Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren
im Sommersemester 2013

Übung 1.1. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ einfach ist.

Übung 1.2. Gegeben eine nicht notwendig assoziative k-Algebra $(A, \cdot)$ heißt eine lineare Abbildung $\delta : A \to A$ eine **Derivation** genau dann, wenn sie die **Leibniz-Regel** $\delta(a \cdot b) = (\delta a) \cdot b + a \cdot (\delta b) \quad \forall a, b \in A$ erfüllt. Man zeige, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(A)$ der Endomorphismen des k-Vektorraums A bilden.

Übung 1.3. Man zeige, daß es bis auf Isomorphismus genau zwei zweidimensionale komplexe Lie-Algebren gibt.

Übung 1.4. Man gebe einen Isomorphismus $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3;\mathbb{C})$ an.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 2.1. Gegeben ein Körper k und eine Darstellung $\rho : \mathfrak{sl}(2;k) \to \mathfrak{gl}(V)$ der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ mit ihrer Standardbasis e, h, f mit Kommutatoren $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$ liefert der in der assoziativen Algebra $\mathrm{End}_k(V)$ zu interpretierende Ausdruck

$$4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h) + 2)$$

einen mit der Operation unserer Liealgebra verträglichen Endomorphismus von V. Im Fall der einfachen $(m+1)$-dimensionalen Darstellung $L(m)$ der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ ist dieser Endomorphismus die Multiplikation mit dem Skalar $m(m+2)$. Hinweis: Tapfer rechnen. Dieser Operator ist im übrigen das einfachste Beispiel eines sogenannten **Casimir-Operators**.

Übung 2.2. Man zeige, daß jede endlichdimensionale Darstellung V der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Hinweis: Man zerlege besagte Darstellung zunächst in die Haupträume des Casimir-Operators und ziehe sich so auf den Fall zurück, daß die einfachen Subquotienten unserer Darstellung V paarweise isomorph sind, sagen wir zu $L(m)$. Dann zeige man, daß f^m einen Isomorphismus $\mathrm{Hau}(h;m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hau}(h;-m)$ zwischen den Haupträumen von h zu den entsprechenden Eigenwerten liefert. Schließlich folgere man aus $f^{m+1}v = 0$, daß h auf $\mathrm{Hau}(h;m)$ diagonal operiert, und argumentiere von da ausgehend.

Übung 2.3. (1) Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ von Lie-Algebren ist $\mathfrak{g}$ auflösbar genau dann, wenn $\ker\varphi$ und $\mathrm{im}\,\varphi$ auflösbar sind. (2) Sind I, J zwei auflösbare Ideale in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist auch ihre Summe $I + J \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal. Man betrachte dazu zum Beispiel die Surjektion $I + J \twoheadrightarrow (I + J)/J$. (3) Ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra, so gibt es in $\mathfrak{g}$ ein größtes auflösbares Ideal, das **Radikal** $\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{g}$.

Übung 2.4. ($\mathrm{char}\, k = 0$). Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n;k)$ einfach ist. Hinweis: Besteht ein Ideal von $\mathfrak{gl}(n;k)$ nicht aus Diagonalmatrizen, so umfaßt es $\mathfrak{sl}(n;k)$. In der Tat muß es sicher ein E_{ij} mit $i \neq j$ enthalten, wie man erkennt durch Anwenden der $\mathrm{ad}(E_{kk})$. Dann enthält es auch $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$ und dann alle $E_{ik} = [E_{ii} - E_{jj}, E_{ik}]$ für $k \neq i, j$ sowie alle E_{kj} für $k \neq i, j$. Dann enthält es aber in derselben Weise auch alle E_{kl} für $k \neq l$ und alle $E_{kk} - E_{ll}$. Man zeige, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ in Charakteristik 2 dahingegen nicht einfach ist.

Übung 2.5. Die Killingform einer endlichdimensionalen nilpotenten Liealgebra ist Null.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 3.1. Eine endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra ist halbeinfach genau dann, wenn sie kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal besitzt.

Übung 3.2. Jedes Ideal einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist eine Summe von einfachen Idealen. Jeder Quotient einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist eine halbeinfache Lie-Algebra.

Übung 3.3. Jede halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ihre eigene derivierte Lie-Algebra, in Formeln $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Übung 3.4. Jede reduktive Lie-Algebra läßt sich auf genau eine Weise zerlegen in das Produkt einer halbeinfachen Lie-Algebra und einer abelschen Lie-Algebra, nämlich als $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z}$ dem Zentrum von $\mathfrak{g}$.

Übung 3.5. Der Casimir-Operator einer halbeinfachen Lie-Algebra operiert als die Identität auf der adjungierten Darstellung.

Übung 3.6. Eine endlichdimensionale Lie-Algebra ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 4.1. Diejenigen Vektoren einer Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{a}$, die in einem endlichdimensionalen $\mathfrak{a}$-stabilen Teilraum liegen, heißen auch die **$\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren** von V. Man zeige: Ist V eine Darstellung einer endlichdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so bilden die $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren von V einen $\mathfrak{g}$-stabilen Teilraum. Statt $\mathfrak{g}$ endlichdimensional brauchen wir sogar schwächer nur annehmen, daß $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren besteht für die adjungierte Darstellung.

Übung 4.2 (**Clebsch-Gordan**). Man zeige, daß die Darstellungen $V(m) \otimes V(n)$ und $\operatorname{Hom}(V(m), V(n))$ von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ isomorph sind zu

$$V(m+n) \oplus V(m+n-2) \oplus \ldots \oplus V(|m-n|)$$

Hinweis: Man betrachte die Dimensionen der h-Eigenräume.

Übung 4.3. Bezeichne $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ den von allen Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$. Für $h, t \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ gilt $\kappa(h,t) \in \mathbb{Q}$. Weiter ist κ positiv definit auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, also $\kappa(h,h) \leq 0 \Rightarrow h = 0$. Analoges gilt auch, wenn wir hier $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen.

Übung 4.4. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C})$ besteht aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A^\top = -D$, $B^\top = B$ und $C^\top = C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} + E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 5.1. Sei $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem einer komplexen halbeinfachen Liealgebra. Für Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ ist $\{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in $\mathbb{Z}$.

Übung 5.2. Sei $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem einer komplexen halbeinfachen Liealgebra. Bezeichne $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ den von allen Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$. Für $h, t \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ gilt $\kappa(h, t) \in \mathbb{Q}$. Weiter ist κ positiv definit auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, also $\kappa(h, h) \leq 0 \Rightarrow h = 0$.

Übung 5.3. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(2n; \mathbb{C})$ besteht aus allen Blockmatrizen derselben Gestalt wie in der vorhergehenden Übung mit $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} - E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B.

Übung 5.4. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(2n + 1; \mathbb{C})$ besteht aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} a & u & v \\ w & A & B \\ s & C & D \end{pmatrix}$$

mit $a = 0$, $u^\top = -s$, $v^\top = -w$, $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$ bilden die Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(0, h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ und erklären wir Linearformen $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift, daß sie einer Matrix ihren $(i + 1)$-ten Diagonaleintrag zuordnen, so so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Übung 5.5. Seien V ein Vektorraum einer von Zwei verschiedenen Charakteristik, $\alpha \in V$ und $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Man zeige, daß die transponierte Abbildung zur Spiegelung $s = s_{\alpha,\alpha^\vee} : V \to V, v \mapsto v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha$ die Spiegelung $s^\top = s_{\alpha^\vee,\alpha} : V^* \to V^*$ ist, wobei wir in der zweiten Identität unter α das durch Auswerten an α definierte Element des Bidualraums V^{**} verstehen.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 6.1. Sei $Q \cong \mathbb{Z}^n$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul von endlichem Rang und $(\ ,\ ) : Q \times Q \to \mathbb{Z}$ eine positive definite Bilinearform. Man zeige, dass die orthogonalen Spiegelungen an den orthogonalen Komponenten aller Vektoren $v \in Q$ mit $(v, v) = 2$ die Spiegelungen einer endlichen Spiegelungsgruppe sind.

Übung 6.2. Sei W eine endliche Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $l = l_A$ die zugehörige Länge. So gibt es in W genau ein Element w_A maximaler Länge, und diese Länge ist die Zahl der Spiegelungen in W.

Übung 6.3. Diejenigen Elemente einer affinen Spiegelungsgruppe, die eine vorgegebene Teilmenge des zugrundeliegenden affinen Raums punktweise festhalten, bilden selber eine Spiegelungsgruppe.

Übung 6.4. Man erkläre, inwiefern die Gruppe der nicht notwendig orientierungserhaltenden Symmetrien eines Ikosaeders die Spiegelungsgruppe vom Typ H_3 ist.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 7.1 (**Das Wurzelsystem** E_8). Die Menge R aller Vektoren aus $\mathbb{Z}^8$ mit euklidischer Länge $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 = 8$, durch vier teilbarer Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_8 \in 4\mathbb{Z}$ und allen Einträgen von derselben Parität $a_i - a_j \in 2\mathbb{Z}\ \forall i, j$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^8$ mit 240 Wurzeln. Dieses Wurzelsystem trägt den Namen E_8. Betrachtet man darin nur diejenigen Elemente, bei denen alle Einträge gerade Parität haben, so erhält man auch ein Wurzelsystem, das den Namen D_8 trägt und zur kompakten Liegruppe $\mathrm{SO}(16)$ gehört.

Übung 7.2. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $Q \subset V$ ein Gitter alias der $\mathbb{Z}$-Spann einer Basis und $(\ ,\ )$ ein Skalarprodukt auf V mit und $(\ ,\ ) : Q \times Q \to \mathbb{Z}$. So erzeugen die Spiegelungen an den orthogonalen Komplementen der Vektoren $v \in Q$ mit $(v, v) = 2$ eine endliche Spiegelungsgruppe. Man zeige weiter, daß die Vektoren $v \in Q$ mit $(v, v) = 2$ ein Wurzelsystem in dem von ihnen aufgespannten Untervektorraum von V bilden.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 8.1. Ist R^+ ein System positiver Wurzeln eines Wurzelsystems und $l : W \to \mathbb{N}$ die zu den zugehörigen einfachen Spiegelungen gebildete Länge, so stimmt die Länge eines Elements $w \in W$ überein mit der Zahl der positiven Wurzeln, die es zu negativen Wurzeln macht. In Formeln gilt also $l(w) = |w(R^+) \backslash R^+|$.

Übung 8.2. Sei $\Pi \subset R \subset V$ ein basiertes Wurzelsystem. Bezeichne $\rho \in V$ die Halbsumme der positiven Wurzeln, in Formeln

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

Man zeige für alle einfachen Wurzeln α die Formel $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ und folgere $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ für alle einfachen Wurzeln α. Man zeige weiter, daß $x\rho - \rho$ für alle x aus der Weylgruppe im Wurzelgitter liegt, in Formeln gilt also $x\rho - \rho \in \langle R \rangle \quad \forall x \in W$.

Übung 8.3 (**Wurzelsysteme der Typen** B_n, C_n, D_n). Bezeichne $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{Q}^n$, die in anderen Zusammenhängen meist e_i notiert werden. Man zeige:

Typ C_n**:** Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe.

Typ D_n**:** Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe.

Typ B_n**:** Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe.

Duale Systeme: Man zeige, daß die Wurzelsysteme B_n und D_n zueinander dual sind, wohingegen die Wurzelsysteme A_n und C_n jeweils zu ihren dualen Systemen isomorph sind.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 9.1. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C})$ zeige man, daß die Darstellung $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ ein fundamentales Gewicht als höchstes Gewicht hat, genauer das fundamentale Gewicht $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$. Hier verstehen wir implizit die übliche Cartan'sche und die übliche Basis des Wurzelsystems gegeben durch die $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$.

Übung 9.2. Sei e, f, h die übliche Basis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$. Man schreibe $f^2 he$ in der Einhüllenden von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ als Linearkombination geordneter Monome für die Ordnung e, h, f.

Übung 9.3. Die **opponierte Algebra** A^{opp} zu einer k-Algebra A wird erklärt dadurch, daß man auf dem Vektorraum A die opponierte Verknüpfung betrachtet, die gegeben wird durch $a^\circ * b^\circ = (b \cdot a)^\circ$. Man zeige: Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, so ist auch $\mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$ eine Lie-Algebra und die Multiplikation mit (-1) ist ein Algebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$ Man zeige weiter: Ist $\mathfrak{g} \to U$ eine Einhüllende, so auch dieselbe Abbildung $\mathfrak{g}^{\mathrm{opp}} \to U^{\mathrm{opp}}$. Insbesondere setzt sich die Multiplikation mit $(-1) : \mathfrak{g} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$ fort zu einem Isomorphismus assoziativer Algebren $U \stackrel{\sim}{\to} U^{\mathrm{opp}}$, den wir den **prinzipalen Antiautomorphismus** von U nennen.

Übung 9.4 (**Casimir-Operator in der Einhüllenden**). Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra und $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Wir wählen eine Basis $x_1, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ von $\mathfrak{g}$, bezeichnen mit $x^1, \ldots, x^n$ die bezüglich b duale Basis, charakterisiert durch $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$, und setzen

$$C = C_b := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i$$

So hängt $C_b \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nicht von der Wahl der Basis unserer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ab und liegt im Zentrum der Einhüllenden, in Formeln $uC = Cu \; \forall u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 10.1. Gegeben eine bilineare Verknüpfung b auf einem Vektorraum $\mathfrak{g}$ über einem Körper k kann man stets in der Tensoralgebra $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ das von allen $x \otimes y - y \otimes x - b(x,y)$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ erzeugte Ideal $I = I(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{T}(\mathfrak{g})$ betrachten und den Quotientenring $U := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$ bilden. Man zeige, daß die Verknüpfung $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U$ genau dann injektiv ist, wenn b antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt.

Übung 10.2. Jeder Homomorphismus von Lie-Algebren läßt sich auf genau eine Weise ausdehnen zu einem Homomorphismus zwischen ihren Einhüllenden.

Übung 10.3. Ist eine Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ über einem Körper k als k-Vektorraum die Summe von zwei Unteralgebren $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, so induziert die Multiplikation eine Surjektion

$$\mathrm{U}(\mathfrak{c}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{a})$$

Man leite aus dieser Erkenntnis einen neuen Beweis des Lemmas ab, nach dem das $\mathfrak{c}$-Erzeugnis eines $\mathfrak{b}$-stabilen Teilraums einer $\mathfrak{a}$-Darstellung bereits $\mathfrak{a}$-stabil ist.

Übung 10.4. Man zeige, daß im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ ein Vermamodul $\Delta(\lambda)$ genau dann einfach ist, wenn er keinen endlichdimensionalen Quotienten hat, wenn also sein höchstes Gewicht auf der positiven Wurzel als Wert keine natürliche Zahl annimmt, in Formeln $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{N}$ für α die positive Wurzel.

Übungen zur Vorlesung Lie-Algebren im Sommersemester 2013

Übung 11.1. Die Darstellung $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ von $\mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C})$ ist einfach für $1 \leq i \leq n+1$.

Übung 11.2. Welche Dimensionen haben die irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra vom Typ E_6 zu fundamentalen höchsten Gewichten?

Übung 11.3. Man folgere aus der Dimensionsformel, daß die symmetrischen Potenzen $\mathrm{S}^r\mathbb{C}^{n+1}$ stets irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C})$ sind. Sie haben im übrigen das höchste Gewicht $r\varpi_1$. Wer Rechenzeit sparen will, sollte sich zumindest den Fall $n = 2$ überlegen. Alternativ und vielleicht einfacher kann man die Irreduzibilität auch begründen, indem man unsere symmetrischen Potenzen als Räume von Polynomen versteht und die Operation durch Differentialoperatoren realisiert.

Übung 11.4. Man zeige mithilfe einer Streckung der Nennerformel für eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra die Formel

$$\mathrm{ch}\, L(n\rho) = \mathrm{e}^{n\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \ldots + \mathrm{e}^{-n\alpha})$$