in U$  abhängt, finden wir wieder  $\delta > 0$  mit  $B(0; \delta) \subset A$  und  $\|d_u k\| \leq (1/2)$  für alle  $u \in B(0; \delta)$ . Mit IV.1.3.5 folgt für  $x \in B(0; \delta)$  die Abschätzung

$$\|x\|/2 \geq \|k(x)\| = \|x - L^{-1}(f(x))\| \geq \|x\| - \|L^{-1}f(x)\|$$

Daraus folgt  $\|L^{-1}\| \cdot \|f(x)\| \geq \|x\|/2$ , und wählen wir nun  $\eta > 0$  mit  $B(0; \eta) \subset f(A)$  und  $f^{-1}(B(0; \eta)) \subset B(0; \delta)$ , so ergibt sich für  $y \in B(0; \eta)$  die Abschätzung

$$2\|L^{-1}\|\|y\| \geq \|f^{-1}(y)\|$$

Damit folgt, daß oben auch der Quotient  $\|f^{-1}(y)\| L^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y)))/\|y\|$  des zweiten Summanden durch  $\|y\|$  mit  $y$  gegen Null strebt, daß also die Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  differenzierbar ist beim Ursprung von  $Y$  mit Differential  $d_0(f^{-1}) = L^{-1}$ .  $\square$

#### 4.4 Landau-Symbole

*Bemerkung 4.4.1.* Gegeben ein metrischer Raum  $X$ , ein Punkt  $p \in X$ , und eine Abbildung in einen normierten Vektorraum  $f; X \rightarrow V$  und eine reellwertige Abbildung  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sagt man,  $f$  sei “ein großes O von  $g$  für  $x \rightarrow p$ ” und schreibt

$$f = O(g) \text{ für } x \rightarrow p$$

falls es eine Umgebung  $U$  von  $p$  und eine Konstante  $C$  gibt mit

$$\|f(x)\| \leq C \cdot |g(x)| \text{ für alle } x \in U.$$

Weiter sagt man,  $\mathfrak{h}$  sei ein “kleines o von  $g$  für  $x \rightarrow p$ ” und schreibt

$$f = o(g) \text{ für } x \rightarrow p$$

falls es eine Umgebung  $U$  von  $p$  und eine Abbildung  $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $\eta$  stetig bei  $p$ ,  $\eta(p) = 0$  und

$$\|f(x)\| = \eta(x) \cdot |g(x)| \quad \forall x \in U$$

Diese Symbole O und o heißen die **Landau-Symbole**.

#### 4.5 Ergänzungen für nicht $\sigma$ -endliche Maße

*Bemerkung 4.5.1.* Nach [V.1.4.10](#) und [V.1.7.13](#) ist ein beliebiger Hilbertraum isomorph zu einem  $L^2$ -Raum über einer Menge mit Zählmaß, die jedoch nicht abzählbar zu sein braucht. Es scheint mir deshalb sinnvoll, den im vorhergehenden entwickelten Formalismus soweit möglich auf nicht notwendig  $\sigma$ -endliche Maßräume auszudehnen. In der Literatur geht etwa Halmos [[Hal70](#)] in diesem Zusammenhang so vor, daß er den Begriff eines Maßraums abändert und schwächer fordert, daß die meßbaren Mengen eines Maßraums nur einen “ $\sigma$ -Ring” zu bilden brauchen. Mir scheint es jedoch insbesondere für die Diskussion meßbarer Abbildungen praktischer, konsequent mit  $\sigma$ -Algebren zu arbeiten und bei der weiteren Entwicklung der Theorie schlicht den Mengen, die nicht zum “ $\sigma$ -Ring der in natürlicher Weise meßbaren Mengen” gehören, das Maß Unendlich zuzuweisen. Wir verfahren nach diesem Prinzip etwa bei der Diskussion des Satzes von Hahn oder der Diskussion von Produktmaßen.

**Satz 4.5.2 (von Hahn über Maßerweiterungen).** *Gegeben eine Menge  $X$ , ein Mengenring  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  und ein Prämaß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  existiert genau eine Erweiterung von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{A}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , die allen den Mengen von  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  das Maß Unendlich zuordnet, die nicht in einer abzählbaren Vereinigung von Mengen endlichen Maßes aus  $\mathcal{A}$  enthalten sind.*

*Bemerkung 4.5.3.* Wir nennen die in 4.5.2 charakterisierte Erweiterung eines Prämaßes zu einem Maß seine **kanonische Erweiterung**. Der Beweis zeigt, daß sie beschrieben werden kann durch die Formel

$$\mu(M) = \inf \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \right)$$

wo das Infimum gebildet wird über alle Folgen in  $\mathcal{A}$  mit  $M \subset \bigcup A_n$ .

*Beweis.* Der Existenzbeweis wurde beim Beweis von IV.6.2.10 bereits mit gegeben, es gilt nur bei IV.6.2.23 zu erinnern, daß das Infimum der leeren Menge  $\infty$  ist. Wir zeigen nun noch die Eindeutigkeit. Sei dazu  $\nu$  eine zweite Erweiterung. Es gilt zu zeigen  $\mu(Y) = \nu(Y)$  für alle  $Y \in \mathcal{M}$ , die sich durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus  $\mathcal{A}$  überdecken lassen. Aber sei  $(S_n)$  eine Folge in  $\mathcal{A}$  mit  $\bigcup S_n \supset Y$  und  $\mu(S_n) < \infty \quad \forall n$ . Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen  $S_n \subset S_{n+1} \subset \dots$ , und müssen nur für alle  $n$  die Gleichungen

$$\mu(Y \cap S_n) = \nu(Y \cap S_n)$$

zeigen, dann ergibt sich  $\mu(Y) = \nu(Y)$  im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ . Nach der Definition von  $\mu$  gilt offensichtlich  $\nu(Y \cap S_n) \leq \mu(Y \cap S_n)$ , aber ganz genauso auch  $\nu(Y^c \cap S_n) \leq \mu(Y^c \cap S_n)$ , und da die Summe dieser Ungleichungen die Gleichung  $\nu(S_n) = \mu(S_n)$  liefert, müssen unsere Ungleichungen beide schon Gleichungen gewesen sein.  $\square$

*Bemerkung 4.5.4.* Jede integrierbare Funktion verschwindet außerhalb einer  $\sigma$ -endlichen Menge. In der Tat müssen bei integrierbarem  $f$  die Urbilder der Intervalle  $[1/n, \infty)$  und  $(-\infty, -1/n]$  alle endliches Maß haben.

**Satz 4.5.5.** Gegeben Maßräume  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  gibt es auf der Produkt- $\sigma$ -Algebra genau ein Maß  $\mu \otimes \nu$ , das **Produktmaß**, derart daß (1) für alle  $A \in \mathcal{M}$  und  $B \in \mathcal{N}$  von endlichem Maß gilt

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

und daß (2) allen denjenigen Mengen aus  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ , die sich nicht durch eine abzählbare Vereinigung von Produkten von Mengen endlichen Maßes überdecken lassen, das Maß Unendlich zugeordnet wird.

*Bemerkung 4.5.6.* Im Fall  $\mu(A) = \infty$  und  $\nu(B) = 0$  gilt für das so erklärte Produktmaß nur dann  $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = 0$ , wenn  $A$  als abzählbare Vereinigung von Mengen endlichen Maßes geschrieben werden kann oder wenn  $B$  die leere

Menge ist. Andernfalls erhalten wir  $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \infty$ . Man könnte alternativ auch eine konsistente Theorie aufbauen, indem man als Produktmaß die kanonische Erweiterung des im folgenden Beweis betrachteten Prämaßes  $\mu \times \nu$  wählt. Im Wesentlichen käme man damit zu denselben Resultaten und insbesondere entstünden isomorphe Räume von  $L^p$ -Funktionen auf Produkten. Das in unserem Satz definierte Produktmaß scheint mir jedoch sowohl einfacher in der Beschreibung als auch einfacher in der Handhabung, etwa beim Beweis der Sätze von Fubini.

*Bemerkung 4.5.7.* Die Definition des Produkts zweier Maßräume in dieser unüblichen Allgemeinheit zu geben scheint mir sinnvoll etwa im Lichte von 1.11.1, wonach für zwei beliebige Maßräume das komplettierte Tensorprodukt der zugehörigen Räume quadratintegrierbarer Funktionen kanonisch isomorph ist zum Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf ihrem Produkt. Wenn man weiß, daß jeder Hilbertraum isomorph ist zum Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer Menge mit Zählmaß, so liegt es nahe, diesen Satz auch für nicht notwendig abzählbare Mengen mit Zählmaß zu formulieren.

*Beweis.* Wie im Beweis von IV.6.6.1 bilden wir das Prämaß  $\mu \times \nu$  auf  $\mathcal{E}$ . Dieses Prämaß ändern wir nun ab zu einer Abbildung  $(\mu \tilde{\times} \nu) : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ , indem wir allen den Mengen  $C \in \mathcal{E}$ , die sich nicht durch eine abzählbare Vereinigung von Produkten von Mengen endlichen Maßes überdecken lassen, das Maß Unendlich zuordnen, und den übrigen  $C \in \mathcal{E}$  den Wert  $(\mu \times \nu)(C)$ . Man sieht leicht ein, daß auch  $\mu \tilde{\times} \nu$  wieder ein Prämaß auf  $\mathcal{E}$  ist. Unser Satz folgt damit aus dem Satz von Hahn 4.5.2 über Maßerweiterungen.  $\square$

*Übung 4.5.8.* Seien  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  Maßräume. Wir erhalten denselben Maßraum, ob wir den Produktraum vervollständigen oder ob wir die einzelnen Maßräume vervollständigen, den Produktraum bilden, und nochmals vervollständigen. In Formeln gilt also

$$(X \times Y, (\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{N}^*)^*, (\mu^* \otimes \nu^*)^*) = (X \times Y, (\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^*, (\mu \otimes \nu)^*)$$

**Satz 4.5.9 (positiver Fubini).** *Seien  $(X, \mu)$  und  $(Y, \nu)$  Maßräume. Gegeben eine meßbare Funktion  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ , die außerhalb einer  $\sigma$ -endlichen Menge verschwindet, ist  $x \mapsto f(x, y)$  für alle  $y \in Y$  eine meßbare Funktion  $X \rightarrow [0, \infty]$  und das partielle Integral  $y \mapsto \int f(x, y) \mu \langle x \rangle$  ist eine meßbare Funktion  $Y \rightarrow [0, \infty]$  und es gilt*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \otimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_Y \left( \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

*Bemerkung 4.5.10.* Daß die Bedingung, die Funktion möge außerhalb einer  $\sigma$ -endlichen Menge verschwinden, hier auch wirklich nötig ist, zeigt [IV.6.6.10](#).

*Beweis.* Das folgt unter unseren Annahmen sofort aus [IV.6.6.8](#).  $\square$

**Satz 4.5.11 (Fubini).** *Seien  $(X, \mu)$  und  $(Y, \nu)$  Maßräume. Gegeben eine integrierbare Funktion  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist für fast alle  $y \in Y$  die Funktion  $x \mapsto f(x, y)$  integrierbar und die fast überall definierte Funktion  $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle$  ist auch integrierbar und für ihr Integral gilt*

$$\int_Y \left( \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle = \int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \otimes \nu) \langle x, y \rangle$$

*Beweis.* Man kann den Beweis von [IV.6.6.18](#) übernehmen, wenn man mit [4.5.9](#) arbeitet und beachtet, daß eine meßbare und integrierbare Funktion nach [4.5.4](#) notwendig außerhalb einer  $\sigma$ -endlichen Menge verschwindet.  $\square$

## 4.6 Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen

**Definition 4.6.1.** Seien  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge meßbarer reeller Funktionen auf  $X$  und  $f$  eine meßbare reelle Funktion auf  $X$ .

1. Man sagt, die Folge der  $f_n$  **konvergiere stochastisch** gegen  $f$  genau dann, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) = 0$ .
2. Man sagt, die Folge der  $f_n$  **konvergiere fast überall** gegen  $f$  genau dann, wenn gilt  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für fast alle  $x \in X$ . Im Fall eines Wahrscheinlichkeitsraums nennt man das auch **fast sichere Konvergenz**.
3. Man sagt, die Folge der  $f_n$  **konvergiere im Mittel** gegen  $f$  genau dann, wenn alle Differenzen  $f_n - f$  integrierbar sind und es gilt  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ .

4.6.2. Die Beziehung zwischen diesen Begriffen faßt folgendes Diagramm zusammen:

$$\text{im Mittel} \Rightarrow \text{stochastisch} \Leftarrow \text{fast überall}$$

Hier sei  $\Rightarrow$  eine Übung, und um  $\Leftarrow$  zu zeigen betrachten wir für  $\varepsilon > 0$  die Mengen  $X_n(\varepsilon) = \{x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } m \geq n\}$  und folgern aus Konvergenz fast überall, daß das Komplement von  $\bigcup X_n(\varepsilon)$  in  $X$  eine Nullmenge ist. Andere Implikationen zwischen unseren Begriffen existieren nicht. Um das zu zeigen müssen wir nur Beispiele angeben, in denen eine der äußeren Eigenschaften erfüllt ist aber nicht die andere. Ein Beispiel für eine im Mittel aber nicht fast überall konvergierende Folge gibt [V.1.3.10](#). Ein

Beispiel für eine fast überall aber nicht im Mittel konvergierende Folge auf  $(X, \mathcal{M}, \mu) = ([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$  bildet die Folge der Produkte mit  $n$  der charakteristischen Funktionen der Intervalle  $[0, 1/n]$ .

4.6.3. Bei allen drei Arten von Grenzwerten sind die Grenzwerte wohlbestimmt als fast überall definierte Funktionen, wenn sie denn existieren. Das ist nur im Fall stochastischer Konvergenz nicht offensichtlich. Konvergiert jedoch eine Folge stochastisch sowohl gegen  $f$  als auch gegen  $g$ , so stimmen  $f$  und  $g$  fast überall überein, da ja gilt

$$\mu(|f - g| > 2\varepsilon) \leq \mu(|f - f_n| > \varepsilon) + \mu(|g - f_n| > \varepsilon)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon > 0$ .

**Lemma 4.6.4.** *Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum. Konvergiert eine Folge meßbarer reeller Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $X$  stochastisch gegen eine meßbare reelle Funktion  $f$ , so konvergiert eine geeignete Teilfolge fast überall gegen  $f$ .*

*Beweis.* Wir finden natürliche Zahlen  $n(1) < n(2) < \dots$  mit der Eigenschaft  $\mu(|f_{n(i)} - f| > 1/i) < 2^{-i}$ . Setzen wir

$$A_i = \{x \in X \mid |f_{n(i)}(x) - f(x)| > 1/i\}$$

so gilt also  $\mu(A_i) < 2^{-i}$  und die Vereinigung  $A_{>i} = A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \dots$  hat ein Maß  $\mu(A_{>i}) < 2^{-i}$ . Die Folge der  $f_{n(i)}$  konvergiert nun aber offensichtlich punktweise außerhalb des Schnittes aller  $\mu(A_{>i})$  und damit außerhalb einer Nullmenge.  $\square$

4.6.5 (**Satz über stochastische dominierte Konvergenz**). Der Satz über dominierte Konvergenz IV.6.5.10 bleibt gültig, wenn wir statt punktweiser Konvergenz allgemeiner nur stochastische Konvergenz fordern. Haben wir etwa  $f_n \rightarrow f$  stochastisch und ist  $g$  eine dominierende Funktion und  $\varepsilon > 0$  gegeben, so finden wir mit IV.6.4.17 ein  $\alpha = \alpha_\varepsilon > 0$  mit der Eigenschaft  $\mu(A) < \alpha \Rightarrow \int_A g \mu < \varepsilon$  für meßbares  $A$ . Weiter finden wir mit IV.6.4.18 ein  $\beta = \beta_\varepsilon > 0$  mit der Eigenschaft  $\int \inf(g, \beta) \mu < \varepsilon$ . Ist  $n$  so groß, daß gilt  $\mu(|f_n - f| > \beta) < \alpha$ , und bezeichnen wir diese "Ausnahmemenge" mit  $A$ , so folgt

$$\int_X |f_n - f| \mu \leq \int_{X \setminus A} |f_n - f| \mu + 2 \int_A g \mu \leq 3\varepsilon$$

## 4.7 Markov-Ketten

4.7.1. Gegeben sei eine endliche Menge  $E$ , deren Elemente **Zustände** heißen mögen. Gegeben sei weiter eine  $(E \times E)$ -Matrix  $Q$  mit Einträgen in  $[0, 1]$  und

Spaltensummen Eins, in Formeln eine Abbildung  $Q : E^2 \rightarrow [0, 1]$ ,  $(i, j) \mapsto Q_{ij}$  mit  $\sum_i Q_{ij} = 1$  für alle  $j$ . Wir nennen  $Q_{ij}$  die **Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand  $j$  in den Zustand  $i$**  und fordern deshalb  $\sum_i Q_{ij} = 1$  für alle  $j$ , da “vom Zustand  $j$  aus im nächsten Schritt mit Wahrscheinlichkeit Eins wieder einer unserer Zustände erreicht werden soll”. Beginnen wir mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p$  auf  $E$ , also einer Abbildung  $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\sum_{i \in E} p(i) = 1$ , und fassen sie als einen Spaltenvektor auf, so stellt sich nach einem Schritt die Verteilung  $Qp$  ein und nach  $n$  Schritten die Verteilung  $Q^n p$ . Wir stellen uns nun die Frage, unter welchen Umständen die Folge der  $Q^n p$  für alle  $p$  konvergiert, unter welchen Umständen ihr Grenzwert zusätzlich gar nicht von  $p$  abhängt, und wie schnell unsere Folge im Zweifelsfall konvergiert.

*Beispiel 4.7.2.* Zu einem endlichen Köcher im Sinne von ?? mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß von jeder seiner Ecken mindestens ein Pfeil ausgeht, erhalten wir die Markov-Kette der “zufälligen Wanderungen in unserem Köcher” wie folgt: Als Zustände nehmen wir die Ecken des Köchers und denken uns dabei, daß sich ein Wanderer an besagter Ecke befinden möge. In jedem Zeitschritt sucht sich unser Wanderer dann zufällig einen ausgehenden Pfeil aus und wandert auf diesem zur nächsten Ecke. Verfeinern wir unsere Regel dadurch, daß wir jedem Pfeil  $i \leftarrow j$  noch eine Wahrscheinlichkeit  $Q_{ij}$  zuordnen, mit der er von unserem Wanderer ausgesucht wird, und fassen dafür alle mehrfachen Pfeile zwischen je zwei vorgegebenen Ecken zu einem einfachen Pfeil mit entsprechend höherer Wahrscheinlichkeit zusammen, so sind wir auch schon wieder beim allgemeinen Fall gelandet.

*Beispiel 4.7.3 (Urnenmodell von Ehrenfest).* In zwei durch ein Loch verbundenen Kammern befinden sich insgesamt  $N \geq 1$  nicht unterscheidbare Teilchen. Wir betrachten den Raum  $E = \{0, 1, \dots, N\}$  aller “Zustände”, wobei der Zustand  $i$  bedeuten möge, daß sich  $i$  Teilchen in der linken Kammer und die restlichen  $N - i$  Teilchen in der rechten Kammer befinden. Als Übergangswahrscheinlichkeiten wählen wir

$$Q_{ij} = \begin{cases} j/N & i = j - 1; \\ (N - j)/N & i = j + 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Zeitschritt wechselt also genau ein Teilchen die Kammer, und die Wahrscheinlichkeit, daß das ein Teilchen aus einer Kammer mit  $j$  Teilchen ist, beträgt genau  $j/N$ . In diesem Fall konvergiert die Folge  $Q^n p$  nicht für alle  $p$ , da sich ja in jeder Kammer immer abwechselnd erst eine gerade und dann wieder eine ungerade Anzahl von Teilchen befinden.

**Satz 4.7.4 (Konvergenz endlicher Markov-Ketten).** *Ist bei einer endlichen Markov-Kette die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen je zwei Zuständen positiv, in Formeln  $Q_{ij} > 0 \quad \forall i, j$ , so gibt es genau eine stabile Verteilung  $s$  und für jede Anfangsverteilung  $p$  gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n p = s$$

4.7.5. Ich wüßte gerne, ob und wenn ja wie die Beziehung zur Konvexgeometrie ?? präzisiert werden kann.

*Ergänzung 4.7.6 (Bewertung von Seiten im Netz).* Die Bewertung von Seiten im Netz durch Suchmaschinen baut auf der Vorstellung auf, daß ein Surfer auf einer gegebenen Seite jeden der Verweise zu weiteren Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit anklickt. Damit er nicht bei einer Seite hängenbleiben kann, die auf gar keine weitere Seite verweist, denkt man sich dabei auf jeder Seite zusätzlich einen Verweis angebracht, der einen beim Darauklicken zu einer zufällig ausgesuchten Seite schickt, und der mit derselben Wahrscheinlichkeit angeklickt wird wie alle anderen. Die durch diese Markovkette bestimmte stabile Verteilung ist dann die gesuchte Bewertung von Seiten im Netz. Eine Seite ist damit desto höher bewertet, je mehr Seiten darauf verweisen, wobei Verweise von Seiten, die ihrerseits höher bewertet sind, entsprechend stärker gewichtet werden.

*Beweis.* In der Tat beschreibt ja  $Q$  eine lineare Abbildung, die jeden Vektor der Standardbasis ins Innere des positiven Quadranten kippt und die die affine Hyperebene  $H = \{(x_i)_{i \in E} \mid \sum x_i = 1\}$  auf sich selbst abbildet. Es scheint mir damit anschaulich klar, daß  $Q$  ein Kontraktion  $Q : H \rightarrow H$  definiert und daß der Fixpunkt dieser Kontraktion im Innern des positiven Quadranten  $\text{Ens}(E, \mathbb{R}_{>0})$  liegen muß. Um das zu beweisen reicht es zu zeigen, daß  $Q$  bezüglich irgendeiner Norm kontrahierend wirkt auf der linearen Hyperebene, die gegeben wird durch die Gleichung  $\sum x_i = 0$ . Wir zeigen das bezüglich der Norm  $|x| = \sum |x_i|$ . Sei  $\delta$  der kleinste Eintrag von  $Q$ . Schreiben wir  $Q = \delta U + R$  für  $U$  die Matrix mit einer Eins in jedem Eintrag, so hat  $R$  nur nichtnegative Einträge. Damit erhalten wir

$$|Qx| = |Rx| = \sum_i \left| \sum_j R_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i,j} R_{ij} |x_j| = \lambda |x|$$

für  $\lambda = 1 - n\delta$  die Summe der Einträge von  $R$  in einer und jeder Spalte. Also ist  $Q : H \rightarrow H$  kontrahierend und hat genau einen Fixvektor  $s$ , dessen Koordinaten alle positiv sein müssen. Alle anderen Eigenwerte von  $Q$  müssen auch Eigenwerte der Einschränkung auf die lineare Ebene  $\sum x_i = 0$  sein und sind folglich im Absolutbetrag beschränkt durch unsere Kontraktionskonstante  $1 - n\delta$ , etwa nach [V.3.3.15](#).  $\square$

## 4.8 Unendliche Produkte von Maßräumen

**Definition 4.8.1 (Produkt von Maßräumen).** Gegeben eine Familie von Maßräumen  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$  definiert man ihr Produkt, indem man die Produktmenge

$$\prod_{i \in I} \Omega_i$$

mit der kleinsten  $\sigma$ -Algebra versieht derart, daß die Projektionsabbildungen auf die Faktoren  $\Omega_i$  alle meßbar werden.

*Übung 4.8.2.* Eine Abbildung von einem Maßraum in ein Produkt von Maßräumen ist meßbar genau dann, wenn alle ihre Komponenten meßbar sind. Hinweis: Man betrachte das Bild der  $\sigma$ -Algebra der meßbaren Mengen aus dem Definitionsbereich unserer Abbildung. In kategorientheoretischer Terminologie ist das also in der Tat das Produkt in der Kategorie der Maßräume.

**Definition 4.8.3.** Ein Maßraum heißt **diskret** genau dann, wenn alle Teilmengen der Grundmenge als meßbar verstanden werden. Ein Maßraum heißt **Borel'sch** genau dann, wenn er isomorph ist zu einer meßbaren Teilmenge eines abzählbaren Produkts endlicher diskreter Maßräume.

*Übung 4.8.4.* Die reelle Zahlengerade  $\mathbb{R}$  ist mit ihrer Borel'schen  $\sigma$ -Algebra ein Borel'scher Maßraum. In der Tat liefert die Dezimalbruchentwicklung "ohne Neunerperioden" eine meßbare Abbildung  $[0, 1) \leftrightarrow \text{Ens}(\mathbb{N}, \{0, 1, \dots, 9\})$  mit meßbarem Bild. Umgekehrt ist auch jeder Borel'sche Maßraum isomorph zu einer meßbaren Teilmenge der reellen Zahlengeraden. In der Tat können wir ihn leicht als meßbare Teilmenge von  $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{0, 1, \dots, 8\})$  realisieren, und die Dezimalbruchentwicklung realisiert das hinwiederum als meßbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

4.8.5. Gegeben eine Familie von Maßräumen  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$  verstehen wir unter einem **Teppich** eine Menge der Gestalt  $M \times \prod_{i \in I \setminus E} \Omega_i$  für  $E \subset I$  endlich und  $M \subset \prod_{i \in E} \Omega_i$  meßbar. Offensichtlich bilden alle Teppiche einen Mengerring, und dieser Mengerring erzeugt die Produkt- $\sigma$ -Algebra.

**Definition 4.8.6 (Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen).** Gegeben eine Familie  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$  von Wahrscheinlichkeitsräumen erklärt man ihr Produkt, indem man auf dem Produkt der Maßräume das Maß betrachtet, das jedem Teppich  $M \times \prod_{i \in I \setminus E} \Omega_i$  als Maß das Produktmaß von  $M \subset \prod_{i \in E} \Omega_i$  zuordnet.

*Bemerkung 4.8.7.* Gibt es das überhaupt? Ich fürchte, nein. Klenke zeigt es nur für Produkte sogenannter Borel-Räume, vergleiche 4.16.3. Die Schwierigkeit scheint darin zu liegen, die  $\sigma$ -Additivität des Prämaßes nachzuweisen.

## 4.9 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Definition 4.9.1.** Eine meßbare Teilmenge eines Wahrscheinlichkeitsraums nennt man auch ein **Ereignis**.

*Beispiel 4.9.2.* Unser Wahrscheinlichkeitsraum ist  $\{1, \dots, 6\}^{10}$  mit den auf Gesamtmasse Eins normierten Zählmaß. Er modelliert das zehnmalige Würfeln mit einem gerechten Würfel. Ein Ereignis wäre etwa, daß man beim dritten und vierten Wurf jeweils eine Eins würfelt, oder auch, daß bei den zehn Würfeln der Durchschnitt der Augenzahlen  $3\frac{1}{2}$  ist.

**Definition 4.9.3 (Unabhängigkeit von Ereignissen).** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie von Ereignissen  $(A_i)_{i \in I}$  heißt **stochastisch unabhängig** genau dann, wenn für jede endliche Teilmenge  $E \subset I$  gilt

$$P\left(\bigcap_{i \in E} A_i\right) = \prod_{i \in E} P(A_i)$$

*Beispiel 4.9.4.* Wir betrachten im Fall des sechsmaligen Würfeln mit einem gerechten Würfel die drei Ereignisse

$A_1$ : Beim ersten Wurf erhalten wir eine Eins;

$A_2$ : Beim zweiten Wurf erhalten wir eine Eins;

$A_3$ : Jede Augenzahl kommt bei unseren Würfeln einmal vor.

Diese Ereignisse sind zwar paarweise unabhängig, die Familie aller dieser drei Ereignisse ist jedoch nicht unabhängig.

**Definition 4.9.5.** Eine meßbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Meßraum heißt eine **Zufallsvariable** auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum. Im Zweifelsfalle sind meist reellwertige Zufallsvariablen gemeint, also Zufallsvariablen mit Werten in der reellen Zahlengeraden, versehen mit ihrer Borel'schen  $\sigma$ -Algebra.

*Beispiel 4.9.6.* Sei gegeben das Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$  mit dem Lebesguemaß als Wahrscheinlichkeitsraum. Es modelliert die "zufällige Wahl eines Produktes aus dem Einheitsquadrat". Eine Zufallsvariable auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum wäre etwa die Zuordnung, die jedem Punkt seine  $x$ -Koordinate zuordnet.

**Definition 4.9.7 (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen).** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie von Zufallsvariablen  $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow$

$(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$  indiziert durch gewisse  $i \in I$  heißt **stochastisch unabhängig** genau dann, wenn für jede Wahl von  $A_i \in \mathcal{A}_i$  für  $i \in I$  die Familie von Ereignissen  $X_i^{-1}(A_i)$  stochastisch unabhängig ist im Sinne von 4.9.3. Insbesondere ist unsere Familie genau dann stochastisch unabhängig, wenn das für jede endliche Teilfamilie gilt.

*Beispiel 4.9.8.* Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum des sechsmaligen Würfels oder irgendeiner Verfeinerung desselben betrachten wir die drei Zufallsvariablen

$X_1$ : Ausgang des ersten Wurfs;

$X_2$ : Ausgang des zweiten Wurfs;

$X_3$ : Wieviele Zahlen wurden mindestens zweimal gewürfelt?

Die ersten beiden Zufallsvariablen nehmen Werte in  $\{1, \dots, 6\}$  an, die dritte Werte in  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Je zwei dieser Zufallsvariablen sind stochastisch unabhängig, als Gesamtheit sind sie jedoch nicht stochastisch unabhängig.

*Übung 4.9.9.* Gegeben eine stochastisch unabhängige Familie von Zufallsvariablen  $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$  und meßbare Abbildungen  $f_i : (\Omega_i, \mathcal{A}_i) \rightarrow (\Lambda_i, \mathcal{B}_i)$  ist auch die durch  $i \in I$  indizierte Familie der Zufallsvariablen  $f_i \circ X_i$  stochastisch unabhängig.

**Definition 4.9.10.** Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und eine Zufallsvariable  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  heißt das Bildmaß

$$P^X := X_*P$$

von  $P$  unter  $X$  die **Verteilung der Zufallsvariable**. Diese Verteilung ist also ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega', \mathcal{A}')$ .

*Beispiel 4.9.11.* Gegeben der Wahrscheinlichkeitsraum  $[0, 1]^2$  eines zufälligen Punktes aus dem Einheitsquadrat und die reellwertige Zufallsvariable

$$X : (a, b) \mapsto a + b$$

ist ihre Verteilung das Produkt des Lebesgue-Maßes mit der Dächle-Funktion, die Träger  $[0, 2]$  hat, bei 1 den Wert Eins annimmt, an den Intervallgrenzen verschwindet und linear verläuft auf den beiden Teilintervallen  $[0, 1]$  und  $[1, 2]$ .

4.9.12. Gegeben beliebige Zufallsvariablen  $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$  mag man die **zusammengefaßte Zufallsvariable**

$$X = (X_i)_{i \in I} : \Omega \rightarrow \prod_{i \in I} \Omega_i$$

bilden, wobei der Produktraum rechts mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra zu verstehen ist. Die Meßbarkeit dieser Abbildung folgt aus 4.8.2.

*Übung 4.9.13.* Gegeben eine stochastisch unabhängige Familie von Zufallsvariablen  $X_i$  indiziert durch  $i \in I$  und eine Partition  $I = \bigsqcup_{k \in K} I(k)$  ist auch die durch  $k \in K$  indizierte Familie der zusammengefaßten Zufallsvariablen  $Y_k := (X_i)_{i \in I(k)}$  stochastisch unabhängig.

**Proposition 4.9.14 (Verteilung unabhängiger Zufallsvariablen).** *Eine endliche Familie  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  von Zufallsvariablen ist stochastisch unabhängig genau dann, wenn die Verteilung ihrer Zusammenfassung  $X := (X_i)_{1 \leq i \leq n}$  das Produkt der Verteilungen der einzelnen Komponenten ist, in Formeln*

$$P^X = P^{X_1} \boxtimes \dots \boxtimes P^{X_n}$$

*Beweis.* Gegeben  $A_i \in \mathcal{A}_i$  gilt per definitionem  $X_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap X_n^{-1}(A_n) = X^{-1}(A_1 \times \dots \times A_n)$ . Ist die Verteilung der Zusammenfassung das Produkt der Verteilungen, so gilt

$$\begin{aligned} P^X(A_1 \times \dots \times A_n) &= P^{X_1}(A_1) \dots P^{X_n}(A_n) \\ &\parallel \\ P(X^{-1}(A_1 \times \dots \times A_n)) &= P(X_1^{-1}(A_1)) \dots P(X_n^{-1}(A_n)) \\ &\parallel \\ P(X_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap X_n^{-1}(A_n)) & \end{aligned}$$

und damit steht schon die stochastische Unabhängigkeit da. Umgekehrt folgt aus der stochastischen Unabhängigkeit die Gleichheit der untersten Terme in unseren beiden Gleichungstürmen und damit die Gleichheit in der Mitte, für alle  $A_i \in \mathcal{A}_i$ . Unsere beiden Maße im Lemma stimmen also auf allen meßbaren Quadern überein, und mit dem Maßfortsetzungssatz IV.6.2.10 folgt daraus unmittelbar, daß sie gleich sind.  $\square$

**Definition 4.9.15.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben eine reelle integrierbare Zufallsvariable  $X$ , in Formeln  $X \in L_{\mathbb{R}}^1(\Omega)$ , ist ihr **Erwartungswert**  $E(X) \in \mathbb{R}$  definiert als das Integral

$$E(X) := \int X$$

Mithilfe der Verteilung  $P^X$  können wir den Erwartungswert auch schreiben als  $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x P^X$ , denn unter  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Funktion  $X$  per definitionem verwandt zur Funktion  $x = \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposition 4.9.16.** Gegeben integrierbare Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  ist der Erwartungswert ihrer Summe die Summe ihrer Erwartungswerte, in Formeln

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

*Beweis.* Das ist klar. □

**Definition 4.9.17.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben eine quadratintegrierbare Zufallsvariable  $X$ , in Formeln  $X \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ , ist ihre **Varianz**  $\text{Var}(X) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  erklärt als das Integral

$$\text{Var}(X) := \int (X - E(X))^2$$

Schließlich erklärt man die **Standardabweichung**  $\sigma(X) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  einer quadratintegrierbaren Zufallsvariablen  $X \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$  als die Wurzel aus der Varianz

$$\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$$

4.9.18. Der Begriff der Standardabweichung hat den Vorteil, daß für reelles  $\lambda \geq 0$  gilt  $\sigma(\lambda X) = \lambda \sigma(X)$ . So hat etwa die verdoppelte Zufallsvariable die vierfache Varianz, aber die doppelte Standardabweichung. Geometrisch mag man  $X - E(X)$  interpretieren als das Bild von  $X \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$  unter der orthogonalen Projektion auf die Hyperebene aller quadratintegrierbaren Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null: In der Tat steht die Gerade der konstanten reellen Zufallsvariablen nämlich auf dieser Hyperebene senkrecht und der Erwartungswert einer quadratintegrierbaren Zufallsvariablen ist nichts anderes als ihr Skalarprodukt mit der konstanten Zufallsvariablen Eins. Damit bedeutet die Standardabweichung einer quadratintegrierbaren Zufallsvariablen also geometrisch die Länge ihrer orthogonalen Projektion auf die Hyperebene aller quadratintegrierbaren Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null.

**Definition 4.9.19.** Gegeben zwei quadratintegrierbare Zufallsvariablen  $X, Y \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$  bezeichnet man schließlich das Skalarprodukt der besagten Projektionen unserer Zufallsvariablen als ihre **Kovarianz**

$$\text{Kov}(X, Y) := \langle X - E(X), Y - E(Y) \rangle = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Für von Null verschiedene Varianzen bezeichnet man schließlich den Cosinus des von unseren Projektionen eingeschlossenen Winkels als den **Korrelationskoeffizienten**  $\rho$  unserer beiden Zufallsvariablen, in Formeln

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Kov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Ist besagter Korrelationskoeffizient oder sogar noch etwas allgemeiner die Kovarianz Null, so heißen unsere Zufallsvariablen **unkorreliert**.

**Korollar 4.9.20 (Unabhängige Zufallsvariablen sind unkorreliert).**

Sind zwei quadratintegrierbare reelle Zufallsvariablen stochastisch unabhängig, so sind sie unkorreliert.

*Beweis.* Seien  $X, Y$  unsere beiden Zufallsvariablen. Unter der zusammengefaßten Zufallsvariablen  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  haben wir die Verwandtschaft von Funktionen  $XY \rightsquigarrow xy$  und nach 4.9.14 die Verwandtschaft von Maßen  $P \rightsquigarrow P^X \boxtimes P^Y$ . Es folgt mit Fubini

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{\Omega} XY P = \int_{\mathbb{R}^2} xy (P^X \boxtimes P^Y) \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} x P^X \right) \left( \int_{\mathbb{R}} y P^Y \right) = E(X) E(Y) \quad \square \end{aligned}$$

**4.10 Brown'sche Bewegung**

4.10.1. Wir modellieren die Erfolgsaussichten einer Handelsstrategie an der Börse durch ein einfaches Spiel: Es werde wiederholt eine Münze geworfen. Vor jedem Wurf darf unser Spieler einen Einsatz wagen. Kommt Wappen, so verliert er seinen Einsatz. Kommt Zahl dahingegen, so erhält er das Doppelte seines Einsatzes ausgezahlt. Nun mag unser Spieler verschiedene Strategien verfolgen. Naheliegender wäre es etwa, zunächst einmal mit einem Einsatz von einem Euro zu beginnen und dann bei jedem Verlust den Einsatz zu verdoppeln, bei jedem Gewinn jedoch wieder mit einem Einsatz von einem Euro zu beginnen. Auch andere Strategien wären denkbar. Die Frage ist nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein gegebene Strategie nach einer gegebenen Zahl von Würfen zu einem gegebenen Gewinn oder Verlust führt. Formal betrachten wir dazu den Raum  $\Omega = \text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$  aller Folgen von Buchstaben  $W$  für Wappen und  $Z$  für Zahl und darauf die Gleichverteilung im Sinne von IV.6.2.30. Für  $\omega \in \Omega$  meint also  $\omega(0)$  das Resultat des ersten Wurfes,  $\omega(1)$  das Resultat des zweiten Wurfes etc. Auf diesem Raum betrachten wir die aufsteigende Folge von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$  mit  $\mathcal{F}_n = \varphi_n^* \mathcal{P}(\{W, Z\}^n)$  für  $\varphi_n : \Omega \rightarrow \{W, Z\}^n$  die Projektion, die jeder Folge ihre  $n$  ersten Werte zuordnet. Eine Strategie  $H$  ist nun eine Abbildung

$$H : \mathbb{N} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, daß  $H_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto H(n, \omega)$  jeweils meßbar ist bezüglich  $\mathcal{F}_n$ . Anschaulich bedeutet die Meßbarkeit hier, daß unsere Strategie für die Wahl des Einsatzes  $H(n, \omega)$  vor dem  $(n + 1)$ -ten Münzwurf nur von den Ausgängen  $(\omega(0), \dots, \omega(n - 1))$  der vorhergehenden  $n$  Würfe abhängen darf.

4.10.2. Wir denken uns nun weiter die zufällige Wanderung in  $\mathbb{Z}$ , die bei Null beginnt und die bei "Zahl" einen Schritt in die positive Richtung geht, bei

“Wappen” jedoch einen Schritt in die negative Richtung. Da das ein diskretes Analogon der Brown’schen Bewegung ist, verwenden wir dafür die Notation

$$\begin{aligned} B : \mathbb{N} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n, \omega) &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} w(\omega(i)) \end{aligned}$$

mit  $w(W) = -1$  und  $w(Z) = 1$ . Natürlich können wir auch  $B$  auffassen als eine Abbildung  $B : \mathbb{N} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und wieder ist  $B_n$  jeweils meßbar bezüglich  $\mathcal{F}_n$ . Der Gewinn bzw. Verlust bei einer Handelsstrategie  $H$  nach dem  $n$ -ten Wurf ist nun

$$G_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\omega)(B_{i+1}(\omega) - B_i(\omega))$$

als Funktion der Folge  $\omega$  und ist natürlich meßbar in Bezug auf  $\mathcal{F}_n$ . Das Bildmaß unseres Wahrscheinlichkeitsmaßes auf  $\Omega$  unter  $G_n$  alias die Verteilung der Zufallsvariable  $G_n$  ist dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$ , das uns die Wahrscheinlichkeit gegebener Gewinne oder Verluste für unsere Handelsstrategie  $H$  angibt.

4.10.3. Im Fall unserer vorne erwähnten Strategie, also: verdopple Einsatz bei Verlust, beginne wieder mit einem Euro Einsatz bei Gewinn, würden wir etwa mit großer Wahrscheinlichkeit kleine Gewinne machen und mit kleiner Wahrscheinlichkeit große Verluste. Für Börsenhändler, die von Gewinnen anteilig profitieren und große Verluste eh nicht selber tragen können, mag eine solche Strategie durchaus sinnvoll sein, insbesondere wenn die vergleichsweise kleinen Gewinne doch so groß sind, daß ihre Gewinnbeteiligung ein bequemes Leben garantiert: Wenn ich mit 99% Wahrscheinlichkeit ein schönes Haus kaufen kann, und mit 1% ins Gefängnis komme, so liegt doch von moralischen Bedenken abgesehen die Entscheidung recht nahe.

**Definition 4.10.4.** Sei  $\Omega$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $Y$  ein Meßraum. Ein **stochastischer Prozess** auf  $\Omega$  mit Werten in  $Y$  ist eine meßbare Abbildung

$$X : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \rightarrow Y$$

Für jedes  $\omega \in \Omega$  heißt die Abbildung  $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow Y, t \mapsto X(t, \omega)$  ein **Pfad** unseres Prozesses. Für jedes  $t \geq 0$  ist  $X_t : \Omega \rightarrow Y, \omega \mapsto X(t, \omega)$  eine Zufallsvariable.

**Satz 4.10.5 (Brown’sche Bewegung).** *Auf der Menge aller vom Ursprung ausgehenden Pfade  $\Omega = \{\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \mid \gamma \text{ stetig, } \gamma(0) = 0\}$  mit ihrer kompakt-offenen Topologie und der zugehörigen Borel’schen  $\sigma$ -Algebra gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das **Wiener-Maß**, derart daß für den stochastischen Prozess  $B : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (t, \gamma) \mapsto \gamma(t)$  gilt:*

1. Für alle  $t > s \geq 0$  ist  $B_t - B_s$  eine normalverteilte Zufallsvariable auf dem Pfadraum  $\Omega$  mit Erwartungswert Null und Varianz  $t - s$ ;
2. Gegeben Zeitpunkte  $0 \leq t(0) < t(1) < t(2) < \dots < t(n)$  ist die Familie von Zufallsvariablen  $(B_{t(i)} - B_{t(i-1)})_{1 \leq i \leq n}$  stochastisch unabhängig.

4.10.6. Die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra zur kompakt-offenen Topologie auf dem Pfadraum  $\Omega$  kann auch beschrieben werden als die kleinste  $\sigma$ -Algebra, für die alle Auswertungen  $B_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar sind. In der Tat sind alle Auswertungen in der kompakt-offenen Topologie sogar stetig. Andererseits wird die  $\sigma$ -Algebra zur kompakt-offenen Topologie auch erzeugt von dem Mengen

$$\Omega(K, A) := \{\gamma \mid \gamma(K) \subset A\}$$

für  $K \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  kompakt und  $A \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen. Wählen wir nun aber in  $K$  eine abzählbare dichte Teilmenge  $N$ , so gilt  $\Omega(K, A) = \bigcap_{t \in N} B_t^{-1}(A)$ .

4.10.7. Gegeben  $E \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine endliche Menge von Zeitpunkten und eine Teilmenge  $A \subset \text{Ens}(E, \mathbb{R})$  aus dem von allen Produkten von  $|E|$  Intervallen erzeugten Mengenring betrachten wir die Menge aller Pfade

$$\Omega(E; A) := \{\gamma \in \Omega \mid \gamma|_E \in A\}$$

mit durch  $A$  vorgeschriebenem Verhalten auf  $E$ . Die  $\Omega(E; A)$  bilden in  $\Omega$  einen Mengenring und es ist nicht schwer zu sehen, welchen Wert jedes Wienermaß jedem  $\Omega(E; A)$  zuordnen muß. Da fraglicher Mengenring bereits die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra auf dem Pfadraum erzeugt, zeigt der Maßfortsetzungssatz von Caratheodory [IV.6.2.10](#) damit bereits die Eindeutigkeitsaussage aus unserem Satz, und um auch die Existenz eines Wienermaßes zu zeigen, reicht es nachzuweisen, daß unsere Formeln bereits ein Prämaß liefern.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit Noch zu schreiben. □

Von hier ab isses unausgegoren.

**Definition 4.10.8.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  eine durch  $I$  induzierte Familie von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$  mit  $t \leq s \Rightarrow \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ . Bezeichne  $\mathcal{L}^2(\Omega \times I; \mathcal{F}) \subset \mathcal{L}^2(\Omega \times I)$  die Menge aller quadratintegrierbaren Funktionen  $f$  mit der Eigenschaft, daß  $f_t : \omega \mapsto f(\omega, t)$  meßbar ist bezüglich  $\mathcal{F}_t$  für alle  $t \in I$ .

*Beispiel 4.10.9.* Gegeben  $c \in I$  und  $f_c \in \mathcal{L}^2(\Omega; \mathcal{F}_c)$  eine quadratintegrierbare  $\mathcal{F}_c$ -meßbare Funktion gehört für jedes  $d \in I$  mit  $d \geq c$  die Funktion  $(\omega, t) \mapsto f_c(\omega) \chi_{[c, d)}(t)$  zu  $\mathcal{L}^2(\Omega \times I; \mathcal{F})$ .

**Lemma 4.10.10.** *Das Bild  $L^2(\Omega \times I; \mathcal{F})$  von  $\mathcal{L}^2(\Omega \times I; \mathcal{F})$  in  $L^2(\Omega \times I)$  ist ein abgeschlossener Teilraum, und die Funktionen der im vorhergehenden Beispiel 4.10.9 erklärten Art erzeugen darin einen dichten Teilraum.*

*Beweis.* ??

□

## 4.11 Bedingte Erwartung

**Definition 4.11.1.** Seien  $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra. Gegeben eine Zufallsvariable  $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{A}, P)$  erklären wir ihre **durch  $\mathcal{F}$  bedingte Erwartung** als diejenige  $\mathcal{F}$ -meßbare  $L^1$ -Funktion  $Y \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{F}, P)$ , die der Bedingung

$$\int_F Y = \int_F X \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}$$

genügt. Beide Integrale sind hier in Bezug auf das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  zu verstehen. Da die rechte Seite dieser Gleichung ein zu  $P$  stetiges signiertes Maß auf  $\mathcal{F}$  definiert, folgt die Existenz und Eindeutigkeit unserer bedingten Erwartung aus dem Satz von Radon-Nikodym ?? . Man notiert sie

$$Y = E(X|\mathcal{F})$$

*Beispiel 4.11.2.* Sei  $\Omega$  die Menge aller Menschen und  $P$  die Gleichverteilung und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die jedem Menschen seine Größe in Zentimetern zuordnet. Bezeichnet  $\mathcal{F}$  die von den Teilmengen aller Menschen eines beliebigen aber festen Jahrgangs erzeugte Unter- $\sigma$ -Algebra, so ist die bedingte Erwartung  $E(X|\mathcal{F})$  diejenige Funktion, die jedem Menschen die durchschnittliche Größe aller Menschen seines Jahrgangs zuordnet.

*Übung 4.11.3.* Ist  $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und sind darauf Unter- $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  gegeben, so gilt für jede Zufallsvariable  $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{A}, P)$  die Identität

$$E(X|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{G})$$

*Übung 4.11.4.* Ist  $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra, so ist für jede Zufallsvariable  $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{A}, P)$  die bedingte Erwartung ihres Betrages mindestens so groß wie der Betrag ihrer bedingten Erwartung, in Formeln

$$E(|X| |\mathcal{F}) \geq |E(X|\mathcal{F})|$$

**Definition 4.11.5.** Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$  gegeben. Ein **diskretes Martingal** auf  $\Omega$  ist eine Folge  $(\mathcal{F}_n, X_n)$  von Paaren bestehend aus einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$  und einer integrierbaren reellen Zufallsvariable  $X_n \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{F}_n, P)$  derart, daß unsere  $\sigma$ -Algebren eine aufsteigende Folge  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  bilden und daß für die jeweils durch die kleinere  $\sigma$ -Algebra bedingten Erwartungen gilt

$$X_n = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \quad \forall n \geq 0$$

*Bemerkung 4.11.6.* Die Herkunft der Bezeichnung als “Martingal” scheint nicht geklärt zu sein. Ursprünglich bezeichnet dieses Wort einen Teil des Zaumzeugs beim Springreiten.

*Beispiel 4.11.7.* Ist  $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und darauf  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  eine aufsteigende Folge von  $\sigma$ -Algebren und  $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$  eine integrierbare Zufallsvariable und bilden wir die zugehörigen bedingten Erwartungen  $X_n = E(X | \mathcal{F}_n)$ , so bildet die Folge der  $(\mathcal{F}_n, X_n)$  wegen 4.11.3 ein diskretes Martingal. Die Zufallsvariablen  $X_n$  derartiger Martingale sind stets gleichgradig integrierbar im Sinne der folgenden Definition 4.11.9, und umgekehrt ist auch jedes gleichgradig integrierbare Martingal von dieser Gestalt, wie der bald folgende “Konvergenzsatz für Martingale” 4.11.13 ausführt. Der anschließende Satz zeigt uns bereits, in welcher Weise unser  $X$  in dieser Situation der Grenzwert der  $X_n$  sein muß.

**Satz 4.11.8 (von Levy).** *Ist  $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  eine Folge von  $\sigma$ -Algebren,  $\mathcal{F}_{\infty} = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$  das  $\sigma$ -Erzeugnis ihrer Vereinigung und  $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{F}_{\infty}, P)$  eine integrierbare  $\mathcal{F}_{\infty}$ -meßbare Funktion, so streben deren durch  $\mathcal{F}_n$  bedingte Erwartungen sowohl im Mittel als auch punktweise fast überall gegen die ursprüngliche Funktion, in Formeln*

$$E(X | \mathcal{F}_n) \rightarrow X$$

*Beweis.* Sicher ist die Menge aller  $X \in L^1$ , für die die Aussage des Satzes gilt, ein Untervektorraum  $U \subset L^1$ . Sicher enthält dieser Untervektorraum die charakteristischen Funktionen  $[A]$  von allen  $A \in \mathcal{F}_n$  für alle  $n \geq 0$ . Nach 4.11.15 erzeugen diese Funktionen einen dichten Teilraum im Raum aller  $\mathcal{F}_{\infty}$ -meßbaren integrierbaren Funktionen. Wir müssen also nur noch zeigen, daß unser Untervektorraum  $U$  abgeschlossen ist. Sei dazu  $X^0, X^1, \dots$  eine Folge in  $U$  mit

$$X^i \rightarrow X$$

im  $L^1$ -Sinne für eine Grenzfunktion  $X \in L^1$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es insbesondere ein  $i$  mit  $\|X^i - X\|_1 \leq \varepsilon$ . Wir setzen  $E(X^i | \mathcal{F}_n) = X_n^i$ . Aus 4.11.4

folgt sofort  $\|X_n^i - X_n\|_1 \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq 0$ . Für alle hinreichend großen  $n$  gilt wegen  $X^i \in U$  aber  $\|X_n^i - X^i\|_1 \leq \varepsilon$  und für dieselben  $n$  gilt dann auch  $\|X_n - X\|_1 \leq 3\varepsilon$ . Das zeigt bereits die Konvergenz im Mittel. Um punktweise Konvergenz fast überall zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß nach [V.1.3.9](#) unsere Folge  $X^i$  sogar so gewählt werden kann, daß sie fast überall gegen  $X$  konvergiert. Gegeben  $\alpha > 0$  und  $\varepsilon > 0$  finden wir also ein  $i = i(\alpha, \varepsilon) \geq 0$  und  $\Omega = \Omega(\alpha, \varepsilon)$  meßbar vom Maß  $P\Omega(\alpha, \varepsilon) \geq 1 - \alpha$  derart, daß gilt

$$|X^i(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon \quad \forall \omega \in \Omega$$

Wegen  $X_n^i \rightarrow X^i$  punktweise für unser festes  $i$  finden wir dann weiter  $N = N(\alpha, \varepsilon, i)$  und  $\Omega' = \Omega'(\alpha, \varepsilon, i)$  vom Maß  $P\Omega' \geq 1 - \alpha$  derart, daß gilt

$$|X_n^i(\omega) - X^i(\omega)| \leq \varepsilon \quad \forall \omega \in \Omega'(\alpha, \varepsilon, i) \text{ und } n \geq N(\alpha, \varepsilon, i).$$

In  $\Omega(\alpha, \varepsilon)$  finden wir auch ein  $\Omega''(\alpha, \varepsilon)$  aus  $\bigcup \mathcal{F}_k$  mit  $P\Omega''(\alpha, \varepsilon) \geq 1 - 2\alpha$ . Gilt hier etwa  $\Omega''(\alpha, \varepsilon) \in \mathcal{F}_k$  für ein spezielles  $k$ , so folgt

$$|X_n(\omega) - X_n^i(\omega)| \leq \varepsilon \quad \forall \omega \in \Omega''(\alpha, \varepsilon, i) \text{ und } n \geq k.$$

Zusammenfassend haben wir also

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq 3\varepsilon \quad \forall \omega \in \Omega' \cap \Omega'' \text{ und } n \geq \sup(N(\alpha, \varepsilon, i), k).$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  und alle  $\alpha > 0$  gibt es demnach  $\Omega'''(\alpha, \varepsilon)$  vom Maß  $\geq 1 - 3\alpha$  und  $N'''(\alpha, \varepsilon) \geq 0$  mit

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon \quad \forall \omega \in \Omega''' \text{ und } n \geq N'''.$$

Daraus folgt unschwer punktweise Konvergenz  $X_n \rightarrow X$  fast überall.  $\square$

**Definition 4.11.9.** Sei  $X$  ein Maßraum. Eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subset L^1(X)$  heißt **gleichgradig integrierbar** oder auch **uniform integrierbar** genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine integrierbare Funktion  $g_\varepsilon \geq 0$  gibt mit

$$\int (|f| - g_\varepsilon)^+ \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

Hier meint  $h^+$  wie in [IV.6.5.1](#) den positiven Teil einer Funktion  $h$ .

**Proposition 4.11.10.** *Ist  $X$  ein Maßraum und  $f_0, f_1, \dots$  eine gleichgradig integrierbare Folge integrierbarer reeller Funktionen, die stochastisch konvergiert, so konvergiert unsere Folge auch im Mittel alias in  $L^1$ .*



Darstellung einer Funktion  $f$ , einer hier stückweise linearen Funktion  $g = g_\varepsilon \geq 0$  und der Funktion  $-g$  sowie als fett durchgezogene Linie der Funktion  $f^\varepsilon = \sup(-g, \inf(g, f))$ . Die schraffiert eingezeichnete Fläche soll höchstens  $\varepsilon$  sein für alle Funktionen  $f$  unserer gleichgradig stetigen Familie.

*Bemerkung 4.11.11.* Stochastische Konvergenz ist eine schwächere Forderung als punktweise Konvergenz fast überall, und gleichgradige Integrierbarkeit eine schwächere Forderung als betragsmäßig durch eine integrierbare Funktion beschränkt zu sein. Unter diesen abgeschwächten Voraussetzungen erhalten wir also immer noch  $\int f_n \rightarrow \int f$ , die Proposition beinhaltet demnach insbesondere eine noch über 4.6.5 hinausgehende Verstärkung des Satzes über dominierte Konvergenz.

*Beweis.* Gegeben  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $g_\varepsilon$  wie in der Definition 4.11.9 der gleichgradigen Integrierbarkeit und schreiben  $f_n = f_n^\varepsilon + r_n^\varepsilon$  für

$$f_n^\varepsilon = \sup(-g_\varepsilon, \inf(g_\varepsilon, f_n))$$

und einen Rest  $r_n^\varepsilon$ . Nach Konstruktion gilt  $|f_n^\varepsilon| \leq g_\varepsilon$  und nach Annahme  $\|r_n^\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$ , jeweils für alle  $n$ . Sicher gilt  $f_n^\varepsilon \rightarrow f^\varepsilon$  stochastisch für  $f$  den stochastischen Grenzwert der  $f_n$  und ein analog zu  $f_n^\varepsilon$  gebildetes  $f^\varepsilon$ . Aus dem Satz über dominierte Konvergenz oder vielmehr seiner stochastischen Variante 4.6.5 folgt  $f_n^\varepsilon \rightarrow f^\varepsilon$  in  $L^1$ . Damit erkennen wir mühelos, daß die  $f_n$  in  $L^1$  ein Cauchyfolge bilden, und daraus folgt dann die Proposition mit V.1.3.9.  $\square$

*Bemerkung 4.11.12.* Umgekehrt ist jede Cauchyfolge  $f_n$  aus  $L^1$  auch gleichgradig integrierbar: Zum Beispiel können wir  $g_\varepsilon = |f_0| + |f_1| + \dots + |f_N|$  nehmen, falls gilt  $\|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N$ .

**Satz 4.11.13 (Martingal-Konvergenzsatz).** *Ist  $(\mathcal{F}_n, X_n)$  ein Martingal auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$  und sind die  $X_n$  gleichgradig integrierbar, so gibt es genau eine Zufallsvariable  $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{F}_\infty, P)$ , die meßbar ist in Bezug auf die von den  $\mathcal{F}_n$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_\infty$  und für die gilt  $X_n \rightarrow X$  in  $L^1$ .*

4.11.14. Gegeben  $A \in \mathcal{F}_n$  haben wir dann natürlich  $\int_A X_n = \int_A X_{n+1} = \dots = \int_A X$  und folglich gilt für alle  $n$  die Identität

$$E(X|\mathcal{F}_n) = X_n$$

Gilt umgekehrt für ein  $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega; \mathcal{F}_\infty, P)$  und alle  $n$  die fragliche Identität, so ist das Maß  $XP$  auf  $\mathcal{F}_\infty$  nach IV.6.2.10 bereits eindeutig festgelegt, und dasselbe gilt nach Radon-Nikodym ?? für die  $L^1$ -Funktion  $X$ . Hätten wir dann nicht  $X_n \rightarrow X$  in  $L^1$ , so gälte auch nicht  $X_n \rightarrow X$  stochastisch. Es gäbe also  $\varepsilon > 0$  derart, daß  $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$  nicht gegen Null strebte alias nach Übergang zu einer Teilfolge stets oberhalb einer Schranke  $\alpha > 0$  bliebe. *Na und dann? Da fehlt ja wohl noch was!*

*Beweis.* Nicht ganz vollständig. Gegeben ein Martingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)$  erfüllt sein positiver Teil  $X_n^+$  die Abschätzung

$$E(X_{n+1}^+ | \mathcal{F}_n) \geq X_n^+$$

In der Tat reicht es dazu nach ?? zu zeigen, daß für alle  $A \in \mathcal{F}_n$  gilt  $\int_A X_{n+1}^+ \geq \int_A X_n^+$ , und das erkennen wir, indem wir  $A$  zerlegen in einen Teil mit  $X_n^+ = X_n$  und einen Teil mit  $X_n^+ = 0$ . Jetzt betrachten wir die Mengenalgebra  $\bigcup \mathcal{F}_n$  und darauf die Funktion

$$\mu^+ : A \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A X_n^+$$

Dieser Grenzwert existiert, da unsere Folge ab dem  $n$  mit  $A \in \mathcal{F}_n$  wie gerade gezeigt monoton wächst, und er ist endlich, da die  $X_n^+$  gleichgradig integrierbar sind. Ich behaupte, daß  $\mu^+$  ein Prämaß auf  $\bigcup \mathcal{F}_n$  ist. Gegeben eine disjunkte Zerlegung in eine Folge  $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots$  müssen wir dazu zeigen

$$\mu^+(A) = \sum \mu^+(A_i)$$

Für die Ungleichung  $\geq$  reicht es zu zeigen, daß  $\mu^+(A)$  eine obere Schranke für alle endlichen Teilsummen ist, und das scheint mir offensichtlich. Für die Ungleichung  $\leq$  reicht es, wenn wir für alle  $\varepsilon > 0$  die Abschätzung

$$\mu^+(A) \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^+(A_i)$$

zeigen. Dazu verwenden wir die gleichgradige Integrierbarkeit der  $X_n^+$  und wählen zunächst eine integrierbare Funktion  $g_\varepsilon \geq 0$  mit  $X_n^+ \leq g_\varepsilon + r_n$  für geeignetes  $r_n$  mit  $\|r_n\|_1 \leq \varepsilon$ . Nach dem Satz über monotone Konvergenz haben wir

$$\int_A g_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} g_\varepsilon$$

und es gibt folglich ein  $n$  mit  $\sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{A_i} g_\varepsilon \leq \varepsilon$  alias  $\int_{A_{>n}} g_\varepsilon \leq \varepsilon$  für die Vereinigung  $A_{>n} = A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots$ . Damit finden wir  $\mu^+(A_{>n}) \leq 2\varepsilon$  und  $\mu^+(A) \leq \mu^+(A_0) + \dots + \mu^+(A_n) + 2\varepsilon$  und das zeigt die andere Abschätzung, zwar nur mit  $2\varepsilon$  statt mit  $\varepsilon$ , aber darauf kommt es nicht an. Der Maßerweiterungssatz von Caratheodory IV.6.2.10 liefert uns eine Fortsetzung von  $\mu^+$  zu einem Maß  $\mu^+$  auf der von  $\bigcup \mathcal{F}_n$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_\infty$ . Wir zeigen als nächstes, daß es stetig ist zum Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ . Gegeben  $A \in \mathcal{F}_\infty$  mit  $P(A) = 0$  zeigen wir dazu  $\mu^+(A) < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Gegeben  $\varepsilon > 0$  finden wir ja zunächst  $g_\varepsilon$  wie in der Definition der gleichgradigen Integrierbarkeit.

Dann finden wir nach IV.6.4.17 ein  $\alpha > 0$  mit  $P(B) < \alpha \Rightarrow \int_B g_\varepsilon < \varepsilon$ . Schließlich finden wir nach IV.6.2.10 für dies  $\alpha$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_i \in \bigcup \mathcal{F}_n$  mit  $A \subset \bigcup A_i$  und  $\sum P(A_i) < \alpha$ . Zusammen folgt

$$\mu^+(A) \leq \sum_i \mu^+(A_i) \leq \sum_{i=0}^N \mu^+(A_i) + \varepsilon = \mu^+(B) + \varepsilon \leq \int_B g_\varepsilon + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

für hinreichend großes  $N$  und  $B = \bigcup_{i=0}^N A_i$ . Nach Radon-Nikodym ?? haben wir also  $\mu^+ = X^+P$  für eine integrierbare Funktion  $X^+$ . Für alle  $A \in \mathcal{F}_n$  gilt natürlich  $\int_A X^+ \geq \int_A X_n^+$  und nach 4.11.7 bilden folglich die Differenzen  $Y_n = E(X^+|\mathcal{F}_n) - X_n$  ein Martingal bezüglich der  $\mathcal{F}_n$ , das aus gleichgradig integrierbaren nichtnegativen  $L^1$ -Funktionen besteht. Führen wir nun dieselbe Konstruktion noch einmal mit den  $Y_n = Y_n^+$  durch, so erhalten wir eine integrierbare und  $\mathcal{F}_\infty$ -meßbare Funktion  $Y$  mit  $\int_A Y = \int_A Y_n = \int_A (X^+ - X_n)$  für alle  $A \in \mathcal{F}_n$  und alle  $n$ . Insbesondere ist  $X = X^+ - Y$  eine Funktion derart, wie sie der Konvergenzsatz für Martingale fordert.  $\square$

*Übung 4.11.15.* Gegeben eine Menge  $X$ , ein Mengenring  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  und ein  $\sigma$ -endliches Prämaß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  erzeugen die charakteristischen Funktionen  $[A]$  der Mengen  $A \in \mathcal{A}$  von endlichem Prämaß einen dichten Teilraum im Raum der integrierbaren Funktionen

$$L^1(X; \sigma(\mathcal{A}), \mu)$$

auf dem durch Maßerweiterung nach IV.6.2.10 definierten Maßraum. Dasselbe gilt allgemeiner für  $L^p$ -Räume mit  $1 \leq p < \infty$ . Hinweis: Nach V.1.3.11 liegen die integrierbaren Stufenfunktionen dicht. Man verwendet nun die explizite Beschreibung der Maßerweiterung nach IV.6.2.15.

## 4.12 Borel-Cantelli

*Übung 4.12.1.* Ist  $A_0, A_1, \dots$  eine Folge von Mengen aus einer  $\sigma$ -Algebra, so gehört auch die Menge

$$\limsup A_n = \{x \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}$$

zu unserer  $\sigma$ -Algebra. Man nennt sie den **limes superior** unserer Mengenfølge.

**Lemma 4.12.2 (Borel-Cantelli).** *Seien  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$  eine Mengenfølge und  $A^*$  ihr limes superior, in Formeln  $A^* = \{x \in \Omega \mid x \text{ liegt in } A_i \text{ für unendlich viele Indizes } i\}$ .*

1. Gilt  $\sum P(A_i) < \infty$ , so folgt  $P(A^*) = 0$ ;
2. Gilt  $\sum P(A_i) = \infty$  und ist die Familie von Ereignissen  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  stochastisch unabhängig, so folgt  $P(A^*) = 1$ .

*Beispiel 4.12.3.* Nehmen wir etwa als Grundraum  $\Omega$  die Menge aller möglichen Resultate beim abzählbar unendlich oft Würfeln. Sei  $A_i \subset \Omega$  die Teilmenge aller Elementarereignisse, bei denen im  $i$ -ten Wurf eine Sechs herauskommt. So gilt  $P(A_i) = 1/6$  und die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei unendlich vielen Würfeln unendlich oft die Sechs zu Würfeln, ist Eins. Es kann beim Würfeln natürlich passieren, daß man mindestens so lange auf eine Sechs warten muß, wie man bis dahin bereits gewürfelt hat. Daß man vom  $(i+1)$ -ten Wurf bis zum  $2i$ -ten Wurf keine Sechs würfelt, ist ein Ereignis der Wahrscheinlichkeit  $(5/6)^i$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß einem das bei unbegrenzt langem Würfeln für unendlich viele  $i$  passiert, ist mithin Null.

*Beweis.* 1. Wir schreiben

$$A^* = \bigcap_{m=0}^{\infty} \left( \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right)$$

und folgern  $P(A^*) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)$  für alle  $m$ . Die rechte Seite strebt aber gegen Null für  $m \rightarrow \infty$ .

2. Wir schreiben  $\Omega \setminus A^* = \bigcup_{m=0}^{\infty} \left( \bigcap_{n=m}^{\infty} \Omega \setminus A_n \right)$  und

$$\begin{aligned} P(\Omega \setminus A^*) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \sum_{n=m}^{\infty} \log(1 - P(A_n)) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{n=m}^{\infty} -P(A_n) \right) = 0 \end{aligned}$$

wegen der Abschätzung  $\log(1-x) \leq -x$  für  $x \in [0, 1]$  mit der Konvention  $\log(0) = -\infty$ . □

### 4.13 Altes Beispiel Integral 2-Form

*Beispiel 4.13.1.* Wir integrieren die 2-Form  $\omega = y \, dx \wedge dz$  über die Hemisphäre  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$  mit einer noch festzulegenden Orientierung. In [IV.7.5.15](#) werden wir erklären, warum dies Integral auch als der Fluß des Vektorfelds  $(x, y, z) \mapsto (0, -y, 0)$  durch unsere Hemisphäre verstanden werden kann. Als Karte nehmen wir  $(W, \varphi)$  mit  $W$  der offenen Einheitskreisscheibe  $W = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  und

$\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  und erklären die Orientierung durch die Bedingung, daß  $(W, \varphi)$  eine positiv orientierte Karte sein möge. Wir finden  $\varphi^*(dx) = d(x \circ \varphi) = dx$  und

$$\varphi^*(dz) = d(z \circ \varphi) = d(\sqrt{1 - x^2 - y^2}) = \frac{-x dx}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{-y dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Zusammen ergibt sich also  $\varphi^*\omega = \frac{-y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx \wedge dy$  und mit IV.7.5.1 weiter

$$\int_{\vec{H}} \omega = \int_W \frac{-y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

Um dieses Integral auszuwerten gehen wir zu Polarkoordinaten über und erhalten

$$\int_{\vec{H}} \omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{-r^2 \sin^2 \vartheta}{\sqrt{1 - r^2}} r dr d\vartheta = \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) \left( \int_0^1 \frac{-r^3}{\sqrt{1 - r^2}} dr \right)$$

Das erste Integral in diesem Produkt lösen wir mithilfe der Formel  $\sin^2(\vartheta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\vartheta)$  und erhalten

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{4} \sin(2\vartheta) \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Um das zweite Integral zu lösen erinnern wir uns daran, daß die Ableitung von  $\sqrt{1 - r^2}$  gerade  $-r/\sqrt{1 - r^2}$  liefert, und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^2 \cdot \frac{-r}{\sqrt{1 - r^2}} dr &= r^2 \sqrt{1 - r^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 2r \sqrt{1 - r^2} dr \\ &= - \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = - \int_0^1 \sqrt{v} dv = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

so daß sich unser Integral insgesamt ergibt zu

$$\int_{\vec{H}} \omega = -\frac{2}{3}\pi$$

Alternativ hätten wir auch aus der oberen Hemisphäre einen Längengrad samt Nordpol herausnehmen können und für den Rest die Karte  $\psi : (0, 1) \times (0, 2\pi) \rightarrow H$  mit  $\psi(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, \sqrt{1 - r^2})$  wählen können. Der Kartenwechsel  $\varphi^{-1} \circ \psi$  ist genau die Polarkoordinatenabbildung und hat positive Funktionaldeterminante, also ist  $\psi$  auch eine positiv orientierte Karte von  $\vec{H}$ . Wir finden  $\psi^* dx = d(r \cos \vartheta) = \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta$ ,  $\psi^* dz = d(\sqrt{1 - r^2}) = \frac{-r}{\sqrt{1 - r^2}} dr$ ,

$$\psi^*\omega = (r \sin \vartheta) \cdot \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot (-r \sin \vartheta) dr \wedge d\vartheta$$

und landen auf einem anderen Weg bei demselben Integral wie zuvor.

## 4.14 Topologischer Dualraum

4.14.1. Alles in diesem Abschnitt gilt in gleicher Weise auch für komplexe topologische Vektorräume.

**Definition 4.14.2.** Gegeben ein reeller topologischer Vektorraum  $V$  bezeichnet man den Raum aller stetigen Linearformen

$$V^* = \text{Mod}_{\text{to}_{\mathbb{R}}}(V, \mathbb{R})$$

als den **topologischen Dualraum** von  $V$  und verwendet dasselbe Symbol wie für den algebraischen Dualraum  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) = \text{Mod}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$  in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Bedeutung jeweils gemeint ist. Die Kofinaltopologie in Bezug auf die Auswertungsabbildungen  $V^* \rightarrow \mathbb{R}$  an allen Vektoren  $v \in V$  heißt die **schwach-\*-Topologie auf  $V^*$** , gesprochen “schwach-Stern-Topologie”.

4.14.3. Mit der schwach-\*-Topologie wird der topologische Dualraum  $V^*$  eines topologischen Vektorraums wieder ein topologischer Vektorraum, wie der Leser zur Übung selbst zeigen mag. Im Fall eines normierten Vektorraums  $V$  ist diese Topologie im allgemeinen schwächer als die durch die Operatornorm auf  $V^*$  definierte Topologie in dem Sinne, daß sie weniger offene Mengen hat und folglich etwa die Konvergenz von Folgen bezüglich dieser Topologie eine schwächere Bedingung ist. Man spricht dann auch von **schwacher Konvergenz**.

**Definition 4.14.4.** Umgekehrt können wir auf jedem komplexen topologischen Vektorraum  $V$  die kofinale Topologie in Bezug auf die Familie aller stetigen Linearformen  $V \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten. Sie heißt die **schwache Topologie auf  $V$** .

*Übung 4.14.5.* Jeder topologische Vektorraum ist auch mit der schwachen Topologie ein topologischer Vektorraum. Diese Topologie ist im allgemeinen schwächer als die ursprüngliche Topologie. Der topologische Dualraum eines topologischen Vektorraums ist mit der schwach-\*-Topologie ein topologischer Vektorraum.

**Satz 4.14.6 (Alaoglu-Bourbaki).** *Der abgeschlossene Einheitsball im topologischen Dualraum eines normierten Vektorraums ist schwach-\*-kompakt, als da heißt kompakt in der schwach-\*-Topologie. Ist allgemeiner  $B$  eine Umgebung des Ursprungs in einem topologischen Vektorraum  $V$ , so ist die Menge  $K = \{f \in V^* \mid |f(v)| \leq 1 \quad \forall v \in B\}$  schwach-\*-kompakt.*

*Beweis.* Man betrachte die offensichtliche Einbettung  $V^* \hookrightarrow \prod_{v \in V} \mathbb{R}$  gegeben durch  $f \mapsto (f(v))_{v \in V}$ . Unsere schwach-\*Topologie ist per definitionem die von der Produkttopologie auf  $V^*$  induzierte Topologie. Der Raum  $K$  ist das Urbild in  $V^*$  eines Produkts von kompakten Intervallen, wir nehmen genauer die abgeschlossenen Intervalle  $[-1, 1]$  für  $v \in B$  und geeignet größere Intervalle für  $v \notin B$ . Nach Tychonoff ist dies Produkt kompakter Intervalle und damit der Abschluß von  $K$  in unserem Produkt  $\prod$  kompakt und es bleibt zu zeigen, daß  $K$  abgeschlossen ist in  $\prod$ . Diejenigen Tupel aus  $\prod$ , die lineare Abbildungen darstellen, bilden aber eine abgeschlossene Teilmenge von  $\prod$ , als Schnitt der Urbilder der Null unter den stetigen  $\mathbb{R}$ -wertigen Abbildungen  $h_{x,y} : \prod \rightarrow \mathbb{R}, (a_v)_{v \in V} \mapsto (a_x + a_y - a_{x+y})$  und  $g_{\lambda,x} : \prod \rightarrow \mathbb{R}, (a_v)_{v \in V} \mapsto (\lambda a_x - a_{\lambda x})$  für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Folglich besteht der Abschluß von  $K$  aus linearen Abbildungen. Weiter liegt der Abschluß von  $K$  in unserem Produkt kompakter Intervalle, folglich sind alle Abbildungen aus dem Abschluß von  $K$  beschränkt durch Eins auf  $B$  und damit stetig. Also ist  $K$  sein eigener Abschluß.  $\square$

*Beispiel 4.14.7 (Ein kompakter nicht folgenkompakter Raum).* Wir betrachten den Raum  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aller beschränkten stetigen reellwertigen Funktionen auf der reellen Zahlengeraden mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Der Einheitsball in seinem Dualraum ist überdeckungskompakt in der schwach-\*Topologie nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki 4.15.6. Er ist jedoch nicht folgenkompakt, zum Beispiel bilden die Auswertungen an den natürlichen Zahlen eine Folge ohne konvergente Teilfolge.

**Lemma 4.14.8.** *Besitzt ein topologischer Vektorraum eine abzählbare dichte Teilmenge, so ist in seinem topologischen Dualraum mit der schwach-\*Topologie jedes Kompaktum  $K$  metrisierbar.*

*Beweis.* Sei  $V$  unser topologischer Vektorraum. Gegeben eine dichte Teilmenge  $D \subset V$  zeigen wir zunächst, daß die Auswertungsabbildungen an Vektoren  $v \in D$  bereits die schwach-\*Topologie auf unserem Kompaktum  $K$  erzeugen. In der Tat landen besagte Auswertungsabbildungen  $a_v$  in kompakten Teilmengen  $B_v \subset \mathbb{R}$  und liefern zusammen eine stetige Abbildung

$$K \rightarrow \prod_{v \in D} B_v$$

die für dichtes  $D$  sogar injektiv sein muß und die nach VI.3.3.10 als stetige Injektion eines kompakten Raums in einen Hausdorffraum einen Homöomorphismus auf ihr Bild induziert. Ist  $D$  abzählbar, so ist  $K$  dann metrisierbar als Unterraum eines abzählbaren Produkts metrischer Räume nach Übung VI.3.6.23.  $\square$

**Lemma 4.14.9.** *Ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum, so besitzt  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  eine abzählbare dichte Teilmenge.*

*Beweis.* Sicher reicht es zu zeigen, daß für jedes Kompaktum  $B \subset \mathbb{R}$  der Funktionenraum  $\mathcal{C}(X, B)$  eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Gegeben  $p, q \in \mathbb{Q}_{>0}$  bezeichne nur für diesen Beweis  $\mathcal{C}_{p,q} \subset \mathcal{C}(X, B)$  die Menge aller “mit Parametern  $(p, q)$  gleichmäßig stetigen Funktionen”, in Formeln

$$\mathcal{C}_{p,q} = \{f : X \rightarrow B \mid d(x, y) \leq p \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq q\}$$

Sicher reicht es zu zeigen, daß jedes  $\mathcal{C}_{p,q}$  eine abzählbare dichte Teilmenge hat, und das folgt wiederum aus dem Satz von Arzela-Ascoli VI.10.6.9, denn  $\mathcal{C}_{p,q}$  ist gleichgradig stetig und abgeschlossen in  $\mathcal{C}(X, B)$  und mithin nach Arzela-Ascoli kompakt. Jeder kompakte metrische Raum besitzt aber nach VI.10.6.7 eine abzählbare dichte Teilmenge.  $\square$

**Definition 4.14.10.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M(X; \mathbb{R})$  der Raum aller reellen Borelmaße auf  $X$ . Unter der **schwachen Topologie** auf  $M(X; \mathbb{R})$  verstehen wir die größte Topologie derart, daß für alle stetigen beschränkten reellen Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung  $M(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $\mu \mapsto \int f \mu$  stetig ist. Formal ist das zwar eigentlich eine schwach-\* -Topologie, aber so pedantisch ist man in diesem Zusammenhang bei der Terminologie meist nicht.

**Korollar 4.14.11.** *Ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum, so ist der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$  mit seiner schwachen Topologie folgenkompakt.*

4.14.12. Dasselbe gilt allgemeiner mit demselben Beweis für den Raum aller nichtnegativen Maße auf  $X$  mit Gesamtmasse höchstens Eins oder für den Raum aller signierten oder sogar komplexen Maße auf  $X$  mit Variationsnorm höchstens Eins.

*Beweis.* Nach 4.15.9 besitzt  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  eine abzählbare dichte Teilmenge. Nach 4.15.8 ist also jedes Kompaktum in seinem topologischen Dualraum mit der schwach-\* -Topologie metrisierbar. Das gilt nach Alaoglu-Bourbaki 4.15.6 insbesondere für die abgeschlossene Einheitskugel, und mit dem Riesz’schen Darstellungssatz VI.17.2.3 können wir den Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$  dahin als abgeschlossene Teilmenge einbetten.  $\square$

*Beispiel 4.14.13.* Jede Folge von Dirac-Maßen auf einem kompakten metrischen Raum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge, genauer konvergiert die Folge der Dirac-Maße zu einer konvergierenden Folge von Punkten auf einem beliebigen topologischen Raum schwach gegen das Dirac-Maß des Grenzwerts unserer Punktfolge.

*Beispiel 4.14.14.* Betrachten wir auf  $[0, 1]$  die Folge der Wahrscheinlichkeitsmaße  $P_n$ , die als Linearkombination der Dirac-Maße an allen Stellen  $i/n$  mit  $1 \leq i \leq n$  mit gleichen Gewichten an allen Stellen entsteht. Diese Folge konvergiert schwach gegen das Lebesgue-Maß.

**Definition 4.14.15.** Eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem topologischen Raum heißt **straff** (englisch **tight**) genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Kompaktum gibt, dessen Komplement unter allen Maßen besagter Menge ein Maß  $\leq \varepsilon$  hat.

**Satz 4.14.16 (Prohorov).** *Jede straffe Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem metrischen Raum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Im Fall eines kompakten metrischen Raums haben wir bereits in 4.15.11 gezeigt, daß jede Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, ja nach 4.15.12 sogar jede Folge von Maßen mit beschränkter Gesamtmasse eine schwach konvergente Teilfolge besitzt. Im allgemeinen Fall wählen wir eine Folge  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  von Kompakta mit  $\mu_n(K_i) \geq 1 - 1/i$  für alle Glieder  $\mu_n$  unserer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Es gilt,  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton so zu finden, daß  $\int f \mu_{d(k)}$  für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$  konvergiert. Nach 4.15.12 finden wir  $i_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton derart, daß  $\int_{K_1} f \mu_{i_1(k)}$  konvergiert für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ . Von dieser Folge finden wir hinwiederum eine Teilfolge oder formal  $i_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton derart, daß für  $v_2 := i_1 \circ i_2$  die Folge  $\int_{K_2} f \mu_{v_2(k)}$  konvergiert für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ . Von dieser Folge finden wir hinwiederum eine Teilfolge oder formal  $i_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton derart, daß für  $v_3 := v_2 \circ i_3$  die Folge  $\int_{K_3} f \mu_{v_3(k)}$  konvergiert für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ . Indem wir so weitermachen und zur Erhöhung der Klarheit noch  $v_1 := i_1$  vereinbaren, finden wir für die "diagonale" Teilfolge  $d(i) := v_i(i)$  schließlich, daß  $\int_{K_a} f \mu_{d(i)}$  konvergiert für alle  $a \geq 1$  und alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ .

Die Grenzwerte dieser Folgen liefern mit dem Riesz'schen Darstellungssatz VI.17.2.3 Maße  $\mu_\infty^a$  auf  $K_a$ , die wir durch Null zu Maßen  $\mu_\infty^a$  auf ganz  $X$  fortsetzen können. Ich behaupte nun  $\mu_\infty^{a+1} \geq \mu_\infty^a$  in dem Sinne, daß jeder Borelmenge durch  $\mu_\infty^{a+1}$  eine mindestens ebensogroße Zahl zugeordnet wird wie durch  $\mu_\infty^a$ . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz reicht es hierzu, wenn wir für alle  $f \in \mathcal{C}(K_{a+1}, [0, \infty))$  zeigen

$$\int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^{a+1} \geq \int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^a$$

Dazu beachten wir in anschließend erklärter Notation

$$\begin{aligned} \int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^{a+1} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_{a+1}} h_n f \mu_\infty^{a+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_{a+1}} (h_n f) \mu_{d(i)} \right) \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_{a+1}} (h_n f) \mu_{d(i)} \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \int_{K_a} f \mu_{d(i)} \right) \\ &= \int_{K_a} f \mu_\infty^a = \int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^a \end{aligned}$$

Hier meint  $h_n : K_{a+1} \rightarrow [0, 1]$  eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die charakteristische Funktion von  $K_a$  konvergiert: So etwas gibt es, da  $K_{a+1}$  ein metrischer Raum ist und  $K_a \Subset K_{a+1}$  eine abgeschlossene Teilmenge. Die entscheidende mittlere Ungleichung schließlich rührt daher, daß unsere Folge in  $n$  monoton fällt. Haben wir aber ganz allgemein nichtnegative reelle  $a_{n,i}$ , so gilt stets

$$\inf_n \left( \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} \right) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \inf_n a_{n,i} \right)$$

falls die fraglichen Limes existieren, denn offensichtlich gilt  $a_{\nu,i} \geq \inf_n (a_{n,i})$  für alle  $i$  und alle  $\nu$ . Damit folgt wie behauptet  $\mu_\infty^a \leq \mu_\infty^{a+1} \leq \dots$  und wir können nach Übung IV.6.1.33 ein Maß  $\mu_\infty^a$  auf  $X$  erklären durch die Vorschrift

$$\mu_\infty^a(A) := \lim_{a \rightarrow \infty} \mu_\infty^a(A)$$

für jede Borelmenge  $A \subset X$ . Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Folge der  $\mu_{d(i)}$  schwach gegen  $\mu_\infty^a$  konvergiert. Ist  $f \in \mathcal{C}(X, [0, 1])$  gegeben, so gilt es dafür zu zeigen

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_X f \mu_{d(i)} = \int_X f \mu_\infty^a$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es jedoch ein  $a$  mit  $\mu_{d(i)}(X \setminus K_a) \leq \varepsilon$  für alle  $i$  und mit  $\mu_\infty^a(X) - \mu_\infty^a(X) < \varepsilon$ . Dann hat  $\int_X f \mu_\infty^a$  einen Abstand  $\leq \varepsilon$  zu  $\int_X f \mu_\infty^a = \int_{K_a} f \mu_\infty^a$  und jedes Glied der Folge  $\int_X f \mu_{d(i)}$  hat einen Abstand  $\leq \varepsilon$  zu dem entsprechenden  $\int_{K_a} f \mu_{d(i)}$  und aus  $\int_{K_a} f \mu_\infty^a = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_a} f \mu_{d(i)}$  folgt, daß für hinreichend großes  $i$  der Abstand oben unter  $3\varepsilon$  fallen muß.  $\square$

## 4.15 Topologischer Dualraum

4.15.1. Alles in diesem Abschnitt gilt in gleicher Weise auch für komplexe topologische Vektorräume.

**Definition 4.15.2.** Gegeben ein reeller topologischer Vektorraum  $V$  bezeichnet man den Raum aller stetigen Linearformen

$$V^* = \text{Mod}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$$

als den **topologischen Dualraum** von  $V$  und verwendet dasselbe Symbol wie für den algebraischen Dualraum  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) = \text{Mod}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$  in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Bedeutung jeweils gemeint ist. Die Kofinaltopologie in Bezug auf die Auswertungsabbildungen  $V^* \rightarrow \mathbb{R}$  an allen Vektoren  $v \in V$  heißt die **schwach-\*-Topologie auf  $V^*$** , gesprochen “schwach-Stern-Topologie”.

4.15.3. Mit der schwach-\*-Topologie wird der topologische Dualraum  $V^*$  eines topologischen Vektorraums wieder ein topologischer Vektorraum, wie der Leser zur Übung selbst zeigen mag. Im Fall eines normierten Vektorraums  $V$  ist diese Topologie im allgemeinen schwächer als die durch die Operatornorm auf  $V^*$  definierte Topologie in dem Sinne, daß sie weniger offene Mengen hat und folglich etwa die Konvergenz von Folgen bezüglich dieser Topologie eine schwächere Bedingung ist. Man spricht dann auch von **schwacher Konvergenz**.

**Definition 4.15.4.** Umgekehrt können wir auf jedem komplexen topologischen Vektorraum  $V$  die kofinale Topologie in Bezug auf die Familie aller stetigen Linearformen  $V \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten. Sie heißt die **schwache Topologie auf  $V$** .

*Übung 4.15.5.* Jeder topologische Vektorraum ist auch mit der schwachen Topologie ein topologischer Vektorraum. Diese Topologie ist im allgemeinen schwächer als die ursprüngliche Topologie. Der topologische Dualraum eines topologischen Vektorraums ist mit der schwach-\*-Topologie ein topologischer Vektorraum.

**Satz 4.15.6 (Alaoglu-Bourbaki).** *Der abgeschlossene Einheitsball im topologischen Dualraum eines normierten Vektorraums ist schwach-\*-kompakt, als da heißt kompakt in der schwach-\*-Topologie. Ist allgemeiner  $B$  eine Umgebung des Ursprungs in einem topologischen Vektorraum  $V$ , so ist die Menge  $K = \{f \in V^* \mid |f(v)| \leq 1 \quad \forall v \in B\}$  schwach-\*-kompakt.*

*Beweis.* Man betrachte die offensichtliche Einbettung  $V^* \hookrightarrow \prod_{v \in V} \mathbb{R}$  gegeben durch  $f \mapsto (f(v))_{v \in V}$ . Unsere schwach-\*-Topologie ist per definitionem die von der Produkttopologie auf  $V^*$  induzierte Topologie. Der Raum  $K$  ist das Urbild in  $V^*$  eines Produkts von kompakten Intervallen, wir nehmen genauer die abgeschlossenen Intervalle  $[-1, 1]$  für  $v \in B$  und geeignet größere

Intervalle für  $v \notin B$ . Nach Tychonoff ist dies Produkt kompakter Intervalle und damit der Abschluß von  $K$  in unserem Produkt  $\prod$  kompakt und es bleibt zu zeigen, daß  $K$  abgeschlossen ist in  $\prod$ . Diejenigen Tupel aus  $\prod$ , die lineare Abbildungen darstellen, bilden aber eine abgeschlossene Teilmenge von  $\prod$ , als Schnitt der Urbilder der Null unter den stetigen  $\mathbb{R}$ -wertigen Abbildungen  $h_{x,y} : \prod \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a_v)_{v \in V} \mapsto (a_x + a_y - a_{x+y})$  und  $g_{\lambda,x} : \prod \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a_v)_{v \in V} \mapsto (\lambda a_x - a_{\lambda x})$  für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Folglich besteht der Abschluß von  $K$  aus linearen Abbildungen. Weiter liegt der Abschluß von  $K$  in unserem Produkt kompakter Intervalle, folglich sind alle Abbildungen aus dem Abschluß von  $K$  beschränkt durch Eins auf  $B$  und damit stetig. Also ist  $K$  sein eigener Abschluß.  $\square$

*Beispiel 4.15.7 (Ein kompakter nicht folgenkompakter Raum).* Wir betrachten den Raum  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aller beschränkten stetigen reellwertigen Funktionen auf der reellen Zahlengeraden mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Der Einheitsball in seinem Dualraum ist überdeckungskompakt in der schwach-\*Topologie nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki 4.15.6. Er ist jedoch nicht folgenkompakt, zum Beispiel bilden die Auswertungen an den natürlichen Zahlen eine Folge ohne konvergente Teilfolge.

**Lemma 4.15.8.** *Besitzt ein topologischer Vektorraum eine abzählbare dichte Teilmenge, so ist in seinem topologischen Dualraum mit der schwach-\*Topologie jedes Kompaktum  $K$  metrisierbar.*

*Beweis.* Sei  $V$  unser topologischer Vektorraum. Gegeben eine dichte Teilmenge  $D \subset V$  zeigen wir zunächst, daß die Auswertungsabbildungen an Vektoren  $v \in D$  bereits die schwach-\*Topologie auf unserem Kompaktum  $K$  erzeugen. In der Tat landen besagte Auswertungsabbildungen  $a_v$  in kompakten Teilmengen  $B_v \subset \mathbb{R}$  und liefern zusammen eine stetige Abbildung

$$K \rightarrow \prod_{v \in D} B_v$$

die für dichtes  $D$  sogar injektiv sein muß und die nach VI.3.3.10 als stetige Injektion eines kompakten Raums in einen Hausdorffraum einen Homöomorphismus auf ihr Bild induziert. Ist  $D$  abzählbar, so ist  $K$  dann metrisierbar als Unterraum eines abzählbaren Produkts metrischer Räume nach Übung VI.3.6.23.  $\square$

**Lemma 4.15.9.** *Ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum, so besitzt  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  eine abzählbare dichte Teilmenge.*

*Beweis.* Sicher reicht es zu zeigen, daß für jedes Kompaktum  $B \subset \mathbb{R}$  der Funktionenraum  $\mathcal{C}(X, B)$  eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Gegeben  $p, q \in \mathbb{Q}_{>0}$  bezeichne nur für diesen Beweis  $\mathcal{C}_{p,q} \subset \mathcal{C}(X, B)$  die Menge aller “mit Parametern  $(p, q)$  gleichmäßig stetigen Funktionen”, in Formeln

$$\mathcal{C}_{p,q} = \{f : X \rightarrow B \mid d(x, y) \leq p \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq q\}$$

Sicher reicht es zu zeigen, daß jedes  $\mathcal{C}_{p,q}$  eine abzählbare dichte Teilmenge hat, und das folgt wiederum aus dem Satz von Arzela-Ascoli VI.10.6.9, denn  $\mathcal{C}_{p,q}$  ist gleichgradig stetig und abgeschlossen in  $\mathcal{C}(X, B)$  und mithin nach Arzela-Ascoli kompakt. Jeder kompakte metrische Raum besitzt aber nach VI.10.6.7 eine abzählbare dichte Teilmenge.  $\square$

**Definition 4.15.10.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M(X; \mathbb{R})$  der Raum aller reellen Borelmaße auf  $X$ . Unter der **schwachen Topologie auf  $M(X; \mathbb{R})$**  verstehen wir die größte Topologie derart, daß für alle stetigen beschränkten reellen Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung  $M(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $\mu \mapsto \int f \mu$  stetig ist. Formal ist das zwar eigentlich eine schwach-\* -Topologie, aber so pedantisch ist man in diesem Zusammenhang bei der Terminologie meist nicht.

**Korollar 4.15.11.** *Ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum, so ist der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$  mit seiner schwachen Topologie folgenkompakt.*

4.15.12. Dasselbe gilt allgemeiner mit demselben Beweis für den Raum aller nichtnegativen Maße auf  $X$  mit Gesamtmasse höchstens Eins oder für den Raum aller signierten oder sogar komplexen Maße auf  $X$  mit Variationsnorm höchstens Eins.

*Beweis.* Nach 4.15.9 besitzt  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  eine abzählbare dichte Teilmenge. Nach 4.15.8 ist also jedes Kompaktum in seinem topologischen Dualraum mit der schwach-\* -Topologie metrisierbar. Das gilt nach Alaoglu-Bourbaki 4.15.6 insbesondere für die abgeschlossene Einheitskugel, und mit dem Riesz’schen Darstellungssatz VI.17.2.3 können wir den Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$  dahin als abgeschlossene Teilmenge einbetten.  $\square$

*Beispiel 4.15.13.* Jede Folge von Dirac-Maßen auf einem kompakten metrischen Raum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge, genauer konvergiert die Folge der Dirac-Maße zu einer konvergierenden Folge von Punkten auf einem beliebigen topologischen Raum schwach gegen das Dirac-Maß des Grenzwerts unserer Punktfolge.

*Beispiel 4.15.14.* Betrachten wir auf  $[0, 1]$  die Folge der Wahrscheinlichkeitsmaße  $P_n$ , die als Linearkombination der Dirac-Maße an allen Stellen  $i/n$  mit  $1 \leq i \leq n$  mit gleichen Gewichten an allen Stellen entsteht. Diese Folge konvergiert schwach gegen das Lebesgue-Maß.

**Definition 4.15.15.** Eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem topologischen Raum heißt **straff** (englisch **tight**) genau dann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Kompaktum gibt, dessen Komplement unter allen Maßen besagter Menge ein Maß  $\leq \varepsilon$  hat.

**Satz 4.15.16 (Prohorov).** *Jede straffe Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem metrischen Raum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Im Fall eines kompakten metrischen Raums haben wir bereits in 4.15.11 gezeigt, daß jede Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, ja nach 4.15.12 sogar jede Folge von Maßen mit beschränkter Gesamtmasse eine schwach konvergente Teilfolge besitzt. Im allgemeinen Fall wählen wir eine Folge  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  von Kompakta mit  $\mu_n(K_i) \geq 1 - 1/i$  für alle Glieder  $\mu_n$  unserer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Es gilt,  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton so zu finden, daß  $\int f \mu_{d(k)}$  für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$  konvergiert. Nach 4.15.12 finden wir  $i_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton derart, daß  $\int_{K_1} f \mu_{i_1(k)}$  konvergiert für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ . Von dieser Folge finden wir hinwiederum eine Teilfolge oder formal  $i_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton derart, daß für  $v_2 := i_1 \circ i_2$  die Folge  $\int_{K_2} f \mu_{v_2(k)}$  konvergiert für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ . Von dieser Folge finden wir hinwiederum eine Teilfolge oder formal  $i_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton derart, daß für  $v_3 := v_2 \circ i_3$  die Folge  $\int_{K_3} f \mu_{v_3(k)}$  konvergiert für alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ . Indem wir so weitermachen und zur Erhöhung der Klarheit noch  $v_1 := i_1$  vereinbaren, finden wir für die "diagonale" Teilfolge  $d(i) := v_i(i)$  schließlich, daß  $\int_{K_a} f \mu_{d(i)}$  konvergiert für alle  $a \geq 1$  und alle  $f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1])$ .

Die Grenzwerte dieser Folgen liefern mit dem Riesz'schen Darstellungssatz VI.17.2.3 Maße  $\mu_\infty^a$  auf  $K_a$ , die wir durch Null zu Maßen  $\mu_\infty^a$  auf ganz  $X$  fortsetzen können. Ich behaupte nun  $\mu_\infty^{a+1} \geq \mu_\infty^a$  in dem Sinne, daß jeder Borelmenge durch  $\mu_\infty^{a+1}$  eine mindestens ebensogroße Zahl zugeordnet wird wie durch  $\mu_\infty^a$ . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz reicht es hierzu, wenn wir für alle  $f \in \mathcal{C}(K_{a+1}, [0, \infty))$  zeigen

$$\int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^{a+1} \geq \int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^a$$

Dazu beachten wir in anschließend erklärter Notation

$$\begin{aligned}
 \int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^{a+1} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_{a+1}} h_n f \mu_\infty^{a+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_{a+1}} (h_n f) \mu_{d(i)} \right) \\
 &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_{a+1}} (h_n f) \mu_{d(i)} \right) \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \int_{K_a} f \mu_{d(i)} \right) \\
 &= \int_{K_a} f \mu_\infty^a = \int_{K_{a+1}} f \mu_\infty^a
 \end{aligned}$$

Hier meint  $h_n : K_{a+1} \rightarrow [0, 1]$  eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die charakteristische Funktion von  $K_a$  konvergiert: So etwas gibt es, da  $K_{a+1}$  ein metrischer Raum ist und  $K_a \triangleleft K_{a+1}$  eine abgeschlossene Teilmenge. Die entscheidende mittlere Ungleichung schließlich rührt daher, daß unsere Folge in  $n$  monoton fällt. Haben wir aber ganz allgemein nichtnegative reelle  $a_{n,i}$ , so gilt stets

$$\inf_n \left( \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n,i} \right) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \inf_n a_{n,i} \right)$$

falls die fraglichen Limes existieren, denn offensichtlich gilt  $a_{\nu,i} \geq \inf_n (a_{n,i})$  für alle  $i$  und alle  $\nu$ . Damit folgt wie behauptet  $\mu_\infty^a \leq \mu_\infty^{a+1} \leq \dots$  und wir können nach Übung IV.6.1.33 ein Maß  $\mu_\infty^\infty$  auf  $X$  erklären durch die Vorschrift

$$\mu_\infty^\infty(A) := \lim_{a \rightarrow \infty} \mu_\infty^a(A)$$

für jede Borelmenge  $A \subset X$ . Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Folge der  $\mu_{d(i)}$  schwach gegen  $\mu_\infty^\infty$  konvergiert. Ist  $f \in \mathcal{C}(X, [0, 1])$  gegeben, so gilt es dafür zu zeigen

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_X f \mu_{d(i)} = \int_X f \mu_\infty^\infty$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es jedoch ein  $a$  mit  $\mu_{d(i)}(X \setminus K_a) \leq \varepsilon$  für alle  $i$  und mit  $\mu_\infty^\infty(X) - \mu_\infty^a(X) < \varepsilon$ . Dann hat  $\int_X f \mu_\infty^\infty$  einen Abstand  $\leq \varepsilon$  zu  $\int_X f \mu_\infty^a = \int_{K_a} f \mu_\infty^a$  und jedes Glied der Folge  $\int_X f \mu_{d(i)}$  hat einen Abstand  $\leq \varepsilon$  zu dem entsprechenden  $\int_{K_a} f \mu_{d(i)}$  und aus  $\int_{K_a} f \mu_\infty^a = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_a} f \mu_{d(i)}$  folgt, daß für hinreichend großes  $i$  der Abstand oben unter  $3\varepsilon$  fallen muß.  $\square$

## 4.16 Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen

**Lemma 4.16.1 (Projektiver Limes von Maßräumen).** *Sei  $T$  eine Indexmenge und sei für jedes endliche  $I \subset T$  ein endliches Maß  $\mu_I$  auf  $\text{Ens}(I, [0, 1])$*

gegeben derart, daß für  $J \subset I$  und mit der Notation  $\Phi_I^J : \text{Ens}(I, [0, 1]) \rightarrow \text{Ens}(J, [0, 1])$  für das Vorschalten der Injektion  $J \hookrightarrow I$  stets gilt

$$(\Phi_I^J)_* \mu_I = \mu_J$$

So existiert genau ein Borelmaß  $\mu$  auf  $\text{Ens}(T, [0, 1])$  mit  $(\Phi_T^I)_* \mu = \mu_I$  für alle endlichen  $I \subset T$ .

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, daß die Mengen  $(\Phi_T^I)^{-1}(A)$  für  $A \subset \text{Ens}(I, [0, 1])$  meßbar und  $I \subset T$  endlich aber beliebig einen Mengenring  $\mathcal{I}$  bilden, und daß es genau eine Abbildung  $\mu$  von diesem Mengenring  $\mathcal{I}$  nach  $[0, \infty)$  gibt mit

$$\mu\left((\Phi_T^I)^{-1}(A)\right) = \mu_I(A)$$

wann immer  $I \subset T$  endlich ist und  $A \subset \text{Ens}(I, [0, 1])$  meßbar. Ebenso leicht sieht man, dass diese Abbildung  $\mu$  additiv ist. Sobald wir die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu$  zeigen können, folgt unser Lemma aus dem Maßfortsetzungssatz von Caratheodory. Um die  $\sigma$ -Additivität zu zeigen, argumentieren wir wie im Vorfeld der Konstruktion des Lebesgue-Maßes beim Beweis von Lemma IV.6.2.6. Es gilt zu zeigen, daß für  $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  eine disjunkte Vereinigung mit  $A, A_n \in \mathcal{I}$  gilt

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Offensichtlich gilt schon einmal  $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C)$  für  $B, C \in \mathcal{I}$  disjunkt. Wir setzen nun  $B_n = A \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ . Natürlich gehören dann auch die  $B_n$  zu  $\mathcal{I}$ , es gilt  $B_0 \supset B_1 \supset \dots$  und  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$ , und es reicht, wenn wir zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Aufgrund der Regularität von Borel-Maßen auf  $[0, 1]^r$  nach IV.6.7.1 und dem Satz von Tychonoff VI.17.4.7 finden wir für jedes  $n$  eine kompakte Menge  $C_n \subset B_n$  aus  $\mathcal{I}$  für die gilt

$$\mu(B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} \varepsilon$$

Jetzt betrachten wir  $D_n = C_0 \cap \dots \cap C_n$ . Auch die  $D_n$  gehören zu  $\mathcal{I}$ , es gilt  $D_n \subset C_n \subset B_n$ , und zusätzlich haben wir  $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \dots$ . Wir zeigen nun  $\mu(B_n \setminus D_n) \leq 2\varepsilon$  für alle  $n$ . In der Tat gilt ja

$$B_n \setminus D_n = \bigcup_{k=0}^n B_n \setminus C_k \subset \bigcup_{k=0}^n B_k \setminus C_k$$

und folglich

$$\mu(B_n \setminus D_n) \leq \sum_{k=0}^n \mu(B_k \setminus C_k) \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Nun folgt aber aus  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$  und der Kompaktheit der  $D_n$  und [II.6.7.15](#) schon  $D_N = \emptyset$  für ein  $N$ , und damit ergibt sich  $\mu(B_n) \leq 2\varepsilon$  für  $n \geq N$ .  $\square$

**Definition 4.16.2.** Ein Meßraum heißt **Borel'sch** genau dann, wenn er isomorph ist zu einer Borelmenge in  $\mathbb{R}$  mit der induzierten Struktur eines Meßraums.

Sollte besser: Abzählbarem Produkt von endlichen diskreten Meßräumen.

**Satz 4.16.3 (Existenzsatz von Kolmogoroff).** *Sei  $T$  eine Indexmenge und sei für jedes  $i \in T$  ein Borel'scher Meßraum  $B_i$  gegeben und für jedes endliche  $I \subset T$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_I$  auf  $\prod_{i \in I} B_i$  derart, daß für  $J \subset I$  und mit der Notation  $\Phi_I^J$  für die Projektion auf den entsprechenden Teil der Faktoren stets gilt*

$$(\Phi_I^J)_* \mu_I = \mu_J$$

*So existiert genau ein Borelmaß  $\mu$  auf  $\prod_{i \in T} B_i$  mit  $(\Phi_T^I)_* \mu = \mu_I$  für alle endlichen  $I \subset T$ .*

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Lemma [4.16.1](#).  $\square$

# Kapitel VIII

## Funktionentheorie

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Holomorphe Funktionen</b>	<b>1325</b>
1.1	Komplexe Differenzierbarkeit	1325
1.2	Holomorphe Funktionen	1328
1.3	Komplexe Wegintegrale	1334
1.4	Integralsatz von Cauchy	1342
1.5	Beziehung zu Wegintegralen im Reellen*	1352
1.6	Integralformel von Cauchy	1355
1.7	Potenzreihenentwicklung	1361
1.8	Lokale Struktur holomorpher Funktionen	1365
<b>2</b>	<b>Singuläre Stellen holomorpher Funktionen</b>	<b>1372</b>
2.1	Isolierte Singularitäten und Laurentreihen	1372
2.2	Umlaufzahl und Residuensatz	1378
2.3	Anwendungen des Residuensatzes	1383
<b>3</b>	<b>Verschiedene weiterführende Resultate</b>	<b>1391</b>
3.1	Harmonische Funktionen	1391
3.2	Reihenentwicklung des Kotangens	1398
3.3	Produktentwicklung des Sinus	1401
3.4	Gammafunktion	1403
3.5	Riemann'scher Abbildungssatz	1407
<b>4</b>	<b>Erste Anwendungen in der Zahlentheorie</b>	<b>1411</b>
4.1	Verteilung von Primzahlen	1411

4.2	Primzahlen in Restklassen . . . . .	1419
4.3	Dirichlet-Reihen . . . . .	1424
<b>5</b>	<b>Unausgegrenztes zur Funktionentheorie . . . . .</b>	<b>1429</b>
5.1	Riemann'sche Flächen . . . . .	1429
5.2	Anschauung für die Galoisgruppe* . . . . .	1442
5.3	Zur Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion . . . . .	1449
5.4	Klassifikation holomorpher Ringgebiete . . . . .	1458
5.5	Elliptische Funktionen . . . . .	1459
5.6	Höhere Differentiale, woanders . . . . .	1461
5.7	Hypergeometrische Funktionen . . . . .	1462

---

# 1 Holomorphe Funktionen

## 1.1 Komplexe Differenzierbarkeit

1.1.1. Zunächst einmal bitte ich den Leser, sich die in ?? eingeführten Grundlagen zum Rechnen mit komplexen Zahlen sowie Abschnitt III.1.1 zur komplexen Exponentialfunktion in Erinnerung zu rufen.

**Definition 1.1.2.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge und  $p \in U$  ein Punkt. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b \in \mathbb{C}$**  genau dann, wenn  $p$  ein Häufungspunkt von  $U$  ist und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch  $f'(p) = b$  und nennen  $f'(p)$  die **Ableitung** oder ausführlicher die **komplexe Ableitung** der Funktion  $f$  an der Stelle  $p$ .

1.1.3. Unter einem Häufungspunkt von  $U$  verstehen wir in diesem Zusammenhang einen internen Häufungspunkt von  $U$ , also einen Punkt  $p \in U$  mit der Eigenschaft, daß es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $z \in U$  gibt mit  $0 < |z - p| < \varepsilon$ . Der Grenzwert ist hier im Sinne von II.6.6.8 zu verstehen. Ausgeschrieben für unseren Spezialfall bedeutet  $\lim_{z \rightarrow p} g(z) = b$  für  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  also, daß es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit  $0 < |z - p| < \delta \Rightarrow |g(z) - b| < \varepsilon$ . Unsere Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist identisch zu unserer Definition der "reellen Differenzierbarkeit" II.4.1.3 bis auf das Detail, daß wir überall statt reeller Zahlen komplexe Zahlen betrachten, daß wir etwas allgemeinere Definitionsbereiche zulassen und daß wir, wie im Komplexen üblich, die Variable mit  $z$  bezeichnen. Den Definitionsbereich unserer Funktion haben wir statt mit  $I$  hier mit  $U$  bezeichnet, weil der meistgebrauchte Fall nicht mehr der eines halboffenen Intervalls, sondern vielmehr der einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene sein wird. Der Fall eines halboffenen reellen Intervalls wird jedoch auch oft vorkommen. In diesem Fall stimmt die hier definierte Ableitung überein mit der Geschwindigkeit im Sinne von II.7.2.1. Der Rest dieses Abschnitts besteht darin, unsere Resultate zur reellen Differenzierbarkeit mitsamt ihren Beweisen im Komplexen zu wiederholen.

1.1.4. Ich gebe noch einige alternative Formulierungen an. Ist  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge und  $p$  ein Häufungspunkt von  $U$ , so ist nach II.6.6.11 eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn es eine Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, die stetig ist bei  $p$  mit Funktionswert  $\varphi(p) = b$  derart, daß für alle  $z \in U$  gilt

$$f(z) = f(p) + (z - p)\varphi(z)$$

In anderen nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b$  genau dann, wenn gilt

$$f(p+h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion  $\varepsilon$ , die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hier ist zu verstehen, daß die Funktion  $\varepsilon$  definiert sein soll auf der Menge aller  $h$  mit  $h+p \in U$ . Diese Formulierung hat den Vorteil, daß besonders gut zum Ausdruck kommt, inwiefern für festes  $p$  und kleines  $h$  der Ausdruck  $f(p) + f'(p)h$  eine gute Approximation von  $f(p+h)$  ist. Anschaulich wirkt  $f$  lokal um einen gegebenen Punkt  $p$  in erster Approximation wie eine Drehstreckung mit Zentrum in besagtem Punkt, deren Winkel und Streckfaktor durch  $f'(p)$  beschrieben werden, gefolgt von einer Verschiebung um  $f(p)$ .

*Beispiele 1.1.5.* Eine konstante Funktion auf einer Menge von komplexen Zahlen ist bei jedem Häufungspunkt besagter Menge komplex differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion  $\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z$  hat bei jedem Punkt  $p$  die Ableitung  $\text{id}'(p) = 1$ .

**Lemma 1.1.6.** *Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  ist komplex differenzierbar bei jedem Punkt von  $\mathbb{C}^\times$  und ihre Ableitung bei einer Stelle  $p \in \mathbb{C}^\times$  ist  $-\frac{1}{p^2}$ .*

*Beweis.* Wir rechnen  $\lim_{z \rightarrow p} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{p}}{z-p} = \lim_{z \rightarrow p} \frac{-1}{zp} = -\frac{1}{p^2}$ . □

**Lemma 1.1.7.** *Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge. Ist eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p \in U$ , so ist  $f$  stetig bei  $p$ .*

*Beweis.* Das folgt sofort aus 1.1.4. □

**Proposition 1.1.8 (Summenregel und Produktregel).** *Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge und seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei einem Punkt  $p \in U$ . So sind auch die Funktionen  $f+g$  und  $fg$  komplex differenzierbar bei  $p$  und es gilt*

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \text{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

*Beweis.* Identisch zum Beweis im Reellen nach II.4.2.1. □

**Definition 1.1.9.** Ist eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definiert auf einer Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  und differenzierbar bei jedem Punkt von  $U$ , so nennen wir  $f$  **komplex differenzierbar auf  $U$**  und nennen die Funktion  $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p \mapsto f'(p)$  ihre **Ableitung**. Aus unseren Definitionen folgt insbesondere, daß dann die Menge  $U$  keine isolierten Punkte haben darf.

1.1.10. Für die Ableitungen komplex differenzierbarer Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich gelten mithin die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

**Korollar 1.1.11 (Ableiten ganzzahliger Potenzen).** Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und unter der Voraussetzung  $z \neq 0$  im Fall  $n \leq 0$  ist die Ableitung der Funktion  $z \mapsto z^n$  die Funktion  $z \mapsto nz^{n-1}$ .

*Beweis.* Man zeigt das durch vollständige Induktion über  $n$  separat für  $n \geq 0$  und  $n \leq -1$ .  $\square$

*Übung 1.1.12.* Ein komplexes Polynom hat bei  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn auch seine Ableitung bei  $\lambda$  verschwindet.

**Satz 1.1.13 (Kettenregel).** Seien  $U, V \subset \mathbb{C}$  Teilmengen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen und es gelte  $f(U) \subset V$ . Sei  $f$  komplex differenzierbar bei  $p$  und  $g$  komplex differenzierbar bei  $f(p)$ . So ist  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

*Beweis.* Identisch zum Beweis im Reellen nach II.4.2.5. Man beachte, daß nun rechts ein Produkt komplexer Zahlen steht.  $\square$

*Beispiel 1.1.14.* Wir berechnen für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  und  $m \geq 1$  eine natürliche Zahl die Ableitung der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f : t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu)^m$  und erhalten mit der Kettenregel  $f'(t) = (2t + \lambda)m(t^2 + \lambda t + \mu)^{m-1}$ . Schalten wir noch eine differenzierbare Abbildung  $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau \mapsto t(\tau)$  davor, so ergibt sich die Ableitung der zusammengesetzten Funktion wieder mit der Kettenregel zu

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{d\tau} = (2t(\tau) + \lambda)m(t(\tau)^2 + \lambda t(\tau) + \mu)^{m-1} \frac{dt}{d\tau}$$

**Proposition 1.1.15 (Quotientenregel).** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion ohne Nullstelle und  $p \in U$  ein Punkt.

1. Ist  $f$  komplex differenzierbar bei  $p$ , so ist auch  $z \mapsto 1/f(z)$  komplex differenzierbar bei  $p$  und hat dort die Ableitung  $-f'(p)/f(p)^2$ .
2. Ist zusätzlich  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $p$ , so ist auch  $g/f$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

*Beweis.* Teil 1 folgt sofort aus 1.1.6 mit der Kettenregel 1.1.13. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel 1.1.8.  $\square$

## 1.2 Holomorphe Funktionen

1.2.1. Ich erinnere daran, daß eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  offen heißt genau dann, wenn sie mit jedem Punkt auch eine ganze Kreisscheibe um diesen Punkt umfaßt. Das Symbol  $U \Subset \mathbb{C}$  deutet an, daß  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  sein soll.

**Definition 1.2.2.** Eine im Sinne von 1.1.2 komplex differenzierbare komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt eine **holomorphe Funktion**.

1.2.3. Eine holomorphe Funktion ist also in anderen Worten eine komplexwertige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \Subset \mathbb{C}$  derart, daß für alle  $p \in U$  der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

existiert. Er wird dann  $f'(p)$  notiert. Nicht gefordert wird die Stetigkeit der Ableitung  $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die sich vielmehr nach 1.6.5 automatisch ergeben wird: Dort zeigen wir sogar stärker, daß die Ableitung einer holomorphen Funktion auch selbst wieder holomorph ist. Das steht in scharfem Kontrast zur Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, in der die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ja keineswegs stetig, geschweige denn differenzierbar zu sein braucht.

1.2.4 (**Erste Beispiele für holomorphe Funktionen**). Nach 1.1 sind Summen, Produkte, Quotienten und Verknüpfungen holomorpher Funktionen stets wieder holomorph, wann immer sie sinnvoll definiert sind. Ebenfalls nach 1.1 holomorph sind konstante Funktionen und die Identität auf  $\mathbb{C}$ . Durch Anwenden der erlaubten Operationen erhalten wir so schon einen großen Vorrat holomorpher Funktionen. Insbesondere liefern alle Polynome in  $\mathbb{C}[z]$  holomorphe Funktionen auf ganz  $\mathbb{C}$ , und auch Quotienten polynomialer Funktionen holomorph auf dem Komplement der Nullstellenmenge ihres Nenners.

**Proposition 1.2.5 (Ableitung von Umkehrfunktionen).** *Gegeben sei  $U \Subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ . Ist dann  $f$  komplex differenzierbar*

beim Punkt  $p \in U$  mit Ableitung  $f'(p) \neq 0$ , so ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar bei  $q = f(p)$  mit Ableitung

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

*Beweis.* Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) - f(p) = (z - p)\varphi(z)$  und  $\varphi(p) = f'(p)$ . Setzen wir hier  $z = f^{-1}(w)$ , so ist  $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $(w - q)\psi(w) = f^{-1}(w) - f^{-1}(q)$  und  $\psi(q) = 1/f'(p)$ .  $\square$

**Korollar 1.2.6 (Umkehrfunktionen holomorpher Funktionen).** Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine injektive holomorphe Funktion mit offenem Bild und stetiger Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  ist auch die Umkehrfunktion holomorph.

*Beweis.* Das folgt sofort aus der vorhergehenden Proposition.  $\square$

1.2.7. In 1.8.16 werden wir zeigen, daß eine holomorphe Funktion stets offenes Bild und in 1.8.15, daß eine injektive holomorphe Funktion stets eine stetige Umkehrung hat. Diese Annahmen im Korollar dienen also nur zur Vereinfachung des Beweises und mit dem Korollar verfolge ich den Zweck, bereits zu Beginn der Vorlesung einen guten Vorrat an holomorphen Funktionen bereitstellen zu können.

*Beispiel 1.2.8 (Komplexe Wurzelfunktion).* Das Quadrieren liefert eine Bijektion zwischen der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil und der "geschlitzten Zahlenebene"  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Genauer erhalten wir ein kommutatives Diagramm aus Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi/2, \pi/2) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \end{array}$$

mit Polarkoordinaten  $(r, \vartheta) \mapsto r \exp(i\vartheta)$  in den Vertikalen,  $(r, \vartheta) \mapsto (r^2, 2\vartheta)$  in der oberen Horizontalen und  $z \mapsto z^2$  in der unteren Horizontalen, das die Stetigkeit der Umkehrabbildung in der unteren Horizontalen zeigt. Diese Umkehrfunktion ist also nach 1.2.5 eine holomorphe Funktion auf der geschlitzten Zahlenebene mit Ableitung  $1/(2\sqrt{z})$ . Ich erinnere auch daran, daß es nach III.1.1.10 keine "stetige Wurzelfunktion" auf ganz  $\mathbb{C}$  geben kann.

1.2.9. In derselben Weise können auf dem Komplement der nichtpositiven reellen Achse  $\mathbb{R}_{\leq 0}$  auch holomorphe höhere Wurzeln  $z \mapsto \sqrt[n]{z}$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  erklärt werden als die Umkehrfunktionen geeigneter Einschränkungen der Potenzfunktionen  $z \mapsto z^n$ .



Anschauliche Bedeutung der Ableitung der komplexen Exponentialfunktion.

Das untere Bild entsteht aus dem oberen durch Anwenden der komplexen Exponentialfunktion. Man sieht, daß das Differential dieser Abbildung an einer Stelle auf der reellen Achse eine Streckung um einen reellen Faktor ist, an einer Stelle auf der imaginären Achse dahingegen eine Drehung alias eine Streckung um einen komplexen Faktor vom Absolutbetrag Eins.

**Lemma 1.2.10.** *Die komplexe Exponentialfunktion ist holomorph und stimmt auf der ganzen komplexen Zahlenebene mit ihrer eigenen Ableitung überein.*

*Beweis.* Der Beweis des reellen Analogons II.4.2.8 kann wortwörtlich übernommen werden.  $\square$

*Beispiel 1.2.11.* Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge derart, daß die Exponentialfunktion eine Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrfunktion  $\log : \exp(U) \rightarrow \mathbb{C}$  liefert, so nennt man  $\log$  einen **Zweig des Logarithmus**. Nach 1.2.5 ist jeder solche Zweig des Logarithmus holomorph mit Ableitung

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

Im Spezialfall  $U = \mathbb{R} + (-\pi, \pi)i$  spricht man auch vom **Hauptzweig des Logarithmus**, den wir bereits in III.1.4.2 eingeführt und sogar noch auf die negative reelle Achse fortgesetzt hatten, allerdings in nur noch partiell stetiger Weise.

*Übung 1.2.12.* Man zeige, daß für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  der Hauptzweig des Logarithmus von  $1 + z$  auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

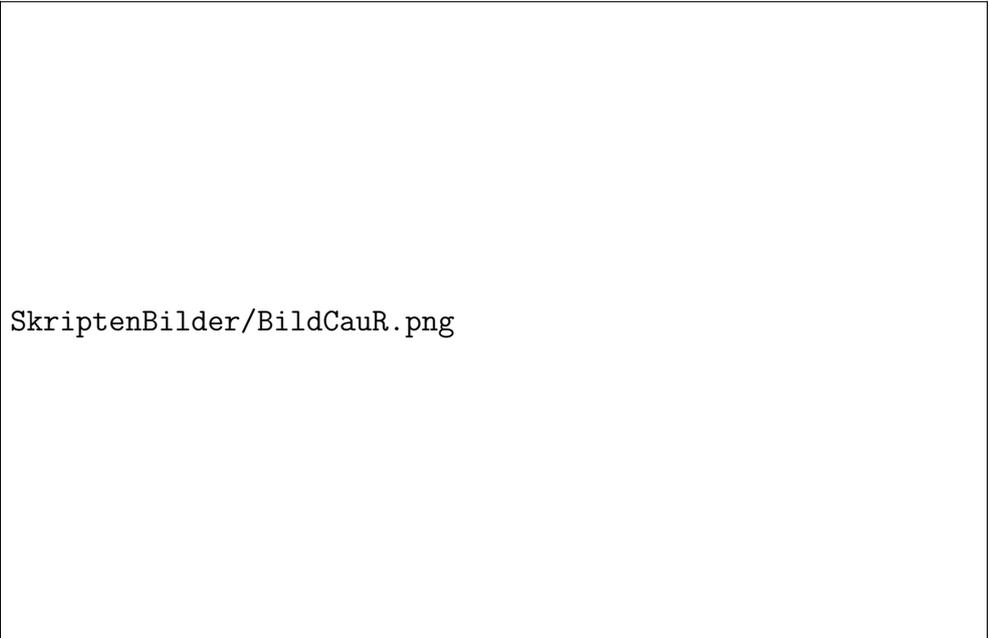
*Hinweis:* Es reicht zu zeigen, daß für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| = 1$  das Einsetzen von  $z = wt$  auf beiden Seiten dieselbe Funktion in  $t \in (-1, 1)$  liefert. Beide Seiten nehmen aber bei  $z = 0$  den Wert Null an, so daß es reicht, die Gleichheit ihrer Ableitungen zu zeigen. In 1.7.10 dürfen Sie diese Übung mit mehr Theorie und weniger Rechnen ein weiteres Mal lösen.

**Satz 1.2.13.** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und sei  $U_\kappa \subseteq \mathbb{C}$  sein Bild unter der üblichen Identifikation  $\kappa : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$ . Gegeben stetig partiell differenzierbare reelle Funktionen  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Funktion  $f : U_\kappa \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch*

$$f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$$

*genau dann holomorph, wenn  $u$  und  $v$  die sogenannten **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** erfüllen, die da lauten*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$



SkriptenBilder/BildCauR.png

Dieses Bild soll die Bedeutung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen veranschaulichen. Die gestrichelten bzw. durchgezogenen Linien deuten die Niveaumengen seines Real- bzw. Imaginärteils eines Zweiges des Logarithmus an, die gestrichelten bzw. durchgezogenen Pfeile deren Gradienten. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen bedeuten gerade, daß an jeder Stelle der Gradient des Imaginärteils durch eine Drehung um  $90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn aus dem Gradienten des Realteils hervorgeht.

1.2.14. Man kann sich diese Gleichungen veranschaulichen als die Bedingung, daß an jeder Stelle der Gradient von  $v$  aus dem Gradienten von  $u$  hervorgeht durch die Drehung um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn. Per definitionem haben wir weiter  $f\kappa = \kappa(u, v) = u + iv$  mit  $(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  wie üblich. Es ist üblich und praktisch, in diesem Satz und seinem Beweis die kanonische Identifikation  $\kappa$  in der Notation systematisch zu unterdrücken. Ich habe sie zur Übung hier ausgeschrieben, weil ja  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$ , wenn man es ganz genau nimmt, zumindest in meinen Augen durchaus verschiedene Objekte sind.

*Ergänzung* 1.2.15. Verwenden wir partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen wie in [IV.1.1.3](#), so können wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen auch zusammenfassen zur Gleichung

$$i \frac{\partial(f\kappa)}{\partial x} = \frac{\partial(f\kappa)}{\partial y}$$

Die komplexe Ableitung von  $f$  wird dann gegeben durch  $f'\kappa = \frac{\partial(f\kappa)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$  und wird auch bereits durch Real- oder Imaginärteil unserer Funktion festgelegt als  $f'\kappa = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ . Fassen wir komplexwertige Funktionen auf einer Teilmenge der komplexen Zahlen als Vektorfelder auf und verwenden die offensichtliche Identifikation von  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$ , so entspricht die komplex konjugierte Ableitung also dem Gradienten des Realteils unserer Funktion, in Formeln  $\bar{f}'\kappa = \kappa \operatorname{grad} u$ .

*Beweis.* Eine Funktion  $f : U_\kappa \rightarrow \mathbb{C}$  ist per definitionem komplex differenzierbar in  $p$  genau dann, wenn sie dort differenzierbar ist im Sinne von [IV.1.2.2](#) und wenn zusätzlich ihr Differential  $d_p f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, eben ihrer komplexen Ableitung  $f'(p)$ , gegeben wird. Unter unserer Identifikation  $\kappa : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  haben wir nun  $\kappa^{-1} f\kappa = (u, v)$  und das Differential  $d_p f$  wird nach [IV.1.2.6](#) beschrieben durch die Jacobi-Matrix

$$[\kappa^{-1}(d_p f)\kappa] = [d_p(\kappa^{-1} f\kappa)] = [d_p(u, v)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

an der jeweiligen Stelle  $p$ . Diese Matrix beschreibt die Multiplikation mit einer komplexen Zahl genau dann, wenn sie mit der Matrix  $[\kappa^{-1}(i \cdot)\kappa] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  der Multiplikation mit  $i$  kommutiert, wenn also gilt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

an der jeweiligen Stelle  $p$ . Sind darüber hinaus  $u$  und  $v$  stetig partiell differenzierbar, so ist nach [IV.1.5.1](#) auch  $(u, v)$  und damit  $f = \kappa(u, v)\kappa^{-1}$  reell differenzierbar und der Satz folgt.  $\square$

*Beispiel 1.2.16.* Die Exponentialfunktion definiert eine holomorphe Bijektion  $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Deren Umkehrung wird auf der oberen Halbebene gegeben durch

$$\log(x + iy) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \frac{\pi}{2} - i \arctan \frac{x}{y}$$

Wir haben also  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $v(x, y) = \pi/2 - \arctan(x/y)$ . Es ist eine gute Übung, nun die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen zu prüfen. Einfacher folgert man aber die Holomorphie dieser Funktion aus dem Satz 1.2.5 über die komplexe Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen.

**Definition 1.2.17.** Bezeichne  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Konjugation und sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **antiholomorph** genau dann, wenn  $\bar{f} = c \circ f$  holomorph ist.

*Übung 1.2.18.* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Man zeige, daß eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  antiholomorph ist genau dann, wenn  $f \circ c : c(U) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Insbesondere ist die Verknüpfung antiholomorpher Funktionen stets holomorph.

*Übung 1.2.19.* Eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, ist konstant.

*Übung 1.2.20.* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(z, t) \mapsto f(z, t)$  stetig. Ist  $f$  für alle  $t$  holomorph in  $z$  und  $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so ist auch die Abbildung  $F : z \mapsto \int_a^b f(z, t) dt$  holomorph und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w, t) dt$$

Hinweis: IV.2.1.13. Ich bemerke, daß wir in 1.6.14 die Holomorphie des Integrals sogar zeigen, ohne die Stetigkeit der Ableitung vorauszusetzen. Vielmehr wird diese Stetigkeit aus dem Beweis des Satzes von Goursat 1.6.5 folgen.

### 1.3 Komplexe Wegintegrale

1.3.1. Wir verwenden im folgenden die Integration stetiger vektorwertiger Funktionen auf kompakten reellen Intervallen III.1.3, benötigen dies Konzept jedoch nur im Fall von stetigen komplexwertigen Funktionen  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , für die man die Integral auch elementar über die Formel

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f$$

definieren und die benötigten Eigenschaften elementar nachprüfen kann.

**Definition 1.3.2.** Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetig differenzierbarer Weg und  $f$  eine stetige auf seinem Bild definierte komplexwertige Funktion, so definieren wir das **Wegintegral der Funktion  $f$  über den Weg  $\gamma$** , eine komplexe Zahl  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , durch die Vorschrift

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Ist allgemeiner  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar im Sinne von IV.3.6.3, so nennen wir  $\gamma$  einen **Integrationsweg** und definieren das Wegintegral ähnlich wie in IV.3.6.4 als die Summe der Wegintegrale über seine maximalen stetig differenzierbaren Teilstücke.

*Ergänzung 1.3.3.* In 1.5.4 erläutern wir die Bedeutung von  $f(z) dz$  als “komplexwertiges Kovektorfeld” und besprechen, in welcher Weise die vorstehende Definition eine Verallgemeinerung unserer Definition des Wegintegrals über Kovektorfelder aus IV.3.3 ist.

1.3.4 (**Anschauung für das komplexe Wegintegral**). Auf der rechten Seite ist  $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$  zu verstehen als Geschwindigkeit im Sinne von II.7.2.1 und das Integral der stetigen komplexwertigen Funktion  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$  ist zu verstehen als Integral einer vektorwertigen Funktion im Sinne von III.1.3.3, der Realteil des Integrals ist also das Integral des Realteils von  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$  und der Imaginärteil des Integrals das Integral des Imaginärteils. Betrachtet man in der Situation der Definition für alle  $r \geq 1$  die äquidistanten Unterteilungen  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$  und bildet die “Riemannsummen” der nun in  $\mathbb{C}$  zu bildenden Produkte

$$S_{\gamma}^r(f) = \sum_{i=1}^r f(\gamma(a_i)) (\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}))$$

so ist unser Wegintegral mit denselben Argumenten wie in IV.3.3.4 der Grenzwert der Folge der Riemannsummen

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{\gamma}^r(f)$$

1.3.5 (**Abschätzungen für das komplexe Wegintegral**). Der Absolutbetrag eines Wegintegrals ist beschränkt durch das Produkt der euklidischen Länge des Weges im Sinne von II.7.1.1 mit dem Supremum der Absolutbeträge der Funktionswerte auf dem Weg. Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  unser Integrationsweg, so gilt also in Formeln

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left( \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \right) L(\gamma)$$



SkriptenBilder/BildRieSa.png

Dieses Bild soll dazu helfen, eine Anschauung für die Riemannsummen zum Integral der Funktionen  $z^n$  über den Einheitskreis zu entwickeln. Im Fall  $n = 0$  sind alle Riemannsummen schlicht Null. Im Fall  $n = -1$  dahingegen werden durch den Faktor  $z^{-1}$  alle “Kanten unserer Vielecke in die Richtung der ersten Kante gedreht”, und man erkennt, wie die Riemannsummen, hier gezeichnet für  $n = 3, 4$  und  $8$ , gegen den Vektor alias die komplexe Zahl  $2\pi i$  konvergieren.

Man kann das direkt an der Darstellung des Wegintegrals durch Riemannsummen ablesen. Es folgt mit der Darstellung  $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  der Weglänge nach II.7.3.2 auch sofort aus der Abschätzung III.1.3.3 der Norm des Integrals einer vektorwertigen Funktion durch das Integral über die Normen der Funktionswerte, angewandt im Spezialfall einer komplexwertigen Funktion.

*Beispiele* 1.3.6. Ist der Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  die Identität  $\gamma(t) = t$ , so haben wir offensichtlich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$$

Ist unser Weg gegeben durch  $t \mapsto it$ , so haben wir ebenso offensichtlich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = i \int_a^b f(it) dt$$

Integrieren wir die konstante Funktion 1, so ist offensichtlich bereits die Folge der Riemannsummen konstant  $\gamma(b) - \gamma(a)$ , und das kommt nach elementarer Rechnung dann auch aus unserer Definition des Wegintegrals heraus und wird durch 1.3.7 verallgemeinert. Ist unser Weg ein kreisförmiger Weg im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung, der durch den Winkel parametrisiert ist und der also in Formeln gegeben wird durch  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto r e^{it}$  für einen festen Radius  $r > 0$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} i r e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall  $n \neq -1$  und ganz besonders im Fall  $n = 0$  scheint es mir in dieser Situation auch anschaulich recht klar, daß bereits fast alle Riemannsummen verschwinden und damit natürlich auch ihr Grenzwert. Der Fall  $n \neq -1$  läßt sich im Übrigen auch elegant als Spezialfall der anschließenden Proposition behandeln.

**Proposition 1.3.7 (Komplexes Wegintegral und Stammfunktionen).**

Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig komplex differenzierbar und  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg. So gilt

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $\gamma$  stetig differenzierbar annehmen. Nach der Kettenregel 1.1.13 hat  $(f \circ \gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  die

Ableitung  $t \mapsto f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Damit finden wir

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = (f \circ \gamma)|_a^b$$

nach der Definition und der vektorwertigen Variante III.1.3.7 des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.  $\square$

1.3.8. Insbesondere ist also das Integral einer Ableitung über einen geschlossenen Weg stets Null. Das zeigt sofort  $\int_{\gamma} z^n dz = 0$  für  $n \neq -1$  und jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in der komplexen Zahlenebene. Im Fall  $n = -1$  kann dies Argument so nicht angewandt werden, da die Funktion  $1/z$  keine auf ganz  $\mathbb{C}^{\times}$  definierte Stammfunktion besitzt. Definieren wir aber  $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  als Umkehrung von  $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ , so ist  $\log$  nach 1.2.5 holomorph mit Ableitung  $1/z$ , und integrieren wir für  $\varepsilon > 0$  die Funktion  $1/z$  über einen Integrationsweg von  $-1 - i\varepsilon$  bis  $-1 + i\varepsilon$  durch die geschlitzte Zahlenebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ , so ergibt sich  $\log(-1 + i\varepsilon) - \log(-1 - i\varepsilon)$  und das strebt für  $\varepsilon \searrow 0$  gegen  $2\pi i$ .

**Korollar 1.3.9.** *Eine holomorphe Funktion mit wegzusammenhängendem Definitionsbereich, deren Ableitung identisch verschwindet, ist konstant.*

*Beweis.* Nach IV.3.4.5 lassen sich je zwei Punkte einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auch durch einen Integrationsweg verbinden. Nach 1.3.7 hat also unsere Funktion an je zwei Punkten denselben Wert.  $\square$

1.3.10 (**Stückweises Integrieren**). Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg und  $f$  eine auf seinem Bild definierte stetige komplexwertige Funktion, so gilt für alle  $c \in (a, b)$  offensichtlich oder genauer nach III.1.3.3 die Identität

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma|_{[a,c]}} f(z) dz + \int_{\gamma|_{[c,b]}} f(z) dz$$

**Proposition 1.3.11 (Unabhängigkeit von der Parametrisierung).** *Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offenen Teilmenge,  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ist  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar mit  $t(c) = a$  und  $t(d) = b$ , so gilt*

$$\int_{\gamma \circ t} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

1.3.12. Kehrt hier alternativ unsere Reparametrisierung die Richtung um, d.h. gilt  $t(c) = b$  und  $t(d) = a$ , so ändert unter unserer Reparametrisierung das Integral sein Vorzeichen. Die Proposition ist im übrigen eine Variante des Satzes über die Unabhängigkeit von Wegintegralen im Reellen IV.3.3.11 wird auch im Wesentlichen genauso bewiesen.

*Beweis.* Wir beachten  $(\gamma \circ t)'(\tau) = \gamma'(t(\tau))t'(\tau)$  nach der Kettenregel, können unsere Behauptung demnach ausschreiben zur Behauptung

$$\int_d^c f(\gamma(t(\tau)))\gamma'(t(\tau))t'(\tau) d\tau = \int_{t(d)}^{t(c)} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

und diese Gleichung folgt aus der Substitutionsregel II.4.6.1, angewandt auf Real- und Imaginärteil, oder eleganter aus der Substitutionsregel III.1.3.8 für vektorwertige Funktionen.  $\square$

**Proposition 1.3.13 (Existenz von Stammfunktionen).** *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene besitzt eine Stammfunktion genau dann, wenn ihr Wegintegral über jeden geschlossenen Integrationsweg in unserer offenen Teilmenge verschwindet.*

*Beweis.* Besitzt unsere Funktion eine Stammfunktion, so verschwinden alle Wegintegrale über geschlossene Integrationswege nach 1.3.7. Um die Gegenrichtung zu zeigen dürfen wir nach IV.3.4.2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  wegzusammenhängend annehmen. Dann wählen wir  $p \in U$  fest und betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} F : U &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto \int_{\gamma_w} f(z) dz \end{aligned}$$

für  $\gamma_w$  einen beliebigen Integrationsweg von  $p$  nach  $w$ , den es nach IV.3.4.5 geben muß und von dessen Wahl unser Wegintegral nach Annahme ja nicht abhängt. Für kleines  $h \in \mathbb{C}$  können wir dann  $F(w+h)$  berechnen, indem wir an den Weg  $\gamma_w$  noch das Geradensegment  $[w, w+h]$  anhängen. Für kleines  $h \in \mathbb{C}$  gilt damit

$$F(w+h) - F(w) = \int_0^1 f(w + \tau h) h d\tau$$

und teilen wir durch  $h$ , so erhalten wir  $\int_0^1 f(w + \tau h) d\tau$ , und das strebt für  $h \rightarrow 0$  offensichtlich gegen  $f(w)$ . Folglich ist  $F$  eine Stammfunktion unserer stetigen Funktion  $f$ .  $\square$

1.3.14. Unter einem **Rechteck** oder genauer einem **achsenparallelen Rechteck** verstehen wir eine Teilmenge  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , die das Produkt von zwei halb-offenen kompakten reellen Intervallen ist. Unter dem **Randweg**  $\partial \vec{Q}$  eines Rechtecks  $Q$  verstehen wir den geschlossenen Weg, der von der unteren linken Ecke ausgehend einmal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand unseres

Rechtecks umläuft, sagen wir mit konstanter Geschwindigkeit Eins auf jeder Kante. Hier vom Gegenuhreigersinn zu sprechen ist etwas gefährlich, aber ich hoffe, daß dem Leser dennoch klar ist, welchen Weg ich genau meine. Der Pfeil über dem  $Q$  soll daran erinnern, daß es uns bei diesem Randweg auf die Richtung ankommt. Unter dem **Randintegral** einer stetigen komplexwertigen Funktion für ein Rechteck verstehen wir ihr Wegintegral über diesen Randweg.

*Ergänzung* 1.3.15. Diese Notation ist verträglich mit unserer Notation aus IV.7.3 in dem Sinne, daß beide Notationen Spezialisierungen aus dem noch allgemeineren Rahmen der Integration von Differentialformen über orientierte Mannigfaltigkeiten mit Ecken sind. Versehen wir genauer  $\mathbb{C}$  mit der durch unsere übliche Identifikation  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  gegebenen Orientierung, so meint  $\vec{Q}$  das Rechteck mit seiner induzierten Orientierung und unter  $\partial\vec{Q}$  ist der Rand von  $Q$  mit seiner induzierten Orientierung in Verallgemeinerung von IV.7.7.22 zu verstehen. Das wäre dann zwar recht eigentlich kein Weg, sondern vielmehr eine orientierte 1-Mannigfaltigkeit mit Ecken, aber das Integral der komplexwertigen 1-Form  $f(z) dz$  im Sinne von 1.5 über diese 1-Mannigfaltigkeit fällt zusammen mit dem hier definierten Wegintegral.

**Lemma 1.3.16 (Stammfunktionen auf offenen Kreisscheiben).** *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene besitzt auf besagter Kreisscheibe eine Stammfunktion genau dann, wenn für jedes in unserer Kreisscheibe enthaltene achsenparallele Rechteck das Randintegral verschwindet.*

1.3.17. Diese Variante des Satzes über die Stammfunktion werden wir beim Beweis des Integralsatzes von Cauchy 1.4.3 und beim Beweis des Satzes von Morera 1.6.9 brauchen. Unter einem achsenparallelen Rechteck verstehen wir hier und im Folgenden ein Rechteck, dessen Kanten parallel sind zu den Koordinatenachsen oder in unserem Falle zur reellen bzw. imaginären Achse.

*Beweis.* Man variiert das Argument des vorhergehenden Beweises für 1.3.13 dahingehend, daß man als Wege  $\gamma_w$  nur die beiden Wege nimmt, die längs der Kanten eines achsenparallelen Rechtecks mit Ecken  $p$  und  $w$  von  $p$  nach  $w$  laufen. Damit erkennt man zwar für die Stammfunktion in  $\text{spe } F$  zunächst nur  $\frac{\partial F}{\partial x} = f$  und  $\frac{\partial F}{\partial y} = if$ , aber nach der Charakterisierung der komplexen Ableitung durch die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 1.2.13 oder noch schneller ihrer Version 1.2.15 folgt daraus bereits  $F' = f$ .  $\square$

**Übung 1.3.18 (Das komplexe Wegintegral respektiert Verwandtschaft).** Man zeige: Sind  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg,  $\phi : U \rightarrow V$



Die beiden Integrationswege, die wir im Beweis von Lemma [1.3.16](#) betrachten, um die Existenz einer Stammfunktion zu zeigen.

holomorph und  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so gilt

$$\int_{\gamma} f(\phi(w))\phi'(w) dw = \int_{\phi \circ \gamma} f(z) dz$$

Diese Identität kann im übrigen auch verstanden werden als eine Variante für komplexwertige Kovektorfelder unserer Erkenntnis IV.3.3.9, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Für eine ausführlichere Diskussion vergleiche 1.5.8.

## 1.4 Integralsatz von Cauchy

1.4.1. Wir erinnern an Homotopie von Wegen und zusammenziehbare Wege, wie sie in IV.3.5.2 und IV.3.5.7 eingeführt wurden.

*Ergänzung* 1.4.2. In ?? werden wir “einfach zusammenhängende” topologische Räume erklären und zeigen, daß offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene genau dann einfach zusammenhängend sind, wenn sie im Sinne von IV.3.5.7 wegweise einfach zusammenhängend sind. Für grundlegende Überlegungen der Funktionentheorie wird diese Äquivalenz jedoch nicht benötigt und wir werden durchgehend mit wegweise einfach zusammenhängenden Räumen arbeiten.

**Satz 1.4.3 (Integralsatz von Cauchy).** *Das Wegintegral einer holomorphen Funktion längs eines in ihrem Definitionsbereich zusammenziehbaren geschlossenen Integrationsweges ist stets Null.*

1.4.4. Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein in  $U$  zusammenziehbarer geschlossener Integrationsweg, so behauptet der Integralsatz von Cauchy in Formeln

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Wir werden diesen Satz in 1.4.13 aus dem noch allgemeineren Satz 1.4.12 folgern, bei dem sogar beliebige nicht notwendig stückweise stetig differenzierbare Wege zugelassen werden. Wir führen den Beweis in einer Art Kaminklettern: Zunächst zeigen wir in 1.4.5 das Verschwinden des Randintegrals einer holomorphen Funktion für jedes ganz in ihrem Definitionsbereich liegende Rechteck; daraus folgern wir mit 1.3.16, daß jede holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe eine Stammfunktion besitzt; mithilfe dieser Erkenntnis erklären wir in 1.4.10 für holomorphe Funktionen das Wegintegral längs beliebiger stetiger nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer

Wege; und dann zeigen wir sogar in dieser Allgemeinheit die Homotopieinvarianz 1.4.12 des Wegintegrals. Den Integralsatz erhalten wir in 1.4.13 schließlich als eine einfache Konsequenz der Homotopieinvarianz. Der Cauchy'sche Integralsatz ist im übrigen auch selbst der Beginn einer Kaminkletterei, die uns schließlich zum Residuensatz 2.2.9 führen wird, der ihn und viele weitere auf dem Weg dorthin bewiesene Sätze als Spezialfälle enthält.

**Lemma 1.4.5 (Integralsatz für Rechteckewege).** *Gegeben eine holomorphe Funktion und eine achsenparallele Rechtecksfläche in ihrem Definitionsbereich verschwindet das Randintegral, d.h. das Integral unserer Funktion über den Rand unseres Rechtecks.*

1.4.6. Dies Lemma kann für holomorphe Funktionen mit stetiger Ableitung mithilfe von 1.5 ohne Mühe aus dem Verschwinden des Wegintegrals geschlossener stetig differenzierbarer Kovektorfelder über zusammenziehbare Integrationswege IV.3.6.10 gefolgert werden. Wir wollen es jedoch unter anderem benutzen, um zu zeigen, daß die Ableitung einer holomorphen Funktion stets stetig sein muß. Deshalb geben wir hier auch noch einen eigenständigen Beweis.

*Beweis.* Bezeichne  $Q_0$  unser Rechteck und  $I_0$  sein Randintegral. Unterteilen wir unser Rechteck  $Q_0$  in vier gleichgroße Teilrechtecke, so wird  $I_0$  die Summe der entsprechenden Randintegrale für diese vier Teilrechtecke und es gibt unter diesen notwendig ein Teilrechteck  $Q_1$  derart, daß für das zugehörige Randintegral  $I_1$  gilt

$$|I_0| \leq 4|I_1|$$

Indem wir so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge  $Q_n$  von Rechtecken mit Umfang  $2^{-n}a$  für konstantes  $a$  derart, daß für die zugehörigen Randintegrale  $I_n$  gilt

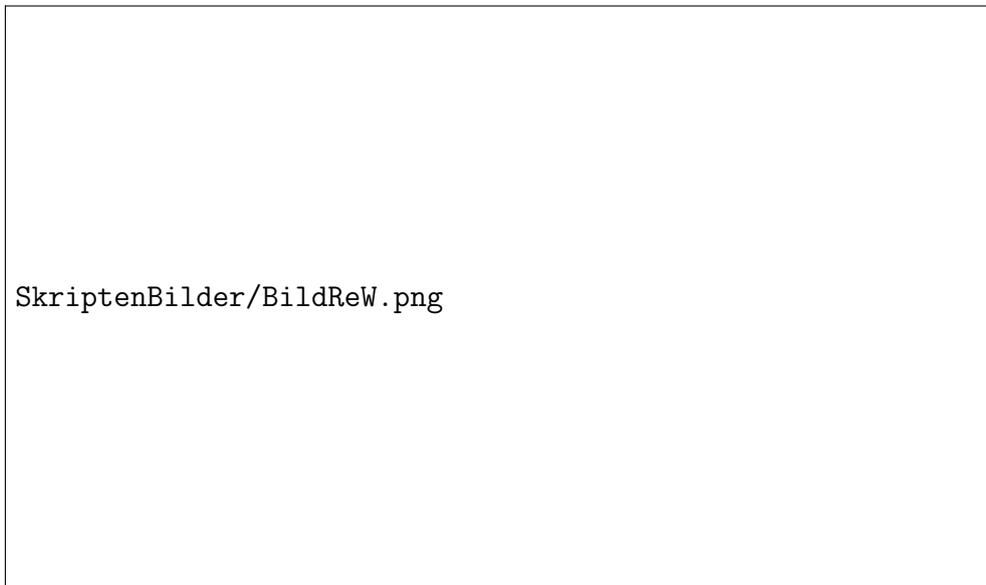
$$|I_0| \leq 2^{2n}|I_n|$$

Nun ist aber mit doppelter Anwendung des Intervallschachtelungsprinzips II.2.2.14 oder auch nach II.6.7.15 der Schnitt aller dieser Rechtecke  $Q_n$  nicht leer und besteht genauer sogar aus einem einzigen Punkt  $p$ . Bezeichnet  $f$  unsere holomorphe Funktion, so können wir nach 1.1.4 schreiben

$$f(z) = f(p) + (z - p)f'(p) + (z - p)\varepsilon(z - p)$$

für eine stetige Funktion  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon(0) = 0$ . Da der lineare Anteil eine Stammfunktion besitzt, trägt er nach 1.3.7 zum Randintegral  $I_n$  nichts bei und wir finden

$$I_n = \int_{\gamma} (z - p)\varepsilon(z - p) dz$$



Das Randintegral des grossen Rechtecks ist die Summe der Randintegrale  
der vier kleinen Rechtecke.

für  $\gamma$  den Randweg um  $Q_n$ . Bezeichnet  $d$  die Länge der Diagonale von  $Q_0$ , so gilt  $|z - p| \leq 2^{-n}d$  für alle  $z \in Q_n$  und wir können unser Integral mit 1.3.5 abschätzen durch

$$|I_n| \leq (2^{-n}a)(2^{-n}d) \sup_{z \in Q_n} \varepsilon(z - p)$$

Daraus folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n}|I_n| = 0$  und damit dann auch  $I_0 = 0$ . Das zeigt den Integralsatz im Fall, daß unser Weg der Randweg eines im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen Rechtecks ist.  $\square$

*Ergänzende Übung 1.4.7.* Man zeige, daß  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(z-x)^2} dx$  nicht von  $z \in \mathbb{C}$  abhängt. Vermittels quadratischer Ergänzung liefert das einen weiteren Zugang zur Berechnung der Fouriertransformierten der Gauß'schen Glockenkurve, aber man kann auch den umgekehrten Weg gehen.

**Lemma 1.4.8.** *Eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe besitzt dort stets eine Stammfunktion.*

1.4.9. In 1.4.14 werden wir aus dem Integralsatz von Cauchy allgemeiner ableiten, daß jede holomorphe Funktion mit wegweise einfach zusammenhängendem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt.

*Beweis.* Das eben gezeigte Verschwinden des Randintegrals für alle Rechtecke 1.4.5 ist genau die hinreichende Bedingung aus Lemma 1.3.16 für die Existenz einer Stammfunktion auf offenen Kreisscheiben.  $\square$

**Definition 1.4.10 (Wegintegrale längs beliebiger Wege).** Für eine holomorphe Funktion  $f$  und einen beliebigen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  in ihrem Definitionsbereich können und wollen wir das Wegintegral erklären, indem wir eine Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  so wählen, daß jedes Wegstück ganz in einer offenen Kreisscheibe aus dem Definitionsbereich verläuft, auf diesen Kreisscheiben jeweils eine Stammfunktion  $F_\nu$  von  $f$  wählen und schließlich setzen

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{\nu=1}^n F_\nu(\gamma(a_\nu)) - F_\nu(\gamma(a_{\nu-1}))$$

Durch Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung wird klar, daß dies Integral weder von der gewählten Unterteilung noch von den jeweils gewählten Stammfunktionen abhängt. Wegen 1.3.7 ist diese Definition im Fall von Integrationswegen verträglich mit unserem Wegintegral für Integrationswege nach 1.3.2. Man beachte jedoch, daß in dieser Allgemeinheit, längs beliebiger, nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer Wege, das Wegintegral nur noch für sehr spezielle Funktionen, wie etwa holomorphe Funktionen, sinnvoll erklärt werden kann.

*Übung 1.4.11.* Das in 1.4.10 erklärte Wegintegral bleibt in Verallgemeinerung von 1.3.11 gleich bei beliebiger stetiger Umparametrisierung unseres Weges. Es ändert in Verallgemeinerung von 1.3.12 sein Vorzeichen bei einer Änderung der Durchlaufrichtung des Weges, wir dürfen wie in 1.3.10 stückweise integrieren, und das Integral über einen geschlossenen Weg von einer Funktion mit Stammfunktion verschwindet.

**Satz 1.4.12 (Homotopieinvarianz des Wegintegrals).** *Die Wegintegrale einer holomorphen Funktion über je zwei in ihrem Definitionsbereich homotope Wege stimmen überein.*

1.4.13. Der Cauchy'sche Integralsatz 1.4.3 folgt sofort, da ein zusammenziehbarer Weg ja per definitionem homotop ist zu einem konstanten Weg, und da Wegintegrale über konstante Wege offensichtlich verschwinden.

*Erster Beweis.* Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  unsere holomorphe Funktion und  $h : [0, 1]^2 \rightarrow U$  eine Homotopie zwischen unseren Wegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Mit denselben Argumenten wie beim Beweis des Integralsatzes 1.4.3 sehen wir, daß wir unser Quadrat so in kleine "Schachfelder" unterteilen können, daß jedes dieser Felder unter  $h$  ganz in einer in  $U$  enthaltenen offenen Kreisscheibe landet. Bezeichnet  $\rho_{i,j}$  die Randwege dieser Felder, so verschwindet das Wegintegral über jeden der Wege  $h \circ \rho_{i,j}$ , da unsere Funktion auf Kreisscheiben ja nach 1.4.8 jeweils eine Stammfunktion hat. Die Summe der Wegintegrale über die  $h \circ \rho_{i,j}$  ist aber offensichtlich gerade die Differenz der Wegintegrale über unsere beiden ursprünglichen homotopen Wege.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Alternativ könnten wir auch wie beim Beweis von IV.3.6.10 vorgehen. Das hat den Vorteil, daß wir keine Integrale über allgemeine stetige Wege zu diskutieren brauchen, aber dafür braucht die Argumentation einen zusätzlichen Schritt: Wir gehen erst von unseren ursprünglichen Wegen zu approximierenden Polygonzügen über und betrachten dann statt den möglicherweise nicht mehr differenzierbaren "ganz kleinen" Wegen  $h \circ \rho_{i,j}$  die "ganz kleinen" Wege, die zwischen den Bildern unter  $h$  der Ecken unserer kleinen Schachfelder gerade verlaufen.  $\square$

**Proposition 1.4.14 (Stammfunktionen holomorpher Funktionen).** *Jede holomorphe Funktion mit wegweise einfach zusammenhängendem Definitionsbereich besitzt eine auf dem ganzen Definitionsbereich definierte Stammfunktion.*

*Beweis.* Nach 1.3.13 müssen wir nur zeigen, daß das Wegintegral unserer Funktion über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Nach Annahme ist

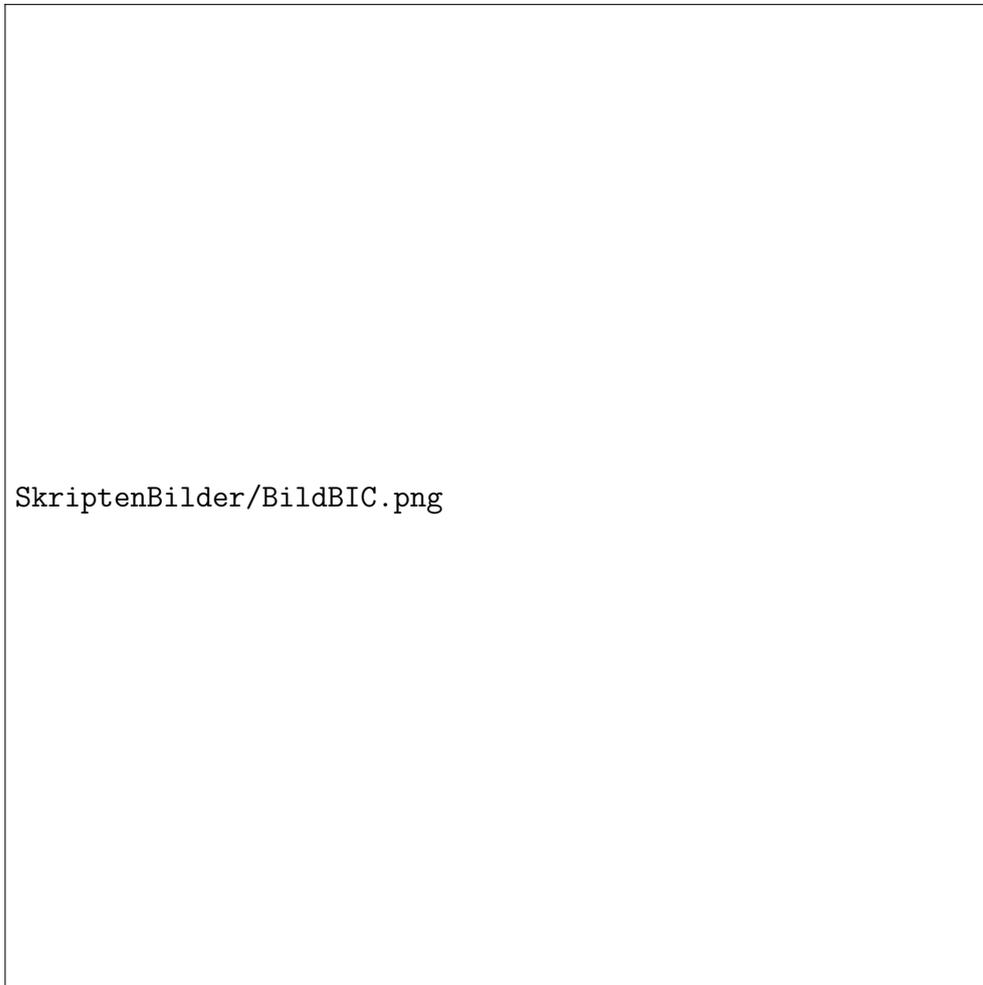


Illustration zum Beweis des Integralsatzes von Cauchy. Eine Homotopie liefert wie angedeutet eine Darstellung der Differenz der Wegintegrale zweier homotoper Wege als eine Summe über die Wegintegrale von “ganz kleinen” geschlossenen Wegen, wo “ganz klein” bedeutet, daß sie jeweils ganz in einer im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen offenen Kreisscheibe verlaufen. Auf jeder Kreisscheibe hat eine holomorphe Funktion aber, das haben wir bereits aus dem Integralsatz für Rechteckswege gefolgert, eine Stammfunktion, folglich sind die Wegintegrale aller unserer ganz kleinen Wege Null.

aber jeder geschlossene Weg aus dem Definitionsbereich bereits im Definitionsbereich zusammenziehbar und damit verschwindet das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 1.4.3.  $\square$

**Definition 1.4.15.** Zwei normierte geschlossene Wege  $\alpha, \beta$  in einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißen **frei homotop** genau dann, wenn es eine durch  $\tau \in [0, 1]$  parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege  $\gamma_\tau$  gibt mit  $\gamma_0 = \alpha$ ,  $\gamma_1 = \beta$  und so, daß  $(t, \tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$  stetig ist auf  $[0, 1]^2$ . Zwei geschlossene Wege heißen frei homotop genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege frei homotop sind.

**Satz 1.4.16 (Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie).** Die Wegintegrale über je zwei im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion frei homotope geschlossene Wege stimmen überein.

*Beweis.* Das folgt leicht aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals für holomorphe Funktionen 1.4.12. Die Details seien dem Leser zur Übung überlassen.  $\square$

*Ergänzung 1.4.17 (Verallgemeinerung des Integralsatzes).* Wir gehen aus von der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$ , entfernen daraus zwei Punkte  $a, b$  und betrachten den Integrationsweg  $\gamma$  gegeben durch das nebenstehende Bild. Es ist nicht klar, ob dieser Weg in  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  zusammenziehbar ist, und in ?? zeigen wir, daß er es in der Tat nicht ist. Klar ist jedoch, daß dennoch das Integral jeder auf  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  holomorphen Funktion längs dieses Weges verschwinden muß: Zerlegen wir nämlich unseren Weg in Stücke, indem wir ihn an den drei Selbstschnittstellen aufschneiden, und setzen diese Stücke so wieder zu zwei geschlossenen Wegen zusammen, daß der eine das Gebiet berandet, das von oben an das Mittelkreuz grenzt, und der andere das Gebiet, das von unten an das Mittelkreuz grenzt, so erhalten wir zwei in  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  zusammenziehbare Wege, über die das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 1.4.3 jeweils verschwinden muß. Diesen Trick verwandeln wir im Rahmen der Homologietheorie in eine Methode, vergleiche ??.

*Übung 1.4.18.* Sei  $\gamma$  ein stetiger geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$  und  $U \subseteq \mathbb{C}$  das Komplement seines Bildes. Man zeige, daß die Funktion  $u_\gamma : U \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$u_\gamma(w) = \int_\gamma \frac{dz}{z - w}$$

lokal konstant ist, als da heißt holomorph mit Ableitung Null. In 2.2 werden wir sehen, daß  $f$  nur Werte in  $2\pi i\mathbb{Z}$  annimmt, und werden diese Werte als das  $2\pi$ -fache der “Umlaufzahl von  $\gamma$  um den Punkt  $w$ ” verstehen lernen.



Illustration zu 1.4.17: Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer aber Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene, der dennoch die Eigenschaft hat, daß jedes Integral einer holomorphen Funktion auf unserem Komplement darüber verschwindet.

*Ergänzende Übung 1.4.19 (Umkehrfunktion ohne reelle Analysis).* Hier wird ausgeführt, wie man auch ohne den Umkehrsatz aus der reellen Analysis IV.4.1.2 zeigen kann, daß gegeben eine holomorphe Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $p \in U$  mit  $f'(p) \neq 0$  offene Umgebungen  $V \subseteq U$  von  $p$  und  $W \subseteq \mathbb{C}$  von  $f(p)$  existieren derart, daß  $f$  eine Bijektion  $f : V \xrightarrow{\sim} W$  mit stetiger Umkehrabbildung induziert. Dazu zeige man der Reihe nach:

1. Es gibt eine offene Umgebung  $A \subseteq U$  von  $p$ , auf der  $f$  injektiv ist und auf der  $f'$  keine Nullstelle hat;
2. Für jeden Punkt  $q \in A$  ist für einen hinreichend kleinen Kreisweg  $\gamma_{\varepsilon,q} : [0, 2\pi] \rightarrow V$ ,  $t \mapsto q + \varepsilon \exp(it)$  um  $q$  der Weg  $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$  in  $\mathbb{C} \setminus f(q)$  frei homotop zu einem Kreisweg um  $f(q)$ ;
3. Ist für  $\varepsilon = \varepsilon_q$  wie im vorhergehenden Punkt  $B$  eine Kreisscheibe um  $f(q)$ , die den Weg  $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$  nicht trifft, so gilt  $B \subset f(A)$ ;

Hinweis: Für den Nachweis der letzten Aussage verwende man für  $b \in B$  und  $\gamma = \gamma_{\varepsilon,q}$  die Formel

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z - b} = \int_{\gamma} \frac{f'(w) dw}{f(w) - b}$$

aus 1.3.18 und beachte, daß die linke Seite nach Teil 2 nicht verschwindet.

*Beispiel 1.4.20.* Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

in dem Sinne, daß sowohl  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r$  als auch  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0$  existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Um das zu sehen, betrachten wir Wege einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks mit Ecken  $a, b, a + ih, b + ih$  für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $h > 0$  und hoppeln im Fall  $a < 0 < b$  auf einem kleinen Halbkreis  $\gamma_\varepsilon$  über die Polstelle beim Ursprung. Der Integrand ist nun die Einschränkung des Imaginärteils von  $e^{iz}/z$  auf die reelle Achse, und das Wegintegral von  $e^{iz}/z$  längs eines derartigen Weges ist Null nach dem Integralsatz. Die Integrale über die drei Kanten  $\rho, \lambda, \omega$  für "rechts, links und oben" außerhalb der reellen Achse können wir jedoch abschätzen durch

$$\left| \int_{\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \sup_{z \in \rho} |1/z| \int_0^h e^{-t} dt \leq \sup_{z \in \rho} |1/z|$$

und analog auf der linken Kante, auf der oberen Kante dahingegen durch

$$\left| \int_{\omega} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq (b - a) e^{-h} \sup_{z \in \omega} |1/z|$$



Illustration zu Übung 1.4.19. Wenn der Punkt  $b$  nicht in  $f(A)$  läge, müßte ein Wegintegral verschwinden, das nun einmal nach unserer Transformationsformel für Wegintegrale 1.3.18 definitiv nicht verschwindet.



Der Integrationsweg bei der Berechnung von  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Halten wir  $a > 0$  fest und nehmen  $b = h$  und lassen  $h$  nach Unendlich streben, so ergibt sich die Existenz des Grenzwerts  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r$  für  $a > 0$ . Die Existenz des anderen Grenzwerts zeigt man analog. Indem wir  $-a = b = h$  nehmen und das nach Unendlich streben lassen, ergibt sich

$$0 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Indem wir  $e^{iz}/z = \frac{1}{z} + h(z)$  schreiben mit  $h$  holomorph, erkennen wir, daß das Integral über den kleinen Halbkreis für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $-\pi i$  strebt. Jetzt brauchen wir nun noch den Imaginärteil unserer Gleichung zu nehmen. Nebenbei bemerkt ist  $\frac{\sin x}{x}$  Lebesgue'schen Sinne gar nicht auf  $\mathbb{R}$  integrierbar.

## 1.5 Beziehung zu Wegintegralen im Reellen\*

1.5.1. Dieser Abschnitt ist für das Folgende entbehrlich. Er dient dem Zweck, die Notation für komplexe Wegintegrale verständlich zu machen und den Zusammenhang des Satzes von Cauchy mit den Sätzen über Wegintegrale in wirbelfreien Vektorfeldern IV.3.6.1 zu erklären. Zunächst erinnere ich an IV.3.3.16.

**Definition 1.5.2.** Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $W$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $A \subset X$  eine halboffene Teilmenge. Eine  **$W$ -wertige 1-Form auf  $A$**  ist eine Abbildung

$$\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Sie ordnet also jedem Punkt  $p \in A$  eine lineare Abbildung des Richtungsraums in den Raum  $W$  zu. Um hier noch Richtungsvektoren  $v \in \vec{X}$  einsetzen zu können, notieren wir auch vektorwertige 1-Formen  $p \mapsto \omega_p$ , so daß dann  $\omega_p(v)$  ein Vektor aus  $W$  wird. In offensichtlicher Weise erklären wir das Produkt einer  $W$ -wertigen 1-Form mit einer reellwertigen Funktion. Ist  $W$  ein komplexer Vektorraum, so definieren wir analog das Produkt einer  $W$ -wertigen 1-Form  $\omega$  mit einer komplexwertigen Funktion  $f$ , indem wir eben setzen  $(f\omega)_p(v) = f(p)\omega_p(v)$ , zu verstehen als das Produkt der komplexen Zahl  $f(p)$  mit dem Vektor  $\omega_p(v)$  aus dem komplexen Vektorraum  $W$ .

*Beispiele 1.5.3.* Ist  $Y$  ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und  $f : A \rightarrow Y$  differenzierbar, so ist  $df$  oder genauer  $p \mapsto d_p f$  eine  $\vec{Y}$ -wertige 1-Form auf  $A$ . Zum Beispiel bezeichnet üblicherweise  $z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Identität und  $dz$  ihr Differential, eine komplexwertige 1-Form auf  $\mathbb{C}$ . Mit  $f(z)dz$  bezeichnet man dann das Produkt dieser 1-Form mit der komplexwertigen Funktion  $z \mapsto f(z)$ . Eine  $\mathbb{R}^n$ -wertige 1-Form hinwiederum ist im wesentlichen schlicht ein  $n$ -Tupel von  $\mathbb{R}$ -wertigen 1-Formen.

1.5.4. Gegeben  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge  $A$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  und sei  $\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$  eine stetige 1-Form auf  $A$  mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $W$ . So definieren wir in Verallgemeinerung des Falls reellwertiger 1-Formen aus IV.3.3 einen Vektor  $(\int_{\varphi} \omega) \in W$ , das **Integral der  $W$ -wertigen 1-Form  $\omega$  längs des Weges  $\varphi$** , durch die Vorschrift

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) dt$$

Auf der rechten Seite ist also für jeden Zeitpunkt  $t$  der Homomorphismus  $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \rightarrow W$  auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor  $\varphi'(t) \in \vec{X}$ , und die so entstehende stetige Abbildung  $[a, b] \rightarrow W$  ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von III.1.3.3. Zur Anschauung verweise ich auf die Darstellung als Grenzwert von Riemannsummen im Fall reellwertiger 1-Formen in IV.3.3.4, die sich wortwörtlich übertragen läßt. Im Spezialfall  $X = W = \mathbb{C}$  stimmt das auf diese Weise definierte Wegintegral  $\int_{\varphi} f(z) dz$  überein mit dem Wegintegral gemäß der in 1.3.2 gegebenen expliziten Definition und erklärt so insbesondere die für dieses Konzept übliche Notation.

1.5.5. Speziell interessieren wir uns nun für komplexwertige 1-Formen auf halboffenen Teilmengen  $A \subset \mathbb{C}$ . Man beachte hier, daß für einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  sowohl  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V)$  als auch  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$  in natürlicher Weise  $\mathbb{C}$ -Vektorräume sind. Auf dem Raum  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  betrachten wir im Folgenden stets diejenige Struktur als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, die "vom zweiten  $\mathbb{C}$  herkommt". Einerseits bilden nun Real- bzw. Imaginärteil, aufgefaßt als Abbildungen  $x, y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , und jede komplexwertige 1-Form  $\omega$  auf  $A$  kann folglich geschrieben werden als

$$\omega = a dx + b dy$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen  $a, b : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Andererseits bilden auch die Identität und die komplexe Konjugation  $z, \bar{z} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , und wir können folglich jede komplexwertige 1-Form  $\omega$  auch schreiben als

$$\omega = \alpha dz + \beta d\bar{z}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen  $\alpha, \beta : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Natürlich haben wir

$$\begin{aligned} x + iy &= z & dx + i dy &= dz \\ x - iy &= \bar{z} & dx - i dy &= d\bar{z} \end{aligned}$$

Eine hinreichende Bedingung für die Homotopieinvarianz von Wegintegralen zum komplexwertigen Kovektorfeld  $f(z) dz = f(z) dx + if(z) dy$  ist dann

nach IV.3.6.10, daß unser Kovektorfeld geschlossen ist, in Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$$

In Real- und Imaginärteil auseinandergezogen sind das genau die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Wir können also unter der zusätzlichen Annahme der Stetigkeit der komplexen Ableitung den Cauchy'schen Integralsatz auch aus der vektorwertigen Version von IV.3.6.10 ableiten, die wiederum aus ihrer reellwertigen Version unschwer gefolgert werden kann.

1.5.6. Ist  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar, so haben wir weiter

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

für die partiellen Ableitungen, die man erhält über die übliche Identifikation  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  gegeben durch  $(x, y) \mapsto (x + iy)$ . Für eine halboffene Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}$  und eine reell total differenzierbare Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  definiert man nun zwei komplexwertige Funktionen auf  $A$ , ihre **Wirtinger-Ableitungen**  $\frac{\partial f}{\partial z}$  und  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ , durch die Vorschrift

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Die Beziehung dieser Wirtinger-Ableitungen zu den partiellen Ableitungen von oben wird nach dem Vorhergehenden beschrieben durch die Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist also eine stetig partiell differenzierbare Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph genau dann, wenn gilt  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , und in diesem Fall ist  $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$  ihre komplexe Ableitung.

1.5.7. Analog können wir auch vektorwertige Differentialformen höheren Grades betrachten, und für ein stetig differenzierbares vektorwertiges Kovektorfeld  $\omega$  auf einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist die Homotopieinvarianz des Wegintegrals auch wieder gleichbedeutend zu  $d\omega = 0$ . In unserem Spezialfall eines komplexwertigen Kovektorfelds der Gestalt  $\omega = f(z) dz$  auf einer offenen Teilmenge  $U$  der komplexen Zahlenebene haben wir nun mit einem komplexlinear zu verstehenden Dachprodukt sicher

$$d\omega = df \wedge dz = \left( \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

Damit steht unmittelbar da, daß die Homotopieinvarianz des Wegintegrals von  $f(z) dz$  auch gleichbedeutend ist zu  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  alias zu  $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$  und damit dazu, daß das Differential der reell differenzierbaren Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sogar komplexlinear ist.

1.5.8. Ebenso wie für unsere üblichen Kovektorfelder in IV.3.1.17 erklären wir auch das Zurückholen vektorwertiger Kovektorfelder unter differenzierbaren Abbildungen, und wie in IV.3.1.19 gilt wieder

$$d(f \circ \phi) = \phi^*(df)$$

für  $\phi : A \rightarrow B$  differenzierbar und  $f : B \rightarrow W$  eine differenzierbare vektorwertige Funktion. Sind speziell  $A, B$  offen in  $\mathbb{C}$  und ist  $\phi : A \rightarrow B$  holomorph, so folgt

$$\phi^*(dz) = d\phi = \phi' dw$$

Auch die Verträglichkeit des Wegintegrals mit Verwandtschaft IV.3.3.9 gilt in derselben Weise für vektorwertige Kovektorfelder, in Formeln gilt also wieder  $\int_{\gamma} \phi^* \omega = \int_{\phi \circ \gamma} \omega$ . Im Spezialfall einer holomorphen Abbildung  $\phi$  erhalten wir insbesondere die bereits in Übung 1.3.18 zu prüfende Identität

$$\int_{\phi \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(\phi(w)) \phi'(w) dw$$

*Übung 1.5.9 (Rechnen mit Wirtinger-Ableitungen).* Man zeige  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$ . Man zeige weiter für  $w = w(z)$  eine reell differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  in eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , auf der hinwiederum eine reell differenzierbare komplexwertige Funktion  $f$  definiert ist, die Identitäten

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$$

Hinweis: Man gehe aus von den Identitäten  $d(\bar{f}) = \overline{df}$  und  $d(f \circ w) = w^*(df)$ .

## 1.6 Integralformel von Cauchy

**Satz 1.6.1 (Cauchy's Integralformel).** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $K \subset U$  eine ganz in  $U$  enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Bezeichnet  $\partial \vec{K}$  einen Weg, der auf dem Rand unserer Kreisscheibe einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft, so gilt für alle Punkte  $w$  aus dem Inneren unserer Kreisscheibe die Formel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \vec{K}} \frac{f(z)}{z - w} dz$$



Die Grundsituation bei Cauchy's Integralformel

1.6.2. Beim ersten Hinsehen mag es so scheinen, als ob in dieser Formel die komplexe Zahl  $i$  eine ungebührliche Sonderrolle spielte, denn warum sollte eine der beiden Wurzeln aus  $-1$  hier besser sein als die andere? Dieser scheinbare Widerspruch löst sich jedoch auf, wenn wir bedenken, daß es auch von der Wahl einer Wurzel aus  $-1$  abhängt, welchen Weg um eine Kreisscheibe wir als “im Gegenuhrzeigersinn umlaufend” bezeichnen. Das ist ja überhaupt nicht sehr mathematisch und hängt sowohl von der Konvention der Uhr ab als auch von der Konvention, daß wir in der Zahlenebene  $1$  nach rechts und  $i$  nach oben abtragen. Ist ganz präzise  $p$  das Zentrum unserer Kreisscheibe und  $R$  ihr Radius, so meinen wir in Formeln den Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $t \mapsto p + Re^{2\pi it}$ . Die Integralformel von Cauchy wird sich später auch als ein Spezialfall des Residuensatzes 2.2.9 erweisen.

1.6.3. Der Pfeil über dem  $K$  soll wie in IV.7.3.7 die Wahl der Orientierung dieser berandeten Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}$  andeuten. Genauer versehen wir den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}$  mit der Orientierung, für die  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$  eine positiv orientierte Karte ist,  $K$  erbt eine Orientierung als glatt berandete Teilmenge, und  $\partial K$  schließlich wird versehen mit der auf dem Rand induzierten Orientierung.

*Beweis.* Nach der Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie 1.4.16 bleibt die rechte Seite unverändert, wenn wir unseren Weg  $\partial \vec{K}$  ersetzen durch den kreisförmigen Weg  $\gamma_\varepsilon$  um  $w$  mit beliebigem Radius  $\varepsilon$ , sofern nur besagter Weg ganz in unserer Kreisscheibe verläuft. Es reicht also zu zeigen

$$f(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

Nun hat ja  $\gamma_\varepsilon$  die Form  $\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto w + \varepsilon e^{it}$ . Die fraglichen Integrale ergeben sich damit zu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon e^{it}) dt$$

und konvergieren wegen der Stetigkeit von  $f$  offensichtlich gegen  $f(w)$ .  $\square$

**Korollar 1.6.4 (Mittelwerteigenschaft).** *Der Wert einer holomorphen Funktion im Zentrum einer beliebigen abgeschlossenen Kreisscheibe aus ihrem Definitionsbereich ist der Durchschnitt über ihre Funktionswerte auf dem Rand besagter Kreisscheibe.*

*Beweis.* Dieser Satz gibt nur in Worten die Aussage der Integralformel in dem Spezialfall wieder, daß  $w$  das Zentrum der Kreisscheibe ist, wie in den letzten Zeilen des vorhergehenden Beweises bereits ausgeführt wurde.  $\square$

**Korollar 1.6.5 (Goursat).** *Die Ableitung jeder holomorphen Funktion ist auch selbst wieder holomorph.*

*Beweis.* Übung 1.2.20 zeigt, daß die rechte Seite der Cauchy'schen Integralformel 1.6.1 beliebig oft komplex nach  $w$  abgeleitet werden kann. Das liefert für die höheren Ableitungen einer holomorphen Funktion  $f$ , die auf einer offenen Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  definiert ist, sogar die explizite Darstellung

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \square$$

**Satz 1.6.6 (Liouville).** *Jede holomorphe auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte und beschränkte Funktion ist konstant.*

1.6.7. Eine auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte holomorphe Funktion heißt auch eine **ganze Funktion**. Einen alternativen Beweis für den Satz von Liouville geben wir in 2.1.5.

*Beweis.* Lassen wir bei der Darstellung der Ableitung vom Ende des vorhergehenden Beweises zu 1.6.5 den Radius  $R$  nach Unendlich streben, so strebt die Länge des Integrationsweges linear mit dem Radius nach Unendlich, das Supremum der zu integrierenden Funktion aber ist für  $R > |w|$  betragsmäßig beschränkt durch eine beliebige obere Schranke von  $|f|$  multipliziert mit  $(R - |w|)^{-2}$ , fällt also salopp gesprochen quadratisch mit dem Radius, wenn der gegen Unendlich strebt. Also gilt  $f'(w) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C}$ .  $\square$

1.6.8 (**Fundamentalsatz der Algebra**). Ich erinnere den an Fundamentalsatz der Algebra ???: Jede Polynomfunktion ohne Nullstelle  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist konstant. Wir zeigen das nun mit den Mitteln der Funktionentheorie. Da für jedes Polynom  $P$  positiven Grades gilt  $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ , ist für jede Polynomfunktion ohne Nullstelle aber  $1/P$  eine beschränkte holomorphe Funktion. Nach dem Satz von Liouville 1.6.6 ist dann  $1/P$  und folglich auch  $P$  konstant.

**Satz 1.6.9 (Morera).** *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene ist holomorph genau dann, wenn für jedes achsenparallele ganz in unserer Teilmenge enthaltene Rechteck das Randintegral verschwindet.*

*Ergänzung 1.6.10.* Eine in der Literatur oft bewiesene schwächere Variante besagt, daß eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene holomorph genau dann ist, wenn ihr Wegintegral über jeden "Dreiecksrand" verschwindet, sobald die ganze "Dreiecksfläche" im Definitionsbereich unserer Funktion liegt.

*Beweis.* Für holomorphe Funktionen verschwinden diese Integrale nach dem Integralsatz 1.4.3. Für die Umkehrung dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, unsere Teilmenge sei eine offene Kreisscheibe. Verschwinden dann alle die fraglichen Integrale, so besitzt unsere Funktion nach 1.3.16 eine Stammfunktion und ist folglich als Ableitung einer holomorphen Funktion nach dem Satz von Goursat 1.6.5 selbst holomorph.  $\square$

**Korollar 1.6.11.** *Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer oder allgemeiner endlich vieler reeller affiner Geraden, so ist  $f$  bereits holomorph auf ganz  $U$ .*

1.6.12. Man kann in ähnlicher Weise sehr viel stärkere Sätze beweisen. Als Übung mögen sie zeigen, daß eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer endlichen Vereinigung eindimensionaler in  $U$  abgeschlossener  $C^1$ -Untermannigfaltigkeiten der komplexen Zahlenebene im Sinne von IV.4.3.2, bereits auf ganz  $U$  holomorph ist.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere Funktion auf dem Komplement einer einzigen reellen Geraden holomorph ist und daß diese Gerade sogar die reelle Achse ist. Nach 1.6.9 reicht es nun zu zeigen, daß für jedes achsenparallele ganz in unserer Teilmenge enthaltene Rechteck das Randintegral verschwindet. Durch entsprechendes Zerschneiden von Rechtecken ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß eine Kante unseres Rechtecks auf der reellen Achse liegt. Seien also  $a, b, a+hi, b+hi$  mit  $a, b, h \in \mathbb{R}$  und  $a < b$  sowie  $0 \neq h$  die Ecken unseres Rechtecks. Nach elementaren Abschätzungen ist dies Randintegral für jedes stetige  $f$  eine stetige Funktion von  $h$ , die sich durch den Wert Null stetig nach  $h = 0$  fortsetzen läßt. Nach dem Integralsatz von Cauchy ist für  $f$  holomorph auf  $U \setminus \mathbb{R}$  dies Randintegral aber unabhängig von  $h$  für  $h > 0$  und, eventuell mit einem anderen Wert, für  $h < 0$ . Das zeigt, daß es Null sein muß für alle  $h$ .  $\square$

*Übung 1.6.13 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip).* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und stabil unter der komplexen Konjugation. Wir zerlegen  $U$  in einen Teil auf der reellen Achse, einen Teil oberhalb und einen unterhalb in der Form

$$U = U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \sqcup U^-$$

mit  $U^\pm := \{z \in U \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ . Man zeige: Ist  $f : U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, holomorph auf  $U^+$  und reellwertig auf  $U \cap \mathbb{R}$ , so können wir  $f$  zu einer holomorphen Funktion auf  $U$  ausdehnen, indem wir für alle  $z \in U^-$  setzen  $f(z) = f(\bar{z})$ . Hinweis: 1.2.18 und 1.6.11.



SkriptenBilder/BildSPF.png

Illustration zum Beweis von 1.6.11. Die reelle Achse in der komplexen Zahlenebene ist als durchgehende Gerade eingezeichnet. Integrieren wir eine stetige Funktion, die außerhalb der reellen Gerade holomorph ist, über den Rand des große Rechtecks, so kommt dasselbe heraus, wie wenn wir sie über den Rand des kleinen unteren doppelt schraffierten Rechtecks integrieren, denn das Integral über den Rand des einfach schraffierten oberen Rechtecks ist Null.



SkriptenBilder/BildScPr.png

Illustration zum Schwarz'schen Spiegelungsprinzip

*Übung 1.6.14.* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(z, t) \mapsto f(z, t)$  stetig. Ist  $z \mapsto f(z, t)$  für alle  $t \in [a, b]$  holomorph, so ist auch die Abbildung  $F : z \mapsto \int_a^b f(z, t) dt$  holomorph. Hinweis: 1.6.9. Die explizite Formel für die Ableitung dieses Integrals 1.2.20 gilt auch unter diesen a priori schwächeren Annahmen, aufgrund der Formel für die Ableitung aus dem Beweis des Satzes von Goursat 1.6.5.

## 1.7 Potenzreihenentwicklung

1.7.1. Einen Ausdruck der Form  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  mit  $a_{\nu} \in \mathbb{C}$  im Sinne von ?? nennen wir eine **komplexe Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge ihrer Koeffizienten  $a_{\nu}$  anzugeben. Ist nun  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  eine komplexe Potenzreihe und konvergiert die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  für ein  $z \in \mathbb{C}$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} w^{\nu}$  absolut für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| < |z|$ . Der Beweis dieser Tatsache ist identisch zum Beweis der entsprechenden Aussage im Reellen II.5.1.1, den wir dort nur deshalb nicht im Komplexen geführt haben, weil uns die komplexen Zahlen noch nicht zur Verfügung standen. Wir erklären den **Konvergenzradius**  $r \in [0, \infty]$  einer Potenzreihe  $\sum a_{\nu} z^{\nu}$  wie im Reellen in II.5.1.3 durch

$$r = \sup\{|z| \mid \sum a_{\nu} z^{\nu} \text{ konvergiert}\}$$

und erkennen dabei auch gleich den geometrischen Ursprung der Bezeichnung ‘‘Konvergenzradius’’, die im Rahmen der reellen Analysis noch recht unmotiviert wirkt. Genau wie in II.5.1.5 zeigt man, daß die Partialsummen einer komplexen Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$  gleichmäßig konvergieren auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung und Radius  $\rho < r$ . Das folgende Korollar 1.7.5 zeigt dann, daß eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$  auf der ganzen offenen Kreisscheibe  $\{z \mid |z| < r\}$  mit dem Radius  $r$  eine holomorphe Funktion darstellt.

1.7.2. Einen Ausdruck der Form  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z - p)^{\nu}$  mit  $a_{\nu} \in \mathbb{C}$  nennt man auch eine **Potenzreihe mit Entwicklungspunkt**  $p$ . Ihr Konvergenzbereich besteht dann aus allen  $z$  in einer geeigneten offenen Kreisscheibe mit Zentrum  $p$ , möglicherweise noch zusammen mit einigen Punkten auf deren Rand.

**Definition 1.7.3.** Eine Folge komplexwertiger Funktionen auf einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißt **kompakt konvergent** gegen eine Grenzfunktion genau dann, wenn sie auf allen Kompakta unseres Raums gleichmäßig gegen besagte Grenzfunktion konvergiert.

1.7.4. Im Rahmen der Funktionentheorie nennt man eine Reihe von Funktionen **normal konvergent** genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen im Sinne der vorhergehenden Definition 1.7.3 kompakt konvergiert.

**Korollar 1.7.5 (Grenzwerte von Folgen holomorpher Funktionen).** *Konvergiert eine Folge holomorpher Funktionen kompakt, so ist die Grenzfunktion holomorph und die Folge der Ableitungen konvergiert kompakt gegen die Ableitung der Grenzfunktion.*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt sofort aus der Charakterisierung 1.6.9 der Holomorphie durch das Verschwinden von Randintegralen zu Rechtecken. Was die zweite Aussage angeht, so erhalten wir aus der expliziten Formel für die Ableitung als Wegintegral aus dem Beweis von 1.6.5 schon mal, daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt, auf der die Ableitungen unserer Funktionen gleichmäßig gegen die Ableitung der Grenzfunktion streben. Mit II.6.10.3 besitzt dann jedes Kompaktum eine endliche Überdeckung durch Teilmengen, auf denen die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig ist, und damit ist auch die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig auf Kompakta.  $\square$

*Beispiel 1.7.6.* Für eine in einer Umgebung des Ursprungs durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion  $f(w) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu$  gilt stets  $f^{(n)}(0) = n!a_n$ . In der Tat konvergieren komplexe Potenzreihen wie in 1.7.1 erklärt kompakt auf dem Inneren ihres Konvergenzbereichs, nach 1.7.5 dürfen wir sie also auch im Komplexen gliedweise ableiten, und der konstante Term der durch  $n$ -maliges Ableiten entstehenden Potenzreihe ist offensichtlich  $n!a_n$ .

**Korollar 1.7.7 (Entwicklung in eine Potenzreihe).** *Eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene ist holomorph genau dann, wenn sie auf der ganzen offenen Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt im Zentrum besagter Kreisscheibe dargestellt werden kann.*

*Beweis.* Warum Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktionen darstellen, haben wir bereits in 1.7.1 diskutiert. Um umgekehrt zu zeigen, daß jede auf einer offenen Kreisscheibe holomorphe Funktion auch tatsächlich durch eine auf der ganzen offenen Kreisscheibe konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere offene Kreisscheibe, sie heiße etwa  $K$ , ihr Zentrum im Ursprung hat. Nun beachten wir für  $|w| < |z|$  die Entwicklung

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-(w/z)} \right) = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{w}{z} \right)^\nu$$

Die Konvergenz der Partialsummen geschieht hier bei festem  $w$  gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Kreisring  $|z| = \rho$  mit  $\rho > |w|$ , da die linke Reihe für alle  $z$  auf diesem Kreisring majoriert wird durch die konvergente Reihe

$\sum_{\nu=0}^{\infty} (|w|/\rho)^\nu$ . Folglich können wir unsere Summe mit der Integration in der Integralformel von Cauchy vertauschen und erhalten

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{\nu+1}} dz \right) w^\nu$$

für jedes  $w \in K$  und jedes  $\rho$  mit  $|w| < \rho < r$  für  $r$  den Radius unserer offenen Kreisscheibe  $K$ . Bei unserem Wegintegral ist dabei der geschlossene Weg gemeint, der im Gegenuhrzeigersinn auf der Kreislinie  $|z| = \rho$  einmal um den Ursprung läuft. Da unser Integral von  $\rho$  gar nicht abhängt, steht damit auch schon eine Entwicklung in eine Potenzreihe da. Deren Koeffizienten müssen wegen dem nach 1.7.5 erlaubten gliedweisen Ableiten gerade die  $f^{(\nu)}(0)/\nu!$  sein, so daß unsere Funktion auf der ganzen offenen Kreisscheibe dargestellt wird durch ihre **Taylorreihe**

$$f(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} w^\nu \quad \square$$

1.7.8. Hat die Taylorreihe einer holomorphen Funktion an einer Stelle einen gegebenen Konvergenzradius, so kann unsere Funktion nicht holomorph auf eine offene Kreisscheibe mit Zentrum in besagter Stelle und echt größerem Radius fortgesetzt werden: Sonst müßte sich nämlich diese Fortsetzung auf der größeren offenen Kreisscheibe nach unserem Korollar auch durch ihre Taylorreihe, notwendig dieselbe, darstellen lassen, im Widerspruch zu unseren Annahmen an den Konvergenzradius.

*Übung 1.7.9.* Man bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe des Arcustangens zum Entwicklungspunkt Eins.

*Übung 1.7.10.* Man zeige, daß für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  der Hauptzweig des Logarithmus von  $1 + z$  auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Mit etwas Tricksen hatten wir das in 1.2.12 schon einmal gesehen.

*Übung 1.7.11.* Man zeige, daß eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , für die  $|f(z)|/|z^n|$  für  $|z| > 1$  beschränkt bleibt, ein Polynom vom Grad  $\leq n$  sein muß.

*Übung 1.7.12 (Abschätzung der Koeffizienten einer Potenzreihe).* Gegeben eine holomorphe Funktion  $f$ , deren Definitionsbereich eine abgeschlossene Kreisscheibe um  $p$  mit Radius  $R > 0$  umfaßt, können die Koeffizienten ihrer Taylorreihe bei  $p$  abgeschätzt werden durch

$$\left| \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \right| \leq \frac{1}{R^n} \sup\{|f(z)| \mid |z - p| = R\}$$

Salopp gesprochen können also komplexe Potenzreihen, die “nur relativ kleine” Werte annehmen, auch “nur relativ kleine Koeffizienten” haben. Hinweis: Beweis von 1.6.5. Selbst im Fall von komplexen Polynomen kenne ich keinen anderen Beweis für diese Tatsache, deren reelles Analogon im Übrigen ziemlich falsch ist: Man denke nur etwa an die Gauss’sche Glockenkurve!

*Übung 1.7.13.* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Wir wählen eine Norm auf  $V$  und versehen den Raum  $\text{End } V$  aller Endomorphismen von  $V$  mit der Operatornorm. Gegeben eine komplexe Potenzreihe  $\sum a_\nu z^\nu$  mit Konvergenzradius  $r \in [0, \infty]$ , die gegen eine Funktion  $f(z)$  konvergiert, und ein Endomorphismus  $A \in \text{End } V$  mit  $\|A\| < r$  zeige man, daß  $\sum a_\nu A^\nu$  absolut summierbar ist und daß für  $\|A\| < R < r$  gilt

$$\left\| \sum a_\nu A^\nu \right\| \leq \sup\{|f(z)| \text{ mit } |z| = R\} (1 - (\|A\|/R))^{-1}$$

Man notiert die Summe dieser absolut summierbaren Familie  $f(A) \in \text{End } V$ . Unternehmende Leser betrachten allgemeiner den Fall eines Banachraums  $V$ . Hinweis: 1.7.12.

*Ergänzung 1.7.14.* Der Abel’sche Grenzwertsatz II.5.4.2 muß im Komplexen sorgfältiger formuliert werden: Konvergiert eine komplexe Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihrer offenen Konvergenzkreisscheibe, so stellt sie nicht notwendig auf der ganzen offenen Kreisscheibe vereinigt mit diesem Randpunkt eine stetige Funktion dar, sondern nur auf jedem abgeschlossenen Winkelsegment, das “vom fraglichen Randpunkt aus ins Innere der Kreisscheibe geht”. Diese Stetigkeit auf Winkelsegmenten zeigen wir im allgemeineren Kontext der Dirichlet-Reihen in 4.3.2. Welche Schwierigkeiten im allgemeinen auftreten können, zeigt die Poisson-Transformation 3.1.12.

*Übung 1.7.15 (Binomische Reihe im Komplexen).* Man zeige, daß auch für  $z, \alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  die binomische Reihe II.5.1.19 gegen  $(1+z)^\alpha$  konvergiert. Hier verwendet man die offensichtliche Erweiterung der Binomialkoeffizienten ins Komplexe und versteht  $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \log(z+1))$  für  $\log$  den Hauptzweig des Logarithmus, vergleiche III.1.4.3.

*Übung 1.7.16.* Gegeben  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f(U) \subset V$  und  $p \in U$  erhält man die Taylorreihe von  $g \circ f$  bei  $p$  durch das “Einsetzen” der Taylorreihe von  $f$  bei  $p$  in die Taylorreihe von  $g$  bei  $f(p)$ . Sind genauer  $f(p+z) = \sum a_\nu z^\nu$  und  $g(f(p)+w) = \sum b_\mu w^\mu$  und  $g(f(p+z)) = \sum c_\lambda z^\lambda$  die jeweiligen Taylorreihen, so gilt

$$c_\lambda = \sum_{\nu(1)+\dots+\nu(\mu)=\lambda} b_\mu a_{\nu(1)} \dots a_{\nu(\mu)}$$

wo die Summe zu verstehen ist über alle  $\mu \geq 0$  und über alle Abbildungen  $\nu : \{1, \dots, \mu\} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ , bei denen die Summe der Werte gerade  $\lambda$  ist. Im Fall  $\lambda = 0$  geht das nur mit  $\mu = 0$  und wir erhalten speziell  $c_0 = b_0$ . Der Koeffizient  $a_0$  geht nur insofern ein, als eben  $g$  um  $f(p) = a_0$  entwickelt werden muß.

*Übung 1.7.17.* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Wählen wir eine Norm auf  $V$  und versehen den Raum  $\text{End } V$  aller Endomorphismen von  $V$  mit der Operatornorm und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \log : B(\text{id}; 1) &\rightarrow \text{End } V \\ (A + \text{id}) &\mapsto A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} \dots \end{aligned}$$

so gilt  $\exp(\log B) = B$  für alle  $B$  im offenen Ball um die Identität mit Radius Eins. Hinweis: Schneiden wir unsere Potenzreihen geeignet ab, so erhalten wir durch Verknüpfen eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig auf jedem Kompaktum aus  $B(1; 1)$  gegen die Funktion  $z$  konvergiert. Nun verwende man 1.7.13. Ein schlechter verallgemeinerbares aber elementareres Argument findet man in IV.1.4.14.

*Übung 1.7.18.* Die Entwicklung in eine Potenzreihe liefert für jede offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{C}$  des Ursprungs in der komplexen Zahlenebene einen Ringhomomorphismus  $\mathcal{O}^{\text{an}}(U) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$  vom Ring  $\mathcal{O}^{\text{an}}(U)$  der holomorphen Funktionen auf  $U$  in den Ring der formalen Potenzreihen  $\mathbb{C}[[z]]$  aus ???. Ist  $U$  wegzusammenhängend, so erhalten wir auf diese Weise sogar einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}^{\text{an}}(U) \hookrightarrow \mathbb{C}[[z]]$$

## 1.8 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

**Lemma 1.8.1.** *Hat eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $U \subseteq \mathbb{C}$  bei  $p \in U$  eine Nullstelle, verschwindet aber auf keiner Umgebung von  $p$  identisch, so gibt es genau ein  $n \geq 1$ , genannt die **Ordnung der Nullstelle**, und eine holomorphe Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(p) \neq 0$  und  $f(z) = (z - p)^n g(z)$  für alle  $z \in U$ .*

*Beweis.* Das folgt sofort aus der Potenzreihenentwicklung 1.7.7. □

**Satz 1.8.2.** *Jede Nullstelle einer holomorphen Funktion besitzt entweder eine Umgebung, in der sie die einzige Nullstelle ist, oder eine Umgebung, auf der unsere Funktion identisch verschwindet.*

1.8.3. Der Satz wird sich bald auch als Korollar des allgemeinen Satzes 1.8.14 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen erweisen.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege unsere Nullstelle am Ursprung und unsere Funktion sei definiert auf einer offenen Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung. So ist unsere Funktion auf dieser Kreisscheibe entweder identisch Null oder die Potenzreihenentwicklung alias 1.8.1 liefert eine Darstellung der Gestalt  $f(z) = z^n g(z)$  mit  $g$  stetig und  $g(0) \neq 0$ . Dann gibt es aber eine Umgebung des Ursprungs, auf der  $g$  keine Nullstelle hat, und in dieser Umgebung ist der Ursprung die einzige Nullstelle von  $f$ .  $\square$

**Definition 1.8.4.** Eine Nullstelle einer stetigen Funktion, die in einer geeigneten offenen Teilmenge ihres Definitionsbereichs die einzige Nullstelle ist, nennen wir ganz allgemein eine **isolierte Nullstelle** unserer Funktion.

**Korollar 1.8.5.** *Besitzt die Menge der Nullstellen einer holomorphen Funktion mit wegzusammenhängendem Definitionsbereich einen Häufungspunkt in besagtem Definitionsbereich, so ist unsere Funktion die Nullfunktion.*

1.8.6. Insbesondere hat also eine von Null verschiedene holomorphe Funktion mit wegzusammenhängendem Definitionsbereich nur isolierte Nullstellen. Allerdings können sich diese Nullstellen durchaus “am Rand des Definitionsbereichs häufen”.

*Beweis mit dem Wegzusammenhangsbegriff.* Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  unsere holomorphe Funktion. Gegeben eine nichtisolierte Nullstelle wissen wir bereits, daß unsere Funktion auf einer ganzen Umgebung unserer nichtisolierten Nullstelle identisch verschwinden muß. Zu jedem anderen Punkt aus  $U$  gibt es nun nach IV.3.4.5 sogar einen stückweise linearen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , und wir können zusätzlich annehmen, daß unser Weg auf keinem Teilintervall mit mehr als einem Punkt konstant ist. Würde  $f$  an seinem Endpunkt nicht verschwinden,  $f(\gamma(b)) \neq 0$ , so wäre

$$s := \inf\{t \in [a, b] \mid f(\gamma(t)) \neq 0\}$$

ein Punkt aus unserem Intervall  $[a, b]$ . Da  $f$  in einer Umgebung von  $\gamma(a)$  identisch verschwindet, hätten wir  $s > a$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  hätten wir notwendig  $f(\gamma(s)) = 0$ . Da aber  $f$  auf dem Anfangsstück  $\gamma[a, s]$  unseres Weges identisch verschwindet, wäre auch  $\gamma(s)$  keine isolierte Nullstelle von  $f$ . Also müßte  $f$  in einer Umgebung von  $\gamma(s)$  identisch verschwinden, und das stünde im Widerspruch zur Wahl von  $s$ .  $\square$

*Ergänzung 1.8.7.* Ich erinnere daran, daß ein topologischer Raum zusammenhängend heißt genau dann, wenn er nicht leer ist und jede nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge bereits der ganze Raum ist. Ich erinnere weiter daran, daß wir seit IV.3.4.17 für offene Teilmengen der komplexen

Zahlenebene wissen, daß sie genau dann zusammenhängend sind, wenn sie wegzusammenhängend sind. Die Begriffe “offen” und “abgeschlossen” müssen dabei dann allerdings in Bezug auf die Spurtopologie verstanden werden.

*Beweis mit dem topologischen Zusammenhangsbegriff.* Die nicht-isolierten Nullstellen einer stetigen komplexwertigen Funktion bilden eine abgeschlossene Teilmenge ihres Definitionsbereichs, denn jeder Punkt aus dem Abschluß dieser Menge ist Grenzwert einer Folge von Nullstellen und damit selbst eine nicht-isolierte Nullstelle. Nach 1.8.2 bilden im Fall holomorpher Funktionen die nicht-isolierten Nullstellen jedoch auch eine offene Teilmenge. Ist der Definitionsbereich wegzusammenhängend, so sind nach IV.3.4.16 entweder alle seine Punkte nicht-isolierte Nullstellen oder keiner. Besitzt die Menge aller Nullstellen aber einen Häufungspunkt, so sind wir notwendig im ersten Fall und unsere Funktion ist die Nullfunktion.  $\square$

*Übung 1.8.8.* Eine stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse besitzt höchstens eine Fortsetzung auf die abgeschlossene obere Halbebene, die sowohl stetig ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene als auch holomorph auf der offenen oberen Halbebene. Man zeige auch, daß nicht jede stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse in dieser Weise fortgesetzt werden kann. Hinweis: Spiegelungsprinzip 1.6.13.

**Korollar 1.8.9 (Identitätssatz).** *Stimmen zwei auf einer wegzusammenhängenden offenen Menge definierte holomorphe Funktionen überein auf einer Teilmenge mit einem Häufungspunkt in besagter offener Menge, so sind sie gleich.*

*Beweis.* Man wende das vorhergehende Korollar 1.8.5 an auf die Differenz unserer Funktionen.  $\square$

*Beispiel 1.8.10.* Die komplexe Exponentialfunktion ist die einzige holomorphe Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf der reellen Achse mit der reellen Exponentialfunktion übereinstimmt.

*Ergänzende Übung 1.8.11.* Man zeige, daß sich die auf dem offenen Einheitskreis durch die Reihen  $\sum_{k \geq 1} z^k/k^n$  definierten Funktionen holomorph auf das Komplement von  $\mathbb{R}_{\geq 1}$  in der komplexen Zahlenebene fortsetzen lassen. Die zugehörigen Funktionen heißen  **$n$ -Logarithmen** und werden  $L_n(z)$  notiert. Insbesondere den **Dilogarithmus**  $L_2$  trifft man des öfteren.

1.8.12. Unter einer **biholomorphen Identifikation** zweier offener Teilmengen der komplexen Zahlenebene versteht man eine holomorphe Bijektion mit holomorpher Umkehrabbildung. Wie wir in 1.8.14 oder genauer 1.8.18 zeigen werden, ist die Zusatzforderung, die Umkehrabbildung möge auch holomorph sein, hier sogar überflüssig.

1.8.13. Unter einer **holomorphen Einbettung** verstehen wir eine holomorphe Injektion mit offenem Bild. Unter einer **punktierten Menge**  $(X, x)$  verstehen wir eine Menge  $X$  mit einem ausgezeichneten Punkt  $x \in X$ . Unter einer Abbildung von punktierten Mengen  $(X, x) \rightarrow (Y, y)$  verstehen wir eine Abbildung  $X \rightarrow Y$  mit  $x \mapsto y$ .

**Satz 1.8.14 (Lokale Struktur holomorpher Funktionen).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $p \in U$  ein Punkt und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Bezeichne  $E$  die offene Einheitskreisscheibe. So gibt es holomorphe Einbettungen  $(E, 0) \hookrightarrow (U, p)$  und  $(E, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}, f(p))$  und ein  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \sqcup \{\infty\}$  derart, daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} (U, p) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, f(p)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (E, 0) & \xrightarrow{z \mapsto z^n} & (E, 0) \end{array}$$

mit der Interpretation  $z^\infty = 0$  für alle  $z \in E$ . Durch diese Bedingungen ist  $n$  bereits eindeutig festgelegt und es gilt  $n = \inf\{\nu \geq 1 \mid f^{(\nu)}(p) \neq 0\}$ .

*Beweis.* Daß es ein derartiges Diagramm höchstens für ein  $n$  geben kann, folgt durch die Beschreibung von  $n$  als die maximale Vielfachheit, mit der manche Funktionswerte noch in beliebig kleinen Umgebungen von  $p$  angenommen werden. Um die Existenz eines derartigen Diagramms zu beweisen, dürfen wir sicher  $p = f(p) = 0$  annehmen. Ist  $f$  konstant, so ist nichts zu zeigen. Sonst entwickeln wir  $f$  in eine Potenzreihe und erhalten

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu z^\nu = z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} z^\nu = z^n g(z)$$

für eine holomorphe Funktion  $g$  mit  $g(0) \neq 0$ . Es ist leicht explizit zu sehen, daß es auf jeder geschlitzten komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} w$  mit  $w \in \mathbb{C}^\times$  für jedes  $n \geq 1$  mindestens eine holomorphe Funktion  $z \mapsto \sqrt[n]{z}$  gibt mit  $(\sqrt[n]{z})^n = z$ . Indem wir den Definitionsbereich von  $f$  zu einer hinreichend kleinen Kreisscheibe  $B$  um den Ursprung verkleinern, dürfen wir annehmen, daß dieser Definitionsbereich unter  $g$  in einer geschlitzten Zahlenebene landet, so daß wir auf dieser kleinen Kreisscheibe ein holomorphes  $h(z) = \sqrt[n]{g(z)}$  finden mit  $h(z)^n = g(z) \quad \forall z \in B$ . Dann gilt  $f(z) = (zh(z))^n \quad \forall z \in B$ . Nun ist  $z \mapsto zh(z)$  nach Restriktion zu einer gegebenenfalls noch kleineren Kreisscheibe um den Ursprung eine holomorphe Einbettung nach dem anschließenden Lemma 1.8.15, das im übrigen schlicht den Spezialfall  $n = 1$  unseres Satzes umformuliert. Wir haben also das gewünschte Diagramm konstruiert



Dies Bild soll Anschauung für die Abbildung  $z \mapsto z^2$  der Einheitskreisscheibe auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt  $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$  in  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$  für geeignetes monotonen und in einer Umgebung von Null streng monotonen  $\varepsilon$ , gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur gegenüberliegende Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

bis auf das Detail, daß links unten eine eventuell viel kleinere Kreisscheibe steht und rechts unten ganz  $\mathbb{C}$ . Das Beenden des Beweises durch geeignete Renormierung überlassen wir nun dem Leser.  $\square$

**Lemma 1.8.15.** *Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f'(p) \neq 0$  für ein  $p \in U$ , so ist  $f$  auf einer offenen Umgebung von  $p$  eine holomorphe Einbettung.*

*Beweis.* Der Satz IV.4.1.2 über die Umkehrabbildung oder alternativ Übung 1.4.19 sagen uns, daß  $f$  eine offene Umgebung von  $p$  mit einer offenen Umgebung von  $f(p)$  so identifiziert, daß auch die Umkehrung stetig ist. Der Satz 1.2.5 über Umkehrfunktionen holomorpher Funktionen liefert dann den Rest der Behauptung.  $\square$

**Korollar 1.8.16 (Gebietstreue).** *Das Bild einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion ist stets wieder eine offene wegzusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlenebene.*

1.8.17. Eine wegzusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt auch ein **Gebiet**. In dieser Terminologie kann das Korollar dahingehend formuliert werden, daß das Bild eines Gebietes unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion wieder ein Gebiet ist. Daher rührt auch sein Name. Der einzige Grund, aus dem wir den Definitionsbereich wegzusammenhängend annehmen müssen, liegt darin, daß es sonst Funktionen geben könnte, die auf einer Wegzusammenhangskomponente des Definitionsbereichs konstant sind ohne global konstant zu sein.

*Beweis.* Nach dem Identitätssatz ist unsere Funktion nie in der Umgebung eines Punktes konstant. Das Korollar folgt damit sofort aus dem Satz 1.8.14 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen.  $\square$

*Übung 1.8.18.* Für jede injektive holomorphe Funktion ist auch die Umkehrabbildung holomorph.

**Korollar 1.8.19 (Maximumsprinzip).** *Eine nicht konstante holomorphe Funktion auf einer wegzusammenhängenden offenen Menge kann nirgends ein Betragsmaximum annehmen.*

*Beweis.* Sonst wäre der Schnitt ihres Bildes mit der reellen Gerade durch den Ursprung in Richtung jedes Funktionswerts, der als Betragsmaximum angenommen wird, nicht offen. Das stünde jedoch im Widerspruch zur Gebietstreue 1.8.16.  $\square$

**Satz 1.8.20 (Schwarz'sches Lemma).** *Für jede holomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe in sich selber, die den Ursprung festhält, gilt:*

1. Das Bild jedes Punktes liegt mindestens ebenso nah am Ursprung wie besagter Punkt selbst und die Ableitung unserer Abbildung im Ursprung hat höchstens den Betrag Eins.
2. Hat für mindestens einen Punkt sein Bild denselben Abstand zum Ursprung wie der besagte Punkt selbst oder hat die Ableitung im Ursprung den Betrag Eins, so ist unsere Abbildung eine Drehung.

*Beweis.* Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Für eine holomorphe Abbildung  $f : E \rightarrow E$  mit  $f(0) = 0$  behauptet unser Satz also in Formeln

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in E \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

Des weiteren behauptet er für den Fall, daß in einer dieser Ungleichungen Gleichheit gilt, d.h.  $|f(z)| = |z|$  für ein  $z \in E$  oder  $|f'(0)| = 1$ , daß  $f$  eine Drehung ist. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es, wenn  $f$  die offene Einheitskreisscheibe in sich selber abbildet, sicher ein  $\delta \in (0, 1)$  mit  $|z| \geq \delta \Rightarrow |f(z)/z| \leq 1 + \varepsilon$ . Dieser Quotient kann also salopp gesprochen “betragsmäßig um so weniger über die Eins hinauskommen, je näher  $z$  am Rand der Einheitskreisscheibe liegt”. Nun erhält man nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 1.7.7 eine holomorphe Funktion durch die Vorschrift  $z \mapsto f(z)/z$  für  $z \neq 0$  bzw.  $z \mapsto f'(0)$  für  $z = 0$ . Da diese Funktion nach 1.8.19 auf keiner offenen Kreisscheibe ihr Betragsmaximum annehmen kann, wenn sie nicht konstant ist, folgt  $|f(z)/z| \leq 1$  für alle  $z \in E \setminus 0$  sowie  $|f'(0)| \leq 1$ . Steht hier an einer Stelle eine Gleichheit, so ist  $f(z)/z$  konstant und folglich  $f$  eine Drehung.  $\square$

*Übung 1.8.21.* Man konstruiere eine bijektive holomorphe Abbildung von der offenen Einheitskreisscheibe in die Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil, der sogenannten “oberen Halbebene”. Hinweis: Möbius-Geometrie ??, ??. Man zeige, daß die in ?? eingeführte Operation von  $SL(2; \mathbb{R})$  auf der oberen Halbebene die Restklassengruppe  $PSL(2; \mathbb{R}) := SL(2; \mathbb{R})/\{\pm \text{id}\}$  identifiziert mit der Gruppe aller bijektiven holomorphen Abbildung von der oberen Halbebene auf sich selber. Hinweis: Schwarz’sches Lemma 1.8.20.

## 2 Singuläre Stellen holomorpher Funktionen

### 2.1 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

**Definition 2.1.1.** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $p \in U$  ein Punkt und  $f : U \setminus p \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so heißt  $p$  eine **isolierte Singularität** von  $f$ . Läßt sich  $f$  zu einer holomorphen Funktion auf ganz  $U$  fortsetzen, so spricht man von einer **hebbaren Singularität**. Ist die Singularität zwar nicht hebbar, wird aber hebbar nach Multiplikation unserer Funktion  $f$  mit einer geeigneten Potenz  $(z-p)^n$ , so spricht man von einem **Pol** oder ausführlicher von einer **Polstelle** und das kleinstmögliche solche  $n$  heißt die **Polordnung**. Ist die Singularität weder hebbar noch ein Pol, so spricht man von einer **wesentlichen Singularität**.

*Beispiel 2.1.2.* Die Funktion  $z \mapsto \exp(z^{-1})$  hat im Ursprung eine wesentliche Singularität.

**Satz 2.1.3 (Riemann'scher Hebbbarkeitssatz).** *Bleibt eine holomorphe Funktion in einer Umgebung einer isolierten Singularität betragsmäßig beschränkt, so ist die Singularität hebbar.*

*Beweis.* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $p \in U$  ein Punkt und  $f : U \setminus p \rightarrow \mathbb{C}$  unsere holomorphe Funktion. Sicher kann man die Funktion  $z \mapsto (z-p)f(z)$  unter unserer Voraussetzung durch Null stetig auf ganz  $U$  fortsetzen und erhält so nach 1.6.11 eine holomorphe Funktion auf ganz  $U$  mit einer Nullstelle bei  $p$ . Nach 1.8.1 hat sie also die Gestalt  $z \mapsto (z-p)h(z)$  für  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und dies  $h$  ist dann die gesuchte holomorphe Fortsetzung von  $f$ .  $\square$

2.1.4. Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $p \in U$  ein Punkt. Genau dann hat eine holomorphe Funktion  $f : U \setminus p \rightarrow \mathbb{C}$  mit einer isolierten Singularität bei  $p$  einen Pol  $n$ -ter Ordnung bei  $p$ , wenn  $f$  die Gestalt

$$f(z) = (z-p)^{-n}g(z)$$

hat für  $g$  holomorph auf  $U$  mit  $g(p) \neq 0$ . Um die eine Richtung zu zeigen, gilt es nur zu bemerken, daß die Funktion auf der rechten Seite eine Polstelle der Ordnung  $n$  bei  $p$  hat. Für die andere Implikation bemerken wir, daß es gemäß der Definition einer Polstelle ein  $n > 0$  und  $g$  holomorph gibt mit  $f(z) = (z-p)^{-n}g(z)$  außerhalb von  $p$ , und im Fall  $g(p) = 0$  wäre nach 1.8.1 unser  $n$  nicht kleinstmöglich mit  $(z-p)^n f(z)$  holomorph.

*Übung 2.1.5.* Man folgere den Satz von Liouville 1.6.6, indem man für eine beschränkte holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Riemann'schen Hebbbarkeitssatz die Funktion  $z \mapsto f(1/z)$  über den Punkt  $z = 0$  fortsetzt und dann das Maximumsprinzip 1.8.19 anwendet.

**Definition 2.1.6.** Eine **meromorphe Funktion** auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene  $U \subseteq \mathbb{C}$  ist eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  mit den Eigenschaften, daß  $f^{-1}(\infty)$  in  $U$  keinen Häufungspunkt hat, daß  $f$  holomorph ist auf  $U \setminus f^{-1}(\infty)$ , und daß für alle  $p \in U$  mit  $f(p) = \infty$  gilt  $\lim_{z \rightarrow p} (1/f(z)) = 0$ .

2.1.7. In Worten ist also eine meromorphe Funktion eine Funktion, die “holomorph ist bis auf isolierte Polstellen”. Insbesondere darf eine meromorphe Funktion keine wesentlichen Singularitäten haben. Sicher ist jede holomorphe Funktion auch meromorph. Weitere Beispiele liefert das anschließende Lemma. Eine gute Anschauung für meromorphe Funktionen liefert die Interpretation von  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  als “Riemann’sche Zahlenkugel” alias  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , die in VI.4.2.10 erklärt wird. Eine meromorphe Funktion kann in diesem Bild nach 5.1.2 aufgefaßt werden als eine Art “Aufwicklung auf die Kugelschale”, und nichtkonstante rationale Funktionen bedeuten anschaulich ein “Aufwickeln der Kugelschale auf sich selber”. Mehr zu diesem Gesichtspunkt werden wir bei der Behandlung Riemann’scher Flächen lernen.

**Lemma 2.1.8.** *Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  eine von Null verschiedene meromorphe Funktion auf einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene, so ist mit der Konvention  $(1/0) = \infty$  und  $(1/\infty) = 0$  auch die Funktion  $(1/f) : U \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  meromorph.*

2.1.9. Wir müssen den Definitionsbereich  $U$  wegzusammenhängend annehmen, da  $U$  sonst die disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Mengen sein könnte. Die Funktion  $f$ , die auf einer dieser Mengen konstant Eins und auf der anderen konstant Null ist, macht dann: Bilden wir dazu nämlich die Funktion  $1/f$  nach dem im Lemma vorgeschriebenen Verfahren, so hätte die Menge der  $\infty$ -Stellen unserer Funktion  $1/f$  einen Häufungspunkt in  $U$  und wäre folglich nicht meromorph im Sinne unserer Definition 2.1.6.

*Beweis.* Das Lemma folgt sofort aus 2.1.4 in Verbindung mit dem Spezialfall 1.8.5 des Identitätssatzes.  $\square$

**Definition 2.1.10.** Wir definieren die Summe und das Produkt meromorpher Funktionen  $f, g$  auf  $U \subseteq \mathbb{C}$ , indem wir sie erst punktweise addieren bzw. multiplizieren auf dem Komplement  $U \setminus (f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$  der Vereinigung ihrer Polstellenmengen, dann alle hebbaren Singularitäten aus der Vereinigung der Polstellenmengen heben, und schließlich an den nicht hebbaren Singularitäten den Wert  $\infty$  vergeben. Die Menge der meromorphen Funktionen auf einer wegzusammenhängenden offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  wird so zu einem Körper

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(U)$$

wie der Leser zur Übung zeigen mag. Ich verwende die Bezeichnung  $\mathcal{M}^{\text{an}}$ , um diese “analytischen” Funktionen zu unterscheiden von ihren algebraischen Analoga, den rationalen Funktionen auf einer irreduziblen algebraischen Varietät  $U$ , die ich später einmal  $\mathcal{M}(U)$  notieren will.

*Ergänzende Übung 2.1.11.* Jede rationale Funktion  $f \in \mathbb{C}(T)$  im Sinne von ?? liefert eine meromorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ , wenn wir ihr an allen Polstellen im Sinne von ?? den Wert  $\infty$  zuweisen. Man zeige, daß das Bild der so erklärten Einbettung  $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{C})$  genau aus allen meromorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  besteht, für die es ein  $N \geq 1$  gibt mit  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)/z^N = 0$ . Hinweis: 2.1.3.

**Satz 2.1.12 (Casaroti-Weierstraß).** *Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so ist ihr Bild eine dichte Teilmenge der komplexen Zahlen.*

2.1.13. Natürlich besitzt auch die Einschränkung unserer Funktion auf eine beliebige Umgebung dieser wesentlichen Singularität dort eine wesentliche Singularität, das Bild jeder Umgebung der singulären Stelle ist also dicht in der komplexen Zahlenebene. Der Satz von Picard sagt sogar stärker, daß jedes dieser Bilder alle komplexen Zahlen bis auf höchstens eine Ausnahme enthalten muß.

*Beweis.* Sei  $f : U \setminus p \rightarrow \mathbb{C}$  unsere Funktion und  $p$  die Singularität. Wäre  $f(U \setminus p)$  nicht dicht, so gäbe es eine offene Kreisscheibe  $B(w; \varepsilon)$  außerhalb des Bildes. Dann wäre  $(f(z) - w)^{-1}$  beschränkt und holomorph auf  $U \setminus p$ , ließe sich also nach dem Hebbarkeitssatz 2.1.3 zu einer holomorphen Funktion  $h$  auf  $U$  fortsetzen, und  $h$  hätte keine Nullstelle auf  $U \setminus p$ . Also wäre unsere Funktion  $f(z) = h(z)^{-1} + w$  meromorph auf  $U$ .  $\square$

*Übung 2.1.14.* Man zeige: Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so besitzt sie mindestens eine unendliche Faser. Hinweis: Man kombiniere den Satz von der Gebietstreue 1.8.16 mit Casaroti-Weierstraß 2.1.12 und dem Baire’schen Kategoriensatz V.3.2.7 oder besser seinem Korollar V.3.2.10. Noch stärker zeigen dieselben Methoden, daß die Werte, die unendlich oft angenommen werden, sogar eine dichte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  bilden.

*Übung 2.1.15.* Man zeige, dass jede holomorphe injektive Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  von der Gestalt  $z \mapsto az + b$  ist für  $a \in \mathbb{C}^\times$ ,  $b \in \mathbb{C}$ . Hinweis: Potenzreihenentwicklung und Casroti-Weierstraß 2.1.14.

*Übung 2.1.16.* Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $p \in U$  definiere man die **Bewertung bei  $p$  einer meromorphen Funktion  $f$  auf  $U$**  durch die Vorschrift

$$v_p(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z-p)^{-n}f(z) \text{ ist holomorph bei } p\}$$

In Formeln ist die Bewertung also eine Abbildung  $v_p : \mathcal{M}^{\text{an}}(U) \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ . Unsere Bewertung ist positiv auf Funktionen, die bei  $p$  eine Nullstelle haben, negativ auf Funktionen, die bei  $p$  eine Polstelle haben, und unendlich genau dann, wenn unsere Funktion in einer Umgebung des Punktes  $p$  identisch verschwindet. Man zeige für alle meromorphen Funktionen  $f, g \in \mathcal{M}^{\text{an}}(U)$  und alle  $p \in U$  die Formeln  $v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$  und  $v_p(f+g) \geq \min(v_p(f), v_p(g))$  sowie im Fall  $v_p(f) \neq v_p(g)$  die Gleichheit  $v_p(f+g) = \min(v_p(f), v_p(g))$ .

*Vorschau 2.1.17.* Für jede Primzahl  $p$  erklärt man analog auch eine Bewertung  $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$  durch die Vorschrift, daß gilt  $v_p(0) = \infty$  und  $v_p(p^n a/b) = n$  für  $a, b \in \mathbb{Z}$  teilerfremd zu  $p$ . Diese Bewertung hat analoge Eigenschaften wie unsere Bewertung meromorpher Funktionen aus der vorhergehenden Übung 2.1.16. Die hier aufscheinende formale Analogie zwischen dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen und Körpern von meromorphen Funktionen geht noch sehr viel weiter und hat sich für die Zahlentheorie als äußerst fruchtbar erwiesen.

**Satz 2.1.18 (Laurententwicklung).** *Gegeben ein Kreisring in der komplexen Zahlenebene der Gestalt  $U = \{z \mid r < |z| < R\}$  mit  $0 \leq r < R \leq \infty$  und darauf eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  derart, daß gilt*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$$

*im Sinne der kompakten Konvergenz auf unserem Kreisring der Folge  $P_n$  der Partialsummen über alle  $k$  mit  $|k| \leq n$ . Sogar die positiven und die negativen Terme unserer Reihe bilden in dieser Situation für sich genommen jeweils kompakt konvergente Reihen auf besagtem Kreisring.*

*Beweis.* Die Koeffizienten sind durch die Funktion eindeutig bestimmt, denn für jeden kreisförmigen Weg  $\gamma$ , der in unserem Kreisring einmal im Gegenuhreigersinn um den Ursprung läuft, muß gelten

$$\int_{\gamma} f(z) z^n dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{\gamma} z^{k+n} dz = 2\pi i c_{-n-1}$$



Illustration zum Beweis der Laurententwicklung. Der glatt eingezeichnete Weg ist unser  $\gamma$ .

Es bleibt also nur die Existenz einer derartigen Entwicklung zu zeigen. Gegeben  $w$  aus unserem Kreisring wählen wir  $a, A$  mit  $r < a < |w| < A < R$  und betrachten einen Integrationsweg  $\gamma$ , der auf demselben Strahl wie  $w$  beginnend erst im Gegenuhrzeigersinn die Kreislinie  $|z| = A$  halb herumläuft, dann auf einem Radius zur Kreislinie  $|z| = a$ , darauf einmal im Uhrzeigersinn herum, wieder auf dem Radius zurück nach aussen, und auf der Kreislinie  $|z| = A$  weiter zum Ausgangspunkt. Dieser Weg ist offensichtlich homotop zu jedem Weg, der vom selben Ausgangspunkt erst ein Stück auf dem Radius in Richtung  $w$  läuft, dann auf einem kleinen Kreisweg im Gegenuhrzeigersinn um  $w$ , um dann wieder auf dem Radius zurück zum Ausgangspunkt. Mit der Integralformel von Cauchy und der Homotopieinvarianz des Wegintegrals folgt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=A} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Das erste dieser Integrale verwandeln wir wie beim Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 1.7.7 in die Potenzreihe

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{|z|=A} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right) w^k$$

mit Konvergenzradius  $\geq A$ . Das zweite Integral behandeln wir ähnlich, nur schreiben wir nun, da auf dem Integrationsweg ja  $|w| > |z|$  gilt,

$$\frac{-1}{z-w} = \frac{1}{w} \left( \frac{1}{1-(z/w)} \right) = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^k}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz in  $z$  auf dem Kreisring  $|z| = a$  und erhalten

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{|z|=a} f(z) z^k dz \right) w^{-k-1}$$

zunächst einmal im Sinne punktweiser Konvergenz an jeder Stelle  $w$  mit  $a < |w| < A$ . Hier steht nun aber eine Potenzreihe im  $w^{-1}$ , die konvergiert für  $|w^{-1}| < a^{-1}$ . Also ist für  $|w| \geq a + \varepsilon$  bei beliebigem  $\varepsilon > 0$  die Konvergenz gleichmäßig in  $w$ . Das zeigt die Existenz der Entwicklung in eine Laurentreihe.  $\square$

2.1.19. Insbesondere können wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität im Ursprung in eine Laurentreihe entwickeln. Unsere Funktion hat einen Pol im Ursprung genau dann, wenn ihre Laurentreihe mindestens einen und höchstens endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten

vor negativen Potenzen von  $z$  stehen hat. Allgemeiner folgt unmittelbar, daß wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität bei  $w$  in einer Umgebung von  $w$  in eine Reihe der Gestalt

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - w)^k$$

entwickeln können. Diese Darstellung heißt dann auch die **Laurententwicklung bei  $w$** .

*Übung 2.1.20.* Die Entwicklung in eine Laurentreihe liefert für jede zusammenhängende offene Umgebung  $U \ni \mathbb{C}$  des Ursprungs in der komplexen Zahlenebene einen Körperhomomorphismus

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(U) \rightarrow \mathbb{C}((z))$$

vom Körper der meromorphen Funktionen auf  $U$  in den Ring der formalen Laurentreihen  $\mathbb{C}((z))$  aus ??.

*Übung 2.1.21.* Man gebe eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  an, die  $\mathbb{C}$  surjektiv auf  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  abbildet.

## 2.2 Umlaufzahl und Residuensatz

**Satz 2.2.1 (zur Umlaufzahl).** *Jeder geschlossene Weg in der punktierten Ebene  $\mathbb{C}^\times$  ist für genau ein  $n \in \mathbb{Z}$  frei homotop zu dem geschlossenen Weg, der gegeben wird durch die Vorschrift  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $t \mapsto e^{2\pi i n t}$ .*

2.2.2. Anschaulich beschreibt für  $n \geq 1$  die Abbildung  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $t \mapsto e^{2\pi i n t}$  einen Weg, der vom Punkt 1 ausgehend mit konstanter absoluter Geschwindigkeit  $n$ -mal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis umläuft; für  $n \leq -1$  ist es der Weg, der  $(-n)$ -mal im Uhrzeigersinn umläuft; und für  $n = 0$  haben wir den konstanten Weg vor uns, der schlicht auf dem Punkt 1 sitzenbleibt.

**Definition 2.2.3.** Die ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  aus 2.2.1 heißt die **Umlaufzahl** oder auch **Windungszahl** des geschlossenen Weges  $\gamma$  um den Ursprung. Analog definiert man die Windungszahl eines geschlossenen Weges  $\gamma$  um jeden Punkt  $w$  der komplexen Zahlenebene, der nicht auf dem Bild des Weges liegt. Wir notieren sie

$$\text{Um}(\gamma, w)$$



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

*Beweis von Satz 2.2.1.* Mit der Homotopieinvarianz des Wegintegrals 1.4.16 erhalten wir für die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges  $\gamma$  um einen beliebigen Punkt  $w$  außerhalb des Bildes von  $\gamma$  die Integraldarstellung

$$n = \text{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz$$

Sie wird in der Funktionentheorie meist als Definition der Umlaufzahl genommen und zeigt sofort die Eindeutigkeit unserer Umlaufzahl. Wir zeigen nun noch die Existenz eines  $n$  wie im Satz behauptet, obwohl das im weiteren Verlauf dieser Vorlesung keine Rolle mehr spielen wird. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  unser geschlossener Weg. Wir zeigen zunächst, daß es einen Weg  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$ , und das sogar zu jedem vorgegebenen Anfangspunkt  $\tilde{\gamma}(a)$  mit  $\exp(\tilde{\gamma}(a)) = \gamma(a)$ . Falls  $\gamma$  ganz in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  verläuft, ist das klar, wir nehmen einfach

$$\tilde{\gamma}(t) = \log(\gamma(t)) + 2\pi i k$$

wobei  $\log$  die Umkehrung von  $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi i, \pi i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  bezeichnet und  $k \in \mathbb{Z}$  so gewählt wird, daß unser "hochgehobener Weg"  $\tilde{\gamma}$  beim vorgegebenen Anfangspunkt beginnt. Falls  $\gamma$  ganz in einer andersartig geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} w$  mit  $w \in \mathbb{C}^{\times}$  verläuft, finden wir unsere Hochhebung analog. Im allgemeinen wählen wir  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$  so, daß  $\gamma[a_{i-1}, a_i]$  jeweils ganz in einer geschlitzten Ebene enthalten ist, wählen induktiv Hochhebungen  $\tilde{\gamma}_i$  der  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  so, daß  $\tilde{\gamma}_i$  dort beginnt, wo  $\tilde{\gamma}_{i-1}$  aufhört, und setzen diese stückweisen Hochhebungen dann zum gesuchten Weg  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  zusammen. Nach III.1.1.6 haben wir natürlich  $\tilde{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}(a) + 2\pi i n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ , und  $\tilde{\gamma}$  ist nach IV.3.5.4 homotop zum Weg  $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \tilde{\gamma}(a) + int$ . Dann ist aber nach IV.3.5.5 auch  $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$  homotop zu  $\exp \circ \beta$ . Dieser Weg ist aber offensichtlich in  $\mathbb{C}^{\times}$  frei homotop zum Weg  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ ,  $t \mapsto e^{2\pi i n t}$ , und das zeigt im Satz die Existenz.  $\square$

*Vorschau 2.2.4.* Der hier gegebene Beweis für die Eindeutigkeit der Umlaufzahl ist zwar im Rahmen der Funktionentheorie bequem, scheint mir für sich allein betrachtet jedoch unangemessen verwickelt. Ich ziehe den Beweis im Rahmen der Topologie vor, der in ?? besprochen wird.

*Vorschau 2.2.5.* Der Begriff der Umlaufzahl ermöglicht auch eine noch allgemeinere Fassung des Cauchy'schen Integralsatzes, die sogenannte **Umlaufzahlversion des Integralsatzes**: Ist im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion ein geschlossener Weg gegeben, der keinen Punkt außerhalb des Definitionsbereichs umläuft, so verschwindet das Wegintegral unserer Funktion längs dieses Weges. Wir diskutieren seinen Beweis im Rahmen der singulären Homologietheorie in ??.

**Definition 2.2.6.** Der Koeffizient von  $(z - w)^{-1}$  in der Laurententwicklung nach 2.1.19 einer holomorphen Funktion  $f(z)$  mit isolierter Singularität bei  $w$  heißt das **Residuum**  $\text{Res}(f, w) = \text{Res}_w f$  von  $f$  bei  $w$ . Ist die Funktion  $f$  durch einen Ausdruck in einer komplexen Variablen gegeben, etwa als Ausdruck in der Variablen  $z$ , so verwenden wir für das Residuum von  $f$  bei  $w$  in Bezug auf  $z$  auch die Notation  $\text{Res}_{z=w} f(z)$ .

2.2.7. Nach 2.1.18 oder genauer dem Beweis dieser Aussage haben wir also

$$\text{Res}(f, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} f(z) dz$$

für jeden Radius  $r > 0$  derart, daß unsere Funktion  $f$  mit Ausnahme der singulären Stelle  $w$  auf einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\{z \mid |z - w| \leq r\}$  definiert ist und dort keine weiteren Singularitäten hat. Die Bezeichnung als “Residuum”, lateinisch für “Überbleibsel”, hat wohl damit zu tun, daß diese Zahl den einzigen Term der Laurentreihe beschreibt, der in diesem Zusammenhang beim Integrieren übrigbleibt.

2.2.8. Hat unsere Funktion  $f$  nur einen Pol erster Ordnung bei  $w$ , so läßt sich  $g(z) = (z - w)f(z)$  stetig über  $z = w$  fortsetzen und wir haben offensichtlich  $g(w) = \text{Res}(f, w)$ . Läßt sich allgemeiner für irgendein  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $g(z) = (z - w)^{n+1}f(z)$  stetig über  $z = w$  fortsetzen, so ist diese Fortsetzung holomorph und ihre  $n$ -te Ableitung bei  $w$  liefert das Residuum von  $f$  bei  $w$  mittels der Identität  $g^{(n)}(w) = n! \text{Res}(f, w)$ , die man leicht mithilfe der Laurententwicklung von  $f$  um  $w$  einsehen kann.

**Satz 2.2.9 (Residuensatz).** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $P \subset U$  endlich,  $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $U \setminus P$ , der in  $U$  zusammenziehbar ist, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in P} \text{Um}(\gamma, p) \text{Res}(f, p)$$

2.2.10. Integrieren wir also in Worten eine holomorphe Funktion mit endlich vielen isolierten Singularitäten längs eines geschlossenen Weges, der in ihrem Definitionsbereich vereinigt mit den singulären Stellen zusammenziehbar ist, so ist das Wegintegral bis auf den Faktor  $2\pi i$  die Summe der Residuen, jeweils gewichtet mit der Umlaufzahl unseres Weges um die entsprechende singuläre Stelle. Ist unser geschlossener Weg sogar bereits im Komplement  $U \setminus P$  der singulären Stellen zusammenziehbar, so verschwindet das Wegintegral nach dem Cauchy’schen Integralsatz, und der Residuensatz liefert auch Null für den Wert der Integrals, da dann bereits alle Umlaufzahlen um Punkte aus  $P$  Null sind. In ?? diskutieren wir auch noch eine etwas allgemeinere Version für “in  $U$  nullhomologe Wege”.



SkriptenBilder/BildReSS.png

Ein geschlossener Weg in einer ringförmigen offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$ , der in  $U$  nicht zusammenziehbar ist. Mit  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  dürfen wir also in diesem Fall den Residuensatz nicht anwenden: Das geht nur, wenn sich unsere Funktion “holomorph auf das fehlende innere Ei fortsetzen läßt”.



SkriptenBilder/BildReSa.png

Anschaulicher Beweis des Residuensatzes in einem Spezialfall. Ergänzen wir unseren Weg durch die zwei kleinen Extrawege, die von unserem großen Weg auf kleinen Stichwegen zu den fraglichen Punkten hinlaufen, einmal im Kreis darum herum und, auf demselben Stichweg wieder zurück auf unseren großen Weg, so ändert sich das Wegintegral nur um die Integrale der beiden kleinen Kreiswege. Diese sind jedoch mit Hilfe der Laurententwicklung um die besagten singulären Stellen leicht zu berechnen. Der so ergänzte Weg ist dann zusammenziehbar in  $U \setminus P$ , und deshalb verschwindet das Wegintegral über diesen ergänzten Weg nach Cauchy. Um diese meines Erachtens wunderbar anschauliche Argumentation zu einem Beweis des Residuensatzes auszubauen, benötigen wir jedoch die Umlaufzahlversion des Cauchy’schen Integralsatzes 2.2.5, die wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht bewiesen haben.

*Beweis.* Entwickeln wir  $f$  um ein  $p \in P$  in seine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - p)^n$$

und fassen darin alle Terme für  $n \leq -2$  zusammen zur auf der punktierten Ebene kompakt konvergenten Reihe  $h_p(z) := \sum_{n \leq -2} a_n (z - p)^n$ , so ist  $h_p$  eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus p$  und besitzt sogar eine Stammfunktion, gegeben durch die Reihe  $\sum_{n \leq -2} a_n (z - p)^{n+1} / (n + 1)$ . Die Funktion

$$f(z) - \sum_{p \in P} h_p(z) - \sum_{p \in P} \frac{\operatorname{Res}(f, p)}{z - p}$$

hat nun offensichtlich hebbare Singularitäten bei allen  $p \in P$ , mithin verschwindet nach dem Integralsatz von Cauchy 1.4.3 ihr Wegintegral über unseren in  $U$  zusammenziehbaren Weg  $\gamma$ . Da die  $h_p$  Stammfunktionen haben, verschwindet auch ihr Wegintegral über den geschlossenen Weg  $\gamma$ . Mit unserer funktionentheoretischen Beschreibung der Umlaufzahl aus dem Beweis von 2.2.1 ergibt sich damit

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \sum_{p \in P} \operatorname{Res}(f, p) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p} = 2\pi i \sum_{p \in P} \operatorname{Res}(f, p) \operatorname{Um}(\gamma, p) \quad \square$$

*Übung 2.2.11.* Man erkläre, inwiefern Cauchy's Integralformel 1.6.1 ein Spezialfall des Residuensatzes ist.

## 2.3 Anwendungen des Residuensatzes

2.3.1. Für jede meromorphe Funktion mit isolierten Nullstellen  $f$  erklären wir ihre **logarithmische Ableitung** als die meromorphe Funktion

$$\frac{f'}{f}$$

Ist  $f$  holomorph und existiert ein Logarithmus von  $f$ , also eine Funktion  $g$  mit  $f(z) = \exp g(z)$ , so haben wir  $f'/f = g'$ , daher die Bezeichnung. In jedem Falle ist die logarithmische Ableitung eines Produkts offensichtlich die Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren. Konvergiert weiter eine Folge holomorpher Funktionen ohne Nullstellen kompakt gegen eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle, so vertauscht das Bilden der logarithmischen Ableitung mit dem Grenzwert, wie der Leser leicht aus 1.7.5 folgern kann.

**Satz 2.3.2 (Zählen von Null- und Polstellen).** *Seien  $f$  eine meromorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $\gamma$  ein in  $U$  zusammenziehbarer Weg, der keine Nullstelle und keine Polstelle von  $f$  trifft. So gilt*

$$\text{Um}(f \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in U} \text{Um}(\gamma, p) v_p(f)$$

2.3.3. Besonders anschaulich scheint mir der Fall  $f(z) = z^n$  mit  $\gamma$  einem Kreisweg um den Ursprung. Im allgemeinen kann man sich überlegen, daß unser Weg  $\gamma$  homotop sein muß zu einer “Verkettung” von Wegen, die erst von einem festen Punkt zu einer der Nullstellen laufen, dann auf einem kleinen Kreisweg um diese herum, und danach auf demselben Weg wieder zurück. Für Wege dieser Art und dann auch für ihre Verkettungen scheint mir die Aussage im Fall holomorpher Funktionen anschaulich leicht zu sehen, wenn man den Satz 1.8.14 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen beachtet. Die Erweiterung dieser Anschauung auf den meromorphen Fall bleibe dem Leser überlassen.

*Ergänzung 2.3.4.* Der Satz bleibt richtig, wenn wir eine beliebige stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten, bei der die Faser  $f^{-1}(0)$  über dem Ursprung endlich ist. Wir müssen dann nur  $v_p(f)$  interpretieren als die Umlaufzahl  $\text{Um}(f \circ \beta_p, 0)$  um den Ursprung für  $\beta_p$  einen “sehr kleinen” Kreisweg um  $p$  im Gegenuhrzeigersinn, und müssen zeigen, daß das wohldefiniert ist. Diese Summe geht dann über alle Punkte der Faser  $f^{-1}(0)$  über dem Ursprung, und für Punkte dieser Faser ist das so erklärte  $v_p(f)$  ein Spezialfall eines Konzepts, das wir in ?? in größerer Allgemeinheit als “lokalen Abbildungsgrad” einführen. Unsere Formel folgt dann aus Argumenten im Beweis von ??.

2.3.5. Wir erinnern daran, daß die Bewertung  $v_p(f)$  von  $f$  bei  $p$ , wenn  $f$  nicht in einer Umgebung von  $p$  identisch verschwindet, in 2.1.16 definiert wurde als die Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $f(z) = (z - p)^n g(z)$  für  $g$  holomorph um  $p$  ohne Nullstelle bei  $p$ . Wir haben also  $v_p(f) > 0$  bei Nullstellen,  $v_p(f) < 0$  bei Polstellen, und  $v_p(f) = 0$  sonst. Für einen zusammenziehbaren Weg läßt sich nun per definitionem die zugehörige Abbildung vom Einheitskreis stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortsetzen. Außerhalb des kompakten Bildes dieser Fortsetzung kann er dann keinen Punkt umlaufen, und innerhalb dieses Bildes können nur endlich viele Nullstellen und Polstellen liegen. Damit hat die Summe auf der rechten Seite unserer Formel auch wirklich nur endlich viele von Null verschiedene Terme. Sollte  $f$  auf einer Komponente von  $U$  identisch verschwinden, so kann der Weg nicht in dieser Komponente verlaufen und wir interpretieren die Beiträge  $0 \cdot \infty$  zu unserer Summe durch Punkte aus einer derartigen Komponente als Null.

*Beweis.* Wir zeigen feiner die Gleichungskette

$$\text{Um}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{p \in U} \text{Um}(\gamma, p) v_p(f)$$

Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus dem Residuensatz. Die Zweite folgt aus der Erkenntnis 1.3.18, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Für die Dritte schreiben wir  $f(w) = (w - p)^n g(w)$  mit  $g(w)$  holomorph ohne Nullstelle bei  $p$ , so erhalten wir

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{n(w - p)^{n-1} g(w) + (w - p)^n g'(w)}{(w - p)^n g(w)} = \frac{n}{w - p} + \frac{g'(w)}{g(w)}$$

und das Residuum ergibt sich zu  $\text{Res}(f'/f, p) = v_p(f) = n$ . Der Satz folgt damit aus dem Residuensatz.  $\square$

*Ergänzung 2.3.6.* Diejenigen unter Ihnen, die sich mit Einsformen bereits wohlfühlen, mögen auch die komplexwertige Einsform  $d \log f := (f'/f) dz$  integrieren und sich die linke Seite lokal durch irgendeinen Zweig des Logarithmus definiert denken, auf den es dann nach dem Ableiten gar nicht mehr ankommt. Damit folgt dann sofort die Formel  $d \log(fh) = d \log f + d \log h$  und bei  $f(z) = (z - p)^n g(z)$  ergibt sich speziell  $d \log f = n d \log(z - p) + d \log g$ .

**Korollar 2.3.7 (Satz von Rouché).** *Im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion  $f$  sei eine abgeschlossene Kreisscheibe  $B$  gegeben. Sei weiter  $g$  holomorph mit demselben Definitionsbereich und  $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \partial B$ . So haben  $f$  und  $f + g$  mit Vielfachheiten gezählt gleichviele Nullstellen in  $B$ .*

*Ergänzung 2.3.8.* Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir  $f$  und  $g$  meromorph ohne Pole auf  $\partial B$  nehmen und "Polstellen als Nullstellen negativer Vielfachheit" werten. Dasselbe gilt mit demselben Beweis auch, wenn wir statt dem Rand einer Kreisscheibe einen beliebigen im Definitionsbereich unserer beiden meromorphen Funktionen zusammenziehbaren Weg nehmen, der alle Polstellen und Nullstellen zusätzlich mit der Umlaufzahl gewichtet.

*Beweis.* Nach Annahme können auf dem Rand  $\partial B$  unserer Kreisscheibe weder  $f$  noch  $f + g$  Nullstellen haben. Mit unserem Satz 2.3.2 über das Zählen von Null- und Polstellen und  $\gamma$  einem auf  $\partial B$  einmal im Gegenuhrzeigersinn umlaufenden Weg finden wir

$$U(f \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in B} v_p(f) \quad \text{und} \quad \text{Um}((f + g) \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in B} v_p(f + g).$$

Wegen  $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \partial B$  sind aber  $f(z) + tg(z)$  für  $t \in [0, 1]$  und  $z \in \partial B$  nie Null, und das liefert eine freie Homotopie unserer beiden geschlossenen Wege  $f \circ \gamma$  und  $(f + g) \circ \gamma$  in  $\mathbb{C}^\times$ . Folglich haben beide Wege dieselbe Umlaufzahl um den Ursprung.  $\square$

**Beispiel 2.3.9 (Integrale rationaler Funktionen).** Gegeben eine rationale Funktion  $f$  ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, gilt

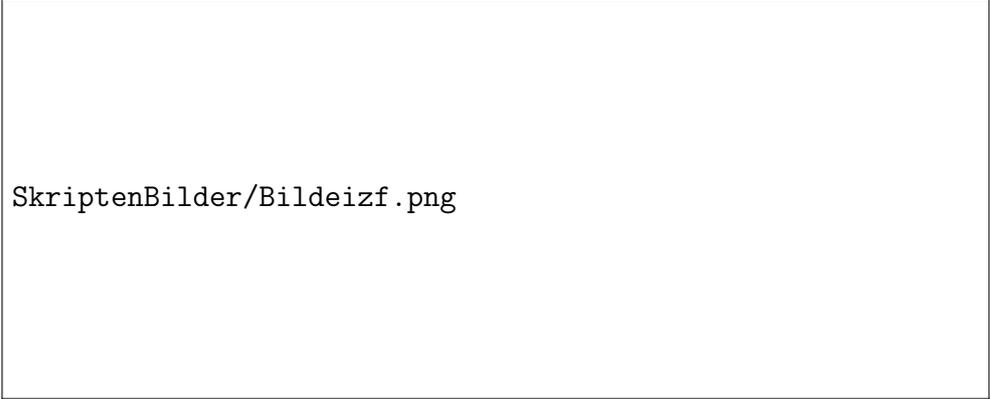
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} \zeta > 0} \operatorname{Res}(f, \zeta)$$

Nach dem Residuensatz ergibt sich nämlich die rechte Seite, wenn wir für  $r$  größer als der Betrag aller Polstellen das Wegintegral von  $-r$  bis  $r$  entlang der reellen Achse und dann auf einen großen Halbkreis durch die obere Halbebene zurück ausrechnen. Lassen wir hier  $r$  gegen unendlich streben, so strebt die Länge dieses Halbkreises linear gegen unendlich, das Betragsmaximum der Funktion darauf strebt jedoch quadratisch gegen Null. Folglich streben die Wegintegrale über immer größere Halbkreise gegen Null und die Formel folgt. Diese Anwendung war allerdings die Mühe des Residuensatzes nicht wert. Wir hätten auch einfach wie in III.1.4 erklärt die Funktion  $f$  in einem Partialbruch entwickeln und eine Stammfunktion explizit angeben und zwischen  $-\infty$  und  $\infty$  auswerten können. Als Übung mögen Sie zeigen, daß dabei dasselbe herausgekommen wäre. Als Beispiel bestimmen wir nochmal das Integral über die ganze reelle Achse von  $f(x) = 1/(1+x^2) = 1/((x+i)(x-i))$ . Diese Funktion hat einfache Pole bei  $\pm i$ . Ihr Residuum bei  $i$  können wir bestimmen, indem wir unsere Funktion mit  $(x-i)$  multiplizieren und dann bei  $x = i$  auswerten. So folgt  $\operatorname{Res}(f, i) = 1/(2i)$  und wir erhalten  $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2) dx = \pi$  in Übereinstimmung mit II.7.6.16.

**Beispiel 2.3.10 (Integrale rationaler Funktionen mit Exponentialterm).** Gegeben eine rationale Funktion  $f$  ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners größer ist als der Grad des Zählers, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} \zeta > 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) e^{iz}$$

in dem Sinne, daß sowohl  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r$  als auch  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0$  existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Im Fall, daß der Grad des Nenners sogar um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, kann das in 2.3.9 angewandte Argument unverändert übernommen werden. Im allgemeinen betrachten wir ähnlich wie in 1.4.20 Wege einmal im Gegenuhrzeigersinn



SkriptenBilder/Bildeizf.png

Der Integrationsweg bei der Berechnung von  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$

um den Rand des Rechtecks mit Ecken  $a, b, a + ih, b + ih$  für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $h > 0$ . Ist unser Rechteck so groß, daß es alle Polstellen von  $f$  in der oberen Halbebene umfaßt, so ist das Wegintegral um seinen Rand nach dem Residuensatz genau die rechte Seite der behaupteten Formel. Die Integrale über die drei Kanten  $\rho, \lambda, \omega$  für "rechts, links und oben" außerhalb der reellen Achse können wir jedoch abschätzen durch

$$\left| \int_{\rho} f(z) e^{iz} dz \right| \leq \sup_{z \in \rho} |f(z)| \int_0^h e^{-t} dt \leq \sup_{z \in \rho} |f(z)|$$

und analog auf der linken Kante, auf der oberen Kante dahingegen durch

$$\left| \int_{\omega} f(z) e^{iz} dz \right| \leq (b - a) e^{-h} \sup_{z \in \omega} |f(z)|$$

Halten wir  $a$  fest und nehmen  $b = h$  und lassen  $h$  nach Unendlich streben, so ergibt sich die Existenz des Grenzwerts  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r$ . Die Existenz des anderen Grenzwerts zeigt man analog, und die behauptete Formel folgt, wenn wir  $h = b = -a$  nehmen und das gegen Unendlich streben lassen.

**Beispiel 2.3.11 (Integrale rationaler Funktionen mit allgemeiner Potenz).** Sei  $0 < \alpha < 1$  und sei  $f$  eine rationale Funktion ohne Pole auf der positiven reellen Achse, bei der der Grad des Nenners mindestens um zwei größer ist als der Grad des Zählers und die in Null holomorph ist oder einen Pol erster Ordnung hat. So existiert das Integral

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx$$

nach II.4.5.5 und wir können seinen Wert wie folgt bestimmen: Wir wählen einen Zweig des Logarithmus  $\log$  auf der geschlitzten Halbebene  $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  so, daß  $\lim_{t \searrow 0} \log(x + it)$  für  $x \in \mathbb{R}$  der übliche reelle Logarithmus ist. Dann setzen wir  $z^{\alpha} = \exp(\alpha \log z)$  und finden für den in nebenstehendem Bild gezeigten Integrationsweg bei hinreichend kleinem Radius innen und hinreichend großem Radius außen

$$\int z^{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\zeta \neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^{\alpha}$$

Lassen wir nun den inneren Radius gegen Null streben und den äußeren Radius gegen  $\infty$ , so streben die Integrale über die beiden Kreiswege gegen Null wegen  $|z^{\alpha}| = |z|^{\alpha}$ . Das Integral über den oberen horizontalen Abschnitt des im Bild gezeigten Integrationsweges strebt gegen das gesuchte Integral,



SkriptenBilder/ZuJuni.png

Integrationsweg zu Beispiel 2.3.11 des Integrals  $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$ , von einem Punkt weit außen dicht über der reellen Achse auf einem großen Kreis bis dicht unter die reelle Achse, dann längs der reellen Achse ganz nah zum Ursprung, einmal eng um den Ursprung herum, und dann wieder längs der reellen Achse weit nach außen.

das Integral über den unteren dahingegen gegen  $-e^{2\pi i\alpha}$  mal das gesuchte Integral. So folgt dann schließlich

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{\zeta \neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^\alpha$$

## 3 Verschiedene weiterführende Resultate

### 3.1 Harmonische Funktionen

**Definition 3.1.1.** Eine auf einer offenen Teilmenge der Ebene definierte stetige reellwertige Funktion heißt **harmonisch** genau dann, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe der Funktionswert in ihrem Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf ihrem Rand. Allgemeiner heißt eine auf einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  oder noch allgemeiner auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums definierte stetige reellwertige Funktion harmonisch genau dann, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kugel der Funktionswert in ihrem Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf ihrer Randsphäre.

3.1.2. In Formeln fordern wir im ebenen Fall also, daß unsere harmonische Funktion  $h$  auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  definiert sein soll und daß für jeden Punkt  $p$  aus dem Definitionsbereich von  $h$  und jedes  $r > 0$  derart, daß der abgeschlossene  $r$ -Ball um  $p$  noch ganz zum Definitionsbereich von  $h$  gehört, unter der üblichen Identifikation von  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  gilt

$$h(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(p + r e^{it}) dt$$

Anschaulich mag man sich eine harmonische Funktion als eine stabile Wärmeverteilung denken. Alternativ mag man sich im ebenen Fall eine Ameisendichte vorstellen, die unter der Annahme eines unabhängigen ziellosen Hin- und Herkrabbelns sämtlicher Ameisen zeitlich konstant bleibt. Beide Vorstellungen sind allerdings nur lokal sinnvoll und erweisen sich global als wirklichkeitsfern, da eine nichtkonstante harmonische Funktion auf einem  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 1$  stets alle reellen Zahlen als Werte annimmt, insbesondere also auch beliebig negative Zahlen.

*Ergänzung 3.1.3.* Analog definiert man die Harmonizität vektorwertiger Funktionen mit Werten, die je nach den Vorkenntnissen des Lesers in endlichdimensionale reellen Vektorräumen, in reellen Banachräumen oder gar in von Neumann-Räumen liegen mögen.

3.1.4. In der Literatur wird eine harmonische Funktion meist definiert als eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die vom **Laplaceoperator**

$$\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

annulliert wird. Diese Bedingung ist zwar leichter zu prüfen, scheint mir jedoch weniger anschaulich. Wir zeigen die Äquivalenz beider Bedingungen im ebenen Fall in [3.1.8](#).

**Proposition 3.1.5.** *Nimmt eine harmonische Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  ihr Maximum oder ihr Minimum an, so ist sie konstant.*

*Beweis.* Die Menge aller Stellen, an denen eine stetige Funktion ihr Maximum oder auch irgendeinen anderen festen Wert annimmt, ist stets abgeschlossen. Ist unsere Funktion harmonisch und nimmt sie ihr Maximum bei  $p$  an, so muß andererseits unsere Funktion auf einer ganzen Kreisscheibe bzw. Kugel  $B(p; \varepsilon(p))$  um  $p$  konstant sein, da sonst der Durchschnitt über die Funktionswerte auf gewissen Kreisringen bzw. Kugelschalen um  $p$  zu klein wäre. Die Menge der Stellen, an denen das Maximum angenommen wird, ist also auch offen. Ist der Definitionsbereich wegzusammenhängend, so ist diese Menge nach IV.3.4.16 folglich alles oder nichts.  $\square$

**Lemma 3.1.6.** *Je zwei stetige Funktionen auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe, die im Inneren harmonisch sind und auf dem Rand übereinstimmen, stimmen auf der ganzen Kreisscheibe überein.*

*Ergänzung 3.1.7.* Analoges gilt mit demselben Beweis in allen Dimensionen.

*Beweis.* Die Differenz unserer beiden Funktionen ist stetig, verschwindet auf dem Rand unserer Kreisscheibe und ist im Inneren harmonisch. Als stetige Funktion muß sie auf der abgeschlossenen Kreisscheibe ihr Maximum und ihr Minimum annehmen. Wäre eines von diesen nicht Null, so würde es im Innern unserer Kreisscheibe angenommen im Widerspruch zu 3.1.5. Also sind das Maximum und das Minimum beide Null und die Differenz verschwindet auf der ganzen Kreisscheibe.  $\square$

**Satz 3.1.8 (Charakterisierung harmonischer Funktionen).** *Eine stetige reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der Ebene ist harmonisch genau dann, wenn sie zweimal stetig reell differenzierbar ist und vom Laplaceoperator  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  annulliert wird.*

**Satz 3.1.9 (Harmonizität und Holomorphie).** *Der Realteil einer holomorphen Funktion ist stets harmonisch. Jede reelle harmonische Funktion mit einfach wegzusammenhängendem Definitionsbereich ist umgekehrt der Realteil einer holomorphen Funktion, und diese ist bis auf eine additive rein imaginäre Konstante sogar eindeutig bestimmt.*

*Beispiel 3.1.10.* Die Funktion  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto \log |z|$  alias  $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto (1/2) \log(x^2 + y^2)$  ist harmonisch. In der Tat ist sie auf jeder geschlitzten Ebene der Realteil jedes Zweiges des komplexen Logarithmus, und diese Zweige sind holomorph als Umkehrfunktionen der geeignet eingeschränkten Exponentialfunktion.

*Beweis beider Sätze.* Wir untersuchen für stetige reelle Funktionen auf offenen Teilmengen der Ebene  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  die Beziehungen zwischen den folgenden drei Eigenschaften: (1) “ist harmonisch”, (2) “ist zweimal stetig differenzierbar und wird vom Laplace-Operator annulliert” sowie (3) “ist Realteil einer holomorphen Funktion”.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Die Harmonizität des Realteils einer holomorphen Funktion ergibt sich sofort aus der Integralformel von Cauchy

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{F(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(a + r e^{it})}{r e^{it}} i r e^{it} dt$$

(3)  $\Rightarrow$  (2): Daß der Realteil jeder holomorphen Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar ist und vom Laplace-Operator annulliert wird, folgt leicht aus den Cauchy-Riemann’schen Differentialgleichungen und der Glattheit holomorpher Funktionen.

(2)  $\Rightarrow$  (3) bei einfach zusammenhängendem Definitionsbereich: Wir bemerken, daß für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion  $h$  mit  $\Delta h = 0$  die Funktion  $f = \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y}$  holomorph ist nach 1.2.13, da sie eben die Cauchy-Riemann’schen Differentialgleichungen erfüllt. Sie hat also nach 1.4.14 auf jedem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich eine holomorphe Stammfunktion  $F$ , für die gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} + i \frac{\partial h}{\partial x}$$

woraus wir folgern, daß ihr Realteil  $\operatorname{Re} F$  denselben Gradienten hat wie  $h$ . Ändern wir also  $F$  um eine geeignete additive Konstante ab, so erhalten wir  $h = \operatorname{Re} F$  wie gewünscht. Geometrisch gesprochen bilden wir zu  $h$  das Gradientenfeld, drehen es an jeder Stelle um einen rechten Winkel im Gegenuhreigersinn, erhalten wegen der  $\Delta h = 0$  wieder ein wirbelfreies Vektorfeld und jedes Potential dieses Vektorfeldes ist ein möglicher Imaginärteil, der unsere Funktion  $h$  zu einer holomorphen Funktion ergänzt. In der Tat ist ein solches Vorgehen ja nach 1.2.15 auch eine natürliche Methode, um zu einer reellwertigen Funktion einen Imaginärteil zu finden, der sie zu einer holomorphen Funktion ergänzt.

(1)  $\Rightarrow$  (2): Es reicht zu zeigen, daß jede stetige Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, die harmonisch ist auf der offenen Einheitskreisscheibe, auf der offenen Einheitskreisscheibe der Realteil einer holomorphen Funktion ist, denn dann ist unsere Funktion zweimal stetig differenzierbar, ja sogar glatt mit  $\Delta = 0$  nach der bereits gezeigten Implikation (3)  $\Rightarrow$  (2).

Das und noch viel mehr leistet die “Poisson-Transformation” nach 3.1.12, die wir im Folgenden als eigenständigen Satz formulieren und beweisen.  $\square$

3.1.11. Ich will zunächst erklären, wie man von der Fourier-Entwicklung in natürlicher Weise zur Poisson-Transformation geführt wird. Wir denken uns dazu eine reellwertige harmonische Funktion auf einer im Nullpunkt zentrierten offenen Kreisscheibe mit Radius  $R > 1$  und suchen eine holomorphe Funktion  $F$  auf der offenen Einheitskreisscheibe  $D^\circ$  mit  $\operatorname{Re} F = h$ . Dazu entwickeln wir zunächst einmal die Restriktion  $h|_{S^1}$  unserer Funktion auf den Einheitskreis in eine Fourierreihe. Nach III.3.3.4 finden wir wohlbestimmte  $c_\nu \in \mathbb{C}$  mit

$$h = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu z^\nu$$

auf  $S^1$  im Sinne der Konvergenz der Folge der Partialsummen im quadratischen Mittel und es gilt  $\sum |c_\nu|^2 < \infty$ . Da  $h$  reellwertig ist, haben wir  $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$  und können unsere Darstellung von  $h|_{S^1}$  umschreiben zu

$$h = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + \bar{c}_\nu \bar{z}^\nu$$

wieder im Sinne der Konvergenz der Folge der Partialsummen im quadratischen Mittel. Da die  $c_\nu$  beschränkt sind, definiert die Potenzreihe

$$F(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2c_\nu z^\nu$$

eine holomorphe Funktion auf der offenen Einheitskreisscheibe. Unter der Voraussetzung, daß diese Potenzreihe einen Konvergenzradius  $> 1$  hat, gilt für die Partialsummen  $F_n = c_0 + \sum_{\nu=1}^n 2c_\nu z^\nu$  sowohl  $F_n \rightarrow F$  gleichmäßig auf  $S^1$  also auch  $\operatorname{Re} F_n \rightarrow h$  im quadratischen Mittel auf  $S^1$ , woraus sofort folgt  $\operatorname{Re} F = h$  erst auf  $S^1$  und dann wegen 3.1.6 auf der ganzen Einheitskreisscheibe  $D$  und wir haben unsere harmonische Funktion wie gewünscht als Realteil einer holomorphen Funktion geschrieben. Um auch ohne die Voraussetzung, daß unsere Potenzreihe einen Konvergenzradius  $> 1$  hat, die Gleichheit  $\operatorname{Re} F = h$  auf der offenen Einheitskreisscheibe  $D^\circ$  zu zeigen, müssen wir feiner argumentieren. Die Fourierkoeffizienten  $c_\nu$  sind ja nach III.3.3.2 gegeben als

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) e^{-i\nu t} dt$$

so daß wir unsere Funktion  $F$  für  $|z| < 1$  nach Vertauschen eines gleichmäßigen Grenzwerts mit dem Integral auch schreiben können in der Gestalt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \left( 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-i\nu t} z^\nu \right) dt$$

Beim Ausdruck in Klammern ziehen wir einen Faktor  $e^{-it} z$  aus der Summe, die dadurch zu einer geometrischen Reihe wird, und erhalten

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-i\nu t} z^\nu = 1 + \frac{2 e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} = \frac{1 + e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

So ergibt sich schließlich für die durch unsere Potenzreihe definierte Funktion die Darstellung

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

Wir zeigen im anschließenden Satz, daß für jede stetige Funktion  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  der Realteil der durch diese Formel gegebenen Funktion  $F(z)$  für  $z \in D$  eine stetige Fortsetzung von  $h$  auf die ganze abgeschlossene Einheitskreisscheibe definiert.

**Satz 3.1.12 (Poisson-Transformation).** *Jede stetige reellwertige Funktion auf dem Einheitskreis  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  läßt sich auf genau eine Weise zu einer stetigen Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe  $D$  fortsetzen, die auf der offenen Einheitskreisscheibe  $D^\circ$  harmonisch ist, und diese Fortsetzung wird für alle  $z \in D^\circ$  gegeben durch die Formel*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \operatorname{Re} \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt$$

3.1.13. Anschaulich mag man sich die Funktion  $h$  als eine fest vorgegebene Temperaturverteilung auf dem Rand der Einheitskreisscheibe denken, die dann eine unter diesen Randbedingungen stabile Temperaturverteilung auf der ganzen Einheitskreisscheibe erzeugt. Der zweite Faktor unter dem Integral heißt der **Poisson-Kern**. Mit  $e^{it} = w$  wird er dargestellt durch

$$P(w, z) = \operatorname{Re} \left( \frac{w + z}{w - z} \right)$$

für  $w \in S^1$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq w$ . Bei festem  $w$  verschwindet dieser Realteil für alle  $z \in S^1$  mit  $z \neq w$ , denn wir haben dann

$$\frac{w + z}{w - z} = \frac{z^{-1} + w^{-1}}{z^{-1} - w^{-1}} = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{\bar{z} - \bar{w}}$$



Einige Niveaulinien der Poissonverteilung  $z \mapsto P(1, z) = \operatorname{Re}((1+z)/(1-z))$  zu  $w = 1$ . Sie sollten eigentlich Kreislinien sein und sind nur aufgrund meiner zeichnerischen Schwäche etwas eiförmig geraten.

als da heißt, das komplex Konjugierte unseres Bruches ist gerade das Negative unseres Bruches. Lassen wir aber  $z$  aus dem Inneren der Einheitskreisscheibe radial gegen  $w$  laufen, also  $z = \lambda w$  mit  $\lambda \nearrow 1$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so erhalten wir

$$P(w, \lambda w) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \rightarrow \infty$$

Anschaulich mag man für festes  $w \in S^1$  die Funktion  $z \mapsto P(w, z)$  auf der offenen Einheitskreisscheibe verstehen als diejenige geeignet normalisierte Wärmeverteilung, die sich einstellt, wenn man “den Punkt  $w$  sehr heiß macht und den ganzen übrigen Rand  $S^1$  auf Temperatur Null hält”. Die Niveaulinien dieser Funktion sind übrigenfalls Kreise, die den Einheitskreis in  $w$  berühren, wie zum Beispiel aus ?? folgt.

*Beweis mit Stone-Weierstraß.* Für festes  $z$  mit  $|z| < 1$  finden wir in Erinnerung an das Ende des Beweises von 3.1.11 und durch Vertauschen des Integrals mit der gleichmäßig konvergenten Summe

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}, z) dt = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-i\nu t} z^\nu \right) dt = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1$$

Definieren wir also für  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  seine Poisson-Transformierte  $\tilde{h}$  auf der offenen Einheitskreisscheibe durch

$$\tilde{h}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) P(e^{it}, z) dt$$

so gilt für das Supremum der Funktionswerte von  $\tilde{h}$  auf der offenen Einheitskreisscheibe die Abschätzung  $\|\tilde{h}\|_\infty \leq \|h\|_\infty$ . Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen  $g_n$  auf dem Einheitskreis  $S^1$  gleichmäßig gegen  $h$ , so konvergieren demnach ihre Poisson-Transformierten  $\tilde{g}_n$  auf der offenen Einheitskreisscheibe  $D^\circ$  gleichmäßig gegen  $\tilde{h}$ . Definieren wir also

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Top}(S^1, \mathbb{R}) & \rightarrow & \operatorname{Ens}(D, \mathbb{R}) \\ h & \mapsto & \hat{h} \end{array}$$

durch  $\hat{h}(z) = \tilde{h}(z)$  für  $|z| < 1$  und  $\hat{h}(z) = h(z)$  für  $|z| = 1$ , so wird eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen auf dem Einheitskreis unter  $h \mapsto \hat{h}$  zu einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Für  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  ein trigonometrisches Polynom  $h(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^N c_\nu z^\nu + \bar{c}_\nu \bar{z}^\nu$  wird aber  $\hat{h}$  nach den Argumenten aus 3.1.11 schlicht gegeben durch dieselbe Formel auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe und ist insbesondere stetig. Indem wir ein beliebiges

$h$  mithilfe von III.3.2.15 als gleichmäßigen Grenzwert einer Folge von trigonometrischen Polynomen schreiben, erkennen wir, daß im allgemeinen  $\hat{h}$  auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe ein gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist. Das zeigt, daß  $\hat{h}$  auch im allgemeinen stetig ist auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe.  $\square$

*Übung 3.1.14.* Man zeige durch direkte Abschätzungen, daß eine stetige Funktion auf dem Einheitskreis durch ihre Poisson-Transformierte stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortgesetzt wird. Dies Argument hat den Vorteil, daß es sich ohne Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Im Übrigen verallgemeinern sich alle hier für harmonische Funktionen bewiesenen Aussagen ziemlich direkt auf den Fall harmonischer Funktionen auf offenen Teilmengen eines beliebigen  $\mathbb{R}^n$ .

*Übung 3.1.15.* Man zeige, daß für  $U \subseteq \mathbb{C}$  wegweise einfach zusammenhängend eine stetige komplexwertige Funktion  $U \rightarrow \mathbb{C}$  harmonisch ist genau dann, wenn sie als Summe einer holomorphen Funktion mit einer antiholomorphen Funktion dargestellt werden kann.

## 3.2 Reihenentwicklung des Kotangens

**Satz 3.2.1 (Summe der  $(z-k)^{-1}$ ).** Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt im Sinne absoluter Konvergenz

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \pi \cot(\pi z)$$

3.2.2. Die Summe der  $(z-k)^{-1}$  über alle ganzen  $k$  konvergiert nicht absolut, aber fassen wir wie angedeutet vor dem Summieren jeweils gegenüberliegende Terme zusammen, so entsteht eine absolut konvergente Reihe, die auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  kompakt konvergiert. "Vernünftiges" anderes Zusammenzufassen von jeweils einem positiven und einem negativen Term liefert dasselbe Ergebnis, unsere Summe hat ja denselben Wert bei  $z$  und bei  $z+k$ . Formeln für die Summen der  $(z-k)^{-a}$  bei beliebigem ganzen  $a \geq 1$  gewinnen wir aus unserem Satz leicht durch Ableiten. Allerdings stützt sich der hier gegebene Beweis von 3.2.1 auf Proposition 3.2.4, die den Fall  $a=2$  beschreibt, so daß wir diese Proposition auf andere Weise herleiten müssen.

*Beweis.* Leiten wir beide Seiten der behaupteten Gleichung nach  $z$  ab, so ergibt sich die Gleichung 3.2.4, die wir im Anschluß zeigen. Die Differenz beider Seiten ist also eine Konstante. Da beide Seiten ungerade Funktionen von  $z$  sind, ist diese Konstante Null.  $\square$

3.2.3. Unter dem **Hauptteil** einer meromorphen Funktion an einer gegebenen Stelle versteht man die Summe derjenigen Terme ihrer Laurententwicklung an besagter Stelle, die dort einen Pol haben. Haben zwei meromorphe Funktionen an einer gegebenen Stelle denselben Hauptteil, so ist ihre Differenz dort natürlich holomorph.

**Proposition 3.2.4 (Summe der  $(z-k)^{-2}$ ).** Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt im Sinne absoluter Konvergenz

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2} = \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2$$

*Beweis.* Die Summe auf der linken Seite konvergiert offenbar unabhängig von der Reihenfolge der Summanden kompakt gegen eine Grenzfunktion, die meromorph ist auf ganz  $\mathbb{C}$  mit Polen an allen ganzen Zahlen  $k \in \mathbb{Z}$  und Hauptteilen  $(z-k)^{-2}$  an diesen Polen. Die rechte Seite hat nun jedoch dieselben Polstellen mit denselben Hauptteilen. Die Differenz beider Seiten ist folglich eine holomorphe Funktion  $\delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\delta(z+1) = \delta(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Wir lassen nun im Streifen  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$  den Imaginärteil von  $z$  sehr groß oder sehr klein werden und behaupten, daß beide Seiten unserer Gleichung und erst recht ihre Differenz  $\delta$  gegen Null streben, und zwar gleichmäßig im Realteil von  $z$ , in Formeln

$$\lim_{|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty} \delta(z) = 0$$

Damit ist dann ihre Differenz  $\delta$  beschränkt, nach Liouville 1.6.6 also konstant, also Null. Es bleibt damit nur, diese Behauptung zu zeigen. Sie lohnt nur für die linke Seite einen Beweis. Für  $z$  in unserem Streifen mit  $|\operatorname{Im}(z)| \geq n$  schätzen wir dazu die Terme unserer Summe mit  $-n \leq k \leq n+1$  jeweils ab durch  $n^{-2}$ , so daß sie alle zusammen höchstens  $(2n+2)n^{-2}$  beitragen. Die übrigen Terme können jeweils abgeschätzt werden durch  $(\sqrt{2}k)^{-2}$ , und da die Summe der inversen Quadrate aller natürlichen Zahlen  $\geq 1$  konvergiert, muß die Summe dieser übrigen Terme bei hinreichend großem  $n$  auch beliebig klein werden.  $\square$

**Korollar 3.2.5 (Einige Werte der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion).** An den positiven geraden ganzzahligen Stellen ist der Wert der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion ein rationales Vielfaches der entsprechenden Potenz der Kreiszahl  $\pi$ . Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt also in Formeln

$$\sum_{k \geq 1} k^{-2n} \in \mathbb{Q} \pi^{2n}$$

3.2.6. Für die Summe der ungeraden Potenzen  $k^{-u}$  für ungerades natürliches  $u$  ist derzeit (2005), soweit ich weiß, keine Aussage dieser Art bekannt.

*Beweis.* Multiplizieren wir die Reihenentwicklung des Kotangens 3.2.1 mit  $z$ , so erhalten wir

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + z \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right)$$

im Sinne der kompakten Konvergenz, erst auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , aber dann sehr leicht auch auf  $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$ . Sicher sind beide Seiten gerade Funktionen von  $z$ . Leiten wir beide Seiten  $2n$ -mal ab und werten bei  $z = 0$  aus, so ergibt sich, da wir ja nach 1.7.5 Grenzwert und Ableitung vertauschen dürfen, für  $n \geq 1$  die Formel

$$\left. \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \right|_{z=0} \pi z \cot(\pi z) = 2n \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{2n-1} (2n-1)!}{k^{2n}}$$

Diese Formel drückt den Wert der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion an allen positiven geraden natürlichen Zahlen aus in den Laurentkoeffizienten des Kotangens. Nun ergibt sich die Laurentreihe des Kotangens durch Multiplikation und Inversenbildung aus den Taylorreihen von Sinus und Cosinus und hat nach elementaren Überlegungen insbesondere stets rationale Koeffizienten. Das Korollar folgt.  $\square$

3.2.7. Um die Werte der  $\zeta$ -Funktion an den geraden positiven ganzen Zahlen explizit zu berechnen, beachte man

$$\cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i + \frac{2i e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}$$

Die **Bernoulli-Zahlen**  $B_2, B_4, \dots$  sind nun definiert als die höheren Ableitungen von  $z/(e^z - 1)$  am Ursprung, in Formeln

$$B_{2n} = \left. \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \right|_{z=0} \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)$$

Sie sind natürlich rational und lassen sich induktiv berechnen, indem man die wohlbekannte Taylorreihe von  $(e^z - 1)/z$  formal invertiert. Vermittels dieser Zahlen lassen sich dann die Werte der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion an den positiven geraden ganzen Zahlen nach dem Vorhergehenden und elementarer Rechnung, die dem Leser zur Übung überlassen sei, ausdrücken in der Gestalt

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} B_{2n} \pi^{2n}$$

*Übung 3.2.8 (Alternierende Summe der  $(z - k)^{-1}$ ).* Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Hinweis: Man addiere die alternierende und die nicht alternierende Summe.

*Übung 3.2.9.* Man zeige für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 0$  die Relation

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (2k+1)^{-2n-1} \in \mathbb{Q} \pi^{2n+1}$$

Hinweis: Den Fall  $n = 0$  hatten wir bereits in [II.7.6.16](#) behandelt. Für den allgemeinen Fall leite man die Identität [3.2.8](#) ab und werte bei  $z = 1/2$  aus. Speziell zeige man im Fall  $n = 1$  die Formel

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}$$

### 3.3 Produktentwicklung des Sinus

**Satz 3.3.1 (Produktentwicklung des Sinus).** *Der Sinus läßt sich im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte darstellen als das unendliche Produkt*

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{\pi k} \right) \left( 1 + \frac{z}{\pi k} \right)$$

*Beweis.* Nach [3.3.5](#) und [1.7.5](#) definiert die rechte Seite eine holomorphe Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  mit einfachen Nullstellen an allen ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$  und keinen weiteren Nullstellen. Ihr Quotient nach dem Sinus ist nach dem gleich anschließenden Lemma [3.3.6](#) also von der Gestalt  $\exp(h(z))$  für  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann bilden wir auf beiden Seiten die logarithmische Ableitung im Sinne von [2.3.1](#). Sie vertauscht auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$  mit dem Grenzübergang. Wir finden mit [3.2.4](#) dann, daß  $h$  konstant ist. Teilen wir nun beide Seiten durch  $z$  und setzen  $z = 0$ , so erkennen wir, daß  $h$  sogar identisch verschwindet.  $\square$

3.3.2. Setzen wir hier speziell  $z = \pi/2$ , so ergibt sich die sogenannte **Wallis'sche Produktformel**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$$

**Satz 3.3.3 (Produktentwicklung).** Sei  $X$  eine Menge und  $(f_\nu)$  eine Folge komplexwertiger Funktionen auf  $X$  mit der Eigenschaft, daß die Folge der Partialsummen  $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion konvergiert. So konvergiert auch die Folge der Partialprodukte  $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion  $X \rightarrow \mathbb{C}$ , die wir

$$x \mapsto \prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

notieren und deren Nullstellen genau die Stellen  $x \in X$  sind, an denen einer der Faktoren verschwindet. Darüber hinaus ist der Grenzwert der Partialprodukte unter den gegebenen Voraussetzungen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

3.3.4. Hat in dieser Situation keine der Funktionen  $f_\nu$  eine Nullstelle, so konvergiert mit  $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$  auch  $\sum_{\nu=1}^n |(f_\nu(x))^{-1} - 1|$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion. In der Tat zeigt man für  $z$  hinreichend nah bei 1 leicht die Abschätzung  $|z^{-1} - 1| \leq 2|z - 1|$ . Hat keine der Funktionen  $f_\nu$  eine Nullstelle, so können wir unseren Satz mithin auch auf die Funktionen  $f_\nu^{-1}$  anwenden.

3.3.5. Ist  $X$  ein metrischer oder allgemeiner ein topologischer Raum und sind die  $f_\nu$  stetig und konvergiert die Folge der Partialsummen  $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$  kompakt gegen eine reelle Grenzfunktion, so konvergiert auch die Folge der Partialprodukte  $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$  kompakt gegen eine komplexe Grenzfunktion. Um das zu zeigen, brauchen wir nur 3.3.3 auf die Einschränkungen unserer Funktionen auf Kompakta anzuwenden.

*Beweis.* Ableiten liefert für den Hauptzweig des Logarithmus die Formel

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Es gibt also  $d \in (0, 1)$  derart, daß aus  $|z| < d$  folgt  $|\log(1+z)| \leq 3|z|/2$ . Nun gibt es sicher ein  $N$  mit  $\sum_{\nu=N}^{\infty} |f_\nu(x) - 1| \leq d$  für alle  $x \in X$ , und für  $\nu \geq N$  sind alle  $\log(f_\nu(x))$  wohldefiniert und nach unserer Abschätzung und dem Majorantenkriterium muß auch die Folge der Funktionen  $\sum_{\nu=N}^n \log(f_\nu(x))$  gleichmäßig konvergieren gegen eine betragsmäßig beschränkte Grenzfunktion  $L : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Wenden wir  $\exp$  an und beachten, daß  $\exp$  auf jedem Kompaktum in  $\mathbb{C}$  gleichmäßig stetig ist, so folgt die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Produkte  $\prod_{\nu=N}^n f_\nu(x)$  gegen eine beschränkte Funktion  $X \rightarrow \mathbb{C}$  ohne Nullstelle, nämlich gegen  $\exp \circ L$ . Der Satz folgt, da wieder nach unserer Annahme die Faktoren mit  $1 \leq \nu < N$  und damit auch ihr

Produkt betragsmäßig beschränkt sind und das Produkt mit ihnen deshalb nicht die gleichmäßige Konvergenz zerstören kann. Die Unabhängigkeit des unendlichen Produkts von der Reihenfolge der Faktoren folgt leicht aus dem Umordnungssatz für Reihen [II.2.5.17](#).  $\square$

**Lemma 3.3.6.** *Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  wegweise einfach zusammenhängend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ohne Nullstelle gibt es  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f(z) = \exp h(z)$  für alle  $z \in U$ .*

*Beweis.* Nach [1.4.14](#) hat die holomorphe Funktion  $z \mapsto f'(z)/f(z)$  eine Stammfunktion  $z \mapsto g(z)$  auf  $U$ . Ableiten zeigt, daß  $z \mapsto \exp(g(z))/f(z)$  konstant ist. Wir können also  $h(z) = c + g(z)$  nehmen für eine geeignete Konstante  $c \in \mathbb{C}$ .  $\square$

3.3.7. In der Topologie ?? können sie lernen, daß es allgemeiner für jeden einfach zusammenhängenden topologischen Raum  $U$  und jede stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$  eine stetige Abbildung  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $f(z) = \exp h(z) \quad \forall z \in U$ . Daß für  $U \subseteq \mathbb{C}$  mit  $f$  auch  $h$  holomorph sein muß, folgt dann aus der lokalen Umkehrbarkeit von  $\exp$ . Diese Argumentation gefällt mir sehr viel besser als der vorhergehende Beweis.

*Übung 3.3.8.* Für jede holomorphe Funktion  $f$  ohne Nullstellen mit wegweise einfach zusammenhängenden Definitionsbereich und jedes  $n \geq 1$  gibt es eine holomorphe Funktion  $g$  mit demselben Definitionsbereich und mit der Eigenschaft  $g(z)^n = f(z)$  für alle Punkte  $z$  aus dem Definitionsbereich.

### 3.4 Gammafunktion

**Satz 3.4.1.** *Es gibt genau eine meromorphe Funktion  $\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  derart, daß für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 0$  gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

*Sie heißt die **Gammafunktion** und hat die Werte  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ . Im Körper der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  gilt die **Funktionalgleichung**  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Unsere Gammafunktion ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  holomorph und hat für  $n \in \mathbb{N}$  bei  $z = -n$  jeweils eine einfache Polstelle mit Residuum  $(-1)^n/n!$ .*

3.4.2. Ich will zumindest zwei Gründe dafür angeben, warum diese Funktion von Bedeutung ist: Erstens tritt sie in der Funktionalgleichung der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion [4.1.8](#) auf, und zweitens führt sie zu Abschätzungen von  $n!$ , die in der Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich sind.

*Beweis.* Die obere Abschätzung des Absolutbetrags des Integranden durch  $t^{a-1}$  für  $\operatorname{Re} z \geq a$  zeigt, daß die Folge der nach 1.2.20 holomorphen Funktion

$$F_n(z) = \int_{1/n}^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$

für  $\operatorname{Re} z > 0$  kompakt konvergiert gegen eine nach 1.7.5 holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. Die Abschätzung  $e^{-t} t^{-a} \geq t^2/(a+2)!$  für  $a \in \mathbb{N}$  und  $t > 0$  liefert  $|e^{-t} t^{z-1}| \leq (a+2)! t^{-2}$  für  $\operatorname{Re} z < a+1$  und zeigt, daß die Folge von holomorphen Funktionen

$$G_n(z) = \int_1^n e^{-t} t^{z-1} dt$$

für  $\operatorname{Re} z > 0$  kompakt konvergiert gegen eine holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. In diesem Sinne definiert also das Integral aus dem Satz eine holomorphe Funktion auf der offenen rechten Halbebene. Für  $\operatorname{Re} z > 2$  erhalten wir mit partieller Integration sogar

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

wo wir darauf verzichtet haben, wirklich korrekt erst nach dem partiellen Integrieren den Grenzübergang zu vollziehen. Diese Formel können wir auch umschreiben zu  $\Gamma(z-1) = \Gamma(z)/(z-1)$  und sie liefert uns dann eine meromorphe Fortsetzung unserer Gammafunktion erst auf die Halbebene  $\operatorname{Re} z > -1$ , dann auf die Halbebene  $\operatorname{Re} z > -2$  und so nach und nach auf ganz  $\mathbb{C}$ . Offensichtlich gilt  $\Gamma(1) = 1 = 0!$  und Iteration mit der Funktionalgleichung  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  liefert dann sofort  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Iteration der Funktionalgleichung liefert auch sofort  $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\dots z\Gamma(z)$  alias

$$\Gamma(z) = (z+n)^{-1}(z+n-1)^{-1}\dots z^{-1}\Gamma(z+n+1)$$

was ein Produkt ist von  $(z+n)^{-1}$  mit einer Funktion, die bei  $z = -n$  holomorph ist und die dort den Wert  $(-1)^n/n!$  annimmt.  $\square$

**Satz 3.4.3 (Gauss'sche Formel).** *Auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen in der komplexen Zahlenebene gilt im Sinne kompakter Konvergenz*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

**Satz 3.4.4 (Produktentwicklung der  $\Gamma$ -Funktion).** *Im Sinne der kompakten Konvergenz der Partialprodukte auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen gilt mit der Abkürzung  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)$  die Formel*

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}$$

3.4.5. Um zu sehen, daß der Grenzwert  $\gamma$  existiert, interpretieren wir diese Folge als Eins plus die Differenz zwischen einer geeigneten Untersumme und dem Integral der Funktion  $x \mapsto 1/x$  auf  $[1, n]$ . Diese Differenzen sind dann offensichtlich beschränkt durch Eins.

*Beweis der beiden Sätze.* (1) Wir prüfen zunächst den ersten Satz im Fall  $z > 1$ . Man geht aus von der Identität

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^n \frac{n! t^{z+n-1} dt}{n^n z(z+1) \dots (z+n-1)} = \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

die man durch partielle Integration leicht prüft. Es gilt damit nur noch zu zeigen, daß die linke Seite für  $z > 1$  gegen  $\Gamma(z)$  strebt. Man kann das mit elementaren Methoden unschwer sehen, vergleiche zum Beispiel [?]. Es folgt aber auch direkt aus dem Satz von Lebesgue über das Vertauschen von Integralen und punktweiser monotoner Konvergenz IV.6.4.9, wenn wir für alle  $t \in [0, n)$  die Abschätzungen

$$\left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

nachweisen. Dazu nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus und müssen zeigen, daß für  $t \in [0, n)$  die Funktion  $x \mapsto x \log(1 - \frac{t}{x})$  monoton wächst auf  $[n, \infty)$ . Ihre Ableitung ergibt sich zu

$$\log\left(1 - \frac{t}{x}\right) + \frac{t}{x} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-1}$$

und es reicht folglich zu zeigen, daß die Funktion  $y \mapsto \log(1-y) + y(1-y)^{-1}$  nichtnegativ ist für  $y \in [0, 1)$ . Bei  $y = 0$  nimmt diese Funktion jedoch den Wert Null an und ihre Ableitung

$$\frac{-1}{1-y} + \frac{(1-y) + y}{(1-y)^2} = \frac{y}{(1-y)^2}$$

wird auf  $[0, 1)$  nicht negativ.

(2) Als nächstes prüfen wir, daß das unendliche Produkt aus dem zweiten Satz in den in 3.3.3 vorgegebenen Rahmen fällt, daß also die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left( e^{-z/k} \left( 1 + \frac{z}{k} \right) \right) - 1 \right|$$

kompakt konvergieren. Dazu beachten wir, daß nach der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion gilt

$$1 + t - e^t = t^2 f(t)$$

für eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Wählen wir also ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{C}$ , so finden wir eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  mit

$$|1 + (z/k) - e^{z/k}| \leq C/k^2$$

für alle  $z \in K$  und alle natürlichen Zahlen  $k \geq 1$ , und für das Produkt der linken Seite mit  $|e^{-z/k}|$  gilt offensichtlich eine Abschätzung derselben Gestalt, nur möglicherweise mit größerem  $C$ . Nun zeigt 3.3.3, daß die Formel im Satz eine meromorphe Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert mit einfachen Polstellen an allen nichtpositiven ganzen Zahlen und keinen weiteren Pol- oder Nullstellen.

(3) Als letztes prüfen wir, daß die Partialprodukte  $\Gamma_n$  in unserer Produktentwicklung im zweiten Satz bis auf einen kompakt gegen die konstante Funktion Eins konvergierenden Korrekturterm genau die Glieder unserer Funktionenfolge aus dem ersten Satz sind. Formen wir in der Tat die Partialprodukte etwas um, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{\nu=1}^n \left( \frac{\nu+z}{\nu} \right)^{-1} e^{z/\nu} \\ &= e^{-\gamma z} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \exp \left( \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \right) z \right) \\ &= \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \exp \left( \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \log(n) - \gamma \right) z \right) \end{aligned}$$

Der letzte Faktor strebt nun für  $n \rightarrow \infty$  kompakt gegen 1, womit beide Sätze bewiesen wären.  $\square$

3.4.6. Aus den Produktentwicklungen 3.4.4 und 3.3.1 folgt sofort die Gleichheit von meromorphen Funktionen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

und insbesondere die Identität  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

*Ergänzende Übung 3.4.7.* Für komplexe  $x, y \in \mathbb{C}$  mit positivem Realteil definiert man die **Euler'sche Betafunktion** als das Integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

Man zeige die Identität  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ . Hinweis: Per definitionem gilt  $\Gamma(x) = \int_0^\infty a^{x-1}e^{-a} da$ ,  $\Gamma(y) = \int_0^\infty b^{y-1}e^{-b} db$ ,  $\Gamma(x+y) = \int_0^\infty s^{x+y-1}e^{-s} ds$ . Man zeige  $B(x, y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$  mithilfe des Satzes von Fubini und der Substitution  $s = a+b$ ,  $t = a/(a+b)$ .

### 3.5 Riemann'scher Abbildungssatz

**Satz 3.5.1 (Riemann'scher Abbildungssatz).** *Jede einfach zusammenhängende echte offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  läßt sich biholomorph mit der offenen Einheitskreisscheibe identifizieren.*

*Ergänzung 3.5.2.* Die tiefere Bedeutung dieses Satzes wird erst klar im Lichte des sogenannten "großen Riemann'schen Abbildungssatzes", der besagt, daß es bis auf biholomorphe Identifikationen genau drei einfach zusammenhängende "Riemann'sche Flächen" gibt: Die Riemann'sche Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  und die offene Einheitskreisscheibe  $E$ . Man findet einen Beweis zum Beispiel in [For77]. Auf ganz  $\mathbb{C}$  gibt es im Gegensatz zur offenen Einheitskreisscheibe nach dem Satz von Liouville 1.6.6 keine nichtkonstante beschränkte holomorphe Funktion. Es ist also unmöglich, diese beiden Gebiete biholomorph miteinander zu identifizieren. Wir beginnen den Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes mit einigen allgemeinen Resultaten zu Folgen holomorpher Funktionen.

**Satz 3.5.3 (Montel).** *Jede Folge von holomorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene, deren Glieder einen simultan betragsmäßig beschränkten Wertebereich haben, besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.*

3.5.4. Man kann diesen Satz verstehen als ein Korollar des Satzes von Arzela-Ascoli VI.10.6.9, wenn man beachtet, daß für jede Folge von holomorphen Funktionen mit betragsmäßig simultan beschränktem Wertebereich ihre Ableitungen nach der Formel aus dem Beweis von 1.6.5 lokal simultan beschränkt sind. Wir geben hier jedoch einen eigenständigen Beweis, der im wesentlichen der Beweis von Arzela-Ascoli mit einigen in unserem Spezialfall möglichen Vereinfachungen ist.

*Beweis.* Wir wählen eine dichte Folge  $p_0, p_1, \dots$  im gemeinsamen Definitionsbereich der Funktionen  $f_n$  unserer Folge. Mit Heine-Borel II.6.7.8 finden wir eine Teilfolge  $f_n^0$ , die bei  $p_0$  punktweise konvergiert. Von dieser finden wir eine Teilfolge  $f_n^1$ , die auch bei  $p_1$  punktweise konvergiert. Von dieser hinwiederum finden wir eine Teilfolge  $f_n^2$ , die auch bei  $p_2$  punktweise konvergiert. So machen wir immer weiter. Die "diagonale" Folge  $f_n^n$  konvergiert dann punktweise an allen  $p_i$  und ist damit kompakt konvergent nach Lemma 3.5.5, das wir im Anschluß beweisen.  $\square$

**Lemma 3.5.5.** *Eine lokal beschränkte Folge von holomorphen Funktionen, die an allen Punkten einer dichten Teilmenge ihres gemeinsamen Definitionsbereichs punktweise konvergiert, konvergiert bereits kompakt auf dem gesamten Definitionsbereich.*

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß unsere Folge  $f_n$  auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich gleichmäßig konvergiert. Nun kann jede solche abgeschlossene Kreisscheibe vergrößert werden zu einer echt größeren abgeschlossenen Kreisscheibe  $L$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich, und mit der Integralformel für die Ableitung aus dem Beweis von 1.6.5 folgt aus der simultanen Beschränktheit der Funktionen unserer Folge auf dem Rand dieser größeren Kreisscheibe  $L$  die simultane Beschränktheit ihrer Ableitungen auf unserer ursprünglichen Kreisscheibe  $K$ , sagen wir durch eine Konstante  $c > 0$ . Aus dem Mittelwertsatz II.7.2.11 folgt nun  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq c|x - y|$  für alle  $x, y \in K$ . Wählen wir für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E = E_\varepsilon \subset K$  unserer dichten Teilmenge derart, daß die Kreisscheiben um  $x \in E$  mit Radius  $c^{-1}\varepsilon$  bereits  $K$  überdecken, so folgt aus  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \forall x \in E$  bereits  $|f_n(y) - f_m(y)| \leq 3\varepsilon \forall y \in K$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es also  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \leq m \leq n \Rightarrow |f_n(y) - f_m(y)| \leq 3\varepsilon \forall y \in K$ .  $\square$

*Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes 3.5.1.* Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  eine einfach zusammenhängende echte offene Teilmenge. Wir gehen in drei Schritten vor.

(1) Wir zeigen zunächst, daß es eine holomorphe Injektion von  $G$  in eine Kreisscheibe von endlichem Radius gibt. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $0 \notin G$ . Nach 3.3.6 gibt es dann auf  $G$  einen Zweig des Logarithmus, in Formeln  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $z = \exp(g(z)) \quad \forall z \in G$ . Das Bild von  $g$  ist offen und enthält folglich eine offene Kreisscheibe  $D$ . Dann hat es aber notwendig leeren Schnitt mit der um  $2\pi i$  verschobenen Kreisscheibe  $2\pi i + D$ . Ist  $w$  das Zentrum dieser verschobenen Kreisscheibe und wenden wir nach  $g$  noch die Abbildung  $z \mapsto (z - w)^{-1}$  an, so wird in der Tat  $G$  in eine Kreisscheibe von endlichem Radius eingebettet.

(2) Nach dem ersten Schritt können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser Bereich  $G$  den Nullpunkt enthält und in der offenen Einheitskreisscheibe  $E$  enthalten ist. Wir behaupten nun, daß es unter allen holomorphen Injektionen  $f : G \rightarrow E$  mit  $f(0) = 0$  eine gibt, für die  $|f'(0)|$  maximal wird. In der Tat umfaßt  $G$  eine Kreisscheibe  $B(0; \varepsilon)$  für  $\varepsilon > 0$ , woraus folgt, daß für holomorphe Abbildungen  $f : G \rightarrow E$  die Ableitung am Nullpunkt, nach der Formel aus dem Beweis von 1.6.5 gegeben durch

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z^2} dz$$

betragsmäßig beschränkt ist durch  $\varepsilon^{-1}$ . Also gibt es ein Supremum  $S$  der Menge der möglichen  $|f'(0)|$  und eine Folge von holomorphen Injektionen  $f_n : G \rightarrow E$  derart, daß  $|f'_n(0)|$  gegen dieses Supremum strebt. Nach dem Satz von Montel 3.5.3 dürfen wir sogar annehmen, daß diese Folge kompakt konvergiert. Die Grenzfunktion  $f$  ist dann nach 1.7.5 wieder holomorph mit  $|f'(0)| = S$ . Sie ist auch injektiv nach dem Korollar 3.5.7, das wir im Anschluß beweisen, und landet nicht nur in der abgeschlossenen, sondern sogar in der offenen Einheitskreisscheibe nach dem Satz über die Gebietstreue 1.8.16. Also haben wir eine holomorphe Injektion  $f : G \rightarrow E$  gefunden mit  $f(0) = 0$ , für die die Ableitung  $|f'(0)|$  den unter diesen Einschränkungen größtmöglichen Wert annimmt.

(3) Jetzt gilt es noch zu zeigen, daß die im vorherigen Schritt konstruierte Abbildung  $f$  surjektiv auf die ganze Einheitskreisscheibe geht. Dazu führen wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch, indem wir zu jeder nicht surjektiven holomorphen Injektion  $f : G \hookrightarrow E$  mit  $f(0) = 0$  eine weitere konstruieren, deren Ableitung im Ursprung betragsmäßig noch größer ist. Sei also  $p \in E \setminus f(G)$ . Wir finden  $h_1 : E \xrightarrow{\sim} E$  biholomorph mit  $h_1(p) = 0$ . Nach 3.3.8 gibt es dann eine Wurzel von  $h_1 \circ f$ , als da heißt eine Funktion  $g$  mit  $q \circ g = h_1 \circ f$  für  $q : z \mapsto z^2$  das Quadrieren. Schließlich finden wir dann noch  $h_2 : E \xrightarrow{\sim} E$  biholomorph mit  $h_2(g(0)) = 0$ . Wir behaupten nun, daß  $F = h_2 \circ g$  eine größere Ableitung im Ursprung hat als  $f$ . Um das zu sehen, beachten wir  $q \circ h_2^{-1} \circ F = h_1 \circ f$  alias  $(h_1^{-1} \circ q \circ h_2^{-1}) \circ F = f$ . Nun ist aber der Ausdruck in Klammern eine biholomorphe nicht invertierbare Abbildung  $E \rightarrow E$ , die den Ursprung festhält. Ihre Ableitung im Ursprung ist nach 1.8.20 also betragsmäßig echt kleiner als Eins, und mit der Kettenregel folgt  $|F'(0)| > |f'(0)|$ .  $\square$

**Satz 3.5.6 (Nullstellenanzahl von Grenzfunktionen).** *Sei auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben. Haben alle Funktionen unserer Folge mit Vielfachheiten gerechnet höchstens  $N$  Nullstellen und*

ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion mit Vielfachheiten gerechnet höchstens  $N$  Nullstellen.

*Beweis.* Seien  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  unsere Funktionen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ihre Grenzfunktion. Sind  $p_1, \dots, p_r$  paarweise verschiedene Nullstellen von  $f$ , so können wir paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben  $K_1, \dots, K_r \subset U$  wählen so, daß  $p_s$  jeweils die einzige Nullstelle von  $f$  aus  $K_s$  ist. Sicher verschwinden nur endlich viele der  $f_n$  auf dem Rand irgend einer unserer Kreisscheiben. Wegen der kompakten Konvergenz der Ableitungen nach 1.7.5 haben wir also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_s} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_s} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Das aber besagt nach 2.3.2, daß für hinreichend großes  $n$  die Funktion  $f_n$  mit Vielfachheiten gerechnet ebensoviele Nullstellen in der Kreisscheibe  $K_s$  hat wie die Grenzfunktion  $f$ .  $\square$

**Korollar 3.5.7.** *Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend, so ist die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge injektiver holomorpher Funktionen auf  $U$  entweder injektiv oder konstant.*

*Beweis.* Die Herleitung aus 3.5.6 bleibe dem Leser überlassen.  $\square$

*Übung 3.5.8.* Man zeige, daß der Satz über die Anzahl der Nullstellen von Grenzfunktionen analog auch gilt, wenn wir die Vielfachheiten nicht beachten: Ist auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben, und haben alle Funktionen unserer Folge höchstens  $N$  Nullstellen, und ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion höchstens  $N$  Nullstellen.

## 4 Erste Anwendungen in der Zahlentheorie

### 4.1 Verteilung von Primzahlen

**Satz 4.1.1 (Primzahlsatz).** *Bezeichnet  $\pi(x)$  für jede reelle Zahl  $x$  die Zahl der Primzahlen  $\leq x$ , so gilt*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} = 1$$

4.1.2. Das Symbol  $\log$  ist hier wie immer in diesem Text zu interpretieren als der natürliche Logarithmus alias die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp$ . Etwas vage gesagt ist für großes  $x$  also die Wahrscheinlichkeit, daß eine ganze Zahl  $\leq x$  prim ist, in etwa  $1/\log(x)$ . Die Konvergenz ist jedoch sehr langsam: Bei  $x = 100000$  finden wir als Wert etwa 1,1 und bei  $x = 10^9$  als Wert etwa 1,05. Der Beweis wird uns diesen ganzen Abschnitt beschäftigen und wird erst ganz am Ende gegeben. Im Grundgedanken zeigen wir den Primzahlsatz, indem wir einen ‘‘Taubersatz’’ anwenden auf die logarithmische Ableitung der Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion, geteilt durch  $z$  und bereinigt um den Hauptteil dieses Quotienten bei  $z = 1$ .

**Definition 4.1.3.** Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 1$  definieren wir den Wert der **Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion** an der Stelle  $z$  durch die absolut konvergente Reihe

$$\zeta(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^z}$$

4.1.4. Mit II.4.6.12 sieht man leicht, daß die Partialsummen dieser Reihe für jedes  $\alpha > 1$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \geq \alpha$  gleichmäßig konvergieren. Folglich definiert unsere Reihe eine holomorphe Funktion auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1$ .

**Satz 4.1.5 (Produktentwicklung der  $\zeta$ -Funktion).** *Bezeichnet  $P \subset \mathbb{N}$  die Menge aller Primzahlen, so gilt*

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

*im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1$ , unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.*

4.1.6. Diese Produktentwicklung geht auf Euler zurück und ihre Faktoren heißen danach die **Euler-Faktoren**. Diese Terminologie verallgemeinert man dann auf allgemeinere  $\zeta$ -Funktionen und sogenannte ‘‘ $L$ -Reihen’’, die uns später begegnen werden.

*Beweis.* Unsere allgemeinen Überlegungen 3.3.4 zeigen, daß das Produkt auf der rechten Seite auf  $\operatorname{Re}(z) > 1$  kompakt konvergiert. Nun können wir für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  ja die Faktoren in eine geometrische Reihe entwickeln in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots$$

Wählen wir  $E \subset P$  endlich und bezeichnen mit  $\mathbb{N}(E)$  die Menge aller natürlichen Zahlen  $\geq 1$ , deren sämtliche Primfaktoren zu  $E$  gehören, so erhalten wir mit II.2.6.11 für die Partialprodukte die Darstellung

$$\prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}(E)} \frac{1}{k^z}$$

Betrachten wir auf beiden Seiten jeweils die Menge  $E = E_n$  der ersten  $n$  Primzahlen und lassen  $n$  gegen unendlich streben, so konvergiert die rechte Seite gegen  $\zeta(z)$  nach dem Satz über dominierte Konvergenz IV.6.5.10, der im vorliegenden Spezialfall im Wesentlichen auch bereits als Übung II.2.5.27 behandelt wurde.  $\square$

**Lemma 4.1.7 (Fortsetzbarkeit der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion).** *Die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion läßt sich zu einer meromorphen Funktion auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$  fortsetzen, und diese Fortsetzung ist holomorph mit Ausnahme der Stelle  $z = 1$ , an der sie einen einfachen Pol mit dem Residuum Eins hat.*

*Vorschau 4.1.8.* Die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion läßt sich sogar zu einer meromorphen Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen und die mit dieser Fortsetzung und der  $\Gamma$ -Funktion aus 3.4.1 erklärte meromorphe Funktion  $\Lambda(z) := \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z)$  erfüllt die **Funktionalgleichung**  $\Lambda(z) = \Lambda(1-z)$  alias ist punktsymmetrisch um den Punkt  $1/2$ , in Formeln  $\Lambda((1/2) + z) = \Lambda((1/2) - z)$ . Des weiteren hat  $\Lambda$  nur bei 0 und 1 Polstellen. Wir zeigen das alles hier nicht.

*Beweis.* Für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  gilt

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^z} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx$$

Die Partialsummen dieser Reihe jedoch bilden eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , da wir die Summanden für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  abschätzen können durch

$$\left| \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx \right| = \left| z \int_n^{n+1} \left( \int_n^x \frac{du}{u^{z+1}} \right) dx \right| \leq \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re}(z)+1}} \quad \square$$

**Lemma 4.1.9 (Nullstellen der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion).** Die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion hat keine Nullstellen  $z$  mit Realteil  $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ .

*Ergänzung 4.1.10.* Die **Riemann'sche Vermutung** besagt sehr viel stärker, daß die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion sogar keine Nullstellen mit Realteil  $> 1/2$  haben sollte. Mit der Funktionalgleichung 4.1.8 und den Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion folgt daraus sofort, daß außer den "trivialen" Nullstellen bei den negativen geraden ganzen Zahlen alle Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion auf der Gerade  $\operatorname{Re}(z) = 1/2$  liegen müßten. Diese Vermutung ist eine der berühmtesten und wichtigsten offenen Fragen der Mathematik.

4.1.11. Den folgenden Beweis und insbesondere sein Ende verstehe ich leider nur oberflächlich. Ich kann insbesondere kein Prinzip erkennen, das einen auf diese Idee hätte führen sollen.

*Ergänzung 4.1.12.* Der Integrallogarithmus, der definiert wird durch die Formel

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

sollte für  $x \rightarrow \infty$  die Primzahlfunktion  $\pi(x)$  noch sehr viel besser approximieren als  $\frac{x}{\log x}$ . Man kann sogar zeigen, daß die Riemann'sche Vermutung äquivalent ist zur Aussage, daß es eine Konstante  $C$  gibt mit

$$|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| \leq C\sqrt{x} \log(x)$$

für hinreichend großes  $x$ , vergleiche etwa [Bru01]. Die Verträglichkeit dieser Vermutung mit dem Primzahlsatz zeigt Übung II.4.5.6. Wie bereits erwähnt finden wir bei  $x = 100000$  als Wert von  $\pi(x) \log(x)/x$  ungefähr 1,1 und bei  $x = 10^9$  ungefähr 1,05. Die entsprechenden Werte von  $\pi(x)/\operatorname{Li}(x)$  sind dahingegen ungefähr 0,991 und 0,99997.

*Beweis.* Für Realteil  $\operatorname{Re}(z) > 1$  folgt das mit 3.3.4 aus der Produktentwicklung. Um auch Nullstellen mit Realteil Eins auszuschließen, reicht es zu zeigen, daß die logarithmische Ableitung der  $\zeta$ -Funktion außer bei  $z = 1$  keine Polstellen auf der Geraden  $\operatorname{Re}(z) = 1$  hat. Für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  erhalten wir aus der Produktentwicklung für die logarithmische Ableitung der  $\zeta$ -Funktion die Darstellung

$$\frac{d \log \zeta}{dz} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = - \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z - 1}$$

Nun unterscheidet sich die rechte Seite von der einfacher handhabbaren Funktion

$$\Phi(z) = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z}$$

nur um das Vorzeichen und um die Reihe

$$\sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z - 1} - \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z} = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z(p^z - 1)}$$

Diese Reihe konvergiert offensichtlich sogar auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$  kompakt gegen eine holomorphe Funktion. Mit der logarithmischen Ableitung der  $\zeta$ -Funktion hat also auch unsere Funktion  $\Phi$  eine meromorphe Fortsetzung auf die Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$  mit nur einfachen Polen, die eben bei  $z = 1$  und an den Nullstellen von  $\zeta$  liegen und deren Residuum an jeder Nullstelle der  $\zeta$ -Funktion aufgrund des Vorzeichenwechsels das Negative der Nullstellenordnung ist bzw. am einfachen Pol der  $\zeta$ -Funktion bei  $z = 1$  eine Eins. Nun beachte man für alle  $\alpha > 0$  und  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} (p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2})^4 &= \Phi(1 + \varepsilon + 2i\alpha) + 4\Phi(1 + \varepsilon + i\alpha) \\ &\quad + 6\Phi(1 + \varepsilon) \\ &\quad + 4\Phi(1 + \varepsilon - i\alpha) + \Phi(1 + \varepsilon - 2i\alpha) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit  $\varepsilon > 0$ , lassen  $\varepsilon$  von oben gegen Null streben und beachten  $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ , so erhalten wir für  $\mu$  bzw.  $\nu$  die Nullstellenordnungen von  $\zeta$  an den Stellen  $1+i\alpha$  bzw.  $1+2i\alpha$  die Abschätzung  $0 \leq 6 - 2\nu - 8\mu$ . Daraus folgt dann sofort, daß die  $\zeta$ -Funktion auch keine Nullstellen mit Realteil Eins haben kann.  $\square$

4.1.13. Gegeben  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte meßbare Funktion erklärt man eine holomorphe Funktion auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , ihre **Laplace-Transformierte**, durch die Vorschrift

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

Daß diese Funktion tatsächlich holomorph ist, wird der Leser als Übung leicht zeigen können. Die Laplace-Transformation wird allgemeiner für Borel-Maße auf  $\mathbb{R}_{>0}$  erklärt, die für  $t \rightarrow \infty$  so langsam dichter werden, daß ihre Transformierte noch auf einer Halbebene der Form  $\operatorname{Re}(z) > a$  definiert ist. Sie ist bei der Lösung von Differentialgleichungen oft hilfreich, da sie diese in algebraische Gleichungen umwandelt.

**Satz 4.1.14 (Taubersatz von Newman).** *Ist  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und meßbar und läßt sich die Laplace-Transformierte  $F$  von  $f$  holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  fortsetzen, so gilt für den Wert bei Null dieser Ausdehnung die Formel*

$$F(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt$$

4.1.15. Statt  $f$  meßbar ist für unsere Anwendung die elementarere Bedingung ausreichend, daß  $f$  stetig sein soll auf dem Komplement des Bildes einer streng monoton wachsenden Folge. Die Bezeichnung als "Taubersatz" kommt her von der vagen Analogie zum ursprünglichen Satz von Tauber, den wir in II.5.4.4 diskutieren.

*Beweis.* Für  $T \in [0, \infty)$  und  $z \in \mathbb{C}$  setzen wir  $F_T(z) = \int_0^T f(t) e^{-zt} dt$ . Diese Funktionen sind natürlich holomorph. Betrachten wir nun  $R > 0$  und wählen  $\delta > 0$  so klein, daß  $F$  sich holomorph fortsetzen läßt auf eine offene Menge, die

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R, \operatorname{Re} z \geq -\delta\}$$

umfaßt. Ist  $\gamma$  der Randweg dieses Gebiets, so liefert der Integralsatz von Cauchy

$$F(0) - F_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (F(z) - F_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}$$

Das Hinzufügen der beiden hinteren Faktoren ist ein Kunstgriff, dessen Herkunft ich nicht verstehe. Wir schätzen nun unser Wegintegral ab. Auf dem offenen Halbkreis  $|z| = R, \operatorname{Re} z > 0$ , ja sogar auch der ganzen offenen Halbebene  $\operatorname{Re} z > 0$ , finden wir unter der Annahme  $|f(t)| \leq B$  für alle  $t$  die Schranke

$$|F(z) - F_T(z)| = \left| \int_T^{\infty} f(t) e^{zt} dt \right| \leq B \int_T^{\infty} |e^{-zt}| dt = \frac{B e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{\operatorname{Re} z}$$

Da für  $|w| = 1$  stets gilt  $|1 + w^2| = |w^{-1} + w| = 2|\operatorname{Re} w|$ , erhalten wir auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$  für den Betrag der hinteren Faktoren

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = e^{(\operatorname{Re} z)T} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R^2}$$

Das Integral über den Teil unseres Weges mit Realteil größergleich Null ist also betragsmäßig beschränkt durch  $2\pi B/R$ . Das Integral über den Teil des Weges  $\gamma$  in der Halbebene  $\operatorname{Re} z \leq 0$  schätzen wir für  $F$  und für  $F_T$  separat ab. Da  $F_T$  holomorph ist auf ganz  $\mathbb{C}$ , können wir ebensogut das Integral über den Halbkreis  $|z| = R, \operatorname{Re} z \leq 0$  berechnen. Für  $\operatorname{Re} z < 0$  finden wir

$$|F_T(z)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| \leq B \int_0^T |e^{-zt}| dt \leq \frac{e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{-\operatorname{Re} z}$$

und mit derselben Abschätzung wie zuvor ist dieser Anteil des Integrals betragsmäßig beschränkt durch  $2\pi B/R$ . Das Integral über

$$F(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}$$



SkriptenBilder/BildTauN.png

Der Integralweg aus dem Beweis des Taubersatzes von Newman

über den Teil unseres Weges  $\gamma$ , der in der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  verläuft, strebt nun aber offensichtlich gegen Null für  $T \rightarrow \infty$ , da die Funktionenfolge  $e^{zn}$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) < 0$  kompakt gegen die Nullfunktion konvergiert und simultan beschränkt ist auf der abgeschlossenen Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ . Damit folgt, daß es für jedes  $R > 0$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $T(R, \varepsilon)$  gibt mit

$$T \leq T(R, \varepsilon) \Rightarrow |F(0) - F_T(0)| \leq \frac{2B}{R} + \varepsilon \quad \square$$

4.1.16. Das folgende Lemma liefert in der uns interessierenden Anwendung des Taubersatzes die Beschränktheit der zu transformierenden Funktion.

**Lemma 4.1.17.** *Für die Funktion  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und der Summe wie immer nur über Primzahlen  $p$  gibt es eine Konstante  $C$  mit  $\vartheta(x) \leq Cx \quad \forall x \in [0, \infty)$ .*

*Beweis.* Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} \geq \binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p = e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}$$

und damit  $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq 2n(\log 2)$ . Gegeben  $x \geq 0$  finden wir  $n \in \mathbb{N}$  mit  $2n \leq x < 2n + 2$  und folglich  $\vartheta(2n) \leq \vartheta(x) \leq \vartheta(2n) + \log(2n + 1)$  und  $\vartheta(n) = \vartheta(x/2)$ . Daraus folgt aber leicht

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - \vartheta(x/2) &\leq \vartheta(2n) - \vartheta(n) + \log(2n + 1) \\ &\leq 2n(\log 2) + \log(2n + 1) \\ &\leq x(\log 2) + \log(x + 1) \\ &\leq x((\log 2) + 1) \end{aligned}$$

und schließlich durch Aufsummieren  $\vartheta(x) \leq 2x(\log(2) + 1)$ . □

**Lemma 4.1.18.** *Sei  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  wie im vorhergehenden Lemma. So existiert in  $\mathbb{R}$  der Grenzwert*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$$

*Beweis.* Für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  können wir die Funktion  $\Phi(z)$  aus dem vorhergehenden Beweis darstellen in der Gestalt

$$\Phi(z) = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z} = z \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} dx = z \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{zt} dt$$

wobei wir uns das mittlere Integral für die zweite Gleichheit als die konvergente Reihe  $\sum_{p \in P} z \int_p^\infty \frac{\log p}{x^{z+1}} dx$  geschrieben denken. Wären wir etwas gebildeter und wüßten, daß die Laplace-Transformation Konvolutionen in Produkte verwandelt, so könnten wir auch von der offensichtlichen Darstellung von  $\Phi(z)$  als Laplace-Transformierte eines diskreten Maßes und von  $1/z$  als Laplace-Transformierte der konstanten Funktion 1 ausgehen und so die inverse Laplace-Transformierte von  $\Phi(z)/z$  finden. Substituieren wir  $z + 1$  für  $z$ , so ergibt sich für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  die Gleichung

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} = \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-t} e^{-zt} dt$$

und weiter

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty (\vartheta(e^t) e^{-t} - 1) e^{-zt} dt$$

Auf der linken Seite steht aber eine Funktion, die sich nach unseren Erkenntnissen im Beweis von 4.1.9 holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  fortsetzen läßt. Auf der rechten Seite ist  $(\vartheta(e^t) e^{-t} - 1)$  für  $t \in [0, \infty)$  betragsmäßig beschränkt nach 4.1.17. Also existiert nach dem Taubersatz 4.1.14 der Grenzwert  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \vartheta(e^t) e^{-t} - 1 dt$  und ist eine reelle Zahl. Substituieren wir nun wieder  $x = e^t$ , so folgt das Lemma.  $\square$

**Lemma 4.1.19.** Sei  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  wie im vorhergehenden Lemma. So gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x)/x = 1$$

*Beweis.* Gäbe es für  $\lambda > 1$  beliebig große  $x$  mit  $\vartheta(x) \geq \lambda x$ , so hätten wir für alle solchen  $x$  die Abschätzung

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - s}{s^2} ds = C(\lambda) > 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 4.1.18. Gäbe es für  $\lambda < 1$  beliebig große  $x$  mit  $\vartheta(x) \leq \lambda x$ , so fänden wir ähnlich für alle derartigen  $x$  die Abschätzung

$$\int_{\lambda x}^x \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda x}^x \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - s}{s^2} ds = c(\lambda) < 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 4.1.18.  $\square$

*Beweis des Primzahlsatzes 4.1.1.* Sicher haben wir stets

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log(x)$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  haben wir aber auch

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \log p \\ &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} (1 - \varepsilon) \log x \\ &\geq (1 - \varepsilon) \log(x) (\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) \\ &\geq (1 - \varepsilon) \log(x) (\pi(x) - x^{1-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Teilen wir durch  $x$ , so ergibt sich mit 4.1.19 daraus für alle  $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \geq 1 \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon) \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \quad \square$$

4.1.20. Bezeichnet man für reelles  $x$  mit  $\pi_2(x)$  die Zahl der **Primzahlzwillinge** unter  $x$ , also die Zahl der primen  $p \leq x$ , für die  $p - 2$  auch prim ist, so besteht die Vermutung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_2(x) (\log(x))^2}{x} = c$$

für eine reelle Konstante  $c > 0$ , die genauer gegeben sein sollte durch das unendliche Produkt  $c = 2 \prod_p (1 - (p-1)^{-2})$ . Bisher (2005) weiss man jedoch noch nicht einmal, ob es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

*Quellen* 4.1.21. Die Darstellung in diesem Abschnitt hält sich eng an Zagier's Artikel im American Mathematical Monthly [Zag97], wo man auch zusätzliche Quellenangaben und interessante historische Anmerkungen finden kann. Eine stärker auf allgemeinen Methoden der Funktionalanalysis basierende Darstellung findet man zum Beispiel in Rudin's Funktionalanalysis [Rud73] als Anwendung anderer Tauber-Sätze. Ein guter Zugang zu modernen Entwicklungen in der analytischen Zahlentheorie scheint mir [Kow04].

## 4.2 Primzahlen in Restklassen

**Satz 4.2.1 (Primzahlen in Restklassen).** *Gegeben zwei teilerfremde natürliche Zahlen gibt es stets unendlich viele Primzahlen, die bei Teilung durch die Größere als Rest die Kleinere lassen.*

4.2.2. Zum Beispiel gibt es unendlich viele Primzahlen, deren Dezimaldarstellung mit der Ziffer 3 endet. Der Beweis des Satzes wird erst ganz zu Ende dieses Abschnitts gegeben und stützt sich auf den Satz 4.2.7 über die meromorphen Fortsetzungen der sogenannten  $L$ -Reihen, die wir gleich einführen werden, sowie auf elementare Charaktertheorie, die wir im Anschluß besprechen. Den Beweis von 4.2.7 holen wir dann im anschließenden Abschnitt 4.3 über Dirichlet-Reihen nach.

4.2.3. Wir erinnern daran, daß man zu jedem Ring  $R$  seine Einheitengruppe  $R^\times$  bilden kann. Für  $m \in \mathbb{Z}$  erinnern wir weiter an den Restklassenring  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Für  $k \in \mathbb{Z}$  bezeichne  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  seine Restklasse.

**Definition 4.2.4.** Gegeben ein Gruppenhomomorphismus  $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  definiert man eine holomorphe Funktion auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1$  durch die sogenannte  **$L$ -Reihe**

$$L(z, \chi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^z}$$

mit der Konvention  $\chi(k) = \chi(\bar{k})$  für  $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  und  $\chi(k) = 0$  sonst. Die Konvergenz der Reihe für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  ist unproblematisch, da unser Gruppenhomomorphismus notwendig in den Einheitswurzeln landet.

4.2.5. Eine Abbildung  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein **Dirichlet-Charakter modulo  $m$**  genau dann, wenn es einen Gruppenhomomorphismus  $\bar{\chi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  gibt mit  $\chi(k) = \bar{\chi}(\bar{k})$  für  $k$  teilerfremd zu  $m$  und  $\chi(k) = 0$  sonst. Das Symbol  $L$  mag auf Dirichlet's Vornamen Lejeune zurückzuführen sein.

**Lemma 4.2.6 (Produktdarstellung von  $L$ -Reihen).** Die  $L$ -Reihe  $L(z, \chi)$  besitzt für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  auch die Darstellung als Produkt

$$L(z, \chi) = \prod_{p \nmid m} \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p^z} \right)^{-1}$$

im Sinne der kompakten Konvergenz der Teilprodukte unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Das Produkt ist hier zu bilden über alle Primzahlen, die nicht  $m$  teilen.

*Beweis.* Man beachte  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$  für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Mit dieser Erkenntnis kann der Beweis ebenso geführt werden wie im Fall der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion in 4.1.5.  $\square$

**Satz 4.2.7 (Fortsetzbarkeit von  $L$ -Reihen).** *Alle  $L$ -Reihen  $L(z, \chi)$  lassen sich meromorph auf die Halbebene  $\operatorname{Re} z > 0$  fortsetzen. Ist  $\chi$  nicht der konstante Charakter, so ist diese Fortsetzung holomorph und hat keine Nullstelle bei  $z = 1$ . Ist  $\chi$  der konstante Charakter, so hat diese Fortsetzung einen einfachen Pol bei Eins, der dann aber auch ihr einziger Pol ist.*

*Beweis.* Im Fall des konstanten Charakters zeigt die Produktentwicklung, daß unsere  $L$ -Reihe aus der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion entsteht durch das Wegteilen der Euler-Faktoren zu allen Primteilern von  $m$ . In diesem Fall folgt damit unsere Behauptung aus der entsprechenden Aussage für die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion 4.1.7. Den Beweis im Fall allgemeiner  $L$ -Reihen verschieben wir auf das Ende des anschließenden Abschnitts 4.3.  $\square$

*Ergänzung 4.2.8.* Unsere Dirichlet-Reihen lassen sich meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen und erfüllen bemerkenswerte Funktionalgleichungen. Das soll hier nicht weiter ausgeführt werden.

**Definition 4.2.9.** Gegeben eine Gruppe  $G$  notieren wir  $\mathfrak{X}(G) := \operatorname{Grp}(G, \mathbb{C}^\times)$  die Menge aller Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $\mathbb{C}^\times$ . Sie heißen die **Charaktere** oder genauer die **multiplikativen Charaktere** unserer Gruppe  $G$ . Die Charaktere bilden eine Untergruppe von  $\operatorname{Ens}(G, \mathbb{C}^\times)$  und jeder Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow H$  liefert durch Vorschalten einen Gruppenhomomorphismus  $\mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$ .

**Lemma 4.2.10.** *Für jede endliche abelsche Gruppe  $G$  und jeden Charakter  $\chi \in \mathfrak{X}(G)$  gilt*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \chi \text{ ist konstant;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Im Fall des konstanten Charakters ist das eh klar. In jedem Fall gilt für jedes Element  $g_1 \in G$  natürlich

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_1 g) = \chi(g_1) \sum_{g \in G} \chi(g)$$

Ist nun der Charakter  $\chi$  nicht konstant, so gibt es ein  $g_1 \in G$  mit  $\chi(g_1) \neq 1$  und das Lemma folgt auch in diesem Fall.  $\square$

*Übung 4.2.11.* Das Auswerten an der Restklasse der Eins definiert einen Isomorphismus zwischen der Charaktergruppe der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  und der Gruppe der  $d$ -ten Einheitswurzeln  $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mu_d$ ,  $\chi \mapsto \chi(\bar{1})$ .

**Proposition 4.2.12.** *Gegeben endliche abelsche Gruppen  $H \subset G$  läßt sich jeder Charakter von  $H$  zu einem Charakter von  $G$  fortsetzen.*

*Ergänzung 4.2.13.* Die Proposition gilt auch ohne die Voraussetzung der Endlichkeit. Das zeigt man leicht, indem man im folgenden Beweis mit dem Zorn'schen Lemma argumentiert. In der Sprache der "exakten Sequenzen" besagt die Proposition, daß für jede kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$  auch die induzierte Sequenz auf den Charaktergruppen eine kurze exakte Sequenz  $\mathfrak{X}(G'') \hookrightarrow \mathfrak{X}(G) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(G')$  ist. In der Sprache der homologischen Algebra besagt sie, daß die abelsche Gruppe  $\mathbb{C}^\times$  injektiv ist, vergleiche ??.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß  $G$  erzeugt wird von  $H$  und einem einzigen weiteren Element  $g$ . Ist  $n \geq 1$  kleinstmöglich mit  $g^n \in H$ , so hat jedes Element von  $G$  eine eindeutige Darstellung der Gestalt  $g^\nu h$  mit  $0 \leq \nu < n$  und  $h \in H$ . Wählen wir eine  $n$ -te Wurzel  $w$  von  $\chi(g^n)$ , so können wir unseren Charakter fortsetzen zu einem Charakter  $\tilde{\chi} : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  durch die Vorschrift  $\tilde{\chi}(g^\nu h) = w^\nu \chi(h)$ .  $\square$

**Lemma 4.2.14.** *Für jede endliche abelsche Gruppe  $G$  und jedes Element  $g \in G$  gilt*

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} \chi(g) = \begin{cases} |G| & g = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Man kann leicht zeigen, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$  liefert. Damit kann man das Lemma aus 4.2.10 folgern. Mir scheint jedoch das direkte Argument übersichtlicher. Der Fall  $g = 1$  ist eh klar. Schreiben wir die Verknüpfung von Charakteren multiplikativ, also  $(\chi\chi_1)(g) = \chi(g)\chi_1(g)$ , so gilt für jedes  $g \in G$  die Formel

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} \chi(g) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} (\chi_1\chi)(g) = \chi_1(g) \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} \chi(g)$$

Im Fall  $g \neq 1$  gibt es nun nach 4.2.12 und 4.2.11 einen Charakter  $\chi_1$  mit  $\chi_1(g) \neq 1$ . Das Lemma folgt.  $\square$

*Beweis von 4.2.1.* Wir leiten nun den Satz über Primzahlen in Restklassen aus dem Satz 4.2.7 über Fortsetzungen von  $L$ -Reihen her, dessen Beweis noch aussteht. Die logarithmischen Ableitungen unserer  $L$ -Reihen werden nach einfacher Rechnung für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  gegeben durch die kompakt konvergenten Reihen

$$\frac{d \log L(z, \chi)}{dz} = - \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z - \chi(p)}$$

Die durch die Reihen auf der rechten Seite auf  $\operatorname{Re}(z) > 1$  definierten holomorphen Funktionen sind nach 4.2.7 beschränkt auf dem reellen Intervall

(1, 2), wenn  $\chi$  nicht konstant ist, und unbeschränkt auf (1, 2) für den konstanten Charakter. Dasselbe gilt für die holomorphen Funktionen, die durch die Ausdrücke

$$-\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z}$$

gegeben werden, denn deren Differenz zu den zuvor betrachteten logarithmischen Ableitungen wird gegeben durch die Reihen  $\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)^2 \log(p)}{p^z (p^z - \chi(p))}$ , die sogar auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1/2$  holomorphe Funktionen definieren. Die Charaktertheorie aus 4.2.14 liefert uns nun, daß gegeben eine endliche abelsche Gruppe  $G$  und darin ein Element  $g \in G$  die Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$f(h) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} \chi(g^{-1}) \chi(h)$$

bei  $h = g$  den Wert  $|G|$  annimmt und sonst den Wert Null. Wenden wir das an auf  $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  und kürzen  $\mathfrak{X}((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times) = \mathfrak{X}$  ab, so erhalten wir für jede feste prime Restklasse  $r$  und alle  $\chi \in \mathfrak{X}$  komplexe Zahlen  $a_\chi = (\chi(\bar{r})|G|)^{-1}$  von Betrag  $|G|^{-1}$  derart, daß für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} a_\chi \chi(n) = \begin{cases} 1 & \bar{n} = \bar{r}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  die Identität

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} a_\chi \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z} = \sum_{p \equiv r \pmod{m}} \frac{\log p}{p^z}$$

Links steht hier eine auf dem reellen Intervall (1, 2) unbeschränkte Funktion, da nach 4.2.7 für alle nichtkonstanten Charaktere die  $L$ -Reihe holomorph ist ohne Nullstelle bei Eins, für den konstanten Charakter jedoch meromorph mit einem Pol bei Eins. Rechts steht folglich auch eine auf dem reellen Intervall (1, 2) unbeschränkte Funktion und insbesondere eine unendliche Summe.  $\square$

*Ergänzung 4.2.15.* Ein Dirichlet-Charakter modulo  $m$  ist natürlich auch ein Dirichlet-Charakter modulo  $mn$  für jedes  $n \geq 1$ . Gegeben ein Dirichlet-Charakter  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt das kleinste positive  $m$  derart, daß er von einem Gruppenhomomorphismus  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  herkommt, der **Führer** des besagten Dirichlet-Charakters und wir sagen dann auch,  $\chi$  sei ein **primitiver Dirichlet-Charakter modulo  $m$** .

### 4.3 Dirichlet-Reihen

4.3.1. Gegeben ein Zweig des Logarithmus  $\log$  auf einer Teilmenge  $U$  der komplexen Zahlenebene erklären wir für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto x^\lambda$  durch die Vorschrift  $x^\lambda = \exp(\lambda \log x)$ . Gegeben zwei Folgen  $a_k$  und  $\lambda(k)$  von komplexen Zahlen können wir auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  mithilfe unseres Hauptzweiges des Logarithmus die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda(k)}$$

bilden. Wir zeigen im Folgenden, daß sie sich für streng monoton gegen unendlich strebende Folgen reeller Zahlen  $\lambda(k) \in \mathbb{R}$  sehr ähnlich verhält wie eine Potenzreihe. Genauer folgt aus der Konvergenz an einer Stelle  $x_0$  die kompakte Konvergenz auf dem Schnitt der offenen Kreisscheibe  $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < |x_0|\}$  mit unserer geschlitzten Ebene. Darüber hinaus ist dieser ‘‘Konvergenzradius’’ derselbe für jede andersartig geschlitzte Ebene und jeden Zweig des Logarithmus auf einem derartigen Bereich. Um diese Mehrdeutigkeiten aufzulösen, substituiert man sinnvoll gleich  $x = e^{-z}$  und erhält so eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda(k)z}$$

Reihen dieser Gestalt mit komplexen Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  und streng monoton gegen unendlich strebenden  $\lambda(k) \in \mathbb{R}$  heißen **Dirichlet-Reihen**. Zum Beispiel wird die Riemann’sche  $\zeta$ -Funktion durch die über  $k \geq 1$  zu summierende Dirichlet-Reihe mit  $a_k = 1$  für alle  $k$  und  $\lambda(k) = \log(k)$  gegeben. Man kann die durch eine Dirichlet-Reihe erklärte Funktion im Übrigen auch auffassen als die Laplace-Transformierte im Sinne von 4.1.13 des diskreten komplexen Maßes, das jedem Punkt  $\lambda(k)$  die Masse  $a_k$  zuweist. Wir formulieren und beweisen die bisher behaupteten Aussagen nun als eigenständigen Satz.

**Satz 4.3.2 (Konvergenzbereiche von Dirichlet-Reihen).** *Konvergiert eine Dirichlet-Reihe an einer Stelle  $z_0 \in \mathbb{C}$ , so konvergiert sie auch für alle komplexen Zahlen  $z$  mit größerem Realteil  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$  und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Winkelsegment der Gestalt  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \operatorname{Re}(z - z_0)\}$  für beliebiges  $r \geq 0$ .*

4.3.3. Insbesondere ist der Konvergenzbereich einer Dirichlet-Reihe also eine Halbebene, wobei man über die Konvergenz auf der Randgeraden jedoch im allgemeinen keine Aussagen machen kann. Im Unterschied zu Potenzreihen kann es durchaus vorkommen, daß eine Dirichlet-Reihe auf einem Teil ihrer

Konvergenz-Halbebene nicht absolut konvergiert. Zum Beispiel zeigen wir im folgenden, daß unsere  $L$ -Reihen zu nichtkonstantem Charakter für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  konvergieren, aber man sieht sehr leicht, daß diese Konvergenz nur für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  absolut ist.

*Beweis.* Dieser Beweis verallgemeinert den Beweis des abelschen Grenzwertsatzes II.5.4.2. Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda(k)z}$  unsere Dirichlet-Reihe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $z_0 = 0$  annehmen. Wir kürzen  $e^{-\lambda(k)z} = b_k$  ab und schreiben die Differenzen von Partialsummen unserer Reihe in der Gestalt

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda(k)z} &= \sum_{k=n}^m a_k b_k \\ &= (b_n - b_{n+1}) a_n \\ &\quad + (b_{n+1} - b_{n+2}) (a_n + a_{n+1}) \\ &\quad + (b_{n+2} - b_{n+3}) (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &\quad \dots \dots \\ &\quad + (b_{m-1} - b_m) (a_n + \dots + a_{m-1}) \\ &\quad + b_m (a_n + \dots + a_{m-1} + a_m) \end{aligned}$$

Jetzt beachte man für  $x = \operatorname{Re} z > 0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda(n)z} - e^{-\lambda(n+1)z}| &= \left| z \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-tz} dz \right| \\ &\leq |z| \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-tx} dx \\ &\leq \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda(n)x} - e^{-\lambda(n+1)x}) \end{aligned}$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  finden wir wegen der Konvergenz bei  $z = 0$  sicher ein  $N$  derart, daß für alle  $\nu, \mu$  mit  $N \leq \nu \leq \mu$  gilt  $|a_\nu + \dots + a_\mu| \leq \varepsilon$ . Für alle  $z$  mit  $0 < x = \operatorname{Re}(z)$  folgt dann für alle  $n, m$  mit  $N \leq n \leq m$  die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda(k)z} \right| \leq \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda(n)x} - e^{-\lambda(m)x}) \varepsilon + e^{-\lambda(m)x} \varepsilon$$

Für  $z = 0$  wird derselbe Ausdruck schlicht durch  $\varepsilon$  selbst abgeschätzt, und zusammen ergibt sich daraus die behauptete gleichmäßige Konvergenz auf Bereichen  $0 \leq |z| \leq rx$  für jede feste Steigung  $r$  der den Winkel nach oben begrenzenden Geraden sogar dann, wenn die  $\lambda(k)$  nur monoton wachsen und nicht notwendig gegen  $\infty$  streben.  $\square$

**Proposition 4.3.4 (Hinreichende Bedingung für Konvergenz).** *Sind bei einer Dirichlet-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda(k)z}$  die Summen  $\sum_{k=n}^m a_k$  simultan betragsmäßig beschränkt, so konvergiert die Reihe auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .*

*Beweis.* Ist  $B$  unsere simultane Schranke, so erhalten wir wie im vorhergehenden Beweis für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) = x > 0$  dieselbe Abschätzung mit  $B$  statt  $\varepsilon$  und damit die Konvergenz.  $\square$

4.3.5. Mit dieser Proposition und 4.2.10 folgt sofort, daß die  $L$ -Reihen für nichtkonstante Dirichlet-Charaktere  $\chi$  sogar auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$  konvergieren. Das liefert ihre in 4.2.7 behauptete Fortsetzbarkeit zu holomorphen Funktionen auf dieser Halbebene. Der Satz über die Fortsetzungen 4.2.7 ist damit bewiesen bis auf die Behauptung, daß diese holomorphen Fortsetzungen bei Eins nicht verschwinden.

**Satz 4.3.6 (Konvergenzbereiche im Fall positiver Koeffizienten).** *Konvergiert eine Dirichlet-Reihe  $\sum a_k e^{-\lambda(k)z}$  mit positiven Koeffizienten  $a_k > 0$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > r$  und läßt sich die so erklärte Funktion holomorph auf eine Umgebung von  $r$  fortsetzen, so konvergiert unsere Reihe sogar auf einer echt größeren Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > r - \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$ .*

4.3.7. Dieser Satz ist eine Variante unserer Erkenntnis 1.7.7, daß eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe auch auf der ganzen offenen Kreisscheibe durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Im allgemeinen kann sich zwar die durch eine Dirichlet-Reihe auf einer geeigneten Halbebene definierte Funktion durchaus holomorph auf eine größere Halbebene fortsetzen lassen, ohne daß die Reihe dort konvergieren müßte. Unter der zusätzlichen Annahme positiver Koeffizienten muß jedoch dann dort auch die Reihe konvergieren.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $r = 0$  und alle  $\lambda(k) \geq 0$ . Nach Annahme finden wir  $\varepsilon > 0$  derart, daß die durch unsere Dirichlet-Reihe definierte Funktion  $f$  sich holomorph auf eine offene Umgebung der Kreisscheibe  $|z - 1| \leq 1 + \varepsilon$  fortsetzen läßt. Die Taylorentwicklung liefert dann

$$f(-\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} (-1 - \varepsilon)^\nu$$

im Sinne absoluter Konvergenz. Die fraglichen Ableitungen hinwiederum ergeben sich zu

$$f^{(\nu)}(1) = \sum a_k (-\lambda(k))^\nu e^{-\lambda(k)}$$

auch im Sinne absoluter Konvergenz, da alle Terme dasselbe Vorzeichen haben. Folglich gilt

$$\sum_{k,\nu} \frac{1}{\nu!} a_n (1 + \varepsilon)^\nu (\lambda(k))^\nu e^{-\lambda(k)} < \infty$$

und nach Zusammenfassen der Summen über  $\nu$  in Exponentialreihen ergibt sich

$$\sum_k a_k e^{(1+\varepsilon)\lambda(k)} e^{-\lambda(k)} = \sum_k a_k e^{\lambda(k)\varepsilon} < \infty$$

alias die Konvergenz der Dirichlet-Reihe bei  $z = -\varepsilon$ .  $\square$

*Beweis von 4.2.7.* Daß die  $L$ -Reihe zum konstanten Charakter eine meromorphe Fortsetzung hat wie behauptet, ergibt sich wie bereits bemerkt aus der entsprechenden Aussage 4.1.7 für die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion, die ja bis auf endlich viele Faktoren durch dasselbe Eulerprodukt dargestellt wird. Daß die anderen  $L$ -Reihen holomorphe Fortsetzungen haben, haben wir schon in 4.3.5 bemerkt. Um schließlich zu zeigen, daß die anderen Reihen keine Nullstellen bei  $z = 1$  haben, reicht es zu zeigen, daß das Produkt

$$\zeta_m(z) = \prod_{\chi} L(z, \chi)$$

einen Pol hat bei  $z = 1$ . Dieses Produkt ist nun für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  natürlich das Produkt über alle zu  $m$  teilerfremden Primzahlen  $p \nmid m$  der endlichen Produkte

$$\prod_{\chi} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

Nun beachten wir im Polynomring  $\mathbb{C}[T]$  die Zerlegung

$$(T^g - 1) = \prod_{\xi^{g=1}} (T - \xi)$$

Bezeichnet  $\varphi = \varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$  die Ordnung unserer Gruppe und  $g(p)$  die Ordnung des Elements  $\bar{p}$  in  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  und  $f(p)$  die Kardinalität der Restklassengruppe nach seinem Erzeugnis  $\langle \bar{p} \rangle$ , so daß also gilt  $\varphi = f(p)g(p)$ , so finden wir

$$\prod_{\chi} (T - \chi(p)) = (T^{g(p)} - 1)^{f(p)}$$

Indem wir auf beiden Seiten  $T^\varphi$  wegteilen und  $T = p^z$  einsetzen ergibt sich

$$\prod_{\chi} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p^{g(p)z}}\right)^{-f(p)}$$

Multiplizieren wir alle diese Produkte für  $p \nmid m$ , so erhalten wir offensichtlich für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  eine Darstellung von  $\zeta_m(z)$  durch eine Dirichlet-Reihe der Gestalt

$$\zeta_m(z) = \sum_{k \geq 1} a_k k^{-z}$$

mit  $a_k \in \mathbb{N}$ . Hätte die Funktion  $\zeta_m(z)$  keinen Pol bei  $z = 1$ , so wäre sie holomorph für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  und nach 4.3.6 müßte dann auch ihre Dirichlet-Reihe konvergieren für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Nun ist der  $p$ -Faktor von  $\zeta_m$  jedoch  $(1 + p^{-g(p)z} + p^{-2g(p)z} + \dots)^{f(p)}$  und hat dieselben oder größere Koeffizienten vor den entsprechenden  $p$ -Potenzen wie die Reihe

$$(1 + p^{-\varphi z} + p^{-2\varphi z} + \dots)$$

mit  $\varphi$  wie oben. Die Dirichlet-Reihe von  $\zeta_m(z)$  hat also dieselben oder größere Koeffizienten wie die Reihe

$$\sum_{(n,m)=1} n^{-\varphi z}$$

und diese Reihe divergiert für  $z = \varphi^{-1}$  selbst dann, wenn wir nur über prime  $n$  summieren. Dieser Widerspruch beendet den Beweis.  $\square$

*Quellen* 4.3.8. Serre, Cours d'Arithmetique [?].

## 5 Unausgegorenes zur Funktionentheorie

### 5.1 Riemann'sche Flächen

5.1.1. Wir erinnern an die Definition einer Riemann'schen Fläche in VI.4.2.3 und insbesondere an das Beispiel  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  aus VI.4.2.10.

*Übung 5.1.2.* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Eine Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  ist meromorph im Sinne von 2.1.6 genau dann, wenn ihre Verknüpfung mit unserer Identifikation  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  aus ?? ein Morphismus von Riemann'schen Flächen  $U \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  ist, der auf keiner Zusammenhangskomponente von  $U$  konstant den Wert  $\infty$  annimmt. In Formeln erhalten wir so eine Bijektion

$$\{f \in \mathcal{O}^{\text{an}}(U, \mathbb{P}^1\mathbb{C}) \mid f^{-1}(\infty) \text{ ist diskret in } U\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\text{an}}(U)$$

zwischen der Menge aller Morphismen von  $U$  in die Riemann'sche Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , die nur auf einer diskreten Teilmenge den Wert  $\infty$  annehmen, und der Menge aller meromorphen Funktionen auf  $U$ .

**Definition 5.1.3.** Für eine allgemeine Riemann'sche Fläche  $X$  definiert man eine **meromorphe Funktion auf  $X$**  als eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  derart, daß  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  ein Morphismus von Riemann'schen Flächen ist und  $f^{-1}(\infty) \subset X$  eine diskrete Teilmenge. Die Menge aller meromorphen Funktionen auf  $X$  notieren wir wieder

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(X)$$

*Übung 5.1.4.* Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung einer Riemann'schen Fläche  $X$ . Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  ist meromorph genau dann, wenn ihre Restriktionen auf alle  $U \in \mathcal{U}$  meromorph sind.

*Übung 5.1.5.* Die meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden Riemann'schen Fläche bilden mit der analog zu 2.1.10 erklärten Addition und Multiplikation einen Körper.

**Definition 5.1.6.** Zwei stetige Abbildungen von punktierten Räumen  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  und  $f_1 : (X_1, x_1) \rightarrow (Y_1, y_1)$  heißen **lokal isomorph** genau dann, wenn es ein kommutatives Diagramm von punktierten Räumen

$$\begin{array}{ccccc} (X, x) & \longleftarrow & (U, x) & \longrightarrow & (X_1, x_1) \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\ (Y, y) & \longleftarrow & (V, y) & \longrightarrow & (Y_1, y_1) \end{array}$$

gibt mit offenen Einbettungen in den Horizontalen.



SkriptenBilder/BildQCo.png

Dies Bild erinnert unsere Anschauung für die Abbildung  $z \mapsto z^2$  der Einheitskreisscheibe auf sich selbst. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt  $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$  in  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$  für geeignetes monotonen und in einer Umgebung von Null streng monotonen  $\varepsilon$ , gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

**Definition 5.1.7.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von zweidimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten heißt **verzweigt étale** genau dann, wenn für jeden Punkt  $x \in X$  die Abbildung  $f : (X, x) \rightarrow (Y, f(x))$  für ein  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  lokal isomorph ist zur Abbildung von punktierten Räumen  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ,  $z \mapsto z^n$ .

5.1.8. Die Zahl  $n$  wird hier durch  $x$  bereits eindeutig festgelegt: Wir können nämlich  $n$  charakterisieren durch die Eigenschaft, daß es eine Umgebung  $V$  von  $x$  gibt derart, daß  $f$  auf  $V \setminus x$  jeden Wert genau  $n$ -mal annimmt. Diese Zahl  $n = n(x)$  heißt der **Verzweigungsgrad** unserer verzweigt étalen Abbildung bei  $x$ .

5.1.9. Ein Morphismus von Riemann'schen Flächen, der auf keiner Zusammenhangskomponente konstant ist, ist nach 1.8.14 stets verzweigt étale.

*Übung 5.1.10.* Ist  $Y$  eine Riemann'sche Fläche und  $X$  ein Hausdorffraum und  $p : X \rightarrow Y$  verzweigt étale, so gibt es auf  $X$  genau eine Struktur als Riemann'sche Fläche derart, daß  $p$  für diese Struktur ein Morphismus von Riemann'schen Flächen wird. Hinweis: Der Riemann'sche Hebbarkeitssatz 2.1.3 mag hilfreich sein.

**Definition 5.1.11.** Eine stetige Abbildung  $p : X \rightarrow Y$  von zweidimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten heißt eine **verzweigte Überlagerung** genau dann, wenn für jeden Punkt  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $U$  existiert derart, daß es für alle  $x \in p^{-1}(y)$  ein  $n(x) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und ein kommutatives Diagramm von punktierten Räumen

$$\begin{array}{ccc} z & \in & (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (p^{-1}(U), x) \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow p \\ z^{n(x)} & \in & (\mathbb{C}, 0) \xrightarrow{\sim} (U, y) \end{array}$$

gibt, dessen untere Horizontale ein Homöomorphismus ist und dessen obere Horizontale offen ist und einen Homöomorphismus von  $\mathbb{C}$  mit der Zusammenhangskomponente von  $x$  in  $p^{-1}(U)$  induziert.

5.1.12. Eine verzweigt étale Abbildung ist nicht immer étale im Sinne von ?? und eine verzweigte Überlagerung ist nicht immer eine Überlagerung im Sinne von ??. Jede verzweigte Überlagerung ist jedoch auch eine verzweigt étale Abbildung.

*Ergänzende Übung 5.1.13.* Man betrachte zu jeder topologischen Fläche  $X$  die Kategorie  $\text{Verz}_X \subset \text{Top}_X$  aller endlichen verzweigten Überlagerungen mit höchstens endlich vielen Verzweigungspunkten und zeige, daß für  $U \Subset X$  das Komplement einer endlichen Teilmenge der Restriktionsfunktoren  $\text{Verz}_X \rightarrow \text{Verz}_U$  stets eine Äquivalenz von Kategorien ist.

5.1.14. Sei die stetige Abbildung  $p : X \rightarrow Y$  von zweidimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten eine verzweigte Überlagerung. Per definitionem ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $Y_n$  aller  $y \in Y$  mit  $\sum_{x \in p^{-1}(y)} n(x) = n$  offen. Ist also  $Y$  zusammenhängend und hat  $p : X \rightarrow Y$  endliche Fasern, so gibt es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $Y = Y_n$ . Wir sagen dann,  $p : X \rightarrow Y$  sei eine verzweigte Überlagerung der **Blätterzahl**  $n$ .

**Lemma 5.1.15.** *Jede verzweigt étale Abbildung von kompakten zweidimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten ist eine verzweigte Überlagerung.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  unsere Abbildung. Gegeben  $y \in Y$  ist die Faser  $p^{-1}(y)$  in  $X$  abgeschlossen und diskret, also kompakt und diskret, also endlich. Seien  $x_1, \dots, x_r$  die Punkte der Faser und  $V_1, \dots, V_r$  jeweils offene Umgebungen wie in der Definition einer verzweigt étalen Abbildung. Die Schnitte ihrer Bilder bilden dann eine offene Umgebung von  $y \in Y$ , wie sie in der Definition einer verzweigten Überlagerung in 5.1.11 gefordert wird.  $\square$

*Ergänzende Übung* 5.1.16. Die Restriktion auf  $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  liefert eine Bijektion

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)$$

zwischen der Menge aller meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  und dem Körper  $\mathbb{C}(T) = \text{Quot } \mathbb{C}[T]$  der rationalen Funktionen auf  $\mathbb{C}$ , aufgefaßt als Unterkörper im Körper  $\mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{C})$  der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  wie in 5.1.2. Hinweis: Jede holomorphe Funktion auf  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  ist konstant nach dem Maximumsprinzip 1.8.19, in Formeln  $\mathcal{O}^{\text{an}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ . Jede meromorphe Funktion hat aber dieselben Pole und Nullstellen wie eine rationale Funktion.

*Bemerkung* 5.1.17. Die vorhergehende Übung 5.1.16 ist die vielleicht einfachste Manifestation eines sehr allgemeinen Prinzips, das man etwas vage dahingehend aussprechen kann, daß “komplex-analytische Dinge auf Kompakta meist algebraisch sind”. Man nennt dies Prinzip auch das “GAGA-Prinzip” nach dem berühmten Artikel “Géométrie Analytique et Géométrie Algébrique” von Jean-Pierre Serre, in dem es noch sehr viel weiter entwickelt wird. Dies Acronym ist im übrigen ein französisches Wortspiel: “Gaga” bedeutet in der französischen Umgangssprache, was man auf Deutsch vielleicht mit “total durch den Wind” wiedergeben könnte.

5.1.18. Gegeben eine endliche Teilmenge  $P \subset \mathbb{C}$  und eine endliche Überlagerung  $X \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$  ihres Komplements durch einen zusammenhängenden topologischen Raum im Sinne von ?? erklären wir eine Körpererweiterung  $\mathcal{M}(X)/\mathbb{C}(T)$  wie folgt: Zunächst versehen wir unsere Überlagerung mit der Struktur einer Riemann’sches nach 5.1.10. Die meromorphen Funktionen auf  $X$  bilden dann nach 5.1.5 einen Körper

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(X)$$

und das Vorschalten der Überlagerungsabbildung liefert offensichtlich einen Körperhomomorphismus

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{op}} \mathcal{M}^{\text{an}}(X)$$

**Proposition 5.1.19 (Körpererweiterungen durch Überlagerungen).**  
*Gegeben eine zusammenhängende  $n$ -blättrige Überlagerung des Komplements  $\mathbb{C} \setminus P$  einer endlichen Teilmenge  $P$  der Riemann'schen Zahlenebene ist der Unterkörper*

$$\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}^{\text{an}}(X)$$

*der über  $\mathbb{C}(T)$  algebraischen meromorphen Funktionen auf  $X$  eine endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{C}(T)$  vom Grad  $n$ . Umgekehrt erhalten wir auf diese Weise auch alle endlichen Körpererweiterungen von  $\mathbb{C}(T)$ .*

5.1.20. Es wird sich später herausstellen, daß der Teilkörper

$$\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}^{\text{an}}(X)$$

wie in dieser Notation bereits vorweggenommen nur von der Riemann'schen Fläche  $X$  abhängt und nicht von der Wahl einer Überdeckungsabbildung  $X \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Fall  $n = 1$ . Der Körper der rationalen Funktionen  $\mathbb{C}(T) \subset \mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{C} \setminus P)$  besteht nach 2.1.11 genau aus den meromorphen Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{C} \setminus P$ , für die es ein  $N \geq 1$  gibt derart, daß für alle  $a \in P$  das Produkt  $(z - a)^N f(z)$  beschränkt ist im Schnitt einer Umgebung von  $a$  mit  $\mathbb{C} \setminus P$ , und daß  $z^{-N} f(z)$  außerhalb eines Kompaktums beschränkt ist. Da nach ?? der Betrag der Nullstellen eines normierten komplexen Polynoms abgeschätzt werden kann durch die Summe der Beträge der Koeffizienten, müssen alle über  $\mathbb{C}(T)$  algebraischen Elemente von  $\mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{C} \setminus P)$  bereits zu  $\mathbb{C}(T)$  gehören. Wir haben also  $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}(T)$  und der Fall  $n = 1$  ist erledigt. Sei als nächstes  $p : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$  eine normale Überlagerung im Sinne von ?? und sei  $\Gamma$  ihre Gruppe von Decktransformationen. Offensichtlich liefert das Vorschalten von  $p$  dann Isomorphismen

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{C} \setminus P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\text{an}}(X)^\Gamma \quad \text{und} \quad \mathcal{M}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)^\Gamma$$

und nach dem allgemeinen Satz ?? der Galoistheorie ist  $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(\mathbb{C})$  eine endliche Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe  $\Gamma$ . Ist schließlich unsere Überlagerung  $p : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$  nicht normal, so suchen wir uns mithilfe von ?? eine normale Hülle  $\tilde{X} \rightarrow X$  und betrachten den Körperturm

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}(\tilde{X})$$

Für  $H$  die Deckbewegungsgruppe von  $q : \tilde{X} \rightarrow X$  liefert offensichtlich das Vorschalten von  $q$  einen Isomorphismus  $\mathcal{M}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\tilde{X})^H$  und aus ?? folgt  $[\mathcal{M}(\tilde{X}) : \mathcal{M}(X)] = |H|$  sowie  $[\mathcal{M}(\tilde{X}) : \mathcal{M}(\mathbb{C})] = |\Gamma|$  für  $\Gamma$  die Deckbewegungsgruppe von  $\tilde{X} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus P)$ . Damit ergibt sich dann schließlich  $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(\mathbb{C})] = |\Gamma|/|H| = n$  wie gewünscht. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß wir auf diesem Wege auch alle endlichen Körpererweiterungen des Funktionenkörpers  $\mathbb{C}(T)$  erhalten. Nach ?? entsteht ja jede derartige Erweiterung durch Adjunktion einer Nullstelle eines irreduziblen Polynoms  $f \in \mathbb{C}(T)[S]$ . Nach ?? finden wir dazu stets  $c \in \mathbb{C}(T)^\times$  mit  $cf \in \mathbb{C}[T][S]$  primitiv, und nach ?? ist  $g = cf$  dann auch irreduzibel in  $\mathbb{C}[T][S] = \mathbb{C}[T, S]$ . Nun überlegt man sich leicht, daß die kanonische Abbildung  $\mathbb{C}[T, S]/\langle g \rangle \rightarrow \mathbb{C}(T)[S]/\langle g \rangle$  einen Körperisomorphismus

$$\text{Quot}(\mathbb{C}[T, S]/\langle g \rangle) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)[S]/\langle g \rangle$$

induziert. Bezeichnet  $Z(g) = \{(a, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \mid g(a, \lambda) = 0\}$  die Nullstellenmenge von  $g$ , so liefert das Einschränken polynomialer Funktionen nach ?? einen Ringhomomorphismus und nach ?? sogar einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{C}[T, S]/\langle g \rangle \hookrightarrow \text{Ens}(Z(g), \mathbb{C})$$

Da nun  $g$  Polynomring  $\mathbb{C}(T)[S]$  über dem Funktionenkörper  $\mathbb{C}(T)$  irreduzibel ist, ist  $g$  in besagtem Polynomring teilerfremd zu seiner Ableitung  $g' = \frac{\partial g}{\partial S}$  und wir finden folglich eine Identität

$$1 = hg + kg'$$

mit  $h, k \in \mathbb{C}(T)[S]$ . Mit Ausnahme der Elemente der endlichen Menge  $P \subset \mathbb{C}$  der Polstellen der Koeffizienten von  $h$  und  $k$  können wir in diese Identität alle komplexen Zahlen  $a$  einsetzen und folgern mit ??, daß für alle  $a \in \mathbb{C} \setminus P$  das Polynom  $g(a, S) \in \mathbb{C}[S]$  keine mehrfachen Nullstellen hat. Vergrößern wir unsere endliche Menge  $P$  noch um die Nullstellen des Leitkoeffizienten in Bezug auf  $S$  von  $g \in \mathbb{C}[T][S]$  und hat unser  $g$  in  $S$  etwa den Grad  $n$ , so hat folglich  $g(a, S)$  für alle  $a \in \mathbb{C} \setminus P$  genau  $n$  Nullstellen in  $S$ . Die Fasern der Projektion auf die erste Koordinate

$$\text{pr}_1 : Z(g) \rightarrow \mathbb{C}$$

haben also außerhalb einer endlichen Menge  $P \subset \mathbb{C}$  stets genau  $n$  Elemente. Nach dem Satz über implizite Funktionen und insbesondere nach Übung IV.4.2.15 ist also die Restriktion dieser Projektion auf das Urbild des Komplements von  $P$  eine  $n$ -blättrige Überlagerung

$$\text{pr}_1 : Z \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$$

Nach 5.1.24 sind alle stetigen lokalen Schnitte dieser Überlagerung als Abbildungen nach  $\mathbb{C}^2$  komplex differenzierbar. Die Polynome aus  $\mathbb{C}[T, S]$  definieren folglich komplex differenzierbare alias holomorphe Funktionen auf der Riemann'schen Fläche  $Z$ , und das Bild der Inklusion  $\mathbb{C}[T, S]/\langle g \rangle \hookrightarrow \mathcal{O}^{\text{an}}(Z)$  macht nach ?? von Null verschiedene Elemente des Restklassenrings zu holomorphen Funktionen mit höchstens endlich vielen Nullstellen. Nach ?? läßt sich unsere Inklusion folglich zu einem Ringhomomorphismus

$$\text{Quot}(\mathbb{C}[T, S]/\langle g \rangle) \rightarrow \mathcal{M}^{\text{an}}(Z)$$

fortsetzen, der nach ?? notwendig injektiv sein muß. Sei nun  $Z = Z_1 \sqcup \dots \sqcup Z_r$  die Zerlegung von  $Z$  in seine Zusammenhangskomponenten. Da die linke Seite eine algebraische Körpererweiterung von  $\mathbb{C}(T)$  ist, muß unser Ringhomomorphismus in  $\mathcal{M}(Z_1) \times \dots \times \mathcal{M}(Z_r)$  landen. Da dieses Produkt nach dem bereits bewiesenen Teil der Proposition über  $\mathbb{C}(T)$  dieselbe Dimension hat wie  $\text{Quot}(\mathbb{C}[T, S]/\langle g \rangle)$ , ist das Bild unseres Ringhomomorphismus bereits das ganze besagte Produkt. Es folgt, daß besagtes Produkt ein Körper sein muß, so daß insbesondere  $Z$  bereits zusammenhängend gewesen sein muß und unsere Körpererweiterung mit  $\mathcal{M}(Z)$  zusammenfällt.  $\square$

**Satz 5.1.21 (Körpererweiterungen von  $\mathbb{C}(T)$  und Topologie).** *Unsere Vorschrift  $\mathcal{M}^{\text{an}}$ , die jeder zusammenhängenden Riemann'schen Fläche über  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  den Körper der meromorphen Funktionen auf  $X$  zuweist, liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhängende verzweigte} \\ \text{Überlagerungen von } \mathbb{P}^1\mathbb{C} \\ \text{mit endlicher Blätterzahl} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche} \\ \text{Körpererweiterungen} \\ \text{von } \mathbb{C}(T) \end{array} \right\}^{\text{opp}}$$

$$\left( \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \mathbb{C} \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{c} \mathcal{M}^{\text{an}}(X) \\ \cup \\ \mathbb{C}(T) \end{array} \right)$$

*Beweis.* Unser  $\mathcal{M}(X)$  ändert sich nicht beim Einflicken fehlender Punkte. Das zeigt die Surjektivität auf Objekten. Daß die Automorphismen von Galois-Überlagerungen den Automorphismen von Körpererweiterungen entsprechen, wissen wir bereits. Im Allgemeinen können wir  $\mathcal{M}(X)$  und  $\mathcal{M}(Y)$  in dieselbe Galoiserweiterung von  $\mathbb{C}(T) = \mathcal{M}(\mathbb{C})$  einbetten etc.  $\square$

**Satz 5.1.22.** *Die Vorschrift  $X \mapsto \mathcal{M}(X)$  liefert eine kontravariante Äqui-*

valenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zusammenhängende} \\ \text{endliche Überlagerungen} \\ \text{des Komplements} \\ \text{endlicher Teilmengen von } \mathbb{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{endliche Körpererweiterungen} \\ \text{von } \mathbb{C}(T) \end{array} \right\}$$

$$X \quad \mapsto \quad \mathcal{M}(X)$$

wo wir Morphismen von  $p : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$  nach  $q : Y \rightarrow \mathbb{C} \setminus Q$  verstehen als Decktransformationen zwischen den beiden Überlagerungen von  $\mathbb{C} \setminus (P \cup Q)$  durch  $p^{-1}(\mathbb{C} \setminus (P \cup Q))$  und  $q^{-1}(\mathbb{C} \setminus (P \cup Q))$ . Die Verknüpfung mit einem Morphismus in eine weitere Überlagerung  $r : Z \rightarrow \mathbb{C} \setminus R$  ist zwar dann a priori nur als Decktransformation von  $p^{-1}(\mathbb{C} \setminus (P \cup Q \cup R))$  nach  $r^{-1}(\mathbb{C} \setminus (P \cup Q \cup R))$  definiert, läßt sich aber eindeutig stetig zu einer Decktransformation  $p^{-1}(\mathbb{C} \setminus (P \cup R)) \rightarrow r^{-1}(\mathbb{C} \setminus (P \cup R))$  fortsetzen, und diese Fortsetzung verstehen wir dann als die Verknüpfung unserer beiden Morphismen.

**Definition 5.1.23.** Seien  $V, W$  normierte komplexe Vektorräume und  $U \Subset V$  eine halboffene Teilmenge. Eine Abbildung  $f : U \rightarrow W$  heißt **komplex differenzierbar** genau dann, wenn sie stetig differenzierbar ist und ihr Differential an jeder Stelle komplex-linear ist.

*Beispiel 5.1.24.* Gegeben Polynome  $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  ist die Abbildung

$$\{x \in \mathbb{C}^n \mid Q(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

gegeben durch  $x \mapsto P(x)/Q(x)$  komplex differenzierbar. Alle durch den Satz über implizite Funktionen aus komplex differenzierbaren Abbildungen entstehenden Abbildungen sind nach IV.4.2.4 auch selbst wieder komplex differenzierbar.

5.1.25. Die beiden folgenden Sätze scheinen mir die zentrale Rolle der Riemann'schen Flächen auf das Schönste zu illustrieren. Ich will gerne einmal einen Beweis ausschreiben.

**Satz 5.1.26 (Algebra durch Holomorphie).** Die Vorschrift, die jeder Riemann'schen Fläche den Ring ihrer meromorphen Funktionen zuordnet, liefert eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kompakte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Riemann'sche Flächen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{endlich erzeugte} \\ \text{Körpererweiterungen von } \mathbb{C} \\ \text{vom Transzendenzgrad Eins} \end{array} \right\}$$

$$X \quad \mapsto \quad \mathcal{M}^{\text{an}}(X)$$

Hier sind links als Morphismen nichtkonstante holomorphe Abbildungen zu verstehen und rechts als Morphismen eben Körperhomomorphismen unter  $\mathbb{C}$ .

5.1.27. Den Beweis dieses wunderbaren Satzes will ich gerne einmal ausschreiben. Zusammen mit dem gleich folgenden Satz schafft er eine bemerkenswert enge Verbindung zwischen Topologie und Algebra.

**Satz 5.1.28 (Holomorphie durch Topologie).** *Ist  $Y$  eine Riemann'sche Fläche, so liefert das Vergessen der holomorphen Struktur eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Riemann'sche Flächen} \\ \text{über } Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{verzweigt-étale Morphismen} \\ \text{von Hausdorff-Räumen nach } Y \end{array} \right\}$$

*Unter einer Riemann'schen Fläche über  $Y$  verstehe ich dabei eine Riemann'sche Fläche mit einem auf keiner Zusammenhangskomponente konstanten Morphismus nach  $Y$ . Hier sind links als Morphismen holomorphe Abbildungen zu verstehen, die mit der Projektion auf  $Y$  verträglich sind, und rechts stetige Abbildungen, die mit der Projektion auf  $Y$  verträglich sind.*

*Beweis.* Der Umkehrfunktorkonstruiert wurde bereits in 5.1.10 konstruiert. Der Rest der Argumentation kann auch dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

**Satz 5.1.29 (Algebra durch Holomorphie, Variante).** *Ist  $Y$  eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche, so liefert das Bilden der meromorphen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende} \\ \text{Riemann'sche Flächen über } Y \\ \text{mit eigentlicher Projektion} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{endliche} \\ \text{Körpererweiterungen} \\ \text{von } \mathcal{M}^{\text{an}}(Y) \end{array} \right\}^{\text{opp}}$$

*Beweis.* Zunächst einmal gilt es zu zeigen, daß für  $p : X \rightarrow Y$  nicht konstant und eigentlich das Zurückholen  $(\circ p) : \mathcal{M}^{\text{an}}(Y) \rightarrow \mathcal{M}^{\text{an}}(X)$  eine endliche Körpererweiterung ist. Nach ?? ist  $p$  eine verzweigte Überlagerung mit endlicher Zahl von Blättern. Wir beginnen mit dem Spezialfall, daß  $p : X \rightarrow Y$  eine endliche verzweigte Überlagerung ist. Gegeben  $f \in \mathcal{O}^{\text{an}}(X)$  betrachten wir dann für alle  $y \in Y$  das Polynom  $P_y \in \mathbb{C}[T]$  gegeben durch

$$P_y(T) = \prod_{x \in p^{-1}(y)} (T - f(x))$$

Ist  $p$  eine  $n$ -blättrige Überlagerung, so hat es den Grad  $n$  für alle  $y \in Y$ , also

$$P_y(T) = T^n + c_{n-1}(y)T^{n-1} + \dots + c_0(y)$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß hier die Koeffizienten holomorph sind als Funktionen von  $y$ , in Formeln  $c_i \in \mathcal{O}^{\text{an}}(Y)$ . In der Tat prüft man das auf

jeder trivial überlagerten offenen Teilmenge unmittelbar. Andererseits gilt quasi per definitionem für das Polynom  $P(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \dots + c_0$  aus dem Polynomring  $\mathcal{O}^{\text{an}}(y)[T]$  über  $\mathcal{O}^{\text{an}}(Y)$  die Formeln  $P(f) = 0$ . Ist etwas allgemeiner  $f \in \mathcal{M}^{\text{an}}(X)$  meromorph, so erhalten wir in derselben Weise ein Polynom  $P \in \mathcal{M}^{\text{an}}(Y)[T]$  vom Grad  $n$  mit  $P(f) = 0$ . Der Satz vom primitiven Element ?? sagt uns nun, daß die Körpererweiterung  $\mathcal{M}^{\text{an}}(X)/\mathcal{M}^{\text{an}}(Y)$  höchstens den Grad  $n$  haben kann. Um zu sehen, daß der Grad auch nicht kleiner sein kann, brauchen wir folgenden  $\square$

**Satz 5.1.30.** *Gegeben endlich viele Punkte auf einer Riemann'schen Fläche gibt es stets eine meromorphe Funktion, die an diesen Punkten beliebig vorgegebene Werte annimmt.*

*Ergänzung 5.1.31.* Ist dann  $X \rightarrow Y$  eine Galois-Überlagerung, so folgt eine Einbettung

$$\text{Üb}_Y(X) \hookrightarrow \text{Gal}(\mathcal{M}^{\text{an}}(X)/\mathcal{M}^{\text{an}}(Y))$$

und folglich  $|\text{Gal}| \geq n$  und wegen  $n \geq [\mathcal{M}^{\text{an}}(X)/\mathcal{M}^{\text{an}}(Y)] \geq |\text{Gal}|$  nach unseren Vorüberlegungen und Satz ?? aus der Galoistheorie die Gleichheiten  $n = [\mathcal{M}^{\text{an}}(X) : \mathcal{M}^{\text{an}}(Y)]$  und  $\text{Üb}_Y(X) = \text{Gal}$ . Ist  $X \rightarrow Y$  keine Galois-Überlagerung, so finden wir mit ?? eine endlicher Überlagerung  $Z \rightarrow X$  mit  $Z \rightarrow X$  und  $Z \rightarrow Y$  Galois und dann folgt  $[\mathcal{M}^{\text{an}}(X) : \mathcal{M}^{\text{an}}(Y)]$  aus der Multiplikativität des Grades von Körpererweiterungen und der Multiplikativität der Blätterzahl von Überlagerungen. Um schließlich auch den Fall verzweigter Überlagerungen einzubeziehen, müssen wir das Argument nur unwesentlich erweitern. Sicher gibt es ja dann  $W \xrightarrow{\text{q}} y$  abgeschlossen diskret derart, daß  $X \setminus p^{-1}(W) \rightarrow Y \setminus W$  eine unverzweigte Überlagerung ist. Unsere Konstruktion von oben liefert nun eben auch zu  $f \in \mathcal{M}^{\text{an}}(X)$  ein Polynom  $P \in \mathcal{M}^{\text{an}}(Y \setminus W)[T]$  vom Grad  $n$  mit  $P(f) = 0$ , dessen Koeffizienten bereits zu  $\mathcal{M}^{\text{an}}(Y)$  gehören, und das zeigt wieder  $[\mathcal{M}^{\text{an}}(X); \mathcal{M}^{\text{an}}] \leq n$ . Das Bilden der normalen Hülle von  $X \setminus p^{-1}(W) \rightarrow Y \setminus W$  gefolgt vom Bilden der verzweigten Ausdehnung liefert wieder verzweigte Überlagerungen  $Z \rightarrow X \rightarrow Y$  mit  $Z \rightarrow X$  und  $Z \rightarrow Y$  Galois, und dasselbe Argument wie zuvor zeigt wieder  $[\mathcal{M}^{\text{an}}(X)/\mathcal{M}^{\text{an}}(Y)] = n$  und  $\text{Gal}(\mathcal{M}^{\text{an}}/\mathcal{M}^{\text{an}}(Y)) \xrightarrow{\sim} \text{Top}_Y^{\times}(X)^{\text{opp}}$ .

*Das folgende war mal in der Algebra, aber da war es doch unnatürlich. Was aufheben, und wohin damit? In der Algebra ist nur der Satz geblieben.*

*Ergänzung 5.1.32.* In der Terminologie ?? hieße  $\mathcal{M}(X)$  der “ganze Abschluß von  $\mathbb{C}(T)$  in  $\text{Topf}(X, \mathbb{C})$ ”. Dort wird auch gezeigt, daß solch ein ganzer Abschluß stets ein Teilring ist. Wir zeigen das im folgenden nur für unseren Spezialfall sozusagen “zu Fuß”.

**Satz 5.1.33 (Körpererweiterungen und Topologie).** 1. Gegeben eine zusammenhängende endliche verzweigte Überlagerung  $p : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  ist die Teilmenge  $\mathcal{M}(X) \subset \text{Topf}(X, \mathbb{C})$  ein Teilring und sogar ein Körper.

2. Ist  $q : Y \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  eine weitere endliche verzweigte Überlagerung und  $f : Y \rightarrow X$  ein "Morphismus von Überlagerungen" alias eine stetige Abbildung mit  $p \circ f = q$ , so induziert das Zurückholen mit  $f$  einen Ringhomomorphismus  $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ .

3. Der Funktor  $X \mapsto \mathcal{M}(X)$  ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche verzweigte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Überlagerungen von } \mathbb{P}^1\mathbb{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche} \\ \text{Körpererweiterungen} \\ \text{von } \mathbb{C}(T) \end{array} \right\}^{\text{opp}}$$

5.1.34. Den ersten Teil dieses Satzes zeigen wir gleich. Der zweite Teil ist offensichtlich. Der Schlüssel zum Beweis des dritten Teils ist die Theorie der sogenannten "Riemann'schen Flächen". Im Rahmen dieser Theorie zeigt man feiner, daß es für jede endliche verzweigte Überlagerung  $X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  genau eine Struktur als Riemann'sche Fläche auf dem topologischen Raum  $X$  gibt derart, daß unsere Überlagerungsabbildung ein Morphismus von Riemann'schen Flächen wird, und daß unser  $\mathcal{M}(X)$  dann genau der Ring der meromorphen Funktionen auf  $X$  ist. Wir deuten im folgenden nur an, wie man mit Funktionentheorie und etwas Topologie zeigen kann, daß unser Funktor zumindest volltreu ist.

*Beweis.* Für den ersten Teil reicht es anzunehmen, daß  $p : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  eine stetige Abbildung von einem zusammenhängenden topologischen Raum  $X$  nach  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  ist mit endlichen Fasern und unendlichem Bild. Zunächst zeigen wir unter diesen Annahmen, daß alle von Null verschiedenen Elemente von  $\mathcal{M}(X)$  bereits Einheiten von  $\text{Topf}(X, \mathbb{C})$  sind, in Formeln

$$\mathcal{M}(X) \setminus 0 \subset \text{Topf}(X, \mathbb{C})^\times$$

Gegeben  $\alpha \in \mathcal{M}(X)$  und  $P \in \mathbb{C}(T)[A] \setminus 0$  mit  $P(\alpha) = 0$  sei dazu  $a_k \in \mathbb{C}(T) \setminus 0$  der Koeffizient der tiefsten in  $P$  vorkommenden Potenz von  $A$ . Ist  $E \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  eine endliche Teilmenge, außerhalb derer alle Koeffizienten von  $P$  definiert sind und so daß  $\alpha$  einen stetigen Repräsentanten auf  $X \setminus p^{-1}(E)$  hat, und hat außerdem  $a_k$  keine Nullstelle außerhalb  $E$ , so ist die Nullstellenmenge von  $\alpha$  in  $X \setminus p^{-1}(E)$  offensichtlich nicht nur abgeschlossen, sondern auch offen. Im Fall von zusammenhängendem  $X$  hat nach IV.3.4.16 also  $\alpha \in \mathcal{M}(X)$ , wenn es nicht identisch verschwindet, höchstens endlich viele Nullstellen, und dann ist

es offensichtlich im Ring  $\text{Topf}(X, \mathbb{C})$  eine Einheit. Man erkennt weiter leicht, daß für  $\alpha \in \mathcal{M}(X) \setminus 0$  auch gilt  $\alpha^{-1} \in \mathcal{M}(X)$ . Nach dieser Vorarbeit beachten wir dann, daß aus  $\alpha \in \mathcal{M}(X)$  mit ?? bereits folgt  $\mathbb{C}(T)[\alpha] \subset \mathcal{M}(X)$ . Damit ist  $\mathbb{C}(T)[\alpha]$  schon mal ein Körper, und für  $\beta \in \mathcal{M}(X)$  folgt mit ?? erst  $\mathbb{C}(T)[\beta]$  endlichdimensional über  $\mathbb{C}(T)$  und dann  $\mathbb{C}(T)[\alpha, \beta]$  endlichdimensional über  $\mathbb{C}(T)[\alpha]$  und damit  $\mathbb{C}(T)[\alpha, \beta]$  endlichdimensional über  $\mathbb{C}(T)[\alpha]$  und damit dann schließlich  $\mathbb{C}(T)[\alpha, \beta] \subset \mathcal{M}(X)$ . Insbesondere folgt aus  $\alpha, \beta \in \mathcal{M}(X)$  also  $\alpha + \beta, \alpha\beta \in \mathcal{M}(X)$  und damit ist  $\mathcal{M}(X)$  ein Teilring von  $\text{Topf}(X, \mathbb{C})$  und zusammen mit unseren vorherigen Erkenntnissen in der Tat ein Körper. Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Der zweite Teil ist offensichtlich, und wir diskutieren nun noch etwas den Beweis des dritten Teils. Zunächst zeigen wir dazu, daß die offensichtliche Einbettung einen Isomorphismus  $\mathbb{C}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$  liefert. Das benötigt etwas Funktionentheorie. In IV.4.2.15 haben Sie aus dem Satz über implizite Funktionen gefolgert, daß eine stetige Funktion  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  der komplexen Zahlenebene, die an jeder Stelle einfache Nullstelle eines normierten Polynoms  $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0$  mit holomorphen Koeffizienten  $a_i : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist, bereits selbst holomorph sein muß. Nun ist  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$  eine algebraische Körpererweiterung von  $\mathbb{C}(T)$ , und da wir in Charakteristik Null sind, muß diese separabel sein. Folglich wird jedes  $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$  einen auf dem Komplement einer endlichen Menge holomorphen Repräsentanten haben. In Übung ?? haben Sie weiter gezeigt, daß jede Nullstelle  $\alpha \in \mathbb{C}$  eines Polynoms mit komplexen Koeffizienten  $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0$  die Abschätzung  $|\alpha| \leq 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$  erfüllt. Daraus folgt mit dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz leicht, daß  $\alpha$  durch eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  repräsentiert werden kann, und 2.1.11 zeigt dann weiter, daß diese meromorphe Funktion von  $\mathbb{C}(T)$  herkommen muß. Hat nun allgemeiner unsere endliche verzweigte zusammenhängende Überlagerung  $p : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  die Eigenschaft, daß je zwei Punkte ein- und derselben Faser durch einen Automorphismus ineinander überführt werden können—wir sprechen dann auch von einer **Galois-Überlagerung**—und ist  $\Gamma$  die Automorphismengruppe, so ist hoffentlich anschaulich klar und Überlagerungstheorie ?? zeigt auch formal, daß  $|\Gamma|$  die Blätterzahl sein muß, und dann gilt offensichtlich

$$\mathcal{M}(X)^\Gamma = \mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$$

und wir haben eine Galoiserweiterung vor uns. Indem man ?? auf verzweigte Überlagerungen erweitert, kann man die Volltreueheit unseres Funktors aus der Galoiskorrespondenz ?? folgern. Daß unser Funktor schließlich surjektiv ist auf Isomorphieklassen, kann man mit dem Satz vom primitiven Element ?? verstehen: Danach entsteht ja jede endliche Erweiterung  $L$  des Funk-

tionenkörpers  $\mathbb{C}(T)$  durch die Adjunktion einer Nullstelle eines normierten irreduziblen Polynoms  $f \in \mathbb{C}(T)[A]$ . Nach ?? finden wir zu so einem irreduziblen Polynom stets  $c \in \mathbb{C}(T)^\times$  mit  $cf \in \mathbb{C}[T][A]$  einem primitiven Polynom mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}[T]$ , und nach ?? ist  $g = cf$  dann irreduzibel in  $\mathbb{C}[T][A] = \mathbb{C}[T, A]$ . Nun überlegt man sich leicht, daß die offensichtliche Abbildung  $\mathbb{C}[T, A]/\langle g \rangle \rightarrow \mathbb{C}(T)[A]/\langle g \rangle$  über die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers ?? einen Körperisomorphismus

$$\text{Quot}(\mathbb{C}[T, A]/\langle g \rangle) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)[A]/\langle g \rangle = L$$

induziert. Bezeichnet  $Z(g) = \{(a, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \mid g(a, \lambda) = 0\}$  mit  $Z$  wie “zero” die Nullstellenmenge von  $g$ , so liefert das Einschränken polynomialer Funktionen nach ?? einen Ringhomomorphismus und nach ?? sogar einen injektiven Ringhomomorphismus  $\mathbb{C}[T, A]/\langle g \rangle \hookrightarrow \text{Top}(Z(g), \mathbb{C})$ . Mithilfe von ?? erkennt man weiter, daß dieser Ringhomomorphismus über die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers ?? wie in ?? eine Einbettung

$$L = \text{Quot}(\mathbb{C}[T, A]/\langle g \rangle) \hookrightarrow \text{Topf}(Z(g), \mathbb{C})$$

unseres Körpers  $L$  in den Ring der fast überall definierten  $\mathbb{C}$ -wertigen stetigen Funktionen auf der Nullstellenmenge  $Z(g)$  von  $g$  induziert. Natürlich landet er in  $\mathcal{M}(Z(g))$ , und ein Dimensionsvergleich zeigt, daß er ein Isomorphismus sein muß. Es bleibt also nur zu zeigen, daß sich die Verknüpfung  $Z(g) \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  auch als Verknüpfung der Einbettung des Komplements einer endlichen Menge  $Z(g) \hookrightarrow X$  mit einer endlichen verzweigten Überlagerung  $X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  schreiben läßt. Die Fasern der Projektion auf die erste Koordinate

$$\text{pr}_1 : Z(g) \rightarrow \mathbb{C}$$

haben nun außerhalb einer endlichen Menge  $P \subset \mathbb{C}$  stets genau so viele Urbilder, wie der Grad  $\text{grad } f = [L : \mathbb{C}(T)]$  unseres Polynoms angibt: Das gilt etwa außerhalb der Nullstellenmenge des Leitkoeffizienten  $c$  von  $g$  vereinigt mit der Nullstellenmenge der Diskriminante von  $f$ . In der Tat kann man sich  $g = cf$  ja als ein Polynom mit variablen Koeffizienten denken, und mit dem Polynom variieren dann eben auch seine Nullstellen. An einigen speziellen Stellen sinkt der Grad, weil der Leitkoeffizient verschwindet, oder es fallen Nullstellen zusammen, weil die Diskriminante verschwindet, aber wenn man von diesen Stellen absieht, so findet man stets genau so viele Nullstellen, wie der Grad vorgibt. Wir schreiben nun  $Z(g)^\circ = \text{pr}_1^{-1}(\mathbb{C} \setminus P)$  und betrachten die Abbildung

$$\text{pr}_1 : Z(g)^\circ \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$$

Der Satz über implizite Funktionen sagt uns, daß das eine unverzweigte Überlagerungsabbildung ist im Sinne von ??, und es ist nicht schwer zu zeigen,

daß sich solch eine endliche unverzweigte Überlagerung des Komplements endlich vieler Punkte in einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension Zwei stets eindeutig zu einer verzweigten Überlagerung der ganzen topologischen Mannigfaltigkeit fortgesetzt werden kann. *Formuliere besser, mache zu Übung in der Topologie.* 5.1.13  $\square$

## 5.2 Anschauung für die Galoisgruppe\*

5.2.1. Formal ist der nun folgende Abschnitt für die logische Kohärenz dieser Vorlesung nicht von Belang. Es wird darin auch nichts bewiesen. Ich denke jedoch, daß die im folgenden erklärten Ideen bei der historischen Entwicklung der Theorie von zentraler Bedeutung waren und hoffe, daß sie Ihnen beim Verständnis helfen werden. Um die Aussage des Hauptsatzes in diesem Abschnitt zu verstehen, sollten Sie mit den Grundbegriffen der Theorie topologischer Räume vertraut sein, wie sie etwa in der Analysis II.6.5 erklärt wurden. Weiter benötigen Sie Grundkenntnisse über die komplexe projektive Gerade alias Riemann'sche Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  im Umfang von ??, und schließlich die Sprache der Kategorientheorie, insbesondere den Begriff einer Äquivalenz von Kategorien ??.

5.2.2. Für jede Menge  $Z$  und jeden Ring  $k$  wurde in ?? der Ring  $\text{Ensf}(Z, k)$  der fast überall definierten Funktionen auf  $Z$  mit Werten in  $k$  erklärt. Für jede Abbildung  $f : Y \rightarrow Z$  mit endlichen Fasern liefert das Vorschalten von  $f$  einen Ringhomomorphismus  $(\circ f) : \text{Ensf}(Z, k) \rightarrow \text{Ensf}(Y, k)$  in die Gegenrichtung, das **Zurückholen**.

5.2.3. Gegeben ein topologischer Raum  $Z$  erklären wir feiner auch den Teilring  $\text{Topf}(Z) \subset \text{Ensf}(Z, \mathbb{C})$  der fast überall definierten stetigen komplexwertigen Funktionen. Ich meine damit fast überall definierte Funktionen, die durch eine auf dem Komplement einer endlichen Menge stetige Funktion repräsentiert werden können. Für jede stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow Z$  mit endlichen Fasern liefert das Vorschalten von  $f$  auch einen Ringhomomorphismus  $(\circ f) : \text{Topf}(Z) \rightarrow \text{Topf}(Y)$  in die Gegenrichtung, das **Zurückholen** fast überall definierter stetiger Funktionen.

**Definition 5.2.4.** Wir verstehen unter einer **endlichen verzweigten Überlagerung der Riemann'schen Zahlenkugel**  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  eine stetige Abbildung  $p : Z \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  von einem kompakten Hausdorffraum  $Z$  nach  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  derart, daß es für jeden Punkt  $z \in Z$  einen **Verzweigungsindex**  $n = n(z) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und



Dies Bild kam bereits in ?? vor als Illustration für die Abbildung  $z \mapsto z^2$  der komplexen Zahlenebene auf sich selbst. Es illustriert damit auch die lokale Struktur einer verzweigten Überlagerung in einer Umgebung einer Stelle  $x$  mit Verzweigungsindex  $n(x) = 2$ . Der Begriff der Verzweigung kommt wohl vom reellen Bild her, wenn man bei einem Polynom mit  $(\mathbb{R}[T])[X]$  in zwei Veränderlichen untersucht, wie die Nullstellen als Polynom in  $X$  abhängen vom Wert von  $T$ . Mehrfache Nullstellen werden sich beim Wackeln an  $T$  oft in mehrere einfache Nullstellen trennen alias verzweigen, und das ist die Vorstellung, die dem Begriff der Verzweigung zugrundeliegt. Zum Beispiel hat  $X^2 - T$  bei  $T = 0$  eine doppelte reelle Nullstelle, die sich beim Verwackeln zu  $T > 0$  in zwei reelle Nullstellen trennt, während sie beim Verwackeln zu  $T < 0$  im Reellen nicht mehr zu sehen ist und sich in zwei rein imaginäre Nullstellen trennt. Wie sich die komplexen Nullstellen beim Bewegen von  $T$  in der komplexen Ebene verhalten, illustriert das obige Bild.

ein kommutatives Diagramm von punktierten topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} u & \in & (\mathbb{C}, 0) \hookrightarrow (Z, z) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow p \\ u^n & \in & (\mathbb{C}, 0) \hookrightarrow (\mathbb{P}^1\mathbb{C}, p(z)) \end{array}$$

gibt mit offenen stetigen injektiven Horizontalen. Unter einem punktierten Raum verstehen wir hierbei einen Raum mit einem ausgezeichneten Punkt, und unter einem Morphismus von punktierten Räumen eine stetige Abbildung, die den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführt. Eine offene Abbildung von topologischen Räumen schließlich ist eine Abbildung, unter der das Bild jeder offenen Menge wieder offen ist.

5.2.5. Man erkennt unschwer, daß gegeben eine endliche verzweigte Überlagerung der Riemann'schen Zahlenkugel  $p : Z \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  der Verzweigungsindex an jeder Stelle  $z \in Z$  wohldefiniert ist, daß er nur für höchstens endlich viele Punkte aus  $Z$  echt größer als Eins sein kann, und daß die Summe der Verzweigungsindizes über alle Punkte einer gegebenen Faser der Projektion  $p$  nicht von der Wahl der Faser abhängt. Diese Zahl heißt dann die **Blätterzahl** unserer verzweigten Überlagerung.

5.2.6. Gegeben eine verzweigte Überlagerung  $p : Z \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  betrachten wir im Ring  $\text{Topf}(Z)$  der fast überall definierten stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $Z$  die Teilmenge

$$\mathcal{M}(Z) := \{\alpha \in \text{Topf}(Z) \mid \text{Es gibt } P \in \mathbb{C}(T)[X] \text{ mit } P \neq 0 \text{ aber } P(\alpha) = 0\}$$

Beim Auswerten unseres Polynoms  $P$  auf der fast überall definierten Funktion  $\alpha$  legen wir die Einbettungen

$$\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \text{Topf}(\mathbb{C}) \xleftarrow{\sim} \text{Topf}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Topf}(Z)$$

zugrunde, wobei der mittlere Isomorphismus durch das Zurückholen mit der üblichen Einbettung  $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  gegeben wird und die letzte Einbettung durch das Zurückholen mit unserer Projektion  $p$ .

*Vorschau 5.2.7.* In der Terminologie ?? hieße  $\mathcal{M}(Z)$  der "ganze Abschluß von  $\mathbb{C}(T)$  in  $\text{Topf}(Z)$ ". Dort wird auch gezeigt, daß solch ein ganzer Abschluß stets ein Teilring ist.

**Satz 5.2.8 (Körpererweiterungen und Topologie).** 1. Gegeben eine zusammenhängende endliche verzweigte Überlagerung  $p : Z \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  der Riemann'schen Zahlenkugel ist die Teilmenge  $\mathcal{M}(Z) \subset \text{Topf}(Z)$  ein Teilring und sogar ein Körper.

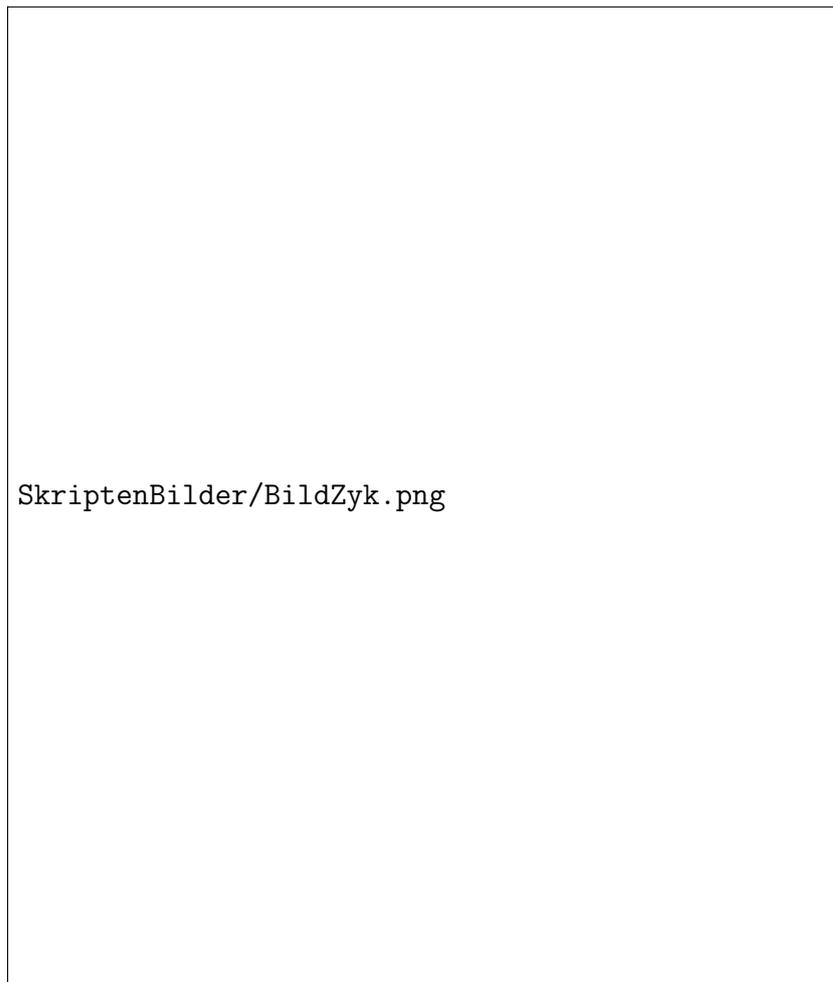
2. Ist  $q : Y \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  eine weitere endliche verzweigte Überlagerung der Riemann'schen Zahlenkugel und  $f : Y \rightarrow Z$  ein "Morphismus von Überlagerungen" alias eine stetige Abbildung mit  $p \circ f = q$ , so induziert das Zurückholen mit  $f$  einen Ringhomomorphismus  $\mathcal{M}(Z) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ .
3. Der Funktor  $Z \mapsto \mathcal{M}(Z)$  ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche verzweigte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Überlagerungen von } \mathbb{P}^1\mathbb{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche} \\ \text{Körpererweiterungen} \\ \text{von } \mathbb{C}(T) \end{array} \right\}^{\text{opp}}$$

5.2.9. Wir zeigen diesen Satz hier nicht. Der Schlüssel zum Beweis ist die Theorie der sogenannten "Riemann'schen Flächen". Im Rahmen dieser Theorie zeigt man feiner, daß es für jede endliche verzweigte Überlagerung  $Z \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  genau eine Struktur als Riemann'sche Fläche auf dem topologischen Raum  $Z$  gibt derart, daß unsere Überlagerungsabbildung ein Morphismus von Riemann'schen Flächen wird. Weiter zeigt man, daß unser  $\mathcal{M}(Z)$  dann genau der Ring der "meromorphen Funktionen" auf  $Z$  ist, und daß dieser Ring im Fall von zusammenhängendem  $Z$  ein Körper ist.

*Beispiel 5.2.10.* Das Adjungieren einer  $n$ -ten Wurzel  $U$  aus  $T$  zu  $\mathbb{C}(T)$ , also die Körpererweiterung  $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}(U)$  mit  $T \mapsto U^n$ , entspricht der verzweigten Überlagerung  $p : Z = \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  mit  $p(z) = z^n$  für  $z \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  und  $p(\infty) = \infty$ . Das ist eine verzweigte  $n$ -blättrige Überlagerung, die nur bei  $0$  und  $\infty$  verzweigt und dort jeweils den Verzweigungsindex  $n$  hat. Die Galoisgruppe ist in diesem Fall nach ?? isomorph zur zyklischen Gruppe der  $n$ -ten komplexen Einheitswurzeln. Genauer erhalten wir einen derartigen Isomorphismus, indem wir jeder  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  den Automorphismus  $\mathbb{C}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(U)$ ,  $U \mapsto \zeta U$  zuordnen. Das sollte im Lichte unseres Satzes nun auch anschaulich klar sein.

5.2.11. Ganz allgemein heißt eine stetige Abbildung  $p : Z \rightarrow B$  von topologischen Räumen eine **Überlagerung** oder genauer eine **unverzweigte Überlagerung** genau dann, wenn jeder Punkt  $b \in B$  eine offene Umgebung  $U$  besitzt derart, daß  $p^{-1}(U)$  eine disjunkte Zerlegung in offene Teilmengen  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$  zuläßt, die von  $p$  jeweils homöomorph auf  $U$  abgebildet werden, für die also  $p : U_i \rightarrow U$  stets eine Bijektion mit stetiger Umkehrabbildung ist. Ist  $q : Y \rightarrow B$  eine weitere Überlagerung, so versteht man unter einem "Morphismus von Überlagerungen" oder auch einer **Decktransformation** eine stetige Abbildung  $f : Z \rightarrow Y$  mit  $q \circ f = p$ . Eine **endliche Überlagerung** ist eine Überlagerung mit endlichen Fasern. Man kann nun zeigen und es ist hoffentlich auch anschaulich einleuchtend, daß wir für jede



Anschauung für die durch Adjunktion einer dritten Wurzel aus  $T$  entstehenden Körpererweiterung des Funktionenkörpers  $\mathbb{C}(T)$  nach 5.2.12. Ich finde, man sieht in diesem Fall auch recht anschaulich, daß die Galoisgruppe zyklisch von der Ordnung drei sein muß.

endliche Teilmenge  $E \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  durch Einschränken von Überlagerungen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche verzweigte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Überlagerungen von } \mathbb{P}^1\mathbb{C} \text{ ohne} \\ \text{Verzweigungspunkte über } E \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche unverzweigte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Überlagerungen von} \\ \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus E \end{array} \right\}$$

$$(p : Z \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}) \quad \mapsto \quad (p : Z \setminus p^{-1}(E) \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus E)$$

erhalten. Den quasiinversen Funktor nenne ich das **Fortsetzen zu einer verzweigten Überlagerung von  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$** .

5.2.12. Um Bilder von Überlagerungen zu zeichnen und so die Galoisgruppe anschaulich zu machen, ist es oft praktisch, für eine gegebene endliche Teilmenge  $E \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  der Riemann'schen Zahlenkugel eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{C} \setminus E$  ihres Komplements zu wählen, die salopp gesprochen entsteht, indem wir um jeden unserer Punkte  $e \in E$  mit einer Ausnahme—im Fall  $\infty \in E$  der Ausnahme  $\infty$ —einen kleinen Kreis zeichnen, und jeden dieser kleinen Kreise mit einem festen weiteren Punkt so verbinden, daß diese ganzen Verbindungswege sich untereinander und mit unseren kleinen Kreisen nie kreuzen. Haben wir  $S$  in dieser Art gewählt, so erhalten wir durch Restriktion auf  $S$  eine weitere Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche unverzweigte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Überlagerungen von} \\ \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus E \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche unverzweigte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Überlagerungen von} \\ S \end{array} \right\}$$

$$(p : Z \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus E) \quad \mapsto \quad (p : p^{-1}(S) \rightarrow S)$$

Formal folgt das aus der “Homotopieinvarianz der Kategorie der Überlagerungen” ?? oder etwas weniger direkt mit der “Homotopieinvarianz der Fundamentalgruppe” ?? aus dem “Satz über den Faserfunktoren” ?. Die Überlagerungen von derartigen Mengen  $S$  lassen sich nun sehr viel besser zeichnen, und ihre Automorphismengruppen, die ja unter unserer Äquivalenz von Kategorien gewissen Galoisgruppen entsprechen, sind auch zumindest in kleinen Fällen der Anschauung noch gut zugänglich.

*Vorschau* 5.2.13. Ich will noch skizzieren, wie man in 5.2.8 zumindest auf Objekten einen quasiinversen Funktor konstruieren kann. Der Satz vom primitiven Element ?? wird uns bald sagen, daß jede endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{C}(T)$  primitiv ist. Gegeben eine primitive algebraische Körpererweiterung  $\mathbb{C}(T)(\alpha)$  von  $\mathbb{C}(T)$  betrachten wir nun das Minimalpolynom  $P \in \mathbb{C}(T)[X]$



Eine Überlagerung mit drei Verzweigungspunkten, davon je einer im rechten und einer im linken Kreis. Zu sehen ist die Menge  $S$  und ihre Überlagerung. Die Galoisgruppe ist die Gruppe der Decktransformationen dieser Überlagerung in sich selber, in diesem Fall die Klein'sche Vierergruppe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

von  $\alpha$ . Wir schreiben es

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}(T)$ . Es gibt sicher  $E \subset \mathbb{C}$  endlich derart, daß alle Koeffizienten  $a_i$  unseres Minimalpolynoms auf  $\mathbb{C} \setminus E$  wohldefinierte komplexwertige Funktionen sind. Die Menge  $F$  der Punkte  $q \in \mathbb{C} \setminus E$  derart, daß das zu  $q$  spezialisierte Polynom

$$P_q := X^n + a_{n-1}(q)X^{n-1} + \dots + a_0(q) \in \mathbb{C}[X]$$

mehrfache Nullstellen hat, muß nun auch endlich sein: In der Tat ist nämlich  $P$  teilerfremd zu seiner Ableitung  $P'$  nach  $X$  und folglich existiert in  $\mathbb{C}(T)[X]$  eine Darstellung  $1 = HP + KP'$  mit  $H, K \in \mathbb{C}(T)[X]$ . An den Stellen  $q \in \mathbb{C} \setminus E$ , an denen die Koeffizienten von  $H$  und  $K$  wohldefinierte komplexwertige Funktionen sind, können dann  $P_q$  und  $P'_q$  keine gemeinsame Nullstelle haben. In dieser Situation kann man zeigen, daß die Projektion auf die zweite Koordinate von

$$Z := \{(z, q) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus (E \cup F)) \mid P_q(z) = 0\}$$

auf  $\mathbb{C} \setminus (E \cup F)$  eine zusammenhängende unverzweigte endliche Überlagerung ist. Deren Fortsetzung zu einer verzweigten Überlagerung von  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  entspricht dann unserer Körpererweiterung  $\mathbb{C}(T)(\alpha) \supset \mathbb{C}(T)$  unter der Äquivalenz von Kategorien aus 5.2.8.

### 5.3 Zur Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion

5.3.1. Gegeben  $a, b > 0$  betrachten wir in  $\mathbb{R}^2$  die Ellipse

$$E = \{(x, y) \mid ax^2 + by^2 = 1\}$$

Unter einem **elliptischen Integral** mag man ganz allgemein das Integral einer rationalen Funktion  $R(x, y)$  über ein Stück einer Ellipse im Sinne von IV.6.9.1 oder mit IV.6.9.5 einfacher im Sinne von II.7.3.6 verstehen. Das Integral der konstanten Funktion  $R = 1$  würde zum Beispiel die Länge unseres Ellipsenstücks liefern. Setzen wir der Einfachheit halber  $a = 1$  und parametrisieren den Schnitt unserer Ellipse mit der oberen Halbebene durch  $x \in [-1, 1]$ , so erhalten wir die Parameterdarstellung  $\varphi(x) = (x, b^{-1/2}(1-x^2)^{1/2})$  und als Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\varphi}(x) = (1, b^{-1/2}x(1-x^2)^{-1/2})$ . Mit der Abkürzung  $b^{-1} - 1 = k$  ergibt sich so für die absolute Geschwindigkeit die Darstellung

$$\|\dot{\varphi}(x)\| = \sqrt{1 + \frac{b^{-1}x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+kx^2}{1-x^2}}$$

Für das Integral einer Funktion  $R$  längs des Stücks der Ellipse über  $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$  erhalten wir also

$$\int_{\alpha}^{\beta} R(\varphi(x)) \sqrt{\frac{1+kx^2}{1-x^2}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} R(\varphi(x)) \frac{1+kx^2}{\sqrt{(1+kx^2)(1-x^2)}} dx$$

Im Fall eines Kreises  $k = 1$  können derartige Integrale explizit berechnet werden, wie zum Beispiel in III.1.4.7 ausgeführt wird. Im allgemeinen weiß ich nicht, wie man so etwas anders als numerisch ausrechnen sollte, aber für spezielle Funktionen  $R$  kann man bemerkenswerte Relationen zwischen derartigen Integralen herleiten, deren Entdeckung den Beginn der Theorie der "elliptischen Funktionen" markiert. Hängt etwa  $R$  nur von  $x$  ab, so können wir unser Integral auffassen als ein Integral des Typs

$$\int_{\gamma} \frac{Q(x)}{\sqrt{P(x)}} dx$$

mit  $Q(x) = R(x)(1+kx^2)$  und  $P(x) = (1+kx^2)(1-x^2)$  einem Polynom vierten Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen, die darüber hinaus nicht auf dem Integrationsweg  $\gamma$  liegen, der in diesem Fall schlicht das reelle Intervall  $[\alpha, \beta]$  ist, sowie  $\sqrt{P(x)}$  einer stetigen Wahl einer Wurzel auf dem Bild von  $\gamma$ , in diesem Fall der jeweils positiven Wahl. Die Bedingung paarweise verschiedener Nullstellen schließt hier gerade den Fall von Integralen über Kreislinien aus. Sind  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  für  $0 \leq i < 4$  die vier Nullstellen von  $P$ , so finden wir nach ?? sicher eine komplexe invertierbare  $(2 \times 2)$ -Matrix derart, daß unter der davon induzierten Abbildung  $f: \mathbb{P}^1\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  gilt  $f(\infty) = \lambda_0$  und  $f(0) = \infty$ , etwa  $f(w) = (\lambda_0 w + 1)/w$ . Unsere Funktion  $P$  mit einem vierfachen Pol bei  $\infty$  und vier einfachen Nullstellen außerhalb verwandelt sich dann in eine Funktion mit einem vierfachen Pol bei  $w = 0$  und vier einfachen Nullstellen, von denen eine bei  $\infty$  liegt, und erhält genauer die Gestalt  $P(f(w)) = cw^{-4}(w - \mu_1)(w - \mu_2)(w - \mu_3)$  für  $\mu_i = (\lambda_i - \lambda_0)^{-1}$ . Wir erhalten durch Substitution (*erkläre das noch besser*)

$$\int_{\gamma} \frac{Q(x)}{\sqrt{P(x)}} dx = \int_{f^{-1} \circ \gamma} \frac{Q(f(w))f'(w)}{\sqrt{P(f(w))}} dw$$

Auf der rechten Seite ist unser Integrationsweg  $f^{-1} \circ \gamma$  zwar kein reelles Intervall mehr, aber der Nenner vereinfacht sich substantiell und wir landen bei einem Integral des Typs

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{q(w)}{\sqrt{p(w)}} dw$$

mit  $q \in \mathbb{C}(w)$  einem rationalen Ausdruck in  $w$  und  $\hat{\gamma}$  einem komplizierteren Integrationsweg in der komplexen Zahlenebene, aber mit  $p$  einem Polynom nur noch dritten Grades ohne mehrfache Nullstellen. Nach einer weiteren Substitution der Gestalt  $w(z) = cz + d$  dürfen wir sogar annehmen, daß  $p(z)$  die Gestalt  $p(z) = 4z^3 + \alpha z + \beta$  hat. Im folgenden werden wir meromorphe Funktionen  $\wp$  auf der komplexen Zahlenebene konstruieren, die eine Gleichung der Gestalt  $(\wp')^2 = 4\wp^3 + \alpha\wp + \beta$  erfüllen. Sobald das geleistet ist, führt uns die Substitution  $z = \wp(u)$  auf die Suche einer Stammfunktion von  $q(\wp(u))$ . Das ist zwar im allgemeinen immer noch nicht besonders einfach, aber im Fall  $q = 1$  eben doch, und damit können wir dann zumindest das Integral über den Kehrwert der Wurzel eines kubischen Polynoms schreiben als Umkehrfunktion der besagten Funktion  $\wp$ .

**Definition 5.3.2 (Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion).** Gegeben ein Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  alias das Gruppenerzeugnis einer  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}$  definiert man eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  durch die Reihe

$$\wp(z) = \wp_{\Gamma}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus 0} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Daß diese Reihe auf  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  kompakt konvergiert zeigt man, indem man für jedes Kompaktum  $K \subset \mathbb{C}$  nachweist, daß fast alle Terme unserer Reihe für  $z \in K$  betragsmäßig abgeschätzt werden können durch  $2/|\omega|^3$ . Die Summe der  $1/|\omega|^3$  konvergiert jedoch nach IV.6.9.11. Setzen wir  $\wp$  auf ganz  $\mathbb{C}$  fort, indem wir allen Gitterpunkten als Wert  $\infty$  zuordnen, so erhalten wir mit demselben Argument eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ , die **Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion** zu unserem Gitter  $\Gamma$ .

**Proposition 5.3.3 (Eigenschaften der  $\wp$ -Funktion).** Ist  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter, so ist die zugehörige  $\wp$ -Funktion gerade, in Formeln  $\wp(z) = \wp(-z)$ , und  $\Gamma$ -periodisch, in Formeln  $\wp(z + \omega) = \wp(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $\omega \in \Gamma$ .

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\wp$  gerade. Offensichtlich ist die Ableitung  $\wp'$  der  $\wp$ -Funktion  $\Gamma$ -periodisch. Für jedes  $\omega \in \Gamma$  verschwindet also die Ableitung von  $z \mapsto \wp(z + \omega) - \wp(z)$  auf  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  und diese Funktion ist mithin konstant. Bezeichnen wir diese Konstante mit  $c(\omega)$ , so ist offensichtlich  $c : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  ein Gruppenhomomorphismus und insbesondere gilt  $c(-\omega) = -c(\omega)$ . Andererseits ist mit  $\wp$  auch unsere Funktion  $c$  gerade, in Formeln  $c(-\omega) = c(\omega)$ . Zusammen ergibt sich  $c(\omega) = 0$  für alle  $\omega \in \Gamma$ .  $\square$

**Satz 5.3.4 (Bedeutung der Weierstraß'schen  $\wp$ -Funktion).** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter und  $\wp = \wp_{\Gamma}$  die zugehörige Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion.

1. Zusammen mit ihrer Ableitung liefert die  $\wp$ -Funktion eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}/\Gamma \text{ ohne das} \\ \text{neutrale Element} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 + ax + b\}$$

$$z \qquad \qquad \qquad \mapsto \quad (\wp(z), \wp'(z))$$

wobei unsere  $a, b \in \mathbb{C}$  gegeben werden durch  $a = -60 \sum_{\omega \in \Gamma \setminus 0} \omega^{-4}$  und  $b = -140 \sum_{\omega \in \Gamma \setminus 0} \omega^{-6}$ .

2. Der Körper  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$  der meromorphen Funktionen auf dem Quotienten wird über  $\mathbb{C}$  erzeugt von  $\wp$  und  $\wp'$ .

*Bemerkung 5.3.5.* Die im Satz erklärte Abbildung induziert auch eine Bijektion zwischen  $\mathbb{C}/\Gamma$  und dem Abschluß unserer Kubik in  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ , und diese Bijektion ist sogar ein Isomorphismus von Riemann'schen Flächen im Sinne von VI.4.2.3, wobei wir  $\mathbb{C}/\Gamma$  mit der finalen Struktur zur Projektion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  versehen und unsere Kubik mit der von  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$  induzierten Struktur.

*Beweis.* 2. Jede gerade Funktion aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$  mit in  $\Gamma$  enthaltener Polstellenmenge läßt sich als Polynom in  $\wp$  darstellen, denn das Bilden des nichtpositiven Terms der Laurententwicklung um Null liefert nach ?? die horizontale Injektion im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma) \text{ gerade mit } f^{-1}(\infty) \subset \Gamma\} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{C}[z^{-2}] \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathbb{C}[\wp] & & \end{array}$$

und die Laurententwicklung von  $\wp$  zeigt sofort, daß die diagonale Abbildung bijektiv ist. Es folgt, daß alle drei Abbildungen Vektorraumisomorphismen sein müssen. Jede gerade Funktion  $f$  aus  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$  kann damit als rationale Funktion in  $\wp$  dargestellt werden, denn hat  $f$  einen Pol bei  $a \notin \Gamma$ , so können wir durch Multiplikation mit  $(\wp(z) - \wp(a))^N$  für hinreichend großes  $N$  zu einer geraden Funktion ohne Pol bei  $a$  übergehen. Eine beliebige elliptische Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$  schließlich können wir zerlegen in  $f = f^+ + f^-$  mit  $f^+$  gerade und  $f^-$  ungerade und dann schreiben als  $f = f^+ + (f^-/\wp')\wp'$ .

1. Um zu prüfen, daß unsere Funktion wirklich in der angegebenen Kubik landet, gilt es, die Formel

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 + a\wp + b$$

nachzuweisen. Mithilfe der Laurententwicklungen am Nullpunkt zeigt man jedoch ohne Schwierigkeiten, daß die Differenz eine elliptische Funktion ohne Pole ist, die bei  $z = 0$  und folglich überall verschwindet. □

*Bemerkung 5.3.6.* Die Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion nimmt alle komplexen Zahlen als Werte an und definiert also eine Surjektion  $\mathbb{C}/\Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . In der Tat ist das Bild offen und kompakt. Da  $\wp$  gerade ist und  $\wp'$  ungerade, folgt leicht, daß unsere Abbildung alle Punkte der Kubik als Werte annimmt.

*Bemerkung 5.3.7.* Gegeben ein reeller Vektorraum  $V$  bezeichne  $\text{Gitt}(V)$  die Menge aller  $\mathbb{Z}$ -Gitter in  $V$ , als da heißt die Menge aller Untergruppen der additiven Gruppe  $V$ , die von einer  $\mathbb{R}$ -Basis erzeugt werden. Auf  $\text{Gitt}(\mathbb{C})$  operiert  $\mathbb{C}^\times$  in offensichtlicher Weise und die Vorschrift  $\Gamma \mapsto \mathbb{C}/\Gamma$  liefert dann eine Bijektion des Bahnenraums mit der Menge aller Isomorphieklassen von komplexen elliptischen Kurven

$$\mathbb{C}^\times \backslash \text{Gitt}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann'sche Flächen von der} \\ \text{topologischen Gestalt eines Schwimmrings,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

Der Beweis soll hier nur angedeutet werden: Man konstruiert die inverse Abbildung, indem man zu jeder elliptischen Kurve  $E$  die durch Integration holomorpher 1-Formen längs 1-Zykeln gegebene Paarung

$$H_1(E; \mathbb{Z}) \times \Omega_{\text{hol}}^1(E) \rightarrow \mathbb{C}$$

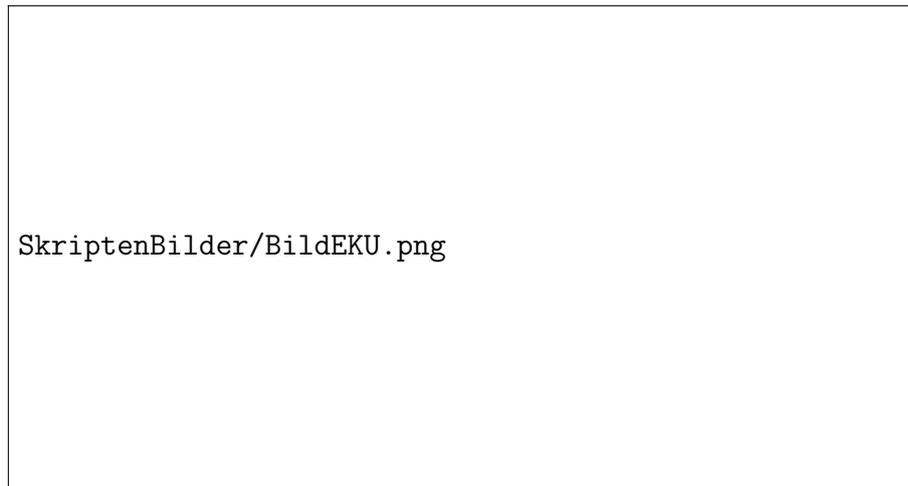
betrachtet. Die zugehörige Abbildung  $H_1(E; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{\text{hol}}^1(E), \mathbb{C})$  identifiziert  $H_1(E; \mathbb{Z})$  mit einem Gitter im komplex eindimensionalen Vektorraum  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{\text{hol}}^1(E), \mathbb{C})$ , und die Wahl einer Basis dieses Vektorraums liefert uns dann ein bis auf eine multiplikative Konstante wohlbestimmtes Gitter in  $\mathbb{C}$ .

*Bemerkung 5.3.8.* Die Wahl einer Wurzel  $i$  aus  $-1$  liefert eine Basis  $1, i$  von  $\mathbb{C}$  über  $\mathbb{R}$  und damit einen Isomorphismus  $\text{GL}(2; \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\times} \mathbb{C}$ . Unter diesem Isomorphismus entspricht die Isotropiegruppe des Gitters der Gauss'schen Zahlen offensichtlich gerade  $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$ . Da  $\text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\times} \mathbb{C}$  transitiv auf  $\text{Gitt}(\mathbb{C})$  operiert, erhalten wir so Bijektionen

$$\text{GL}(2; \mathbb{R}) / \text{GL}(2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\times} \mathbb{C} / (\text{Isotropiegruppe}) \xrightarrow{\sim} \text{Gitt}(\mathbb{C})$$

Den Bahnenraum  $\mathbb{C}^\times \backslash \text{Gitt}(\mathbb{C})$  können wir mithin identifizieren mit dem Doppelquotienten  $\mathbb{C}^\times \backslash \text{GL}(2; \mathbb{R}) / \text{GL}(2; \mathbb{Z})$ , wo  $\mathbb{C}^\times \subset \text{GL}(2; \mathbb{R})$  als die Untergruppe aller Drehstreckungen einzubetten ist. Diesen Doppelquotienten hinwiederum können wir in offensichtlicher Weise identifizieren mit dem Doppelquotienten  $\text{SO}(2) \backslash \text{SL}(2; \mathbb{R}) / \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ .

*Bemerkung 5.3.9.* Allgemeiner bezeichnen wir für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und  $N \geq 1$  mit  $\text{Gitt}_N(V)$  die Menge aller Paare von



Wir wollen uns anschaulich klar machen, daß eine verzweigte doppelte Überlagerung der Kugelschale mit vier Verzweigungspunkten ein Torus sein sollte. Dazu denken wir uns zwei der Verzweigungspunkte nahe am Nordpol und wählen zwischen ihnen einen Weg und denken uns die zwei anderen nahe am Südpol und wählen zwischen ihnen ebenfalls einen Weg. Schneiden wir dann die Überlagerung auf längs der Urbilder dieser Wege, so zerfällt sie in zwei Röhren, deren Ränder in der durch die Buchstaben angedeuteten Weise zu verkleben sind, wenn man die ursprüngliche Fläche wiederherstellen will. Offensichtlich entsteht jedoch bei diesem Verkleben ein Torus.

Gittern  $\Gamma \subset \Gamma_1 \subset V$  mit  $\Gamma_1/\Gamma$  zyklisch von der Ordnung  $N$ . Wieder erhalten wir eine Bijektion

$$\mathbb{C}^\times \setminus \text{Gitt}_N(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Elliptische Kurven mit} \\ \text{zyklischer Untergruppe der Ordnung } N, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift  $(\Gamma \subset \Gamma_1) \mapsto (\mathbb{C}/\Gamma \supset \Gamma_1/\Gamma)$ . Mit dem Elementarteilersatz folgt, daß  $\text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\times} \mathbb{C}$  wieder transitiv auf  $\text{Gitt}_N(\mathbb{C})$  operiert, und die Isotropiegruppe von  $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}N^{-1}i$  entspricht unter unseren Identifikationen der Gruppe  $\Gamma_0(N)$  aller Matrizen aus  $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$  mit durch  $N$  teilbarem Eintrag unten links. Wir erhalten so Bijektionen

$$\text{GL}(2; \mathbb{R})/\Gamma_0(N) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\times} \mathbb{C}/(\text{Isotropiegruppe}) \xrightarrow{\sim} \text{Gitt}_N(\mathbb{C})$$

und damit dann eine Identifikation zwischen unserer Menge von Isomorphieklassen elliptischer Kurven mit Zusatzstruktur und dem Doppelquotienten  $\mathbb{C}^\times \setminus \text{GL}(2; \mathbb{R})/\Gamma_0(N)$ .

**Proposition 5.3.10.** *Seien  $X$  und  $Y$  Riemann'sche Flächen. Ist  $Y$  kompakt und  $E \subset X$  ohne Häufungspunkte, so läßt sich jeder Morphismus mit endlichen Fasern  $X \setminus E \rightarrow Y$  zu einem Morphismus  $X \rightarrow Y$  fortsetzen.*

5.3.11. Ein Gegenbeispiel im Fall eines Morphismus mit unendlichen Fasern liefert etwa die Quotientenabbildung  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times / \langle q \rangle$  für  $|q| \neq 1$ , wobei  $\langle q \rangle \subset \mathbb{C}^\times$  die von  $q$  erzeugte multiplikative Untergruppe meint.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $X = D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und  $E = \{0\}$  annehmen. Zunächst behandeln wir nun den Fall  $Y = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . Es gilt zu zeigen, daß für  $D^\times = D \setminus \{0\}$  jeder Morphismus  $D^\times \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  mit endlichen Fasern auf ganz  $D$  fortgesetzt werden kann. Das hinwiederum folgt daraus, daß nach der Folgerung 2.1.14 aus dem Satz von Casaroti-Weierstraß 2.1.12 jede holomorphe Funktion mit einer wesentlichen Singularität auch unendliche Fasern haben muß. Im allgemeinen Fall finden wir zunächst nach ?? einen Morphismus mit endlichen Fasern  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . Die Verknüpfung  $D^\times \rightarrow Y \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  hat dann auch endliche Fasern, und aus dem bereits behandelten Fall erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} D^\times & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \\ \downarrow & & & & \parallel \\ D & \xrightarrow{\psi} & & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \end{array}$$

Nun ist aber  $\varphi^{-1}(\psi(0)) \subset Y$  endlich und wir finden nach dem Satz über lokale Struktur holomorpher Funktionen 1.8.14 eine Umgebung  $U$  von  $\psi(0)$  derart, daß in jeder Zusammenhangskomponente von  $\varphi^{-1}(U)$  genau ein Punkt von  $\varphi^{-1}(\psi(0))$  liegt. Verkleinern wir unsere Kreisscheibe  $D$  notfalls ein wenig, so dürfen wir annehmen, daß  $D^\times$  ganz in einer Komponente von  $\varphi^{-1}(U)$  landet. Wieder mit dem Satz über die lokale Struktur 1.8.14 sehen wir dann, daß wir  $D^\times \rightarrow Y$  stetig zu  $D \rightarrow Y$  fortsetzen können, und der Riemann'sche Hebbarkeitssatz liefert schließlich, daß diese stetige Fortsetzung holomorph sein muß.  $\square$

5.3.12. Für eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche  $Y$  im Sinne von VI.4.2.3 bezeichne  $\mathcal{M}(Y) \subset \mathcal{M}^{\text{an}}(Y)$  den Körper derjenigen meromorphen Funktionen auf  $Y$ , die entweder konstant sind oder jeden Wert höchstens endlich oft annehmen. Ist  $X$  eine zusammenhängende kompakte Riemannsche Fläche und  $E \subset X$  eine endliche Teilmenge, so liefert die Restriktion nach 2.1.14 einen Körperisomorphismus

$$\mathcal{M}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X \setminus E)$$

Insbesondere können wir jede kompakte Riemannsche Fläche  $X$  aus der durch das Weglassen endlich vieler Punkte entstehenden Riemannschen Fläche  $X \setminus E$  zurückgewinnen als die Menge aller Bewertungen des Körpers  $\mathcal{M}(X \setminus E)$ . In dieser Situation heißt  $X$  die **Kompaktifizierung** der Riemann'schen Fläche  $Y = X \setminus E$ . Analoges gilt allgemeiner und mit fast demselben Beweis, wenn  $E \subset X$  eine abzählbare abgeschlossene Teilmenge ist. So liefert etwa die kanonische Einbettung des Funktionenkörpers einen Isomorphismus  $\mathbb{C}(z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ .

*Bemerkung* 5.3.13. Die Operation von  $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$  auf der oberen Halbebene  $H^+$  ist eigentlich, nach ?? macht folglich die finale Struktur den Bahnenraum  $H^+ / \text{SL}(2; \mathbb{Z})$  zu einer Riemann'schen Fläche. Die Abbildung  $H^+ \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^{2\pi i z}$  definiert einen Isomorphismus des Bildes von  $\{z \in H^+ \mid \text{Im } z > 1\}$  in  $H^+ / \text{SL}(2; \mathbb{Z})$  mit der punktierten offenen Kreisscheibe vom Radius  $e^{-2\pi}$ , den wir verwenden, um diese Kreisscheibe an  $H^+ / \text{SL}(2; \mathbb{Z})$  anzukleben. So entsteht eine kompakte Riemann'sche Fläche

$$\hat{H} = H^+ / \text{SL}(2; \mathbb{Z}) \sqcup \{\infty\}$$

von der man zeigen kann, daß sie isomorph ist zu  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . Im Rückblick können wir sie natürlich auch als die Kompaktifizierung von  $H^+ / \text{SL}(2; \mathbb{Z})$  im Sinne von 5.3.12 beschreiben. Die meromorphen Funktionen auf  $H^+$ , die von meromorphen Funktionen auf  $\hat{H}$  herkommen, heißen **Modulfunktionen**. Explizit sind das genau die meromorphen  $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$ -invarianten Funktionen

auf der oberen Halbebene  $H^+$ , deren Entwicklung nach  $q = e^{2\pi iz}$  bei  $q = 0$  keine wesentliche Singularität hat. Allgemeiner betrachtet man meromorphe Schnitte in der  $k$ -ten Tensorpotenz des Kotangentialbündels von  $\widehat{H}$ . Das Zurückholen unter  $\pi : H^+ \rightarrow \widehat{H}$  gefolgt vom Teilen durch  $(dz)^{\otimes k}$  identifiziert sie mit meromorphen Funktionen  $f : H^+ \rightarrow \mathbb{C}$ , die der Transformationsformel

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{-2k} f(z)$$

genügen und in deren  $q$ -Entwicklung nur endlich viele negative Potenzen von  $q$  mit von Null verschiedenem Koeffizienten vorkommen. Derartige Funktionen heißen **Modulfunktionen vom Gewicht  $2k$** . Haben wir  $\pi^*(\omega) = f(z)(dz)^{\otimes k}$ , so gilt mit  $e_p$  der Kardinalität des Stabilisators von  $p \in H^+$  unter  $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z}) := \mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z}) / \pm \mathrm{id}$  die Formel

$$v_p(f) = e_p v_{\bar{p}}(\omega) + k(e_p - 1)$$

wegen  $d(u^e) = eu^{e-1} du$ . Weiter gilt  $v_\infty(f) = v_\infty(\omega) + k$  wegen der offensichtlichen Identität  $dz = (2\pi i)^{-1} q^{-1} dq$ . Schließlich gilt

$$-2k = \sum_{q \in \widehat{H}} v_q(\omega)$$

für jeden meromorphen Schnitt der  $k$ -ten Potenz des Kotangentialbündels von  $\widehat{H} \cong \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ , woraus wir folgern

$$-2k = v_\infty(f) - k + \frac{v_i(f) - k}{2} + \frac{v_\rho(f) - 2k}{3} + \sum_{p \neq \rho, i, \infty} v_p(f)$$

Eine kurze Rechnung führt von dort sofort zur Formel

$$\frac{k}{6} = v_\infty(f) + v_i(f)/2 + v_\rho(f)/3 + \sum_{p \neq \rho, i, \infty} v_p(f)$$

**Definition 5.3.14.** Eine **Modulform vom Gewicht  $2k$**  ist eine Modulfunktion vom Gewicht  $2k$  ohne Pole auf  $H^+$  und ohne negative Terme in der  $q$ -Entwicklung. Eine **Spitzenform vom Gewicht  $2k$**  ist eine Modulform vom Gewicht  $2k$ , bei der in der  $q$ -Entwicklung auch noch der konstante Term verschwindet.

*Bemerkung 5.3.15.* Übersetzt man die Bedingungen an Modulformen bzw. Spitzenformen in Bedingungen an Schnitte in Potenzen des Kotangentialbündels, so wirken sie höchst unnatürlich. Diese Bedingungen scheinen mir erst bei der Interpretation im Rahmen der Darstellungstheorie ihre wahre Bedeutung zu zeigen.

*Bemerkung 5.3.16.* Differentialformen auf  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  sind Schnitte im Bündel  $\mathcal{O}(2)$ , das wir in ?? eingeführt haben. Unsere Modulfunktionen entsprechen also Schnitten in  $\mathcal{O}(2k)$ . Ebenso kann entsprechen Schnitte in  $\mathcal{O}(k)$  gewissen meromorphen Funktionen auf der oberen Halbebene mit merkwürdigem Transformationsverhalten. Sollten das die “Modulformen zu halbzahligem Gewicht” aus Freitag-Busam sein? Das würde allerdings nicht gut passen, denn ihr Index wäre eher  $k$  als  $k/2$ . Gucke mal im zweiten Band nach!

*Bemerkung 5.3.17.* Gegeben eine natürliche Zahl  $g$  heißt die Menge

$$\mathcal{M}_g = \left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann'sche Flächen} \\ \text{von der topologischen Gestalt} \\ \text{einer Sphäre mit } g \text{ Henkeln,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

der **Modulraum der Riemann'schen Flächen vom Geschlecht  $g$** . Dieser Modulraum kann auch beschrieben werden, indem man eine glatte orientierte zusammenhängende kompakte Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  fest wählt, darauf die Menge  $\mathcal{S}_g$  aller mit der Orientierung und  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur verträglichen Strukturen als Riemann'sche Fläche betrachtet mit der offensichtlichen Operation der Gruppe  $G$  aller orientierungserhaltenden Diffeomorphismen  $X \xrightarrow{\sim} X$ , und dann zum Bahnenraum  $\mathcal{S}_g/G$  übergeht: In der Tat induziert dann die offensichtliche Surjektion  $\mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  eine Bijektion  $\mathcal{S}_g/G \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_g$ . Diese Beschreibung ist auch technisch besser, da sie die mengentheoretischen Schwierigkeiten vermeidet, die die Betrachtung “aller” Riemann'schen Flächen einer gewissen Art mit sich bringt. Betrachtet man in  $G$  die Untergruppe  $G_1 \subset G$  aller zur Identität auf  $X$  homotopen Diffeomorphismen, so heißt der Quotient

$$\mathcal{T}_g = \mathcal{S}_g/G_1$$

der **Teichmüllerraum der Riemann'schen Flächen vom Geschlecht  $g$** . Man kann den Teichmüllerraum in natürlicher Weise mit einer holomorphen Struktur versehen, er wird dann für  $g \geq 2$  isomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{C}^{3g-3}$ , die homöomorph ist zu einem offenen Ball, und der Modulraum selbst kann dann beschrieben werden als der Quotient  $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\Gamma$  dieses offenen Balls nach der Operation der Gruppe  $\Gamma = G/G_1$ , bei der im übrigen alle Isotropiegruppen endlich sind.

## 5.4 Klassifikation holomorpher Ringgebiete

**Satz 5.4.1 (Klassifikation holomorpher Ringgebiete).** *Eine Riemann'sche Fläche, die als topologischer Raum homöomorph ist zu  $\mathbb{C}^\times$ , ist biholomorph zu genau einer der folgenden Riemann'schen Flächen: Zur punktierten Ebene*

$\mathbb{C}^\times$ , zur punktierten Einheitskreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| < 1\}$ , oder zu einem Kreisring  $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$  für wohlbestimmtes  $R \in (1, \infty)$ .

*Beweis.* Nach dem großen Riemann'schen Abbildungssatz, den wir in 3.5.2 ohne Beweis erwähnen, ist die universelle Überlagerung von  $X$  biholomorph zu  $\mathbb{C}$  oder zur offenen Einheitskreisscheibe  $D$ . Nach 2.1.15 haben alle biholomorphen Abbildungen  $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  die Gestalt  $z \mapsto az + b$  für  $a \neq 0$ . Die topologisch freien Operationen von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{C}$  sind also gegeben durch  $n * z = z + nb$  für  $b \neq 0$  und die Abbildung  $z \mapsto \exp(2\pi i z/b)$  induziert eine biholomorphe Identifikation  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}b \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$ . Nach 1.8.21 haben weiter alle biholomorphen Bijektionen  $D \xrightarrow{\sim} D$  die Gestalt  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1, 1)$  und alle biholomorphen Bijektionen  $H^+ \rightarrow H^+$  die Gestalt  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ . Die fixpunktfrei operierenden Elemente sind genau diejenigen, die in keinem maximalen Torus liegen. Ihre Konjugationsklasse wird durch die Spur bereits eindeutig festgelegt, vergleiche ???. Im Fall der Spur 2, dem sogenannten "parabolischen" Fall, erhalten wir die Operation von  $\mathbb{Z}$  durch  $n * z = z + n$  auf der oberen Halbebene und  $z \mapsto \exp(2\pi i z)$  liefert eine biholomorphe Identifikation  $H^+/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} D \setminus 0$ . Im Fall der Spur  $> 2$  erhalten wir eine Operation auf  $H^+$  der Gestalt  $n * z = a^n z$  für  $a > 0$ . Der Hauptzweig des Logarithmus identifiziert dann  $H^+$  mit dem Streifen  $\mathbb{R} \times (0, \pi)$  und die Operation mit einer Operation durch Translation um  $\log(a)$ . Elementare Argumente bringen uns von da zum dritten betrachteten Fall.  $\square$

## 5.5 Elliptische Funktionen

**Definition 5.5.1.** Das Gruppenerzeugnis einer  $\mathbb{R}$ -Basis in einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum nennt man auch ein **Gitter** in besagtem Vektorraum.

**Definition 5.5.2.** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Eine Funktion  $f$  auf  $\mathbb{C}$  heisst  $\Gamma$ -**periodisch** genau dann, wenn gilt  $f(z+w) = f(z) \forall w \in \Gamma$ . Eine meromorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ , die  $\Gamma$ -periodisch ist für mindestens ein Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ , heisst eine **elliptische Funktion**.

5.5.3. Was derartige Funktionen mit Ellipsen zu tun haben, wird erst später klar werden: Ihre Umkehrfunktionen lassen sich in einigen Fällen als Kurvenintegrale rationaler Funktionen in zwei Veränderlichen über Stücke von Ellipsen deuten.

**Satz 5.5.4.** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter.

1. Jede holomorphe  $\Gamma$ -periodische Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist konstant.

2. Eine nichtkonstante meromorphe  $\Gamma$ -periodische Funktion muss jeden Wert, mit Vielfachheiten gerechnet, gleich oft annehmen, und sie muß jeden Wert mindestens zweimal oder einmal zweifach annehmen.
3. Die Summe der Residuen einer nichtkonstanten elliptischen Funktion über alle  $\Gamma$ -Bahnen von Polstellen ist Null.

5.5.5. Eine nichtkonstante elliptische Funktion ist dasselbe wie ein nichtkonstanter Morphismus von Riemann'schen Flächen  $\mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , anschaulich gesprochen also eine „verzweigte Überlagerung“. Da der Schwimmring  $\mathbb{C}/\Gamma$  nicht homöomorph ist zur Kugelschale  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , kann solch ein Morphismus nicht bijektiv sein, als da heisst, jeder Wert wird mit Vielfachheiten gerechnet mindestens zweimal angenommen.

*Beweis.* (1) Jede holomorphe  $\Gamma$ -periodische Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist beschränkt und damit konstant nach 1.6.6. (3) Gegeben Erzeuger  $w_1, w_2$  unseres Gitters finden wir sicher  $p \in \mathbb{C}$  derart, dass der Rand des Rechtecks  $p + [0, 1]w_1 + [0, 1]w_2$  keine Pole unserer Funktion trifft. Integrieren wir unsere Funktion  $f$  oder präziser die 1-Form  $f(z) dz$  über den Rand dieses Rechtecks, so erhalten wir Null, da sich wegen der Periodizität die Integrale über gegenüberliegende Kanten jeweils aufheben. Der Residuensatz 2.2.9 zeigt dann die Behauptung. (2) Wenden wir die eben gewonnene Erkenntnis an auf die Funktion  $f'/f$ , deren Residuum bei  $p$  ja gerade die dortige Null- bzw. Polstellenordnung bei  $p$  ist, in Formeln

$$\text{Res}(f'/f, p) = v_p(f)$$

wie beim Beweis von 2.3.2, so folgt  $\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} v_p(f) = 0$ , alias es gibt mit Vielfachheiten gerechnet ebensoviele Nullstellen wie Polstellen. Wenden wir diese Erkenntnis auf die Funktionen  $f - c$  an mit  $c \in \mathbb{C}$ , so folgt auch Teil 2 des Satzes. Daß eine elliptische Funktion schließlich nicht nur einen einfachen Pol in  $\mathbb{C}/\Gamma$  haben kann, folgt auch sofort aus Teil 3.  $\square$

**Satz 5.5.6 (Abel).** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Genau dann gibt es eine  $\Gamma$ -periodische Funktion mit vorgegebenen Nullstellen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}/\Gamma$  und vorgegebenen Polstellen  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}/\Gamma$ , jeweils mit Vielfachheiten genommen, wenn in  $\mathbb{C}/\Gamma$  gilt

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$$

5.5.7. Im Fall  $n = 1$  folgt also  $a_1 = b_1$ , und da das absurd ist, gibt es keine elliptische Funktion mit einer einzigen und einfachen Nullstelle. Wir sehen so ein weiteres Mal, dass eine elliptische Funktion jeden Wert mindestens doppelt annehmen muss.

*Beweis.* Die Notwendigkeit der Bedingung ist nicht schwer zu zeigen. Ist  $f$  unsere elliptische Funktion, so können wir die Behauptung mit dem Residuensatz umschreiben zur Behauptung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz \in \Gamma$$

wo  $\gamma$  den Randweg eines Parallelogramms  $p + [0, 1]w_1 + [0, 1]w_2$  bezeichnet mit  $(w_1, w_2) = \Gamma$  und  $p \in \mathbb{C}$  so gewählt, dass auf besagtem Rand weder Pole noch Nullstellen von  $f$  liegen. Die Integrale über das Paar gegenüberliegender Kanten  $[p, p + w_1]$  und  $[p + w_2, p + w_1 + w_2]$  unterscheiden sich hier um

$$\frac{1}{2\pi i} \int_p^{p+w_1} \frac{(z+w_2)f'(z)}{f(z)} - \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{w_2}{2\pi i} \int_p^{p+w_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{w_2}{2\pi i} \int_p^{p+w_1} d\log f(z)$$

und längs einer Kante können wir sicher einen Zweig von  $\log f(z)$  wählen und dessen Werte bei  $p$  und  $p + w_1$  müssen sich um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi i$  unterscheiden. Ebenso argumentiert man für das andere Paar gegenüberliegender Kanten, und das zeigt dann die Notwendigkeit der Bedingung.  $\square$

## 5.6 Höhere Differentiale, woanders

**Definition 5.6.1.** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über einem Körper  $k$ . Eine  $W$ -wertige  $p$ -Form auf  $V$  ist eine alternierende  $k$ -multilineare Abbildung  $V \times \dots \times V \rightarrow W$ . Das Produkt von Null Kopien von  $V$  verstehen wir als den Grundkörper  $k$  selber, so daß eine  $W$ -wertige 0-Form nichts anderes ist als ein Vektor aus  $W$ . Wir notieren den Vektorraum aller  $W$ -wertigen  $p$ -Formen auf  $V$  mit

$$\text{Alt}^p(V, W)$$

**Definition 5.6.2.** Seien  $V, W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume und  $A \subset V$  halboffen. Eine  $W$ -wertige  $p$ -Form auf  $A$  ist eine Abbildung

$$\omega : A \rightarrow \text{Alt}^p(V, W)$$

*Bemerkung 5.6.3.* Auf dem Raum der  $W$ -wertigen Differentialformen, ja selbst auf dem Raum der  $W$ -wertigen Funktionen kann man im Allgemeinen nicht mehr in natürlicher Weise ein Produkt erklären. Jedoch können wir unser  $\mathbb{R}$ -bilineares Dachprodukt auf den reellwertigen Differentialformen

ohne Schwierigkeiten und auf genau eine Weise zu einem  $\mathbb{C}$ -bilinearen Dachprodukt auf den komplexwertigen Differentialformen fortsetzen. Zum Beispiel kann für jede komplexwertige Funktion alias Nullform  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Ausdruck  $f(z) dz$  als das Dachprodukt der Nullform  $f$  mit der Einsform  $dz$  verstanden werden.

*Bemerkung 5.6.4.* Genau wie im Fall reellwertiger  $p$ -Formen definiert man auch für jede differenzierbare  $W$ -wertige  $p$ -Form  $\omega$  ihr Differential  $d\omega$ , eine  $W$ -wertige  $(p+1)$ -Form. Die Rechenregeln gelten unverändert, und für komplexwertige Formen gilt sogar die Leibnizregel. Insbesondere finden wir für jede holomorphe Funktion  $f$  mit den Wirtinger-Ableitungen aus 1.5.6 die Gleichheiten

$$\begin{aligned} d(f(z) dz) &= df \wedge dz \\ &= (\partial f) dz \wedge dz + (\bar{\partial} f) d\bar{z} \wedge dz \\ &= (\bar{\partial} f) d\bar{z} \wedge dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

in der wir erst im letzten Schritt die Holomorphie von  $f$  benutzen. Nun haben wir aber in ?? gezeigt, daß für das Wegintegral längs eines zusammenziehbaren geschlossenen Weges über eine reellwertige stetig differenzierbare 1-Form  $\omega$  mit  $d\omega = 0$  verschwindet. Der Integralsatz von Cauchy folgt für holomorphes  $f$  mit stetiger Ableitung  $f'$  also aus der offensichtlichen Verallgemeinerung von ?? auf vektorwertige Differentialformen.

## 5.7 Hypergeometrische Funktionen

**Definition 5.7.1.** Gegeben  $a \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  setze man

$$(a, n) = a(a+1) \dots (a+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1} (a+i)$$

Gegeben  $a, b, c \in \mathbb{C}$  mit  $c \notin -\mathbb{N}$  betrachte man die Potenzreihe

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)} x^n$$

Sie heißt die **hypergeometrische Reihe** und spezialisiert im Fall  $a = b = c = 1$  zur geometrischen Reihe. Im Fall  $a \in -\mathbb{N}$  oder  $b \in -\mathbb{N}$  erhalten wir Polynome, andernfalls strebt die Folge der Koeffizienten gegen 1 und folglich hat unsere Potenzreihe den Konvergenzradius 1. Bezeichnet  $D$  den Differentialoperator  $x\partial_x$ , so wird unsere hypergeometrische Reihe annulliert

vom Operator  $(a + D)(b + D) - (c + D)(1 + D)x^{-1}$ , der auch umgeschrieben werden kann zu

$$x(1 - x)\partial^2 + (c - (a + b + 1)x)\partial - ab$$

Diese Differentialgleichung hat reguläre Singularitäten, und zwar im allgemeinen an den drei Stellen  $0, 1, \infty$ . Ich weiß nicht, was ihre Monodromie an den jeweiligen Stellen ist. Eine von diesem Differentialoperator annullierte meromorphe Funktion heißt ganz allgemein eine **hypergeometrische Funktion**.



# Kapitel IX

## Typische Prüfungsfragen

## 1 Lineare Algebra

1. Was ist ein Körper? Wie leitet man die Regel für das Addieren von Brüchen aus den Körperaxiomen ab?
2. Was ist eine Basis eines Vektorraums? Könnte es passieren, daß ich in demselben Vektorraum eine Basis mit 13 Elementen und eine mit 17 Elementen finde? Was ist die Dimension eines Vektorraums? Hat jeder Vektorraum eine Basis? Was ist überhaupt ein Vektorraum? Wie leitet man  $0v = 0$  aus den Vektorraumaxiomen ab?
3. Warum ist jedes unverkürzbare Erzeugendensystem eine Basis? Warum ist jede unverlängerbare linear unabhängige Teilmenge eine Basis?
4. Wie versieht man die Menge der Homomorphismen von einem Vektorraum zu einem anderen mit der Struktur eines Vektorraums? Wie berechnet man die Dimension eines derartigen Raums von Homomorphismen?
5. Was ist die Matrix einer ebenen Drehung um  $45^\circ$ ? Was ist ihre Determinante? Ihre Eigenwerte?
6. Geben Sie eine  $(3 \times 3)$ -Matrix vom Rang ... ohne Nullen an. Was ist deren Determinante? Was ist die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems? Was sind die Eigenwerte?
7. Was ist die Determinante einer Matrix? Wie rechnet man sie aus? Warum hat die transponierte Matrix dieselbe Determinante? Warum ist jede Matrix mit von Null verschiedener Determinante invertierbar?
8. Besitzt jede Matrix einen Eigenwert? Ist jede Matrix diagonalisierbar? Beispiel? Gegenbeispiel? Ist jede reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar? Beweis?
9. Was ist ein Eigenwert einer linearen Abbildung? Welche Eigenwerte hat das Ableiten, aufgefaßt als lineare Abbildung vom Raum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf der reellen Zahlengeraden  $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R})$  in sich selbst? Welche Eigenwerte hat das Ableiten aufgefaßt als lineare Abbildung vom Raum der Polynome in sich selbst? Was sind die Eigenräume? Und wenn man Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik ... nimmt?
10. Wieviele Untervektorräume hat ein ...-dimensionaler Vektorraum über dem Körper mit ... Elementen?

11. Wieviele angeordnete Basen hat ein  $\dots$ -dimensionaler Vektorraum über dem Körper mit  $\dots$  Elementen?
12. Nimmt die quadratische Form  $\dots$  positive und negative Werte an? Wie findet man so etwas im allgemeinen heraus?
13. Berechnen Sie die inverse Matrix zu  $\dots$
14. Was versteht man unter dem Rang einer Matrix? Warum stimmen Zeilenrang und Spaltenrang stets überein?
15. Wie hängen die Eigenwerte einer invertierbaren Matrix zusammen mit den Eigenwerten ihrer Inversen? Wie hängt die Jordan'sche Normalform einer invertierbaren Matrix zusammen mit der Jordan'schen Normalform ihrer Inversen?

## 2 Algebra

1. Gibt es eine Gruppe mit  $\dots$  Elementen? Gibt es eine abelsche Gruppe mit  $\dots$  Elementen? Wie konstruiert man überhaupt so eine Restklassengruppe? Was ist das Inverse zu  $\dots$  in  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ ? Wieviele paarweise nicht isomorphe abelsche Gruppen gibt es mit  $\dots$  Elementen? Welche?
2. Wieviele Gruppenhomomorphismen gibt es von  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ?
3. Wieviele Elemente hat  $GL(3; \mathbb{F}_7)$ ? Wie groß ist die 7-Sylow darin? Können Sie eine 7-Sylow angeben?
4. Hat jedes Polynom eine Nullstelle? Kann man den Grundkörper so vergrößern, daß es eine kriegt? Wie geht das?
5. Gegeben sei das Polynom  $\dots$ . Was ist die Summe seiner komplexen Nullstellen? Die Summe der Quadrate seiner komplexen Nullstellen?
6. Ist das Polynom  $\dots$  irreduzibel? Was ist ein irreduzibles Polynom? Inwieweit ist die Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren eindeutig? Warum? Welche Grade können irreduzible Polynome in  $\mathbb{R}[X]$  haben? Zerlegen Sie  $X^4 + 2$  in  $\mathbb{R}[X]$  in Linearfaktoren.
7. Wieviele Nullstellen kann das Polynom  $\dots$  höchstens haben? Warum? Gibt es zu vorgegebenen Nullstellen stets ein Polynom, das genau diese Nullstellen hat? Warum-warum nicht?

8. Gibt es einen Körper mit ... Elementen? Wie zeigt man das? Wann ist  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  ein Körper? Warum ist  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  kein Körper? Wie rechnet man in diesem Ring? Besitzt ... darin ein multiplikatives Inverses? Und zwar welches? Welche abelsche Gruppe erhält man als Einheitengruppe? Welche abelsche Gruppe ist die multiplikative Gruppe des Körpers mit ... Elementen? Welche Kardinalität kann ein endlicher Körper haben? Warum? Sind je zwei Körper mit ... Elementen isomorph? Warum?
9. Was ist die Automorphismengruppe des Körpers mit ... Elementen? Wie zeigt man das?
10. Ist das regelmäßige ...-Eck konstruierbar mit Zirkel und Lineal? Warum oder warum nicht? Welche regelmäßigen  $n$ -Ecke sind eigentlich konstruierbar? Warum-warum nicht?
11. Warum hat in einem Körper jedes Element höchstens zwei Quadratwurzeln? Warum in Charakteristik Zwei höchstens eine Quadratwurzel?
12. Kann die reelle Zahl  $\sqrt[3]{2}$  Nullstelle eines quadratischen Polynoms mit rationalen Koeffizienten sein?

### 3 Analysis

1. Wie bestimmt man die Ableitung des Arcustangens? Was ist überhaupt die Ableitung? Was bedeutet darin das Symbol  $\overline{\lim}$ ? Wie entwickelt man  $\arctg$  in eine Potenzreihe? Warum ist diese Rechnung erlaubt?...
2. Was ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+e^x}{\log x+e^x}$ ? Was bedeutet  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$ ? Wie ist die Exponentialfunktion definiert? Kennen Sie andere Funktionen, die ihre eigene Ableitung sind? Sind das alle? Warum?
3. Warum ist jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt?
4. Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Kuchenstücks: Stellen Sie es auf die Spitze und integrieren die Höhe  $y$  über das entsprechende Gebiet. Wie lautet allgemein die Formel zur Transformation von Mehrfachintegralen auf krummlinige Koordinaten? Was ist die Beziehung zur Substitutionsregel?

5. Finden Sie eine Stammfunktion für den Arcustangens,  $\int \arctan$ ; wie ist überhaupt das Integral definiert? Warum kann es mittels Stammfunktionen berechnet werden?
6. Was bedeutet  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ? Schreiben Sie es mit den zugehörigen „für alle“ und „es gibt“ einmal auf. Wie folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ ?
7. Wie ist die Exponentialfunktion definiert? Warum konvergiert diese Reihe? Wie zeigt man das Quotientenkriterium? Das Majorantenkriterium?
8. (Falls es dran war) Kennen Sie eine Funktion, die ihre eigene dritte Ableitung ist,  $f''' = f$ ? Können Sie alle derartigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  angeben? Können Sie alle derartigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  angeben?
9. Wie ist das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  für  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig definiert? Welche Probleme können für  $f$  unstetig auftreten? Was bedeutet gleichmäßig stetig?
10. Wie ist der Logarithmus definiert? Warum wird jede positive reelle Zahl als Wert der Exponentialfunktion angenommen? Was ist die Ableitung des Logarithmus? Seine Potenzreihenentwicklung? Das Integral? Die Potenzreihenentwicklung um den Punkt  $p = 5$ ? Der Konvergenzradius daselbst?
11. Was ist das höherdimensionale Analogon der Ableitung? Wie hängt das totale Differential mit den partiellen Ableitungen zusammen? Wie lautet in dieser Allgemeinheit die Kettenregel? Wie zeigt man sie?
12. Was ist das Lebesgue-Maß? Wie ist das Lebesgue-Integral definiert? Was ist seine Beziehung zu absoluter Konvergenz von Reihen?
13. Was ist ein Hilbert-Raum?
14. Was ist die Fourier-Transformation?

## 4 Funktionentheorie

1. Besitzt jede stetige Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion, gibt es also stets  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $F' = f$ ?
2. Besitzt jede holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion, gibt es also stets  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $F' = f$ ?
3. Besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion?

## 5 Algebraische Geometrie (Staatsexamen)

1. Zwei Polynome in  $\mathbb{C}[X, Y]$  haben dieselben Nullstellen. Sind sie dann gleich? Teilt eins das andere? Und wenn eines irreduzibel ist? Und wenn unsere beiden Polynome nur unendlich viele gemeinsame Nullstellen haben (für die letzte Teilfrage brauche Dimensionstheorie).
2. Kann es sein, daß zwei nichtkonstante Polynome  $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$  überhaupt keine gemeinsame Nullstelle haben? Und wenn wir zum projektiven Raum übergehen?
3. Warum bilden die Nullstellenmengen endlicher Familien von Polynomen die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf  $\mathbb{C}^n$ ?
4. Was ist eine reguläre Funktion auf einer affinen Varietät? Sind zwei affine Varietäten bereits isomorph, wenn die  $\mathbb{C}$ -Kringe ihrer regulären Funktionen isomorph sind? Kann  $\mathbb{C}[X]/\langle X^2 \rangle$  der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät sein? Welche  $\mathbb{C}$ -Kringe sind Ringe von regulären Funktionen auf affinen Varietäten?
5. Was ist ein maximales Ideal? Warum ist der Quotient nach einem maximalen Ideal stets ein Körper? Was sind die maximalen Ideale von  $\mathbb{C}[X, Y]$ ?

## 6 Algebraische Gruppen

1. Was ist eine (affine) algebraische Gruppe? Warum ist jede affine algebraische Gruppe linear?
2. Was sind die algebraischen Gruppenhomomorphismen  $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ?
3. Was sind die irreduziblen algebraischen Darstellungen von  $(\mathbb{C}^n, +)$ ?
4. Welche eindimensionalen algebraischen Gruppen gibt es?
5. Was ist eine Borel'sche Untergruppe?
6. Wie konstruiert man Quotientenvarietäten?
7. Was ist eine diagonalisierbare algebraische Gruppe?
8. Ist eine Gruppe, deren Elemente sämtlich halbeinfach sind, diagonalisierbar? Und wenn sie zusammenhängend ist?

9. Was ist die Jordanzerlegung eines Elements von  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ , aufgefaßt als algebraische Gruppe über einem Körper der Charakteristik 5?
10. Warum sind je zwei Borel'sche Untergruppen konjugiert?



# Literaturverzeichnis

- [Ben92] Walter Benz, *Geometrische Transformationen unter besonderer Berücksichtigung der Lorentz-Transformationen*, BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, 1992.
- [Bou67] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXII. Théories spectrales. Chapitre I: Algèbres normées. Chapitre II: Groupes localement compacts commutatifs*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1332, Hermann, Paris, 1967.
- [Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4–6*, Masson, 1981.
- [Bru01] Jan Hendrik Bruinier, *Primzahlen, Teilersummen und die Riemannsche Vermutung*, Math. Semesterberichte **48** (2001), 79–92.
- [Cou71] Richard Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Springer, 1971.
- [For77] Otto Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Heidelberger Taschenbücher, Band 184.
- [FR84] D. B. Fuks and V. A. Rokhlin, *Beginner's course in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1984, Geometric chapters, Translated from the Russian by A. Iacob, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [Hal70] Paul R. Halmos, *Measure theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 18, Springer, 1970.
- [HN91] Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb, *Lie-gruppen und lie-algebren*, Vieweg, 1991.
- [Kön97] Königsberger, *Analysis 1 und 2*, Springer, 1997.

- [Kow04] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 13, Société Mathématique de France, 2004.
- [KS10] E. D. Kim and F. Santos, *An update on the hirsch conjecture*, Jahresbericht der DMV **112** (2010), no. 2, 73–98.
- [Lor96] Falko Lorenz, *Einführung in die Algebra I*, Spektrum, 1996.
- [MV00] Meyberg and Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, Springer, 2000.
- [Rud73] Walter Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.
- [Rud87] ———, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Rud90] Walter Rudin, *Fourier analysis on groups*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Ste89] Ian Steward, *Galois theory*, second ed., Chapman and Hall, 1989.
- [vN35] John von Neumann, *On complete topological spaces*, Transactions of the AMS **37** (1935), 1–20.
- [War83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Springer, 1983.
- [Wer05] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, 5 ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [Zag97] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705–708.

# Index

- 0  
 natürliche Zahl, [37](#), [64](#)  
 neutrales Element von additiv notiertem Monoid, [64](#)
- 1  
 natürliche Zahl, [37](#), [64](#)  
 neutrales Element von multiplikativ notiertem Monoid, [65](#)
- $1_A$  Indikatorfunktion von  $A$ , [536](#)  
 $X - Y$  Differenz von Mengen, [39](#)  
 $X \setminus Y$  Differenz von Mengen, [39](#)  
 $X \times Y$  kartesisches Produkt, [41](#)  
 $X \cap Y$  Schnitt, [39](#)  
 $X \cup Y$  Vereinigung, [39](#)  
 $\mathbb{Q}$  abgeschlossen in, [238](#), [245](#)  
 $\bar{M}$  Abschluß von  $M$ , [246](#)  
 $\bar{z}$  komplexe Konjugation, [77](#)  
 $\mathcal{C}_0(X)$  im Unendlichen verschwindende Funktionen, [663](#)  
 $\mathcal{C}_X^1(X, E)$  glatte Schnitte von  $E$ , [874](#)  
 $\mathcal{O}^{\text{an}}(X, Y)$ , [857](#)  
 $\chi_A$  charakteristische Funktion, [536](#)
- Verknüpfung von Abbildungen, [50](#)
- ⊆  
 offen in metrischem Raum, [238](#)  
 offen in topologischem Raum, [242](#)
- $\dot{\gamma}$  Ableitung, [269](#)  
 $\dot{\gamma}$  physikalische Geschwindigkeit, [1200](#)  
 $\emptyset$  leere Menge, [37](#)  
 $\forall$  für alle, [57](#)  
 $\hat{V}$  Charakterraum von  $V$ , [672](#)  
 $\langle f \rangle$  bei multilinearen Abbildungen, [505](#)
- | bei Teilmengen, [39](#)  
 $\neg$  Verneinung, [65](#)  
 $\otimes$   
 Notation für Bilinearform, [401](#)
- $\prod$   
 Produkt von Zahlen, [23](#)
- $\#$  Kardinalität, [38](#)  
 $\sigma$ -endlich, [521](#)  
 $\simeq$  homotop, [419](#)  
 $\subset$  Teilmenge, [38](#)  
 $\subseteq$  Teilmenge, [38](#)  
 $\subsetneq$  echte Teilmenge, [38](#)  
 $\subsetneqq$  echte Teilmenge, [38](#)  
 $\sum$  Summe  
 von Zahlen, [20](#)  
 $\vec{v} + p$ , [253](#)
- $\wedge$   
 äußeres Dachprodukt, [575](#)  
 Dachprodukt, [571](#)
- $f^{-1}$   
 für Umkehrabbildung, [53](#)  
 für Urbild von Menge, [49](#)  
 Kehrwertfunktion, [148](#)
- $f_*\mathcal{F}$  Bildfilter, [1095](#)  
 $i_{\xi}\omega$  partielles Einsetzen in Differentialform, [925](#)  
 $i_v\omega$  Teilauswerten von alternierender Multilinearform, [925](#)
- $n!$  Fakultät, [23](#)  
 $|V|$  Betrag des Vektorraums  $V$ , [913](#)  
 $||$   
 Absolutbetrag, [97](#)  
 Kardinalität, [38](#)

- $|\omega|$ 
  - Grad der Form  $\omega$ , 574
  - Maß der Differentialform  $\omega$ , 584
- $\|f\|_\infty^{\text{ess}}$  essentielles Supremum, 640
- $\{ \}$  Menge, 37
- $\mu\{ \}$  Multimenge, 56
- $\Leftarrow$  folgt aus, 57
- $\Leftrightarrow$  gleichbedeutend, 57
- $\Rightarrow$  impliziert, 57
- $\dashrightarrow$  partiell definierte lineare Abbildung, 752
- $\dashrightarrow$  fast überall definierte Abbildung, 637
- $\hookrightarrow$  Injektion, 50
- $\rightsquigarrow$  verwandt
  - 2-Tensoren, 403
  - Differentialformen, 579
  - Funktionen, 395, 877
  - Maße, 535
  - Vektorfelder, 395, 877
  - Wege, 411
- $\mapsto$  wird abgebildet auf, 47
- $\rightarrow$  Abbildung, 46
- $\xrightarrow{\sim}$  Bijektion, 50
- $\twoheadrightarrow$  Surjektion, 50
- $[A]$  charakteristische Funktion von  $A$ , 536
- $X^2 = X \times X$ , 41
- $A^*$  adjungierter Operator, 656
- $A^\dagger$  adjungierter Operator, 656
- $*$ 
  - Faltung von Maßen, 686
  - Hodge-\*-Operator, 626
- $=$  Gleichheitszeichen, 38
- $=:$  wird definiert als, 20
- $:=$  ist definiert durch, 20
- $\geq, >, \leq, <$  bei Ordnungsrelation, 92
- $(x|y)$  Notation für Paare, 41
- $G(x)|_a^b := G(b) - G(a)$ , 198
- $\mu|_A$  Restriktion eines Maßes, 540
- $f|_X$  Einschränkung auf  $X$ , 50
- $f|_X$  Einschränkung auf  $X$ , 50
  - statt  $\mathcal{C}(X, Y)$ , 1073
  - statt  $\text{Ens}(X, Y)$ , 47
- $a^x$  allgemeine Potenz, 153
- $\boxtimes$ 
  - äußeres Produkt
  - von Funktionen, 699
  - Produkt- $\sigma$ -Algebra, 548
  - Produktmaß, 548
- $\square$  Beweisende, 19
- $G^\circ$  Einszusammenhangskomponente einer topologischen Gruppe  $G$ , 841
- Abb, 47
- Abbildung, 46, 47
  - einwertige, 49
  - identische Abbildung, 47
  - inverse Abbildung, 53
  - konstante, 49
  - Umkehrabbildung, 53
- Abel'scher Grenzwertsatz, 224
- abelsch
  - Gruppe, 66
- abgeleitete Darstellung der Liealgebra, 794
- abgeschlossen
  - Abbildung, 828
  - Einbettung geringter Räume, 856
  - Halbraum, 972
  - in metrischem Raum, 238
  - in reellem Vektorraum, 259
  - in topologischem Raum, 245
  - Operator, unbeschränkter, 755
  - universell, für stetige Abbildung, 848
  - unter Verknüpfung, 64
- Ableitung
  - $n$ -te Ableitung, 213
  - der allgemeinen Potenzen, 182

- der Exponentialfunktion, 180
- des Logarithmus, 182
- als Funktion, 178
- bei fester Stelle, 175
- höhere, koordinatenfrei, 505
- komplexe, 320, 1325, 1326
- linksseitige, rechtsseitige, 177
- logarithmische, 1383
- nach Vektorfeld, 393
- partielle, 349, 370
- Richtungs-, 353
- vektorwertig, 269
- von Brüchen, komplex, 321, 1327
- von Brüchen, reell, 179
- von Umkehrfunktion
  - komplex, 321, 1328
  - reell, 180
- Abschluß
  - in metrischem Raum, 239
  - in topologischem Raum, 246, 822
  - von Facette, 974
- absolut konvergente Reihe
  - reeller Zahlen, 130
- absolut summierbar
  - Familie in normiertem Vektorraum, 287
- Absolutbetrag, 97
- Abstand
  - in uniformem Raum, 1049
- abzählbar, 122
- abzählbar unendlich, 122
- achsenparalleles Rechteck, 1339
- Ad
  - adjungierte Darstellung
    - von Matrix-Liegruppe, 781
- Additionsformeln
  - für sin und cos, 291
- additiv
  - $\sigma$ -additiv, 512, 519
- adjungiert
  - Darstellung von Liegruppe, 892
  - Darstellung von Matrix-Liegruppe, 781, 1143
  - Operator, 656
  - partiell definierte Abbildung, 752
- adjungierte Darstellung
  - von Liealgebra, 794
- äquidistant, Unterteilung, 168
- äquivalent
  - Normen, 257
- äquivariant
  - topologischer Vektorraum, 1079
- äußere Ableitung, 599
- äußeres Normalenfeld, 612
- äußeres Produkt
  - von Funktionen, 699
- affin
  - Abbildung, 254
  - Raum, 253
  - Raum, normierter, 255
  - Raum, über Vektorraum, 254
  - Weylgruppe, 1017
- Alaoglu-Bourbaki, 1311, 1316
- Alembert, de, Prinzip von, 1213
- Alexandroff-Topologie, 245
- Alexandrov, Satz von, 1256
- Algebra, 337
  - $\sigma$ -Algebra, 512
  - über Körper, 781
- algebraisch
  - reelle Zahl, 125
- Algebren-Homomorphismus, 785
- Alkoven
  - bei kompakten Liegruppen, 957
  - fundamentaler dominanter, 1028
  - zu endlicher Spiegelungsgruppe, 970
  - zu System von Hyperebenen, 977
- alkovische Darstellung, 1001
- Allgemeine Potenzen, 153
- allgemeiner Mittelwertsatz, 193
- Alphabet, griechisches, 34
- alt Alternator, 570

- Alt
  - Raum alternierender Formen, 570
- alternierende  $p$ -Form, 570
- alternierende harmonische Reihe, 130
- Amplitude, 328
- analytisch, 1128
  - auf  $\mathbb{R}$ , 216
  - auf  $\mathbb{R}^n$ , 417
- Anfangswert
  - von Integralkurve, 485, 881
- Anfangswertisomorphismus, 285, 329, 501, 503, 1282, 1284
  - bei reeller Schwingungsgleichung, 325
  - bei Schwingungsgleichung, 327
- angeordnet
  - Körper, 96
- Anordnung, 92
- antiholomorph, 1334
- antisymmetrisch, 407
  - Relation, 92
- Approximationspolynom, 217
- Arbeit
  - gegen Kraftfeld, 414
- archimedisch angeordnet, 103
- Arcuscosinus, 295
- Arcussinus, 295
- Arcustangens, 298
- Area Cosinus hyperbolicus, 203
- Area Sinus hyperbolicus, 203
- Arzela-Ascoli, 1046
- assoziativ, 61
- assoziierte Bündel, 1085
- Atlas, 857, 1150
- auswerten
  - Kovektorfeld auf Vektorfeld, 391
- Auswerten, 46
- $\mathcal{B}(V, W)$  beschränkte Operatoren, 260
- $\mathcal{B}(V)$ 
  - beschränkte Operatoren auf  $V$ , 289
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(V, W)$  beschränkte Operatoren, 260
- Bahnenraum
  - topologischer, 843
- Baire'scher Kategoriensatz, 713
- balanciertes Produkt, 1083
- Ball, 231
  - in uniformer Struktur, 1050
- Banach'scher Fixpunktsatz, 438
- Banach-Algebra, 716
- Banach-Raum, 286
- Banach-Steinhaus, 712
- Banach-Tarski-Paradoxon, 517
- basiertes Wurzelsystem, 1027
- Basis, 1023
  - universelle, 1030
- Basis einer Topologie, 830
- Basiswechsel
  - bei Darstellungen, 1083
- Bel, 156
- Benford's Gesetz, 526
- Beppo Levi, 547
- Berührungspunkt, 238, 823
- Bernoulli-Ungleichung, 98
- Bernoulli-Zahlen, 1400
- Beschleunigung, 1201
  - vektorielle, 1201
- beschränkt
  - Abbildung, 237
  - gleichmäßig, 712
  - Menge reeller Zahlen, 116
  - metrischer Raum, 237
  - Operator, 260
  - uniform , 712
- bestimmte Divergenz, 112
- Betafunktion, Euler'sche, 1407
- Betrag
  - eines eindimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums, 913
- Betragsabstand, 229
- Bewertung
  - von meromorpher Funktion, 1375

- Bianchi-Identität, 1231  
 biholomorph, 1367  
 Bijektion, 50  
 bijektiv  
     Abbildung, 50  
 Bil Bilinearformen, 401  
 Bild, 46, 49  
     einer Teilmenge, 49  
     von  $\sigma$ -Algebra, 531  
 Bildfilter, 1095  
 Bildmaß, 533, 685  
 Bildmenge, 49  
 binärer Logarithmus, 155  
 Binom, 145  
 Binomialkoeffizienten, 24  
 binomische Formel, 25  
 Binomische Reihe, 214  
 Blätterzahl  
     im verzweigten Fall, 1432  
 Bochner, Satz von, 681  
 Bogenlänge, 267  
 Bohr-Sphäre, 1271  
 Bolzano-Weierstraß, 119  
 Borel( $X$ ) Borelmengen von  $X$ , 515  
 Borel'sch  
     Meßraum, 1294, 1322  
 Borelmaß, 515, 1158  
 Borelmenge, 515  
 Borromäische Ringe, 457  
 Brechungsgesetz, 183  
 Brown'sche Bewegung, 1300  
 Bruchzahlen, 37  
 Bündel, 872, 1077  
      $\rho$ -Bündel, 929  
     kanonisches, 915, 1037  
     topologisches, 1077  
     triviales, 872  
 Bündel der lokalen Dichten, 1116  
 Bündelkarte, 872  
 bundle  
     principal, 928  
 $\mathbb{A}$  abgeschlossen in, 238, 245  
 $\mathbb{C}$   
     offen in metrischem Raum, 238  
     offen in topologischem Raum, 242  
 $\mathbb{D}$  offene Teilmenge, 1328  
 $\subset$  Teilmenge, 38  
 $\subseteq$  Teilmenge, 38  
 $\subsetneq$  echte Teilmenge, 38  
 $\subsetneq$  echte Teilmenge, 38  
 $C_n$  Catalan-Zahl, 63  
 $\mathcal{C}(X)$  stetige komplexwertige Funktionen auf  $X$ , 340  
 $\mathcal{C}(X, Y)$  Raum stetiger Abbildungen, 265, 1073  
 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  stetige reellwertige Funktionen auf  $X$ , 257  
 $\mathcal{C}^1$ -Abbildung, 436  
 $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, 436  
 $\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung  
     auf Mannigfaltigkeiten, 1121  
     zwischen affinen Räumen, 505  
 $\mathcal{C}^k$ -Abbildung  
     auf Mannigfaltigkeiten, 1121  
     zwischen affinen Räumen, 505  
 $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus, 506  
 $\mathcal{C}^k$ -Vektor, 1122  
 $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$  stetige Funktionen mit kompaktem Träger, 465  
 $\mathcal{C}_b(D)$  stetige beschränkte komplexe Funktionen, 662  
 $\mathcal{C}_b(D, Y)$  stetige beschränkte Abbildungen, 290  
 Cantor'sches Diagonalverfahren, 124  
 Cantor-Menge, 527  
 card, 38  
 Cartan-Matrix, 961, 1030  
 Casimir-Operator  
     für  $\mathfrak{sl}(2)$ , 807  
 $\text{Cat}^\infty$  glatte Funktoren, 912  
 Catalan-Zahl, 63  
 Cauchy-Filter, 1095

- Cauchy-Folge, 119, 285  
 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, 1331  
 Cavalieri, 553  
 Charakter, 671  
   einer abelschen Gruppe, 673  
   multiplikativer, 1421  
   unitärer, 652, 672, 673  
   von abelscher Gruppe, 652  
 Charakter einer Liealgebra, 1142  
 Charaktere, 1421  
 Charaktergruppe, 672, 673, 698  
 charakteristische Funktion  
   einer Menge, 536  
   eines Maßes, 675  
 Charakterraum, 672  
 charge, 1259  
 $\chi_A$  charakteristische Funktion, 536  
 cis, 305  
 $\text{Cl}_X(M)$  Abschluß von  $M$ , 239, 246, 822  
 closure, 822  
 continue, 142  
 continuous, 142  
 corps, 74  
 cos Cosinus  
   komplexer, 305  
 Cosecans, 295  
 Cosecans hyperbolicus, 205  
 cosh Cosinus hyperbolicus, 203  
 Cosinus, 279  
 Cosinus hyperbolicus, 203  
 Cosinusmatrix, 998  
 Cosinustransformation, 662, 698  
   diskrete, 699  
 Cotangens, 295  
 Coulomb, 1259  
 Coxetergraph, 996  
 Coxetermatrix, 996  
 Coxeterzahl, 1030  
   duale, 1030  
 CW-Komplex, 835  
 $dx_I$ , 578  
 $\partial M$  Rand  
   der berandeten Untermannigfaltigkeit  $M$ , 607  
 $\partial M = \partial_X M$   
   topologischer Rand von  $M \subset X$ , 822  
 $\partial_i$  Vektorfeld, 393  
 $\partial_x$  Vektorfeld, 393  
 $D_v$  Richtungsableitung, 354  
 $D_v$  konstantes Vektorfeld, 393  
 Dachprodukt, 571  
 Darstellung  
   adjungierte  
     von Liealgebra, 794  
   adjungierte, von Liealgebra, 1143  
   adjungierte, von Matrix-Liegruppe, 1143  
   einfache, 764  
   irreduzible, 764  
   kontragradiente, von Liealgebra, 1143  
   modulare, 1178  
   rationale, 1178  
   stetige, 1178  
   triviale, von Liealgebra, 796  
   unitäre, 813, 1178  
     von  $\mathbb{R}$ , 704  
   von Gruppe, 762  
   von Liealgebra, 794  
   von Liegruppe, 794  
 de Morgan'sche Regeln, 41  
 Decktransformation, 1445  
 Dedekind'scher Schnitt, 100  
 Definition, 22  
 Definitionsbereich, 47  
 Definitionskarte, 1184  
 Derivation  
   einer  $\mathbb{R}$ -Algebra, 782

- Dezibel, 156  
 $df$  Differential von  $f$ , 391  
 dicht  
     definiert, 752  
     Teilmenge, 337  
 Dichte, 916, 1037, 1198  
     positive, 1198  
     stetige, 1198  
     stetige positive, 809  
 Dichten auf  $X$ , 1116  
 Dichteoperator, 1270  
 Diedergruppe, 970  
 Diffeomorphismus  
      $C^1$ -Diffeomorphismus, 436  
      $C^k$ -Diffeomorphismus, 506  
     zwischen Untermannigfaltigkeiten, 767  
 Differential, 354  
     bei abstrakten Mannigfaltigkeiten, 864  
     bei eingebetteten Mannigfaltigkeiten, 786  
     bei Werten in topologischem Vektorraum, 1119  
     einer Darstellung, 891  
     totales, 356  
     von  $\exp$  auf Matrizen, 376  
     von bilinearer Abbildung, 364  
     von Funktion  
         als Kovektorfeld, 919  
 differential equation  
     ordinary, 483  
     partial, 483  
 Differentialform, 575  
     auf Mannigfaltigkeit, 916  
     auf abstrakter Mannigfaltigkeit, 1037  
     erster Ordnung, 388  
     relative, 575  
     vektorwertige, 1461  
 Differentialfunktork, 865  
 Differentialgleichung  
     gewöhnliche, 483  
     partielle, 483  
 Differentialquotient, 360  
 Differenz  
     von Mengen, 39  
 differenzierbar  
     beliebig, 504  
     in einer Veränderlichen, 175  
     mehrere Veränderliche, 353  
     partiell, 356  
     total, 356  
     Vektor, 709  
     vektorwertige Funktion, 269  
 differenzierbar an der Stelle, 1119  
 differenzierbar bei  $p$ , 1120  
 Differenzieren unter dem Integral, 375  
 Dilogarithmus, 1367  
 Dimension  
     einer Facette, 977  
     eines affinen Raums, 253  
 Dini, Satz von, 264  
 Dirac-Maß, 514  
 directional derivative, 354  
 Dirichlet  
     -Charakter, 1420  
 Dirichlet-Charakter  
     primitiver, 1423  
 Dirichlet-Reihen, 1424  
 disjunkt, 38  
 diskret  
     in topologischem Raum, 417  
     Martingal, 1303  
     Meßraum, 1294  
     relativ, 417  
     Topologie, 244  
 diskrete Fouriertransformation, 653  
 Distribution  
      $d$ -dimensionale, 932  
     temperierte, 670  
 Distributivgesetz  
     bei Körper, 74

- Divergenz, [617](#), [628](#)
- dominierte Konvergenz, [544](#)
  - stochastische, [1291](#)
- dot-Operation, [1065](#)
- Dreiecksungleichung
  - bei metrischen Räumen, [229](#)
  - für Absolutbetrag eines angeordneten Körpers, [98](#)
- duale Gitter, [677](#)
- Dualraum, [388](#)
  - topologisch, [1311](#), [1316](#)
- Dynkin-Diagramm, [962](#), [1031](#)
- $\in$ ,  $\notin$ , [37](#)
- $E_8$ , [1012](#)
- $\exists$  es existiert ein, [57](#)
- $E(X)$  Erwartungswert der Zufallsvariable  $X$ , [543](#)
- $\exists!$  es existiert genau ein, [57](#)
- ebene Quadriken, [205](#)
- echt
  - Teilmenge, [38](#)
  - Unterdarstellung, [798](#)
- Eckenplättung, [620](#)
- Ehrenfest
  - Urnenmodell, [1292](#)
- Ehresmann
  - Satz von, [1193](#)
- Eichgruppe, [928](#)
- Eigenschwingungen, [331](#)
- eigentlich
  - Gruppenwirkung, [850](#)
  - stetige Abbildung, [848](#)
- Ein-Parameter-Untergruppe, [1144](#)
- Einbettung
  - $k$ -geringter Räume, [856](#)
  - abgeschlossene, geringter Räume, [856](#)
  - einer Teilmenge, [50](#)
  - kanonische unitäre, [707](#)
  - offene, geringter Räume, [856](#)
  - topologische, [825](#)
- einfach
  - Darstellung, Gruppe, [764](#)
  - Darstellung, Liealgebra, [799](#)
  - zusammenhängend, wegweise, [419](#)
- Einheitswurzel
  - in  $\mathbb{C}$ , [307](#)
- Einparameteruntergruppe, [841](#)
  - von  $\mathbb{C}^\times$ , [650](#)
  - von  $\mathbb{R}$ , [161](#)
  - von  $\mathbb{R}^\times$ , [161](#)
  - von  $GL(n; \mathbb{R})$ , [785](#)
  - von Liegruppe, [870](#)
  - von Matrix-Liegruppe, [786](#)
  - von normiertem Vektorraum, [256](#)
- Eins-Element
  - einer Algebra, [337](#)
- Eins-Form, [388](#)
  - vektorwertige, [1352](#)
- Einschränkung, [50](#)
- einsetzen
  - Vektorfeld in Kovektorfeld, [391](#)
- Einsetzen, [46](#)
- Einszusammenhangskomponente, [841](#)
- einwertige Abbildung, [49](#)
- elektromagnetisches Feld, [1259](#)
- Element, [37](#)
  - zufälliges, [530](#)
- Elementar-Ereignis, [514](#)
- Ellipse, [205](#)
- elliptisch
  - Differentialoperator, [1128](#)
- elliptische Funktion, [1459](#)
- elliptisches Integral, [1449](#)
- $\text{End}_k^G(V)$  Endomorphismus von Darstellung, [796](#)
- endlich
  - Maß, [673](#)
- endliche Gitterspiegelungsgruppe, [947](#)
- endliche Überlagerung, [1445](#)
- Energie, [414](#)

- kinetische, 1215, 1221, 1227
- Energieerhaltung, 1206
- Ens
  - Ens( $X, Y$ ) Menge der Abbildungen  $X \rightarrow Y$ , 47
- Ens( $X$ ) Selbstabbildungen der Menge  $X$ , 61
- Ens<sup>x</sup>( $X$ ) Bijektionen  $X \xrightarrow{\sim} X$ , 68
- Ens<sup>b</sup> beschränkte Abbildungen, 237
- ensemble, 47
- entangled, 1272
- Ereignis, 513, 1295
- Ereignisse, 1259
- Ereignissen, 1254
- erste Fundamentalform, 1239
- Erwartung
  - bedingte, 1302
- Erwartungswert, 1297
  - einer Zufallsvariable, 543
- erweiterte reelle Zahlen, 106
- Erweiterung
  - kanonische, 1288
- erzeugende Funktion
  - der Catalan-Zahlen, 223
- erzeugt
  - $\sigma$ -Algebra, 514
  - Topologie, 829
- Erzeugungsoperator, 1142
- essentiell
  - affine Spiegelungsgruppe, 1010
- essentielle
  - Supremum, 640
- étale
  - bei Mannigfaltigkeiten, 916
- étale
  - verzweigt étale, 1431
- euklidisch
  - Abstand auf  $\mathbb{R}^n$ , 229
  - affiner Raum
    - über angeordnetem Körper, 981
  - Norm auf  $\mathbb{R}^n$ , 255
- Vektorraum
  - über angeordnetem Körper, 968
  - Wurzelsystem, 1014
- Euler, 128
- Euler'sche Formel, 305
- Euler'sche Zahl, 133
- Euler-Faktor, 1411
- Euler-Lagrange-Gleichungen, 1217, 1222
- explizit
  - gewöhnliche Differentialgleichung, 483
- Exponentialabbildung, 882
- Exponentialfunktion, 133
- Exponentialgesetz, 1076
- Exponentialreihe
  - eines Endomorphismus, 288
- exponentiell, 1075
- Extrema
  - bei einer Veränderlichen, 187
  - in mehreren Veränderlichen, 382
  - unter Nebenbedingungen, 462
- Facette, 974
- Faktoren, 23
- Fakultät, 23
- Faltung, 691
  - von Maßen
    - auf reellem Vektorraum, 686
    - auf topologischer Gruppe, 1051
- Faser
  - einer Abbildung, 49
- Faserprodukt
  - von topologischen Räumen, 1078
- fast alle
  - Menge, 109
- fast überall
  - auf Maßraum, 636
- feinergleich
  - Topologie, 829
- Feld, 915
  - $\rho$ -Feld, 929

- elektromagnetisches, 1259
- natürliches, 915
- Fenchel'sche Ungleichung, 1237
- $f\text{Ens}(X, Z)$ , 648
- Fibonacci-Folge, 27
- fibré principal, 928
- field, 74
- Filter, 1094
  - echter, 1094
- filterstetig, 1095
- final, 831, 854
- finale Struktur
  - von  $k$ -geringtem Raum, 853
- Finaltopologie, 830
- Fixpunkt, 436
- Flachheitsstruktur, 1193
- Fläche, 456
- Flächenmaß, 565
- Fluß, 596, 883
  - von Vektorfeld, 506
- Flußdichte, 576
- Folge, 109
- folgenkompakt, 261
- force, 1201
- Form
  - quadratische
    - mit Werten in  $L$ , 1240
- 1-Form, 388
- Fourierreihe, 335
- Fouriertransformation
  - abstrakte, 674
  - allgemeine, 698
  - diskrete, 698
  - klassische, 659
- Fréchet-differenzierbar, 353
- Fredholm-Operator, 1048
- frei homotop, 1348
- Frequenzmaß, 707
- Fresnel'sches Prinzip, 183
- Frobenius
  - Satz von, 932
- Frobenius-Reziprozität
  - bei topologischen Gruppen, 1081
- Fubini, 554, 1290
- Führer
  - von Dirichlet-Charakter, 1423
- Fundamentalebene
  - mengentheoretischer, 990
- Fundamentalform
  - erste, 1239
  - zweite, 1239
- Fundamentalform, erste, 403
- Fundamentalsatz
  - der Algebra, 311
- Funktion, 140
  - ganze, 1358
  - gebrochen rationale, 146
  - implizite, 446
  - meromorphe, 1373
  - rationale, 146
  - reguläre, 852
  - stetige im Unendlichen verschwindende, 663
  - überall definierte, 637
  - Umkehrfunktion, 53
- Funktionaldeterminante, 468
- Funktionalgleichung
  - der  $\zeta$ -Funktion, 1412
  - der Gammafunktion, 1403
- Funktionalkalkül, 737
- Funktionentheorie, 324
- $\Gamma$ -Funktion, 1403
- $\Gamma(f)$  Graph von  $f$ , 47
- $\Gamma$ -periodisch, 1459
- GAGA-Prinzip, 1432
- Galois-Überlagerung, 1440
- Gammafunktion, 1403
- ganz
  - Funktion, 1358
- ganze Zahlen
  - $\mathbb{Z}$ , 37

- Gauss  
 Integralsatz von, 617  
 Gauss'sche Glockenkurve, 563  
 Gauss'sche Krümmung, 1241  
 Gebiet, 1370  
 Gedämpfte Schwingungen, 325  
 gemischter Zustand, 1270  
 gendarmes  
 théorème des, 113  
 generalisierte Kraft, 1216  
 Geodäte, 1234  
 verallgemeinerte, 1235  
 Geometrische Reihe, 127  
 Ger<sub>k</sub> Morphismen geringter Räume,  
 853  
 gerade  
 Funktion, 174  
 Geradengruppe, 706  
 Geradensegment, 971  
 k-geringer Raum  
 durch Funktionen, 852  
 Gesamtsystem  
 quantenmechanisches, 1271  
 geschlossen  
 Differentialform, 599  
 Kovektorfeld, 424  
 Geschwindigkeit  
 absolute, 275, 1200  
 vektorielle, 361, 1200  
 Geschwindigkeitsfeld, 1205  
 Geschwindigkeitsphasenraum, 1214, 1220  
 unter Zwangsbedingungen, 1215  
 Geschwindigkeitsvektor, 788, 870  
 getragen  
 Maß, 1098  
 Gewichte, 815  
 Gewichtsraum, 815  
 Gitter  
 abstraktes, 947  
 in  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, 677, 1459  
 in topologischer Gruppe, 1170  
 Gitterspiegelung, 947  
 glatt, 605  
 Abbildung  
 in topologischen Vektorraum, 1121  
 koordinatenfrei, 505  
 zwischen Untermannigfaltigkeiten,  
 767  
 Abbildung nach  $\mathbb{R}^m$ , 504  
 Distribution, 932  
 Gruppoidfunktorktor, 910  
 Mannigfaltigkeit, 858  
 Untermannigfaltigkeit  
 von affinem Raum, 608  
 Vektor in Darstellung, 1122  
 gleichgradig integrierbar, 1304  
 gleichgradig stetig, 1046  
 gleichmäßig beschränkt, 712  
 gleichmäßig stetig  
 Abbildung metrischer Räume, 252  
 Abbildung uniformer Räume, 1050  
 reelle Funktion einer Variablen, 164  
 gleichmäßige Beschränktheit  
 Prinzip der, 712  
 Gleichungssystem, 28  
 goldener Schnitt, 29  
 grad  
 Gradient, 351  
 grad<sub>g</sub> Gradient zu Metrik  $g$ , 403  
 Grad  
 einer polynomialen Abbildung, 379  
 Gradient, 351, 401  
 Gram'sche Matrix, 477  
 Gramm, 1200  
 Graph  
 einer Abbildung, 47  
 Graßmann-Mannigfaltigkeit, 900  
 Gravitationsfeld, 1202  
 Green'sche Formel, 619  
 Grenzwert  
 rechtsseitiger Grenzwert, 161  
 von Abbildung, 249

- von Folge, 109
  - in metrischem Raum, 235
- griechisches Alphabet, 34
- größer
  - Topologie, 829
- größergleich
  - Struktur als  $k$ -geringer Raum, 853
  - Topologie, 829
- größtes Element, 92
- Grp
  - Gruppenhomomorphismen, 71
- Grpto stetige Gruppenhomomorphismen, 672
- Gruppe, 66
  - opponierte, 73
- Gruppenhomomorphismus, 71
- Gruppoid-Funktor, 910
- $G$ -Struktur, 1039
- Haar-Maß, 1035
  - auf affinem Raum, 676
  - auf Kreislinie, 652
  - auf Matrix-Liegruppe, 809
  - auf topologischer Gruppe, 1164
  - Haar'sches Borelmaß, 1168
  - normiertes, 931, 1038
- Häufungspunkt
  - interner, 156
- Häufungspunkt
  - interner, 249
  - von  $D$  in  $\overline{\mathbb{R}}$ , 156
  - von topologischem Raum, 249
- Hahn-Banach
  - dominierte Fortsetzung, 1091
  - Fortsetzungssatz, 1092
  - Trennungssatz, 1088, 1092
- Halb
  - Halbgruppenhomomorphismen, 72
- Halbdichte, 916, 1037, 1116
- halbeinfach
  - Lie-Gruppe, 1136, 1138
- Halbgruppe, 72
- halboffen
  - in  $\mathbb{R}$ , 175
  - in reellem affinen Raum, 357
  - reelles Intervall, 107
- Halbordnung, 92
- Halbraum, 972
- Hamilton'sche Gleichungen, 1221
- Hamilton-Funktion, 1220, 1227
- harmonics
  - spherical, 821
- harmonisch, 1391
- Harmonische Analysis, 660
- harmonische Reihe, 128
- Hauptfaserbündel
  - glattes, 928
- Hauptkrümmungen, 1241
  - einer Hyperfläche, 1240
- Hauptkrümmungsrichtungen, 1241
- Hauptserie
  - gerade, 1102
  - stetige, von  $SL(2; \mathbb{R})$ , 1102
  - ungerade, 1102
- Hauptseriendarstellungen, 1131
- Hauptteil, 1399
- Hauptzweig des Logarithmus, 316
- Hausdorff, 825
- Hausdorff, relativ, 851
- Hausdorff-Raum, 247
- hebbare Singularität, 1372
- Heine-Borel, 251
- Hellinger-Toeplitz, 711
- Hermite-Lindemann, 307
- Hesse-Matrix, 386
- Hilbert'sche Probleme, 124
  - Nummer 1, 124
  - Nummer 8, 130
- Hilbert-Kurve, 290
- Hilbert-Schmidt-Norm, 1190
- Hilbert-Schmidt-Operator, 1189
- Hilbertbasis, 644

- Hilbertprodukt, 1188
- Hilbertraum der quadratintegrierbaren Halbdichten auf  $X$ , 1117
- Hirsch
  - Vermutung von, 980
- Hodge-\*-Operator, 626
- Hölder-Ungleichung, 641
- holomorph, 324, 1328
- holomorphen Einbettung, 1368
- $\text{Hom}_k^G$  Verflechtungsoperatoren, 796
- homöomorph, 825
- Homöomorphismus, 825
- homogener Raum, 901
- Homomorphismus
  - von Darstellungen, 763
  - von Gruppen, 71
  - von Magmas, 70
  - von Monoiden, 70
- homotop, 419
  - mit festen Endpunkten, 419
  - Wege, 418
- Homotopie
  - von Wegen, 419
- Hyperbel, 205
- Hyperfläche
  - Untermannigfaltigkeit, 456
- hypergeometrische Funktion, 1463
- hypergeometrische Reihe, 1462
- id, 47
- Identität, 47
- im
  - Bild von Abbildung, 49
- Immersion
  - in algebraischer Geometrie, 856
  - in der Differentialgeometrie, 868
- implizit
  - Funktion, 446
  - gewöhnliche Differentialgleichung, 483
- Impuls
  - relativistischer, 1262
- Impulse
  - kanonische, 1217
- Impulskordinaten, 1232
- indefinit, 385
- Index
  - Fredholm-Operator, 1048
- Indikatorfunktion, 536
- Induktion
  - Induktionsannahme, 19
  - Induktionsbasis, 19
  - Induktionsschritt, 19
  - Induktionsvoraussetzung, 19
  - stetiger Darstellungen, 1080
  - unitäre, 1117
  - vollständige, 19
  - von  $\mathfrak{g}$ - $K$ -Moduln, 1135
- induzierte  $\sigma$ -Algebra, 531
- induzierte Metrik, 231
- induzierte Orientierung, 610
- induzierte Struktur
  - eines geringten Raums, 855
- induzierte Topologie, 243
- inf, Infimum, 94
- Infimum, 94
- infinitesimale Erzeuger, 709
- initial
  - Morphismus, 855
  - stetige Abbildung, 835
- initiale Struktur, 855
- Initialtopologie, 834
- Injektion, 50
- injektiv
  - Abbildung, 50
- Inklusion, 50
- innerer Automorphismus, 892
- innerer Punkt einer Teilmenge
  - eines metrischen Raums, 712
  - eines topologischen Raums, 823
- Inneres, in topologischem Raum, 822
- Integral

- erstes, einer Differentialgleichung, [486](#)
- nichtnegative meßbare Funktion
  - über Maßraum, [537](#)
- stetige reelle Funktion
  - über kompakten Quader, [371](#)
  - über kompaktes Intervall, [166](#)
- stetige vektorwertige Funktion
  - über kompaktes Intervall, [312](#)
- von vektorwertiger Funktion
  - über Maßraum, [635](#)
- Integralkurve, [485](#), [881](#)
  - maximale, [485](#), [487](#), [881](#)
- Integrallogarithmus, [198](#)
- Integration
  - partielle, [202](#), [558](#)
- Integrationsweg, [421](#)
  - Funktionentheorie, [1335](#)
- integrierbar, [542](#)
  - Differentialform, [590](#)
  - fast überall definierte Funktion, [637](#)
  - gleichgradig integrierbar, [1304](#)
  - Riemann-integrierbar, [172](#)
  - uniform integrierbar, [1304](#)
  - vektorwertige Funktion, [635](#)
- Integrieren
  - von Liealgebrenhomomorphismen, [896](#)
- interior, [822](#)
- interior automorphism, [892](#)
- intertwining operator, [763](#)
- Intervall, [106](#)
- Intervallhalbierungsverfahren, [150](#)
- Intervallschachtelungsprinzip, [120](#)
- invariant
  - Vektor unter Gruppe, [797](#)
  - Vektor unter Liealgebra, [798](#)
- invers
  - in Monoid, [66](#)
- Inversion, [367](#)
- invertierbar, [66](#)
- involutiv, [932](#)
- irreduzibel
  - Charakter, kompakte Liegruppe, [1061](#)
  - Darstellung, Gruppe, [764](#)
  - Darstellung, Liealgebra, [799](#)
  - topologische Darstellung, [1072](#)
- isolierte Nullstelle, [1366](#)
- isolierte Singularität, [1372](#)
- isolierter Punkt, [156](#)
- isoliertes lokales Maximum, [187](#)
- isoliertes lokales Minimum, [187](#)
- isomorph, [797](#)
  - affine Spiegelungsgruppen, [1010](#)
  - Darstellungen, [763](#)
  - Wurzelsysteme, [1028](#)
- Isomorphismus, [71](#)
  - von Darstellungen, [763](#)
  - von geringten Räumen, [853](#)
  - von Mannigfaltigkeiten, [856](#)
- isotop
  - Verschlingungen, [456](#)
- isotypisch
  - Komponente von Darstellung, [814](#)
- Jacobi-Funktor, [868](#)
- Jacobi-Identität, [782](#)
- Jacobi-Matrix, [356](#)
- Kammer, [977](#)
- kanonisch
  - Bündel, [915](#), [1037](#)
- kanonische Einbettung, [715](#)
- kanonische Erweiterung, [1288](#)
- kanonische Fortsetzung
  - von Prämaß, [521](#)
- kanonische Koordinaten
  - des Kotangentialbündels, [1218](#)
- kanonische Norm, [717](#)
- kanonisches Bündel, [1116](#)

- Kante  
 von Coxetergraph, 997
- Kardinalität, 38
- Karte, 458, 857, 1150  
 auf dem Rand induzierte, 610
- Kartenwechsel, 462, 609, 858, 1150
- kartesisch  
 Diagramm  
 von topologischen Räumen, 1078
- kartesisches Produkt, 41
- kausal, 1256
- kausale Vektoren, 1256, 1259
- Kegel  
 im  $\mathbb{R}^3$ , 205
- Kegelschnitt, 205
- Keime regulärer Funktionen, 862
- Kettenlinie, 203
- Kettenregel  
 bei Mannigfaltigkeiten  
 eingebetteten, 786  
 bei Mannigfaltigkeiten  
 abstrakten, 864  
 höhere, 221  
 in einer Veränderlichen  
 komplex, 321, 1327  
 reell, 179  
 in mehreren Veränderlichen, 361
- Killing-Feld, 923
- kinetische Energie, 1206, 1215, 1221, 1227
- kleinergleich  
 Topologie, 829
- kleines o von  $x^n$ , 220
- kleinstes  
 Element, 92
- Kletteroperatoren, 802
- Klumpentopologie, 244
- Knoten, 456  
 von Coxetergraph, 996
- Kodimension  
 einer Untermannigfaltigkeit, 456
- koendliche Topologie, 245
- Körper, 74  
 angeordneter, 96
- Körperhomomorphismus, 77
- Körperisomorphismus, 77
- Kofinaltopologie, 834
- kohomologischen Induktionsfunktoren, 1136
- Kolmogoroff, Existenzsatz von, 1322
- kommutativ  
 Verknüpfung, 61
- Kommutator  
 von Vektorfeldern  
 auf affinen Räumen, 885  
 auf Mannigfaltigkeiten, 890
- kompakt  
 erzeugt, 1075  
 Intervall in  $\overline{\mathbb{R}}$ , 107  
 konvergent, 1361  
 metrischer Raum, 250  
 Operator, 1044  
 relativ, 827  
 Teilmenge von  $\overline{\mathbb{R}}$ , 163  
 topologischer Raum, 261, 826
- kompakt getragen  
 Maß, 715, 1098  
 projektorwertiges Maß, 732
- kompakt-offene Topologie, 1073
- Kompaktifizierung, 1456
- Kompaktum, 163, 251
- Komplement, 39
- komplex  
 Maß, 673  
 Spiegelung, 1008  
 Spiegelungsgruppe, 1008
- komplex differenzierbar, 319, 1325
- komplexe Exponentialfunktion, 303
- komplexe Konjugation, 77
- komplexe Zahlen, 77
- komplexes Radon-Maß, 1172
- Komplexifizierung, 799

- Komponente
  - isotypische von Darstellung, 814
  - Wegzusammenhangskomponente, 415
- Komponentengruppe, 844
- Komponentenregel, 271, 363
- komponentenweise Verknüpfung, 61
- konform
  - Abbildung, 367
- Konjugation mit  $x$ , 892
- konjugiert
  - Exponenten, 641
- konjugierte Exponenten, 641
- konkave Funktion, 188
- konstant
  - Abbildung, 49
- Kontinuumshypothese, 124
- kontragredient
  - Darstellung von Gruppe, 766
- kontrahierend
  - Abbildung metrischer Räume, 436
- kontravariant, 388
- konvergent
  - reelle Reihe, 127
- Konvergenz
  - fast sichere, 1290
  - fast überall, 1290
  - gleichmäßige
    - reeller Funktionen, 209
    - von Abbildungen in metrischen Raum, 237
  - im Mittel, 1290
  - im quadratischen Mittel, 344
  - normale, 1361
  - punktweise
    - reeller Funktionen, 209
    - von Abbildungen in metrischen Raum, 237
  - schwache, 1311, 1316
  - stochastische, 1290
  - von Filtern, 1094
  - von Folge in metrischem Raum, 235
  - von Folgen
    - in  $\overline{\mathbb{R}}$ , 109
  - von reellen Reihen, 127
- Konvergenzradius
  - im Komplexen, 1361
  - im Reellen, 208
- konvex
  - Funktion, 188
  - in affinem Raum, 271
- Konvolution
  - von Maßen
    - auf reellem Vektorraum, 686
    - auf topologischer Gruppe, 1051
- Koordinaten, 454
- Koordinatensystem, 454
- Korrelationskoeffizienten, 1298
- Kotangentialbündel, 916, 926, 1037
  - an eingebettete Mannigfaltigkeit, 1218
- Kotangentialraum, 926, 1218
- kovariant, 388
- kovariante Ableitung, 1247
- Kovarianz, 1298
- Kovektorfeld, 388
  - auf Mannigfaltigkeit, 916, 1037
  - kanonisches, 1232
  - Liouville'sches, 1232
  - vektorwertiges, 413
- Kowurzel, 947, 1014
  - einfache, 1027
- Kraft
  - generalisierte, 1216
- Kraftfeld, 1201
- Kreuzhaube, 833
- kristallographisch, 1014
- kritische Stelle, 382
- Krümmung, 1232, 1252
  - einer Kurve, 1235
  - Hauptkrümmungen, 1240

- Krümmungstensor, 1230
- Kugel, 231
- Kugelflächenfunktionen, 817
- Kugelfunktionen, 817, 820
- Kugelkoordinaten, 405
- Kugelvolumen, 554
- Kurve
  - in reellem Raum, 456
- Kurvenintegral, 276
- $\lambda, \lambda^n$  Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ , 515
- $l^2(I)$ , 645
- $L^2(I)$ , 645
- $L^p(X; \mathcal{M}, \mu)$ , 640
- $L$ -Reihe, 1420
- $L^1$ -Funktion, 637
- $L^2$ -Funktion, 637
- Ladung, 1259
- Länge
  - eines Weges, 267
  - in Spiegelungsgruppe, 987
- Längeneinheit
  - relativistische, 1258, 1266, 1267
- Lagrange'sche Multiplikatoren, 462
- Lagrange-Funktion, 1223
- Lagrangefunktion, 1217
- Landau-Symbole, 1287
- Laplace-Operator
  - auf Riemann'scher Mannigfaltigkeit, 1272
- Laplace-Transformierte, 671, 1414
- Laplaceoperator
  - im  $\mathbb{R}^n$ , 629, 1391
- Laufindex, 20
- lb, 155
- Lebesgue-Borel-Maß, 516
- Lebesgue-Mengen, 529
- Lebesgue-meßbar, 535
- Lebesgue-meßbaren, 529
- Legendre-Polynome, 819
- Leibniz'sches Konvergenzkriterium, 130
- Limes
  - Leibniz-Regel
    - bei glattem Zusammenhang, 1249
    - für die Lie-Ableitung, 924
    - für Differentialformen, 601
      - auf Mannigfaltigkeiten, 919
    - für komplexe Funktionen, 320, 1327
    - für reelle Funktionen, 178
  - Leiteroperatoren, 802
  - Lemma, 63
  - Levy
    - Satz von, 1303
  - lg, 153
  - lichtartig, 1254
  - lichtartige Vektoren, 1259
  - lichtartigen Vektoren, 1254
  - Lie-Ableitung, 922
  - Lie-Algebra, 782
    - einer Liegruppe, 890
    - einer Matrix-Liegruppe, 781
  - Lie-Klammer
    - bei Matrix-Liegruppe, 781
    - von Vektorfeldern
      - auf affinen Räumen, 885
  - Lie-Paar, 1133
  - Liegruppe, 766, 862
    - Matrix-Liegruppe, 766
  - Lieklammer
    - von Vektorfeldern
      - auf Mannigfaltigkeiten, 890
  - $\lim_{n \rightarrow \infty}$  Grenzwert von Folge
    - in  $\overline{\mathbb{R}}$ , 109
    - in metrischem Raum, 235
    - in topologischem Raum, 247
  - $\lim_{x \nearrow p}$  linksseitiger Grenzwert, 161
  - $\lim_{x \searrow p}$  rechtsseitiger Grenzwert, 161
  - $\lim_{x \rightarrow p}$  Grenzwert von Abbildung
    - von topologischen Räumen, 249
    - von Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$ , 157
  - $\limsup$  limes superior
    - einer Mengenfolge, 1308

- von Folge, 109
- limes superior
  - einer Mengenfolge, 1308
- linear, 1138
- lineare Anteil, 254
- lineare Ordnung, 92
- linksinvariant
  - Vektorfeld, 879
- linksinvariantes Haar-Maß, 1035
- linksreguläre Operation, 1042, 1163
- linksseitig stetig, 520
- Liouville
  - Kovektorfeld, 1232
- Lipschitz-Konstante, 436
- Lipschitz-stetig, 436
- lipschitzstetig
  - lokal, 495
  - partiell, 497
- ln, 153
- Lösungsraum, 1282
  - einer linearen Differentialgleichung, 329
  - einer linearen Differentialgleichung allgemeiner Fall, 501
  - einer Schwingungsgleichung, 325, 327
  - lineare Differentialgleichung konstante Koeffizienten, 285
- log, 151
- logarithme népérien, 151
- logarithmische Ableitung, 1383
- Logarithmus, 151
  - $n$ -Logarithmus, 1367
  - binärer, 155
  - Hauptzweig des komplexen, 316
  - komplexer, 322, 1331
- lokal
  - bei topologischem Raum, 1074
  - Funktor, 865, 1152
  - kompakt, 1074
  - topologischer Raum, 559
- lokal endlich
  - Borel-Maß, 1173
  - Mengensystem, 831
- lokal integrierbar, 667
- lokal konvex, 1095
- lokale Koordinaten, 460
- lokales Koordinatensystem, 460
- Lorentz-Gruppe, 1257
- Lorentzmetrik, 1257
- Lorentztransformationen, 1257
- $L^p$ -Funktion, 640
- $\mathcal{M}^{\text{an}}$  meromorphe Funktionen, 1374
- $\mathcal{M}^{\text{an}}(X)$ , 1429
- $\mathbb{M}$  Massen, 1200
- $M(X)$  komplexe Maße auf  $X$ , 673
- $M(X; [0, \infty))$  endliche Maße, 673
- $M(X; [0, \infty])$  Maße, 673
- $M(X; \mathbb{R})$  reelle Maße, 673
- Mächtigkeit, 38
- $\text{Mag}(H, G)$  Homomorphismen von Magmas, 70
- Magma, 70
- Majorante, 131
- Majorantenkriterium, 131
- majorisierte Konvergenz, 544
- Mannigfaltigkeit
  - $\mathcal{C}^1$ , 1150
  - abstrakte, 856
  - berandete Untermannigfaltigkeit von affinem Raum, 605
  - glatt, 858
  - Riemann'sche, 923
  - topologische, 825
  - Untermannigfaltigkeit mit Ecken von affinem Raum, 620
  - Untermannigfaltigkeit von affinem Raum, 454
- Mantelfläche, 568
- Markovkette, 1291
- Martingal

- diskretes, 1303
- Maß, 512
  - einer Differentialform, 584
  - endliches, 673
  - komplexes, 673
  - mit Werten in einem orientierter Gerade, 566
  - nichtnegatives, 512
  - projektorwertiges, 730
  - reelles, 673
  - teilraumwertiges, 730
  - topologisches, 515, 1051
- Masse, 1200, 1204
  - schwere, 1204
  - träge, 1204
- Maßraum, 513
- Matrix-Liegruppe, 766
  - partielle, 782
- Matrix-Liegruppenkeim, 782
- Matrixkoeffizient, 1041
- Matrixkoeffizientenabbildung, 1041
- max, 92
- maximal
  - Element, 92
  - Integralkurve, 485, 881
  - Torus, 936, 1140
- Maximum, 187
  - isoliertes lokales, 382
  - lokales, 382
- Maximumsnorm, 256
- Maximumsprinzip, 1370
- Maxwell'sche Gleichungen, 1263
- Menge, 37
  - leere Menge, 37
  - Potenzmenge, 39
  - Teilmenge, 38
- Mengenalgebra, 511
- Mengenklammern, 37
- Mengenring, 518
- meromorph
  - Funktion, 1373
- meromorphe Funktion
  - auf Riemann'scher Fläche, 1429
- meßbar
  - $\mu$ -meßbar, Funktion, 535
  - $\mu^*$ -meßbar, Menge, 524
  - Abbildung, 530
  - fast überall definierte Funktion, 637
  - Menge, 512
- meßbar und integrierbar, 542
- Meßraum, 512
  - Borel'scher, 1294, 1322
  - diskreter, 1294
- Metrik, 229
  - zu Norm, 255
- metrische Topologie, 242
- metrischer Raum, 229
- min, 61, 92
- minimales
  - Element, 92
- Minimum, 187
  - isoliertes lokales, 382
  - lokales, 382
- Minkowski-Funktional, 1092
- Mittelwertsatz, 185
  - allgemeiner, 193
  - der Integralrechnung, 174
  - in mehreren Veränderlichen, 273
- mittlere Krümmung, 1241
- $\text{Mod}_k^G$  Verflechtungsoperatoren, 796
- $\text{Mod}_k^{\mathfrak{g}}$  Verflechtungsoperatoren, 796
- Modto, 1069, 1081
- $\text{Modto}^G$ , 1080
- Modul
  - $(\mathfrak{g}, K)$ -Modul, 1134
  - topologischer, 1069
- modular
  - Darstellung, 1178
- Modulform, 1457
- Modulfunktionen, 1456
- Modulraum

- von Riemann'schen Flächen, 1458
- Möbiusband, 832
- Mon
  - Monoidhomomorphismen, 70
- Monoid, 64
  - additiv notiertes, 64
  - multiplikativ notiertes, 65
- Monoidhomomorphismus, 70
- Monom, 145
- monoton, 117, 146
- monotone Konvergenz, 537
- Morphismus, 872, 1077
  - von geringten Räumen, 853
  - von Monoiden, 70
- Morphismus von Lie-Paaren, 1135
- Morphismus von Mannigfaltigkeiten, 856
- Mult<sup>k</sup> multilineare Abbildungen, 504
- Multiindex, 377
- Multimenge, 54
- Multinomialkoeffizient, 54
- $\mathbb{N}$  natürliche Zahlen, 37
- $\mathbb{N}_0$ , 38
- népérien
  - logarithme, 151
- Nabla-Operator, 618
- Nachschieben von Abbildung, 50
- natürliche Topologie
  - auf reellen Raum, 260
- natürliche Zahlen, 37
- negativ, 96
- negativ definit, 385
- Negatives, 68
- neutrales Element, 64
- Newton'schen Bewegungsgleichung, 1200
- Newton-Verfahren, 122
- nichtleere endliche Schnitte, 828
- nichtnegativ, 96, 727, 920
  - Differentialform, 590
  - Linearform auf  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ , 1158
- nichtpositiv, 96
- Niveauflächen, 227
- Niveaulinien, 227
- Norm
  - auf reellem Vektorraum, 255
  - kanonische, auf Banachalgebra, 717
  - von multilinearer Abbildung, 260
- normal
  - Operator, 750
  - topologischer Raum, 1156
- normal konvergent, 1361
- Normalenfeld
  - orientiertes, 596
- Normalisator, 946
- Normalverteilung, 692
- normiert
  - Raum, 255
  - Vektorraum, 255
  - Weg, 418
- Normierung, 515
- nuklear, 1190
  - Operator, 1193
- Nulldarstellung, 796
- Nullfolge, 111
- Nullmenge, 529
- Nullschnitt, 874
- $M^\circ$  Inneres von  $M$ , 822
  - in  $A^\circ$ , Menge  $A$  mit opponierter Verknüpfung, 73
  - in  $x^\circ$ , Element  $x$  aufgefaßt als Element der opponierten Struktur, 73
- ⊗
  - Notation für Bilinearform, 401
  - $\Omega^k(X)$  glatte  $k$ -Formen auf  $X$ , 918
  - $\mathcal{O}|_Y$  induzierte Struktur, 855
  - $\mathcal{O}^{\text{an}}$  holomorphe Funktionen, 1365
  - ⊗ Produkt- $\sigma$ -Algebra, 548
  - oBdA ohne Beschränkung der Allgemeinheit, 58

- Obersumme, 170  
 ODE ordinary differential equation, 483  
 oder, 56  
 $\text{Of}_X(M)$  Inneres von  $M$ , 822  
 offen  
   Abbildung, 832  
   in  $\mathbb{R}$ , 182  
   in reellem Vektorraum, 259  
   in topologischem Raum, 242  
   Kern, 822  
   metrisch, 238  
   reelles Intervall, 107  
 offene Überdeckung, 246, 261  
 Operation  
   durch Konjugation, 1042  
   von Liealgebra, 794  
 Operation durch Konjugation, 796, 1163  
 Operator  
   beschränkter, 260  
   stetiger, 260  
   unbeschränkter, 753  
 Operatornorm, 260  
 Operatortopologie  
   starke, 704  
 opp in  $A^{\text{opp}}$ , Menge  $A$  mit opponierter Verknüpfung, 73  
 opponiert  
   Gruppe, 73  
   Verknüpfung, 73  
 Ordnung  
   auf einer Menge, 92  
   einer gewöhnlichen Differentialgleichung, 483  
   einer Nullstelle, 1365  
   lineare, 92  
   partielle, 92  
   totale, 92  
 Ordnungsrelation, 92  
 Ordnungstopologie, 245  
 orientierbar  
    $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit, 582  
 orientiert  
    $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit, 582  
 Orientierung  
   von  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit, 582  
   von Vektorraum, 582  
 Orientierungsbündel, 916  
 orthogonal  
   affine Abbildung, 981  
 Orthonormalsystem, 644  
   vollständiges, 644  
 oszillatorisches Integral, 702  
  
 $\pi$  Kreiszahl, 124  
 $P^X$  Verteilung der Zufallsvariable  $X$ , 1296  
 $\mathcal{P}(X)$  Potenzmenge, 39  
 $p$ -Form  
   vektorwertige, 1461  
 Parabel, 205  
 parallel  
   längs glattem Weg, 1244  
 parallelisierbar, 876  
 Paralleltransport, 1244  
 Parametrisierung  
   orientierte, 595  
 Partialsumme, 127  
 partiell  
   Ableitung, 349, 370  
   definiert, lineare Abbildung, 752  
   differenzierbar, 349  
   Integration, 202, 558  
   Matrix-Liegruppe, 782  
   Ordnung, 92  
   Unter-Liegruppe, 934  
 Pascal'sches Dreieck, 26  
 Pauli-Matrizen, 803  
 PDE partial differential equation, 483  
 Periode, 335  
 Permutation, 70  
 Pfad, 1300

- Pfaff'sche Form, 388  
 Phase, 328  
 Phasenraum, 1205, 1221  
     Geschwindigkeitsphasenraum, 1214  
     unter Zwangsbedingungen, 1215  
 pythagoreische Zahlentripel, 300  
 Picard  
     Satz von, 1182  
 Picard-Lindelöf, 500  
 Plättung, 454  
 Plancherel-Maß, 677, 700  
 poids, 815  
 Poincaré-Gruppe, 1257  
 Poisson'sche Summationsformel  
     abstrakte, 681, 701  
     konkrete, 670  
 Poisson-Kern, 1395  
 Poisson-Verteilung, 138  
 Polarkoordinaten  
     Gradient in, 401  
 Polarzerlegung  
     in Hilbertraum, 727  
 Polordnung  
     in Funktionentheorie, 1372  
 Polstelle  
     in Funktionentheorie, 1372  
 Polyeder  
     konvexer, 974  
 Polynom, 377  
     trigonometrisches, 342  
 Polynomfunktion, 145  
 polynomial  
     Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 379  
 Polytop, 980  
 Pontrjagin-Gruppe, 697  
 poset, 92  
 positiv, 96  
     Radonmaß, 1173  
 positiv definit, 385  
     Coxetergraph, 998  
 positiv semidefinit, 385  
     Operator, 722  
 positive stetige Dichte, 1035  
 Potential, 1227  
     eines Kraftfelds, 414, 1222  
     im Anschauungsraum, 1206  
 potentielle Energie, 1206  
 Potenzmenge, 39  
 Potenzreihe, 208, 1361  
 $\text{pr}_X$   
     Projektion, 49  
 Prähilbertraum, 644  
 Prämaß, 519  
 primitiv  
     Dirichlet-Charakter, 1423  
 Primzahlsatz, 1411  
 Primzahlzwillinge, 1419  
 principal bundle, 928  
 Prinzip von Cavalieri, 553  
 prinzipalen Automorphismus, 1027  
 Produkt  
     balanciertes, 1083  
     von Mannigfaltigkeiten, 861  
     von Meßräumen, 1294  
     von Reihen, 136  
 Produkt- $\sigma$ -Algebra, 548  
 Produktentwicklung, 1402  
 Produktmaß, 548, 1288  
 Produktmetrik, 234  
 Produktnorm, 256  
 Produktregel, 1327  
     für komplexe Funktionen, 320  
     für reelle Funktionen, 178  
 Produkttopologie, 697, 838  
 Prohorov, Satz von, 1314, 1319  
 Projektion  
     von Vektorraumbündel, 1077  
     bei zwei Mengen, 49  
     von Vektorraumbündel, 872  
 projektiver Raum  
     als glatte Mannigfaltigkeit, 858  
     topologisch, 845

- propre, 848
- Punkt, 37
  - innerer, 712
- punktierten Menge, 1368
- $\mathbb{Q}$  rationale Zahlen, 37
- Quader, 371
- quadratintegrierbar
  - fast überall definierte Funktion, 637
  - Funktion, 636
- quadratisch
  - Form
    - mit Werten in  $L$ , 1240
    - Form, reelle, 384
- Quadratwurzel, 120
- quantenmechanisches System
  - klassisches, 1270
- quasikompakt, 261, 826
- Quelldichte, 617
- Quetschlemma, 113, 159, 250
- Quotientendarstellung, 1143
- Quotientenkriterium, 131
- Quotientenregel, 179
  - im Komplexen, 321, 1327
- Quotiententopologie, 831
- $\mathbb{R}$  reelle Zahlen, 103
- $\rho$ -Struktur, 1039
- rad
  - Radian, 279
- Radon-Maß
  - signiertes, 1159
- Radonmaß
  - nichtnegatives, 1158
- Rand
  - einer berandeten Untermannigfaltigkeit, 607
  - topologischer, 822
- Randfacette, 976
- Randintegral, 1340
- Randkarte, 609
- Randplättung, 605
- Randpunkt, 823
- Randweg, 1339
- Rang
  - einer kompakten Liegruppe, 940
  - eines kompakten Torus, 905
- rational
  - Darstellung, 1178
- rationale Zahlen, 37
- Raum, 37
  - affiner, 253
  - euklidischer
    - über angeordnetem Körper, 981
  - normierter, 255
  - reeller, 254
  - uniformer, 1049
- Raum-Zeit-Punkte, 1254, 1259
- raumartig, 1256
- raumartige Vektoren, 1256, 1259
- Raumzeit, 1254, 1259
- Rechteck, 371, 1339
- rechtsinvariant
  - Vektorfeld, 879
- rechtsreguläre Operation, 1042, 1163
- reduzierte Darstellung
  - in Spiegelungsgruppe, 987
- reell
  - Maß, 673
  - Raum, 254
  - Vektorraum, 254
- reell konvergent, 112
- reelle Zahl, 103
- reellen Banach-Algebra, 716
- reeller Vektorraum, 33
- reflexiv
  - Relation, 92
- Regeln von de l'Hospital, 193
- regulär
  - Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 379
  - Borel-Maß, 1173

- Funktion, 852
- Teil eines Randes, 620
- von außen, Borel-Maß, 1173
- von innen, Borel-Maß, 1173
- Reihenglieder, 127
- rektifizierbar, 276
- Relation
  - auf einer Menge, 92
- relativ
  - kompakt, 827
- relativ Hausdorff, 851
- relative initiale Struktur, 1181
- relativistischer Impuls, 1262
- Relativitätstheorie, 1254
- representation, 762
- Residuum, 1381
- Reskalierung
  - von Translationen, 253
- Resonanz, 334
- Resonanzkatastrophe, 334
- Restglied
  - Integraldarstellung, 219
  - Lagrange'sche Form, 219
- Ricci-Abbildung, 1231
- Richtungsableitung, 353, 1123
  - für abstrakte Mgf, 863
  - vektorwertig, auf Mgf, 864
- Richtungsraum, 253
- Richtungsvektor, 253
- Riemann
  - $\zeta$ -Funktion, 128, 1411
  - Riemann'sche Fläche, 857
  - Riemann'sche Metrik, 402
  - Riemann'sche Vermutung, 128, 1411
- Riemann'sche Mannigfaltigkeit, 923
- Riemann-integrierbar, 172
- Riemannsumme
  - für Funktion auf Mannigfaltigkeit, 478
  - für Funktion auf Rechteck, 371
- für Integral einer Volumenform, 593
- für Integral nach Maß, 547
- für Maß einer Differentialform, 589
- für reelle Funktion, 168, 172
- für vektorwertige Funktion, 312
- für Wegintegrale, 408
- Riesz'scher Darstellungssatz
  - bei Hilbertraum, 656
  - Maßtheorie
    - auf affinem Raum, 727
    - im allgemeinen Fall, 1159
- Ring
  - angeordneter, 96
  - topologischer, 1069
- Ringalgebra, 337
  - über Kring, 852
- Rolle, 185
- Rotation, 426
- Rotationskörper, 554
- Rouché, Satz von, 1385
- Rückzug
  - von Funktionen, 397
  - von Kovektorfeld, 397
- Ruhemasse, 1259
- Runge-Lenz-Vektor, 1210
- Russell'sches Paradoxon, 46
- $\sigma(\mathcal{A})$  von  $\mathcal{A}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra, 514
- $S^n$  die  $n$ -Sphäre, 458
- $\sigma$ -Subadditivität, 523
- $\sigma$ -additiv, 512, 519
- $\sigma$ -Algebra, 512
  - erzeugt von Mengensystem, 514
- Sard
  - Satz von, 562
- schiefadjungiert, 710
- Schmiegekreis, 1235
- Schmiegeparabel, 217
- Schnitt
  - in Vektorraumbündel, 874

- stetiger, 831, 854
  - von Abbildung, 874
  - zweier Mengen, 39
- Schnittkrümmung
  - absolute, 1238
- schnittstabil, 521
- Schranke
  - größte untere, 94
  - kleinste obere, 94
  - obere, 94
  - untere, 94
- Schrankensatz, 271
- Schur, Lemma von, 812
  - unitäre Darstellungen, 1112
- schwach-\*-Topologie, 1311, 1316
- schwache Konvergenz, 1311, 1316
- schwache Topologie, 1311, 1316
  - auf  $M(X; \mathbb{R})$ , 1313, 1318
- Schwartzfunktion, 678
- Schwartzmaß, 678
- Schwartzraum, 662, 678
- Schwarz'sches Lemma, 1370
- Schwarz'sches Spiegelungsprinzip, 1359
- schwere Masse, 1204
- Secans, 295
- Secans hyperbolicus, 205
- Sekante, 175
- selbstadjungiert, 710
- $\sigma$ -endlich, 520
- separabel
  - topologischer Raum, 531
- Separation der Variablen, 492, 493
- separiert
  - stetige Abbildung, 851
  - topologischer Raum, 825
- Shuffle, 572
- sin Sinus
  - komplexer, 305
- Singularität
  - in Funktionentheorie
    - hebbare, 1372
    - isolierte, 1372
    - wesentliche, 1372
- sinh Sinus hyperbolicus, 203
- Sinus, 279
- Sinus hyperbolicus, 203
- Sinuskurve des Topologen, 776
- Sinustransformation, 662, 698
  - diskrete, 699
- skalare Rotation
  - eines ebenen Vektorfeldes, 426
- Skalarprodukt
  - auf dem  $\mathbb{R}^n$ , 281
  - massebehaftetes, 1212
- Spannungstensor, 1269
- Spektralmaß
  - eines Vektors, 715
- Spektralprojektor
  - einer unitären Darstellung, 741
- Spektralradius, 720
- Spektrum
  - bei Banachalgebren, 717
  - speziellen Relativitätstheorie, 1254
- spezieller Punkt, 1019
- spherical harmonics, 821
- Spiegelebene, 957, 966, 980
- Spiegelhyperebene, 966, 980
- Spiegelung
  - affine, 980
  - affine orthogonale, 981
  - bei Gitter, 947
  - einfache, 1027
  - komplexe, 1008
  - lineare, 966
  - orthogonale lineare, 968
  - reelle lineare, 957
- Spiegelungsgruppe
  - affine, 981
  - affine euklidische, 981
  - endliche euklidische, 968
  - komplexe, 1008
- Spiegelungsprinzip

- Funktionentheorie, 1359
- Spiegelungsgruppe
  - endliche, 968
- Spin-Struktur, 1039
- Spingruppe, 791
- Spitzenform, 1457
- spitzer Winkel, 992
- Spur
  - eines Operators, 1191
- spurbar, 1190
- Spurtopologie, 243
- stabil
  - unter Liealgebra, 798
- stabile Wurzelwahl, 947
- Stammfunktion, 196, 315
- Standardabweichung, 1298
- Standarddarstellung, 795
  - von  $GL(V)$ , 762
- starke Operortopologie, 704
- Steigung, 175
- stetig
  - Darstellung, 1178
  - für Funktion auf  $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ , 142
  - für metrische Räume, 231
  - für topologische Räume, 242
  - Gruppoidfunkt, 910
  - linksseitig, 520
  - Operation einer topologischen Grupsup, Supremum, 94
    - pe, 842
- stetig differenzierbar
  - in mehreren Variablen, 367
- stetige Darstellung, 1072
- stetige linksreguläre, 1076
- stetige rechtsreguläre Darstellung, 1076
- stetigen Abbildung über  $X$ , 1078
- Stiefel-Mannigfaltigkeit, 900
- stimmen ueberein bis zur Ordnung  $d$ , 380
- stimmen ueberein bis zur Ordnung  $n$ , 220
- stochastisch
  - Konvergenz, 1290
  - stochastisch unabhängig
    - Ereignisse, 1295
    - Zufallsvariablen, 1296
  - stochastischer Prozess, 1300
- Stokes
  - Integralsatz von
    - allgemeiner, 612
    - klassischer, 618
- Stokes, mit Ecken, 620
- Stone-Weierstraß, 337
- straff, 1314, 1319
- Stufenfunktion, 535
- stumpfer Winkel, 992
- Subbasis, 830
- sublinear, 1088
- Submersion
  - in der Differentialgeometrie, 869
- Substitutionsregel, 198
- Summanden, 20
- Summe
  - von Wurzelsystemen, 1028
- Summenregel, 178, 320, 364, 1120, 1327
- summierbar
  - Familie in normiertem Vektorraum, 286
  - Familie reeller Zahlen, 132
- support, 464
- Supremum, 94
  - essentielles, 640
- Supremumsnorm, 256
- Surjektion, 50
- surjektiv
  - Abbildung, 50
- symmetrisch, 407
- symplektische Form
  - kanonische, 1232
- System positiver Wurzeln, 1023
- System von Hyperebenen, 971
- System von Teilmengen, 241

- $T_4$  viertes Trennungsaxiom, 1156
- $TM$ , *siehe* Tangentialbündel
- $T_pM$ , *siehe* Tangentialraum
- Tangens, 295
- Tangens hyperbolicus, 205
- Tangente, 175, 217
- Tangentenumlaufzahl, 1194
- Tangentialabbildung, 1151
- Tangentialbündel, 871
  - im eingebetteten Fall, 582
- Tangentialbündelfunktor, 874
- Tangentialraum
  - für abstrakte Mgf, 863
  - im eingebetteten Fall, 580
- Tangentialraumfunktor, 865, 1153
- Tangentialvektor
  - für abstrakte Mgf, 863
- Tauber-Bedingung, 225
- tautologisch
  - Vektorfeld, 1227
- Taylorentwicklung
  - in einer Veränderlichen, 217
  - in mehreren Veränderlichen, 376
- Taylorreihe
  - in der Funktionentheorie, 1363
  - in einer Veränderlichen, 214, 216
- Teichmüllerraum, 1458
- Teilfolge, 117
- Teilmenge, 38
  - echte, 38
- Teilsystem, 241
- Teilüberdeckung, 261
- Teilung der Eins, 473
- Teilung der Identität, 731
- Teleskopsumme, 127
- temperiert
  - Distribution, 670
- Tensor
  - 2-Tensor, 401
- Tensorfeld, 916
- Teppich, 1294
- Tietze's Erweiterungslemma, 1156
- tight, 1314, 1319
- Tonelli, Satz von, 551
- $\text{Top}(X, Y)$  stetige Abbildungen, 1072
- Topologie, 241
  - als homogener Raum, 844
  - feiner, 829
  - gröber, 829
  - größergleich, 829
  - induzierte, 243
  - kleinergleich, 829
  - natürliche, 260
  - schwache, 1311, 1316
- topologisch
  - Abbildung, 825
  - Dualraum, 1311, 1316
  - Erzeuger, 905
  - frei, Gruppenwirkung
    - topologische, 1085
  - Gruppe, 841
    - über topologischem Raum, 1118
  - Körper, 1069
  - Mannigfaltigkeit, 825
  - Maß, 515, 1051
  - meßbar, 515
  - Modul, 1069
  - Ring, 1069
  - Vektorraum, 1069
  - Vektorraum
    - über topologischem Raum, 1118
  - zyklisch
    - topologische Gruppe, 905
- topologische Gruppe, 697
- topologische Summe, 831
- topologischer Raum, 242
- topologischer Raum über  $X$ , 1078
- Torsor
  - auf  $X$ 
    - glatter, 927
- Torus
  - kompakter, 905

- maximaler, 1140
  - in topologischer Gruppe, 936
- total beschränkt, 1045
- total unzusammenhängend, 779
- totale Ordnung, 92
- Totalgrad, 377
- Totalität
  - für Relation, 92
- Totalraum, 872, 1077
- träge Masse, 1204
- Träger
  - einer Facette, 977
  - einer Funktion, 464
  - eines komplexen Maßes, 1172
  - eines Maßes, 1172
  - eines Radon-Maßes, 1173
- trans, 254
- Transformationsformel
  - bei kompaktem Träger, 465
  - für das Lebesgue-Integral, 560
- transitiv
  - Relation, 92
- Transitivität
  - der Induktion, 1082
- Translation
  - von affinem Raum, 253
- translationsinvariant, 515
- transzendent
  - reelle Zahl, 125
- trennt die Punkte, 337
- Treppenfunktion, 313
- tribu, 512
- Trigonometrie, 205
- trigonometrisches Polynom, 342
- Tychonoff, 1171
- Typ
  - eines Gruppoid-Funktors, 910
- überabzählbar, 122
- überall definiert
  - Funktion, 637
- Überdeckung, 261
  - einer Teilmenge, 261
- überdeckungskompakt, 261
- Übergangswahrscheinlichkeit, 1292
- Überlagerung, 1445
  - verzweigte, 1431
- Ultrafilter, 1170
- Um für Umlaufzahl, 1378
- Umgebung
  - $\varepsilon$ -Umgebung, 231
  - in  $\mathbb{R}$ , 107
  - in metrischem Raum, 231
  - in topologischem Raum, 242
- Umgebungsbasis
  - in  $\mathbb{R}$ , 111
  - in metrischem Raum, 233
  - in topologischem Raum, 824
- Umgebungsfilter, 1094
- Umkehrfunktion, 53
- Umkehrsatz, 436
- Umlaufzahl
  - eines Weges
    - in der Zahlenebene, 1378
- Umordnungssatz, 130
- unbeschränkt
  - Operator, 753
- unbestimmt divergent, 112
- unendlicher Dezimalbruch, 104
- ungerade
  - Funktion, 174
- uniform
  - Raum, 1049
  - Struktur, 1049
- uniform beschränkt, 712
- uniform integrierbar, 1304
- unitär
  - Darstellung, 813, 1072, 1178
  - von  $\mathbb{R}$ , 704
  - Induktion, 1117
- unkorreliert
  - Zufallsvariablen, 1298

- Unter-Liegruppe
  - partielle, 934
- Unteralgebra, 337
  - von allgemeiner Algebra, 785
- Unterdarstellung, 798
  - abstrakte, 764
  - unitäre, 707
- Untermannigfaltigkeit, 868
  - der Klasse  $C^l$ , von affinem Raum, 608
  - glatte, von affinem Raum, 608
  - von affinem Raum, 454
- Unterringalgebra, 337
- Untersumme, 170
- Unterteilung
  - von Intervall, 172
- unverschränkt
  - Zustand, 1272
- unverzweigte Überlagerung, 1445
- unzerlegbar
  - Wurzelsystem, 1028
- Urbild
  - von  $\sigma$ -Algebra, 531
  - von Menge, 49
- Urkilogramm, 1200
- Urnenmodell, 1292
- Urysohn's Lemma, 1156
  
- van-de-Ven-Diagramme, 40
- Variablentrennung, 493
- Varianz, 1298
- Variation
  - eines Maßes, 683
- Variation der Konstanten, 332, 503, 1284
- Variationsgleichung, 1274
- Variationsnorm, 683
- Vektor
  - $K$ -endlicher, 1099
- Vektorbündel, 872
- Vektorfeld
  - auf affinem Raum, 388, 485
  - auf Mannigfaltigkeit, 874
  - glattes, 877
- Vektorraum
  - reeller, 254
  - topologischer, 1069
- Vektorraumbündel
  - glattes reelles, 872
- vektoriell
  - $p$ -Form, 1461
  - 1-Form, 1352
  - Differentialform, 1461
  - Kovektorfeld, 413
- Vereinigung, 39
- Verfeinerung
  - von Wahrscheinlichkeitsraum, 513
- Verflechtungsoperator, 743, 763, 796, 1081
- Verknüpfung
  - auf einer Menge, 59
  - komponentenweise, 61
  - von Abbildungen, 50
- Verknüpfungstafel, 60
- Vernichtungsoperator, 1142
- Verschlingung, 456
- verschränkt
  - Zustand, 1272
- Verschränkung, 1270
- Vertauschen
  - von partiellen Ableitungen, 374
  - von partiellen Integrationen, 374
- Verteilung
  - einer Zufallsvariable, 535, 1296
  - geometrische, 535
- Verteilungsfunktion
  - eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, 522
  - von Zufallsvariable, 535
- Vervollständigung
  - von Maßraum, 529
- verwandt
  - 2-Tensoren, 403

- Differentialformen, 579
- Funktionen, 395, 877
- Kovektorfelder, 395
- Maße, 535
- Vektorfelder, 395, 877
- Wege, 411
- Verwandtschaft
  - von Feldern, 916
- verzweigt étale, 1431
- verzweigte Überlagerung, 1431
- Verzweigungsgrad, 1431
- $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$   $k$ -dimensionales Volumen, 477
- vollständig
  - angeordneter Körper, 120
  - Maßraum, 529
  - metrischer Raum, 285
  - uniformer Raum, 1095
- Volumen, 477
- Volumenform, 626, 916, 1037
  - kanonische, 626
- von-Neumann-Darstellung, 1098
- von-Neumann-Raum, 1095
- Vorschalten von Abbildung, 50
- $v_p$  Bewertung, 1375
- Wahrheitstafel, 61
- Wahrscheinlichkeitsraum, 513
- Wallis'sche Produktformel, 1401
- Wand
  - eines Alkoven, 978
- Weg, 267
  - geschlossen, 419
  - normierter, 418
  - stückweise linear, 415
  - zusammenziehbar, 419
- Wegintegral, 407
  - für Kovektorfeld, 407
  - für Vektorfeld, 409
  - komplexes, längs beliebigem Weg, 1345
  - komplexes, längs Integrationsweg, 1335
    - vektorwertiges, 413, 1353
- wegweise einfach zusammenhängend, 419
- Wegzusammenhang, 415
- Wegzusammenhangskomponente, 415
- Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion, 1451
- Weierstraß'scher Approximationssatz, 338
- Weingarten-Abbildung, 1241
- Wert, 46
- Wertebereich, 47
- wesentlich
  - in Funktionentheorie Singularität, 1372
- Weyl'sche Charakterformel, 1066
- Weyl'sche Integrationsformel, 1063
- Weylgruppe
  - von abstraktem Wurzelsystem, 1015
  - von kompakter Liegruppe, 946
- Weylkammer
  - dominante, 1027
  - einer Spiegelungsgruppe, 970
  - von Spiegelungsgruppe, 1017
- Wiener-Maß, 1300
- Windungszahl, 1378
- Winkel
  - spitzer, 992
  - stumpfer, 992
- Winkelgeschwindigkeit, 327
- Winkelkoordinaten, 1272
- winkeltreu, 1187
- Wirbeldichte, 426
- Wirtinger-Ableitung, 1354
- Wurzel
  - $q$ -te Wurzel, 151
  - duale, 1014
  - einfache, 1027
  - höchste, 1028
  - Quadratwurzel, 120

- von Wurzelsystem, 1012
  - zu Gitterspiegelung, 947
- Wurzeldatum, 949
  - duales, 949
- Wurzelkriterium
  - für Reihenkonvergenz, 151
- Wurzelsystem
  - abstraktes, 1012
  - euklidisches, 1014
  - nichtreduziertes, 1012
  - reduziertes, 1012
  - von kompakter Liegruppe, 949
- wurzlige Darstellung, 1001
- $A^\times$  invertierbare Elemente eines Monoids  $A$ , 68
- $\times$ 
  - kartesisches Produkt, 41
- $\boxtimes$ 
  - äußeres Produkt
    - von Funktionen, 699
    - Produkt- $\sigma$ -Algebra, 548
    - Produktmaß, 548
- $\mathfrak{X}(V)$  Charakterraum, 672
- $\otimes$  Produkt- $\sigma$ -Algebra, 548
- $Y_{l,m}$  Kugelfunktionen, 820
- Young'sche Ungleichung, 190, 641
- $\mathbb{Z}$  ganze Zahlen, 37
- $\mathcal{Z}(X)$  Menge der Zusammenhangskomponenten von  $X$ , 843
- $\zeta$ -Funktion
  - Riemann'sche, 1411
- Zählmaß, 514
- Zahl
  - ganze, 37
  - natürliche, 37
  - rationale, 37
  - reelle, 103
- Zeiteinheit
  - relativistische, 1258
- zentraler Grenzwertsatz, 692
- Zentralfeld, 1207
- Zentralisator
  - von Teilmenge, 936
- Zentrum
  - einer Liealgebra, 895
- Zerleger, in der Maßtheorie, 524
- Zetafunktion
  - Riemann'sche, 1411
- Zirkulation, 409
- zufälliges Element, 530
- Zufallsvariable, 513, 530, 1295
  - zusammengefaßte, 1297
- zulässig
  - Darstellung, 1138
- Zurückholen
  - von Differentialformen, 918
  - von Funktionen, 1442
- zusammenhängend
  - topologischer Raum, 418, 775
  - wegweise, 415
  - wegweise einfach, 419
- Zusammenhang
  - auf Hauptfaserbündel, 1251
  - in Hauptfaserbündel, 1147
  - in Vektorraumbündel, 1249
- Zusammenhangskomponente, 779
  - von  $GL(n; \mathbb{R})$ , 848
- zusammenziehbar
  - geschlossener Weg, 419
- Zustand
  - bei Markovkette, 1291
  - reiner, 1270
- Zweig des Logarithmus, 322, 1331
- zweitabzählbar
  - topologischer Raum, 531
- zweite Fundamentalform, 1239
- Zwischenwertsatz, 148
- zyklisch
  - Anordnung, 54
  - Vektor in Darstellung, 707