AFFINE ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare und affine algebraische Gruppen

1.1 Einführung und Grundbegriffe

1.1.1. Eine **lineare algebraische Gruppe** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist Untergruppe

$$G \subset \mathrm{GL}(n; k)$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß es eine Menge $P \subset k[X_{ij}]$ von Polynomen in den Matrixeinträgen mit simultaner Nullstellenmenge G gibt, in Formeln also eine Menge P von Polynomen mit $G = \{A \in \mathrm{GL}(n; k) \mid f(A) = 0\ \forall f \in P\}$.

Beispiele 1.1.2. Erste Beispiele sind die Untergruppen der invertierbaren Diagonalmatrizen, der oberen Dreiecksmatrizen, und der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Des weiteren die Gruppen von invertierbaren Block-oberen Dreiecksmatrizen beliebiger fester Blockstruktur, die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$ und die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}(n; k) := \{A \in \mathrm{GL}(n; k) \mid A^\top A = I\}$$

1.1.3 (**Notwendigkeit des Formalismus der algebraischen Varietäten**). In dieser Vorlesung sollen lineare algebraische Gruppen „unabhängig von ihrer Einbettung“ studiert werden und wir bauen den Formalismus der „affinen algebraischen Gruppen“ auf, der das präzisiert und ermöglicht. In diesem Formalismus sind dann etwa $G = \mathrm{GL}(1; k) = k^\times$ und $G = \{\mathrm{diag}(\lambda, 1) \mid \lambda \in k^\times\} \subset \mathrm{GL}(2; k)$ als „dieselbe“ affine algebraische Gruppe anzusehen. Des weiteren werden viele Argumente induktiv unter Zuhilfenahme von Quotienten algebraischer Gruppen nach geeigneten Untergruppen geführt. Dazu müssen diese Quotienten ihrerseits mit einer algebraischen Struktur versehen werden. Um all das zu präzisieren und formalisieren, arbeitet man mit abstrakten algebraischen Varietäten, wie sie etwa in [KAG] 6.12.1 eingeführt werden. Da die volle Kraft dieser Begrifflichkeit aber erst nach und nach benötigt wird, beginnen wir elementarer, erinnern zunächst nur den Begriff einer „naiven affinen k-Varietät“ aus [KAG] 3.3.2 folgende und arbeiten so lange wie möglich mit dieser einfacher zugänglichen Begrifflichkeit. Ich empfehle jedoch, parallel auch die ausführlichere Diskussion der Grundlagen der algebraischen Geometrie in [KAG] 1.1.1 folgende zu studieren.

Definition 1.1.4. Gegeben ein Körper k verstehen wir unter einer **k-geringten Menge** ein Paar

$$(X, \mathcal{O}(X))$$

bestehend aus einer Menge X und einem k-Unterring $\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ im k-Kring aller k-wertigen Funktionen auf X. Die Elemente von $\mathcal{O}(X)$ nennen wir die

strukturierenden Funktionen unserer k-geringten Menge X. Ein **Morphismus** von $(X, \mathcal{O}(X))$ in eine weitere k-geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$ ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ derart, daß gilt $f \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$. Mit diesen Morphismen bilden die k-geringten Mengen eine Kategorie

$$\mathrm{Ensr}_k$$

Den durch Vorschalten von φ erklärten Homomorphismus von k-Kringen nennen wir den **Komorphismus zu** φ und notieren ihn $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Definition 1.1.5. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine **naive affine k-Varietät** oder kürzer **affine k-Varietät** ist eine k-geringte Menge $(X, \mathcal{O}(X))$ derart, daß ihr Ring von strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k und daß wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}: & X & \tilde{\to} & \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(X), k) \\ & x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

von X mit der Menge der k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ erhalten, indem wir jedem Punkt $x \in X$ den durch das Auswerten bei x gegebenen Ringhomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k$, $f \mapsto f(x)$ zuordnen. Die strukturierenden Funktionen einer affinen Varietät nennen wir ihre **regulären Funktionen**.

1.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Das Adjektiv „affin“ dient dazu, in der Terminologie Platz zu lassen für allgemeinere Varietäten, wie sie in [KAG] 6.4.2 erklärt werden. Das Adjektiv „naiv“ bringt zum Ausdruck, daß wir unsere naiven affinen Varietäten als spezielle k-geringte Mengen betrachten und noch nicht, wie im Fall allgemeiner Varietäten, als spezielle „k-geringte Räume“. Dieser Unterschied wird sich jedoch als unwesentlich erweisen, weshalb wir auf das Adjektiv „naiv“ im folgenden meist verzichten.

1.1.7. Unter einem **Morphismus** von affinen k-Varietäten verstehen wir einen Morphismus von k-geringten Mengen. Die affinen k-Varietäten bilden damit eine volle Unterkategorie

$$\mathrm{Varaff}_k \subset \mathrm{Ensr}_k$$

in der Kategorie aller k-geringten Mengen. Gegeben affine Varietäten X, Y notieren wir die Menge aller Morphismen von X nach Y statt $\mathrm{Varaff}_k(X, Y)$ meist kürzer $\mathrm{Var}_k(X, Y)$ und greifen damit der volltreuen Einbettung $\mathrm{Varaff}_k \tilde{\hookrightarrow} \mathrm{Var}_k$ in die Kategorie aller k-Varietäten vor, die wir zusammen mit der Definition allgemeiner Varietäten in [KAG] 6.4.2 kennenlernen werden. Wenn wir hoffen, daß der Grundkörper aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir auch kurz Var.

1.1.8. Ich verwende das Wort **Varietät** nur für k-Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$. Wenn das Wort „Varietät" fällt, ist also implizit zu verstehen, daß der zugehörige Grundkörper algebraisch abgeschlossen sein soll. Ich werde das nicht immer extra erwähnen.

Beispiele 1.1.9. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Jede endliche Menge X wird mit $\mathcal{O}(X) := \operatorname{Ens}(X, k)$ eine affine Varietät.

2. Die Menge $X = k^n$ wird mit $\mathcal{O}(X) := k[T_1, \ldots, T_n]$ eine affine Varietät.

3. (**Nullstellenmengen**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine Teilmenge $P \subset \mathcal{O}(X)$ des Rings ihrer regulären Funktionen wird die Menge der gemeinsamen Nullstellen

$$Y = \mathcal{Z}(P) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in P\}$$

mit den Einschränkungen $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ regulärer Funktionen von X als den regulären Funktionen von Y eine affine Varietät. In der Tat kommt jeder k-lineare Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(Y) \to k$ von einem k-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ her, der durch Auswerten δ_x an einem Punkt $x \in X$ gegeben wird, der dann notwendig bereits zu Y gehört haben muß. Wir nennen diese Struktur die **auf** Y **induzierte Struktur** einer affinen Varietät.

4. (**Nichtnullstellenmengen einzelner Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ wird deren Nichtnullstellenmenge

$$X_f := X \backslash \mathcal{Z}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

eine affine Varietät mit $\mathcal{O}(X_f) := \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \subset \operatorname{Ens}(X_f, k)$ dem von den Restriktionen der regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ zusammen mit der Funktion $1/f$ erzeugten Teilring. In der Tat liefert dann jeder Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \to k$ einen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$, der von der Auswertung an einem Punkt $x \in X$ herkommt, und von diesem Punkt hinwiederum sieht man leicht ein, daß er bereits zu X_f gehört haben muß.

Beispiel 1.1.10 (**Affine Räume als affine Varietäten**). Jeder endlichdimensionale affine Raum A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k wird offensichtlich eine affine k-Varietät, wenn wir $\mathcal{O}(A) \subset \operatorname{Ens}(A, k)$ erklären als die von allen affinen Abbildungen $A \to k$ erzeugte k-Unterringalgebra. Jede affine Abbildung von endlichdimensionalen affinen Räumen ist in Bezug auf diese Strukturen ein

Morphismus von affinen Varietäten und jede injektive affine Abbildung induziert einen Isomorphismus auf ihr Bild mit der induzierten Struktur als Nullstellenmenge gewisser regulärer Funktionen.

Beispiel 1.1.11. Auf dem k^n stimmt die Struktur einer affinen Varietät als affiner Raum nach 1.1.10 überein mit unserer Struktur aus 1.1.9 durch Polynome als reguläre Funktionen.

1.1.12 (**Verschiedene Bedeutungen des Wortes „affin“**). Unglücklich ist in diesem Zusammenhang die Verwendung des Wortes „affin“ in zwei verschiedenen Bedeutungen: Jeder endlichdimensionale affine Raum trägt zwar in dieser Weise eine natürliche Struktur als affine Varietät, aber es gibt durchaus andere affine Varietäten, ja „die meisten“ affinen Varietäten sind keineswegs isomorph zu affinen Räumen.

1.1.13. Alle Definitionen und Sätze vom Beginn dieses Abschnitts bis hierher würden auch für einen beliebigen Grundkörper k funktionieren. Allerdings müßte man dann in Kauf nehmen, daß etwa die reelle Gerade $X = \mathbb{R}$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}[T, (T^2+1)^{-1}]$ auch eine naive affine $\mathbb{R}$-Varietät wäre, und das stünde im Widerspruch zur allgemein üblichen Terminologie.

Ergänzung 1.1.14. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. In [KAG] 3.3.12 zeigen wir, daß der Funktor der regulären Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{O} : \{\text{Affine } k\text{-Varietäten}\} \stackrel{\approx}{\to} \{\text{Nilpotentfreie ringendliche } k\text{-Kringe}\}^{\text{opp}}$$

liefert und daß jede affine Varietät ismorph ist zur Nullstellenmenge nach 1.1.9 einer endlichen Menge von regulären Funktionen alias Polynomfunktionen auf k^n. In meinen Augen sind diese Aussagen zentral für das Verständnis sowohl der kommutativen Algebra als auch der algebraischen Geometrie. Wir werden sie in dieser Vorlesung jedoch nicht beweisen. Die nilpotentfreien ringendlichen k-Kringe nennt man auch **affine k-Kringe**.

1.1.15 (**Universelle Eigenschaft von Nullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $P \subset \mathcal{O}(X)$ eine Menge regulärer Funktionen und $Y := \mathcal{Z}(P)$ deren simultane Nullstellenmenge ist die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ offensichtlich ein Morphismus von affinen Varietäten.

1.1.16. Gegeben eine affine Varietät, ja eine beliebige k-geringte Menge X sind die Nullstellenmengen $\mathcal{Z}(P)$ für $P \subset \mathcal{O}(X)$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X, der **Zariski-Topologie**. In der Tat ist ein beliebiger Schnitt von Nullstellenmengen offensichtlich wieder eine Nullstellenmenge. Was endliche Vereinigungen angeht, haben wir $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$ für die Vereinigung über das leere Mengnsystem von Teilmengen von X sowie

$$\mathcal{Z}(P) \cup \mathcal{Z}(Q) = \mathcal{Z}(\{fg \mid f \in P, g \in Q\})$$

1.1.17. Einen Morphismus $\varphi : Z \to X$ von affinen Varietäten nennen wir eine **abgeschlossene Einbettung**, wenn sein Bild eine abgeschlossene Teilmenge $\varphi(Z) \subset\!\!\!\!\!\!\sqsubset X$ ist und die induzierte Abbildung ein Isomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} \varphi(Z)$ auf $\varphi(Z)$ mit seiner induzierten Struktur ist. Abgeschlossene Einbettungen haben eine zu Nullstelleneinbettungen analoge universelle Eigenschaft.

1.1.18. Wir erinnern den **Hilbert'schen Nullstellensatz** in seiner körpertheoretischen Form, nach der jede ringendliche Körpererweiterung modulendlich ist. In anderen Worten ist jede Körpererweiterung, bei der der Erweiterungskörper als Ring endlich erzeugt ist über dem Grundkörper, bereits eine endiche Körpererweiterung. Insbesondere ist jede ringendliche Körpererweiterung eines algebraisch abgeschlossenen Körpers trivial. Für einen Beweis verweisen wir auf die kommutative Algebra [KAG] 1.5.10.

1.1.19 (**Kehrwerte nullstellenfreier regulärer Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ ohne Nullstelle ist auch $1/f$ regulär. Das zeigen wir, indem wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führen. Ist genauer $f \in \mathcal{O}(X)$ keine Einheit, so ist das von f erzeugte Ideal nicht der ganze Ring und kann mithin nach [KAG] 1.6.4 zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}(X)$ vergrößert werden. Der Quotientenring $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}$ ist dann nach [KAG] 1.6.7 ein Körper. Jetzt sagt der Hilbert'sche Nullstellensatz 1.1.18, daß die Komposition $k \to \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung sein muß. Wegen unserer Annahme $k = \bar{k}$ ist diese Komposition also ein Isomorphismus. So erhalten wir einen Homomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ von k-Kringen mit $f \mapsto 0$. Das aber bedeutet im Lichte unserer Definition 1.1.5 einer affinen Varietät, daß f ein Nullstelle auf X gehabt haben muß.

1.1.20. Das Beispiel der $\mathbb{R}$-geringten Menge $X := \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}(X) := \mathbb{R}[T]$ zeigt, daß es für die im vorhergehenden aufstellte Behauptung wesentlich ist, daß wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten. In der Tat hat die Funktion $f := T^2 + 1$ in diesem Fall keine Nullstelle auf X, aber $1/f$ gehört dennoch nicht zu $\mathcal{O}(X)$.

1.1.21 (**Universelle Eigenschaft von Nichtnullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion ist die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset X_f$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to X_f$ ein Morphismus von affinen Varietäten. In der Tat ist $(1/f) \circ \varphi = 1/\varphi^\sharp(f)$ nach 1.1.19 eine reguläre Funktion auf Z.

1.1.22. Insbesondere folgt aus der universellen Eigenschaft für jede affine Varietät X und $f, g \in \mathcal{O}(X)$ mit $X_g \subset X_f$ sofort $\operatorname{res} \mathcal{O}(X_f) \subset \mathcal{O}(X_g)$. Wir sehen insbesondere, daß aus $X_f = X_g$ bereits $\mathcal{O}(X_g) = \mathcal{O}(X_f)$ folgt. Das bedeutet insbesondere, daß unsere Notation vernünftig war.

1.1.23 (**Produkte affiner Varietäten**). Für das folgende vergleiche man auch [KAG] 3.4.12. Gegeben affine Varietäten X, Y wird das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Punktmengen $X \times Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{O}_{\text{prod}}(X \times Y) := [f \boxtimes g \mid f \in \mathcal{O}(X), g \in \mathcal{O}(Y)]$$

Hier meint $f \boxtimes g$ die Funktion $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ auf $X \times Y$ und die eckigen Klammern meinen den von all diesen Funktionen in $\operatorname{Ens}(X \times Y, k)$ erzeugten Teilring. Er ist sicher ringendlich über k. Nach [LA2] 6.1.47 induziert die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ eine Injektion $\operatorname{Ens}(X, k) \otimes_k \operatorname{Ens}(Y, k) \hookrightarrow \operatorname{Ens}(X \times Y, k)$ und das liefert unmittelbar einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Da aber nach [LA2] 7.9.9 für zwei beliebige k-Kringalgebren A, B jeder Ringalgebrenhomomorphismus $A \otimes_k B \to k$ die Form $a \otimes b \mapsto \phi(a)\psi(b)$ hat für wohlbestimmte Ringalgebrenhomomorphismen $\phi : A \to k$, $\psi : B \to k$, folgt auch die Zweite unserer Bedingungen an eine affine Varietät. Die beiden Projektionen $\operatorname{pr}_X : X \times Y \to X$ und $\operatorname{pr}_Y : X \times Y \to Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \times Y, \operatorname{pr}_X, \operatorname{pr}_Y)$ ist ein Produkt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von [LA2] 7.7.1. Die einpunktige Varietät ist ein finales Objekt in dieser Kategorie, in der mithin alle endlichen Produkte existieren.

Beispiel 1.1.24. Auf dem k^n stimmt die Struktur einer affinen Varietät als Produkt von n Kopien von k im Sinne von 1.1.23 mit unserer Struktur aus 1.1.9 durch Polynome als reguläre Funktionen überein.

Definition 1.1.25. Ein **affines algebraisches Monoid** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist ein Monoid G mit der Struktur einer affinen k-Varietät, für das die Verknüpfung $G \times G \to G$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Definition 1.1.26. Eine **affine algebraische Gruppe** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist eine Gruppe G mit der Struktur einer affinen k-Varietät, für die die Verknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversenbildung $G \to G$ Morphismen von affinen Varietäten sind.

1.1.27. Ein **Homomorphismus** von affinen algebraischen Gruppen oder Monoiden ist ein Morphismus von affinen Varietäten, der gleichzeitig ein Monoidhomomorphismus ist. Die Menge aller Homomorphismen zwischen zwei affinen algebraischen Monoiden G, H notieren wir $\operatorname{MonVar}(G, H)$ und im Gruppenfall $\operatorname{GrpVar}(G, H)$.

Proposition 1.1.28 (Die allgemeine lineare Gruppe). $(k = \bar{k})$. *Das Monoid der quadratischen Matrizen* $\operatorname{Mat}(n; k)$ *ist ein algebraisches Monoid. Die allgemeine lineare Gruppe* $G = \operatorname{GL}(n; k)$ *ist mit ihrer Struktur als Nichtnullstellenmenge der regulären Funktion* $\det : \operatorname{Mat}(n; k) \to k$ *eine affine algebraische Gruppe.*

Beweis. Die Multiplikation $\operatorname{mult} : \operatorname{Mat}(n; k) \times \operatorname{Mat}(n; k) \to \operatorname{Mat}(n; k)$ ist offensichtlich ein Morphismus. Genauer gilt $T_{ij} \circ \operatorname{mult} = \sum_l T_{il} \boxtimes T_{lj}$. Die Multiplikation $\operatorname{mult} : G \times G \to \operatorname{Mat}(n; k)$ ist ein Morphismus, da die Einbettung $G \hookrightarrow \operatorname{Mat}(n; k)$ ein Morphisms ist. Die Multiplikation $\operatorname{mult} : G \times G \to G$ ist dann auch ein Morphismus nach der universellen Eigenschaft von Nichtnullstelleneinbettungen oder auch wegen $\det^{-1} \circ \operatorname{mult} = \det^{-1} \boxtimes \det^{-1}$. Die Cramer'sche Regel zeigt, daß auch das Invertieren $G \to G$ ein Morphismus ist. □

Beispiele 1.1.29. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G und ein abgeschlossenes Untermonoid $H \not\subset\!\!\!\!\triangle\; G$ ist auch H mit der induzierten Struktur einer affinen Varietät aufgrund der universellen Eigenschaft von Nullstellenmengen ein affines algebraisches Monoid. Zum Beispiel bilden für alle n, r über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper die $n \times n$-Matrizen vom Rang $\leq r$ zusammen mit der Einheitsmatrix ein algebraisches Monoid.

Beispiele 1.1.30. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe $H \not\subset\!\!\!\!\triangle\; G$ ist auch H mit der induzierten Struktur einer affinen Varietät eine affine algebraische Gruppe aufgrund der universellen Eigenschaft von Nullstellenmengen.

Ergänzung 1.1.31 (**Funktionen auf speziellen linearen Gruppen**). Die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus $k[T_{ij}]/\langle \det -1 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\operatorname{SL}(n; k))$, aber ich kenne dafür keinen vollständig elementaren Beweis. Die Schwierigkeit besteht darin zu zeigen, daß der Restklassenring auf der linken Seite nilpotentfrei ist. Eine mögliche Argumentation wird in [KAG] 4.2.24 erklärt. Es mag eine gute Übung sein, das hier zumindest im Fall $n = 2$ explizit zu prüfen.

Lemma 1.1.32. *Der Abschluß jedes Untermonoids eines algebraischen Monoids ist wieder ein algebraisches Monoid. Der Abschluß jeder Untergruppe einer algebraischen Gruppe ist wieder eine Untergruppe.*

Beweis. Sei G unser algebraisches Monoid und $H \subset G$ unser Untermonoid. Für alle $h \in H$ impliziert $hH \subset H$ bereits $H\bar{H} \subset \bar{H}$, denn die Linkstranslation mit h ist stetig. Damit wissen wir $Hg \subset \bar{H}$ für alle $g \in \bar{H}$ und folgern $\bar{H}g \subset \bar{H}$, denn die Rechtstranslation mit g ist stetig. Zusammengenommen ist also $\bar{H}$ abgeschlossen unter der Verknüpfung und $1 \in H$ gilt nach Annahme eh. Ebenso folgt im Gruppenfall aus $\operatorname{inv}(H) \subset H$ sofort $\operatorname{inv}(\bar{H}) \subset \bar{H}$. $\square$

1.1.33 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Untergruppe einer algebraischen Gruppe verstehen wir a priori als eine Untergruppe der zugrundeliegenden gewöhnlichen Gruppe. Eine abgeschlossene Untergruppe denken wir uns im Zweifelsfall stets mit ihrer induzierten Struktur als alebraische Gruppe versehen. Unsere abgeschlosenen Untergruppen sind zwar kategorische Unterobjeke in der Kategorie der algebraischen Gruppen, aber in positiver Charakteristik besitzen die meisten algebraischen Gruppen durchaus noch weitere, nicht zu Untergruppen in diesem Sinne isomorphe kategorische Unterobjekte. So ist zum Beispiel für jede algebraische Gruppe G in positiver Charakteristik der Frobenius $G \to G^{[1]}$ aus [KAG] 3.3.21 ein Monomorphismus aber kein Isomorphismus und $G^{[1]}$ ist in natürlicher Weise wieder eine algebraische Gruppe. In Charakteristik Null verschwinden diese Phänomene, dort ist nach 3.5.15 sogar jede bijektive Abbildung von homogenen Räumen ein Isomorphismus.

Übungen

Übung 1.1.34 (**Koprodukt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y ist auch die disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ mit

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) := \{f : X \sqcup Y \to k \mid f|_X \in \mathcal{O}(X) \text{ und } f|_Y \in \mathcal{O}(Y)\}$$

eine affine Varietät. Die Einbettungen $\operatorname{in}_X : X \to X \sqcup Y$ sowie $\operatorname{in}_Y : Y \to X \sqcup Y$ sind dann Morphismen von Varietäten und diese Daten bilden zusammen ein Koprodukt in der Kategorie der affinen Varietäten. Diese Kategorie besitzt mithin endliche Koprodukte. Das leere Koprodukt in unserer Kategorie ist die leere Varietät. Die Restriktionen liefern zusammen einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y)$$

Übung 1.1.35. Die regulären Funktionen einer affinen k-Varietät X sind genau die Morphismen von Varietäten $X \to k$, in Formeln $\mathcal{O}(X) = \operatorname{Var}(X, k)$.

Übung 1.1.36 (**Automorphismen offener Teilmengen der Gerade**). Jeder Isomorphismus von Varietäten $k \xrightarrow{\sim} k$ hat die Gestalt $t \mapsto at + b$ für $a \in k^\times$ und $b \in k$. Jeder Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} k^\times$ hat die Gestalt $t \mapsto at^\varepsilon$ für $a \in k^\times$ und $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Die Varietäten $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen haben nur endlich viele Automorphismen. Hinweis: [LA1] 5.5.21.

Übung 1.1.37 (**Bijektive Morphismen müssen keine Isomorphismen sein**). Es gibt durchaus bijektive Morphismen zwischen affinen Varietäten, die keine Isomorphismen von Varietäten sind. Als Beispiele betrachte man im Fall einer Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$ die Abbildung $k \to k$, $t \mapsto t^p$ und im Fall $\operatorname{char} k$ beliebig die Abbildung $k \to \mathcal{Z}(X^3 - Y^2), t \mapsto (t^2, t^3)$.

Übung 1.1.38. Jeder endlichdimensionale k-Vektorraum V ist mit der Addition als Verknüpfung eine affine algebraische Gruppe.

Übung 1.1.39. Für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V ist $\mathrm{GL}(V)$ mit der Struktur einer k-Varietät als Komplement der Nullstellenmenge einer regulären Funktion auf dem endlichdimensionalen k-Vektorraum $\operatorname{End} V$ eine affine algebraische Gruppe.

Übung 1.1.40. Ein Morphismus $\varphi : Z \to X$ von affinen Varietäten ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn sein Komorphismus eine Surjektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Z)$ ist.

Übung 1.1.41. Ich erinnere an [AL] 1.2.10: Sind N und B Gruppen und $\tau : B \to \mathrm{Grp}^\times N$ ein Gruppenhomomorphismus alias eine Operation von B auf N durch Gruppenautomorphismen, notiert $(\tau(a))(n) = ({}^a n)$, so kann man $N \times B$ mit einer Gruppenstruktur versehen vermittels der Vorschrift $(m, a)(n, b) = (m\ ({}^a n), ab)$ Diese Gruppe heißt das oder genauer ein **semidirektes Produkt** von N mit B und wird auch notiert als $N \rtimes B = N \rtimes_\tau B$. Man zeige: Sind hier B und N algebraische Gruppen und ist $B \times N \to N$, $(a, n) \mapsto ({}^a n)$ ein Morphismus von Varietäten, so ist auch das semidirekte Produkt eine algebraische Gruppe, wenn wir es als Varietät mit der Produktstruktur betrachten.

Übung 1.1.42. Es sei $k^\times$ die multiplikative Gruppe und k die additive Gruppe. Man zeige: Alle Homomorphismen von der einen in die andere sind konstant, in Formeln $|\operatorname{GrpVar}(k, k^\times)| = 1 = |\operatorname{GrpVar}(k^\times, k)|$. Später wird das auch direkt aus der Jordan-Zerlegung folgen. Man zeige weiter: Jeder Endomorphismus von $k^\times$ ist ein Potenzieren, in Formeln haben wir eine Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \operatorname{GrpVar}(k^\times, k^\times)$, $n \mapsto (z \mapsto z^n)$. Jeder Endomorphismus von k in Charakteristik Null ist ein Multiplizieren, in Formeln haben wir eine Bijektion $k \xrightarrow{\sim} \operatorname{GrpVar}(k, k)$, $\lambda \mapsto (a \mapsto \lambda a)$. In Charakteristik p bilden die fraglichen Endomorphismen einen k-Vektorraum unter Nachschalten von $(\lambda\cdot)$ und die Potenzen des Frobeniushomomorphismus bilden eine Basis dieses k-Vektorraums.

Ergänzende Übung 1.1.43. Man zeige, daß auf der affinen Varietät k die Addition die einzige Verknüpfung ist, die sie zu einer algebraischen Gruppe mit neutralem Element Null macht. Man zeige, daß auf der affinen Varietät $k^\times$ die Multiplikation die einzige Verknüpfung ist, die sie zu einer algebraischen Gruppe mit neutralem Element Eins macht. Man zeige, daß auf der affinen Varietät $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen keine Struktur als algebraische Gruppe gibt.

Hinweis: Man erinnere die Automorphismen offener Teilmengen der Geraden aus Übung 1.1.36.

Übung 1.1.44. Gegeben $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen von affinen Varietäten ist der Abschluß von $A \times B$ in $X \times Y$ das Produkt der Abschlüsse, in Formeln $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$. Man folgere ein weiteres Mal, daß der Abschluß jeder Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe wieder eine Untergruppe ist.

Übung 1.1.45 (**Quotienten nach endlichen Normalteilern**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und ein endlicher Normalteiler $N \subset G$ zeige man, daß G/N mit seiner Struktur als affine Varietät nach [KAG] 5.3.3 auch eine affine algebraische Gruppe wird.

Übung 1.1.46. $(k = \bar{k})$. Jede endlichdimensionale Ringalgebra über k ist mit der Multiplikation als Verknüpfung und der Struktur als affine Varietät aus 1.1.10 ein algebraisches Monoid und ihre Einheitengruppe ist die Nichtnullstellenmenge einer regulären Funktion und mit der Struktur als affine Varietät nach 1.1.9 eine algebraische Gruppe. Hinweis: [KAG] 2.3.15.

1.2 Verknüpfungen auf Objekten

Definition 1.2.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten und nach unseren Konventionen [LA2] 7.7.14 insbesondere auch einem finalen Objekt, das wir mit pt bezeichnen. Eine **Verknüpfung** auf einem Objekt $G \in \mathcal{C}$ ist ein Morphismus

$$m : G \times G \to G$$

und ein Objekt mit Verknüpfung (G, m) heißt ein **Magma in** $\mathcal{C}$. Solch eine Verknüpfung heißt **assoziativ** beziehungsweise **kommutativ**, wenn von den beiden folgenden Diagrammen das Linke beziehungsweise das Rechte kommutiert, mit $\tau : G \times G \to G \times G$ der Vertauschung der beiden Faktoren und der offensichtlichen Vertikalen ganz links:

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[r, "m \times \mathrm{id}"] \arrow[d] & G \times G \arrow[r, "m"] & G \arrow[d, equal] \\
G \times (G \times G) \arrow[r, "\mathrm{id} \times m"] & G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\tau"'] & G \arrow[d, equal] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

Ein **neutrales Element** für eine Verknüpfung auf einem Objekt G ist ein Morphismus $e : \mathrm{pt} \to G$ des finalen Objekts nach G derart, daß mit der Notation fin für den einzigen Morphismus $\mathrm{fin} : G \to \mathrm{pt}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, e \circ \mathrm{fin})"] \arrow[d, "(e \circ \mathrm{fin}, \mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutiert. So ein neutrales Element ist, wenn es überhaupt existiert, eindeutig bis auf die Wahl des finalen Objekts, als da heißt: Ist $e' : \mathrm{pt}' \to G$ ein weiteres neutrales Element, so gilt $e' = e \circ \mathrm{fin}$ für den einzigen Morphismus $\mathrm{fin} : \mathrm{pt}' \to \mathrm{pt}$. Wir überlassen diesen Nachweis dem Leser. Ein **Monoidobjekt** von $\mathcal{C}$ ist ein Objekt mit Verknüpfung (G, m) derart, daß die Verknüpfung assoziativ ist und ein neutrales Element existiert. Existiert zusätzlich ein Morphismus **Inversenbildung** $i : G \to G$ derart, daß auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[d, "(i,\mathrm{id})"'] \arrow[dr, "e\circ\mathrm{fin}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

kommutiert, so nennen wir unser Objekt mit Verknüpfung (G, m) ein **Gruppenobjekt**. Wieder überlassen wir dem Leser den Nachweis, daß es höchstens einen Morphismus $i : G \to G$ mit dieser Eigenschaft geben kann, vergleiche Übung 1.2.14. Ich hoffe, daß sich von selbst versteht, was Homomorphismen zwischen Objekten mit Verknüpfung oder auch zwischen Monoidobjekten derselben Kategorie sind. Wir erhalten so insbesondere für jede Kategorie mit endlichen Produkten $\mathcal{C}$ die Kategorien

$\mathrm{Mon}\,\mathcal{C}$	der Monoidobjekte,
$\mathrm{Abmon}\,\mathcal{C}$	der abelschen alias kommutativen Monoidobjekte,
$\mathrm{Grp}\,\mathcal{C}$	der Gruppenobjekte und
$\mathrm{Ab}\,\mathcal{C}$	der abelschen alias kommutativen Gruppenobjekte.

Eine **Operation** oder **Wirkung** eines Monoidobjekts G einer Kategorie $\mathcal{C}$ auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $a : G \times X \to X$ derart, daß die beiden folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} (G \times G) \times X \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d] & G \times X \arrow[r, "a"] & X \arrow[d, equal] \\ G \times (G \times X) \arrow[r, "\mathrm{id}\times a"] & G \times X \arrow[r, "a"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "(e\circ\mathrm{fin},\mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ G \times X \arrow[r, "a"] & X \end{tikzcd}$$

Die Notation a soll an das Wort **action** erinnern, mit dem man Operationen auf englisch und französisch bezeichnet.

Beispiele 1.2.2. Ein Monoidobjekt in der Kategorie der Mengen ist ein Monoid, ein Gruppenobjekt eine Gruppe, ein Objekt mit G-Operation eine G-Menge. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der topologischen Räume heißt eine **topologische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation ein G**-Raum**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der separablen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt eine **Liegruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine G**-Mannigfaltigkeit**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der affinen algebraischen Varietäten heißt eine **affine algebraische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine **affine G-Varietät**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der algebraischen Varietäten heißt eine **algebraische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine **G-Varietät**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Schemata heißt ein **Gruppenschema**, ein Objekt mit G-Operation ein **G-Schema**. In der Kategorie der Schemata ist die volle Unterkategorie der affinen Schemata abgeschlossen unter Produkten und sozusagen per definitionem äquivalent zur opponierten Kategorie $\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ der Kategorie Kring der kommutativen Ringe. Gruppenobjekte in dieser Kategorie heißen **affine Gruppenschemata** oder **kommutative Hopfalgebren über $\mathbb{Z}$ mit Antipode**, wie wir sie gleich ausfülicher diskutieren werden. In der Kategorie der Garben von Mengen über einem gegebenen topologischen Raum ist ein Gruppenobjekt eine **Garbe von Gruppen** und ein abelsches Gruppenobjekt eine **abelsche Garbe**. Ein Monoidobjekt in der Kategorie Cat der Kategorien schließlich heißt eine **strikte Tensorkategorie**.

1.2.3 (**Anwendung von Funktoren auf Gruppenobjekte**). Natürlich muß jeder mit endlichen Produkten verträgliche Funktor zwischen Kategorien mit endlichen Produkten Monoidobjekte zu Monoidobjekten machen, Gruppenobjekte zu Gruppenobjekten, und so weiter. Allgemeiner reicht es sogar aus zu fordern, daß für unseren Funktor F und unser Objekt mit Verknüpfung G und $n \leq 3$ die offensichtlichen Morphismen Isomorphismen $F(G^{\times n}) \xrightarrow{\sim} (FG)^{\times n}$ sind. Zum Beispiel wird jede topologische Gruppe durch das Vergessen der Topologie zu einer gewöhnlichen Gruppe alias einem Gruppenobjekt in der Kategorie der Mengen, und jede affine algebraische Gruppe ist auch eine algebraische Gruppe, da eben der Einbettungsfunktor der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie aller Varietäten mit endlichen Produkten verträglich ist.

Beispiel 1.2.4 (**Anwendung von Yonedafunktoren auf Gruppenobjekte**). Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten ist für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ der Mengenfunktor $\mathcal{C}(A,\ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ verträglich mit Produkten und macht folglich Gruppenobjekte zu Gruppen.

Beispiel 1.2.5. Gegeben ein Körper k erinnern wir aus [LA2] 7.9.10 den mit endlichen Produkten verträglichen Funktor

$$\{\text{Endliche Mengen}\} \to \{k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

gegeben durch $X \mapsto \mathrm{Ens}(X, k)$. Er macht insbesondere endliche Gruppen zu Gruppenobjekten in $k\text{-}\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$.

Beispiel 1.2.6. Gegeben $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper erinnern wir aus 1.1.23, daß der durch $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ gegebene Funktor

$$\{\text{Naive affine } k\text{-Varietäten}\} \to \{k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

mit endlichen Produkten verträglich ist. Er macht also affine algebraische Gruppen zu Gruppenobjekten in k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$. Im folgenden will ich diskutieren, wie Gruppenobjekte in k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ konkret aussehen.

1.2.7 (**Gruppenobjekte in opponierten Kringalgebren**). Nach [LA2] 7.9.9 kann für jeden Körper k ein Koprodukt von je zwei Objekten A, B in der Kategorie aller k-Kringe konstruiert werden als $A \otimes_k B$, und k selbst ist in k-Kring ein initiales Objekt. Im übrigen gilt beides sogar für jeden Kring k, aber so allgemein brauchen wir hier nicht zu werden. Ein Monoidobjekt von k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ ist demnach per definitionem ein Paar (A, Δ) bestehend aus einem k-Kring A und einem Morphismus von k-Kringen $\Delta : A \to A \otimes_k A$ derart, daß

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A \otimes (A \otimes A)
\end{tikzcd}$$

kommutiert und daß ein ein Morphismus von k-Kringen $\varepsilon : A \to k$ existiert, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[d, "(\varepsilon,\mathrm{id})"] \\
A \otimes A \arrow[r, "(\mathrm{id},\varepsilon)"'] & A
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier meint etwa $(\varepsilon, \mathrm{id}) : A \otimes A \to A$ die Abbildung $a \otimes b \mapsto \varepsilon(a)b$ aus dem Koprodukt im Sinne von [LA2] 7.7.16. Nach dem Vorhergehenden ist hier ε eindeutig bestimmt, wenn es existiert. Solch ein Monoidobjekt ist weiter ein Gruppenobjekt genau dann, wenn es zusätzlich einen Morphismus $S : A \to A$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & A \otimes A \arrow[d, "(S,\mathrm{id})"] \\
A \otimes A \arrow[r, "(\mathrm{id},S)"'] & A
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier meint etwa $(\mathrm{id}, S) : A \otimes A \to A$ wieder die Abbildung aus dem Koprodukt $a \otimes b \mapsto aS(b)$. Ein Gruppenobjekt (A, Δ) in der Kategorie k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ nennt man eine **kommutative Hopf-Algebra über** k. Die Abbildung $\Delta : A \to A \otimes A$ heißt ihre **Komultiplikation**, die Abbildung $\varepsilon : A \to k$ die **Ko-Eins**, die Abbildung $S : A \to A$ die **Antipode**.

Vorschau 1.2.8. Allgemeine Hopfalgebren diskutieren wir in [TSK] 3.3.11.

1.2.9 (**Algebraische Gruppen und kommutative Hopfalgebren**). Das oben bereits angedeutete Beispiel besagt explizit, daß man von einer affinen algebraischen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ausgehend eine kommutative Hopf-Algebra erhält, indem man auf $A = \mathcal{O}(G)$ als Komultiplikation

$$\Delta : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)$$

den Komorphismus der Verknüpfung $\Delta := \operatorname{can} \circ m^\sharp$ betrachtet. Die Koeins ist dann das Auswerten am neutralen Element und die Antipode der Komorphismus $S = i^\sharp : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ zum Invertieren. Noch einfacher wird in derselben Weise auch für jede endliche Gruppe G und jeden Körper k der k-Kring $kG = \mathcal{O}(G) = \operatorname{Ens}(G, k)$ zu einer kommutativen Hopf-Algebra über k.

1.2.10. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so erinnern wir aus [KAG] 3.3.12, daß das Bilden der regulären Funktionen $\mathcal{O}$ sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Affine } k\text{-Varietäten}\} \xrightarrow{\approx} \{\text{Affine } k\text{-Kringe}\}^{\text{opp}}$$

induziert. Unter einem affinen k-Kring versteht man dabei eine ringendliche nilpotentfreie Kringalgebra über k. Natürlich muß unsere Äquivalenz $\mathcal{O}$ Gruppenobjekte mit Gruppenobjekten identifizieren. Da das Koprodukt affiner k-Kringe in der Kategorie aller k-Kringe stets wieder affin ist, erhalten wir mit Unterschlagung des Grundkörpers in der Notation eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Affine algebraische Gruppen}\} \xrightarrow{\approx} \{\text{Affine Hopfalgebren}\}^{\text{opp}}$$

Die Spezifikation „affin“ auf der rechten Seite bezieht sich dabei auf die zugrundeliegende k-Kringalgebra, die eben affin sein soll, also ringendlich und nilpotentfrei.

Übungen

Übung 1.2.11 (**Die algebraische Gruppe** $\operatorname{PSL}(2; k)$). $(k = \bar{k})$. Wir betrachten die algebraische Gruppe $\operatorname{SL}(2; k)$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(\operatorname{SL}(2; k)) = k[T_1, T_2, T_3, T_4]/\langle T_1T_4 - T_2T_3 - 1\rangle$. Es sei $A \subset \mathcal{O}(\operatorname{SL}(2; k))$ die von allen T_iT_j mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ erzeugte Unterringalgebra von $\mathcal{O}(\operatorname{SL}(2; k))$. Man zeige:

(a) Die Struktur einer Hopfalgebra auf $\mathcal{O}(\operatorname{SL}(2; k))$ induziert eine Struktur einer Hopfalgebra auf A. Damit gibt es eine algebraische Gruppe $\operatorname{PSL}(2; k)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{O}(\operatorname{PSL}(2; k)) = A$;

(b) Der von der Inklusion $A \subset \mathcal{O}(\operatorname{SL}(2; k))$ induzierte Homomorphismus $\phi : \operatorname{SL}(2; k) \to \operatorname{PSL}(2; k)$ hat den Kern $\ker \phi = \{I, -I\}$;

(c) Im Fall $\operatorname{char} k = 2$ ist ϕ ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, aber nicht von algebraischen Gruppen.

Im Fall $\operatorname{char} k \neq 2$ erhalten wir so den Quotienten aus 1.1.45 von $\mathrm{SL}(2; k)$ nach dem Normalteiler $\{I, -I\}$. Im Fall $\operatorname{char} k = 2$ eerhalten wir den Quotienten von $\mathrm{SL}(2; k)$ nach einem normalen „infinitesimalen Untergruppenschema", aber diese Allgemeinheit werden wir vorerst meiden. In 3.6.18 werden wir eine isomorphe Gruppe nocheinmal auf andere Weise konstruieren und $\mathrm{PGL}(2; k)$ nennen.

Ergänzende Übung 1.2.12. Ein Element f einer Hopf-Algebra heißt **primitiv**, wenn gilt $\Delta(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f$. Man zeige, daß die primitiven Elemente im Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(G)$ auf einer affinen algebraischen Gruppe G genau die Homomorphismen in die additive Gruppe $f : G \to k$ sind. Man folgere im Fall eines Körpers k der Charakteristik Null, daß die primitiven Elemente der symmetrischen Algebra $\mathrm{S}V$ genau die Bilder der Elemente von V sind.

Ergänzende Übung 1.2.13. Ein kommutatives Monoid wird durch seine Verknüpfung ein Monoidobjekt in der Kategorie der Monoide. Man zeige, daß jedes Monoidobjekt in der Kategorie der Monoide von dieser Gestalt ist.

Übung 1.2.14 (**Eindeutigkeit der Inversenbildung**). Man zeige, daß eine Inversenbildung für ein Monoidobjekt eindeutig ist, wenn sie existiert. Hinweis: Gegeben zwei Inversenbildungen $i, j : G \to G$ betrachte man den Morphismus $(i, \mathrm{id}, j) : G \to G \times G \times G$ und verwende die Assoziativität.

Übung 1.2.15 (**Involutivität der Inversenbildung**). Man zeige, daß eine Inversenbildung i für ein Monoidobjekt stets die Eigenschaft $i^2 = \mathrm{id}$ hat. Hinweis: Man betrachte den Morphismus $(\mathrm{id}, i, i^2) : G \to G \times G \times G$ und verwende die Assoziativität.

Übung 1.2.16. Wir können die Definition 1.2.1 von Gruppenobjekten dahingehend abschwächen, daß wir statt die Existenz eines Morphismus „Inversenbildung" nur die Existenz von zwei Morphismen „Bilden des Linksinversen" und „Bilden des Rechtsinversen" fordern. Aus dem Rest der Axiome folgt dann bereits, daß sie übereinstimmen müssen.

1.3 Einbettungen in Matrizenräume

Satz 1.3.1 (**Affine algebraische Gruppen sind linear**). *Jede abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen k-Vektorraums ist eine affine algebraische Gruppe, und jede affine algebraische Gruppe ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe dieser Art.*

1.3.2. Die Bedingung abgeschlossen bezieht sich hier auf die Zariskitopologie. Ganz allgemein heißt eine Gruppe **linear** genau dann, wenn sie als Untergruppe in die Automorphismengruppe eines Vektrorraums eingebettet werden kann. Unsere affinen algebraischen Gruppen werden aufgrund des obigen Satzes auch und sogar meist **lineare algebraische Gruppen** genannt.

Satz 1.3.3 (Affine algebraische Monoide sind linear). *Jedes abgeschlossene Untermonoid des Endomorphismenmonoids eines endlichdimensionalen k-Vektorraums ist ein affines algebraische Monoid und jede affine algebraische Monoid ist isomorph zu einem abgeschlossenen Untermonoid dieser Art.*

Beweis. Die erste Aussage in beiden Sätzen folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft der induzierten Struktur auf abgeschlossenen Teilmengen einer affinen Varietät. Um die zweite Aussage zu beweisen, konzentrieren wir uns auf den zweiten Satz, der hier eine stärkere Aussage macht, und betrachten für ein algebraisches Monoid G die Komposition Δ von Homomorphismen von k-Ringalgebren

$$\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)$$

mit dem Komorphismus $\mathrm{mult}^\sharp$ der Multiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ auf den regulären Funktionen an erster Stelle dem Inversen des Isomorphismus 1.1.23 oder alternativ [KAG] 3.1.4 an zweiter Stelle. Genau dann haben wir also $\Delta f = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i$, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $f(xy) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(y)$. Erklären wir die Rechtsverschiebung $\rho(y) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ durch die Vorschrift $(\rho(y)f)(x) = f(xy)$, so liegen alle $\rho(y)f$ also in dem von den Funktionen g_i aufgespannten Teilraum und wir folgern, daß für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ der von den Translaten von f aufgespannte Teilraum $V := \langle \rho(y)f \mid y \in G \rangle$ endlichdimensional ist. Zusammenfassend liegt jede reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ in einem endlichdimensionalen unter allen Rechtsverschiebungen invarianten Teilraum V. Weiter liefert die Operation von G durch Rechtsverschiebung auf jedem endlichdimensionalen unter Rechtsverschiebung invarianten Teilraum V für jeden Vektor $f \in V$ einen Morphismus von Varietäten $G \to V$, $y \mapsto \rho(y)f = \sum h_i(y)g_i$. A priori ist diese Abbildung zwar ein Morphismus nach $W := \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, aber da sie in $W \cap V$ landet und da jede injektive lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume eine abgeschlossene Einbettung ist, folgt die Aussage aus der universellen Eigenschaft abgeschlossener Einbettungen. Durch Anwenden dieser Erkenntnis auf die Vektoren einer Basis erhalten wir einen Homomorphismus von algebraischen Monoiden

$$\rho : G \to \mathrm{End}(V)$$

Wählen wir nun V so groß, daß V ein Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_t$ des k-Krings $\mathcal{O}(G)$ umfaßt, so induziert unser Morphismus von algebraischen Monoiden ρ eine Surjektion

$$\mathcal{O}(\mathrm{End}(V)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(G)$$

Betrachten wir in der Tat das Auswerten am neutralen Element $\delta_e : \mathcal{O}(G) \to k$ und die regulären Abbildungen $F_\tau : \operatorname{End}(V) \to k$, $A \mapsto (Af_\tau)(e)$ für $1 \leq \tau \leq t$, so gilt $F_\tau(\rho(y)) = (\rho(y)f_\tau)(e) = f_\tau(y)$. Folglich haben wir $F_\tau \mapsto f_\tau$ und folglich liegen alle f_τ im Bild, das damit ganz $\mathcal{O}(G)$ sein muß. Nach 1.1.40 oder alternativ [KAG] 3.4.5 liefert unser Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{End}(V)$ folglich einen Isomorphismus von G mit einem abgeschlossenen Untermonoid von $\operatorname{End}(V)$. □

Satz 1.3.4 (**Algebraische Untermonoide algebraischer Gruppen**). *Gegeben G eine algebraische Gruppe und $M \underset{\mathrm{A}}{\subset} G$ ein Zariski-abgeschlossenes Untermonoid ist M bereits eine Untergruppe.*

Beweis. Jedes $x \in M$ induziert einen Isomorphismus $(x\cdot) : M \xrightarrow{\sim} xM$ von M mit einer abgeschlossenen Teilmenge von M. Keine echte abgeschlossene Teilmenge einer Varietät kann aber isomorph sein zur Varietät selber, da jede Varietät ein noetherscher topologischer Raum ist, vergleiche Übung [KAG] 4.1.22. Also gilt $xM = M$ und M ist eine Gruppe. □

Korollar 1.3.5 (**Einheitengruppe affiner algebraischer Monoide**). *In jedem affinen algebraischen Monoid bilden die Einheiten eine offene affine Teilmenge und können beschrieben werden als die Nichtnullstellenmenge einer regulären Funktion.*

Beweis. Sei M unser Monoid. Nach 1.3.3 finden wir einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung als Untermonoid $M \underset{\mathrm{A}}{\subset} \operatorname{End}(V)$. Dann ist $M \cap \operatorname{GL}(V)$ als abgeschlossenes Untermonoid einer algebraischen Gruppe bereits sebst eine algebraische Gruppe nach 1.3.4 und wir folgern $M^\times \supset M \cap \operatorname{GL}(V)$ und dann auch sofort $M^\times = M \cap \operatorname{GL}(V)$. □

Übungen

1.3.6. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G und ein Automorphismus φ von G, der einen lokal endlichen Automorphismus $\varphi^\sharp$ von $\mathcal{O}(G)$ induziert, gibt es einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung $\rho : G \hookrightarrow \operatorname{End}(V)$ und ein Element $x \in \operatorname{GL}(V)$ mit $\rho \circ \varphi = \operatorname{int}_x \circ \rho$. Hinweis: Man vergrößere den Teilraum $V \subset \mathcal{O}(G)$ aus dem vorherigen Beweis so, daß er auch noch unter $\varphi^\sharp$ stabil ist. Unser x wird dann das Inverse der Einschränkung von $\varphi^\sharp$ auf V.

1.4 Algebraische Darstellungen

1.4.1. Seien G ein Monoid und k ein Körper. Eine **Darstellung von G über k** ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{End} V$. Wir verwenden dann auch die abkürzenden

Notationen $(\rho(x))(v) = x \cdot_\rho v = xv$. Gegeben eine Darstellung V eines Monoids G erklärt man eine **Unterdarstellung** als einen Untervektorraum $W \subset V$ mit $w \in W \Rightarrow xw \in W\ \forall x \in G$. Unser ρ induziert dann einen Monoidhomomorphismus $G \to \operatorname{End} W$.

1.4.2. Im folgenden gelten die Aussagen, bei denen ich nicht explizit Affinität fordere, auch im allgemeinen. Für die Beweise verwendet man [KAG] 6.11.13, nach dem auch für beliebige Varietäten X, Y die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(X \times Y)$ induziert, und [KAG] 6.4.20, nach dem für jede Varietät X und jede affine Varietät Y das Zurückholen regulärer Funktionen eine Bijektion $\operatorname{Var}(X, Y) \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$ induziert.

Definition 1.4.3. Sei G ein algebraisches Monoid über $k = \bar{k}$. Eine **algebraische Darstellung von** G ist eine Darstellung (V, ρ) über k, in der jeder Vektor zu einer endlichdimensionalen Unterdarstellung $W \subset V$ gehört derart, daß die induzierte Abbildung $G \to \operatorname{End} W$ algebraisch ist.

Lemma 1.4.4. $(k = \bar{k})$. *Gegeben ein k-Vektorraum V und G ein algebraisches Monoid über k liefert ein Monoidhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{End}(V)$ genau dann eine algebraische Darstellung, wenn es eine lineare Abbildung*

$$\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$$

gibt derart, daß gilt $\Delta_V(v) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i \ \Rightarrow\ \rho(x)v = \sum_{i=1}^n f_i(x)v_i\ \forall x \in G$.

Beweis. Ist V endlichdimensional und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis und $\rho : G \to \operatorname{End} V$ ein Monoidhomomorphismus, so gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $f_{ji} : G \to k$ mit $\rho(x)v_j = \sum_{i=1}^n f_{ji}(x)v_i$. Das zeigt, daß die Abbildung Δ_V aus dem Lemma, wenn es sie denn gibt, bereits durch (V, ρ) eindeutig bestimmt ist. Ebenso sind unsere Funktionen f_{ji} offensichtlich genau dann regulär, wenn $\rho : G \to \operatorname{End} V$ ein Morphismus von Varietäten ist. □

1.4.5 (**Diskussion der Terminologie**). In der älteren Literatur heißen unsere algebraischen Darstellungen meist **rationale Darstellungen**. Diese Terminologie erklärt sich daraus, daß man bereits zuvor **polynomiale Darstellungen** der Gruppen $\operatorname{GL}(n; k)$ erklärt hatte als Gruppenhomomorphismen $\operatorname{GL}(n; k) \to \operatorname{GL}(m; k)$, bei denen die Matrixeinträge der Bildmatrix polynomial von den Matrixeinträgen der Ausgangsmatrix abhängen, in unserer Terminologie also als algebraische Darstellungen des Monoids $\operatorname{Mat}(m; k)$. Bei rationalen Darstellungen durften dann im Gegensatz dazu auch Nenner auftreten, aber eben nur Potenzen der Determinante im Nenner, so daß die Matrixeinträge durchaus reguläre Funktionen auf der Gruppe sind. Die Verwendung des Wortes „rational“ in diesem Zusammenhang halte ich im aktuellen terminologischen Kontext für problematisch, weil sie einen Zusammenhang mit rationalen Funktionen suggeriert, der weit hergeholt ist.

Beispiel 1.4.6. Für jedes algebraische Monoid liefert die Rechtsverschiebung

$$\rho : G \to \mathrm{End}(\mathcal{O}(G))$$

eine algebraische Darstellung von G. Ist allgemeiner X eine G-Varietät, also eine Varietät mit einer G-Operation $G \times X \to X$, die ein Morphismus von Varietäten ist, so liefert die Verschiebung von Funktionen mit denselben Argumenten wie im Beweis von 1.3.1 eine algebraische Darstellung $G \to \mathrm{End}(\mathcal{O}(X))$.

1.4.7. Eine Darstellung heißt **irreduzibel**, wenn sie nicht Null ist, aber außer Null und sich selbst keine Unterdarstellung besitzt.

1.4.8. Gegeben Darstellungen V, W eines Monoids G versteht man unter einem **Homomorphismus von Darstellungen** eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(xv) = xf(v)$ für alle $x \in G$ und $v \in V$. Die Darstellungen eines Monoids G über einem Körper k werden so zu einer Kategorie. Wir notieren sie

$$\mathrm{Mod}_{k,G} = \mathrm{Mod}_G$$

Ist G ein algebraisches Monoid, so meinen wir mit dieser Notation meist abweichend die volle Unterkategorie der algebraischen Darstellungen.

Vorschau 1.4.9. Gegeben Darstellungen $V_1, \ldots, V_r, W$ eines Monoids G verstehen wir unter einer **Verschmelzung von Darstellungen** eine multilineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mit $f(xv_1, \ldots, xv_r) = xf(v_1, \ldots, v_r)$ für alle $x \in G$ und $v_i \in V_i$. Die Darstellungen eines Monoids G über einem Körper k bilden mit diesen Verschmelzungen und deren „Multiverknüpfung" eine „Schmelzkategorie" im Sinne von [TS] **??**.

Ergänzung 1.4.10 (**Einordnung der Superdarstellungen**). Unsere Bemerkungen zu affinen Supergruppenschemata **??** haben eine natürliche Ergänzung für Darstellungen. Betrachten wir genauer wie dort zu einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen die zugehörige Kategorie von Kringobjekten und ein Gruppenobjekt G in deren opponierter Kategorie mit zugrundeliegendem Objekt $\mathcal{O}(G) \in \mathcal{M}$, so können wir eine „Darstellung von G" erklären als ein Paar (V, Δ_V) bestehend aus einem Objekt $V \in \mathcal{M}$ nebst einem Morphismus $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ in $\mathcal{M}$ derart, daß gewisse mehr oder weniger offensichtliche Verträglichkeiten gelten. Insbesondere erhält man so im Fall der Schmelzkategorie der Paritätsgruppen sogenannte „Superdarstellungen von affinen Supergruppenschemata".

Übungen

Übung 1.4.11. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und G ein affines algebraisches Monoid über k und V ein k-Vektorraum. So gehört eine lineare

Abbildung $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ genau dann zu einer algebraischen Darstellung, wenn gilt $(\mathrm{id} \otimes \Delta_V) \circ \Delta_V = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_V$ für $\Delta : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ die Komultiplikation sowie $\mathrm{id}_V = (\delta_1 \otimes \mathrm{id}_V) \circ \Delta_V$.

Übung 1.4.12. Jede irreduzible Darstellung einer affinen algebraischen Gruppe läßt sich als Unterdarstellung in die reguläre Darstellung einbetten. Hinweis: Matrixkoeffizienten.

Übung 1.4.13. Eine Darstellung V eines algebraischen Monoids G ist algebraisch genau dann, wenn es für jeden Vektor $v \in V$ eine offene Umgebung $U \Subset G$ des neutralen Elements gibt derart, daß Uv in V einen endlichdimensionalen Teilraum $\langle Uv \rangle$ aufspannt und die Abbildung $U \to \langle Uv \rangle$ gegeben durch $g \mapsto gv$ algebraisch ist.

Übung 1.4.14. Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids G und Untervektorräume $U, W \subset V$ ist $\{g \in G \mid g(U) \subset W\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von G.

Übung 1.4.15. Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids G und ein Untervektorraum $U \subset V$ und eine offene dichte Teilmenge $A \Subset G$ ist das Vektorraumerzeugnis W von $\{au \mid a \in A, u \in U\}$ eine G-stabile Teilmenge von V.

Übung 1.4.16. Ist $V \twoheadrightarrow W$ ein surjektiver Homomorphismus von Darstellungen eines affinen algebraischen Monoids G und ist die Darstellung V algebraisch, so ist auch die Darstellung W algebraisch.

Übung 1.4.17. Ist V eine Darstellung eines Monoids G und $W \subset V$ eine Unterdarstellung, so gibt es genau ein Struktur von G-Darstellung auf V/W derart, daß dis kanonische Projektion $V \twoheadrightarrow V/W$ ein homomorphismus von Darstellungen ist. Wir nennen V/W mit dieser Struktur die **Quotientendarstellung**.

Übung 1.4.18. Der Quotient einer Darstellung nach einer maximalen echten Unterdarstellung ist stets irreduzibel.

Übung 1.4.19. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer algebraischen Gruppe oder eines algebraischen Monoids G zeige man:

1. Der Komorphismus $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(G \times V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(V)$ zur Operation $G \times V \to V$ induziert eine lineare Abbildung $V^* \to \mathcal{O}(G) \otimes V^*$;

2. Diese lineare Abbildung ist der Komorphismus zur kontragredienten Darstellung von G^{opp} auf V^*.

Übung 1.4.20. Jede irreduzible algebraische Darstellung einer kommutativen algebraischen Gruppe ist eindimensional. Hinweis: Existenz simultaner Eigenvektoren [LA2] 3.2.18.

Übung 1.4.21. Der Komorphismus $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ ist ein Homomorphismus von Darstellungen für die Operation durch Konjugation auf $\mathcal{O}(G)$. Hinweis: Für jede Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G und jedes Element $t \in G$ gilt $(tgt^{-1})tv = t(gv)$. Die lineare Abbildung $\rho(t) : V \to V$ ist also ein Isomorphismus von der Darstellung ρ zur Darstellung $\rho \circ (\mathrm{int}\, t)$.

Übung 1.4.22 (**Tensorprodukt algebraischer Darstellungen**). Gegeben algebraische Darstellungen V, W eines affinen algebraischen Monoids G ist auch der Vektorraum $V \otimes W$ eine algebraische Darstellung von G unter der Operation $x(v \otimes w) := xv \otimes xw$.

Übung 1.4.23. Gegeben algebraische Darstellungen $(\rho, V), (\psi, W)$ einer affinen algebraischen Gruppe G mit $\dim V < \infty$ ist auch der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, W)$ eine algebraische Darstellung von G unter der Operation $(gf) = \psi(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$ für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist speziell W die Einsdarstellung von G, so erhalten wir eine Darstellung von G durch Automorphismen des Dualraums V^* von V, die sogenannte **kontragrediente Darstellung**.

Vorschau 1.4.24. Die Übung 1.4.22 zum Tensorprodukt bedeutet, daß die Schmelzkategorie algebraischen Darstellungen eines affinen algebraischen Monoids stabil universelle Verschmelzungen besitzt im Sinne von [TS] **??**. Ist unser Monoid eine Gruppe, bilden die endlichdimensionalen algebraischen Darstellungen nach Übung 1.4.23 sogar eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom. Das gilt auch für beliebige algebraische Darstellungen, aber dann müssen wir das „interne Hom" sorgfältiger konstruieren als die maximale algebraische Unterdarstellung $(V \Rrightarrow W) \subset \mathrm{Hom}(V, W)$. Ein injektiver Morphismus $L \hookrightarrow V$ muß jedoch in dieser Allgemeinheit keinen surjektiven Morphismus $(L \Rrightarrow k) \twoheadrightarrow (V \Rrightarrow k)$ induzieren, wie das Beispiel 1.6.6 zeigt.

Ergänzende Übung 1.4.25. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stabil universellen Verschmelzungen und ein Gruppenobjekt $G \in \mathrm{Kring}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{opp}}$ mit zugrundeliegendem Objekt $\mathcal{O}(G) \in \mathrm{Kring}_{\mathcal{M}}$ können wir nach 1.2.4 die Gruppe $G(\mathrm{I})$ betrachten. Man zeige, daß für jede Darstellung V von G die Gruppe $G(\mathrm{I})$ in natürlicher Weise auf V operiert.

1.4.26 (**Anfänge des Tannaka-Formalismus**). Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine affine algebraische Gruppe über k. Wir betrachten den Schmelzfunktor

$$F : \mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Mod}_k$$

des Vergessens der Gruppenwirkung. Wir behaupten, daß wir einen Gruppenisomorphismus

$$\tau : G \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{SCat}(\mathrm{Mod}_G, \mathrm{Mod}_k)^{\times}(F)$$

zwischen G und der Automorphismengruppe des Schmelzfunktors F erhalten durch die Vorschrift $g \mapsto \tau(g)$, bei der die Isotransformation von Schmelzfunktoren $\tau(g) : F \to F$ hinwiederum gegeben durch die Gesamtheit der linearen Abbildungen $\tau(g)_V : F(V) \to F(V)$ für $V \in \mathrm{Mod}_G$, die gerade die durch die Operation von G auf V gegebenen linearen Abbildungen $(g\cdot) : V \to V$ sind. Es ist klar, daß diese Vorschrift einen Gruppenhomomorphismus liefert. Um dessen Bijektivität zu zeigen, konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Dazu betrachten wir die Darstellung $R := \mathcal{O}(G)$ mit der G-Operation durch Rechtsverschiebung $(\rho(g)f)(x) = f(xg)$. Jeder Automorphismus τ des Schmelzfunktors F liefert ja insbesondere einen Vektorraumisomorphismus $\tau_R : R \xrightarrow{\sim} R$. Da die Multiplikation $\mathcal{O}(G) \times \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ eine G-äquivariante bilineare Abbildung ist, ist sie eine Zweiverschmelzung $R \curlyvee R \to R$, und damit muß τ_R ein Algebrenhomomorphismus sein. Da die Eins von $\mathcal{O}(G)$ invariant unter Rechtsverschiebung ist, ist sie eine Nullverschmelzung $\curlyvee \to R$ und damit muß τ_R die Eins auf die Eins Abbilden alias ein Ringalgebrenhomomorphismus sein. Da die Linksverschiebungen $\lambda(z) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ Homomorphismen von Darstellungen $R \to R$ sind, muß τ_R mit ihnen allen kommutieren. Wie wir beim Beweis der Jordanzerlegung 1.5.5 gesehen haben, gibt es folglich $g \in G$ mit $\tau_R = \rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$. Es folgt $\tau_V = \tau_V(g)$ erst für $V = R$, dann für V eine beliebige direkte Summe von Kopien von R, dann für V endlichdimensional, weil sich V dann nach dem Beweis von 1.5.5 in eine direkte Summe von Kopien von $R = \mathcal{O}(G)$ einbetten läßt, und schlißlich für V beliebig, weil es eine Vereinigung von endlichdimensionalen Unterdarstellungen ist. Es ist ziemlich klar, daß wir durch dieselbe Vorschrift dann auch einen Gruppenisomorphismus

$$\tau : G \xrightarrow{\sim} \mathrm{SCat}(\mathrm{Modf}_G, \mathrm{Mod}_k)^\times(F)$$

von G mit der Automorphismengruppe des auf endlichdimensionale Darstellungen eingeschränkten Schmelzfunktors F erhalten. Wenn wir nun umgekehrt von einem Paar $(\mathcal{M}, E)$ aus einer k-linearen Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ und einem k-linearen Schmelzfunktor $E : \mathcal{M} \to \mathrm{Mod}_k$ ausgehen, kann man sich fragen, unter welchen Bedingungen man die Gruppe

$$G := \mathrm{SCat}(\mathcal{M}, \mathrm{Mod}_k)^\times(E)$$

so mit der Struktur einer affinen algebraischen Gruppe über k versehen kann, daß es eine Äquivalenz von k-linearen Schmelzkategorien $\sigma : \mathrm{Modf}_G \xrightarrow{\approx} \mathcal{M}$ gibt und einen Isomorphismus $E \circ \sigma \xRightarrow{\sim} F$ von Schmelzfunktoren. Das ist die Grundfrage der Tannaka-Theorie.

1.5 Jordanzerlegung

1.5.1 (**Erinnerungen aus der Linearen Algebra**). Ein Endomorphismus eines Vektorraums heißt nach [LA2] 3.2.16 **lokal endlich**, wenn jeder Vektor in einem endlichdimensionalen unter unserem Endomorphismus stabilen Teilraum liegt. Ein Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt nach [LA2] 3.2.16 unter einem Endomorphismus in die direkte Summe seiner Haupträume genau dann, wenn besagter Endomorphismus lokal endlich ist. Ein Endomorphismus x eines Vektorraums heißt **lokal nilpotent**, wenn jeder Vektor von einer Potenz von x zu Null gemacht wird, wenn also unser Vektorraum die Vereinigung der Kerne der Potenzen von x ist. Natürlich ist jeder lokal nilpotente Endomorphismus lokal endlich. Ein Endomorphismus x eines Vektorraums heißt **lokal unipotent**, wenn $x - \mathrm{id}$ lokal nilptent ist. Oft wird der Zusatz „lokal" in diesem Zusammenhang auch weggelassen.

1.5.2 (**Multiplikative Jordanzerlegung von Automorphismen**). Ich erinnere an die multiplikative Jordanzerlegung [LA2] 3.3.20: Jeder lokal endliche Automorphismus x eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper läßt sich auf genau eine Weise darstellen als ein Produkt

$$x = x_{\mathrm{u}} x_{\mathrm{s}}$$

mit x_{s} halbeinfach alias „semisimple" alias diagonalisierbar, x_{u} lokal unipotent alias $(x_{\mathrm{u}} - \mathrm{id})$ lokal nilpotent, und $x_{\mathrm{u}} x_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{u}}$. Ich erinnere weiter an die Funktorialitätseigenschaften dieser Zerlegung. Sei

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Vektorräumen mit invertierbaren lokal endlichen Vertikalen. Sind dann $x = x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{u}}$ und $y = y_{\mathrm{s}} y_{\mathrm{u}}$ die multiplikativen Jordan-Zerlegungen von x und y, so kommutieren auch die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_{\mathrm{s}} \downarrow & & \downarrow y_{\mathrm{s}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_{\mathrm{u}} \downarrow & & \downarrow y_{\mathrm{u}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

1.5.3. Ich erinnere daran, daß nach dem Beweis von 1.3.1 für jedes $g \in G$ die Rechtsverschiebung $\rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ gegeben durch $(\rho(g)f)(x) = f(xg)$ für alle $x \in G$ und $f \in \mathcal{O}(G)$ eine k-lineare lokal endliche Abbildung ist.

Definition 1.5.4. $(k = \bar{k})$. Ein Element einer affinen algebraischen Gruppe heißt **halbeinfach** beziehungsweise **unipotent**, wenn es auf jeder algebraischen Darstellung besagter Gruppe durch einen halbeinfachen beziehungsweise einen unipotenten Automorphismus operiert.

Satz 1.5.5 (Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen). *1. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G gibt es für jedes Element $g \in G$ eindeutig bestimmte $g_{\mathrm{s}}, g_{\mathrm{u}} \in G$ mit g_{s} halbeinfach und g_{u} unipotent und $g = g_{\mathrm{s}} g_{\mathrm{u}} = g_{\mathrm{u}} g_{\mathrm{s}}$. Diese Elemente g_{s} und g_{u} heißen der* **halbeinfache** *und der* **unipotente Anteil von** *g;*

2. *Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to G'$ von affinen algebraischen Gruppen gilt $\varphi(g_{\mathrm{u}}) = \varphi(g)_{\mathrm{u}}$ und $\varphi(g_{\mathrm{s}}) = \varphi(g)_{\mathrm{s}}$ für alle $g \in G$;*

1.5.6. Sobald der Satz und insbesondere sein dritter Teil einmal bewiesen ist, müssen wir in der Notation nicht mehr zwischen der Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen und der multiplikativen Jordanzerlegung lokal endlicher Endomorphismen unterscheiden. Für die Dauer des Beweises notieren wir die Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen abweichend von der Formulierung des Satzes noch $g = g_u g_s$ mit Indizes in einem anderen Schrifttyp als bei der konkreten Zerlegung $g = g_{\mathrm{u}} g_{\mathrm{s}}$ eines Automorphismus g eines endlichdimensionalen Vektorraums.

Beweis. Eine lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt her von einem Homomorphismus von affinen Varietäten genau dann, wenn sie ein Homomorphismus von Ringalgebren ist. Eine bijektive lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt her von einem Isomorphismus von affinen Varietäten genau dann, wenn sie ein Isomorphismus von Algebren alias in unserer Terminologie verträglich mit der Multiplikation ist, denn ein solcher Isomorphismus muß das Eins-Element automatisch erhalten. Ein Homomorphismus von affinen Varietäten $G \to G$ ist die Rechtsmultiplikation mit einem Gruppenelement genau dann, wenn er mit den Linksmultiplikationen mit allen Gruppenelementen $z \in G$ vertauscht. Kürzen wir $\mathcal{O}(G) = A$ ab, so ist ein Vektorraumisomorphismus $r : A \xrightarrow{\sim} A$ demnach ein $\rho(g)$ genau dann, wenn die beiden folgenden Diagramme kommutieren, das letztere für alle $z \in G$:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\text{mult}} & A \\ {\scriptstyle r\otimes r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ A \otimes A & \xrightarrow{\text{mult}} & A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda(z)} & A \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ A & \xrightarrow{\lambda(z)} & A \end{array}$$

mit $\lambda(z) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ der Rechtsoperation durch Linksverschiebung, gegeben durch $(\lambda(z)f)(x) = f(zx)$. Nach der Funktorialität der Jordanzerlegung 1.5.2 kommutieren diese Diagramme aber auch dann noch, wenn wir in den Vertikalen den halbeinfachen beziehungsweise den unipotenten Anteil nehmen. Die Eindeutigkeit der multiplikativen Jordanzerlegung 1.5.2 liefert unmittelbar $(r \otimes r)_{\mathrm{s}} = r_{\mathrm{s}} \otimes r_{\mathrm{s}}$ und $(r \otimes r)_{\mathrm{u}} = r_{\mathrm{u}} \otimes r_{\mathrm{u}}$. Es folgt, daß mit $r = \rho(g)$ auch $\rho(g)_{\mathrm{s}}$ und $\rho(g)_{\mathrm{u}}$ die fraglichen Diagramme kommutieren lassen. Folglich gibt es $g_s, g_u \in G$ mit

$\rho(g)_{\mathrm{s}} = \rho(g_s)$ und $\rho(g)_{\mathrm{u}} = \rho(g_u)$. Wegen $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u) = \rho(g_u)\rho(g_s)$ folgt $g = g_s g_u = g_u g_s$. Jetzt zeigen wir, daß g_s, g_u auch im Sinne unserer Definition halbeinfach beziehungsweise unipotent sind. Es reicht dafür zu zeigen, daß sie auf jeder endlichdimensionalen algebraischen Darstellung V von G durch halbeinfache beziehungsweise unipotente Automorphismen operieren. Für $\psi_1, \ldots, \psi_n$ eine Basis von V^* liefern aber die Matrixkoeffizientenabbildungen eine für die G-Operation durch Rechtstranslation auf $\mathcal{O}(G)$ äquivariante Einbettung

$$\begin{array}{rcl} V & \hookrightarrow & \mathcal{O}(G)^n \\ v & \mapsto & (x \mapsto \psi_i(xv))_{i=1}^n \end{array}$$

In anderen Worten erhalten wir also für alle $g \in G$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{O}(G)^n \arrow[d, "\rho(g)\times\ldots\times\rho(g)"] \\ V \arrow[r, hook] & \mathcal{O}(G)^n \end{tikzcd}$$

Nun erkennt man aber auch ohne Schwierigkeiten die Identitäten $(x \times y)_{\mathrm{u}} = x_{\mathrm{u}} \times y_{\mathrm{u}}$ sowie $(x \times y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} \times y_{\mathrm{s}}$ für $x : V \to V$ und $y : W \to W$ lokal endlich und invertierbar. Wenden wir also auf unser Diagramm die Funktorialität der konkreten Jordanzerlegung an, so folgt, daß g_s auf V durch einen halbeinfachen Automorphismus operiert und g_u durch einen unipotenten Automorphismus. Das zeigt die Existenz der multiplikativen Jordanzerlegung. Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit der konkreten multiplikativen Jordanzerlegung von $\rho(g)$ im Sinne von 1.5.2. Um den zweiten Teil zu zeigen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g"] & G' \arrow[d, "\cdot\varphi(g)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$$

und das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) & \mathcal{O}(G') \arrow[l, "\circ\varphi"'] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[u, "\rho(g)"] & \mathcal{O}(G') \arrow[l, "\circ\varphi"'] \arrow[u, "\rho(\varphi(g))"'] \end{tikzcd}$$

Wieder bleibt es kommutativ, wenn wir in den Vertikalen den unipotenten oder den halbeinfachen Anteil nehmen. Kehren wir dann wieder zu unseren Varietäten zurück, so erhalten wir kommutative Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_u"'] & G' \arrow[d, "\cdot \varphi(g)_u"] \\
G \arrow[r, "\varphi"] & G'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_s"'] & G' \arrow[d, "\cdot \varphi(g)_s"] \\
G \arrow[r, "\varphi"] & G'
\end{tikzcd}
$$

Setzen wir darin schließlich oben links das neutrale Element ein, so ergibt sich $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$ und $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ wie gewünscht. $\square$

1.5.7 (**Eigenschaften der Menge der unipotenten Elemente**). Die unipotenten Elemente einer affinen algebraischen Gruppe G bilden stets eine abgeschlossene Teilmenge $G_{\mathrm{u}} \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle A}} G$. In der Tat dürfen wir, um das zu zeigen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle A}} \mathrm{GL}(n;k)$ annehmen, und dann sind die unipotenten Elemente gerade die Matrizen mit charakteristischem Polynom $(T-1)^n$. Die unipotenten Elemente bilden im allgemeinen keine Untergruppe und die Abbildung $g \mapsto g_{\mathrm{u}}$ ist im allgemeinen kein Morphismus von Varietäten. Ist jedoch $G = B$ zusammenhängend und auflösbar, so ist $B_{\mathrm{u}} \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle A}} B$ nach 4.1.12 ein zusammenhängender nilpotenter Normalteiler, und ist $G = N$ zusammenhängend nilpotent oder kommutativ, so ist nach 4.1.10 beziehungsweise 1.5.9 nicht nur $N_{\mathrm{u}} \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle A}} N$ eine Untergruppe, sondern auch das Bilden des unipotenten Anteils ein Morphismus $N \to N_{\mathrm{u}}$ von algebraischen Gruppen.

1.5.8 (**Eigenschaften der Menge der halbeinfachen Elemente**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G muß die Menge G_{s} der halbeinfachen Elemente weder offen noch abgeschlossen noch eine Untergruppe sein. Ist jedoch $G = N$ zusammenhängend nilpotent oder kommutativ, so ist nach 4.1.10 beziehungsweise 1.5.9 die Menge der halbeinfachen Elemente $N_{\mathrm{s}} \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle A}} N$ eine abgeschlossene zentrale Untergruppe und das Bilden des halbeinfachen Anteils ein Morphismus $N \to N_{\mathrm{s}}$ von algebraischen Gruppen.

Proposition 1.5.9 (Jordanzerlegung in kommutativen Gruppen). *Ist K eine kommutative affine algebraische Gruppe, so bilden die unipotenten und die halbeinfachen Elemente jeweils abgeschlossene Untergruppen $K_{\mathrm{u}}, K_{\mathrm{s}} \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle A}} K$ und die Multiplikation liefert einen Isomorphismus von algebraischen Gruppen*

$$K_{\mathrm{s}} \times K_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} K$$

Vorschau 1.5.10. Wir zeigen in 1.7.23 und 1.7.13, daß K_{s}, wenn es zusammenhängend ist, isomorph sein muß zu einem endlichen Produkt von Kopien der multiplikativen Gruppe $(k^\times, \cdot)$. Wir zeigen in 3.10.13, daß in Charakteristik Null K_{u} isomorph sein muß zu einem endlichen Produkt von Kopien der additiven Gruppe $(k, +)$. Eine zusammenhängende kommutative affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null ist also isomorph zu einem Produkt von endlich vielen Kopien von $(k^\times, \cdot)$ mit endlich vielen Kopien von $(k, +)$.

Beweis. Als allererstes bemerken wir, daß die Abbildung in unserer Proposition nach dem Satz über die Jordanzerlegung jedenfalls schon mal eine Bijektion von Mengen sein muß. Nach 1.3.1 können wir nun K als abgeschlossene Untergruppe in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums V einbetten. Nach Übung [LA2] 7.8.10 über die simultane Eigenraumzerlegung finden wir eine Zerlegung in Untervektorräume $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ und paarweise verschiedene Abbildungen $\lambda_i : K_\mathrm{s} \to k$ mit

$$V_i = \{v \in V \mid gv = \lambda_i(g)v \;\; \forall g \in K_\mathrm{s}\}$$

den simultanen Eigenräumen. Da unsere Gruppe kommutativ ist, müssen alle $g \in K$ jeden dieser simultanen Eigenräume V_i stabilisieren. Nach Übung [LA2] 4.5.11 über die simultane Trigonalisierbarkeit finden wir also eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von K_s durch Diagonalmatrizen dargestellt werden und alle Elemente von K durch obere Dreiecksmatrizen. In dieser Einbettung $K \not\trianglelefteq \mathrm{GL}(n; k)$ ist dann aber offensichtlich, daß K_s und K_u abgeschlossene Untergruppen von K sind, daß der halbeinfache Anteil von $g \in K$ genau sein diagonaler Anteil ist, und daß $g \mapsto g_\mathrm{s}$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen sein muß. Weiter können wir dann eine inverse Abbildung zur Bijektion aus der Proposition explizit angeben als $g \mapsto (g_\mathrm{s}, g g_\mathrm{s}^{-1})$. Da das auch ein Morphismus ist, folgt die Proposition. □

Beispiel 1.5.11 (**Jordanzerlegung in endlichen Gruppen**). Jede endliche Gruppe kann über einem vorgegebenen algebraisch abgeschlossenen Körper k auch als algebraische Gruppe aufgefaßt werden. Dann besteht $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ aus halbeinfachen Elementen für m teilerfremd zur Charakteristik von p, da es nach [LA2] 4.4.17 als die Untergruppe von $k^\times$ der m-ten Einheitswurzeln realisiert werden kann. Ist dahingegen m eine p-Potenz, so sind für jede Einbettung unserer Gruppe in eine Matrizengruppe alle Eigenwerte m-te Einheitswurzeln, also Eins, und unsere Gruppe besteht folglich aus unipotenten Elementen. Im allgemeinen liefert für $m = p^r n$ mit n teilerfremd zu p der chinesische Restsatz einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, und der liefert auch schon die Jordanzerlegung in dieser kommutativen Gruppe. Im allgemeinen zerlegt sich jedes Element wie in der von ihm erzeugten zyklischen Gruppe. Der folgende Satz 1.6.2 liefert dann einen neuen Beweis unserer Erkenntnis [NAS] 1.1.26, daß jede p-Gruppe in Charakteristik p bis auf Isomorphismus nur eine einzige irreduzible Darstellung hat, nämlich eben die Einsdarstellung. Aus 1.6.3 kann man sogar folgern, daß jede p-Gruppe auflösbar ist.

Übungen

Übung 1.5.12. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine affine algebraische Gruppe über k. Man zeige, daß für $g \in G$ die Rechtsverschiebung $\rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ lokal halbeinfach beziehungsweise unipotent ist genau dann, wenn die Linksverschiebung $\lambda(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Übung 1.5.13. Man zeige, daß jeder surjektive Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen $G \twoheadrightarrow H$ Surjektionen $G_{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow H_{\mathrm{s}}$ und $G_{\mathrm{u}} \twoheadrightarrow H_{\mathrm{u}}$ induziert.

Übung 1.5.14. Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ offen? Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ dicht?

Übung 1.5.15. In jeder affinen algebraischen Gruppe gilt: Das Inverse eines halbeinfachen Elements ist halbeinfach. Das Inverse eine unipotenten Elements ist unpotent. Das Produkt von zwei kommutierenden halbeinfachen Elementen ist halbeinfach. Das Produkt von zwei kommutierenden unipotenten Elementen ist unipotent. Hinweis: Einbettung in eine allgemeine lineare Gruppe.

Übung 1.5.16. In jeder affinen algebraischen Gruppe ist der Abschluß jeder kommutativen Untergruppe, die aus halbeinfachen Elementen besteht, wieder eine kommutative Untergruppe, die aus halbeinfachen Elementen besteht.

1.6 Unipotente Gruppen

Definition 1.6.1. Eine affine algebraische Gruppe heißt **unipotent**, wenn alle ihre Elemente unipotent sind.

Satz 1.6.2 (Irreduzible Darstellungen unipotenter Gruppen). *Die einzige irreduzible algebraische Darstellung einer unipotenten Gruppe ist die Einsdarstellung.*

Beweis. Sei k unser algebraisch abgeschlossener Grundkörper. Sei U unsere unipotente Gruppe und $\rho : U \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible algebraische Darstellung. Da jede algebraische Darstellung lokal endlich ist, dürfen wir V endlichdimensional annehmen. Nach der Verträglichkeit 1.5.5 der Jordanzerlegung mit Homomorphismen von affinen algebraischen Gruppen ist $\rho(g)$ unipotent für alle $g \in U$, woraus wir $\mathrm{tr}(\rho(g)) = \dim V$ folgern. Es folgt weiter sogar

$$0 = \mathrm{tr}(\rho(g)\rho(h) - \rho(g)) = \mathrm{tr}(\rho(g) \circ (\rho(h) - \mathrm{id}))$$

für alle $g, h \in U$. Da V einfach ist, müssen nach dem Satz von Wedderburn [NAS] 3.3.6 die $\rho(g)$ für $g \in U$ bereits $\mathrm{End}_k(V)$ als k-Vektorraum erzeugen. Es folgt unmittelbar $\mathrm{tr}(A(\rho(h) - \mathrm{id})) = 0$ für alle $A \in \mathrm{End}_k V$ und damit $\rho(h) = \mathrm{id}$ für alle $h \in U$. □

Korollar 1.6.3 (Unipotente Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V und eine abgeschlossene unipotente Untergruppe $U \subset \mathrm{GL}(V)$ gibt es stets eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale.*

Beweis. Wir wählen eine Folge $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ von Unterdarstellungen der Darstellung V derart, daß für jeden Indes $i < n$ unser V_i eine maximale echte Unterdarstellung von V_{i+1} ist. Nach 1.6.2 operiert U trivial auf den Subquotienten V_i/V_{i-1} und diese sind eindimensional. Wählen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ für $1 \leq i \leq n$, so operieren folglich alle $g \in U$ bezüglich dieser Basis durch obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. □

Korollar 1.6.4 (Gruppen aus unipotenten Matrizen). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem beliebigen Körper und eine Untergruppe $U \subset \mathrm{GL}(V)$, die aus unipotenten Automorphismen besteht, gibt es stets eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß es einen simultanen Fixvektor gibt. Indem wir die Skalare erweitern, dürfen wir unseren Grundkörper algebraisch abgeschlossen annehmen. Der Zariski-Abschluß von U ist aber nach 1.1.32 auch eine Untergruppe und besteht nach 1.5.7 aus unipotenten Elementen. Damit folgt die Aussage aus dem vorhergehenden Korollar 1.6.3. □

1.6.5. Jede unipotente algebraische Gruppe ist nilpotent im Sinne von [AL] 1.3.10. In der Tat ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ bereits die Gruppe der unipotenten oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen nilpotent, vergleiche [AL] 1.3.13.

Übungen

Übung 1.6.6. Man zeige, daß in der kontragredienten Darstellung zur Darstellung des Gruppenrings $\mathcal{O}(k)$ der additiven Gruppe mit der Operation durch Rechtstranslation die Nulldarstellung die einzige algebraische Unterdarstellung ist. Insbesondere induziert die Einbettung der Unterdarstellung der konstanten Funktionen $k \hookrightarrow \mathcal{O}(k)$ keine Surjektion auf den maximalen algebraischen Unterdarstellungen der kontragredienten Darstellungen.

1.7 Diagonalisierbare Gruppen

Definition 1.7.1. Eine affine algebraische Gruppe heißt **diagonalisierbar**, wenn sie als abgeschlossene Untergruppe in eine Gruppe von Diagonalmatrizen eingebettet werden kann.

1.7.2. Eine affine algebraische Gruppe über $k = \bar{k}$ heißt also in Formeln diagonalisierbar, wenn sie isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe $D \subset\!\!\!\!\mathrm{A}\; T_n$ der Gruppe $T_n \subset\!\!\!\!\mathrm{A}\; \mathrm{GL}(n;k)$ der Diagonalmatrizen.

Definition 1.7.3. Eine affine algebraische Gruppe über $k = \bar{k}$ heißt ein **Torus**, wenn sie isomorph ist zu einem T_n oder gleichbedeutend zu einem endlichen Produkt von Kopien von $k^\times$.

1.7.4. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe X konstruieren wir eine affine algebraische Gruppe

$$\mathfrak{D}(X) = \mathfrak{D}_k(X) := \mathrm{Ab}(X, k^\times)$$

Als zugrundeliegende Gruppe nehmen wir die Gruppe $\mathrm{Ab}(X, k^\times)$ der Gruppenhomomorphismen von X in die multiplikative Gruppe unseres Körpers. Die Struktur einer affinen Varietät legen wir durch die Bedingung fest, daß für ein- und jedes endliche Erzeugendensystem $E \subset X$ die Einschränkung auf E eine abgeschlossene Einbettung $\mathrm{Ab}(X, k^\times) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(E, k^\times)$ von Varietäten sein soll. Der Nachweis, daß es so eine Struktur gibt und daß sie eindeutig bestimmt ist, sei dem Leser zur Übung überlassen. Wir erhalten so einen Funktor

$$\mathfrak{D} : \left\{ \begin{array}{c} \text{Endlich erzeugte abelsche} \\ \text{Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagonalisierbare affine} \\ \text{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\}$$

Wir zeigen im folgenden, daß dieser Funktor in Charakteristik Null eine Äquivalenz von Kategorien ist und in Charakteristik $p > 0$ eine Äquivalenz von Kategorien wird unter Einschränkung auf die volle Unterkategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen ohne p-Torsion.

Definition 1.7.5. Gegeben eine algebraische Gruppe G über $k = \bar{k}$ nennt man einen Homomorphismus von algebraischen Gruppen $G \to k^\times$ in die multiplikative Gruppe des Grundkörpers auch einen **Charakter** oder genauer einen **multiplikativen algebraischen Charakter von** G.

Definition 1.7.6. Gegeben eine algebraische Gruppe G über k wird die Menge

$$\mathfrak{X}(G) := \mathrm{GrpVar}(G, k^\times)$$

aller ihrer Charaktere selbst eine Gruppe $\mathfrak{X}(G)$ unter der punktweisen Multiplikation von Funktionen. Sie heißt die **Charaktergruppe von** G. Man notiert die Verknüpfung von $\mathfrak{X}(G)$, obwohl sie eine Multiplikation von Funktionen ist, meist additiv. Ich verwende in diesem Kontext die beiden Notationen

$$(\chi \dot{+} \psi)(g) = (\chi + \psi)(g) := \chi(g)\psi(g) \quad \text{für alle } g \in G \text{ und } \chi, \psi \in \mathfrak{X}(G).$$

Die Vorschrift $\mathfrak{X}$ ist in offensichtlicher Weise ein Funktor $\mathfrak{X} : \mathrm{GrpVar} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Ich nenne diesen Funktor den **Charakterfunktor**.

1.7.7. Ist k ein Körper positiver Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$, so gibt es in $k^\times$ keine nichttrivialen Elemente von p-Torsion, denn aus $a^p = 1$ folgt bekanntich $(a-1)^p = 0$ und so $a = 1$. In Charakteristik $p > 0$ können also die hier erklärten Charaktergruppen keine p-Torsion haben.

1.7.8 (**Schwierigkeiten der Notation**). Die allgemein übliche Notation $\chi + \psi$ ist insofern gefährlich, als nun $\chi + \psi$ einerseits als eine Summe von k-wertigen Funktionen auf G verstanden werden kann, die ihrerseits kein Charakter mehr wäre, andererseits aber auch als Summe in der Charaktergruppe. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Ich versuche zumindest zu Beginn, durch die Notation $\chi \dot{+} \psi$ zu verdeutlichen, wenn die Summe in der Charaktergruppe gemeint ist.

Beispiel 1.7.9 (**Charaktere von** $k^\times$). Nach Übung 1.1.42 erhalten wir einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(k^\times)$ durch die Vorschrift $n \mapsto (z \mapsto z^n)$. Eine elegante Lösung für diese Übung besteht im übrigen in der Bemerkung, daß es nicht mehr Charaktere geben kann, da die fraglichen Funktionen bereits eine k-Basis von $\mathcal{O}(k^\times) \cong k[t, t^{-1}]$ bilden und da unsere Charaktere nach Artin [AL] 3.8.16 linear unabhängig sein müssen.

Beispiel 1.7.10 (**Charaktere von Produkten**). Gegeben algebraische Gruppen G, H liefern die Restriktionen unter den Einbettungen $G \hookrightarrow G \times H$, $g \mapsto (g, 1)$ und $H \hookrightarrow G \times H$, $h \mapsto (1, h)$ einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

Die Umkehrabbildung wirft (χ, ξ) auf den Charakter $\chi \boxtimes \xi : (g, h) \mapsto \chi(g)\xi(h)$. Insbesondere erhalten wir einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(T_n)$$

durch $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n$ mit $\varepsilon_i : T_n \to k^\times$ der Projektion auf den i-ten Diagonaleintrag.

Proposition 1.7.11 (Funktionen auf diagonalisierbaren Gruppen). *Gegeben eine diagonalisierbare affine algebraische Gruppe D über $k = \bar{k}$ gilt:*

1. *Die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(D)$ ist endlich erzeugt und die Charaktere bilden eine k-Basis des Rings $\mathcal{O}(D)$ der regulären Funktionen;*

2. *Ein Homomorphismus $C \to D$ von diagonalisierbaren algebraischen Gruppen ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn er auf den Charakteren eine Surjektion $\mathfrak{X}(D) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(C)$ induziert.*

Vorschau 1.7.12. In 2.2.14 können Sie zur Übung zeigen, daß die Charaktergruppe jeder affinen algebraischen Gruppe endlich erzeugt ist.

Beweis. Nach dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren [AL] 3.8.16 ist $\mathfrak{X}(D) \subset \mathcal{O}(D)$ stets eine über k linear unabhängige Teilmenge. Im Fall $D = T_n$ haben wir bereits in 1.7.10 einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(T_n)$ hergeleitet. Insbesondere ist $\mathfrak{X}(T_n)$ eine endliche erzeugte abelsche Gruppe und eine Basis von $\mathcal{O}(T_n) \cong k[X^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n]$. Ist $D \subset\!\!\!\!\!\!\;\triangle\, T_n$ eine abgeschlossene Untergruppe, so zeigt die Surjektion $\mathcal{O}(T_n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(D)$, daß die Bilder der Charaktere aus $\mathfrak{X}(T_n)$ bereits $\mathcal{O}(D)$ als k-Vektorraum erzeugen. Wir folgern, daß $\mathfrak{X}(D)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{O}(D)$ sein muß, in anderen Worten eine Basis. Wir folgern zusätzlich, daß auch das Bild von $\mathfrak{X}(T_n) \to \mathfrak{X}(D)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{O}(D)$ sein muß, in anderen Worten stimmt also dieses Bild mit $\mathfrak{X}(D)$ überein und $\mathfrak{X}(D)$ ist endlich erzeugt. Wir zeigen noch den zweiten Teil. Ist $K \subset\!\!\!\!\!\!\;\triangle\, D$ eine abgeschlossene Untergruppe, so folgt aus $\mathfrak{X}(T_n) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(D)$ und $\mathfrak{X}(T_n) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$ bereits $\mathfrak{X}(D) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$. Induziert umgekehrt ein Morphismus eine Surjektion auf den Charakteren, so nach dem ersten Teil auch auf den regulären Funktionen. $\square$

Satz 1.7.13 (Klassifikation der diagonalisierbaren Gruppen). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Hat k die Charakteristik* $\operatorname{char} k = 0$*, so liefert der Funktor $\mathfrak{X}$ eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diagonalisierbare affine} \\ \textit{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endlich erzeugte abelsche} \\ \textit{Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Hat k positive Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$*, so liefert derselbe Funktor eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diagonalisierbare affine} \\ \textit{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endlich erzeugte abelsche} \\ \textit{Gruppen ohne } p\textit{-Torsion} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Wir konstruieren zunächst einmal eine Adjunktion von Funktoren $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$. Gegeben eine diagonalisierbare algebraische Gruppe D über einem Körper $k = \bar{k}$ und eine endlich erzeugte abelsche Gruppe X betrachten wir dazu die Menge $\mathrm{AH} = \mathrm{AH}(D, X)$ aller Abbildungen $\varphi : D \times X \to k^\times$, die Homomorphismen von algebraischen Gruppen werden, wenn wir die zweite Variable festhalten, und Homomorphismen von diskreten Gruppen, wenn wir die zweite Variable festhalten. Das Kürzel meint „Adjunktionshelfer". Offensichtlich liefert das Exponentialgesetz der Mengenlehre Bijektionen

$$\mathrm{GrpVar}(D, \mathfrak{D}(X)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{AH} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}(X, \mathfrak{X}(D)) = \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}(\mathfrak{X}(D), X)$$

und wir erhalten so eine Adjunktion von Funktoren $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$. Sobald wir nach Übung 2.2.14 wissen, daß $\mathfrak{X}(G)$ für jede affine algebraische Gruppe endlich erzeugt ist, liefert dasselbe Argument auch eine Adjunktion in dieser Allgemeinheit.

2. Die Koeinheit der Adjunktion liefert stets eine Surjektion $\varepsilon^\circ : X \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{D}(X))$, da ihr Bild nach Konstruktion den Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(X))$ als k-Ringalgebra erzeugt.

3. Der Kern $\ker \varepsilon^\circ$ besteht genau aus allen Elementen mit p-Torsion. In der Tat ist jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X ein endliches Produkt von zyklischen Gruppen von Primpotenzordnung und von Kopien von $\mathbb{Z}$. Es reicht, die Behauptung für jeden der Faktoren zu prüfen, und das ist schnell gemacht. Hat X keine p-Torsion, so ist die Koeinheit der Adjunktion mithin ein Isomorphismus

$$\varepsilon = \varepsilon_X : \mathfrak{X}(\mathfrak{D}(X)) \xrightarrow{\sim} X$$

4. Der Funktor $\mathfrak{X}$ macht nur Isomorphismen zu Isomorphismen, denn gegeben $\varphi : C \to D$ folgt aus $\mathfrak{X}\varphi : \mathfrak{X}(C) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(D)$ mit der Beschreibung 1.7.11 der regulären Funktionen auf diagonalisierbaren Gruppen bereits $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(C)$. Für die Einheit der Adjunktion $\eta : D \to \mathfrak{D}(\mathfrak{X}(D))$ ist aber die Verknüpfung

$$\mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(\mathfrak{D}(\mathfrak{X}(D))) \to \mathfrak{X}(D)$$

von $\mathfrak{X}\eta_D$ mit $\varepsilon_{\mathfrak{X}(D)}$ die Identität nach der Dreiecksidentität für adjungierte Funktoren. Da nun $\mathfrak{X}(D)$ keine p-Torsion hat, ist $\varepsilon_{\mathfrak{X}(D)}$ ein Isomorphismus. Dasselbe folgt für $\mathfrak{X}\eta$ und damit für η und damit liefert unser Paar von adjungierten Funktoren in der Tat die behauptete Äquivalenz. □

1.7.14. Wir erinnern den Funktor $\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}} \to \mathrm{Ens}$ aus [KAG] 3.4.7, der jedem ringendlichen k-Kring die Menge seiner maximalen Ideale zuordnet. Gegeben eine endlich erzeugte abelsche Gruppe X und ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ erhalten wir Bijektionen

$$\mathrm{Ab}(X, k^\times) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ralg}_k(kX, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(kX)$$

Von der Mitte nach links ordnen wir einem Ringalgebrenhomomorphismus seine Restriktion auf X zu, von der Mitte nach rechts seinen Kern. Wir erinnern den verfeinerten Funktor des Maximalspektrums $\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}} \to \mathrm{Varaff}_k$ aus [KAG] 3.4.8 und prüfen unschwer, daß unsere Bijektion sogar ein Isomorphismus von affinen k-Varietäten ist. Weiter ist der Gruppenring sogar eine kommutative Hopf-Algebra mit der Komultiplikation

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & kX & \to & kX \otimes kX \\ & \chi & \mapsto & \chi \otimes \chi \end{array}$$

alias ein Gruppenobjekt in $\mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}}$. Für die davon wegen der Verträglichkeit von Max mit endlichen Produkten [KAG] 3.4.23 induzierte Gruppenstruktur auf dem Maximalspektrum ist unsere Bijektion ein Isomorphismus von affinen algebraischen Gruppen

$$\mathrm{Ab}(X, k^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(kX)$$

Vorschau 1.7.15. Unser quasiinverser Funktor oben liefert für jeden Kring k einen volltreuen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Hopfalgebren} \\ \text{über } k \end{array} \right\} & \leftarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abelsche} \\ \text{Gruppen} \end{array} \right\} \\ kX & \leftarrow\!\shortmid & X \end{array}$$

Er landet in den kommutativen kokommutativen Hopfalgebren und bildet endlich erzeugte abelsche Gruppen auf ringendliche Hopfalgebren ab. Er liefert weiter eine Äquivalenz zwischen endlich erzeugten abelschen Gruppen und solchen Hopfalgebren über k, die isomorph sind zu Quotienten von Laurentpolynomen in mehreren Veränderlichen $k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$. In der Sprache der Gruppenschemata bedeutet das insbesondere für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagonalisierbare affine} \\ \text{Gruppenschemata über } k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Endlich erzeugte} \\ \text{abelsche Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Ergänzung 1.7.16. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X ist nach [LA2] 4.4.5 isomorph zu einem Produkt von zyklischen Gruppen von Primpotenzordnung. Der Gruppenring kX ist isomorph zum Tensorprodukt der Gruppenringe der Faktoren und ist nach [KAG] 3.1.5 nilpotentfrei genau dann, wenn alle Tensorfaktoren es sind. Nun haben wir jedoch $k[t]/\langle t^q - 1\rangle \xrightarrow{\sim} k(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ vermittels der Abbildung, die t auf den natürlichen Erzeuger der zyklischen Gruppe in ihrem Gruppenring abbildet, und die linke Seite ist genau dann nilpotentfrei, wenn das Polynom $t^q - 1$ keine mehrfachen Nullstellen in k hat, als da heißt, für q teilerfremd zur Charakteristik von k.

Definition 1.7.17. Sei Ω eine Menge. Ein **Ω-graduierter Vektorraum** ist ein Vektorraum V mitsamt einer Familie von Untervektorräumen $(V_\omega)_{\omega \in \Omega}$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{w \in \Omega} V_\omega$. Ein Morphismus von Ω-graduierten Vektorräumen V, W ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(V_\omega) \subset W_\omega \; \forall \omega \in \Omega$.

Definition 1.7.18. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G und ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to k^\times$ in die multiplikative Gruppe des Grundkörpers von V erklärt man den zugehörigen **Gewichtsraum** als

$$V_\chi := \{v \in V \mid gv = \chi(g)v \; \forall g \in G\}$$

Satz 1.7.19 (Darstellungen von diagonalisierbaren Gruppen). *Gegeben eine diagonalisierbare affine algebraische Gruppe D mit Charaktergruppe $\mathfrak{X}(D)$ liefert das Zerlegen in Gewichtsräume eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{algebraische Darstellungen} \\ \textit{der Gruppe } D \end{array} \right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{X}(D)\textit{-graduierte} \\ k\textit{-Vektorräume} \end{array} \right\} \\ (D \looparrowright V) & \mapsto & V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(D)} V_\chi \end{array}$$

Beweis. Das folgt ohne weitere Schwierigkeiten aus dem Satz über simultane Diagonalisierbarkeit [LA2] 7.8.10. Die Details bleiben dem Leser zur Übung überlassen. □

Vorschau 1.7.20. Das ist sogar eine Äquivalenz von Schmelzkategorien im Sinne von [TSK] 1.6.1, wenn wir Verschmelzungen von Darstellungen als äquivariante multilineare Abbildungen verstehen wie in [TSK] 2.2.14 und Verschmelzungen von Ω-graduierten Vektorräumen als homogene multilineare Abbildungen wie in [TSK] 1.3.23.

Definition 1.7.21. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer diagonalisierbaren affinen algebraischen Gruppe D bezeichnet man mit

$$\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}_D(V) := \{\chi \in \mathfrak{X}(D) \mid V_\chi \neq 0\}$$

die Menge aller Charaktere unserer Gruppe, die in unserer Darstellung auftreten, und nennt die Elemente dieser Menge die **Gewichte von** V. Die Notation geht auf französisch „poids“ zurück.

Satz 1.7.22 (Starrheit von diagonalisierbaren Gruppen). *Seien D, T diagonalisierbare affine algebraische Gruppen, V eine zusammenhängende affine Varietät und*

$$\Phi : V \times D \to T$$

ein Morphismus derart, daß die Abbildung $\Phi_v : D \to T$, $g \mapsto \Phi(v, g)$ für alle $v \in V$ ein Gruppenhomomorphismus ist. So ist Φ_v unabhängig von v.

Beweis. Man betrachte die Verknüpfung Φ^* des Komorphismus $\Phi^\sharp$ mit der kanonischen Identifikation, also die Verknüpfung

$$\mathcal{O}(T) \;\to\; \mathcal{O}(V \times D) \;\stackrel{\sim}{\to}\; \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(D)$$

Gegeben $h \in \mathcal{O}(T)$ haben wir $\Phi^*(h) = f_1 \otimes \chi_1 + \ldots + f_n \otimes \chi_n$ mit $\chi_i \in \mathfrak{X}(D)$ paarweise verschieden. Ist $h = \chi \in \mathfrak{X}(T)$ ein Charakter, so muß $\Phi_v^\sharp(\chi)$ für jedes $v \in V$ ein Charakter sein, also muß an jeder Stelle $v \in V$ genau ein f_i den Wert Eins annehmen und die anderen den Wert Null. Da V zusammenhängend ist, folgt $\Phi^*(\chi) = 1 \otimes \chi_i$ für ein i. Mithin ist für jeden Charakter χ sein Bild $\Phi_v^\sharp(\chi)$ unter den Komorphismen der Φ_v unabhängig von v. Da die Charaktere von T bereits $\mathcal{O}(T)$ erzeugen, ist damit $\Phi_v^\sharp$ unabhängig von v und dann auch Φ_v selbst. □

Übungen

Übung 1.7.23. Eine kommutative affine algebraische Gruppe, in der jedes Element halbeinfach ist, ist diagonalisierbar.

Übung 1.7.24. Ein Morphismus $D \to T$ von diagonalisierbaren Gruppen ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn die zugehörige Abbildung auf den Charaktergruppen eine Surjektion $\mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(D)$ induziert.

Übung 1.7.25.

1. Eine Sequenz $T \to D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik Null ist genau dann exakt, wenn die Sequenz der zugehörigen Charaktergruppen $\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(T)$ exakt ist;

2. Gegeben ein Homomorphismus $D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik $p > 0$ mit Kern $K \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\, D$ besteht der Kern der Einschränkung $\mathfrak{X}(D) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$ aus allen $\chi \in \mathfrak{X}(D)$ mit $p^n\chi \in \operatorname{im}(\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D))$ für hinreichend großes n;

3. Eine Sequenz $T \to D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik $p > 0$ ist genau dann exakt, wenn die Sequenz der zugehörigen Charaktergruppen $\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(T)$ Komposition Null hat und in der Mitte $(\ker/\operatorname{im})$ eine endliche p-Gruppe ist.

Übung 1.7.26. Seien $G \supset D$ eine affine algebraische Gruppe und eine diagonalisierbare abgeschlossene Untergruppe. Man zeige, daß jeder Charakter von D in mindestens einer Darstellung von G als Gewicht vorkommt.

1.8 Darstellungen von $\mathrm{SL}(2; k)$

1.8.1. Dieser Abschnitt besteht weitgehend aus Übungen. Verschiedene Teile dieser Übungen werden später bei der Diskussion von Wurzelsystemen und reduktiven Gruppen benötigt. Daneben scheinen mir diese Inhalte aber auch als Beispielmaterial wichtig.

Satz 1.8.2 (**Algebraische Darstellungen von** $\mathrm{SL}(2)$). *Für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $T \subset B \subset \mathrm{SL}(2; k)$ der Torus der Diagonalmatrizen sowie die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Determinate Eins gilt:*

1. *Gegeben ein Erzeuger $\varepsilon \in \mathfrak{X}(T)$ der Gruppe der Charaktere von T erhalten wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Irreduzible algebraische Darstellungen} \\ \textit{von } \mathrm{SL}(2; k) \textit{ bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{N}$$

durch die Vorschrift $L \mapsto \sup\{n \mid L_{n\varepsilon} \neq 0\}$, die in Worten jeder irreduziblen Darstellung L die maximale natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zuordnet, für die $n\varepsilon$ ein T-Gewicht von L ist;

2. *Wählen wir den Charakter $\varepsilon : T \xrightarrow{\sim} k^\times$, $\operatorname{diag}(c, c^{-1}) \mapsto c$ als Erzeuger der Charaktergruppe von T, so ist der zum maximalen n aus Teil 1 gehörige Gewichtsraum $L_{n\varepsilon}$ die eindeutig bestimmte B-stabile Gerade von L;*

3. *In der von der Operation auf k^2 induzierten Operation von $\mathrm{SL}(2; k)$ auf $\mathcal{O}(k^2) \cong k[X, Y]$ haben die Unterdarstellungen $k[X, Y]^{(m)}$ der homogenen Polynome vom Grad m jeweils genau eine irreduzible Unterdarstellung L, und deren B-stabile Gerade hat das Gewicht $m\varepsilon$;*

4. *Im Fall der Charakteristik Null ist sogar $k[X, Y]^{(m)}$ selbst irreduzibel.*

Beweis. Der Beweis dieser Aussagen ist der Inhalt der folgenden Übungen. □

Übungen

Übung 1.8.3. $(k = \bar{k})$. Sei $B = B_\chi = k \rtimes T$ das semidirekte Produkt der additiven Gruppe mit einem Torus, mit einer Verknüpfung der Gestalt

$$(u, t)(v, s) = (u + \chi(t)v, ts)$$

für einen fest gewählten Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(T)$, so daß also der durch die Konjugation mit $s \in T$ induzierte Automorphismus von k gerade die Multiplikation mit $\chi(s)$ ist. Man zeige, daß für jede algebraische Darstellung V von B und jede T-stabile Gerade $L \subset V_\lambda$ die Summe $L \oplus \bigoplus_{n>0} V_{\lambda+n\chi}$ der Gerade L und besagter Gewichtsräume von T ein unter B stabiler Teilraum ist und daß alle T-Gewichtsräume der von L erzeugten B-Unterdarstellung von V höchstens eindimensional sind. Hinweis: 1.4.21.

Übung 1.8.4 (**Bruhat-Zerlegung für** $\mathrm{SL}(2; k)$). Man verifiziere die Zerlegung $G = B \sqcup BsB$ im Fall $G = \mathrm{SL}(2; k)$ und B der Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $s \in G$ einem beliebigen Element mit Nullen auf der Diagonalen. Das gilt sogar für einen beliebigen Körper k.

Übung 1.8.5. $(k = \bar{k})$. Seien $T \subset \mathrm{SL}(2; k)$ der Torus der Diagonalmatrizen, B die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, und $\bar{B}$ die Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen. Seien $\varepsilon : T \xrightarrow{\sim} k^\times$, $\operatorname{diag}(c, c^{-1}) \mapsto c$ besagter Erzeuger des Charaktergitters $\mathfrak{X}(T)$ und V eine algebraische Darstellung von $\mathrm{SL}(2; k)$. Man zeige:

1. Die Gruppe B ist ein semidirektes Produkt der in 1.8.3 betrachteten Art mit $\chi = 2\varepsilon$. Die Gruppe $\bar{B}$ ist ein semidirektes Produkt der in 1.8.3 betrachteten Art mit $\chi = -2\varepsilon$.

2. Für $\alpha := 2\varepsilon$ sind die Teilräume $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{n\alpha}$ und $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{n\alpha+\varepsilon}$ Unterdarstellungen von V.

3. Es gilt $\nu \in \mathrm{P}_T(V) \Rightarrow -\nu \in \mathrm{P}_T(V)$. Hinweis: Der Normalisator von T ist echt größer als sein Zentralisator.

4. Gegeben eine unter B stabile Gerade $L \subset V$ ist das k-Erzeugnis der $\bar{B}$-Bahn von $v \in L$ bereits G-stabil. Hinweis: 1.4.15.

5. Gegeben eine B-stabile Gerade $L \subset V$ ist die von L erzeugte G-Unterdarstellung enthalten in $L \oplus \bigoplus_{n>0} V_{\lambda - n\alpha}$ für $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ das Gewicht von L. Nach 3 haben wir also notwendig $\lambda \in \mathbb{N}\varepsilon$. Hinweis: 4.

6. Jede irreduzible Darstellung von $\mathrm{SL}(2;k)$ besitzt genau eine B-stabile Gerade. Hinweis: 5.

7. Haben die B-stabilen Geraden irreduzibler Darstellungen V, W von $\mathrm{SL}(2;k)$ dasselbe T-Gewicht, so sind unsere Darstellungen isomorph. Hinweis: Gegeben von Null verschiedene Vektoren v, w der jeweiligen B-stabilen Gerade betrachte man die von $(v, w) \in V \oplus W$ erzeugte G-Unterdarstellung U und zeige, daß die Projektionen auf Surjektionen von U auf V und W sind mit demselben Kern, nämlich mit Kern der größten Unterdarstellung von U, die den Gewichtsraum vom Gewicht der B-stabilen Gerade nicht trifft.

8. In der von der Operation auf k^2 induzierten Operation von $\mathrm{SL}(2;k)$ auf $\mathcal{O}(k^2) \cong k[X,Y]$ bilden die Teilräume $k[X,Y]^{(m)}$ homogener Polynome vom Grad m Unterdarstellungen.

9. Wir erhalten eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible algebraische Darstellungen} \\ \text{von } \mathrm{SL}(2;k) \text{, bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}\varepsilon$$

   durch die Vorschrift, die jeder irreduziblen Darstellung das T-Gewicht ihrer eindeutig bestimmten B-stabilen Gerade zuordnet. Die Umkehrabbildung ordnet einem Gewicht $m\varepsilon$ mit $m \geq 0$ die eindeutig bestimmte irreduzible Unterdarstellung von $k[X,Y]^{(m)}$ zu.

10. In Charakteristik Null sind die Darstellungen $k[X,Y]^{(m)}$ alle schon selbst irreduzibel. In Charakteristik $p > 0$ ist $kX^p + kY^p \subset k[X,Y]^{(p)}$ die eindeutig bestimmte irreduzible Unterdarstellung.

Übung 1.8.6 (**Vollständige Reduzibilität in Charakteristik Null**). In Charakteristik Null ist jede Darstellung der Gruppe $\mathrm{SL}(2;k)$ isomorph zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen. Hinweis: Wir können uns mit den Methoden von [NAS] 2.3.4 auf den Fall einer endlichdimensionalen Darstellung V beschränken. Dann gibt es m mit $V_{m\varepsilon} \neq 0$ aber $V_{n\varepsilon} = 0$ für alle $n > m$. Jede

Gerade in $V_{m\varepsilon}$ erzeugt eine Unterdarstellung, die nach 1.8.3 höchstens eindimensionale Gewichtsräume haben kann und folglich irreduzibel sein muß. Dasselbe gilt für die kontragrediente Darstellung V^*.

1.8.7. Ganz allgemein vereinbaren wir, daß wir unter einer **regulären Abbildung** einer affinen Varietät in einen unendlichdimensionalen Vektorraum eine Abbildung verstehen wollen, deren Bild einen endlichdimensionalen Teilraum erzeugt und die als Abbildung dorthin ein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Ergänzende Übung 1.8.8. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : H \to G$ von affinen algebraischen Gruppen und eine algebraische Darstellung W von G erhalten wir durch **Restriktion** eine algebraische Darstellung $\operatorname{res}^\varphi W = \operatorname{res}_G^H W$ von H. Für ihren Komorphismus gilt $\Delta_{\operatorname{res}^\varphi W} = (\varphi^\sharp \otimes \operatorname{id}_W) \circ \Delta_W$. Bezeichnet G-Mod die Kategorie der algebraischen Darstellungen von G, so ist die Restriktion ein exakter Funktor

$$\operatorname{res}_G^H : G\text{-Mod} \to H\text{-Mod}$$

Er hat einen Rechtsadjungierten ind_H^G, die **Induktion**. Ganz analog zum topologischen Fall **??** kann die induzierte Darstellung konstruiert werden, indem wir den Vektorraum

$$\operatorname{ind}_H^G V := \{f : G \to V \text{ regulär} \mid f(\varphi(h)x) = hf(x)\ \forall h \in H, x \in G\}$$

aller H-äquivarianten regulären Abbildungen von G nach V betrachten und darauf eine G-Operation erklären durch die Vorschrift $(gf)(x) = f(xg)\ \forall g, x \in G$. Ganz genauso wie in [**?**] **??** liefern für jede endlichdimensionale algebraische Darstellung E von G die Isomorphismen $\operatorname{res}_G^H(E \otimes_k W) \xrightarrow{\sim} E \otimes_k (\operatorname{res}_G^H W)$ kanonische Isomorphismen

$$\operatorname{ind}_H^G \operatorname{Hom}_k(E, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(E, \operatorname{ind}_H^G M)$$

Wir können sie durch Übergang zum Dualraum von E umschreiben zu kanonischen Isomorphismen

$$\operatorname{ind}_H^G(F \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} F \otimes_k (\operatorname{ind}_H^G V)$$

Durch Übergang zu Kolimites erhalten wir derartige kanonische Isomorphismen sogar für beliebige, nicht notwendig endlichdimensionale algebraische Darstellungen F von G. Sie heißen die **Tensoridentitäten**.

Ergänzende Übung 1.8.9. Man zeige, daß unsere Darstellungen $k[X, Y]^{(m)}$ aus Übung 1.8.5 induziert sind von eindimensionalen Darstellungen von B.

1.9 Tannaka-Krein-Dualität*

Proposition 1.9.1. *Ist $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine kompakte Untergruppe, so gibt es Polynome in den Matrixeinträgen $f_1,\dots,f_r \in \mathbb{R}[X_{ij}]$ mit*

$$G = \{A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \mid f_\rho(A) = 0 \;\forall \rho\}$$

1.9.2. Dieser Satz ist eine erste Formulierung der Erkenntnis, daß kompakte Liegruppen recht eigentlich algebraische Objekte sind.

Beweis. Wir betrachten auf $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ die Zariski-Topologie im Sinne von [KAG] 1.1.15 und müssen in den dort eingeführten Notationen $G = \bar{G}$ zeigen, wobei sich der Abschluß auf die Zariski-Topologie von $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ bezieht. In der Tat bedeutet diese Gleichung gerade, daß G die Nullstellenmenge seines Verschwindungsideals ist, in Formeln $G = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(G))$. Da aber das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(G)$ von G endlich erzeugt sein muß in $\mathbb{R}[X_{ij}]$ nach dem Hilbert'schen Basissatz, folgt $G = \mathcal{Z}(f_1,\dots,f_r)$ für ein endliche Familie von Polynomen $f_1,\dots,f_r$. Die Proposition erweist sich damit als eine Umformulierung des Satzes, den wir gleich im Anschluß beweisen. □

Satz 1.9.3. *Jede metrisch kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ ist in Bezug auf die Zariski-Topologie abgeschlossen in $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$.*

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß mit einer metrisch kompakten Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auch ihr Zariski-Abschluß $\bar{G} \underset{\mathrm{A}}{\subset} \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine metrisch kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ ist. Indem wir ein invariantes Skalarprodukt wählen, dürfen wir ja ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G \subset \mathrm{O}(n)$ annehmen, und da $\mathrm{O}(n)$ Zariski-abgeschlossen ist in $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$, folgt $\bar{G} \subset \mathrm{O}(n)$. Folglich ist auch $\bar{G}$ metrisch kompakt. Weiter ist mit G auch $\bar{G}$ stabil unter dem Transponieren von Matrizen und enthält folglich mit jedem Element auch dessen Inverses. Und schließlich impliziert $a \in G$ sofort $a \cdot G \subset G$ und $a \cdot \bar{G} \subset \bar{G}$ und dann folgt aus $b \in \bar{G}$ bereits $G \cdot b \subset \bar{G}$ und so $\bar{G} \cdot b \subset \bar{G}$ und wir erkennen, daß $\bar{G}$ unter der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Mithin ist $\bar{G} \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine metrisch kompakte Untergruppe. Nach [TM] 4.9.13 haben wir nun den unteren Isomorphismus in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}[X_{ij}]/\mathcal{I}(\bar{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}(\bar{G};\mathbb{R}) \\
\| & & \downarrow \\
\mathbb{R}[X_{ij}]/\mathcal{I}(G) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}(G;\mathbb{R})
\end{array}$$

Die Restriktion von $\bar{G}$ auf G induziert folglich eine Bijektion zwischen den Räumen der Matrixkoeffizienten beider Gruppen. Dasselbe folgt für komplexwertige Matrixkoeffizienten. Nun ist aber eine endlichdimensionale stetige Darstellung V

unserer kompakten Hausdorffgruppe G, für die die Matrixkoeffizientenabbildung $V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \to \mathcal{C}(G)$ injektiv ist, nach [TM] 4.9.17 bereits irreduzibel. Es folgt, daß die Restriktion von $\bar{G}$ auf G eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen einfacher stetiger Darstellungen liefern muß. Damit folgt, daß die Restriktion $\mathcal{R}(\bar{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G)$ auch mit den normierten invarianten Integralen auf $\bar{G}$ beziehungsweise G verträglich sein muß. Dann muß aus Stetigkeitsgründen auch die Restriktion $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(G)$ mit den normierten invarianten Integralen verträglich sein. Wäre aber $\bar{G} \neq G$, so gäbe es eine von Null verschiedene stetige Funktion $f : \bar{G} \to \mathbb{R}$ mit $f|_G = 0$, und das stünde im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß die L^2-Norm stetiger Funktionen bei der Restriktion $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(G)$ erhalten bleibt. □

Definition 1.9.4. Gegeben eine topologische Gruppe G bezeichne

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(G) \subset \mathcal{R}(G) \subset \mathcal{C}(G)$$

den Ring der reellwertigen darstellenden Funktionen im Ring der komplexwertigen darstellenden Funktionen im Ring aller stetigen Funktionen.

Lemma 1.9.5. *Gegeben topologische Gruppen G, H definiert der offensichtliche Homomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{R}(H) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G \times H)$$

Beweis. Die Injektivität gilt für beliebige Funktionen. Das einzige Problem ist die Surjektivität. Andererseits haben wir für jede stetige endlichdimensionalen Darstellung

$$\rho : G \times H \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$$

die Matrizengleichung $\rho(g, h) = \rho(g, 1)\rho(1, h)$ und erhalten sofort die Surjektivität im Lemma. □

Lemma 1.9.6. *Das Vorschalten der Verknüpfungsabbildung einer topologischen Gruppe liefert einen Ringhomomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G \times G)$$

Beweis. Ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ eine stetige Darstellung, so ist die Matrix $\rho(xy)$ das Produkt der Matrizen $\rho(x)$ und $\rho(y)$ und ihre Koeffizienten liegen folglich im Bild von $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$. □

Übungen

Übung 1.9.7. Man zeige: Für jede topologische Gruppe G ist $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(G)$ beziehungsweise $\mathcal{R}(G)$ ein Gruppenobjekt in der opponierten Kategorie zur Kategorie der $\mathbb{R}$-Kringe beziehungsweise der $\mathbb{C}$-Kringe.

Übung 1.9.8. Der Ring der komplexwertigen darstellenden Funktionen auf der Gruppe $\mathbb{Z}$ mit ihrer diskreten Topologie wird als $\mathbb{C}$-Ringalgebra erzeugt von den Funktionen $n \mapsto \lambda^n$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ und von der Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

2 Morphismen von Varietäten mit Anwendungen

Ich setzte von nun an Grundlagen der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie im Umfang von [KAG] 1.1.1 bis [KAG] 6.12.6 voraus. Der Leser mag das Konzept allgemeiner Varietäten zwar vorerst noch ignorieren und sie sich als naive affine Varietäten denken, aber spätestens bei der Konstruktion der Quotienten 3.6.2 wird er mit allgemeinen Varietäten umgehen müssen, wie wir sie in [KAG] 6.4.2 einführen. Nach [KAG] 6.4.6 erbt jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge einer Varietät in natürlicher Weise die Struktur einer Varietät. Nach [KAG] 6.11.4 existieren in der Kategorie der Varietäten endliche Produkte und der Einbettungsfunktor von der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie der Varietäten ist verträglich mit endlichen Produkten.

2.1 Komponenten algebraischer Gruppen

2.1.1. Ich beginne mit Erinnerungen. Ein topologischer Raum heißt **irreduzibel**, wenn er nicht leer ist und nicht als Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen geschrieben werden kann. Eine affine Varietät X ist nach [KAG] 4.2.1 genau dann irreduzibel, wenn ihr Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ein Integritätsring ist. Die maximalen irreduziblen Teilmengen einer Varietät heißen ihre **irreduziblen Komponenten**. Jeder topologische Raum ist die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten und diese sind stets abgeschlossen. Jede Varietät besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten nach [KAG] 4.1.12. Jedes endliche Produkt von irreduziblen Varietäten ist nach [KAG] 6.11.5 wieder irreduzibel.

Proposition 2.1.2 (Komponenten algebraischer Gruppen).
1. *Die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe sind genau ihre Zusammenhangskomponenten;*
2. *Die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements alias* **Einskomponente** *einer algebraischen Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe;*
3. *Die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe sind genau die Nebenklassen ihrer Einskomponente.*

Beweis. Sei G unsere algebraische Gruppe und $G = G_1 \cup \ldots \cup G_r$ ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten. Sicher gilt $G_i \cap G_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, sonst gehörte ein Gruppenelement zu mehr als einer Komponente, also gehörte jedes Gruppenelement zu mehr als einer Komponente und dann hätten wir $G = G_2 \cup \ldots \cup G_r$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Zerlegung. Bezeichne nun G° die Einskomponente einer algebraischen Gruppe G. Dann muß $\operatorname{mult}(G^\circ \times G^\circ)$ irreduzibel sein, also in einer Komponente liegen, also in G°. Dasselbe gilt für $\operatorname{inv}(G^\circ)$.

Es folgt, daß G° eine abgeschlossene Untergruppe ist. Wegen $gG^\circ g^{-1} \ni 1$ folgt $G^\circ = gG^\circ g^{-1}$ und G° ist sogar Normalteiler. Die Nebenklassen von G° sind irreduzible Komponenten von G. Da sie G überdecken, kann es keine weiteren Komponenten geben. □

Lemma 2.1.3. *Jede abgeschlossene Untergruppe $H \overset{\mathrm{A}}{\subset} G$ von endlichem Index einer algebraischen Gruppe hat dieselbe Einskomponente, in Formeln*

$$|G/H| < \infty \quad \Rightarrow \quad H^\circ = G^\circ$$

Beweis. Seien $H \overset{\mathrm{A}}{\subset} G$ unsere algebraischen Gruppen. Hat H endlichen Index r in G, so folgt $G = Hg_1 \sqcup \ldots \sqcup Hg_r$ für endliches r, wobei wir ohne Einschränkung $g_1 = 1$ annehmen dürfen. Nach dem vorhergehenden haben wir auch eine endliche Zerlegung $H = H^\circ h_1 \sqcup \ldots \sqcup H^\circ h_s$, wobei wir ohne Einschränkung $h_1 = 1$ annehmen dürfen. Zusammen ergibt sich eine Zerlegung von G als endliche disjunkte Vereinigung von rs irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $H^\circ g_i h_j$. Diese Zerlegung hinwiederum impliziert $H^\circ = G^\circ$. □

2.2 Irreduzibles Erzeugen

2.2.1. Ich beginne mit einer weiteren Erinnerung und Umformulierung einer allgemeinen Aussage über Bilder von Morphismen von Varietäten.

Satz 2.2.2 (über Bilder von Morphismen). *Gegeben ein Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ gibt es stets eine Teilmenge $U \subset \varphi(X)$, die offen und dicht ist im Abschluß des Bildes $\overline{\varphi(X)}$, also $U \overset{\circ}{\subset} \overline{\varphi(X)}$ und $\overline{U} = \overline{\varphi(X)}$.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem affinen Fall, den wir in [KAG] 5.4.12 behandelt hatten. □

Lemma 2.2.3. *Seien G eine algebraische Gruppe und $U, V \subset G$ mit U dicht und V offen und nichtleer. So gilt $UV = G$.*

Beweis. Gegeben $g \in G$ gilt $gV^{-1} \cap U \neq \emptyset$. Es gibt also $v \in V$ und $u \in U$ mit $gv^{-1} = u$ alias $g = uv$. □

Satz 2.2.4 (Bilder von Homomorphismen algebraischer Gruppen). *Jeder Homomorphismus von algebraischen Gruppen $\varphi : G \to H$ hat abgeschlossenes Bild und die Einskomponente seines Bildes ist das Bild der Einskomponente, in Formeln*

$$\varphi(G)^\circ = \varphi(G^\circ)$$

Beweis. Sei $\varphi : G \to H$ unser Homomorphismus. Nach 2.2.2 gibt es $U \subset \varphi(G)$ mit U offen und dicht in $\overline{\varphi(G)}$. Nach 1.1.32 ist $\overline{\varphi(G)} \subset H$ eine Untergruppe. Nach 2.2.3 folgt erst $\overline{\varphi(G)} = U^2$ und dann $\overline{\varphi(G)} = \varphi(G)^2 = \varphi(G)$. Das zeigt die erste Behauptung. Da nun $\varphi(G^\circ) \subset \varphi(G)$ eine abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index sein muß, folgt $\varphi(G^\circ) \supset \varphi(G)^\circ$ aus 2.1.3. Wegen der Irreduzibilität von $\varphi(G^\circ)$ ergibt sich dann schließlich $\varphi(G^\circ) = \varphi(G)^\circ$. □

Satz 2.2.5 (Irreduzibles Erzeugen). *Sei G eine algebraische Gruppe und sei $(\varphi_i : X_i \to G)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen irreduzibler Varietäten nach G, deren Bilder alle das neutrale Element enthalten, in Formeln $1 \in \varphi_i(X_i)\ \forall i \in I$. So gilt:*

1. *Die von diesen Bildern erzeugte Untergruppe $H := \langle \varphi_i(X_i) \mid i \in I \rangle$ ist abgeschlossen in G;*

2. *Es gibt endliche Folgen $i(1), \ldots, i(r) \in I$ und $\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(r) \in \{1, -1\}$ mit*

$$H = \varphi_{i(1)}(X_{i(1)})^{\varepsilon(1)} \ldots \varphi_{i(r)}(X_{i(r)})^{\varepsilon(r)}$$

Beispiele 2.2.6. Das Beispiel der einelementigen Familie $\varphi : \{0, 1\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ zeigt, daß die Forderung X_i irreduzibel wesentlich ist: In diesem Fall wäre $H = \mathbb{Z}$ nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie. Das Beispiel der einelementigen Familie $\varphi : \{1\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ zeigt, daß auch die Forderung wesentlich ist, $\varphi_i(X_i)$ möge jeweils das neutrale Element von G enthalten.

Beweis. Indem wir notfalls I verdoppeln, dürfen wir annehmen, daß mit φ_i auch $\operatorname{inv} \circ \varphi_i$ zu unserer Familie gehört. Gegeben eine endliche Folge $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to I$ betrachte man nun die Varietät $Y_\alpha := X_{\alpha(1)} \times \ldots \times X_{\alpha(n)}$ und den Morphismus $\varphi_\alpha : Y_\alpha \to G$ gegeben durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi_{\alpha(1)}(x_1) \ldots \varphi_{\alpha(n)}(x_n)$. Sicher haben wir dann

$$H = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(Y_\alpha)$$

wo die Vereinigung wie angedeutet über alle endlichen Folgen zu bilden ist. Da das neutrale Element zu den Bildern all unserer Morphismen gehört, haben wir auch $\varphi_\alpha(Y_\alpha) \subset \varphi_{\alpha\beta}(Y_{\alpha\beta}) \supset \varphi_\beta(Y_\beta)$ mit der Notation $\alpha\beta$ für das Hintereinanderschreiben zweier endlicher Folgen α, β. Da alle Y_α irreduzibel sind, müssen auch alle $\overline{\varphi_\alpha(Y_\alpha)}$ irreduzibel sein. Da die Länge echt aufsteigender Ketten irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von G begrenzt ist durch die Krulldimension von G, gibt es ein γ mit $\overline{\varphi_\alpha(Y_\alpha)} \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}\ \forall \alpha$. Es folgt $H \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}$. Nun enthält $\varphi_\gamma(Y_\gamma)$ jedoch nach 2.2.2 eine offene dichte Teilmenge U seines Abschlusses und wir finden ein Sandwich

$$U \subset \varphi_\gamma(Y_\gamma) \subset H \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}$$

Dann ist erst recht U offen und dicht in $\overline{H}$ und wegen 2.2.3 folgt $U^2 = \bar{H}$, also $H = \bar{H} = \varphi_{\gamma\gamma}(Y_{\gamma\gamma})$. □

Definition 2.2.7. Gegeben Teilmengen A, B einer Gruppe G bezeichne (A, B) die von allen Kommutatoren $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe (G, G) heißt auch die **derivierte Gruppe**.

2.2.8. Sind A und B Normalteiler, so ist auch (A, B) ein Normalteiler. Die derivierte Gruppe ist der kleinste Normalteiler derart, daß wir beim Wegteilen eine abelsche Gruppe erhalten.

Korollar 2.2.9. *Seien G eine algebraische Gruppe und $H, K \subset G$ Untergruppen mit H zusammenhängend und abgeschlossen. So ist auch der Kommutator (H, K) von H und K zusammenhängend und abgeschlossen.*

2.2.10. Gegeben eine zusammenhängende algebraische Gruppe G ist insbesondere ihre derivierte Gruppe (G, G) abgeschlossen in G und zusammenhängend.

Beweis. Wir betrachten für alle $b \in K$ den Morphismus $\varphi_b : H \to G$, $h \mapsto hbh^{-1}b^{-1}$. Per definitionem ist (H, K) das Gruppen-Erzeugnis der Bilder der φ_b. Das Korollar folgt damit aus Satz 2.2.5 über das irreduzible Erzeugen. □

Korollar 2.2.11. *Gegeben eine Familie $(G_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppen einer algebraischen Gruppe ist das Gruppenerzeugnis H der G_i abgeschlossen in G und es gibt eine endliche Folge $i(1), \ldots, i(n)$ in der Indexmenge I mit*

$$H = G_{i(1)} \ldots G_{i(n)}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 2.2.5 über das irreduzible Erzeugen. □

Satz 2.2.12 (Invertierbare Elemente algebraischer Monoide). *In jedem algebraischen Monoid bilden die invertierbaren Elemente eine offene Teilmenge.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß es eine offene Umgebung des neutralen Elements gibt, die aus invertierbaren Elementen besteht. Sei zunächst G ein irreduzibles algebraisches Monoid und $d = \operatorname{kdim} G$ seine Dimension. Die Verknüpfung $G \times G \to G$ hat keine leere Faser. Nach unseren Erkenntnissen [KAG] 5.9.12 über die Mindestdimension von Fasern hat folglich jede irreduzible Komponente jeder Faser mindestens dieselbe Dimension wie G. Sei $Z \mathrel{\not\!\!\!\subset\!\!\!\!\!\!\triangle} G \times G$ eine irreduzible Komponente der Faser über e mit $(e, e) \in Z$. Die Projektion auf die erste Komponente $\mathrm{pr}_1 : Z \to G$ hat eine einelementige Faser über e und muß folglich wieder nach [KAG] 5.9.12 dominant sein. Das Bild $\mathrm{pr}_1(Z) \subset G$ umfaßt folglich eine offene dichte Teilmenge $U \circledsubseteq G$ und nach Konstruktion gibt es für alle $x \in U$ ein

$y \in G$ mit $xy = e$. Ebenso finden wir eine offene dichte Teilmenge $V \Subset G$ derart, daß es für alle $x \in V$ ein $z \in G$ gibt mit $zx = e$. Alle Elemente der offenen dichten Teilmenge $U \cap V \Subset G$ sind nach [GR] 2.2.16 also invertierbar. Da Produkte invertierbarer Elemente wieder invertierbar sind, ist für $x \in U \cap V$ die verschobene Menge $x^{-1}(U \cap V)$ eine offene Umgebung des neutralen Elements, die aus invertierbaren Elementen besteht. Das erledigt den Fall eines irreduziblen Monoids. Ist G nicht notwendig irreduzibel, so zeigen wir zunächst, daß jede irreduzible Komponente $K \overset{\vartriangle}{\subset} G$ durch das neutrale Element ein Untermonoid ist. In der Tat muß die Verknüpfung $K \times K$ in eine irreduzible Komponente von G abbilden, die K umfaßt und die folglich mit K zusammenfällt. Nach dem bereits Bewiesenen bilden also die invertierbaren Elemente von K eine offene dichte Teilmenge $K^\times \Subset K$. Andererseits gilt für jede weitere irreduzible Komponente $L \overset{\vartriangle}{\subset} G$ mit demselben Argument $KL = L$ und aus $L \cap K^\times \neq \emptyset$ folgt in derselben Weise $L = KL = K$. Der Satz folgt. $\square$

Übungen

Übung 2.2.13. Der von einer irreduziblen das neutrale Element enthaltenden Teilmenge einer algebraischen Gruppe erzeugte Normalteiler ist stets abgeschlossen.

Übung 2.2.14. Man zeige: Die Charaktergruppe einer affinen algebraischen Gruppe ist stets endlich erzeugt. Hinweis: Für jede endlich ezeugte Untergruppe $X \subset \mathfrak{X}(G)$ erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus von algebraischen Gruppen $\varphi_X : G \twoheadrightarrow \mathfrak{D}(X)$ und für $Y \supsetneq X$ gilt $\ker \varphi_Y \subsetneq \ker \varphi_X$.

2.3 Operationen algebraischer Gruppen

Definition 2.3.1. Sei M ein algebraisches Monoid. Eine **M-Varietät** ist eine Varietät X mit einer M-Operation $M \times X \to X$ derart, daß die Wirkungsabbildung $M \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ ein Morphismus ist.

Definition 2.3.2. Sei M ein abstraktes Monoid. Eine **schwache M-Varietät** ist eine Varietät X mit einer Operation von M durch Homomorphismen von Varietäten $X \to X$.

2.3.3. Sei X eine schwache M-Varität. Gegeben Teilmengen $S, T \subset X$ erklärt man den **Transporteur von S nach T** als die Teilmenge

$$\operatorname{Trans}_M(S, T) := \{g \in M \mid gS \subset T\}$$

Sicher gilt $\operatorname{Trans}_M(S, T) \subset \operatorname{Trans}_M(S, \bar{T}) = \operatorname{Trans}_M(\bar{S}, \bar{T})$.

2.3.4. Sei X eine M-Varität. Der Transporteur in eine abgeschlossene Teilmenge $A \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} X$ ist abgeschlossen als der Schnitt $\operatorname{Trans}_M(S, A) = \bigcap_{x \in S} \operatorname{Trans}_M(x, A)$ der Urbilder von A unter dem Morphismus $M \to X$, $g \mapsto gx$. Speziell ist für $A \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} X$ der **Stabilisator**

$$\operatorname{Stab}_M(A) := \operatorname{Trans}_M(A, A)$$

abgeschlossen und für $x \in X$ ist sein Isotropiemonoid $M_x = \operatorname{Stab}_M(\{x\})$ abgeschlossen. Schließlich ist für jede Teilmenge $S \subset X$ ihr **Zentralisator**

$$\mathrm{Z}_M(S) := \{g \in M \mid gx = x \; \forall x \in S\} = \bigcap_{x \in S} M_x$$

abgeschlossen als der Schnitt der Isotropiemonoide ihrer Elemente.

2.3.5. Ich erinnere daran, daß nach [KAG] 6.12.1 eine Varietät X **separiert** heißt, wenn die Diagonale im Produkt unserer Varietät mit sich selber eine abgeschlossene Teilmenge $\Delta \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} X \times X$ ist.

2.3.6 (**Fixpunktmengen in separierten M-Varietäten**). Sei M ein Monoid. Gegeben eine separierte schwache M-Varietät X und eine Teilmenge $H \subset M$ ist die Menge der Fixpunkte

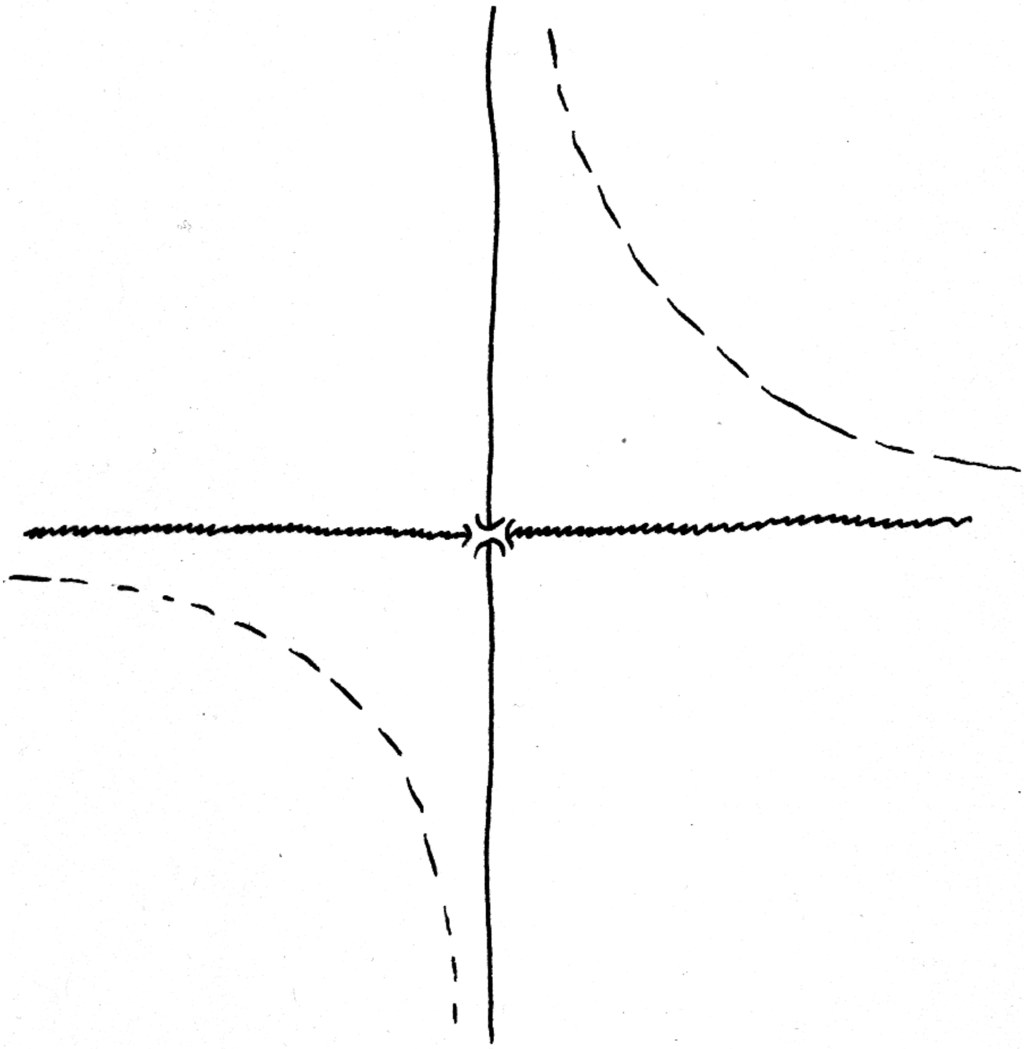
$$X^H := \{x \in X \mid hx = x \; \forall h \in H\} = \bigcap_{h \in H} X^h$$

abgeschlossen in X. In der Tat ist jedes X^h ist abgeschlossen als das Urbild der Diagonale unter dem Morphismus $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, hx)$, vergleiche [KAG] 6.12.13.

Satz 2.3.7 (**Bahnen sind Varietäten**). *Gegeben eine Varietät mit einer algebraischen Operation einer algebraischen Gruppe ist jede Bahn offen in ihrem Abschluß.*

Beweis. Seien G unsere Gruppe und X unsere G-Varietät. Für jeden Punkt $x \in X$ behaupten wir $Gx \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} \overline{Gx}$. Um das zu zeigen, betrachten wir den Morphismus $\varphi : G \to X$, $g \mapsto gx$. Nach 2.2.2 umfaßt auch hier das Bild $\varphi(G) = Gx$ eine offene dichte Teilmenge seines Abschlusses, in Formeln $\exists U \subset Gx$ mit $U \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} \overline{Gx}$ und $\bar{U} = \overline{Gx}$ und damit insbesondere $U \neq \emptyset$. Jetzt brauchen wir, daß eine Gruppe operiert und nicht nur ein Monoid, und damit folgt

$$Gx = \bigcup_{g \in G} gU \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} \overline{Gx} \qquad \square$$



Operiert die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ auf $\mathbb{C}^2$ durch $t \mapsto \operatorname{diag}(t, t^{-1})$, so sind die Bahnen die Hyperbeln $xy = c$ für festes $c \in \mathbb{C}^\times$, die x-Achse ohne Ursprung, die y-Achse ohne Ursprung, und der Ursprung selber. Die beiden Achsen ohne Ursprung sind nicht abgeschlossen, aber offen in ihrem Abschluß. Die anderen Bahnen sind bereits abgeschlossen.

Korollar 2.3.8 (Existenz abgeschlossener Bahnen). *In jeder nichtleeren Varietät mit einer Operation einer algebraischen Gruppe besitzt unsere Gruppe mindestens eine abgeschlossene Bahn.*

Beweis. Sei G unsere algebraische Gruppe und X unsere G-Varietät. Für jeden Punkt $x \in X$ ist seine Bahn $Gx \overset{\circ}{\subset} \overline{Gx}$ eine offene dichte Teilmenge ihres Abschlusses. Das Komplement $\overline{Gx} \backslash Gx$ ist damit abgeschlossen, G-stabil und von echt kleinerer Dimension als Gx. Mithin muß jede Bahn kleinstmöglicher Dimension abgeschlossen sein. □

Proposition 2.3.9 (Operationen unipotenter Gruppen auf affinen Varietäten). *Unter einer algebraischen Operation einer unipotenten Gruppe auf einer affinen Varietät sind alle Bahnen abgeschlossen.*

Beweis. Sei $U \looparrowright X$ unsere Operation. Der Raum

$$\{f \in \mathcal{O}(\overline{Ux}) \mid f|_{\overline{Ux} \backslash Ux} = 0\}$$

aller regulären Funktionen auf dem Abschluß der Bahn, die auf Komplement der Bahn verschwinden, ist stabil unter Translation mit U. Wäre die Bahn nicht abgeschlossen, so wäre dieser Raum von Funktionen nicht Null und müßte nach 1.6.2 auch eine von Null verschiedene U-invariante Funktion f enthalten. Das aber kann nicht sein, da jede U-invariante Funktion konstant ist auf $\overline{Ux}$. □

Übungen

Übung 2.3.10. Man zeige, daß im Kontext der Wirkung einer algebraischen Gruppe G auf einer Varietät X und einer abgeschlossenen Teilmenge $M \overset{\sqsubset}{\subset} X$ stets gilt

$$\mathrm{Trans}_G(M, M) = \{g \in G \mid gM = M\}$$

Insbesondere ist der Stabilisator von M, wie er oben eingeführt wird, stets eine Untergruppe, und der Stabilisator einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset G$ unter der Operation durch Konjugation ist ihr Normalisator im Sinne der Gruppentheorie, vergleiche etwa [AL] 4.3.13 oder [TF] 3.2.7.

Übung 2.3.11. Man betrachte die Operation durch Konjugation von $\mathrm{GL}(n; k)$ auf $\mathrm{Mat}(n; k)$ und zeige, daß die abgeschlossenen Bahnen genau die Bahnen der diagonalisierbaren Matrizen sind. Man bestimme in diesem Fall die Dimensionen aller Bahnen. Man bestimme genauer, wann eine Bahn im Abschluß einer anderen Bahn liegt.

Übung 2.3.12. Ist $M \searrow X$ eine affine Varietät mit der Operation eines affinen algebraischen Monoids, so existiert eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von M nebst einer äquivarianten abgeschlossenen Einbettung $X \hookrightarrow V$. Hinweis: Man argumentiere wie beim Beweis von 1.3.1. Mutige zeigen dasselbe auch ohne die Annahme M affin.

2.4 Flache Morphismen

2.4.1. Wir hatten in der kommutativen Algebra bemerkenswerte Resultate über geometrische Eigenschaften flacher Morphismen von affinen Varietäten gezeigt. Hier schreiben wir sie um auf den Fall beliebiger Varietäten. Das ist nicht weiter schwer und ermöglicht es uns, diese Aussagen so zu formulieren, wie wir sie im folgenden verwenden wollen. Ich erinnere daran daß ein Kringhomomorphismus $A \to B$ **flach** heißt, wenn die Erweiterung der Skalare $B \otimes_A : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ alias der Linksadjungierte des Restriktionsfunktors exakt ist.

Definition 2.4.2. Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten heißt **flach**, wenn für alle Punkte $x \in X$ der auf den lokalen Ringen induzierte Homomorphismus $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein flacher Ringhomomorphismus ist.

2.4.3 (**Beispiele für Flachheit**). Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten ist nach der Lokalität der Flachheit [KAG] 4.3.42 genau dann flach, wenn der zugehörige Komorphismus $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ flach ist. Jede offene Einbettung von algebraischen Varietäten ist flach. Die Projektion einer Varietät auf einen Punkt ist stets flach.

2.4.4 (**Permanenzen der Flachheit**). Die Komposition flacher Morphismen von algebraischen Varietäten ist wieder flach. Gegeben $X \to Y$ ein flacher Morphismus von algebraischen Varietäten und Z eine beliebige Varietät ist auch der induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ flach.

Satz 2.4.5 (Generische Flachheit). *Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten gibt es eine offene dichte Teilmenge $U \overset{\circ}{\subset} Y$ mit $\varphi : \varphi^{-1}(U) \to U$ flach.*

Beweis. Sind X und Y beide affin, so haben wir das in [KAG] 5.5.5 gezeigt. Die allgemeine Aussage folgt unmittelbar. □

Satz 2.4.6 (Offenheit flacher Morphismen). *Jeder flache Morphismus von algebraischen Varietäten ist offen.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem in [KAG] 5.5.9 bewiesenen Spezialfall eines Morphismus affiner Varietäten. □

Satz 2.4.7 (Flache Morphismen und Faserdimension). *Gegeben ein flacher Morphismus $\varphi : X \to Y$ von einer nichtleeren äqui-n-dimensionalen Varietät zu einer äqui-m-dimensionalen Varietät gilt $n \geq m$ und gegeben eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \overset{\mathrm{A}}{\subset} Y$ haben wir für jede irreduzible Komponente K ihres Urbilds $\varphi^{-1}(Z)$ sowohl $\overline{\varphi(K)} = Z$ als auch*

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} K = \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$$

Beweis. Im Fall affiner Varietäten hatten wir das bereits in [KAG] 5.10.5 gezeigt. Der Fall, in dem zumindest Y affin ist, folgt unmittelbar. Der allgemeine Fall ist dann auch leicht einzusehen. □

Satz 2.4.8 (Halbstetigkeit der Faserdimension). *Gegeben ein Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ ist die Funktion $\mathrm{f} : X \to \mathbb{N}$ der lokalen Faserdimension $\mathrm{f}(x) := \mathrm{kdim}_x \varphi^{-1}(\varphi(x))$ halbstetig auf X in dem Sinne, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X \mid \mathrm{f}(x) \geq n\}$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem affinen Fall [KAG] 5.10.7. □

2.4.9. Der Satz gilt für beliebige, nicht notwendig flache Morphismen. Ich habe ihn dennoch hier angefügt, da er recht eigentlich ein Korollar der vorhergehenden Sätze über generische Flachheit und Dimensionseigenschaften flacher Morphismen ist.

Definition 2.4.10. Eine Varietät mit der Operation einer algebraischen Gruppe heißt **homogen** oder ein **homogener Raum**, wenn sie aus genau einer Bahn besteht, wenn also die Gruppenwirkung transitiv ist.

Definition 2.4.11. Eine Varietät mit der Operation einer abstrakten Gruppe durch Automorphismen von Varietäten heißt **schwach homogen** oder ein **schwach homogener Raum**, wenn sie aus genau einer Bahn besteht, wenn also die Gruppenwirkung transitiv ist.

2.4.12 (**Flachheit äquivarianter Morphismen von homogenen Räumen**). Ein äquivarianter Morphismus von schwach homogenen Räumen ist stets flach. Das folgt unmittelbar aus der generischen Flachheit 2.4.5 zusammen mit der Homogenität.

Proposition 2.4.13 (Dimensionsformel). *Gegeben eine algebraische Gruppe G und eine G-Varietät X gilt für jeden Punkt $x \in X$ die Identität*

$$\mathrm{kdim}\, Gx + \mathrm{kdim}\, G_x = \mathrm{kdim}\, G$$

Beweis. Der Morphismus von homogenen Räumen $\varphi : G \to Gx$ gegeben durch $g \mapsto gx$ ist flach nach 2.4.12 als Morphismus von homogenen Räumen. Aufgrund der Homogenität sind G und Gx auch äquidimensional. Die Behauptung folgt damit aus den allgemeinen Eigenschaften flacher Morphismen 2.4.7. □

Satz 2.4.14 (Morphismen zu endlichen Körpererweiterungen). *Gegeben ein dominanter Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen Varietäten derselben Dimension gibt es eine offene nichtleere Teilmenge $V \mathrel{⊚} Y$ derart, daß gilt:*

1. *Die Faser über jedem Punkt $y \in V$ hat genau $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_{\mathrm{s}}$ Elemente;*

2. *Sowohl V als auch $\varphi^{-1}(V)$ sind affin;*

3. *$\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ ist ein freier $\mathcal{O}(V)$-Modul vom Rang $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]$.*

Beweis. Sind X und Y affin, so haben wir das bereits in [KAG] 5.4.15 gezeigt. Um uns auf diesen Fall zurückzuziehen, wählen wir eine offene dichte affine Teilmenge $W \Subset Y$ und eine offene dichte affine Teilmenge $U \Subset \varphi^{-1}(W)$. Dann finden wir eine von Null verschiedene reguläre Funktion $s \in \mathcal{O}(W)$, deren Nichtnullstellenmenge $\varphi(X \backslash U)$ nicht trifft, so daß also gilt $\varphi^{-1}(W_s) \subset U$. Schließlich nehmen wir die Nichtnullstellenmenge U_s als unser neues X und die Nichtnullstellenmenge W_s als unser neues Y und ziehen uns so auf den affinen Fall zurück. □

Proposition 2.4.15 (Morphismen mit endlichen Fasern). *Gegeben ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varietäten $\varphi : X \to Y$ mit einer nichtleeren endlichen Faser ist die Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ endlich. Ist φ zusätzlich injektiv, so ist sie rein inseparabel.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X und Y affin. Wäre die Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ nicht endlich, so folgte aus der Beschreibung der Dimension als Transzendenzgrad unmittelbar $\operatorname{kdim} X > \operatorname{kdim} Y$. Dann müßten aber alle nichtleeren Fasern unseres Morphismus nach [KAG] 5.9.12 positive Dimension haben und insbesondere unendlich sein. Hätten wir weiter für den Separabilitätsgrad unserer Körpererweiterung $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_s > 1$, so könnte φ nicht injektiv sein nach Proposition 2.4.14 über die Kardinalitäten von Fasern. □

Korollar 2.4.16 (Birationale Morphismen homogener Räume). *Ein birationaler äquivarianter Homomorphismus zwischen irreduziblen schwach homogenen Räumen ein- und derselben Gruppe ist stets ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach 2.4.14 gibt es für jeden birationalen Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen Varietäten eine offene dichte affine Teilmenge $V \Subset Y$ derart, daß φ einen Isomorphismus von Varietäten $\varphi : \varphi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V$ induziert. Homogenität zeigt den Rest. □

Satz 2.4.17 (Zariski's Hauptsatz für affine Varietäten). *Ein bijektiver birationaler Morphismus von einer affinen irreduziblen Varietät in eine normale affine Varietät ist stets ein Isomorphismus.*

2.4.18. Wir wissen aus [KAG] 7.4.21, daß jede glatte Varietät Y normal ist. Meist werden wir den Satz in diesem Fall anwenden. Wir wissen aus 2.4.15, daß ein bijektiver Morphismus von irreduziblen Varietäten stets zu einer endlichen rein inseparablen Erweiterung der Funktionenkörper führt. In Charakteristik Null ist die Annahme der Birationalität im Satz also überflüssig, da sie bereits aus der Bijektivität folgt. In positiver Charakteristik werden wir in 3.5.14 die Birationalität folgern können, wenn wir nur die Surjektivität des Differentials an einer glatten Stelle kennen.

Beispiele 2.4.19. $(k = \bar{k})$ Die Abbildung $k \to k^2$ mit $t \mapsto (t^3, t^2)$ induziert einen bijektiven Morphismus $k \xrightarrow{\sim} Y := \{(x,y) \mid x^2 = y^3\}$ auf die sogenannte „Neil'sche Parabel", der kein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist aber Y auch nicht normal. Im Fall $\operatorname{char} k = p > 0$ ist auch $\varphi : k \to k$ mit $x \mapsto x^p$ ein bijektiver Morphismus, der kein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist zwar die Zielvarietät normal, aber unser Morphismus ist nicht birational.

Beweis. Sei zunächst $\varphi : X \to Y$ ein beliebiger bijektiver Morphismus von einer beliebigen Varietät in eine affine Varietät. Mit der Beschreibung [KAG] 4.3.32 für das Bild des Primspektrums unter Kringerweiterungen sehen wir, daß die Einbettung $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ eine Surjektion $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}(Y)$ induziert. Ist Y irreduzibel und $\mathcal{O}(Y)$ normal, so sind nach [KAG] 8.1.11 die Lokalisierungen $\mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q}$ von $\mathcal{O}(Y)$ nach Primidealen der Höhe eins diskrete Bewertungsringe. Gilt also $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = 1$ und ist $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{q}$ und ist unser Morphismus birational, so induziert $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ eine Bijektion $\mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_\mathfrak{p}$ aufgrund der Maximalität diskreter Bewertungsringe [KAG] 8.1.19. Nun haben wir nach [KAG] 5.9.19 wieder aufgrund der Normalität von $\mathcal{O}(Y)$ die Gleichheit

$$\mathcal{O}(Y) = \bigcap_{\operatorname{ht}(\mathfrak{q})=1} \mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q}$$

von Teilmengen von $\mathcal{M}(Y)$. Unter $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ wird $\mathcal{O}(Y)$ also auf eine Teilmenge von $\mathcal{M}(X)$ abgebildet, die $\mathcal{O}(X)$ umfaßt. Da aber das Bild von $\mathcal{O}(Y)$ stets in $\mathcal{O}(X)$ liegt, muß $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$ induzieren. □

Ergänzung 2.4.20. Der Hauptsatz von Zariski gilt sogar, wenn man X und Y als beliebige irreduzible separierte Varietäten annimmt und fordert, daß Y normal ist in dem Sinne, daß die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{Y,y}$ normal sind für alle $y \in Y$. In dieser Allgemeinheit folgert man die Aussage leicht, wenn man zusätzlich annimmt, daß unser Morphismus offen ist, und erinnert, daß nach [KAG] 9.1.3 jeder Morphismus von einer affinen Varietät in eine separierte Varietät affin ist. Wenn man unseren Morphismus nicht offen annimmt, kenne ich keinen so einfachen Beweis. Unter Zuhilfenahme von Grothendieck-Dieudonné sollte es aber doch mit wenig zusätzlichem Aufwand zu machen sein. Wenn man die Bedingung der Separiertheit fallenläßt, erhält man ein Gegenbeispiel, indem man die „Ebene mit verdoppeltem Achsenkreuz" betrachtet und den Morphismus dorthin von einer „Ebene mit verdoppelter x-Achse und verdoppelter (y-Achse ohne Nullpunkt)".

Satz* 2.4.21 (Affinität von homogenen Räumen). *Gegeben ein surjektiver äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen $\varphi : X \to Y$ mit endlichen Fasern ist X affin genau dann, wenn Y affin ist.*

Beweis. Nach unseren Erkenntnissen 2.4.14 über Morphismen zu endlichen Körpererweiterungen und Homogenität gibt es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen V_i mit affinen Urbildern $\varphi^{-1}(V_i)$. Ist Y affin, so ist damit X affin nach [KAG] 9.1.4. Sei nun umgekehrt X affin. Wir dürfen unsere Varietäten sicher irreduzibel annehmen und beginnen mit dem Fall eines bijektiven äquivarianten Morphismus von homogenen Räumen. Unter dieser Annahme stellt sich das Problem nach 3.5.15 nur in positiver Charakteristik $p > 0$. Nach 3.6.14 liegt für jedes $f \in \mathcal{O}(X)$ eine geeignete iterierte p-Potenz in $\mathcal{O}(Y)$. Ist X affin, so finden wir eine Verfeinerung der Überdeckung durch die $\varphi^{-1}(V_i)$ zu einer Verfeinerung durch gewisse X_{f_ν} mit $f_\nu \in \mathcal{O}(X)$ sowie eine Relation $1 = \sum b_\nu f_\nu$ mit $b_\nu \in \mathcal{O}(X)$. Erheben wir unsere Relation mehrmals zur p-ten Potenz, so wird sie eine Relation $1 = \sum b_\nu^q f_\nu^q$ mit $b_\nu^q, f_\nu^q \in \mathcal{O}(Y)$. Dann aber gilt $\{y \in Y \mid f_\nu^q(y) \neq 0\} = \{y \in V_i \mid f_\nu^q(y) \neq 0\}$ für geeignetes i. Folglich sind diese offenen Teilmengen affin, und das Affinitätskriterium [KAG] 9.1.1 zeigt, daß Y affin ist. Ist unser äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen mit endlichen Fasern nur surjektiv, so nennen wir n die Kardinalität einer und jeder Faser und bilden die Mengen

$$\begin{aligned} W &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n)\} \\ Z &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ ist eine Faser von } \varphi\} \end{aligned}$$

Da Y separiert ist nach Übung 2.4.24, ist mit X auch $W \subset\!\!\!\!\!\!\;\text{\tiny A}\; X^n$ affin. Da alle G-Bahnen in W dieselbe Dimension haben, sind sie alle abgeschlossen in W und folglich auch affin. Unser Z schließlich ist eine Vereinigung von G-Bahnen von W und ist damit auch affin. Als Quotient nach einer endlichen Gruppen [KAG] 9.2.5 ist dann auch $Z/\mathcal{S}_n$ affin und da der Quotientenmorpismus weiter nach [KAG] 9.2.5 produktfest final ist, ist auch die induzierte Operation von G auf $Z/\mathcal{S}_n$ algebraisch. Damit aber ist $Z/\mathcal{S}_n \to Y$ ein bijektiver Morphismus von homogenen Räumen und in diesem Fall haben wir bereits gezeigt, daß entweder beide affin sind oder keiner. □

Übungen

Übung 2.4.22. Gegeben eine Varietät mit einer Operation einer algebraischen Gruppe bilden die Punkte mit endlicher Standgruppe eine offene Teilmenge. Hinweis: Halbstetigkeit der Faserdimension 2.4.8, angewandt auf das Urbild der Diagonale unter der Abbildung $G \times X \to X \times X$ mit $(g, x) \mapsto (gx, x)$. Allgemeiner bilden die Punkte, deren Standgruppe die für Standgruppen von Punkten von X kleinstmögliche Dimension hat, eine offene Teilmenge. Wir nennen diese Punkte die G-**regulären Punkte** von $G\backslash X$.

Übung 2.4.23. Gegeben ein homogener Raum X einer algebraischen Gruppe G sind die irreduziblen Komponenten von X genau die Bahnen der Einskomponente G° von G.

Übung 2.4.24 (**Jeder homogene Raum ist separiert**). Sei $G\backslash X$ unser homogener Raum. Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ist eine Bahn und alle weiteren Bahnen im Abschluß der Diagonale hätten kleinere Dimension. Das führt schnell zu einem Widerspruch.

3 Algebraische Differentialrechnung

3.1 Derivationen und Tangentialräume

Definition 3.1.1. Seien k ein Kring, A ein k-Kring und M ein A-Modul. Eine M**-wertige** k**-lineare Derivation auf** A ist eine k-lineare Abbildung $D : A \to M$ mit $D(ab) = aD(b) + bD(a)\ \forall a, b \in A$. Die abelsche Gruppe aller derartigen Derivationen notieren wir

$$\mathrm{Der}_k(A, M)$$

Sie wird ein A-Modul durch das Nachschalten von Multiplikationen, in Formeln durch die Vorschrift $aD := (a\cdot) \circ D$. Im Spezialfall $A = M$ verwenden wir die Abkürzung $\mathrm{Der}_k A := \mathrm{Der}_k(A, A)$.

Vorschau 3.1.2. Noch allgemeiner betrachtet man Derivationen beliebiger k-Algebren A über einem Kring k. Sie sind aber nur nach k-Moduln.

Beispiel 3.1.3 (**Richtungsableitungen als Derivationen**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum E und ein Punkt $x \in E$ und der $\mathbb{R}$-Kring $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(E)$ der stetig differenzierbaren Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ und der Auswertungsmodul $\mathbb{R}_x$ mit zugrundeliegender abelscher Gruppe $\mathbb{R}$, auf der eine Funktion f durch Multiplikation mit $f(x)$ operiert, liefert für jeden Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E}$ das Bilden der Richtungsableitung bei x in Richtung $\vec{v}$ eine Derivation

$$\mathrm{D}_{\vec{v},x} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(E), \mathbb{R}_x)$$

Das Bilden der Richtungsableitung an allen Stellen hinwiederum ist eine Derivation

$$\mathrm{D}_{\vec{v}} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(E)$$

3.1.4 (**Derivation von Konstanten**). Jede Derivation annulliert das Einselement. Für jede Derivation D auf einem Kring alias $\mathbb{Z}$-Kring A in einen A-Modul gilt also in Formeln $D(1) = 0$. In der Tat folgt aus der Definition

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$$

Ist k ein Kring und A ein k-Kring, so verschwindet mithin jede k-lineare Derivation auf $k1_A$.

Beispiel 3.1.5 (**Derivationen auf Polynomringen**). Ist k ein Kring und M ein Modul über $k[T]$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_k(k[T], M) \xrightarrow{\sim} M$$

durch die Vorschrift $D \mapsto D(T)$. In der Tat kann die Umkehrabbildung explizit angegeben werden durch $m \mapsto (P \mapsto P'm)$. Die Ableitung ist dabei wie in [AL]

3.9.5 formal zu verstehen. Insbesondere ist $\mathrm{Der}_k\, k[T]$ ein freier $k[T]$-Modul mit der Derivation

$$\partial : P \mapsto P'$$

als $k[T]$-Basis. Ist weiter $x \in k$ ein Punkt und k_x der Auswertungsmodul, so ist $\mathrm{Der}_k(k[T], k_x)$ ein freier k-Modul mit der Derivation $\partial = \partial_{(x)} : P \mapsto P'(x)$ als k-Basis.

3.1.6 (**Funktorialitäten von Derivationen**). Seien k ein Kring und A ein k-Kring. Ist $\psi : M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln, so induziert das Nachschalten von ψ eine A-lineare Abbildung $\mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(A, N)$. Ist $\varphi : B \to A$ ein Homomorphismus von k-Kringen, so erhalten wir einen Homomorphismus von B-Moduln $\mathrm{res}_A^B \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(B, \mathrm{res}_A^B M)$ durch das Vorschalten von φ. Wir kürzen ihn ab zu $\mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M)$ und erhalten so die **linksexakte Sequenz für Derivationen**

$$\mathrm{Der}_B(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M)$$

Ist $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ ein surjektiver Homomorphismus von k-Kringen, so erhalten wir offensichtlich im Spezialfall eines surjektiven Kringhomomorphisms für jeden A-Modul M eine Beschreibung der **Derivationen auf Quotienten** durch eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

Des weiteren ist das Verschwinden einer Derivation von B in einen A-Modul M auf $\ker \varphi$ gleichbedeutend zu ihrem Verschwinden auf einem Erzeugendensystem besagten Ideals.

3.1.7 (**Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten**). Gegeben ein Kring k und k-Kringe A und B und ein Modul M über $A \otimes_k B$ liefern die Restriktionen längs $a \mapsto a \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes b$ eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_k(A \otimes_k B, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M) \oplus \mathrm{Der}_k(B, M)$$

In der Tat kann man die Umkehrabbildung unmittelbar angeben als $(\partial_2, \partial_2) \mapsto \partial$ mit $\partial : a \otimes b \mapsto (1 \otimes b)\partial_1 a + (a \otimes 1)\partial_2 b$.

Vorschau 3.1.8. In Übung 3.1.34 werden Sie allgemeiner zeigen, daß Derivationen sogar mit beliebigen Kolimites vertauschen.

Beispiel 3.1.9 (**Derivationen auf Polynomringen in mehreren Variablen**). Ist k ein Kring und M ein Modul über $k[T_1, \ldots, T_n]$, so erhalten wir nach dem Vorhergehenden eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_k(k[T_1, \ldots, T_n], M) \xrightarrow{\sim} M^n$$

durch die Vorschrift $D \mapsto (D(T_1), \ldots, D(T_n))$. In diesem Fall kann die Umkehrabbildung explizit angegeben werden durch $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto m_1\partial_1 + \ldots + m_n\partial_n$, womit die Derivation $P \mapsto (\partial_1 P)m_1 + \ldots + (\partial_n P)m_n$ gemeint ist, die unter Verwendung der partiellen Ableitungen gebildet wird. Die partiellen Ableitungen sind dabei wie in [AL] 3.9.5 formal zu verstehen. Ist speziell $x \in k^n$ und k_x der Auswertungsmodul, so ist $\mathrm{Der}_k(k[T_1, \ldots, T_n], k_x)$ ein freier k-Modul und die Derivationen $\partial_{i,(x)} : P \mapsto (\partial_i P)(x)$ bilden darin eine k-Basis.

Proposition 3.1.10 (Ausdehnung von Derivationen auf Lokalisierungen). *Gegeben k ein Kring, A ein k-Kring, $S \subset A$ eine Teilmenge und M ein Modul über der Lokalisierung $S^{-1}A$ liefert das Vorschalten von $S^{-1}A \to A$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Der}_k(S^{-1}A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

3.1.11. Die Umkehrabbildung dieser Bijektion mithilfe der Quotientenregel notieren wir $\mathrm{qr} : \mathrm{Der}_k(A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(S^{-1}A, M)$.

Beispiel 3.1.12 (**Formale Ableitung rationaler Funktionen**). Gegeben ein Körper k gibt es genau eine Möglichkeit, unsere formale Ableitung $\partial : k[T] \to k[T]$ aus [AL] 3.9.5 so zu einer formalen Ableitung $\partial : k(T) \to k(T)$ fortzusetzen, daß die Summenregel und die Produktregel weiter gelten. Diese formale Ableitungen notieren wir auch $f \mapsto f'$.

Beispiel 3.1.13 (**Formale Ableitung regulärer Funktionen**). $(k = \bar{k})$. Gegeben $U \Subset k$ gibt es genau eine Möglichkeit, unsere vermittels des Isomorphismus $k[T] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k)$ aus [AL] 3.9.5 erhaltene formale Ableitung $\partial : \mathcal{O}(k) \to \mathcal{O}(k)$ so zu einer formalen Ableitung $\partial : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ fortzusetzen, daß die Summenregel und die Produktregel weiter gelten. Diese formale Ableitungen notieren wir auch $f \mapsto f'$.

Beweis. Wir dürfen S multiplikativ abgeschlossen annehmen. Für alle $s \in S$ und jede Derivation $D : S^{-1}A \to M$ gilt $0 = D(s \cdot s^{-1}) = s^{-1}D(s) + sD(s^{-1})$ alias $D(s^{-1}) = -s^{-2}D(s)$. Das zeigt die Injektivität der Einschränkung. Andererseits können wir jede Derivation $D : A \to M$ zu einer Derivation $S^{-1}A \to M$ ausdehnen durch die Vorschrift $D(a/s) = s^{-1}D(a) - s^{-2}aD(s)$, wie der Leser leicht nachrechnet. Genauer und mit der abkürzenden Notation $a' := D(a)$ folgt aus der Gleichheit $(a/s) = (b/t)$ im lokalisierten Ring alias aus der Existenz von $r \in S$ mit $atr = bsr$ in A bereits die Gleichheit $(a's - as')/s^2 = (b't - bt')/t^2$ im lokalisierten Ring und sogar genauer in A die Gleichheit $(a's - as')t^2r^2 = (b't - bt')s^2r^2$. Das zeigt die Surjektivität. □

Definition 3.1.14. Gegeben eine k-Varietät X und ein Punkt $x \in X$ liefert das Auswerten bei x einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to k$. Wollen wir besonders betonen, daß wir k mit der durch diesen Homomorphismus gegebenen Struktur eines $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls versehen, so verwenden wir dafür die Notation k_x und nennen k_x den **Auswertungsmodul zu** x. Wir erklären den **Tangentialraum** an X bei x als den k-Vektorraum

$$\mathrm{T}_x X := \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x)$$

der k-linearen Derivationen des lokalen Rings in den Auswertungsmodul. Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten wird das **Differential** $\mathrm{d}_x\varphi$ **von** φ **an der Stelle** x definiert als die durch das Vorschalten von $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ erklärte k-lineare Abbildung

$$\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$$

Vorschau 3.1.15. Wir zeigen in 3.1.30, daß eine bepunktete Varietät (X, x) genau dann glatt ist bei x, wenn gilt $\mathrm{kdim}_x X = \dim \mathrm{T}_x X$.

Proposition 3.1.16 (Tangentialräume affiner Varietäten). *Für jede bepunktete affine k-Varietät (X, x) liefert die Restriktion unter $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ eine Bijektion*

$$\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x)$$

Beweis. Das folgt aus der Ausdehnbarkeit von Derivationen auf Lokalisierungen 3.1.10 angewandt auf $A = \mathcal{O}(X)$, $M = k_x$ und $S \subset \mathcal{O}(X)$ die Menge aller Funktionen, die bei x nicht verschwinden. □

Beispiel 3.1.17 (**Tangentialräume der Zahlengerade**). Gegeben $k = \bar{k}$ und $a \in k$ bildet die bei a ausgewertete Ableitung $\partial = \partial_{(a)} : f \mapsto f'(a)$ eine k-Basis des Tangentialraums $\mathrm{T}_a k$ der k-Varietät k. Das folgt sofort aus der Beschreibung des Tangentialraums affiner Varietäten 3.1.16 und der Beschreibung der Derivationen auf Polynomringen 3.1.5. Wir nennen dies Element den **kanonischen Erzeuger**

$$\partial = \partial_{(a)} \in \mathrm{T}_a k$$

Ich setze hier die auszuwertende Stelle in Klammern, um Verwechslungen mit der Notation ∂_x für die partielle Ableitung nach einer Variable x zu vermeiden.

Beispiel 3.1.18. Gegeben $k = \bar{k}$ und $x \in k^n$ bilden die bei x ausgewerteten partiellen Ableitungen $\partial_{1,(x)}, \ldots, \partial_{n,(x)}$ eine k-Basis von $\mathrm{T}_x k^n$. Das folgt sofort aus der Beschreibung des Tangentialraums affiner Varietäten 3.1.16 und der Beschreibung der Derivationen auf Polynomringen in mehreren Variablen 3.1.9.

3.1.19 (**Der Tangentialraum als Funktor**). Gegeben Morphismen von Varietäten $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ sowie $x \in X$ ein Punkt mit Bildern $\varphi(x) = y$ und $\psi(y) = z$ haben wir offensichtlich

$$\mathrm{d}_y\psi \circ \mathrm{d}_x\varphi = \mathrm{d}_x(\psi \circ \varphi) : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_z Z$$

Sicher gilt auch $\mathrm{d}_x \operatorname{id}_X = \operatorname{id} : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_x X$. In anderen Worten erhalten wir so einen Funktor von der Kategorie der bepunkteten Varietäten in die Kategorie der Vektorräume. Hier verstehen wir unter einer **bepunkteten Varietät** eine Varietät mit einem ausgezeichneten Punkt und unter einem Morphismus von bepunkteten Varietäten einen Morphismus von Varietäten, der den ausgezeichneten Punkt auf den ausgezeichneten Punkt abbildet.

3.1.20 (**Differential offener Einbettungen**). Jede offene Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ liefert für alle $x \in U$ einen Isomorphismus auf den lokalen Ringen $\mathcal{O}_{X,j(x)} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}_{U,x}$ und damit auch einen Isomorphismus auf den Tangentialräumen

$$\mathrm{d}_x j : \mathrm{T}_x U \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_{j(x)} X$$

3.1.21 (**Differential abgeschlossener Einbettungen**). Jede eine abgeschlossene Einbettung $i : Z \hookrightarrow X$ liefert für alle $z \in Z$ eine Surjektion auf den lokalen Ringen $i^\sharp : \mathcal{O}_{X,i(z)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ und damit eine Injektion auf den Tangentialräumen

$$\mathrm{d}_z i : \mathrm{T}_z Z \hookrightarrow \mathrm{T}_{i(z)} X$$

Insbesondere sind unsere Tangentialräume von Varietäten stets endlichdimensional. Ist X affin und sind Funktionen $f_\nu \in \mathcal{O}(X)$ gegeben, die das Verschwindungsideal $\ker i^\sharp$ von Z bei z erzeugen, so kann nach 3.1.6 das Bild von $\mathrm{d}_z i$ beschrieben werden als der Schnitt der Kerne der Differentiale $\mathrm{d}_{i(z)} f_\nu : \mathrm{T}_{i(z)} X \to \mathrm{T}_0 k$ unserer lokalen Erzeuger.

3.1.22 (**Tangentialräume von Untervarietäten**). Gegeben $z \in Z \subset X$ eine Varietät mit einer lokal abgeschlossenen Teilmenge und einem ausgezeichneten Punkt derselben identifizieren wir häufig den Tangentialraum $\mathrm{T}_z Z$ an die Untervarietät Z implizit mit seinem Bild unter dem Differential $\mathrm{d}_z \iota$ der Einbettung $\iota : Z \hookrightarrow X$, das ja in diesem Fall nach 3.1.21 und 3.1.20 stets eine Injektion ist, und verwenden die abkürzende Notation

$$\mathrm{T}_z Z \subset \mathrm{T}_z X$$

für den Teilraum, der genau genommen $\mathrm{d}_z \iota(\mathrm{T}_z Z)$ zu notieren wäre.

Proposition 3.1.23 (**Tangentialraum eines Produkts**). *Der Tangentialraumfunktor ist verträglich mit endlichen Produkten.*

3.1.24. Die Differentiale der Projektionen induzieren in anderen Worten stets einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$(\mathrm{d}_{(x,y)} \operatorname{pr}_X, \mathrm{d}_{(x,y)} \operatorname{pr}_Y) : \mathrm{T}_{(x,y)}(X \times Y) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_x X \times \mathrm{T}_y Y$$

Die Umkehrabbildung ist dann $(v, w) \mapsto \mathrm{d}_x(\operatorname{id}_X, y)(v) + \mathrm{d}_y(x, \operatorname{id}_Y)(w)$ mit der Notation $y = \operatorname{em}_y \operatorname{fin}_X$ für die konstante Abbildung $X \to Y$, die jeden Punkt auf y abbildet, und ebenso für die konstante Abbildung $x : Y \to X$. In der Tat ist diese Abbildung linear und die Kettenregel zeigt, daß das Nachschalten des Ismorphismus aus der Proposition alle Elemente der Gestalt $(v, 0)$ oder $(0, w)$ auf sich selber abbildet.

Beweis. Es reicht, das für affine Varietäten zu zeigen. In diesem Fall folgt es aus der Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten 3.1.7. □

Beispiel 3.1.25. Gegeben $k = \bar{k}$ und $x \in k^n$ bilden die bei x ausgewerteten partiellen Ableitungen $\partial_{1,x}, \ldots, \partial_{n,x}$ eine k-Basis von $\mathrm{T}_x k^n$. Das folgt sofort aus der Beschreibung der Derivationen auf Polynomringen 3.1.5 und der Verträglichkeit des Tangentialraumfunktors mit endlichen Produkten.

3.1.26 (**Tangentialräume affiner Räume**). $(k = \bar{k})$. Für jeden endlichdimensionalen affinen Raum E über k und jeden Punkt $p \in E$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}_p : \vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p E$$

durch die Vorschrift, daß wir zu einem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E}$ den Morphismus $k \to E$, $t \mapsto p + t\vec{v}$ bilden und unserem Richtungsvektor $\vec{v}$ das Bild des kanonischen Basisvektors $\partial \in \mathrm{T}_0 k$ unter dem Differential dieses Morphismus zuordnen. Um das zu sehen, mag man von der Bemerkung ausgehen, daß D sogar eine Transformation von Funktoren von der Kategorie der endlichdimensionalen bepunkteten affinen Räume in die Kategorie der Vektorräume ist. Beide Funktoren sind dabei nun verträglich mit endlichen Produkten und alle Objekte der Ausgangskategorie sind isomorph zu endlichen Produkten von Kopien von $(k, 0)$. Um zu zeigen, daß unsere Transformation eine Isotransformation ist, können wir uns also darauf zurückziehen, die Isomorphismeneigenschaft im Fall $(E, p) = (k, 0)$ zu zeigen, und in diesem Fall folgt sie direkt aus den Definitionen. Wir schreiben

$$\mathrm{D}_{\vec{v},p} := \mathrm{D}_p(\vec{v})$$

und nennen diesen Tangentialvektor die **Richtungsableitung** in Richtung $\vec{v}$ an der Stelle p. Die Umkehrabbildung unseres Isomorphismus $\mathrm{D} : \vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p E$ notieren wir

$$\mathrm{richt} = \mathrm{richt}_p : \mathrm{T}_p E \xrightarrow{\sim} \vec{E}$$

Etwas allgemeiner verwenden wir in der Situation $p \in U \Subset E$ dieselbe Notation $\mathrm{richt} : \mathrm{T}_p U \xrightarrow{\sim} \vec{E}$ für den durch das Vorschalten des Differentials der Einbettung entstehenden Isomorphismus. Weiter verwenden wir im Spezialfall eines endlichdimensionalen Vektorraums V mit seiner natürlichen Struktur als affiner Raum und für $v \in U \Subset V$ die Notation

$$\mathrm{richt} = \mathrm{richt}_v : \mathrm{T}_v U \xrightarrow{\sim} V$$

auch für den Isomorphismus, den wir ganz pedantisch $\mathrm{trans}^{-1} \circ \mathrm{richt}$ notieren müßten für $\mathrm{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$ unseren natürlichen Isomorphismus zwischen einem Vektorraum und dem Richtungsraum des dazu gebildeten affinen Raums.

3.1.27 (**Differential linearer Abbildungen**). $(k = \bar{k})$. Gegeben eine lineare Abbildung $f : V \to W$ von endlichdimensionalen k-Vektorräumen kommutiert stets das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_v V \arrow[r, "\mathrm{d}_v f"] \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] & \mathrm{T}_{f(v)} W \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

Salopp gesprochen ist also jede lineare Abbildung ihr eigenes Differential. Analog ist salopp gesprochen das Differential jeder affinen Abbildung ihr linearer Anteil.

Lemma 3.1.28 (Derivationen als duale Differentiale). *Gegeben ein Kring k und ein k-Kring A und eine Spaltung $A \to k$ des strukturierenden Homomorphismus $k \to A$ und $\mathfrak{m} := \ker(A \to k)$ ihr Kern induziert die Restriktion auf $\mathfrak{m} \subset A$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Der}_k(A, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$$

Vorschau 3.1.29. Die Aussage dieses Lemmas werden wir in 3.4.4 zu einer Beschreibung beliebiger Derivationen durch den sogenannten „Modul der Differentiale“ ausbauen, daher der Name des Lemmas.

Beweis. Gegeben eine Derivation ∂ und $f, g \in \mathfrak{m}$ haben wir sicher $\partial(fg) = 0$ in k. Jede Derivation verschwindet also auf $\mathfrak{m}^2$, folglich liefert unsere Vorschrift zumindest eine Abbildung. Wegen $A = k1 \oplus \mathfrak{m}$ und $\partial(1) = 0$ ist diese Abbildung injektiv. Sei nun $A \to \mathfrak{m}$ die zu unserer Zerlegung gehörige Projektion. Wenn wir zeigen können, daß das Vorschalten der Komposition $A \to \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ aus jeder k-linearen Abbildung $\partial : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ eine Derivation $D : A \to A/\mathfrak{m}$ macht, sind wir fertig. Hier wird also D gegeben durch $D(\alpha + f) = \partial \bar{f}$ für $f \in \mathfrak{m}$ und $\alpha \in k$ und $\bar{f} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die Nebenklasse von f. Es gilt also für $f, g \in \mathfrak{m}$ und $\alpha, \beta \in k$ zu zeigen

$$D((f + \alpha)(g + \beta)) = (f + \alpha)D(g + \beta) + (g + \beta)D(f + \alpha)$$

Das bedeutet umgeformt die Gleichheit $\partial(\alpha\bar{g} + \beta\bar{f} + \bar{f}\bar{g}) = \alpha\partial\bar{g} + \beta\partial\bar{f}$ und die ist offensichtlich wegen $\partial(\bar{f}\bar{g}) = 0$. □

3.1.30 (**Dimension des Tangentialraums**). Gegeben (X, x) eine bepunktete Varietät und $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ der Kern des Auswertungshomomorphismus liefert die Beschreibung 3.1.28 von Derivationen als duale Differentiale einen Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$$

Insbesondere ist nach der oberen Abschätzung [KAG] 7.3.20 für die Krulldimension lokaler Kringe die Dimension des Tangentialraums stets mindestens so groß wie die lokale Krulldimension unserer Varietät an der entsprechenden Stelle, in Formeln $\dim_k \mathrm{T}_x X \geq \mathrm{kdim}_x X$. Des weiteren ist Gleichheit nach der Definition [KAG] 7.4.7 regulärer lokaler Kringe äquivalent zur Regularität des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ alias der Glattheit der Varietät X an der Stelle x.

Satz 3.1.31 (Differentielles Dominanzkriterium). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von irreduziblen Varietäten. Ist für einen glatten Punkt $x \in X$ das Differential bei x eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$, so ist auch sein Bild $\varphi(x)$ glatt und der Morphismus φ dominant.*

3.1.32. Den Spezialfall dieses Kriteriums für offene Teilmengen affiner Räume haben wir bereits in [KAG] 7.4.23 diskutiert.

Beweis. Wir bezeichnen mit k unseren Grundkörper und setzen $y := \varphi(x)$. Nach Annahme induziert der Komorphismus zu φ eine Injektion $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \hookrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ für $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ sowie $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ die maximalen Ideale. Gegeben $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{m}_y$ Repräsentanten einer k-Basis von $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ sind die $g_i \circ \varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ algebraisch unabhängig über k nach [KAG] 7.3.23. Also sind die g_i bereits selbst algebraisch unabhängig über k und wir folgern die Glattheit von Y bei y aus der Ungleichungskette

$$\mathrm{kdim}\, Y = \mathrm{trgr}_k\, \mathcal{M}(Y) \geq r = \dim_k \mathrm{T}_y Y \geq \mathrm{kdim}\, Y$$

Nun folgt mit [KAG] 7.4.9 weiter, daß φ eine Injektion $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_y} \mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{X,x}$ der assozierten graduierten Ringe induziert. Da unsere Filtrierungen ausschöpfend und nach dem Durchschnittssatz [KAG] 4.6.14 auch Hausdorff sind, folgt mit [KAG] 7.1.16 die Injektivität $\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ des Komorphismus und φ ist in der Tat dominant. □

Übungen

Übung 3.1.33 (**Derivationen als Kringhomomorphismen**). Gegeben ein Kring A und ein A-Modul M wird die abelsche Gruppe $A \times M$ zu einem Kring, wenn wir ihre Multiplikation erklären durch $(a, m)(b, n) := (ab, an+bm)$. Ist k ein weiterer Kring und A ein k-Kring, so liefert das Nachschalten von pr_2 eine Bijektion

$$\{\varphi \in \mathrm{Kring}^k(A, A \times M) \mid \mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_A\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

Übung 3.1.34 (**Verträglichkeit von Derivationen mit Kolimites**). Gegeben ein Kring k und ein Köcher $\mathcal{I}$ und ein System $A_i \in \mathrm{Car}(\mathcal{I}, \mathrm{Kring}^k)$ von k-Kringen existiert nach [TS] 7.1.42 stets der Kolimes $A := \operatorname{col}_{i\in\mathcal{I}} A_i$. Man zeige, daß für jeden A-Modul M die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\operatorname{Der}_k(A, M) \stackrel{\sim}{\to} \lim_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{Der}_k(A_i, M)$$

ist. Hinweis: Man verwende 3.1.33 und die Bijektionen

$$\{\varphi : A_i \to A_i \times M \mid \operatorname{pr}_1 \circ\varphi = \operatorname{id}\} \stackrel{\sim}{\to} \{\psi : A_i \to A \times M) \mid \operatorname{pr}_1 \circ\psi = \operatorname{in}_i\}$$

zwischen den jeweiligen Mengen von Homomorphismen von k-Kringen.

Übung 3.1.35. Man zeige, daß der Tangentialraum der Neil'schen Parabel an der singulären Stelle zweidimensional ist. Man zeige allgemeiner, daß der Tangentialraum einer ebenen Kurve an jeder singulären Stelle zweidimensional ist.

Übung 3.1.36. Man zeige, daß für $x \in U \Subset k$ und $f \in \mathcal{O}(U) \subset k(T)$ gilt $\mathrm{d}_x f : \partial \mapsto f'(x)\partial$ für $\partial \in \mathrm{T}_x U$ beziehungsweise $\partial \in \mathrm{T}_{f(x)} k$ die kanonischen Erzeuger aus 3.1.17. Hier ist f' zu verstehen wie in 3.1.12.

Übung 3.1.37 (**Differential und Jacobi-Matrix**). $(k = \bar{k})$. Gegeben $p \in U \Subset k^n$ und $V \Subset k^m$ und ein Morphismus $\varphi : U \to V$ zeige man die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_p U \arrow[r, "\mathrm{d}_p\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] & \mathrm{T}_{\varphi(p)} V \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] \\
k^n \arrow[r, "J"] & k^m
\end{tikzcd}$$

für J die durch die Jacobi-Matrix $\big((\partial_i(\operatorname{pr}_j \varphi))(p)\big)_{ij}$ gegebene lineare Abbildung.

Übung 3.1.38 (**Differential bilinearer Abbildungen**). $(k = \bar{k})$. Seien V, W, L endlichdimensionale k-Vektorräume. Man zeige für das Differential einer bilinearen Abbildung $b : V \times W \to L$ bei $p := (x, y)$ die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_x V \times \mathrm{T}_y W \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{richt}\times\mathrm{richt}"', "\wr"] & \mathrm{T}_p(V \times W) \arrow[r, "\mathrm{d}_p\varphi"] & \mathrm{T}_{\varphi(p)} L \arrow[d, "\mathrm{richt}"', "\wr"] \\
V \times W \arrow[rr, "(v,w)\mapsto b(v,y)+b(x,w)"] & & L
\end{tikzcd}$$

Übung 3.1.39 (**Tangentialräume projektiver Räume**). $(k = \bar{k})$. Seien V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $\pi : V\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}V$ die Projektion und $v \in V\backslash 0$. So erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\langle v\rangle \hookrightarrow \mathrm{T}_v V \stackrel{\mathrm{d}_v\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{T}_{\langle v\rangle}\mathbb{P}V$$

mit der Einbettung $\langle v\rangle \hookrightarrow V$ der von v erzeugten Gerade gefolgt von der Identifikation $\mathrm{richt}^{-1} : V \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_v V$ als erster Abbildung.

Übung 3.1.40 (**Operation auf dem Fixpunkttangentialraum im affinen Fall**). Gegeben $G\curvearrowright X$ eine affine algebraische Varietät mit der Operation eines affinen algebraischen Monoids und ein Fixpunkt $x \in X$ der Operation ist die induzierte Darstellung von G auf dem Tangentialraum $\mathrm{T}_x X$ algebraisch. Hinweis: Man gehe aus von der Algebraizität der Rechtsdarstellung von G auf $\mathcal{O}(X)$. Ohne Affinitätsannahmen geben wir einen Beweis in 3.11.11.

3.2 Liealgebren und Vektorfelder

Definition 3.2.1. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper k ist ein k-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mitsamt einer k-bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer**

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

derart, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Antisymmetrie: $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;

Jacobi-Identität: $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

3.2.2. Unsere Bedingung $[x, x] = 0 \quad \forall x$ impliziert, wie in [LA1] 6.3.2 ausgeführt, bereits die Identität $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y$. Im Fall eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik impliziert umgekehrt $[x, x] = -[x, x]$ auch $[x, x] = 0$.

Beispiel 3.2.3. Ist A eine assoziative Algebra unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto x{\cdot}y$, so wird A eine Lie-Algebra A_{L} unter der Verknüpfung

$$(x, y) \mapsto [x, y] := x \cdot y - y \cdot x$$

Das rechnet man leicht nach. Man nennt deshalb die Lie-Klammer auch im allgemeinen oft den **Kommutator**. Faßt man $\operatorname{End} V$ beziehungsweise $\operatorname{Mat}(n; k)$ in dieser Weise als Lie-Algebren auf, so bezeichnet man sie meist mit $\mathfrak{gl}(V)$ beziehungsweise $\mathfrak{gl}(n; k)$ für **general linear Lie algebra**.

3.2.4. Sei k ein Körper. Gegeben eine nicht notwendig assoziative k-Algebra $(A, \cdot)$ heißt eine lineare Abbildung $D : A \to A$ eine **Derivation**, wenn sie die **Leibniz-Regel** $D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db)$ für alle $a, b \in A$ erfüllt. Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{Der}_k A \subset \operatorname{End}_k A$$

den Untervektorraum der Derivationen von A. Man prüft leicht, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(A)$ der Endomorphismen des k-Vektorraums A bilden. Man prüft leicht, daß unsere Derivationen hier im Fall einer Kringalgebra A mit den A-wertigen k-linearen Derivationen auf A aus 3.1.1 zusammenfallen, die wir auch dort schon $\operatorname{Der}_k A$ notiert hatten. Noch allgemeiner mag man Derivationen mit Werten in einem A-Bimodul über k einführen, aber alles zu seiner Zeit.

Ergänzung 3.2.5. Im Fall $\operatorname{char} k = p > 0$ gilt $D \in \operatorname{Der}_k A \Rightarrow D^p \in \operatorname{Der}_k A$, denn wir haben ganz allgemein

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (D^i a)(D^{n-i} b)$$

3.2.6. Unter einem **Vektorfeld auf einer Varietät** X verstehen wir ähnlich wie in [ML] 3.4.6 eine Vorschrift ξ, die jedem Punkt $x \in X$ einen Tangentialvektor $\xi_x \in \mathrm{T}_x X$ zuordnet. So ein Vektorfeld induziert für alle $U \Subset X$ eine Abbildung $\xi : \mathcal{O}_X(U) \to \operatorname{Ens}(U, k)$ gegeben durch $(\xi f)(x) := \xi_x(f)$. Unser Vektorfeld heißt **algebraisch**, wenn für alle $U \Subset X$ gilt $f \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow \xi f \in \mathcal{O}_X(U)$. Die Menge der algebraischen Vektorfelder auf X notieren wir

$$\mathcal{T}(X)$$

3.2.7 (**Algebraische Vektorfelder als Derivationen**). Gegeben eine affine k-Varietät X erhalten wir einen Isomorphismus

$$\operatorname{Der}_k \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(X)$$

zwischen dem Raum der Derivationen ihres Rings von regulären Funktionen und dem Raum ihrer algebraischen Vektorfelder durch die Abbildungsvorschrift $D \mapsto (x \mapsto \operatorname{qr}(\delta_x \circ D))$, wobei $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k_x$ das Auswerten bei x meint und $\operatorname{qr} : \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x)$ das Ausdehnen von Derivationen auf die Lokalisierung nach 3.1.10. In der Tat ist unsere Abbildung offensichtlich injektiv, weil eine Funktion eben durch ihre Werte an allen Stellen festgelegt wird, und ebenso offensichtlich surjektiv. Dieser Isomorphismus scheint mir derart kanonisch, daß ich ihn sprachlich und in der Notation meist als eine Gleichheit behandeln werde.

Beispiel 3.2.8. $(k = \bar{k})$. Ein Vektorfeld ξ auf $U \Subset k^n$ ist offensichtlich genau dann algebraisch, wenn es $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ gibt mit $\xi = f_1 \partial_1 + \ldots + f_n \partial_n$.

3.2.9 (**Liealgebra der algebraischen Vektorfelder**). Gegeben eine Varietät X und algebraische Vektorfelder $\xi, \zeta \in \mathcal{T}(X)$ liefert für alle $U \Subset X$ das Bilden des Kommutators eine Abbildung $[\xi, \zeta]_U : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$. Diese Abbildungen gehören nach 3.2.7 für affines U zu $\operatorname{Der}_k \mathcal{O}_X(U)$ und für $V \Subset U$ gilt offensichtlich $\operatorname{res}_U^V \circ [\xi, \zeta]_U = [\xi, \zeta]_V \circ \operatorname{res}_U^V$. Daraus folgt, daß unsere $[\xi, \zeta]_U$ zu einem wohlbestimmten algebraischen Vektorfeld $[\xi, \zeta] \in \mathcal{T}(X)$ verkleben und daß der Raum $\mathcal{T}(X)$ der algebraischen Vektorfelder auf X mit dieser Lieklammer zu einer Liealgebra wird.

Definition 3.2.10. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Vektorfelder ξ auf X und ζ auf Y heißen **φ-verwandt** und wir schreiben $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$, wenn für alle $x \in X$ gilt

$$\mathrm{d}_x\varphi : \xi_x \mapsto \zeta_{\varphi(x)}$$

Beispiel 3.2.11. Hat ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ die Eigenschaft, daß sein Differential für jeden Punkt ein Isomorphismus $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ ist, so gibt es für jedes Vektorfeld ζ auf Y genau ein Vektorfeld ξ auf X mit $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$. Ist φ eine offene Einbettung von Varietäten, so ist dies Vektorfeld auf X die Einschänkung $\xi = \zeta|_X$ und ist offensichtlich algebraisch, wenn ζ algebraisch ist.

Proposition 3.2.12 (Verwandtschaft und Lieklammer). *Verwandte algebraische Vektorfelder haben verwandte Lieklammern.*

Beweis. Ist also in Formeln $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und sind ξ, ξ' algebraische Vektorfelder auf X und ζ, ζ' algebraische Vektorfelder auf Y und gilt $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$ und $\varphi : \xi' \rightsquigarrow \zeta'$, so gilt es $\varphi : [\xi, \xi'] \rightsquigarrow [\zeta, \zeta']$ zu zeigen. Ist φ eine offene Einbettung, so folgt diese Verträglichkeit direkt aus den Definitionen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir deshalb von nun an für den Beweis unsere Varietäten affin annehmen. Genau dann gilt $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$, wenn für beliebige reguläre Funktionen $f \in \mathcal{O}(X)$ und $g \in \mathcal{O}(Y)$ mit $\varphi : f \rightsquigarrow g$ alias $f = g \circ \varphi$ gilt $\xi f \rightsquigarrow \zeta g$ alias $\xi(g \circ \varphi) = (\zeta g) \circ \varphi$. In noch anderen Worten bedeutet das das Kommutieren des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{O}(Y) \\ {\scriptstyle \circ\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \circ\varphi} \\ \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

Daraus folgt unsere Behauptung unmittelbar. □

Definition 3.2.13. Gegeben ein algebraisches Monoid G erklärt man die **Liealgebra seiner linksinvarianten Vektorfelder** durch die Vorschrift

$$\grave{\mathrm{Li}}\mathrm{e}\, G := \{\xi \in \mathcal{T}(G) \mid (g\cdot) : \xi \rightsquigarrow \xi \;\text{ für alle } g \in G\}$$

Die Verträglichkeit der Lieklammer mit Verwandtschaft 3.2.12 zeigt, daß das in der Tat eine Lieunteralgebra von $\mathcal{T}(G)$ ist. Analog erklären wir die **Liealgebra der rechtsinvarianten Vektorfelder** $\mathrm{L\acute{i}e}\, G$.

Beispiel 3.2.14. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G liefert die Interpretation 3.2.7 algebraischer Vektorfelder als Derivationen einen Isomorphismus von Liealgebren

$$\mathrm{L\grave{i}e}\, G \xrightarrow{\sim} \{D \in \mathrm{Der}_k\, \mathcal{O}(G) \mid D \circ \lambda_g = \lambda_g \circ D \quad \forall g \in G\}$$

Hier verwenden wir die Notation $\lambda_g f = \lambda(g)f := f \circ (g\cdot)$ für die Linksverschiebung von Funktionen $f \in \mathcal{O}(G)$.

Satz 3.2.15 (Invariante Vektorfelder auf algebraischen Monoiden). *Gegeben ein algebraisches Monoid G liefert das Auswerten $\xi \mapsto \xi_e$ eines linksinvarianten Vektorfelds am neutralen Element einen Vektorraumisomorphismus*

$$\grave{\mathrm{Lie}}\, G \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_e G$$

3.2.16. Wir notieren die inverse Abbildung zu unserem Isomorphismus im Satz $v \mapsto \grave{v}$. Analog liefert auch das Auswerten $\zeta \mapsto \zeta_e$ eines rechtsinvarianten Vektorfelds am neutralen Element einen Vektorraumisomorphismus $\acute{\mathrm{Lie}}\, G \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_e G$. Wir notieren die inverse Abbildung in diesem Fall $v \mapsto \acute{v}$.

Beweis im affinen Fall. Die Abbildung ist sicher injektiv, denn für jedes linksinvariante Vektorfeld ξ gilt $\xi_x = (\mathrm{d}_e(x\cdot))\xi_e$. Es bleibt nur zu zeigen, daß für alle $v \in \mathrm{T}_e G$ das durch die Vorschrift

$$\grave{v}_x := (\mathrm{d}_e(x\cdot))v$$

auf G definierte Vektorfeld algebraisch ist. Wenn G affin ist, reicht es ja zu zeigen, daß gilt $f \in \mathcal{O}(G) \Rightarrow \grave{v}f \in \mathcal{O}(G)$. Mit $\Delta f = \sum g_i \otimes f_i$ haben wir nun $f(xy) = \sum g_i(x)f_i(y)$ und folglich $f \circ (x\cdot) = \sum g_i(x) f_i$ und

$$(\grave{v}f)(x) = \grave{v}_x f = v(f \circ (x\cdot)) = \sum g_i(x)v(f_i)$$

und das ist offensichtlich wieder eine reguläre Funktion. □

Beweis im Allgemeinen. Das folgt sofort aus Satz 3.2.33 über infinitesimale Operationen, dessen Beweis jedoch Resultate voraussetzt, die uns erst das Studium der Differentiale zur Verfügung stellen wird. Genauer benötigen wir für diesen Beweis, daß jede Varietät eine offene dichte Teilmenge aus glatten Punkten besitzt und daß sich jeder Tangentialvektor an einem glatten Punkt zu einem algebraischen Vektorfeld in einer offenen Umgebung unseres Punktes fortsetzen läßt. □

Definition 3.2.17. Die **Liealgebra** $\mathrm{Lie}\, G$ eines algebraischen Monoids G erklären wir als den Tangentialraum beim neutralen Element

$$\mathrm{Lie}\, G := \mathrm{T}_e G$$

mit derjenigen Struktur einer Liealgebra, für die der Isomorphismus mit der Liealgebra der linksinvarianten Vektorfelder ein Isomorphismus von Liealgebren ist.

3.2.18. Offensichtlich liefert für jedes algebraische Monoid G das Auswerten am neutralen Element einen Liealgebrenisomorphismus $\acute{\mathrm{L}}\mathrm{ie}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(G^{\mathrm{opp}})$. Auf die Beziehung zwischen den beiden Lieklammern auf $\mathrm{T}_e G$ durch linksinvariante und rechtsinvariante Vektorfelder kommen wir in 3.2.31 zurück. Sie unterscheiden sich um ein Vorzeichen.

Satz 3.2.19 (**Differential eines Monoidhomomorphismus**). *Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von algebraischen Monoiden ist sein Differential beim neutralen Element ein Homomorphismus von Liealgebren*

$$\mathrm{d}\varphi := \mathrm{d}_e\varphi : \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{Lie}\, H$$

Beweis. Linksinvariante Vektorfelder ξ auf G und ζ auf H mit $\mathrm{d}_e\varphi : \xi_e \mapsto \zeta_e$ sind offensichtlich φ-verwandt, in Formeln $\varphi : \xi \rightsquigarrow \zeta$. Damit folgt die Behauptung aus unserer Erkenntnis 3.2.12, daß verwandte Vektorfelder verwandte Lieklammern haben. □

3.2.20. Bisher haben wir Tangentialvektoren meist mit v bezeichnet und Varietäten gerne mit X. Wenn aber Liealgebren auf Vektorräumen operieren, bezeichnen wir mit v lieber die Elemente dieser Vektorräume und mit X die Elemente unsere Liealgebren.

3.2.21 (**Ableiten algebraischer Darstellungen**). Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung (V, ρ) eines algebraischen Monoids G und Elemente $X \in \mathrm{Lie}\, G$ sowie $v \in V$ erklären wir ein Element $X \cdot_\rho v = Xv \in V$ durch die Vorschrift

$$Xv := \mathrm{richt}\left((\mathrm{d}_e(\cdot v))(X)\right)$$

Wir nehmen also in Worten von der Abbildung $(\cdot v) : G \to V$ gegeben durch $g \mapsto \rho(g)(v) = gv$ das Differential beim neutralen Element, werten es aus bei $X \in \mathrm{T}_e G$ und wenden auf das Ergebnis $\mathrm{richt} : \mathrm{T}_v V \xrightarrow{\sim} V$ an. Es ist klar, daß für jeden Homomorphismus $A : V \to W$ von endlichdimensionalen algebraischen Darstellungen gilt

$$A(Xv) = X(Av) \quad \forall X \in \mathrm{Lie}\, G,\ v \in V$$

Insbesondere erhalten wir auch im Fall nicht notwendig endlichdimensionaler Darstellungen ein wohldefiniertes Xv, indem wir es in Bezug auf eine und jede endlichdimensionale Unterdarstellung berechnen, die v enthält. Mit dem dadurch erklärten Xv gilt dann auch für Homomorphismen $A : V \to W$ von beliebigen algebraischen Darstellungen weiter $A(Xv) = X(Av)\ \forall X \in \mathrm{Lie}\, G, v \in V$.

3.2.22. Seien etwas allgemeiner $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Monoiden. Unter einem **Homomorphismus von Darstellungen über** φ verstehen wir eine lineare Abbildung $A : V \to W$ von einer G-Darstellung V in eine H-Darstellung W mit

$$A(gv) = \varphi(g)(Av) \quad \forall g \in G, v \in V$$

3.2.23. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von algebraischen Monoiden und darüber ein Homomorphismus $A : V \to W$ von algebraischen Darstellungen finden wir für die abgeleiteten Darstellungen unmittelbar

$$A(Xv) = (\mathrm{d}\varphi(X))(Av) \quad \forall X \in \operatorname{Lie} G, v \in V$$

Lemma 3.2.24 (Ableitung der rechtsregulären Darstellung). *Gegeben ein algebraisches Monoid G und seine rechtsreguläre Darstellung $\mathcal{O}(G)$ mit der Operation durch Rechtsverschiebung $\big(\rho(g)f\big)(x) := f(xg)$ gilt für jedes linksinvariante Vektorfeld $\xi \in \mathcal{T}(G)$ mit Wert $\xi_e \in \operatorname{Lie} G$ beim neutralen Element und jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ die Identität*

$$\xi f = \xi_e \cdot_\rho f$$

3.2.25. In Worten erhalten wir also dasselbe Ergebnis, ob wir einen Tangentialvektor im neutralen Element zu einem linksinvarianten Vektorfeld fortsetzen und das auf eine Funktion loslassen oder aber dieselbe Funktion als eine Vektor der rechtsregulären Darstellung verstehen und darauf den fraglichen Tangentialvektor als Element der Liealgebra im Sinne der Ableitung von Darstellungen operieren lassen.

Beweis. Wir schreiben $\Delta f = \sum g_i \otimes h_i$. Es gilt also $f(xy) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(y)$ und $\rho(y)f = \sum h_i(y)g_i$ und $\lambda(x)f = \sum g_i(x)h_i$. So ergibt sich

$$(\xi f)(x) = (\lambda(x)\xi f)(e) = (\xi\lambda(x)f)(e) = \xi_e(\lambda(x)f) = \sum g_i(x)(\xi_e h_i)$$

und $\xi f = \sum(\xi_e h_i)g_i$. Andererseits ergibt sich das Differential von $y \mapsto \rho(y)f$ am neutralen Element gefolgt von richt ebenso zu $\sum(\xi_e h_i)g_i$, denn $y \mapsto \rho(y)f$ ist die Verknüpfung von $h : G \to k^n, y \mapsto (h_1(y), \dots, h_n(y))$ mit einer linearen Abbildung $A : k^n \to W$ für $W := \langle g_1, \dots, g_n\rangle \subset \mathcal{O}(G)$ ein endlichdimensionaler unter $\rho(G)$ stabiler Teilraum und so folgt

$$\text{richt}\, \mathrm{d}_e(A \circ h)\ \xi_e = A\, \text{richt}\, \mathrm{d}_e(h)\ \xi_e = A(\xi_e h_1, \dots, \xi_e h_n) \qquad \square$$

3.2.26. Eine **Darstellung einer Liealgebra** $\mathfrak{g}$ ist ein Paar (V, ρ) aus einem Vektorraum V übr demselben Grundkörper wie unsere Liealgebra und einem Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ von Liealgebren. Wir schreiben in diesem Kontext meist abkürzend

$$Xv = X \cdot_\rho v := (\rho(X))(v)$$

Genau dann gehört eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$ zu einer Darstellung von Liealgebren, wenn gilt $X(Yv) - Y(Xv) = [X, Y]v$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}, v \in V$.

3.2.27. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist eine lineare Abbildung $A : V \to W$ mit $A(Xv) = X(Av)$ für alle $v \in V$ und $X \in \mathfrak{g}$.

Proposition 3.2.28 (Ableitung einer algebraischen Darstellung). *Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids G gilt*

$$X(Yv) - Y(Xv) = [X, Y]v \quad \forall X, Y \in \operatorname{Lie} G, v \in V$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei V endlichdimensional. Wie wir bei der Diskussion der Jordanzerlegung gezeigt hatten, läßt sich dann V als Unterdarstellung in eine direkte Summe endlich vieler Kopien der rechtsregulären Darstellung einbetten. Damit folgt die Proposition aus der Beschreibung 3.2.24 der Ableitung der rechtsregulären Darstellung und der Verträglichkeit der Ableitung von Darstellungen mit Homomorphismen 3.2.21. □

3.2.29. Ist $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Liealgebren und V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und W eine Darstellung von $\mathfrak{h}$, so verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Darstellungen über** φ eine lineare Abbildung $A : V \to W$ mit

$$A(Xv) = \varphi(X)(Av) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Insbesondere ist nach 3.2.23 jeder Homomorphismus von algebraischen Darstellungen über einem Homomorphismus von algebraischen Monoiden auch ein Homomorphismus der abgeleiteten Darstellungen über dem zugehörigen Liealgebrenhomomorphismus.

Lemma 3.2.30 (Liealgebra des allgemeinen linearen Monoids). *Für das algebraische Monoid* $\operatorname{End} V$ *liefert* $\operatorname{richt} : \mathrm{T}_e(\operatorname{End} V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$ *einen Liealgebrenisomorphismus*

$$\operatorname{richt} : \operatorname{Lie}(\operatorname{End} V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(V)$$

Beweis. In diesem Fall ist $(\cdot v) : \operatorname{End} V \to V$ für jedes feste $v \in V$ eine lineare Abbildung, folglich gilt $\operatorname{richt} \mathrm{d}_e(\cdot v)X = (\cdot v) \operatorname{richt} X$. □

3.2.31 (**Rechtsinvariante versus linksinvariante Vektorfelder**). Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung (V, ρ) eines algebraischen Monoids G wird der Dualraum eine algebraische Darstellung des opponierten Monoids G^{opp} durch die Vorschrift

$$(g^\circ \alpha)(v) := \alpha(gv) \quad \forall \alpha \in V^*, g \in G, v \in V$$

Für die abgeleitete Darstellung von $X \in \mathrm{T}_e G$ folgt $(X^\circ \alpha)(v) = \alpha(Xv)$ mit der Notation X° für $X \in \mathrm{T}_e G$ aufgefaßt als Element von $\operatorname{Lie}(G^{\mathrm{opp}})$. Gegeben $X, Y \in \operatorname{Lie} G$ folgt aus $X^\circ(Y^\circ \alpha) - Y^\circ(X^\circ \alpha) = [X^\circ, Y^\circ]\alpha$ durch Anwenden auf v mithin

$([Y,X]^\circ\alpha)(v) = \alpha\bigl([Y,X]v\bigr) = \alpha\bigl(Y(Xv) - X(Yv)\bigr) = ([X^\circ, Y^\circ]\alpha)(v)$. Da wir hier für α auch jedes Element der linksregulären Darstellung nehmen können, wenn wir von $V := \langle G^{\mathrm{opp}}\alpha\rangle^*$ ausgehen, folgt schließlich

$$[X^\circ, Y^\circ] = -[X,Y]^\circ$$

Satz 3.2.32 (Vektorfelder auf affinen algebraischen Gruppen). *Gegeben eine affine algebraische Gruppe G liefert das Multiplizieren regulärer Funktionen mit linksinvarianten Vektorfeldern einen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}(G) \otimes_k \operatorname{L\grave{i}e} G \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Isomorphismus $\operatorname{L\grave{i}e} G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e G$ aus 3.2.15 und entwickeln eine explizite Formel für die mit seiner Hilfe entstehende Abbildung

$$\mathcal{O}(G) \otimes_k \mathrm{T}_e G \to \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$$

Ist (w_α) eine Basis von $\mathrm{T}_e G$, so wird unsere Abbildung gegeben durch die Vorschrift $\sum_\alpha f_\alpha \otimes w_\alpha \mapsto D$ mit $D_z = \sum_\alpha f_\alpha(z)(\mathrm{d}_e(z\cdot)w_\alpha)$. Gegeben eine Derivation $D \in \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$ werden andererseits Funktionen $f_\alpha : G \to k$ durch diese Gleichungen festgelegt, da wir im Gruppenfall sind und folglich die Differentiale der Linksmultiplikationen Isomorphismen $\mathrm{d}_e(z\cdot) : \mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_z G$ sind. Wir haben gewonnen, wenn wir zeigen können, daß unsere Funktionen f_α regulär sind. Für alle $h \in \mathcal{O}(G)$ und $z \in G$ haben wir aber

$$\begin{array}{rcl}
\sum_\alpha f_\alpha(z) w_\alpha(h) & = & (\mathrm{d}_z(z^{-1}\cdot)D_z)(h) \\
& = & D_z(\lambda(z)h) \\
& = & \delta_z D(\lambda(z)h) \\
& = & \delta_z D(\sum_i l_i(z) g_i) \\
& = & \sum_i l_i(z)(D g_i)(z)
\end{array}$$

für $\Delta(h) = \sum_i l_i \otimes g_i$. Nun finden wir sicher reguläre Funktionen $h_\beta \in \mathcal{O}(G)$ mit $w_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Setzen wir dann oben $h = h_\beta$ ein, so folgt, daß f_β regulär gewesen sein muß. □

Satz* 3.2.33 (Infinitesimale Operation). *Gegeben $G\curvearrowright X$ ein Varietät mit der Operation eines algebraischen Monoids und ein Tangentialvektor $\xi_e \in \mathrm{T}_e G$ ist das Vektorfeld auf X gegeben durch $x \mapsto \mathrm{d}_e(\cdot x)(\xi_e)$ algebraisch.*

Beweis. Nach 2.2.12 bilden die Einheiten von G eine offene Umgebung des neutralen Elements, folglich dürfen wir annehmen, daß G eine algebraische Gruppe ist. Nach 3.4.17 können wir ξ_e zu einem algebraischen Vektorfeld ξ auf einer offenen Umgebung $U \Subset G$ des neutralen Elements fortsetzen. Nach 3.2.37 können wir dazu das algebraische Vektorfeld $(\xi, 0)$ auf $U \times X$ bilden. Dessen Vorwärtsverwandter uner dem Isomorphismus von Varietäten $U \times X \xrightarrow{\sim} U \times X$ gegeben durch $(g, x) \mapsto (g, gx)$ ist dann auch ein algebraisches Vektorfeld ζ auf $U \times X$. Dessen Projektionsrestriktion $\operatorname{pres}_{e \times X} \zeta$ ist nach 3.2.38 mithin auch algebraisch. Man prüft nun leicht, daß es mit dem im Satz beschriebenen Vektorfeld zusammenfällt. $\square$

Übungen

Übung 3.2.34. $(k = \bar{k})$. Gegeben endlichdimensionale k-Vektorräume V, W und eine bilineare Abbildung $\varphi : V \times V \to W$ betrachten wir die algebraische Gruppe $\mathrm{O}(\varphi) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi(gv, gw) = \varphi(v, w)\ \forall v, w \in V\}$. Man zeige, daß die offensichtliche Abbildung eine Inklusion

$$\operatorname{Lie} \mathrm{O}(\varphi) \hookrightarrow \{X \in \operatorname{End} V \mid \varphi(Xv, w) + \varphi(v, Xw) = 0\ \forall v, w \in V\}$$

induziert. In vielen Fällen werden wir zeigen können, daß diese Inklusion sogar ein Isomorphismus ist. Daß das nicht immer gilt, zeigt der Fall $\varphi : k \times k \to k$ der Multiplikation in Charakteristik Zwei.

Übung 3.2.35. $(k = \bar{k})$. Gegeben eine endlichdimensionale k-Algebra A zeige man für die Liealgebra ihrer Automorphismengruppe $\operatorname{Alg}_k^{\times}(A) \subset \mathrm{GL}(A)$, daß unter den üblichen Identifikationen gilt

$$\operatorname{Lie}(\operatorname{Alg}_k^{\times}(A)) \subset \operatorname{Der}_k(A)$$

Man prüfe auch, daß das im Fall $A = k[X]/\langle X^p \rangle$ mit $\operatorname{char} k = p > 0$ eine echte Inklusion ist. In [ML] 1.3.11 dürfen Sie als Übung zeigen, daß das im Fall $k = \mathbb{C}$ stets eine Gleichheit ist. In 3.3.10 zeigen wir das allgemeiner für $\operatorname{char} k = 0$.

Übung 3.2.36. Für jeden Automorphismus φ einer algebraischen Gruppe G ist die Liealgebra der Gruppe der Fixpunkte enthalten in der Menge der Fixpunkte des Differentials, in Formeln $\operatorname{Lie}(G^{\varphi}) \subset (\operatorname{Lie} G)^{\mathrm{d}\varphi}$.

Übung 3.2.37 (**Verträglichkeit von Vektorfeldern mit Produkten**). Gegeben k-Varietäten X und Y zeige man, daß es genau einen Homomorphismus

$$\big(\mathcal{T}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y)\big) \oplus \big(\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{T}(Y)\big) \to \mathcal{T}(X \times Y)$$

gibt, der an allen Stellen $(x, y) \in X \times Y$ zu unserer Identifikation 3.1.24 spezialisiert. Sind X und Y beide affin, so zeige man darüberhinaus, daß er ein Isomorphismus ist. Hinweis: Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten 3.1.7.

Übung 3.2.38. Gegeben Varietäten X und Y und ein algebraisches Vektorfeld $v \in \mathcal{T}(X \times Y)$ und ein Punkt $y \in Y$ zeige man, daß $x \mapsto (\mathrm{d}_{(x,y)} \operatorname{pr}_X) v_{(x,y)}$ ein algebraisches Vektorfeld auf X ist. Hinweis: Man mag sich auf den affinen Fall zurückziehen und den Isomorphismus 3.2.37 verwenden. Wir nennen dies Vektorfeld auf X die **Projektionsrestriktion von** v **längs** y und notieren es $\operatorname{pres}_{X \times y}(v) \in \mathcal{T}(X)$.

Übung 3.2.39. Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ zeige man, daß die Abbildung $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ gegeben durch $\operatorname{ad} : X \mapsto [X, \ ]$ ein Homomorphismus von Liealgebren ist, der in den Derivationen unserer Liealgebra landet.

Übung 3.2.40 (**Final Vorwärtsverwandte algebraischer Vektorfelder**). Seien ein finaler Morphismus von Varietäten $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ und ein algebraisches Vektorfeld $A \in \mathcal{T}(X)$ gegeben. Gibt es ein zu A verwandtes Vektorfeld B auf Y, so ist auch B algebraisch.

3.3 Adjungierte Darstellung

Lemma 3.3.1 (Differential von Verknüpfung und Inversenbildung). *Gegeben ein algebraisches Monoid G ist das Differential der Multiplikation die Addition. Genauer ist die Verknüpfung*

$$\mathrm{T}_e G \oplus \mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{(e,e)}(G \times G) \xrightarrow{\mathrm{d}_e(\mathrm{mult})} \mathrm{T}_e G$$

die Addition im Vektorraum $\mathrm{T}_e G$. Im Gruppenfall ist weiter das Differential des Invertierens die Multiplikation mit (-1), in Formeln

$$\mathrm{d}_e(\mathrm{inv}) = (-1) : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e G$$

Beweis. Unsere Verknüpfung ist linear und ihre Restriktion auf beide Summanden ist das Differential der Identität, also die Identität. Das zeigt die erste Aussage. Die Verknüpfung $G \to G \times G \to G$ von $(\mathrm{inv}, \mathrm{id})$ mit der Multiplikation ist konstant, hat also Differential Null. Das zeigt die zweite Aussage. □

Definition 3.3.2. Sei G eine algebraische Gruppe. Gegeben $g \in G$ betrachten wir den Homomorphismus $\operatorname{int}(g) = \operatorname{int}_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ und setzen

$$\operatorname{Ad}(g) = \operatorname{Ad}_g := \mathrm{d}_e(\operatorname{int}_g) : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e G$$

3.3.3. Auf diese Weise erhalten wir zu jeder affinen algebraischen Gruppe G eine Darstellung, die **adjungierte Darstellung**

$$\operatorname{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_e G)$$

Diese Darstellung ist algebraisch nach Übung 3.1.40 im affinen Fall und nach 3.11.11 im allgemeinen. Explizit wird im affinen Fall $\mathcal{O}(G)$ mithilfe der $(\operatorname{int} g)$ eine algebraische Darstellung von G nach 1.4.6, darin ist $\mathcal{I}(1)/\mathcal{I}(1)^2$ ein Subquotient und nach 1.4.16 ebenfalls algebraisch, und $\mathrm{T}_e G$ ist nach 3.1.28 isomorph zur Kontragradienten $(\mathcal{I}(1)/\mathcal{I}(1)^2)^*$ dieser Darstellung.

3.3.4 (**Verträglichkeiten der adjungierten Darstellung**). Gegeben eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G und ein Element $g \in G$ ist die lineare Abbildung $\rho(g) : V \to V$ stets ein Homomorphismus von Darstellungen über dem Gruppenhomomorphismus $\operatorname{int}_g : G \to G$. In der Tat gilt für alle $x \in G$ die Identität

$$\rho(g)\rho(x) = \rho(\operatorname{int}_g x)\rho(g)$$

Insbesondere ist $\rho(g)$ nach 3.2.29 dann auch ein Homomorphismus der abgeleiteten Darstellung über Ad_g alias $\rho(g)(X \cdot_\rho v) = (\mathrm{Ad}_g X) \cdot_\rho (\rho(g)v)$ oder abgekürzt notiert

$$g(Xv) = (\mathrm{Ad}_g X)gv \quad \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V$$

3.3.5. Wenn wir die adjungierte Darstellung ableiten, erhalten wir eine Operation der Liealgebra unserer algebraischen Gruppe auf sich selber. Man notiert sie

$$\mathrm{ad} : \operatorname{Lie} G \to \mathfrak{gl}(\operatorname{Lie} G)$$

Satz 3.3.6 (Lieklammer und adjungierte Darstellung). *Für jede algebraische Gruppe G und alle $X, Y \in \operatorname{Lie} G$ gilt*

$$(\mathrm{ad}\, X)(Y) = [X, Y]$$

3.3.7. Das gilt fraglos auch für nicht notwendig affine algebraische Gruppen, aber es ist mir nicht gelungen, in dieser Allgemeinheit einen Beweis vertretbarer Länge auszuschreiben.

Beweis. Gegeben eine algebraische Darstellung V von G und ein Vektor $v \in V$ können wir unsere Verträglichkeiten der adjungierten Darstellung 3.3.4 umschreiben zur Identität

$$gXg^{-1}v = (\mathrm{Ad}_g X)v \quad \forall g \in G, X \in \operatorname{Lie} G, v \in V$$

Halten wir X und v fest und nehmen V endlichdimensional an, so ist das eine Gleichheit von Morphismen von Varietäten $G \to V$. Diese Morphismen haben dann notwendig auch dasselbe Differential am neutralen Element und durch Einsetzen von Y in dieses Differential und Nachschalten von richt ergibt sich die Identität

$$YXv - XYv = (\mathrm{ad}_Y X)v \quad \forall X, Y \in \operatorname{Lie} G, v \in V$$

Um im vorhergehenden das Differential auf der linken Seite zu brechnen, mag man sie als Vernüpfung der diagonalen Einbettung $G \to G \times G$ mit der Abbildung $(g, h) \mapsto gXh^{-1}v$ schreiben. Wie auch immer folgt $[Y, X]v = (\mathrm{ad}_Y X)v$ für alle Vektoren v aller algebraischen Darstellungen V von G. Um $[Y, X] = (\mathrm{ad}_Y X)$ zu zeigen, müssen wir also nur eine algebraische Darstellung finden, auf der verschiedene Elemente der Liealgebra auch durch verschiedene Endomorphismen operieren. Das leistet etwa jede Einbettung in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums oder nach 3.2.24 auch die rechtsreguläre Darstellung. □

Zweiter Beweis. Sei ξ das linksinvariante Vektorfeld auf G mit $\xi_e = X$. Das linksinvariante Vektorfeld ζ mit $\zeta_e = (\mathrm{Ad}\, g)X$ entspricht dann der Derivation $f \mapsto \rho(g^{-1})\xi\rho(g)f$. □

Beweis. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ zurück, den wir dann durch explizite Rechnung erledigen. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von algebraischen Gruppen kommutiert sicher für alle $g \in G$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{int}\, g"'] & H \arrow[d, "\mathrm{int}\, \varphi(g)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

und mithin auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}\, g"'] & \mathrm{T}_e H \arrow[d, "\mathrm{Ad}\, \varphi(g)"] \\ \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\mathrm{d}_e\varphi"] & \mathrm{T}_e H \end{tikzcd}$$

In anderen Worten ist $\mathrm{d}_e\varphi : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e H$ ein Homomorphismus von Darstellungen über unserem Gruppenhomomorphismus. Nach 3.2.29 ist diese Abbildung dann auch ein Homomorphismus der abgeleiteten Darstellungen über dem induzierten Homomorphismus von Liealgebren, aus $\mathrm{d}_e\varphi : X \mapsto A$ und $\mathrm{d}_e\varphi : Y \mapsto B$ folgt also $(\mathrm{d}_e\varphi) : (\mathrm{ad}\, X)(Y) \mapsto (\mathrm{ad}\, A)(B)$. Andererseits folgt aus 3.2.19 auch $(\mathrm{d}_e\varphi) : [X, Y] \mapsto [A, B]$. Ist speziell $\varphi : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine abgeschlossene Einbettung, so folgt der Satz für G, sobald wir ihn für $\mathrm{GL}(V)$ zeigen können. Sei also V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $G = \mathrm{GL}(V) \circledcirc \mathrm{End}\, V$. Mithilfe von 3.1.26 erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{richt} : \mathrm{T}_e G \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, V$$

Er wird selten überhaupt notiert, aber hier notieren wir ihn ausnahmsweise durch $X \mapsto \bar{X}$. Ich behaupte, daß unter diesem Isomorphismus unser $\mathrm{ad} : \mathrm{T}_e G \to$

$\operatorname{End} \mathrm{T}_e G$ der Abbildung $\operatorname{End} V \to \operatorname{End}(\operatorname{End} V)$, $A \mapsto [A, \ ]$ entspricht, mit $[A, B] = AB - BA$ dem üblichen Kommutator im Endomorphismenring $\operatorname{End} V$. Für $g \in G$ ist $(\operatorname{int} g)$ die Restriktion einer linearen Abbildung auf $\operatorname{End} V$ und wir erhalten somit für alle $g \in G$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{d}_e(\operatorname{int} g) = \operatorname{Ad} g"'] & \operatorname{End} V \arrow[d] & \ni A \arrow[d, mapsto] \\ \mathrm{T}_e G \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{End} V & \ni gAg^{-1} \end{tikzcd}$$

Wir notieren die rechte Vertikale meist auch $\operatorname{Ad} g : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$, $A \mapsto gAg^{-1}$ und erhalten so $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{GL}(\operatorname{End} V)$. Um hinwiederum das Differential dieser Abbildung zu berechnen, schreiben wir sie als Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc} G & \to & G \times G & \to & \operatorname{GL}(\operatorname{End} V) \\ g & \mapsto & (g, g^{-1}) & & \\ & & (x, y) & \mapsto & (A \mapsto xAy) \end{array}$$

und bilden die zugehörigen Tangentialräume und Differentiale beim neutralen Element und seinen Bildern. Das liefert die obere Horizontale im Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_e G \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{T}_{(1,1)}(G \times G) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\wr"] & \mathrm{T}_e \operatorname{GL}(\operatorname{End} V) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathrm{T}_e G \oplus \mathrm{T}_e G \arrow[u, shift left] \arrow[r, dashed] & \operatorname{End}(\operatorname{End} V) \end{tikzcd}$$

Wir interessieren uns für die als Strichpfeile eingezeichneten Verknüpfungen. Der schräge Strichelpfeil wird nach 3.3.1 gegeben durch $X \mapsto (X, -X)$. Der waagerechte Strichelpfeil bildet offensichtlich $(X, 0)$ auf $(\bar{X} \cdot)$ ab und $(0, Y)$ auf $(\cdot \bar{Y})$. Zusammen geht also X auf $[\bar{X}, \ ]$. $\square$

Satz 3.3.8 (Jordan-Zerlegung in Lie-Algebren algebraischer Monoide). *1. Gegeben ein affines algebraisches Monoid G besitzt jedes Element $X \in \operatorname{Lie} G$ genau eine Zerlegung $X = X_{\mathrm{s}} + X_{\mathrm{n}}$ mit $\grave{X}_{\mathrm{s}} \in \operatorname{End}_k \mathcal{O}(G)$ diagonalisierbar, $\grave{X}_{\mathrm{n}} \in \operatorname{End}_k \mathcal{O}(G)$ lokal nilpotent und $[X_{\mathrm{s}}, X_{\mathrm{n}}] = 0$;*

2. *Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von affinen algebraischen Monoiden gilt $\mathrm{d}\varphi(X_{\mathrm{s}}) = (\mathrm{d}\varphi(X))_{\mathrm{s}}$ und $\mathrm{d}\varphi(X_{\mathrm{n}}) = (\mathrm{d}\varphi(X))_{\mathrm{n}}$;*

3. *Für das Monoid $G = \operatorname{End}(V)$ entspricht unter dem kanonischen Isomorphismus $\operatorname{richt} : \operatorname{Lie} G \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$ die absolute Jordan-Zerlegung der konkreten Jordan-Zerlegung.*

Beweis. Wir stützen uns auf das anschließende Lemma 3.3.9. Ist speziell $A = \mathcal{O}(G)$ und $X \in \operatorname{Lie} G$ eine linksinvariante Derivation, so wirkt X lokal endlich nach 3.2.24 und wir erhalten unmittelbar die gewünschte Zerlegung in $\operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$. Des weiteren sind wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung auch X_s und X_n linksinvariant und Teil 1 ist bewiesen. Teil 2 folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(H) \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{d}\varphi)(X)"'] & \mathcal{O}(G) \arrow[d, "X"] \\ \mathcal{O}(H) \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \end{tikzcd}$$

mit der Funktorialität der Jordan-Zerlegung. Man muß nur beachten, daß dies Diagramm bereits $(\mathrm{d}\varphi)(X)$ als linksinvariantes Vektorfeld eindeutig festlegt. Teil 3 zeigt man analog wie die analoge Aussage zur Jordan-Zerlegung in affinen algebraischen Monoiden in 1.5.5 durch Einbettung von V in eine endliche direkte Summe von Kopien der rechtsregulären Darstellung von G. $\square$

Lemma 3.3.9 (Jordan-Zerlegung von Derivationen). *Seien k ein Körper und $(A, *)$ eine nicht notwendig assoziative k-Algebra und $\partial : A \to A$ eine lokal endliche Derivation und $A_\lambda := \operatorname{Hau}(\partial; \lambda)$ der Hauptraum von ∂ zum Eigenwert λ. So gilt*

$$A_\lambda * A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$$

Ist zusätzlich A die Summe seiner Haupträume, so sind auch der halbeinfache und der nilpotente Anteil ∂_s und ∂_n von ∂ Derivationen von A.

Beweis. In der Tat gilt für $\lambda, \mu \in k$ und $a, b \in A$ sicher

$$(\partial - (\lambda + \mu))(a * b) = ((\partial - \lambda)a) * b + a * ((\partial - \mu)b)$$

Induktiv erhalten wir mühelos

$$(\partial - (\lambda + \mu))^n (a * b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\partial - \lambda)^i (a) * (\partial - \mu)^{n-i}(b)$$

Aus $a \in A_\lambda$ und $b \in A_\mu$ folgt damit $a * b \in A_{\lambda+\mu}$. Insbesondere erhalten wir so $\partial_\mathrm{s}(a * b) = (\partial_\mathrm{s} a) * b + a * (\partial_\mathrm{s} b)$ und ∂_s ist auch eine Derivation. Dasselbe folgt für $\partial_\mathrm{n} = \partial - \partial_\mathrm{s}$. $\square$

3.3.10 (**Automorphismen und Derivationen**). Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\operatorname{char}(k) = 0$ und $(A, *)$ eine endlichdimensionale k-Algebra und $\partial : A \to A$ eine Derivation und $A_\lambda := \operatorname{Hau}(\partial; \lambda)$ der Hauptraum von ∂ zum Eigenwert λ und $X \subset k$ die von den λ mit $A_\lambda \neq 0$ erzeugte additive Untergruppe. So trägt A eine X-Graduierung und unter der Äquivalenz

1.7.19 oder noch besser der Schmelzäquivalenz 1.7.20 entspricht sie einer Operation der diagonalisierbaren Gruppe $\mathfrak{D}(X)$ durch Algebrenautomorphismen und man sieht, daß ∂_{s} im Bild von $\operatorname{Lie}\mathfrak{D}(X)$ liegt. Andererseits, und erst hier brauchen wir $\operatorname{char}(k) = 0$, liefert ∂_{n} eine algebraisch Operation der additiven Gruppe k durch Algebrenautomorphismen vermittels $t \mapsto \exp(t\partial_{\mathrm{n}})$, vergleiche [HL] 2.4.3. Wir erkennen so, daß in unserem Fall und insbesondere unter der Annahme $\operatorname{char}(k) = 0$ gilt

$$\operatorname{Lie}(\operatorname{Alg}_k^{\times}(A)) = \operatorname{Der}_k(A)$$

In 3.2.35 hatten wir gesehen, daß ohne Einschränkungen an die Charakteristik im allgemeinen nur die Inklusion $\subset$ gilt.

Übungen

Übung 3.3.11. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und ein Element $g \in G$ betrachte man den Morphismus $\beta : G \to G$, $h \mapsto hgh^{-1}g^{-1}$ und zeige die Formel $(\mathrm{d}_e\beta)(Y) = Y - \operatorname{Ad}_g(Y)\ \forall Y \in \operatorname{Lie} G$.

Übung 3.3.12. Gegeben algebraische Darstellungen V, W eines algebraischen Monoids ist auch $V \otimes W$ eine algebraische Darstellung mit der Operation $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$. Das Differential dieser Darstellung wird beschrieben durch die Formel

$$X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw \quad \forall X \in \operatorname{Lie} G, v \in V, w \in W$$

Übung 3.3.13. Gegeben eine algebraische Darstellung V eines algebraischen Monoids ist auch die äußere Algebra $\bigwedge V$ mit der offensichtlichen Gruppenwirkung eine algebraische Darstellung. Das Differential dieser Darstellung wird beschrieben durch die Formel

$$X(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} v_1 \wedge \ldots \wedge Xv_i \wedge \ldots \wedge v_r$$

Ergänzende Übung 3.3.14. Die Liealgebra eines Nomalteilers einer algebraischen Gruppe ist ein Ideal in der Liealgebra der ursprünglichen Gruppe.

Übung 3.3.15. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Man zeige, daß die Fortsetzung eines Elements der Liealgebra durch ein linksinvariantes Vektorfeld als diagonalisierbare beziehungsweise nilpotente Derivation operiert genau dann, wenn seine Fortsetzung durch ein rechtsinvariantes Vektorfeld diese Eigenschaft hat. Mir ist nicht klar, ob dasselbe auch im Fall von Monoiden gilt.

Übung 3.3.16. Die Liealgebra einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe besteht aus nilpotenten Elementen. Die Liealgebra einer diagonalisierbaren affinen algebraischen Gruppe besteht aus halbeinfachen Elementen.

3.4 Differentiale und Kotangentialräume

Definition 3.4.1. Seien k ein Kring, A ein k-Kring, $A \otimes_k A \to A$ die Multiplikation und I ihr Kern. Wir bezeichnen mit $\langle I^2 \rangle$ oder auch abkürzend I^2 das von allen Produkten von zwei Elementen von I erzeugte Ideal und setzen

$$\Omega_{A/k} := I/I^2$$

und nennen diesen Raum den **Modul der Differentiale von** A **über** k. Er ist in natürlicher Weise ein Modul über $(A \otimes_k A)/I$ und wird vermittels des durch die Multiplikation gegebenen Isomorphismus $(A \otimes_k A)/I \xrightarrow{\sim} A$ ein A-Modul. Manchmal spricht man auch ausführlicher vom **Modul der Kähler-Differentiale**. Ist k noethersch und A ringendlich über k oder auch nur $A \otimes_k A$ noethersch, so ist der Modul der Differentiale endlich erzeugt.

3.4.2. Für die beiden Ringhomomorphismen $A \to A \otimes_k A$, die gegeben werden durch $a \mapsto a \otimes 1$ und $a \mapsto 1 \otimes a$, ist die Verknüpfung mit der Multiplikation die Identität auf A.

3.4.3. Der Kern I der Multiplikation $A \otimes_k A \to A$ wird als Ideal erzeugt von den Elementen $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ mit $a \in A$. Liegt in der Tat $\sum a_i \otimes b_i$ in unserem Kern, so gilt

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i \otimes b_i - \sum 1 \otimes a_i b_i = \sum (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)(1 \otimes b_i)$$

Satz 3.4.4 (Universelle Eigenschaft des Moduls der Differentiale). *Seien k ein Kring und A ein k-Kring. Die Abbildung $\mathrm{d} : A \to \Omega_{A/k}$ gegeben durch die Vorschrift $a \mapsto \mathrm{d}a := (a \otimes 1 - 1 \otimes a) + \langle I^2 \rangle$ ist eine k-lineare Derivation im Sinne von 3.1.1 und für alle A-Moduln M liefert das Vorschalten von d einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

3.4.5. Unser Element $\mathrm{d}a \in \Omega_{A/k}$ heißt das **Differential von** a. Nach 3.4.3 wird der Modul der Differentiale als A-Modul erzeugt von den Differentialen $\mathrm{d}a$ der Elemente $a \in A$. Manchmal verfeinern wir die Notation zu $\mathrm{d}a = \mathrm{d}_{A/k}a$.

3.4.6 (**Derivationen und Differentiale**). Im folgenden übersetzen wir verschiedene Eigenschaften von Derivationen in die Sprache der Differentiale. In der Sprache der Differentiale gelten viele Aussagen in größerer Allgemeinheit als in der dualen Sprache der Derivationen. Die Sprache der Derivationen hinwiederum ist zumindest meiner Anschauung besser zugänglich und spielt auch in den hier gegebenen Beweisen eine wichtige Rolle.

Beweis. Wir prüfen unschwer für alle $a, b \in A$ die Identitäten $\mathrm{d}(ab) = ab \otimes 1 - 1 \otimes ab = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)b + a(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = b\mathrm{d}a + a\mathrm{d}b$ in $\Omega_{A/k}$. Das zeigt die erste Aussage. Zum Beweis der Zweiten konstruieren wir eine inverse Abbildung. Gegeben $D \in \mathrm{Der}_k(A, M)$ betrachten wir die Abbildung $D_1 : A \otimes_k A \to M$, $a \otimes b \mapsto -aD(b)$. Sicher annulliert D_1 alle Produkte $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = ab \otimes 1 + 1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a$ und liefert nach 3.4.3 folglich eine Abbildung $D_1 : \Omega_{A/k} \to M$. Diese Abbildung D_1 muß A-linear sein, weil das bereits für $D_1 : A \otimes_k A \to M$ gilt in Bezug auf die A-Operation auf $A \otimes_k A$ vermittels der Multiplikation auf den ersten Faktor. □

Beispiel 3.4.7 (**Differentiale von Polynomringen**). Gegeben ein Kring k ist der Modul der Differentiale $\Omega_{k[T]/k}$ ein freier $k[T]$-Modul mit Basis $\mathrm{d}T$. In der Tat folgt das mit der universellen Eigenschaft 3.4.4 leicht aus der Beschreibung der k-linearen Derivationen des Polynomrings in 3.1.5, nach dem eine k-lineare Derivation $k[T] \to M$ in einen $k[T]$-Modul M festgelegt und festlegbar ist durch das Bild $m \in M$ der Variablen T und gegeben wird durch $P \mapsto P'm$. Gegeben ein Polynom $P \in k[T]$ haben wir insbesondere für die universelle Derivation

$$\mathrm{d}P = P'\mathrm{d}T$$

Wenn wir direkt von der Definition ausgehen, finden wir alternativ $k[T_1, T_2] \xrightarrow{\sim} k[T] \otimes_k k[T]$ mit $T_1 \mapsto T \otimes 1$ und $T_2 \mapsto 1 \otimes T$ und darunter $\langle T_1 - T_2 \rangle \xrightarrow{\sim} I$ und $\langle (T_1 - T_2)^2 \rangle \xrightarrow{\sim} \langle I^2 \rangle$ und sehen so auch ganz explizit ein weiteres Mal, daß $\mathrm{d}T$ eine Basis des $k[T]$-Moduls $\Omega_{k[T]/k}$ ist.

Beispiel 3.4.8 (**Differentiale von Polynomringen in mehreren Veränderlichen**). Gegeben ein Kring k ist der Modul der Differentiale $\Omega_{k[T_1,\dots,T_n]/k}$ ein freier Modul über $k[T_1, \dots, T_n]$ mit Basis $\mathrm{d}T_1, \dots, \mathrm{d}T_n$. In der Tat folgt das mit der universellen Eigenschaft leicht aus der Beschreibung der k-linearen Derivationen des Polynomrings in 3.1.9. Gegeben ein Polynom P haben wir dann

$$\mathrm{d}P = \frac{\partial P}{\partial T_1}\mathrm{d}T_1 + \dots + \frac{\partial P}{\partial T_n}\mathrm{d}T_n$$

Analog bilden auch für einen Polynomring in einer beliebigen Menge von Variablen die Differentiale der Variablen eine Basis des Moduls der Differentiale.

3.4.9. Gegeben eine bepunktete k-Varietät (X, x) heißt der Dualraum $\mathrm{T}^*_x X := \mathrm{Hom}_k(\mathrm{T}_x X, k)$ des Tangentialraums an X bei x der **Kotangentialraum an** X **bei** x. Ein Element des Kotangentialraums heißt auch ein **Kovektor**. Für $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ der Kern des Auswertungshomomorphismus liefert das Transponieren unseres Isomorphismus aus 3.1.30 einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\mathrm{T}^*_x X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$$

Proposition 3.4.10 (Geometrische Halme des Moduls der Differentiale). *Gegeben ein Kring k und ein k-Kring A und eine Spaltung $A \to k$ des strukturierenden Homomorphismus $k \to A$ und $\mathfrak{m} := \ker(A \to k)$ ihr Kern induziert die Abbildung $f \mapsto 1 \otimes \mathrm{d}f$ einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} k \otimes_A \Omega_{A/k}$$

Beispiel 3.4.11 (**Kotangentialraum durch Differentiale**). Speziell erhalten wir daraus als die Verknüpfung mit zwei weiteren natürlichen Isomorphismen unseren Isomorphismus

$$\mathrm{Der}_k(A, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(k \otimes_A \Omega_{A/k}, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$$

aus 3.1.28. Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ und einer bepunkteten k-Varietät (X, x) mit dem lokalen Ring $A := \mathcal{O}_{X,x}$ spezialisiert er zu unserem Isomorphismus $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ aus 3.1.30 und induziert den ersten Isomorphismus einer Sequenz von Isomorphismen

$$\mathrm{T}_x^* X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$$

Ist unsere bepunktete Varietät X affin, so erhalten wir in derselben Weise mit $A := \mathcal{O}(X)$ und $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}(X)$ dem Kern des Auswertungshomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow k$ eine Sequenz von Isomorphismen

$$\mathrm{T}_x^* X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

Salopp gesprochen ist also der geometrische Halm bei x des Moduls der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ der Kotangentialraum.

Erster Beweis. Wir prüfen zunächst, daß unsere Abbildung wohldefiniert ist. Wegen der Leinbizregel $\mathrm{d}(gf) = g(\mathrm{d}f) + f(\mathrm{d}g)$ wird darunter aber in der Tat jedes Element aus $\mathfrak{m}^2$ zu Null. Jetzt konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Bezeichne wieder $I \subset A \otimes_k A$ den Kern der Multiplikation. Unter dem Kringhomomorphismus $A \otimes_k A \to A \otimes_k k \xrightarrow{\sim} A$ wird offensichtlich I nach $\mathfrak{m}$ abgebildet und er induziert folglich einen Morphismus $\Omega_{A/k} = I/I^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ und dann auch einen Morphismus $k \otimes_A \Omega_{A/k} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, der für $f \in \mathfrak{m}$ sicher $1 \otimes \mathrm{d}f = 1 \otimes (f \otimes 1 - 1 \otimes f)$ auf $f + \mathfrak{m}^2$ abbildet. Folglich sind unsere beiden Homomorphismen von A-Moduln zueinander invers. □

Zweiter Beweis. Die beim Beweis von 3.1.28 gegebenen Argumente zeigen auch, daß für jeden k-Modul M die Einschränkung einer Derivation auf $\mathfrak{m}$ einen Isomorphismus $\mathrm{Der}_k(A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, M)$ induziert. Den daraus mit der universellen Eigenschaft des Moduls der Differentiale entstehenden Isomorphismus können wir nach der universellen Eigenschaft der Erweiterung der Skalare faktorisieren als

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(k \otimes_A \Omega_{A/k}, M) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, M)$$

Also muß hier auch die zweite Abbildung ein Isomorphismus sein, und da das für alle k-Moduln M gilt, folgt die Proposition mit dem Yoneda-Lemma oder auch einfacheren dem speziellen Fall angepaßten Argumenten. □

3.4.12. Ein **Kovektorfeld** ω auf einer Varietät X ist eine Vorschrift, die jedem Punkt $x \in X$ ein Element $\omega_x \in \mathrm{T}_x^* X$ des Kotangentialraums bei x zuordnet. Gegeben eine affine k-Varietät X liefert jedes Differential $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ ein Kovektorfeld auf X vermittels der Vorschrift, daß $\omega_x \in \mathrm{T}_x^* X$ das Urbild von $1 \otimes \omega$ sein soll unter dem Isomorphismus $\mathrm{T}_x^* X \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ aus 3.4.11.

3.4.13 (**Glattheit impliziert Projektivität des Moduls der Differentiale**). Wir erinnern aus [KAG] 7.4.15, daß eine Varietät X glatt heißt, wenn gilt

$$\mathrm{kdim}_x X = \dim_k \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \quad \forall x \in X$$

Wir erinnern weiter daran, daß nach [KAG] 7.4.16 jede glatte Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten ist. Gegeben eine affine Varietät X ist andererseits der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ endlich erzeugt. Ist unsere affine Varietät X zusätzlich X glatt, so hat der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ geometrische Halme von lokal konstanter Dimension und ist nach [KAG] 4.6.19 folglich projektiv alias lokal frei.

3.4.14 (**Differentiale als Kovektorfelder**). Gegeben eine glatte affine Varietät ist unsere Abbildung aus 3.4.12 nach der Projektivität des Moduls der Differentiale 3.4.13 eine Injektion vom Modul der Differentiale in die Menge der Kovektorfelder. Ein Kovektorfeld auf einer glatten Varietät nennen wir **algebraisch**, wenn jeder Punkt eine offene affine Umgebung U besitzt derart, daß die Restriktion unseres Kovektorfelds auf U von einem Differential aus $\Omega_{\mathcal{O}(U)/k}$ herkommt. Nach Übung [KAG] 6.4.23 kann jede affine offene Umgebung eines Punkts in einer affinen Varietät zu einer offenen Umgebung verkleinert werden, die sowohl in Bezug auf unsere ursprüngliche affine Varietät als auch in Bezug auf unsere affine offene Umgebung eine Nichtnullstellenmenge ist. Nach dem lokal-global-Prinzip aus [KAG] 4.3.43 liefert unsere Konstruktion 3.4.12 also für jede glatte affine Varietät eine Bijektion zwischen $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ und der Menge der algebraischen Kovektorfelder auf X.

3.4.15. Jede algebraische Gruppe G ist glatt, da nach [KAG] 7.5.5 in jeder Varietät die regulären Punkte eine offene dichte Teilmene bilden. Insbesondere bilden die Differentiale auf jeder offenen affinen Teilmenge $U \circledcirc G$ einen projektiven

$\mathcal{O}(U)$-Modul. Man kann das aber auch einfacher wie in 3.4.13 direkt mit [KAG] 4.6.19 daraus folgern, daß der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(U)/k}$ geometrische Halme konstanter Dimension hat.

3.4.16 (**Vektorfelder auf glatten Varietäten**). Gegeben eine bepunktete affine k-Varietät (X, x) liefern die universelle Eigenschaft des Moduls der Differentiale und 3.2.7 und unsere Definitionen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}, \mathcal{O}(X)) & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(X) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{T}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}, k_x) & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathrm{T}_x X \end{array}$$

Ist X glatt, so ist der Modul der Differentiale $\Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ projektiv nach 3.4.13, und da er auch endlich erzeugt ist, induziert die linke Vertikale einen Isomorphismus vom geometrischen Halm ihres Ausgangspunkts zu ihrem Zielpunkt. Wir folgern, daß für jede glatte affine Varietät X auch die algebraischen Vektorfelder einen endlich erzeugten projektiven $\mathcal{O}(X)$-Modul $\mathcal{T}(X)$ bilden und daß das Auswerten eines Vektorfelds an einem Punkt $x \in X$ einen Isomorphismus

$$k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{T}(X) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_x X$$

des geometrischen Halms des Moduls der algebraischen Vektorfelder mit dem Tangentialraum induziert.

3.4.17. Jeder Tangentialvektor an einem Punkt einer algebraischen Gruppe kann zu einem algebraischen Vektorfeld auf einer offenen Umgebung besagten Punktes fortgesetzt werden. Das folgt direkt aus 3.4.16 und der Erkenntnis, daß jede algebraische Gruppe glatt ist.

3.4.18 (**Anschauung für relative Differentiale**). Seien $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen k-Varietäten und $B \to A$ eine abkürzende Notation für den zugehörigen Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Es fällt mir schwer, eine unmittelbare Anschauung für den Modul der Differentiale $\Omega_{A/B}$ zu geben, der in diesem Fall auch der **Modul der relativen Differentiale** heißt. Der duale Modul

$$\operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/B}, A) \cong \operatorname{Der}_B A \subset \operatorname{Der}_k A$$

kann jedoch anschaulich interpretiert werden als der Modul derjenigen algebraischen Vektorfelder auf X, die alle von Y zurückgeholten Funktionen annullieren. In besonders einfachen Situationen können diese Vektorfelder auch geometrisch beschrieben werden als diejenigen Vektorfelder, die tangential sind an die Fasern von φ. Insbesondere gilt das, wenn für alle $y \in Y$ die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $A \otimes_B k_y \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(\varphi^{-1}(y))$ ist. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen k-Varietäten, so verwenden wir für den $\mathcal{O}(X)$-Modul der relativen Differentiale auf X auch gerne die abkürzenden Notationen

$$\Omega(X/Y) = \Omega(\varphi) = \Omega_{\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(Y)}$$

3.4.19 (**Funktorialität des Moduls der Differentiale**). Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kringen

$$\begin{array}{ccc} A & \to & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \to & D \end{array}$$

erhalten wir einen Modulhomomorphismus $\Omega_{A/B} \to \Omega_{C/D}$ über dem Kringhomomorphismus $\varphi : A \to C$ mit der Eigenschaft $\mathrm{d}a \mapsto \mathrm{d}(\varphi(a))$ in offensichtlicher Weise. Im geometrischen Fall und für $B = D = k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper nennt man diesen Homomorphismus das **Zurückholen von Kovektorfeldern**. Für jeden C-Modul N kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_B(A, N) & \leftarrow & \mathrm{Der}_D(C, N) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, N) & \leftarrow & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/D}, N) \end{array}$$

mit der durch diesen Homomorphismus induzierten Abbildung rechts und den hoffentlich offensichtlichen Abbildungen sonst.

Ergänzung 3.4.20 (**Invariante Differentiale auf algebraischen Gruppen**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G betrachte man die Multiplikation und die Projektion auf die zweite Koordinate $\mu, \mathrm{pr}_2 : G \times G \to G$ sowie die natürliche Abbildung $\mathrm{can} : \Omega(G \times G) \to \Omega(G \times G/G \times 1)$. Ein Kovektorfeld $\omega \in \Omega(G)$ ist genau dann linksinvariant, wenn gilt

$$\mathrm{can}\, \mu^* \omega = \mathrm{can}\, \mathrm{pr}_2^* \omega$$

Lemma 3.4.21 (Differentiale und Lokalisierung). *1. Gegeben ein Kringhomomorphismus $B \to A$ und eine Teilmenge $S \subset A$ liefert die von $A \to S^{-1}A$ induzierte Abbildung $\Omega_{A/B} \to \Omega_{S^{-1}A/B}$ einen Isomorphismus von $(S^{-1}A)$-Moduln*

$$S^{-1}\Omega_{A/B} \xrightarrow{\sim} \Omega_{S^{-1}A/B}$$

2. Faktorisiert ein Kringhomomorphismus $B \to A$ für eine Teilmenge $T \subset B$ über $T^{-1}B$, so ist die davon induzierte Abbildung ein Isomorphismus

$$\Omega_{A/B} \xrightarrow{\sim} \Omega_{A/T^{-1}B}$$

Beweis. Um die erste Aussage zu sehen, muß man nach dem Yonedalemma oder einfacher nach [LA2] 7.1.24 nur prüfen, daß die fragliche Abbildung für jeden $(S^{-1}A)$-Modul M eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{s^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/B}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/B}, M)$$

induziert. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/B}, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/B}, M) \\
& \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, M) \arrow[u, "\wr"'] \\
\mathrm{Der}_B(S^{-1}A, M) \arrow[uu, "\wr"'] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Der}_B(A, M) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

und führen so die Behauptung auf unsere Erkenntnisse 3.1.10 über die Verträglichkeit von Derivationen mit Lokalisierungen zurück. Die zweite Aussage ist offensichtlich. □

Beispiel 3.4.22 (**Differentiale von Funktionenkörpern**). Gegeben ein Körper k ist $\Omega_{k(T_1,\ldots,T_n)/k}$ ein freier $k(T_1, \ldots, T_n)$-Modul mit der Basis $\mathrm{d}T_1, \ldots, \mathrm{d}T_n$.

Proposition 3.4.23 (Derivationen und Lokalisierung). *Seien B ein Kring, A ein B-Kring und $S \subset A$ eine Teilmenge. Ist der A-Modul $\Omega_{A/B}$ der Differentiale endlich präsentiert, so induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus*

$$S^{-1}\,\mathrm{Der}_B(A, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_B(S^{-1}A, S^{-1}A)$$

3.4.24. Insbesondere gilt das also, wenn B noethersch ist und A ringendlich über B, oder nach 3.4.21 auch, wenn B noethersch ist und A eine Lokalisierung einer ringendlichen B-Kringalgebra. Für ein Gegenbeispiel nehmen wir einen Körper k und betrachten $A = k[X_1, X_2, \ldots]$ und $S = \{X_1, X_2, \ldots\}$. So ist die geeignet interpretierte unendliche Summe $\sum X_i^{-1}\partial_i$ eine k-lineare Derivation von $S^{-1}A$, die nicht im Bild von $S^{-1}\,\mathrm{Der}_k(A, A)$ liegt.

Beweis. Gegeben B ein Kring, A ein B-Kring und $S \subset A$ eine Teilmenge sei $\mathrm{Der}_B(A, A) \to \mathrm{Der}_B(A, S^{-1}A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_B(S^{-1}A, S^{-1}A)$ die Komposition des Nachschaltens von $A \to S^{-1}A$ mit dem Isomorphismus aus 3.1.10. Sie induziert einen Homomorphismus

$$S^{-1}\,\mathrm{Der}_B(A, A) \to \mathrm{Der}_B(S^{-1}A, S^{-1}A)$$

Unter unseren Identifikationen 3.4.4 entspricht er dem natürlichen Homomorphismus

$$S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, A) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/B}, S^{-1}A)$$

aus [KAG] 4.3.34. Er ist nach [KAG] 4.3.34 ein Isomorphismus, falls der A-Modul $\Omega_{A/B}$ endlich präsentiert ist. □

3.4.25 (**Vektorfelder und Lokalisierung**). Gegeben X eine affine Varietät und $A := \mathcal{O}(X)$ ihr Ring von regulären Funktionen und $S = \{f\}$ für $f \in \mathcal{O}(X)$ entspricht die Abbildung aus 3.4.23 unter unseren Isomorphismen aus 3.2.7 der Restriktion von algebraischen Vektorfeldern $\mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X_f)$. In diesem Fall liefert also die Restriktion von algebraischen Vektorfeldern $\mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X_f)$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}(X)_f \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{T}(X_f)$$

zwischen der Lokalisierung nach f des Raums der algebraischen Vektorfelder und dem Raum der algebraischen Vektorfelder auf dem Komplement der Nullstellenmenge von f.

Proposition 3.4.26 (Differentiale sukzessiver Kringerweiterungen). *Gegeben Kringhomomorphismen $k \to B$ und $\varphi : B \to A$ erhalten wir die* **rechtsexakte Sequenz der Differentiale**

$$A \otimes_B \Omega_{B/k} \to \Omega_{A/k} \twoheadrightarrow \Omega_{A/B}$$

mit $1 \otimes \mathrm{d}b \mapsto \mathrm{d}(\varphi(b))$ unter dem ersten Pfeil und $\mathrm{d}b \mapsto \mathrm{d}b$ unter dem Zweiten. Ist φ surjektiv, so gilt $\Omega_{A/B} = 0$ und wir erhalten eine Verlängerung unserer Sequenz zu einer Beschreibung der **Differentiale auf Quotienten** *durch die rechtsexakte Sequenz*

$$A \otimes_B \ker \varphi \to A \otimes_B \Omega_{B/k} \twoheadrightarrow \Omega_{A/k}$$

mit $1 \otimes b \mapsto 1 \otimes \mathrm{d}b$ als erster Abbildung.

3.4.27. Insbesondere impliziert unser Lemma 3.4.21 über die Verträglichkeit von Differentialen mit Lokalisierungen, daß für jeden Kring B und jede Teilmenge $S \subset B$ gilt $\Omega_{S^{-1}B/B} = 0$. Mit $I := \ker \varphi$ induziert $I \stackrel{\sim}{\to} B \otimes_B I \twoheadrightarrow A \otimes_B I$ darüberhinaus einen Isomorphismus $I/I^2 \stackrel{\sim}{\to} A \otimes_B \ker \varphi$.

Beispiel 3.4.28 (**Differentiale im geometrischen Fall**). ($k = \bar{k}$). Ist $X \overset{\text{\tiny A}}{\subset} k^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f_1, \ldots, f_r$ ein Erzeugendensystem ihres Verschwindungsideals $\mathcal{I}(X)$, so liefert die Beschreibung der Differentiale auf Quotienten 3.4.26 zusammen mit unseren Erkenntnissen 3.4.8 über die Differentiale von Polynomringen einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)\mathrm{d}T_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(X)\mathrm{d}T_n / \langle \mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_r \rangle \ \stackrel{\sim}{\to}\ \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

des freien $\mathcal{O}(X)$-Moduls über der Basis der $\mathrm{d}T_i$ modulo dem von den Bildern der $\mathrm{d}f_j$ erzeugten Untermodul mit dem Modul der Differentiale von $\mathcal{O}(X)$.

Beispiel 3.4.29 (**Differentiale im allgemeinen Fall**). Sind k ein beliebiger Kring und $f_1, \ldots, f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome und $A := k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ der entsprechende Quotient des Polynomrings, so liefert unsere Beschreibung der

Differentiale auf Quotienten 3.4.26 zusammen mit unseren Erkenntnissen 3.4.8 über die Differentiale von Polynomringen einen Isomorphismus

$$(A\mathrm{d}T_1 \oplus \ldots \oplus A\mathrm{d}T_n) / \langle \mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_r \rangle \stackrel{\sim}{\to} \Omega_{A/k}$$

des freien A-Moduls über der Basis der $\mathrm{d}T_i$ modulo dem von den Bildern der $\mathrm{d}f_j$ erzeugten Untermodul mit dem Modul der Differentiale von A über k. Dasselbe gilt allgemeiner für beliebig viele Variablen und beliebig viele Relationen, wenn wir also in anderen Worten jeweils auch unendliche Familien zulassen.

Beweis. Wir erinnern für jeden A-Modul M aus 3.1.6 die linksexakte Sequenz der Derivationen

$$\mathrm{Der}_B(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M)$$

Mit 3.4.4 wird daraus eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B}, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M)$$

Identifizieren wir den letzten Raum dieser Sequenz mit $\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B \Omega_{B/k}, M)$ unter Zuhilfenahme der universellen Eigenschaft von Skalarerweiterungen [KAG] 2.8.7, so erhalten wir daraus mit [KAG] 1.3.19 die behauptete Rechtsexaktheit der Sequenz

$$\Omega_{A/B} \twoheadleftarrow \Omega_{A/k} \leftarrow A \otimes_B \Omega_{B/k}$$

Ist $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ surjektiv, so gilt $\mathrm{Der}_B(A, M) = 0$ für jeden A-Modul M nach 3.1.6 und folglich $\Omega_{A/B} = 0$ nach der universellen Eigenschaft 3.4.4. Weiter haben wir dann wieder nach 3.1.6 für jeden A-Modul M die Beschreibung der Derivationen auf Quotienten durch die linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

Wie zuvor schreiben wir sie um zu einer linksexakten Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M) \to \mathrm{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

und mit der universellen Eigenschaft von Skalarerweiterungen [KAG] 2.8.7 weiter zu einer linksexakten Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(A \otimes_B \Omega_{B/k}, M) \to \mathrm{Hom}_A(A \otimes_k \ker \varphi, M)$$

Mit [KAG] 1.3.19 folgt die Rechtsexaktheit der Sequenz

$$\Omega_{A/k} \twoheadleftarrow A \otimes_B \Omega_{B/k} \leftarrow A \otimes_k \ker \varphi$$

und man sieht leicht, daß deren erste Abbildung über $A \otimes_B \ker \varphi$ faktorisiert. □

3.4.30 (**Erzeuger für Moduln von Differentialen**). Ist k ein Kring und ist der k-Kring A eine Lokalisierung des von den Elementen $a_1, \ldots, a_n$ über k erzeugten Teilrings $k[a_1, \ldots, a_n]$, so erzeugen die Differentiale $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_n$ den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$. Das folgt unmittelbar aus der Beschreibung der Differentiale von Polynomringen 3.4.8, der Beschreibung der Differentiale von Quotienten 3.4.26 und der Verträglichkeit mit Lokalisierungen 3.4.21. Ist allgemeiner $W \subset A$ eine Teilmenge derart, daß A eine Lokalisierung von $k[{}_!W]$ ist, so erzeugen mit denselben Argumenten die $\mathrm{d}a$ mit $a \in W$ bereits den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$.

Übungen

Übung 3.4.31 (**Verträglichkeit von Differentialen mit Koprodukten**). Gegeben ein Kring k und k-Kringe A, B zeige man, daß es genau einen Isomorphismus

$$(\Omega_{A/k} \otimes_k B) \oplus (A \otimes_k \Omega_{B/k}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{(A \otimes_k B)/k}$$

gibt mit $(\mathrm{d}a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes \mathrm{d}b_2) \mapsto (1 \otimes b_1)\mathrm{d}(a_1 \otimes 1) + (a_2 \otimes 1)\mathrm{d}(1 \otimes b_2)$. Hinweis: 3.1.7.

Ergänzende Übung 3.4.32 (**Verträglichkeit von Differentialen mit Kolimites**). Man zeige, daß das Bilden des Moduls der Differentiale verträglich ist mit filtrierenden Kolimites von k-Kringen. Gegeben ein Kring k und ein Köcher $\mathcal{I}$ und ein System $R_i \in \mathrm{Car}(\mathcal{I}, \mathrm{Kring}^k)$ von k-Kringen mit dem Kolimes $R := \mathrm{col}_{i \in \mathcal{I}} R_i$ zeige man stärker, daß für nicht notwendig filtrierende Systeme die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{col}_{i \in \mathcal{I}}(R \otimes_{R_i} \Omega_{R_i/k}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{R/k}$$

ist. Hinweis: Derivationen sind nach 3.1.34 verträglich mit Kolimites.

Übung 3.4.33. Seien $k \to A$ ein Kringhomomorphismus und $E \subset A$ ein Erzeugendensystem von A als k-Ringalgebra. Man zeige, daß die Differentiale $\mathrm{d}a$ für $a \in E$ bereits den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$ als A-Modul erzeugen.

Ergänzende Übung 3.4.34. Gegeben eine affine k-Varietät X erinnern wir aus [KAG] **??** die Konstruktion des Bündels $\mathrm{V}(M)$ zu einem endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Modul M und setzen

$$\mathrm{T}X := \mathrm{V}(\Omega_{\mathcal{O}(X)/k})$$

und nennen diese affine Varietät das **Tangentialbündel von** X. Nach [KAG] **??** trägt das Tangentialbündel die Struktur eines geometrischen Moduls auf X und ist für glattes X nach 3.4.13 und [KAG] **??** sogar ein Vektorbündel. Man konstruiere natürliche Isomorphismen zwischen den Fasern des Tangentialbündels und unseren Tangentialräumen $\mathrm{T}_x X$. Hinweis: Man erinnere aus 3.4.11 den natürlichen Isomorphismus $k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*_x X$.

3.5 Transzendenz und Separabilität

Lemma 3.5.1 (Differentiale und separable Erweiterungen). *Seien $k \subset F \subset E$ Körper. Ist E/F separabel, so induziert die Einbettung $F \hookrightarrow E$ einen Isomorphismus*

$$E \otimes_F \Omega_{F/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{E/k}$$

3.5.2. Eine Körpererweiterung heißt wie in [AL] 3.9.18 separabel, wenn sie algebraisch ist und darüber hinaus jedes Element des Erweiterungskörpers eine einfache Nullstelle seines Minimalpolynoms über dem Grundkörper.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die auf den Dualräumen induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist, daß sich also jede k-Derivation $F \to E$ auf genau eine Weise zu einer k-Derivation $E \to E$ ausdehnen läßt. Dazu reicht es zu zeigen, daß sich für jedes $\alpha \in E$ jede k-Derivation $F \to E$ auf genau eine Weise zu einer k-Derivation $F(\alpha) \to E$ ausdehnen läßt. Nach Annahme haben wir $F(\alpha) = F[T]/\langle P(T)\rangle$ für ein irreduzibles Polynom $P \in F[T]$ mit $P'(\alpha) \neq 0$. Nach der zweiten Funktorialität für Derivationen 3.1.6 haben wir eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_k(F(\alpha), E) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(F[T], E) \to \mathrm{Hom}_k(\langle P(T)\rangle, E)$$

Nach 3.1.7 ist eine k-lineare Derivation D von $F[T] = F \otimes_k k[T]$ in den durch $T \mapsto \alpha$ zu einem $F[T]$-Modul gemachten Körper E festgelegt und festlegbar durch ihre Einschränkung ∂ auf F und ihren Wert $\beta \in E$ bei T. Diese Derivation $D = D_\beta$ kann dann beschrieben werden als $D_\beta : Q \mapsto (\partial Q)(\alpha) + \beta Q'(\alpha)$, wobei ∂Q das Polynom in $E[T]$ meint, das durch Anwenden von ∂ auf die Koeffizienten von Q entsteht. Wegen $P'(\alpha) \neq 0$ gibt es genau ein $\beta \in E$ mit $D_\beta(P) = 0$, und dies D_β induziert dann die einzig mögliche Fortsetzung von ∂ zu einer k-linearen Derivation $F(\alpha) \to E$. □

3.5.3 (**Anschauliche Bedeutung im geometrischen Fall**). Für einen Homomorphismus $M \to N$ von endlich erzeugten projektiven Moduln über dem Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf einer irreduziblen affinen Varietät X sind gleichbedeutend:

1. Unser Morphismus wird bijektiv nach Lokalisierung aller von Null verschiedenen Elemente von $\mathcal{O}(X)$;

2. Unser Morphismus wird bijektiv nach Lokalisierung eines von Null verschiedenen Elements $f \in \mathcal{O}(X)\backslash 0$;

3. Es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ derart, daß unser Homomorphismus Bijektionen $k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} M \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} N$ auf den geometrischen Halmen induziert für alle $x \in U$;

4. Es gibt einen Punkt $x \in X$ derart, daß unser Homomorphismus bei x eine Bijektion $k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} M \xrightarrow{\sim} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} N$ auf dem geometrischen Halm induziert.

Das folgt aus der Exaktheit der Lokalisierung, der Beschreibung des Kerns der natürlichen Abbildung eines Moduls in seine Lokalisierung, dem Nakayamalemma und dem Spalten surjektiver Homomorphismen auf projektive Moduln. Betrachten wir nun einen dominanten Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen glatten affinen Varietäten, so sind die Moduln der Differentiale projektiv nach 3.4.13. Wenden wir nun unsere Erkenntnisse auf den induzierten Homomorphismus $\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \to \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ an, so finden wir mit den Verträglichkeiten 3.4.21 von Differentialen mit Lokalisierung und der Beschreibung 3.4.11 des Kotangentialraums als geometrischer Halm des Moduls der Differentiale, daß gleichbedeutend sind:

1. Die zu $X \to Y$ gehörige Körpererweiterung $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ liefert einen Isomorphismus $\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{M}(Y)} \Omega_{\mathcal{M}(Y)/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{M}(X)/k}$;

2. Nach Vorschalten der Einbettung der Nichtnullstellenmenge eines von Null verschiedenen Elements $f \in \mathcal{O}(X)\backslash 0$ induziert unser Morphismus einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X_f) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{O}(X_f)/k}$;

3. Es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ derart, daß unser Morphismus für alle $x \in U$ Isomorphismen $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)}Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*_x X$ auf den Kotangentialräumen induziert;

4. Es gibt einen Punkt $x \in X$ derart, daß unser Morphismus einen Isomorphismus $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)}Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*_x X$ auf den Kotangentialräumen induziert.

5. Es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ derart, daß unser Morphismus für alle $x \in U$ Isomorphismen $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$ auf den Tangentialräumen induziert;

6. Es gibt einen Punkt $x \in X$ derart, daß unser Morphismus einen Isomorphismus $\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$ auf den Tangentialräumen induziert.

In 3.5.13 zeigen wir noch wesentlich stärkere Aussagen in dieser Richtung.

Lemma 3.5.4 (Differentiale primitiver Körpererweiterungen). *Gegeben eine primitive Körpererweiterung $F(\alpha)/F$ gilt*

$$\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \alpha \textit{ separabel ist über } F; \\ 1 & \textit{falls } \alpha \textit{ algebraisch, aber nicht separabel ist über } F; \\ 1 & \textit{falls } \alpha \textit{ transzendent ist über } F. \end{cases}$$

Beweis. Der Modul der Differentiale des Polynomrings $F[T]$ über F ist frei vom Rang Eins nach 3.4.8. Der Modul der Differentiale seines Quotientenkörpers $F(T)$ über F ist frei vom Rang Eins nach der Verträglichkeit mit Lokalisierungen 3.4.21. Ist also α transzendent über F, so haben wir $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 1$. Sonst haben wir eine Surjektion $F[T] \twoheadrightarrow F(\alpha)$ mit $T \mapsto \alpha$, deren Kern vom Minimalpolynom P von α erzeugt wird. Damit haben wir nach unseren Erkenntnissen über die Differentiale von Quotienten 3.4.26 eine Surjektion $F(\alpha) \otimes_{F[T]} F[T]\mathrm{d}T \twoheadrightarrow \Omega_{F(\alpha)/F}$, deren Kern von $1 \otimes \mathrm{d}P = 1 \otimes P'(T)\mathrm{d}T = P'(\alpha) \otimes \mathrm{d}T$ erzeugt wird. Damit gilt $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 1$ falls $P'(\alpha) = 0$ und $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 0$ falls $P'(\alpha) \neq 0$. Im Lichte des Separabilitätskriteriums [AL] 3.9.26 ist aber eine primitive algebraische Körpererweiterung $F(\alpha)/F$ genau dann separabel, wenn für das Minimalpolynom P eines Erzeugers α gilt $P'(\alpha) \neq 0$. □

3.5.5. Ich erinnere aus [AL] 3.2.6, daß eine Körpererweiterung E/F **körperendlich** heißt, wenn der Erweiterungskörper über dem Grundkörper als Körper endlich erzeugt ist, wenn es also in Formeln endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in E$ gibt mit $E = F(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemma 3.5.6. *Der Modul der Differentiale einer körperendlichen Körpererweiterung verschwindet genau dann, wenn sie separabel ist.*

Ergänzung 3.5.7. Das folgende Beispiel zeigt, daß das vorhergehende Lemma nicht auf beliebige Körpererweiterungen verallgemeinert werden kann. Sei k ein Körper positiver Charakteristik $p > 0$ und $k(T)$ sein Funktionenkörper. Die durch sukzessives Adjungieren der p-ten Wurzeln der Variablen entstehende Körpererweiterung

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} k\left(\sqrt[p^r]{T}\right)$$

des Funktionenkörpers ist algebraisch und rein inseparabel, aber der Modul ihrer relativen Differentiale verschwindet nach 3.4.32 dennoch.

Beweis. Sei E/F unsere Körpererweiterung. Ist unsere Erweiterung separabel, so verschwindet der Modul ihrer Differentiale nach unseren Erkenntnissen zu Differentialen bei separablen Körpererweiterungen 3.5.1 und der rechtsexakten Sequenz der Differentiale 3.4.26. Verschwindet umgekehrt der Modul der Differentiale, so zeigen wir die Behauptung durch Induktion über die Zahl der Erzeuger. Haben wir etwa $E = F(x_1, \ldots, x_n)$, so betrachten wir die rechtsexakte Sequenz

$$E \otimes_F \Omega_{F(x_1)/F} \to \Omega_{E/F} \twoheadrightarrow \Omega_{E/F(x_1)}$$

In der Mitte steht nach Annahme eine Null. Also steht auch am rechten Ende eine Null und nach Induktionsannahme ist $E/F(x_1)$ separabel. Nach nach unseren

Erkenntnissen zu Differentialen bei separablen Körpererweiterungen 3.5.1 ist also die natürliche Abbildung ein Isomorphismus

$$E \otimes_{F(x_1)} \Omega_{F(x_1)/F} \xrightarrow{\sim} \Omega_{E/F}$$

Mithin haben wir $\Omega_{F(x_1)/F} = 0$ und nach 3.5.4 ist $F(x_1)/F$ separabel. Dann aber ist wegen der Transitivität der Separabilität [AL] 3.9.35 auch E/F separabel. □

Satz 3.5.8 (Differentiale körperendlicher Körpererweiterungen). *Seien E/k eine körperendliche Körpererweiterung und $x_1, \ldots, x_r \in E$ gegeben. So erzeugen die Differentiale $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ den Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ genau dann, wenn E separabel ist über $k(x_1, \ldots, x_r)$*

3.5.9. Beispiel 3.5.7 zeigt, daß das für nicht körperendliche Körpererweiterungen im allgemeinen nicht mehr gilt.

3.5.10. Sei E/k eine körperendliche Körpererweiterung. Die erste Aussage des Satzes impliziert die Abschätzung $\dim_E \Omega_{E/k} \geq \operatorname{trgr}(E/k)$ sowie im Fall von Gleichheit die Existenz einer Transzendenzbasis $x_1, \ldots, x_r$ mit E separabel über $k(x_1, \ldots, x_r)$. Der im Anschluß bewiesene Satz 3.5.11 impliziert, daß für vollkommenes k sogar stets $\dim_E \Omega_{E/k} = \operatorname{trgr}(E/k)$ gilt.

Beweis. Wir erinnern aus 3.4.26 die rechtsexakte Sequenz der Differentiale

$$E \otimes_F \Omega_{F/k} \to \Omega_{E/k} \twoheadrightarrow \Omega_{E/F}$$

für jeden Zwischenkörper F. Erzeugen die $\mathrm{d}x_i$ den Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$, so zeigt für $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ die rechtsexakte Sequenz der Differentiale $\Omega_{E/F} = 0$ und nach 3.5.6 ist folglich E separabel über F. Umgekehrt wird für $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ nach 3.4.30 stets $\Omega_{F/k}$ erzeugt von den $\mathrm{d}x_i$, und ist zusätzlich E separabel über $F = k(x_1, \ldots, x_r)$, so folgt aus dem Verschwinden des Moduls der relativen Differentiale 3.5.1 und unserer rechtsexakten Sequenz, daß auch der Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ von $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ erzeugt wird. □

Satz 3.5.11 (Differentiale und algebraische Unabhängigkeit). *Sei E/k eine Körpererweiterung eines vollkommenen Körpers k und seien $x_1, \ldots, x_r \in E$ gegeben. Sind die Differentiale $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ linear unabhängig über E, so sind die $x_1, \ldots, x_r$ algebraisch unabhängig über k.*

3.5.12. Das erlaubt uns, auch in positiver Charakteristik den Beweis unseres Satzes [KAG] 7.5.4 zu Ende zu bringen, nach dem jede irreduzible Varietät birational ist zu einer Hyperfläche, und vervollständigt damit insbesondere auch in positiver Charakteristik den Beweis unserer Proposition [KAG] 7.5.5, nach der in jeder Varietät die glatten Punkte eine dichte offene Teilmenge bilden. Uns hätte es auch gereicht, wenn wir nur hätten zeigen können, daß jee nichtleere Varietät mindestens einen glatten Punkt hat, abe auch dafür kenne ich keinen einfacheren Beweis. Es folgt sofort, daß jede algebraische Gruppe und sogar jeder homogene Raum glatt sind.

Beweis. Wir zeigen gleichbedeutend, daß wenn die x_i algebraisch abhängig sind, daß dann auch ihre Differentiale linear abhängig sind. Sind die x_i algebraisch abhängig über k, so gibt es per definitionem ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[T_1, \dots, T_r]\backslash 0$ mit $P(x_1, \dots, x_r) = 0$. Dann gibt es auch ein derartiges Polynom P von kleinstmöglichem Totalgrad. Eine partielle Ableitung dieses Polynoms P kann also nur dann auf $(x_1, \dots, x_r)$ verschwinden, wenn sie das Nullpolynom ist. Andererseits kann aber P nicht konstant sein. Wären also alle partiellen Ableitungen $\partial_i P$ das Nullpolynom, so wären wir in positiver Charakteristik $p > 0$ und fänden ein Polynom R mit $R(T_1^p, \dots, T_r^p) = P(T_1, \dots, T_r)$. Da k vollkommen ist, gäbe es dann ein Polynom $Q \in k[T_1, \dots, T_r]$ mit $Q^p = P$, im Widerspruch zur Minimalität des Grades von P. Also gibt es einen Index i mit $(\partial_i P)(x_1, \dots, x_r) \neq 0$ und die Identität

$$\big((\partial_1 P)(x_1, \dots, x_r)\big)\mathrm{d}x_1 + \dots + \big((\partial_r P)(x_1, \dots, x_r)\big)\mathrm{d}x_r = \mathrm{d}\big(P(x_1, \dots, x_r)\big) = 0$$

im Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ bedeutet die lineare Abhängigkeit der $\mathrm{d}x_i$. Das ist der gesuchte Widerspruch. □

Satz 3.5.13 (Morphismen mit generisch bijektivem Differential). *Für einen Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen Varietäten sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Morphismus φ ist dominant und die zugehörige Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ ist separabel;*
2. *Unser Morphismus φ ist dominant und es gibt einen Punkt in X mit glattem Bildpunkt, an dem das Differential von φ injektiv ist;*
3. *Wir haben $\operatorname{kdim} X \leq \operatorname{kdim} Y$ und es gibt einen glatten Punkt in X, an dem das Differential von φ surjektiv ist;*
4. *Es gibt einen glatten Punkt in X, an dem das Differential von φ bijektiv ist;*
5. *Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge von X, an deren Punkten das Differential von φ bijektiv ist.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X und Y affin.

3⇒4&2. Gegeben ein glatter Punkt $x \in X$ mit $\mathrm{d}_x\varphi$ surjektiv haben wir in 3.1.31 gezeigt, daß unser Morphismus dominant sein muß und $\varphi(x)$ ein glatter Punkt von Y. Wenn wir zusätzlich $\operatorname{kdim} Y \geq \operatorname{kdim} X$ annehmen, folgt $\mathrm{d}_x\varphi$ bijektiv.

4⇒3. Gegeben ein glatter Punkt $x \in X$ mit $\mathrm{d}_x\varphi$ surjektiv ist wie bereits bemerkt nach 3.1.31 unser Morphismus dominant und der Bildpunkt glatt. Ist dann $\mathrm{d}_x\varphi$ sogar bijektiv, so folgt die Gleichheit der Dimensionen $\operatorname{kdim} Y = \operatorname{kdim} X$ aus der Gleichheit der Dimensionen de Tangentialräume.

2⇒4. Ist unser Morphismus dominant, so gilt $\operatorname{kdim} X \geq \operatorname{kdim} Y$. Aus der Injektivität des Differentials an einer Stelle mit glattem Bildpunkt folgt so die Bijektivität ebenso wie die Glattheit des Ausgangspunkts.

4⇒1. Ist das Differential an einem glatten Punkt eine Bijektion $\mathrm{T}_x X \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$, so ist die duale Abbildung auch eine Bijektion $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)} Y \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}^*_x X$ auf den Kotangentialräumen, was hinwiederum bedeutet, daß unser kanonischer Morphismus $\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \to \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$ eine Bijektion alias

$$k_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \stackrel{\sim}{\to} k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

induziert. In dieser Situation aber zeigt das Lemma von Nakayama, daß es eine Funkion $f \in \mathcal{O}(X)$ gibt mit $f(x) \neq 0$ derart, daß die kanonische Abbildung eine Surjektion

$$\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

induziert. Aus der Verträglichkeit von Differentialen mit Lokalisierung folgt, daß die natürliche Abbildung eine Surjektion

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{M}(Y)} \Omega_{\mathcal{M}(Y)/k} \twoheadrightarrow \Omega_{\mathcal{M}(X)/k}$$

liefert, und das hinwiederum impliziert mit der rechtsexakten Sequenz 3.4.26 der Differentiale $\Omega_{\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)} = 0$. Nach 3.5.6 muß dann $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ separabel sein und wir haben 4⇒1 gezeigt.

1⇒5. Das zeigt man, indem man obige Argumentation rückwärts liest: Aus der Separabilität der Erweiterung der Funktionenkörper folgt mit 3.5.6, daß der Homomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \to \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

von endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Moduln unter Skalarerweiterung zu $\mathcal{M}(X)$ eine Surjektion wird. Daraus folgt, daß wir schon nach Lokalisierung an einem geeigneten Element $f \in \mathcal{O}(X)\backslash 0$ eine Surjektion erhalten. Daraus folgt, daß für alle Nichtnullstellen von f die induzierte Abbildung eine Surjektion $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)} Y \twoheadrightarrow \mathrm{T}^*_x X$ ist und das Differential folglich eine Injektion $\mathrm{T}_x X \hookrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$. Für alle Punkte $x \in X_f$ mit glattem Bildpunkt zeigt dann ein Dimensionsvergleich, daß das Differential eine Bijektion $\mathrm{T}_x X \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ sein muß. Nach 3.5.12 bilden die glatten Punkte jedoch in jeder Varietät eine offene dichte Teilmenge.

5⇒4. Das ist klar. □

Korollar 3.5.14 (Variante zu Zariski's Hauptsatz). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein bijektiver Morphismus von affinen irreduziblen Varietäten und sei $\mathcal{O}(Y)$ normal. Gibt es einen glatten Punkt $x \in X$, an dem das Differential eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ induziert, so ist φ ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir wissen aus 2.4.15, daß ein bijektiver Morphismus von irreduziblen Varietäten stets zu einer endlichen rein inseparablen Erweiterung der Funktionenkörper führt. In Charakteristik Null ist jede endliche rein inseparable Körpererweiterung trivial und damit, wie bereits in 2.4.18 erwähnt, unsere Bedingung an das Differential überflüssig. In positiver Charakteristik impliziert nach 3.5.13 3⇒1 die zusätzliche Bedingung an das Differential, daß unsere rein inseparable Körpererweiterung auch separabel und mithin trivial ist. Wieder folgt also, daß unser Morphismus birational ist und damit nach dem Hauptsatz von Zariski 2.4.17 ein Isomorphismus. □

Satz 3.5.15 (Isomorphismen homogener Räume). *Ein bijektiver äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sein Differential an einer Stelle surjektiv ist. Im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist er stets ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\varphi : X \to Y$ unser bijektiver Morphismus und G unsere algebraische Gruppe. Nach 2.4.13 haben unsere beiden Varietäten dieselbe Dimension und nach 2.4.23 haben sie auch dieselben irreduziblen Komponenten und diese sind homogene Räume für G°, so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X und Y irreduzibel annehmen dürfen. Nach 3.5.13 induziert unser Morphismus dann eine separable Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ und nach 2.4.14 ist diese Körpererweiterung trivial, weil alle Fasern unseres Morphismus einelementig sind. Also ist unser Morphismus von homogenen Räumen birational und damit nach 2.4.16 ein Isomorphismus. □

3.6 Konstruktion von Quotienten

3.6.1. Ich erinnere daran, daß wir in [KAG] 6.4.2 allgemeine k-Varietäten als spezielle k-geringte Räume eingeführt hatten. Ich erinnere daran, wie wir in [KAG] 6.2.13 für jede Abbildung $f : X \to Y$ von einem k-geringten Raum X in eine Menge Y die „finale Struktur eines k-geringten Raums auf Y" eingeführt hatten. Ich erinnere schließlich daran, daß nach [KAG] 9.2.2 ein Morphismus $f : X \to Y$ **produktfest offenfinal** heißt, wenn er offen und final ist und für jede affine und damit sogar für jede beliebige Varietät Z auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ offen und final ist.

Satz 3.6.2 (Quotienten affiner algebraischer Gruppen). *Gegeben eine affine algebraische Gruppe G mit einer abgeschlossenen Untergruppe $H \not\trianglelefteq G$ gilt:*

1. *Die Menge G/H mit ihrer finalen Struktur eines k-geringten Raums zur Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ ist eine quasiprojektive Varietät;*

2. *Das Differential der Einbettung der Untergruppe und das Differential der Projektion auf die Quotientenvarietät bilden zusammen eine kurze exakte Sequenz $\mathrm{T}_e H \hookrightarrow \mathrm{T}_e G \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/H)$;*

3. *Die Operation $G \times G/H \to G/H$ ist ein Morphismus von Varietäten.*

4. *Die Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ ist produktfest offenfinal.*

3.6.3. Offensichtlich ist der Quotientenmorphismus $G \twoheadrightarrow G/H$ flach nach 2.4.12 als Morphismus von schwach homogenen Räumen.

Ergänzung 3.6.4. In der Terminologie [KAG] 9.3.8 existiert unter den Annahmen des Satzes also die Bahnenvarietät und hat im Sinne von [KAG] 9.3.8 einen produktfesten Bahnenmorphismus. In der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten wird eine analoge Aussage in [ML] 4.4.3 gezeigt.

Beweis. Wir finden nach 3.6.7 eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von G mitsamt einem von Null verschiedenen Vektor $v \in V \backslash 0$ derart, daß gilt $H = \{g \in G \mid gv \in kv\}$ und $\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} G \mid Xv \in kv\}$. Dann betrachten wir die Wirkung von G auf $\mathbb{P}V$, die nach [KAG] 9.2.14 algebraisch ist, da nämlich $V \backslash 0 \to \mathbb{P}V$ nach [KAG] 9.2.12 produktfest offenfinal ist. Darin betrachten wir dann die Bahn $G\langle v\rangle$ von $\langle v\rangle$. Sie ist als Bahn einer algebraischen G-Operation nach 2.3.7 eine lokal abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}V$ und erbt so eine Struktur als Varietät mit G-Wirkung. Das Differential von $(\cdot v) : G \to V$ beim neutralen Element wird per definitionem gegeben durch $\operatorname{richt}\big((\mathrm{d}_e(\cdot v))(X)\big) = Xv$ und nach der Beschreibung 3.1.39 der Tangentialräume des projektiven Raums haben wir weiter mit den offensichtlichen Morphismen eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{T}_e H \hookrightarrow \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_{\langle v\rangle}(G\langle v\rangle)$$

Ein Dimensionsvergleich unter Verwendung der Dimensionsformel 2.4.13 zeigt, daß diese Sequenz sogar exakt sein muß. Sobald wir zeigen, daß $\pi : G \to G\langle v\rangle$ final ist, sind die drei ersten Teile des Satzes also bewiesen. Satz 2.4.12 über Morphismen homogener Räume zeigt schon einmal, daß π flach und damit produktfest offen ist. Gegeben $U \Subset G\langle v\rangle$ mit Urbild $W := \pi^{-1}(U) \Subset G$ und eine Abbildung $f : U \to k$ mit $f \circ \pi : W \to k$ regulär gilt es für die ersten drei Teile also nur noch zu zeigen, daß auch f bereits regulär ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dabei U affin annehmen. Für den Graphen $\Gamma(f) \subset U \times k$ gilt nun sicher

$$(\pi \times \mathrm{id})^{-1}(\Gamma(f)) = \Gamma(f \circ \pi)$$

Mit π ist auch $\pi \times \mathrm{id}$ flach und folglich offen. Es folgt $\Gamma(f) \subset\!\!\!\!\!\triangleleft\, U \times k$. Damit erbt $\Gamma(f)$ die Struktur einer affinen Varietät und die Projektion liefert einen bijektiven Morphismus $\Gamma(f) \to U$. Es reicht zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, denn dann ist auch f ein Morphismus als die Komposition

$$U \overset{\sim}{\leftarrow} \Gamma(f) \hookrightarrow U \times k \twoheadrightarrow k$$

Nun ist nach 3.5.12 aber U glatt als offene Teilmenge eines homogenen Raums und $\Gamma(f)$ hat mindestens einen glatten Punkt. Nach unserer affinen Variante 3.5.14 von Zariski's Hauptsatz reicht es also zu zeigen, daß $\Gamma(f) \to U$ in jedem Punkt surjektives Differential hat. Um das zu sehen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f \circ \pi) & \to & \Gamma(f) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ W & \to & U \end{array}$$

und sehen, daß es reicht zu zeigen, daß $W \to U$ in jedem Punkt surjektives Differential hat. Das haben wir jedoch bereits zu Beginn des Beweises aus einer Dimensionsabschätzung gefolgert. Um auch noch den vierten Teil zu zeigen, wiederholen wir unser Argument in einer etwas größeren Algemeinheit. Der Morphismus $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ ist ja affin nach [KAG] 9.1.3 als Morphismus von einer affinen Varietät in eine separierte Varietät. Für $U \Subset G/H$ offen affin ist also $\pi^{-1}(U)$ auch affin und das Vorschalten von π induziert nach dem, was wir bereits wissen, einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(U) \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H$$

Ist Y eine weitere affine Varietät, so induziert das Vorschalten von $\mathrm{id} \times \pi$ also den oberen horizontalen Isomorphismus eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dd, "\wr"'] & \mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H \arrow[d, "\wr"] \\ & (\mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)))^H \arrow[d, "\wr"] \\ \mathcal{O}(Y \times U) \arrow[r] & \mathcal{O}(Y \times \pi^{-1}(U))^H \end{tikzcd}$$

Dessen oberer rechter vertikaler Isomorphismus folgt aus [LA2] 6.1.41, die übrigen vertikalen Isomorphismen sind offensichtlich. Die untere Horizontale muß dann auch ein Isomorphismus sein und Teil 4 folgt. □

Lemma 3.6.5. *Seien $H \subset\!\!\!\!\!\triangleleft\, G$ affine algebraische Gruppen und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Einbettung. So gibt es eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von G mit einem Teilraum $W \subset V$ derart, daß gilt*

$$H = \{g \in G \mid gW \subset W\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}\iota : \mathrm{Lie}\, H \overset{\sim}{\to} \{X \in \mathrm{Lie}\, G \mid XW \subset W\}.$$

Beweis. Wir konstruieren V als Unterdarstellung der rechtsregulären Darstellung $(\mathcal{O}(G), \rho)$ von G. Seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(G)$ Erzeuger des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(H)$ von H. Wir finden eine endlichdimensionale Unterdarstellung $V \subset \mathcal{O}(G)$ mit $f_1, \ldots, f_r \in V$ und setzen $W := V \cap \mathcal{I}(H)$. Für $g \in G$ folgt aus $gW \subset W$ dann $f_i(hg) = 0$ für alle $h \in H$ und $1 \leq i \leq r$. Insbesondere folgt das für $h = 1$ und wir folgern $g \in H$. Weiter finden wir für ein Element $X \in \operatorname{Lie} G$ mit der linksinvarianten Fortsetzung ξ nach unserer Beschreibung 3.2.24 der Ableitung der rechtsregulären Darstellung

$$\begin{array}{rcl} XW \subset W & \Rightarrow & (\xi f_i)|H = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r \\ & \Rightarrow & \xi(\mathcal{I}(H)) \subset \mathcal{I}(H) \\ & \Rightarrow & \text{Es gibt } \bar{\xi} \in \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(H) \text{ mit } \bar{\xi}(f|H) = (\xi f)|H \;\; \forall f \in \mathcal{O}(G) \\ & \Rightarrow & \bar{\xi} \text{ ist linksinvariant und } X = \mathrm{d}\iota(\bar{\xi}_e) \\ & \Rightarrow & X \in \mathrm{d}\iota(\operatorname{Lie} H) \end{array}$$

und das war gerade zu zeigen. □

Lemma 3.6.6. *Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum mit einem Teilraum $W \subset V$ der Dimension $\dim W = d < \infty$. So gilt:*

1. *Für $x \in \mathrm{GL}(V)$ ist $xW = W$ gleichbedeutend zu $x(\bigwedge^d W) = \bigwedge^d W$;*
2. *Für $X \in \mathfrak{gl}(V)$ ist $XW \subset W$ gleichbedeutend zu $X(\bigwedge^d W) \subset \bigwedge^d W$.*

Beweis. Indem wir eine Basis von $W \cap xW$ nach vorne und hinten entsprechend ergänzen, finden wir Vektoren in V derart, daß $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von W ist und $v_{i+1}, \ldots, v_{i+d}$ eine Basis von xW. Dann gibt es eine Konstante $c \in k^\times$ mit $x(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = c(v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_{i+d})$. Aus $x(\bigwedge^d W) = \bigwedge^d W$ folgt also $i = 0$ und damit $xW = W$. Das zeigt die erste Aussage. Für den Beweis der zweiten Aussage beachten wir

$$X(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = \sum_\nu v_1 \wedge \ldots \wedge Xv_\nu \wedge \ldots \wedge v_d$$

unter der abgeleiteten Operation der Lie-Algebra nach 3.3.13. Machen wir den Ansatz $Xv_\nu = \sum_\mu^d a_{\nu\mu} v_\mu$ für eine Ergänzung von $v_1, \ldots, v_d$ zu einer Basis von V durch gewisse weitere v_μ, so folgt aus $X(\bigwedge^d W) \subset \bigwedge^d W$ bereits $a_{\nu\mu} = 0$ für $\mu \notin \{1, \ldots, d\}$ und damit die Behauptung. □

Lemma 3.6.7. *Gegeben $H \not\trianglelefteq G$ affine algebraische Gruppen und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Einbettung gibt es eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V_1 von G mit einem von Null verschiedenen Vektor $v \in V_1 \backslash 0$ derart, daß gilt*

$$H = \{g \in G \mid gv \in kv\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}\iota : \operatorname{Lie} H \xrightarrow{\sim} \{X \in \operatorname{Lie} G \mid Xv \in kv\}.$$

Beweis. Wir gehen von der Darstellung V mit ihrem Teilraum W aus, wie sie in Lemma 3.6.5 konstruiert worden sind, setzen $d = \dim W$ und $V_1 := \bigwedge^d V$ und $W_1 := \bigwedge^d W$ und nehmen als v irgendeinen von Null verschiedenen Vektor aus W_1. Nach 3.6.6 leistet dieses Datum das Gewünschte. $\square$

3.6.8 (**Quotienten unipotenter Gruppen sind affin**). Der Quotient einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe U nach einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset U$ ist stets affin. Um das zu sehen, mag man die Konstruktion des Quotienten aus dem Beweis von 3.6.2 wiederholen und nach 3.6.7 eine endlichdimensionale Darstellung V von U finden und darin eine Gerade kv, deren Stabilisator genau H ist und für die zusätzlich gilt $\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} U \mid Xv \in kv\}$. Dann muß kv nach 1.6.2 bereits die Einsdarstellung von H sein und die Wirkung liefert einen bijektiven Morphismus $U/H \xrightarrow{\sim} Uv$ unseres Quotienten auf die Bahn von v mit ihrer induzierten Struktur als Varietät, der nach 3.5.15 ein Isomorphismus sein muß. Die fragliche Bahn aber ist als Bahn einer unipotenten Gruppe in der affinen Varietät V abgeschlossen in V nach 2.3.9.

Satz 3.6.9 (**Quotienten nach abgeschlossenen Normalteilern**). *Der Quotient einer affinen algebraischen Gruppe nach einem abgeschlossenen Normalteiler ist stets wieder eine affine algebraische Gruppe.*

Beweis. Seien G unsere affine algebraische Gruppe und $N \not\triangleleft\!\!\!\!\!\;\,\, G$ unser Normalteiler. Die Inversenbildung auf G/N ist ein Morphismus aufgrund der Finalität der Projektion $G \twoheadrightarrow G/N$. Die Multiplikation auf G/N ist ein Morphismus aufgrund der Finalität der Projektion $G \times G \to G/N \times G/N$, die wir hinwiederum aus der Faktorisierung $G \times G \twoheadrightarrow G/N \times G \twoheadrightarrow G/N \times G/N$ in nach Teil 4 von 3.6.2 finale Morphismen folgern. Alternativ könnten wir die Finalität der Projektion $G \times G \to G/N \times G/N$ auch zeigen, indem wir den induzierten bijektiven Morphismus von homogenen Räumen $(G \times G)/(N \times N) \to G/N \times G/N$ betrachten und ihn durch Bestimmen des Differentials am neutralen Element als Isomorphismus entlarven. Damit bleibt nur zu zeigen, daß G/N affin ist. Dazu konstruieren wir im folgenden einen endlichdimensionalen Vektorraum W und einen Gruppenhomomorphismus $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ mit Kern N und der Eigenschaft, daß die Sequenz $\operatorname{Lie} N \hookrightarrow \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} \mathrm{GL}(W)$ linksexakt ist. Dann folgern dann mit Satz 3.5.15 über Isomorphismen homogener Varietäten, daß ψ einen Isomorphismus

$$G/N \xrightarrow{\sim} \psi(G)$$

nach $\psi(G)$ mit seiner von $\mathrm{GL}(W)$ induzierten Struktur induziert und das beendet den Beweis, da wir bereits aus 2.2.4 wissen, daß $\psi(G) \not\triangleleft\!\!\!\!\!\;\,\, \mathrm{GL}(W)$ eine abgeschlossene Untergruppe sein muß. Es bleibt also, einen Gruppenhomomorphismus ψ wie oben zu konstruieren. Nach 3.6.7 finden wir eine Darstellung $\varphi : G \to$

$\mathrm{GL}(V)$ und $v \in V \backslash 0$ mit $N = \mathrm{Stab}(kv)$ und $\mathrm{Lie}\, N \xrightarrow{\sim} \{X \in \mathrm{Lie}\, G \mid Xv \in kv\}$. Gegeben ein Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(N)$ betrachten wir den zugehörigen Gewichtsraum $V_\chi \subset V$ nach 1.7.18 und dürfen $V = \bigoplus V_\chi$ annehmen, da N ein Normalteiler ist und folglich die Summe der V_χ stets ein G-stabiler Teilraum und da unser ausgezeichneter Vektor v stets zu einem Gewichtsraum gehören muß. Dann betrachten wir

$$W := \{f \in \mathrm{End}\, V \mid f(V_\chi) \subset V_\chi \; \forall \chi\}$$

und $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ gegeben durch $(\psi(x))f := \varphi(x) f \varphi(x^{-1})$ für $x \in G$ und $f \in W$. Dann ist $\psi(x) = \mathrm{id}_W$ gleichbedeutend zu $\varphi(x) f = f \varphi(x)$ für alle $f \in W$ und es folgt sofort $N \subset \ker \psi$. In Bezug auf eine geeignete Basis von V besteht nun W aus allen blockdiagonalen Matrizen mit einer durch die Dimensionen der V_χ festgelegten Blockstruktur. Die Bedingung $x \in \ker \psi$ alias $\varphi(x) f = f \varphi(x)$ für alle $f \in W$ ist also gleichbedeutend zu $\varphi(x) V_\chi \subset V_\chi$ und $\varphi(x)|V_\chi \in k\,\mathrm{id}$ für alle χ. Da nun unser ausgezeichneter Vektor v in einem der V_χ liegt, impliziert das auch $\varphi(x) v \in kv$ und damit $x \in N$. Wir haben also $N = \ker \psi$. Der analoge Nachweis von $\mathrm{Lie}\, H \xrightarrow{\sim} \ker \mathrm{d}\psi$ kann dem Leser überlassen bleiben. □

Vorschau 3.6.10 (**Quotienten nach reduktiven Gruppen sind affin**). Jeder Quotient einer affinen algebraischen Gruppe G nach einer im Sinne von 4.9.3 reduktiven Untergruppe $H \not\trianglelefteq G$ ist affin. Ich kenne den Beweis nur im Fall der Charakteristik Null, in dem die Behauptung leicht aus [KAG] 9.6.23 folgt. Ein Satz von Matsushima besagt feiner, daß ein Quotient einer reduktiven Gruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe genau dann affin ist, wenn auch die Untergruppe reduktiv ist.

Definition 3.6.11. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k und eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt die Menge aller m-dimensionalen Untervektorräume von V die **Graßmann'sche der m-dimensionalen Teilräume von** V und wird notiert

$$\mathrm{Graß}(m; V) = \mathrm{Gr}(m; V) := \{W \subset V \mid \dim W = m\}$$

3.6.12. Auf unseren Graßmann'schen operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist transitiv, sofern die Graßmann'sche nicht leer ist. Um die Graßmann'schen näher zu untersuchen, realisieren wir sie als Teilmengen von projektiven Räumen.

Lemma 3.6.13. *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V liefert die Abbildungsvorschrift $W \mapsto \bigwedge^m W$ eine Injektion, die* **Plücker-Einbettung**

$$\textstyle\bigwedge^m : \mathrm{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^m V\right)$$

Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers $(k = \bar{k})$ ist das Bild der Plücker-Einbettung abgeschlossen in der Zariski-Topologie.

Beweis. Unsere Abbildung ist injektiv, da gilt $W = \{v \in V \mid v \wedge \bigwedge^m W = 0\}$. Um ihr Bild zu beschreiben, betrachten wir umgekehrt für ein beliebiges $\omega \in \bigwedge^m V$ den Teilraum

$$\ker(\omega\wedge) = \{v \in V \mid \omega \wedge v = 0\}$$

Ergänzen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_l$ von $\ker(\omega\wedge)$ durch $v_{l+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V und schreiben ω in der zugehörigen Basis der äußeren Potenzen, so erkennen wir, daß es im Fall $\omega \neq 0$ ein η gibt mit $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_l \wedge \eta$. Wir haben also $\omega \neq 0 \;\Rightarrow\; \dim\ker(\omega\wedge) = l \leq |\omega| = m$, und

$$\dim\ker(\omega\wedge) = m \quad\Leftrightarrow\quad k\omega = \bigwedge^m \ker(\omega\wedge) \in \operatorname{im}\bigwedge^m$$

Die Bedingung $\dim\ker(\omega\wedge) \geq m$ ist nun aber offensichtlich eine abgeschlossene Bedingung an $\omega \in \bigwedge^m V$, deshalb ist unser Bild abgeschlossen. □

Übungen

Übung 3.6.14. Sei $\varphi : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus mit endlichen Fasern von affinen irreduziblen Varietäten und sei $\mathcal{O}(Y)$ normal. Man zeige

$$\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \cap \mathcal{M}(Y)$$

alias, ganz pedantisch geschrieben, $\varphi^\sharp\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \cap \varphi^\sharp\mathcal{M}(Y)$. Hinweis: Ähnlich wie beim Beweis von 2.4.17 zeige man in den Notationen dort zunächst $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_\mathfrak{p} \cap \varphi^\sharp\mathcal{M}(Y)$.

Übung 3.6.15. Sind $K \subset\!\!\!\!\!\!\circ\; H \subset\!\!\!\!\!\!\circ\; G$ affine algebraische Gruppen, so ist die offensichtliche Abbildung $H/K \hookrightarrow G/K$ eine abgeschlossene Einbettung.

Übung 3.6.16 (**Struktur als Quotient nach abgeschlossener Untergruppe**). Sei X eine Menge mit einer transitiven Operation einer affinen algebraischen Gruppe G. Ist die Standgruppe G_x eines Punktes $x \in X$ abgeschlossen, so sind die Standgruppen aller Punkte abgeschlossen und es gibt genau eine Struktur als algebraische Varietät auf X, für die alle durch die Gruppenwirkung gegebenen Abbildungen $G/G_x \to X$ Isomorphismen von Varietäten sind.

Übung 3.6.17. Gegeben eine diagonalisierbare algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper wird die Sequenz $G^\circ \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/G^\circ$ unter dem Charakterfunktor $\mathfrak{X}$ die Sequenz $\mathfrak{X}_{\mathrm{tor}} \hookrightarrow \mathfrak{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_{\mathrm{tor}}$ in der Gegenrichtung.

Übung 3.6.18. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Komposition

$$\mathrm{SL}(2;k) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2;k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k) := \mathrm{GL}(2;k)/k^\times$$

über einen Isomorphismus $\mathrm{PSL}(2;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}(2;k)$ unserer in 1.2.11 definierten Gruppe faktorisiert.

Übung 3.6.19. Man zeige, daß in Charakteristik Null jede unipotente affine algebraische Gruppe zusammenhängend ist. Hinweis: Man betrachte ihren Quotient nach der Einskomponente.

Übung 3.6.20. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V der multiplikativen Gruppe $k^\times$ die Bahn Y jedes Punktes des projektiven Raums $\mathbb{P}V$ entweder ein Punkt ist oder als Varietät isomorph zu $k^\times$ selber. Man zeige genauer, daß Y sogar als homogener Raum isomorph ist zu $k^\times$ mit der durch einen nichtkonstanten Gruppenhomomorphismus $k^\times \to k^\times$ gegebenen Wirkung von $k^\times$. Hinweis: Wenn man bereit ist, 2.4.21 zu verwenden, so kann man gleich Übung 3.6.21 machen. Der Punkt hier ist, 2.4.21 zu vermeiden.

Ergänzende Übung 3.6.21. Jeder homogene Raum eines Torus ist affin. Hinweis: 2.4.21.

Ergänzende Übung 3.6.22 (**Homogene Räume auflösbarer Gruppen**). Jeder homogene Raum einer auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist affin. Hinweis: Man verwende im Vorgriff 4.2.2. Indem man einen geeigneten maximalen Torus der großen Gruppe geeignet verkleinert, rette man sich mit 2.4.21 in den Fall 3.6.8 eines Quotienten einer unipotenten Gruppe.

Übung 3.6.23. $(k = \bar{k})$. Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Man zeige, daß auf den Graßmann'schen $\mathrm{Gr}(m; V)$ die Struktur Quotient von $\mathrm{GL}(V)$ nach einer abgeschlossenen Unterruppe übereinstimmt mit der induzierten Struktur in Bezug auf die Plücker-Einbettung $\bigwedge^m : \mathrm{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^m V\right)$ aus 3.6.13.

Übung 3.6.24. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise und diese Operation ist transitiv. Man zeige, daß $\mathcal{F}(V)$ im Fall $k = \bar{k}$ mit seiner Struktur als Quotient nach einer abgeschlossenen Untergruppe aus 3.6.16 eine projektive Varietät wird. Sie heißt die **Flaggenvarietät** oder **Fahnenmannigfaltigkeit** von V.

Übung 3.6.25. Gegeben eine monoton fallende Folge $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots$ natürlicher Zahlen verstehen wir unter einer **Fahne vom Typ** λ von Untervektorräumen eines vorgegebenen endlichdimensionalen Vektorraums V eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots$$

mit $\dim V_i = \lambda_i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}_\lambda(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Man zeige, daß auch $\mathcal{F}_\lambda(V)$ im Fall $k = \bar{k}$ mit seiner Struktur als homogener Raum aus 3.6.16 eine projektive k-Varietät wird. Sie heißt eine **partielle Flaggenvarietät** oder **partielle Fahnenmannigfaltigkeit**.

3.7 Liealgebren von Zentralisatoren

3.7.1 (**Liealgebra des Schnitts zweier abgeschlossener Untergruppen**). Gegeben $H, K \overset{\circ}{\subset} G$ abgeschlossene Untergruppen einer affinen algebraischen Gruppe liefert die universelle Eigenschaft des ersten Quotienten einen injektiven Morphismus $c : H/(H \cap K) \hookrightarrow G/K$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Lie}(H \cap K) & \hookrightarrow & \mathrm{Lie}\, H & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_{\bar{e}}(H/H \cap K) \\ \cap & & \cap & & \downarrow \mathrm{d}_{\bar{e}} c \\ \mathrm{Lie}\, K & \hookrightarrow & \mathrm{Lie}\, G & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/K) \end{array}$$

Wir sehen mit einer Diagrammjagd oder auch durch Anwenden der langen exakten Homologiesequenz [TS] 2.2.2, daß die rechte obere Horizontale in diesem Diagramm einen Isomorphismus $(\mathrm{Lie}\, H \cap \mathrm{Lie}\, K)/\, \mathrm{Lie}(H \cap K) \xrightarrow{\sim} \ker \mathrm{d}_{\bar{e}} c$ induziert. Genau dann ist also $\mathrm{d}_{\bar{e}} c$ injektiv, wenn gilt $\mathrm{Lie}(H \cap K) = \mathrm{Lie}\, H \cap \mathrm{Lie}\, K$. Das Bild unseres Morphismus c ist nun genau die H-Bahn $HK/K \subset G/K$. Nach Satz 3.5.15 über Isomorphismen von homogenen Räumen hat unser Morphismus genau dann injektives Differential, wenn er einen Isomorphismus $c : H/H \cap K \xrightarrow{\sim} HK/K$ induziert, und im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist das stets der Fall. Insbesondere gilt in Charakteristik Null stets

$$\mathrm{Lie}(H \cap K) = \mathrm{Lie}\, H \cap \mathrm{Lie}\, K$$

Weiter gilt in Charakteristik Null notwendig

$$\mathrm{Lie}\, H \subset \mathrm{Lie}\, K \Rightarrow H^\circ \subset K$$

In der Tat, aus $\mathrm{Lie}\, H \subset \mathrm{Lie}\, K$ folgt $\mathrm{Lie}\, H = \mathrm{Lie}\, H \cap \mathrm{Lie}\, K = \mathrm{Lie}(H \cap K)$ und damit $\mathrm{kdim}\, H = \mathrm{kdim}(H \cap K)$.

Beispiel 3.7.2. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper positiver Charakteristik $p > 0$. In $G := (k^2, +)$ haben die beiden abgeschlossenen Untergruppen $H := \{(x, y) \mid y = 0\}$ und $K := \{(x, y) \mid y = x^p\}$ denselben Tangentialraum im neutralen Element.

3.7.3 (**Zentralisator**). Seien G eine Gruppe und $x \in G$. Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} G^x := G^{\mathrm{int}\, x} = \quad & \{g \in G \mid \mathrm{int}_x(g) = g\} = \{g \in G \mid xg = gx\} \\ = \mathrm{Z}_G(x) = G_x = \quad & \{g \in G \mid \mathrm{int}_g(x) = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} \end{aligned}$$

die Menge der Fixpunkte in G unter der Operation von x durch Konjugation alias die Isotropiegruppe von x in Bezug auf Operation durch Konjugation von G auf sich selbst. Diese Untergruppe G^x heißt der **Zentralisator von** x.

3.7.4 (**Liealgebrenzentralisator**). Gegeben $x \in G$ ein Element in einer algebraischen Gruppe betrachten wir die Unterliealgebra

$$(\mathrm{Lie}\, G)^x := (\mathrm{Lie}\, G)^{\mathrm{Ad}\, x} = \{Y \in \mathrm{Lie}\, G \mid \mathrm{Ad}_x Y = Y\}$$

und nennen sie den **Liealgebren-Zentralisator von** x.

3.7.5 (**Liealgebren von Zentralisatoren**). Gegeben $x \in G$ ein Element in einer algebraischen Gruppe ist die Liealebra des Zentralisators stets enthalten im Liealgebrenzentralisator, in Formeln

$$\mathrm{Lie}(G^x) \subset (\mathrm{Lie}\, G)^x$$

Das folgt aus der allgemeinen Tatsache, daß für jeden Automorphismus φ einer algebraischen Gruppe G gilt $\mathrm{Lie}(G^\varphi) \subset (\mathrm{Lie}\, G)^{\mathrm{d}\varphi}$. Das hinwiederum war Ihnen als Übung 3.2.36 aufgegeben. Im folgenden werden wir verschiedene Situationen kennenlernen, in denen hier Gleichheit gilt.

Beispiel 3.7.6. Für $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G = \mathrm{SL}_2(k)$ mit $\mathrm{char}\, k = 2$ erhalten als Zentralisator $G^x = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ und als Liealgebrenzentralisator $(\mathrm{Lie}\, G)^x = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right\}$. In diesem Fall gilt also $\mathrm{Lie}(G^x) \subsetneq (\mathrm{Lie}\, G)^x$.

3.7.7 (**Liealgebren von Zentralisatoren in allgemeinen linearen Gruppen**). Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt im Fall der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ für alle Elemente $x \in \mathrm{GL}(V)$ die Gleichheit

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)^x) = (\mathrm{Lie}\, \mathrm{GL}(V))^x$$

In der Tat ist in diesem Fall $\mathrm{GL}(V)^x$ ist schlicht der Schnitt von $\mathrm{GL}(V)$ mit dem Bild $\mathrm{richt}(\mathrm{Lie}\, \mathrm{GL}(V))^x$ der Invarianten in der Liealgebra unter unserer üblichen Identifikation $\mathrm{richt} : \mathrm{Lie}\, \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$.

3.7.8 (**Liealgebren von Zentralisatoren, Variante**). Gegeben $H \overset{\circ}{\subset} G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer algebraischen Gruppe und $x \in \mathrm{N}_G(H)$ setzen wir allgemeiner $H^x := H^{\mathrm{int}\, x}$ und $(\mathrm{Lie}\, H)^x := (\mathrm{Lie}\, H)^{\mathrm{Ad}\, x}$ und haben wie zuvor

$$\mathrm{Lie}(H^x) \subset (\mathrm{Lie}\, H)^x$$

Im Fall affiner algebraischer Gruppen in Charakteristik Null gilt dann sogar die Gleichheit $\mathrm{Lie}(H^x) = (\mathrm{Lie}\, H)^x$, denn wir können $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen und dann folgt

$$\mathrm{Lie}(H^x) = \mathrm{Lie}(H \cap G^x) = \mathrm{Lie}\, H \cap \mathrm{Lie}(G^x) = \mathrm{Lie}\, H \cap (\mathrm{Lie}\, G)^x = (\mathrm{Lie}\, H)^x$$

mit der zweiten Gleichung nach unserer Erkenntnis 3.7.1, daß Charakteristik Null die Liealgebra eines Schnitts von Untergruppen der Schnitt der Liealgebren ist, und der dritten Gleichung nach unserer Bestimmung 3.7.7 der Liealgebra eines Zentralisators in einer allgemeinen linearen Gruppe.

Satz 3.7.9 (Liealgebren der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente). *Gegeben $H \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\triangle} G$ affine algebraische Gruppen gilt für jedes halbeinfache Element $s \in \mathrm{N}_G(H)$ des Normalisators von H die Identiät*

$$\mathrm{Lie}(H^s) = (\mathrm{Lie}\, H)^s$$

3.7.10. Ein Automorphismus eines affinen algebraischen Monoids heißt **halbeinfach**, wenn sein Komorphismus halbeinfach ist. Die vorgeschlagene Lösung von Übung 1.3.6 zeigt, daß es gegeben ein affines algebraisches Monoid H mit einem halbeinfachen Automorphismus σ stets einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung $\rho : H \hookrightarrow \mathrm{End}(V)$ und ein halbeinfaches Element $s \in \mathrm{GL}(V)$ gibt mit $\rho \circ \sigma = \mathrm{int}_s \circ \rho$. Insbesondere folgt aus unserem Satz auch für jeden halbeinfachen Automorphismus σ einer affinen algebraischen Gruppe H die Identität

$$\mathrm{Lie}(H^\sigma) = (\mathrm{Lie}\, H)^{\mathrm{d}\sigma}$$

Beweis. Man betrachte den Morphismus $\alpha : G \to G$, $g \mapsto gsg^{-1}s^{-1}$. Sein Bild $\alpha(G) = C(s)s^{-1}$ ist die mit s^{-1} von rechts verschobene Konjugationsklasse von s und das Bild $\alpha(H) = C_H(s)s^{-1}$ von H die entsprechend verschobene Bahn von s unter der Operation durch Konjugation von H auf G. Andererseits gilt $\mathrm{d}_e\alpha : X \mapsto X - \mathrm{Ad}_s(X)$ für alle $X \in \mathrm{Lie}\, G$, wie Sie bereits in 3.3.11 gezeigt haben sollten. Ein Dimensionsvergleich zeigt, daß die Gleichheit im Satz äquivalent ist zur Surjektivität des Differentials $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_e H \to \mathrm{T}_e(\alpha(H))$. Nun können wir sicher $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Damit ist die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e(\alpha(G))$ bereits durch die Bemerkungen gegen Ende von 3.7.5 gesichert. Ist aber ganz allgemein $f : V \to V$ diagonalisierbar und $W \subset V$ ein unter f stabiler Teilraum, so gilt $W \cap f(V) = f(W)$, denn beide Seiten sind die Summe der Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten von $f : W \to W$. Da s halbeinfach angenommen war, können wir diese Erkenntnis auf $f = \mathrm{d}_e\alpha = \mathrm{id} - \mathrm{Ad}_s$ anwenden und erhalten die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_e H \twoheadrightarrow \mathrm{T}_e H \cap \mathrm{T}_e(\alpha(G))$ und wegen $\alpha(H) \subset H$ a forteriori die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_e H \twoheadrightarrow \mathrm{T}_e(\alpha(H))$. □

Satz 3.7.11 (Konjugationsklassen halbeinfacher Elemente). *Gegeben $H \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\triangle} G$ affine algebraische Gruppen ist für jedes halbeinfache Element $s \in \mathrm{N}_G(H)$ des Normalisators von H seine Bahn unter der Operation von H durch Konjugation eine abgeschlossene Teilmenge*

$$\{hsh^{-1} \mid h \in H\} \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\triangle} G$$

Insbesondere ist die Konjugationsklasse jedes halbeinfachen Elements einer affinen algebraischen Gruppe abgeschlossen.

Beweis. Wieder reicht es, den Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ zu betrachten. Wir setzen

$$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie} H$$

Die Menge $M = M_s \subset G$ aller Elemente $g \in \mathrm{N}_G(H)$, auf denen das Minimalpolynom von s verschwindet und deren charakteristisches Polynom auf $\mathfrak{h}$ ebenfalls mit dem von s übereinstimmt, in Formeln $\mathrm{char}(\mathrm{Ad}_g |\mathfrak{h}) = \mathrm{char}(\mathrm{Ad}_s |\mathfrak{h})$, besteht dann aus halbeinfachen Matrizen, ist eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset\!\!\!\!\triangle\, G$ und ist stabil unter Konjugation mit Elementen von H. Können wir zeigen, daß alle Bahnen in M unter der Operation von H durch Konjugation dieselbe Dimension haben, so haben wir gewonnen, da nach 2.3.7 alle Bahnen lokal abgeschlossen sind und damit alle Bahnen kleinstmöglicher Dimension abgeschlossen. Aber für $t \in M$ gilt ja

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{kdim}(\mathrm{int}(H)t) & = & \mathrm{kdim}\, H - \mathrm{kdim}\, H^t \\ & = & \mathrm{kdim}\, H - \dim \mathfrak{h}^t \end{array}$$

nach 3.7.9 und $\dim \mathfrak{h}^t$ ist die Vielfachheit von Eins als Eigenwert von Ad_t auf $\mathfrak{h}$ und ist nach Konstruktion konstant für $t \in M$. □

3.7.12. Gegeben affine algebraische Gruppen $H \subset\!\!\!\!\triangle\, G$ und eine Teilmenge $X \subset \mathrm{N}_G(H)$ setzen wir $H^X := \bigcap_{x \in X} H^x$ sowie $(\mathrm{Lie}\, H)^X := \bigcap_{x \in X} (\mathrm{Lie}\, H)^x$.

Korollar 3.7.13 (Liealgebren der Zentralisatoren von Tori). *Gegeben $H \subset\!\!\!\!\triangle\, G$ affine algebraische Gruppen gilt für jede Teilmenge $S \subset \mathrm{N}_G(H)_{\mathrm{s}}$ des Normalisators von H aus paarweise kommutierenden halbeinfachen Elementen die Identiät*

$$\mathrm{Lie}(H^S) = (\mathrm{Lie}\, H)^S$$

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie} H$ und argumentieren mit Induktion über die Dimension $\mathrm{kdim}\, H$ von H und unterscheiden zwei Fälle. Gilt $\mathfrak{h}^S = \mathfrak{h}$, so folgt für alle $s \in S$ erst $\mathfrak{h}^s = \mathfrak{h}$ und mit 3.7.9 weiter $\mathrm{Lie}(H^s) = \mathfrak{h}$ und so $H^s \supset H^\circ$. Zusammen erhalten wir $H^S \supset H^\circ$ und dann natürlich auch $\mathrm{Lie}(H^S) = \mathfrak{h}$ und wir brauchen noch nicht einmal die Induktionsannahme. Gilt dahingegen $\mathfrak{h}^S \neq \mathfrak{h}$, so gibt es $s \in S$ mit $\mathfrak{h}^s \neq \mathfrak{h}$, a forteriori also $\mathrm{Lie}(H^s) \neq \mathfrak{h}$, also $\mathrm{kdim}\, H^s < \mathrm{kdim}\, H$ und wir können die Induktionsannahme auf H^s anwenden und finden

$$\mathrm{Lie}(H^S) = \mathrm{Lie}((H^s)^S) = (\mathrm{Lie}\, H^s)^S = ((\mathrm{Lie}\, H)^s)^S = (\mathrm{Lie}\, H)^S$$

mit der Induktionsannahme im zweiten Schritt und 3.7.9 im dritten Schritt. □

Übungen

Übung 3.7.14. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß in $\mathrm{GL}(n; k)$ nur die halbeinfachen Elemente eine abgeschlossene Konjugationsklasse haben. Man gebe eine Formel für die Dimensionen dieser Konjugationsklassen.

3.8 Graßmann’sche und Plücker-Relationen*

3.8.1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper k mit Basis $v_1, \ldots, v_n$. Wir wählen in $\bigwedge^m V$ die Basis v_I, wo I über alle m-elementigen Teilmengen $I \subset \{1, \ldots, n\}$ läuft und wir wie üblich $v_I := v_i \wedge \ldots \wedge v_j$ setzen für $i < \ldots < j$ die Größe nach aufgeführten Elemente von I. Die zugehörigen Koordinatenfunktionen heißen die **Plücker-Koordinaten**, das sind also lineare Abbildungen $x_I = x_{i,\ldots,j} : \bigwedge^m V \to k$. Gegeben $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $\operatorname{sgn}(I, \nu)$ das Vorzeichen „Minus Eins hoch die Anzahl derjenigen Elemente von I, die größer sind als ν“.

Satz 3.8.2. *Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Seien $x_I : \bigwedge^m V \to k$ für $I \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = m$ die zugehörigen Plücker-Koordinaten. So ist das Bild unserer eben erklärten Einbettung $\bigwedge^m$: $\operatorname{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ die Projektivisierung der Lösungsmenge des folgenden Systems von quadratischen Gleichungen, der sogenannten* **Plücker-Relationen**

$$0 = \sum_{\nu \in K \setminus L} \operatorname{sgn}(K, \nu) x_{L \cup \{\nu\}} x_{K \setminus \{\nu\}}$$

Diese Gleichungen sind dabei für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|K| = m + 1$ und $|L| = m - 1$ zu nehmen.

3.8.3. Im Spezialfall $m = 2$ und unter der Annahme eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist das auch gleichbedeutend zu der besonders übersichtlichen Bedingung

$$\omega \wedge \omega = 0$$

In der Tat, $\omega = \sum_{i<j} x_{ij} v_i \wedge v_j$ erfüllt $\omega \wedge \omega = 0$ genau dann, wenn für alle $i < j < k < l$ gilt $2(x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}) = 0$. Nehmen wir nun oben $L = \{i\}$ und $K = \{j, k, l\}$, so erhalten wir genau diese Gleichungen bis auf den Faktor 2 und im Fall $L \subset K$ die Gleichungen $0 = 0$, die keine zusätzlichen Bedingungen liefern.

Beweis. Es gilt, die Bedingung $\dim \ker(\omega\wedge) \geq m$ aus dem vorhergehenden Beweis im Fall eines n-dimensionalen Raums V mit $n \geq m$ auszuschreiben. Dazu erinnern wir an die beiden nichtausgearteten Paarungen

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^m V \times \bigwedge^m V^* & \to & k \\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_m, f_1 \wedge \ldots \wedge f_m) & \mapsto & \det(f_i(v_j))_{i,j=1}^m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^m V \times \bigwedge^{n-m} V & \to & \bigwedge^n V \\ (\omega\ ,\ \eta) & \mapsto & \omega \wedge \eta \end{array}$$

Hier und im folgenden vereinbaren wir, daß das Bilden des Dualraums stärker bindet als das Bilden äußerer Potenzen, daß also $\bigwedge^m V^*$ a priori als $\bigwedge^m(V^*)$ zu verstehen ist, auch wenn es darauf ja gar nicht wirklich ankommt, denn die erste Paarung liefert eine kanonische Identifikation $\bigwedge^m V^* \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^m V)^*$. Zusammen mit der zweiten Paarung erhalten wir dann einen bis auf Skalar eindeutig bestimmten Isomorphismus $\bigwedge^m V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{n-m} V^*$. Auf die Wahl dieses Skalars kommt es uns nicht an und wir schreiben unseren Isomorphismus $\omega \mapsto \omega^*$. Bezeichnen wir weiter für einen Teilraum $A \subset B$ seinen Annullator mit $A^\perp \subset B^*$, so haben wir für $W \subset V$ einen m-dimensionalen Teilraum unter unserem Isomorphismus $\omega \mapsto \omega^*$ offensichtlich $\bigwedge^m W \mapsto \bigwedge^{n-m}(W^\perp)$. Folglich erfüllt jedes ω im Bild von $\mathrm{Gr}(m; V)$ die Gleichung

$$\ker(\omega\wedge)^\perp = \ker(\omega^*\wedge)$$

In der Tat sind für $\omega = \bigwedge^m W$ schlicht beide Seiten $W^\perp$. Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung auch $\dim\ker(\omega\wedge) + \dim\ker(\omega^*\wedge) = n$ und damit definiert unsere Gleichung genau das Bild von $\mathrm{Gr}(m; V)$. Aus Dimensionsgründen charakterisiert sogar die Bedingung $(\ker(\omega\wedge))^\perp \subset \ker(\omega^*\wedge)$ bereits das Bild von $\mathrm{Gr}(m; V)$. Weil nun bei jeder linearen Abbildung der Annullator des Kerns mit dem Bild der transponierten Abbildung zusammenfällt, in Formeln $(\ker f)^\perp = \mathrm{im}(f^\top)$, erhalten wir für $\omega \in \bigwedge^m V$ schließlich

$$(k\omega \text{ liegt im Bild von } \mathrm{Gr}(m; V)) \Leftrightarrow \mathrm{im}((\omega\wedge)^\top) \subset \ker(\omega^*\wedge)$$

Die Wahl des Elements $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge^n V$ legt die bis auf einen Skalar definierte Abbildung $\omega \mapsto \omega^*$ von oben sogar ganz fest und wir erhalten dafür die explizite Beschreibung als die Komposition

$$v_I \mapsto \mathrm{sgn}(I) v^*_{I^c}$$

mit I^c dem Komplement von I und $\mathrm{sgn}(I)$ dem Signum der Permutation, die die Elemente von I nach vorne schiebt, sonst aber alle Reihenfolgen erhält, mit v_i^* den Elementen der dualen Basis und v_J^* den Elementen der dazu entsprechend gebildeten Basis der Graßmann-Algebra $\bigwedge V^*$. Gegeben $\omega = \sum x_I v_I$ wird $\omega\wedge$ gegeben durch $v_\nu \mapsto \sum_{\nu \notin I} \mathrm{sgn}(I, \nu) x_I v_{I \cup \{\nu\}}$. Die transponierte Abbildung $(\omega\wedge)^\top$ wird also gegeben durch

$$v_K^* \mapsto \sum_{\nu \in K} \mathrm{sgn}(K, \nu) x_{K \setminus \nu} v_\nu^*$$

Unsere Bedingung $\mathrm{im}(\omega\wedge)^\top \subset \ker(\omega^*\wedge)$ lautet damit dann, daß für alle K mit $|K| = m + 1$ gilt

$$0 = \sum_{\nu \in K} \sum_I \mathrm{sgn}(I) x_I \,\mathrm{sgn}(K, \nu) x_{K \setminus \nu} v^*_{I^c} \wedge v^*_\nu$$

Das bedeutet, daß für alle L mit $|L| = m - 1$ der Koeffizient von $v^*_{L^c}$ Null ist, und da $I^c \cup \{\nu\} = L^c$ gleichbedeutend ist zu $L = I \backslash \nu$, ist das äquivalent zu den Gleichungen

$$0 = \sum_{\nu \in K \backslash L} \operatorname{sgn}(L \cup \{\nu\}) \operatorname{sgn}(K, \nu) \operatorname{sgn}(L^c, \nu) x_{L \cup \{\nu\}} x_{K \backslash \{\nu\}}$$

für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|K| = m + 1$ und $|L| = m - 1$. Nun überlegen wir uns noch, daß $\operatorname{sgn}(L \cup \{\nu\}) \operatorname{sgn}(L^c, \nu)$ für $\nu \notin L$ von ν gar nicht abhängt, und folgern unsere Plücker-Relationen

$$0 = \sum_{\nu \in K \backslash L} \operatorname{sgn}(K, \nu) x_{L \cup \{\nu\}} x_{K \backslash \{\nu\}}$$

Das Bild der Graßmann'schen im projektiven Raum der entsprechenden äußeren Potenz ist also die simultane Nullstellenmenge dieser quadratischen Gleichungen für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|K| = m + 1$ und $|L| = m - 1$. □

Definition 3.8.4. Gegeben ein Körper k und ein k-Kring A versteht man unter einer **Theorie von Standard-Monomen** für A die Angabe einer Teilmenge $\mathcal{A} \subset A$ mitsamt einer Teilordnung darauf derart, daß die Menge der „nichtfallenden Monome in den Elemten von $\mathcal{A}$“, in Formeln die Menge

$$\{a_1 a_2 \ldots a_r \mid r \geq 0,\ a_i \in \mathcal{A},\ a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r\}$$

eine Basis von A über k bildet.

Beispiel 3.8.5. Man kann zeigen, daß im homogenen Koordinatenring der Graßmann'schen $\operatorname{Gr}(m; k^n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^m k^n)$ die Plücker-Koordinaten x_I eine Theorie von Standard-Monomen liefern, wenn man setzt $x_I \leq x_J$, wenn gilt $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$ mit $i_\nu \leq j_\nu \ \forall \nu$. Weiter gibt es eine Anordnung auf der Menge der möglichen Monome derart, daß für $a, b \in \mathcal{A}$ unvergleichbar gilt $ab \in$ (Standardmonom $+ \langle c \mid c < ab \rangle_k$). Solche Darstellungen von ab heißen dann „straithening relations“. Man erhält solch eine Anordung laut Literatur, indem man die Bruhatteilordnung zu einer totalen Ordnung erweitert und dazu die lexikographische Ordnung betrachtet.

3.9 Restringierte Lie-Algebren*

3.9.1. In diesem Abschnitt werden grundlegende Kenntnisse über die universelle einhüllende Algebra einer Liealgebra im Umfang von [**?**] **??** vorausgesetzt.

Definition 3.9.2. Sei k ein Körper positiver Charakteristik $p > 0$. Eine **restringierte k-Liealgebra** ist ein Paar bestehend aus einer k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einer Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $X \mapsto X^{[p]}$ derart, daß die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Abbildung $\xi : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $X \mapsto X^p - X^{[p]}$ von der Liealgebra in ihre universelle Einhüllende ist ein Homomorphismus von additiven Gruppen;
2. Für alle $\alpha \in k$ und $X \in \mathfrak{g}$ gilt $(\alpha X)^{[p]} = \alpha^p X^{[p]}$;
3. Für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt $\mathrm{ad}(X^{[p]}) = (\mathrm{ad}\, X)^p$.

Die Abbildung $X \mapsto X^{[p]}$ heißt im Zusammenhang von restringierten Lialgebren die **formale p-te Potenz**.

3.9.3. Es gilt in obiger Definition sorgfältig zu unterscheiden zwischen der p-ten Potenz X^p in der einhüllenden Algebra, der p-ten Potenz $(\mathrm{ad}\, X)^p$ im Endomorphismenring $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ des Vektorraums $\mathfrak{g}$ und der formalen p-ten Potenz $X^{[p]} \in \mathfrak{g}$. Offensichtlich ist jede Unteralgebra einer restringierten k-Liealgebra, die stabil ist unter $X \mapsto X^{[p]}$, auch ihrerseits eine restringierte k-Liealgebra.

Proposition 3.9.4 (Formale p-Potenz der allgemeinen linearen Liealgebra). *Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k der Charakteristik $p > 0$ ist $\mathfrak{gl}(V)$ mit $X^{[p]} := X^{(\circ p)}$ der p-ten Potenz von X im Endomorphismenring von V eine restringierte Liealgebra.*

3.9.5. Gegeben eine k-Ringalgebra $(A, \circ)$ ist insbesondere A_{L} eine restringierte Liealgebra mit $X^{[p]} := X^{(\circ p)}$. Gegeben eine beliebige k-Algebra $(A, \circ)$ ist weiter $\mathrm{Der}_k A$ nach 3.2.5 eine restringierte Liealgebra mit $\partial^{[p]} := \partial^{(\circ p)}$. Speziell wird so auch die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe eine restringierte Lie-Algebra. Schließlich ist für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V auch $\mathfrak{sl}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$ stabil unter $X \mapsto X^{(\circ p)}$, was man durch Übergang zu einem größeren Körper und Trigonalisierung leicht einsieht, und wird damit ihrerseits eine restringierte Lie-Algebra.

Beweis. Die zweite Bedingung aus der Definition ist offensichtlich erfüllt. Wir zeigen als nächstes die letzte Bedingung. In der Hoffnung, dadurch dem Verständnis zu helfen, notieren wir $\circ$ die Multiplikation in $\mathrm{End}(V)$ und verstehen ad stets in Bezug auf die auf $\mathfrak{g} := \mathrm{End}(V)$ induzierte Struktur einer Liealgebra. Dahingegen notieren wir die Multiplikation in $\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ ohne ein spezielles Multiplikationssymbol. Damit finden wir für $X, Y \in \mathrm{End}(V)$ im Ring $\mathrm{End}(V)$ die Identität

$$(\mathrm{ad}(X^{[p]}))(Y) = X^{(\circ p)} \circ Y - Y \circ X^{(\circ p)} = ((X\circ) - (\circ X))^p(Y) = (\mathrm{ad}\, X)^p(Y)$$

Jetzt zeigen wir noch die Additivität $\xi(A+B) = \xi(A) + \xi(B)$ von ξ. Es gilt in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ zu zeigen

$$(A+B)^p - A^p - B^p = (A+B)^{[p]} - A^{[p]} - B^{[p]}$$

Es reicht zu zeigen, daß die linke Seite im Teilraum $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ liegt, denn beide Seiten landen unter dem natürlichen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k V$ offensichtlich auf demselben Element und die Restriktion dieses Ringalgebrenhomomorphismus auf $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ ist injektiv. Nun gilt in einer beliebigen k-Ringalgebra

$$(A+B)^p - A^p - B^p = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(A,B)$$

für gewisse universelle Polynome $s_i \in k\lfloor X, Y \rfloor$ in nichtkommutierenden Variablen, die erklärt werden können durch die Identität

$$(tX+Y)^p - (tX)^p - Y^p = \sum_{i=1}^{p-1} t^i s_i(X,Y)$$

in $k\lfloor X, Y\rfloor[t]$. Formales Ableiten nach t liefert

$$\sum_{i=1}^{p} (tX+Y)^{i-1} X (tX+Y)^{p-i} = \sum_{i=1}^{p-1} i t^{i-1} s_i(X,Y)$$

Die linke Seite kann hier umgeschrieben werden zu

$$(((tX+Y)\cdot) - (\cdot(tX+Y)))^{p-1}(X)$$

aufgrund der allgemeinen Formel $(r-s)^{p-1} = \sum_{i=1}^{p} r^{i-1}s^{p-i}$ im Polynomring $k[r,s]$, die man unschwer durch Multiplikation beider Seiten mit $(r-s)$ prüft. Das aber zeigt $(\mathrm{ad}(tX+Y))^{p-1}(X) = \sum_{i=1}^{p-1} i t^{i-1} s_i(X,Y)$. Damit sind alle $s_i(X,Y)$ Linearkombinationen von iterierten Kommutatoren. Im Fall $A, B \in \mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ gehört also in der Tat auch $(A+B)^p - A^p - B^p$ zu $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. □

Proposition 3.9.6. *Gegeben eine restringierte Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k positiver Charakteristik gehört $X^{[p]} - X^p$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ zum Zentrum der Einhüllenden* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Nach Annahme gilt $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X^{[p]})(Y) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)^p(Y)$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$. Beide Seiten lassen sich zu Derivationen der universellen Einhüllenden fortsetzen durch $\mathrm{ad}_{\mathrm{U}}(X^{[p]})(u) := X^{[p]}u - uX^{[p]}$ beziehungsweise $(\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)u := Xu - uX$ und $(\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)^p$ die p-te Potenz dieser Derivation, die ja nach unseren allgemeinen Erkenntnissen 3.2.5 auch selbst wieder eine Derivation der Einhüllenden sein muß.

Da diese beiden Derivationen nach Annahme auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen, stimmen sie notwendig auch auf der ganzen Einhüllenden überein und wir haben

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{U}}(X^{[p]})(u) = (\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)^p(u)$$

für alle $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Andererseits gilt $\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X = (X\cdot) - (\cdot X) : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ und damit $(\mathrm{ad}_{\mathrm{U}} X)^p(u) = X^p u - uX^p$. Insgesamt folgt $X^{[p]}u - uX^{[p]} = X^p u - uX^p$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ und das war genau zu zeigen. □

3.10 Unipotente Gruppen und ihre Liealgebren*

3.10.1 (**Exponentialabbildung bei algebraischen Gruppen**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ und $X \in \operatorname{Lie} G$ nilpotent ist seine Fortsetzung $\grave{X}$ zu einem linksinvarianten Vektorfeld eine lokal nilpotente Derivation von $\mathcal{O}(G)$ und folglich $\exp(\grave{X})$ nach [HL] 2.4.3 ein Ringalgebrenautomorphismus von $\mathcal{O}(G)$. Mit $\grave{X}$ muß natürlich auch $\exp(\grave{X})$ mit allen Linksverschiebungen $\acute{z}$ für $z \in G$ vertauschen. Wie beim Beweis von 1.5.5 diskutiert, muß dieser Automorphismus $\exp(\grave{X})$ von $\mathcal{O}(G)$ also die Rechtsverschiebung $\grave{g}$ mit einem wohlbestimmten Element $g \in G$ sein. Wir vereinbaren für dieses Element die Notation

$$g := \tilde{\exp} X$$

und vereinfachen sie ab 3.10.4 zu $\exp X$, sobald wir uns daselbst überzeugt haben, daß das nicht zu Mehrdeutigkeiten führt.

Beispiel 3.10.2 (**Exponentialabbildung der additiven Gruppe**). Im Fall der additiven Gruppe $(k, +)$ eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k der Charakteristik Null und $\lambda \in k$ finden wir

$$(\exp \lambda\partial) : T^n \mapsto \sum_i \binom{n}{i} T^i \lambda^{n-i} = (T + \lambda)^n$$

und so $(\exp \lambda\partial) f = f \circ (+\lambda)$ und mithin $\tilde{\exp} : \lambda\partial \mapsto \lambda$.

3.10.3 (**Funktorialität der Exponentialabbildung**). Offensichtlich gilt für jeden Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von affinen algebraischen Gruppen und jedes nilpotente Element $X \in \operatorname{Lie} G$ stets

$$\varphi(\tilde{\exp} X) = \tilde{\exp}(\mathrm{d}\varphi(X))$$

Lemma 3.10.4 (**Exponentialabbildung der allgemeinen linearen Gruppe**). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorrraum V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik* $\operatorname{char} k = 0$ *gilt mit unserer kanonischen Identifikation* $\mathrm{richt} : \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$ *für alle nilpotenten $X \in \operatorname{Lie} \mathrm{GL}(V)$ die Identität*

$$\tilde{\exp}(X) = \exp(\mathrm{richt}\, X)$$

3.10.5. Wegen dieser Verträglichkeit führt es nicht zu Mehrdeutigkeiten, wenn wir unsere Notation, sobald das Lemma bewiesen ist, zu $\tilde{\exp} = \exp$ vereinfachen.

Beweis. Für jeden nilpotenten Endomorphismus $N \in \operatorname{End} V$ können wir einen Gruppenhomomorphismus $\varphi = \varphi_N : (k, +) \to \operatorname{GL}(V)$ erklären durch die Vorschrift $\varphi_N(t) = \exp(tN)$. Dann gilt offensichtlich $\operatorname{richt}(\mathrm{d}\varphi_N(\partial)) = N$. Für $N = \operatorname{richt}(X)$ erhalten wir mit der Funktorialität 3.10.3 und dem Beispiel 3.10.2 der additiven Gruppe

$$\tilde{\exp}(X) = \tilde{\exp}(\mathrm{d}\varphi_N(\partial)) = \varphi_N(\tilde{\exp}(\partial)) = \varphi_N(1) = \exp(N) \qquad \square$$

Satz 3.10.6 (Unipotente Gruppen in Charakteristik Null). *Gegeben eine unipotente affine algebraische Gruppe U über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik* $\operatorname{char} k = 0$ *induziert die Exponentialabbildung einen Isomorphismus von algebraischen Varietäten*

$$\exp : \operatorname{Lie} U \xrightarrow{\sim} U$$

3.10.7. Ist insbesondere $\dim_k V < \infty$ und $U \not\subset\!\!\!\!\triangleleft\; \operatorname{GL}(V)$ eine unipotente Untergruppe und ein Teilraum $W \subset V$ stabil unter der abgeleiteten Operation von $\operatorname{Lie} U$, so ist W auch stabil unter U.

Beweis. Gegeben ein Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ liefern die Exponentialreihe und die Reihenentwicklung von $\log(1 + x)$ zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\} \underset{\underset{\log}{\leftarrow}}{\overset{\overset{\exp}{\rightarrow}}{\sim}} \left\{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

zwischen der Menge der echten oberen Dreiecksmatrizen und der Menge der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, jeweils mit Einträgen in k. Gilt zusätzlich $k = \bar{k}$ und ist U eine abgeschlossene Untergruppe rechts und $\operatorname{Lie} U$ ihre Liealgebra links, so folgt zunächst $\exp(\operatorname{Lie} U) \subset U$ aus der Funktorialität 3.10.3 und dann $\exp(\operatorname{Lie} U) = U$ durch Dimensionsvergleich und die Erkenntnis 3.6.19, daß in Charakteristik Null jede unipotente Gruppe zusammenhängend ist. $\square$

3.10.8. Wir nennen eine endlichdimensionale Liealgebra **nilpotent**, wenn sie als Unteralgebra in eine Liealgebra von echten oberen Dreiecksmatrizen eingebettet werden kann. Eine intrinsische Charakterisierung, die auch für Liealgebren unendlicher Dimension sinnvoll bleibt, wird in [HL] 3.6.2 formuliert und bewiesen.

Satz 3.10.9 (Unipotente Gruppen und ihre Liealgebren). *Gegeben $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* $\operatorname{char} k = 0$ *ist das Bilden der Liealgebra eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{unipotente affine algebraische} \\ \textit{Gruppen über k} \end{array} \right\} \stackrel{\approx}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \textit{endlichdimensionale nilpotente} \\ \textit{Liealgebren über k} \end{array} \right\}$$

Beweis. Daß unser Funktor treu ist, daß er also Injektionen zwischen den beteiligten Morphismenräumen induziert, folgt bereits aus der Isomorphismeneigenschaft 3.10.6 und der Funktorialität 3.10.3 der Exponentialabbildung. Wir zeigen als nächstes, daß auch jede nilpotente Liealgebra isomorph ist zur Liealgebra einer unipotenten algebraischen Gruppe. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jedes n und jede Unteralgebra $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{d}_n$ der Liealgebra $\mathfrak{d}_n \subset \operatorname{Mat}(n; k)$ aller echten oberen Dreiecksmatrizen auch $\exp \mathfrak{n}$ eine Untergruppe der Gruppe aller unipotenten oberen Dreiecksmatrizen ist. Das zeigen wir durch Induktion über die Dimension. Der nulldimensionale Fall ist klar. Sonst wähle man ein Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$ der Kodimension Eins, das muß es stets geben, und ein Element $x \in \mathfrak{n} \backslash \mathfrak{m}$. Da die Rechtsmultiplikation und die Linksmultiplikationen mit x kommutieren, erhalten wir für jede nilpotente Matrix x und jede Matrix y die Identität

$$\exp(x) y \exp(x)^{-1} = \exp((x \cdot) - (\cdot x))(y) = (\exp(\operatorname{ad} x))(y)$$

Nun ist aber $\operatorname{ad} x$ eine nilpotente Derivation der Matrixalgebra und $\exp(\operatorname{ad} x)$ folglich ein Automorphismus der Matrixalgebra. Für z eine weitere nilpotente Matrix ergibt sich damit

$$\exp(x) \exp(z) \exp(x)^{-1} = (\exp(\operatorname{ad} x))(\exp(z)) = \exp((\exp(\operatorname{ad} x))(z))$$

Folglich normalisiert die Untergruppe $\exp(kx)$ die Untergruppe $\exp \mathfrak{m}$ und damit ist das Produkt $(\exp \mathfrak{m})(\exp kx)$ selbst eine Untergruppe. Dasselbe gilt für ihren Abschluß, in dem unser Produkt als Bahn einer Wirkung von $(\exp \mathfrak{m}) \times (\exp kx)$ zumindest eine offene Teilmenge sein muß. Die Liealgebra dieses Abschlusses umfaßt nun aber offensichtlich unser $\mathfrak{n}$ und fällt dann aus Dimensionsgründen sogar damit zusammen. Also ist $\exp \mathfrak{n} \subset\!\!\!\!\!\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\; \exp \mathfrak{d}_n$ in der Tat eine abgeschlossene Untergruppe. Nun müssen wir nur noch zeigen, daß jeder Homomorphismus $\mathfrak{u} \to \mathfrak{n}$ von nilpotenten Liealgebren auch von einem Gruppenhomomorphismus herkommt. Sei dazu $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{u} \times \mathfrak{n}$ der Graph unseres Liealgebrenhomomorphismus. Nach dem bereits Bewiesenen ist $M := \exp \mathfrak{m}$ dann eine abgeschlossene Untergruppe $M \subset\!\!\!\!\!\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\; U \times N$ und die Treue unseres Funktor zeigt, daß die Projektion einen Isoorphismus $M \stackrel{\sim}{\to} U$ induziert. Also ist M auch der Graph eines Gruppenhomomorphismus und das beendet den Beweis. □

3.10.10 (**Alternativen beim Beweis**). Aus 2.3.9 folgt, daß $(\exp \mathfrak{m})(\exp kx)$ als Bahn einer unipotenten Gruppe in einer affinen Varietät bereits selbst abgeschlossen sein muß. Aus der Variante [HL] 3.2.5 der Hausdorff-Formel kann man auch direkt folgern, daß $\exp(\mathfrak{n})$ eine Untergruppe der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen sein muß.

Übungen

Übung 3.10.11. Gegeben ein Körper k der Charakteristik $\operatorname{char}(k) = 0$ betrachte man die Menge $\mathcal{N} \subset \operatorname{Mat}(n; k)$ der nilpotenten Matrizen und zeige, daß die Exponentialabbildung darauf zu einer Injektion $\exp : \mathcal{N} \hookrightarrow \operatorname{Mat}(n; k)$ einschränkt. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k = \bar{k}$. Aus $\exp(A) = \exp(B)$ folgere man $\exp(tA) = \exp(tB)$ für alle $t \in \mathbb{N}$ und dann für alle $t \in k$.

Übung 3.10.12. Gegeben eine affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null und $(\operatorname{Lie} G)_{\mathrm{n}}$ die Menge der nilpotenten Elemente ihrer Liealgebra induziert die Exponentialabbildung einen Isomorphismus von Varietäten

$$\exp : (\operatorname{Lie} G)_{\mathrm{n}} \xrightarrow{\sim} G_{\mathrm{u}}$$

des nilpotenten Kegels mit der Varietät der unipotenten Elemente von G. Hinweis: Die Injektivität folgt aus 3.10.11.

Übung 3.10.13 (**Unipotente kommutative Gruppen**). Jede kommutative unipotente affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null ist isomorph zur additiven Gruppe eines endlichdimensionalen k-Vektorraums. In positiver Charakteristik gilt das nicht mehr.

3.11 Algebraische Distributionen*

Definition 3.11.1. Gegeben eine bepunktete k-Varietät (X, x) und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $\operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x) := \{\mu \in \operatorname{Hom}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) \mid \mu(\mathfrak{m}_x^{n+1}) = 0\}$ und

$$\operatorname{Dist}(X, x) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x)$$

Die Elemente dieses Vektorraums über k heißen die **Distributionen auf X mit Träger in** x. Jeder Morphismus $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$ von bepunkteten Varietäten induziert einen lokalen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ und so Homomorphismen $\operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x) \to \operatorname{Dist}^{\leq n}(Y, y)$ sowie

$$\mathrm{d}_x\varphi : \operatorname{Dist}(X, x) \to \operatorname{Dist}(Y, y)$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Funktor von der Kategorie Var^* der bepunkteten Varietäten in die Kategorie der Vektorräume, ja in die Kategorie der filtrierten Vektorräume.

Beispiel 3.11.2. Gegeben eine affine bepunktete Varietät (X, x) liefert die Einbettung nach dem Satz über überflüssiges Lokalisieren Isomorphismen

$$\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(x)^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$$

Distributionen vom Grad $\leq n$ können also auch als Linearformen auf dem linken Quotienten realisiert werden. Ist etwa $X = k$ die Gerade mit $\mathcal{O}(X) = k[T]$ und $x = 0$ der Ursprung, so bilden die Koordinatenfunktionen zur Basis der Monome T^r eine Basis des Raums der Distributionen. Wir notieren die entsprechenden Basisvektoren $\partial^{(r)}$. In Charakteristik Null können sie auch explizit als die Differentialoperatoren $(r!)^{-1}\partial^r$ gefolgt vom Auswerten beim Ursprung aufgefaßt werden.

3.11.3. Sei (X, x) eine bepunktete Varietät. Das Auswerten $\delta_x : \mathcal{O}_{X,x} \to k$ an der Stelle x nennt man in diesem Zusammenhang auch die **Dirac'sche δ-Distribution**. Sie ist eine Basis des k-Vektorraums $\mathrm{Dist}^{\leq 0}(X, x)$ der Dimension Eins. Der Kern des Auswertens auf der konstanten Funktion Eins ist ein Teilraum $\mathrm{Dist}^+(X, x) \subset \mathrm{Dist}(X, x)$, der komplementär ist zu $k\delta_x$. Die Restriktion auf $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \subset \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2$ induziert des weiteren einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Dist}^{\leq 1}(X, x) \cap \mathrm{Dist}^+(X, x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X$$

und so eine Einbettung des Tangentialraums in den Raum der Distributionen.

3.11.4. Der Durchschnittssatz von Krull [KAG] 4.6.14 zeigt, daß für jede bepunktete Varietät (X, x) das Auswerten $\mathrm{Dist}(X, x) \times \mathcal{O}_{X,x} \to k$ eine nichtausgeartete Paarung ist.

Satz 3.11.5 (Distributionen auf Produkten). *Gegeben zwei bepunktete Varietäten (X, x) sowie (Y, y) und Distributionen $\mu \in \mathrm{Dist}(X, x)$ sowie $\nu \in \mathrm{Dist}(Y, y)$ gibt es genau eine Distribution $\mu \boxtimes \nu \in \mathrm{Dist}(X \times Y, (x, y))$ mit der Eigenschaft, daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} \otimes_k \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d, "\mu\otimes\nu"'] & \mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)} \arrow[d, "\mu\boxtimes\nu"] \\
k \otimes_k k \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & k
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Weiter liefert diese Vorschrift einen Isomorphismus

$$\mathrm{Dist}(X, x) \otimes_k \mathrm{Dist}(Y, y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dist}(X \times Y, (x, y))$$

3.11.6. Der Isomorphismus aus dem Satz ist sogar ein Isomorphismus von filtrierten Vektorräumen, wenn wir die Filtierung auf dem Tensorprodukt wie in [KAG] 7.1.12 erklären, und gegeben Tangentialvektoren v, w der jeweiligen Tangentialräume finden wir $v \otimes \delta_y + \delta_x \otimes w \mapsto (v, w)$. Auch das zeigt der folgende Beweis.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir X und Y affin annehmen. In diesem Fall liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(x)^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$ und dann natürlich auch einen Isomorphismus der Dualräume. Andererseits induziert $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}(x) \otimes \mathcal{O}(Y) + \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{I}(y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)$$

mit dem Verschwindungsideal $\mathcal{I}(x, y)$ von (x, y). Dann entsprechen sich unter dem kanonischen Isomorphismus auch alle Potenzen dieser Ideale, in Formeln

$$\sum_{i+j=n} \mathcal{I}(x)^i \otimes \mathcal{I}(y)^j \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)^n$$

Das zeigt, daß gegeben Linearformen $\mu \in \mathcal{O}(X)^*$ und $\nu \in \mathcal{O}(Y)^*$ mit $\mu(\mathcal{I}(x)^i) = 0$ und $\nu(\mathcal{I}(y)^j) = 0$ notwendig gilt $(\mu \boxtimes \nu)(\mathcal{I}(x, y)^{i+j}) = 0$. Mithin gibt es für $\mu \in \mathrm{Dist}^{\leq i}(X, x)$ und $\nu \in \mathrm{Dist}^{\leq j}(Y, y)$ genau ein $\mu \boxtimes \nu \in \mathrm{Dist}^{\leq i+j}(X \times Y, (x, y))$ mit der im Satz geforderten Eigenschaft. Nun können wir unsere Summe auch umschreiben zu einem Schnitt und damit induziert der kanonische Isomorphismus einen Isomorphismus

$$\bigcap_{i+j=n} \left(\mathcal{I}(x)^i \otimes \mathcal{O}(Y) + \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{I}(y)^j\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)^n$$

So erkennen wir mit [LA2] 4.5.10, daß der kanonische Isomorphismus eine Surjektion

$$\sum_{i+j=n} \mathrm{Dist}^{\leq i}(X, x) \otimes \mathrm{Dist}^{\leq j}(Y, y) \twoheadrightarrow \mathrm{Dist}^{\leq n}(X \times Y, (x, y))$$

induziert. Die Injektivität von $\mathrm{Dist}(X, x) \otimes \mathrm{Dist}(Y, y) \to \mathrm{Dist}(X \times Y, (x, y))$ ist eh klar nach [LA2] 6.1.25. □

3.11.7. In der Sprache der Schmelzkategorien [TS] **??** folgende ausgedrückt bilden die Distributionen sogar einen mit universellen Trennungen verträglichen Trennfunktor

$$\mathrm{Dist} : \curlywedge\mathrm{Var}_k^* \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{dual}}$$

von der banalen Trennkategorie der bepunkteten k-Varietäten in die Duale der Schmelzkategorie der k-Vektorräume, ja sogar der filtrierten k-Vektorräume. Die einzige Leertrennung $(X,x) \to \curlywedge$ wird dabei auf diejenige Leertrennung alias Linearform auf $\mathrm{Dist}(X,x)$ abgebildet, die durch Auswerten auf der Eins des lokalen Rings gegeben wird. Im Fall affiner Varietäten kann der zu unserem Trennfunktor duale Schmelzfunktor $\mathrm{kart}(\mathrm{Var}_k^*) \to \mathrm{Mod}_k$ als Unterschmelzfunktor des Schmelzfunktors $(X,x) \mapsto \mathcal{O}(X)^*$ aufgefaßt werden, der jeder punktierten Varietät den Dualraum in Bezug auf den Grundkörper des Raums der regulären Funktionen zuordnet.

3.11.8 (**Distributionen als Kokringalgebra**). Gegeben eine bepunktete algebraische Varietät (X,x) betrachten wir die diagonale Einbettung $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$ und die Verknüpfung

$$\mathrm{Dist}(X,x) \xrightarrow{\mathrm{d}_x\Delta} \mathrm{Dist}(X \times X,(x,x)) \tilde{\to} \mathrm{Dist}(X,x) \otimes \mathrm{Dist}(X,x)$$

Diese Verknüpfung μ ist offensichtlich koassoziativ und kokommutativ und macht so $\mathrm{Dist}(X,x)$ zu einer Koalgebra, ja zu einer Kokringalgebra im Sinne von [TS] **??** mit dem Auswerten $\mu \mapsto \mu(1)$ auf der konstanten Funktion $1 \in \mathcal{O}_{X,x}$ als Koeinheit. In der Sprache der Trennkategorien ausgedrückt wird das banale Koabmonoidobjekt (X,x) aus [TS] **??** unter dem Trennfunktor Dist eben zu einem Koabmonoidobjekt von $\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{dual}}$ alias einer Kokringalgebra.

3.11.9 (**Distributionen auf einer Gruppe als Hopfalgebra**). Ist G eine algebraische Gruppe, so induziert das Gruppengesetz $G \times G \to G$ eine bilineare Abbildung

$$\mathrm{Dist}(G,e) \otimes \mathrm{Dist}(G,e) \tilde{\to} \mathrm{Dist}(G \times G,(e,e)) \to \mathrm{Dist}(G,e)$$

Man sieht leicht, daß $\mathrm{Dist}(G,e)$ so eine k-Ringalgebra wird mit dem Auswerten an e als Einselement, ja eine kokommutative Hopfalgebra mit der zuvor erklärten Kokringalgebrenstruktur. Formal mag man auch bemerken, daß (G,e) ein Hopfobjekt im Sinne von [TS] **??** der banalen Trennkategorie $\curlywedge\mathrm{Var}_k^*$ ist und damit unter dem mit universellen Trennungen verträglichen Trennfunktor Dist notwendig zu einem Hopfobjekt der Trennkategorie $\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{dual}}$ alias einem Hopfobjekt der Schmelzkategorie Mod_k werden muß.

3.11.10 (**Distributionsalgebra eines Vektorraums**). Im Spezialfall der additiven Gruppe V eines endlichdimensionalen Vektorraums liefert die Einbettung $V^* \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ einen Isomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{S}(V^*) \tilde{\to} \mathcal{O}(V)$$

Indem wir jedem Vektor die zugehörige Richtungsableitung im Ursprung zuordnen, erhalten wir auch einen natürlichen Homomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{S}(V) \to \mathrm{Dist}(V,0)$$

Im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist auch letztere Abbildung ein Isomorphismus von Ringalgebren. In jedem Fall induziert die durch das Auswerten gegebene Paarung

$$\operatorname{Dist}(V,0) \times \mathcal{O}(V) \to k$$

eine Paarung $\mathrm{S}(V) \otimes \mathrm{S}(V^*) \to k$. Ist $T_1, \ldots, T_n$ eine Basis von V^* und $\partial_1, \ldots, \partial_n$ die duale Basis von V, so entspricht diese Paarung nach **??** dem Anwenden eines Differentialoperators auf eine polynomiale Funktion, gefolgt vom Auswerten beim neutralen Element.

Proposition 3.11.11 (Operation auf Fixpunktdistributionen). *Gegeben $G \curvearrowright X$ eine algebraische Varietät mit der Operation eines algebraischen Monoids und ein Fixpunkt $x \in X$ der Operation ist für alle $r \geq 0$ die induzierte Operation von G auf $\operatorname{Dist}(X, x)$ algebraisch.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für alle $r \geq 0$ die induzierte Rechtsoperation von G auf $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^r$ algebraisch ist. Um das zu sehen, betrachten wir eine offene affine Umgebung $U \Subset X$ von unserem Fixpunkt x und eine offene affine Umgebung des neutralen Elements $V \Subset G$ und finden eine reguläre Funktion $s \in \mathcal{O}(V \times U)$ mit $s(e,x) \neq 0$ derart, daß ihre Nichtnullstellenmenge $(V \times U)_s$ unter der Multiplikation in U landet. Wir schreiben $s = \sum r_j \boxtimes t_j$. Sei nun $f \in \mathcal{O}(U)$. Für die Operation $\operatorname{act} : (V \times U)_s \to U$ gilt dann eine Gleichung der Gestalt $f \circ \operatorname{act} = s^{-n} \sum g_i \boxtimes h_i$ mit $g_i \in \mathcal{O}(U)$ und $h_i \in \mathcal{O}(V)$ und $n \in \mathbb{Z}$ alias $f(zy) = s(z,y)^{-n} \sum g_i(z) h_i(y)$ alias

$$f \circ (z \cdot) = \left(\sum r_j(z) t_j\right)^{-n} \sum g_i(z) h_i$$

an jeder Stelle y mit $(z,y) \in (U \times V)_s$. Sei nun $W := \{z \in V \mid s(z,x) \neq 0\}$. Sicher ist nun $z \mapsto \sum r_j(z) t_j + \mathfrak{m}_x^r$ ein Morphismus von W in die Einheitengruppe der k-Kringalgebra $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^r$. Nach 1.1.46 ist das Invertieren darin ein Morphismus. Folglich ist auch

$$z \mapsto (f \circ (z \cdot)) + \mathfrak{m}_x^r = \left(\sum r_j(z) t_j + \mathfrak{m}_x^r\right)^{-n} \left(\sum g_i(z) h_i + \mathfrak{m}_x^r\right)$$

ein Morphismus $W \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^r$. Mit 1.4.13 folgt die Algebraizität der fraglichen Rechtsoperation. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 3.11.12 (**Zusammenhang mit der Einhüllenden**). Sei G eine affine algebraische Gruppe und $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ ihre Lie-Algebra. So induziert die Einbettung $\mathrm{T}_e G \hookrightarrow \mathrm{Dist}(G, e)$ einen Homomorphismus von Hopf-Algebren $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Dist}(G, e)$ von der Einhüllenden der Lie-Algebra in die Distributionenalgebra, und im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist dieser Homomorphismus sogar ein Isomorphismus. Insbesondere liefert das Auswerten im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null unter der zusätzlichen Annahme G zusammenhängend eine nichtausgeartete Paarung

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{O}(G) \to k$$

Die davon induzierte Einbettung $\mathcal{O}(G) \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})^*$ in den Dualraum der Einhüllenden hat als Bild genau diejenigen Linearformen, die unter der Kontragredienten der Operation durch Linksmultiplikation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ eine endlichdimensionale zu einer Darstellung von G integrable $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung erzeugen.

4 Borel'sche Untergruppen und maximale Tori

4.1 Zusammenhängende auflösbare Gruppen

4.1.1. Ich erinnere aus 2.2.7, daß wir für Teilmengen A, B einer Gruppe G die von allen Kommutatoren $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe (A, B) notieren. Sind A und B Normalteiler, so ist auch (A, B) ein Normalteiler. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe (G, G) heißt die **derivierte Gruppe**. Wir notieren sie auch $\mathcal{D}G$.

4.1.2. Gegeben eine Gruppe G setzt man:

1. $\mathcal{D}^0 G = G$ und induktiv $\mathcal{D}^n G = (\mathcal{D}^{n-1}G, \mathcal{D}^{n-1}G)$ für $n \geq 1$;

2. $\mathcal{C}^0 G = G$ und induktiv $\mathcal{C}^n G = (G, \mathcal{C}^{n-1}G)$ für $n \geq 1$.

Alle diese Untergruppen sind Normalteiler von G. Eine Gruppe ist auflösbar im Sinne von [AL] 1.3.9 genau dann, wenn gilt $\mathcal{D}^n G = 0$ für $n \gg 0$. Eine Gruppe ist nilpotent im Sinne von [AL] 1.3.10 genau dann, wenn gilt $\mathcal{C}^n G = 0$ für $n \gg 0$.

4.1.3. Natürlich können wir zu jeder Gruppe G den Quotienten $G/\mathrm{Z}(G)$ nach dem Zentrum konstruieren. Nilpotent ist eine Gruppe genau dann, wenn wiederholtes Anwenden dieser Konstruktion in endlich vielen Schritten von unserer Gruppe zur trivialen Gruppe führt. Die Zahl der hierbei benötigten Schritte heißt der **Nilpotenzgrad** unserer nilpotenten Gruppe. Nilpotenzgrad Null hat nur die triviale Gruppe, Nilpotenzgrad Eins ist gleichbedeutend zu nichttrivial und kommutativ.

4.1.4. Ist G eine zusammenhängende algebraische Gruppe, so sind die Untergruppen $\mathcal{C}^n G$ und $\mathcal{D}^n G$ alle abgeschlossen und zusammenhängend nach dem Satz über irreduzibles Erzeugen 2.2.11.

4.1.5. Zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppen notiere ich im folgenden vorzugsweise mit dem Buchstaben B, weil die Resultate insbesondere benötigt werden, um sie später auf die sogenannten „Borel'schen“ anzuwenden.

Satz 4.1.6 (Lie-Kolchin). *Alle irreduziblen algebraischen Darstellungen einer zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppe sind eindimensional.*

Beispiel 4.1.7. Die Bedingung zusammenhängend ist hier wesentlich. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ etwa ist auflösbar, hat aber eine zweidimensionale irreduzible reelle Darstellung als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks, die auch unter Komplexifizierung irreduzibel bleibt.

4.1.8. Aus 1.6.2 und 1.6.3 kennen wir bereits die sehr ähnliche Aussage, daß alle unipotenten Gruppen auflösbar sind und daß alle ihre irreduziblen Darstellungen isomorph sind zur trivialen eindimensionalen Darstellung.

Beweis. Sei B unsere Gruppe und V eine von Null verschiedene Darstellung. Wir müssen zeigen, daß es in V eine unter B stabile Gerade gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir V endlichdimensional annehmen. Wir argumentieren mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Die Induktionsbasis $B = 1$ ist unproblematisch. Sonst gilt $\operatorname{kdim} \mathcal{D}B < \operatorname{kdim} B$ und wir dürfen die Existenz einer $\mathcal{D}B$-stabilen Gerade kv annehmen. Wie beim Beweis von 3.6.9 ist dann

$$\bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}B)} V_\chi$$

ein von Null verschiedener B-stabiler Teilraum und die B-Wirkung permutiert die Summanden. Da aber B zusammenhängend ist, muß sie alle Summanden stabilisieren und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V = V_\chi$ für ein $\chi \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}B)$ annehmen. Unter $\rho : B \to \mathrm{GL}(V)$ gilt nun sicher $\rho(\mathcal{D}B) \subset \mathrm{SL}(V)$, da ja $\mathcal{D}B$ von Kommutatoren erzeugt wird. Für alle $g \in \mathcal{D}B$ haben wir also $1 = \det \rho(g) = \chi(g)^{\dim V}$. Da auch die Gruppe $\mathcal{D}B$ zusammenhängend ist, folgt $\chi(g) = 1 \ \forall g \in \mathcal{D}B$ und $\mathcal{D}B$ operiert trivial auf V. Dann aber ist $\rho(B) \subset \mathrm{GL}(V)$ eine Menge paarweise kommutierender Endomorphismen und besitzt nach [LA2] 3.2.18 einen simultanen Eigenvektor. □

4.1.9 (**Existenz stabiler vollständiger Fahnen**). In jeder endlichdimensionalen Darstellung V einer zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppe gibt es nach dem Satz von Lie-Kolchin eine Folge $V = V_r \supset V_{r-1} \supset \ldots \supset V_0 = 0$ von Unterdarstellungen mit $\dim V_i = i$. Gleichbedeutend gibt es eine Basis, bezüglich derer unsere Gruppe durch obere Dreiecksmatrizen operiert.

Korollar 4.1.10 (**Struktur zusammenhängender nilpotenter Gruppen**). *Gegeben eine zusammenhängende nilpotente affine algebraische Gruppe N sind N_u und N_s abgeschlossene Untergruppen, N_s liegt im Zentrum von N und die Multiplikation ist ein Isomorphismus von algebraischen Gruppen*

$$N_\mathrm{s} \times N_\mathrm{u} \xrightarrow{\sim} N$$

4.1.11. Insbesondere sind auch N_s und N_u zusammenhängend und N_s ist nach 1.7.23 zusätzlich diagonalisierbar, mithin ein Torus. Für $N = K$ kommutativ hatten wir die Aussagen des Korollars bereits in 1.5.9 gezeigt, und das sogar, ohne K zusammenhängend vorauszusetzen.

Beweis. Gegeben $s \in N_\mathrm{s}$ betrachten wir nun $\varphi = \varphi_s : N \to N$, $x \mapsto sxs^{-1}x^{-1}$. Nach Annahme ist φ^n konstant für $n \gg 0$. Andererseits wird das Differential von φ gegeben durch $\mathrm{d}_1\varphi = \mathrm{Ad}_s - \mathrm{id}$ und aus φ^n konstant folgt $\mathrm{Ad}_s = \mathrm{id}$. Aus der Beschreibung 3.7.9 der Liealgebra des Zentralisators halbeinfacher Elemente folgt $\mathrm{Lie}(N^s) = (\mathrm{Lie}\, N)^s = \mathrm{Lie}\, N$. Da N zusammenhängend ist, folgt weiter

$N^s = N$. Also gehört s zum Zentrum von N, in Formeln $s \in \mathrm{Z}(N)$. Nun ist aber $\mathrm{Z}(N)$ kommutativ, also ist $N_{\mathrm{s}} = \mathrm{Z}(N)_{\mathrm{s}} \sqsubset \mathrm{Z}(N) \sqsubset N$ eine abgeschlossene Untergruppe nach unseren Erkenntnissen über die Struktur kommutativer affiner algebraischer Gruppen aus 1.5.9. Andererseits finden wir eine abgeschlossene Einbettung von N in die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ eines endlichdimensionalen Vektorraums und nach der Existenz stabiler vollständiger Fahnen 4.1.9 sogar eine abgeschlossene Einbettung von N in eine Gruppe D von oberen Dreiecksmatrizen. Damit bilden auch die unipotenten Elemente eine abgeschlossene Untergruppe $N_{\mathrm{u}} = N \cap D_{\mathrm{u}} \sqsubset N$. Aus der Existenz und Eindeutigkeit Jordanzerlegung folgt dann, daß die Multiplikation einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{u}} \to N$$

liefert. Um schließlch zu zeigen, daß er sogar ein Isomorphismus von Varietäten ist, dürfen wir $N \sqsubset \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Sei $V = \bigoplus V_\chi$ die Zerlegung in simultane Eigenräume unter N_{s}. Mithilfe des Satzes von Lie-Kolchin 4.1.6 finden wir in jedem V_χ eine Basis, bezüglich derer N durch obere Dreiecksmatrizen operiert. Dann ist für $g \in N$ notwendig g_{s} der diagonale Anteil von N und auf diese Weise erhalten wir den inversen Morphismus. □

Korollar 4.1.12 (Struktur zusammenhängender auflösbarer Gruppen). *Gegeben eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe B gilt:*

1. *Die derivierte Gruppe ist unipotent, in Formeln $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$;*

2. *Die Menge der unipotenten Elemente ist ein zusammenhängender abgeschlossener nilpotenter Normalteiler $B_{\mathrm{u}} \sqsubset B$ und der Quotient B/B_{u} ist ein Torus.*

Beweis. Fast alle Aussagen folgen unmittelbar aus der Existenz einer abgeschlossenen Einbettung von B in eine Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen 4.1.9. Nicht unmittelbar klar ist nur, daß B_{u} zusammenhängend ist und daß B/B_{u} ein Torus sein muß. Sicher ist jedoch der Quotient B/B_{u} zusammenhängend und kommutativ und besteht wegen $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ nur aus halbeinfachen Elementen. Also muß er nach 1.7.23 ein Torus sein. Es bleibt zu zeigen, daß B_{u} zusammenhängend ist. Sicher ist zumindest auch $B_{\mathrm{u}}^\circ \subset B$ ein Normalteiler und in $H := B/B_{\mathrm{u}}^\circ$ ist der unipotente Anteil nach 1.5.13 die Untergruppe $H_{\mathrm{u}} = B_{\mathrm{u}}/B_{\mathrm{u}}^\circ$ und ist folglich eine endliche normale Untergruppe, also $H_{\mathrm{u}} \subset \mathrm{Z}(H)$ und damit $(H, H) \subset \mathrm{Z}(H)$. Damit aber ist H nilpotent, und da es als Quotient von B auch zusammenhängend ist, muß H_{u} zusammenhängend sein nach 4.1.11. Als zusammenhängende endliche algebraische Gruppe ist somit H_{u} trivial und es folgt $B_{\mathrm{u}} = B_{\mathrm{u}}^\circ$. □

Übungen

Übung 4.1.13. Jede abgeschlossene Untergruppe der Kodimension Eins in einer zusammenhängenden nilpotenten affinen algebraischen Gruppe ist ein Normalteiler. Hinweis: Entweder unsere Untergruppe umfaßt die Einskomponente des Zentrums, oder sie umfaßt sie eben nicht.

Übung 4.1.14. Für $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen ist die Gruppe $\mathrm{SL}(2; k)$ nicht auflösbar. Die Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{F}_2)$ ist auflösbar.

Übung 4.1.15. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Man zeige, daß jede $\mathbb{Z}$-Graduierung auf der $\mathbb{C}$-Ringalgebra $\mathrm{End}(V)$ von einer $\mathbb{Z}$-Graduierung auf V herkommt. Hinweis: Man erinnere aus [NAS] 3.5.12 den Isomorphismus $\mathrm{PGL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RAlg}_{\mathbb{C}}^{\times}(\mathrm{End}\, V)$ und erinnere aus [KAG] 9.4.5, daß eine $\mathbb{Z}$-Graduierung dasselbe ist wie eine algebraische Operation von $\mathbb{C}^{\times}$. Dann betrachte man das Rückzugsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \twoheadrightarrow & \mathbb{C}^{\times} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(V) & \twoheadrightarrow & \mathrm{PGL}(V) \end{array}$$

und folgere aus der Strukturtheorie diagonalisierbarer Gruppen, daß die obere Horizontale spaltet.

4.2 Maximale Tori in auflösbaren Gruppen

4.2.1. Ein **maximaler Torus** in einer algebraischen Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe, die ein Torus ist und maximal bezüglich Inklusion mit diesen Eigenschaften. Offensichtlich besitzt jede algebraische Gruppe maximale Tori.

Satz 4.2.2 (**Maximale Tori in auflösbaren Gruppen**). *Sei B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe. So gilt:*

1. *Für jeden maximalen Torus $T \subset B$ liefert die Multiplikation einen Isomorphismus von Varietäten*
$$T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$$
2. *Je zwei maximale Tori von B sind zueinander konjugiert;*
3. *Jede Teilmenge $X \subset B_{\mathrm{s}}$, die aus paarweise kommutierenden Elementen besteht, liegt in einem maximalen Torus von B.*

Vorschau 4.2.3. In 4.6.9 zeigen wir, daß sogar in einer beliebigen affinen algebraischen Gruppe je zwei maximale Tori konjugiert sind. Der Beweis dieser Tatsache stützt sich aber ganz wesentlich auf den vorhergehenden Satz.

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus der anschließenden Proposition 4.2.5 und Lemma 4.2.4, in deren Beweis sich die eigentliche Arbeit versteckt. □

Lemma 4.2.4. *Gegeben B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe ist jeder Torus $T \subset B$ mit $TB_{\mathrm{u}} = B$ ein maximaler Torus und die Multiplikation induziert einen Isomorphismus $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$.*

Beweis. Jeder Untergruppe von G, die T als echte Untergruppe enthält, muß nichttriviale unipotente Elemente enthalten und kann folglich kein Torus sein. Mithin ist T ein maximaler Torus. Daß die Multiplikation eine Bijektion $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ liefert, folgt leicht aus $T \cap B_{\mathrm{u}} = 1$. Aus der Jordanzerlegung in der Liealgebra und Übung 3.3.16 folgt aber auch $\operatorname{Lie} T \cap \operatorname{Lie} B_{\mathrm{u}} = 0$, mithin ist das Differential am neutralen Element unserer Multiplikationsabbildung aus Dimensionsgründen bijektiv. Nun können wir B als homogenen Raum für die simultane Linksoperation von T und Rechtsoperation von B_{u} betrachten und unser Satz 3.5.15 über Isomorphismen homogener Räume impliziert dann, daß die Multiplikation in der Tat einen Isomorphismus von Varietäten $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ liefert. □

Proposition 4.2.5. *Sei B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe. So gibt es einen Torus $T \subset B$ mit $TB_{\mathrm{u}} = B$ und der zusätzlichen Eigenschaft, daß es für jede Teilmenge $X \subset B_{\mathrm{s}}$ aus paarweise kommutierenden halbeinfachen Elementen ein $g \in (T, B_{\mathrm{u}})$ gibt mit $gXg^{-1} \subset T$.*

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Die Induktionsbasis ist unproblematisch. Im Fall $B = B_{\mathrm{s}}$ folgt $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}} = 1$ und B ist kommutativ, also nach 1.7.23 ein Torus. Wir dürfen also $B \neq B_{\mathrm{s}}$ alias $B_{\mathrm{u}} \neq 1$ annehmen. Dann gibt es einen minimalen unipotenten zusammenhängenden nichttrivialen Normalteiler $U \ntrianglelefteq B$, denn B_{u} hat alle diese Eigenschaften nach 4.1.12. Als unipotente Gruppe ist U nilpotent und es folgt $\mathcal{D}U \subsetneq U$ und folglich $\mathcal{D}U = 1$ wegen der Minimalität von U. Mithin ist unser U kommutativ. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: $\bar{B} := B/U$ ist kein Torus. Dann wenden wir die Induktionsannahme an und finden in $\bar{B}$ einen Torus $\bar{T} \subset \bar{B}$ mit $\bar{T}\bar{B}_{\mathrm{u}} = \bar{B}$ und den weiteren oben ausgeführten Eigenschaften. Bezeichnet $\pi : B \twoheadrightarrow \bar{B}$ die Projektion, so ist $\tilde{B} := \pi^{-1}(\bar{T})$ auch auflösbar zusammenhängend und wegen unserer Annahme gilt $\bar{T} \neq \bar{B}$ und $\tilde{B} \subset B$ ist eine echte Untergruppe. Wir können unsere Induktionsannahme so ein weiteres Mal anwenden und einen Torus $\tilde{T} \subset \tilde{B}$ finden mit $\tilde{T}\tilde{B}_{\mathrm{u}} = \tilde{B}$ und den weiteren oben ausgeführten Eigenschaften. Im folgenden prüfen wir, daß dies $\tilde{T}$ auch die von unserem Torus T von B in der Proposition geforderten Eigenschaften hat. In der Tat liefert $\pi : B \twoheadrightarrow \bar{B}$ nach 1.5.13 eine Surjektion $B_{\mathrm{u}} \twoheadrightarrow \bar{B}_{\mathrm{u}}$. Aus $\bar{T}\bar{B}_{\mathrm{u}} = \bar{B}$ folgt $\tilde{B}B_{\mathrm{u}} = \pi^{-1}(\bar{T})\pi^{-1}(\bar{B}_{\mathrm{u}}) = \pi^{-1}(\bar{B}) = B$ und mit $\tilde{B} = \tilde{T}\tilde{B}_{\mathrm{u}}$ dann sofort $\tilde{T}B_{\mathrm{u}} = B$. Man beachte, daß daraus auch folgt $\pi(\tilde{T})\bar{B}_{\mathrm{u}} = \bar{B}$ und wegen $\pi(\tilde{T}) \subset \bar{T}$ dann $\pi(\tilde{T}) = \bar{T}$. Sei weiter $X \subset B_{\mathrm{s}}$ eine kommutative Teilmenge. Dasselbe gilt dann für $\pi(X) \subset \bar{B}_{\mathrm{s}}$ und Induktion liefert $\bar{g} \in (\bar{T}, \bar{B}_{\mathrm{u}})$ mit $\bar{g}\pi(X)\bar{g}^{-1} \subset \bar{T}$. Dann aber gibt es auch $g \in (T, B_{\mathrm{u}})$ mit $g \mapsto \bar{g}$ und für dies g gilt $g(\pi^{-1}(\pi(X))g^{-1} \subset \tilde{B}$. Erst recht folgt $gXg^{-1} \subset \tilde{B}$ und wieder mit Induktion finden wir $h \in (\tilde{T}, \tilde{B}_{\mathrm{u}})$ mit $hgXg^{-1}h^{-1} \subset \tilde{T}$. Damit ist der Fall erledigt, daß B/U kein Torus ist.

Fall 2: $\bar{B} := B/U$ ist ein Torus. Es folgt sofort $U = B_{\mathrm{u}}$. Ist zusätzlich B_{u} zentral in B, so muß wegen $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ unsere Gruppe sogar nilpotent sein und nach dem Satz 4.1.10 über die Struktur zusammenhängender nilpotenter Gruppen ist dann B_{s} eine Untergruppe und die Multiplikation ein Isomorphismus $B_{\mathrm{s}} \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ und B_{s} ist der einzige maximale Torus und die Behauptung ist klar. Wir dürfen also annehmen, daß $U = B_{\mathrm{u}}$ nicht zentral ist in B. Da U kommutativ ist, gibt es dann $s \in B_{\mathrm{s}}$ mit $U \not\subset B^s$. Im Rest des Beweises soll gezeigt werden, daß in dieser Situation B^s der ersehnte Torus mit den gesuchten Eigenschaften ist. Da U kommutativ ist, muß

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & U & \rightarrow & U \\ & & u & \mapsto & sus^{-1}u^{-1} = (\operatorname{int}_s u)u^{-1} \end{array}$$

ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen sein. Nach Wahl von s ist er nicht konstant. Sein Bild ist ein Normalteiler in B, denn für $g \in G$ gilt

$$\operatorname{int}_g((\operatorname{int}_s u)u^{-1}) = \operatorname{int}_g(\operatorname{int}_s u)(\operatorname{int}_g u)^{-1})$$

und wir folgern leicht $\operatorname{int}_g(\operatorname{int}_s u) = \operatorname{int}_s(\operatorname{int}_g u)$ aus $(B, B) \subset U$ und der Kommutativität von U. Die Minimalität von U vom Anfang des Beweises zeigt dann $\varphi(U) = U$. Daraus folgern wir nun $B^s U = B$. In der Tat haben wir für $g \in B$ stets $sgs^{-1}g^{-1} \in \mathcal{D}B \subset B_{\mathrm{u}} = U = \varphi(U)$ und folglich gibt es $u \in U$ mit $sgs^{-1}g^{-1} = sus^{-1}u^{-1}$, woraus folgt $u^{-1}g \in B^s$. Dann zeigen wir $B^s \cap U = 1$. In der Tat können wir jedes g im Schnitt schreiben als $g = sus^{-1}u^{-1}$ und finden $s^{-1}g = us^{-1}u^{-1}$. Dann wäre die linke Seite die Jordan-Zerlegung der rechten Seite und das zeigt $g = 1$. Wegen $B^s \cap B_{\mathrm{u}} = 1$ besteht B^s aus halbeinfachen Elementen. Dann zeigen wir, daß B^s zusammenhängend ist. In der Tat ist $U = B_{\mathrm{u}}$ ein Normalteiler von B und wir können das semidirekte Produkt $(B^s)^\circ \ltimes U$ bilden mitsamt einem offensichtlichen Gruppenhomomorphismus nach B. Dessen Bild $(B^s)^\circ U$ ist notwendig eine abgeschlossene Untergruppe von B von endlichem Index, also ganz B, und daraus folgt $(B^s)^\circ = B^s$. Jetzt folgt, daß B^s kommutativ ist, denn es ist auflösbar und zusammenhängend, also besteht seine derivierte Gruppe nach 4.1.12 aus unipotenten Elementen. Also ist $T := B^s$ schon mal ein Torus mit $TU = B$ und damit nach 4.2.4 ein maximaler Torus von B. Sei schließlich $X \subset B_{\mathrm{s}}$ kommutativ. Kommutiert jedes Element von X mit jedem Element von U, gilt also $U \subset B^X$, so führt für jedes $x \in X$ die Darstellung $x = tu$ mit $t \in T$

und $u \in U$ zu $u^{-1}x = xu^{-1} = t$ und die Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung zeigt $x = t \in T$, also $X \subset T$. Sonst gibt es $r \in X$ mit $U \not\subset B^r$. Nach dem, was wir bereits bewiesen haben, ist dann auch B^r ein Torus und $\psi : U \to U$, $u \mapsto rur^{-1}u^{-1}$ bijektiv. Außerdem gilt natürlich $X \subset B^r$. Schreiben wir nun $r^{-1} = tu$ mit $t \in T, u \in U$, so gibt es $v \in U$ mit $u^{-1} = rvr^{-1}v^{-1}$, also $t = r^{-1}u^{-1} = vr^{-1}v^{-1}$, also $vB^rv^{-1} = B^t \supset T$ und damit $vB^rv^{-1} = T$. Da schließlich wegen der Bijektivität von φ gilt $U = (T, B_{\mathrm{u}})$, haben wir $v \in (T, B_{\mathrm{u}})$ und die Proposition ist bewiesen. □

Übungen

Übung 4.2.6. ($k = \bar{k}$). Man zeige, daß die Diagonalmatrizen in der $\mathrm{GL}(n; k)$ einen maximalen Torus bilden, und daß jeder maximale Torus zu diesem konjugiert ist. Man zeige dasselbe in der Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$.

Übung 4.2.7. ($k = \bar{k}$). Man zeige, daß in der Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ jede aus halbeinfachen Elementen bestehende kommutative Teilmenge in einem maximalen Torus enthalten ist. Man zeige, daß das für den Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik im Quotienten $\mathrm{GL}(2; k)/\{\pm \mathrm{id}\}$ nicht mehr richtig ist.

Übung 4.2.8. Man zeige: Der Zentralisator eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist stets nilpotent.

Übung 4.2.9. Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $T \subset B$ ein Torus. Man zeige: Es gibt eine abgeschlossene Einbettung von B in eine Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen, unter der alle Elemente unseres Torus auf Diagonalmatrizen gehen. Ist hier T sogar ein maximaler Torus, so muß er der Schnitt von B mit der Gruppe der Diagonalmatrizen sein. Hinweis: Je zwei maximale Tori von B sind zueinander konjugiert.

Übung 4.2.10. Ist B eine auflösbare affine algebraische Gruppe und $S \subset B$ ein Torus, so ist SB_{u} eine abgeschlossene Untergruppe von B.

4.3 Zentralisatoren in auflösbaren Gruppen

Satz 4.3.1 (Zentralisatoren halbeinfacher Elemente). *In einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist der Zentralisator jedes halbeinfachen Elements zusammenhängend.*

Ergänzung 4.3.2. Der folgende Beweis kommt ohne die Klassifikation eindimensionaler zusammenhängender Gruppen aus. Kennt man diese Klassifikation, so kann man folgern, daß im Beweis U/V isomorph sein muß zu $(k, +)$, und kann damit den Beweis entsprechend vereinfachen.

Beweis. Seien B unsere Gruppe und $s \in B_{\mathrm{s}}$ unser halbeinfaches Element. Wir finden nach 4.2.2 einen maximalen Torus T über s und folgern $T \subset B^s$. Nach 4.2.2 ist die Multiplikation ein Isomorphismus

$$T \times (B^s \cap B_{\mathrm{u}}) \xrightarrow{\sim} B^s$$

und in Charakteristik Null ist der Beweis an dieser Stelle zu Ende, weil dort nach 3.6.19 jede unipotente Gruppe zusammenhängend ist. Im allgemeinen können wir B nach Übung 4.2.9 so in eine Gruppe D von oberen Dreiecksmatrizen einbetten, daß T in den Diagonalmatrizen landet. Wir finden leicht eine Filtrierung $D_{\mathrm{u}} = D(0) \supset D(1) \supset \ldots \supset D(r) = 1$ durch Normalteiler von D mit sukzessiven Subquotienten jeweils isomorph zur additiven Gruppe $(k, +)$. Herunterschneiden liefert eine Filtrierung $U := B_{\mathrm{u}} = U(0) \supset U(1) \supset \ldots \supset U(r) = 1$ durch Normalteiler von B, deren sukzessive Subquotienten injektive Gruppenhomomorphismen

$$U(i)/U(i+1) \hookrightarrow k$$

zulassen derart, daß sich darunter int_s zu einem Automorphismus der additiven Gruppe k fortsetzen läßt. Ist B_{u} trivial, so ist der Beweis wieder zu Ende. Da mit B nach 4.1.12 auch $U = B_{\mathrm{u}}$ zusammenhängend ist, finden wir sonst einen kleinsten Index i mit $U \supsetneq U(i+1)$. Wir haben dann für diesen Index i einen bijektiven Gruppenhomomorphismus $U/U(i+1) \to k$ derart, daß sich int_s zu einem Automorphismus der additiven Gruppe k fortsetzen läßt. Wir betrachten nun die Einskomponente $V := U(i+1)^\circ$ von $U(i+1)$. Mit Induktion über die Dimension von B dürfen wir voraussetzen, daß die Aussage für das semidirekte Produkt $T \ltimes V$ bereits bewiesen ist, und dürfen mithin V^s zusammenhängend annehmen. Da V auch ein Normalteiler von B sein muß, erhalten wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $p : U/V \twoheadrightarrow k$ mit endlichem Kern zusammen mit $\alpha \in k^\times$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U/V & \twoheadrightarrow & k \\ {\scriptstyle \mathrm{int}_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ U/V & \twoheadrightarrow & k \end{array}$$

kommutiert. Dann kommutiert dasselbe Diagramm auch mit $\psi : U/V \to U/V$ links und $(\alpha - 1)$ rechts, für

$$\psi(x) := (\mathrm{int}_s\, x)x^{-1}$$

Da U/V als eindimensionale zusammenhängende unipotente Gruppe kommutativ ist, die derivierte Gruppe muß ja trivial sein, ist auch ψ ein Gruppenhomomorphismus. Haben wir hier $\alpha \neq 1$, so muß auch ψ birational sein, da es auf $\mathcal{M}(U/V)$

einen Körperhomomorphismus über $\mathcal{M}(k)$ induziert und da $\mathcal{M}(U/V)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathcal{M}(k)$ ist. Mithin muß ψ nach 2.4.16 bijektiv sein und int_s hat in U/V keine Fixpunkte außer dem neutralen Element. Die linksexakte Sequenz

$$V^s \hookrightarrow U^s \to (U/V)^s$$

zeigt also $U^s = V^s$ und V^s ist zusammenhängend nach Induktionsannahme. Haben wir sonst $\alpha = 1$, so landet ψ im Kern von p, ist folglich konstant das neutrale Element, und damit ist int_s die Identität auf U/V. Unsere linksexakte Sequenz wird so zu

$$V^s \hookrightarrow U^s \xrightarrow{\pi} (U/V)$$

Ist hier π surjektiv, so sind wir wieder fertig. Sonst folgt $\mathrm{kdim}\, V^s = \mathrm{kdim}\, U^s$ und damit induziert die Einbettung einen Isomorphismus $\mathrm{Lie}(V^s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(U^s)$ und mit 3.7.9 auch einen Isomorphismus $(\mathrm{Lie}\, V)^s \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Lie}\, U)^s$. Nun haben wir aber eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Lie}\, V \hookrightarrow \mathrm{Lie}\, U \twoheadrightarrow \mathrm{Lie}(U/V)$$

und die Ad_s-Invarianten darin müssen, da s halbeinfach ist, auch eine kurze exakte Sequenz bilden. Daraus aber folgt $(\mathrm{Lie}(U/V))^s = 0$ im Widerspruch zu $\mathrm{int}_s = \mathrm{id} : U/V \to U/V$. □

Korollar 4.3.3. *Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $X \subset B_{\mathrm{s}}$ eine Teilmenge aus paarweise kommutatierenden halbeinfachen Elementen. So ist B^X zusammenhängend.*

Beweis. Natürlich gilt für jedes $s \in X$ die Identität $B^X = (B^s)^X$. Induktion über die Dimension unter Anwendung von 4.3.1 zeigt die Behauptung. □

Lemma 4.3.4. *Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $S \subset B$ eine kommutative Untergruppe mit $S \subset B_{\mathrm{s}}$. So gilt*

$$\mathrm{Z}_B(S) = \mathrm{N}_B(S)$$

Beweis. Seien $h \in \mathrm{N}_B(S)$ und $s \in S$ gegeben. Wir finden $hsh^{-1}s^{-1} \in (B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ aber auch $hsh^{-1}s^{-1} = (hsh^{-1})s^{-1} \in S \subset B_{\mathrm{s}}$. □

Zweiter Beweis. Die Operation durch Konjugation von B auf dem Torus B/B_{u} ist trivial wegen der Starrheit von Tori 1.7.22. Wegen $S \subset B_{\mathrm{s}}$ ist aber die Komposition $S \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/B_{\mathrm{u}}$ injektiv. Das Lemma folgt. □

4.4 Vollständige Varietäten

Definition 4.4.1. Eine Varietät X heißt **vollständig**, wenn für alle weiteren Varietäten Z die Projektion $X \times Z \to Z$ abgeschlossen ist.

Beispiel 4.4.2. Die Varietät k ist nicht vollständig, denn in $k \times k$ ist die Hyperbel $\{xy = 1\}$ abgeschlossen, ihre Projektion auf die x-Achse ist jedoch nicht abgeschlossen.

4.4.3. Wir werden im folgenden sehen, daß die Vollständigkeit ein algebraisches Analogon zur Kompaktheit von Mannigfaltigkeiten ist. Vollständige Varietäten sind auch genau die Varietäten, deren Projektion auf einen Punkt eigentlich ist im Sinne von [KAG] 6.12.16.

Lemma 4.4.4 (**Eigenschaften vollständiger Varietäten**).

1. *Jede abgeschlossene Untervarietät einer vollständigen Varietät ist vollständig;*
2. *Das Produkt von zwei vollständigen Varietäten ist vollständig;*
3. *Gegeben ein surjektiver Morphismus von Varietäten $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ mit X vollständig folgt Y vollständig;*
4. *Das Bild einer vollständigen Varietät unter einem Morphismus in eine separierte Varietät ist abgeschlossen und vollständig;*
5. *Jede reguläre Funktion auf einer zusammenhängenden vollständigen Varietät ist konstant;*
6. *Eine affine Varietät ist vollständig genau dann, wenn sie endlich ist.*

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind klar. Für 3 betrachte man $A \overset{\circ}{\subset} Y \times Z$ und folgert $A = \pi(\pi^{-1}(A))$ und damit $\mathrm{pr}_Z(A) = \mathrm{pr}_Z(\pi^{-1}(A)) \overset{\circ}{\subset} Z$. Für 4 betrachtet man zu einem Morphismus $\varphi : X \to Y$ den Graphen $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$. Ist Y separiert, so ist er abgeschlossen nach [KAG] 6.12.14 und man folgert $\varphi(X) = \mathrm{pr}_Y(\Gamma_\varphi) \overset{\circ}{\subset} Y$. Die Vollständigkeit von $\varphi(X)$ folgt aus 3. Aus 3 folgt 5, denn k ist nicht vollständig nach 4.4.2, folglich sind die endlichen Teilmengen die einzigen vollständigen abgeschlossenen Untervarietäten von k. Daraus hinwiederum folgt 6 unmittelbar. □

Proposition 4.4.5 (**Projektive Varietäten sind vollständig**). *Für jede Varietät Z ist die Projektion $\pi : \mathbb{P}^n \times Z \to Z$ abgeschlossen.*

Geometrischer Beweis. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $A \overset{\circ}{\subset} \mathbb{P}V \times Z$ eine abgeschlossene Teilmenge. Es gilt zu zeigen $\mathrm{pr}_Z(A) \overset{\circ}{\subset} Z$. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir A irreduzibel und $\mathrm{pr}_Z(A)$ dicht annehmen und müssen dann $\mathrm{pr}_Z(A) = Z$ zeigen. Klar ist $\mathrm{kdim}\, A \geq \mathrm{kdim}\, Z$. Jetzt erklären wir Varietäten B und C durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, equal] & C := \overline{j(B)} \arrow[d, equal] \\
A \arrow[d, hook] & \pi^{-1}(A) \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook] & \overline{j(\pi^{-1}(A))} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}V \times Z \arrow[dr] & (V\backslash 0) \times Z \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & V \times Z \arrow[dl] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Es ist leicht zu sehen, etwa mit der lokalen Trivialität der Projektion auf den projektiven Raum [KAG] 6.5.6, daß $B := \pi^{-1}(A)$ auch irreduzibel ist von einer Dimension $\mathrm{kdim}\, B > \mathrm{kdim}\, Z$. Dann ist $C := \overline{j(B)}$ auch irreduzibel mit $j^{-1}(C) = B$. Weiter gilt $C \supset \{0\} \times \mathrm{pr}_Z(A)$, also auch $C \supset \{0\} \times Z$. Für alle $z \in Z$ ist also $C \cap (V \times \{z\})$ nicht leer und wegen $\mathrm{kdim}\, C = \mathrm{kdim}\, B > \mathrm{kdim}\, Z$ muß nach unseren Erkenntnissen [KAG] 5.9.12 zur Mindestdimension nichtleerer Fasern unser Schnitt mindestens die Dimension Eins haben und folglich auch Punkte (v, z) mit $v \in V\backslash 0$ enthalten. So folgt $z \in \mathrm{pr}_Z(A)$. □

Algebraischer Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit Z affin. Wir setzen $S := \mathcal{O}(Z)[T_0, \ldots, T_n]$. Jede abgeschlossene Teilmenge $A \underset{\mathrm{A}}{\subset} Z \times \mathbb{P}^n$ ist nach [KAG] 9.2.13 von der Gestalt $A = \mathcal{Z}^*(I)$ für ein homogenes Ideal $I \subset S$, und für $z \in Z$ mit Verschwindungsideal $\mathcal{I}(z) \subset \mathcal{O}(Z)$ haben wir $\pi^{-1}(z) = \mathcal{Z}^*(\mathcal{I}(z)S)$. Es folgt

$$A \cap \pi^{-1}(z) = \mathcal{A}^*(\mathcal{I}(z)S + I)$$

Nach [KAG] 9.2.13 haben wir also $A \cap \pi^{-1}(z) = \emptyset$ genau dann, wenn es ein d gibt derart, daß für die homogenen Komponenten vom Grad d gilt $(\mathcal{I}(z)S + I)_d = S_d$, also genau dann, wenn für ein d die offensichtliche Abbildung $I_d \to S_d/\mathcal{I}(z)S_d$ eine Surjektion ist. Nun sind aber $I_d \subset S_d$ endlich erzeugte $\mathcal{O}(Z)$-Moduln und nach dem Nakayama-Lemma [KAG] 4.6.6 ist dann die Menge aller $z \in Z$, für die $I_d \to S_d/\mathcal{I}(z)S_d$ surjektiv ist, eine offene Teilmenge von Z. Das zeigt, daß das Komplement von $\pi(A)$ offen ist in Z. □

4.4.6 (**Globale reguläre Funktionen auf projektiven Varietäten**). Auf einer zusammenhängenden projektiven Varietät gibt es insbesondere außer den Konstanten keine globalen regulären Funktionen.

Ergänzung 4.4.7. Jede vollständige separierte zusammenhängende algebraische Gruppe G ist kommutativ. In der Tat betrachte man den Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G \times G & \to & G \times G \\ & (g,h) & \mapsto & (g, hgh^{-1}) \end{array}$$

Sein Bild ist abgeschlossen nach 4.4.4 und umfaßt die Diagonale. Wäre sein Bild aber nicht die Diagonale, so folgte $\operatorname{kdim} \varphi(G \times G) > \operatorname{kdim} G$ und nach Proposition [KAG] 7.4.20 über die Kodimension von Schnittmengen in glatten Varietäten stünde das im Widerspruch zu $\varphi(G \times G) \cap (1 \times G) = \{(1,1)\}$.

Lemma 4.4.8 (Morphismen von Kurven in vollständige Varietäten). *Ist Y eine vollständige Varietät und X eine Kurve und $p \in X$ ein regulärer Punkt und $\varphi : X \backslash p \to Y$ ein Morphismus, so gibt es eine Fortsetzung von φ zu einem Morphismus $\tilde{\varphi} : X \to Y$.*

4.4.9. Ist Y separiert, so ist diese Fortsetzung sogar eindeutig bestimmt. Wir werden unser Lemma im folgenden nicht benötigen. Ich halte es aber für ein wichtiges Stück Allgemeinbildung.

Beweis. Wir betrachten die Einbettung $i : X \backslash p \hookrightarrow X$ und den Morphismus

$$(\varphi, i) : (X \backslash p) \hookrightarrow Y \times X.$$

Der Abschluß des Bildes dieses Morphismus $A := \overline{\operatorname{im}(\varphi, i)}$ muß unter der Projektion $\operatorname{pr}_X : Y \times X \to X$ wegen der Vollständigkeit von Y auf eine abgeschlossene Teilmenge von X abgebildet werden, wir haben also $\operatorname{pr}_X(A) = X$. Insbesondere gibt es $a \in A$ mit $\operatorname{pr}_X(a) = p$. Nun dürfen wir nach [KAG] 7.4.16 zusätzlich X irreduzibel annehmen. Dann ist natürlich $\psi := \operatorname{pr}_X : A \to X$ ein birationaler Morphismus, denn er induziert einen Isomorphismus $\psi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ für alle $U \Subset X$ mit $p \notin U$. Andererseits induziert der Komorphismus Injektionen $\psi^\sharp : \mathcal{O}_{X,p} \hookrightarrow \mathcal{O}_{A,a}$ für alle $a \in \psi^{-1}(p)$. Wegen der Maximalität diskreter Bewertungsringe [KAG] 8.1.19 induziert $\psi^\sharp$ dann sogar Isomorphismen $\psi^\sharp : \mathcal{O}_{X,p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{A,a}$. Das aber zeigt, daß wir für jeden Punkt $a \in \psi^{-1}(p)$ eine Fortsetzung von $(\varphi, i) : X \backslash p \to A$ erhalten durch die Vorschrift $p \mapsto a$. □

Übungen

Übung 4.4.10. Eine nichtleere echte offene Teilmenge einer zusammenhängenden separierten Varietät kann nie vollständig sein. Eine Varietät, die durch endlich viele vollständige Untervarietäten überdeckt werden kann, ist vollständig.

Übung 4.4.11. Gegeben eine algebraische Gruppe G gibt es unter den vollständigen zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppen von G eine größte.

Ergänzende Übung 4.4.12. Gegeben eine zusammenhängende algebraische Gruppe G liegt jede vollständige Untergruppe $V \overset{\circ}{\not\subset} G$ im Zentrum von G. Hinweis: Man zeige $\{(g, vgv^{-1}) \mid g \in G, v \in V\} \overset{\circ}{\not\subset} G \times G$. Man mag zunächst zeigen wollen, daß gilt $\{(g, w, wgv^{-1}) \mid g \in G, v, w \in V\} \overset{\circ}{\not\subset} G \times V \times G$.

4.5 Parabolische Untergruppen

Lemma 4.5.1. *Ist $\varphi : X \to Y$ ein bijektiver äquivarianter Homomorphismus von homogenen Räumen, so ist X vollständig genau dann, wenn Y vollständig ist.*

Beweis. Nach 2.4.12 ist φ flach, also ist für jede weitere Varietät Z der Morphismus $(\varphi \times \mathrm{id}) : X \times Z \to Y \times Z$ auch flach, also offen, also ein Homöomorphismus. Die Definition der Vollständigkeit liefert den Rest. □

Definition 4.5.2. Eine Untergruppe $P \subset G$ einer affinen algebraischen Gruppe heißt **parabolisch**, wenn sie abgeschlossen und der homogene Raum G/P vollständig ist.

4.5.3. Da unsere Quotienten von affinen algebraischen Gruppen stets quasiprojektiv sind, ist der Quotient nach einer parabolischen Untergruppe sogar projektiv.

4.5.4 (**Ursprung der Terminologie**). Die nichttrivialen Elemente von $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ heißen je nach dem Betrag ihrer Spur

elliptisch	falls $\lvert \mathrm{tr} \rvert < 2$;
parabolisch	falls $\lvert \mathrm{tr} \rvert = 2$;
hyperbolisch	falls $\lvert \mathrm{tr} \rvert > 2$.

Diese Terminologie erklärt sich im ersten und letzten Fall aus der Gestalt der Kegelschnitte, die von unserem Element in sich selber überführt werden. Genauer ist die Menge der Eigenwerte unserer Matrix stabil unter der komplexen Konjugation. Sie sind also entweder beide reell von der Gestalt λ, λ^{-1} oder komplex konjugiert von der Gestalt $\lambda, \bar{\lambda}$ mit $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Man rechnet leicht nach, daß der hyperbolische Fall der erste Fall ist mit der Zusatzannahme $\lambda \neq \pm 1$, der elliptische Fall der zweite Fall bei $\lambda \neq \pm 1$ mit derselben Zusatzannahme und der parabolische Fall der Grenzfall $\lambda = \bar{\lambda} = \lambda^{-1} = \pm 1$. Im hyperbolischen Fall bildet unser Element geeignete Hyperbeln in $\mathbb{R}^2$ auf sich selber ab und im elliptischen Fall geeignete Ellipsen. Der parabolische Fall erhält dann seinen Namen, weil die Parabeln unter allen Kegelschnitten in gewisser Weise „zwischen" den Ellipsen und den Hyperbeln liegen. Die archetypische parabolische Untergruppe ist nun, wie wir noch sehen werden, die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{SL}(2; k)$, und der Normalisator vom Abschluß des Erzeugnisses von einem Element mit zwei gleichen Eigenwerten ist stets parabolisch. Das ist die einzige Idee, die ich zur Herkunft der Terminologie habe. Ich kann sie leider nicht belegen.

Lemma 4.5.5 (Transitivität der Parabolizität). *Seien $Q \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ P \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ G$ affine algebraische Gruppen. Genau dann ist Q parabolisch in G, wenn Q parabolisch ist in P und P parabolisch in G.*

Beweis. Für eine abgeschlossene Untergruppe $K \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ H$ einer affinen algebraischen Gruppe sind gleichbedeutend:

1. Die Untergruppe K ist parabolisch in H;
2. Für jede Varietät X ist die Projektion $H/K \times X \to X$ abgeschlossen;
3. Für jede Varietät X und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ H \times X$ mit $(h, x) \in A \Rightarrow (hk, x) \in A\ \forall k \in K$ ist $\mathrm{pr}_X(A)$ abgeschlossen in X.

In der Tat ist $1 \Leftrightarrow 2$ die Definition der Vollständigkeit und $2 \Leftrightarrow 3$ folgt, da nach 2.4.12 die Projektion $H \twoheadrightarrow H/K$ flach und damit produktfest offen ist. Nach dieser Vorüberlegung beginnen wir mit dem eigentlichen Beweis. Sei X eine Varietät und $A \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ G \times X$ abgeschlossen Q-stabil. Wir betrachten

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & P \times G \times X & \to & G \times X \\ & (p, g, x) & \mapsto & (gp, x) \end{array}$$

Sicher ist $\alpha^{-1}(A)$ dann Q-stabil für die Rechtsoperation auf der ersten Variablen, und da $Q \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ P$ parabolisch ist, muß $B := \mathrm{pr}_{G \times X}(\alpha^{-1}(A))$ abgeschlossen sein in $G \times X$. Diese Menge läßt sich beschreiben als

$$B = \{(g, x) \mid (gP \times \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

und ist insbesondere P-stabil. Da auch $P \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ G$ parabolisch ist, ist auch ihre Projektion $\mathrm{pr}_X(B)$ abgeschlossen und man sieht leicht $\mathrm{pr}_X(B) = \mathrm{pr}_X(A)$. Damit ist im Lemma eine der Implikationen gezeigt. Die andere folgt leicht aus $G/Q \twoheadrightarrow G/P$ sowie $P/Q \subset\!\!\!\!\raisebox{0pt}{$\scriptstyle\triangle$}\ G/Q$. □

Proposition 4.5.6 (Gruppen ohne echte parabolische Untergruppen). *Eine affine algebraische Gruppe ist auflösbar und zusammenhängend genau dann, wenn sie keine echte, also von der ganzen Gruppe verschiedene parabolische Untergruppe besitzt.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe. Wir nehmen zunächst an, es gebe in G keine echte Parabolische. Dann ist G schon mal zusammenhängend, denn die Einskomponente ist stets parabolisch. Gegeben eine Darstellung $G \to \mathrm{GL}(V)$ von G ist die induzierte G-Wirkung auf $\mathbb{P}V$ algebraisch nach [KAG] 9.2.14. Jede abgeschlossene Bahn hat nach 4.5.1 Parabolische als Standgruppen. Gibt es keine echten Parabolischen, so müssen also alle abgeschlossenen Bahnen Fixpunkte sein. Da es aber nach 2.3.8 unter der Annahme $V \neq 0$ stets abgeschlossene Bahnen gibt, muß es in jeder algebraischen Darstellung $V \neq 0$ von G eine eindimensionale Unterdarstellung geben. Dann folgern wir leicht, daß G isomorph ist zu einer Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen und mithin auflösbar. Sei nun umgekehrt G zusammenhängend und auflösbar. Wir führen die Annahme, G habe eine echte Parabolische, zum Widerspruch. In der Tat fänden wir sonst auch ein Gegenbeispiel mit G von kleinstmöglicher Dimension und darin eine echte Parabolische $P \subsetneq G$ maximal möglicher Dimension. Nun gilt entweder $P \supset (G, G)$ oder $P \not\supset (G, G)$. Im ersten Fall wäre P normal, also G/P affin nach 3.6.9 und damit G/P endlich und wegen G zusammenhängend ein Punkt, im Widerspruch zur Annahme $P \subsetneq G$. Im Fall $P \not\supset (G, G)$ wäre $P(G, G) = \langle P(G, G) \rangle$ eine abgeschlossene Untergruppe größerer Dimension als P, also $P(G, G) = G$ und wir erhielten einen bijektiven Morphismus

$$(G, G)/(G, G) \cap P \to G/P$$

Dann aber muß nach 4.5.1 auch $P \cap (G, G) \not\subset\!\!\!\!\!\!\;\sqsubset\; (G, G)$ bereits eine echte Parabolische sein, und unsere verkappte Induktion über die Dimension von G zeigt $P \supset (G, G)$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Satz 4.5.7 (Borel'scher Fixpunktsatz). *Wirkt eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe auf einer nichtleeren vollständigen Varietät, so hat sie dort stets einen Fixpunkt.*

Beweis. Nach 4.5.1 hat jede abgeschlossene Bahn Parabolische als Standgruppen, und nach 4.5.6 kann sie dann nur aus einem einzigen Punkt bestehen. Abgeschlossene Bahnen aber gibt es in jeder nichtleeren Varietät mit einer algebraischen Wirkung einer algebraischen Gruppe nach 2.3.8. □

Alternativer Beweis. Sei G unsere Gruppe und X unsere Varietät. Sei zunächst G abelsch. Nach 2.3.8 finden wir $x \in X$ mit $Gx \not\subset\!\!\!\!\!\!\;\sqsubset\; X$, also Gx vollständig. Die Abbildung $G/G_x \to Gx$ ist bijektiv und G/G_x ist affin nach 3.6.9, also besteht unsere Bahn nur aus einem Punkt. Ist nun G beliebig, so gilt für $H = (G, G)$ bereits $\operatorname{kdim} H < \operatorname{kdim} G$. Mit Induktion über die Dimension der Gruppe ist dann $X^H \not\subset\!\!\!\!\!\!\;\sqsubset\; X$ nicht leer und G/H wirkt darauf und Induktion beendet den Beweis. □

Lemma 4.5.8. *Jede auflösbare zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe kann in jede parabolische Untergruppe hineinkonjugiert werden.*

Beweis. Sei G unsere affine algebraische Gruppe, $P \subset G$ eine Parabolische und $B \subset G$ zusammenhängend auflösbar. Nach dem Fixpunktsatz 4.5.7 besitzt B einen Fixpunkt $x \in G/P$. Die Standgruppe G_x ist dann konjugiert zu P, in Formeln $G_x = gPg^{-1}$ mit $g \in G$, und sie umfaßt B, also $B \subset gPg^{-1}$ alias $g^{-1}Bg \subset P$. □

Übungen

Übung 4.5.9. Seien G eine affine algebraische Gruppe, X eine G-Varietät, $P \subset G$ eine Parabolische und $Y \subset X$ eine abgeschlossene P-stabile Teilmenge von X. So ist auch GY abgeschlossen in X. Hinweis: Man beachte den Isomorphismus $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$ mit $(g, x) \mapsto (g, gx)$ und den nach 2.4.12 offenen Morphismus $G \times X \twoheadrightarrow G/P \times X$.

4.6 Borel'sche Untergruppen

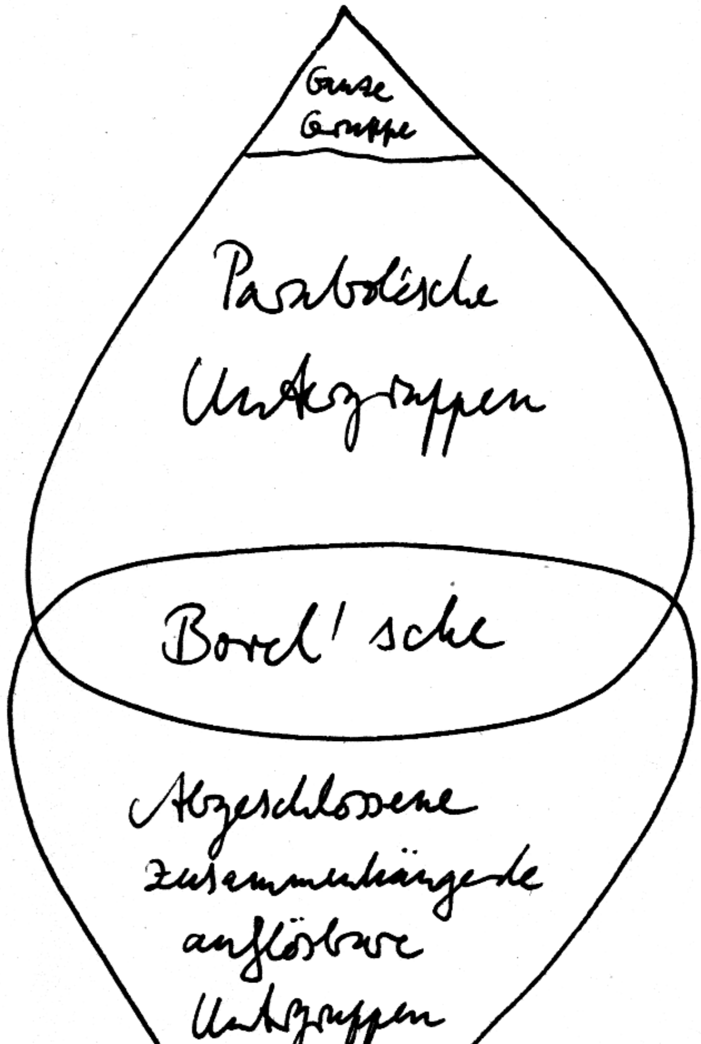
Satz 4.6.1 (**Borel'sche Untergruppen**). *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Für eine abgeschlossene Untergruppe $B \subset G$ sind dann gleichbedeutend:*

1. *B ist maximal unter allen abgeschlossenen zusammenhängenden auflösbaren Untergruppen von G;*
2. *B ist minimal unter allen parabolischen Untergruppen von G;*
3. *B ist parabolisch, auflösbar und zusammenhängend.*

Darüber hinaus gibt es stets mindestens eine Untergruppe mit diesen Eigenschaften und je zwei von ihnen sind zueinander konjugiert.

4.6.2. Die durch die äquivalenten Eigenschaften im vorhergehenden Satz charakterisierten Untergruppen von G heißen die **Borel'schen Untergruppen** oder kurz die **Borel'schen** von G.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß es stets eine zusammenhängende auflösbare Parabolische gibt, also eine Untergruppe B mit den in Teil 3 angeführten Eigenschaften. Wir argumentieren dabei durch Induktion über die Dimension. Ist G° auflösbar, so tut es bereits $B = G^\circ$ selbst. Sonst existiert nach 4.5.6 eine echte Parabolische $P \subsetneq G^\circ$ und nach Induktionsannahme besitzt sie eine parabolische zusammenhängende auflösbare Untergruppe $B \subset P$. Nach der Transitivität der Parabolizität 4.5.5 ist dann B auch parabolisch in G. Jede abgeschlossene zusammenhängende auflösbare Untergruppe kann nun nach 4.5.8 in dieses B hineinkonjugiert werden, jede maximale muß also zu B konjugiert sein. Ebenso kann jede parabolische Untergruppe nach 4.5.8 über B darüberkonjugiert werden, jede minimale muß also zu B konjugiert sein. Da es aber aus Dimensionsgründen solche maximalen abgeschlossenen auflösbaren zusammenhängenden Untergruppen gibt und aufgrund der Noether-Eigenschaft von G auch solche minimalen Parabolischen, ist damit der Satz bewiesen. $\square$



Versuch einer graphischen Darstellung der zentralen Bedeutung der Borel'schen im Gefüge aller abgeschlossenen Untergruppen einer affinen algebraischen Gruppe. Nicht dargestellt ist die Tatsache, daß es nur eine Konjugationsklasse von Borel'schen und, wie wir später noch zeigen werden, nur endlich viele Konjugationsklassen von parabolischen Untergruppen gibt.

Beispiel 4.6.3. $(k = \bar{k})$. In der $\mathrm{GL}(n; k)$ bilden die oberen Dreiecksmatrizen eine Borel'sche Untergruppe $B \subset \mathrm{GL}(n; k)$. In der Tat ist diese Untergruppe auflösbar und zusammenhängend. Wäre $H \supset B$ eine weitere Gruppe mit diesen Eigenschaften, so müßte sie nach dem Satz von Lie-Kolchin 4.1.6 auch eine Fahne von Untervektorräumen von k^n stabilisieren, also eine Folge $k^n = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_0 = 0$ von Untervektorräumen mit $\dim V_i = i$. Nun ist aber B genau der Stabilisator der Fahne

$$k^n = \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \rangle \supset \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n-1} \rangle \supset \ldots \supset \langle \mathrm{e}_1 \rangle \supset 0$$

und stabilisiert keine weitere Fahne. Es folgt $H \subset B$, also $H = B$.

Ergänzung 4.6.4. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Arbeiten wir über einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$, so ist die Isotropiegruppe jeder Fahne $x \in \mathcal{F}(V)$ nach dem Vorhergehenden eine Borel'sche $B_x \not\triangleleft \mathrm{GL}(V)$, und wir erhalten so eine Bijektion

$$\mathrm{GL}(V)/B_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(V)$$

Nach Übung 3.6.16 gibt es genau eine Struktur als algebraische Varietät auf $\mathcal{F}(V)$ derart, daß alle diese Bijektionen Isomorphismen werden. Mit dieser Struktur ist $\mathcal{F}(V)$ dann eine vollständige separierte k-Varietät und heißt die **Fahnenvarietät von** V. Sie heißt auch **Flaggenvarietät** oder **Fahnenmannigfaltigkeit**.

Korollar 4.6.5 (Bilder von Borel'schen unter Surjektionen). *Unter einem surjektiven Homomorphismus affiner algebraischer Gruppen ist das Bild jeder Parabolischen eine Parabolische und das Bild jeder Borel'schen eine Borel'sche.*

Beweis. Das Bild jeder parabolischen Untergruppe ist sicher parabolisch, das Bild jeder auflösbaren Untergruppe auflösbar, das Bild jeder zusammenhängenden Untergruppe zusammenhängend. Die Behauptung folgt. □

Korollar 4.6.6 (Zentren Borel'scher Untergruppen). *Ist $B \subset G$ eine Borel'sche Untergruppe einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe, so gilt* $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \mathrm{Z}(B) \subset \mathrm{Z}(G)$.

Vorschau 4.6.7. In 4.6.18 zeigen wir stärker $\mathrm{Z}(B) = \mathrm{Z}(G)$.

Beweis. $\mathrm{Z}(G)^\circ$ ist zusammenhängend und auflösbar, liegt also in einer Borel. Da je zwei Borel'sche konjugiert sind, liegt es damit in jeder Borel und wir folgern $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \mathrm{Z}(B)$. Gegeben $z \in \mathrm{Z}(B)$ faktorisiert die Abbildung $G \to G$, $x \mapsto zxz^{-1}x^{-1}$ über einem Morphismus $G/B \to G$. Der aber muß konstant sein als Morphismus einer vollständigen zusammenhängenden Varietät in eine affine Varietät und wir erhalten $\mathrm{Z}(B) \subset \mathrm{Z}(G)$. □

Korollar 4.6.8 (Nilpotente Borel'sche). *Hat eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe eine nilpotente Borel'sche, so fällt sie bereits mit dieser Borel'schen zusammen.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe und $B \subset G$ unsere Borel'sche. Wir argumentieren mit Induktion über den Nilpotenzgrad von B. Ist er Null, besteht also B nur aus dem neutralen Element, so ist G vollständig und besteht folglich auch nur aus einem Element. Sonst ist das Zentrum $Z := \mathrm{Z}(B)$ nicht trivial und liegt nach 4.6.6 im Zentrum von G. Induktion zeigt dann $B/Z = G/Z$ und es folgt $B = G$. □

Satz 4.6.9 (Maximale Tori sind konjugiert). *In einer affinen algebraischen Gruppe sind je zwei maximale Tori konjugiert.*

Beweis. Jeder unserer Tori liegt in einer Borel. Je zwei Borel's sind konjugiert nach 4.6.1, und je zwei maximale Tori in einer Borel sind konjugiert, da wir unseren Satz für auflösbare Gruppen ja bereits aus 4.2.2 kennen. □

Satz 4.6.10 (Bilder maximaler Tori unter Surjektionen). *Das Bild eines maximalen Torus unter einem surjektiven Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen ist wieder ein maximaler Torus.*

Beweis. Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus. Gegeben $T \subset G$ ein maximaler Torus finden wir eine Borel $B \subset G$ mit $T \subset B \subset G$. Nach 4.6.5 ist $\varphi(B) \subset H$ eine Borel und nach 4.2.2 haben wir $B = TB_{\mathrm{u}}$. Es folgt $\varphi(B) = \varphi(T)\varphi(B_{\mathrm{u}})$ und wir sehen, daß $\varphi(T)$ ein maximaler Torus von $\varphi(B)$ sein muß. Dann aber ist $\varphi(T)$ nach Übung 4.6.26 auch ein maximaler Torus in H. □

Definition 4.6.11. Eine Untergruppe C einer affinen algebraischen Gruppe G heißt eine **Cartan'sche**, wenn es in G einen maximalen Torus T gibt mit

$$C = (G^T)^\circ$$

Vorschau 4.6.12. Wir werden in 4.6.21 sehen, daß der Zentralisator eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe stets zusammenhängend ist. In zuammenhängenden Gruppen sind die Cartan'schen damit schlicht die Zentralisatoren der maximalen Tori.

Proposition 4.6.13. *Jede Cartan'sche einer affinen algebraischen Gruppe ist nilpotent.*

Beweis. Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Es gilt zu zeigen, daß $C := (G^T)^\circ$ nilpotent ist. Sicher ist $T \subset C$ ein maximaler Torus und sicher gilt $T \subset \mathrm{Z}(C)$. Sicher liegt weiter T in einer Borel'schen D von C und ist auch ein maximaler Torus von D. Wegen $T \subset \mathrm{Z}(C)$ ist dann die Multiplikation nicht nur ein Isomorphismus $T \times D_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} D$ von Varietäten, sondern auch von Gruppen. Mithin ist D nilpotent. Nach 4.6.8 zeigt das hinwiederum $D = C$ und C nilpotent. $\square$

Lemma 4.6.14. *Gegeben G eine affine algebraische Gruppe und $S \subset G$ ein Torus gibt es $s \in S$ mit $G^s = G^S$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ die simultane Eigenraumzerlegung von V unter S. Wir finden $s \in S$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten auf allen V_i. Dann gilt $G^s = G^S = \mathrm{GL}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(V_r)$ mit der Notation rechts für die Gruppe der alle Teilräume unsere V_i stabilisierenden Automorphismen von V. $\square$

Lemma 4.6.15. *In jeder affinen algebraischen Gruppe umfaßt die Vereinigung der Cartan'schen eine offene nichtleere Teilmenge.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusammenhängend annehmen dürfen, und $T \subset G$ ein maximaler Torus und $C := (G^T)^\circ$ eine Cartan'sche. Es gilt zu zeigen, daß die Vereinigung

$$\bigcup_{g \in G} gCg^{-1}$$

eine offene Teilmenge umfaßt. Dazu betrachte man den Morphismus $G \times C \to G, (g, c) \mapsto gcg^{-1}$. Nach Lemma 4.6.14 finden wir $t \in T$ mit $C = (G^t)^\circ$. Die Faser unseres Morphismus über t ist $\{(g, c) \in G \times C \mid gcg^{-1} = t\}$. Da aber C nilpotent ist, haben wir $C_{\mathrm{s}} = T$ und mithin impliziert oben $gcg^{-1} = t$ bereits $c \in T$. Des weiteren folgt für unser g dann $gTg^{-1} \subset g(G^c)^\circ g^{-1} = (G^t)^\circ = C$ und wegen $T = C_{\mathrm{s}}$ damit $g \in \mathrm{N}_G(T)$. Nach der Starrheit von Tori 1.7.22 haben wir aber $\mathrm{N}_G(T)^\circ = \mathrm{Z}_G(T)^\circ = C$ und der Quotient $\mathrm{N}_G(T)/\mathrm{Z}_G(T)$ ist folglich endlich und es gibt insbesondere nur endlich viele $c \in C$, die konjugiert sind zu t. Zusammen folgt, daß die Faser unserer Abbildung bei t höchstens dieselbe Dimension wie $\mathrm{N}_G(T)$ und damit auch höchstens dieselbe Dimension wie C hat. Nach Lemma [KAG] 5.9.12 über die Mindestdimension nichtleerer Fasern, für dessen Anwendung wir G irreduzibel brauchen, ist unser Morphismus also dominant und nach 2.2.2 umfaßt sein Bild damit eine offene nichtleere Teilmenge von G. $\square$

Satz 4.6.16 (Überdeckung durch Borel'sche). *Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe wird von ihren Borel'schen überdeckt. Genauer gilt für jede derartige Gruppe G sogar*

$$G = \bigcup_{B \subset G \text{ Borel}} B \quad \textit{und} \quad G_{\mathrm{u}} = \bigcup_{B \subset G \text{ Borel}} B_{\mathrm{u}} \quad \textit{und} \quad G_{\mathrm{s}} = \bigcup_{T \subset G \text{ Torus}} T$$

Beweis. Sobald wir wissen, daß G von seinen Borel'schen überdeckt wird, folgt die Aussage über unipotente Elemente unmittelbar, und die Aussage über halbeinfache Elemente folgt, da sie nach 4.2.2 für zusammenhängende auflösbare Gruppen gilt. Da nun die Vereinigung der Borel'schen die Vereinigung der Cartan'schen umfaßt, jede Cartan'sche ist nach 4.6.13 ja nilpotent, reicht es mit 4.6.15 zu zeigen, daß die Vereinigung der Borel'schen abgeschlossen ist. Das folgt jedoch sofort, wenn wir das im Anschluß bewiesene Lemma 4.6.17 anwenden mit $Y = B$, $X = G$, $P = B$, $G = G$ und der Operation durch Konjugation. □

Lemma 4.6.17. *Seien G eine affine algebraische Gruppe, $P \subset G$ eine Parabolische, X eine G-Varietät und $Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ eine abgeschlossene P-stabile Teilmenge. So ist auch GY abgeschlossen in X, in Formeln $GY \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$.*

Beweis. Wir betrachten $A := \{(g, x) \in G \times X \mid g^{-1}x \in Y\}$. Dann gilt sicher $A \overset{\mathrm{A}}{\subset} G \times X$ und A ist P-stabil, in Formeln $(g, x) \in A \Rightarrow (gp, x) \in A \; \forall p \in P$. Nach der dritten äquivalenten Charakterisierung parabolischer Untergruppen im Beweis von 4.5.5 folgt dann $GY = \mathrm{pr}_X(A) \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$. Wir wiederholen kurz das Argument. Unser A ist nach Annahme das Urbild seines Bildes unter der Projektion $\pi : G \times X \twoheadrightarrow G/P \times X$, in Formeln $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Da π offen ist nach 2.4.12, folgt $\pi(A) \overset{\mathrm{A}}{\subset} G/P \times X$ und dann $\mathrm{pr}_X(\pi(A)) = GY \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ nach der Definition der Vollständigkeit 4.4.1. □

Korollar 4.6.18. *Gegeben $B \subset G$ eine Borel'sche in einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe gilt $\mathrm{Z}(B) = \mathrm{Z}(G)$.*

Beweis. Aus 4.6.6 wissen wir bereits $\mathrm{Z}(B) \subset \mathrm{Z}(G)$. Anderseits liegt jedes $z \in \mathrm{Z}(G)$ nach 4.6.16 in einer Borel'schen und dann, da je zwei Borel'sche nach 4.6.1 konjugiert sind, in jeder Borel'schen. □

Satz 4.6.19 (Zentralisatoren von Tori). *Der Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist zusammenhängend.*

4.6.20. Daß der Zentralisator eines Torus in einer auflösbaren zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe zusammenhängend ist, wissen wir bereits aus 4.3.3, wo wir das sogar für den Zentralisator einer beliebigen Teilmenge aus paarweise kommutierenden halbeinfachen Elementen gezeigt hatten.

Beweis. Seien G unsere Gruppe und $S \subset\!\!\!\!\circ\; G$ unser Torus. Gegeben $z \in G^S$ finden wir eine Borel'sche $B \subset G$ mit $z \in B$. Also ist

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_z := \{g \in G \mid z \in gBg^{-1}\}$$

eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von G und stabil unter der Rechtsmultiplikation mit $b \in B$, ist also das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\circ\; G/B$. Da S auflösbar ist, hat es nach dem Borel'schen Fixpunktsatz 4.5.7 einen Fixpunkt $x \in X$. Nun betrachten wir die Menge $\mathcal{B}$ aller Borel'schen von G und die Surjektion

$$\begin{array}{rcl} G/B & \twoheadrightarrow & \mathcal{B} \\ gB & \mapsto & gBg^{-1} \end{array}$$

Sie ist G-äquivariant für die Operation von G auf $\mathcal{B}$ durch Konjugation. Unser S-Fixpunkt $x \in X$ wird also abgebildet auf eine Borel'sche $A \subset G$ mit $sAs^{-1} = A$ für alle $s \in S$ und $z \in A$. Dann ist auch $SA = AS$ eine Untergruppe und nach dem Satz über irreduzibles Erzeugen sogar eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von G und wegen $(sa, tb) = satba^{-1}s^{-1}b^{-1}t^{-1} \in A$ für alle $s, t \in S$ und $a, b \in A$ ist auch SA auflösbar, mithin $SA = A$. Das aber zeigt

$$G^S = \bigcup_{A \text{ Borel von } G \text{ mit } A \supset S} A^S$$

Daß aber Zentralisatoren von Tori in zusammenhängenden auflösbaren Gruppen zusammenhängend sind, wissen wir bereits aus 4.3.3. Folglich muß auch G^S zusammenhängend sein. □

Satz 4.6.21 (Borel'sche in Zentralisatoren von Tori). *Seien G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $S \subset G$ ein Torus. So ist für jede Borel'sche B von G mit $S \subset B \subset G$ auch $B^S \subset G^S$ eine Borel'sche von G^S und das Herunterschneiden liefert eine Surjektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Borel'sche von } G \text{ über } S\} & \twoheadrightarrow & \{\text{Borel'sche von } G^S\} \\ B & \mapsto & B^S \end{array}$$

Beweis. Sei B eine Borel'sche von G mit $S \subset B \subset G$. Nach 4.3.3 ist B^S zusammenhängend, auflösbar ist es eh. Können wir zeigen, daß G^S/B^S vollständig ist, so muß B^S eine Borel'sche von G^S sein. Es reicht nach 4.5.1 auch bereits, zu zeigen, daß $G^S/B^S \hookrightarrow G/B$ abgeschlossenes Bild hat, oder auch, daß $Y := G^S B$ abgeschlossen ist in G. Nach 4.6.19 ist Y irreduzibel. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} Y \times S & \to & B/B_{\mathrm{u}} \\ (y, s) & \mapsto & y^{-1}syB_{\mathrm{u}} \end{array}$$

Dieselbe Vorschrift liefert sicher auch eine Abbildung $G \times S \to G/B_{\mathrm{u}}$ und induziert eine Abbildung $\bar{Y} \times S \to B/B_{\mathrm{u}}$ für $\bar{Y} \overset{\mathrm{A}}{\subset} G$ der Abschluß von Y in G. Nun ist auch B/B_{u} ein Torus. Aufgrund der Starrheit von Tori 1.7.22 muß unsere Abbildung also bei festem $s \in S$ konstant sein als Funktion von $\bar{y} \in \bar{Y}$, also $\bar{y}^{-1}s\bar{y}B_{\mathrm{u}} = sB_{\mathrm{u}}$ für alle $\bar{y} \in \bar{Y}, s \in S$. Andererseits ist SB_{u} eine abgeschlossene Untergruppe von B, da $B_{\mathrm{u}} \subset B$ ein Normalteiler ist, und $\bar{y}^{-1}S\bar{y} \subset SB_{\mathrm{u}}$ ist für alle $\bar{y} \in \bar{Y}$ ein maximaler Torus von SB_{u}. Also gibt es $z \in B_{\mathrm{u}}$ mit $z^{-1}Sz = \bar{y}^{-1}S\bar{y}$. Nun induziert die Konjugation mit $z \in B$ stets die Identität auf $B/(B,B)$ und a forteriori induziert die Konjugation mit $z \in B_{\mathrm{u}}$ die Identität auf $SB_{\mathrm{u}}/B_{\mathrm{u}}$. Wir landen so bei einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{int}(z\bar{y}^{-1})"'] & B/B_{\mathrm{u}} \arrow[d, "\mathrm{int}(z)=\mathrm{id}"] \\
S \arrow[r, hook] & B/B_{\mathrm{u}}
\end{tikzcd}$$

Es folgt $z\bar{y}^{-1} \in G^S$ und $\bar{y} \in G^S B$ für alle $\bar{y} \in \bar{Y}$. Mithin haben wir $Y = \bar{Y}$ und B^S ist in der Tat eine Borel'sche in G^S. Da je zwei Borel'sche von G^S konjugiert sind, muß unsere Abbildung dann auch surjektiv sein. □

Korollar 4.6.22. *Umfaßt eine Borel'sche einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe einen vorgegebenen maximalen Torus, so umfaßt sie auch dessen Zentralisator.*

Beweis. Ist also in Formeln $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen und einem maximalen Torus, so gilt $B \supset G^T$. In der Tat gilt nach 4.6.19 schon mal $G^T = (G^T)^\circ$, also ist G^T eine Cartan'sche, also nach 4.6.13 nilpotent, also folgt $B \cap G^T = G^T$ aus unserem Satz 4.6.21, nach dem $B \cap G^T = B^T$ eine Borel'sche von G^T sein muß. □

Satz 4.6.23 (Darstellungen von Gruppen und Liealgebren). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k. So gilt:*

1. *Gegeben eine algebraische Darstellung von G ist jeder unter der Liealgebra stabile Teilraum auch unter der Gruppe stabil;*

2. *Gegeben eine algebraische Darstellung von G stimmen die Invarianten der Liealgebra mit den Invarianten der Gruppe überein;*

3. *Das Ableiten von Darstellungen der Gruppe zu Darstellungen ihrer Liealgebra ist ein volltreuer Funktor.*

Beweis. Wir beginnen mit dem ersten Teil. Da unsere Gruppe nach 4.6.16 von ihren Borel'schen überdeckt wird, reicht es, den Fall auflösbarer Gruppen zu betrachten. Da zusammenhängende auflösbare Gruppen nach 4.2.2 von ihrem unipotenten Radikal und einem maximalen Torus erzeugt werden, reicht es, die Fälle der unipotenten Gruppen und der Tori zu betrachten. Letzterer Fall ist evident, ersterer Fall folgt aus 3.10.6. Den zweiten Teil zeigt man genauso. Der dritte Teil folgt für die Unterkategorie der endlichdimensionalen Darstellungen unserer Gruppe mit der Identifikation von $\mathrm{Hom}_k^G(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,W)_k^G$ der Homomorphismen von Darstellungen als Invarianten in der Homomorphismendarstellung. Der allgemeine Fall ergibt sich unmittelbar. □

Lemma 4.6.24. *Unter einer algebraischen Operation einer affinen algebraischen Gruppe auf einer affinen Varietät sind die Bahnen von Fixpunkten maximaler Tori stets abgeschlossen.*

Beweis. Seien $G\backslash X$ unsere Operation, $T \subset B \subset G$ ein maximaler Torus und eine Borel und $x \in X$ ein Fixpunkt von T. Nach 4.2.2 gilt $B = B_{\mathrm{u}}T$, also ist $Y := Bx = B_{\mathrm{u}}x$ abgeschlossen nach 2.3.9 als Bahn einer unipotenten Gruppe auf einer affinen Varietät. Dann ist jedoch $Gx = GY$ abgeschlossen in X nach 4.5.9. □

Übungen

Übung 4.6.25. Man zeige: Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe der Dimension Zwei oder kleiner ist auflösbar. Hinweis: Man gehe die Möglichkeiten für die Dimensionen maximaler Tori der Reihe nach durch.

Übung 4.6.26. Gegeben eine affine algebraische Gruppe ist jeder maximale Torus einer Borel'schen bereits ein maximaler Torus der ganzen Gruppe.

Übung 4.6.27. Man zeige, daß ein halbeinfaches Element aus dem Zentrum einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe in jedem maximalen Torus liegt. Hinweis: 4.6.16.

Ergänzende Übung 4.6.28. $(\mathrm{char}\, k = 0)$. Gegeben eine affine algebraische Guppe G und eine auflösbare Unteralgebra $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ ihrer Liealgebra existiert stets eine Borel'sche $B \subset G$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Lie}\, B$. Hinweis: Man finde eine treue Darstellung und wende den Satz von Lie oder besser sein Korollar [HL] 1.5.6 an.

4.7 Fahnenmannigfaltigkeit und Weylgruppe

Satz 4.7.1 (Normalisatoren von Borel'schen). *In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist jede Borel'sche ihr eigener Normalisator.*

Beweis. Seien G unsere Gruppe und $B \subset G$ eine Borel'sche. Wir behaupten

$$\mathrm{N}_G(B) = B$$

Wir führen den Beweis mit Induktion über $\operatorname{kdim} G$ durch Widerspruch. Sei sonst $x \in \mathrm{N}_G(B)\backslash B$. Sei $T \subset B$ ein maximaler Torus. Indem wir x andernfalls abändern zu xb mit geeignetem $b \in B$, dürfen wir $xTx^{-1} = T$ annehmen, da ja in B nach 4.2.2 je zwei maximale Tori konjugiert sind. Jetzt betrachten wir den Kommutator

$$\begin{array}{rccc} \psi: & T & \to & T \\ & t & \mapsto & xtx^{-1}t^{-1} \end{array}$$

und unterscheiden zwei Fälle.

$\psi(T) \subsetneq T$: Aus $B \supset T$ folgt mit 4.6.22 sofort $B \supset G^T$. Unsere Annahmen $x \notin B$ impliziert so a forteriori $x \notin G^T$. Wir haben also $S := (\ker \psi)^\circ \subsetneq T$. Weiter liegt x nach Konstruktion in G^S und normalisiert B^S. Nach 4.6.21 ist G^S zusammenhängend und B^S darin eine Borel'sche. Gilt hier $G^S \neq G$, so folgt also $x \in B$ per Induktion. Gilt dahingegen $G^S = G$, so können wir die Induktionsannahme auf G/S anwenden. In diesem Quotienten ist B/S eine Borel'sche nach 4.6.5 und wir folgern $\bar{x} \in B/S$, also wieder $x \in B$.

$\psi(T) = T$: In diesem Fall benötigen wir die Induktionsannahme nicht. Wir wählen eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und einen Vektor $v \in V\backslash 0$ mit $\mathrm{N}_G(B) = \mathrm{Stab}_G\langle v\rangle$. Dann gilt sogar $\rho(T)v = v$, da $T = \psi(T)$ aus Kommutatoren von Gruppenelementen besteht, die $\langle v\rangle$ stabilisieren, sowie $\rho(B_{\mathrm{u}})v = v$, da B_{u} unipotent ist. Also erhalten wir einen Morphismus $G/B \to V$, $g \mapsto \rho(g)v$, und der muß konstant sein nach 4.4.4 als Morphismus einer zusammenhängenden vollständigen Varietät in eine affine Varietät. Es gilt also $G = \mathrm{Stab}_G\langle v\rangle = \mathrm{N}_G(B)$ und B ist selbst ein Normalteiler. Dann aber ist G/B vollständig, affin und zusammenhängend, mithin ein Punkt, und es folgt wieder $x \in B$. □

4.7.2. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G betrachten wir die Menge

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(G) = \mathcal{B}_G := \{A \subset G \mid A \text{ ist Borel'sche}\}$$

aller Borel'schen von G. Die Gruppe G operiert darauf transitiv durch Konjugation und nach 4.7.1 erhalten wir für jede Borel'sche $B \subset G$ eine G-äquivariante Bijektion

$$\begin{array}{ccc} G/B & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{B}_G \\ gB & \mapsto & gBg^{-1} \end{array}$$

Nach 3.6.16 gibt es nun genau eine Struktur als Varietät auf $\mathcal{B}$, bezüglich derer alle diese Abbildungen Isomorphismen von Varietäten werden. Diese Varietät $\mathcal{B}$ heißt die **Varietät der Borel'schen von** G oder, in Erweiterung der in 4.6.4 eingeführten Terminologie, die **Fahnenmannigfaltigkeit von** G. Für die G-Operation auf der Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{B}$ verwenden wir zwei Notationen: Betrachten wir eine Borel'sche eher als Punkt, so notieren wir sie mit einem kleinen Buchstaben wie etwa $x \in \mathcal{B}$ und schreiben gx für das Anwenden von $g \in G$ auf $x \in \mathcal{B}$. Betrachten wir eine Borel'sche eher als Untergruppe, so notieren wir sie mit einem großen Buchstaben wie etwa $A \subset G$ und schreiben gAg^{-1} für das Konjugieren. Manchmal notieren wir zu $x \in \mathcal{B}$ auch $B_x \subset G$ eben diese Borel'sche, aufgefaßt als Untergruppe, und haben also $B_{gx} = gB_xg^{-1}$.

Ergänzung 4.7.3. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G betrachten wir ähnlich die Menge

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_G := \{T \subset B \subset G \mid T \text{ ist maximaler Torus und } B \text{ Borel'sche}\}$$

aller **borelierten maximalen Tori** oder kurz **borelierten Tori von** G. Die Gruppe G operiert darauf transitiv durch Konjugation und nach 4.7.1 zusammen mit 4.3.4 erhalten wir für jeden borelierten Torus $T \subset B \subset G$ eine G-äquivariante Bijektion

$$\begin{array}{ccc} G/T & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{T}_G \\ gT & \mapsto & (gTg^{-1} \subset gBg^{-1}) \end{array}$$

Nach 3.6.16 gibt es nun genau eine Struktur als Varietät auf $\mathcal{T}$, bezüglich derer alle diese Abbildungen Isomorphismen von Varietäten werden. Diese Varietät $\mathcal{T}$ heißt die **Varietät der borelierten Tori von** G. Für die G-Operation auf dieser Varietät $\mathcal{T}$ verwenden wir wieder zwei Notationen: Betrachten wir einen borelierten Torus eher als Punkt, so notieren wir ihn mit einem kleinen Buchstaben wie etwa $x \in \mathcal{T}$ und schreiben gx für das Anwenden von $g \in G$ auf $x \in \mathcal{B}$. Betrachten wir ihn eher als ein Paar von Untergruppen, so notieren wir ihn $T \subset B$ und schreiben $gTg^{-1} \subset gBg^{-1}$ für das Konjugieren. Manchmal notieren wir zu $x \in \mathcal{T}$ auch $T_x \subset B_x \subset G$ eben diesen borelierten Torus, aufgefaßt als Paar von Untergruppen, und haben also $(T_{gx} \subset B_{gx}) = (gT_xg^{-1} \subset gB_xg^{-1})$. Wir haben einen offensichtlichen G-äquivarianten Morphismus $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$. Die Faser über x ist hierbei jeweils ein prinzipaler homogener Raum über dem unipotenten Radikal von B_x.

Vorschau 4.7.4. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G mit einer Borel'schen B existiert im allgemeinen keine zu unseren Beschreibungen von G/B und G/T vergleichbar natürliche Beschreibung des Quotienten G/B_{u}. Mehr dazu wird in **??** diskutiert.

Korollar 4.7.5 (Normalisatoren parabolischer Untergruppen). *In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist jede Parabolische zusammenhängend und ihr eigener Normalisator.*

Beweis. Seien $G \supset P$ unsere Gruppe und ihre Parabolische. Es gibt eine Borel'sche $B \subset P^\circ$. Aus $x \in \mathrm{N}_G(P)$ folgt dann, daß $xBx^{-1} \subset P^\circ$ auch eine Borel'sche ist, also gibt es $y \in P^\circ$ mit $yBy^{-1} = xBx^{-1}$ und folglich $y^{-1}x \in \mathrm{N}_G(B) = B$. So folgt unmittelbar $x \in P^\circ B \subset P^\circ$. □

Korollar 4.7.6. *Seien G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $P \ntrianglelefteq G$ eine Parabolische. Sei weiter $x \in G$ gegeben. Umfaßt $P \cap x^{-1}Px$ eine Borel, so gilt bereits $P = x^{-1}Px$.*

Beweis. Sei $B \subset P \cap x^{-1}Px$ eine Borel. Sicher ist $xBx^{-1} \subset P$ dann auch eine Borel, also gibt es $y \in P$ mit $yxBx^{-1}y^{-1} = B$ alias $yx \in B$. Mit $y \in P$ folgt dann $x \in P$. □

Definition 4.7.7. Gegeben $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus setzt man

$$\mathrm{W}_G(T) := \mathrm{N}_G(T)/\mathrm{Z}_G(T)$$

und nennt diese endliche Gruppe die **Weylgruppe von** G oder präziser die **Weylgruppe von** (G, T).

Beispiel 4.7.8. Der Normalisator des maximalen Torus T aller Diagonalmatrizen in der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ besteht genau aus allen Matrizen, die die simultanen Eigenräume $k\mathrm{e}_\nu$ unserer Diagonalmatrizen permutieren, als da heißt aus allen Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben. In diesem Fall bilden die Permutationsmatrizen ein Repräsentantensystem für die Weylgruppe.

Korollar 4.7.9 (Borel'sche und Weylgruppe). *Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe operiert die Weylgruppe zu einem maximalen Torus frei und transitiv durch Konjugation auf der Menge der Borel'schen über besagtem maximalen Torus.*

4.7.10. Sind $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen un einem maximalen Torus liefert in Formeln die Konjugation also eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{W}_G(T) & \stackrel{\sim}{\to} & \{A \subset G \mid A \text{ ist Borel'sche mit } A \supset T\} \\ n & \mapsto & nBn^{-1} \end{array}$$

In nochmal anderen Worten und unter Verwendung von 4.7.1 operiert die Weylgruppe $\mathrm{W}_G(T)$ zu einem maximalen Torus T frei und transitiv auf der Menge $\mathcal{B}_G^T$ der Fixpunkte unseres maximalen Torus T in der Fahnenmannigfaltigkeit.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\mathrm{N}_G(T)$ transitiv auf der Menge der Borel'schen über T operiert. Gegeben eine Borel A mit $T \subset A \subset G$ gibt es $x \in G$ mit $xBx^{-1} = A$. Dann ist $xTx^{-1} \subset A$ ein maximaler Torus und nach 4.2.2 gibt es $a \in A$ mit $axTx^{-1}a^{-1} = T$. Es folgt $n = ax \in \mathrm{N}_G(T)$ und $nBn^{-1} = A$. Nun berechnen wir noch die Isotropiegruppe von B unter der Operation durch Konjugation von $\mathrm{N}_G(T)$. Aus $n^{-1}Bn = B$ folgt mit 4.7.1 ja $n \in B$ und Konjugation mit jedem $b \in B$ stabilisiert auch umgekehrt B, also ist unsere Isotropiegruppe $\mathrm{N}_B(T)$. In der zusammenhängenden auflösbaren Gruppe B gilt aber $\mathrm{N}_B(T) = \mathrm{Z}_B(T)$ nach 4.3.4. Nach 4.6.22 folgt aus $B \supset T$ weiter $B \supset G^T$, also gilt $\mathrm{N}_B(T) = \mathrm{Z}_B(T) = \mathrm{Z}_G(T)$ wie gewünscht. □

Lemma 4.7.11. *Ist (V, ρ) eine endlichdimensionale algebraische Darstellung von $k^\times$ und $x \in \mathbb{P}V$ ein Punkt ihrer Projektivisierung, so läßt sich die durch Anwenden auf x gegebene Abbildung $k^\times \to \mathbb{P}V$ eindeutig zu einem Morphismus von Varietäten $\mathbb{P}^1k \to \mathbb{P}V$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist darüberhinaus entweder konstant oder injektiv und bildet 0 und ∞ auf Fixpunkte von $k^\times$ in $\mathbb{P}V$ ab.*

4.7.12. Wir notieren $0x$ und ∞x die Bilder von 0 und ∞ unter unserer Fortsetzung. Überhaupt jeder Morphismus $k^\times \to \mathbb{P}V$ für $\dim_k V < \infty$ läßt sich eindeutig zu einem Morphismus $\mathbb{P}^1k \to \mathbb{P}V$ fortsetzen, wie in [KAG] 8.6.11 gezeigt wird. Allerdings ist die Fortsetzung in dieser Allgemeinheit nicht notwendig injektiv.

Beweis. Sei $v \in V\backslash 0$ mit $x = \langle v \rangle$. Wir können v schreiben als Linearkombination von simultanen Eigenvektoren

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r$$

mit $a_i \neq 0$ für alle i und $\rho(\lambda)v_i = \lambda^{m(i)}v_i$ und $m(1) > \ldots > m(r)$. Dann kann unsere Fortsetzung explizit angegeben werden durch die Vorschrift $0 \mapsto \langle v_r \rangle, \infty \mapsto \langle v_1 \rangle$. Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen werden. □

Satz 4.7.13 (Zahl der Fixpunkte von Tori). *Seien $\rho : T \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung eines Torus und $Y \subseteq_{\mathcal{A}} \mathbb{P}V$ eine abgeschlossene T-stabile Teilmenge.*

1. *Gilt* $\operatorname{kdim} Y \geq 1$*, so hat T in Y mindestens zwei Fixpunkte, $|Y^T| \geq 2$;*
2. *Gilt* $\operatorname{kdim} Y \geq 2$*, so hat T in Y mindestens drei Fixpunkte, $|Y^T| \geq 3$.*

Beweis. Sei $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ die simultane Eigenraumzerlegung von V unter T mit $V_i \neq 0$ zum Charakter $\chi_i \in \mathfrak{X}(T)$. Sicher liefern die offensichtlichen Abbildungen eine Bijektion

$$\mathbb{P}V_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{P}V_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}V)^T$$

Sicher gibt es auch Morphismen von algebraischen Gruppen $\lambda : k^\times \to T$ mit $\chi_i \circ \lambda$ paarweise verschieden. Dann sind die Fixpunkte unter der durch λ induzierten Operation von $k^\times$ dieselben wie die Fixpunkte von T, wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T = k^\times$ annehmen. Besteht ganz Y aus Fixpunkten, so ist nichts zu zeigen. Sonst gibt es, wenn Y nicht leer ist, schon mal mindestens zwei Fixpunkte nach 4.7.11 und der erste Teil ist gezeigt. Wählen wir für den zweiten Teil eine Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V mit $\rho(t)v_i = t^{m(i)}v_i$ für alle $t \in k^\times$ und $m(1) \geq m(2) \geq \ldots \geq m(n)$, so ist $W := \langle v_2, \ldots, v_n \rangle \subset V$ ein $k^\times$-invarianter Teilraum und $\mathbb{P}W \cap Y$ ist nach [KAG] 6.5.18 nicht leer, falls gilt $\operatorname{kdim} Y \geq 1$, und nach [KAG] 6.5.19 mindestens eindimensional falls $\operatorname{kdim} Y \geq 2$. Dort gibt es also schon mal zwei Fixpunkte. Indem wir sonst V verkleinern, dürfen wir $Y \not\subset \mathbb{P}W$ annehmen. Gegeben $y \in Y \backslash \mathbb{P}W$ ist dann ∞y noch ein dritter Fixpunkt außerhalb von $\mathbb{P}W$. □

Korollar 4.7.14. *Eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe ist genau dann auflösbar, wenn ihre Weylgruppe trivial ist.*

Beweis. Ist unsere Gruppe auflösbar, so ist die Weylgruppe trivial nach 4.3.4. Ist unsere Gruppe nicht auflösbar, so ist die Fahnenmannigfaltigkeit mindestens eindimensional und nach 4.7.13 hat ein maximaler Torus darauf mindestens zwei Fixpunkte. Hier haben wir implizit verwendet, daß jeder Quotient einer affinen algebraischen Gruppe äquivariant in die Projektivisierung einer endlichdimensionalen Darstellung eingebettet werden kann. Nach 4.7.10 folgt, daß die Weylgruppe nicht trivial ist. □

Korollar 4.7.15. *Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe wird erzeugt von den Borel'schen über einem festen maximalen Torus.*

Beweis. Seien G unsere Gruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus und $Q \subset G$ die von allen Borel'schen über T erzeugte Untergruppe. Sie ist parabolisch. Wäre $Q \neq G$, so hätte T nach 4.7.13 auf G/Q außer Q/Q noch einen weiteren Fixpunkt. Er entspricht einer Konjugierten xQx^{-1} unserer Parabolischen mit $T \subset xQx^{-1}$. Mit Induktion über die Dimension dürfen wir annehmen, daß xQx^{-1} von seinen Borel'schen über T erzeugt wird, daß also gilt $xQx^{-1} \subset Q$. Das aber steht im Widerspruch zu unserer Annahme $xQx^{-1} \neq Q$. □

Übungen

Übung 4.7.16. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer affinen algebraischen Gruppe und ein maximaler Torus $T \subset G$ stabilisiert die Weylgruppe die Menge $\mathrm{P}_T(V) \subset \mathfrak{X}(T)$ der Gewichte von V.

4.8 Halbeinfache Gruppen vom Rang Eins

Definition 4.8.1. Unter dem **Rang** einer affinen algebraischen Gruppe G versteht man die Dimension eines maximalen Torus. Man notiert den Rang $\mathrm{rk}(G)$.

Definition 4.8.2. Eine affine algebraische Gruppe heißt **halbeinfach**, wenn alle ihre auflösbaren Normalteiler endlich sind.

Satz 4.8.3 (**Klassifikation halbeinfacher affiner Gruppen vom Rang Eins**). *Jede halbeinfache zusammenhängende affine algebraische Gruppe vom Rang Eins ist isomorph zu* $\mathrm{SL}(2; k)$ *oder zu* $\mathrm{PGL}(2; k)$.

4.8.4. Der Beweis dieses Satzes wird den ganzen Abschnitt füllen. Wir beginnen damit, allgemeine Aussagen zu beweisen, die sogar für beliebige zusammenhängende affine algebraische Gruppen vom Rang Eins gelten, die nicht auflösbar sind.

Lemma 4.8.5. *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende nicht auflösbare affine algebraische Gruppe vom Rang Eins, eine Borel'sche und ein maximaler Torus. So gilt:*

1. *Die Weylgruppe hat genau zwei Elemente, $|\,\mathrm{W}_G(T)| = 2$;*
2. *Die Fahnenmannigfaltigkeit ist eine projektive Gerade, $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$;*
3. *Für jedes $n \in \mathrm{N}_G(T)\backslash \mathrm{Z}_G(T)$ haben wir $G = B \sqcup BnB$;*
4. *Für jedes $n \in \mathrm{N}_G(T)\backslash \mathrm{Z}_G(T)$ ist $(B_\mathrm{u} \cap nB_\mathrm{u}n^{-1})^\circ$ ein Normalteiler von G.*

Beweis. Da unsere Gruppe zusammenhängend aber nicht auflösbar ist, ist die Weylgruppe nach 4.7.14 nicht trivial. Da die multiplikative Gruppe $k^\times$ genau zwei Automorphismen hat, die Identität und das Invertieren, kann unsere Weylgruppe aber auch nicht mehr als zwei Elemente haben und das zeigt die erste Aussage. Auf G/B hat T dann genau zwei Fixpunkte nach 4.7.10 und aus 4.7.13 folgt damit $\mathrm{kdim}\, G/B = 1$. Andererseits muß T auch eine eindimensionale Bahn $Y \subset G/B$ haben. Deren Abschluß ist nun notwendig eine Vereinigung mit nulldimensionalen Bahnen und wir folgern $G/B = Y \sqcup (G/B)^T$ und $Y \Subset G/B$. Nach 3.6.20 oder alternativ 3.6.21 ist dann Y als Varietät isomorph zu $k^\times$. Jetzt gibt es verschiedene Wege, um $G/B \cong \mathbb{P}^1$ zu zeigen. Kennt man die Theorie der Kurven, so folgt das mit [KAG] 8.6.2 aus

$$\mathcal{M}(G/B) \cong \mathcal{M}(k^\times) \cong \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$$

und der Beweis der zweiten Aussage ist fertig. Man mag aber auch direkter eine algebraische Darstellung (V, ρ) von G wählen und $v \in V\backslash 0$ mit $G/B \xrightarrow{\sim}$

$G\langle v\rangle \not\subset \mathbb{P}V$. Dann wird $y \in Y$ repräsentiert durch $w \in V\backslash 0$ und zerfällt als $w = w_1 + \ldots + w_r$ mit $\rho(t)w_i = t^{n(i)}w_i$, wobei alle w_i von Null verschieden sind und für die Exponenten gilt $n(1) > n(2) > \ldots > n(r)$. Unter unserem Isomorphismus gehen die Fixpunkte von $k^\times$ in G/B auf $\langle w_1\rangle, \langle w_r\rangle \in \mathbb{P}V$. Ist d der größte gemeinsame Teiler der $n(i)$, so liefert die Abbildungsvorschrift $t \mapsto t^{n(1)/d}w_1 + \ldots + t^{n(r)/d}$ einen Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} Y$, der sich zu einem bijektiven Morphismus $\mathbb{P}^1 \to G/B$ fortsetzen läßt durch die Vorschrift $\infty \mapsto \langle w_1\rangle, 0 \mapsto \langle w_r\rangle$. Daß das nun ein Isomorphismus ist, kann man entweder explizit einsehen oder auch mit dem Hauptsatz von Zariski 2.4.17 prüfen, da ja jede echte offene Teilmenge von $\mathbb{P}^1$ affin ist. Nun hat B auf G/B nach 4.7.1 den einzigen Fixpunkt B/B und die B-Bahn BnB/B des anderen T-Fixpunkts nB/B muß folglich auch die dichte T-Bahn Y umfassen. Mithin zerfällt G unter der beidseitigen B-Operation in die zwei Doppelnebenklassen

$$G = B \sqcup BnB$$

Schließlich ist $(B_\mathrm{u} \cap nB_\mathrm{u}n^{-1})^\circ$ eine zusammenhängende unipotente Gruppe, die mindestens zwei Fixpunkte auf $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$ hat. Da Bahnen unipotenter Gruppen auf affinen Varietäten nach 2.3.9 abgeschlossen sind und da bereits das Komplement eines Punktes in $\mathbb{P}^1$ affin ist, muß $(B_\mathrm{u} \cap nB_\mathrm{u}n^{-1})^\circ$ ganz $\mathbb{P}^1$ punktweise festhalten. Also ist $(B_\mathrm{u} \cap nB_\mathrm{u}n^{-1})^\circ$ die Einskomponente des Schnitts der unipotenten Anteile aller Borel'schen von G und damit ein Normalteiler. □

Lemma 4.8.6 (Automorphismen der projektiven Gerade). $(k = \bar{k})$. *Sei* $\Delta \not\subset (\mathbb{P}^1 k)^3$ *die sogenannte* **dicke Diagonale** *alias die Teilmenge aller Tripel mit mindestens zwei gleichen Einträgen. So liefern die Operation von* $\mathrm{PGL}(2;k) := \mathrm{GL}(2;k)/k^\times$ *auf* $\mathbb{P}^1 k$ *und das Anwenden eines Automorphismus der algebraischen Varietät* $\mathbb{P}^1 k$ *auf das Tripel* $(0, 1, \infty)$ *Bijektionen*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{PGL}(2;k) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Var}^\times(\mathbb{P}^1 k) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{P}^1 k)^3 \backslash \Delta \\ & & \varphi & \mapsto & (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty)) \end{array}$$

Des weiteren ist die Komposition dieser Bijektionen ein Isomorphismus von Varietäten zwischen der algebraischen Gruppe $\mathrm{PGL}(2;k)$ *und der Menge aller Tripel von paarweise verschiedenen Punkten der projektiven Gerade.*

Beweis. Die erste Abbildung ist eine Bijektion nach [KAG] 6.5.22 und die Verknüpfung ist eine Bijektion nach [EL] 1.5.12. Nach unseren Resultaten über homogene Räume aus 3.5.15 muß nur die Surjektivität des Differentials der Abbildung $\mathrm{GL}(2;k) \to (\mathbb{P}^1)^3$, $g \mapsto (g(0), g(1), g(\infty))$ am neutralen Element geprüft werden, und die ist schnell nachgerechnet. □

Beweis von Satz 4.8.3. Sei nun G eine zusammenhängende halbeinfache affine algebraische Gruppe vom Rang Eins. Seien $T \subset B \subset G$ ein maximaler Torus und eine Borel'sche. Sei weiter $n \in \mathrm{N}_G(T) \backslash \mathrm{Z}_G(T)$. Wir kürzen für das folgende $U = B_{\mathrm{u}}$ ab und pirschen uns Schritt für Schritt an die Klassifikation heran.

1. Da $U \cap nUn^{-1} = U \cap nBn^{-1}$ als Einskomponente einen unipotenten, also auflösbaren Normalteiler hat, muß $U \cap nUn^{-1}$ endlich sein. Wegen $B = TU = UT$ ist die U-Bahn von nB/B dicht in G/B. Andererseits ist die Isotropiegruppe in U von nB/B endlich und es folgt $\operatorname{kdim} U = 1$.

2. Aus $\operatorname{kdim} U = 1$ folgt unmittelbar $\operatorname{kdim} B = 2$ und $\operatorname{kdim} G = 3$.

3. Die Gruppe G hat außer sich selbst nur endliche Normalteiler. In der Tat ist nach 4.6.25 jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe einer Dimension Zwei oder kleiner auflösbar. Also muß jeder echte zusammenhängende Normalteiler positiver Dimension auflösbar sein und der Quotient danach desgleichen, im Widerspruch dazu, daß G selbst nicht auflösbar ist.

4. Der von der Operation von G auf seiner Fahnenmannigfaltigkeit im Verein mit der Wahl eines Isomorphismus $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$ nach 4.8.6 induzierte Homomorphismus von algebraischen Gruppen ist eine Surjektion $G \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2; k)$. In der Tat operiert G nicht trivial auf seiner Fahnenmannigfaltigkeit, der maximale Torus etwa hat ja darin nur zwei Fixpunkte. Folglich muß nach dem vorhergehenden Punkt der Kern unseres Morphismus $G \to \mathrm{PGL}(2; k)$ endlich sein. Dimensionsbetrachtungen zeigen dann die Surjektivität unseres Morphismus.

5. Nun betrachten wir die Surjektion $\phi : \mathrm{SL}(2; k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2; k)$ und die Gruppe $H := \{(g, s) \in G \times \mathrm{SL}(2; k) \mid \varphi(g) = \phi(s)\}$ mitsamt dem offensichtlichen Homomorphismus $H \to \mathrm{PGL}(2; k)$. Die Einskomponente H° von H paßt in ein kommutatives Diagramm von surjektiven Gruppenhomomorphismen der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & H^\circ \arrow[dl, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
G \arrow[r, two heads] & \mathrm{PGL}(2; k) & \mathrm{SL}(2; k) \arrow[l, two heads]
\end{tikzcd}$$

Alle diese Gruppenhomomorphismen haben offensichtlich endliche Kerne. Mithin sind alle Gruppen unseres Diagramms halbeinfach vom Rang Eins. Wir haben gewonnen, wenn wir zeigen können, daß (a) der obere Pfeil nach rechts ein Isomorphismus $H^\circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}(2; k)$ sein muß und daß (b) von den beiden Pfeilen nach unten auf der linken Seite einer ein Isomorphismus sein muß. Dazu müssen wir noch etwas mehr über die Struktur zusammenhängender halbeinfacher Gruppen G vom Rang Eins zeigen.

6. Wir zeigen zunächst $\mathrm{Z}_G(T) = T$. In der Tat ist $\mathrm{Z}_G(T)$ zusammenhängend

nach 4.6.21 und ist folglich eine Cartan'sche, also nilpotent nach 4.6.13. Damit muß $\mathrm{Z}_G(T)$ in einer und jeder Borel'schen liegen, die T umfaßt, in Formeln $\mathrm{Z}_G(T) \subset B$. Gleichheit ist hier unmöglich, weil nilpotente Borel'sche schon die ganze Einskomponente ihrer Gruppe sind nach 4.6.8. Wegen $\operatorname{kdim} B = 2$ folgt damit $\mathrm{Z}_G(T) = T$.

7. Wir zeigen $U \cap nUn^{-1} = 1$. In der Tat, da $U \cap nUn^{-1}$ von T normalisiert wird und endlich ist, muß diese Untergruppe sogar im Zentralisator von T liegen, nach dem vorhergehenden also in T selbst. Das einzige unipotente Element eines Torus ist aber das neutrale Element.

8. Die Multiplikation liefert eine offene Einbettung $(nUn^{-1}) \times T \times U \hookrightarrow G$. In der Tat ist diese Abbildung wegen $(nUn^{-1}) \cap B = 1$ sicher injektiv und hat offenes Bild nach Dimensionsvergleich und weil das Bild als eine Bahn in G aufgefaßt werden kann, unter einer geeigneten Operation von $(nUn^{-1}) \times B$. Wir müssen also nur noch die Injektivität des Differentials an einer Stelle zeigen, in anderen Worten die Formel

$$\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie}(nUn^{-1}) \oplus \operatorname{Lie} B$$

Sicher gibt es $\alpha \in \mathfrak{X}(T)$ mit $\operatorname{Ad}(t) = \alpha(t) : \operatorname{Lie} U \to \operatorname{Lie} U$ für alle $t \in T$. Wegen $\mathrm{Z}_G(T) = T$ und $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_G(T) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(T)$ nach 3.7.13 folgt $\alpha \neq 0$. Auf $\operatorname{Lie}(nUn^{-1})$ operiert $t \in T$ dann durch $\alpha(t^{-1})$ und die Behauptung folgt.

9. Die Gruppe U ist isomorph zur additiven Gruppe k. In der Tat liefert die Operation von U auf der Fahnenmannigfaltigkeit nach dem Vorhergehenden einen Isomorphismus von U mit dem Komplement eines Punktes in der projektiven Geraden. Das zeigt $U \cong k$ als Varietät und dann nach 1.1.43 auch als algebraische Gruppe.

10. Für unser α von eben gilt $\mathfrak{X}(T) \supset \mathbb{Z}\alpha \supset 2\mathfrak{X}(T)$. In der Tat ist für jede algebraische Darstellung V von G und jedes $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ der Teilraum $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{\lambda+n\alpha}$ nach Übung 1.8.3 eine Unterdarstellung. Andererseits folgt aus $V_\lambda \neq 0$ durch Anwenden des nichttrivialen Elements der Weylgruppe nach 4.7.16 auch $V_{-\lambda} \neq 0$. Für jede irreduzible Darstellung folgt aus $V_\lambda \neq 0$ also $2\lambda \in \mathbb{Z}\alpha$. Da nun jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}$ nach 1.7.26 auch in einer irreduziblen Darstellung vorkommt, folgt $2\mathfrak{X} \subset \mathbb{Z}\alpha$.

11. Wegen $\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie} B \oplus \operatorname{Lie}(nUn^{-1})$ ist das Differential beim neutralen Element der durch die Wirkung gegebenen Abbildung $\operatorname{Lie} G \to \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/B)$ injektiv auf $\operatorname{Lie}(nUn^{-1})$. Das zeigt, daß das Differential unseres zu Beginn konstruierten Homomorphismus $G \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2; k)$ injektiv ist auf den Liealgebren aller unipotenten Untergruppen. Dieser Homomorphismus bildet also nach 4.6.5 Borel'sche auf Borel'sche ab und induziert Isomorphismen zwischen deren unipotenten Anteilen. Wir sehen explizit, daß dasselbe auch für $\mathrm{SL}(2; k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2; k)$ gilt. Dann

aber muß auch für eine und jede Borel'sche in H° ihr unipotenter Anteil isomorph auf den unipotenten Anteil ihres Bildes in G beziehungsweise $\mathrm{SL}(2; k)$ abgebildet werden. Da nun im Fall von $\mathrm{SL}(2; k)$ bereits gilt $2\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\alpha$, muß für $S \subset H^\circ$ ein maximaler Torus und T sein Bild in $\mathrm{SL}(2; k)$ die auf den Charaktergruppen induzierte Inklusion $\mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(S)$ ein Isomorphismus sein, so daß wir bereits einen Isomorphismus $S \xrightarrow{\sim} T$ vor uns hatten. Da aber der Kern des rechten oberen Pfeils im Zentrum und damit im Zentralisator von S und damit in S liegen muß, ist der rechte obere Pfeil als bijektiv entlarvt, und an seinem Differential sehen wir, daß er sogar ein Isomorphismus sein muß. Dieselbe Argumentation zeigt, daß von den beiden Morphismen links genau einer einen Isomorphismus von einem maximalen Torus auf sein Bild induziert und daß der dann ein Isomorphismus sein muß. □

Übungen

Übung 4.8.7. Man zeige, daß für eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe gleichbedeutend sind: (1) Die Weylgruppe hat genau zwei Elemente; (2) Die Fahnenmannigfaltigkeit ist eindimensional; (3) Die Fahnenmannigfaltigkeit ist isomorph zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$.

Übung 4.8.8. Jede halbeinfache zusammenhängende affine algebraische Gruppe G vom Rang Eins ist ihre eigene derivierte Gruppe, in Formeln $(G, G) = G$. Hinweis: 4.6.25.

Übung 4.8.9. In $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{C})$ treffen sich je zwei verschiedene maximale Tori nur im neutralen Element. In $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ ist der Schnitt von je zwei verschiedenen maximalen Tori das Zentrum $\{\pm \mathrm{id}\}$.

Beispiel 4.8.10. Alle Automorphismen der algebraischen Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ sind innere Automorphismen, wir haben also in Formeln eine kurze exakte Sequenz

$$\{\pm \mathrm{id}\} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$$

Es gibt zwei Konjugationsklassen von Involutionen in $\mathrm{Aut}\,\mathrm{SL}(2; \mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2; \mathbb{C})$, nämlich die Identität und das Element der Ordnung zwei aus jedem maximalen Torus.

4.9 Radikale und reduktive Gruppen

Definition 4.9.1. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Die von allen abgeschlossenen auflösbaren zusammenhängenden normalen Untergruppen erzeugte Untergruppe hat auch selbst wieder alle diese Eigenschaften und ist mithin die größte Untergruppe mit diesen Eigenschaften. Sie heißt das **Radikal von** G und wird $\operatorname{rad} G$ notiert. Dasselbe gilt, wenn man statt auflösbaren Untergruppen unipotente Untergruppen betrachtet. Man erhält dann die größte zusammenhängende normale unipotente Untergruppe von G. Sie heißt das **unipotente Radikal von** G und wird $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ notiert.

4.9.2. Eine affine algebraische Gruppe G ist also halbeinfach im Sinne von 4.8.2 genau dann, wenn ihr Radikal trivial ist. Der Rang des Quotienten nach dem Radikal einer affinen algebraischen Gruppe G heißt der **halbeinfachen Rang** von G. Er wird $\operatorname{rk}_{\mathrm{s}}(G) := \operatorname{rk}(G/\operatorname{rad} G)$ notiert.

Definition 4.9.3. Eine algebraische Gruppe heißt **reduktiv**, wenn sie affin ist mit trivialem unipotenten Radikal.

4.9.4. Manche Autoren fordern von ihren reduktiven Gruppen zusätzlich, daß sie zusammenhängend sein sollen. Ich schließe mich dieser Konvention nicht an.

4.9.5 (**Diskussion der Bedeutung reduktiver Gruppen**). Zusammenhängende reduktive Gruppen spielen in der Theorie der affinen algebraischen Gruppen eine zentrale Rolle. Ich will zunächst erklären, was an ihnen so besonders ist.

1. Fast alle einfachen affinen algebraischen Gruppen sind reduktiv, die einzige Ausnahme sind die additiven Gruppen $(k, +)$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Hier nennen wir eine algebraische Gruppe **einfach**, wenn sie nicht trivial ist, aber keinen echten nichttrivialen Normalteiler hat.

2. Man kann die zusammenhängenden reduktiven Gruppen recht explizit klassifizieren, wie wir im folgenden besprechen werden, und kann so eine Klassifikation der einfachen affinen algebraischen Gruppen erreichen.

3. In Charakteristik Null sind die reduktiven Gruppen genau die „linear reduktiven affinen Gruppen“ alias die affinen algebraischen Gruppen, deren sämtliche algebraische Darstellungen in eine direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen zerfallen.

4. In positiver Charakteristik liefern die einfachen affinen algebraischen Gruppen die meisten einfachen endlichen Gruppen.

5. Die zusammenhängenden reduktiven Gruppen spielen eine zentrale Rolle im sogenannten Langlands-Programm.

6. Die allgemeinen linearen Gruppen $\mathrm{GL}(n; k)$ sind reduktiv und man mag die anderen reduktiven Gruppen als ihre etwas schwerer zugänglichen Vettern ansehen, oder als die anderen Planeten des Sonnensystems neben der Erde, und kann bei ihrem Studium viel über die allgemeinen linearen Gruppen selber lernen.

Satz 4.9.6 (Radikal und Zentrum reduktiver Gruppen). *Gegeben eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe G ist ihr Radikal ein Torus und die Einskomponente* $\operatorname{rad} G = \mathrm{Z}(G)^\circ$ *des Zentrums und* $\operatorname{rad} G \cap (G, G)$ *ist endlich.*

Beweis. Da $\operatorname{rad} G$ zusammenhängend und auflösbar ist und da nach Annahme gilt $(\operatorname{rad} G)_{\mathrm{u}} = 1$, muß $\operatorname{rad} G$ nach unserem Struktursatz für auflösbare Gruppen 4.2.2 ein Torus sein und wir schreiben von nun an $S := \operatorname{rad} G$. Nach Annahme gilt $G = \mathrm{N}_G(S)^\circ = \mathrm{Z}_G(S)^\circ$ und es folgt $S \subset \mathrm{Z}(G)^\circ$. Da aber $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \operatorname{rad} G$ eh klar ist, folgt $\mathrm{Z}(G)^\circ = \operatorname{rad} G$. Sei nun $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine treue endlichdimensionale algebraische Darstellung. Sie zerfällt über S als

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(S)} V_\chi$$

und wegen $S \subset \mathrm{Z}(G)$ sind alle V_χ stabil unter G. Es folgt $(G, G) \subset \prod \mathrm{SL}(V_\chi)$ und S operiert durch Skalare auf jedem V_χ. Es gibt jedoch jeweils nur endlich viele Skalare, die als Diagonalmatrix mit Determinante Eins auf V_χ operieren. □

Lemma 4.9.7 (Reduktivitätskriterium). *Besitzt eine affine algebraische Gruppe eine algebraische Darstellung mit endlichem Kern, die Summe irreduzibler Unterdarstellungen ist, so ist unsere Gruppe reduktiv.*

4.9.8. Hierfür brauchen wir unsere algebraische Gruppe nicht einmal als affin annehmen, das folgt vielmehr mit 2.4.21 bereits aus der Existenz einer algebraischen Darstellung mit endlichem Kern.

Beweis. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ besagte Darstellung mit $|\ker \rho| < \infty$. Die Fixvektoren unter $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ bilden einen G-stabilen Teilraum $W \subset V$. Nach Annahme und [NAS] 2.3.4 besitzt er ein G-stabiles Komplement $D \subset V$. Da $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ in D keine von Null verschiedenen Fixvektoren haben kann, folgt $D = 0$ aus 1.6.2 und so $W = V$ und $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G \subset \ker \rho$. □

Beispiele 4.9.9. Die affinen algebraischen Gruppen $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SL}(V)$ und $\mathrm{Sp}(V)$ sind reduktiv. Dasselbe gilt für $\mathrm{SO}(V)$ im Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik. In der Tat ist in allen diesen Fällen jeweils V eine irreduzible Darstellung, im letzteren Fall nach dem Satz von Witt [LA2] 2.4.2.

Übungen

Übung 4.9.10. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Man zeige, daß das unipotente Radikal der unipotente Anteil des Radikals ist, in Formeln $(\operatorname{rad} G)_{\mathrm{u}} = \operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$. Man zeige, daß das Radikal die Einskomponente des Schnitts aller Borel'schen Untergruppen ist.

Übung 4.9.11 (**Untergruppen von** $\mathrm{SL}(2;k)$). Man zeige, daß jede echte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SL}(2;k)$ entweder eine Borel'sche oder das unipotente Radikal einer Borelschen oder ein maximaler Torus ist. Hinweis: Man zeige zunächst, daß unsere Untergruppe auflösbar sein muß. Man zeige, daß jede echte abgeschlossene Untergruppe positiver Dimension das Urbild einer abgeschlossenen Untergruppe des eindimensionalen Torus B/B_{u} ist für eine Borel'sche B oder ein maximaler Torus oder der Normalisator eines maximalen Torus.

4.10 Klassifikation im reduktiven Fall

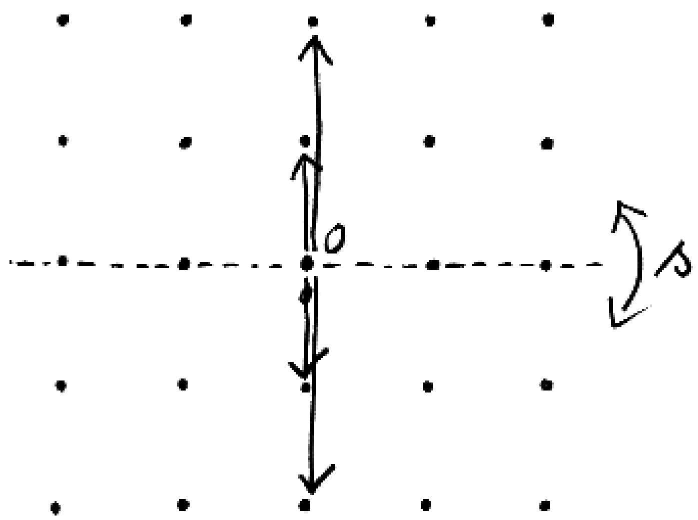
4.10.1. Dieser Abschnitt ist in großen Teilen eine Kopie der entsprechenden Begriffe und Argumente im Fall kompakter Liegruppen [ML] 5.4. Das ist kein Zufall, liefert doch die Komplexifizierung nach **??** eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen kompakter Liegruppen und Isomorphieklassen reduktiver affiner algebraischer Gruppen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Definition 4.10.2. Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe X nennen wir auch ein **Gitter**. Unter einer **Gitterspiegelung** oder auch kurz **Spiegelung** verstehen wir einen Automorphismus $s : X \xrightarrow{\sim} X$ eines Gitters derart, daß sein Quadrat die Identität ist und die Untergruppe der Elemente, die auf ihr Negatives gehen, unendlich zyklisch, in Formeln $s^2 = \mathrm{id}$ und $X^{-s} \cong \mathbb{Z}$. Unter einer **Wurzel** α **zu einer Gitterspiegelung** s verstehen wir ein Element unseres Gitters derart, daß sich jeder Punkt unseres Gitters von seinem Spiegelbild um ein ganzzahliges Vielfaches des besagten Elements unterscheidet, in Formeln $\lambda - s\lambda \in \mathbb{Z}\alpha \ \forall \lambda \in X$.

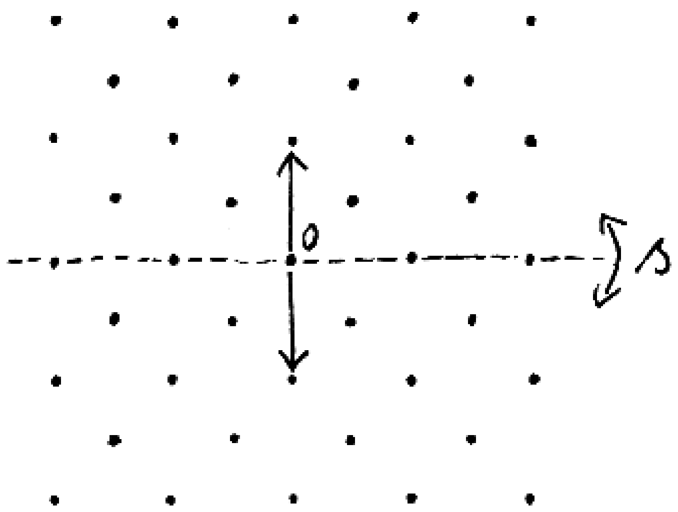
4.10.3 (**Mögliche Wurzeln zu Gitterspiegelungen**). Ist X ein Gitter und $s : X \to X$ eine Gitterspiegelung und $\alpha \in X$ dazu eine Wurzel, so gibt es genau eine Linearform $\alpha^\vee : X \to \mathbb{Z}$ mit

$$s\lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in X$$

Hier verwenden wir für das Auswerten von $\chi \in X^* := \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ auf $\lambda \in X$ die in diesem Kontext übliche symmetrische Notation $\chi(\lambda) = \langle \lambda, \chi \rangle$. Die Linearform $\alpha^\vee$ heißt dann die **Kowurzel** zur Wurzel α der Spiegelung s. Wegen $s\alpha = -\alpha$ gilt stets $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, und umgekehrt ist auch für jedes Paar $(\alpha, \alpha^\vee)$ mit $\alpha \in X$ und $\alpha^\vee \in X^*$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ die Abbildung $s_{\alpha,\alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine Gitterspiegelung. Das Negative einer Wurzel zu einer Gitterspiegelung ist stets wieder eine Wurzel zu derselben Gitterspiegelung, und zu jeder Gitterspiegelung s gibt es mindestens zwei und höchstens vier Wurzeln: Genauer sind die beiden Erzeuger der unendlich zyklischen Gruppe X^{-s} aller Vektoren $\lambda \in X$ mit $s\lambda =$



Eine Gitterspiegelung, zu der es vier Wurzeln gibt.



Eine Gitterspiegelung, zu der es nur zwei Wurzeln gibt.

$-\lambda$ stets mögliche Wurzeln, und nehmen die zugehörigen Kowurzeln auf X nur gerade Werte an, so sind die Doppelten besagter Erzeuger auch noch mögliche Wurzeln. Damit sind dann aber auch bereits alle Möglichkeiten ausgeschöpft.

Definition 4.10.4. Eine **endliche Gitterspiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Gitters, die von Spiegelungen erzeugt wird. Eine **stabile Wurzelwahl** für eine endliche Gitterspiegelungsgruppe ist eine Teilmenge des zugrundeliegenden Gitters, die (1) stabil ist unter der Spiegelungsgruppe, die (2) aus Wurzeln zu Spiegelungen der Spiegelungsgruppe besteht und die (3) zu jeder Spiegelung der Spiegelungsgruppe genau zwei Wurzeln enthält, von denen die eine dann natürlich die Negative der anderen sein muß.

Ergänzung 4.10.5 (**Bezug zum Begriff eines Wurzeldatums**). In der Literatur trifft man statt Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl meist das äquivalente Konzept eines **Wurzeldatums** an. Darunter versteht man ein Datum

$$(X, R, X^\vee, R^\vee, \phi, \tau)$$

bestehend aus zwei Gittern $X, X^\vee$, einer bilinearen Abbildung $\phi : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$, die das eine Gitter mit dem Dualen des anderen identifiziert und üblicherweise $(\lambda, \nu) \mapsto \langle \lambda, \nu \rangle$ notiert wird, sowie endlichen Teilmengen $R \subset X$ und $R^\vee \subset X^\vee$ mitsamt einer Bijektion $\tau : R \xrightarrow{\sim} R^\vee$, die üblicherweise $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ notiert wird, so daß gilt $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 \ \forall \alpha \in R$ und $\beta \in R \Rightarrow \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$ und $\beta^\vee \in R^\vee \Rightarrow \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in R^\vee$ und $\alpha \in R \Rightarrow 2\alpha \notin R$ und $\alpha^\vee \in R^\vee \Rightarrow 2\alpha^\vee \notin R^\vee$. Diese Begrifflichkeit hat den Vorteil, eine zusätzliche Symmetrie sichtbar zu machen in dem Sinne, daß unmittelbar klar wird, was unter dem **dualen Wurzeldatum** zu verstehen ist. Jedes derartige Wurzeldatum liefert eine Gitterspiegelungsgruppe auf dem Gitter X mit Spiegelungen $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ und stabiler Wurzelwahl R, und umgekehrt können wir aus den Spiegelungen und Wurzeln R auch unschwer unser Wurzeldatum zurückgewinnen.

Vorschau 4.10.6 (**Bezug zum Begriff eines abstrakten Wurzelsystems**). Gegeben $W \looparrowright X \supset R$ eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl ist R ein Wurzelsystem im Sinne von [SPW] 2.1.2 im rationalen Vektoraum $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \subset X_{\mathbb{Q}} := X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, der von den Wurzeln erzeugt wid in dem aus dem Gitter X durch Skalarerweiterung entstehenden rationalen Vektoraum $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Das ist offensichtlich, sobald man die Definitionen vor Augen hat. Die Operation der fraglichen Gitterspiegelungsgruppe auf $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ stabilisiert dann den Teilraum $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und induziert einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(R)$ zwischen unserer Gitterspiegelungsgruppe und der Weylgruppe des Wurzelsystems im Sinne von [SPW] 2.1.13. Die Kowurzeln in [SPW] 2.1.9 sind dann offensichtlich die Restriktionen auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ der von unseren Kowurzeln $\alpha^\vee : X \to \mathbb{Z}$ hier induzierten linearen Abbildungen $X_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$. Alle diese Beziehungen sind hier noch nicht relevant.

Definition 4.10.7 (Wurzeln einer reduktiven algebraischen Gruppe). Seien $G \supset T$ eine reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die von Null verschiedenen T-Gewichte in der Liealgebra $\mathrm{Lie}(G)$ von G heißen die **Wurzeln von** G. Die Menge aller Wurzeln heißt das **Wurzelsystem** von G in Bezug auf ihren maximalen Torus T und wird mit R für englisch „root" oder französisch „racine" notiert als

$$\mathrm{R}(G,T) := \mathrm{P}_T(\mathrm{Lie}(G)\backslash 0$$

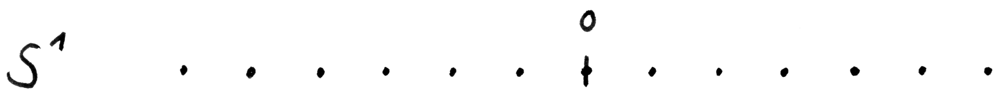
Vorschau 4.10.8. Ist $G \supset T$ eine beliebige affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus, so erklären wir ihr Wurzelsystem als das Wurzelsystem ihres maximalen reduktiven Quotienten $G/\mathrm{rad_u}G$.

Satz 4.10.9 (Klassifikation der reduktiven algebraischen Gruppen). $(k = \bar{k})$ *Ordnen wir jeder zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe die Charaktergruppe eines maximalen Torus zu mitsamt der Operation der zugehörigen Weylgruppe und dem zugehörigen Wurzelsystem, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

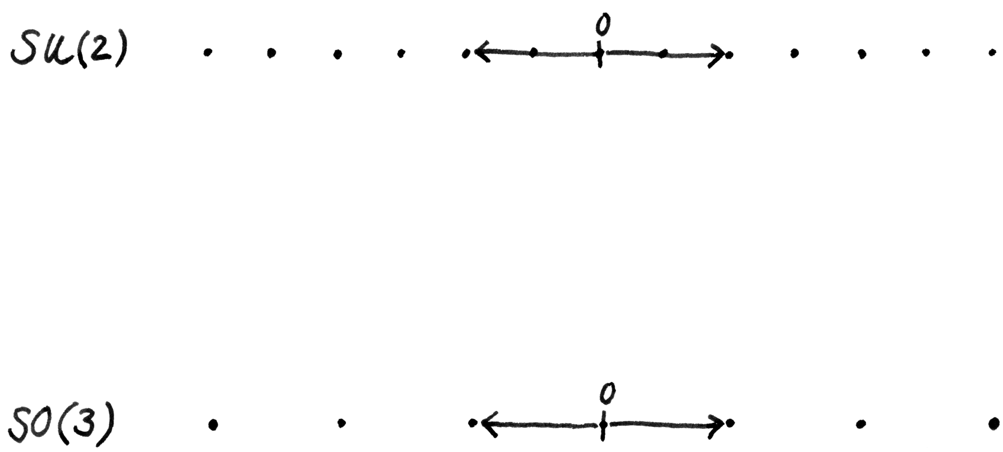
$$\begin{array}{ccc}\left\{\begin{array}{c}\textit{Zusammenhängende reduktive}\\ \textit{algebraische Gruppen}\end{array}\right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{\begin{array}{c}\textit{Gitterspiegelungsgruppen}\\ \textit{mit stabiler Wurzelwahl}\end{array}\right\}\\ \\ G & \mapsto & \mathrm{W}(G,T) \looparrowright \mathfrak{X}(T) \supset \mathrm{R}(G,T)\end{array}$$

4.10.10. Da nach 4.6.9 je zwei maximale Tori einer affinen algebraischen Gruppe zueinander konjugiert sind, hängt unsere Abbildung nicht von der Wahl eines maximalen Torus T ab. Im folgenden zeigen wir zunächst nur, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift in der Tat eine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen liefert. Wendet man genauer 4.7.16 auf die adjungierte Darstellung an, so folgt schon mal, daß die Weylgruppe die Wurzeln permutiert. Weiter zeigt Proposition 4.11.7, daß jede Wurzel des Wurzelsystems auch Wurzel zu genau einer durch ein Element der Weylgruppe gegebenen Spiegelung auf der Charaktergruppe des maximalen Torus ist, und 4.11.6, daß auf jeder Ursprungsgerade höchstens zwei Wurzeln unseres Wurzelsystems liegen. Dann zeigt 4.11.12, daß die Spiegelungen zu Wurzeln die Weylgruppe erzeugen, und 4.11.15, daß es in der Weylgruppe keine weiteren Spiegelungen gibt.

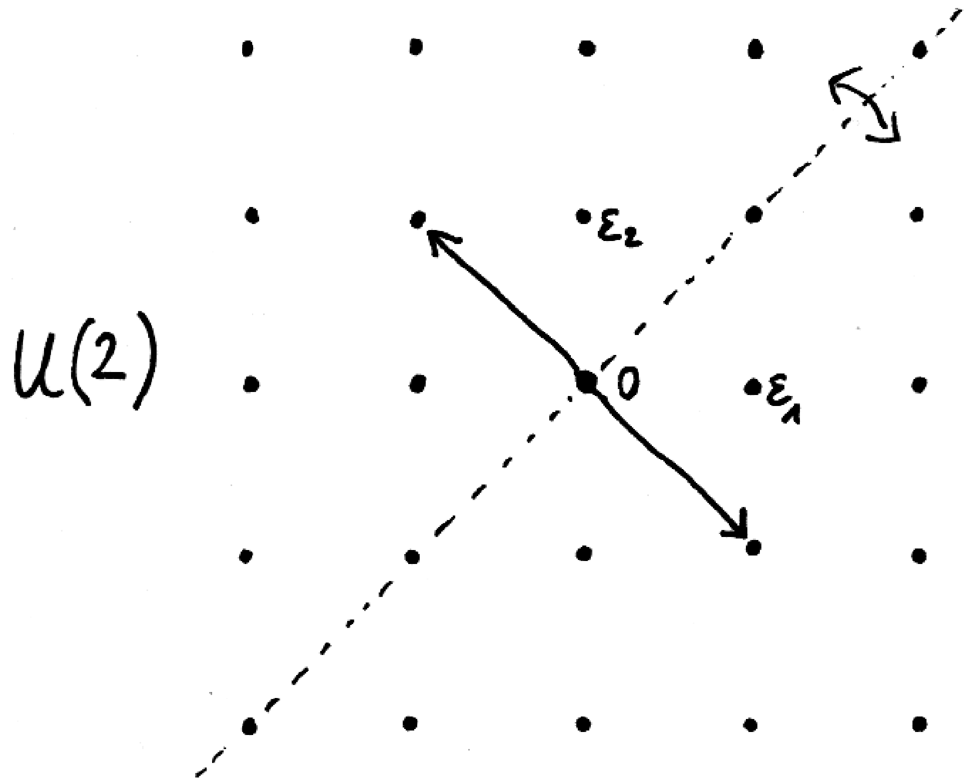
Beispiel 4.10.11 (**Wurzeln der allgemeinen linearen Gruppe**). Wir besprechen den Fall der allgemeinen linearen Gruppen $G = \mathrm{GL}(n;k)$. Als maximalen Torus T können wir nach 4.2.6 etwa die Menge aller invertierbaren Diagonalmatrizen nehmen. Eine Basis des Charaktergitters $\mathfrak{X}(T)$ über $\mathbb{Z}$ bilden die $\varepsilon_i : T \to k^\times$, die jeder diagonalen Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnen, für $1 \le i \le n$.



Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu S^1. In diesem Fall ist die Menge der Wurzeln leer und die Gitterspiegelungsgruppe besteht nur aus dem neutralen Element.



Die Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl zu $\mathrm{SL}(2; k)$ und $\mathrm{PSL}(2; k)$. In diesen Fällen haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der Punktspiegelung am Ursprung. Das Gitter zu $\mathrm{SL}(2; k)$ kann man als Quotient des Gitters zu $\mathrm{GL}(2; k)$ verstehen, das Gitter zu $\mathrm{PSL}(2; k)$ als Untergitter des Gitters zu $\mathrm{SL}(2; k)$.



Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu $\mathrm{GL}(2; k)$. In diesem Fall haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der anschaulich orthogonalen Spiegelung an der zu den Wurzeln senkrechten Geraden durch den Ursprung.

Die Operation der Weylgruppe auf dem Charaktergitter identifiziert unsere Weylgruppe nach 4.7.8 mit der Gruppe aller Permutationen der ε_i und wir erhalten so einen kanonischen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$. Der kanonische Isomorphismus $\operatorname{Lie}\operatorname{GL}(n;k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mat}(n;k)$ aus 3.1.26 ist äquivariant für die adjungierte Operation vorne und die Operation durch Konjugation hinten. Als Wurzelsystem ergibt sich so die Menge

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$$

und der zur Wurzel $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ gehörende Wurzelraum $(\operatorname{Lie}\operatorname{GL}(n;k))^\alpha$ entspricht unter unserer Identifikation mit den quadratischen Matrizen der Gerade kE_{ij} aller Matrizen, denen nur in Zeile i und Spalte j ein von Null verschiedener Eintrag erlaubt ist. Die Spiegelung zur Wurzel $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ entspricht unter der offensichtlichen Identifikation $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$ der Transposition (i, j), und in der Tat erzeugen diese Transpositionen die symmetrische Gruppe. Die zugehörige Kowurzel entspricht der Abbildung $k^\times \to T$ gegeben durch

$$z \mapsto \operatorname{diag}(1, \dots, z, \dots, z^{-1}, \dots, 1)$$

mit einem z an der i-ten Stelle, einem z^{-1} an der j-ten Stelle und Einsen sonst. In der Notation $\varepsilon_i^* : z \mapsto \operatorname{diag}(1, \dots, z, \dots, 1)$ mit einem z an der i-ten Stelle hat die Kowurzel zur Wurzel $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ also die Gestalt $\alpha^\vee = \varepsilon_i^* - \varepsilon_j^*$. In diesem Fall ist $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ$ die Gruppe der Diagonalmatrizen, die an der i-ten Stelle denselben Eintrag haben wie an der j-ten Stelle. Der Zentralisator dieser Untergruppe besteht aus allen invertierbaren Matrizen, die höchstens auf der Diagonalen und an den Stellen mit Indizes (i, j) oder (j, i) von Null verschiedene Einträge haben. Man kann damit leicht einen Isomorphismus $\operatorname{PGL}(2;k)/\{\pm \operatorname{id}\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Z}_G(S_\alpha)/S_\alpha$ angeben.

Übungen

Übung 4.10.12. Die Transponierte einer Gitterspiegelung ist stets eine Gitterspiegelung des dualen Gitters und jedes Paar von Wurzel und Kowurzel zu einer Gitterspiegelung ist ein Paar von Kowurzel und Wurzel zu ihrer Transponierten.

Übung 4.10.13. Ein Element eines maximalen Torus in einer reduktiven algebraischen Gruppe liegt in keinem anderen maximalen Torus genau dann, wenn es von keiner Wurzel auf die Eins geworfen wird.

Übung 4.10.14. Ein Element eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe liegt im Zentrum genau dann, wenn es im Kern jeder Wurzel liegt.

4.11 Struktur reduktiver Gruppen

Definition 4.11.1 (**Wurzeln einer affinen algebraischen Gruppe**). Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die von Null verschiedenen T-Gewichte in der Liealgebra $\operatorname{Lie}(G/\operatorname{rad_u} G)$ des Quotienten von G nach seinem unipotenten Radikal heißen die **Wurzeln von** G. Die Menge aller Wurzeln heißt das **Wurzelsystem** der affinen algebraischen Gruppe G in Bezug auf ihren maximalen Torus T und wird mit R für englisch „root" oder französisch „racine" bezeichnet notiert als

$$\mathrm{R}(G,T) := \mathrm{P}_T(\operatorname{Lie}(G/\operatorname{rad_u} G))\backslash 0$$

4.11.2 (**Provisorische Wurzeln**). Aus beweistechnischen Gründen arbeiten wir bis zum Ende dieses Abschnitts mit einer abweichenden provisorischen Definition des Begriffs einer Wurzel. Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Wir betrachen die Einskomponente

$$H = H(G,T) := \left(\bigcap\nolimits_{B \in \mathcal{B}^T} B\right)^\circ$$

des Schnitts aller Borel'schen über T und nennen die T-Gewichte in $\operatorname{Lie} G/\operatorname{Lie} H$ die **provisorischen Wurzeln** oder kürzer auch **Wurzeln von** G. Die Menge aller provisorischen Wurzeln nennen wir das **provisorische Wurzelsystem**

$$\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) := \mathrm{P}_T(\operatorname{Lie} G/\operatorname{Lie} H)$$

In 4.11.26 wird sich dann herausstellen, daß der unipotente Anteil H_{u} der auflösbaren Untergruppe H genau das unipotente Radikal von G ist, so daß unsere provisorischen Wurzeln mit unseren Wurzeln aus 4.11.1 zusammenfallen, in Formeln $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) = \mathrm{R}(G,T)$.

Satz 4.11.3 (**Weylgruppe und provisorisches Wurzelsystem**). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus ist das Datum $\mathrm{W}(G,T) \looparrowright \mathfrak{X}(T) \supset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl.*

Vorschau 4.11.4. Der Beweis dieses Satzes wird einen großen Teil dieses Abschnitts einnehmen. In 4.11.6 zeigen wir, daß die einzigen Vielfachen einer Wurzel, die wieder Wurzeln ist, sie selbst und ihr Negatives sind. Nach 4.11.7 ist jede Wurzel eine Wurzel im Sinne von 4.10.2 zu einem Element der Weylgruppe, das als Gitterspiegelung auf dem Charaktergitter des maximalen Torus operiert. Nach 4.11.12 erzeugen diese Gitterspiegelungen bereits die Weylgruppe, die mithin eine Gitterspiegelungsgruppe ist, und nach 4.11.15 operieren keine anderen Elemente der Weylgruppe als Gitterspiegelungen auf dem Charaktergitter des maximalen Torus. Daß $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ unter der Weylgruppe stabil ist, ist eh klar. Damit wird dann der Satz bewiesen sein, was wir in 4.11.17 nocheinmal festhalten.

Proposition 4.11.5 (Rang-Eins-Subquotienten zu Wurzeln). *Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus $G \supset T$ und eine Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ betrachten wir die Einskomponente $S_\alpha := (\ker\alpha)^\circ \subset T$ ihres Kerns und deren Zentralisator $\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset G$. So gilt:*

1. *Der Quotient $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ ist eine halbeinfache zusammenhängende Gruppe vom Rang Eins und die von Null verschiedenen T-Gewichte ihrer Liealgebra sind $\pm\alpha$;*

2. *Der Quotient $G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ hat als derivierte Gruppe eine halbeinfache zusammenhängende Gruppe vom Rang Eins (G_α, G_α) und das Bild $\bar{T} \subset G_\alpha$ von T schneidet (G_α, G_α) in einem maximalen Torus dieser Untergruppe.*

Beweis. 1. Unser Zentralisator ist nach 4.6.19 als Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden Gruppe selbst zusammenhängend und nach unserem Satz über Borel'sche in Zentralisatoren von Tori 4.6.21 ist für jede Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$, ja sogar für jede Borel'sche B von G mit $B \supset S_\alpha$ der Schnitt $B \cap \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ eine Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$. Da das Radikal einer affinen algebraischen Gruppe stets in jeder Borelschen enthalten ist, folgt $\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset H$. Nach Wahl von α und dem Satz über Liealgebren von Zentralisatoren von Tori 3.7.13 gilt aber $\operatorname{Lie}\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \not\subset \operatorname{Lie} H$, also kann $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ nicht auflösbar sein, und nach demselben Satz gilt $\alpha \in \mathrm{P}_T(\operatorname{Lie}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{Lie}(\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha))$. Jetzt setzen wir

$$G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}}\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$$

Das ist quasi per definitionem eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe und die Projektion induziert einen Isomorphismus von T mit einem maximalen Torus $\bar{T} \subset G_\alpha$, da weder T noch seine Liealgebra T nichttriviale unipotente Elemente hat und da nach 4.6.10 das Bild eines maximalen Torus unter einem surjektiven Homomorphismus wieder ein maximaler Torus ist. Mithin induziert die Projektion auch einen Isomorphismus von S_α mit einem zentralen Untertorus $\bar{S}_\alpha \subset G_\alpha$ der Kodimension Eins in $\bar{T}$. Wir zeigen nun, daß genauer sogar gilt

$$\bar{S}_\alpha = \operatorname{rad} G_\alpha$$

Hier ist $\subset$ klar, andererseits aber muß nach 4.9.6 das Radikal der reduktiven Gruppe G_α ein zentraler Torus sein. Gäbe es aber in G_α einen echt größeren zentralen Torus als $\bar{S}_\alpha$, so wäre dieser schon ein maximaler Torus, und dann wäre die Weylgruppe trivial und dann wäre nach 4.7.14 auch G_α auflösbar und damit auch $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$, was es ja eben nicht ist. Also gilt $\bar{S}_\alpha = \operatorname{rad} G_\alpha$, und das hinwiederum zeigt, daß die Surjektion einen Isomorphismus

$$\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad}\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \stackrel{\sim}{\to} G_\alpha/\bar{S}_\alpha$$

induziert und daß diese beiden zueinander isomorphen Gruppen zusammenhängend und halbeinfach vom Rang Eins sind. Nach unserer Klassifikation halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins 4.8.3 enthält schließlich die Menge der T-Gewichte $\mathrm{P}_T(\mathrm{Lie}(G_\alpha/\bar{S}_\alpha))$ genau zwei Gewichte ungleich Null, deren Summe ist Null, und deren Gewichtsräume in $\mathrm{Lie}(G_\alpha/\bar{S}_\alpha)$ sind eindimensional. Da wir α bereits als Gewicht erkannt haben, muß das zweite Gewicht notwendig $-\alpha$ sein.

2. Für die derivierte Gruppe von G_α induziert die Projektion nach 4.8.8 eine Surjektion

$$(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/\bar{S}_\alpha$$

Andererseits trifft $(G_\alpha, G_\alpha) \subset G_\alpha$ nach 4.9.6 das Radikal $\bar{S}_\alpha$ in einer endlichen Gruppe, unsere Surjektion hat folglich endlichen Kern. Mithin ist auch (G_α, G_α) halbeinfach vom Rang Eins und die Einskomponente des Urbilds von $\bar{T}/\bar{S}_\alpha$ ist darin ein maximaler Torus. Der muß aber wie jeder maximale Torus einer zusammenhängenden halbeinfachen Gruppe vom Rang Eins das Zentrum umfassen und a forteriori den Kern von $(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/\bar{S}_\alpha$. Damit ist unser maximaler Torus bereits das ganze Urbild von $\bar{T}/\bar{S}_\alpha$ alias der Schnitt $\bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$. □

4.11.6 (**Vielfache von Wurzeln**). Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus sind Wurzeln $\alpha, \beta \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G, T)$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ sind linear unabhängig. In der Tat, sind Wurzeln α, β linear abhängig, so gilt $(\ker \alpha)^\circ = (\ker \beta)^\circ$ und die Behauptung folgt, da für diesen Torus, den wir einmal S nennen wollen, $\mathrm{Z}_G(S)/\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S)$ nach 4.11.5 zusammenhängend und halbeinfach ist vom Rang Eins und wir diese Gruppen aus 4.8.3 bereits sehr genau kennen.

Lemma 4.11.7 (**Wurzelspiegelungen**). *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und sei $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G, T)$ eine Wurzel. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Element der Weylgruppe $s_\alpha \in \mathrm{W}(G, T)$ mit $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $s_\alpha|(\ker \alpha)^\circ = \mathrm{id}$;*

2. *Für dieses Element haben wir $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ und es gibt es genau eine Linearform $\alpha^\vee : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ derart, daß für alle $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ gilt*

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

4.11.8. Hier verwenden wir die in diesem Zusammenhang übliche symmetrische Schreibweise $\langle \lambda, \psi \rangle := \psi(\lambda)$ für das Auswerten einer Linearform $\psi : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ auf einem Element $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$. Wir nennen s_α die **Wurzelspiegelung zur Wurzel** α und $\alpha^\vee$ die zur Wurzel α gehörige **Kowurzel**.

Beweis. 1. Wir setzen wie zuvor $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ$. Nach 4.11.5 ist die Gruppe $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ nicht auflösbar. Also ist nach 4.7.14 ihre Weylgruppe zum maximalen Torus T nicht trivial. Ist s ein nichttriviales Element dieser Gruppe, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{X}(T) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "s"'] & \mathfrak{X}(S_\alpha) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
\ker \arrow[r, hook] & \mathfrak{X}(T) \arrow[r, two heads] & \mathfrak{X}(S_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Hier ist $\ker \cong \mathbb{Z}$ frei vom Rang Eins. Würde s auf dem Kern die Identität induzieren, so wäre es auf $\mathfrak{X}(T)$ unipotent und müßte als unipotenter Automorphismus endlicher Ordnung trivial sein. Das ist es nicht, also haben wir $s = -\mathrm{id}$ auf dem Kern und insbesondere $s(\alpha) = -\alpha$. Dieselbe Argumentation zeigt, daß s eindeutig bestimmt ist und daß gilt $s^2 = \mathrm{id}$ und Teil 1 unseres Lemmas ist bewiesen. Von nun an nennen wir, wie bereits angekündigt, diese Gitterspiegelung s die Wurzelspiegelung zur Wurzel α und notieren sie $s = s_\alpha$.

2. Wenden wir nun die Klassifikation 4.8.3 zusammenhängender halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins auf die derivierte Gruppe (G_α, G_α) von

$$G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad_u} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$$

an, die ja nach 4.11.5 eine Gruppe dieser Art ist und vom Bild $\bar{T} \subset G_\alpha$ von T in einem maximalen Torus geschnitten wird, so finden wir einen Homomorphismus $\alpha^\vee : k^\times \to \bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$ von algebraischen Gruppen mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Repräsentiert $\bar{s} \in (G_\alpha, G_\alpha)$ das nichttriviale Element der Weylgruppe zum maximalen Torus $\bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$, so kommutiert $\bar{s}$ mit $\bar{S}_\alpha$ und normalisiert damit ganz $\bar{T}$ und der davon induzierte Automorphismus $\bar{s}$ von $\mathfrak{X}(\bar{T})$ muß folglich mit dem von unserer Wurzelspiegelung s_α auf $\mathfrak{X}(T)$ induzierten Automorphismus übereinstimmen modulo der Identifikation $T \xrightarrow{\sim} \bar{T}$. Schreiben wir

$$\mathfrak{X}^\vee(D) := \mathrm{GrpVar}(k^\times, D)$$

für die Gruppe der multiplikativen Ein-Parameter-Untergruppen eines Torus D, so operiert unser $\bar{s}$ auch auf $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ und wir haben $\bar{s}(\alpha^\vee) = -\alpha^\vee$. Andererseits haben wir $\bar{s}(\psi) = \psi$ für alle $\psi \in \mathfrak{X}^\vee(\bar{S}_\alpha) \subset \mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$. Da nun $\mathfrak{X}^\vee(\bar{S}_\alpha)$ und $\alpha^\vee$ bereits eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ erzeugen, wird der von $\bar{s}$ induzierte Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt. Es folgt

$$\bar{s}(\psi) = \lambda - \langle \alpha, \psi \rangle \alpha^\vee$$

für alle $\psi \in \mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$, denn die durch die rechte Seite gegebene Abbildung erfüllt dieselben Bedingungen. Nun identifiziert die offensichtliche Paarung

$$\mathfrak{X}^\vee(\bar{T}) \times \mathfrak{X}(\bar{T}) \to \mathbb{Z}$$

jeweils die eine abelsche Gruppe mit dem $\mathbb{Z}$-Dualen der anderen, so daß die Operation von $\bar{s}$ auf $\mathfrak{X}(\bar{T})$ durch die transponierte Abbildung geschehen muß. Indem wir wieder zu T aufsteigen, folgt schließlich die behauptete Formel

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in \mathfrak{X}(T) \qquad \square$$

4.11.9. Es ist leicht zu sehen, daß die Transponierte jeder Gitterspiegelung eine Gitterspiegelung auf dem dualen Gitter ist.

Proposition 4.11.10 (Homomorphismen und Weylgruppen). *Unter einem surjektiven Homomorphismus von zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppen mit zentralem diagonalisierbaren Kern ist das Urbild jedes maximalen Torus ein maximaler Torus und das Urbild seines Normalisators der Normalisator seines Urbilds und wir erhalten so einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Weylgruppen.*

Beweis. Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus und $T \subset G$ ein maximaler Torus. Da G zusammenhängend ist, zeigt 4.6.27 bereits $\ker \varphi \subset T$ und folglich $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Da wir bereits nach 4.6.10 wissen, daß jeder maximale Torus in H das Bild eines maximalen Torus in G ist, folgt die erste Behauptung. Die beiden weiteren Behauptungen folgen nun ohne weitere Schwierigkeiten. Für eine formale Argumentation scheint mir das Neunerlemma [LA2] 4.7.5 besonders übersichtlich. Die benötigten Rechnungen macht 4.11.11 explizit. $\square$

4.11.11. Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ und Teilmengen $A, B \subset H$ gilt $\varphi^{-1}(AB) = \varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)$. Gegeben eine Teilmenge $S \subset H$ und ein Element $g \in G$ gilt des weiteren die Äquivalenz

$$g\varphi^{-1}(S)g^{-1} \subset \varphi^{-1}(S) \Leftrightarrow \varphi(g)S\varphi(g)^{-1} \subset S$$

Man lasse sich nicht dadurch verwirren, daß hierbei „hoch (-1)“ sowohl für Abbildungen die auf den Potenzmengen in der Gegenrichtung induzierte Abbildung bezeichnet als auch für Gruppenelemente ihr Inverses.

Satz 4.11.12 (Erzeugung der Weylgruppe durch Wurzelspiegelungen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus erzeugen die Wurzelspiegelungen die Weylgruppe* $\mathrm{W}(G, T)$.

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über die Dimension unserer Gruppe. Gibt es keine Wurzeln, genauer bei unserem derzeitigen Kenntnisstand keine provisorischen Wurzeln, so ist $G = H(G, T)$ per definitionem auflösbar und die Weylgruppe ist trivial nach 4.7.14. Das erledigt auch ohne Verwendung der Induktionsannahme den Fall, daß das provisorische Wurzelsystem leer ist. Sonst sei

$w \in \mathrm{W}(G, T)$ ein nichttriviales Element der Weylgruppe und $\dot{w} \in \mathrm{N}_G(T)$ ein Repräsentant desselben. Man betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \phi: & T & \to & T \\ & t & \mapsto & \dot{w}t\dot{w}^{-1}t^{-1} \end{array}$$

Ist ϕ nicht surjektiv, so hat sein Kern positive Dimension und w zentralisiert mithin einen echten Untertorus $S \subsetneq T$. Dann brauchen wir nur die Induktionsannahme auf $\mathrm{Z}_G(S)/S$ anzuwenden, das nach 4.11.10 dieselbe Weylgruppe hat wie $\mathrm{Z}_G(S)$ und dessen Wurzeln unter $T \twoheadrightarrow T/S$ genau den Wurzeln von $\mathrm{Z}_G(S)$ entsprechen. Ist dahingegen ϕ surjektiv, so ist die davon auf der Charaktergruppe induzierte Abbildung eine Injektion

$$(w - \mathrm{id}) : \mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T)$$

Nun wissen wir bereits, daß es Wurzeln α geben muß, und gegeben eine Wurzel α finden wir dann $\lambda \in \mathfrak{X}(T)\backslash 0$ mit $(w - \mathrm{id})\lambda \in \mathbb{Z}\alpha$. Da die Bahn einer endlichen Gruppe in einer Darstellung über einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum jede affine Gerade nur in höchstens zwei Punkten treffen kann, die unter jedem invarianten Skalarprodukt denselben Abstand vom Ursprung haben, folgt $w\lambda = s_\alpha\lambda$ und damit

$$(s_\alpha w - \mathrm{id})\lambda = s_\alpha(w - \mathrm{id})\lambda + (w - \mathrm{id})\lambda = 0$$

Also ist $s_\alpha w$ ein weiteres Element der Weylgruppe, für das unser ϕ nicht mehr surjektiv ist, so daß wir den Beweis, wie zuvor erklärt, mit vollständiger Induktion zu Ende bringen können. □

Definition 4.11.13. Ein Automorphismus eines Vektorraums über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik heißt eine **Spiegelung**, wenn er eine Hyperebene punktweise festhält und einen Vektor außerhalb dieses **Spiegels** auf sein Negatives wirft.

4.11.14. Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die Weylgruppe $\mathrm{W}(G, T)$ operiert auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q} = \mathfrak{X}(T)^\vee_\mathbb{Q} := \mathrm{Ab}(\mathfrak{X}(T), \mathbb{Q})$. Die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements

$$\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} (\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q})^{s_\alpha}$$

der Vereinigung aller Spiegel zu Spiegelungen s_α aus 4.11.7 heißen **Alkoven**. Die Menge aller Alkoven bezeichnen wir mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q})$. Sicher permutiert die Weylgruppe unsere Spiegel, folglich erhalten wir auch eine Operation der Weylgruppe auf der Menge $\mathcal{A}$ aller Alkoven.

Proposition 4.11.15 (Spiegelungen in der Weylgruppe). *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. So gilt:*

1. *Die Weylgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge der Alkoven in $\mathfrak{X}(T)^\vee_\mathbb{Q}$. In Formeln liefert also für jeden Alkoven A das Anwenden eine Bijektion $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$;*

2. *Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe als Spiegelungen auf $\mathfrak{X}(T)$.*

Ergänzung 4.11.16. Teile des anschließenden Beweises können wir im Rahmen der allgemeinen Theorie endlicher Spiegelungsgruppen [SPW] 1.6.1 noch besser verstehen. Insbesondere kann man ganz allgemein zeigen, daß jede endliche von Spiegelungen erzeugte Gruppe von Automorphismen eines endlichen reellen Vektorraums frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert und daß jede Spiegelung einer derartigen Gruppe konjugiert ist zu einer der erzeugenden Spiegelungen.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß die Operation der Weylgruppe auf der Menge der Alkoven transitiv ist. Wir wählen dazu ein W-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{X}_\mathbb{Q}$ und finden wir für beliebige Vektoren $v, w \in \mathfrak{X}_\mathbb{Q}$ ein $x \in W$ derart, daß der Abstand $\|v - xw\|$ kleinstmöglich wird. Dann können v und xw durch keinen Spiegel einer Wurzelspiegelung mehr getrennt werden, da ja sonst aus elementargeometrischen Gründen für s_α die Spiegelung an besagtem Spiegel v und $s_\alpha xw$ noch näher aneinander wären. Also liegen v und xw für jeden Spiegel einer Wurzelspiegelung in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. Als nächstes zeigen wir, daß sie auch frei ist. Hält aber ein nichttriviales Element der Weylgruppe einen Alkoven fest, so hat es in besagtem Alkoven auch einen Fixpunkt, etwa die Summe über die Elemente einer Bahn der von unserem Element erzeugten zyklischen Untergruppe. Es gäbe also eine Einparameteruntergruppe $\chi \in \mathfrak{X}^\vee$ mit $\langle \alpha, \chi \rangle \neq 0$ alias $\operatorname{im} \chi = \chi(k^\times) \not\subset \ker \alpha \ \ \forall \alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}$ derart, daß ein nichttriviales Element der Weylgruppe durch ein Element von $\mathrm{Z}_G(\operatorname{im} \chi)$ repräsentiert werden kann. Diese Gruppe ist nach 4.6.19 zusammenhängend. Wenn wir nun $\mathrm{Z}_G(\operatorname{im} \chi) \subset H$ zeigen können, so haben wir den gewünschten Widerspruch erreicht, denn die Weylgruppe jeder zusammenhängenden auflösbaren Gruppe ist trivial nach 4.7.14. Aus den Eigenschaften von χ folgt aber $(\operatorname{Lie} G)^{\operatorname{im} \chi} \subset \operatorname{Lie} H$, also $(\operatorname{Lie} G)^{\operatorname{im} \chi} = (\operatorname{Lie} H)^{\operatorname{im} \chi}$, also $\mathrm{Z}_G(\operatorname{im} \chi) = \mathrm{Z}_H(\operatorname{im} \chi) \subset H$. Um auch die zweite Aussage der Proposition abzuleiten, beachten wir, daß es nach [NAS] 4.1.4 auf $\mathfrak{X}^\vee_\mathbb{Q}$ ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gibt, so daß eine Spiegelung aus der Weylgruppe durch ihren Spiegel bereits eindeutig festgelegt wird. Hätten wir zusätzlich zu den s_α noch eine weitere Spiegelung s in der Weylgruppe, so müßte deren Spiegel ganz offensichtlich und formal nach [AL] 3.10.1 einen Alkoven A treffen und es folgte $sA = A$ im Widerspruch zur Freiheit der Operation. □

4.11.17. Wir haben damit, wie in 4.11.4 angekündigt, Satz 4.11.3 gezeigt, nach dem für $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus das Datum $\mathrm{W}(G,T) \looparrowright \mathfrak{X}(T) \supset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl ist.

Definition 4.11.18. Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Eine Teilmenge $\mathrm{R}^+ \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ nennen wir ein **System positiver Wurzeln** oder kurz ein **positives System**, wenn es ein $\psi \in \mathfrak{X}(T)^\vee_{\mathbb{Q}}$ gibt, dessen Kern das Wurzelsystem nicht trifft und für die gilt

$$\mathrm{R}^+ = \{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) \mid \langle \alpha, \psi \rangle > 0\}$$

Ergänzung 4.11.19. So ein System positiver Wurzeln ist nach [SPW] 2.2.6 dasselbe wie ein positives System für das abstrakte Wurzelsystem $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ im Sinne von [SPW] 2.2.2.

Lemma 4.11.20 (Transitivität der Weylgruppe auf positiven Systemen). *Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus $G \supset T$ operiert die Weylgruppe auf der Menge aller Systeme positiver Wurzeln in $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ frei und transitiv.*

Ergänzung 4.11.21. Das folgt auch aus der allgemeinen Theorie von Wurzelsystemen [SPW] 2.2.9.

Beweis. Genau dann trifft der Kern eines $\psi \in \mathfrak{X}^\vee_{\mathbb{Q}}$ das Wurzelsystem nicht, wenn ψ von keiner der Wurzelspiegelungen festgehalten wird. Genau dann liefern zwei Elemente von $\mathfrak{X}^\vee_{\mathbb{Q}}$ im Komplement der Vereinigung der Spiegel der Weylgruppe dasselbe System positiver Wurzeln, wenn sie zu demseben Alkoven gehören. Wir erhalten so eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{A}$ der Alkoven und der Menge aller Systeme positiver Wurzeln, die äquivariant ist unter der Weylgruppe. Nach 4.11.15 operiert also die Weylgruppe auch auf der Menge aller Systeme positiver Wurzeln sogar frei und transitiv. □

4.11.22 (**Beschreibung positiver Systeme durch ihre Kowurzeln**). Seien eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus $G \supset T$ gegeben. Eine Teilmenge $\mathrm{R}^+ \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ ist genau dann ein System positiver Wurzeln, wenn es einen Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ gibt, auf dem keine Kowurzel verschwindet und so daß gilt

$$\mathrm{R}^+ = \{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0\}$$

In der Tat entsprechen sich unter der durch weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gegebenen Identifikation von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^{\vee}_{\mathbb{Q}}$ die (-1)-Eigenräume der Wurzelspiegelungen, so daß α auf ein positives Vielfaches von $\alpha^{\vee}$ abgebildet wird. Die Behauptung folgt.

Satz 4.11.23 (Positive Systeme zu Borel'schen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus bilden für jede Borel'sche $B \subset G$ über T diejenigen Wurzeln $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$, die als T-Gewichte in* $\operatorname{Lie} B/\operatorname{Lie} H(G,T)$ *vorkommen, ein System positiver Wurzeln*

$$\mathrm{R}^{+}(B,T) \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$$

4.11.24. Es ist offensichtlich, daß für zwei Borel'sche $B, B' \in \mathcal{B}^T$ aus der Gleichheit $\mathrm{R}^{+}(B,T) = \mathrm{R}^{+}(B',T)$ bereits folgt $B = B'$. Mit der Transitivität der Weylgruppe auf positiven Systemen 4.11.20 folgern wir, daß die Abbildung $B \mapsto \mathrm{R}^{+}(B,T)$ sogar eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{B}^T$ der Borel'schen über T und der Menge der positiven Systeme unseres provisorischen Wurzelsystems induziert.

Beweis. Nach 3.6.7 finden wir eine endlichdimensionale algebraische Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und darin einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V\backslash 0$ derart, daß B der Stabilisator der Gerade kv ist. Sei $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ bestimmt durch $v \in V_{\chi}$. Wir zeigen $\langle \chi, \alpha^{\vee}\rangle \neq 0$ für alle $\alpha \in R$ und $R^{+} = \{\alpha \mid \langle \chi, \alpha^{\vee}\rangle > 0\}$ und haben gewonnen nach der Beschreibung 4.11.22 positiver Systeme durch ihre Kowurzeln. Wie bereits zu Beginn des Beweises von 4.11.5 erwähnt ist $B \cap \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ für jede provisorische Wurzel α eine Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$. Sicher hält mithin $\mathrm{rad}_{\mathrm{u}} \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ unseren Vektor v fest. Der von den Bildern von v unter $\mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ erzeugte Teilraum von V ist also eine Darstellung W von

$$G_{\alpha} := \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$$

mit $W_{\chi} \neq 0$, und das Bild in G_{α} der Borel'schen $B \cap \mathrm{Z}_G(S_{\alpha})$ ist eine Borel'sche $B_{\alpha} \subset G_{\alpha}$, die W_{χ} stabilisiert. Bezeichnet $\bar{S}_{\alpha} \subset \bar{T} \subset G_{\alpha}$ die Bilder von $S_{\alpha} \subset T$, so ist das Bild $B_{\alpha}/\bar{S}_{\alpha} \subset G_{\alpha}/\bar{S}_{\alpha}$ nach 4.6.5 immer noch eine Borel'sche, und dasselbe gilt für das Urbild dieses Bildes $B_{\alpha} \cap (G_{\alpha}, G_{\alpha})$ unter der Projektion mit endlichem in $\bar{T}$ enthaltenem Kern $(G_{\alpha}, G_{\alpha}) \twoheadrightarrow G_{\alpha}/\bar{S}_{\alpha}$. Da nun χ das Gewicht einer Geraden mit Stabilisator $B_{\alpha} \cap (G_{\alpha}, G_{\alpha})$ in einer Darstellung von (G_{α}, G_{α}) ist, folgt $\langle \chi, \alpha^{\vee}\rangle > 0$ aus der Darstellungstheorie 1.8.5.5 der Gruppe $\mathrm{SL}(2;k)$. □

Lemma 4.11.25. *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ eine Wurzel ist stets $H(G,T)_{\mathrm{u}}$ ein Normalteiler der Untergruppe*

$$K(\alpha) := \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T,\, \alpha \in \mathrm{R}(B,T)} B \right)^{\circ}$$

Beweis. Wir setzen $H := H(G,T)_{\mathrm{u}}$. Es reicht zu zeigen, daß $H_{\mathrm{u}} \subset K(\alpha)_{\mathrm{u}}$ ein Normalteiler ist, denn der maximale Torus T der zusammenhängenden auflösbaren Gruppe $K(\alpha)$ normalisiert H_{u} eh. Es reicht nach 4.1.13 dazu zu zeigen, daß $H_{\mathrm{u}} \subset K(\alpha)_{\mathrm{u}}$ eine Untergruppe der Kodimension höchstens Eins ist. Es reicht auch zu zeigen, daß $H \subset K(\alpha)$ eine Untergruppe der Kodimension Eins ist, denn beide Gruppen sind auflösbar mit demselben maximalen Torus T. Nun sind alle T-Gewichte von $\operatorname{Lie} K(\alpha)/\operatorname{Lie} H$ offensichtlich Wurzeln β mit der Eigenschaft, daß für jede Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$ gilt $\alpha \in \mathrm{R}^+(B,T) \Rightarrow \beta \in \mathrm{R}^+(B,T)$. Daraus folgt $\beta = \alpha$, denn für je zwei verschiedene Wurzeln $\beta \neq \alpha$ gilt nach 4.11.6 entweder $\beta = -\alpha$ oder $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$ und folglich gibt es für Wurzeln $\beta \neq \alpha$ stets ein System positiver Wurzeln, das α enthält aber nicht β und dann mit 4.11.24 auch eine Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$ mit $\alpha \in \mathrm{R}^+(B,T)$ aber $\beta \notin \mathrm{R}^+(B,T)$. Da wir bereits wissen, daß die fraglichen Gewichtsräume eindimensional sind, folgt die Behauptung. □

Proposition 4.11.26. *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem ausgezeichneten maximalen Torus ist $H(G,T)_{\mathrm{u}}$ das unipotente Radikal von G, in Formeln*

$$\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G = \left(\left(\bigcap\nolimits_{B \in \mathcal{B}^T} B\right)^{\circ}\right)_{\mathrm{u}}$$

Beweis. Die Inklusion $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G \subset H_{\mathrm{u}}$ ist evident, eine und damit jede Borel'sche umfaßt ja das Radikal. Die andere Inklusion $\supset$ folgt, sobald wir unser H_{u} als Normalteiler entlarven können. Nach Lemma 4.11.25 aber wird H_{u} von allen $K(\alpha)$ normalisiert. Man überlegt sich nun, daß der Gewichtsraum zur Wurzel α von $\operatorname{Lie} K(\alpha)/\operatorname{Lie} H$ nicht Null ist. In der Tat umfaßt ja $K(\alpha)$ nach unseren Erkenntnissen 4.6.21 über Borel'sche in Zentralisatoren von Tori diejenige Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ über T, bei der $-\alpha$ kein T-Gewicht der Liealgebra von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ ist, denn wieder nach 4.6.21 gilt $\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset H$. Damit erzeugen die $K(\alpha)$ bereits eine Untergruppe von G mit der vollen Liealgebra, als da heißt, ganz G. □

Satz 4.11.27 (Maximaler Torus als Schnitt von Borel'schen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus ist der maximale Torus T die Einskomponente des Schnitts aller Borel'schen über T, in Formeln*

$$T = \left(\bigcap\nolimits_{B \in \mathcal{B}^T} B\right)^{\circ}$$

Beweis. Die Inklusion $\subset$ ist evident. Der unipotente Anteil der rechten Seite ist Null nach 4.11.26, folglich geht sie für eine beliebige Borel'sche B über T injektiv nach B/B_{u}. Da aber die Komposition eine Bijektion $T \xrightarrow{\sim} B/B_{\mathrm{u}}$ ist, folgt die Behauptung. □

Satz 4.11.28 (Zentralisator eines maximalen Torus). *In einer zusammenhängenden affinen reduktiven algebraischen Gruppe G ist ist jeder maximale Torus T sein eigener Zentralisator, in Formeln*

$$T = \mathrm{Z}_G(T)$$

4.11.29. Wir können insbesondere die Weylgruppe einer zusammenhängenden affinen reduktiven algebraischen Gruppe schreiben als

$$\mathrm{W}(G,T) = \mathrm{N}_G(T)/T$$

Beweis. In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend nach 4.6.19. Ist unsere Gruppe G zusätzlich reduktiv, so liefert 4.11.27 die Gleichheit $T = H(G,T)$ in der Notation vom Beginn dieses Abschnitts. Da nun aber in $\mathrm{Lie}\, G/\mathrm{Lie}\, H(G,T)$ das T-Gewicht Null nicht vorkommt, muß $H(G,T)$ schon der Zentralisator von T gewesen sein. □

4.12 Bruhat-Zerlegung

Satz 4.12.1 (Struktur reduktiver Gruppen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus zerfällt die adjungierte Darstellung unter dem Torus als*

$$\mathrm{Lie}\, G = \mathrm{Lie}\, T \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}(G,T)} (\mathrm{Lie}\, G)_\alpha$$

und alle $(\mathrm{Lie}\, G)_\alpha$ sind eindimensional. Betrachten wir für $\alpha \in \mathrm{R}(G,T)$ den Torus $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ$, so ist $G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ reduktiv zusammenhängend mit Wurzelsystem $\mathrm{R}(G_\alpha, T) = \{\alpha, -\alpha\}$ und der offensichtliche Morphismus ist eine Surjektion mit endlichem Kern

$$(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/S_\alpha$$

halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins. Weiter ist $T \cap (G_\alpha, G_\alpha)$ ein maximaler Torus in (G_α, G_α) und das Urbild des maximalen Torus T/S_α von G_α/S_α.

Beweis. Wie beim Beweis von 4.11.26 erwähnt folgt aus unserer Beschreibung 4.6.21 von Borel'schen in Zentralisatoren von Tori bereits $\mathrm{rad}\, \mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset H$. Für G zusammenhängend und reduktiv folgt zusammen mit der Erkenntnis $H = T$ aus 4.11.27 dann $\mathrm{rad_u}\, \mathrm{Z}_G(S_\alpha) = 1$. In diesem Fall haben wir in 4.11.5 also $G_\alpha = \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ und diese Untergruppe von G hat weiter nach 4.11.5 als derivierte Gruppe (G_α, G_α) eine halbeinfache Gruppe vom Rang Eins und Aussagen aus dem Beweis von 4.11.5 spezialisieren in unserem Fall zu $\mathrm{rad}\, G_\alpha = S_\alpha$ zu den restlichen Aussagen des Satzes. □

4.12.2 (**Wurzelgruppen**). Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und $\alpha \in \mathrm{R}(G,T)$ eine Wurzel besitzt G_α genau zwei Borel'sche über T und für eine eindeutig bestimmte solche Borel $B_\alpha \subset G_\alpha$ gilt $(\mathrm{Lie}\, B_\alpha)_\alpha \neq 0$. Das unipotente Radikal dieser Borel'schen notieren wir

$$U_\alpha := (B_\alpha)_\mathrm{u}$$

und nennen es die **Wurzelgruppe zur Wurzel** α. Unsere Wurzelgruppe wird unter der Quotientenabbildung isomorph auf das unipotente Radikal der Borel'schen $B_\alpha/S_\alpha \subset G_\alpha/S_\alpha$ abgebildet, da der Kern der Projektion ein Torus ist. Nach unseren Erkenntnissen über halbeinfache Gruppen vom Rang Eins ist U_α folglich isomorph zur additiven Gruppe $(k,+)$. Weiter folgt, daß gegeben solch ein Isomorphismus $u_\alpha : k \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ stets gilt

$$tu_\alpha(x)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x) \quad \forall x \in k, t \in T$$

Proposition 4.12.3 (Vorbereitungen zur Wurzelgruppenzerlegung). *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einer Borel und einem maximalen Torus und $U := B_\mathrm{u}$ das unipotente Radikal von B und*

$$U = U_{\leq n} \supset U_{\leq n-1} \supset \ldots \supset U_{\leq 0} = 1$$

eine endliche Filtierung von U durch zusammenhängende abgeschlossene Normalteiler von B derart, daß alle Subquotienten $U_{\leq\nu}/U_{\leq\nu-1}$ kommutativ sind. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ die T-Gewichte von $\mathrm{Lie}(U_{\leq\nu}/U_{\leq\nu-1})$. So induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von algebraischen Gruppen

$$U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_s} \xrightarrow{\sim} U_{\leq\nu}/U_{\leq\nu-1}$$

und alle Wurzelgruppen zu Wurzeln aus $\mathrm{Lie}(U_{\leq\nu-1})$ liegen in $U_{\leq\nu-1}$.

4.12.4. Mögliche derartige Folgen von Untergruppen sind die absteigende Zentralreihe von U oder die Folge der höheren derivierten Gruppen $\mathcal{D}^\nu U$.

Beweis. Wir zeigen das durch vollständige Induktion über ν von oben. Die Induktionsannahme zeigt bereits, daß unsere Abbildung ein wohldefinierter Gruppenhomomorphimus ist, und aus den Voraussetzungen folgt, daß, sein Differential beim neutralen Element ein Isomorphismus ist. Sein Bild hat also Dimension s und da $U_{\leq\nu}$ zusammenhängend angenommen war, muß auch $U_{\leq\nu}/U_{\leq\nu-1}$ zusammenhängend sein und unser Homomorphismus surjektiv. Aus den Voraussetzungen folgt weiter, daß unser Homomorphismus äquivariant ist für die Operation von T durch Konjugation. Der Kern muß also eine endliche T-stabile Untergruppe sein und unsere Beschreibung der Wurzelgruppen zeigt, daß es in einem Produkt von Wurzelgruppen keine nichttriviale derartige Untergruppe gibt. Folglich ist unser Homomorphismus ein Isomorphismus. Jede Wurzelgruppe U_β zu einer Wurzel β aus $\mathrm{Lie}(U_{\leq\nu-1})$ liegt nach Induktionsannahme bereits in $U_{\leq\nu}$. Läge sie nicht in $U_{\leq\nu-1}$, so müßte sie einen nichtkonstanten T-äquivarianten Morphismus $U_\beta \to U_\alpha$ induzieren für α eines der α_σ, also $\alpha \neq \beta$. Den gibt es aber nicht und so folgt $U_\beta \subset U_{\leq\nu-1}$. □

Lemma 4.12.5 (Induzierte Zerlegung von Untergruppen). *Seien $H \subset U \supset Z$ eine Gruppe mit einer zentralen Untergruppe Z und einer weiteren Untergruppe H derart, daß die Multiplikation eine Bijektion $H \times Z \xrightarrow{\sim} U$ induziert. Sei $V \subset U$ eine Untergruppe. Haben Z und H keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten, so induziert die Multiplikation auch eine Bijektion*

$$(V \cap H) \times (V \cap Z) \xrightarrow{\sim} V$$

4.12.6. Mit einem Subquotienten einer Gruppe ist ein Quotient einer Untergruppe nach einem Normalteiler besagter Untergruppe gemeint.

Beweis. Wir setzen $V_Z := V \cap Z$ und $V_H := V \cap H$ und betrachten die Projektionen $\mathrm{pr}_Z : U \xrightarrow{\sim} Z \times H \twoheadrightarrow Z$ sowie $\mathrm{pr}_H : U \xrightarrow{\sim} Z \times H \twoheadrightarrow H$. Da Z zentral ist, sind sie Gruppenhomomorphismen. Dann betrachten wir die Bijektionen

$$(\mathrm{pr}_H V)/V_H \xleftarrow{\sim} V/(V_H V_Z) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_Z V)/V_Z$$

Da Z kommutativ ist, ist V_Z ein Normalteiler in $\mathrm{pr}_Z V$ und damit $V_H V_Z$ ein Normalteiler in V und damit V_H ein Normalteiler in $\mathrm{pr}_H V$. Aus unserer Annahme folgt so $V = V_H V_Z$. □

Proposition 4.12.7 (Verfeinerte induzierte Zerlegung von Untergruppen). *Sei U eine Gruppe mit einer endlichen Filtierung*

$$U = U_{\leq r} \supset U_{\leq r-1} \supset \ldots \supset U_{\leq 0} = 1$$

durch Normalteiler von U derart, daß $U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$ jeweils im Zentrum von $U/U_{\leq i-1}$ liegt. Seien $H_i \subset U_{\leq i}$ Untergruppen mit $H_i \xrightarrow{\sim} U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$. Haben die H_i paarweise keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten, so ist für jede Untergruppe $V \subset U$ und jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ die Multiplikation eine Bijektion

$$(V \cap H_{\sigma(1)}) \times \ldots \times (V \cap H_{\sigma(r)}) \xrightarrow{\sim} V$$

Beweis. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion über die Länge r der Filtrierung, die wir uns in trivialer Weise nach unten und oben fortgesetzt denken, um Ärger mit Beschränkungen der Indizes zu vermeiden. Der Fall $r = 0$ ist eh klar. Sonst ist $U_{\leq 1}$ zentral und wir bezeichnen die Bilder aller unserer Untergruppen von U in $\bar{U} := U/U_{\leq 1}$ auch mit einem Querstrich. Unsere Induktionsannahme zeigt unmittelbar, daß für jede Permutation τ von $\{2, \ldots, r\}$ die Multiplikation eine Bijektion

$$(\bar{V} \cap \bar{H}_{\tau(2)}) \times \ldots \times (\bar{V} \cap \bar{H}_{\tau(r)}) \xrightarrow{\sim} \bar{V}$$

induziert. Nehmen wir links jeweils Urbilder in V, so sehen wir, daß das Produkt der $(V \cap H_{\tau(i)} U_{\leq 1})$ surjektiv auf $VU_{\leq 1}/U_{\leq 1}$ geht und damit induziert für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ die Multiplikation eine Surjektion

$$(V \cap H_{\sigma(1)} U_{\leq 1}) \times \ldots \times (V \cap H_{\sigma(r)} U_{\leq 1}) \twoheadrightarrow V$$

Nach Annahme haben nun $H_{\sigma(i)}$ und $U_{\leq 1}$ für $i \neq 1$ keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten und nach 4.12.5 induziert damit die Multiplikation jeweils eine Bijektion

$$(V \cap H_i) \times (V \cap U_{\leq 1}) \xrightarrow{\sim} (V \cap H_i U_{\leq 1})$$

wohingegen wir für $i = 1$ schlicht $H_1 U_{\leq 1} = H_1 = U_{\leq 1}$ haben. Da diese Untergruppe nach Annahme zentral ist, induziert die Multiplikation also auch eine Surjektion

$$(V \cap H_{\sigma(1)}) \times \ldots \times (V \cap H_{\sigma(r)}) \twoheadrightarrow V$$

Betrachten wir die Bilder in $\bar{U}$, so sehen wir, daß nach unserer Indutionsannahme alle Faktoren mit $\sigma(i) \neq 1$ durch $v \in V$ auf der rechten Seite eindeutig bestimmt sind. Dasselbe folgt dann auch für den Faktor mit $\sigma(i) = 1$. □

4.12.8 (**Verfeinerte induzierte Zerlegung von Untergruppen mit Operation**). Das vorhergehende Lemma 4.12.5 und der vorhergehende Satz 4.12.7 gelten analog mit demselben Beweis, wenn wir statt Gruppen vielmehr „Gruppen mit einer Operation einer Menge T“ oder kurz „T-Gruppen“ betrachten. Genauer meinen wir damit Paare (M, a_M) bestehend aus einer Gruppe M und einer Abbildung $a_M : T \to \operatorname{Grp}(M)$ von T in die Menge der Gruppenhomomorphismen $M \to M$. Statt Untergruppen betrachten wir dann T-stabile Untergruppen alias „T-Untergruppen“ und die wesentliche Bedingung besagt entsprechend, daß keine zwei nichttrivialen T-Subquotienten T-isomorph sein dürfen.

Satz 4.12.9 (Wurzelgruppenzerlegung). *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einer Borel und einem maximalen Torus. Seien $V \overset{\circ}{\subset} B_{\mathrm{u}}$ eine abgeschlossene von T normalisierte Untergruppe und $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ die T-Gewichte von* $\operatorname{Lie} V$ *in einer beliebigen Reihenfolge. So induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von Varietäten*

$$U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_s} \xrightarrow{\sim} V$$

Beweis. Unsere Vorbereitung zur Wurzelgruppenzerlegung 4.12.3 liefert uns durch entsprechende Verfeinerung der Zentralreihe für $U := B_{\mathrm{u}}$ eine endliche Filtierung

$$U = U_{\leq r} \supset U_{\leq r-1} \supset \ldots \supset U_{\leq 0} = 1$$

durch zusammenhängende abgeschlossene Normalteiler von B derart, daß alle Subquotienten $U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$ zentral sind in U und daß es für jedes i eine Wurzel $\alpha(i)$ gibt mit $U_{\alpha(i)} \subset U_{\leq i}$ und $U_{\alpha(i)} \tilde{\to} U_{\leq i}/U_{\leq i-1}$ unter der Projektion. Die verschiedenen Wurzelgruppen haben nun als T-Gruppen unter der Operation durch Konjugation als abstrakte Gruppen paarweise keine nichttrivialen isomorphen Subquotienten und damit folgt aus unseren Erkenntnissen 4.12.8 über die Zerlegung von Untergruppen mit Operation, daß die Multiplikation für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ eine Bijektion

$$(V \cap U_{\alpha(\sigma(1))}) \times \ldots \times (V \cap U_{\alpha(\sigma(r))}) \tilde{\to} V$$

liefert. Alle diese Schnitte sind nun aber T-stabile Untergruppen unserer Wurzelgruppen und folglich trivial oder die ganze jeweilige Wurzelgruppe. Das zeigt, daß die Abbildung in unserem Satz bijektiv ist. Als bijektiver Morphismus von glatten affinen Varietäten mit bijektivem Differential in einem Punkt ist sie dann nach unserer Variante 3.5.14 des Hauptsatzes von Zariski sogar ein Isomorphismus von Varietäten. □

Definition 4.12.10. Zwei Borel'sche einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe heißen **opponiert**, wenn ihr Schnitt ein maximaler Torus ist.

Beispiel 4.12.11. In $\mathrm{GL}(n;k)$ sind die oberen Dreiecksmatrizen und die unteren Dreiecksmatrizen opponierte Borel'sche.

4.12.12 (**Existenz und Eindeutigkeit opponierter Borel'scher**). Gegeben $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einer Borel und einem maximalen Torus gibt es genau eine zu B opponierte Borel'sche über T. In der Tat sei $R^+ := \mathrm{R}^+(B,T) \subset \mathrm{R}(G,T)$ das System positiver Wurzeln zu B. Offensichtlich gilt $-R^+ = \mathrm{R}(G,T)\backslash R^+$ und nach 4.11.18 ist das auch ein System positiver Wurzeln. Wir zeigen, daß die zugehörige Borel'sche B° opponiert ist zu B. Wäre in der Tat $B^\circ \cap B \neq T$, so wäre $B^\circ \cap B_{\mathrm{u}}$ eine nichttriviale T-stabile Untergruppe und müßte eine Wurzelgruppe enthalten, was nach Konstruktion unmöglich ist. Die anderen Borel'schen über T dahingegen teilen sich Wurzelgruppen mit B und sind folglich nicht opponiert zu B.

4.12.13 (**Dicke Zelle**). Gegeben opponierte Borel'sche B, B° einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe G induziert die Multiplikation eine offene Einbettung

$$B_{\mathrm{u}} \times B^\circ \hookrightarrow G$$

In der Tat wissen wir aus 4.12.12, daß dieser Morphismus injektiv ist, und sein Bild ist die Bahn des neutralen Elements von G unter der Operation von $B_{\mathrm{u}} \times B^\circ$ durch $(a,b)g = agb^{-1}$. Mithin ist sein Bild $B_{\mathrm{u}}B^\circ \subset G$ nach 2.3.7 offen in seinem Abschluß und folglich selbst eine Varietät mit der induzierten Struktur und ein homogener Raum. Nach [KAG] 5.9.14 kann bei einem Morphismus von irreduziblen Varietäten mit mindestens einer nichtleeren endlichen Faser die Dimension der Ausgangsvarietät nicht größer sein als die Dimension der Zielvarietät. Ein Dimensionsvergleich zeigt, daß $B_{\mathrm{u}}B^{\circ}$ dicht sein muß in G und folglich eine offene Teilmenge von G. Nach 3.5.15 induziert aufgrund der Bijektivität des Differentials in $(1,1)$ unser Morphismus dann einen Isomorphismus von Varietäten

$$B_{\mathrm{u}} \times B^{\circ} \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{u}}B^{\circ}$$

4.12.14 (**Diskussion der Terminologie**). Man folgert leicht, daß jede Borel'sche B einer zusamenhängenden reduktiven Gruppe G auf der Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{B}_G$ von G nach 4.7.3 genau eine offene Bahn hat und daß diese Bahn aus den zu B opponierten Borel'schen besteht und daß sie als B_{u}-Varietät isomorph ist zu B_{u} selber und als abstrakte Varietät isomorph zu k^r mit $r := \dim B_{\mathrm{u}}$. Im Fall $k = \mathbb{C}$ und nach Übergang zur analytischen Topologie kann man die Fahnenmannigfaltigkeit als Zellkomplex im Sinne der algebraischen Topologie realisieren so, daß dieser $\mathbb{C}^r$ das Innere der zuletzt angeklebte Zelle ist. Daher rührt die Bezeichnung der offenen Bahn einer Borel'schen auf der Fahnenmannigfaltigkeit und übertragen der Bezeichnung verwandter Objekte als „dicke Zelle".

4.12.15 (**Doppelnebenklassen einer Borel'schen als Varietäten**). Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die Operation der Weylgruppe $W := \mathrm{W}(G,T)$ auf dem maximalen Torus T induziert eine Operation von W auf der Charaktergruppe $\mathfrak{X}(T)$. Durch Strukturtransport finden wir für $\alpha \in \mathrm{R}(G,T)$ und jeden Repräsentanten $\dot{w}$ von w die Identität $\dot{w}U_\alpha\dot{w}^{-1} = U_{w\alpha}$ alias $\dot{w}U_\alpha = U_{w\alpha}\dot{w}$. Es folgt

$$B\dot{w}B = B\dot{w} \prod_{\alpha \in R^+ \backslash w^{-1}R^+} U_\alpha$$

für das in einer beliebigen Reihenfolge ausmultiplizierte Produkt ganz rechts. Genauer ist das Produkt ganz rechts wegen $R^+ \backslash w^{-1}R^+ = R^+ \cap w^{-1}R^-$ für $R^- := -R^+$ die Wurzelgruppenzerlegung von $B_{\mathrm{u}} \cap \dot{w}^{-1}B_{\mathrm{u}}^{\circ}\dot{w}$. Unser Isomorphismus der dicken Zelle aus 4.12.13 oder vielmehr seine Variante $B \times B_{\mathrm{u}}^{\circ} \xrightarrow{\sim} BB_{\mathrm{u}}^{\circ}$ muß aber für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset\!\!\!\!\circ\; B_{\mathrm{u}}^{\circ}$ und jedes $g \in G$ einen Isomorphismus $B \times Ag \xrightarrow{\sim} BAg$ induzieren. So sehen wir daß die Multiplikation einen Isomorphismus $B \times \{\dot{w}\} \times (B_{\mathrm{u}} \cap \dot{w}^{-1}B_{\mathrm{u}}^{\circ}\dot{w}) \xrightarrow{\sim} BwB$ liefern muß und das Ausmultiplizieren bei jeder beliebigen Reihenfolge der Wurzelgruppen in unserem Produkt einen Isomorphismus von Varietäten

$$B \times \{\dot{w}\} \times \prod_{\alpha \in R^+ \cap w^{-1}R^-} U_\alpha \quad \xrightarrow{\sim} \quad BwB$$

Insbesondere hat für jede Doppelnebenklasse der Gestalt BwB ihr Bild in der Fahnenmannigfaltigkeit $BwB/B \subset G/B$ nur einen Fixpunkt unter T und diese Fixpunkte sind paarweise verschieden, da die Weylgruppe nach 4.7.10 frei auf der Menge der Fixpunkten des Torus in der Fahnenmannifaltigkeit operiert. Es folgt, daß die Doppelnebenklassen BwB paarweise disjunkt sind.

Lemma 4.12.16. *Gegeben $G \supset B \supset T$ eine reduktive zusammenhängende Gruppe, eine Borel'sche und ein maximaler Torus und $\beta \in \Pi(\mathrm{R}^+(B,T))$ eine Wurzel aus der Basis zu unserem System positiver Wurzeln nach [SPW] 2.2.6 gilt für jedes Element $w \in \mathrm{W}(G,T)$ der Weylgruppe*

$$BwBs_\beta B \subset BwB \cup Bws_\beta B$$

Beweis. Wir erinnern aus der allgemeinen Theorie der Wurzelsysteme [SPW] 2.2.6, daß gegeben $R \supset R^+$ ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und eine Wurzel $\beta \in \Pi(R^+)$ der zugehörigen Basis des Wurzelsystems stets gilt $s_\beta : R^+ \backslash \beta \stackrel{\sim}{\to} R^+ \backslash \beta$. Gilt also $\beta \notin w^{-1}R^-$, so folgt

$$\begin{array}{rcl} s_\beta(R^+ \cap w^{-1}R^-) & = & s_\beta((R^+\backslash\beta) \cap w^{-1}R^-) \\ & = & (R^+\backslash\beta) \cap s_\beta w^{-1}R^- \\ & = & (R^+ \cap s_\beta w^{-1}R^-)\backslash\beta \end{array}$$

Daraus folgt immer noch für $\beta \notin w^{-1}R^-$ unmittelbar

$$BwBs_\beta B = Bw\left(\prod_{\alpha \in R^+ \cap w^{-1}R^-} U_\alpha\right)\dot{s}_\beta U_\beta = Bws_\beta B$$

Für $\beta \in w^{-1}R^-$ dahingegen gilt $\beta \notin v^{-1}R^-$ für $v := ws_\beta$ und damit kennen wir bereits die Identität $BvBs_\beta B = Bvs_\beta B$. Weiter wissen wir aus der Klassifikation halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins und sogar bereits aus 4.8.5, daß unsere halbeinfache Gruppe G_β/S_β aus 4.12.2 unter seiner Borel'schen B_β/S_β zerfällt in die zwei Doppelnebenklassen zu den beiden Elementen der Weylgruppe, und amit hben wir natürlich auch

$$G_\beta = B_\beta \sqcup B_\beta s_\beta B_\beta = U_\beta T \cup U_\beta T \dot{s}_\beta U_\beta$$

eine Untergruppe von G ist, genauer die Untergruppe G_β. Daraus hinwiederum folgt durch Betrachtung der Wurzelgruppenzerlegung leicht, daß auch $B \sqcup Bs_\beta B$ eine Untergruppe von G ist, so daß insbesondere gilt $Bs_\beta Bs_\beta B \subset B \cup Bs_\beta B$. Wenn wir unsere Identität Identität $Bvs_\beta B = BvBs_\beta B$ mit $Bs_\beta B$ multiplizieren und $w = vs_\beta$ erinnern, finden wir also auch in diesem Fall

$$BwBs_\beta B = BvBs_\beta Bs_\beta B \subset BvB \cup Bvs_\beta B = Bws_\beta B \cup BwB \qquad \square$$

Satz 4.12.17 (Bruhat-Zerlegung affiner algebraischer Gruppen). *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen und einem maximalen Torus. So ist G die disjunkte Vereinigung der Doppelnebenklassen von Repräsentanten der Weylgruppenelemente unter der Borel'schen, in Formeln*

$$G = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}(G,T)} BwB$$

Beispiel 4.12.18. Im Fall der allgemeinen linearen Gruppen kennen wir diese Zerlegung bereits aus [LA2] 5.6.1.

Beweis. Es reicht offensichtlich, das für reduktives G zu zeigen. Unsere Doppelnebenklassen sind paarweise disjunkt nach 4.12.15. Nach 4.7.15 wird unsere Gruppe erzeugt von den Borel'schen über T und nach 4.7.9 sind je zwei dieser Borel'schen konjugiert unter der Weylgruppe. Also erzeugt $\mathrm{N}_G(T)$ zusammen mit B bereits ganz G. Zusätzlich wissen wir aber nach [SPW] 2.2.12, daß die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen, also die s_β mit $\beta \in \Pi(\mathrm{R}^+(B,T))$. Also erzeugen bereits Repräsentanten $\dot{s}_\beta$ dieser einfachen Spiegelungen zusammen mit B die ganze Gruppe G. Unsere Vereinigung ist nun aber nicht leer und stabil unter der Multiplikation von rechts mit B und nach dem vorhergehenden Lemma 4.12.16 auch unter Multiplikation von rechts mit $\dot{s}_\beta$. Also ist sie ganz G. □

Korollar 4.12.19 (Bruhat-Zerlegung der Fahnenmannigfaltigkeit). $(k = \bar{k})$. *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen und einem maximalen Torus. So ist*

$$G/B = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}(G,T)} BwB/B$$

die Zerlegung der Fahnenmannigfaltigkeit in Bahnen der Borel'schen B und in jeder Bahn liegt genau ein Fixpunkt des maximalen Torus T. Weiter gibt es einen Isomorphismus von Varietäten $BwB/B \cong k^{l(w)}$ für $l(w) := |R^+ \cap wR^-|$.

Beweis. Nur die behauptete Beschreibung der B-Bahnen als Varietäten folgt nicht sofort aus der Bruhat-Zerlegung für Gruppen 4.12.17. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei G reduktiv. Nach 4.12.15 operiert die Gruppe $\prod_{\alpha \in R^+ \cap wR^-} U_\alpha$ frei und transitiv auf BwB/B. Man prüft leicht mit Hilfe des Differentials, daß diese Operation einen Isomorphismus von Varietäten liefert. Das Korollar folgt. □

5 Danksagung

Dieses Skript ist der Versuch einer weiteren Vereinfachung der wunderbaren Darstellung von Tonny Springer [Spr81]. Dort schien mir allerdings Proposition 4.2.4 problematisch, bereits im Fall der Morphismen $\mathbb{C}\backslash p \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ für $p \neq 0$. In derselben Weise schien mir Übung 4.2.6(2) dort problematisch. In der neuen Ausgabe [Spr98] wird dieser Punkt auch in anderer Weise angegangen, vergleiche Lemma 5.2.4 dort, bei dem ich jedoch den zweiten Satz des Beweises nicht vollständig durchdringen konnte. Andere wichtige Quellen waren meine Mitschrift einer Vorlesung von Jens Carsten Jantzen und die Bücher von Borel [Bor91] und Humphreys [Hum75] und Erklärungen von Friedrich Knop. Hilfreich war auch das Buch von Tauvel und Yu [TW05], in dem allerdings nur den Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null betrachtet wird. Hilfreich war weiter das Buch von Hochschild [**?**], das einen ganz eigenwilligen Zugang verfolgt. Eine gewisse Vereinfachung ist mir, so hoffe ich, insbesondere bei der Diskussion von Gruppen vom Rang Eins gelungen. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Antonio Sartori, Leonardo Patimo, ...

Literatur

[AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.

[Bor91] Armand Borel. *Linear Algebraic Groups (Second Enlarged Edition)*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1991.

[EL] Skriptum Elementargeometrie. Wolfgang Soergel.

[GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.

[HL] Skriptum halbeinfache Lie-Algebren. Wolfgang Soergel.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*, volume 21 of *GTM*. Springer, 1975.

[KAG] Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie. Wolfgang Soergel.

[LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.

[LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.

[ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.

[NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.

[Spr81] Tonny A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. Birkhäuser, 1981.

[Spr98] Tonny A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. Birkhäuser, second edition, 1998. Reprint of the second edition as Ebook.

[SPW] Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme. Wolfgang Soergel.

[TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.

[TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.

[TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.

[TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.

[TW05] Patrice Tauvel and Rupert W.T.Yu. *Lie Algebras and Algebraic Groups*. Springer, 2005.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index