

Lie-Algebren

Wolfgang Soergel

9. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Theorie von Lie-Algebren	4
1.1	Definitionen und Beispiele	4
1.2	Darstellungen von Lie-Algebren	8
1.3	Nilpotente und auflösbare Lie-Algebren	14
1.4	Das Auflösbarkeitskriterium von Cartan	19
2	Komplexe halbeinfache Lie-Algebren	24
2.1	Definition und erste Eigenschaften	24
2.2	Der Satz von Weyl	26
2.3	Tensorprodukte von Darstellungen	29
2.4	Jordan-Zerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren	31
2.5	Wurzelraumzerlegung	33
3	Spiegelungsgruppen	40
3.1	Endliche Spiegelungsgruppen	40
3.2	Alkovengeometrie	42
3.3	Affine Spiegelungsgruppen	46
3.4	Fundamentaltbereiche	50
3.5	Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe	52
3.6	Struktur affiner Spiegelungsgruppen	53
3.7	Klassifikation und euklidische Wurzelsysteme	55
4	Wurzelsysteme	60
4.1	Endliche Spiegelungsgruppen ohne Skalarprodukt	60
4.2	Wurzelsysteme	61
4.3	Basen von Wurzelsystemen	65
4.4	Wichtige Ergänzung für Weyl'sche Nennerformel	69
4.5	Klassifikation von Wurzelsystemen	70

5	Einfache endlichdimensionale Darstellungen	72
5.1	Klassifikation durch das höchste Gewicht	72
5.2	Die universelle Einhüllende Algebra	74
5.3	Filtrierungen und Graduierungen	80
5.4	Konstruktion von Moduln mit höchstem Gewicht	84
5.5	Die Weyl'schen Formeln	88
6	Mehr über Spiegelungsgruppen	100
6.1	Coxetergraphen und Klassifikation	100
6.2	Spiegelungsgruppen sind Coxetergruppen	103
6.3	Bruhat-Ordnung	105
6.4	Konvexgeometrie	107
7	Index	114

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten, insbesondere Catharina Stroppel, Olaf Schnürer.

1 Allgemeine Theorie von Lie-Algebren

1.1 Definitionen und Beispiele

Bemerkung 1.1.1. Wir wiederholen zunächst die Definition aus ??, wo auch die Motivation für das Studium dieser Struktur zu finden ist.

Definition 1.1.2. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper k ist ein k -Vektorraum \mathfrak{g} mitsamt einer k -bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer**

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) &\mapsto [x, y]\end{aligned}$$

derart, daß gilt:

Antisymmetrie: $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g};$

Jacobi-Identität: $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$

Definition 1.1.3. Unter einer k -**Algebra** versteht man ganz allgemein einen k -Vektorraum A mit einer k -bilinearen Abbildung $A \times A \rightarrow A$, der **Verknüpfung** oder **Multiplikation**.

Bemerkung 1.1.4. Eine Lie-Algebra ist ein spezieller Typ von Algebra, benannt nach dem Mathematiker Sophus Lie (1842–1899). Andere Typen von Algebren werden für uns auch eine wichtige Rolle spielen.

Definition 1.1.5. Sei A eine k -Algebra mit Verknüpfung

$$\begin{aligned}A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y\end{aligned}$$

Die Algebra A heißt **assoziativ** genau dann, wenn gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in A$. Sie heißt **unitär** genau dann, wenn es ein Element $1 \in A$ gibt mit $1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in A$. Sie heißt **kommutativ** genau dann, wenn gilt $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in A$.

Definition 1.1.6. Seien A, B zwei k -Algebren. Ein k -**Algebren-Homomorphismus** von A nach B ist eine k -lineare Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$ derart, daß gilt $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \forall x, y \in A$. Ist φ zusätzlich ein Isomorphismus von Vektorräumen, so heißt φ ein k -**Algebren-Isomorphismus**. Sind A und B unitär mit Eins-Elementen $1_A \in A$ und $1_B \in B$, so heißt ein Algebrenhomomorphismus $\phi : A \rightarrow B$ **unitär** genau dann, wenn gilt $\phi(1_A) = 1_B$. Wenn man von einem Algebrenhomomorphismus zwischen zwei unitären k -Algebren spricht, so meint man fast immer einen unitären Algebrenhomomorphismus und hat nur vergessen, das explizit dazuzusagen.

Bemerkung 1.1.7. Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ zwei Lie-Algebren. Ein **Lie-Algebren-Homomorphismus** $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ist also eine lineare Abbildung φ mit

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Bemerkung 1.1.8. Eine unitäre assoziative k -Algebra A trägt insbesondere sowohl die Struktur eines unitären Rings als auch die Struktur eines k -Vektorraums, und diese beiden Strukturen sind verträglich in einem Sinn, den die Definition präzisiert.

Beispiele 1.1.9. Der Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$ ist eine assoziative, kommutative und unitäre k -Algebra. Ist V ein k -Vektorraum, so ist sein Endomorphismenring $A = \text{End } V$ mit der Verknüpfung $(f, g) \mapsto f \circ g$ eine assoziative unitäre k -Algebra. Die quadratischen $n \times n$ -Matrizen mit der Matrix-Multiplikation bilden für jedes $n \geq 0$ eine assoziative unitäre k -Algebra $M(n \times n, k)$.

Bemerkung 1.1.10. Gegeben Algebren A_1, \dots, A_n definiert man ihr **Produkt** als die Algebra $A_1 \times \dots \times A_n$ mit der komponentenweisen Verknüpfung. Jedes Produkt von Lie-Algebren (bzw. assoziativen Algebren etc.) ist wieder eine Lie-Algebra (bzw. assoziativ etc.).

Beispiele 1.1.11 (Assoziative Algebren als Lie-Algebren). Ist A eine assoziative Algebra unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$, so wird A eine Lie-Algebra $L(A)$ unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ wie man leicht nachrechnet. Man nennt deshalb die Lie-Klammer auch oft den **Kommutator**. Faßt man $\text{End } V$ bzw. $M(n \times n, k)$ in dieser Weise als Lie-Algebren auf, so bezeichnet man sie meist mit $\mathfrak{gl}(V)$ bzw. $\mathfrak{gl}(n, k)$ für **general linear Lie algebra**.

Übung 1.1.12. Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra, so erhalten wir einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ mittels der Vorschrift $(\text{ad } x)(y) = [x, y]$.

Definition 1.1.13. Sei A eine Algebra mit Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Eine **Unteralgebra** ist ein Untervektorraum $U \subset A$ derart, daß gilt $x, y \in U \Rightarrow x \cdot y \in U$.

Bemerkung 1.1.14. Eine Unteralgebra einer (assoziativen, kommutativen oder Lie-) Algebra ist mit der induzierten Verknüpfung selbst eine (assoziative, kommutative oder Lie-) Algebra. Jeder Schnitt von Unteralgebren ist selbst eine Unteralgebra.

Bemerkung 1.1.15. Bei assoziativen unitären Algebren benutzt man meist eine etwas andere Konvention und fordert von einer Unteralgebra zusätzlich, daß sie **unitär** ist, d.h. die Eins der großen Algebra enthält. Wann der Begriff der Unteralgebra in welcher Bedeutung gemeint ist, muß aus dem Kontext erschlossen werden.

Beispiel 1.1.16. $k[X] \subset k[X, Y]$ ist eine (unitäre) Unteralgebra.

Beispiel 1.1.17. Gegeben eine quadratische Matrix A bezeichne $\text{tr } A \in k$ ihre Spur (für englisch und französisch trace). Man definiert die **spezielle lineare Lie-Algebra** als

$$\mathfrak{sl}(n, k) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, k) \mid \text{tr } A = 0\}$$

Dieser Raum ist in der Tat eine Unteralgebra, genauer eine Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{gl}(n, k)$, die Formel $\text{tr}[x, y] = \text{tr}(xy - yx) = 0$ gilt sogar für alle $x, y \in \mathfrak{gl}(n, k)$. Natürlich ist unser $\mathfrak{sl}(n, k)$ hier keine Unteralgebra der assoziativen Algebra $M(n \times n, k)$.

Beispiel 1.1.18. Sind V, W ein Vektorräume und ist $f : V \times V \rightarrow W$ eine bilineare Abbildung, so wird

$$\mathfrak{o}(V, f) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(xu, v) + f(u, xv) = 0 \quad \forall u, v \in V\}$$

eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, wie man leicht nachrechnet.

Beispiel 1.1.19. Ist speziell $V = k^{2n}$ und $f : V \times V \rightarrow k$ die Bilinearform, die gegeben wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ mit I der $n \times n$ -Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V, f)$ mit $\mathfrak{sp}(2n, k)$ und nennt das die **symplektische Lie-Algebra**. Jede nichtausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum hat in einer geeigneten Basis die obige Matrix, [?, ?].

Beispiel 1.1.20. Ist $V = k^n$ und $f : V \times V \rightarrow k$ die Bilinearform gegeben durch die Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V, f)$ mit $\mathfrak{so}(n, k)$ und nennt das die **orthogonale Lie-Algebra**. Diese Lie-Algebra besteht also genau aus allen schiefsymmetrischen Matrizen. Über \mathbb{C} oder allgemeiner einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer von 2 verschiedenen Charakteristik hat jede nichtentartete symmetrische Bilinearform in einer geeigneten Basis diese Matrix, siehe [?]. Für spätere Rechnungen ist jedoch eine andere Darstellung bequemer, in der die Bilinearform je nachdem ob n gerade oder ungerade ist gegeben wird durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.21. Die oberen Dreiecksmatrizen, die echten oberen Dreiecksmatrizen, und die Diagonalmatrizen bilden Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n, k)$.

Beispiel 1.1.22. Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt **abelsch** genau dann, wenn alle ihre Kommutatoren verschwinden, in Formeln $[x, y] = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Jeder Vektorraum \mathfrak{g} wird so eine Lie-Algebra. Die Diagonalmatrizen bilden eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n, k)$.

Definition 1.1.23. Wir nennen eine Lie-Algebra **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht null ist und jeder von Null verschiedene Lie-Algebren-Homomorphismus von besagter Lie-Algebra in eine weitere Lie-Algebra injektiv ist. Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt **einfach** genau dann, wenn sie irreduzibel ist aber nicht abelsch.

Übung 1.1.24. Man finde für die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ eine Basis e, h, f derart, daß gilt $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ und $[e, f] = h$. Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ einfach ist.

Bemerkung 1.1.25. Eine Lie-Algebra ist in anderen Worten irreduzibel genau dann, wenn sie keinen “echten Quotienten” im Sinne von 1.3.5 besitzt, und jede irreduzible Lie-Algebra ist entweder einfach oder aber abelsch und eindimensional. Die Terminologie “einfache Lie-Algebra” ist allgemein üblich, die Terminologie “irreduzible Lie-Algebra” jedoch nicht. Ein wichtiges Ziel der Vorlesung ist die gleich folgende Klassifikation der einfachen endlichdimensionalen komplexen Lie-Algebren.

Satz 1.1.26 (Killing-Klassifikation). *Jede einfache endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra ist isomorph zu genau einer der Lie-Algebren*

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) & n \geq 1 \\ \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) & n \geq 2 \\ \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) & n \geq 3 \\ \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) & n \geq 4 \end{array}$$

oder einer der fünf Ausnahme-Algebren $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$, die nicht so leicht explizit anzugeben sind. Umgekehrt sind auch alle hier aufgezählten Lie-Algebren einfach.

Bemerkung 1.1.27. Es wird erst später klar werden, warum wir die Lie-Algebren $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ in zwei Serien für gerades und ungerades n aufteilen. Die Lie-Algebren der ersten vier Serien heißen **klassisch**, die anderen fünf die **Ausnahme-Algebren**. Die Einschränkungen an n haben als Grund die sogenannten **Ausnahme-Isomorphismen** $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{so}(2) \cong \mathbb{C}$ ist abelsch, $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ ist auch nicht einfach und $\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{sl}(4)$.

Bemerkung 1.1.28. Eine endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra, die isomorph ist zu einem endlichen Produkt einfacher Lie-Algebren heißt eine **halb-einfache komplexe Lie-Algebra**. Das Bilden der komplexifizierten Lie-

Algebra liefert eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zusammenhängende} \\ \text{kompakte Lie-Gruppen} \\ \text{mit trivialem Zentrum,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{halbeinfache} \\ \text{komplexe Lie-Algebren,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

$$K \quad \mapsto \quad (\text{Lie } K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Insbesondere ist die Killing-Klassifikation ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppen. Sie ist im Übrigen auch ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der einfachen endlichen Gruppen.

Bemerkung 1.1.29. Ist ganz allgemein F die Matrix einer Bilinearform f auf k^n , also $f(x, y) = x^t F y$ wenn wir Elemente von k^n als Spaltenvektoren auffassen, so liegt $M \in \mathfrak{gl}(n, k)$ in $\mathfrak{so}(k^n, f)$ genau dann, wenn gilt $(Mx)^t F y = -x^t F(My)$ für alle x, y in k^n alias $M^t F = -FM$.

Beispiel 1.1.30. Wir bestimmen die Dimension von $\mathfrak{sp}(2n, k)$. Hier nehmen wir $F = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ in 1.1.29 und eine Matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ liegt folglich in $\mathfrak{sp}(2n, k)$ genau dann, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} C^t & -A^t \\ D^t & -B^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix},$$

also $C^t = C$, $B^t = B$ und $-A^t = D$. Die Dimension der symplektischen Lie-Algebra ist damit $\dim_k \mathfrak{sp}(2n, k) = n(n+1) + n^2 = 2n^2 + n$.

Übung 1.1.31. Eine **Derivation** δ einer Algebra A ist eine lineare Abbildung $\delta : A \rightarrow A$ derart, daß gilt $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b) \quad \forall a, b \in A$. Man zeige, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unter algebra von $\mathfrak{gl}(A)$ bilden.

Übung 1.1.32. Man zeige, daß es bis auf Isomorphismus genau zwei zweidimensionale komplexe Lie-Algebren gibt.

1.2 Darstellungen von Lie-Algebren

Bemerkung 1.2.1. In diesem Abschnitt werden grundlegende Begriffsbildungen noch einmal wiederholt, die wir bereits in ?? im Zusammenhang mit Matrix-Liegruppen eingeführt und motiviert hatten.

Definition 1.2.2. Sei k ein Körper. Eine **Darstellung** einer Liealgebra \mathfrak{g} über k ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k -Vektorraum V und einem Homomorphismus von Liealgebren $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Bemerkung 1.2.3. Gegeben eine Darstellung einer Liealgebra schreiben wir statt $(\rho(x))(v)$ meist xv und geben in dieser Notation noch eine Variante der obigen Definition. Gegeben Vektorräume U, V, W können wir ja ganz allgemein die Menge aller linearen Abbildungen $U \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ in offensichtlicher Weise identifizieren mit der Menge aller bilinearen Abbildungen $U \times V \rightarrow W$. Insbesondere entspricht jede lineare Abbildung $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ eindeutig einer bilinearen Abbildung $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$. Man prüft nun leicht, daß hier ρ eine Darstellung der Liealgebra \mathfrak{g} ist genau dann, wenn für die zugehörige Abbildung $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$, $(x, v) \mapsto (\rho(x))(v)$ in der abkürzenden Schreibweise $(\rho(x))(v) = xv$ gilt

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ mit dieser Eigenschaft nennen wir auch eine **Operation** der Liealgebra \mathfrak{g} auf dem Vektorraum V . Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und $x(yv)$ mit xyv abkürzen.

Übung 1.2.4. Sei V ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht V zu einer Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$, der **Standarddarstellung** von $\mathfrak{gl}(V)$. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist sie das Differential der offensichtlichen Darstellung der Matrix-Liegruppe $G = \text{GL}(V)$ durch Automorphismen von V .

Beispiel 1.2.5. Sei \mathfrak{g} eine Liealgebra. Die triviale Operation $xv = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ macht jeden Vektorraum V zu einer Darstellung von \mathfrak{g} . Den Grundkörper k versehen mit der trivialen Operation nennt man die **triviale Darstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra.

Definition 1.2.6. Für eine Darstellung V einer Liealgebra \mathfrak{g} setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V \mid xv = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen die Elemente von $V^{\mathfrak{g}}$ die **\mathfrak{g} -invarianten Vektoren** von V .

Definition 1.2.7. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ zwischen zwei Darstellungen einer Liealgebra \mathfrak{g} heißt ein **Homomorphismus von Darstellungen** genau dann, wenn gilt $\varphi(xv) = x\varphi(v) \quad \forall v \in V, x \in \mathfrak{g}$. Wir notieren

die Menge aller solchen Homomorphismen $\text{Mod}^{\mathfrak{g}}(V, W)$ oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,

$$\text{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W)$$

Zwei Darstellungen heißen **isomorph** genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Lemma 1.2.8. *Sind V, W Darstellungen einer Liealgebra \mathfrak{g} über einem Körper k , so wird der Homomorphismenraum $\text{Hom}_k(V, W)$ eine Darstellung von \mathfrak{g} durch die Vorschrift $(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V$ und $f \in \text{Hom}_k(V, W)$, und mit dieser Operation von \mathfrak{g} auf dem Homomorphismenraum gilt*

$$\text{Mod}_k^{\mathfrak{g}}(V, W) = \text{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$$

Beweis. Die erste Behauptung rechnet man stur nach, bei der Zweiten sind beide Seiten $\{f \in \text{Hom}_k(V, W) \mid f(xv) = xf(v) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V\}$. \square

Definition 1.2.9. Ein Untervektorraum U einer Darstellung V einer Liealgebra \mathfrak{g} heißt eine **Unterdarstellung** genau dann wenn gilt $xv \in U \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in U$. Wir sagen in diesem Zusammenhang auch, U sei **stabil** unter \mathfrak{g} . Eine von V verschiedene Unterdarstellung $U \subsetneq V$ heißt eine **echte Unterdarstellung** von V .

Bemerkung 1.2.10. Gegeben eine Darstellung V sind natürlich ganz V und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist $\varphi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild einer Unterdarstellung von V eine Unterdarstellung von W und das Urbild einer Unterdarstellung von W eine Unterdarstellung von V . Insbesondere ist $\ker \varphi$ eine Unterdarstellung von V und $\text{im } \varphi$ eine Unterdarstellung von W .

Definition 1.2.11. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

Satz 1.2.12 (Einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; k)$). *Sei k ein Körper der Charakteristik Null.*

1. *Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$.*
2. *Ist $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2; k)$ mit $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so zerfällt jede einfache Darstellung $L = L(m)$ der Dimension $m+1$ unter \tilde{h} in eindimensionale Eigenräume*

$$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \dots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

zu den Eigenwerten $m, m-2, \dots, 2-m, -m$ und aus $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$ folgt $\tilde{f} : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$ sowie $\tilde{e} : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$.

Bemerkung 1.2.13. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung k , die Standarddarstellung k^2 und die ‘‘adjungierte Darstellung’’, die wir in ?? eingeführt haben. In positiver Charakteristik sind die Verhältnisse komplizierter.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k und überlassen die Verallgemeinerung auf beliebige Grundkörper der Charakteristik Null dem Leser. Wir müssen (1) zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung konstruieren und (2) zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben endlichen Dimension isomorph sind. Wir beginnen mit (2). Die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ hat die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Sei nun $\rho : \mathfrak{sl}(2; k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung. Bezeichne $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$ den Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert $\mu \in k$. So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2}$$

denn aus $hv = \mu v$ folgt $hev = ehv + [h, e]v = e\mu v + 2ev = (\mu + 2)ev$ und der zweite Fall folgt ähnlich aus $[h, f] = -2f$. Ist V endlichdimensional und $V \neq 0$, so gibt es sicher $\lambda \in k$ mit $V_\lambda \neq 0$ aber $V_{\lambda+2} = 0$. Für $v \in V_\lambda$ gilt dann $ev = 0$ und $hv = \lambda v$. Man prüft per Induktion, daß folgt

$$\begin{aligned} hf^i v &= (\lambda - 2i)f^i v && \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v &= i(\lambda - i + 1)f^{i-1}v && \text{für alle } i \geq 1. \end{aligned}$$

Insbesondere ist der von den $f^i v$ mit $i \geq 0$ aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist V zusätzlich einfach und $v \neq 0$, so müssen die $f^i v$ demnach ganz V aufspannen. Gilt $f^i v \neq 0$, so sind $v, fv, \dots, f^i v$ Eigenvektoren von h zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir V endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich $d \geq 1$ mit $f^d v = 0$. Wählen wir d kleinstmöglich, so ist $v, fv, \dots, f^{d-1}v$ eine Basis von V , also $d = \dim V$. Weiter folgt aus $f^d v = 0$ auch $0 = ef^d v = d(\lambda - d + 1)f^{d-1}v$ und mithin $\lambda = d - 1$, da wir ja $d \neq 0$ und $f^{d-1}v \neq 0$ vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; k)$ derselben endlichen Dimension d isomorph sind, da nämlich die Matrizen von $\rho(e)$, $\rho(f)$ und $\rho(h)$ in der Basis $v, fv, \dots, f^{d-1}v$ nur von d abhängen.

Um nun (1) die Existenz einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}(2; k)$ in jeder Dimension zu zeigen, brauchen wir nur zu prüfen, daß die im Eindeutigkeitsbeweis hergeleiteten Formeln in der Tat eine Darstellung liefern, d.h. daß für jedes d der Vektorraum mit der Basis v_0, v_1, \dots, v_{d-1} und der Operation gegeben durch $fv_i = v_{i+1}$ bzw. $fv_{d-1} = 0$, $ev_i = i(d-i)v_{i-1}$ bzw. $ev_0 = 0$ und $hv_i = (d-1-2i)v_i$ eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ ist. Diese Rechnung scheint mir jedoch unerfreulich und wenig nahrhaft. Etwas eleganter prüft man mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen leicht, daß die Abbildung $\rho : \mathfrak{sl}(2; k) \rightarrow \mathfrak{gl}(k[X, Y])$ gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}\rho(e) &= X\partial_y \\ \rho(f) &= Y\partial_x \\ \rho(h) &= X\partial_x - Y\partial_y\end{aligned}$$

eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ ist. Diese Darstellung ist nicht einfach, die Polynome von festem Totalgrad m bilden vielmehr eine Unterdarstellung $L(m) = k[X, Y]^m$ der Dimension $d = m + 1$ mit Basis $w_i = Y^i X^{m-i}$ für $i = 0, \dots, m$. In dieser Basis wird die Operation von $\mathfrak{sl}(2; k)$ auf $L(m)$ beschrieben durch die Formeln

$$\begin{aligned}ew_i &= iw_{i-1} \\ fw_i &= (m-i)w_{i+1} \\ hw_i &= (m-2i)w_i\end{aligned}$$

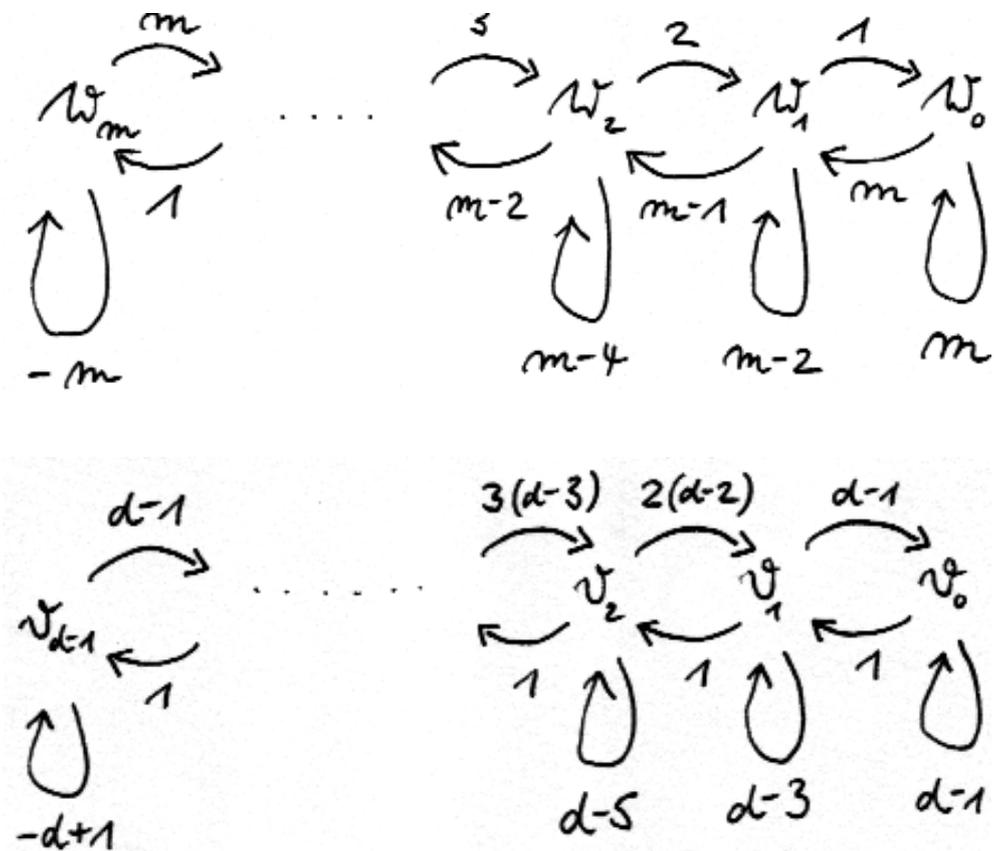
wo wir $w_{-1} = w_{m+1} = 0$ verstehen. Die Darstellungen $L(m)$ sind einfach, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung $0 \neq U \subset L(m)$ enthält notwendig einen Eigenvektor zu h , also eines der w_i , und daraus folgt sofort $U = L(m)$. Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Die expliziten Formeln gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von h . Setzen wir genauer $w_i = u_{m-2i}$, so erhalten wir für $L(m)$ eine Basis bestehend aus $u_m, u_{m-2}, \dots, u_{-m}$ und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned}eu_j &= ((m-j)/2)u_{j+2} \\ fu_j &= ((m+j)/2)u_{j-2} \\ hu_j &= ju_j\end{aligned}$$

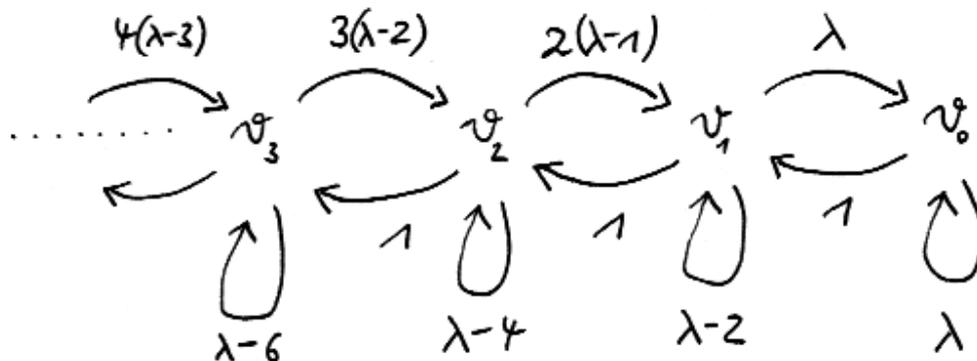
Der Rest des Satzes folgt mit [1.2.15](#). □

Übung 1.2.14. Ist V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2; k)$ und sind weder Null noch Eins Eigenwerte von $h = \text{diag}(1, -1)$, in Formeln $V_0 = V_1 = 0$, so folgt bereits $V = 0$.

Übung 1.2.15. Man zeige: Ist $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2; k)$ mit $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so gilt $[\tilde{e}, \tilde{f}] = c\tilde{h}$ für einen Skalar $c \neq 0$.



Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; k)$ in zwei Basen. Die nach rechts weisenden Pfeile stellen jeweils die Operation von e dar, die nach links weisenden Pfeile die Operation von f und die Schlaufen die Operation von h .



Die Operation auf dem von den $v_i = f^i v$ aufgespannten Teilraum, in derselben Weise zu interpretieren wie die obenstehenden Darstellungen.

1.3 Nilpotente und auflösbare Lie-Algebren

Satz 1.3.1 (über Lie-Algebren von nilpotenten Endomorphismen).

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem beliebigen Körper und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unteralgebra, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. So gilt:

1. Ist $V \neq 0$, so gibt es in V einen Vektor $v \neq 0$ mit $\mathfrak{g}v = 0$.
2. Es gibt in V eine Kette von Unterräumen $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_d = V$ mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \dots, d$.
3. Es gibt eine Basis von V , bezüglich derer die Matrizen von Elementen unserer Lie-Algebra \mathfrak{g} alle echte obere Dreiecksmatrizen sind.

Beweis. 1. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Ist $x \in \mathfrak{gl}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus von V , so ist auch $\text{ad } x \in \text{End}(\mathfrak{gl}(V))$ nilpotent. In der Tat ist $(\text{ad } x)^n(y)$ für alle $y \in \mathfrak{gl}(V)$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt $x^i y x^{n-i}$. Aus $x^n = 0$ folgt also $(\text{ad } x)^{2n} = 0$. Wir zeigen nun das Lemma durch Induktion über die Dimension von \mathfrak{g} . Sei also $\dim \mathfrak{g} \geq 1$ und sei $L \subset \mathfrak{g}$ eine maximale echte Unteralgebra $L \neq \mathfrak{g}$. Unter der adjungierten Operation von L auf \mathfrak{g} ist $L \subset \mathfrak{g}$ eine Unterdarstellung. Wir bilden die Quotientendarstellung \mathfrak{g}/L und erhalten so einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\overline{\text{ad}} : L \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}/L)$. Nach unserer Vorbemerkung besteht $\overline{\text{ad}}L$ aus nilpotenten Endomorphismen von \mathfrak{g}/L , es gibt also nach Induktionsannahme ein $\bar{x} \in \mathfrak{g}/L$, $\bar{x} \neq 0$ mit $(\overline{\text{ad}}L)(\bar{x}) = 0$, oder in anderen Worten $x \in \mathfrak{g} - L$ mit $[L, x] \subset L$. Das bedeutet wiederum, daß $L + kx$ eine Unteralgebra von \mathfrak{g} ist, die L echt umfaßt. Da L als maximal angenommen war, gilt notwendig $L + kx = \mathfrak{g}$. Nun betrachten wir $W = \{v \in V \mid Lv = 0\}$, benutzen die Induktionsannahme ein zweites Mal und folgern $W \neq 0$. Aus $[L, x] \subset L$ folgt weiter $xW \subset W$, und da x nach Annahme nilpotent ist, gibt es $v \in W$, $v \neq 0$ mit $xv = 0$ und damit $\mathfrak{g}v = 0$.

2. Sei allgemeiner $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung einer beliebigen Lie-Algebra durch nilpotente Endomorphismen. Wir zeigen durch Induktion über die Dimension von V , daß es eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_d = V$ von Unterräumen gibt mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \dots, d$. Im Fall $V = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\rho(\mathfrak{g})v = 0$. Wir setzen $V_1 = kv$ und betrachten die Quotientendarstellung $V' = V/V_1$ und die kanonische Projektion $\text{can} : V \twoheadrightarrow V/V_1$. Mit Induktion finden wir dort eine Kette $0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \dots \subset V'_{d-1} = V'$ wie gewünscht. Wir setzen $V_i = \text{can}^{-1}(V'_{i-1})$ und sind fertig.

3. Das ist nur eine Formulierung von 2 in Koordinaten. □

Definition 1.3.2. Sei A eine k -Algebra mit Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Ein Untervektorraum $I \subset A$ heißt ein **Ideal** von A genau dann, wenn gilt $A \cdot I \subset I$ und $I \cdot A \subset I$.

Bemerkung 1.3.3. Jedes Ideal ist eine Unteralgebra. Null und A sind stets Ideale von A . Die Summe von Idealen ist ein Ideal. Der Schnitt von Idealen ist ein Ideal. Das von einer Teilmenge $T \subset A$ **erzeugte Ideal** ist definiert als das kleinste Ideal, das T enthält, also als der Schnitt aller Ideale, die T enthalten. Die Ideale in einem Produkt $A_1 \times \dots \times A_n$ von Algebren sind genau die Produkte $I_1 \times \dots \times I_n$ von Idealen der Faktoren.

Bemerkung 1.3.4. Ein Ideal $I \subset A$ einer assoziativen unitären Algebra mit $I \neq A$ ist natürlich keine Unteralgebra im Sinne der bei der Behandlung von assoziativen unitären Algebren üblichen Konvention, nach der von einer Unteralgebra zusätzlich gefordert wird, daß sie das Einselement der großen Algebra enthält.

Lemma 1.3.5. 1. Ist A eine Algebra und $I \subset A$ ein Ideal, so gibt es auf dem Quotientenvektorraum A/I genau eine bilineare Verknüpfung derart, daß die kanonische Projektion $\text{can} : A \rightarrow A/I$ ein Homomorphismus von Algebren ist.

2. Der Kern eines Algebrenhomomorphismus ist stets ein Ideal.

3. Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Algebrenhomomorphismus und $I \subset A$ ein Ideal mit $\varphi(I) = 0$, so gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : A/I \rightarrow B$ mit $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$.

Beweis. Standard. □

Übung 1.3.6. Das Urbild eines Ideals unter einem Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal. Das Bild eines Ideal unter einem *surjektiven* Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal.

1.3.7. Die Ideale einer Lie-Algebra \mathfrak{g} sind genau die Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung. Eine Lie-Algebra ist also einfach genau dann, wenn sie nicht abelsch ist und ihre adjungierte Darstellung einfach ist.

1.3.8. Der Kern von $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$ und heißt das **Zentrum** von \mathfrak{g} . Natürlich ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ein Ideal von \mathfrak{g} .

Definition 1.3.9. Für zwei Untervektorräume U, V einer Lie-Algebra \mathfrak{g} bezeichne $[U, V] \subset \mathfrak{g}$ den Untervektorraum, der von allen Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U, y \in V$ aufgespannt wird.

Bemerkung 1.3.10. Diese Notation verletzt unsere allgemeinen Konventionen ??, nach denen $[U, V]$ eigentlich die Menge aller Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U, y \in V$ bezeichnen müßte. Für diese Menge brauchen wir jedoch in der Lie-theorie keine eigene Notation, weshalb wir die allgemein vereinbarte Schreibweise $\langle [U, V] \rangle_k$ zu $[U, V]$ abkürzen.

Bemerkung 1.3.11. Sind I, J Ideale einer Lie-Algebra, so ist auch $[I, J]$ ein Ideal, wie man nachrechnet unter Verwendung der Jacobi-Identität. Für jede Lie-Algebra \mathfrak{g} ist insbesondere $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ stets ein Ideal. Es heißt die **derivierte Lie-Algebra** und ist das kleinste Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ derart, daß der Quotient \mathfrak{g}/I abelsch ist.

Definition 1.3.12. Man definiert für jede Lie-Algebra \mathfrak{g} induktiv zwei Folgen von Idealen wie folgt:

1. die **absteigende Zentralreihe** $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$;
2. die **abgeleitete Reihe** $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$.

Definition 1.3.13. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra.

1. \mathfrak{g} heißt **nilpotent** genau dann, wenn gilt $\mathfrak{g}^i = 0$ für $i \gg 0$.
2. \mathfrak{g} heißt **auflösbar** genau dann, wenn gilt $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ für $i \gg 0$.

Bemerkung 1.3.14. Natürlich gilt $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$, jede nilpotente Lie-Algebra ist also auflösbar. Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden eine nilpotente Lie-Algebra, die oberen Dreiecksmatrizen eine auflösbare Lie-Algebra. Jede Unter-algebra und jeder Quotient einer nilpotenten bzw. auflösbaren Lie-Algebra ist nilpotent bzw. auflösbar. Ist genauer $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so erkennt man induktiv $\varphi(\mathfrak{g}^i) = (\varphi(\mathfrak{g}))^i$ und $\varphi(\mathfrak{g}^{(i)}) = (\varphi(\mathfrak{g}))^{(i)}$ für alle i .

Bemerkung 1.3.15. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V ist jede Unter-algebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht, bereits nilpotent als Lie-Algebra, da sie sich nämlich nach 1.3.1 identifizieren läßt mit einer Unter-algebra der Lie-Algebra der echten oberen $(d \times d)$ -Dreiecksmatrizen für $d = \dim V$.

Bemerkung 1.3.16. Der Begriff “auflösbar” kommt her von einem analogen Begriff für Gruppen, der hinwiederum seinen Ursprung in der Galoistheorie hat, genauer in der Frage nach der Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen durch “Ausdrücke in höheren Wurzeln”.

Definition 1.3.17. Ein Element x einer Lie-Algebra heißt **ad-nilpotent** genau dann, wenn $\text{ad } x$ als Endomorphismus unserer Lie-Algebra nilpotent ist.

Satz 1.3.18 (von Engel). *Eine endlichdimensionale Lie-Algebra ist nilpotent genau dann, wenn jedes ihrer Elemente ad-nilpotent ist.*

Beweis. \Rightarrow bleibt dem Leser überlassen. Wir zeigen \Leftarrow . Bezeichne \mathfrak{g} unsere Lie-Algebra. 1.3.13 sagt uns schon mal, daß $\text{ad } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ eine nilpotente Lie-Algebra ist. Dann folgern wir $0 = (\text{ad } \mathfrak{g})^i = \text{ad}(\mathfrak{g}^i) \Rightarrow \mathfrak{g}^i \subset \ker(\text{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \Rightarrow \mathfrak{g}^{i+1} = 0. \quad \square$

Übung 1.3.19. Sei A eine assoziative Algebra. Man zeige für alle $x, y \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ die Formel $(\text{ad } x)^n(y) = \sum_i \binom{n}{i} (-1)^{n-i} x^i y x^{n-i}$.

Übung 1.3.20. (1) Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ von Lie-Algebren ist \mathfrak{g} auflösbar genau dann, wenn $\ker \varphi$ und $\text{im } \varphi$ auflösbar sind. (2) Sind I, J zwei auflösbare Ideale in einer Lie-Algebra \mathfrak{g} , so ist auch ihre Summe $I + J \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal. Man betrachte dazu zum Beispiel die Surjektion $I + J \rightarrow (I + J)/J$. (3) Ist \mathfrak{g} eine endlichdimensionale Lie-Algebra, so gibt es in \mathfrak{g} ein größtes auflösbares Ideal, das **Radikal** $\text{rad } \mathfrak{g}$ von \mathfrak{g} .

Übung 1.3.21. Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, k)$ einfach ist. (Hinweis: Besteht ein Ideal von $\mathfrak{gl}(n, k)$ nicht nur aus Diagonalmatrizen, so umfaßt es $\mathfrak{sl}(n, k)$. In der Tat muß es sicher ein E_{ij} mit $i \neq j$ enthalten, wie man erkennt durch Anwenden der $\text{ad}(E_{kk})$. Dann enthält es auch $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$ und dann alle $E_{ik} = [E_{ii} - E_{jj}, E_{ik}]$ für $k \neq i, j$ sowie alle E_{kj} für $k \neq i, j$. Dann enthält es aber in derselben Weise auch alle E_{kl} für $k \neq l$ und alle $E_{kk} - E_{ll}$.)

Satz 1.3.22 (von Lie, abstrakte Form). *Jede einfache endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Liealgebra ist eindimensional.*

Satz 1.3.23 (von Lie, konkrete Form). *Sei V ein von Null verschiedener endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine auflösbare Unter algebra. So gibt es einen simultanen Eigenvektor v für alle Endomorphismen aus \mathfrak{g} , in Formeln gibt es also ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $\mathfrak{g}v \subset \mathbb{C}v$.*

Bemerkung 1.3.24. Beide Sätze gelten mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null. In von Null verschiedener Charakteristik sind sie jedoch im allgemeinen falsch. Zum Beispiel ist die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2)$ in Charakteristik zwei auflösbar, ja sogar nilpotent, und dennoch ist ihre Standarddarstellung k^2 einfach.

Beweis. Die beiden Sätze sind offensichtlich äquivalent. Wir zeigen hier die konkrete Form und führen den Beweis durch Induktion über $\dim \mathfrak{g}$. Der Fall $\dim \mathfrak{g} = 0$ ist klar. Sei also $\dim \mathfrak{g} > 0$. Dann gibt es in \mathfrak{g} ein Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ der Kodimension 1: In der Tat ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ eine abelsche Lie-Algebra, jeder Teilraum darin ist also ein Ideal. Aus $\dim \mathfrak{g} > 0$ und \mathfrak{g} auflösbar folgt aber

$\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, folglich gibt es in $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ einen Teilraum der Kodimension 1 und das Urbild in \mathfrak{g} eines solchen Teilraums ist dann unser gesuchtes Ideal I . Nach Induktionsnahme finden wir $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $Iv \subset \mathbb{C}v$. Man sieht leicht, daß die Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $xv = \lambda(x)v$ linear sein muß. Wir betrachten den zugehörigen simultanen Eigenraum $V_\lambda = \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \quad \forall x \in I\}$, der v enthält und deshalb von Null verschieden ist. Nach dem anschließenden allgemeinen Lemma 1.3.23 gilt $\mathfrak{g}V_\lambda \subset V_\lambda$. Jetzt wählen wir $y \in \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = I + \mathbb{C}y$ und jeder Eigenvektor v von y in V_λ muß dann simultaner Eigenvektor für alle Endomorphismen aus \mathfrak{g} sein. \square

Lemma 1.3.25. *Sei V eine endlichdimensionale Darstellung einer komplexen Lie-Algebra \mathfrak{g} und sei $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. So ist für alle Linearformen $\lambda \in I^*$ der simultane Eigenraum $V_\lambda = \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \quad \forall x \in I\}$ eine Unterdarstellung.*

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß gilt $xyw = \lambda(x)(yw) \quad \forall x \in I, y \in \mathfrak{g}, w \in V_\lambda$. Sicher gilt stets

$$\begin{aligned} xyw &= yxw + [x, y]w \\ &= y(\lambda(x)w) + \lambda([x, y])w \\ &= \lambda(x)(yw) + \lambda([x, y])w \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen $\lambda([x, y]) = 0 \quad \forall x \in I, y \in \mathfrak{g}$. Gegeben $y \in \mathfrak{g}$ und $w \in V_\lambda$ nicht null sei dazu $n \geq 0$ die größte Zahl derart, daß die Vektoren $w, yw, y^2w, \dots, y^n w$ linear unabhängig sind. Sei W der von $w, yw, \dots, y^n w$ aufgespannte Teilraum von V . Sicher ist W invariant unter y . Außerdem ist W auch invariant unter I , genauer zeigt man durch Induktion über i , daß alle $W_i = \text{span}(w, yw, \dots, y^i w)$ unter I invariant sind, und noch genauer folgert man aus $xy^i w = y(xy^{i-1}w) + [x, y]y^{i-1}w$ für alle $x \in I$ induktiv

$$xy^i w \in y^i xw + W_{i-1}$$

Für alle $x \in I$ ist also die Matrix von $x : W \rightarrow W$ in der Basis der $y^i w$ eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einträgen $\lambda(x)$ auf der Diagonalen und hat folglich die Spur $\text{tr}(x|_W) = (\dim W)\lambda(x)$. Wenden wir diese Erkenntnis an auf $[x, y]$ und bemerken, daß die Spur des Kommutators von zwei linearen Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen Raums W stets verschwindet, so folgt $(\dim W)\lambda([x, y]) = \text{tr}([x, y]|_W) = 0$ und damit $\lambda([x, y]) = 0$ für alle $x \in I$. \square

Korollar 1.3.26. *Sei V eine endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Lie-Algebra \mathfrak{g} . So gilt:*

1. Es gibt in V eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_d = V$ von Unterdarstellungen mit $\dim V_i = i$.
2. Es gibt eine Basis von V , bezüglich derer die Matrizen von Elementen aus \mathfrak{g} alle obere Dreiecksmatrizen sind.

Beweis. Man argumentiert wie für die Aussagen 2 und 3 von 1.3.1. □

Korollar 1.3.27. Die derivierte Lie-Algebra einer endlichdimensionalen auflösbaren komplexen Lie-Algebra ist nilpotent.

Beweis. Sei \mathfrak{g} unsere auflösbare Lie-Algebra. Nach dem vorhergehenden Korollar besteht bezüglich einer geeigneten Basis von \mathfrak{g} die Unter algebra $\text{ad } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ aus oberen Dreiecksmatrizen, mithin besteht $[\text{ad } \mathfrak{g}, \text{ad } \mathfrak{g}] = \text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ aus echten oberen Dreiecksmatrizen und ist nilpotent. Da der Kern von $\text{ad} : [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ im Zentrum von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ liegt, ist damit auch $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ selbst nilpotent. □

1.4 Das Auflösbarkeitskriterium von Cartan

Satz 1.4.1 (Auflösbarkeitskriterium von Cartan). Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unter algebra. Genau dann ist \mathfrak{g} auflösbar, wenn gilt $\text{tr}(xy) = 0 \quad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung 1.4.2. Ist \mathfrak{g} auflösbar, so liegt es nach ?? bei geeigneter Basiswahl bereits in den oberen Dreiecksmatrizen. Das zeigt die eine Richtung. Der Beweis der anderen Richtung braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts vor 1.4.13 gegeben.

Lemma 1.4.3 (Jordan-Zerlegung). Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $x \in \text{End } V$ ein Endomorphismus von V . So gibt es genau eine Zerlegung $x = x_s + x_n$ mit x_s diagonalisierbar, x_n nilpotent und $x_s x_n = x_n x_s$.

Bemerkung 1.4.4. Der untere Index s bei x_s steht für “semisimple”, die deutsche Übersetzung dafür ist “halbeinfach”. Ein Endomorphismus a eines Vektorraums V über einem Körper k heißt ganz allgemein halbeinfach genau dann, wenn er über einem algebraischen Abschluß von k diagonalisierbar ist. In der Situation des Lemmas heißen x_s bzw. x_n der **halbeinfache** bzw. der **nilpotente Anteil** von x .

Beweis (Skizze). Man findet ein mögliches x_s durch die Vorschrift, daß sein Eigenraum zum Eigenwert λ genau der Hauptraum

$$\text{Hau}(x; \lambda) = \bigcup_{n \geq 0} \ker(x - \lambda)^n$$

von x zum Eigenwert λ sein soll. \square

Bemerkung 1.4.5. Hier lassen sich x_s und x_n sogar als Polynome in x ohne konstanten Term ausdrücken, d.h. es gibt $P, Q \in T\mathbb{C}[T]$ mit $x_s = P(x)$ und $x_n = Q(x)$. In der Tat, falls N so groß ist, daß gilt $\text{Hau}(x; \lambda) = \ker(x - \lambda)^N$ für alle λ , so erhält man ein mögliches P aus dem chinesischen Restsatz als simultane Lösung der Kongruenzen $P \equiv \lambda \pmod{(T - \lambda)^N}$ für alle Eigenwerte λ von x und für $\lambda = 0$, und ein mögliches Q ist dann $T - P(T)$. Ich mag jedoch die Argumentation mit diesen Polynomen nicht besonders und ziehe den expliziten Beweis der folgenden drei Aussagen vor, die die einzigen Konsequenzen sind, die wir im folgenden benötigen werden.

Lemma 1.4.6 (Funktorialität der Jordan-Zerlegung). *Sei gegeben ein kommutatives Diagramm endlichdimensionaler komplexer Vektorräume der Gestalt*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Sind $x = x_s + x_n$ und $y = y_s + y_n$ die Jordan-Zerlegungen von x und y , so kommutieren auch die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_s \downarrow & & \downarrow y_s \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_n \downarrow & & \downarrow y_n \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Beweis. Aus $f \circ x = y \circ f$ folgt $f(\text{Hau}(x; \lambda)) \subset \text{Hau}(y; \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. \square

Bemerkung 1.4.7. Stabilisiert speziell ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums einen vorgegebenen Teilraum, so stabilisieren nach 1.4.6 auch sein halbeinfacher und sein nilpotenter Anteil besagten Teilraum.

Lemma 1.4.8. *Gegeben ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum V und ein Endomorphismus $x : V \rightarrow V$ haben wir stets*

$$\text{im } x \supset \text{im } x_s$$

Beweis. Das Bild von x_s genau die Summe der Haupträume zu von Null verschiedenen Eigenwerten und das Bild von x umfaßt offensichtlich diese Summe. Alternativ erkennt man $\text{im } x \supset \text{im}(x_s^N)$ für hinreichend großes N durch Entwicklung von $x_s^N = (x - x_n)^N$ nach der binomischen Formel und Ausklammern von x , und die Behauptung folgt wegen $\text{im } x_s = \text{im } x_s^N$. \square

Lemma 1.4.9. *Ist $x = x_s + x_n$ die Jordan-Zerlegung von $x \in \text{End } V$, so ist $\text{ad } x = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$ die Jordan-Zerlegung von $\text{ad } x \in \text{End}(\mathfrak{gl}(V))$. In Formeln gilt also*

$$\text{ad}(x_s) = (\text{ad } x)_s \quad \text{und} \quad \text{ad}(x_n) = (\text{ad } x)_n$$

Beweis. In der Tat gilt $[\text{ad } x_s, \text{ad } x_n] = \text{ad}[x_s, x_n] = 0$, außerdem ist $\text{ad } x_n$ nilpotent nach dem Beginn des Beweises von 1.3.1, und wir müssen nur noch zeigen, daß $\text{ad } x_s$ diagonalisierbar ist. Aber identifizieren wir $\text{End } V$ mit einer Algebra von quadratischen Matrizen mittels einer Basis v_1, \dots, v_n aus Eigenvektoren von x_s , sagen wir $x_s v_i = \lambda_i v_i$, so werden die Standardmatrizen E_{ij} mit einer Eins in der i -ten Zeile und j -ten Spalte Eigenvektoren zu $\text{ad } x_s$, genauer gilt $(\text{ad } x_s)(E_{ij}) = (\lambda_j - \lambda_i)E_{ij}$. Folglich ist mit x_s auch $\text{ad } x_s$ diagonalisierbar. \square

Bemerkung 1.4.10. Der Beweis des Auflösbarkeitskriteriums beruht auf dem anschließenden technischen Lemma.

Lemma 1.4.11. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Seien gegeben zwei Teilräume seines Endomorphismenraums $\text{End } V \supset B \supset A$ und sei $T = \{x \in \text{End } V \mid (\text{ad } x)(B) \subset A\}$. Erfüllt ein $x \in T$ die Bedingung $\text{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in T$, so ist x nilpotent.*

Beweis. Sei $x = x_s + x_n$ die Jordan-Zerlegung von x . So ist $\text{ad } x = \text{ad } x_s + \text{ad } x_n$ die Jordan-Zerlegung von $\text{ad } x$ und aus $(\text{ad } x)(B) \subset A$ folgt mit 1.4.8 schon $(\text{ad } x_s)B \subset A$, als da heißt, alle Eigenräume von $(\text{ad } x_s) : B \rightarrow B$ zu von Null verschiedenen Eigenwerten liegen bereits in A .

Rest des Beweises im komplexen Fall. Wählen wir nun in V eine Basis aus Eigenvektoren von x_s und definieren $z \in \text{End } V$ durch die Bedingung, daß seine Matrix in dieser Basis komplex konjugiert ist zur Matrix von x_s , so haben wir $\text{Eig}(\text{ad } z; \lambda) = \text{Eig}(\text{ad } x_s; \bar{\lambda})$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und mithin auch $(\text{ad } z)(B) \subset A$. Aus $\text{tr}(xz) = 0$ folgt dann aber sofort $x_s = 0$. \square

Bemerkung 1.4.12. Dieser Beweis des Lemmas ist zwar schnell, aber er hinterläßt bei mir einen schalen Nachgeschmack, da er nicht für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k der Charakteristik Null funktioniert. Ich gebe deshalb noch eine Alternative.

Rest des Beweises im Allgemeinen. Sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V aus Eigenvektoren von x_s , sagen wir $x_s v_i = \lambda_i v_i$ für geeignete $\lambda_i \in k$. Sei $E \subset k$ der von den λ_i aufgespannte \mathbb{Q} -Untervektorraum. Es gilt zu zeigen $E = 0$. Sei

sonst $f : E \rightarrow \mathbb{Q}$ eine nicht-verschwindende \mathbb{Q} -lineare Abbildung. Wir betrachten den Endomorphismus z von V , der definiert wird durch $zv_i = f(\lambda_i)v_i$ für $i = 1, \dots, n$. Zunächst zeigen wir $z \in T$. Natürlich haben wir

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} z)(E_{ij}) &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))E_{ij} \\ &= f(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \end{aligned}$$

für alle i und j , also $\operatorname{Eig}(\operatorname{ad} z; \mu) = \bigoplus_{f(\lambda)=\mu} \operatorname{Eig}(\operatorname{ad} x_s; \lambda)$ und insbesondere $(\operatorname{ad} z)(B) \subset A$. Nun ist offensichtlich $\operatorname{tr}(xz) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i)$. Aus der Annahme $\operatorname{tr}(xz) = 0$ folgt mithin $f(\operatorname{tr}(xz)) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)^2 = 0$ und damit $f(\lambda_i) = 0 \quad \forall i$ im Widerspruch zu unserer Annahme $f \neq 0$. \square

Beweis von ??. Wir zeigen nun die schwierige Implikation aus dem Cartan'schen Auflösbarkeitskriterium. Es reicht zu zeigen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Mit 1.3.1 reicht es sogar zu zeigen, daß alle Elemente $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent sind als Endomorphismen von V . Nach Lemma 1.4.11 müssen wir dazu nur zeigen, daß gilt $\operatorname{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in \operatorname{End} V$ mit $[z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Schreiben wir aber $x = \sum [c_i, d_i]$, so ist

$$\operatorname{tr}(xz) = \sum \operatorname{tr}([c_i, d_i]z) = \sum \operatorname{tr}(c_i[d_i, z]) = 0$$

nach Annahme, da ja gilt $c_i \in \mathfrak{g}$ und $[d_i, z] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ für alle i . Hier haben wir verwendet, daß für drei Endomorphismen x, y, z eines endlichdimensionalen Vektorraums stets gilt $\operatorname{tr}(xyz) = \operatorname{tr}(zxy) = \operatorname{tr}(yzx)$, also $\operatorname{tr}([x, y]z) = \operatorname{tr}(x[y, z])$. \square

Definition 1.4.13. Sei \mathfrak{g} eine endlichdimensionale Lie-Algebra über einem Körper k . Die **Killingform** von \mathfrak{g} ist die Bilinearform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$ auf unserer Lie-Algebra, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\kappa(x, y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$$

Bemerkung 1.4.14. Sicher ist κ symmetrisch, $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$. Weiter gilt offensichtlich $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$. Letztere Eigenschaft ist so wichtig, daß sie einen eigenen Namen hat.

Definition 1.4.15. Eine Bilinearform $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$ auf einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt **invariant** genau dann, wenn gilt $b([x, y], z) = b(x, [y, z]) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung 1.4.16. Man nennt diese Eigenschaft manchmal auch die "Assoziativität" von b . Sie hat jedoch nur oberflächlich mit Assoziativität im üblichen Sinne zu tun, vielmehr werden wir später sehen, daß unsere Eigenschaft bedeutet, daß das Element $b \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^*$ invariant ist unter der natürlichen Operation der Lie-Algebra \mathfrak{g} auf diesem Raum.

Korollar 1.4.17 (Auflösbarkeitskriterium). *Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} über einem Körper der Charakteristik Null ist auflösbar genau dann, wenn in Bezug auf die Killing-Form gilt $\mathfrak{g} \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Beweis. Das Cartan-Kriterium ?? zeigt uns, daß unsere Bedingung gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von $\text{ad } \mathfrak{g}$, und die kurze exakte Sequenz $Z(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \text{ad } \mathfrak{g}$ zeigt dann, daß sie auch gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von \mathfrak{g} . \square

Übung 1.4.18. Die Killingform einer endlichdimensionalen nilpotenten Lie-Algebra ist Null.

2 Komplexe halbeinfache Lie-Algebren

2.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 2.1.1. Eine Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik Null heißt **halbeinfach** genau dann, wenn sie endlichdimensional ist und kein von Null verschiedenes abelsches Ideal besitzt.

Definition 2.1.2. Eine Lie-Algebra heißt **reduktiv** genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung in eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen zerfällt. In anderen Worten ist also eine Lie-Algebra reduktiv genau dann, sie als eine Summe von irreduziblen Idealen geschrieben werden kann.

Übung 2.1.3. Eine endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra ist halbeinfach genau dann, wenn sie kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal besitzt.

Bemerkung 2.1.4. Eine endlichdimensionale Lie-Algebra ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt. Das werden Sie als Übung 2.2.16 aus dem Satz von Weyl folgern.

Satz 2.1.5 (Charakterisierung halbeinfacher Lie-Algebren). *Für eine endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Lie-Algebra ist halbeinfach.*
2. *Unsere Lie-Algebra ist isomorph zu einem Produkt von einfachen Lie-Algebren.*
3. *Unsere Lie-Algebra ist die direkte Summe ihrer im Sinne von Lie-Algebren einfachen Ideale.*
4. *Unsere Lie-Algebra hat eine nicht ausgeartete Killingform, d.h. die Killingform induziert einen Isomorphismus unserer Lie-Algebra mit ihrem Dualraum.*

Bemerkung 2.1.6. Wir schicken dem Beweis eine Ergänzung zur Killingform voraus.

Lemma 2.1.7. *Die Killingform eines Ideals einer endlichdimensionalen Lie-Algebra stimmt stets überein mit der Einschränkung der Killingform der ganzen Lie-Algebra auf besagtes Ideal.*

Beweis. Ist \mathfrak{g} unsere Liealgebra und $I \subset \mathfrak{g}$ unser Ideal, so behauptet dies Lemma die Formel

$$\kappa_I = \kappa_{\mathfrak{g}}|_I$$

Sind ganz allgemein $I \subset \mathfrak{g}$ Vektorräume und ist $a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ eine lineare Abbildung mit $a(\mathfrak{g}) \subset I$, so gilt $\operatorname{tr}(a) = \operatorname{tr}(a|_I)$ für $a|_I$ die Einschränkung $a|_I : I \rightarrow I$ von a auf I . Das Lemma ergibt sich mit $a = (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)$ für $x, y \in I$. \square

Beweis von 2.1.5. $1 \Rightarrow 4$. Sei \mathfrak{g} eine beliebige komplexe endlichdimensionale Lie-Algebra. Das Radikal der Killingform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$ bezeichnen wir mit

$$\operatorname{rad} \kappa = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Da κ invariant ist, muß $\operatorname{rad} \kappa \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal sein. Nach der Definition verschwindet κ auf $\operatorname{rad} \kappa$. Mit 2.1.7 folgt, daß die Killingform von $\operatorname{rad} \kappa$ verschwindet, nach 1.4.17 ist damit $\operatorname{rad} \kappa$ auflösbar. Ist \mathfrak{g} halbeinfach, so folgt $\operatorname{rad} \kappa = 0$ und die Killingform ist nicht ausgeartet.

$4 \Rightarrow 1$. Ist \mathfrak{g} nicht halbeinfach, so gibt es in \mathfrak{g} ein abelsches Ideal $I \neq 0$. Es folgt $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))^2 = 0$ für $x \in \mathfrak{g}$, $y \in I$ und folglich ist $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ nilpotent, also $\kappa(x, y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, $y \in I$. Damit gilt $0 \neq I \subset \operatorname{rad} \kappa$, und κ ist entartet.

$1 \Rightarrow 3$. Sei $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. So ist auch $I^\perp = \{y \in \mathfrak{g} \mid \kappa(y, I) = 0\}$ ein Ideal, da die Killingform invariant ist. Auf dem Ideal $I \cap I^\perp$ verschwindet die Killingform, mithin ist dies Ideal auflösbar. Da \mathfrak{g} als halbeinfach angenommen war, folgt $I \cap I^\perp = 0$, also erst recht $[I, I^\perp] = 0$, und mit Dimensionsbetrachtungen folgt $I \oplus I^\perp = \mathfrak{g}$. Jedes Ideal von I bzw. I^\perp ist damit ein Ideal von \mathfrak{g} , also sind auch I und I^\perp halbeinfach. Mit Induktion sehen wir so, daß sich jede halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} schreiben läßt als $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \dots \oplus I_r$ wobei die I_ν einfache Ideale von \mathfrak{g} sind. Ist nun $I \subset \mathfrak{g}$ ein weiteres einfaches Ideal, so folgt $I = [I, \mathfrak{g}] = [I, I_1] \oplus \dots \oplus [I, I_r]$ und damit $I = [I, I_\nu] = I_\nu$ für ein ν .

$3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ bieten keine Schwierigkeiten. \square

Übung 2.1.8. Jedes Ideal einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist eine Summe von einfachen Idealen. Jeder Quotient einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist eine halbeinfache Lie-Algebra.

Übung 2.1.9. Jede halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ihre eigene derivierte Lie-Algebra, in Formeln $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Übung 2.1.10. Jede reductive Lie-Algebra läßt sich auf genau eine Weise zerlegen in die direkte Summe einer halbeinfachen Lie-Algebra und einer abelschen Lie-Algebra, nämlich als $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$ mit \mathfrak{z} dem Zentrum von \mathfrak{g} .

Beispiele 2.1.11. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = 0$ ist halbeinfach, da sie kein von Null verschiedenes abelsches Ideal hat und auch das leere Produkt ihrer einfachen Ideale ist. Eine von Null verschiedene abelsche Lie-Algebra ist jedoch nicht halbeinfach, sondern nur reductiv. Erste substanzielle Beispiele liefert 2.2.17.

2.2 Der Satz von Weyl

Bemerkung 2.2.1. Für Darstellungen V, W einer Lie-Algebra \mathfrak{g} bezeichnen wir mit $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ den Raum aller Homomorphismen von Darstellungen und mit $\text{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$ den Raum aller Endomorphismen der Darstellung V .

Lemma 2.2.2 (Lemma von Schur). *Die einzigen Endomorphismen einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung einer komplexen Lie-Algebra sind die Multiplikationen mit Skalaren. Ist \mathfrak{g} unsere Lie-Algebra und V unsere einfache Darstellung, so gilt demnach in Formeln*

$$\text{End}_{\mathfrak{g}} V = \mathbb{C} \text{id}_V$$

Beweis. Sei $\varphi \in \text{End} V$. Da eine einfache Darstellung per definitionem nicht Null ist, hat φ mindestens einen Eigenwert λ . Aus $\varphi \in \text{End}_{\mathfrak{g}} V$ folgt zusätzlich, daß der zugehörige Eigenraum V_{λ} eine Unterdarstellung von V ist. Falls V einfach ist, folgt weiter $V_{\lambda} = V$ und damit erhalten wir dann wie gewünscht $\varphi = \lambda \text{id}$. \square

Bemerkung 2.2.3. Das Lemma gilt auch, wenn wir statt $\dim V < \infty$ voraussetzen, daß V abzählbare Dimension hat. Um das zu sehen beachte man, daß dann $E = \text{End}_{\mathfrak{g}} V$ ein Schiefkörper abzählbarer Dimension über \mathbb{C} ist. Der einzige derartige Schiefkörper ist aber \mathbb{C} selber, denn gäbe es $\varphi \in E \setminus \mathbb{C}$, so könnte φ nicht algebraisch sein über \mathbb{C} , also hätten wir eine Einbettung $\mathbb{C}(X) \hookrightarrow E$, $X \mapsto \varphi$ des Körpers der gebrochen rationalen Funktionen über \mathbb{C} nach E . Da aber $\mathbb{C}(X)$ überabzählbare Dimension hat über \mathbb{C} , die $(X - \lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ sind nämlich linear unabhängig über \mathbb{C} , kann das nicht sein.

Bemerkung 2.2.4. Das Lemma gilt nicht, wenn wir \mathbb{C} durch \mathbb{R} ersetzen. Ein Gegenbeispiel ist die einfache Darstellung von $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ im reellen Vektorraum $V = \mathbb{C}$, bei der $\lambda \in \mathfrak{g}$ auf V operiert als die Multiplikation mit λi . Wir haben nämlich in diesem Fall $\text{End}_{\mathfrak{g}} V = \mathbb{C} \text{id} \neq \mathbb{R} \text{id}$.

Definition 2.2.5. Eine Darstellung heißt **halbeinfach** genau dann, wenn sie eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen ist, wenn also für besagte Darstellung V in Formeln gilt $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ mit V_i einfach. Die Nulldarstellung $V = 0$ ist insbesondere halbeinfach als die "leere Summe".

Bemerkung 2.2.6. Ganz genauso wie in ?? für Moduln über Ringen zeigt man, daß für eine Darstellung V gleichbedeutend sind: (1) V ist halbeinfach, (2) V ist eine (nicht notwendig direkte) Summe von einfachen Unterdarstellungen, und (3) jede Unterdarstellung von V besitzt ein Komplement. Ebenso zeigt man auch, daß jede Unterdarstellung und jeder Quotient einer halbeinfachen Darstellung halbeinfach sind.

Beispiel 2.2.7. Die Darstellung $\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$, $1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ der abelschen Lie-Algebra \mathbb{C} ist nicht halbeinfach. Ganz allgemein ist für einen k -Vektorraum V und $a \in \text{End}(V)$ die Darstellung $k \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, $1 \mapsto a$ der abelschen Lie-Algebra k halbeinfach genau dann, wenn a diagonalisierbar ist über \bar{k} , wenn also a halbeinfach ist im Sinne von 1.4.4.

Satz 2.2.8 (von Weyl). *Jede endlichdimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach.*

Bemerkung 2.2.9. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben.

Bemerkung 2.2.10. Sei \mathfrak{g} eine endlichdimensionale Lie-Algebra und $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$ eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Für jede Darstellung V von \mathfrak{g} definieren wir dann eine lineare Abbildung

$$C_b = C_b^V : V \rightarrow V$$

wie folgt: Wir wählen eine Basis x_1, \dots, x_n von \mathfrak{g} , bezeichnen mit x^1, \dots, x^n die bezüglich b duale Basis, charakterisiert durch $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$, und setzen

$$C_b(v) = \sum_{i=1}^n x_i x^i v$$

Die Abbildung C_b hängt nicht von der Wahl der Basis unserer Lie-Algebra \mathfrak{g} ab, aber das wird im Folgenden nicht verwendet und der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

Lemma 2.2.11. *Die Abbildung C_b vertauscht mit der Operation von \mathfrak{g} , in Formeln gilt also $C_b \in \text{End}_{\mathfrak{g}} V$.*

Beweis. Das kann man in Koordinaten nachrechnen wie folgt: Entwickeln wir für $y \in \mathfrak{g}$ die Kommutatoren mit Elementen unserer Basen in der Form $[x_i, y] = \sum a_{ij} x_j$ und $[y, x^j] = \sum b_{ji} x^i$, so folgt aus der Invarianz unserer Bilinearform $b([x_i, y], x^j) = b(x_i, [y, x^j])$ sofort $a_{ij} = b_{ji}$ und damit

$$\begin{aligned} yC_b(v) - C_b(yv) &= \sum [y, x_i] x^i v + \sum x_i [y, x^i] v \\ &= \sum -a_{ij} x_j x^i v + \sum b_{ij} x_i x^j v \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ein koordinatenfreier Beweis wird im nächsten Abschnitt gegeben. □

Bemerkung 2.2.12. Für $b = \kappa$ die Killingform einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} und V eine Darstellung von \mathfrak{g} heißt $C_\kappa : V \rightarrow V$ der **Casimir-Operator**.

Man zeige als Übung, daß der Casimir-Operator der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ in einer Basis e, h, f wie in 1.1.24 gegeben wird durch den Ausdruck $(ef + fe)/4 + h^2/8 = fe/2 + h(h + 2)/8$. Auf der $(n + 1)$ -dimensionalen einfachen Darstellung operiert er durch den Skalar $n(n + 2)/8$, wie man auf den extremen Gewichtsräumen in ?? leicht nachrechnet.

Lemma 2.2.13. 1. Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra, so ist $(x, y) \mapsto \text{tr}(xy)$ eine nichtausgeartete invariante symmetrische Bilinearform $b = b_V$ auf \mathfrak{g} .

2. Für die zugehörige Abbildung $C = C_b^V$ gilt $\text{tr } C = \dim \mathfrak{g}$.

Beweis. Sicher ist unsere Bilinearform symmetrisch und invariant, insbesondere ist ihr Radikal ein Ideal. Nach dem Cartan-Kriterium ist ihr Radikal sogar ein auflösbares Ideal in \mathfrak{g} , also Null. Teil 2 folgt sofort aus den Definitionen. \square

Lemma 2.2.14. Für jede endlichdimensionale Darstellung V einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} gilt $V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$.

Beweis. Durch Induktion über $\dim V$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V \neq V^{\mathfrak{g}}$. Betrachten wir den zu unserer Darstellung gehörigen Lie-Algebren-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, so ist also $\rho(\mathfrak{g}) \neq 0$. Wir betrachten nun die zur halbeinfachen Unteralgebra $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ gehörige Abbildung $C : V \rightarrow V$ wie in Lemma ???. Natürlich zerfällt V in eine direkte Summe von Haupträumen unter C , und da gilt $C \in \text{End}_{\mathfrak{g}} V$ sind alle Haupträume von C Unterdarstellungen. Hätte C mehr als einen Eigenwert auf V , so könnten wir V als direkte Summe von zwei Unterdarstellungen echt kleinerer Dimension schreiben und wären fertig mit Induktion. Wir dürfen also annehmen, daß C nur einen Eigenwert hat, und da gilt $\text{tr}(C) = \dim \rho(\mathfrak{g}) \neq 0$ nach Lemma ??, kann dieser Eigenwert nicht Null sein. Also gilt $V = CV$ und $V^{\mathfrak{g}} = 0$ und a fortiori $V = \mathfrak{g}V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$. \square

Beweis des Satzes von Weyl 2.2.8. Es gilt zu zeigen: Jede endlichdimensionale Darstellung V einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach. Wir kürzen $\text{Hom}_{\mathbb{C}} = \text{Hom}$ ab. Ist $U \subset V$ eine Unterdarstellung, so liefert die Restriktion von Abbildungen eine Surjektion von Darstellungen $\text{Hom}(V, U) \twoheadrightarrow \text{Hom}(U, U)$. Nach Lemma 2.2.14 induziert diese Surjektion eine Surjektion auf den invarianten Vektoren $\text{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \text{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}$. Für jedes Urbild $f \in \text{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}}$ von $\text{id}_U \in \text{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}$ gilt dann $V = U \oplus \ker f$. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. \square

Übung 2.2.15. Der Casimir-Operator einer halbeinfachen Lie-Algebra operiert als die Identität auf der adjungierten Darstellung.

Übung 2.2.16. Eine endlichdimensionale Lie-Algebra ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt.

Satz 2.2.17. *1. Besitzt eine komplexe Lie-Algebra eine treue einfache endlichdimensionale Darstellung, so ist unsere Lie-Algebra reduktiv und ihr Zentrum höchstens eindimensional.*

2. Operiert außerdem unsere Lie-Algebra auf besagter Darstellung nur durch Endomorphismen der Spur Null, so ist unsere Lie-Algebra halbeinfach.

Bemerkung 2.2.18. Folglich ist $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ reduktiv und $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ halbeinfach.

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung reduktiver Lie-Algebren aus 2.2.16. Sei \mathfrak{g} unsere Lie-Algebra und $I \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal. Nach dem Satz von Lie gibt es $v \in V, v \neq 0$ mit $Iv \subset \mathbb{C}v$. Natürlich finden wir $\lambda \in I^*$ mit $Xv = \lambda(X)v \quad \forall X \in I$. Nach 1.3.23 ist dann V_λ eine Unterdarstellung von V , und da sie nicht null ist, folgt $V = V_\lambda$. Das Bild eines auflösbaren Ideals $I \subset \mathfrak{g}$ unter einer einfachen Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} V$ in einem endlichdimensionalen Raum V liegt also stets in der Menge aller Vielfachen der Einheitsmatrix. Ist unsere Darstellung auch noch treu, so folgt $\dim I \leq 1$ und $[I, \mathfrak{g}] = 0$ und im Fall $\text{tr}_V \rho(I) = 0$ sogar $I = 0$. \square

Bemerkung 2.2.19. Wollen wir nur den zweiten Teil des Satzes zeigen, so können wir im Beweis sogar I abelsch annehmen und so ohne den Satz von Lie auskommen.

2.3 Tensorprodukte von Darstellungen

Lemma 2.3.1. *Seien V, W zwei Darstellungen einer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Durch die Vorschrift $x(v \otimes w) = xv \otimes w + v \otimes xw \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ wird $V \otimes W$ zu einer Darstellung von \mathfrak{g} , der sogenannten **Tensorprodukt-Darstellung**.*

Beweis. Stures Nachrechnen. \square

Übung 2.3.2. Sei V eine Darstellung einer Lie-Algebra \mathfrak{g} . So ist die Operation $\mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V, x \otimes v \mapsto xv$ ein Homomorphismus von Darstellungen. Weiter ist auch der Lie-Algebren-Homomorphismus $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k V$ ein Homomorphismus von Darstellungen, für die adjungierte Operation auf \mathfrak{g} und die durch ?? erklärte Operation auf $\text{End}_k V$.

Übung 2.3.3. Diejenigen Vektoren einer Darstellung einer Lie-Algebra \mathfrak{a} , die in einem endlichdimensionalen \mathfrak{a} -stabilen Teilraum liegen, heißen auch die **\mathfrak{a} -endlichen Vektoren** von V . Man zeige: Ist V eine Darstellung einer endlichdimensionalen Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so bilden die \mathfrak{a} -endlichen Vektoren von V einen \mathfrak{g} -stabilen Teilraum. Statt \mathfrak{g} endlichdimensional brauchen wir sogar schwächer nur annehmen, daß \mathfrak{g} aus \mathfrak{a} -endlichen Vektoren besteht für die adjungierte Darstellung.

Übung 2.3.4. Sind U, V, W Darstellungen einer Lie-Algebra \mathfrak{g} , so sind die kanonischen Abbildungen von Vektorräumen

$$\begin{aligned} \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(U \otimes V, W) \\ U \otimes (V \otimes W) &\xrightarrow{\sim} (U \otimes V) \otimes W \end{aligned}$$

Isomorphismen von Darstellungen. Nimmt man im ersten Isomorphismus auf beiden Seiten die \mathfrak{g} -Invarianten, so folgen die ‘‘Adjunktionsisomorphismen’’ $\text{Lin}^{\mathfrak{g}}(U, \text{Hom}(V, W)) \xrightarrow{\sim} \text{Lin}^{\mathfrak{g}}(U \otimes V, W)$. Aus diesen Isomorphismen folgert man die Verträglichkeit der Lie-Algebrenoperation mit vielen anderen kanonischen Abbildungen. Zum Beispiel sind für U, V, W, X Darstellungen einer Lie-Algebra \mathfrak{g} die kanonischen Abbildungen ‘‘Verknüpfen von Abbildungen’’ und ‘‘Tensorieren von Abbildungen’’

$$\begin{aligned} \text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(U, W) \\ \text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(W, X) &\rightarrow \text{Hom}(U \otimes W, V \otimes X) \end{aligned}$$

stets Homomorphismen von Darstellungen, vergleiche ??.

Koordinatenfreier Beweis zum Casimir-Operator. Wir können den Casimir-Operator C_b zu einer invarianten nicht ausgearteten Bilinearform b auf unserer Lie-Algebra schreiben als die Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen

$$V \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \otimes V \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$$

wo die einzelnen Abbildungen wie folgt erklärt sind: Die erste Abbildung wird induziert von $k \rightarrow \text{End}_k(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$, $1 \mapsto \text{id} \mapsto \sum x_i \otimes x_i^*$, falls x_1^*, \dots, x_n^* die duale Basis ist zu einer Basis x_1, \dots, x_n von \mathfrak{g} . Die zweite Abbildung wird induziert von der inversen Abbildung zu $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$, $y \mapsto b(\cdot, y)$, $x^i \mapsto x_i^*$. Da unsere Bilinearform invariant ist, muß diese Abbildung ein Homomorphismus von Darstellungen sein. Die dritte Abbildung entsteht durch zweimaliges Anwenden der Operation $\mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$, $x \otimes v \mapsto xv$. Als Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen muß dann auch C_b ein Homomorphismus von Darstellungen sein. \square

Übung 2.3.5. Man zeige, daß $V(m) \otimes V(n)$ und $\text{Hom}(V(m), V(n))$ als Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ isomorph sind zu

$$V(m+n) \oplus V(m+n-2) \oplus \dots \oplus V(|m-n|)$$

(Hinweis: Man betrachte die Dimensionen der h -Eigenräume.)

Übung 2.3.6. Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ein \mathfrak{g} -invarianter Tensor, so definiert Ω für beliebige Darstellungen M, N von \mathfrak{g} einen Endomorphismus $\Omega \in \text{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes N)$.

2.4 Jordan-Zerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren

Bemerkung 2.4.1. In diesem Abschnitt wird die Jordan-Zerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren eingeführt. Gilt es Verwechslungen zu vermeiden, so nennen wir sie die “absolute Jordan-Zerlegung” im Gegensatz zur “konkreten Jordan-Zerlegung” von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume, wie wir sie in 1.4.3 betrachtet hatten. Im Folgenden bezeichnet $x = x_s + x_n$ stets diese konkrete Jordan-Zerlegung von $x \in \text{End } V$.

Satz 2.4.2. *Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra.*

1. *Jedes $x \in \mathfrak{g}$ besitzt genau eine Zerlegung $x = s + n$ mit $\text{ad}(s)$ diagonalisierbar, $\text{ad}(n)$ nilpotent und $[s, n] = 0$. Diese Zerlegung nennen wir im folgenden die **absolute Jordan-Zerlegung** von x in \mathfrak{g} .*
2. *Ist $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung und $x = s + n$ die absolute Jordan-Zerlegung von x in \mathfrak{g} , so ist $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$ die konkrete Jordan-Zerlegung von $\rho(x)$ in $\text{End } V$. In Formeln gilt also $\rho(s) = \rho(x)_s$, $\rho(n) = \rho(x)_n$.*
3. *Ist $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von \mathfrak{g} in eine weitere halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g}' und $x = s + n$ die absolute Jordan-Zerlegung von x in \mathfrak{g} , so ist $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ die absolute Jordan-Zerlegung von $\phi(x)$ in \mathfrak{g}' .*

Bemerkung 2.4.3. Teil 2 des vorhergehenden Satzes besagt, daß unsere beiden Jordan-Zerlegungen in Zweifelsfällen übereinstimmen. Sobald der Satz bewiesen ist, dürfen wir es uns also erlauben, ohne weitere Spezifizierung einfach von der “Jordan-Zerlegung” zu reden.

Bemerkung 2.4.4. Dem eigentlichen Beweis des Satzes schicken wir zwei Lemmata voraus.

Lemma 2.4.5. *Jedes halbeinfache Ideal einer endlichdimensionalen komplexen Lie-Algebra besitzt ein Vektorraumkomplement, das auch ein Ideal ist.*

Bemerkung 2.4.6. Unter einem halbeinfachen Ideal einer Lie-Algebra verstehen wir ein Ideal, das als Lie-Algebra halbeinfach ist.

Beweis. Sei D unsere Lie-Algebra und $\mathfrak{g} \subset D$ unser halbeinfaches Ideal. Wir betrachten bezüglich der Killing-Form κ von D das orthogonale Komplement I von \mathfrak{g} , d.h. den Kern der Abbildung $D \rightarrow \mathfrak{g}^*, x \mapsto \kappa(x, \cdot)$. So ist $I \subset D$ ein Ideal und die Killing-Form von D verschwindet identisch auf $\mathfrak{g} \cap I$. Da $\mathfrak{g} \cap I$ ein Ideal von \mathfrak{g} ist, muß es nach 2.1.8 halbeinfach sein und mit 2.1.5 folgt $\mathfrak{g} \cap I = 0$. Dann erhalten wir jedoch mit Dimensionsbetrachtungen sofort $D = \mathfrak{g} \oplus I$. \square

Lemma 2.4.7. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Ist $x = x_s + x_n$ die konkrete Jordan-Zerlegung in $\text{End } V$ eines Elements $x \in \mathfrak{g}$, so gilt $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Wir betrachten in $\mathfrak{gl}(V)$ den Teilraum $D = \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Es gilt } [y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} \text{ und für jede } \mathfrak{g}\text{-Unterdarstellung } W \subset V \text{ haben wir } yW \subset W \text{ sowie } \text{tr}(y|_W) = 0\}$. Nach 1.4.9 und 1.4.7 folgt aus $y \in D$ schon $y_s, y_n \in D$. Es reicht also, $D = \mathfrak{g}$ zu zeigen. Offensichtlich ist D eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Wegen $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und da die Spur eines Kommutators stets verschwindet gilt $\mathfrak{g} \subset D$, und wegen der ersten Bedingung an Elemente von D ist $\mathfrak{g} \subset D$ sogar ein Ideal. Nach 2.4.5 finden wir dann ein Ideal $I \subset D$ mit $D = \mathfrak{g} \oplus I$ und insbesondere $[\mathfrak{g}, I] = 0$. Also operiert $y \in I$ auf jeder \mathfrak{g} -Unterdarstellung $W \subset V$ durch einen \mathfrak{g} -Endomorphismus. Für W einfach ist also $y|_W$ ein Skalar, und mit $\text{tr}(y|_W) = 0$ folgt $y|_W = 0$. Da V direkte Summe einfacher \mathfrak{g} -Unterdarstellungen ist, folgt weiter $y = 0$, mithin $I = 0$ und $D = \mathfrak{g}$. \square

Beweis von 2.4.2. 1. Man betrachte die konkrete Jordan-Zerlegung $\text{ad } x = (\text{ad } x)_s + (\text{ad } x)_n$ von $\text{ad } x$ in $\text{End } \mathfrak{g}$. Nach Lemma 2.4.7 angewandt auf $\text{ad } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ gibt es $s, n \in \mathfrak{g}$ mit $\text{ad } s = (\text{ad } x)_s$, $\text{ad } n = (\text{ad } x)_n$. Das liefert die Existenz einer absoluten Jordan-Zerlegung $x = s + n$. Ist andererseits $x = s + n$ eine absolute Jordan-Zerlegung von x in \mathfrak{g} , so ist notwendig $\text{ad } x = \text{ad } s + \text{ad } n$ die konkrete Jordan-Zerlegung von $\text{ad } x$ in $\text{End } \mathfrak{g}$. Das zeigt die Eindeutigkeit.

2. Sei $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung. Sicher kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \twoheadrightarrow & \rho(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \mathfrak{gl}(V) \\ \text{ad}_{\mathfrak{g}} x \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{ad}_{\mathfrak{gl}} \rho(x) \\ \mathfrak{g} & \twoheadrightarrow & \rho(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \mathfrak{gl}(V) \end{array}$$

mit $\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} \rho(x)$ als senkrechtem Pfeil in der Mitte. Nach 1.4.6 bleibt das Diagramm kommutativ, wenn wir von allen Vertikalen den halbeinfachen Anteil

nehmen im Sinne der konkreten Jordan-Zerlegung. Ebenso bleibt es natürlich kommutativ, wenn wir überall statt x seinen halbeinfachen Anteil s im Sinne der absoluten Jordan-Zerlegung einsetzen. Die beiden so entstehenden Diagramme haben per definitionem dieselbe linke Vertikale $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)_s = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} s$ und damit auch dieselbe mittlere Vertikale. Das liefert die erste Gleichung einer Gleichungskette

$$\operatorname{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} \rho(s) = (\operatorname{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} \rho(x))_s = \operatorname{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)_s)$$

deren zweite Gleichung durch Restriktion daraus folgt, daß ja der halbeinfache Anteil der linken Vertikale unseres Diagramms nach unseren allgemeinen Überlegungen in 1.4.9 gegeben wird durch $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}} \rho(x))_s = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}}(\rho(x)_s)$. Da $\operatorname{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} : \rho(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\rho(\mathfrak{g}))$ eine Injektion ist, folgt aus unserer Gleichungskette dann wie gewünscht $\rho(s) = \rho(x)_s$.

3. Sei $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von halbeinfachen Lie-Algebren und sei $x \in \mathfrak{g}$ gegeben mit Jordan-Zerlegung $x = s + n$. Betrachten wir die adjungierte Darstellung $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ von \mathfrak{g}' , so folgt aus 2 angewandt auf $\rho = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} \circ \phi$ schon $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} \phi(s)$ halbeinfach sowie $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} \phi(n)$ nilpotent. Die anderen Bedingungen $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ und $[\phi(s), \phi(n)] = 0$ für die Jordan-Zerlegung sind aber offensichtlich ebenfalls erfüllt. \square

Definition 2.4.8. Ein Element x einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt **ad-halbeinfach** bzw. **ad-nilpotent** genau dann, wenn $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End} \mathfrak{g}$ halbeinfach bzw. nilpotent ist. Bei halbeinfachen Lie-Algebren nennen wir diese Elemente auch oft kürzer nur **halbeinfach** bzw. **nilpotent**. Bei der Jordan-Zerlegung $x = s + n$ nennt man s bzw. n den **halbeinfachen Anteil** bzw. den **nilpotenten Anteil** von x .

Bemerkung 2.4.9. Wie man schon im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ sieht, sind “die meisten” Elemente einer halbeinfachen Lie-Algebra halbeinfach. Die nilpotenten Elemente ihrerseits bilden eine abgeschlossene Teilmenge hoher Kodimension, den sogenannten **nilpotenten Kegel**. Wir werden die äußerst interessante Geometrie des nilpotenten Kegels später noch ausführlich studieren.

2.5 Wurzelraumzerlegung

Lemma 2.5.1. *Sei V ein Vektorraum und $T \subset \operatorname{End} V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Abbildungen besteht. So besitzt V unter T eine “simultane Eigenraumzerlegung”*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_{\lambda}$$

in die “simultanen Eigenräume” $V_\lambda = \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \forall x \in T\}$.

Bemerkung 2.5.2. Das Lemma gilt offensichtlich analog, wenn wir allgemeiner eine lineare Abbildung $T \rightarrow \text{End } V$ betrachten, deren Bild die entsprechenden Eigenschaften hat. Die Menge $P(V) = \{\lambda \in T^* \mid V_\lambda \neq 0\}$ heißt dann die Menge der **Gewichte** (französisch **poids**) von V und V_λ heißt der **Gewichtsraum zu λ** .

Beweis. Sei x_0, \dots, x_n eine Basis von T . Da x_0 diagonalisierbar ist, zerfällt V in Eigenräume unter x_0 . Da die x_i für $i \geq 1$ mit x_0 kommutieren, stabilisieren sie dessen Eigenräume. Eine Induktion beendet den Beweis. \square

Beispiel 2.5.3. Wir betrachten in der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, k)$ die Untereralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ aller Diagonalmatrizen. So ist das Bild von $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{h} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Endomorphismen von \mathfrak{g} und das Lemma liefert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{mit } \mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \lambda(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Für $h = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ in \mathfrak{h} und E_{ij} die Standardmatrix mit einer 1 in der i -ten Zeile und j -ten Spalte und Nullen sonst haben wir offensichtlich $[h, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij}$. Erklären wir also $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ als diejenige Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i -ten Diagonaleintrag zuordnet, so ergibt sich

$$[h, E_{ij}] = ((\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h))E_{ij}$$

und damit $P(\mathfrak{g}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Wir haben also $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und unter der Annahme $\text{char } k \neq 2$ sind die anderen Gewichtsräume die Geraden kE_{ij} mit $i \neq j$.

Definition 2.5.4. Eine Untereralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt eine **Cartan’sche Untereralgebra** genau dann, wenn gilt (1) \mathfrak{h} ist abelsch und besteht nur aus halbeinfachen Elementen von \mathfrak{g} und (2) \mathfrak{h} ist maximal bezüglich Inklusion unter allen Untereralgebren von \mathfrak{g} , die die erste Bedingung erfüllen.

Übung 2.5.5. In der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ bilden die Diagonalmatrizen eine Cartan’sche Untereralgebra.

Bemerkung 2.5.6. Im allgemeinen versteht man unter einer Cartan’schen Untereralgebra einer beliebigen endlichdimensionalen Lie-Algebra eine nilpotente Untereralgebra, die ihr eigener Normalisator ist. Man kann zeigen, daß die obige Definition im Fall halbeinfacher Lie-Algebren äquivalent ist, siehe [?].

Bemerkung 2.5.7. Eine Lie-Algebra, die nur aus ad-halbeinfachen Elementen besteht, ist stets abelsch: Sonst gäbe es nämlich x mit $\text{ad } x \neq 0$, also gäbe es $y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ mit $(\text{ad } x)(y) = \lambda y$, es folgte $(\text{ad } y)(x) \neq 0$ aber $(\text{ad } y)^2(x) = 0$, und dann könnte y nicht ad-halbeinfach sein.

Definition 2.5.8 (Wurzelraumzerlegung). Sei \mathfrak{g} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra. Wir benutzen die in unserer Theorie übliche Notation $\lambda(h) = \langle \lambda, h \rangle$ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$. Nach 2.5.1 gilt $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ mit $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Wir setzen

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0 \text{ und } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

und haben also eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

Die endliche Teilmenge $R \subset \mathfrak{h}^*$ heißt das **Wurzelsystem** (französisch **systeme de racines**, englisch **root system**) von \mathfrak{g} bezüglich \mathfrak{h} , seine Elemente heißen die **Wurzeln** und die \mathfrak{g}_α heißen die **Wurzelräume**.

Bemerkung 2.5.9. Insbesondere ist hier \mathfrak{g}_0 genau der Zentralisator $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$ von \mathfrak{h} .

Beispiel 2.5.10. Ist \mathfrak{g} die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Unteralgebra aller Diagonalmatrizen mit Spur Null und bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ weiter die Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i -ten Diagonaleintrag zuordnet, so haben wir $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ und $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_{ij}$ für $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in R$. Man beachte jedoch, daß die $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ nicht linear unabhängig sind in \mathfrak{h}^* , denn \mathfrak{h} besteht ja nur aus Diagonalmatrizen mit Spur Null, also $\dim \mathfrak{h} = n - 1$.

Satz 2.5.11 (über die Wurzelraumzerlegung). Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ bezeichne $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ den zugehörigen Wurzelraum.

1. Unsere Cartan'sche ist ihr eigener Zentralisator, in Formeln $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.
2. Alle Wurzelräume sind eindimensional und es gibt sogar für jede Wurzel $\alpha \in R$ einen injektiven Homomorphismus $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ von Lie-Algebren mit

$$\mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{-\alpha} \text{ und } \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}.$$

3. Das Negative einer Wurzel ist stets eine Wurzel, aber kein anderes Vielfaches einer Wurzel ist wieder eine Wurzel. In Formeln gilt demnach $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\} \quad \forall \alpha \in R$.

4. Für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Bemerkung 2.5.12. Wir zeigen die verschiedenen Teile dieses Satzes der Reihe nach, unterbrochen durch einige Lemmata. Teil 4 wird im Beweis von 2.5.16 mit erledigt.

Lemma 2.5.13. 1. Es gilt $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

2. Für die Killing-Form κ von \mathfrak{g} gilt $\kappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0$ falls $\lambda \neq -\mu$.

3. Die Einschränkung der Killingform κ auf \mathfrak{g}_0 ist nicht ausgeartet.

Beweis. Aus $[h, x] = \lambda(h)x$ und $[h, y] = \mu(h)y$ folgt mit der Jacobi-Identität $[h, [x, y]] = (\lambda(h) + \mu(h))[x, y]$. Das zeigt Teil 1. Aus $x \in \mathfrak{g}_\lambda, y \in \mathfrak{g}_\mu$ folgt für jedes $\nu \in \mathfrak{h}^*$ nach dem ersten Teil $((\text{ad } x)(\text{ad } y))(\mathfrak{g}_\nu) \subset \mathfrak{g}_{\nu+\lambda+\mu}$. Falls $\lambda+\mu \neq 0$ ist also $((\text{ad } x)(\text{ad } y))$ nilpotent und es folgt $\text{tr}((\text{ad } x)(\text{ad } y)) = \kappa(x, y) = 0$ und damit Teil 2. Für $z \in \mathfrak{g}_0$ gilt schließlich schon mal $\kappa(z, \mathfrak{g}_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in R$ nach Teil 2. Gilt auch noch $\kappa(z, \mathfrak{g}_0) = 0$, so folgt $\kappa(z, \mathfrak{g}) = 0$ und damit $z = 0$ nach 2.1.5. \square

Beweis von ?? 1. Sei $x \in \mathfrak{g}_0$ und sei $x = s + n$ seine Jordan-Zerlegung in \mathfrak{g} . Da nach 1.4.6 auch $\text{ad}_{\mathfrak{g}} s = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} x)_s$ und $\text{ad}_{\mathfrak{g}} n = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} x)_n$ auf \mathfrak{h} verschwinden, enthält \mathfrak{g}_0 mit x auch die halbeinfachen und nilpotenten Anteile s und n von x , und aufgrund der Maximalität von \mathfrak{h} und da die Summe zweier kommutierender halbeinfacher Elemente auch selbst wieder halbeinfach ist, liegt der halbeinfache Anteil s jedes Elements x aus dem Zentralisator von \mathfrak{h} sogar schon selbst in \mathfrak{h} . Damit ist \mathfrak{g}_0 nilpotent, denn für jedes $x \in \mathfrak{g}_0$ ist $\text{ad } x = \text{ad } n : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ nilpotent auf \mathfrak{g}_0 und wir können den Satz von Engel auf die Lie-Algebra \mathfrak{g}_0 anwenden. Mit dem Satz von Lie oder genauer seinem Korollar ?? folgt, daß in einer geeigneten Basis von \mathfrak{g} alle $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ für $x \in \mathfrak{g}_0$ durch obere Dreiecksmatrizen gegeben werden. Ist nun $z \in \mathfrak{g}_0$ gegeben mit $\text{ad}_{\mathfrak{g}} z$ nilpotent, so muß $\text{ad}_{\mathfrak{g}} z$ in dieser Basis sogar eine echte obere Dreiecksmatrix sein. Es folgt $\kappa(z, \mathfrak{g}_0) = 0$ und damit $z = 0$ nach Lemma 2.5.13. Also besteht \mathfrak{g}_0 aus $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -halbeinfachen Elementen, und wir wissen ja bereits seit dem Anfang des Beweises, daß alle $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -halbeinfachen Elemente von \mathfrak{g}_0 in \mathfrak{h} liegen. \square

Lemma 2.5.14. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ und α verschwindet nicht auf der Gerade $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $h \in \mathfrak{h}$. So gilt

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y)$$

oder anders ausgedrückt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp \supset \ker \alpha$, wo das orthogonale Komplement bezüglich der Restriktion der Killing-Form auf \mathfrak{h} zu verstehen ist. Da diese nach 2.5.13 nicht ausgeartet ist, folgt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1$. Andererseits ist κ nicht entartet auf \mathfrak{g} , also ist nach 2.5.13 auch $\kappa : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow k$ eine nichtentartete Paarung, in anderen Worten gibt es für jedes $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x \neq 0$ ein $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x, y) \neq 0$. Wählen wir nun $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$, so folgt aus unserer Formel vom Beginn des Beweises $\kappa(h, [x, y]) \neq 0$, also $[x, y] \neq 0$ und damit $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$. Es bleibt zu zeigen, daß α auf dieser Gerade nicht verschwindet. Seien dazu $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gegeben mit $h = [x, y] \neq 0$ aber $\alpha(h) = 0$. So würden x, y und h eine nilpotente, mithin eine auflösbare Untereralgebra von \mathfrak{g} aufspannen, in einer geeigneten Basis von \mathfrak{g} würden nach ?? also $\text{ad}_\mathfrak{g} x$, $\text{ad}_\mathfrak{g} y$, und $\text{ad}_\mathfrak{g} h$ alle drei durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt, und dann müßte $\text{ad}_\mathfrak{g} h = \text{ad}_\mathfrak{g}[x, y]$ nilpotent sein und aus unseren Annahmen an \mathfrak{h} folgte $h = 0$ im Widerspruch zu $\alpha(h) \neq 0$. Folglich verschwindet α nicht auf $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. \square

Definition 2.5.15. Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Wir definieren für jede Wurzel $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die **Kowurzel**

$$\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$$

durch die Bedingungen $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.

Beweis von ?? 2&3. Aus der Definition folgt sofort $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$. Natürlich finden wir stets $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x, y] = \alpha^\vee$, und dann gilt $[\alpha^\vee, x] = 2x$, $[\alpha^\vee, y] = -2y$, da ja ganz allgemein gilt $[h, x] = \alpha(h)x$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ und ähnlich für y . Somit spannen x, α^\vee, y eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ isomorphe Untereralgebra \mathfrak{g}^α von \mathfrak{g} auf, genauer gibt es einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto x, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto y \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \alpha^\vee.$$

Vermittels $\text{ad}_\mathfrak{g}$ wird \mathfrak{g} eine endlichdimensionale Darstellung von \mathfrak{g}^α . Nach der Definition von α^\vee ist $\mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$ darin eine Unterdarstellung, und diese zerfällt nach 2.2.8 und ?? in \mathfrak{g}^α und ein Komplement V . Da α^\vee auf V durch eine invertierbare Abbildung operiert, folgt mit 1.2.12 aus $V \neq 0$ schon $\mathfrak{g}_{\alpha/2} \neq 0$, also $\alpha/2 \in R$. Für alle Wurzeln α mit der Eigenschaft $\alpha/2 \notin R$ gelten also 2 und 3, und damit gelten sie notwendig für alle Wurzeln. \square

Satz 2.5.16 (Eigenschaften des Wurzelsystems). Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra und $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Für jede Wurzel α bezeichne α^\vee die zugehörige Kowurzel.

1. Für alle $\alpha, \beta \in R$ gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$.
2. Die Menge R aller Wurzeln spannt \mathfrak{h}^* auf.

Beweis. 1. Wir betrachten für jede Wurzel $\beta \neq \pm\alpha$ den Teilraum $T = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ von \mathfrak{g} . Er ist eine \mathfrak{g}^α -Unterdarstellung von \mathfrak{g} , alle Eigenräume $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ von α^\vee sind höchstens eindimensional nach ??, und α^\vee operiert auf $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ durch den Eigenwert $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2i$. Aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}^\alpha$ wissen wir nach 1.2.12 aber schon, daß $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alias α^\vee auf einer endlichdimensionalen Darstellung nur ganzzahlige Eigenwerte haben kann und daß mit n auch $-n$ ein Eigenwert sein muß. Insbesondere ist $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ganzzahlig und der Eigenwert $-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ kommt auch vor, d.h. der Wurzelraum $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ mit $i = -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ist nicht Null.

Eingeschobener Beweis von ??. 4. Da alle Eigenräume von α^\vee in T eindimensional sind und alle Eigenwerte dieselbe Parität haben, muß T sogar eine einfache Darstellung von \mathfrak{g}^α sein. Aus unserer expliziten Beschreibung dieser einfachen Darstellungen in 1.2.12 folgt dann $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ falls $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ und damit ??.

2. Es reicht zu zeigen, daß gilt $\bigcap_{\alpha \in R} \ker \alpha = 0$. Sei also $h \in \mathfrak{h}$ gegeben mit $\alpha(h) = 0 \quad \forall \alpha \in R$. So gilt $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ für alle $\alpha \in R$, und da eh gilt $[h, \mathfrak{h}] = 0$, ergibt sich $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und damit $h = 0$, da das Zentrum einer halbeinfachen Lie-Algebra Null ist. \square

Übung 2.5.17. Die Kowurzeln α^\vee spannen \mathfrak{h} auf. Bezeichnet $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ den von den Kowurzeln über \mathbb{Q} aufgespannten Teilraum von \mathfrak{h} , so gilt $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}_\mathbb{Q} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. Bezeichnet $(\mathfrak{h}^*)_\mathbb{Q}$ den von den Wurzeln über \mathbb{Q} aufgespannten Teilraum von \mathfrak{h}^* , so gilt $\dim_{\mathbb{Q}} (\mathfrak{h}^*)_\mathbb{Q} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$ und das Einschränken identifiziert $(\mathfrak{h}^*)_\mathbb{Q}$ mit dem Dualraum $(\mathfrak{h}_\mathbb{Q})^*$ von $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$, so daß wir ohne Mehrdeutigkeiten fürchten zu müssen schlicht $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ schreiben dürfen. Hinweis: 2.5.18.

Übung 2.5.18. Seien $k \subset K$ Körper. Sei V ein K -Vektorraum, $R \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem von V und $L \subset V^*$ ein endliches Erzeugendensystem seines Dualraums. Gilt $\langle \lambda, \alpha \rangle \in k$ für alle $\lambda \in L$ und $\alpha \in R$, so haben wir $\dim_k \langle R \rangle_k = \dim_K V = \dim_k \langle L \rangle_k$ für die Erzeugnisse von R bzw. L über k und die Einschränkung identifiziert $\langle L \rangle_k$ mit dem Dualraum von $\langle R \rangle_k$.

Übung 2.5.19. Bezeichne $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ den von allen Kowurzeln über \mathbb{Q} aufgespannten Teilraum von \mathfrak{h} . Für $h, t \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ gilt $\kappa(h, t) \in \mathbb{Q}$. Weiter ist κ positiv definit

auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, also $\kappa(h, h) \leq 0 \Rightarrow h = 0$. Analoges gilt auch, wenn wir hier \mathbb{Q} durch \mathbb{R} ersetzen.

Übung 2.5.20. Für Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ ist $\{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in \mathbb{Z} .

Übung 2.5.21. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$ besteht nach 1.1.30 aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A^t = -D$, $B^t = B$ und $C^t = C$. Darin bilden die Diagonalmatrizen $\text{diag}(h_1, \dots, h_n, -h_1, \dots, -h_n)$ eine Cartan'sche \mathfrak{h} . Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i -ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von \mathfrak{h}^* und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^+ = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} + E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B .

Übung 2.5.22. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(2n; \mathbb{C})$ wie sie in 1.1.20 definiert wurde besteht aus allen Blockmatrizen derselben Gestalt wie in der vorhergehenden Übung mit $A^t = -D$, $B^t = -B$ und $C^t = -C$. Darin bilden die Diagonalmatrizen $\text{diag}(h_1, \dots, h_n, -h_1, \dots, -h_n)$ eine Cartan'sche \mathfrak{h} . Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i -ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von \mathfrak{h}^* und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^+ = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} - E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B .

Übung 2.5.23. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(2n+1; \mathbb{C})$ wie sie in 1.1.20 definiert wurde besteht aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} a & u & v \\ w & A & B \\ s & C & D \end{pmatrix}$$

mit $a = 0$, $u^t = -s$, $v^t = -w$, $A^t = -D$, $B^t = -B$ und $C^t = -C$. Eine Cartan'sche \mathfrak{h} bilden die Diagonalmatrizen $\text{diag}(0, h_1, \dots, h_n, -h_1, \dots, -h_n)$ und erklären wir Linearformen $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Vorschrift, daß sie einer Matrix ihren $(i+1)$ -ten Diagonaleintrag zuordnen, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von \mathfrak{h}^* und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

3 Spiegelungsgruppen

3.1 Endliche Spiegelungsgruppen

Bemerkung 3.1.1. Unter einem **euklidischen Vektorraum** verstehen wir hier und im Folgenden stets einen endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper im Sinne von ??, der mit einem Skalarprodukt versehen ist.

Definition 3.1.2. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine orthogonale lineare Abbildung $s : V \rightarrow V$ heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **orthogonale lineare Spiegelung** genau dann, wenn ihre Fixpunktmenge V^s eine Hyperebene ist, in Formeln $\dim(V/V^s) = 1$. Wir nennen V^s die **Spiegelhyperebene** oder abkürzend auch die **Spiegelebene** der Spiegelung s .

Bemerkung 3.1.3. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 einer Spiegelung ist stets eine Gerade, in Formeln $\dim V^{-s} = 1$, und zwar die Gerade aller auf der Spiegelebene V^s senkrechten Vektoren. Ist $\alpha \in V^{-s}$ ein Erzeuger dieser Gerade und notieren wir das Skalarprodukt auf V als (v, w) , so wird die Spiegelung s gegeben durch die Vorschrift

$$s(v) = v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

In der Tat definiert diese Formel eine lineare Abbildung, die die auf α senkrechte Hyperebene α^\perp punktweise festhält und die α auf $-\alpha$ abbildet.

Definition 3.1.4. Eine **endliche euklidische Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von orthogonalen Automorphismen eines euklidischen Vektorraums, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Beispiel 3.1.5. Wir betrachten in der reellen euklidischen Ebene r Geraden durch den Ursprung derart, daß “je zwei benachbarte Geraden denselben Winkel π/r einschließen”. Diese r Geraden sind die Spiegelebenen einer endlichen orthogonalen Spiegelungsgruppe, der sogenannten **Diedergruppe** D_r . Sie besteht aus den r Spiegelungen an unseren r Geraden sowie den r Drehungen um die Winkel $2\pi\nu/r$ für $\nu = 0, 1, \dots, r-1$.

Beispiel 3.1.6. Wir betrachten im \mathbb{R}^n für $1 \leq i < j \leq n$ die Hyperebenen $H_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_j\}$. Die orthogonale Spiegelung s an der Hyperebene $H_{i,j}$ kann auch beschrieben werden als die Vertauschung der i -ten und der j -ten Koordinate, $s(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$, denn besagte Vertauschung ist orthogonal und $H_{i,j}$ ist die Menge ihrer Fixpunkte. Diese Spiegelungen erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe, die in offensichtlicher Weise isomorph ist zur symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n .

Beispiel 3.1.7. Die orthogonalen Spiegelungen an denjenigen Ebenen des \mathbb{R}^3 , die senkrecht stehen auf den Kantenmitten der Kanten eines im Ursprung zentrierten Tetraeders, erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe, die isomorph ist zur Gruppe aller 24 Permutationen der vier Ecken unseres Tetraeders.

Beispiel 3.1.8. Die orthogonalen Spiegelungen an den Koordinatenebenen des \mathbb{R}^n erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe mit 2^n Elementen.

Definition 3.1.9. Eine Teilmenge eines Vektorraums über einem angeordneten Körper heißt **konvex** genau dann, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält. Ist V unser Vektorraum und notieren wir für Punkte $x, y \in V$ das dazwischenliegende Geradensegment mit $[x, y] = \{tx + (1 - t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$, so ist also in Formeln $A \subset V$ konvex genau dann, wenn gilt $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subset A$.

Definition 3.1.10. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $W \subset GL(V)$ eine endliche orthogonale Spiegelungsgruppe. Die maximalen konvexen Teilmengen im Komplement der Vereinigung aller Spiegelebenen

$$V - \bigcup_{\substack{s \in W \text{ ist} \\ \text{Spiegelung}}} V^s$$

heißen die **Weylkammern** oder **Alkoven** unserer Spiegelungsgruppe.

Bemerkung 3.1.11. Im Fall $k = \mathbb{R}$ können wir die Alkoven auch als die Zusammenhangskomponenten von besagtem Komplement beschreiben, wenn wir V mit seiner üblichen Topologie versehen.

Bemerkung 3.1.12. Wir wollen als nächstes zeigen, daß jede endliche Spiegelungsgruppe frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert. Die Transitivität ist schnell bewiesen: Nehmen wir der Einfachheit halber \mathbb{R} als Grundkörper, so finden wir für beliebige Vektoren $v, w \in V$ ein $x \in W$ derart, daß der Abstand $\|v - xw\|$ kleinstmöglich wird. Dann können v und xw durch keine Spiegelebene mehr getrennt werden, da ja sonst aus elementargeometrischen Gründen v und xw noch näher aneinander wären, für s die Spiegelung an besagter Spiegelebene. Also liegen v und xw für jede Spiegelebene in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. Die Freiheit der Operation scheint mir weniger offensichtlich. Um beim Beweis inhaltsreichere Bilder malen zu können, werden wir sie gleich in der etwas allgemeineren Situation affiner Spiegelungsgruppen zeigen. Wir führen diesen Begriff im übernächsten Abschnitt ein. Zunächst müssen wir jedoch geometrische Vorbereitungen treffen.

3.2 Alkovengeometrie

Definition 3.2.1. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Gegeben $x, y \in E$ setzen wir

$$\begin{aligned}[x, y] &= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t \leq 1\} \\ [x, y) &= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t < 1\} \\ (x, y] &= \{x + t(y - x) \mid 0 < t \leq 1\} \\ (x, y) &= \{x + t(y - x) \mid 0 < t < 1\}\end{aligned}$$

Mengen dieser Gestalt mit $x \neq y$ nennen wir **abgeschlossene** bzw. **halb-offene** bzw. **offene Geradensegmente**.

Definition 3.2.2. Ein affiner Teilraum eines affinen Raums heißt eine **Hyperebene** genau dann, wenn sein Richtungsraum die Kodimension Eins hat im Richtungsraum unseres ursprünglichen affinen Raums.

Definition 3.2.3. Ein System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jedes Geradensegment in unserem Raum höchstens endlich viele Hyperebenen unseres Systems trifft.

Lemma 3.2.4. *Ein affiner Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperebenen überdeckt werden.*

Beweis. Jeder Punkt x unseres affinen Raums liegt auf höchstens endlich vielen unserer Hyperebenen. Wenn wir nun mithilfe von ?? einen weiteren Punkt y außerhalb dieser endlich vielen Hyperebenen wählen, so ist das Segment $[x, y]$ in keiner unserer Hyperebenen enthalten. Da es unendlich viele Punkte hat, aber nur endlich viele unserer Hyperebenen trifft und zwar in jeweils nur einem Punkt, gibt es auf $[x, y]$ notwendig Punkte, die in keiner unserer Hyperebenen enthalten sind. \square

Definition 3.2.5. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Eine Teilmenge unseres affinen Raums heißt **konvex** genau dann, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält. Für jede Hyperebene $H \subset E$ gibt es in $E - H$ genau zwei maximale konvexe Teilmengen, die wir die **Halbräume** zu H oder die **H -Halbräume** nennen. Ist $A \subset E$ eine nichtleere konvexe Teilmenge und gilt $A \cap H = \emptyset$, so liegt A in genau einem Halbraum zu H . Diesen Halbraum bezeichnen wir mit H_A^+ und nennen ihn den **H -Halbraum von A** . Seine Vereinigung mit der Hyperebene selbst notieren wir $\bar{H}_A^+ = H_A^+ \cup H$ und nennen sie den **abgeschlossenen H -Halbraum von A** .

Definition 3.2.6. Für jede Hyperebene in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachten wir die dreiteilige Partition unseres Raums in die zwei Halbräume und die Hyperebene selbst und nennen sie die zugehörige “Hyperebenenpartition”. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen betrachten wir die kleinste Partition unseres affinen Raums, die größer ist als diese Hyperebenenpartition für jede der Hyperebenen unseres Systems. Die Stücke der so erklärten Partition heißen die **Facetten** zu unserem lokal endlichen System von Hyperebenen. Als Schnitte konvexer Teilmengen sind sie offensichtlich konvex und per definitionem sind sie nie leer.

Definition 3.2.7. Ist E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper, so nennen wir ganz allgemein eine Teilmenge $A \subset E$ eine **Facette** genau dann, wenn es ein lokal endliches System von Hyperebenen gibt, zu dem unser A eine Facette ist. Wir sagen dann auch, daß besagtes System von Hyperebenen “unsere Facette beschreibt”. Ein und dieselbe Facette kann durch sehr verschiedene lokal endliche Systeme von Hyperebenen beschrieben werden. Ist E ein affiner Raum und $A \subset E$ eine Facette, so definieren wir ihren **Abschluß** \bar{A} als die Menge aller Punkte $x \in E$ derart, daß für mindestens einen Punkt $y \in A$ die Menge $(x, y]$ ganz in A enthalten ist.

Beispiel 3.2.8. Wegen $(x, x] = \{x\}$ liegt jede Facette in ihrem Abschluß. In einem eindimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die Facetten genau die Punkte, die offenen Geradensegmente, die offenen Halbgeraden und der ganze Raum. In einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper ist jeder nichtleere affine Teilraum und insbesondere jede einelementige Teilmenge eine Facette. Im allgemeinen ist jeder Halbraum eine Facette und sein Abschluß im Sinne von 3.2.5 fällt mit seinem Abschluß als Facette zusammen.

Lemma 3.2.9. *Umfaßt eine Facette ein abgeschlossenes Geradensegment, so umfaßt sie auch ein offenes Geradensegment, das seinerseits dieses abgeschlossene Geradensegment umfaßt.*

Beweis. Das folgt direkt aus den Definitionen. □

Lemma 3.2.10. *Ist eine Facette in einem abgeschlossenen Halbraum zu einer Hyperebene enthalten, so liegt sie entweder bereits im entsprechenden offenen Halbraum oder aber in der fraglichen Hyperebene.*

Beweis. Das folgt direkt aus dem vorhergehenden Lemma. □

Bemerkung 3.2.11. Ist $A \subset E$ eine Facette und \mathcal{H} ein lokal endliches System von Hyperebenen, das sie beschreibt, so haben wir

$$A = \bigcap_{A \subset H} H \cap \bigcap_{A \not\subset H} H_A^+$$

wobei bei beiden Schnitten jeweils nur die Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ in Betracht gezogen werden. Der Abschluß unserer Facette wird dann gegeben durch

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset H} H \cap \bigcap_{A \cap H = \emptyset} \bar{H}_A^+$$

Insbesondere haben wir für jeden Punkt $y \in A$ offensichtlich $\bar{A} = \{x \mid [y, x] \subset A\}$. Haben wir $k = \mathbb{R}$ und ist unser affiner Raum endlichdimensional und versehen wir ihn mit seiner natürlichen Topologie, so stimmt der oben definierte Abschluß einer Facette überein mit ihrem Abschluß im Sinne der Topologie.

Übung 3.2.12. Ist der Schnitt zweier Facetten nicht leer, so ist er wieder eine Facette, deren Abschluß als der Schnitt der Abschlüsse der ursprünglichen Facetten beschrieben werden kann.

Bemerkung 3.2.13. Wird eine Facette A beschrieben durch ein lokal endliches System von Hyperebenen \mathcal{H} , so beschreibt dieses System auch alle maximalen Facetten in ihrem Abschluß, die sogenannten **Randfacetten von A** , und diese sind genau alle nichtleeren Schnitte B der Gestalt

$$B = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{R}} H \cap \bigcap_{H \notin \mathcal{R}} H_A^+$$

für beliebige Teilmengen $\mathcal{R} \subset \{H \in \mathcal{H} \mid A \not\subset H\}$. Auf der Menge $\mathcal{F}(A)$ aller Randfacetten von A erhalten wir eine partielle Ordnung durch die Vorschrift

$$B \leq C \Leftrightarrow B \subset \bar{C}$$

und für jede Facette $C \in \mathcal{F}(A)$ haben wir $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{F}(A)$. Weiter ist der Abschluß einer Facette stets die disjunkte Vereinigung über alle maximalen in besagtem Abschluß enthaltenen Facetten, in Formeln

$$\bar{A} = \coprod_{B \in \mathcal{F}(A)} B.$$

Ist E unser affiner Raum und $A \subset E$ eine Facette, so gehören zwei verschiedene Punkte aus ihrem Abschluß $x, y \in \bar{A}$ zu derselben maximalen Facette $B \subset \bar{A}$ genau dann, wenn es ein offenes ganz in \bar{A} enthaltenes Geradensegment gibt, das unsere beiden Punkte enthält.

Bemerkung 3.2.14. Facetten sind als Schnitte von Halbräumen und Hyperebenen insbesondere stets konvex. Der von einer Facette erzeugte affine Teilraum heißt der **Träger** unserer Facette. Er kann auch beschrieben werden als der Schnitt aller derjenigen Hyperebenen eines beschreibenden lokal endlichen Systems, die die fragliche Facette enthalten. Eine Facette, deren Träger der ganze Raum ist, heißt ein **Alkoven** oder auch eine **Kammer**.

Übung 3.2.15. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die zugehörigen Alkoven genau die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems, und jede nichtleere konvexe Teilmenge von $E - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ liegt in genau einem Alkoven.

Lemma 3.2.16. *Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen \mathcal{H} in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper überdecken die Abschlüsse der zugehörigen Alkoven ganz E . Bezeichnet \mathcal{A} diese Menge von Alkoven, so gilt also in Formeln*

$$E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

Beweis. Für $p \in E$ finden wir nach Lemma 3.2.4 eine affine Gerade durch p , die in keiner unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ enthalten ist. Dann gibt es auch einen Punkt q auf unserer Gerade derart, daß das halboffene Geradensegment $(p, q]$ keine unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ trifft. Damit liegt aber notwendig der Punkt p im Abschluß des Alkoven von q . \square

Definition 3.2.17. Gegeben ein Alkoven heißt eine Hyperebene eine **Wand** des Alkoven genau dann, wenn sie der Träger einer Randfacette unseres Alkoven ist. Insbesondere gehört eine Wand eines Alkoven also zu jedem lokal endlichen System von Hyperebenen, das besagten Alkoven beschreibt. Die Menge der Wände eines Alkoven A notieren wir \mathcal{H}_A .

Übung 3.2.18. Eine Hyperebene ist eine Wand eines vorgegebenen Alkoven genau dann, wenn es einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven gibt derart, daß unsere Hyperebene die einzige Hyperebene durch besagten Punkt ist, die den Alkoven nicht trifft.

Lemma 3.2.19. *Ist \mathcal{H} ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper, so ist jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ Wand mindestens eines der durch dieses System definierten Alkoven, in Formeln*

$$\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{H}_A$$

Beweis. Für $H \in \mathcal{H}$ finden wir nach 3.2.4 einen Punkt $q \in H$, der auf keiner anderen Hyperebene aus \mathcal{H} liegt. Er liegt nach 3.2.16 im Abschluß eines Alkoven, und unsere Hyperebene ist dann eine Wand dieses Alkoven. \square

Satz 3.2.20 (Begrenzung eines Alkoven durch seine Wände). *Jeder Alkoven ist der Schnitt über alle ihn umfassenden Halbräume zu seinen Wänden. In Formeln gilt für jeden Alkoven A also*

$$A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A} H_A^+$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß jedes Segment $[x, y]$ mit $x \in A$ und $y \notin A$ mindestens eine Wand von A trifft. Per definitionem gibt es ein lokal endliches System \mathcal{H} von Hyperebenen, das den Alkoven A beschreibt. Lassen wir aus diesem System eine Hyperebene weg, die keine Wand von A ist, so erhalten wir nach 3.2.18 wieder ein lokal endliches System von Hyperebenen, das den Alkoven A beschreibt. Trifft unser Segment also keine Wand von A , so können wir die endlich vielen Hyperebenen aus \mathcal{H} , die es trifft, aus \mathcal{H} herausnehmen und erhalten nach unserer Vorüberlegung wieder ein System von Hyperebenen, das den Alkoven A beschreibt. Daraus folgt jedoch $y \in A$ im Widerspruch zu unserer Annahme. \square

Bemerkung 3.2.21. Sei A ein Alkoven zu einem lokal endlichen System von Hyperebenen \mathcal{H} . Wählt man für jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine affine Gleichung $\alpha_H : E \rightarrow k$ mit $\alpha_H|_A > 0$, so sind die Wände von A genau diejenigen $H \in \mathcal{H}$, für die sich α_H nicht als positive Linearkombination gewisser α_L mit $L \neq H$ schreiben läßt: Daß für jede Wand H von A die Gleichung α_H diese Bedingung erfüllt, ist eh klar; Daß nur Wände unsere Bedingung erfüllen, ist vielleicht weniger klar, ergibt sich jedoch als eine Konsequenz des Hauptsatzes über lineare Ungleichungen 6.4.2.

3.3 Affine Spiegelungsgruppen

Definition 3.3.1. Ein **affiner euklidischer Raum** ist ein endlichdimensionaler affiner Raum über einem angeordneten Körper, dessen Raum von Richtungsvektoren mit einem Skalarprodukt versehen ist. Eine affine Abbildung zwischen affinen euklidischen Räumen heißt **orthogonal** genau dann, wenn ihr linearer Anteil orthogonal ist. Eine **Spiegelung** oder präziser eine **affine orthogonale Spiegelung** auf einem affinen euklidischen Raum ist eine orthogonale Abbildung, deren Fixpunktmenge eine Hyperebene ist.

Bemerkung 3.3.2. Für jede affine Hyperebene H in einem affinen euklidischen Raum E gibt es genau eine Spiegelung $s = s_H : E \rightarrow E$ mit Fixpunktmenge $E^s = H$. Ist $w : E \rightarrow E$ orthogonal, so haben wir $s_{wH} = w s_H w^{-1}$.

Definition 3.3.3. Eine Gruppe von affinen orthogonalen Selbstabbildungen eines affinen euklidischen Raums heißt eine **affine euklidische Spiegelungsgruppe** oder auch kurz eine **affine Spiegelungsgruppe** genau dann, wenn sie von Spiegelungen erzeugt wird und die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen unserer Gruppe lokal endlich ist.

Bemerkung 3.3.4. Wenn wir von einer affinen Spiegelungsgruppe (W, E) reden, so ist mit E der zugrundeliegende affine euklidische Raum gemeint und mit W die Gruppe selber.

Beispiel 3.3.5. Wir betrachten die Menge \mathcal{H} aller derjenigen Geraden in \mathbb{R}^2 , die parallel sind zu einer der Koordinatenachsen und durch einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen. Offensichtlich ist \mathcal{H} die Menge aller Spiegelebenen einer affinen Spiegelungsgruppe und die Alkoven sind gerade die “Felder dieses Rechenpapiers”. Allgemeiner können wir natürlich auch die Menge \mathcal{H} aller derjenigen Hyperebenen in \mathbb{R}^n betrachten, die parallel sind zu einer der Koordinaten-Hyperebenen und die einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthalten. Im Fall $n = 1$ sind die Alkoven die offenen Segmente $(i, i + 1)$, im Fall $n = 3$ haben sie die Gestalt von Würfeln.

Übung 3.3.6. Eine endliche Gruppe von Bewegungen eines affinen Raums über einem Körper der Charakteristik Null hat stets einen Fixpunkt, genauer ist der Schwerpunkt jeder Bahn ein Fixpunkt.

Satz 3.3.7 (Geometrie affiner Spiegelungsgruppen). *Sei \mathcal{H} ein lokal endliches System von Hyperebenen eines affinen euklidischen Raums, das unter den Spiegelungen an allen seinen Hyperebenen in sich selber überführt wird. So gilt:*

1. *Unser System \mathcal{H} ist das System aller Spiegelebenen einer affinen Spiegelungsgruppe.*
2. *Für jeden festen Alkoven erzeugen die Spiegelungen an seinen Wänden bereits die gesamte Spiegelungsgruppe.*
3. *Ist A ein fester Alkoven und $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements w unserer Spiegelungsgruppe als Produkt von Spiegelungen s_i an den Wänden von A , so ist die Länge r dieser Darstellung genau die Zahl der Spiegelebenen $H \in \mathcal{H}$, die wA von A trennen.*
4. *Unsere Spiegelungsgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven.*

Beweis. Bezeichne \mathcal{A} die Menge aller Alkoven zu \mathcal{H} und W die von den Spiegelungen an den Hyperebenen aus \mathcal{H} erzeugte Gruppe von affinen Selbstabbildungen von E . Wir wählen einen festen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ und bezeichnen mit

$$W' = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A \rangle$$

die von den Spiegelungen an seinen Wänden erzeugte Untergruppe $W' \subset W$. Wir zeigen als erstes, daß W' transitiv auf \mathcal{A} operiert. Dazu benutzen wir

Lemma 3.3.8. *Sei $A \in \mathcal{A}$ ein Alkoven und H eine Wand von A . So ist H die einzige Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt.*

Beweis des Lemmas. Ist H eine Wand von A , so gibt es nach 3.2.18 einen Punkt $p \in \bar{A} \cap H$, der auf keiner anderen Hyperebene liegt, die A vermeidet. Eine Hyperebene, die die zwei Facetten trennt, muß jedoch offensichtlich den Schnitt ihrer Abschlüsse umfassen. Jede Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt, muß also p enthalten und A vermeiden und fällt folglich mit H zusammen. \square

Sei nun $C \in \mathcal{A}$ ein Alkoven. Wir wählen $w \in W'$ derart, daß die Zahl der Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$, die A von wC trennen, so klein wie möglich wird. Gälte nicht $A = wC$, so gäbe es nach 3.2.20 eine Wand $H \in \mathcal{H}_A$ von A , die A von C trennt. Dann würden aber $s_H A$ und wC und ebenso A und $s_H wC$ von noch weniger Hyperebenen aus \mathcal{H} getrennt als A und wC , im Widerspruch zur Wahl von w . Es gilt also $A = wC$ und W' operiert transitiv auf \mathcal{A} . Nach dieser Vorbemerkung zeigen wir die Behauptungen des Satzes in der Reihenfolge 2–3–4–1.

2. Jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ ist nach 3.2.19 Wand eines geeigneten Alkoven $C \in \mathcal{A}$, in Formeln $H \in \mathcal{H}_C$. Nach dem Vorhergehenden finden wir $w \in W'$ mit $wC = A$. Offensichtlich gilt weiter $w\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A$ und wir folgern $s_H = w^{-1}s_w H w \in W'$ und damit $W = W'$.

3. Sei $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements $w \in W$ als Produkt von Spiegelungen an Wänden H_1, \dots, H_r von A . Für zwei Alkoven $A, C \in \mathcal{A}$ bezeichne $d(A, C)$ die Zahl der Hyperebenen aus \mathcal{H} , die A und C trennen. Es gilt zu zeigen $r = d(A, wA)$. Wir betrachten dazu die Folge von Alkoven

$$A, s_1 A, s_1 s_2 A, \dots, wA$$

Zwei aufeinanderfolgende Alkoven $s_1 \dots s_{i-1} A$ und $s_1 \dots s_i A$ unserer Folge werden nach 3.3.8 nur durch die Hyperebene $s_1 \dots s_{i-1} H_i$ getrennt. Es folgt schon $r \geq d(A, wA)$. Wäre $r > d(A, wA)$, so müßte unsere Folge von Alkoven eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ zweimal kreuzen, wir hätten also $s_1 \dots s_{i-1} H_i =$

$s_1 \dots s_{j-1} H_j$ mit $r \geq j > i \geq 1$. Daraus folgte aber $H_i = s_i \dots s_{j-1} H_j$, mithin $s_i = s_i \dots s_{j-1} s_j s_{j-1} \dots s_i$ oder $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_j$ und unsere Darstellung wäre nicht kürzestmöglich.

4. Wir haben bereits gezeigt, daß W transitiv auf \mathcal{A} operiert. Nach 3 folgt aber aus $wA = A$ schon $w = \text{id}$, also operiert W auch frei.

1. Für eine Spiegelung aus W , deren Spiegelebene nicht zu \mathcal{H} gehörte, könnte die Spiegelebene nach 3.2.4 nicht enthalten sein in der Vereinigung der Hyperebenen aus \mathcal{H} und müsste deshalb einen Alkoven aus \mathcal{A} treffen. Dann müsste unsere Spiegelung diesen Alkoven auf sich selbst abbilden. Nach 4 ist aber die Identität das einzige Element von W , das einen Alkoven festhält. Also besteht \mathcal{H} bereits aus allen Spiegelebenen zu Spiegelungen von W . \square

Korollar 3.3.9. *Erzeugt eine Menge von affinen Spiegelungen eine affine Spiegelungsgruppe, so ist jede Spiegelung dieser Spiegelungsgruppe konjugiert zu einer Spiegelung aus besagter Menge.*

Beweis. Sei S unsere Menge von Spiegelungen, W die davon erzeugte affine Spiegelungsgruppe, und \mathcal{S} die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus S . Die zu Elementen aus S konjugierten Spiegelungen sind per definitionem genau die Spiegelungen $\sigma = wsw^{-1}$ mit $s \in S$ und $w \in W$ alias die Spiegelungen an den Hyperebenen aus $\mathcal{H}' = W\mathcal{S}$, da ja gilt $ws_Hw^{-1} = s_{wH}$ nach 3.3.2. Nach 3.3.7 ist aber \mathcal{H}' selbst bereits die Menge der Spiegelebenen einer affinen Spiegelungsgruppe $W' \subset W$, und aus $S \subset W'$ folgt dann $W' = W$ und damit das Korollar. \square

Definition 3.3.10. Sei W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $S \subset W$ die Menge aller Spiegelungen an Wänden von A . Eine kürzestmögliche Darstellung von $w \in W$ als Produkt von Elementen von S nennt man eine (in Bezug auf S) **reduzierte Darstellung** von w , und die Länge einer reduzierten Darstellung heißt die **Länge** $l(w) = l_S(w) = l_A(w)$ von w .

Bemerkung 3.3.11. In diesen Notationen haben wir in 3.3.7 also unter anderem gezeigt, daß gilt $l_A(w) = d(A, wA)$. Weiter haben wir beim Beweis von 3.3.7 gezeigt, daß gegeben $s_1, \dots, s_r \in S$ Spiegelungen an Wänden H_i von A mit Produkt $w = s_1 \dots s_r$ und L eine Spiegelebene von W , die A und wA trennt, es notwendig ein i gibt mit $L = s_1 \dots s_{i-1} H_i$ und folglich $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Ist unsere Darstellung von w reduziert, in Formeln $r = l(w)$, so sind immer nach dem Beweis von 3.3.7 die $s_1 \dots s_{i-1} H_i$ sogar genau die r Spiegelebenen, die A und wA trennen.

Proposition 3.3.12. *Seien A, B Alkoven und L eine Spiegelebene einer affinen Spiegelungsgruppe. Genau dann trennt L unsere beiden Alkoven, wenn A und $s_L B$ durch weniger Spiegelebenen getrennt werden als A und B . In Formeln gilt also*

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \Leftrightarrow d(A, s_L B) < d(A, B)$$

Beweis. Es reicht \Rightarrow zu zeigen, die andere Implikation folgt dann durch Anwenden der einen Implikation auf $s_L B$ statt auf B . Wir finden Spiegelungen s_1, \dots, s_r an Wänden von A mit $r = d(A, B)$ und $B = s_1 \dots s_r A$. Da L unsere beiden Alkoven trennt, gibt es nach der vorhergehenden Bemerkung 3.3.11 einen Index i mit $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Damit folgt wie gewünscht $d(A, s_L B) < r$. \square

Satz 3.3.13 (Austauschlemma). *Seien W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein Alkoven, S die Menge der Spiegelungen an Wänden von A und $l = l_A$ die zugehörige Länge. Seien weiter $s_1, \dots, s_r \in S$. Ist t eine Spiegelung aus W mit $l(ts_1 \dots s_r) < l(s_1 \dots s_r)$, so gibt es einen Index $i \in [1, r]$ für den gilt*

$$ts_1 \dots s_i \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

Bemerkung 3.3.14. Die letzte Gleichung kann umgeschrieben werden zur Gleichung $s_1 \dots s_i \dots s_r = ts_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Wir können also in Worten die einfache Spiegelung s_i in der Mitte austauschen gegen die Spiegelung t ganz vorne ohne das Produkt zu ändern, wenn (und im Fall einer reduzierten Darstellung genau dann, wenn) die Multiplikation mit t die Länge verkleinert.

Beweis. Sei $t = s_L$ und $B = s_1 s_2 \dots s_r A$. Aus der Annahme folgt mit 3.3.12, daß die Spiegelebene L die Alkoven A und $s_1 \dots s_r A$ trennt. Daraus folgt dann mit 3.3.11 sofort $ts_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. \square

Übung 3.3.15. Sei W eine endliche Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $l = l_A$ die zugehörige Länge. So gibt es in W genau ein Element w_A maximaler Länge, und diese Länge ist die Zahl der Spiegelungen in W .

Übung 3.3.16. Jede nichtreduzierte Darstellung eines Elements kann durch Streichen von Faktoren zu einer reduzierten Darstellung desselben Elements gemacht werden.

3.4 Fundamentalbereiche

Definition 3.4.1. Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X und ist $Y \subset X$ eine Teilmenge, die die Bahn Gp jedes Punktes $p \in X$ in genau einem Punkt trifft, so heißt Y ein (mengentheoretischer) **Fundamentalbereich** für die Operation von G auf X .

Satz 3.4.2 (Alkovenabschlüsse als Fundamentalbereiche). *Für die natürliche Operation einer affinen Spiegelungsgruppe auf ihrem affinen Raum ist der Abschluß eines jeden Alkoven ein Fundamentalbereich.*

Beweis. Seien für den Rest dieses Abschnitts E ein affiner euklidischer Raum über einem angeordneten Körper, $W \subset \text{Aut } E$ eine affine Spiegelungsgruppe, \mathcal{H} die Menge ihrer Spiegelebenen und \mathcal{A} die Menge der zugehörigen Alkoven. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit einer Proposition.

Proposition 3.4.3. *Sei $A \subset E$ ein fester Alkoven und $p \in \bar{A}$ ein Punkt aus dem Abschluß von A . So gilt*

1. *Der Stabilisator W_p von p wird erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden von A , die p enthalten. In Formeln gilt also*

$$W_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$$

2. *Der Stabilisator W_p von p operiert frei und transitiv auf der Menge \mathcal{A}_p aller Alkoven, deren Abschluß p enthält. In Formeln liefert also $w \mapsto wA$ eine Bijektion*

$$W_p \overset{\sim}{\rightarrow} \mathcal{A}_p = \{B \in \mathcal{A} \mid p \in \bar{B}\}$$

Beweis der Proposition. Wir setzen $W'_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$ und zeigen zunächst, daß W'_p transitiv auf \mathcal{A}_p operiert, in Formeln $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Für $C \in \mathcal{A}_p$ müssen wir dazu $w \in W'_p$ finden derart, daß gilt $C = wA$. Wieder machen wir eine Induktion über die Zahl $d(A, C)$ der Spiegelebenen, die A und C trennen. Ist $A \neq C$, so gibt es nach Lemma 3.2.20 eine Wand H von A , die A von C trennt. Aus $p \in \bar{A} \cap \bar{C}$ folgt $p \in H$. Jetzt ist wieder $d(A, s_H C) = d(s_H A, C) = d(A, C) - 1$ und mit Induktion finden wir $w \in W'_p$ so daß gilt $wA = s_H C$, also $s_H wA = C$. Es folgt wie behauptet $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Nun ist unsere Abbildung $W_p \rightarrow \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$ injektiv nach Satz 3.3.7 und offensichtlich liegt ihr Bild in \mathcal{A}_p . Wir haben aber eben bewiesen, daß die Verknüpfung der beiden Injektionen $W'_p \hookrightarrow W_p \hookrightarrow \mathcal{A}_p$ eine Surjektion ist. Also sind diese Injektionen beide Bijektionen und die Proposition folgt. \square

Jetzt können wir den Beweis des Satzes zu Ende führen. Sei $A \subset E$ ein Alkoven und $p \in E$ ein Punkt unseres affinen Raums. Es gilt zu zeigen, daß die Bahn Wp von p den Abschluß \bar{A} von A in genau einem Punkt trifft, in Formeln

$$|Wp \cap \bar{A}| = 1$$

Jeder Punkt p liegt nach 3.2.16 im Abschluß mindestens eines Alkoven, und nach 3.3.7 trifft die Bahn von p den Abschluß \bar{A} jedes Alkoven A , in Formeln

$Wp \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Wir müssen nur noch zeigen, daß für $A \in \mathcal{A}$, $p \in \bar{A}$ und $x \in W$ aus $xp \in \bar{A}$ folgt $xp = p$. Sicher folgt schon mal A , $xA \in \mathcal{A}_{xp}$, und nach dem vorhergehenden Satz gilt dann $x \in W_{xp}$, also $xxp = xp$, also $xp = p$. \square

Übung 3.4.4. Diejenigen Elemente einer affinen Spiegelungsgruppe, die eine vorgegebene Teilmenge des zugrundeliegenden affinen Raums punktweise festhalten, bilden selber eine Spiegelungsgruppe.

Bemerkung 3.4.5. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe \mathcal{W} auf einem affinen euklidischen Raum E über einem angeordneten Körper wird für beliebige $v, w \in E$ der Abstand $\|v - zw\|$ minimal genau für die $z \in \mathcal{W}$, für die v und zw im Abschluß desselben Alkoven liegen: Werden v und zw nämlich durch eine Wand getrennt, so gilt für die Spiegelung s an dieser Wand notwendig $\|v - zw\| > \|v - szw\|$.

3.5 Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe

Bemerkung 3.5.1. Gegeben zwei Vektoren eines euklidischen Vektorraums sagen wir, sie schließen einen **stumpfen Winkel** bzw. einen **spitzen Winkel** ein genau dann, wenn ihr Skalarprodukt nichtpositiv bzw. nichtnegativ ist.

Lemma 3.5.2. *Gegeben zwei verschiedene Wände eines Alkoven einer affinen Spiegelungsgruppe schließen zwei auf diesen Wänden jeweils senkrecht stehende Vektoren, die in Richtung unseres Alkoven zeigen, stets stumpfe Winkel ein.*

Bemerkung 3.5.3. Anschaulich gesprochen “schließen also je zwei Wände eines Alkoven einer affinen Spiegelungsgruppe besagten Alkoven in einem spitzen Winkel ein”.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Spiegelungsgruppe erzeugt von den Spiegelungen an besagten Wänden H und L und seien α und β Vektoren, die auf diesen Wänden senkrecht stehen und in Richtung unseres Alkoven zeigen. In Formeln behauptet unser Lemma dann $(\alpha, \beta) \leq 0$. Sind unsere Wände parallel, so ist die Behauptung eh klar. Sonst können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser affiner euklidischer Raum ein euklidischer Vektorraum ist und beide Spiegelungen linear. Sicher finden wir nun $v \in H$ mit $(\beta, v) < 0$, also $(\beta, s_L v) > 0$. Aus $(\alpha, \beta) > 0$ folgte

$$(\alpha, s_L v) = (s_L \alpha, v) = \left(\alpha - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, v \right) > 0$$

und damit läge $s_L v$ gleichzeitig auf der Spiegelebene $s_L H$ und in unserem Alkoven. Das kann aber nicht sein, also gilt $(\alpha, \beta) \leq 0$. \square

Bemerkung 3.5.4. Dieses Lemma wäre auch ein natürlicher erster Schritt zur Klassifikation derjenigen Spiegelungsgruppen, die von zwei Spiegelungen erzeugt werden.

Proposition 3.5.5. *Wählen wir für jede Wand eines festen Alkoven einer endlichen linearen Spiegelungsgruppe eine lineare Gleichung, so sind diese Gleichungen linear unabhängig als Elemente des Dualraums.*

Beweis. Seien H_1, \dots, H_n die Wände unseres Alkoven seien $\alpha_i \in V$ auf H_i senkrechte Vektoren, die jeweils auf derselben Seite der Hyperebene H_i liegen wie unser Alkoven. Es reicht zu zeigen, daß die α_i linear unabhängig sind. Nach 3.5.2 schließen diese Vektoren jedoch paarweise stumpfe Winkel ein, in Formeln $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ falls $i \neq j$, und wählen wir $\gamma \in A$, so gilt $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i . Die lineare Unabhängigkeit der α_i folgt damit aus dem anschließenden Lemma 3.5.6. \square

Lemma 3.5.6. *Liegen Vektoren eines euklidischen Vektorraums alle auf derselben Seite einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie paarweise stumpfe Winkel ein, so sind sie linear unabhängig.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer endlichen Familie von Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ausgehen. Unsere Forderungen sagen in Formeln, daß es einen Vektor γ gibt mit $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i und daß gilt $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ für $i \neq j$. Sei nun $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = 0$ eine verschwindende Linearkombination der α_i . Es folgt

$$\sum_{i \in I} c_i \alpha_i = \sum_{i \in J} -c_i \alpha_i$$

mit $I = \{i \mid c_i \geq 0\}$ und $J = \{i \mid c_i < 0\}$. Das Skalarprodukt der linken mit der rechten Seite der Gleichung ist nichtpositiv, da unsere Vektoren paarweise stumpfe Winkel einschließen. Also steht auf beiden Seiten der Gleichung der Nullvektor. Wir bilden nun unabhängig das Skalarprodukt beider Seiten mit γ und folgern, daß alle c_i verschwinden. \square

3.6 Struktur affiner Spiegelungsgruppen

Lemma 3.6.1. *In einem endlichdimensionalen euklidischen Raum ist eine Menge von Vektoren, die paarweise stumpfe Winkel einschließen, stets endlich.*

Beweis. Wir zeigen durch Induktion sogar präziser, daß so eine Teilmenge in einem n -dimensionalen Raum höchstens $n(n+1)/2$ Vektoren enthalten kann.

Gibt es in der Tat unter unseren Vektoren einen von Null verschiedenen Vektor v , so schließen nach 3.5.6 höchstens n unserer Vektoren einen echt stumpfen Winkel mit v ein. Mit Induktion stehen weiter höchstens $n(n-1)/2$ unserer Vektoren auf v senkrecht. \square

Bemerkung 3.6.2. In 6.4.12 werden wir die im Beweis von 3.6.1 hergeleitete obere Schranke zu $2n + 1$ verbessern. Diese Schranke wird auch wirklich erreicht, zum Beispiel wenn man die Vektoren der Standardbasis sowie ihre Negativen betrachtet und dann noch den Nullvektor hinzunimmt.

Lemma 3.6.3. *Jeder Alkoven einer affinen Spiegelungsgruppe hat nur endlich viele Wände.*

Beweis. Gegeben ein Alkoven wählen wir zu jeder seiner Wände einen darauf senkrechten Richtungsvektor, der in Richtung des Alkovens zeigt. Nach 3.5.2 schließen diese Vektoren paarweise stumpfe Winkel ein. Das Lemma folgt damit aus 3.6.1. \square

Lemma 3.6.4. *Die linearen Anteile der Elemente einer affinen Spiegelungsgruppe bilden eine endliche Spiegelungsgruppe.*

Beweis im Reellen. Es reicht zu zeigen, daß die Menge aller Normalenvektoren auf Spiegelebenen endlich ist. In der Tat operiert nämlich unsere Gruppe linearer Anteile treu auf dieser Menge, da sie ja deren orthogonales Komplement punktweise festhalten muß. Wäre jedoch unsere Menge von Normalenvektoren nicht endlich, so gäbe es wegen der Kompaktheit der Einheitskugel Spiegelebenen, die beliebig kleine positive Winkel einschließen. Wir zeigen, daß damit auch zwischen den Wänden eines und jedes Alkovens beliebig kleine positive Winkel vorkämen, im Widerspruch zu 3.6.3. In der Tat: Für zwei Spiegelebenen, die sich treffen, gibt es nur endlich viele Spiegelebenen, die die Schnittgerade umfassen. Auf dieser Schnittgeraden finden wir Punkte, die in keiner zusätzlichen Spiegelebene enthalten sind. Solch ein Punkt liegt dann im Abschluß eines Alkovens, und zwei Wände dieses Alkovens, die den besagten Punkt enthalten, schließen dann höchstens denselben Winkel ein wie die beiden Spiegelebenen, von denen wir ausgegangen waren. \square

Beweis im Allgemeinen. Unterteilen wir die Oberfläche eines Einheitswürfels um den Nullpunkt in noch so kleine Schachfelder, so müßten doch zwei verschiedene Normalengeraden auf Spiegelebenen durch dasselbe Feld gehen. Der Rest des Arguments bleibt dem Leser überlassen. \square

Definition 3.6.5. Ein affine Spiegelungsgruppe heißt **essentiell** genau dann, wenn die darin enthaltenen Translationen den Raum aller Richtungsvektoren aufspannen.

Definition 3.6.6. Zwei affine Spiegelungsgruppen (W, E) und (W', E') heißen **isomorph** genau dann, wenn es einen orthogonalen affinen Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, unter dem sich W und W' entsprechen. Die Spezifikation “orthogonal” meint dabei die Orthogonalität der Linearisierung.

Bemerkung 3.6.7. Gegeben affine Spiegelungsgruppen (W_1, E_1) und (W_2, E_2) ist auch $(W_1 \times W_2, E_1 \times E_2)$ eine affine Spiegelungsgruppe in offensichtlicher Weise.

Satz 3.6.8 (Abspalten eines maximalen endlichen Faktors). *Jede affine Spiegelungsgruppe (W, E) ist isomorph zu einem Produkt*

$$(W, E) \cong (W_a, E_a) \times (W_f, E_f)$$

einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe (W_a, E_a) mit einer endlichen Spiegelungsgruppe (W_f, E_f) , und die beiden Faktoren sind durch (W, E) bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Beweis. Bezeichnet $T \subset W$ die Untergruppe aller Translationen aus W , so bildet der lineare Anteil jeder Spiegelung das Vektorraumergebnis L von T auf sich selbst ab. Folglich liegt der (-1) -Eigenraum jeder linearisierten Spiegelung entweder in L oder in L^\perp . Nennen wir W_a das Erzeugnis der ersteren Spiegelungen und W_f das Erzeugnis der letzteren, so liefert die Multiplikation offensichtlich einen Isomorphismus

$$W_a \times W_f \xrightarrow{\sim} W$$

Wählen wir $e \in E$ beliebig und setzen $E_a = e + L$ und $E_f = e + L^\perp$, so operiert W_f als translationsfreie affine Spiegelungsgruppe auf E_f und ist mithin endlich nach 3.6.4. Der Satz ist bewiesen. \square

3.7 Klassifikation und euklidische Wurzelsysteme

Definition 3.7.1. Eine Teilmenge R eines euklidischen Vektorraums heißt ein **euklidisches Wurzelsystem** genau dann, wenn gilt:

1. Die Menge R ist endlich und erzeugt V ;
2. Außer seinem Negativen gehört kein Vielfaches eines Elements von R wieder zu R , d.h. für jedes $\alpha \in R$ gilt $k\alpha \cap R \subset \{\alpha, -\alpha\}$;
3. Die Null gehört nicht zu R , für alle $\alpha \in R$ führt die orthogonale Spiegelung s_α an der Hyperebene α^\perp unsere Menge R in sich selbst über, und für alle $\beta \in R$ haben wir $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$.

Bemerkung 3.7.2. Es sind verschiedene Konventionen für den Begriff eines Wurzelsystems gebräuchlich. Insbesondere wird in der englischsprachigen Literatur auch oft die Menge der Normalenvektoren auf den Spiegelebenen einer endlichen orthogonalen Spiegelungsgruppe als Wurzelsystem bezeichnet. Wir halten uns an die französische Konvention aus Bourbaki und verstehen unter einem Wurzelsystem das, was in der englischsprachigen Literatur ein **kristallographisches Wurzelsystem** genannt würde. Der Begriff eines euklidischen Wurzelsystems ist meines Wissens noch nicht belegt. Die Elemente eines wie auch immer gearteten Wurzelsystems bezeichnet man als **Wurzeln**.

Definition 3.7.3. Die **Weylgruppe** eines euklidischen Wurzelsystems ist die Gruppe, die von den Spiegelungen an den orthogonalen Komplementen der Wurzeln erzeugt wird.

Bemerkung 3.7.4. Nach 3.3.7 ist die Weylgruppe eines euklidischen Wurzelsystems eine endliche Spiegelungsgruppe und die Spiegelebenen dieser Spiegelungsgruppe sind genau die orthogonalen Komplemente der Wurzeln.

Definition 3.7.5. Die **affine Weylgruppe** eines euklidischen Wurzelsystems ist diejenige Gruppe von affinen Bewegungen des unserem Wurzelsystem zugrundeliegenden Vektorraums, die erzeugt wird von der endlichen Weylgruppe des Wurzelsystems und den Verschiebungen um Wurzeln.

Bemerkung 3.7.6. Ist $R \subset V$ unser euklidisches Wurzelsystem, so notieren wir die endliche Weylgruppe $W = W(R)$ und die affine Weylgruppe $\mathcal{W} = \mathcal{W}(R)$. Bezeichnet $\langle R \rangle \subset V$ das Wurzelgitter, so haben wir demnach eine kurze exakte Sequenz $\langle R \rangle \hookrightarrow \mathcal{W} \twoheadrightarrow W$, wobei die Surjektion jeder affinen Bewegung aus \mathcal{W} ihren linearen Anteil zuordnet.

Satz 3.7.7 (Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme). *Das Bilden der affinen Weylgruppe liefert über jedem angeordneten Körper eine Bijektion von Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Euklidische} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Essentielle affine} \\ \text{Spiegelungsgruppen} \end{array} \right\}$$

Bemerkung 3.7.8. Der Beweis wird im Folgenden in eine Reihe von Lemmata aufgebrochen. Genauer wird in 3.7.9 gezeigt, daß die affine Weylgruppe eines euklidischen Wurzelsystems in der Tat eine essentielle affine Spiegelungsgruppe ist und in 3.7.12 und seinem Beweis wird eine inverse Abbildung konstruiert.

Lemma 3.7.9. *Die affine Weylgruppe eines euklidischen Wurzelsystems ist eine affine Spiegelungsgruppe und ihre Spiegelebenen sind genau die affinen Ebenen $H_{\alpha,n} = \alpha^\perp + (n/2)\alpha$ für $\alpha \in R, n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{H} = \{H_{\alpha,n} \mid \alpha \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ von Hyper-ebenen. Die Spiegelungen $s_{\alpha,n}$ an den $H_{\alpha,n}$ stabilisieren \mathcal{H} , und da \mathcal{H} auch lokal endlich ist, muß \mathcal{H} nach 3.3.7 gerade die Menge aller Spiegelebenen der von den $s_{\alpha,n}$ erzeugten affinen Spiegelungsgruppe \mathcal{W}' sein. Offensichtlich gilt $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, aber da $s_{\alpha,1}s_{\alpha,0} : \lambda \mapsto \lambda + \alpha$ gerade die Verschiebung um die Wurzel $\alpha \in R$ ist, gilt auch umgekehrt $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ und mithin $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$. \square

Definition 3.7.10. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe heißt ein Punkt des zugrundeliegenden affinen Raums ein **spezieller Punkt** genau dann, wenn es für jede Spiegelebene unserer Gruppe eine parallele Spiegelebene unserer Gruppe gibt, die durch besagten Punkt geht.

Lemma 3.7.11. *Für jede affine Spiegelungsgruppe gibt es mindestens einen speziellen Punkt.*

Beweis. Betrachten wir einen Alkoven der nach 3.6.4 endlichen Spiegelungsgruppe aller linearen Anteile unserer affinen Spiegelungsgruppe und wählen für jede Wand dieses Alkoven einen darauf senkrechten Vektor, so sind besagte Vektoren linear unabhängig nach 3.5.5. Wählen wir zu jeder Spiegelung an einer dieser Wände ein Urbild in der affinen Spiegelungsgruppe, so haben die zugehörigen affinen Spiegelebenen folglich nichtleeren Schnitt. Wir behaupten, daß jeder Punkt aus diesem Schnitt ein spezieller Punkt ist. In der Tat erzeugen ja unsere Urbilder eine Untergruppe unserer affinen Spiegelungsgruppe, die besagten Punkt festhält und die surjektiv auf die Gruppe aller linearen Anteile unserer affinen Gruppe geht. \square

Lemma 3.7.12. *Jede essentielle affine Spiegelungsgruppe ist isomorph zur affinen Weylgruppe eines euklidischen Wurzelsystems.*

Beweis. Sei (W, E) unsere Spiegelungsgruppe. Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller ihrer Spiegelebenen, und jede Parallelenklasse von Spiegelebenen ist offensichtlich von der Gestalt

$$\{H + nv\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

für eine Spiegelebene H und einen darauf senkrechten Richtungsvektor v . Die Verschiebung um $\alpha = 2v$ gehört notwendig zu W als die Verknüpfung $s_{H+v} \circ s_H$. Bezeichnet nun R die Menge aller so konstruierten Vektoren α und ist $e \in E$ ein spezieller Punkt und W_e seine Isotropiegruppe, so liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$W_e \times \langle R \rangle \xrightarrow{\sim} W$$

In der Tat liegen nämlich alle Spiegelungen bereits im Bild dieser Abbildung und die Injektivität ist eh klar. Ist W essentiell, so spannt folglich R den

Raum der Richtungsvektoren auf. Weiter ist mit e auch $\alpha + e$ ein spezieller Punkt für alle $\alpha \in R$, und das zeigt umgekehrt, daß R ein euklidisches Wurzelsystem ist und W seine affine Weylgruppe. \square

Bemerkung 3.7.13. Ist eine endliche lineare reelle Spiegelungsgruppe kristallographisch und ist der Ursprung ihr einziger Fixpunkt, so ist sie die Isotropiegruppe des Ursprungs in einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe. In der Tat besitzt jede Spiegelebene dann eine Gleichung, die auf dem Gitter nur ganzzahlige Werte annimmt. Alle Parallelen durch Gitterpunkte zu Spiegelebenen bilden deshalb ein lokal endliches System von Hyperebenen und nach 3.3.7 ist dieses System das System aller Spiegelebenen einer affinen Spiegelungsgruppe, von der man leicht sieht, daß sie essentiell sein muß.

Die acht Vektoren eines euklidischen Wurzelsystems vom Typ B_2 in der
Papierebene und die Spiegelebenen seiner affinen Weylgruppe.

4 Wurzelsysteme

4.1 Endliche Spiegelungsgruppen ohne Skalarprodukt

Bemerkung 4.1.1. Bei der Behandlung von Wurzelsystemen von Lie-Algebren und auch bereits bei der Klassifikation von Wurzelsystemen werden wir zu tun haben mit Spiegelungen auf Vektorräumen über nicht notwendig angeordneten Körpern und mit Spiegelungsgruppen in Vektorräumen, die nicht notwendig bereits mit einem Skalarprodukt versehen sind. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir unsere Begriffe aus 3.1 auf diese Fälle.

Definition 4.1.2. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik $\text{char } k \neq 2$. Eine lineare Abbildung $s : V \rightarrow V$ heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **lineare Spiegelung** genau dann, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene, in Formeln $s^2 = \text{id}_V$ und $\dim V/V^s = 1$. Wir nennen V^s die **Spiegelhyperebene** oder abkürzend auch die **Spiegelebene** der Spiegelung s .

Bemerkung 4.1.3. Wegen unserer Annahme $\text{char } k \neq 2$ hat jedes $v \in V$ die Zerlegung $v = (v+sv)/2 + (v-sv)/2$. Wir folgern die Zerlegung $V = V^s \oplus V^{-s}$ von V in Eigenräume von s zu den Eigenwerten ± 1 . Insbesondere ist der Eigenraum zum Eigenwert -1 einer Spiegelung stets eine Gerade, in Formeln $\dim_k V^{-s} = 1$. Ist V ein Vektorraum und V^* sein Dualraum, so schreiben wir für den Wert $f(\lambda)$ von $f \in V^*$ an der Stelle $\lambda \in V$ auch $\langle f, \lambda \rangle$ oder sogar $\langle \lambda, f \rangle$. Wählen wir nun in V einen Eigenvektor α unserer Spiegelung s zum Eigenwert -1 und diejenige Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\ker \alpha^\vee = V^s$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, so gilt

$$s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

für alle λ in $V = k\alpha \oplus V^s$. Umgekehrt erhalten wir für beliebige $\alpha \in V$, $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ eine Spiegelung s_{α, α^\vee} durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} s_{\alpha, \alpha^\vee} : V &\rightarrow V \\ \lambda &\mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.4. Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper und ist die Spiegelung $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts (\cdot, \cdot) auf V , in Formeln $(s\lambda, s\mu) = (\lambda, \mu) \quad \forall \lambda, \mu \in V$, so gilt offensichtlich $V^s = \alpha^\perp = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}$ und wir haben

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 2(\lambda, \alpha) / (\alpha, \alpha) \quad \forall \lambda \in V,$$

denn beide Seiten nehmen auf $\lambda = \alpha$ und auf $\lambda \in \alpha^\perp$ denselben Wert an. In anderen Worten bildet der zu unserem Skalarprodukt gehörige Isomorphismus $V \rightarrow V^*$, $\lambda \mapsto (\lambda, \cdot)$ den Vektor $2\alpha / (\alpha, \alpha)$ ab auf α^\vee .

Definition 4.1.5. Eine **endliche Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Lemma 4.1.6. Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von V . So gibt es auf V ein G -invariantes Skalarprodukt.

Beweis. Sei k unser angeordneter Körper und $b : V \times V \rightarrow k$ irgendein Skalarprodukt. Wir erhalten ein G -invariantes Skalarprodukt durch die Vorschrift $i(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$. \square

Lemma 4.1.7. Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $W \subset GL(V)$ eine endliche Spiegelungsgruppe. Haben zwei Spiegelungen $s, t \in W$ dieselbe Spiegelebene, so stimmen sie überein.

Beweis. Sei $H = V^s = V^t$ die gemeinsame Spiegelebene. Für jedes W -invariante Skalarprodukt auf V gilt $V = H \oplus H^\perp$. Sowohl s als auch t operieren aber als die Identität auf H und als -1 auf H^\perp . \square

Übung 4.1.8. Man zeige, daß die transponierte Abbildung zu einer Spiegelung $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : V \rightarrow V$ genau die Abbildung $s^\top = s_{\alpha^\vee, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$ ist, wo wir unter α das durch "Auswerten an α " definierte Element des Bidualraums V^{**} verstehen.

Bemerkung 4.1.9. Es scheint mir auch sinnvoll, affine Spiegelungsgruppen ohne Skalarprodukt zu betrachten. Man würde von Ihnen fordern, daß jedes endliche Geradensegment nur von endlich vielen Spiegelungen unserer Gruppe die Spiegelebenen trifft.

4.2 Wurzelsysteme

Definition 4.2.1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null. Eine Teilmenge $R \subset V$ heißt ein **Wurzelsystem** oder präziser ein **reduziertes Wurzelsystem** genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Menge R ist endlich und erzeugt V ;
2. Außer ihrem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel, d.h. für jedes $\alpha \in R$ gilt $k\alpha \cap R \subset \{\alpha, -\alpha\}$;
3. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine Spiegelung $s : V \rightarrow V$ im Sinne von 4.1.2 mit $s(\alpha) = -\alpha$, $s(R) \subset R$ und $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \quad \forall \beta \in R$.

Bemerkung 4.2.2. Die Elemente eines Wurzelsystems nennt man **Wurzeln**. Wir werden gleich sehen, daß es zu jeder Wurzel α nur eine Spiegelung s geben kann, die 3 erfüllt. Wir notieren sie $s = s_\alpha$ und nennen sie die **Spiegelung zur Wurzel α** . Eine Teilmenge $R \subset V$, die nur 1 und 3 erfüllt, nennt man ein **nichtreduziertes Wurzelsystem**. Der Nullvektor $\alpha = 0$ kann nie zu einem Wurzelsystem gehören, da jede Spiegelung s für $\alpha = 0$ mit der Eigenschaft aus der Bedingung 3 nach der Bedingung 1 die Identität sein müßte. Die leere Menge ist jedoch ein Wurzelsystem im Nullvektorraum.

Übung 4.2.3. Die Menge R aller Vektoren aus \mathbb{Z}^8 mit euklidischer Länge $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2 = 8$ ist ein Wurzelsystem in \mathbb{R}^8 . Dies Wurzelsystem trägt übrigens den Namen E_8 .

Bemerkung 4.2.4. Im Abschnitt 2.5 hatten wir jedem Paar $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ bestehend aus einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} mit einer Cartan'schen Unter-algebra \mathfrak{h} eine Teilmenge $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ zugeordnet und das "Wurzelsystem der Liealgebra" genannt. Nach ??3 und 2.5.16 ist diese Teilmenge in der Tat ein Wurzelsystem im Sinne der vorhergehenden Definition. Wir studieren im folgenden solche Wurzelsysteme zunächst einmal unabhängig von der Theorie der Lie-Algebren. Es wird sich jedoch später herausstellen, daß die Wurzelsysteme in komplexen Vektorräumen im Sinne der vorhergehenden Definition genau die Wurzelsysteme zu komplexen halbeinfachen Lie-Algebren sind.

Bemerkung 4.2.5. Ich habe mich in der vorhergehenden Definition an die Terminologie von Bourbaki gehalten. In anderen Quellen fordert man von einem Wurzelsystem schwächer als in 3 formuliert nicht $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$ und bezeichnet diejenigen Wurzelsysteme, die diese Bedingung doch erfüllen, als **kristallographisch**.

Bemerkung 4.2.6. In der Literatur bezeichnet man als Wurzelsysteme auch oft diejenigen Teilmengen von *reellen euklidischen* Vektorräumen, die wir in 3.7.1 "euklidische Wurzelsysteme" genannt hatten. Auch nach diesen Quellen gibt es jedoch bis auf Isomorphismus nur ein Wurzelsystem in einem eindimensionalen Raum, als da heißt, man bezahlt für die Anschaulichkeit der Definition damit, daß der Begriff eines Isomorphismus von Wurzelsystemen unnatürlich wird und es a priori nicht mehr klar ist, wie sich die Operation der Weylgruppe und andere mithilfe der euklidischen Struktur konstruierte Dinge unter Isomorphismen von Wurzelsystemen verhalten.

Beispiele 4.2.7. Das Bild zeigt eine Liste von Wurzelsystemen im Raum der Richtungsvektoren der Papierebene derart, daß jedes Wurzelsystem in einem reellen zweidimensionalen Raum durch eine invertierbare lineare Abbildung in genau eines der vier Systeme der Liste überführt werden kann. Die Bilder sind darüber hinaus so gewählt, daß die Spiegelungen an den Wurzeln alle

orthogonal sind für das Standard-Skalarprodukt auf dem Raum der Richtungsvektoren der Papierebene. Wir werden die Vollständigkeit dieser Liste zum Schluß dieses Abschnitts rechtfertigen.

Satz 4.2.8 (Kowurzeln und rationale Form). *Sei V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $R \subset V$ ein Wurzelsystem. So gilt:*

1. *Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es genau eine Spiegelung $s_\alpha : V \rightarrow V$ mit $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $s_\alpha(R) = R$. Die Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ mit*

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in V$$

*heißt dann die **Kowurzel** oder **duale Wurzel** zu α .*

2. *Die Menge $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ aller Kowurzeln ist ein Wurzelsystem in V^* und für die kanonische Abbildung $V \rightarrow (V^*)^*$ gilt $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$.*
3. *Genau dann bilden Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$ eine k -Basis von V , wenn sie eine \mathbb{Q} -Basis des von R in V aufgespannten \mathbb{Q} -Vektorraums $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ bilden.*

Beweis. Da V von R erzeugt wird, gilt sicher $\dim_{\mathbb{Q}} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \geq \dim_k V$. Jede Spiegelung $s_\alpha : V \rightarrow V$ wie oben stabilisiert natürlich $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und liegt in der endlichen Untergruppe $G = \{g \in \text{GL} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid g(R) \subset R\}$. Wählen wir mithilfe von 4.1.6 ein G -invariantes Skalarprodukt $(\ , \)$ auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$, so muß s_α auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ die orthogonale Spiegelung an der zu α orthogonalen Hyperebene induzieren. Damit ist s_α eindeutig festgelegt auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und dann auch auf $V = \langle R \rangle_k$. Das zeigt die Eindeutigkeit von s_α und liefert die Kowurzeln $\alpha^\vee \in V^*$. Sicher nimmt jede Kowurzel α^\vee auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ nur rationale Werte an, d.h. ihre Restriktion auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ gehört zum Dualraum $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ des \mathbb{Q} -Vektorraums $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Unter dem durch unser invariantes Skalarprodukt vermittelten Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ haben wir nun $\alpha^\vee|_{\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}} \mapsto 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, folglich wird $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ erzeugt von den Restriktionen der Kowurzeln. Wählen wir eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ aus Wurzeln und eine Basis $\beta_1^\vee, \dots, \beta_n^\vee$ von $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ aus Restriktionen von Kowurzeln, so ist die Matrix der $\langle \alpha_i, \beta_j^\vee \rangle$ invertierbar und damit sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bzw. $\beta_1^\vee, \dots, \beta_n^\vee$ auch k -linear unabhängig in V bzw. V^* . Es folgt die dritte Behauptung des Satzes. Es bleibt, die zweite Behauptung nachzuweisen. Daß R^\vee ein endliches Erzeugendensystem von V^* ist, folgt aus dem Vorhergehenden; Daß gilt $k\alpha^\vee \cap R^\vee = \{\alpha^\vee, -\alpha^\vee\}$ desgleichen. Haben wir nun irgendeinen Isomorphismus von Vektorräumen $\varphi : V \xrightarrow{\sim} U$ und ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem, so ist natürlich auch $\varphi(R) \subset U$ ein Wurzelsystem und gegeben $\beta \in R$ gilt $\varphi(\beta)^\vee = (\varphi^\top)^{-1}(\beta^\vee)$ für $\varphi^\top : U^* \rightarrow V^*$ die zu φ transponierte

Abbildung. Gegeben $\alpha \in R$ ist schließlich die transponierte Abbildung zur Spiegelung $s_\alpha = s_{\alpha, \alpha^\vee} : V \rightarrow V$ die Spiegelung $s_\alpha^\top = s_{\alpha^\vee, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$. Für $\varphi = s_\alpha$ erhalten wir insbesondere

$$(s_\alpha \beta)^\vee = s_\alpha^\top(\beta^\vee) = \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee$$

Wir sehen daraus, daß s_α^\top die Bedingungen erfüllt, die von einer Spiegelung zu α^\vee als Element des Wurzelsystems in $\text{spe } R^\vee$ gefordert werden, und das zeigt gleich auch noch $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$. \square

Definition 4.2.9. Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Die von den Spiegelungen zu den Wurzeln erzeugte Untergruppe $W = W(R) \subset \text{GL}(V)$ heißt die **Weylgruppe** des Wurzelsystems.

Bemerkung 4.2.10. Der Nullvektor ist der einzige Vektor von V , der von der Weylgruppe festgehalten wird. In der Tat erzeugen die Kowurzeln den Dualraum, folglich ist der Schnitt ihrer Kerne Null.

Beispiel 4.2.11. Die Menge $R = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ aller Differenzen zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des \mathbb{R}^n ist ein Wurzelsystem in $V = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$. Wir betrachten $\varepsilon_i \in V^*$ mit $\varepsilon_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$. Für $\alpha = e_i - e_j$ ist dann die Kowurzel $\alpha^\vee = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, und die Spiegelung s_α vertauscht die i -te mit der j -ten Koordinate. Insbesondere besteht $W(R) \cong \mathcal{S}_n$ aus den Permutationen der Koordinaten.

Bemerkung 4.2.12. Die Einschränkung auf den \mathbb{Q} -Spann der Wurzeln $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ definiert eine natürliche Einbettung $W \subset \text{Aut} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Diese Einbettung indentifiziert die Weylgruppe mit einer endlichen Spiegelungsgruppe im Sinne von ???. Die Alkoven in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ heißen in diesem Zusammenhang meist **Weylkammern**.

Lemma 4.2.13. *Jede Spiegelung in der Weylgruppe eines Wurzelsystems ist eine Spiegelung zu einer Wurzel.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit R ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über \mathbb{Q} . Nach 3.3.7 ist jede Spiegelung s aus der Weylgruppe schon mal konjugiert zu einer Spiegelung zu einer Wurzel $\beta \in R$. Wir folgern $s = w s_\beta w^{-1} = s_{w\beta} = s_\alpha$ mit $\alpha = w\beta \in R$. \square

Lemma 4.2.14 (Paare von Wurzeln). *Für je zwei nichtproportionale Wurzeln α, β eines Wurzelsystems gilt $0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$. Genauer wird der Winkel zwischen je zwei Wurzeln α und β bezüglich jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts (\cdot, \cdot) auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ gegeben durch*

$$4 \cos^2(\text{Winkel zwischen } \alpha \text{ und } \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$$

und je zwei nichtorthogonale Wurzeln haben das Längenverhältnis

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$$

Beweis. Beides folgt sofort aus unserer Formel $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$. \square

Bemerkung 4.2.15. Ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem mit Weylgruppe W , so bezeichnen wir ganz allgemein die von W und den Verschiebungen um Wurzeln erzeugte Gruppe \mathcal{W} von affinen Bewegungen von V als die **affine Weylgruppe** unseres Wurzelsystems. Sicher stabilisiert diese Gruppe $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$, und versehen wir $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ mit einem W -invarianten Skalarprodukt, so erhalten wir die affine Spiegelungsgruppe des euklidischen Wurzelsystems $R \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ im Sinne von 3.7.5. Die Spiegelebenen dieser affinen Spiegelungsgruppe sind genau die Hyperebenen $H_{\alpha, n} = \{\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = n\}$ für $(\alpha, n) \in R \times \mathbb{Z}$ und die zugehörigen Spiegelungen werden auf ganz V gegeben durch die Vorschrift $s_{\alpha, n} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha + n\alpha$.

4.3 Basen von Wurzelsystemen

Definition 4.3.1. Eine Teilmenge $\Pi \subset R$ eines Wurzelsystems heißt eine **Basis des Wurzelsystems** genau dann, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Π ist eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraums V ;
2. Schreiben wir eine Wurzel $\beta \in R$ als Linearkombination $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ der Elemente von Π , so liegen die Koeffizienten n_α entweder alle in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ oder alle in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Definition 4.3.2. Eine Teilmenge $R^+ \subset R$ eines Wurzelsystems heißt ein **System positiver Wurzeln** genau dann, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Das Wurzelsystem läßt sich schreiben als die disjunkte Vereinigung $R = R^+ \amalg (-R^+)$, d.h. für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt $\alpha \in R^+ \Leftrightarrow (-\alpha) \notin R^+$.
2. Aus $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^+$ und $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R$ folgt $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R^+$.

Satz 4.3.3 (Weylkammern, Basen und Systeme positiver Wurzeln).

Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
 \{ \text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \} & \xrightarrow{6} & \{ \text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \} \\
 4^{\vee} \uparrow \downarrow 3^{\vee} & & 4 \uparrow \downarrow 3 \\
 \{ \text{Basen von } R \} & \xrightarrow{5} & \{ \text{Basen von } R^{\vee} \} \\
 2 \uparrow \downarrow 1 & & 2^{\vee} \uparrow \downarrow 1^{\vee} \\
 \{ \text{Systeme positiver Wurzeln in } R \} & \xrightarrow{5} & \{ \text{Systeme positiver Wurzeln in } R^{\vee} \}
 \end{array}$$

vermittels der Abbildungen, die wir im folgenden genauer beschreiben:

1. Jeder Basis $\Pi \subset R$ ordnet man als positives System die Menge $R^+(\Pi)$ aller Wurzeln zu, die sich schreiben lassen als nichtnegative Linearkombination der Basiselemente.
2. Jedem System positiver Wurzeln ordnet man als Basis die Menge aller derjenigen Elemente des Systems zu, die sich nicht als Summe von zwei oder mehr Elementen des besagten Systems schreiben lassen.
3. Jeder Weylkammer im rationalen Spann der Wurzeln ordnet man als Basis des dualen Wurzelsystems die Menge derjenigen Kowurzeln zu, die Gleichungen von Wänden unserer Kammer sind und die auf der Kammer positive Werte annehmen.
4. Jeder Basis des dualen Wurzelsystems ordnet man als Kammer den Schnitt derjenigen Halbräume zu, auf denen alle Elemente besagter Basis positive Werte annehmen.
5. Jeder Menge von Wurzeln ordnen die beiden unteren horizontalen Pfeile die Menge der zugehörigen Kowurzeln zu.
6. Jeder Kammer in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ ordnet die obere Horizontale ihr Bild unter einem und jedem Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ zu, der von einem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt induziert wird.

Beweis. Nur bei den Abbildungen 1 und 6 scheint mir a priori klar, daß sie überhaupt im behaupteten Wertebereich landen. Als nächstes überlegen wir uns das für die in 3 gegebene Abbildung und zeigen dabei insbesondere, daß jedes Wurzelsystem überhaupt Basen besitzt. Wir geben unserer Abbildung den Namen Φ , in Formeln gilt für jede Weylkammer $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ also

$$\Phi(A) = \{ \alpha^{\vee} \in R^{\vee} \mid (\ker \alpha^{\vee}) \in \mathcal{H}_A, \langle A, \alpha^{\vee} \rangle \subset \mathbb{Q}_{>0} \}$$

Nach 3.5.5 ist $\Phi(A)$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ und dann nach 4.2.8.3 auch von V^* . Nach 3.3.7 erzeugen weiter die Spiegelungen s_{α} an den Wänden einer Kammer die gesamte Weylgruppe, nach 4.2.10 ist demnach der Schnitt dieser Wände alias der Schnitt der Kerne der zugehörigen Kowurzeln der Nullraum, folglich bilden die fraglichen Kowurzeln sogar eine Basis von V^* und $\Phi(A)$ erfüllt die erste Bedingung an eine Basis eines Wurzelsystems. Stellen wir nun $\beta^{\vee} \in R^{\vee}$ dar als Linearkombination

$$\beta^{\vee} = \sum_{\alpha \in \Phi(A)} n_{\alpha\beta} \alpha^{\vee}$$

so liegen sicher alle $n_{\alpha\beta}$ in \mathbb{Q} und haben sogar alle dasselbe Vorzeichen, da unsere Kowurzel β^{\vee} auf dem Abschluß der Kammer \bar{A} und insbesondere auf den Vektoren der zu $\Phi(A)$ dualen Basis des Vektorraums $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ keine Werte mit verschiedenen Vorzeichen annehmen darf. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß hier alle $n_{\alpha\beta}$ in \mathbb{Z} liegen. Da aber alle Alkoven in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ konjugiert sind zu A unter W , ist auch jede Spiegelebene konjugiert zu einer Wand von A und damit jede Kowurzel zu einer Kowurzel aus $\Phi(A)$, in Formeln $R^{\vee} = W\Phi(A)$. Die von $\Phi(A)$ in $\langle R^{\vee} \rangle_{\mathbb{Q}}$ erzeugte Untergruppe $\langle \Phi(A) \rangle = \langle \Phi(A) \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist aber offensichtlich stabil unter W und wir folgern $R^{\vee} \subset \langle \Phi(A) \rangle$. Unser $\Phi(A)$ ist also tatsächlich eine Basis von R^{\vee} . Wir geben nun der Abbildung 4 in die andere Richtung den Namen C , in Formeln gilt für eine Basis Π^{\vee} von R^{\vee} also

$$C(\Pi^{\vee}) = \{ \lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle > 0 \quad \forall \alpha^{\vee} \in \Pi^{\vee} \}$$

Hier ist $C(\Pi^{\vee})$ eine Weylkammer als ein Schnitt von Halbräumen zu Spiegelebenen, der von keiner Spiegelebene getroffen wird, und das wiederum folgt, da Π^{\vee} eine Basis von R^{\vee} ist. Wir zeigen schließlich, daß unsere beiden Abbildungen C und Φ zueinander invers sind. Für jede Kammer A folgt aus 3.2.20 sofort $C(\Phi(A)) = A$. Ist umgekehrt $\Pi^{\vee} \subset R^{\vee}$ eine Basis, so sind die bezüglich Π^{\vee} positiven Kowurzeln genau die Kowurzeln, die auf der Kammer $C(\Pi^{\vee})$ positive Werte annehmen, und alle Wurzeln aus $\Phi(C(\Pi^{\vee}))$ sind insbesondere positive Wurzeln für Π^{\vee} . Nun ist aber Π^{\vee} offensichtlich die einzige Basis von R^{\vee} , die aus bezüglich Π^{\vee} positiven Kowurzeln besteht. Also haben wir auch $\Phi(C(\Pi^{\vee})) = \Pi^{\vee}$. Damit ist gezeigt, daß die in 3 und 4 angegebenen Abbildungen in der Tat zueinander inverse Bijektionen liefern. Weiter ist offensichtlich, daß wir eine Basis aus ihrem System von positiven Wurzeln zurückgewinnen können durch die in 2 beschriebene Konstruktion. Es ist also klar, daß 1 und 2 zueinander inverse Isomorphismen sind, sobald wir zeigen, daß 1 surjektiv ist, daß also jedes System positiver Wurzeln von einer Basis herkommt. Um das zu zeigen beachten wir:

Lemma 4.3.4. *Ist R ein Wurzelsystem, $\Pi \subset R$ eine Basis von R und $R^+ = R^+(\Pi)$ das zugehörige System positiver Wurzeln, so gilt für alle Wurzeln aus unserer Basis $\alpha \in \Pi$ die Formel*

$$s_\alpha R^+ = (R^+ \setminus \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

Beweis. Formal sieht man dies Lemma leicht ein, denn aus der Definition folgt für α eine Wurzel von Π schon $(R^+ + \mathbb{Z}\alpha) \cap R = R^+ \cup \{-\alpha\}$. Anschaulich bedeutet das Lemma, daß das Bild einer Weylkammer unter der Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch diese Spiegelebene von sich selbst getrennt wird. \square

Sei nun P^+ ein System positiver Wurzeln und Π eine Basis von R derart, daß $P^+ \cap R^+(\Pi)$ soviel Elemente hat wie möglich. Wäre $P^+ \neq R^+(\Pi)$, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha \notin P^+$. Aber dann hätte $P^+ \cap R^+(s_\alpha \Pi)$ noch mehr Elemente als $P^+ \cap R^+(\Pi)$, im Widerspruch zur Wahl von Π . Also kommt jedes System positiver Wurzeln in der Tat von einer Basis her und die in 1 und 2 angegebenen Abbildungen liefern zueinander inverse Bijektionen. Wir wählen schließlich ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und betrachten den zugehörigen Isomorphismus $i : \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \rightarrow \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Gehört eine Basis Π von R zum Alkoven $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$, so gehört offensichtlich Π^\vee zum Alkoven $i(A) \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Damit ist der Satz bewiesen bis auf die Kommutativität des Diagramms, deren Nachweis wir dem Leser überlassen. \square

Übung 4.3.5. Ist R^+ ein System positiver Wurzeln eines Wurzelsystems und $l : W \rightarrow \mathbb{N}$ die zu den zugehörigen einfachen Spiegelungen gebildete Länge, so stimmt die Länge eines Elements $w \in W$ überein mit der Zahl der positiven Wurzeln, die es zu negativen Wurzeln macht. In Formeln gilt also $l(w) = |w(R^+) \setminus R^+|$. (Hinweis: 3.3.7.3.)

Korollar 4.3.6. *1. Jede Wurzel eines Wurzelsystems gehört zu mindestens einer Basis.*

2. Gegeben zwei Basen eines Wurzelsystems gibt es genau ein Element der Weylgruppe, das die eine Basis in die andere Basis überführt.

Beweis. Die erste Aussage folgt, da jede Spiegelebene Wand von mindestens einer Weylkammer ist. Die Zweite folgt, da eine endliche Spiegelungsgruppe nach 3.3.7 frei und transitiv auf ihren Weylkammern operiert. \square

Definition 4.3.7. Ein Wurzelsystem mit einer ausgezeichneten Basis nennen wir ein **basiertes Wurzelsystem**. In einem basierten Wurzelsystem nennt man die Elemente der Basis **einfache Wurzeln**, die zugehörigen Kowurzeln **einfache Kowurzeln**, die zugehörigen Spiegelungen **einfache Spiegelungen** und die zugehörige Weylkammer die **dominante Weylkammer**.

Bemerkung 4.3.8. Jedes basierte Wurzelsystem besitzt eine kanonische Involution, die gegeben wird durch die Vorschrift $v \mapsto -w_\circ v$ für w_\circ das in Bezug auf die ausgezeichnete Basis längste Element der Weylgruppe nach 3.3.15. Diese Involution macht einfache Wurzeln zu einfachen Wurzeln. Wir nennen sie den **prinzipalen Automorphismus** unseres basierten Wurzelsystems.

Bemerkung 4.3.9. Gegeben ein basiertes Wurzelsystem erzeugen die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe, jede Spiegelung ist in der Weylgruppe konjugiert zu einer einfachen Spiegelung, und jede Wurzel ist konjugiert unter der Weylgruppe zu einer einfachen Wurzel. Das alles sind Spezialisierungen von Aussagen aus 3.3.7.

Übung 4.3.10. Sei $R \subset V$ ein basiertes Wurzelsystem. Bezeichne $\rho \in V$ die Halbsumme der positiven Wurzeln,

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

Man zeige mit 4.3.4 für alle einfachen Wurzeln α die Formel $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ und folgere $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ für alle einfachen Wurzeln α . Man zeige weiter $x\rho - \rho \in \mathbb{Z}R \quad \forall x \in W$.

4.4 Wichtige Ergänzung für Weyl'sche Nennerformel

Später, bei Nennerformel, braucht nämlich ganze Gewichte.

Lemma 4.4.1. *Die dominante Weylkammer ist enthalten in dem von den positiven Wurzeln erzeugten Kegel.*

Beweis. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die einfachen Wurzeln und $\omega_1, \dots, \omega_n$ die zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichte. Wir schreiben $\omega_1 = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$ und müssen zeigen $a_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$. Wählen wir ein unter der Weylgruppe invariantes Skalarprodukt $(\ , \)$, so gilt $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ und folglich $0 < (\omega_1, \omega_1) = a_1(\omega_1, \alpha_1)/2$ und damit erhalten wir bereits $a_1 > 0$. Bringen wir nun alle Summanden mit $a_i \geq 0$ auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\omega_1 - \sum_{a_i \geq 0} a_i \alpha_i = \sum_{a_j < 0} a_j \alpha_j$$

und das Skalarprodukt der rechten Seite mit der linken Seite ist ≤ 0 , da links das α_1 nicht auftreten kann. Also sind beide Seiten Null. \square

Bemerkung 4.4.2. Insbesondere schließen je zwei fundamentale dominante Gewichte einen spitzen Winkel ein, denn es gilt $(\omega_2, \omega_1) = a_2(\omega_2, \alpha_2) \geq 0$ in den Notationen des vorhergehenden Beweises. Mithin ist $\rho = \omega_1 + \dots + \omega_n$ das kürzeste ganze Gewicht im Inneren der dominanten Weylkammer.

4.5 Klassifikation von Wurzelsystemen

Definition 4.5.1. Gegeben ein Wurzelsystem R mit Basis Π definiert man seine **Cartan-Matrix** als die $(\Pi \times \Pi)$ -Matrix

$$C(R) = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha, \beta \in \Pi}$$

Diese Matrix hängt nach 4.3.6 im Wesentlichen gar nicht von der Wahl unserer Basis ab. Genauer kann man die Menge \mathcal{B} aller Basen des Wurzelsystems R betrachten, dann in $\mathcal{B} \times R$ die Teilmenge \mathcal{T} aller Paare (Π, α) mit $\Pi \ni \alpha$ und schließlich die Menge $\Pi(R) = W \setminus \mathcal{T}$ aller Bahnen der Weylgruppe auf \mathcal{T} . Diese Menge $\Pi(R)$ hängt dann von keinerlei Wahlen mehr ab, und wir können $C(R)$ auffassen als eine von keinerlei Wahlen abhängige $(\Pi(R) \times \Pi(R))$ -Matrix.

Bemerkung 4.5.2. Die Cartan-Matrizen zu Wurzelsystemen haben typischerweise nur sehr wenige von Null verschiedene Einträge, auf der Diagonalen stehen nur Zweier, außerhalb der Diagonalen sind alle Einträge nichtpositiv, und es gilt

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$$

sowie $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$. Es ist deshalb sinnvoll, die in der Cartan-Matrix eines Wurzelsystems enthaltene Information graphisch darzustellen im sogenannten **Dynkin-Diagramm**, das wie folgt gebildet wird: Man malt zunächst für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ einen dicken Punkt. Dann verbindet man je zwei verschiedene Punkte $\alpha \neq \beta$ durch einen $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta^\vee, \alpha \rangle)$ -fachen Strich bzw. gar nicht, falls gilt $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = 0$. Schließlich versieht man die 2-fachen und 3-fachen Striche mit einem Pfeil in Richtung der Wurzel α mit $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$, d.h. in Richtung der kürzeren Wurzel bezüglich eines und damit jedes unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts.

Definition 4.5.3. Zwei Wurzelsysteme $R \subset V$ und $R' \subset V'$ über einem Körper k heißen **isomorph** genau dann, wenn es einen Isomorphismus von Vektorräumen $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ gibt mit $\varphi(R) = R'$.

Satz 4.5.4 (Klassifikation von Wurzelsystemen). *Sei k ein Körper der Charakteristik Null. Das Bilden des Dynkin-Diagramms definiert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Wurzelsysteme über } k, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Diagramme,} \\ \text{deren Zusammenhangskomponenten} \\ \text{sämtlich in der gleich folgenden} \\ \text{Liste aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

Beweis. Das folgt aus den anschließenden Propositionen 4.5.6 und 4.5.7. \square

Definition 4.5.5. Sind $R_1 \subset V_1$ und $R_2 \subset V_2$ Wurzelsysteme über demselben Körper, so definieren wir ihre **Summe** $R_1 \oplus R_2 \subset V_1 \oplus V_2$ als

$$R_1 \oplus R_2 = R_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times R_2$$

Die Summe zweier Wurzelsysteme ist natürlich wieder ein Wurzelsystem. Ein Wurzelsystem heißt **unzerlegbar**, falls es weder leer ist noch isomorph zu einer Summe von zwei nichtleeren Wurzelsystemen.

Proposition 4.5.6. *Ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem, so gibt es genau eine Partition $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$ derart, daß R_i jeweils ein unzerlegbares Wurzelsystem in dem von ihm erzeugten Untervektorraum ist und daß gilt*

$$R \cong R_1 \oplus \dots \oplus R_n$$

Beweis. Sei \simeq die kleinste Äquivalenzrelation auf R mit der Eigenschaft $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0 \Rightarrow \alpha \simeq \beta$. Unter dieser Äquivalenzrelation zerlegt man nun R in Äquivalenzklassen $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$. Der Rest des Beweises bleibt dem Leser überlassen. \square

Proposition 4.5.7. *Sei k ein Körper der Charakteristik Null. Das Bilden des Dynkin-Diagramms definiert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{unzerlegbare} \\ \text{Wurzelsysteme über } k, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Diagramme,} \\ \text{die in unserer Liste} \\ \text{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

Beweis. Ich gebe nur die Beweisidee. Ist $T \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum, so ist die $T \times T$ -Matrix der Skalarprodukte (α, β) mit $\alpha, \beta \in T$ positiv definit. Wir zeigen nun beispielhaft, daß es im Dynkin-Diagramm eines Wurzelsystems keine Zyklen gibt. Bilden nämlich die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ einen Zykel, so betrachten wir die normierten Vektoren $\varepsilon_i = \alpha_i / \|\alpha_i\|$ und berechnen das Quadrat der Länge von $\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ zu

$$(\varepsilon, \varepsilon) = n + \sum_{i \neq j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

Da aber gilt $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ für $i \neq j$ und für $j \equiv i + 1 \pmod{n}$ sogar $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{1, 2, 3\}$ und damit $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq -1$ ergibt sich $(\varepsilon, \varepsilon) \leq 0$ im Widerspruch zu $\varepsilon \neq 0$. Ähnliche Argumente liefern eine ganze Liste von Diagrammen, die nicht als Unterdiagramme im Dynkin-Diagramm eines Wurzelsystems vorkommen können, und damit bleibt dann nur obige Liste von Möglichkeiten. Daß die Diagramme der Liste auch wirklich zu Wurzelsystemen gehören, kann man z.B. durch explizite Konstruktion der zugehörigen Wurzelsysteme zeigen. \square

5 Einfache endlichdimensionale Darstellungen

5.1 Klassifikation durch das höchste Gewicht

Definition 5.1.1. Sei $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra mit einer Cartan'schen Unteralgebra. Die Elemente von \mathfrak{h}^* heißen auch **Gewichte**. Für jede Darstellung V von \mathfrak{h} und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definiert man den **Gewichtsraum** V_λ zum Gewicht λ als den Untervektorraum

$$V_\lambda = \{v \in V \mid Hv = \lambda(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Gilt $V_\lambda \neq 0$, so heißt λ ein **Gewicht von V** . Die Menge aller Gewichte von V notieren wir

$$P(V) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq 0\}$$

mit P nach französisch "poids" für "Gewicht".

Bemerkung 5.1.2. Fassen wir speziell \mathfrak{g} auf als eine Darstellung von \mathfrak{h} mittels der adjungierten Operation, so erhalten wir als Gewichte $P(\mathfrak{g}) = R \cup \{0\}$ die Wurzeln $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ mitsamt der Null und die zugehörigen Gewichtsräume sind die Wurzelräume \mathfrak{g}_α für die Wurzeln $\alpha \in R$ sowie $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Übung 5.1.3. Gegeben eine Darstellung V einer abelschen Liealgebra \mathfrak{h} und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ liefert das Auswerten bei 1 einen Isomorphismus $\text{Mod}^{\mathfrak{h}}(k_\lambda, V) \xrightarrow{\sim} V_\lambda$.

Definition 5.1.4. Für jedes System positiver Wurzeln $R^+ \subset R$ definieren wir nun eine partielle Ordnung auf der Menge \mathfrak{h}^* aller Gewichte durch die Vorschrift

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda \in \mu + |R^+\rangle$$

Hier bezeichnet $|R^+\rangle$ getreu unserer allgemeinen Konvention ?? das von R^+ in \mathfrak{h}^* erzeugte Untermonoid. Ist V eine Darstellung von \mathfrak{g} , und gibt es bezüglich unserer partiellen Ordnung in der Menge $P(V)$ der Gewichte von V ein größtes Element μ , so heißt μ das **höchste Gewicht** von V bezüglich R^+ und jeder von Null verschiedene Vektor aus V_μ ein **höchster Gewichtsvektor**.

Bemerkung 5.1.5. Es gibt durchaus von Null verschiedene (unendlichdimensionale) Darstellungen, die überhaupt keine Gewichte haben, in Formeln $V \neq 0$ aber $P(V) = \emptyset$. Ein erstes Beispiel werden wir mit der Einhüllenden kennenlernen. Ebenso kann es auch passieren, daß $P(V)$ zwar nicht leer ist, aber kein größtes Element hat. Wir werden jedoch sehen, daß *einfache endlichdimensionale* Darstellungen stets ein höchstes Gewicht haben, und daß sie sogar durch dieses höchste Gewicht klassifiziert werden. Genauer ist unser nächstes Ziel:

Satz 5.1.6 (Klassifikation durch das höchste Gewicht). Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra und $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das zugehörige Wurzelsystem. Gegeben ein System von positiven Wurzeln $R^+ \subset R$ bezeichne

$$X^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall \alpha \in R^+\}$$

die Menge der in Bezug auf R^+ **dominanten ganzen Gewichte**. So haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{einfache endlichdimensionale} \\ \text{Darstellungen von } \mathfrak{g}, \\ \text{bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} X^+$$

$$V \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} \text{das in Bezug auf } R^+ \\ \text{höchste Gewicht von } V \end{array}$$

Bemerkung 5.1.7. Der Beweis der Klassifikation durch das höchste Gewicht 5.1.6 benötigt starke Hilfsmittel und wird sich als direkte Konsequenz aus 5.4.5 und 5.4.7 ergeben.

Bemerkung 5.1.8. In \mathfrak{h}^* oder ganz allgemein in einem beliebigen Vektorraum der Charakteristik Null mit einem Wurzelsystem R betrachtet man das Gitter der **ganzen Gewichte**

$$X = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in R\}$$

Per definitionem sind alle Wurzeln ganze Gewichte, in Formeln $R \subset X$, und das Gitter der ganzen Gewichte X ist stabil unter der Weylgruppe.

Bemerkung 5.1.9. Ist $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ die in R^+ enthaltene Basis des Wurzelsystems R , so bilden die Kowurzeln $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_r^\vee$ eine Basis des Vektorraums \mathfrak{h} . Die Elemente der zur Basis der Kowurzeln dualen Basis von \mathfrak{h}^* notiert man $\varpi_1, \dots, \varpi_r$ und bezeichnet sie als die **fundamentalen dominanten Gewichte**. Sie werden also charakterisiert durch $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$. Natürlich bilden die fundamentalen dominanten Gewichte $\varpi_1, \dots, \varpi_r$ eine \mathbb{Z} -Basis für das Gitter X der ganzen Gewichte und die Menge der dominanten ganzen Gewichte

$$X^+ = \mathbb{N}\varpi_1 + \dots + \mathbb{N}\varpi_r$$

ist genau der Schnitt von X mit dem Abschluß der dominanten Weylkammer. Formeln für die Darstellung der fundamentalen dominanten Gewichte durch einfache Wurzeln findet man am Ende von [Bou81].

Bemerkung 5.1.10. Ist \mathfrak{g} eine einfache endlichdimensionale Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln, so besitzt nach 5.1.6 insbesondere die adjungierte Darstellung ein höchstes Gewicht $\beta \in R^+$. Es heißt die **höchste Wurzel** und kann nach 5.4.11 auch beschrieben werden als die einzige Wurzel $\beta \in R^+$ derart, daß für alle $\alpha \in R^+$ die Summe $\alpha + \beta$ keine Wurzel mehr ist.

5.2 Die universelle Einhüllende Algebra

Definition 5.2.1. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einem Körper k . Eine **universelle Einhüllende Algebra** von \mathfrak{g} oder kurz **Einhüllende** ist ein Paar (U, can) bestehend aus einer assoziativen unitären k -Algebra U und einem Lie-Algebren-Homomorphismus $\text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow L(U)$ derart, daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Gegeben eine assoziative unitäre k -Algebra A und ein Homomorphismus von Lie-Algebren $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow L(A)$ gibt es genau einen Homomorphismus von unitären k -Algebren $\tilde{\varphi} : U \rightarrow A$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \text{can}$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{can}} & U \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

Beispiele 5.2.2. Ist $\mathfrak{g} = 0$, so ist $U = k$ eine Einhüllende. Ist \mathfrak{g} eine eindimensionale Lie-Algebra mit Basis $X \in \mathfrak{g}$, so ist der Polynomring in einer Veränderlichen $U = k[X]$ eine Einhüllende, mit can der offensichtlichen Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{can} : \mathfrak{g} & \rightarrow & k[X] \\ aX & \mapsto & aX \end{array}$$

Bemerkung 5.2.3. Ist (U_1, can_1) eine zweite Einhüllende von \mathfrak{g} , so muß (mit den üblichen Argumenten) die Abbildung $\tilde{\text{can}}_1 : U \rightarrow U_1$ ein Isomorphismus sein. Eine Lie-Algebra besitzt also bis auf eindeutigen Isomorphismus höchstens eine Einhüllende. Wir werden aus diesem Grund oft den bestimmten Artikel verwenden und von **der** Einhüllenden reden.

Lemma 5.2.4. Sei V eine abelsche Gruppe, \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einem Körper k und $\text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow U$ eine Einhüllende von \mathfrak{g} . Die Einschränkung vermittels can zusammen mit der Einschränkung vermittels der Einbettung $k \hookrightarrow U$, $a \mapsto a1$ definieren eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Strukturen auf } V \text{ als} \\ \text{Modul über dem Ring } U \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Strukturen auf } V \text{ als Darstellung} \\ \text{der Lie-Algebra } \mathfrak{g} \text{ über } k \end{array} \right\}$$

Beweis. Eine Struktur auf V als U -Modul ist ja per definitionem ein Homomorphismus von unitären Ringen $\varphi : U \rightarrow \text{End } V$. Die Einschränkung von φ auf $k \subset U$ macht V zu einem k -Vektorraum, und für diese Struktur induziert φ erst einen Homomorphismus von assoziativen unitären k -Algebren $\varphi : U \rightarrow \text{End}_k V$, dann einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\varphi : L(U) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, und schließlich einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\varphi \circ \text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Die Einschränkungen liefern also auf V die Struktur einer Darstellung über k . Um zu zeigen, daß diese Zuordnung bijektiv ist, geben wir die inverse Abbildung an. Eine Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} über k ist ja per definitionem ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k -Vektorraum V und einem Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow L(\text{End}_k V)$ von Lie-Algebren über k . Diesen Homomorphismus können wir aber nach der Definition der universellen Einhüllenden auf genau eine Weise erweitern zu einem Homomorphismus von unitären assoziativen k -Algebren $\tilde{\rho} : U \rightarrow \text{End}_k V$, und damit haben wir auf V die gesuchte U -Modulstruktur konstruiert. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese beiden Konstruktionen zueinander invers sind. \square

Bemerkung 5.2.5. Im Folgenden bezeichnen wir für ein Element X einer Lie-Algebra \mathfrak{g} sein Bild $\text{can}(X)$ in einer Einhüllenden meist kurz mit demselben Buchstaben X .

Bemerkung 5.2.6. Unter einem **augmentierten Ring** versteht man ganz allgemein einen Ring mitsamt einem ausgezeichneten Ideal, dem **Augmentationsideal**, das manchmal auch nur als einseitiges Ideal angenommen wird. Die Bezeichnung kommt wohl daher, daß hier die Ringstruktur durch ein zusätzliches Datum erweitert wird. Die Abbildung auf den Quotienten nach besagtem Ideal heißt dann die **Augmentation**.

Bemerkung 5.2.7. Jede Lie-Algebra \mathfrak{g} besitzt die triviale eindimensionale Darstellung k . Diese führt nach dem Vorhergehenden zu einem Homomorphismus von unitären k -Algebren $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$ mit $\epsilon(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Den Kern von ϵ bezeichnen wir manchmal mit $\ker \epsilon = U^+$ und machen so unsere Einhüllende zu einem augmentierten Ring mit Augmentation ϵ .

Satz 5.2.8 (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Jede Lie-Algebra besitzt eine universelle Einhüllende Algebra. Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einem Körper k und $(X_i)_{i \in I}$ eine Basis von \mathfrak{g} und \leq eine totale Ordnung auf I , so bilden die geordneten Monome, d.h. die Monome $X_{i(1)} \dots X_{i(r)}$ mit $i(1) \leq i(2) \dots \leq i(r)$ eine Basis der Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$ über k .*

Bemerkung 5.2.9. Der erste Aussage wird in einer präzisierten Form als 5.2.13 bewiesen, die zweite im Anschluß daran. Als Übung schreibe man $Y^2 H X$ in der Einhüllenden von $\mathfrak{sl}(2)$ als Linearkombination geordneter Monome für die Ordnung X, H, Y .

Bemerkung 5.2.10. Bei der Formulierung haben wir die Konvention benutzt, nach der das “leere” Monom, d.h. das Monom mit $r = 0$, die Einheit $1 \in U(\mathfrak{g})$ darstellt. Ist X_1, \dots, X_d eine Basis von \mathfrak{g} , so bilden nach unserem Satz insbesondere die Monome $X_1^{n_1} \dots X_d^{n_d}$ mit $n_i \geq 0$ eine Basis von $U(\mathfrak{g})$.

Definition 5.2.11. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k . Die **Tensoralgebra über V** ist die assoziative unitäre k -Algebra

$$T(V) = T_k V = \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der k -bilinearen Multiplikation, die festgelegt wird durch die Vorschrift $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_t) = (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_t)$.

Lemma 5.2.12 (Universelle Eigenschaft der Tensoralgebra). Sei V ein Vektorraum über einem Körper k und bezeichne $c : V \rightarrow T_k V$ die offensichtliche k -lineare Einbettung. Ist A eine unitäre assoziative k -Algebra und $\varphi : V \rightarrow A$ eine k -lineare Abbildung, so gibt es genau einen unitären Algebrenhomomorphismus $\hat{\varphi} : T_k V \rightarrow A$ mit $\varphi = \hat{\varphi} \circ c$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{c} & T_k V \\ & \searrow \varphi & \downarrow \hat{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

Beweis. Die Menge V erzeugt $T_k V$ als unitäre k -Algebra, also gibt es höchstens ein mögliches $\hat{\varphi}$. Andererseits können wir ein mögliches $\hat{\varphi}$ schlicht definieren durch die Vorschrift $\hat{\varphi}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = \varphi(v_1) \dots \varphi(v_r)$. \square

Proposition 5.2.13. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einem Körper k . Betrachten wir das Ideal $I = I(\mathfrak{g}) \subset T(\mathfrak{g})$, das von allen $(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ erzeugt wird, so ist die assoziative unitäre Algebra $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$ mit der Abbildung $\text{can} : \mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g})$ eine Einhüllende von \mathfrak{g} .

Beweis. Für diesen Beweis bezeichne $p : T(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ die Projektion und $c : \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathfrak{g})$ die kanonische Abbildung, wir haben also $\text{can} = p \circ c$. Sicher ist can ein Homomorphismus von Lie-Algebren, denn wir haben

$$\begin{array}{ccc} \text{can}[x, y] & & (\text{can } x)(\text{can } y) - (\text{can } y)(\text{can } x) = [\text{can } x, \text{can } y] \\ \parallel & & \parallel \\ p[x, y] & = & p(x \otimes y - y \otimes x) \end{array}$$

da nach Konstruktion gilt $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in I = \ker p$. Nach Konstruktion wird $U(\mathfrak{g})$ als unitäre k -Algebra von \mathfrak{g} erzeugt, eine Abbildung von \mathfrak{g} in eine

unitäre assoziative Algebra A läßt sich also auf höchstens eine Weise zu einem Homomorphismus unitärer Algebren $U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ fortsetzen. Um die folgende Argumentation übersichtlich zu machen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \rightarrow & T(\mathfrak{g}) & \rightarrow & U(\mathfrak{g}) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & A & & \end{array}$$

Sei also $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow A$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus von \mathfrak{g} in eine assoziative unitäre k -Algebra A . Selbst wenn φ nur linear ist, erweitert es auf genau eine Weise zu einem unitären Algebrenhomomorphismus $\hat{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \rightarrow A$. Ist φ zusätzlich ein Lie-Algebren-Homomorphismus, so folgt sofort $\hat{\varphi}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0$, also $\hat{\varphi}(I) = 0$. Damit faktorisiert dann $\hat{\varphi}$ wie gewünscht über einen Homomorphismus unitärer k -Algebren $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$. \square

Beweis, daß die geordneten Monome aus 5.2.8 die Einhüllende erzeugen.

Wir betrachten in $U = U(\mathfrak{g})$ den Teilraum U_r , der von allen Monomen der Länge höchstens r aufgespannt wird, also das Bild von $\bigoplus_{0 \leq s \leq r} \mathfrak{g}^{\otimes s}$ in $U(\mathfrak{g})$, und zeigen durch Induktion, daß U_r schon von den geordneten Monomen der Länge $\leq r$ aufgespannt wird. Denn sei $X_{i(1)} \dots X_{i(r)}$ ein Monom. Wir wissen ja, daß gilt

$$X_{i(l)}X_{i(l+1)} = X_{i(l+1)}X_{i(l)} + [X_{i(l)}, X_{i(l+1)}]$$

Hier können wir den Kommutator entwickeln als (endliche) Linearkombination $\sum a_j X_j$, mithin hängt die Nebenklasse eines Monoms der Länge r in U_r/U_{r-1} nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab. Mit Induktion über r sehen wir so, daß U_r von den geordneten Monomen der Länge $\leq r$ aufgespannt wird. \square

Beweis, daß die geordneten Monome aus 5.2.8 linear unabhängig sind.

Im Fall der Lie-Algebra einer Lie-Gruppe skizzieren wir in 5.2.15 ein elementares Argument. Im allgemeinen werden wir zum Beweis einen Vektorraum S betrachten mit einer Basis indiziert durch alle endlichen monoton wachsenden Folgen aus I und versuchen, ihn zu einer Darstellung unserer Lie-Algebra zu machen, und zwar so, als ob er schon die Einhüllende mit einer Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis wäre. Das gelingt und erledigt dann den allgemeinen Fall. Sei also $S = k[\hat{X}_\lambda]_{\lambda \in I}$ der Polynomring in den Erzeugenden \hat{X}_λ . Für einen Multiindex $\sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in I^r$ bezeichne \hat{X}_σ das Monom $\hat{X}_\sigma = \hat{X}_{\lambda_1} \dots \hat{X}_{\lambda_r}$. Für $\lambda \in I$ soll $\lambda \leq \sigma$ bedeuten $\lambda \leq \lambda_i$ für $1 \leq i \leq r$. Wir nennen einen Multiindex **monoton** genau dann, wenn gilt $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r$. Die Länge r von σ bezeichnen wir mit $|\sigma|$. Nach Konvention gibt es genau einen Multiindex der Länge Null, er ist monoton, größer als jedes $\lambda \in I$, und das zugehörige Monom ist das Eins-Element $1 \in S$. Die \hat{X}_σ für monotone σ bilden

eine Basis von S . Der von den Monomen der Länge r aufgespannte Teilraum heiße S_r , es ist also $S_0 = k$, $S = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S_r$, und $S_r S_s \subset S_{r+s} \quad \forall r, s \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $S_{\leq r} = \bigoplus_{0 \leq i \leq r} S_i$ und setzen $S_{\leq r} = 0$ für $r < 0$.

Lemma 5.2.14. *Es gibt genau eine Familie von bilinearen Abbildungen $\varphi_r : \mathfrak{g} \times S_{\leq r} \longrightarrow S_{\leq r+1}$, $(X, T) \mapsto XT$ derart, daß gilt*

1. φ_r setzt φ_{r-1} fort;
2. $X_\lambda \hat{X}_\sigma = \hat{X}_\lambda \hat{X}_\sigma$ für $\lambda \in I$, $\sigma \in I^r$ mit $\lambda \leq \sigma$;
3. $X_\lambda \hat{X}_\sigma \in \hat{X}_\lambda \hat{X}_\sigma + S_{\leq r} \quad \forall \lambda \in I$, $\sigma \in I^r$;
4. $X_\lambda (X_\nu T) - X_\nu (X_\lambda T) = [X_\lambda, X_\nu] T \quad \forall \lambda, \nu \in I$, $T \in S_{\leq r-1}$.

Beweis. Sicher haben wir solche Abbildungen φ_r für $r < 0$. Es reicht also, wenn wir zeigen: Ist φ_r bereits konstruiert mit den Eigenschaften 1–4, so gibt es genau eine Möglichkeit, φ_r zu einer Abbildung φ_{r+1} mit den Eigenschaften 1–4 auszudehnen. Sei also φ_r gegeben. Es gilt, für alle $\lambda \in I$ und monotonen σ der Länge $|\sigma| = r + 1$ das Bild $\varphi_{r+1}(X_\lambda, \hat{X}_\sigma) = X_\lambda \hat{X}_\sigma \in S$ anzugeben. Im Fall $\lambda \leq \sigma$ definieren wir $X_\lambda \hat{X}_\sigma = \hat{X}_\lambda \hat{X}_\sigma$, damit 2 erfüllt ist. Sonst schreiben wir $\sigma = (\nu, \tau)$ mit $\nu \in I$, $\tau \in I^r$, und da $\lambda \not\leq \sigma$ haben wir $\lambda > \nu$. Wenn 1–4 erfüllt sein sollen, so muß gelten

$$\begin{aligned}
X_\lambda \hat{X}_\sigma &= X_\lambda X_\nu \hat{X}_\tau && \text{da } \nu \leq \tau, \\
&= X_\nu X_\lambda \hat{X}_\tau + [X_\lambda, X_\nu] \hat{X}_\tau && \text{nach 4,} \\
&= X_\nu \hat{X}_\lambda \hat{X}_\tau + X_\nu R + [X_\lambda, X_\nu] \hat{X}_\tau && \text{für } R = X_\lambda \hat{X}_\tau - \hat{X}_\lambda \hat{X}_\tau, \\
&= \hat{X}_\nu \hat{X}_\lambda \hat{X}_\tau + X_\nu R + [X_\lambda, X_\nu] \hat{X}_\tau && \text{da } \nu \leq \lambda, \nu \leq \tau.
\end{aligned}$$

Nach Induktion gilt nun $R \in S_{\leq r}$, also sind rechts unten alle Terme schon induktiv definiert, und wir können und werden unsere Gleichung als eine induktive Definition von $X_\lambda \hat{X}_\sigma = \varphi_{r+1}(X_\lambda, \hat{X}_\sigma)$ im Fall $\lambda \not\leq \sigma$ auffassen. Die von φ_{r+1} geforderten Eigenschaften sind offensichtlich mit Ausnahme von 4. Nach Induktionsannahme gilt es noch zu zeigen

$$X_\lambda X_\nu \hat{X}_\tau - X_\nu X_\lambda \hat{X}_\tau = [X_\lambda, X_\nu] \hat{X}_\tau$$

für alle $\lambda, \nu \in I$ und $\tau \in I^r$. Wir geben dieser Aussage den Namen (λ, ν, τ) . Offensichtlich gilt (λ, ν, τ) für $\lambda = \nu$, nach Definitionen von φ_{r+1} gilt (λ, ν, τ) unter der Voraussetzung $\lambda > \nu \leq \tau$, und da die Lieklammer schiefsymmetrisch ist, folgt die Gültigkeit von (λ, ν, τ) auch für den Fall $\nu > \lambda \leq \tau$. Es bleibt also nur noch, (λ, ν, τ) zu zeigen im Fall $\lambda \not\leq \tau$, $\nu \not\leq \tau$. In diesem Fall

schreiben wir $\tau = (\mu, \omega)$ mit $\mu \in I$, $\omega \in I^{r-1}$ und haben also $\mu < \lambda$, $\mu < \nu$ und $\mu \leq \omega$. Jetzt entwickeln wir

$$\begin{aligned} X_\lambda X_\nu \hat{X}_\tau &= X_\lambda X_\nu X_\mu \hat{X}_\omega \\ &= X_\lambda [X_\nu, X_\mu] \hat{X}_\omega + X_\lambda X_\mu X_\nu \hat{X}_\omega \\ &= X_\lambda [X_\nu, X_\mu] \hat{X}_\omega + [X_\lambda, X_\mu] X_\nu \hat{X}_\omega + X_\mu X_\lambda X_\nu \hat{X}_\omega \end{aligned}$$

wo die zweite Gleichung per Induktion folgt und die dritte aus schon bekannten Fällen, indem wir schreiben $X_\nu \hat{X}_\omega = \hat{X}_\nu \hat{X}_\omega + R$ mit $R \in S_{\leq r-2}$, und beachten, daß gilt $\mu < \nu$ und $\mu \leq \omega$. Dasselbe gilt, wenn wir λ und ν vertauschen, und indem wir auch noch $\hat{X}_\tau = X_\mu \hat{X}_\omega$ entwickeln, erhalten wir die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} X_\lambda X_\nu \hat{X}_\tau &= X_\lambda [X_\nu, X_\mu] \hat{X}_\omega + X_\mu X_\lambda X_\nu \hat{X}_\omega + [X_\lambda, X_\mu] X_\nu \hat{X}_\omega \\ X_\nu X_\lambda \hat{X}_\tau &= X_\nu [X_\lambda, X_\mu] \hat{X}_\omega + X_\mu X_\nu X_\lambda \hat{X}_\omega + [X_\nu, X_\mu] X_\lambda \hat{X}_\omega \\ [X_\lambda, X_\nu] \hat{X}_\tau &= [X_\lambda, X_\nu] X_\mu \hat{X}_\omega \end{aligned}$$

Unser Ziel ist, noch in unserem speziellen Fall die Formel

$$X_\lambda X_\nu \hat{X}_\tau - X_\nu X_\lambda \hat{X}_\tau = [X_\lambda, X_\nu] \hat{X}_\tau$$

zu zeigen. Aber ziehen wir bei unseren drei Gleichungen von eben auf der rechten Seite die beiden unteren Ausdrücke vom oberen ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} ([X_\lambda, [X_\nu, X_\mu]] + [[X_\lambda, X_\mu], X_\nu] + X_\mu [X_\lambda, X_\nu] - [X_\lambda, X_\nu] X_\mu) \hat{X}_\omega = \\ ([X_\lambda, [X_\nu, X_\mu]] + [X_\nu, [X_\mu, X_\lambda]] + [X_\mu, [X_\lambda, X_\nu]]) \hat{X}_\omega = 0 \end{aligned}$$

nach der Jacobi-Identität. \square

Das Lemma liefert uns eine Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} auf der symmetrischen Algebra $S = k[\hat{X}_\lambda]_{\lambda \in I}$, also einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : L \rightarrow \text{End}_k S$, so daß gilt $\varphi(X_\mu)(\hat{X}_\sigma) \in \hat{X}_\mu \hat{X}_\sigma + S_{<|\sigma|}$ für alle μ, σ und $\varphi(X_\mu)(\hat{X}_\sigma) = \hat{X}_\mu \hat{X}_\sigma$ falls $\mu \leq \sigma$. Um die lineare Unabhängigkeit der geordneten Monome in 5.2.8 zu zeigen, betrachten wir S als Modul über $U = U(\mathfrak{g})$ mittels $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_k S$. Ist $X_{\lambda(1)} \dots X_{\lambda(r)}$ ein aufsteigendes Monom in $U(\mathfrak{g})$, so gilt

$$\tilde{\varphi}(X_{\lambda(1)} \dots X_{\lambda(r)})(1) = \hat{X}_{\lambda(1)} \dots \hat{X}_{\lambda(r)}$$

Da die aufsteigenden Monome linear unabhängig sind in S , müssen sie auch in U linear unabhängig gewesen sein. \square

Bemerkung 5.2.15. Ist \mathfrak{g} die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe, so kann man die lineare Unabhängigkeit über \mathbb{R} der aufsteigenden Monome ohne große Mühe zeigen: Man wählt dazu in einer offenen Umgebung V des neutralen Elements

e von G lokale Koordinaten x_1, \dots, x_r , die bei e verschwinden, und so, daß das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$ am neutralen Element mit X_i übereinstimmt, für $1 \leq i \leq r$. Durch das Anwenden von linksinvarianten Vektorfeldern auf Funktionen wird $\mathcal{C}^\infty(V)$ ein $U(\mathfrak{g})$ -Modul. Lassen wir die aufsteigenden Monome aus $U(\mathfrak{g})$ operieren auf Monomen in den lokalen Koordinaten und werten das Resultat am neutralen Element aus, so erhalten wir unter Verwendung der üblichen Multiindex-Schreibweise $(X^\alpha x^\alpha)(e) \neq 0$, aber $(X^\alpha x^\beta)(e) = 0$ falls gilt $\alpha \neq \beta$ und $|\alpha| \leq |\beta|$. Daraus folgt dann die lineare Unabhängigkeit der X^α .

Übung 5.2.16. Jeder Homomorphismus von Lie-Algebren läßt sich auf genau eine Weise ausdehnen zu einem Homomorphismus zwischen ihren Einhüllenden.

Übung 5.2.17. Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b}$ eine Zerlegung als k -Vektorraum einer Lie-Algebra über einem Körper k in die direkte Summe von zwei Unterhalbgebren, so induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von Vektorräumen, ja sogar von $U(\mathfrak{n})$ - $U(\mathfrak{b})$ -Bimoduln

$$U(\mathfrak{n}) \otimes_k U(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g})$$

Definition 5.2.18. Die **opponierte Algebra** A° zu einer k -Algebra A wird erklärt dadurch, daß man auf dem Vektorraum A die neue Verknüpfung $*$ betrachtet, die gegeben wird durch $a * b = b \cdot a$.

Übung 5.2.19. Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra, so ist auch \mathfrak{g}° eine Lie-Algebra und die Multiplikation mit (-1) ist ein Algebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\circ$

Bemerkung 5.2.20. Ist $\mathfrak{g} \rightarrow U$ eine Einhüllende, so auch dieselbe Abbildung $\mathfrak{g}^\circ \rightarrow U^\circ$. Insbesondere setzt sich die Multiplikation mit $(-1) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\circ$ fort zu einem Isomorphismus assoziativer Algebren $U \xrightarrow{\sim} U^\circ$, den wir den **prinzipalen Antiautomorphismus** von U nennen und $u \mapsto u^t$ notieren. Ist V eine Darstellung von \mathfrak{g} und $u \in U$, so haben wir für die kontragrediente Darstellung V^* die Formel $(uf)(v) = f(u^t v)$ für alle $f \in V^*$, $v \in V$ und $u \in U$.

5.3 Filtrierungen und Graduierungen

Definition 5.3.1. Eine **(aufsteigende) Filtrierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Folge von Untergruppen $V^{\leq r}$ für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V^{\leq r} \subset V^{\leq r+1}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

Definition 5.3.2. Eine **Graduierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Folge von Untergruppen V^r für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^r$. Die Elemente von V^r heißen dann **homogen vom Grad** r .

Bemerkung 5.3.3. Jede Untergruppe $U \subset V$ und jeder Quotient V/U einer filtrierten abelschen Gruppe V erbt in natürlicher Weise eine Filtrierung von V , genauer setzen wir $U^{\leq r} = V^{\leq r} \cap U$ und nehmen als $(V/U)^{\leq r}$ einfach das Bild von $V^{\leq r}$ unter der kanonischen Projektion.

Bemerkung 5.3.4. Für eine Untergruppe $U \subset V$ bzw. einen Quotienten V/U einer graduierten abelschen Gruppe V bilden die Schnitte $U^r = V^r \cap U$ bzw. die Bilder der V^r in V/U im allgemeinen keine Graduierung von U bzw. von V/U . Das gilt nur, wenn mit jedem $v \in U$ auch alle homogenen Komponenten von v zu U gehören, wenn also für die $U^r = U \cap V^r$ gilt $U = \bigoplus_r U^r$. Eine Untergruppe einer graduierten abelschen Gruppe mit dieser Eigenschaft nennt man **homogen**, und für den Quotienten einer graduierten abelschen Gruppe nach einer homogenen Untergruppe bilden die Bilder der V^r in der Tat auch eine Graduierung des Quotienten V/U und wir haben dann $(V/U)^r = V^r/U^r$.

Bemerkung 5.3.5. Eine Graduierung $V = \bigoplus_r V^r$ liefert eine Filtrierung durch $V^{\leq r} = \bigoplus_{\nu \leq r} V^\nu$. Zu jeder filtrierten abelschen Gruppe können wir umgekehrt die **assoziierte graduierte Gruppe** $\text{gr } V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^{\leq r}/V^{\leq r-1}$ bilden. Kommt die Filtrierung auf V schon von einer Graduierung her, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus $V \cong \text{gr } V$.

Bemerkung 5.3.6. Ein Homomorphismus $\phi : V \rightarrow W$ von filtrierten abelschen Gruppen heißt **mit den Filtrierungen verträglich** genau dann, wenn gilt $\phi(V^{\leq r}) \subset W^{\leq r}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$. Er induziert dann natürlich einen Homomorphismus $\text{gr } \phi : \text{gr } V \rightarrow \text{gr } W$ zwischen den assoziierten graduierten Gruppen.

Übung 5.3.7. Ist V eine filtrierte abelsche Gruppe und $U \subset V$ eine Untergruppe und betrachten wir auf U und V/U die induzierten Filtrierungen, so erhalten wir mit dem Neunerlemma eine kurze exakte Sequenz

$$\text{gr } U \hookrightarrow \text{gr } V \twoheadrightarrow \text{gr}(V/U)$$

Übung 5.3.8. Sei $\phi : V \rightarrow W$ ein mit den Filtrierungen verträglicher Homomorphismus filtrierter abelscher Gruppen. Es gelte $V^{\leq r} = W^{\leq r} = 0$ für $r \ll 0$ und $V = \bigcup V^{\leq r}$ sowie $W = \bigcup W^{\leq r}$. Man zeige: Ist $\text{gr } \phi : \text{gr } V \rightarrow \text{gr } W$ ein Isomorphismus, so ist schon ϕ selbst ein Isomorphismus. (Hinweis: Neunerlemma. Sogar die schwächere Voraussetzung $\bigcap V^{\leq r} = 0$ wäre hier ausreichend.)

Übung 5.3.9. Eine Filtrierung auf einem Vektorraum mit der Eigenschaft $V^{\leq r} = 0$ für $r \ll 0$ und $V = \bigcup V^{\leq r}$ kommt stets von einer Graduierung her.

Bemerkung 5.3.10. Benutzt man die oben eingeführten Begriffe für Ringe, so wird stets implizit die Verträglichkeit mit der Multiplikation gefordert. Genauer treffen wir folgende Vereinbarungen.

Definition 5.3.11. Eine (**aufsteigende**) **Filtrierung** eines Rings A ist eine Filtrierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^{\leq r} A^{\leq s} \subset A^{\leq r+s}$ für alle r, s und zusätzlich $1 \in A^{\leq 0}$.

Definition 5.3.12. Eine **Graduierung** eines Rings A ist eine Graduierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^r A^s \subset A^{r+s}$.

Übung 5.3.13. Das Eins-Element eines graduierten Rings ist notwendig homogenen vom Grad Null, in Formeln $1 \in A^0$.

Bemerkung 5.3.14. Jeder Quotient A/I eines *filtrierten* Rings A nach einem Ideal I ist für die natürliche Filtrierung wieder ein filtrierter Ring. Jeder Quotient A/I eines *graduierten* Rings A nach einem *homogenen* Ideal I ist mit der natürlichen Graduierung wieder ein graduiertes Ring.

Bemerkung 5.3.15. Eine Graduierung $A = \bigoplus_r A^r$ eines Rings liefert eine Filtrierung durch $A^{\leq r} = \bigoplus_{\nu \leq r} A^\nu$. Zu jedem filtrierten Ring können wir umgekehrt den **assozierten graduierten Ring**

$$\text{gr } A = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} A^{\leq r} / A^{\leq r-1}$$

bilden, die Multiplikation auf $\text{gr } A$ wird in der naheliegenden Weise definiert. Kommt die Filtrierung auf dem Ring A schon von einer Graduierung her, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus gradierter Ringe $A \xrightarrow{\sim} \text{gr } A$.

Bemerkung 5.3.16. Ein Ringhomomorphismus $\phi : A \rightarrow B$ von einem filtrierten Ring A in einen filtrierten Ring B , der mit den Filtrierungen verträglich ist, induziert natürlich einen Homomorphismus $\text{gr } \phi : \text{gr } A \rightarrow \text{gr } B$ zwischen den assoziierten graduierten Ringen.

Bemerkung 5.3.17. Analog definiert man filtrierte bzw. graduierte Vektorräume und filtrierte bzw. graduierte Algebren. Bei assoziativen *unitären* Algebren fordert man meist implizit, daß die Filtrierung auch mit der zugrundeliegenden Ringstruktur verträglich sein soll, d.h. daß die 1 im Teilraum zu ≥ 0 enthalten ist.

Bemerkung 5.3.18. Die Tensoralgebra $T(V)$ über einem Vektorraum V trägt eine offensichtliche Graduierung. Definieren wir die **symmetrische Algebra** $S(V) = T(V)/(x \otimes y - y \otimes x)$ als die Einhüllende der abelschen Lie-Algebra V , so erbt $S(V)$ eine Graduierung von $T(V)$. Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$, so erbt $U = U(\mathfrak{g})$ nur die Filtrierung von $T(\mathfrak{g})$ und wird so eine filtrierte unitäre Algebra $0 = U^{\leq -1} \subset U^{\leq 0} \subset U^{\leq 1} \subset U^{\leq 2} \subset \dots$ mit $U^{\leq 0} = k$, $U^{\leq 1} = k \oplus L$.

Bemerkung 5.3.19. Meines Erachtens ist die allgemein übliche Bezeichnung von $S(V)$ als “symmetrische Algebra” nicht besonders glücklich, ich würde lieber die “universelle kommutative Algebra über V ” sagen. Die allgemein übliche Bezeichnung hat den folgenden Ursprung: Natürlich operiert die symmetrische Gruppe \mathcal{S}^r auf durch Vertauschung der Tensorfaktoren auf $V^{\otimes r}$. Die Invarianten $(V^{\otimes r})^{\mathcal{S}^r}$ unter dieser Operation heißen die **symmetrischen Tensoren** der Stufe r . In Charakteristik Null liefert nun eben für jedes $r \geq 0$ die Projektion $V^{\otimes r} \rightarrow S^r V$ einen Isomorphismus vom Raum der symmetrischen Tensoren der Stufe r mit der homogenen Komponente $S^r V$ der Algebra SV , deshalb die Bezeichnung als “symmetrische Algebra”. Das Inverse dieses Isomorphismus heißt die **Symmetrisierung** und wird gegeben durch die Formel

$$v_1 \dots v_r \mapsto \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(r)}$$

Satz 5.3.20 (Poincaré-Birkhoff-Witt ohne Koordinaten). *Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra. Die beiden Surjektionen $T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow S(\mathfrak{g})$ und $T(\mathfrak{g}) = \text{gr } T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \text{gr } U(\mathfrak{g})$ haben denselben Kern und definieren folglich einen Isomorphismus von graduierten k -Algebren*

$$\text{gr } U(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})$$

Beweis. Das mag der Leser zur Übung selbst aus dem Satz von Poincaré, Birkhoff und Witt 5.2.8 folgern. \square

Korollar 5.3.21. *Die Einhüllende einer Lie-Algebra ist stets nullteilerfrei. Die Einhüllende einer endlichdimensionalen Lie-Algebra ist stets noethersch.*

Beweis. Das folgt sofort aus den beiden Lemmata, die wir gleich im Anschluß beweisen, da ja über Körpern Polynomringe nullteilerfrei sind und Polynomringe in endlich vielen Variablen noethersch nach dem Hilbert’schen Basissatz. \square

Lemma 5.3.22. *Sei A ein filtrierter Ring mit $\bigcap A^{\leq r} = 0$ und $\bigcup A^{\leq r} = A$. So gilt*

$$(\text{gr } A) \text{ nullteilerfrei} \quad \Rightarrow \quad A \text{ nullteilerfrei}$$

Beweis. In der Tat, seien $a, b \in A$ gegeben mit $a \neq 0, b \neq 0$. Sind r, s minimal mit $a \in A^{\leq r}, b \in A^{\leq s}$, so sind auch die Bilder $\bar{a} \in A^{\leq r}/A^{\leq r-1}$ und $\bar{b} \in A^{\leq s}/A^{\leq s-1}$ von Null verschieden. Ist $\text{gr } A$ nullteilerfrei, so folgt $\bar{a}\bar{b} \neq 0$. Dies Produkt ist aber die Nebenklasse von ab in $A^{\leq r+s}/A^{\leq r+s-1}$, und wenn schon die Nebenklasse von ab nicht verschwindet, so ist erst recht ab selbst von Null verschieden. \square

Lemma 5.3.23. *Sei A ein filtrierter Ring und M ein filtrierter A -Modul mit $\bigcap M^{\leq r} = 0$ und $\bigcup M^{\leq r} = M$. So ist mit $\text{gr } M$ auch M selbst endlich erzeugt und es gilt sogar*

$$(\text{gr } M) \text{ noethersch über } (\text{gr } A) \quad \Rightarrow \quad M \text{ noethersch über } A$$

Beweis. Ist der assoziierte graduierte Modul $\text{gr } M$ endlich erzeugt, so finden wir dafür auch ein endliches Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Wählen wir Urbilder dieser Elemente in M , so erzeugen sie über A einen Untermodul $N \subset M$ mit $\text{gr } N \xrightarrow{\sim} \text{gr } M$. Mit 5.3.7 folgt daraus hinwiederum $\text{gr}(M/N) = 0$ und mit unseren Voraussetzungen an die Filtrierung dann $M/N = 0$, als da heißt unsere Urbilder erzeugen bereits M . Ist schließlich $\text{gr } M$ noethersch, so ist für jeden Untermodul $N \subset M$ der assoziierte graduierte $\text{gr } N$ endlich erzeugt als Untermodul von $\text{gr } M$, und dann ist auch N selbst endlich erzeugt nach dem, was wir bereits bewiesen haben. \square

5.4 Konstruktion von Moduln mit höchstem Gewicht

Bemerkung 5.4.1. Ist $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so können wir jede Darstellung von \mathfrak{g} auch als eine Darstellung von \mathfrak{b} auffassen. Haben wir umgekehrt eine Darstellung M von \mathfrak{b} , so bilden wir die zugehörige **koinduzierte Darstellung** von \mathfrak{g} mittels allgemeiner Tensorprodukte wie in ?? und ?? durch die Vorschrift

$$\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} M$$

Zusammen mit dem sogenannten “kanonischen” Homomorphismus $M \rightarrow \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$, $m \mapsto 1 \otimes m$ von Darstellungen von \mathfrak{b} hat sie die folgende universelle Eigenschaft: Ist N irgendeine Darstellung von \mathfrak{g} und $\varphi : M \rightarrow N$ ein \mathfrak{b} -Homomorphismus, so gibt es genau einen \mathfrak{g} -Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M \rightarrow N$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \text{can}$. All das folgt aus allgemeinen Eigenschaften des Tensorprodukts und wird in ?? und ?? in großer Allgemeinheit diskutiert.

Definition 5.4.2. Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan’sche Unteralgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem und $R^+ \subset R$ ein System von positiven Wurzeln. Wir betrachten in \mathfrak{g} die Unteralgebra $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$. Dehnen wir ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ aus zu einer Linearform auf \mathfrak{b} durch die Vorschrift $\lambda(\mathfrak{g}_{\alpha}) = 0 \quad \forall \alpha \in R^+$, so erhalten wir offensichtlich einen Charakter $\lambda : \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. eine eindimensionale Darstellung \mathbb{C}_{λ} der Lie-Algebra \mathfrak{b} . Die koinduzierte Darstellung

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+) = \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda}$$

heißt der **Verma-Modul** zum höchsten Gewicht λ . Den Tensor $1 \otimes 1$ in diesem Modul bezeichnen wir mit $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ und nennen ihn den **kanonischen Erzeuger** des Verma-Moduls $\Delta(\lambda)$.

Proposition 5.4.3 (Struktur von Vermamoduln). *Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra, R^+ ein System von positiven Wurzeln, \leq die zugehörige partielle Ordnung auf \mathfrak{h}^* und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein Gewicht.*

1. Betrachten wir in \mathfrak{g} die Unteralgebra $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so ist $\Delta(\lambda)$ ein freier $U(\mathfrak{n})$ -Modul vom Rang Eins mit dem kanonischen Erzeuger v_λ Basis. In Formeln ausgedrückt liefert also die Multiplikation eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{n}) & \xrightarrow{\sim} & \Delta(\lambda) \\ u & \mapsto & uv_\lambda \end{array}$$

2. Der Verma-Modul $\Delta(\lambda)$ besitzt eine Gewichtsraumzerlegung der Gestalt

$$\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$$

3. Bezeichnet $\mathcal{P} : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{N}$ die **Kostant'sche Partitionsfunktion**, die zählt, auf wieviele verschiedene Weisen sich ein Gewicht zerlegen läßt in eine Summe von positiven Wurzeln, so erhalten wir für die Dimensionen der Gewichtsräume unserer Verma-Moduln die Formel

$$\dim_k \Delta(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu)$$

4. Der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ hat das höchste Gewicht λ und der zugehörige Gewichtsraum $\Delta(\lambda)_\lambda$ ist erzeugt von v_λ , in Formeln $\Delta(\lambda)_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda$.

Bemerkung 5.4.4. Bei der Definition der Kostant'schen Partitionsfunktion werden Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, als gleich betrachtet. Im Extremfall $\mu = 0$ vereinbaren wir $\mathcal{P}(0) = 1$, in der Tat läßt sich ja die Null auf genau eine Weise als Summe von positiven Wurzeln schreiben, indem wir nämlich die Summe von überhaupt keiner positiven Wurzel nehmen.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus 5.2.17 und der Assoziativität von Tensorprodukten ???. Sind nun weiter $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die positiven Wurzeln und wählen wir Vektoren $0 \neq Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$, so bilden nach Poincaré-Birkhoff-Witt die

$$Y_1^{a(1)} \dots Y_n^{a(n)} v_\lambda$$

mit $a(i) \geq 0$ eine Basis von $\Delta(\lambda)$, und da per definitionem v_λ ein Gewichtsvektor zum Gewicht λ ist, folgen daraus mit 5.4.6 die anderen Teile der Proposition. \square

Satz 5.4.5 (Klassifikation einfacher Höchstgewichtsmoduln). *Seien \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra und $R^+ \subset R$ ein System von positiven Wurzeln.*

1. Für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ besitzt der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ einen größten echten Untermodul $\text{rad } \Delta(\lambda)$.
2. Der Quotient nach diesem Untermodul $L(\lambda) = \Delta(\lambda)/\text{rad } \Delta(\lambda)$ ist eine einfache Darstellung und wir erhalten so eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache Darstellungen mit einem} \\ \text{höchsten Gewicht, bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \lambda & \mapsto & L(\lambda) \end{array}$$

3. Ist λ maximal unter den Gewichten einer Darstellung M , so induziert das Auswerten auf dem kanonischen Erzeuger v_λ unseres Vermamoduls einen Isomorphismus $\text{Mod}^{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$.
4. Besitzt eine einfache Darstellung ein maximales Gewicht, so ist dies Gewicht schon ihr höchstes Gewicht.

Beweis. 1. Jeder \mathfrak{h} -Untermodul $U \subset \Delta(\lambda)$ zerfällt auch in Gewichtsräume $U = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} U_\mu$. Ist U ein \mathfrak{g} -Untermodul, so folgt wegen 5.4.3 aus $U_\lambda \neq 0$ schon $U = \Delta(\lambda)$. Ist U ein echter \mathfrak{g} -Untermodul, so gilt also $U \subset \bigoplus_{\mu \neq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$. Die Summe von allen echten Untermoduln ist mithin selbst immer noch ein echter Untermodul und die erste Behauptung ist bewiesen.

2–4. Der Quotient $L(\lambda) = \Delta(\lambda)/\text{rad } \Delta(\lambda)$ ist insbesondere eine einfache Darstellung mit höchstem Gewicht λ . Ist umgekehrt M irgendeine Darstellung, so liefert nach 5.1.3 das Auswerten bei 1 einen Isomorphismus $\text{Mod}^{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}_\lambda, M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$. Ist hier λ ein maximales Gewicht, so finden wir für alle positiven Wurzeln α mit 5.4.6 bereits $\mathfrak{g}_\alpha M_\lambda \subset M_{\lambda+\alpha} = 0$ und folgern $\text{Mod}^{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}_\lambda, M) = \text{Mod}^{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}_\lambda, M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$. Mit Frobenius-Reziprozität (*Hier noch nicht erklärt!*) liefert dann Auswerten an v_λ in der Tat einen Isomorphismus $\text{Mod}^{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$. Ist M auch noch einfach, so muß M damit isomorph sein zum einzigen einfachen Quotienten unseres Vermamoduls. \square

Lemma 5.4.6. *Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra und $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem. Sei V eine Darstellung von \mathfrak{g} . So gilt*

$$\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha} \quad \forall \alpha \in R, \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

Beweis. Das folgt aus der Definition eines Gewichtsraums und der Formel $HXv = [H, X]v + XHv \quad \forall H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, v \in V.$ \square

Lemma 5.4.7. *Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ist der einfache Modul $L(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ endlichdimensional genau dann, wenn das Gewicht λ ganz und dominant ist, in Formeln $\lambda \in X^+.$*

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis, daß $L(\lambda)$ nur dann endlichdimensional sein kann, wenn das Gewicht λ ganz und dominant ist. Sei ganz allgemein V eine endlichdimensionale Darstellung. Betrachten wir für $\alpha \in R$ die zu $\mathfrak{sl}(2, k)$ isomorphe Unteralgebra $\mathfrak{g}_\alpha \oplus k\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ von \mathfrak{g} , so folgt aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, k)$ nach ?? für alle $\lambda \in P(V)$ sofort $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$. Also kann eine endlichdimensionale nur ganze Gewichte haben. Ist weiter ein Gewicht einer endlichdimensionalen Darstellung nicht dominant, sagen wir $n = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < 0$, und ist $0 \neq v \in V_\lambda$ ein Gewichtsvektor, so folgt aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, k)$ weiter $\mathfrak{g}_\alpha v \neq 0$ und damit $V_{\lambda+\alpha} \neq 0$ und λ kann kein maximales Gewicht gewesen sein. Den Beweis der anderen Richtung im Lemma geben wir im Anschluß an den Beweis von 5.4.9. \square

Definition 5.4.8. Wir erinnern an die Halbsumme ρ der positiven Wurzeln und definieren die “zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene” Operation von W auf \mathfrak{h}^* , die sogenannte **dot-Operation**, durch die Formel

$$x \cdot \lambda = x(\lambda + \rho) - \rho$$

Lemma 5.4.9. *Für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $s_\alpha \cdot \lambda \leq \lambda$ gibt es eine Injektion von \mathfrak{g} -Moduln*

$$\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$$

Bemerkung 5.4.10. Wir werden später zeigen, daß dieselbe Aussage allgemeiner für jede positive Wurzel $\alpha \in R^+$ gilt.

Beweis. Für eine einfache Wurzel α ist $s_\alpha \cdot \lambda < \lambda$ gleichbedeutend zu $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$. Sei nun zunächst $\alpha \in R^+$ beliebig mit $n = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$. Für $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ behaupten wir dann

$$x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$$

Man kann das entweder durch Rechnung prüfen, indem man unter der Zusatzvoraussetzung $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ induktiv für alle $i \geq 1$ die Formel $x_\alpha y_\alpha^i v_\lambda = i(n - i + 1) y_\alpha^{i-1} v_\lambda$ herleitet ganz analog dazu, wie wir es aus im Beweis von ?? bereits kennen. Man kann sich aber auch auf den Standpunkt stellen, daß die $y_\alpha^i v_\lambda$ ja eine Basis eines Vermamoduls von $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus k\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$

mit höchstem Gewichtsvektor v_λ bilden, und operiert α^\vee alias h auf diesem höchsten Gewichtsvektor durch einen nichtnegativen ganzzahligen Eigenwert, so gibt es auch eine einfache $(n + 1)$ -dimensionale Darstellung von \mathfrak{sl}_2 mit diesem höchsten Gewicht, die nach 5.4.5 notwendig ein Quotient unseres \mathfrak{sl}_2 -Vermoduls sein muß. Der Kern der Quotientenabbildung ist offensichtlich gerade das Erzeugnis der $y_\alpha^i v_\lambda$ mit $i > n$, folglich bilden diese einen Untermodul, und damit erkennen wir $x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$, ohne die Rechnung aus dem Beweis von ?? wiederholen zu müssen. Ist nun zusätzlich α eine einfache Wurzel, so gilt sogar $x_\beta y_\alpha^i v_\lambda = 0$ für alle $\beta \in R^+ \setminus \alpha$ und $i \in \mathbb{N}$, denn $i\alpha - \beta$ ist dann nie eine Summe positiver Wurzeln. Da aber gilt $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - (n + 1)\alpha$ nach 4.3.10 und den Definitionen, folgern wir $0 \neq y_\alpha^{n+1} v_\lambda \in \Delta(\lambda)_{s_\alpha \cdot \lambda}$ und erhalten nach der Definition unserer Verma-Moduln wie im Beweis von 5.4.5.4 aus ihrer universellen Eigenschaft als koinduzierte Darstellungen einen von Null verschiedenen Homomorphismus $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \rightarrow \Delta(\lambda)$, der den kanonischen Erzeuger von $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda)$ auf $y_\alpha^{n+1} v_\lambda$ abbildet. Da alle Verma-Moduln frei sind vom Rang 1 über dem nullteilerfreien Ring $U(\mathfrak{n})$, muß dieser Homomorphismus sogar eine Injektion sein. \square

Beweis von \Leftarrow in 5.4.7. Das Lemma zeigt, daß für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und α einfach mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ ganz und nichtnegativ ein höchster Gewichtsvektor von $L(\lambda)$ stets eine endlichdimensionale \mathfrak{g}^α -Unterdarstellung erzeugt. Nun ist in jeder Darstellung V von \mathfrak{g} die Summe W aller endlichdimensionalen \mathfrak{g}^α -Unterdarstellungen für beliebiges festes $\alpha \in R$ eine \mathfrak{g} -Unterdarstellung von V , wie man zum Beispiel aus Übung 2.3.3 folgert. Gilt nun $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ für jede einfache Wurzel α , so ist also $L(\lambda)$ für jede einfache Wurzel α die Summe seiner endlichdimensionalen \mathfrak{g}^α -Unterdarstellungen, und aus der expliziten Beschreibung in ?? und 5.4.6 folgt $s_\alpha P(L(\lambda)) = P(L(\lambda))$ für jede einfache Spiegelung $s_\alpha \in W$. Dann ist aber notwendig $P(L(\lambda))$ stabil unter der Weylgruppe, also endlich, also $\dim L(\lambda) < \infty$. \square

Übung 5.4.11. Gibt es in einer einfachen Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra einen von Null verschiedenen Vektor, der von allen Wurzelvektoren zu einem System positiver Wurzeln aus dem Wurzelsystem zu einer Cartan'schen annulliert wird, so ist der fragliche Vektor bereits ein höchster Gewichtsvektor unserer Darstellung.

Übung 5.4.12. Die Darstellung $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ von $\mathfrak{sl}(n + 1; \mathbb{C})$ ist einfach für $1 \leq i \leq n + 1$ und hat das höchste Gewicht $\varpi_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$.

5.5 Die Weyl'schen Formeln

Notation 5.5.1. Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unter algebra, $R^+ \subset R$ ein System von positiven Wurzeln, $\rho \in \mathfrak{h}^*$

die Halbsumme der positiven Wurzeln, X das Gitter der ganzen Gewichte und X^+ die Menge der in Bezug auf R^+ dominanten ganzen Gewichte.

Satz 5.5.2 (Weyl'sche Dimensionsformel). Für jedes ganze dominante Gewicht $\lambda \in X^+$ wird die Dimension der einfachen Darstellung $L(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ gegeben durch die Formel

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle}$$

Bemerkung 5.5.3. Der Beweis wird im Anschluß an 5.5.29 gegeben. Auf dem Weg dahin werden wir sogar die Dimensionen $\dim_k L(\lambda)_\mu$ aller Gewichtsräume von endlichdimensionalen einfachen Darstellungen bestimmen.

Definition 5.5.4. Wir betrachten den Gruppenring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ der additiven Gruppe \mathfrak{h}^* . Fassen wir $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ als Element dieses Gruppenrings auf, so schreiben wir e^λ statt λ , da sonst $\lambda + \mu$ zweideutig wäre. Die e^λ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ bilden also eine \mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ und es gilt $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$.

Bemerkung 5.5.5. Der Ring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ ist nullteilerfrei. In der Tat liegen je zwei Elemente stets in einem Teilring der Gestalt $\mathbb{Z}E$ für $E \subset \mathfrak{h}^*$ eine endlich erzeugte Untergruppe, und da E notwendig eine freie abelsche Gruppe ist, muß $\mathbb{Z}E$ isomorph sein zu einem Ring von Laurent-Polynomen in mehreren Veränderlichen.

Definition 5.5.6. Für jede endlichdimensionale Darstellung V von \mathfrak{g} definieren wir ihren **Charakter** $\text{ch } V \in \mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ durch die Vorschrift

$$\text{ch } V = \sum_{\mu} (\dim V_{\mu}) e^{\mu}$$

Bemerkung 5.5.7. Der Charakter einer endlichdimensionalen Darstellung ist stabil unter der Weylgruppe. In der Tat folgt aus der Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2; k)$ nach ??, daß geeignete Potenzen von Erzeugern von \mathfrak{g}_{α} und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ Isomorphismen zwischen den Gewichtsräumen zu λ und $s_{\alpha}\lambda$ liefern.

Satz 5.5.8 (Weyl'sche Charakterformel). Für jedes ganze dominante Gewicht $\lambda \in X^+$ gilt in $\text{Quot}(\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*)$ die Formel

$$\text{ch } L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w\rho}}$$

Bemerkung 5.5.9. Der Beweis wird im Anschluß an den Beweis von 5.5.28 gegeben. Die Formel selbst ist insbesondere für theoretische Überlegungen nützlich, für praktische Berechnungen scheint mir 5.5.27 sehr viel besser, und es gibt auch noch bessere Verfahren. Das Vorzeichen $(-1)^{l(w)}$ ist übrigens gerade die Determinante von w .

Beispiele 5.5.10. Man prüft sofort, daß sich korrekt $\text{ch } L(0) = e^0$ ergibt. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$ haben wir $\rho = \alpha/2$, $X^+ = \mathbb{N}\rho$ und es ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ korrekt

$$\text{ch } L(n\rho) = \frac{e^{(n+1)\rho} - e^{-(n+1)\rho}}{e^\rho - e^{-\rho}} = e^{n\rho} + e^{(n-2)\rho} + \dots + e^{-n\rho}$$

Bemerkung 5.5.11. Ist \mathfrak{g} einfach und $\beta \in R^+$ die höchste Wurzel, so ist $L(\beta)$ die adjungierte Darstellung und die Weyl'sche Charakterformel spezialisiert zu einer bemerkenswerten kombinatorischen Identität, die der Leser selbst ausschreiben mag.

Bemerkung 5.5.12. Ich kann zwar für den Ring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ keine Anschauung anbieten, wohl aber für seinen Teilring $\mathbb{Z}X$. Ist genauer G eine einfach zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum und $T \subset G$ ein maximaler Torus, so sind die zugehörigen komplexifizierten Lie-Algebren $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche in einer halbeinfachen komplexen Lie-Algebra. Gegeben $\lambda \in X \subset \mathfrak{h}^*$ können wir eine Abbildung $[e^\lambda] : T \rightarrow \mathbb{C}^\times$ definieren durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } T & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \\ \text{exp } \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ T & \xrightarrow{[e^\lambda]} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Injektion $\mathbb{Z}X \hookrightarrow \text{Ens}(T, \mathbb{C})$, $e^\lambda \mapsto [e^\lambda]$, die sowohl unsere Notation e^λ erklärt als auch den Ring $\mathbb{Z}X$ interpretiert als einen Ring von Funktionen auf T . Arbeiten wir statt mit kompakten Lie-Gruppen mit komplexen algebraischen Gruppen, so liefert eine entsprechende Konstruktion sogar einen Isomorphismus $\mathbb{C}X \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[T_{\mathbb{C}}]$ vom Gruppenring mit komplexen Koeffizienten des Gewichtegitters in den Ring der polynomialen Funktionen auf dem algebraischen maximalen Torus $T_{\mathbb{C}}$. Ist nun $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine stetige komplexe endlichdimensionale Darstellung von G und $d\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ die zugehörige Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} , so wird unser formaler Charakter $\text{ch}(V, d\pi) \in \mathbb{Z}X$ unter besagter Einbettung $\mathbb{Z}X \hookrightarrow \text{Ens}(T, \mathbb{C})$ die Restriktion auf T des üblichen Charakters

$$\begin{array}{ccc} \text{ch}(V, \pi) : G & \rightarrow & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \text{tr}(\pi(g)) \end{array}$$

In dieser Form wurde die Charakterformel von Weyl entdeckt und daher rührt ihr Name. Wir wollen nun unseren Charakterring so erweitern, daß wir auch mit Charakteren von Verma-Moduln rechnen können.

Definition 5.5.13. Ganz allgemein können wir die Menge $\text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ aller Abbildungen von \mathfrak{h}^* nach \mathbb{Z} betrachten. Wir schreiben solche Abbildungen $f : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ als unendliche formale Ausdrücke $f = \sum f(\lambda) e^\lambda$ und ordnen jeder Darstellung V von \mathfrak{g} oder sogar von \mathfrak{h} mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen ihren **Charakter** $\text{ch } V \in \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ zu vermittels der Vorschrift

$$\text{ch } V = \sum (\dim V_\mu) e^\mu$$

Bemerkung 5.5.14. Offensichtlich bilden die Charaktere aller Verma-Moduln eine linear unabhängige Familie in $\text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ und dasselbe gilt für die Charaktere aller einfachen höchsten Gewichtsmodule, aber ich kenne keine Möglichkeit, die Multiplikation in $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ sinnvoll auf ganz $\text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ auszudehnen. Um dennoch mit Charakteren von Verma-Moduln rechnen zu können, arbeiten wir mit einer geeigneten Untergruppe.

Definition 5.5.15. Bezeichne

$$\mathbb{Z}^{\triangleright} \mathfrak{h}^* \subset \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$$

die Menge aller Abbildungen von \mathfrak{h}^* nach \mathbb{Z} , deren Träger in einer Vereinigung von endlich vielen Mengen der Form $\lambda - \langle R^+ \rangle$ enthalten ist.

Bemerkung 5.5.16. Natürlich können wir $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \subset \mathbb{Z}^{\triangleright} \mathfrak{h}^*$ als die Teilmenge aller Funktionen mit endlichem Träger auffassen. Wir können nun die Multiplikation in $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ zu einer assoziativen kommutativen Multiplikation auf $\mathbb{Z}^{\triangleright} \mathfrak{h}^*$ fortsetzen durch die Vorschrift $(fg)(\nu) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} f(\lambda)g(\mu)$, denn unsere Trägerbedingung stellt sicher, daß in diesen Summen nur endlich viele Terme nicht verschwinden. Man kann sich überlegen, daß dieser Ring auch nullteilerfrei ist, aber wir werden das nicht benötigen. Als Beispiel für die Nützlichkeit unseres Rings zeigen wir gleich zwei Lemmata.

Lemma 5.5.17. *Seien M, N zwei \mathfrak{h} -Moduln mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen derart, daß beide die Summe ihrer Gewichtsräume sind und daß ihre Charaktere beide zu $\mathbb{Z}^{\triangleright} \mathfrak{h}^*$ gehören. So gilt $\text{ch}(M \otimes N) = (\text{ch } M)(\text{ch } N)$.*

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Lemma 5.5.18. *Der Charakter eines Verma-Moduls wird gegeben durch die Formel $\text{ch } \Delta(\lambda) = e^\lambda \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots)$, insbesondere gilt in $\mathbb{Z}^{\triangleright} \mathfrak{h}^*$ die Formel*

$$\left(\prod_{\alpha \in R^+} 1 - e^{-\alpha} \right) \text{ch } \Delta(\lambda) = e^\lambda$$

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten und die erste drückt nur unsere Erkenntnisse über Verma-Moduln aus 5.4.3 in unserem neuen Formalismus aus, da ja offensichtlich gilt $\prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots) = \sum_{\mu} \mathcal{P}(-\mu) e^{-\mu}$. \square

Bemerkung 5.5.19. Wir interessieren uns nun für den Eigenwert des Casimir-Operators auf einem Verma-Modul. Bezeichne $\bar{\kappa} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ den von der Killingform κ induzierten Isomorphismus, charakterisiert durch $\langle \bar{\kappa}(h), h' \rangle = \kappa(h, h') \quad \forall h, h' \in \mathfrak{h}$. Bezeichne $(\ , \)$ die Bilinearform auf \mathfrak{h}^* , die unter dem Isomorphismus $\bar{\kappa}$ der Killingform auf \mathfrak{h} entspricht. Haben wir $\bar{\kappa} : h \mapsto \lambda$, so folgt für alle $\mu \in \mathfrak{h}^*$ auch $\mu(h) = (\lambda, \mu)$. Nach dem anschließenden Lemma ist unsere Bilinearform invariant unter der Weylgruppe.

Lemma 5.5.20. *Die Restriktion der Killingform einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra auf eine Cartan'sche ist invariant unter der Weylgruppe.*

Beweis. Für $x, y \in \mathfrak{h}$ und $w \in W$ rechnen wir

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) \\ &= \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, x \rangle \langle \alpha, y \rangle \\ &= \sum_{\beta \in R} \langle w^{-1}\beta, x \rangle \langle w^{-1}\beta, y \rangle \\ &= \sum_{\beta \in R} \langle \beta, wx \rangle \langle \beta, wy \rangle \\ &= \kappa(wx, wy) \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 5.5.21. *Jeder Endomorphismus eines Verma-Moduls ist die Multiplikation mit einem Skalar.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen $k \mapsto \text{End}_{\mathfrak{g}} \Delta(\lambda) \hookrightarrow \text{End}_k(\Delta(\lambda)_{\lambda})$. Die zweite ist injektiv, da $\Delta(\lambda)_{\lambda}$ nach 5.4.3 schon $\Delta(\lambda)$ erzeugt. Die Verknüpfung ist eine Bijektion, da ja nach 5.4.3 der höchste Gewichtsraum eines Verma-Moduls eindimensional ist. Also sind unsere Abbildungen alle drei Bijektionen. \square

Lemma 5.5.22. *Der Casimir-Operator $C = C_{\kappa}$ aus 2.2.12 operiert auf dem Verma-Modul $\Delta(\lambda)$ durch den Skalar $c_{\lambda} = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$.*

Bemerkung 5.5.23. Dies Lemma gilt unverändert, wenn wir die Killingform ersetzen durch eine beliebige invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf unserer halbeinfachen Lie-Algebra. Es zeigt im Übrigen in Verbindung mit 5.4.9 auch $(\lambda, \lambda) = (w\lambda, w\lambda)$ zumindest für alle ganzen Gewichte λ und alle $w \in W$.

Beweis. Wir müssen nach 5.5.21 nur ausrechnen, durch welchen Skalar der Casimiroperator C auf dem höchsten Gewichtsraum $\Delta(\lambda)_\lambda$ operiert. Dazu wählen wir für $\alpha \in R^+$ geeignete Wurzelvektoren $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$, wählen des weiteren eine Orthonormalbasis h_1, \dots, h_n von \mathfrak{h} unter der Killing-Form κ und erhalten

$$\begin{aligned} C &= \sum_{\alpha \in R^+} y_\alpha x_\alpha + x_\alpha y_\alpha + \sum_{i=1}^n h_i^2 \\ &= \sum_{\alpha \in R^+} 2y_\alpha x_\alpha + [x_\alpha, y_\alpha] + \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck operiert auf $\Delta(\lambda)_\lambda$ natürlich durch den Skalar

$$c_\lambda = \sum_{\alpha \in R^+} \lambda([x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \lambda(h_i)^2$$

Schreiben wir $\lambda = \bar{\kappa}(h)$, so liest sich unser Skalar als

$$c_\lambda = \sum_{\alpha \in R^+} \kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \kappa(h, h_i)^2$$

und da gilt $\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(h)$ ergibt sich schließlich für unseren Skalar die Formel

$$\begin{aligned} c_\lambda &= 2\rho(h) + \kappa(h, h) \\ &= (2\rho, \lambda) + (\lambda, \lambda) \\ &= (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 5.5.24 (Formel von Freudenthal). Der Beweis von 5.5.22 liefert bereits eine Formel zur induktiven Berechnung irreduzibler Charaktere. Ist $L = L(m\rho)$ die $(m+1)$ -dimensionale einfache Darstellung von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ und ist e, h, f die Standardbasis wie in ??, so liefern die Formeln aus dem Beweis dort, daß die Operation von fe auf jedem von Null verschiedenen Gewichtsraum $L(m\rho)_{m\rho - i\alpha}$ geschieht durch den Skalar $(m-i+1)i$, den wir auch schreiben können als

$$(m-i+1)i = \sum_{j \geq 1} (\dim L(m\rho)_{\mu+j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle$$

für $\mu = m\rho - i\alpha$. Die rechte Seite wird nun zusätzlich Null für alle Gewichte μ mit $L(m\rho)_\mu = 0$ und das zeigt, daß für alle endlichdimensionalen Darstellungen V der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ und alle Gewichte μ gilt

$$\mathrm{tr}(fe|V_\mu) = \sum_{j \geq 1} (\dim V_{\mu+j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle$$

Gegeben $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x, y] = \alpha^\vee$ folgt aus der Formel vom Beginn des Beweises von ?? sofort

$$\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = 2\kappa(x, y)$$

Gegeben $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$ folgt umgekehrt dann auch, daß x_α, α^\vee und $(\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee)/2)y_\alpha$ ein \mathfrak{sl}_2 -Tripel (e, h, f) bilden. Für $\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ kürzen wir nun $\sqrt{(\lambda, \lambda)} = |\lambda|$ ab. Für die Spur des Casimir auf dem Gewichtsraum $L(\lambda)_\mu$ ergeben sich mit 5.5.22 und den Formeln aus dem Beweis dieses Lemmas die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{tr}(C|L(\lambda)_\mu) &= (\dim L(\lambda)_\mu) (|\lambda + \rho|^2 - |\rho|^2) \\ \text{tr}(C|L(\lambda)_\mu) &= \sum_{\alpha \in R^+} \frac{2}{\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee)} \sum_{j \geq 1} (\dim L(\lambda)_{\mu+j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle \\ &\quad + (\dim L(\lambda)_\mu) (|\mu + \rho|^2 - |\rho|^2) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich dieser beiden Formeln zusammen mit der Erkenntnis $\bar{\kappa}(\alpha^\vee) = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ ergibt sich dann schließlich **Freudenthal's Formel**

$$(\dim L(\lambda)_\mu) (|\lambda + \rho|^2 - |\mu + \rho|^2) = 2 \sum_{\alpha \in R^+} \sum_{j \geq 1} (\dim L(\lambda)_{\mu+j\alpha}) (\mu + j\alpha, \alpha)$$

Sie erlaubt es, induktiv die Dimension eines Gewichtsraums in einer einfachen Darstellung zu berechnen aus den Dimensionen der Gewichtsräume zu höheren Gewichten.

Lemma 5.5.25. *Jeder Verma-Modul $\Delta(\lambda)$ hat endliche Länge und jeder einfache Subquotient von $\Delta(\lambda)$ ist ein einfacher höchster Gewichtsmodul $L(\mu)$ mit $\mu \leq \lambda$ und $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$.*

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus 5.4.5.4 und 5.5.22, da der Casimir-Operator auf jedem Subquotienten von $\Delta(\lambda)$ auch durch den Skalar c_λ operieren muß. Wir folgern daraus zunächst einmal, daß es überhaupt nur endlich viele μ gibt, die als höchste Gewichte einfacher Subquotienten unseres Verma-Moduls in Frage kommen. Aus $\mu \leq \lambda$ folgt ja unter anderem $\mu = \lambda + \nu$ mit $\nu \in \langle R \rangle$. Nun gibt es aber nur endlich viele Elemente des Wurzelgitters $\nu \in \langle R \rangle$ mit $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\lambda + \nu + \rho, \lambda + \nu + \rho)$, denn diese Gleichung ist gleichbedeutend zu $(\nu, \nu) + 2(\lambda + \rho, \nu) = 0$, und da unsere Bilinearform $(\ , \)$ nach ?? positiv definit ist auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$, kann unsere Gleichung im Gitter $\langle R \rangle$ höchstens endlich viele Lösungen haben. Weiter hat jeder von Null verschiedene Subquotient S von $\Delta(\lambda)$ selbst einen einfachen Subquotienten, ganz allgemein besitzt ja nach ?? jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring einen einfachen Subquotienten. Damit gibt es also für jeden von Null verschiedenen

Subquotienten S von $\Delta(\lambda)$ ein Gewicht μ mit $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ und $S_\mu \neq 0$. Wir können dann die Länge $l(\Delta(\lambda))$ einer in jedem Schritt echt absteigenden Filtrierung der Darstellung $\Delta(\lambda)$ abschätzen durch

$$l(\Delta(\lambda)) \leq \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ (\mu + \rho, \mu + \rho) = \\ = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)}} \dim_k \Delta(\lambda)_\mu \quad \square$$

Bemerkung 5.5.26. Wir erinnern an die “zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene” Operation von W auf \mathfrak{h}^* , gegeben durch die Formel $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$.

Satz 5.5.27 (Kostant’sche Charakterformel). *Gegeben $\lambda \in X^+$ ein dominantes ganzes Gewicht ist der Charakter der einfachen Darstellung mit höchstem Gewicht λ die alternierende Summe über die Charaktere der Veramoduln mit höchstem Gewicht in der Bahn von λ unter der dot-Operation der Weylgruppe, in Formeln*

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \text{ch } \Delta(w \cdot \lambda)$$

Beweis. Für $\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ kürzen wir $\sqrt{(\lambda, \lambda)} = |\lambda|$ ab. Lemma 5.5.25 sagt uns, daß wir den Charakter von $\Delta(\lambda)$ schreiben können in der Form

$$\text{ch } \Delta(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ |\mu + \rho| = |\lambda + \rho|}} a_\lambda^\mu \text{ch } L(\mu)$$

für geeignete $a_\lambda^\mu \in \mathbb{N}$ mit $a_\lambda^\lambda = 1$. Da sich eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen stets invertieren läßt, können wir umgekehrt auch den Charakter von $L(\lambda)$ schreiben in der Form

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ |\mu + \rho| = |\lambda + \rho|}} b_\lambda^\mu \text{ch } \Delta(\mu)$$

für geeignete $b_\lambda^\mu \in \mathbb{Z}$ mit $b_\lambda^\lambda = 1$. Insoweit gilt alles für beliebige $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ und wenn wir die Notation $|\mu|$ vermeiden sogar für beliebige $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Ist λ nun ganz und dominant, so hat $L(\lambda)$ endliche Dimension nach 5.4.7 und $\text{ch } L(\lambda)$ ist nach 5.5.7 invariant unter der Weylgruppe W . Wir multiplizieren dann beide Seiten unserer Gleichung mit

$$\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})$$

und erhalten mit der Abkürzung $d_\nu = b_\lambda^{\nu-\rho}$ die Formel

$$\left(\prod_{\alpha \in R^+} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2} \right) \text{ch } L(\lambda) = \sum_{\mu} b_\lambda^\mu e^{\mu+\rho} = \sum_{\nu} d_\nu e^\nu$$

mit der zusätzlichen Information $d_{\lambda+\rho} = 1$ und $d_\nu = 0$ falls nicht $|\nu| = |\lambda + \rho|$ und $\nu \leq \lambda + \rho$. Nach 4.3.4 ändert die linke Seite ihr Vorzeichen, wenn man darauf eine einfache Spiegelung s_β anwendet. Dasselbe muß dann auch für die rechte Seite gelten und wir folgern $d_\nu = (-1)^{l(w)} d_{w\nu}$ für alle $w \in W$. Insbesondere haben wir damit sogar $d_\nu = 0$ falls nicht $|\nu| = |\lambda + \rho|$ und $w\nu \leq \lambda + \rho$ für alle $w \in W$. Mit dem anschließenden Lemma folgt $d_\nu = 0$ falls nicht $\nu \in W(\lambda + \rho)$, und mit unserer zusätzlichen Information $d_{\lambda+\rho} = 1$ und Zurückparametrisieren folgt die Kostant'sche Charakterformel. \square

Lemma 5.5.28. *Sei $\mu \in X^+$ ein ganzes dominantes Gewicht und $\nu \in X$ irgendein ganzes Gewicht. Aus $|\nu| = |\mu|$ und $w\nu \leq \mu$ für alle $w \in W$ folgt $\nu \in W\mu$.*

Beweis. Jedes ganze Gewicht läßt sich mit W nach X^+ konjugieren, und sein "Betrag" ändert sich nach 5.5.23 dabei nicht. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\nu \in X^+$ annehmen und müssen nur für $\mu, \nu \in X^+$ aus $\nu \leq \mu$ und $|\nu| = |\mu|$ folgern $\nu = \mu$. Nun ist ja per definitionem das Skalarprodukt eines Vektors aus der dominanten Weylkammer mit einer positiven Wurzel stets nichtnegativ, als da heißt, unter unseren Voraussetzungen schließen $\mu - \nu$ und ν einen stumpfen Winkel ein. Dann aber muß die Summe mindestens genauso lang sein wie jeder der beiden Summanden, und Gleichheit der Längen ist nur möglich, wenn der entsprechende Summand mit der Summe übereinstimmt. \square

Beweis der Weyl'schen Charakterformel 5.5.8. Wir teilen die Formel

$$\left(\prod_{\alpha \in R^+} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2} \right) \text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)}$$

aus dem Beweis der Kostant'schen Charakterformel 5.5.27 durch ihre Spezialisierung an $\lambda = 0$. \square

Bemerkung 5.5.29. Die Spezialisierung obiger Formel bei $\lambda = 0$ ist auch für sich genommen eine bemerkenswerte kombinatorische Identität, die sogenannte **Weyl'sche Nennerformel**

$$e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w\rho}$$

Übung 5.5.30. Man zeige mithilfe einer Streckung der Nennerformel für eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra die Formel

$$\text{ch } L(n\rho) = e^{n\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + \dots + e^{-n\alpha})$$

Beweis der Weyl'schen Dimensionsformel 5.5.2. Es liegt nahe, den Ringhomomorphismus $\epsilon : \mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ zu betrachten mit $\epsilon(e^\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$. Dann ist natürlich $\dim L(\lambda) = \epsilon(\text{ch } L(\lambda))$, nur führt uns die Weyl'sche Charakterformel zunächst auf die wenig hilfreiche Relation $0 \cdot \dim L(\lambda) = 0$. Um hier weiterzukommen benutzen wir eine abstrakte Version der Regel von de l'Hospital. Dazu bilden wir in unserem Gruppenring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ den Teilring $\mathbb{Z}X$ und betrachten für $\alpha \in R^+$ den Gruppenhomomorphismus $\partial_\alpha : \mathbb{Z}X \rightarrow \mathbb{Z}X$ mit $\partial_\alpha(e^\mu) = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle e^\mu$. Man prüft mühelos, daß ∂_α eine Derivation ist und daß die ∂_α für verschiedene α kommutieren. Ist $D = \prod_{\alpha \in R^+} \partial_\alpha \in \text{End } \mathbb{Z}X$ das Produkt der ∂_α , so gilt offensichtlich $\epsilon D e^\mu = \prod_{\alpha \in R^+} \langle \mu, \alpha^\vee \rangle$, und mit 4.3.4 folgt daraus $\epsilon D e^{w\mu} = (-1)^{l(w)} \epsilon D e^\mu$ zuerst für w eine einfache Spiegelung und dann für beliebige $w \in W$. Betrachten wir nun die aus der Kombination der Weyl'schen Charakterformel und Nennerformel entstehende Gleichung

$$\left(e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \right) \text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)}$$

und wenden auf beide Seiten ϵD an, so ergibt sich

$$\epsilon D \left(e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \right) \epsilon(\text{ch } L(\lambda)) = |W| \prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle$$

denn "kriegt einer der Faktoren $1 - e^{-\alpha}$ keine Derivation ab, so verschwindet er unter ϵ ". Setzen wir hier $\epsilon(\text{ch } L(\lambda)) = \dim_{\mathbb{C}} L(\lambda)$ ein und teilen unsere Gleichung durch ihre Spezialisierung an $\lambda = 0$, so ergibt sich die Weyl'sche Dimensionsformel. \square

Bemerkung 5.5.31. Die Gewichte maximaler Länge in einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung nennen wir ihre **extremen Gewichte**. Die extremen Gewichte von $L(\nu)$ sind nach 5.5.28 gerade die Weylgruppenkonjugierten des höchsten Gewichts, d.h. die Elemente von $W\nu$.

Satz 5.5.32 (Formel von Klimyk). Gegeben $\lambda, \mu, \nu \in X^+$ dominante ganze Gewichte gilt für die Vielfachheit $[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)]$ von $L(\lambda)$ als Summand der Tensor Darstellung die Formel

$$[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)] = \sum_{y \in W} (-1)^{l(y)} \dim L(\mu)_{\lambda-y\nu} \leq \dim L(\mu)_{\lambda-\nu}$$

Bemerkung 5.5.33. Ist μ klein im Vergleich zu ν in dem Sinne, daß für alle einfachen Wurzeln α und alle $z \in W$ gilt $\langle \nu + z\mu, \alpha^\vee \rangle \geq -1$, so haben wir in der obigen Formel sogar ganz rechts Gleichheit für alle λ . Auch im allgemeinen zeigt unsere Formel $[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)] \neq 0 \Rightarrow |\lambda - \nu| \leq |\mu|$ bezüglich jedes unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$.

Beweis. Ist E irgendeine endlichdimensionale Darstellung und $P(E)$ die Multimenge ihrer Gewichte im Sinne von ??, so liefert die Kostant'sche Charakterformel 5.5.27

$$\text{ch}(E \otimes L(\nu)) = \sum_{y \in W, \tau \in P(E)} (-1)^{l(y)} \text{ch} \Delta(y \cdot \nu + \tau)$$

und um die Vielfachheit von $L(\lambda)$ in $E \otimes L(\nu)$ zu bestimmen, müssen wir nur auf der rechten Seite die Summanden $\Delta(\lambda)$ zählen und erhalten die Gleichung aus der Formel von Klimyk in der Gestalt

$$[E \otimes L(\nu) : L(\lambda)] = \sum_{\substack{y \in W, \tau \in P(E) \\ y \cdot \nu + \tau = \lambda}} (-1)^{l(y)} = \sum_{y \in W} (-1)^{l(y)} \dim E_{\lambda - y \cdot \nu}$$

Ebenso aber einfacher finden wir auch $\text{ch}(E \otimes \Delta(\nu)) = \sum_{\tau \in P(E)} \text{ch} \Delta(\nu + \tau)$ und damit $[E \otimes \Delta(\nu) : L(\lambda)] = \dim E_{\lambda - \nu}$. Das liefert die Ungleichung. \square

Bemerkung 5.5.34. Haben wir nun wieder $E = L(\mu)$, so können wir die Kostant'sche Charakterformel auch mit der Kostant'schen Partitionsfunktion aus 5.4.3 schreiben in der Gestalt

$$\dim L(\mu)_\eta = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \mathcal{P}(x \cdot \mu - \eta)$$

Setzen wir das in die Formel von Klimyk ein, so ergibt sich die **Formel und Steinberg**

$$[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)] = \sum_{x, y \in W} (-1)^{l(xy)} \mathcal{P}(x \cdot \mu + y \cdot \nu - \lambda)$$

Bemerkung 5.5.35. Sei $T \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $\varepsilon_i : T \rightarrow \mathbb{C}^\times$ die Projektion auf den i -ten Diagonaleintrag. Die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(T)$ ist die freie abelsche Gruppe über den ε_i und ihr Gruppenring ist der Ring $\mathbb{Z}[X_i, X_i^{-1}]$ aller Laurent-Polynome in Veränderlichen X_1, \dots, X_n , wo wir $e^{\varepsilon_i} = X_i$ abgekürzt haben, d.h. X_i ist ε_i aufgefaßt

als Element des Gruppenrings. Der Charakter definiert einen Ringisomorphismus

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Grothendieckgruppe der} \\ \text{endlichdimensionalen polynomialen} \\ \text{Darstellungen von } \text{GL}(n, \mathbb{C}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$$

des Darstellungsrings der polynomialen Darstellungen mit dem Ring der symmetrischen Polynome. Die irreduziblen Darstellungen entsprechen hierbei den sogenannten **Schur-Polynomen**. Gegeben natürliche Zahlen $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ gehört genauer zur irreduziblen Darstellung $L(\lambda)$ mit höchstem Gewicht $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ das Schur-Polynom S_λ mit der kombinatorischen Definition

$$S_\lambda = \det(X_j^{\lambda_i + n - i}) / \det(X_j^{n - i})$$

In der Tat folgt das aus der Weyl'schen Charakterformel und der Erkenntnis, daß wir eine Identität haben der Gestalt

$$X_1^{n-1} X_2^{n-2} \dots X_{n-1} = e^{\rho + \kappa}$$

mit κ einem Gewicht, das invariant ist unter der Weylgruppe. Etwas Vorsicht ist jedoch geboten, denn weder ρ noch κ gehören zu $\mathfrak{X}(T)$.

6 Mehr über Spiegelungsgruppen

6.1 Coxetergraphen und Klassifikation

Definition 6.1.1. Sei E ein affiner euklidischer Raum über einem angeordneten Körper k und $W \subset \text{Aut } E$ eine affine Spiegelungsgruppe. Sei A ein Alkoven und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden von A . Wir definieren zu diesen Daten eine symmetrische $S \times S$ -Matrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die sogenannte **Coxetermatrix** unserer Spiegelungsgruppe durch die Vorschrift, daß der Matrixeintrag in Zeile s und Spalte t die Ordnung von st sein soll, in Formeln

$$m_{s,t} = m(s, t) = \text{ord } st$$

Bemerkung 6.1.2. Auf der Diagonalen unserer Matrix stehen natürlich nur Einsen und außerhalb sind alle Einträge ≥ 2 . Unsere Matrix ist unabhängig von der Wahl von A . Etwas formaler könnten wir in $\mathcal{A} \times \mathcal{H}$ die Teilmenge \mathcal{S} aller Paare (A, H) betrachten, bei denen die Spiegelebene H eine Wand des Alkoven A ist, für S den Bahnenraum $S = W \setminus \mathcal{S}$ nehmen, und in offensichtlicher Weise eine Matrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ erklären, die dann in der Tat von keinerlei Wahlen mehr abhängt.

Bemerkung 6.1.3. Die Coxetermatrizen der affinen Spiegelungsgruppen haben typisch nur sehr wenige von Zwei verschiedene Einträge und fast keine Einträge > 3 . Weiter sind die Einträge auf der Diagonalen eh bekannt. Besonders übersichtlich stellt man die in einer Coxetermatrix enthaltene Information deshalb in der Form des sogenannten **Coxetergraphen** dar: Man malt eine Ecke für jedes Element von S , eine Kante zwischen je zwei Ecken $s, t \in S$ mit $m(s, t) \geq 3$, und schreibt an diese Kante noch die Zahl $m(s, t)$ im Fall $m(s, t) > 3$.

Beispiel 6.1.4. Die Spiegelungsgruppe, deren Alkoven ein Schachbrettmuster bilden, hat also den Coxetergraphen



und nehmen wir für jedes Schachfeld noch seine beiden Diagonalen als Spiegelhyperebenen hinzu, so hat der Coxetergraph dieser größeren Spiegelungsgruppe die Gestalt



Proposition 6.1.5. Seien V_1, V_2 euklidische Vektorräume und $W_1 \subset \text{GL}(V_1)$, $W_2 \subset \text{GL}(V_2)$ endliche orthogonale Spiegelungsgruppen ohne Fixpunkte außerhalb des Nullpunkts. Genau dann haben W_1 und W_2 denselben Coxetergraphen, wenn es eine Isometrie $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ gibt mit $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$.

Beweis. Noch aufschreiben. □

Satz 6.1.6 (Klassifikation endlicher Spiegelungsgruppen). *Genau dann gehört ein Coxetergraph zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn alle seine Zusammenhangskomponenten in der folgenden Liste zu finden sind.*

Beweis. Das folgt sofort aus den beiden anschließenden Propositionen. □

Proposition 6.1.7. *Genau dann gehört eine Coxetermatrix $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn die Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist.*

Proposition 6.1.8. *Die zusammenhängenden Coxetergraphen, für die die Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist, sind genau die Graphen der Liste im Satz.*

Beweis von 6.1.7. Wir zeigen zunächst, daß die Coxetermatrix einer endlichen Spiegelungsgruppe stets positiv definit ist. Wir wählen dazu einen Alkoven A und ein invariantes Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und betrachten zu jeder Wand von A den Normalenvektor, der in Richtung von A zeigt. Wir erhalten so eine Familie $(e_s)_{s \in S}$ von Einheitsvektoren. Offensichtlich schließen e_s und e_t gerade den Winkel $\pi - \pi/m_{s,t}$ ein, folglich haben wir

$$(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$$

und folglich kann eine Coxetermatrix nur dann zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe gehören, wenn die Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist. Wir zeigen nun, daß die positive Definitheit unserer Matrix auch hinreichend ist. Für eine beliebige Menge S und eine beliebige $S \times S$ -Matrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit Einträgen 1 auf der Diagonalen und Einträgen ≥ 2 außerhalb der Diagonalen können wir natürlich den freien Vektorraum $V = \mathbb{R}S$ über S bilden mit seiner kanonischen Basis $(e_s)_{s \in S}$ und darauf eine symmetrische Bilinearform (\cdot, \cdot) erklären durch die Vorschrift $(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$. Weiter können wir in $GL(V)$ die Untergruppe W betrachten, die erzeugt wird von den Spiegelungen im Sinne von 4.1.2 mit Spiegelebene $\{v \in V \mid (e_s, v) = 0\}$ und (-1) -Eigenraum $\mathbb{R}e_s$. Wir bezeichnen diese Spiegelungen kurzerhand mit demselben Buchstaben s wie die entsprechende Zeile unserer Matrix, erklären die Länge $l(w)$ eines Elements von W als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung als Produkt solcher Spiegelungen s und behaupten in dieser Situation ganz allgemein:

Lemma 6.1.9. *Für alle $w \in W$ und $s \in S$ gilt*

$$l(ws) > l(w) \Leftrightarrow w e_s \in \sum_{r \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

Beweis. Kennen wir im Lemma die Implikation \Rightarrow , so erhalten wir automatisch

$$l(ws) < l(w) \Rightarrow wse_s = -we_s \in \sum_{r \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

und damit die Äquivalenz. Die Implikation \Rightarrow im Lemma zeigen wir durch Induktion über $l(w)$. Der Fall $l(w) = 0$ ist offensichtlich. Gilt $l(w) > 0$, so finden wir natürlich $t \in S$ mit $l(wt) < l(w)$ und haben notwendig $t \neq s$. Indem wir so lange s oder t von rechts an w dranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung $w = w'u$ mit $u \in \langle s, t \rangle$, $l(w's) > l(w')$, $l(w't) > l(w')$ und $l(w) = l(w') + l(u)$. Natürlich gilt dann auch $l(us) > l(u)$. Falls nun gilt $u \neq w$ können wir die Induktionsannahme auf u anwenden und sogar folgern

$$ue_s \in \mathbb{R}_{\geq 0} e_s + \mathbb{R}_{\geq 0} e_t$$

da nämlich $\mathbb{R}e_s + \mathbb{R}e_t$ stabil ist unter $\langle s, t \rangle$. Da in jedem Falle gilt $u \neq 1$ können wir dann weiter die Induktionsannahme auf w' anwenden und erhalten

$$w'e_s \in \sum \mathbb{R}_{\geq 0} e_r \quad \text{und} \quad w'e_t \in \sum \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

Zusammen folgt so in der Tat

$$we_s = w'u e_s \in \sum \mathbb{R}_{\geq 0} e_r$$

Es bleibt nur noch, den Fall $u = w$ zu behandeln, also den Fall von Diedergruppen. Hier wird der Fall der unendlichen Diedergruppe durch Inspektion geregelt, der Fall endlicher Diedergruppen folgt schon aus ???. \square

Wir folgern die Proposition. In diesem Zusammenhang ist ja S endlich und unsere Bilinearform auf V ist ein Skalarprodukt und unser W besteht aus orthogonalen Abbildungen. Die orthogonalen Komplemente des W -stabilen Systems von Vektoren $\{we_s \mid w \in W, s \in S\} \subset V$ bilden ein W -stabiles System von Hyperebenen \mathcal{H} in V , und das Lemma besagt, daß keine dieser Hyperebenen die Menge $A = \{v \in V \mid (v, e_s) > 0 \forall s \in S\}$ trifft. Diese Menge ist nun aber nicht leer, da die e_s linear unabhängig sind, und ist deshalb ein Alkoven für unser W -stabiles System von Hyperebenen \mathcal{H} . Natürlich wirkt W auf der Menge der Alkoven zu \mathcal{H} , folglich gilt für jedes $w \in W$ entweder $wA = A$ oder $wA \cap A = \emptyset$. Aus $wA = A$ folgt aber auch, daß (we_s, \cdot) positiv ist auf A für alle $s \in S$, und dann folgt mit Lemma 6.1.9 schon $l(ws) > l(w)$ für alle $s \in S$ alias $w = \text{id}$. Folglich sind die Alkoven wA mit $w \in W$ paarweise disjunkt. Nun können wir aber in unserem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum jeder offenen Teilmenge $U \Subset V$ ein

Volumen $\text{vol } U \in [0, \infty]$ zuordnen. Ist $K \subset V$ die offene Einheitskugel, so ist insbesondere $(\text{vol } K) / \text{vol}(K \cap A)$ eine obere Schranke für die Kardinalität von W und wir folgern $|W| < \infty$. Dann ist wiederum \mathcal{H} endlich und wir folgern mit 3.3.7, daß A ein Alkoven ist zu W . Aus den Definitionen folgt dann schließlich, daß der Coxetergraph von W genau der Coxetergraph ist, von dem wir ausgegangen waren. \square

6.2 Spiegelungsgruppen sind Coxetergruppen

Definition 6.2.1. Ein **Coxetersystem** ist ein Paar (W, S) bestehend aus einer Gruppe W und einer Teilmenge $S \subset W$ von W derart, daß W erzeugt wird von S mit den Relationen $s^2 = e \quad \forall s \in S$ und $(st)^{\text{ord}(st)} = e$ für alle $s, t \in S$ mit $\text{ord}(st) < \infty$.

Bemerkung 6.2.2. Will man den Begriff einer durch Erzeugende und Relationen gegebenen Gruppe vermeiden, so kann man auch alternativ formulieren: Ein **Coxetersystem** ist ein Paar (W, S) bestehend aus einer Gruppe W und einer Teilmenge $S \subset W$ derart, daß folgende Bedingung erfüllt ist: Jede beliebige Abbildung $\varphi : S \rightarrow G$ von S in irgendeine Gruppe G mit den Eigenschaften

1. $\varphi(s)^2 = e \quad \forall s \in S$ und
2. $(\varphi(s)\varphi(t))^{\text{ord}(st)} = e \quad \forall s, t \in S$ mit $\text{ord}(st) < \infty$

läßt sich auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus $\tilde{\varphi} : W \rightarrow G$ ausdehnen.

Satz 6.2.3. *Ist W eine affine Spiegelungsgruppe und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkovens, so ist (W, S) ein Coxetersystem.*

Beweis. Sei also $\varphi : S \rightarrow G$ eine Abbildung in eine beliebige Gruppe mit $\varphi(s)^2 = e$ und $(\varphi(s)\varphi(t))^{\text{ord}(st)} = e$ für alle $s, t \in S$ mit $\text{ord}(st) < \infty$. Um besser den Überblick zu behalten, kürzen wir $\varphi(s) = \bar{s}$ ab. Wir wissen, daß sich jedes Element $w \in W$ schreiben läßt als ein Produkt einfacher Spiegelungen, $w = st \dots r$ mit $s, t, \dots, r \in S$. Ist $\tilde{\varphi} : W \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, der φ fortsetzt, so muß notwendig gelten $\tilde{\varphi}(w) = \bar{s}\bar{t} \dots \bar{r}$. Das zeigt die Eindeutigkeit von $\tilde{\varphi}$. Um die Existenz zu zeigen, reicht es, wenn wir für zwei beliebige Darstellungen

$$s_1 \dots s_q = w = t_1 \dots t_l$$

desselben Elements $w \in W$ als Produkt einfacher Spiegelungen zeigen, daß gilt

$$\bar{s}_1 \dots \bar{s}_q = \bar{t}_1 \dots \bar{t}_l$$

In der Tat können wir dann $\tilde{\varphi}(w)$ als diesen gemeinsamen Wert definieren und erhalten so offensichtlich einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : W \rightarrow G$. Da nach Annahme gilt $\bar{t}_i^2 = e$, können wir ebensogut zeigen, daß aus $s_1 \dots s_q t_l \dots t_1 = e$ folgt

$$\bar{s}_1 \dots \bar{s}_q \bar{t}_l \dots \bar{t}_1 = e$$

In anderen Worten gilt es also zu zeigen, daß für $s_1, \dots, s_r \in S$ aus $s_1 \dots s_r = e$ schon folgt $\bar{s}_1 \dots \bar{s}_r = e$.

Wir zeigen das durch Induktion über r . Der Fall $r = 0$ ist offensichtlich. Sei also $r > 0$. Ist ein Produkt von Involutionsen in einer Gruppe das neutrale Element, so auch jede zyklische Vertauschung. Wir haben insbesondere

$$s_i \dots s_r s_1 \dots s_{i-1} = e$$

für alle i . Nach der Austauschbedingung angewandt auf $s_1 = s_r \dots s_2$ finden wir ein $j \geq 2$ mit

$$e = s_r \dots \hat{s}_j \dots s_2$$

oder, gleichbedeutend,

$$e = \hat{s}_1 s_2 \dots \hat{s}_j \dots s_r$$

Kombinieren wir dies Argument mit zyklischem Vertauschen, so sehen wir, daß es für jedes i ein $j \neq i$ gibt mit

$$e = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_r$$

Das ist im Übrigen auch anschaulich klar: Kreuzt die Folge von Alkoven $A, s_1 A, s_1 s_2 A, s_1 s_2 \dots s_r A = A$ eine Spiegelebene einmal, so muß sie auch ein zweites Mal kreuzen, um wieder zur Ausgangsalkove zurückzukehren.

Liegen sich hier i und j nicht genau gegenüber, in Formeln $|i - j| \neq r/2$, so haben wir schon gewonnen: Gilt zum Beispiel $0 < j - i < r/2$, so enthält die Relation

$$s_i \dots s_j = s_{i+1} \dots s_{j-1}$$

beide Seiten zusammengerechnet weniger als r Faktoren, per Induktion folgt also $\bar{s}_i \dots \bar{s}_j = \bar{s}_{i+1} \dots \bar{s}_{j-1}$ und nochmaliges Anwenden der Induktionsvoraussetzung zeigt die Behauptung. Im allgemeinen Fall können wir dasselbe Argument in Kombination mit zyklischem Vertauschen anwenden.

Es bleibt also der Fall $r = 2q$ mit $e = s_1 \dots s_{2q}$ und $e = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_q s_{q+1} \dots \hat{s}_{q+i} \dots s_{2q}$ für alle $i, 1 \leq i \leq q$. *noch fertigmachen, Anschauung ausformulieren!* \square

Satz 6.2.4. *Ist (W, S) ein Coxeter-System, so ist W auch als Monoid erzeugt von S mit den Relationen $s^2 = 1$ und den Zopf-Relationen.*

Beweis. Noch formulieren. Stimmt es eigentlich überhaupt? □

6.3 Bruhat-Ordnung

Bemerkung 6.3.1. Sei W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven, $S = S_A \subset W$ die Menge aller Spiegelungen an Wänden von A und $l = l_A : W \rightarrow \mathbb{N}$, $w \mapsto d(wA, A)$ die zugehörige Längenfunktion. Nach 3.3.7 ist $l(w)$ auch die kürzestmögliche Länge für eine Darstellung von w als Produkt von Spiegelungen aus S . Insbesondere gilt $l(w) = l(w^{-1})$.

Definition 6.3.2. Seien gegeben eine affine Spiegelungsgruppe W und ein ausgezeichneter Alkoven und bezeichne l die zugehörige Längenfunktion. Die **Bruhat-Ordnung** ist die kleinste reflexive transitive Relation \leq auf unserer Spiegelungsgruppe derart, daß gilt

$$x \leq xt \text{ für alle } x \in W \text{ und alle Spiegelungen } t \in W \text{ mit } l(x) < l(xt)$$

Bemerkung 6.3.3. Wir fordern hier nicht $t \in S$. In der Tat würde diese Forderung im allgemeinen zu einer echt kleineren partiellen Ordnung führen. Dennoch hängt die Relation \leq von der Wahl eines ausgezeichneten Alkoven ab, da besagte Wahl die Längenfunktion l festlegt.

Bemerkung 6.3.4. Unter einer Relation R auf einer Menge X verstehen wir wie in ?? eine Teilmenge $R \subset X \times X$, und eine Relation R' nennen wir "kleiner" als eine Relation R auf derselben Menge X genau dann, wenn gilt $R' \subset R$.

Bemerkung 6.3.5. Offensichtlich gilt $x < y \Rightarrow l(x) < l(y)$, insbesondere ist \leq tatsächlich eine partielle Ordnung auf W . Offensichtlich ist das neutrale Element $e \in W$ das kleinste Element. Unschwer erkennt man weiter $x \leq y \Leftrightarrow x^{-1} \leq y^{-1}$. Eine explizitere Beschreibung der Bruhat-Ordnung gibt uns 6.3.7.

Bemerkung 6.3.6. Ist W eine affine Spiegelungsgruppe und A ein ausgezeichneter Alkoven und betrachten wir die Bijektion $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$, so induziert die durch A gegebene Bruhat-Ordnung auf W eine Ordnung auf \mathcal{A} . Diese Ordnung ist nach 3.3.12 die kleinste reflexive transitive Relation auf \mathcal{A} derart, daß gilt $B \leq s_L B$ wann immer $B \in \mathcal{A}$ ein Alkoven ist und L eine Spiegelebene, die B nicht von A trennt.

Satz 6.3.7 (Bruhat-Ordnung über Teilausdrücke). *Ist $w = s_1 \dots s_{l(w)}$ eine reduzierte Darstellung von $w \in W$, so gilt*

$$\{x \in W \mid x \leq w\} = \{s_{i_1} \dots s_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l(w)\}$$

Insbesondere hängt die rechte Seite nicht von der Wahl der reduzierten Darstellung von w ab.

Beweis. Die Inklusion \subset folgt mühelos aus dem Austauschlemma 3.3.13. Für die andere Inklusion \supset müssen wir nach 3.3.11 nur für reduzierte Teilausdrücke zeigen, daß sie Elemente $\leq w$ liefern. Mit Induktion über die Länge von w brauchen wir sogar nur Teilausdrücke zu untersuchen mit $i_1 = 1$. Dann folgt die Behauptung jedoch mit Induktion aus dem anschließenden Lemma. \square

Lemma 6.3.8. *Gegeben $x, y \in W$ und $s \in S$ eine einfache Spiegelung gelten von den vier Ungleichungen*

$$\begin{array}{ll} x \leq y & x \leq sy \\ sx \leq y & sx \leq sy \end{array}$$

entweder mindestens drei oder keine.

Bemerkung 6.3.9. Stellen wir Ungleichungen durch Pfeile zum größeren Element dar, so impliziert also unter der Annahme der beiden horizontalen Ungleichungen $y < sy$ und $x < sx$ jede der drei weiteren Ungleichungen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} y & \rightarrow & sy \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ x & \rightarrow & sx \end{array}$$

die beiden anderen. Wegen dieser graphischen Interpretation, und weil der Schluß von der Diagonale auf die beiden Vertikalen das eigentliche Problem darstellt, ist die Aussage unseres Lemmas auch als die **Eigenschaft Z von Deodhar** bekannt. Man kann diese Eigenschaft ohne Schwierigkeiten aus 6.3.7 folgern, sie geht bei uns jedoch in den Beweis dieses Satzes bereits ein.

Bemerkung 6.3.10. Steigt ein Alkoven B durch eine Folge von Spiegelungen zu einem anderen Alkoven C auf, so steigt auch das ungeordnete Paar von benachbarten Alkoven $\{B, Bs\}$ auf zum ungeordneten Paar von benachbarten Alkoven $\{C, Cs\}$. Das tut es sogar mit der Folge von Spiegelungen, die wir erhalten, wenn wir aus unserer ursprünglichen Folge von Spiegelungen alle diejenigen weglassen, die nur die Bilder des Paares (B, Bs) untereinander vertauschen. Mit dieser Folge von Spiegelungen steigt dann entweder B zu C auf und Bs zu Cs oder B zu Cs und Bs zu C . Das ist die anschauliche Bedeutung der ‘‘Eigenschaft Z’’.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $x < y = xt$ annehmen für eine Spiegelung t . Dann sind wir in einem von vier Fällen, die wir jetzt gleich der Reihe nach abhandeln.

- $sx < x, sy > y$: Dann gelten sogar alle vier Ungleichungen;
- $sx < x, sy < y$: Dann haben wir $l(sx) < l(sy)$ und $sxt = sy$ und damit notwendig $sx < sy$;
- $sx > x, sy > y$: Dann können wir dasselbe Argument anwenden wie beim vorhergehenden Fall;
- $sx > x, sy < y$: Dann haben wir $sxt < xt$ und argumentieren so:

Ist $s_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung von x , so ist $ss_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung von sx . Wegen $l(sxt) < l(sx)$ können wir nach dem Austauschlemma 3.3.13 den Faktor t kürzen gegen eine einfache Spiegelung in der reduzierten Darstellung von sx , ohne das Produkt zu ändern. Wegen $x < xt$ muß dieser Faktor der Erste sein und wir haben $x = sxt = sy$. \square

6.4 Konvexgeometrie

Definition 6.4.1. Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $E \subset V$ eine Teilmenge. Wir sagen, ein Vektor $v \in V$ **läßt sich aus E positiv linear kombinieren** genau dann, wenn er eine Darstellung

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

besitzt mit $\alpha_i > 0$ und $e_i \in E$ und $n \geq 0$. Die leere Linearkombination mit $n = 0$ verstehen wir hier wie immer als den Nullvektor, der sich also in unseren Konventionen aus jeder Teilmenge positiv linear kombinieren läßt.

Satz 6.4.2 (Hauptsatz über lineare Ungleichungen). *Ist V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $E \subset V$ eine endliche Teilmenge, so gilt für jeden Vektor $v \in V$ genau eine der beiden folgenden Aussagen:*

1. *Der Vektor v läßt sich aus E positiv linear kombinieren.*
2. *Es gibt eine Linearform $\alpha \in V^*$ mit $\alpha(e) \geq 0 \ \forall e \in E$ und $\alpha(v) < 0$.*

Im ersten Fall kann v sogar positiv linear kombiniert werden aus höchstens $\dim V$ Elementen von E . Ist E ein Erzeugendensystem von V , so kann im zweiten Fall α sogar so gewählt werden, daß $\ker \alpha$ von seinem Schnitt mit E erzeugt wird.

Bemerkung 6.4.3. Der Satz und der hier gegebene Beweis stammen von Weyl [?]. Einen algorithmischen Beweis und mehr zur praktischen Bedeutung unseres Satzes in der linearen Optimierung findet man in [Sch86].

Beispiel 6.4.4. Gegeben eine Gerade in der Ebene \mathbb{R}^2 , die die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten \mathbb{Q}^2 nur im Nullpunkt trifft, betrachte man in \mathbb{Q}^2 einen der beiden zugehörigen Halbräume mitsamt der Null. So ein Halbraum ist eine konvexe Teilmenge E von \mathbb{Q}^2 , die von überhaupt keinem Punkt aus ihrem Komplement durch eine Gerade des \mathbb{Q} -Vektorraums \mathbb{Q}^2 getrennt werden kann. Unser Satz ist also für unendliches E im allgemeinen nicht mehr richtig. Betrachten wir jedoch abgeschlossene konvexe Kegel E in reellen Banach-Räumen, so gibt es für jeden Vektor v im Komplement eine stetige Linearform, die auf besagtem Kegel nichtnegativ ist, auf dem Vektor aber negativ: Dieser Satz ist eine Variante der grundlegenden Trennungssätze aus der Funktionalanalysis.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß V von E erzeugt wird. Eine Linearform $\alpha \in V^* \setminus 0$ mit $\alpha(e) \geq 0 \forall e \in E$ nennen wir eine **Stütze** von E . Wird zusätzlich $\ker \alpha$ erzeugt von $(\ker \alpha) \cap E$, so nennen wir α eine **extreme Stütze** von E . Wir beweisen den Satz durch Induktion über $d = \dim V$ und müssen die zweite unserer beiden ergänzenden Zusatzaussagen gleich mit beweisen, um die Induktion am Laufen zu halten. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: E besitzt extreme Stützen. Seien dann α, β, \dots die extremen Stützen von E und sei $v \in V$ gegeben mit $\alpha(v) \geq 0, \beta(v) \geq 0, \dots$. Es gilt zu zeigen, daß sich v positiv linear aus höchstens d Elementen von E kombinieren läßt. Liegt v im Kern einer der extremen Stützen, sagen wir $\alpha(v) = 0$, so ersetzen wir V durch $\ker \alpha$ und sind fertig mit Induktion. Sonst suchen wir uns ein $e \in E$, das nicht im Kern aller extremen Stützen liegt, und wählen $\lambda \geq 0$ kleinstmöglich so, daß die Ungleichungen $\alpha(v - \lambda e) \geq 0, \beta(v - \lambda e) \geq 0, \dots$ alle weiter bestehen bleiben, aber mindestens eine, sagen wir die Erste, eine Gleichung $\alpha(v - \lambda e) = 0$ wird. Nun zeigt Induktion, daß sich $v - \lambda e$ positiv linear kombinieren läßt aus $d - 1$ Elementen von $E \cap \ker \alpha$ und damit v aus d Elementen von E .

Fall 2: E besitzt keine extremen Stützen. Wir dürfen $V \neq 0$ annehmen und wählen unter allen $\alpha \in V^* \setminus 0$ derart, daß $(\ker \alpha)$ von seinem Schnitt mit E erzeugt wird, ein α aus, für das die Kardinalität der Menge $E^+ = E^+(\alpha) = \{e \in E \mid \alpha(e) \geq 0\}$ maximal möglich wird. Nach Annahme finden wir dennoch ein $e^- \in E$ mit $\alpha(e^-) < 0$ und dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha(e^-) = -1$ annehmen. Dann betrachten wir die Projektion $\pi : v \mapsto v + \alpha(v)e^-$ von V auf $\ker \alpha$. Hätte $\pi(E^+)$ eine extreme Stütze β , so könnten wir diese durch die Vorschrift $\beta(e^-) = 0$ fortsetzen zu einer Linearform $\beta \in V^*$ mit $\beta|_{E^+} \geq 0$ und $\beta(e^-) = 0$, und $\ker \beta$ wäre erzeugt von seinem Schnitt mit E , im Widerspruch zur Wahl von α . Also hat $\pi(E^+)$ kei-

ne extreme Stütze und nach Induktionsvoraussetzung läßt sich jeder Vektor aus $\ker \alpha$ positiv linear aus $\pi(E^+)$ kombinieren. Also läßt sich jedes $v \in V$ schon mal aus E linear kombinieren unter der Einschränkung, daß nur der Koeffizient vor e^- negativ sein darf. Weiter gibt es aber auch mindestens ein $e^+ \in E$ mit $\alpha(e^+) > 0$, sonst wäre ja $-\alpha$ eine extreme Stütze von E . Schreiben wir $-e^+$ in unserer eingeschränkten Weise und wenden α an, so erkennen wir, daß der Koeffizient von e^- positiv sein muß, und nach geeigneter Umformung stellen wir $-e^-$ dar als positive Linearkombination von Elementen von E^+ . Damit läßt sich nun offensichtlich jeder Vektor aus V positiv linear aus E , ja sogar aus $E^+ \cup \{e^-\}$ kombinieren. Um zu zeigen, daß für solch eine Darstellung eines gegebenen Vektors v sogar d Elemente von E ausreichen, beginnen wir mit irgendeiner Darstellung $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ als positive Linearkombination von Elementen von E . Benutzt sie mehr als d Elemente von E , so ist $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ein Punkt aus dem Inneren des positiven Quadranten in k^n auf einer ganzen affinen Geraden von Lösungen der Gleichung $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Die Stelle, an der diese Gerade den positiven Quadranten verläßt, ist dann eine kürzere Darstellung von v als positive Linearkombination von Elementen von E . \square

Korollar 6.4.5. *Ist E eine endliche Teilmenge eines affinen Raums W über einem angeordneten Körper k , so sind gleichbedeutend für $e \in E$:*

1. *Der Punkt e gehört nicht zur konvexen Hülle von $E \setminus e$.*
2. *Es gibt eine affine Abbildung $\alpha : W \rightarrow k$ mit $\alpha(e) = 0$ aber $\alpha(e') > 0$ für alle $e' \in E \setminus e$.*

Beweis. $2 \Rightarrow 1$ ist klar und wir müssen nur $1 \Rightarrow 2$ zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, W sei als ein affiner aber nichtlinearer Teilraum eingebettet in einen Vektorraum V . Mit dem Hauptsatz 6.4.2 finden wir zunächst eine Stütze β von $E \setminus e$ mit $\beta(e) < 0$. Indem wir dies β auf W einschränken und davon die Konstante $\beta(e)$ abziehen erhalten wir unser α . \square

Definition 6.4.6. Ein **Kegel** in einem Vektorraum über einem angeordneten Körper ist eine Teilmenge, die den Ursprung enthält und stabil ist unter Addition und Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren. Ein Kegel, der keine Gerade umfaßt, heißt ein **spitzer Kegel**.

Übung 6.4.7. Gegeben ein Kegel K in einem Vektorraum über einem angeordneten Körper, der den ganzen Vektorraum erzeugt, läßt sich jede Abbildung $\varphi : K \rightarrow W$ in einen weiteren Vektorraum mit $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ sowie $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$ für alle $v, w \in K$ und $\alpha > 0$ auf genau eine Weise zu einer linearen Abbildung $K \rightarrow W$ fortsetzen.

Bemerkung 6.4.8. Natürlich ist jeder Schnitt von Kegeln wieder ein Kegel. Der kleinste Kegel, der eine gegebene Menge von Vektoren umfaßt, heißt der von dieser Menge **erzeugte Kegel**. Er besteht genau aus allen Vektoren, die sich aus unserer Menge positiv linear kombinieren lassen. Ein endlich erzeugter Kegel heißt auch ein **polyedrischer Kegel**.

Definition 6.4.9. Gegeben eine Teilmenge $E \subset V$ eines Vektorraums über einem angeordneten Körper definieren wir ihre **Polarenmenge** $E^* \subset V^*$ durch die Vorschrift

$$E^* = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(e) \geq 0 \quad \forall e \in E\}$$

Die Polarenmenge einer beliebigen Menge ist offensichtlich ein Kegel. Die Polarenmenge eines Kegels nennt man auch den **dualen Kegel**. Daß diese Terminologie sinnvoll ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 6.4.10 (über duale Kegel). *Ist C ein endlich erzeugter Kegel in einem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem angeordneten Körper, so ist auch seine Polarenmenge $C^* \subset V^*$ ein endlich erzeugter Kegel und der kanonische Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ induziert eine Bijektion*

$$C \xrightarrow{\sim} C^{**}$$

Beweis. Wir identifizieren im folgenden stets V^{**} und V mittels des kanonischen Isomorphismus. Für jede Teilmenge $E \subset V$ gilt $E \subset E^{**}$, und für einen endlich erzeugten Kegel C haben wir nach 6.4.2 auch $C \supset C^{**}$, mithin $C = C^{**}$. Es bleibt nur zu zeigen, daß auch C^* ein endlich erzeugter Kegel ist. Wir zeigen dazu erst einmal, daß wir endlich viele Gleichungen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in V^*$ finden können mit

$$C = \{v \in V \mid \lambda_i(v) \geq 0 \quad \forall i\}$$

Sei in der Tat $E \subset C$ ein endliches Erzeugendensystem unseres Kegels C . Erzeugt E schon ganz V als Vektorraum, so folgt unsere Behauptung aus 6.4.2. Andernfalls gilt es eben, geeignete Linearformen, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ auf dem von C erzeugten Untervektorraum W zu wählen, diese auf V fortzusetzen, und noch genügend auf W verschwindende Linearformen hinzunehmen. Die $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in V^*$ erzeugen nun per definitionem einen Kegel $K \subset V^*$ mit $K^* = C$, und wegen $K = K^{**} = C^*$ folgt, daß auch C^* endlich erzeugt ist. \square

Korollar 6.4.11. *Für einen endlich erzeugten Kegel in einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper sind gleichbedeutend:*

1. Der Kegel umfaßt keine Gerade, ist also ein "spitzer Kegel".
2. Es gibt eine Linearform auf unserem Vektorraum, die auf dem Kegel mit Ausnahme des Ursprungs echt positiv ist.
3. Die Polarenmenge unseres Kegels erzeugt den Dualraum unseres Vektorraums.

Beweis. Für eine beliebige Teilmenge E eines Vektorraums umfaßt E^* eine Gerade genau dann, wenn E nicht den ganzen Raum erzeugt. Mit 6.4.10 folgt (1) \Leftrightarrow (3). Die Implikation (2) \Rightarrow (1) ist offensichtlich. Um schließlich (3) \Rightarrow (2) zu zeigen wählen wir nach 6.4.10 ein endliches Erzeugendensystem der Polarenmenge unseres Kegels und betrachten die Summe seiner Elemente. Verschwindet diese Summe an einem Punkt des Kegels, so verschwinden dort überhaupt alle Linearformen auf unserem Vektorraum und damit ist besagter Punkt der Ursprung. \square

Satz 6.4.12 (über Systeme von Vektoren mit stumpfen Winkeln).

Seien v_0, v_1, \dots, v_n Vektoren eines euklidischen Vektorraums, die paarweise stumpfe Winkel einschließen, $(v_i, v_j) \leq 0$ für $i \neq j$. Gibt es keine Zerlegung unserer Indexmenge $\{0, \dots, n\} = I \amalg J$ durch nichtleere Teilmengen $I \neq \emptyset \neq J$ mit $(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \in I$ und alle $j \in J$, so ist jede echte Teilfamilie unserer Familie von Vektoren linear unabhängig.

Beweis. Ist einer unserer Vektoren der Nullvektor, so folgt $n = 0$ und wir sind schon fertig. Sonst bilden wir den von v_1, \dots, v_n erzeugten Kegel. Umfaßt er eine Gerade, so gibt es sicher eine Teilmenge $I \subset \{1, \dots, n\}$ und $a_i > 0$ mit $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$, woraus folgt $(v_i, v_j) = 0$ für $i \in I, j \notin I$. Das steht im Widerspruch zu unserer Annahme, folglich umfaßt unser Kegel keine Gerade und nach 6.4.11 gibt es eine Linearform γ mit $\gamma(v_i) > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Mit 3.5.6 folgt dann die lineare Unabhängigkeit der Vektoren v_1, \dots, v_n . \square

Definition 6.4.13. Eine Matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt **unzerlegbar** genau dann, wenn es keine Partition $\{1, \dots, n\} = I \amalg J$ gibt mit $I \neq \emptyset \neq J$ und $a_{ij} = a_{ji} = 0 \forall i \in I, j \in J$.

Korollar 6.4.14. Ist A eine reelle symmetrische positiv semidefinite unzerlegbare ausgeartete Matrix mit nichtpositiven Einträgen außerhalb der Diagonalen, so ist die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x^\top A x = 0$ eine Gerade, die den offenen positiven Quadranten $Q = (\mathbb{R}_{>0})^n$ trifft.

Beweis. Wir fassen A auf als eine Bilinearform auf dem \mathbb{R}^n , bilden ihr Radikal $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top A y = 0 \quad \forall y\}$ und betrachten den Quotientenraum $V = \mathbb{R}^n / K$ mit dem darauf induzierten Skalarprodukt. Die Bilder $\bar{e}_i \in V$

der Vektoren der Standardbasis schließen nach Annahme paarweise stumpfe Winkel ein und wir folgern mit 6.4.12, daß je $(n-1)$ davon linear unabhängig sind. Es folgt $\dim K = 1$. Ist nun $\sum x_i e_i$ ein Erzeuger von K , so müssen alle x_i von Null verschieden sein, da wir sonst in V eine nichttriviale lineare Relation zwischen $(n-1)$ der \bar{e}_i hätten. Hätten schließlich nicht alle x_i dasselbe Vorzeichen, so bringen wir wie im Beweis von 3.5.6 alle Terme mit negativem x_i auf die andere Seite einer Gleichung und das Skalarprodukt beider Seiten unserer Gleichung muß nichtpositiv aber auch nichtnegativ und damit Null sein. Dann steht aber auf beiden Seiten der Nullvektor im Widerspruch zu dem, was wir bereits bewiesen haben. \square

Übung 6.4.15. Gegeben eine Teilmenge E eines affinen Raums über einem angeordneten Körper k bezeichne $\text{Conv}(E)$ ihre konvexe Hülle. Ist E die Standardbasis des k^n und $W \subset k^n$ ein affiner Teilraum, so zeige man, daß ein Punkt p extrem ist im Schnitt $W \cap \text{Conv}(E)$ genau dann, wenn er für mindestens eine Teilmenge $E' \subset E$ der einzige Punkt von $W \cap \text{Conv}(E')$ ist.

Satz 6.4.16. *Besitzt eine Facette in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum einen kompakten Abschluß, so ist dieser Abschluß die konvexe Hülle der Menge aller einpunktigen Randfacetten besagter Facette.*

Beweis. Sei A unsere Facette. Jeder Punkt $x \in \bar{A}$ gehört zu genau einer Randfacette $C \in \mathcal{F}(A)$ von A . Besteht diese Randfacette nicht nur aus einem Punkt, so enthält sie ein ganzes offenes Geradensegment um unseren Punkt. Die zugehörige Gerade verläßt \bar{C} in zwei Randfacetten von A , und vollständige Induktion beendet den Beweis. \square

Literatur

- [Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, vol. 4-6, Masson, 1981.
- [Sch86] Alexander Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley, 1986.

7 Index

Index

- H -Halbraum von, 42
- k -Algebra, 4
- k -Algebren-Homomorphismus, 4

- abelsche Lie-Algebra, 6
- abgeleitete Reihe, 16
- abgeschlossen
 - Halbraum, 42
- Abschluß, 43
- ad-halbeinfach, 33
- ad-nilpotent, 16, 33
- affine Weylgruppe, 56, 65
- Algebren-Isomorphismus, 4
- Alkove, 41
- Alkoven, 45
- Antisymmetrie, 4
- assoziativ, 4
- assoziierte graduierte Gruppe, 81
- assozierten graduierten Ring, 82
- auflösbar, 16
- Auflösbarkeitskriterium von Cartan, 19
- Augmentation, 75
- Augmentationsideal, 75
- augmentierten Ring, 75
- Ausnahme-Algebra, 7
- Ausnahme-Isomorphismus, 7

- basiertes Wurzelsystem, 68
- Basis, 65
- Bruhat-Ordnung, 105

- Cartan'sche Unteralgebra, 34
- Cartan-Matrix, 70
- Casimir-Operator, 27
- Charakter, 89, 91
- Charakterformel, Weyl'sche, 89
- Coxetergraph, 100
- Coxetermatrix, 100

- Coxetersystem, 103

- Darstellung, 9
 - triviale, 9
- Deodhar
 - Eigenschaft Z von, 106
- Derivation, 8
- Diedergruppe, 40
- Dimensionsformel, Weyl'sche, 89
- dot-Operation, 87
- dualer Kegel, 110
- Dynkin-Diagramm, 70

- E_8 , 62
- echt
 - Unterdarstellung, 10
- Eigenschaft Z , 106
- einfach
 - Darstellung, Liealgebra, 10
 - Liealgebra, 7
- Einhüllende, 74
- Engel, Satz von, 17
- erzeugtes Ideal, 15
- essentiell, 54
- euklidischen Vektorraum, 40
- euklidisches Wurzelsystem, 55
- extremen Gewichte, 97

- Facette, 43
- Facetten, 43
- Filtrierung, 80, 82
- Freudenthal's Formel, 94
- Fundamentalebene, 50
- fundamentalen dominanten Gewichte, 73

- general linear Lie algebra, 5
- Geradensegmente, 42
- Gewicht, 34

Gewicht, höchstes, 72
 Gewichte, 72
 Gewichte, dominante ganze, 73
 Gewichte, ganze, 73
 Gewichtsraum, 72
 Graduierung, 80, 82

 halbeinfach, 24, 26, 33
 halbeinfache Anteil, 19
 halbeinfache komplexe Lie-Algebra, 7
 halbeinfacher Anteil, 33
 Halbraum, 42
 höchste Wurzel, 74
 homogen
 Untergruppe, 81
 Hyperebene, 42

 Ideal, 15
 invariant
 Bilinearform, 22
 invariante Vektoren, 9
 irreduzibel
 Darstellung, Liealgebra, 10
 Liealgebra, 7
 isomorph, 10, 55, 70

 Jacobi-Identität, 4
 Jordan-Zerlegung, 19, 31

 Kammer, 45
 kanonischer Erzeuger, 85
 Kegel, 109
 dualer, 110
 erzeugt von, 110
 polyedrischer, 110
 spitzer, 109
 Killing-Klassifikation, 7
 Killingform, 22
 klassisch, 7
 Klimyuk, Formel von, 97
 koinduzierte Darstellung, 84

 kommutativ, 4
 Kommutator, 5
 konvex
 in affinem Raum, 42
 in Vektorraum, 41
 Kostant'sche Charakterformel, 95
 Kowurzel, 37, 63
 Kowurzel, einfache, 68
 kristallographisch, 62
 kristallographisches Wurzelsystem, 56

 Länge
 in Spiegelungsgruppe, 49
 Lie, Satz von, 17
 Lie-Algebra, 4
 Lie-Algebra, spezielle lineare, 6
 Lie-Algebra, derivierte, 16
 Lie-Algebra, orthogonale, 6
 Lie-Algebra, symplektische, 6
 Lie-Klammer, 4

 monoton, 77
 Multiplikation, 4

 Nennerformel, Weyl'sche, 96
 nilpotent, 16, 33
 nilpotente Anteil, 19
 nilpotenter Anteil, 33
 nilpotenter Kegel, 33
 Nulldarstellung, 9

 Operation, 9
 opponierte Algebra, 80
 orthogonal, 46

 Partitionsfunktion, Kostant'sche, 85
 poid, 34
 Poincaré-Birkhoff-Witt, 75
 Polarenmenge, 110
 prinzipalen Antiautomorphismus, 80
 prinzipalen Automorphismus, 69

Produkt, 5
 Radikal, 17
 Randfacetten, 44
 reduktiv, 24
 reduzierte Darstellung, 49
 root system, 35

 Schur, Lemma von, 26
 Schur-Polynomen, 99
 spezieller Punkt, 57
 Spiegelebene, 40, 60
 Spiegelhyperebene, 40, 60
 Spiegelung
 affine orthogonale, 46
 lineare, 60
 orthogonale lineare, 40
 Spiegelung, einfache, 68
 Spiegelungsgruppe
 affine, 47
 affine euklidische, 47
 Spiegelungsgruppe, endliche eukli-
 dische, 40
 Spiegelungsgruppe, endliche, 61
 spitzer Winkel, 52
 stabil, 10
 Standarddarstellung, 9
 Steinberg, Formel von, 98
 stumpfer Winkel, 52
 Summe, 71
 symmetrische Algebra, 82
 symmetrischen Tensoren, 83
 Symmetrisierung, 83
 système de racines, 35
 System positiver Wurzeln, 65
 System von Hyperebenen, 42

 Tensoralgebra über V , 76
 Tensorprodukt-Darstellung, 29
 Träger
 einer Facette, 45

 unitär, 4, 5
 universelle Einhüllende Algebra, 74
 Unteralgebra, 5
 Unterdarstellung, 10
 unzerlegbar, 71, 111

 Verknüpfung, 4
 Verma-Modul, 85
 von Weyl, 27

 Wand, 45
 Weylgruppe, 56, 64
 Weylkammer, 41
 Weylkammer, dominante, 68
 Weylkammern, 64
 Winkel
 spitzer, 52
 stumpfer, 52
 Wurzel, 35
 Wurzel, duale, 63
 Wurzel, einfache, 68
 Wurzeln, 56, 62
 Wurzelraum, 35
 Wurzelsystem, 35, 61
 Wurzelsystem, nichtreduziertes, 62
 Wurzelsystem, reduziertes, 61

 Z
 Eigenschaft von Deodhar, 106
 Zentralreihe, absteigende, 16
 Zentrum
 einer Liealgebra, 15