Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Oliver Straser

Topologie
SoSe 2014

6. Übungsblatt

Abgabe: Am Dienstag, den 17.6.2014 im Kasten Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 1: Seien X und Y topologische Räume:

i) Man zeige, daß eine stetige Abbildung $S^n \to X$ von einer Sphäre in einen topologischen Raum X genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich stetig auf das Innere der Sphäre fortsetzen läßt.

ii) Ist Y beliebig und X zusammenziehbar, so sind je zwei Abbildungen $f, g : Y \to X$ homotop.

iii) Ist X zusammenziehbar, zusammenhängend und Y wegzusammenhängend, so sind auch je zwei Abbildungen $X \to Y$ homotop.

4 Punkte

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X, $Y \in \mathcal{C}$ Objekte.

i) Gegeben Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, X)$, so daß $f \circ g$ und $g \circ f$ Isomorphismen sind, dann müssen f und g bereits selbst Isomorphismen sein.

ii) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus. Man zeige, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von f für jedes weitere Objekt $Z \in \mathcal{C}$ eine Bijektion $\mathcal{C}(Y, Z) \approx \mathcal{C}(X, Z)$ induziert. Man zeige dual, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachtschalten von f für jedes weitere Objekt Z eine Bijektion $\mathcal{C}(Z, X) \approx \mathcal{C}(Z, Y)$ induziert.

4 Punkte

Aufgabe 3: Man zeige den *Fundamentalsatz der Algebra* mit topologischen Methoden. Sie sollen also zeigen, daß jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle hat.
Anleitung: Zeigen Sie, ist $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynom vom Grad n ohne Nullstelle, so ist für alle $\tau \geq 0$ die induzierte Abbildung $P_\tau : S^1 \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto P(\tau z)$ homotop zur konstanten Abbildung. Zeigen Sie außerdem, daß P_τ homotop zur Abbildung $S^1 \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto z^n$ ist. Dies führt dann offensichtlich zu einem Widerspruch.

4 Punkte

Aufgabe 4: Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

i) Die Fundamentalgruppe des Komplements einer Gerade im $\mathbb{R}^3$ isomorph ist zu $\mathbb{Z}$.

ii) Die Fundamentalgruppe des Raums, der entsteht, wenn man aus dem $\mathbb{R}^3$ die z-Achse sowie den Einheitskreis in der xy-Ebene herausnimmt, isomorph ist zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

4 Punkte