

ANALYSIS 1

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	5
1.1	Vollständige Induktion und binomische Formel	5
1.2	Mengen und Teilmengen	12
1.3	Mengenoperationen	18
1.4	Abbildungen	24
1.5	Mengen mit Verknüpfung	29
1.6	Körper im Sinne der Algebra	38
2	Die reellen Zahlen	44
2.1	Rationale Wurzeln rationaler Zahlen	44
2.2	Angeordnete Körper	45
2.3	Maximum und Supremum	49
2.4	Reelle Zahlen	53
2.5	Rationale und reelle Zahlen im Vergleich	61
3	Stetigkeit und Grenzwerte	64
3.1	Anschauung für Funktionen	64
3.2	Intervalle und Stetigkeit	66
3.3	Zwischenwertsatz und Umkehrfunktionen	74
3.4	Umfang des Einheitskreises	80
3.5	Grenzwerte	83
3.6	Vollständigkeit der reellen Zahlen	95
3.7	Algorithmisches Wurzelziehen*	98
4	Exponentialfunktion	101
4.1	Konvergenz von Reihen	101
4.2	Wachstum und Zerfall	108
4.3	Logarithmus und allgemeine Potenzen	115
4.4	Komplexe Zahlen	121
4.5	Trigonometrische Funktionen	127
5	Integration und Ableitung	144
5.1	Stetige Funktionen auf Kompakta	144
5.2	Integration stetiger Funktionen	149
5.3	Ableitung an einer Stelle	157
5.4	Ableitungsregeln	160
5.5	Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung	165
5.6	Regeln von de l'Hospital	175
5.7	Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung	179

5.8	Integrationsregeln	182
5.9	Hyperbolische trigonometrische Funktionen	191
5.10	Integration rationaler Funktionen	196
6	Potenzreihen und höhere Ableitungen	202
6.1	Funktionenfolgen und Potenzreihen	202
6.2	Taylorentwicklung	211
6.3	Rechnen mit Approximationen	216
6.4	Der Abel'sche Grenzwertsatz*	220
7	Raumwertige Funktionen und Schwingungen	222
7.1	Bogenlänge und Geschwindigkeit	222
7.2	Systeme von linearen Differentialgleichungen	233
7.3	Gedämpfte Schwingungen	237
7.4	Differentialgleichungen höherer Ordnung	241
7.5	Gekoppelte Schwingungen*	243
7.6	Angeregte Schwingungen	244
8	Danksagung	247
9	Tagebuch WS 22/23	248
	Literaturverzeichnis	251
	Indexvorwort	252
	Index	253

Dies ist der erste Teil eines Skriptums zur Analysis. Ich habe mir große Mühe gegeben, an jeder Stelle nur soviel Begrifflichkeit einzuführen, wie gerade eben nötig ist, um einerseits einen glatten und transparenten Fluß der Argumentation zu ermöglichen und andererseits regelmäßig motivierende Anwendungen geben zu können. Sowohl die Anwendungen als auch der durchsichtige Aufbau der Theorie erfordern jedoch in meinen Augen eine nach Möglichkeit koordinatenfreie Darstellung und damit den Aufbau der zugehörigen Begrifflichkeit, so daß am Schluß im Vergleich zu anderen Texten doch eher mehr abstrakte Konzepte eingeführt werden. Wie Sie noch an verschiedenen Stellen merken werden, will ich Sie eben am liebsten davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist!

1 Grundlegendes

1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel

Satz 1.1.1. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beispiel 1.1.2. Im Fall $n = 5$ behauptet unser Satz $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 \times 6/2$ und in diesem Fall stimmt das schon mal: Beide Seiten sind 15. Man bemerke, daß wir beim Rechnen mit Symbolen wie etwa $n(n+1)$ die Multiplikationssymbole weggelassen haben, die nur beim Rechnen mit durch Ziffern dargestellten Zahlen wichtig sind.

Beweis. Bei diesem Beweis sollen Sie gleichzeitig das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** lernen. Wir bezeichnen mit $A(n)$ die Aussage, daß die Formel im Satz für ein gegebenes n gilt, und zeigen:

Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist richtig. In der Tat gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Aus der Aussage $A(n)$ folgt die Aussage $A(n+1)$. In der Tat, unter der Annahme, daß unsere Formel für ein gegebenes n gilt, der sogenannten **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und folgern so, daß die Formel auch für $n+1$ gilt.

Es ist damit klar, daß unsere Aussage $A(n)$ richtig ist alias daß unsere Formel gilt für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ □

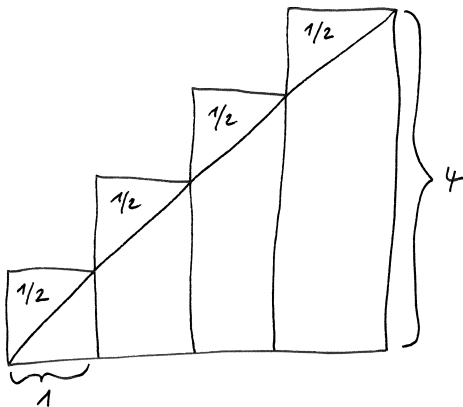
1.1.3. Das Zeichen □ deutet in diesem Text das Ende eines Beweises an und ist in der neueren Literatur weit verbreitet. Buchstaben in Formeln werden in der Mathematik üblicherweise kursiv notiert, so wie etwa das n oder auch das A im vorhergehenden Beweis. Nur Buchstaben oder Buchstabenkombinationen, die stets dasselbe bedeuten sollen, schreibt man nicht kursiv, wie etwa \sin für den Sinus oder \log für den Logarithmus.

1.1.4. Der vorhergehende Beweis stützt sich auf unser intuitives Verständnis der natürlichen Zahlen. Man kann das Konzept der natürlichen Zahlen auch formal einführen und so die natürlichen Zahlen in gewisser Weise „besser“ verstehen. Das wird in [GR] 1.6.11 und ausführlicher in [LA1] 4.1.6 diskutiert. Das Wort „Induktion“ meint eigentlich „Hervorrufen“, so wie etwa das Betrachten einer Wurst die Ausschüttung von Spucke induziert alias uns den Mund wässrig macht.

Im Zusammenhang der vollständigen Induktion ist es dahingehend zu verstehen, daß die Richtigkeit unserer Aussage $A(1)$ die Richtigkeit von $A(2)$ induziert, die Richtigkeit von $A(2)$ hinwiederum die Richtigkeit von $A(3)$, die Richtigkeit von $A(3)$ die Richtigkeit von $A(4)$, und immer so weiter.

1.1.5. Es herrscht keine Einigkeit in der Frage, ob man die Null eine natürliche Zahl nennen soll. In diesem Text ist stets die Null mit gemeint, wenn von natürlichen Zahlen die Rede ist. Wollen wir die Null dennoch ausschließen, so sprechen wir wie oben von einer „natürlichen Zahl $n \geq 1$ “.

1.1.6. Ich will kurz begründen, warum es mir natürlich scheint, auch die Null eine natürliche Zahl zu nennen: Hat bildlich gesprochen jedes Kind einer Klasse einen Korb mit Äpfeln vor sich und soll seine Äpfel zählen, so kann es ja durchaus vorkommen, daß in seinem Korb gar kein Apfel liegt, weil es zum Beispiel alle seine Äpfel bereits gegessen hat. In der Begrifflichkeit der Mengenlehre ausgedrückt, die wir in 1.2 einführen werden, muß man die leere Menge endlich nennen, wenn man erreichen will, daß jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Will man dann zusätzlich erreichen, daß die Kardinalität jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl ist, so darf man die Null nicht aus den natürlichen Zahlen herauslassen.



Die Gesamtfläche dieses Treppenquerschnitts ist offensichtlich $4^2/2 + 4/2 = 4 \cdot 5/2$

1.1.7. Man kann sich den Satz wie im Bild angedeutet anschaulich klar machen als eine Formel für die Fläche des Querschnitts durch eine Treppe der Länge n mit Stufenabstand und Stufenhöhe Eins. In der Tat bedeckt ein derartiger Querschnitt ja offensichtlich ein halbes Quadrat der Kantenlänge n nebst n halben Quadraten

der Kantenlänge Eins. Ein weiterer Beweis geht so:

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + \dots + n &= 1/2 + 2/2 + 3/2 + \dots + n/2 \\ &\quad + n/2 + (n-1)/2 + (n-2)/2 + \dots + 1/2 \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \dots + \frac{n+1}{2} \\ &= n(n+1)/2\end{aligned}$$

Ich will letzteren Beweis benutzen, um eine neue Notation einzuführen.

Definition 1.1.8. Gegeben a_1, a_2, \dots, a_n schreiben wir

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Das Symbol \sum ist ein großes griechisches S und steht für „Summe“. Das Symbol $:=$ deutet an, daß die Bedeutung der Symbole auf der doppel­punkt­behafteten Seite des Gleichheitszeichens durch den Ausdruck auf der anderen Seite unseres Gleichheitszeichens definiert ist. Im obigen und ähnlichen Zusammenhängen heißen a_1, \dots, a_n die **Summanden** und i der **Laufindex**, da er eben etwa in unserem Fall von 1 bis n läuft und anzeigt alias „indiziert“, welcher Summand gemeint ist.

1.1.9 (Zur Sprache in der Mathematik). Das Wort „Definition“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „Abgrenzung“. In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen. Sie werden merken, daß man in der Mathematik die Angewohnheit hat, in Definitionen Worte der Umgangssprache wie Menge, Gruppe, Körper, Unterkörper, Abbildung etcetera „umzuwidmen“ und ihnen ganz spezielle und meist nur noch entfernt mit der umgangssprachlichen Bedeutung verwandte neue Bedeutungen zu geben. In mathematischen Texten sind dann überwiegend diese umgewidmeten Bedeutungen gemeint. In dieser Weise baut die Mathematik also wirklich ihre eigene Sprache auf, bei der jedoch die Grammatik und auch nicht ganz wenige Wörter doch wieder von den uns geläufigen Sprachen übernommen werden. Das muß insbesondere für den Anfänger verwirrend sein, der sich auch bei ganz harmlos daher­kom­menden Wörtern stets wird fragen müssen, ob sie denn nun umgangssprachlich gemeint sind oder vielmehr bereits durch eine Definition auf eine mehr oder weniger andere und viel genauere Bedeutung festgelegt wurden. Um hier zu helfen, habe ich mir große Mühe mit dem Index gegeben, den Sie ganz am Schluß dieses Skriptums finden und in dem alle an verschiedenen Stellen eingeführten oder umgewidmeten und dort fett gedruckten Begriffe verzeichnet sein sollten. Und an dieser Stelle muß ich Sie schon bitten, das Wort „Index“ nicht als Laufindex mißzuverstehen!

Beispiel 1.1.10. In der \sum -Notation liest sich der in 1.1.7 gegebene Beweis so:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} \\ &\text{und nach Indexwechsel } i = n + 1 - k \text{ hinten} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{2} \\ &\text{dann mache } k \text{ zu } i \text{ in der zweiten Summe} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{2} \\ &\text{und nach Zusammenfassen beider Summen} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2} \\ &\text{ergibt sich offensichtlich} \\ &= n \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

Beispiel 1.1.11. Einen anderen Beweis derselben Formel liefert die Gleichungskette:

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=0}^n 2i + 1 = 2 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 = n + 1 + 2 \sum_{i=0}^n i$$

Definition 1.1.12. In einer ähnlichen Bedeutung wie das Symbol \sum verwendet man auch das Symbol \prod , ein großes griechisches P , für „Produkt“ und schreibt

$$\prod_{i=1}^n a_i := a_1 a_2 \dots a_n$$

Die a_1, \dots, a_n heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen die **Faktoren** des Produkts.

Definition 1.1.13. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ definieren wir die Zahl $n!$ (sprich: n **Fakultät**) durch die Formel

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung $0! := 1$ und haben also $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24$ und so weiter.

1.1.14 (**Allgemeinere Summen und Produkte**). Wir vereinbaren, daß Produkten, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 1 zugewiesen werden soll, also etwa $1 = \prod_{i=1}^0 i = 0!$. Ebenso vereinbaren wir auch, daß Summen, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 0 zugewiesen werden soll, so daß wir in Erweiterung unserer Formel 1.1.1 etwa schreiben könnten

$0 = \sum_{i=1}^0 i$. Der Sinn dieser Erweiterungen zeigt sich darin, daß damit Formeln wie $\sum_{i=k}^l a_i = \sum_{i=k}^m a_i + \sum_{i=m+1}^l a_i$ auch für $m = k-1$ richtig bleiben. Man mag sogar noch weiter gehen und die Definition von Summen und Produkten auf beliebige untere und obere Grenzen so erweitern, daß diese Formeln richtig bleiben, zumindest wenn alle Summanden ein Negatives beziehungsweise alle Faktoren einen Kehrwert haben. In dieser Allgemeinheit ist die fragliche Notation jedoch nur beim kontinuierlichen Analogon \int des Summenzeichens üblich, wie in 5.2.10 ausgeführt werden wird.

Satz 1.1.15 (Bedeutung der Fakultät). *Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

Beispiel 1.1.16. Es gibt genau $3! = 6$ Möglichkeiten, die drei Buchstaben a, b und c in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

In gewisser Weise stimmt unser Satz sogar für $n = 0$: In der Terminologie, die wir in 2.3 einführen, gibt es genau eine Anordnung der leeren Menge.

Beweis. Hat man n voneinander verschiedene Objekte, so hat man n Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen, dann $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Zweites auszusuchen und so weiter, bis schließlich nur noch eine Möglichkeit bleibt, ein Letztes auszusuchen. Insgesamt haben wir also wie behauptet $n!$ mögliche Reihenfolgen. \square

Definition 1.1.17. Wir definieren für beliebiges n und jede natürliche Zahl k den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (sprich: n über k) durch die Regeln

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \quad \text{für } k \geq 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{0} := 1.$$

Der Sonderfall $k = 0$ wird im Übrigen auch durch unsere allgemeine Formel gedeckt, wenn wir unsere Konvention 1.1.14 beherzigen. Im Lichte des folgenden Satzes schlage ich vor, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ statt „ n über k “ inhaltsreicher „ k aus n “ zu sprechen.

1.1.18. Die Bezeichnung als Binomialkoeffizienten leitet sich von dem Auftreten dieser Zahlen als Koeffizienten in der „binomischen Formel“ 1.1.23 ab.

Satz 1.1.19 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten). *Gegeben natürliche Zahlen n und k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n voneinander verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.*

Beispiel 1.1.20. Es gibt genau $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ Möglichkeiten, aus den vier Buchstaben a, b, c, d zwei auszuwählen, nämlich

$$\begin{array}{l} a, b \quad b, c \quad c, d \\ a, c \quad b, d \\ a, d \end{array}$$

Beweis. Wir haben n Möglichkeiten, ein erstes Objekt auszuwählen, dann $n - 1$ Möglichkeiten, ein zweites Objekt auszuwählen, und so weiter, also insgesamt $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$ Möglichkeiten, k Objekte *der Reihe nach* auszuwählen. Auf die Reihenfolge, in der wir ausgewählt haben, kommt es uns aber gar nicht an, jeweils genau $k!$ von unseren $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$ Möglichkeiten führen nach 1.1.15 also zur Auswahl derselben k Objekte. Man bemerke, daß unser Satz auch im Extremfall $k = 0$ noch stimmt, wenn wir ihn geeignet interpretieren: In der Terminologie, die wir gleich einführen werden, besitzt in der Tat jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge. \square

1.1.21. Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq k$ die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{n - k}$$

Das folgt einerseits sofort aus der formalen Definition und ist andererseits auch klar nach der oben erklärten Bedeutung der Binomialkoeffizienten: Wenn wir aus n Objekten k Objekte auswählen, so bleiben $n - k$ Objekte übrig. Es gibt demnach gleichviele Möglichkeiten, k Objekte auszuwählen, wie es Möglichkeiten gibt, $n - k$ Objekte auszuwählen. Wir haben weiter $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ sowie $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Definition 1.1.22. Wie in der Schule setzen wir $a^k := \prod_{i=1}^k a$ und sprechen diesen Ausdruck „ a hoch k “. In Worten ist also gemeint „das Produkt von k -mal dem Faktor a “. Im Lichte von 1.1.14 verstehen wir insbesondere $a^0 := 1$.

Satz 1.1.23. Für jede natürliche Zahl n gilt die **binomische Formel**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.1.24. Man beachte, wie wichtig unsere Konvention $a^0 = 1$ und insbesondere auch ihr Spezialfall $0^0 = 1$ für die Gültigkeit dieser Formel ist.

1.1.25. Die Bezeichnung „binomische Formel“ leitet sich ab von der Vorsilbe „bi“ für Zwei, wie etwa in englisch „bicycle“ für „Zweirad“ alias „Fahrrad“, und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Mit den beiden „Namen“ sind hier a und b gemeint. Mehr dazu wird in 3.2.37 erklärt.

Erster Beweis. Beim Ausmultiplizieren erhalten wir das Monom $a^k b^{n-k}$ so oft, wie es Möglichkeiten gibt, aus unseren n Faktoren $(a + b)$ die k Faktoren auszuwählen, „in denen wir beim Ausmultiplizieren das a nehmen“. Dieses Argument werden wir in 1.2.19 noch besser formulieren. \square

Zweiter Beweis. Dieser Beweis ist eine ausgezeichnete Übung im Umgang mit unseren Symbolen und mit der vollständigen Induktion. Er scheint mir jedoch auch in einer für Beweise durch vollständige Induktion typischen Weise wenig durchsichtig. Zunächst prüfen wir für beliebiges n und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

durch explizites Nachrechnen. Dann geben wir unserer Formel im Satz den Namen $A(n)$ und prüfen die Formel $A(0)$ und zur Sicherheit auch noch $A(1)$ durch Hinsehen. Schließlich gilt es, den Induktionsschritt durchzuführen, als da heißt, $A(n+1)$ aus $A(n)$ zu folgern. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &\text{und mit der Induktionsvoraussetzung} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &\text{und durch Ausmultiplizieren} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &\text{und Indexwechsel } k = i - 1 \text{ in der ersten Summe} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &\text{dann mit } k \text{ statt } i \text{ und Absondern von Summanden} \\ &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\ &\text{und nach Zusammenfassen der mittleren Summen} \\ &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\ &\text{und Einbeziehen der abgesonderten Summanden} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

und folgern so tatsächlich $A(n+1)$ aus $A(n)$. \square

1.1.26. Die Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $k \geq 1$ kann man zur effektiven Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascal'schen Dreieck**

benutzen: Im Schema

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl in der Mitte berechne sich als die Summe ihrer beiden oberen „Nachbarn“. Dann stehen in der $(n + 1)$ -ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \dots$, bis $\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$. Wir haben also zum Beispiel nach der untersten Zeile in obigem Ausschnitt des Pascal'schen Dreiecks

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Übungen

Übung 1.1.27. Man finde und beweise eine Formel für $\sum_{i=1}^n i^2$. Hinweis: Man suche zunächst eine Formel für $\sum_{i=1}^n i^3 - (i - 1)^3$ und beachte $i^3 - (i - 1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$.

Ergänzende Übung 1.1.28. Man zeige, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Formel der Gestalt $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$ gilt mit $a_k \in \mathbb{Q}$.

1.2 Mengen und Teilmengen

1.2.1. Beim Arbeiten mit reellen Zahlen oder räumlichen Gebilden reicht auf der Schule ein intuitives Verständnis meist aus, und wenn die Intuition in die Irre führt, ist ein Lehrer zur Stelle. Wenn Sie jedoch selbst unterrichten oder etwas beweisen wollen, reicht dieses intuitive Verständnis nicht mehr aus. Im folgenden werden deshalb zunächst der Begriff der reellen Zahlen und der Begriff des Raums zurückgeführt auf Grundbegriffe der Mengenlehre, den Begriff der rationalen Zahlen und elementare Logik. Bei der Arbeit mit diesen Begriffen führt uns die Intuition nicht so leicht in die Irre, wir geben uns deshalb mit einem intuitiven Verständnis zufrieden und verweisen jeden, der es noch genauer wissen will, auf eine Vorlesung über Logik. Wir beginnen mit etwas naiver Mengenlehre, wie sie von Georg Cantor in den Jahren 1874 bis 1897 begründet wurde und von der der berühmte Mathematiker David Hilbert einmal sagte: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können“. Natürlich gab es auch vor der Mengenlehre schon hoch entwickelte Mathematik: Beim Tod von Carl Friedrich Gauß im Jahre 1855 gab es diese Theorie noch gar nicht und Fourier fand seine

„Fourierentwicklung“ sogar bereits zu Beginn des 19.-ten Jahrhunderts. Er behauptete auch gleich in seiner „Théorie analytique de la chaleur“, daß sich jede beliebige periodische Funktion durch eine Fourierreihe darstellen lasse, aber diese Behauptung stieß bei anderen berühmten Mathematikern seiner Zeit auf Ablehnung und es entstand darüber ein heftiger Disput. Erst in besagtem „Paradies der Mengenlehre“ konnten die Fourier's Behauptung zugrundeliegenden Begriffe soweit geklärt werden, daß dieser Disput nun endgültig beigelegt ist. Ähnlich verhält es sich auch mit vielen anderen Fragestellungen. Da die Mengenlehre darüber hinaus auch vom didaktischen Standpunkt aus eine äußerst klare und durchsichtige Darstellung mathematischer Sachverhalte ermöglicht, hat sie sich als Grundlage der höheren Mathematik und der Ausbildung von Mathematikern an Universitäten schnell durchgesetzt und ist nun weltweit das „Alphabet der Sprache der Mathematik“. Man wird an Universitäten sogar geradezu dazu erzogen, alle Mathematik in der Sprache der Mengenlehre zu fassen und geometrischen Argumenten keine Beweiskraft zuzugestehen. Ich halte das bei der Ausbildung von Mathematikern auch für angemessen. Bei der Mathematik-Ausbildung im allgemeinen scheint mir dieses Vorgehen dahingegen nicht zielführend: In diesem Kontext sollte man meines Erachtens nicht mit demselben Maß messen, auch ohne alle Mengenlehre geometrisch erklärte Begriffe wie Gerade und Kreis, Ebene und Raum, als wohldefinierte Objekte der Mathematik zulassen und geometrischen Argumenten Beweiskraft zugestehen.

1.2.2. Im Wortlaut der ersten Zeilen des Artikels „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Aufsatz)“ von Georg Cantor, erschienen im Jahre 1895, hört sich die Definition einer Menge so an:

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Verbinden wir mit einer Menge eine geometrische Vorstellung, so nennen wir ihre Elemente auch **Punkte** und die Menge selbst einen **Raum**. Ein derartiges Herumgerede ist natürlich keine formale Definition und birgt durchaus verschiedene Fallstricke, vergleiche 1.3.9. Das Ziel dieser Vorlesung ist aber auch nicht eine formale Begründung der Mengenlehre, wie Sie sie in der Logik kennenlernen können. Sie sollen vielmehr die Bedeutung dieser Worte intuitiv erfassen wie ein Kleinkind, das Sprechen lernt: Indem sie mir und anderen Mathematikern zuhören, wie wir mit diesen Worten sinnvolle Sätze bilden, uns nachahmen, und beobachten, welchen Effekt Sie damit hervorrufen. Unter anderem dazu sind die Übungsgruppen da.

Ergänzung 1.2.3. Bei der Entwicklung der Mathematik aus der Umgangssprache durch fortgesetztes Zuspitzen und Umwidmen des Wortschatzes muß ich an den

Baron von Münchhausen denken, wie er sich an seinen eigenen Haaren aus dem Sumpf zieht. Schon verblüffend, daß es klappt. Aber bei Kleinkindern, die Sprechen lernen, ist es ja noch viel verblüffender, wie sie die Bedeutung von Worten erfassen, ohne daß man sie ihnen in Worten erklären kann.

Beispiele 1.2.4. Endliche Mengen kann man durch eine vollständige Liste ihrer Elemente in geschweiften Klammern angeben, zum Beispiel in der Form

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Diese geschweiften Klammern heißen auch **Mengenklammern**. Die Elemente dürfen mehrfach genannt werden und es kommt nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden. Wir haben also $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$. Die Aussage „ x ist Element von X “ wird mit $x \in X$ abgekürzt, ihre Verneinung „ x ist nicht Element von X “ mit $x \notin X$. Zum Beispiel gilt $1 \in \{2, 1\}$ und $3 \notin \{2, 1\}$. Es gibt auch die sogenannte **leere Menge** $\emptyset = \{ \}$, die gar kein Element enthält. Andere Beispiele sind die Mengen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ der **natürlichen Zahlen**,

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ der **ganzen Zahlen** und

$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ der **rationalen Zahlen**.

Der Name letzterer Menge kommt von lateinisch „ratio“ für „Verhältnis“, der Buchstabe \mathbb{Q} steht für „Quotient“. Man beachte, daß wir auch hier Elemente mehrfach genannt haben, es gilt ja $p/q = p'/q'$ genau dann, wenn $pq' = p'q$. Auf Deutsch bezeichnet man die rationalen Zahlen auch als **Bruchzahlen**, da man sich etwa ein Viertel eines Kekses als den Anteil denken kann, der entsteht, wenn man besagten Keks in vier gleiche Teile zerbricht. Einen Leitfaden zu einem formaleren Aufbau des Zahlensystems können Sie in [GR] 2.5.1 finden.

Ergänzung 1.2.5 (**Herkunft des Gleichheitszeichens**). Das Gleichheitszeichen $=$ scheint auf ein 1557 von Robert Recorde publiziertes Buch zurückzugehen und soll andeuten, daß das, was auf der linken und rechten Seite dieses Zeichens steht, so gleich ist wie die beiden Strichlein, die das uns heute so selbstverständliche Gleichheitszeichen bilden. Davor schrieb man statt einem Gleichheitszeichen meist *ae* für „äquivalent“.

Ergänzung 1.2.6 (**Diskussion der Notation**). In Texten, in deren Konventionen die Null keine natürliche Zahl ist, verwendet man meist die abweichenden Notationen \mathbb{N} für die Menge $\{1, 2, \dots\}$ und \mathbb{N}_0 für die Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$. Die in diesem Text verwendete Notation $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ stimmt mit der internationalen Norm ISO 31-11 überein.

1.2.7. Die Bedeutung der Symbole \mathbb{Z} und \mathbb{Q} ist in der Mathematik weitgehend einheitlich. Man verwendet diesen Schrifttypus auch sonst gerne für Symbole, die in ihrer Bedeutung über große Teile der Mathematik hinweg einheitlich verwendet werden. Bei der Bedeutung von \mathbb{N} ist man allerdings nie ganz sicher, ob die Null mitgemeint ist. In den Konventionen dieses Textes gilt $0 \in \mathbb{N}$.

1.2.8. Eine Menge, die nur endlich viele Elemente hat, nennen wir eine **endliche Menge**. Eine präzisere Definition dieses Konzepts wird in [LA1] 4.1.2 gegeben. Wir vereinbaren bereits hier, daß wir auch die leere Menge endlich nennen. Die Zahl der Elemente einer endlichen Menge X nennen wir ihre **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** und notieren sie

$$|X|$$

oder $\text{card}(X)$. In der Literatur findet man auch die Notation $\#X$. Für endliche Mengen X ist demnach ihre Kardinalität stets eine natürliche Zahl $|X| \in \mathbb{N}$ und $|X| = 0$ ist gleichbedeutend zu $X = \emptyset$. Ist X unendlich, so schreiben wir bis auf weiteres kurzerhand $|X| = \infty$ und ignorieren in unserer Notation, daß auch unendliche Mengen „verschieden groß“ sein können. Für ein Beispiel für „verschieden große unendliche Mengen“ siehe 2.5.2 und für eine genauere Diskussion des Begriffs der Kardinalität vergleiche [AL] 5.3.1.

Definition 1.2.9. Eine Menge Y heißt **Teilmenge** einer Menge X , wenn jedes Element von Y auch ein Element von X ist. Man schreibt dafür $Y \subset X$ oder $X \supset Y$.

Beispiel 1.2.10. Die leere Menge Teilmenge jeder Menge, in Formeln $\emptyset \subset X$. $\{x\} \subset X$ ist gleichbedeutend zu $x \in X$. Es gilt $\emptyset \subset \{2, 1\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

1.2.11 (**Elemente und Teilmengen**). Es ist im Kontext der Mengenlehre wichtig, bei einer Menge X sorgfältig zu unterscheiden zwischen ihren Elementen und ihren Teilmengen. Gegeben ein Element $x \in X$ ist für uns das Element $x \in X$ etwas anderes als die Teilmenge $\{x\} \subset X$, die nur aus dem einzigen Element x besteht. Gegeben eine Menge X mit einer Teilmenge $Y \subset X$ sage ich auch, X **umfaßt** Y . Gegeben ein Element $x \in X$ sage ich, x **gehört zu** X . Andere Sprechweisen möchte ich ungern auf eine so präzise Bedeutung festlegen. Gegeben eine Teilmenge $Y \subset X$ kann man sagen, „ Y sei enthalten in X “ oder „ Y liege in X “, und gegeben ein Element $x \in X$ kann man auch sagen, „ x sei enthalten in X “ oder „ x liege in X “. Was genau gemeint ist, gilt es dann aus dem Kontext zu erschließen.

1.2.12 (**Diskussion der Notation**). Gegeben eine Menge X verwenden wir die Schreibweise $Y \subsetneq X$ als Abkürzung für $(Y \subset X \text{ und } Y \neq X)$. Eine von der ganzen Menge verschiedene Teilmenge Y einer Menge X nennen wir auch eine **echte Teilmenge von** X . Bei diesen Notationen folgen wir Cantor und Bourbaki, die sehr viel später festgelegte internationalen Norm ISO 31-11 weicht jedoch

davon ab. In der folgenden Tabelle stellen wir diese beiden Konventionen einander gegenüber.

Cantor und Bourbaki	Norm ISO 31-11	Bedeutung
\subset	\subseteq	ist Teilmenge von
\subsetneq	\subset	ist echte Teilmenge von

Ich ziehe die Konvention von Cantor und Bourbaki vor, weil ich sie gewohnt bin und weil man sehr oft Teilmengen zu betrachten hat und nur vergleichsweise selten echte Teilmengen. Ich muß jedoch zugeben, daß die in diesem Text gewählte Notation \subset, \subsetneq mit den üblichen Notationen $\leq, <$ für Ungleichungen weniger gut zusammenpaßt als die Konvention nach ISO 31-11.

1.2.13. Oft bildet man neue Mengen als Teilmengen bestehender Mengen. Gebräuchlich ist dazu eine Notation, bei der man zwischen den Mengenklammern hinter einem senkrechten Strich dazuschreibt, welche zusätzliche Eigenschaft die Elemente einer Teilmenge haben sollte, so daß man Teilmengen Y einer Menge X angeben kann in der Form

$$Y = \{x \in X \mid x \text{ hat eine zusätzlich noch gewisse Eigenschaft}\}$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$, lies „die Menge der natürlichen Zahlen ist die Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen bestehend aus allen ganzen Zahlen, die ≥ 0 sind“, und $\{0, 1\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 = a\}$.

Definition 1.2.14. Es ist auch erlaubt, die „Menge aller Teilmengen“ einer gegebenen Menge X zu bilden. Sie heißt die **Potenzmenge von X** und wird $\mathcal{P}(X)$ oder $\text{Pot}(X)$ notiert.

Beispiel 1.2.15. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ kann man als die Menge aller möglichen Ausgänge einer Versuchsanordnung interpretieren, bei der man dreimal eine Münze wirft. Dazu mag man etwa jedem Ausgang die Menge der Wurfnummern zuordnet, bei denen Wappen herauskam. So würde etwa dem Ausgang WZW die Teilmenge $\{1, 3\}$ zugeordnet.

1.2.16 (**Kardinalität der Potenzmenge**). Ist X eine endliche Menge, so ist auch ihre Potenzmenge endlich und es gilt die Formel $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Für die dreielementige Menge $X = \{1, 2, 3\}$ besteht ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ zum Beispiel aus $8 = 2^3$ Elementen und wir haben genauer

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Die Teilmenge $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, die nur aus dem Element 1 besteht, ist also ein Element der Potenzmenge $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Das Element 1 ist dahingegen kein Element der Potenzmenge, sondern ein Element der ursprünglichen Menge $1 \in \{1, 2, 3\}$.

Satz 1.2.17 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten). Gegeben natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ gibt der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ die Zahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge an. In Formeln ausgedrückt haben wir unter der Annahme $|X| = n$ also

$$|\{Y \subset X \mid |Y| = k\}| = \binom{n}{k}$$

Beweis. Vollständige Induktion über n . Für $n = 0$ gilt die Aussage, denn eine nullelementige Menge hat genau eine k -elementige Teilmenge falls $k = 0$ und keine k -elementige Teilmenge falls $k \geq 1$. Nehmen wir nun an, die Aussage sei für ein n schon bewiesen. Eine $(n + 1)$ -elementige Menge X schreiben wir als $X = M \cup \{x\}$ mit dem gleich in 1.3.1 formal eingeführten Vereinigungszeichen \cup , wo M eine n -elementige Menge ist und $x \notin M$. Ist $k = 0$, so gibt es genau eine k -elementige Teilmenge von $M \cup \{x\}$, nämlich die leere Menge. Ist $k \geq 1$, so gibt es in $M \cup \{x\}$ nach Induktionsannahme genau $\binom{n}{k}$ k -elementige Teilmengen, die x nicht enthalten. Die k -elementigen Teilmengen dahingegen, die x enthalten, ergeben sich durch Hinzunehmen von x aus den $(k - 1)$ -elementigen Teilmengen von M , von denen es gerade $\binom{n}{k-1}$ gibt. Insgesamt hat $M \cup \{x\}$ damit also genau $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ Teilmengen mit genau k Elementen. \square

1.2.18. Wieder scheint mir dieser Beweis in der für vollständige Induktion typischen Weise undurchsichtig. Ich ziehe deshalb den in 1.1.19 gegebenen weniger formellen Beweis vor. Man kann auch diesen Beweis formalisieren und verstehen als Spezialfall der sogenannten „Bahnformel“, vergleiche [LA2] 5.2.3.

1.2.19 (**Variante zum Beweis der binomischen Formel**). Wir geben nun die versprochene präzise Formulierung unseres ersten Beweises der binomischen Formel 1.1.23. Wir rechnen dazu

$$(a + b)^n = \sum_{Y \subset \{1, 2, \dots, n\}} a^{|Y|} b^{n-|Y|}$$

Die rechte Seite soll hier in Verallgemeinerung der in 1.1.8 eingeführten Notation bedeuten, daß wir für jede Teilmenge Y von $\{1, 2, \dots, n\}$ den angegebenen Ausdruck $a^{|Y|} b^{n-|Y|}$ nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren. Dann fassen wir gleiche Summanden zusammen und erhalten mit 1.2.17 die binomische Formel.

Übungen

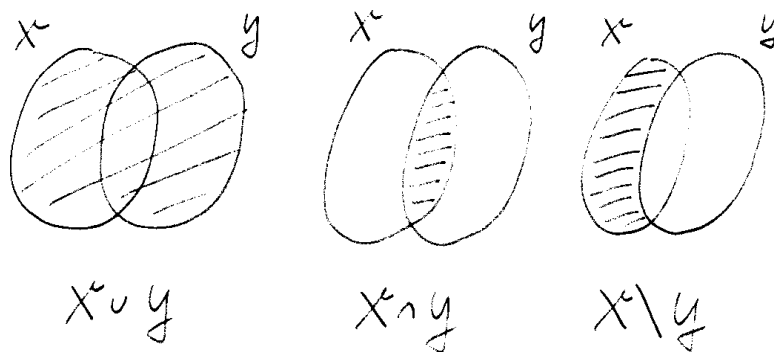
Übung 1.2.20. Es gilt $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$.

Übung 1.2.21. Man zeige $(a + b + c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$.

1.3 Mengenoperationen

Definition 1.3.1. Wir erinnern, daß wir $:=$ als Abkürzung für „ist definiert als“ verwenden und daß „oder“ in der Mathematik stets das „nichtausschließende oder“ meint. Gegeben zwei Mengen X, Y können wir unter anderem auf folgende Weisen neue Mengen bilden:

1. Die **Vereinigung** $X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$;
2. Den **Schnitt** oder auch **Durchschnitt** $X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$;
3. Die **Differenz** $X \setminus Y := \{z \in X \mid z \notin Y\}$, zum Beispiel haben wir $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$. Man schreibt statt $X \setminus Y$ auch $X - Y$. Ist Y eine Teilmenge von X , so heißt $X \setminus Y$ das **Komplement** von Y in X oder ausführlicher die **Komplementmenge**;

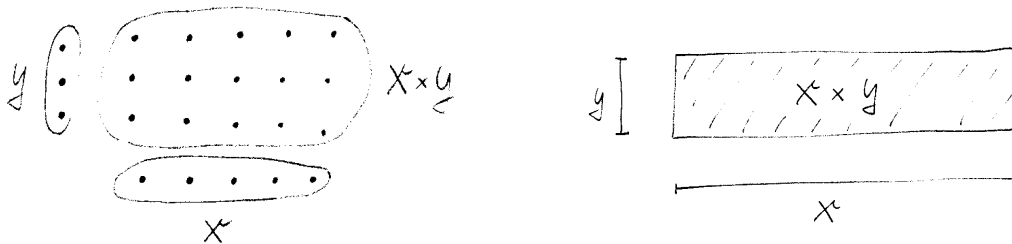


Van-de-Ven-Diagramme für Vereinigung, Schnitt und Differenz

4. Das **Produkt** $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ oder ausführlicher **kartesische Produkt**. Es gilt also $(x, y) = (x', y')$ genau dann, wenn gilt $x = x'$ und $y = y'$. Zum Beispiel haben wir

$$\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Oft benutzt man für das Produkt $X \times X$ einer Menge X mit sich selbst die Abkürzung $X^2 := X \times X$ und nennt das die Menge aller **angeordneten Paare** von Elementen von X .



Zwei anschauliche Darstellungen des Produkts von zwei Mengen. Links das Produkt einer Menge mit fünf und einer Menge mit drei Elementen. Rechts das Produkt zweier Geradensegmente, aufgefaßt als unendliche Mengen. In beiden Fällen wird ein Paar $(x, y) \in X \times Y$ dargestellt durch einen Punkt, der über x und neben y liegt.

1.3.2. Eine gute Anschauung für die ersten drei Operationen liefern die sogenannten **van-de-Ven-Diagramme**, wie sie die Bilder zeigen. Sie sind allerdings nicht zu genau zu hinterfragen, denn ob die Punkte auf einem Blatt Papier im Sinne von Cantor „bestimmte wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung“ sind, scheint mir nicht ohne weiteres so klar. Wenn man jedoch jedes der schraffierten Gebiete im Bild als die Menge aller darin liegenden Kreuzungspunkte auf einem dazugedachten Millimeterpapier auffaßt und keine dieser Kreuzungspunkte auf den Begrenzungslinien liegen, so können sie wohl schon als eine Menge im Cantor’schen Sinne angesehen werden.

1.3.3. Zwei Teilmengen einer gegebenen Menge, die kein gemeinsames Element haben, heißen **disjunkt**. Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß ihr Schnitt die leere Menge ist.

1.3.4 (**Mehrdeutigkeiten mit dem Komma als Trenner**). Die Verwendung des Kommas als Trenner ist hier problematisch, da $(1, 2)$ nun zweierlei bedeuten kann: Zum einen ein Element des kartesischen Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, zum anderen aber auch den eingeklammerten Dezimalbruch $1,2$. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. In diesem Text werden Dezimalbrüche nur selten vorkommen. In deutschen Schulbüchern verwendet man für angeordnete Paare meist die abweichende Notation $(x|y)$, um auch Paare von Dezimalbrüchen unmißverständlich notieren zu können.

1.3.5 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung als „Schnitt“ kommt wohl her von der Vorstellung des Schnitts zweier Geraden, wenn man sie als Teilmengen der Ebene denkt und diese hinwiederum als ein Blatt Papier, das man längs der einen Gerade entzweischneiden kann. Der Punkt, an dem die andere Gerade entzweigeschnitten wird, ist dann der Schnittpunkt und der Schnitt unserer beiden Geraden besteht genau aus diesem einen Punkt.

1.3.6 (**Mengenlehre und das Bilden von Begriffen**). Wir werden in unserer naiven Mengenlehre die ersten drei Operationen „Vereinigung“, „Schnitt“ und „Differenz“ aus 1.3.1 nur auf Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge anwenden, die uns in der einen oder anderen Weise bereits zur Verfügung steht. Die Potenzmenge und das kartesische Produkt dahingegen benutzen wir, um darüber hinaus neue Mengen zu erschaffen. Diese Konstruktionen erlauben es, im Rahmen der Mengenlehre so etwas wie Abstraktionen zu bilden: Wenn wir uns etwa die Menge T aller an mindestens einem Tag der Weltgeschichte lebenden oder gelebt habenden Tiere als eine Menge im Cantor'schen Sinne denken, so würden wir Konzepte wie „männlich“ oder „Hund“ oder „Fleischfresser“ formal als Teilmengen dieser Menge alias als Elemente von $\mathcal{P}(T)$ formalisieren. Das Konzept „ist Kind von“ würde dahingegen formalisiert als eine Teilmenge $K \subset T \times T$ des kartesischen Produkts unserer Menge T mit sich selbst alias als ein Element $K \in \mathcal{P}(T \times T)$, nämlich als die Teilmenge $K := \{(x, y) \in T \times T \mid x \text{ ist Kind von } y\}$.

1.3.7. Für das Rechnen mit Mengen überlegt man sich die folgenden Regeln, die ich gleich mit ihren üblichen Bezeichnungen angebe:

$$\begin{array}{ll} \text{Assoziativgesetze:} & X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z \\ & X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Distributivgesetze:} & X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \\ & X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{de Morgan'sche Regeln:} & X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \\ & X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) \end{array}$$

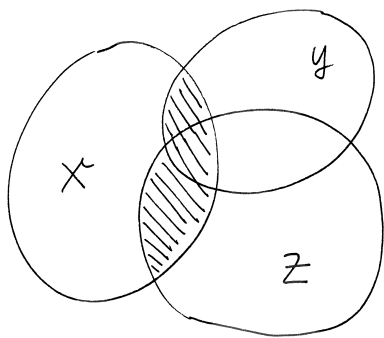
$$\text{Komplement der Differenzmenge:} \quad X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$$

Eine gute Anschauung für diese Regeln liefern die van-de-Ven-Diagramme, wie die Bilder zeigen. Das liegt daran, daß alle acht möglichen Lagen in Bezug auf unsere drei Mengen in diesen Diagrammen als Flächen zu sehen sind.

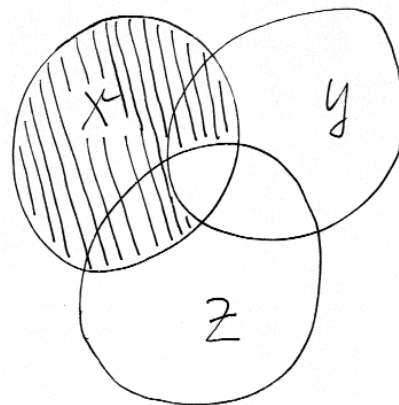
1.3.8. Ich zeige beispielhaft die Regel $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Es reicht, statt der Gleichheit die beiden Inklusionen \subset und \supset zu zeigen.

Ich beginne mit \subset . Sicher gilt $(Y \cap Z) \subset Y$, also auch $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Y$. Ebenso zeigt man $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Z$ und damit folgt schon mal \subset .

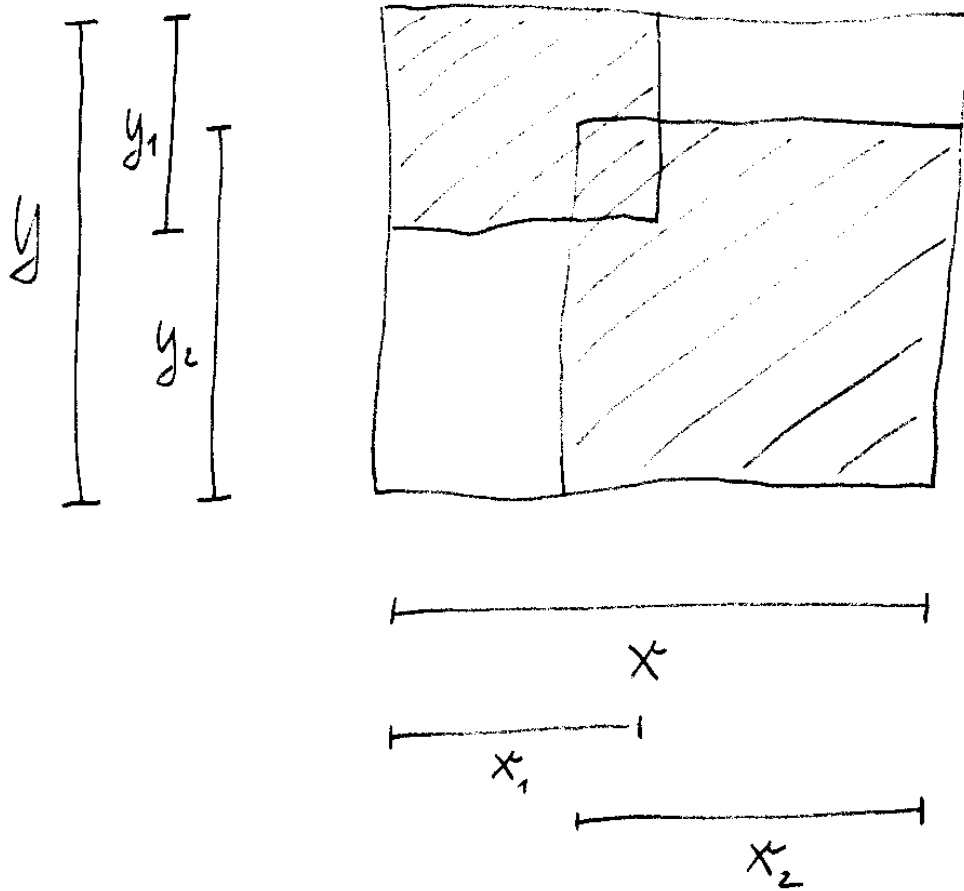
Bleibt noch \supset zu zeigen. Das will mir nur durch Betrachtung von Elementen gelingen. Gegeben $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ gilt entweder $a \in X$ oder $a \notin X$. Falls $a \in X$ haben wir eh $a \in X \cup (Y \cap Z)$. Falls $a \notin X$ folgt aus $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ erst $a \in (X \cup Y)$ und dann $a \in Y$ und weiter erst $a \in (X \cup Z)$ und dann $a \in Z$, also $a \in Y \cap Z \subset X \cup (Y \cap Z)$. Wir haben somit gezeigt, daß jedes Element a von $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ auch zu $X \cup (Y \cap Z)$ gehört. Damit folgt die behauptete Inklusion \supset .



$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$



$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$



Aus $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ folgt noch lange nicht
 $X \times Y = (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$

Ergänzung 1.3.9 (**Das Russell'sche Paradoxon**). Ich will nicht verschweigen, daß der in diesem Abschnitt dargestellte naive Zugang zur Mengenlehre durchaus begriffliche Schwierigkeiten mit sich bringt: Zum Beispiel darf die Gesamtheit \mathcal{M} aller Mengen nicht als Menge angesehen werden, da wir sonst die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“, gegeben durch die formelhafte Beschreibung $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\}$, bilden könnten. Für diese Menge kann aber weder $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ noch $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ gelten. Diese Art von Schwierigkeiten kann erst ein formalerer Zugang klären und auflösen, bei dem man unsere naiven Vorstellungen durch Ketten von Zeichen aus einem wohlbestimmten endlichen Alphabet ersetzt und unsere Vorstellung von Wahrheit durch die Verifizierbarkeit mittels rein algebraischer „erlaubter Manipulationen“ solcher Zeichenketten, die in „Axiomen“ festgelegt werden. Diese Verifikationen kann man dann durchaus auch einer Rechenmaschine überlassen, so daß wirklich auf „objektivem“ Wege entschieden werden kann, ob ein „Beweis“ für die „Richtigkeit“ einer unserer Zeichenketten in einem vorgegebenen axiomatischen Rahmen stichhaltig ist. Allerdings kann in derartigen Systemen von einer Zeichenkette algorithmisch nur entschieden werden, ob sie eine „sinnvolle Aussage“ ist, nicht aber, ob sie „bewiesen“ werden kann. Noch viel stärker zeigt der Unvollständigkeitssatz von Gödel, daß es in einem derartigen axiomatischen Rahmen, sobald er reichhaltig genug ist für eine Beschreibung des Rechnens mit natürlichen Zahlen, stets sinnvolle Aussagen gibt derart, daß entweder sowohl die Aussage als auch ihre Verneinung oder aber weder die Aussage noch ihre Verneinung bewiesen werden können. Mit diesen und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die Logik.

Vorschau 1.3.10 (**Weitere Konstruktionen der Mengenlehre**). Um mich nicht dem Vorwurf auszusetzen, während des Spiels die Spielregeln ändern zu wollen, sei bereits hier erwähnt, was noch hinzukommen soll. Die einzigen grundlegenden Konstruktionen, die noch fehlen, sind das Bilden der „disjunkten Vereinigung“ und des „kartesischen Produkts“ zu einer „beliebigen Mengenfamilie“ in [LA2] 7.7.17 und [LA2] 7.7.7. In [AN2] 1.3.3 besprechen wir weiter Schnitt und Vereinigung einer „beliebigen Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge“. In [LA1] 1.9 werden einige weniger offensichtliche Argumentationen im Zusammenhang mit dem sogenannten „Zorn'schen Lemma“ erläutert, die meines Erachtens bereits an den Rand dessen gehen, was man in unserem informellen Rahmen der naiven Mengenlehre als Argumentation noch vertreten kann. In [LA1] 4.1 wird die Konstruktion der natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre diskutiert, insbesondere geben wir erst dort eine formale Definition des Begriffs einer endlichen Menge. Sicher ist es in gewisser Weise unbefriedigend, das Fundament des Hauses der Mathematik erst fertigzustellen, wenn bereits erste Stockwerke stehen und bewohnt sind. Andererseits will ich aber auch vermeiden, daß Sie mir auf einem gewaltigen Fundament, das die ganze Mathematik tragen kann, im ers-

ten Winter(semester) jämmerlich erfrieren.

1.3.11 (**Der Sinn von Genauigkeit und sorgfältiger Sprache**). Ich könnte mir gut vorstellen, daß verschiedene meiner Leser denken, diese ganze Pedanterie sei doch eigentlich überflüssig und jetzt sollten wir doch einfach mal fröhlich losrechnen wie das in der Schule ja auch sehr gut ging. Ich will hier erklären, warum Pedanterie in diesem Zusammenhang wichtig ist. Viele von Ihnen werden wissen, wie man mit einem einfachen Blatt Papier zum Mond kommt: 42-mal Falten und draufsteigen, das war's schon. So ähnlich ist es in der Mathematik: Etwas völlig Banales wie die naive Mengenlehre wird in den etwa dreißig Vorlesungsdoppelstunden des Wintersemesters jedes Mal auf's neue gefaltet und wenn Sie dann am Ende des Wintersemesters zurückblicken, kann Ihnen schon leicht schwindlig werden. Das funktioniert mit wirklichem Papier nur eingeschränkt, aber wenn man sehr festes und glattes „Gedankenpapier“ nimmt, und solches Gedankenpapier ist eben gerade die Mengenlehre, dann klappt es verblüffend gut. Man muß dazu aber mit der Herstellung dieses Gedankenpapiers ebenso wie beim Falten sorgfältig sein bis zur Pedanterie, denn auch die kleinste Ungeschicklichkeit vervielfacht sich bei diesem Vorgehen mit derselben Schnelligkeit wie die gedankliche Höhe und bringt, eh man sich's versieht, alles zum Einsturz.

Übungen

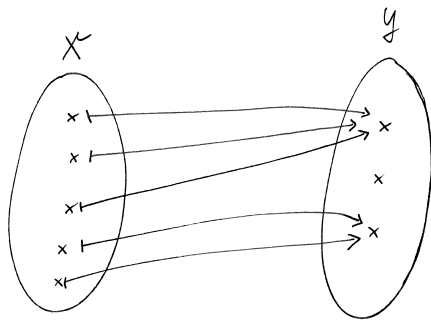
Übung 1.3.12. Sind X und Y endliche Mengen, so gilt für die Kardinalitäten $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ und $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

1.4 Abbildungen

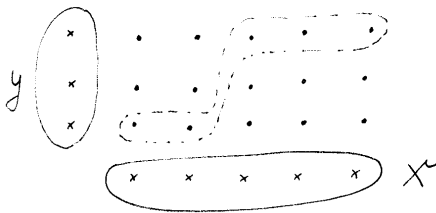
Definition 1.4.1. Seien X, Y Mengen. Eine **Abbildung** $f : X \rightarrow Y$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, das **Bild** von x unter f , auch genannt der **Wert** von f an der Stelle x . Man spricht dann auch vom **Auswerten** der Funktion f an der Stelle x oder vom **Einsetzen** von x in f und schreibt manchmal abkürzend $f(x) = fx$.

1.4.2. Wem das zu vage ist, der mag die alternative Definition vorziehen, nach der eine **Abbildung** $f : X \rightarrow Y$ eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ ist derart, daß es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$. Dies eindeutig bestimmte y schreiben wir dann $f(x)$ und sind auf einem etwas formaleren Weg wieder an demselben Punkt angelangt. In unseren Konventionen nennen wir besagte Teilmenge den **Graphen von** f und notieren sie mit dem Symbol Γ (sprich: Gamma), einem großen griechischen G, und schreiben

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$



Eine Abbildung einer Menge mit fünf in eine mit drei Elementen



Der Graph der oben angegebenen Abbildung, wobei das X oben mit dem X hier identifiziert wurde durch „Umkippen nach Rechts“

Definition 1.4.3. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so nennen wir X ihren **Definitionsbereich** und Y ihren **Wertebereich**. Zwei Abbildungen nennen wir gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich X , denselben Wertebereich Y und dieselbe Abbildungsvorschrift $f \subset X \times Y$ haben.

1.4.4 (**Die Notationen \rightarrow und \mapsto**). Wir notieren Abbildungen oft in der Form

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

und in verschiedenen Verkürzungen dieser Notation. Zum Beispiel sprechen wir von „einer Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber“ oder „der Abbildung $n \mapsto n^3$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber“. Wir benutzen unsere zwei Arten von Pfeilen \rightarrow und \mapsto auch im allgemeinen in derselben Weise.

Beispiel 1.4.5. Für jede Menge X haben wir die **identische Abbildung** oder **Identität**

$$\begin{aligned} \text{id} = \text{id}_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Ein konkreteres Beispiel für eine Abbildung ist das Quadrieren

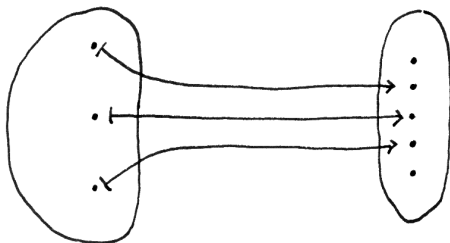
$$\begin{aligned} q : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

Beispiel 1.4.6. Gegeben zwei Mengen X, Y erklärt man die **Projektionsabbildungen** oder **Projektionen** $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ beziehungsweise $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto x$ beziehungsweise $(x, y) \mapsto y$. In manchen Zusammenhängen notiert man sie auch abweichend pr_1 und pr_2 für die „Projektion auf die erste beziehungsweise zweite Komponente“.

1.4.7 (Konstanten und konstante Abbildungen). Gegeben ein festes $c \in Y$ schreiben wir oft auch kurz c für die **konstante Abbildung** $X \rightarrow Y$ gegeben durch $x \mapsto c$ für alle $x \in X$. Damit verbunden ist die Hoffnung, daß aus dem Kontext klar wird, ob im Einzelfall die Abbildung $c : X \rightarrow Y$ oder das Element $c \in Y$ gemeint sind.

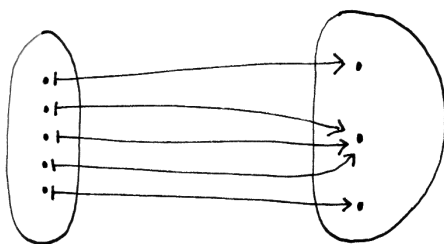
Definition 1.4.8. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. f heißt **injektiv** oder eine **Injektion**, wenn aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Injektionen schreibt man oft \hookrightarrow .



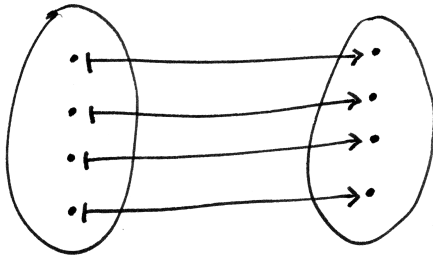
Eine Injektion

2. f heißt **surjektiv** oder eine **Surjektion**, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Surjektionen schreibt man manchmal \twoheadrightarrow .



Eine Surjektion

3. f heißt **bijektiv** oder eine **Bijektion**, wenn f injektiv und surjektiv ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Bijektionen schreibt man oft $\xrightarrow{\sim}$.



Eine Bijektion

Definition 1.4.9. Sind drei Mengen X, Y, Z gegeben und dazwischen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$, so definieren wir die **Verknüpfung** unserer Abbildungen f und g , eine Abbildung $g \circ f : X \rightarrow Z$, durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

1.4.10 (**Diskussion der Notation**). Die Notation $g \circ f$, sprich „ g nach f “, für „erst f , dann g “ ist gewöhnungsbedürftig, erklärt sich aber durch die offensichtliche Formel $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ich sage, $g \circ f$ entstehe aus g durch **Vorschalten von f** und aus f durch **Nachschieben von g** . Oft kürzt man auch $g \circ f$ mit gf ab. Mit dieser Abkürzung muß man jedoch sorgsam umgehen, da im Fall von zwei Abbildungen f, g von derselben Menge in einen Zahlbereich, etwa $f, g : X \rightarrow \mathbb{Q}$, der Ausdruck fg vielmehr für die Abbildung $x \mapsto f(x)g(x)$ reserviert ist, das sogenannte „punktweise Produkt“ unserer beiden Funktionen.

Beispiel 1.4.11. Betrachten wir zusätzlich zum Quadrieren $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ die Abbildung $t : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1$, so gilt $(q \circ t)(x) = (x + 1)^2$ aber $(t \circ q)(x) = x^2 + 1$.

1.4.12. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge, so ist die **Einbettung** oder **Inklusion** $i : X \rightarrow Y, x \mapsto x$ stets injektiv. Ist $g : Y \rightarrow Z$ eine Abbildung und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so nennen wir die Verknüpfung $g \circ i$ von g mit der Inklusion auch die **Einschränkung** von g auf X und notieren sie

$$g \circ i =: g|_X = g|_X : X \rightarrow Z$$

Oft bezeichnen wir eine Einschränkung aber auch einfach mit demselben Buchstaben g in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Abbildung genau gemeint ist. Das ist nicht ganz unproblematisch: So ist etwa unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$ nicht injektiv, ihre Restriktion $q|_{\mathbb{N}}$ zu einer Abbildung $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist aber durchaus injektiv.

Beispiele 1.4.13. Unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Die Identität $\text{id} : X \rightarrow X$ ist stets bijektiv. Sind X und Y endliche Mengen, so gibt es genau dann eine Bijektion von X nach Y , wenn X und Y dieselbe Kardinalität haben, in Formeln $|X| = |Y|$.

Satz 1.4.14. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

1. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv;
2. Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$.

Beweis. Übung. □

Satz 1.4.15. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

1. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;
2. Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$.

Beweis. Übung. □

1.4.16 (Umkehrabbildung). Ist $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ eine bijektive Abbildung, so ist offensichtlich die Menge $\{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ im Sinne von 1.4.2 eine Abbildung oder, vielleicht klarer, der Graph einer Abbildung $Y \rightarrow X$. Diese Abbildung in die Gegenrichtung heißt die **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** oder auch die **inverse Abbildung** zu f und wird mit $f^{-1} : Y \rightarrow X$ bezeichnet. Offensichtlich ist mit f auch f^{-1} eine Bijektion.

1.4.17 (Diskussion der Notation). Mit dem vorhergehenden haben wir schon eine dritte mögliche Bedeutung für das Symbol f^{-1} kennengelernt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 1.4.18. Die Umkehrabbildung unserer Bijektion $t : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1$ ist die Abbildung $t^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x - 1$.

Satz 1.4.19 (Bedeutung der Fakultät). Sind X und Y zwei Mengen mit je n Elementen, so gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Beweis. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Wir haben n Möglichkeiten, ein Bild für x_1 auszusuchen, dann noch $(n - 1)$ Möglichkeiten, ein Bild für x_2 auszusuchen, und so weiter, bis schließlich nur noch 1 Element von Y als mögliches Bild von x_n in Frage kommt. Insgesamt gibt es also $n(n - 1) \cdots 1 = n!$ Möglichkeiten für f . Da wir $0! = 1$ vereinbart hatten, stimmt unser Satz auch für $n = 0$. □

Übungen

Übung 1.4.20. Gegeben eine Bijektion $f : X \rightarrow Y$ ist $g = f^{-1}$ die einzige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$. Ebenso ist auch $h = f^{-1}$ die einzige Abbildung $h : Y \rightarrow X$ mit $h \circ f = \text{id}_X$.

Ergänzende Übung 1.4.21. Gegeben endliche Mengen X, Y gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y und unter diesen Abbildungen sind genau $|Y|(|Y| - 1)(|Y| - 2) \dots (|Y| - |X| + 1)$ Injektionen.

Ergänzende Übung 1.4.22. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien natürliche Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ gegeben mit $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$. Man zeige: Es gibt genau $n! / (\alpha_1! \dots \alpha_r!)$ Abbildungen $f : X \rightarrow \{1, \dots, r\}$, die jedes i genau α_i -mal als Wert annehmen, in Formeln

$$\frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} = \text{card}\{f \mid |f^{-1}(i)| = \alpha_i \text{ für } i = 1, \dots, r\}$$

Ergänzung 1.4.23. Manche Autoren bezeichnen die Zahlen aus der vorherigen Übung 1.4.22 als **Multinomialkoeffizienten** und verwenden die Notation

$$\binom{n}{\alpha_1; \dots; \alpha_r} := \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_r!}$$

Mich überzeugt diese Notation nicht, da sie im Gegensatz zur Notation für Binomialkoeffizienten nichts kürzer macht.

Ergänzende Übung 1.4.24. Man zeige die Formel

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$$

Hier ist zu verstehen, daß wir für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ den angegebenen Ausdruck nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren.

Ergänzende Übung 1.4.25. Sei X eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen und sei m eine natürliche Zahl. Man zeige, daß es genau $\binom{n+m-1}{n-1}$ Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ gibt mit $\sum_{x \in X} f(x) = m$. Hinweis: Man denke sich $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und veranschauliche sich dann f als eine Folge auf $f(1)$ Punkten gefolgt von einem Strich gefolgt von $f(2)$ Punkten gefolgt von einem Strich und so weiter, insgesamt also eine Folge aus $n + m - 1$ Symbolen, davon m Punkten und $n - 1$ Strichen.

1.5 Mengen mit Verknüpfung

Definition 1.5.1. Eine **Verknüpfung \top auf einer Menge X** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x \top y \end{aligned}$$

Jedem angeordneten Paar (x, y) mit $x, y \in X$ wird also ein Element $(x \top y) \in X$ zugeordnet. Eine Menge mit Verknüpfung heißt ein **Magma**.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	0	0	4	4	0

1 1

4 4 4 4 5 5 5 5



Eine Abbildung $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ im Fall $n = 6$ mit Wertesumme $m = 10$ und die Veranschaulichung nach der Vorschrift aus Übung 1.4.25 als Folge bestehend aus m Punkten und $n - 1$ Strichen.

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

Man kann Verknüpfungen auf endlichen Mengen darstellen durch ihre **Verknüpfungstafel**. Hier die Verknüpfungstafel der Verknüpfung \min auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Man muß sich dazu einigen, ob im Kästchen aus der Spalte m und der Zeile n nun $m \top n$ oder vielmehr $n \top m$ stehen soll. Bei einer kommutativen Verknüpfung wie \min macht das aber keinen Unterschied.

1.5.2. Das unverfängliche Symbol \top benutze ich, um mich an dieser Stelle noch nicht implizit auf einen der Standardfälle Addition oder Multiplikation festlegen zu müssen.

Beispiele 1.5.3. 1. Die Addition von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\mapsto m + n\end{aligned}$$

2. Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\mapsto m \cdot n\end{aligned}$$

3. Die Zuordnung \min , die jedem Paar von natürlichen Zahlen die kleinere zuordnet, wenn sie verschieden sind, und eben diese Zahl $\min(n, n) = n$, wenn sie gleich sind, ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned}\min : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto \min(m, n)\end{aligned}$$

4. Die Subtraktion von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\mapsto m - n\end{aligned}$$

5. Logische Operationen wie „und“, „oder“, „impliziert“ können als Verknüpfungen auf der zweielementigen Menge $\{\text{Wahr}, \text{Falsch}\}$ aufgefaßt werden. Die zugehörigen Verknüpfungstabellen heißen **Wahrheitstabeln**. Bei einem formalen Zugang werden diese Tafeln, wie sie für „und“ und „oder“ auf der vorhergehenden Seite zu finden sind, zur Definition der jeweiligen Begriffe.

1.5.4. Eine Verknüpfung \top auf einer Menge X heißt **assoziativ**, wenn gilt

$$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z \quad \forall x, y, z \in X$$

Im Fall einer assoziativen Verknüpfung liefern auch ungeklammerte Ausdrücke der Form $x_1 \top x_2 \top \dots \top x_n$ wohlbestimmte Elemente von X , und zwar ist genauer das Resultat unabhängig davon, wie wir die Klammern setzen. Wir führen das hier nicht weiter aus und verweisen stattdessen auf [GR] 2.1.10.

und	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Falsch
Falsch	Falsch	Falsch

oder	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Wahr
Falsch	Wahr	Falsch

Die Wahrheitstafeln für „und“ und „oder“. Gemeint ist hier wie stets in der Mathematik das „nichtausschließende oder“. Sagen wir, es gelte A oder B , so ist insbesondere auch erlaubt, daß beides gilt. Bei der Wahrheitstafel für das „ausschließende oder“ müßte oben links als Verknüpfung von „Wahr“ mit „Wahr“ ein „Falsch“ stehen.

1.5.5. Eine Verknüpfung \top auf einer Menge X heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn gilt

$$x \top y = y \top x \quad \forall x, y \in X$$

Die Bezeichnung „abelsch“ ehrt den norwegischen Mathematiker Nils Henrik Abel.

Beispiele 1.5.6. Die Addition und Multiplikation auf \mathbb{Z} sind assoziativ und kommutativ. Für das Minimum in \mathbb{N} gilt dasselbe. Die Subtraktion auf \mathbb{Z} ist weder kommutativ noch assoziativ.

Definition 1.5.7. Gegeben eine Menge mit Verknüpfung (X, \top) heißt ein Element $e \in X$ ein **neutrales Element** von (X, \top) , wenn gilt

$$e \top x = x \top e = x \quad \forall x \in X$$

1.5.8 (**Eindeutigkeit neutraler Elemente**). Gegeben eine Menge mit Verknüpfung (X, \top) kann es höchstens ein neutrales Element e geben, denn für jedes weitere Element e' mit $e' \top x = x \top e' = x \quad \forall x \in X$ haben wir $e' = e' \top e = e$. Wir dürfen also den bestimmten Artikel verwenden und in einer Menge mit Verknüpfung von *dem* neutralen Element reden und es mit e_X bezeichnen.

Beispiele 1.5.9. Das neutrale Element von $(\mathbb{Z}, +)$ ist die Null $0 \in \mathbb{Z}$. Das neutrale Element von (\mathbb{Z}, \cdot) ist die Eins $1 \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.5.10. Ein **Monoid** ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, in der es ein neutrales Element gibt.

1.5.11. Das Wort „Monoid“ ist wohl von griechisch „*μονος*“ für „allein“ abgeleitet: Ein Monoid besitzt nur eine einzige Verknüpfung.

1.5.12 (**Gebrauchliche Notationsschemata für Monoide**). (1) Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit dem Symbol $+$, so notiert man das neutrale Element meist 0_M oder abkürzend 0 und nennt es das **Null-Element** oder abkürzend die **Null** und spricht von einem **additiv notierten Monoid**. Nur kommutative Monoide werden additiv notiert.

(2) Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit einem eher runden Symbol wie \cdot oder \circ oder $*$ oder auch einfach durch Hintereinanderschreiben, so notiert man das neutrale Element oft 1_M oder abkürzend 1 und nennt es das **Eins-Element** oder abkürzend die **Eins** und spricht von einem **multiplikativ notierten Monoid**.

Beispiele 1.5.13. Die natürlichen Zahlen bilden mit der Addition ein Monoid $(\mathbb{N}, +)$ mit neutralem Element 0 . Sie bilden mit der Multiplikation ein Monoid (\mathbb{N}, \cdot) mit neutralem Element 1 .

1.5.14 (**Iterierte Verknüpfungen**). Sei (A, \top) ein Monoid. Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $a \in A$, so schreiben wir

$$n^\top a := \underbrace{a \top a \top \dots \top a}_{n\text{-mal}}$$

für $n \geq 1$ und setzen ergänzend $0^\top a := e_A$. Dann gelten offensichtlich für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in A$ mit $a \top b = b \top a$ die Regeln

1. $(n + m)^\top a = (n^\top a) \top (m^\top a)$
2. $(nm)^\top a = n^\top (m^\top a)$
3. $n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$

Beispiel 1.5.15 (Iterieren in additiv notierten Monoiden). Im Fall additiv notierter Monoide schreibt man statt $n^\top a$ meist na . Unsere drei Regeln werden dann $(n + m)a = (na) + (ma)$, $(nm)a = n(ma)$ und $n(a + b) = (na) + (nb)$ und unsere Konvention $0^\top a = e_M$ nimmt die Gestalt $0a = 0_M$ an. Wenn ich es genau nehmen will, schreibe ich in diesem Fall n^+a statt na .

Beispiel 1.5.16 (Iterieren in multiplikativ notierten Monoiden). Im Fall multiplikativ notierter Monoide schreibt man statt $n^\top a$ meist a^n . Unsere drei Regeln werden dann $a^{n+m} = (a^n)(a^m)$, $a^{nm} = (a^n)^m$ und $(ab)^n = (a^n)(b^n)$ falls $ab = ba$ und unsere Konvention $0^\top a = e_M$ nimmt die Gestalt $a^0 = 1_M$ an.

1.5.17. Die natürlichen, ja die ganzen Zahlen, ja sogar die rationalen Zahlen mit Multiplikation und Addition nehmen wir hier als gegeben hin ebenso wie die Tatsache, daß in diesem Fall die n -fach iterierte Addition gerade die Multiplikation ist. Den Aufbau dieser Strukturen aus der Mengenlehre diskutieren wir erst in [LA1] 4.1.

Definition 1.5.18. 1. Ist (M, \top) ein Monoid und $a \in M$ ein Element, so nennen wir ein weiteres Element $\bar{a} \in M$ **invers zu** a , wenn gilt $a \top \bar{a} = e = \bar{a} \top a$ für $e \in M$ das neutrale Element unseres Monoids. Ein Element eines Monoids, das ein Inverses besitzt, heißt **invertierbar**;

2. Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element ein Inverses besitzt;
3. Eine **kommutative Gruppe** oder **abelsche Gruppe** ist eine Gruppe, deren Verknüpfung kommutativ ist.

Beispiele 1.5.19. Von unseren Beispielen 1.5.3 für Mengen mit Verknüpfung oben ist nur $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe, und diese Gruppe ist kommutativ. Ein anderes Beispiel für eine kommutative Gruppe ist die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, ein weiteres die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ der von Null verschiedenen rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Auch jedes einelementige Monoid ist eine Gruppe.

1.5.20. Der Begriff einer „Gruppe“ wurde von Évariste Galois (1811-1832) in die Mathematik eingeführt. Er verwendet den Begriff „Gruppe von Transformationen“ sowohl in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge“ als auch in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge, die abgeschlossen ist unter Verknüpfung und Inversenbildung“, und die damit in der Tat ein Beispiel für eine Gruppe im Sinne der obigen Definition bildet. Unsere obige Definition 1.5.18 geht auf eine Arbeit von Arthur Cayley aus dem Jahre 1854 mit dem Titel „On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$ “ zurück und wurde damit formuliert, bevor Cantor die Sprache der Mengenlehre entwickelte. Die Terminologie „abelsche Gruppe“ wurde zu Ehren des norwegischen Mathematikers Niels Hendrik Abel eingeführt.

Lemma 1.5.21. *Jedes Element eines Monoids besitzt höchstens ein Inverses.*

Beweis. Aus $a \top \bar{a} = e$ und $b \top a = e$ folgt durch Anwenden von $b \top$ auf die erste Gleichung mit dem Assoziativgesetz sofort $\bar{a} = b$. \square

1.5.22. Wir dürfen also den bestimmten Artikel benutzen und von nun an von *dem* Inversen eines Elements eines Monoids und insbesondere auch einer Gruppe reden.

Beispiel 1.5.23 (Invertieren in additiv notierten Monoiden). Im Fall additiv notierter Monoide schreibt man statt \bar{a} meist $-a$ und nennt dieses „additive Inverse“ das **Negative von a** . Üblich ist in diesem Kontext auch die Abkürzung $a - b := a + (-b)$.

Beispiel 1.5.24 (Invertieren in multiplikativ notierten Monoiden). Im Fall multiplikativ notierter Monoide bleiben wir vorerst bei unserer Notation \bar{a} .

1.5.25 (**Zweimaliges Invertieren**). Gegeben ein invertierbares Element ist offensichtlich auch sein Inverses invertierbar und das Inverse des Inversen ist wieder das ursprüngliche Element, in Formeln $\bar{\bar{a}} = a$. In additiver Notation liest sich das $-(-a) = a$.

Lemma 1.5.26. *Sind a und b invertierbare Elemente eines Monoids, so ist auch $a \top b$ invertierbar mit Inversem $\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$.*

Beweis. In der Tat rechnen wir schnell $(a \top b) \top (\bar{b} \top \bar{a}) = e = (\bar{b} \top \bar{a}) \top (a \top b)$. Diese Formel ist auch aus dem täglichen Leben vertraut: Wenn man sich morgens zuerst die Strümpfe anzieht und dann die Schuhe, so muß man abends zuerst die Schuhe ausziehen und dann die Strümpfe. \square

1.5.27. In additiver Notation liest sich das $-(a + b) = (-b) + (-a)$ oder, da additiv notierte Monoide stets als abelsch angenommen werden, gleichbedeutend $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

1.5.28 (**Gruppe der invertierbaren Elemente eines Monoids**). Die invertierbaren Elemente eines Monoids bilden offensichtlich stets eine Gruppe. Für die Gruppe der invertierbaren Elemente eines multiplikativ notierten Monoids M verwenden wir die Notation M^\times .

1.5.29 (**Negativ iterierte Verknüpfung invertierbarer Elemente**). Ist (A, \top) ein Monoid und $a \in A$ invertierbar, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ aus 1.5.14 weiter auf alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$, indem wir für n negativ setzen $n^\top a := (-n)^\top \bar{a}$. Dann gelten offensichtlich sogar für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in A^\times$ mit $a \top b = b \top a$ die für $m, n \in \mathbb{N}$ bereits aus 1.5.14 bekannten Regeln

1. $(n + m)^\top a = (n^\top a) \top (m^\top a)$
2. $(nm)^\top a = n^\top (m^\top a)$
3. $n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$

1.5.30 (**Negativ iterierte Verknüpfung in additiver Notation**). Im Fall additiv notierter Monoide erweitern wir unsere Notation $na := n^\top a$ für Elemente a mit Negativem auf alle $n \in \mathbb{Z}$ und finden für jedes Element a mit Negativem insbesondere $(-1)a = -a$ sowie die Regeln $(n + m)a = (na) + (ma)$, $(nm)a = n(ma)$ und $n(a + b) = (na) + (nb)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und alle Elemente a, b mit Negativem. Wenn ich es genau nehmen will, schreibe ich auch hier n^+a .

1.5.31 (**Negativ iterierte Verknüpfung in multiplikativer Notation**). Im Fall multiplikativ notierter Monoide erweitern wir unsere Notation $a^n := n^\top a$ für invertierbare Elemente a auf alle $n \in \mathbb{Z}$ und finden für jedes invertierbare Element a insbesondere $a^{-1} = \bar{a}$. Das nehmen wir hinfert als unsere übliche Notation für multiplikative Inverse. Unsere drei Regeln erhalten dann die Gestalt $a^{n+m} = (a^n)(a^m)$, $a^{nm} = (a^n)^m$ und $(ab)^n = (a^n)(b^n)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und a, b invertierbar mit $ab = ba$.

Definition 1.5.32. Seien (A, \top) und (B, \perp) Magmas. Ein **Homomorphismus von Magmas** ist eine Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$ mit

$$\varphi(x \top y) = \varphi(x) \perp \varphi(y) \quad \forall x, y \in A$$

Definition 1.5.33. Seien (A, \top) und (B, \perp) Monoide. Ein **Homomorphismus von Monoiden** ist ein Magmahomomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$, der das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet.

Definition 1.5.34. Seien (A, \top) und (B, \perp) Gruppen. Ein **Homomorphismus von Gruppen** ist ein Monoidhomomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$.

Beispiele 1.5.35. 1. Die Multiplikation mit einer festen Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $(a \cdot) : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$.

2. Das Potenzieren $n \mapsto q^n$ ist für alle $q \in \mathbb{Q}$ ein Monoidhomomorphismus $(\mathbb{N}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, \cdot)$ und für $q \neq 0$ sogar ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, \cdot)$.
3. Allgemeiner ist für jedes Element q eines Monoids (M, \top) das Iterieren $n \mapsto n^\top q$ ein Monoidhomomorphismus $(\mathbb{N}, +) \rightarrow (M, \top)$, ja der einzige Monoidhomomorphismus mit $1 \mapsto q$, und für invertierbares q sogar ein Monoidhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (M, \top)$, wieder der einzige mit $1 \mapsto q$.

1.5.36. Ein **Isomorphismus** bezeichnet einen bijektiven Homomorphismus, dessen Umkehrabbildung auch ein Homomorphismus für die jeweiligen Strukturen ist. Im Fall von Magmas oder Monoiden ist jeder bijektive Homomorphismus ein Isomorphismus. Ein erstes Beispiel für einen bijektiven Homomorphismus, der kein Isomorphismus ist, lernen wir in 2.2.4 im Zusammenhang mit teilgeordneten Mengen kennen.

Übungen

Übung 1.5.37. In einer Gruppe (G, \top) ist das neutrale Element $e \in G$ das einzige Element $x \in G$ mit $x \top x = x$. Jeder Magmahomomorphismus von einem Monoid in eine Gruppe ist bereits ein Monoidhomomorphismus.

Übung 1.5.38. Sei Z eine Menge. Das Schneiden von Teilmengen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cap : \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z) &\rightarrow \mathcal{P}(Z) \\ (A, B) &\mapsto A \cap B \end{aligned}$$

auf der Potenzmenge. Dasselbe gilt für die Vereinigung und das Bilden der Differenzmenge. Welche dieser Verknüpfungen sind kommutativ oder assoziativ? Welche besitzen neutrale Elemente?

Ergänzende Übung 1.5.39. Man gebe die Wahrheitstabellen für \Rightarrow und \Leftrightarrow an. Bezeichne weiter $\neg : \{\text{Wahr, Falsch}\} \rightarrow \{\text{Wahr, Falsch}\}$ die „Verneinung“. Man zeige, daß die Formel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

beim Einsetzen beliebiger Wahrheitswerte aus $\{\text{Wahr, Falsch}\}$ für A und B stets den Wert Wahr ausgibt.

Übung 1.5.40. Ein Element a eines Monoids M ist invertierbar genau dann, wenn es $b, c \in M$ gibt mit $b \top a = e = a \top c$ für e das neutrale Element.

Übung 1.5.41 (Kürzen). Sind a, b, c Elemente eines Monoids und ist a invertierbar, so folgt aus $a \top b = a \top c$ bereits $b = c$. Ebenso folgt aus $b \top a = c \top a$ bereits $b = c$.

Übung 1.5.42. Gegeben eine Menge Z ist das Bilden des Komplements ein Monoidhomomorphismus $(\mathcal{P}(Z), \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(Z), \cup)$.

Übung 1.5.43. Jeder Monoidhomomorphismus $M \rightarrow N$ bildet invertierbare Elemente auf invertierbare Elemente ab und induziert so einen Gruppenhomomorphismus $M^\times \rightarrow N^\times$.

Übung 1.5.44. Jeder Monoidhomomorphismus $\varphi : (M, \top) \rightarrow (N, \perp)$ kommutiert mit dem Iterieren, in Formeln $\varphi(n^\top x) = n^\perp(\varphi(x))$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in M$ und ebenso für alle $n \in \mathbb{Z}, x \in M^\times$.

1.6 Körper im Sinne der Algebra

1.6.1. Die algebraische Struktur eines Körpers wird den Hauptbestandteil unseres Axiomensystems für die reellen Zahlen in 2.4 bilden. Gleichzeitig ist sie die Grundlage für die Modellierung des Raums unserer Anschauung in der linearen Algebra.

Definition 1.6.2. Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen, genannt die **Addition** $+$ und die **Multiplikation** \cdot des Rings, derart daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe;
2. (R, \cdot) ist ein Monoid;
3. Es gelten die beiden **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in R \\ (b + c) \cdot a &= (b \cdot a) + (c \cdot a) \quad \forall a, b, c \in R \end{aligned}$$

Ein Ring, dessen Multiplikation kommutativ ist, heißt ein **kommutativer Ring** und bei uns kürzer auch **Kring**. Die Gruppe $(R, +)$ heißt die **additive Gruppe** des Rings.

Beispiel 1.6.3. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden einen kommutativen Ring. Die einelementige Menge ist mit der einzig möglichen Verknüpfung als Addition und Multiplikation ein Ring, der **Nullring**.

Definition 1.6.4. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring, dessen multiplikativ invertierbare Elemente genau alle vom neutralen Element 0_K von $(K, +)$ verschiedenen Elemente sind, in Formeln

$$(K, \cdot)^\times = K \setminus \{0_K\}$$

1.6.5. Das neutrale Element jedes Monoids ist invertierbar, folglich muß nach unseren Annahmen in einem Körper K das neutrale Element 1_K des multiplikativen Monoids (K, \cdot) von 0_K verschieden sein, in Formeln

$$1_K \neq 0_K$$

Die Gruppe invertierbaren Elemente von $K^\times = (K, \cdot)^\times$ eines Körpers K heißt die **multiplikative Gruppe** des Körpers.

Beispiele 1.6.6. Ein erstes Beispiel ist der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Ein anderes Beispiel ist der zweielementige Körper mit den durch die Axiome erzwungenen Rechenregeln, der fundamental ist in der Informatik. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden keinen Körper, da $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist, da es nämlich in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nur für 1 und -1 ein multiplikatives Inverses gibt.

Ergänzung 1.6.7 (**Ursprung der Terminologie**). Der Begriff „Körper“ ist in diesem Zusammenhang wohl zu verstehen als „besonders gut unter den verschiedensten Rechenoperationen abgeschlossener Zahlbereich“, in Analogie zu geometrischen Körpern wie Kugeln oder Zylindern, die man entsprechend als „besonders gut in sich geschlossene Bereiche des Raums“ ansehen könnte. Die Bezeichnung als „Distributivgesetz“ rührt daher, daß uns dieses Gesetz erlaubt, beim Multiplizieren eines Elements mit einer Summe den „Faktor auf die Summanden zu verteilen“. Das Wort „distribution“ für Verteilung von Nahrungsmitteln und dergleichen auf Französisch und Englisch kommt von demselben lateinischen Wortstamm, auf die auch unsere Bezeichnung „Distributivgesetz“ zurückgeht.

1.6.8 (**Weglassen von Multiplikationssymbolen**). Beim Rechnen mit Buchstaben werden wir meist $ab := a \cdot b$ abkürzen. Das wäre beim Rechnen mit durch Ziffernfolgen dargestellten Zahlen wenig sinnvoll, da man dann nicht wissen könnte, ob 72 nun als „Zweiundsiebzig“ oder vielmehr als „Sieben mal Zwei“ zu verstehen sein soll. Beim Einsetzen von Zahlen für die Buchstaben müssen also wieder Multiplikationssymbole eingefügt werden.

Ergänzung 1.6.9 (**Weglassen von Additionssymbolen**). In der Schule und außerhalb der Mathematik ist es üblich, $1 + \frac{1}{2}$ mit $1\frac{1}{2}$ abzukürzen und „Anderthalb Stunden“ zu sagen oder „Dreieinviertel Pfund“. In diesem Fall wird also ein Additionssymbol weggelassen. Das ist jedoch in der höheren Mathematik nicht üblich. In der gesprochenen Sprache ist es noch viel merkwürdiger. Neunzehnhundertvierundachtzig versteht jeder, in Symbolen geschrieben sieht $9\ 10\ 100\ 4 + 80$ dahingegen ziemlich sinnlos aus, und statt der üblichen Interpretation $((9+10)100)+4+80$ wären durchaus auch andere Interpretationen denkbar. In der gesprochenen Sprache scheint eher eine Konvention befolgt zu werden, nach der die Operationen der Reihe nach auszuführen sind wie bei einem Taschenrechner, wobei eine Multiplikation gemeint ist, wenn die zuerst genannte Zahl die kleinere ist, und eine Addition, wenn sie die Größere ist. Nur die Zahlen von 13 bis

19 scheinen dieser Regel nicht zu gehorchen. Kein Wunder, daß es Erstklässlern schwer fällt, sich den Zahlenraum zu erschließen, wenn sie zuvor dieses Dickicht von Konventionen durchdringen müssen.

1.6.10 (**Punkt vor Strich**). Wir vereinbaren zur Vermeidung von Klammern die Regel „Punkt vor Strich“, so daß also zum Beispiel unter zusätzlicher Beachtung unserer Konvention des Weglassens von Multiplikationssymbolen, in diesem Fall das Weglassen des Punktes, das Distributivgesetz kürzer in der Form $a(b + c) = ab + ac$ geschrieben werden kann.

1.6.11 (**Brüche**). Gegeben ein Körper K und Elemente $a, b \in K$ mit $b \neq 0_K$ vereinbaren wir die Notation

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}$$

Sie werden zur Übung zeigen, daß die üblichen Regeln der Bruchrechnung auch in dieser Allgemeinheit gelten.

Lemma 1.6.12 (Folgerungen aus den Ringaxiomen). *In jedem Ring R gelten die folgenden Aussagen und Formeln:*

1. $a \cdot 0_R = 0_R = 0_R \cdot a \quad \forall a \in R$
2. $(-1_R) \cdot a = -a = a \cdot (-1_R) \quad \forall a \in R$
3. $(-1_R)(-1_R) = 1_R$
4. $(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in R$
5. $m^+(ab) = (m^+a)b$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in R$.

Beweis. 1. $0_R + 0_R = 0_R \Rightarrow (0_R + 0_R) \cdot a = 0_R \cdot a \Rightarrow (0_R \cdot a) + (0_R \cdot a) = 0_R \cdot a \Rightarrow 0_R \cdot a = 0_R$ durch Addieren von $-(0_R \cdot a)$ auf beiden Seiten.

2. $a + (-1_R)a = 1_Ra + (-1_R)a = (1_R + (-1_R))a = 0_Ra = 0_R$ und $-a$ ist ja gerade definiert als das eindeutig bestimmte Element von R mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0_R$.

3. $(-1_R)(-1_R) = -(-1_R) = 1_R$ als Negatives des Negativen nach 1.5.25.

4. Um das nachzuweisen ersetzen wir $-a = a(-1_R)$ und $-b = (-1_R)b$ und verwenden $(-1_R)(-1_R) = 1_R$.

5. Das folgt durch wiederholtes Anwenden des Distributivgesetzes. Die Fälle $m > 0$, $m = 0$ und $m < 0$ behandelt man am einfachsten separat. Alternativ mag man bemerken, daß nach dem Distributivgesetz für festes a die

Abbildung $(\cdot b) : a \mapsto ab$ ein Monoidhomomorphismus $(R, +) \rightarrow (R, +)$ ist und folglich nach Übung 1.5.44 gilt

$$n^+(ab) = n^+((\cdot b)(a)) = (\cdot b)(n^+a) = (n^+a)b \quad \square$$

1.6.13 (Binomische Formel). Für alle a, b in einem Ring R mit $ab = ba$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die binomische Formel

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

Um das einzusehen prüft man, daß wir bei der Herleitung nach 1.1.23 nur Ringaxiome und die Eigenschaft $ab = ba$ verwandt haben. Man beachte hierbei unsere Konvention $0_R^0 = 1_R$ aus 1.5.16, angewandt auf das Monoid (R, \cdot) . Die Multiplikation mit den Binomialkoeffizienten in dieser Formel ist zu verstehen als wiederholte Addition im Sinne der Bezeichnungskonvention $na = n^+a$ aus 1.5.15, angewandt auf den Spezialfall der additiven Gruppe unseres Rings.

1.6.14 (Minus mal Minus gibt Plus). Die Frage, wie das Produkt zweier negativer Zahlen zu bilden sei, war lange umstritten. Mir scheint der vorhergehende Beweis das überzeugendste Argument für „Minus mal Minus gibt Plus“: Es sagt salopp gesprochen, daß man diese Regel vereinbaren muß, wenn man beim Rechnen das Ausklammern ohne alle Einschränkungen erlauben will.

1.6.15. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man bei Mengen mit mehr als einer Verknüpfung analog. Zum Beispiel ist ein **Ringhomomorphismus** φ von einem Ring R in einen Ring S definiert als eine Abbildung $\varphi : R \rightarrow S$ derart, daß gilt $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in R$ sowie $\varphi(0_R) = 0_S$ und $\varphi(1_R) = 1_S$. Die Bedingung $\varphi(0_R) = 0_S$ ist nach 1.5.37 an dieser Stelle sogar überflüssig. In anderen Worten mag man einen Ringhomomorphismus auch definieren als eine Abbildung, die sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation ein Monoidhomomorphismus ist. Einen Ringhomomorphismus zwischen Körpern nennt man einen **Körperhomomorphismus**.

1.6.16. Gegeben ein bijektiver Ringhomomorphismus ist auch seine Umkehrabbildung ein Ringhomomorphismus und wir dürfen einen bijektiven Ringhomomorphismus deshalb einen **Ringisomorphismus** und im Fall von Körpern einen **Körperisomorphismus** nennen.

Satz 1.6.17 (Ganze Zahlen und allgemeine Ringe). Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R$. Er wird gegeben durch die Vorschrift $\varphi(n) = n^+1_R$.

Beweis. Um den Überblick zu behalten, verwende ich hier die Notation n^+a statt na für die iterierte Verknüpfung im Sinne von 1.5.29, also $n^+a = a + a + \dots + a$

mit n Summanden im Fall $n \geq 1$. Wir wissen aus 1.5.35, daß $n \mapsto n^+a$ für alle $a \in R$ der einzige Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (R, +)$ ist mit $1 \mapsto a$. Für einen Ringhomomorphismus muß aber gelten $\varphi(1) = 1_R$, also muß er durch die Formel $\varphi(n) = n^+1_R$ gegeben sein. Es bleibt zu zeigen, daß diese Abbildung φ mit der Multiplikation verträglich ist, in Formeln $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
 \varphi(nm) &= (nm)^+1_R && \text{per definitionem,} \\
 &= n^+(m^+1_R) && \text{nach der zweiten Iterationsregel 1.5.29,} \\
 &= n^+(1_R(m^+1_R)) && \text{weil } 1_R \text{ neutral ist in } (R, \cdot), \\
 &= (n^+1_R)(m^+1_R) && \text{nach der letzten Regel in 1.6.12,} \\
 &= \varphi(n)\varphi(m) && \text{per definitionem.} \quad \square
 \end{aligned}$$

1.6.18. Gegeben ein Ring R und $n \in \mathbb{Z}$ verwenden wir oft die Abkürzungen $n^+1_R = n_R = n$. Unser Satz zeigt, daß es meist nicht so genau darauf ankommt, ob n nun eine ganze Zahl oder das Element n_R eines abstrakten Rings bedeutet. Insbesondere kürzt man eigentlich immer 0_R ab durch 0 und 1_R durch 1. Man beachte jedoch, daß für verschiedene ganze Zahlen $n \neq m$ durchaus $n_R = m_R$ gelten kann: Ist etwa $R = K$ ein Körper mit zwei Elementen, so gilt $n_K = 0_K$ für gerades n und $n_K = 1_K$ für ungerades n . Vom höheren Standpunkt wird das alles in [LA1] 5.1.11 nocheinmal ausführlich diskutiert werden.

Lemma 1.6.19 (Folgerungen aus den Körperaxiomen). *In jedem Körper K gelten zusätzlich zu den bereits für Ringe bewiesenen Aussagen die folgenden Aussagen und Formeln:*

1. $ab = 0_K \Rightarrow (a = 0_K \text{ oder } b = 0_K)$
2. $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ für alle $a, c \in K$ und $b, d \in K^\times$
3. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ für alle $a \in K$ und $b, c \in K^\times$
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ für alle $a, c \in K$ und $b, d \in K^\times$

Beweis. 1. In der Tat folgt aus $(a \neq 0_K \text{ und } b \neq 0_K)$ schon $(ab \neq 0_K)$ nach den Körperaxiomen.

2. Das ist klar.

3. Das ist klar.

4. Das wird bewiesen, indem man die Brüche auf einen Hauptnenner bringt und das Distributivgesetz anwendet. \square

Übungen

Übung 1.6.20. Jeder Ring R mit $0_R = 1_R$ hat nur ein einziges Element.

Übung 1.6.21. Ist K ein Körper derart, daß es kein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$, so kann man die Menge $K \times K = K^2$ zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Die Abbildung $K \rightarrow K^2$, $a \mapsto (a, 0)$ ist dann ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $(a, 0)$ mit a ab und setzen $(0, 1) = i$, so gilt $i^2 = -1$ und $(a, b) = a + bi$ und die Abbildung $a + bi \mapsto a - bi$ ist ein Körperisomorphismus $K^2 \xrightarrow{\sim} K^2$.

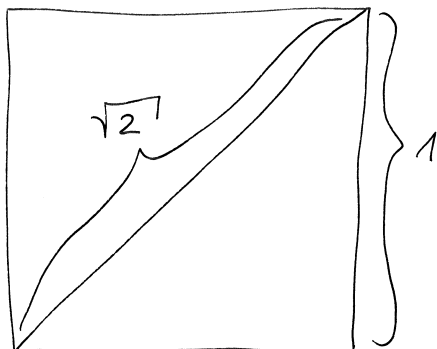
1.6.22. Auf die in der vorhergehenden Übung 1.6.21 erklärte Weise können wir etwa aus dem Körper $K = \mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“, sobald wir ihn kennengelernt haben, direkt den Körper \mathbb{C} der **komplexen Zahlen** konstruieren. Unser Körperisomorphismus gegeben durch die Vorschrift $a + bi \mapsto a - bi$ heißt in diesem Fall die **komplexe Konjugation** und wird auch $z \mapsto \bar{z}$ notiert. Man beachte, wie mühelos das alles in der Sprache der Mengenlehre zu machen ist. Als die komplexen Zahlen erfunden wurden, gab es noch keine Mengenlehre und beim Rechnen beschränkte man sich auf das Rechnen mit „reellen“ Zahlen, ja selbst das Multiplizieren zweier negativer Zahlen wurde als eine fragwürdige Operation angesehen, und das Ziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl als eine rein imaginäre Operation. In gewisser Weise ist es das ja auch geblieben, aber die Mengenlehre liefert eben unserer Imagination eine wunderbar präzise Sprache, in der wir uns auch über imaginierte Dinge unmißverständlich austauschen können. Man kann dieselbe Konstruktion auch allgemeiner durchführen, wenn man statt -1 irgendein anderes Element eines Körpers K betrachtet, das kein Quadrat ist. Noch allgemeinere Konstruktionen zur „Adjunktion höherer Wurzeln“ oder sogar der „Adjunktion von Nullstellen polynomialer Gleichungen“ können Sie in der Algebra kennenlernen, vergleiche etwa [AL] 3.7.6. In [LA1] 2.7 diskutieren wir die komplexen Zahlen ausführlicher.

Ergänzende Übung 1.6.23. Ein Körperhomomorphismus ist stets injektiv.

2 Die reellen Zahlen

2.1 Rationale Wurzeln rationaler Zahlen

Satz 2.1.1. *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*



Die Diagonale im Einheitsquadrat hat eine irrational Länge.

2.1.2. Dieser Satz erklärt, warum wir uns mit den rationalen Zahlen nicht zufrieden geben. In der Tat suchen wir nach einem Zahlbereich, in dem jeder „anschaulichen Länge“, wie zum Beispiel der Länge der Diagonale eines Quadrats der Kantenlänge Eins, auch tatsächlich eine Zahl entspricht. Wir zeigen in 3.3.14, daß im Zahlbereich der reellen Zahlen immerhin aus allen nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln gezogen werden können, und diskutieren in 3.4.1, wie sich sogar unsere anschauliche Vorstellung von der Länge des Einheitskreises zur Definition einer reellen Zahl präzisieren läßt.

Erster Beweis. Setzen wir die in [LA1] 4.4.8 bewiesene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraus, so folgt unmittelbar, daß das Quadrat eines unkürzbaren Bruches mit Nenner $\neq \pm 1$ wieder ein unkürzbarer Bruch mit Nenner $\neq \pm 1$ sein muß. Für eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ folgt aus $x \notin \mathbb{Z}$ also $x^2 \notin \mathbb{Z}$. Gäbe es mithin eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$, so müßte x bereits selbst eine ganze Zahl sein. Offensichtlich gibt es jedoch keine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 = 2$. \square

Zweiter Beweis. Ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraussetzen können wir in unserer speziellen Situation auch elementarer mit dem Primfaktor 2 durch Widerspruch argumentieren: Nehmen wir an, wir fänden ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ derart, daß $x = p/q$ ein unkürzbarer Bruch wäre mit $x^2 = 2$. Es folgte $p^2 = 2q^2$, also p^2 gerade, also p gerade, also p^2 durch 4 teilbar, also q^2 gerade, also q gerade. Dann wäre unser Bruch aber doch kürzbar gewesen, nämlich durch 2. \square

2.2 Angeordnete Körper

Definition 2.2.1. Eine **Relation** T auf einer Menge X ist eine Teilmenge $T \subset X \times X$ des kartesischen Produkts von X mit sich selbst, also eine Menge von Paaren von Elementen von X . Statt $(x, y) \in T$ schreiben wir in diesem Zusammenhang meist xTy .

Definition 2.2.2. Eine Relation T auf einer Menge X heißt eine **Ordnungsrelation** oder eine **Teilordnung** oder eine **partielle Ordnung**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. **Transitivität:** $(xTy \text{ und } yTz) \Rightarrow xTz$;
2. **Antisymmetrie:** $(xTy \text{ und } yTx) \Rightarrow x = y$;
3. **Reflexivität:** xTx für alle $x \in X$.

Eine Teilordnung heißt eine **Ordnung** oder **Anordnung**, wenn wir zusätzlich haben

4. **Totalität:** Für alle $x, y \in X$ gilt xTy oder yTx .

2.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißt eine Teilordnung auch eine **Halbordnung** oder kurz eine „Ordnung“. Wir verstehen jedoch unter einer Ordnung stets eine Ordnungsrelation, die auch die Eigenschaft der Totalität besitzt. Auf Englisch benutzt man für eine teilgeordnete Menge alias „partially ordered set“ gerne die Abkürzung **poset**. Eine Ordnung in unserem Sinne heißt in der Literatur auch eine **totale Ordnung** oder eine **lineare Ordnung**.

2.2.4. Gegeben teilgeordnete Mengen (X, \leq) und (Y, \leq) versteht man unter einem **Ordnungshomomorphismus** eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ mit $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$. In dieser Situation muß ein objektiver Homomorphismus keineswegs ein Isomorphismus sein, als da heißt, seine Umkehrabbildung muß keineswegs wieder ein Ordnungshomomorphismus sein.

Vorschau 2.2.5. Allgemeiner versteht man unter einer **Relation T zwischen einer Menge X und einer Menge Y** eine Teilmenge $T \subset X \times Y$. In diesem Sinne sind dann auch unsere Abbildungen aus 1.4.2 spezielle Relationen. In Teilen der Literatur heißen derartige Relationen auch „Korrespondenzen“. Noch allgemeiner betrachtet man auch für $n \geq 0$ und Mengen X_1, \dots, X_n Teilmengen $T \subset X_1 \times \dots \times X_n$ und nennt sie **n -stellige Relationen**, aber das ist für uns vorerst noch nicht relevant.

2.2.6 (**Notationen zu teilgeordneten Mengen**). Bei einer Ordnungsrelation T schreiben wir stets $x \leq y$ statt xTy und statt $x \leq y$ schreiben wir dann oft auch $y \geq x$. Weiter kürzt man $(x \leq y \text{ und } x \neq y)$ ab mit $x < y$ und ebenso $(x \geq y \text{ und } x \neq y)$ mit $x > y$.

$x \neq y$) mit $x > y$. Auf jeder angeordneten Menge definieren wir Verknüpfungen \max und \min in offensichtlicher Verallgemeinerung von 1.5.3.

Definition 2.2.7. Ein **angeordneter Krings** ist ein Krings $(R, +, \cdot)$ mit einer Anordnung \leq derart, daß für beliebige Elemente $x, y, z \in R$ gilt:

1. $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$;
2. $(x \geq 0 \text{ und } y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$.

Eine Anordnung eines Krings mit diesen Eigenschaften nennen wir eine **Kringsanordnung**. Die Elemente $x \in R$ mit $x > 0$ beziehungsweise $x < 0$ nennen wir **positiv** beziehungsweise **negativ**. Die Elemente mit $x \geq 0$ beziehungsweise $x \leq 0$ nennen wir **nichtnegativ** beziehungsweise **nichtpositiv**. Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper mit einer Kringsanordnung.

Beispiel 2.2.8. Der Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist mit seiner üblichen Anordnung ein angeordneter Krings. Der Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen ist mit seiner üblichen Anordnung ein angeordneter Körper. Dasselbe wird auch für den Körper \mathbb{R} der „reellen Zahlen“ gelten, den wir demnächst einführen.

2.2.9 (Eigenschaften angeordneter Krings). Wir listen einige Tatsachen auf, die in beliebigen angeordneten Krings R gelten.

1. $(x \leq y \text{ und } a \leq b) \Rightarrow (x + a \leq y + b)$

In der Tat folgt aus den Annahmen $x + a \leq y + a \leq y + b$.

2. $(x \leq y \text{ und } a \geq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$

In der Tat folgt $0 \leq y - x$, also $0 \leq a(y - x) = ay - ax$ und damit dann $ax \leq ay$.

3. $(0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq a \leq b) \Rightarrow (0 \leq xa \leq yb)$

In der Tat erhalten wir $0 \leq xa \leq ya \leq yb$.

4. $(x \leq y) \Rightarrow (-y \leq -x)$

Das folgt durch Addition von $(-y - x)$ auf beiden Seiten.

5. $(x \geq y \text{ und } a \leq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$

In der Tat folgern wir $x \geq y \Rightarrow (-a)x \geq (-a)y \Rightarrow ax \leq ay$.

6. $x^2 \geq 0$

In der Tat ist $x^2 = (-x)^2$ und wir haben $x \geq 0 \Leftrightarrow (-x) \leq 0$.

7. $1 \geq 0$

In der Tat gilt $1 = 1^2$.

8. $(x \geq 0 \text{ und } x \text{ invertierbar}) \Rightarrow (x^{-1} \geq 0)$

Das folgt durch Multiplikation mit $(x^{-1})^2$.

9. $(0 \leq x \leq y \text{ und } x, y \text{ invertierbar}) \Rightarrow (0 \leq y^{-1} \leq x^{-1})$

Das folgt durch Multiplikation mit $y^{-1}x^{-1}$.

2.2.10 (Einbettung von \mathbb{Z} in angeordnete Kringe). Schreiben wir zur besonderen Betonung wieder 0_R und 1_R , so gelten nach dem vorhergehenden in jedem angeordneten Kring R mit $0_R \neq 1_R$ die Ungleichungen

$$\dots < (-1_R) + (-1_R) < (-1_R) < 0_R < 1_R < 1_R + 1_R < \dots$$

Insbesondere folgt aus $m1_R = n1_R$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ schon $m = n$. Unser eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow R, m \mapsto m1_R$ ist in diesem Fall mithin eine Injektion

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow R$$

und diese Injektion ist zusätzlich auch ein Ordnungshomomorphismus. Das Bild dieser Injektion könnte einen eigenen Namen kriegen, zum Beispiel \mathbb{Z}_R , aber wir kürzen unsere Notation ab, bezeichnen dieses Bild auch mit \mathbb{Z} und schreiben kürzer m statt $m1_R$.

2.2.11 (Einbettung von \mathbb{Q} in angeordnete Körper). Ist K ein angeordneter Körper, so erhalten wir einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q} \rightarrow K$ durch die Vorschrift $m/n \mapsto m1_K/n1_K$. Es ist leicht zu sehen, daß er der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{Q} \rightarrow K$ ist. Wie jeder Körperhomomorphismus ist auch er eine Injektion

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$

und man prüft leicht, daß auch diese Injektion ein Ordnungshomomorphismus ist. Wir könnten diese Injektion zum Beispiel $q \mapsto q_K$ notieren, sind aber etwas nachlässig, bezeichnen das Bild unserer Injektion $\mathbb{Q} \rightarrow K$ meist kurzerhand mit demselben Buchstaben \mathbb{Q} statt genauer \mathbb{Q}_K und hängen auch den Elementen von \mathbb{Q} meist keinen Index an, wenn wir eigentlich ihr Bild in K meinen.

Definition 2.2.12. Für jeden angeordneten Kring R definieren wir eine Abbildung $R \rightarrow R, x \mapsto |x|$, genannt der **Absolutbetrag** oder kürzer **Betrag**, durch die Vorschrift

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0; \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

2.2.13 (**Eigenschaften des Absolutbetrags**). Wir listen einige Eigenschaften des Absolutbetrags auf. Der Beweis der ersten fünf sei dem Leser überlassen.

1. $x \leq |x|$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $|xy| = |x||y|$
5. $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ für x invertierbar.
6. Es gilt die sogenannte **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in R$$

In Worten ist also der Betrag einer Summe stets kleinergleich der Summe der Beträge der Summanden. In der Tat gilt ja $x + y \leq |x| + |y|$ und ebenso auch $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Unsere Ungleichung heißt deshalb Dreiecksungleichung, weil sie in einem allgemeineren Kontext sagt, daß in einem Dreieck zwei Seiten zusammen stets länger sind als die Dritte.

7. $||a| - |b|| \leq |a + b| \quad \forall a, b \in R.$

In der Tat folgt aus der Dreiecksungleichung $|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$, also $|a| - |b| \leq |a + b|$. Ebenso folgert man aber auch $|b| - |a| \leq |a + b|$.

Ergänzung 2.2.14. Unter einer **angeordneten abelschen Gruppe** versteht man eine abelsche Gruppe $(A, +)$ mit einer Anordnung \leq derart, daß für beliebige Elemente $x, y, z \in A$ gilt

$$x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$$

Alle in diesem Abschnitt für angeordnete Kringe bewiesenen Aussagen, in denen die multiplikative Struktur keine Rolle spielt, gelten genauso für angeordnete abelsche Gruppen.

Übungen

Übung 2.2.15. In jedem angeordneten Körper gilt:

1. Aus $|x - a| \leq \eta$ und $|y - b| \leq \eta$ folgt $|(x + y) - (a + b)| \leq 2\eta$;
2. Aus $|x - a| \leq \eta \leq 1$ und $|y - b| \leq \eta \leq 1$ folgt $|xy - ab| \leq \eta(|b| + 1 + |a|)$;

3. Aus $|y - b| \leq \eta \leq |b|/2$ und $b \neq 0$ folgt $y \neq 0$ und $|1/y - 1/b| \leq 2\eta/|b|^2$.

Ergänzende Übung 2.2.16. In jedem angeordneten Ring gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die sogenannte **Bernoulli-Ungleichung** $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Hinweis: Vollständige Induktion.

Übung 2.2.17. Seien K ein angeordneter Körper und $I \subset K$ ein Intervall, in Formeln $(x < y < z \text{ und } x, z \in I) \Rightarrow y \in I$. Wir nennen eine Funktion $\phi : I \rightarrow K$ **konvex**, wenn „ihr Graph unter jeder seiner Sekanten liegt“, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \leq \frac{\phi(y) - \phi(z)}{y - z}$$

Man zeige in dieser Situation für beliebige $x_1, \dots, x_n \in I$ und beliebige nichtnegative $\mu_1, \dots, \mu_n \in K_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ die **Jensen'sche Ungleichung**

$$\phi \left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \phi(x_i)$$

In Worten ist also „der Funktionswert beim gewichteten Mittel der x_i beschränkt durch das gewichtete Mittel der Funktionswerte“. Hinweis: Die Voraussetzung läßt sich als der Fall $n = 2$ verstehen. Davon ausgehend führt Induktion ans Ziel.

2.3 Maximum und Supremum

Definition 2.3.1. Sei (Y, \leq) eine teilgeordnete Menge.

1. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **größtes Element**, wenn gilt $g \geq y \forall y \in Y$.
Ein Element $g \in Y$ heißt ein **maximales Element**, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y > g$.
2. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **kleinstes Element**, wenn gilt $k \leq y \forall y \in Y$.
Ein Element $k \in Y$ heißt ein **minimales Element**, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y < k$.

2.3.2. Jede teilgeordnete Menge besitzt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element. Wir dürfen deshalb den bestimmten Artikel verwenden und von **dem** größten beziehungsweise kleinsten Element reden. Besitzt eine teilgeordnete Menge ein größtes beziehungsweise ein kleinstes Element, so ist dies auch ihr einziges maximales beziehungsweise minimales Element. Im allgemeinen kann es jedoch maximale beziehungsweise minimale Elemente in großer Zahl geben, zumindest dann, wenn unsere Teilordnung keine Anordnung ist. Es kann auch durchaus passieren, daß es überhaupt kein minimales oder maximales Element gibt, und zwar selbst dann, wenn unsere teilgeordnete Menge nicht die leere Menge ist.

Definition 2.3.3. Seien (X, \leq) eine teilgeordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $o \in X$ heißt eine **obere Schranke** von Y in X , wenn gilt $o \geq y \forall y \in Y$.
2. Ein Element $u \in X$ heißt eine **untere Schranke** von Y in X , wenn gilt $u \leq y \forall y \in Y$.

Definition 2.3.4. Seien (X, \leq) eine teilgeordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $s \in X$ heißt die **kleinste obere Schranke** oder lateinischer das **Supremum** von Y in X , wenn s das kleinste Element ist in der Menge $\{o \in X \mid o \text{ ist obere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $s = \sup Y = \sup_X Y$.
2. Ein Element $i \in X$ heißt die **größte untere Schranke** oder lateinischer das **Infimum** von Y in X , wenn i das größte Element ist in der Menge $\{u \in X \mid u \text{ ist untere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $i = \inf Y = \inf_X Y$.

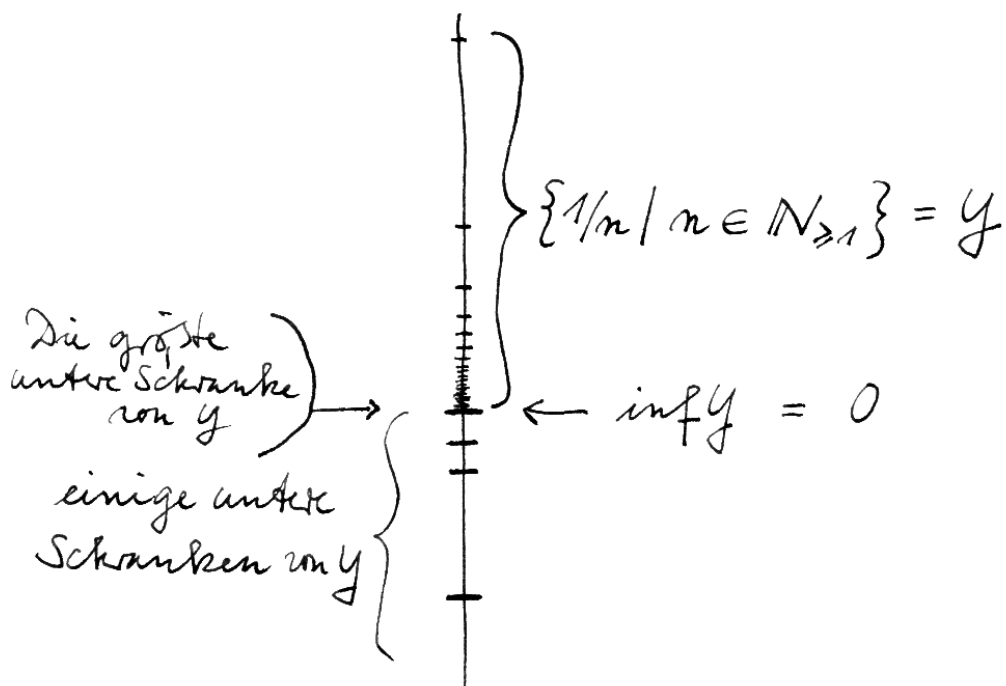
Beispiel 2.3.5. Die Teilmenge $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat kein größtes Element, besitzt jedoch in \mathbb{Q} eine kleinste obere Schranke, nämlich $\sup Y = 1$. Die Teilmenge $Z = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat ein größtes Element, nämlich die 1, und das ist dann natürlich auch gleichzeitig ihre kleinste obere Schranke in \mathbb{Q} , also haben wir auch $\sup Z = 1$. Die Teilmenge $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \subset \mathbb{Q}$ hat in \mathbb{Q} keine untere Schranke und dann natürlich erst recht keine größte untere Schranke.

Ergänzendes Beispiel 2.3.6. Auf der Potenzmenge einer beliebigen Menge ist die Inklusionsrelation eine Teilordnung. Bezüglich dieser Teilordnung ist die Vereinigungsmenge im Sinne von [LA1] 1.5.13 eines Mengensystems sein Supremum und die Schnittmenge sein Infimum.

Übungen

Übung 2.3.7. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ besitzt in \mathbb{Q} keine größte untere Schranke.

Übung 2.3.8. Sei X eine teilgeordnete Menge. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein größtes Element $g \in Y$, so gilt $g = \sup Y$. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein kleinstes Element $k \in Y$, so gilt $k = \inf Y$. Sind Teilmengen $Z \subset Y \subset X$ gegeben und besitzen Z und Y ein Supremum in X , so gilt $\sup Z \leq \sup Y$.



Die Menge $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ besitzt in \mathbb{Q} eine größte untere Schranke, nämlich die Null, in Formeln $\inf Y = 0$. Sie besitzt in \mathbb{Q} auch eine kleinste obere Schranke, nämlich die Eins, in Formeln $\sup Y = 1$.

Ergänzende Übung 2.3.9 (Teilordnungen und Verbandsstrukturen). Erklären wir auf einer teilgeordneten Menge B , in der jede zweielementige Teilmenge ein Supremum und ein Infimum hat, die beiden Verknüpfungen \vee und \wedge durch $a \vee b := \sup\{a, b\}$ und $a \wedge b := \inf\{a, b\}$, so erhalten wir einen Verband im Sinne von [GR] 2.6.3. Erklären wir umgekehrt auf einem Verband (B, \vee, \wedge) eine Relation R durch aRb genau dann, wenn $a \vee b = b$ oder gleichbedeutend $a = a \wedge b$, so ist R ein Teilordnung und jede zweielementige Teilmenge hat ein Supremum und ein Infimum. Schließlich sind diese beiden Konstruktionen zueinander inverse Bijektionen zwischen Verbandsstrukturen und Teilordnungen mit der fraglichen Eigenschaft auf jeder festen Menge B .

2.4 Reelle Zahlen

2.4.1 (**Geometrische und algorithmische Zahlbegriffe**). Der folgende Satz 2.4.3 enthält die Charakterisierung eines gewissen angeordneten Körpers von „reellen Zahlen“, auf der wir die Analysis aufbauen werden. Dieser Körper bildet einen wesentlichen Teil des Begriffsgebäudes, das es uns ermöglicht, unsere geometrischen Vorstellungen in der heute gebräuchlichen aus den Symbolen der Mengenlehre aufgebauten Sprache der höheren Mathematik wiederzufinden. Bereits im vierten Jahrhundert vor Christus erklärte der griechische Mathematiker Eudoxos eine „Zahl“ als das „Verhältnis zweier Längen“ und gab damit eine geometrische Beschreibung dessen, was wir heute „positive reelle Zahlen“ nennen würden. Die logischen Feinheiten der Beziehung dieses „geometrischen“ Zahlbegriffs zum „algorithmischen“ Zahlbegriff, der vom Prozeß des Zählens herkommt, wurden erst nach und nach verstanden. Den folgenden Satz 2.4.3 und seinen Beweis mag man als den Schlußpunkt dieser Entwicklung ansehen. Der Zwischenwertsatz 3.3.8 und stärker der Satz über die Gruppenwege in der Kreisgruppe 4.5.8 und seine Beziehung zu Winkelmaßen [LA2] 1.8.1 illustrieren, wie gut die bei diesem Beweis im Reich der abstrakten Logik und Mengenlehre konstruierten reellen Zahlen unsere geometrische Anschauung modellieren.

2.4.2. Der Beweis der Existenz eines angeordneten Körpers mit den im folgenden Satz 2.4.3 präzisierten Eigenschaften ist für das weitere Verständnis der Vorlesung belanglos. Ich gebe hier nur eine Beweisskizze, als da heißt einen Beweis für höhere Semester, um Sie zu überzeugen, daß wir nicht während des nächsten halben Jahres Folgerungen ziehen aus Grundannahmen, die überhaupt nie erfüllt sind. Ich rate dazu, bei der ersten Lektüre auf das genauere Studium des Existenzbeweises zu verzichten, der sich bis 2.4.17 hinzieht.

Satz 2.4.3 (Charakterisierung der reellen Zahlen). *1. Es gibt angeordnete Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ derart, daß in der angeordneten Menge \mathbb{R} jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke*

besitzt;

2. Solch ein angeordneter Körper ist im wesentlichen eindeutig bestimmt. Ist genauer $(\mathbb{R}', +, \cdot, \leq)$ ein weiterer derartiger angeordneter Körper, so gibt es genau einen Körperisomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}'$ und für diesen Körperisomorphismus gilt zusätzlich $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$.

2.4.4. Durch Multiplikation mit (-1) sehen wir, daß die im Satz formulierte „Infimumseigenschaft“ im Fall eines angeordneten Körpers gleichbedeutend ist zur **Supremumseigenschaft**, daß jede nichtleere Teilmenge mit einer oberen Schranke auch eine kleinste obere Schranke besitzt.

2.4.5. Die im Satz gegebene Charakterisierung trifft auf den angeordneten Körper der rationalen Zahlen nicht zu. Zum Beispiel wissen wir nach 2.3.7, daß die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ in \mathbb{Q} keine größte untere Schranke besitzt. Sie ist jedoch nicht leer und besitzt in \mathbb{Q} durchaus untere Schranken, nur eben keine größte.

Beweis von 2.4.3.1. Wir konstruieren einen derartigen Körper $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathbb{D}}$ als eine Menge $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ von Teilmengen der Menge \mathbb{Q} aller rationalen Zahlen,

$$\mathbb{R} := \left\{ \alpha \subset \mathbb{Q} \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ ist nicht leer,} \\ \alpha \text{ hat eine untere Schranke,} \\ \alpha \text{ hat kein kleinstes Element,} \\ \alpha \text{ enthält mit } x \text{ auch jedes } y > x. \end{array} \right. \right\}$$

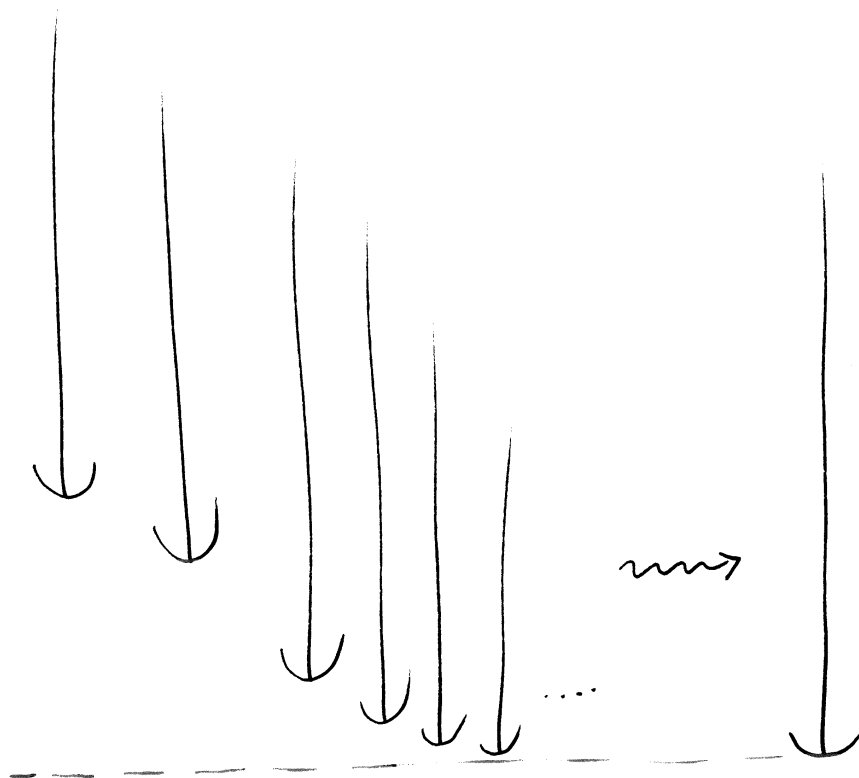
Man nennt solch ein α einen **Dedekind'schen Schnitt** und bezeichnet die so konstruierte Menge \mathbb{R} als das „Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen“. Auf unserer Menge \mathbb{R} von Teilmengen von \mathbb{Q} ist die Inklusionsrelation eine Anordnung und wir schreiben $\alpha \leq \beta$ statt $\alpha \supset \beta$. Ist $Y \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke, so liegt offensichtlich auch die Vereinigung

$$\bigcup_{\alpha \in Y} \alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid \text{Es gibt } \alpha \in Y \text{ mit } q \in \alpha\}$$

aller Teilmengen aus Y in \mathbb{R} und ist das Infimum von Y . Damit haben wir bereits eine angeordnete Menge mit der geforderten Eigenschaft konstruiert. Wir müssen darauf nur noch eine Addition und eine Multiplikation erklären derart, daß unsere Struktur zu einem angeordneten Körper wird. Die Addition ist unproblematisch: Wir setzen

$$\alpha + \beta := \{x + y \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ schon folgt $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, daß \mathbb{R} so zu einer kommutativen Gruppe wird mit neutralem Element $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, und daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Das Negative zu α



Zum Infimum in \mathbb{R}

kann man etwa erhalten, indem man die Menge $\{y \in \mathbb{Q} \mid y + x > 0 \ \forall x \in \alpha\}$ betrachtet und ihr für den Fall, daß sie ein kleinstes Element haben sollte, das noch wegnimmt. Wir erlauben uns nun die Abkürzung $0_{\mathbb{R}} = 0$. Die Multiplikation positiver Elemente ist ebenfalls unproblematisch: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0, \beta > 0$ setzen wir

$$\alpha\beta := \{xy \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ schon folgt $\alpha\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ und daß $\mathbb{R}_{>0}$ so zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$ wird. Das Distributivgesetz in \mathbb{Q} impliziert mit diesen Definitionen auch sofort die Regel

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Um unsere Multiplikation so auf ganz \mathbb{R} auszudehnen, daß \mathbb{R} ein angeordneter Körper wird, verwenden wir das anschließende technische Lemma 2.4.6. Eine Beweisskizze für die in Teil 2 behauptete Eindeutigkeit geben wir zu Ende dieses Abschnitts. \square

Lemma 2.4.6. *Sei $(R, +)$ eine kommutative Gruppe mit einer Anordnung \leq derart, daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$. Sei auf $R_{>0}$ eine Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ gegeben, die $R_{>0}$ zu einem kommutativen Monoid macht. Es gelte außerdem die Regel*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R_{>0}$$

So gibt es genau eine Fortsetzung unserer Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ zu einer Verknüpfung auf ganz R derart, daß $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring wird, und für diesen Ring ist \leq eine Ringanordnung. War $R_{>0}$ eine Gruppe, ist unser Ring R sogar ein Körper.

Beweis. Wenn die Fortsetzung unserer Multiplikation auf ganz R das Distributivgesetz erfüllen soll, müssen wir notwendig setzen

$$\alpha\beta := \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0; \\ -((-\alpha)\beta) & \alpha < 0, \beta > 0; \\ -(\alpha(-\beta)) & \alpha > 0, \beta < 0; \\ (-\alpha)(-\beta) & \alpha < 0, \beta < 0. \end{cases}$$

Es gilt nun, für diese Multiplikation Kommutativität und die Ringaxiome nachzuweisen. Unsere Multiplikation auf R ist offensichtlich kommutativ und assoziativ und macht $R \setminus \{0\}$ zu einem Monoid. Wir müssen also nur noch das Distributivgesetz

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

nachweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierbei $\alpha > 0$ und $\beta + \gamma > 0$ annehmen. Die einzigen nicht offensichtlichen Fälle sind dann $\beta > 0, \gamma < 0$ beziehungsweise $\beta < 0, \gamma > 0$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta > 0, \gamma < 0$. Nach unseren Annahmen gilt ja die Regel

$$\alpha\beta = \alpha((\beta + \gamma) + (-\gamma)) = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\gamma)$$

und daraus folgt sofort $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ auch in diesem letzten Fall. \square

Definition 2.4.7. Wir wählen für den weiteren Verlauf der Vorlesung einen festen angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, der die Supremumseigenschaft hat, erlauben uns wegen der in 2.4.3.2 formulierten „Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus“ den bestimmten Artikel, und nennen ihn **den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen**.

2.4.8. Ein angeordneter Körper heißt **archimedisch angeordnet**, wenn es zu jedem Element x des Körpers eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > x$.

Satz 2.4.9 (Archimedizität der reellen Zahlen). *Die natürlichen Zahlen besitzen keine obere Schranke in den reellen Zahlen, als da heißt, für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Hätte die Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ eine obere Schranke, so hätte sie nach 2.4.4 auch eine kleinste obere Schranke a . Dann wäre aber $a - 1 < a$ keine obere Schranke von \mathbb{N} , also gäbe es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > (a - 1)$. Es folgte $(n + 1) > a$, und bereits a selbst wäre keine obere Schranke von \mathbb{N} gewesen. \square

Korollar 2.4.10. 1. *Die ganzen Zahlen besitzen keine untere Schranke in den reellen Zahlen;*

2. *Für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$;*

3. *Es gilt $0 = \inf_{\mathbb{R}} \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \}$;*

4. *Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets noch eine rationale Zahl, in Formeln: Gegeben $x < y$ in \mathbb{R} gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.*

2.4.11. Dies Korollar gilt mit demselben Beweis für jeden archimedisch angeordneten Körper.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus 2.4.9. Um die Zweite zu zeigen, suche man $n > 1/\varepsilon$. Die dritte Aussage folgt unmittelbar aus der zweiten. Um die vierte Aussage zu zeigen, suchen wir zunächst $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < y - x$, also

$1 < ny - nx$, das heißt $1 + nx < ny$. Nun gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < ny < b$, also gibt es eine größte ganze Zahl m mit $m < ny$ und folglich $ny \leq m + 1$, woraus hinwiederum folgt $nx < m$ und dann $x < \frac{m}{n} < y$. \square

Definition 2.4.12. Mit einem endlichen Dezimalausdruck wie 3,141 bezeichnet man wie auf der Schule die rationale Zahl $3141/1000$. Die durch einen **unendlichen Dezimalausdruck** wie 3,1415... dargestellte reelle Zahl erklären wir als das Supremum der Menge ihrer endlichen Teilausdrücke beziehungsweise das Infimum, wenn ein Minus davorsteht. Wir setzen also zum Beispiel

$$3,1415\dots := \sup \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3,1 \\ 3,14 \\ 3,141 \\ 3,1415 \\ \dots \end{array} \right\}$$

Die Elemente der Menge aller endlichen Teilausdrücke haben wir hier nur der Übersichtlichkeit halber untereinander geschrieben, statt sie durch Kommata zu trennen, und rationale Zahlen haben wir stillschweigend mit ihren Bildern in \mathbb{R} identifiziert.

Beispiel 2.4.13. Ich zeige $1 = 0,9999\dots$. Nach unserer Konvention 2.4.12 gilt es zu zeigen $1 = \sup\{1 - 10^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$. Eine evidente Rechnung zeigt, daß es äquivalent ist, $0 = \inf\{10^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ zu zeigen, und das folgt unmittelbar aus Korollar 2.4.10, in dem wir $0 = \inf\{1/k \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ gezeigt hatten.

- Proposition 2.4.14.**
1. Jede reelle Zahl läßt sich durch einen unendlichen Dezimalausdruck darstellen;
 2. Genau dann stellen zwei verschiedene unendliche Dezimalausdrücke dieselbe reelle Zahl dar, wenn es eine Stelle vor oder nach dem Komma gibt und eine von Neun verschiedene Ziffer z derart, daß die beiden Dezimalausdrücke bis zu dieser Stelle übereinstimmen, ab dieser Stelle jedoch der eine die Form $z99999\dots$ hat und der andere die Form $(z + 1)00000\dots$

Beweis. Für den ersten Teil reicht es zu zeigen, daß sich jede nichtnegative reelle Zahl $y \geq 0$ als ein unendlicher Dezimalausdruck darstellen läßt. Nehmen wir zu jedem $s \in \mathbb{N}$ die größte reelle Zahl $r_s \leq y$ unter y mit höchstens s Stellen nach dem Komma, so gilt

$$y = \sup\{r_0, r_1, r_2, \dots\}$$

In der Tat ist y eine obere Schranke dieser Menge, aber jede reelle Zahl $x < y$ ist keine obere Schranke dieser Menge: Nach 2.4.10 oder, genauer, seinem Beweis gibt es nämlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ein $s \in \mathbb{N}$ und ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$x < m \cdot 10^{-s} < y$, als da heißt, es gibt ein s mit $x < r_s$. Um den zweiten Teil zu zeigen, dürfen wir uns weiter auf nichtnegative Zahlen beschränken. Wir sehen wie in 2.4.13, daß jeder Dezimalausdruck mit einer Neunerperiode dieselbe reelle Zahl darstellt wie ein geeigneter anderer Dezimalausdruck ohne Neunerperiode. Betrachten wir nun zwei verschiedene Dezimalausdrücke ohne Neunerperiode und zeigen, daß sie verschiedene reelle Zahlen darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien sie gleich vor dem Komma, aber verschieden in der ersten Nachkommastelle. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit mögen sie sogar beide nur eine Null vor dem Komma haben. Nach dem Komma habe der Dezimalausdruck a die Ziffern a_1, a_2, \dots und der Dezimalausdruck b die Ziffern b_1, b_2, \dots und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $a_1 > b_1$. Wir finden nach Annahme ein $r \geq 1$ mit $b_r \neq 9$. Bezeichne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die durch unsere beiden Dezimalausdrücke dargestellten reellen Zahlen. Dann gilt offensichtlich

$$\alpha \geq \frac{a_1}{10} > \frac{a_1}{10} - \frac{1}{10^r} \geq \beta \quad \square$$

Beweisskizze für 2.4.3.2. Wir gehen von der Bijektion zwischen einem beliebigen angeordneten Körper \mathbb{R} mit der Supremumseigenschaft und der Menge aller „Dezimalausdrücken ohne Neunerperiode“ aus 2.4.14 aus. verwendet zusammen mit der in den Übungen 2.4.18, 2.4.19 und 2.4.20 gegebenen Beschreibung von Addition und Multiplikation von Dezimalausdrücken. Dieser Beweis ist zwar vom höheren Standpunkt aus nicht besonders geschickt oder natürlich, aber dafür vielleicht vom Schulstoff aus besser zugänglich. Ein Zugang „vom höheren Standpunkt“ wird in Übung 2.4.21 skizziert. Daß jeder Körperhomomorphismus zwischen zwei Körpern \mathbb{R}, \mathbb{R}' mit der Supremumseigenschaft die Anordnung erhalten muß, wird in 3.3.14 klar werden, wo wir zeigen, daß für jeden angeordneten Körper \mathbb{R} mit der Supremumseigenschaft die nichtnegativen Elemente genau alle Quadrate sind, in Formeln $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. \square

Ergänzung 2.4.15. Es ist durchaus möglich, die Menge D aller „Dezimalausdrücke“ ohne jegliche Identifizierungen zu betrachten. Wenn wir diese Menge D mit der Struktur einer angeordneten Menge zu versehen, ist auch durchaus die Supremumseigenschaft erfüllt. Es ist jedoch nicht möglich, diese angeordnete Menge zu einem angeordneten Körper zu machen. Der naive Ansatz scheitert daran, daß nicht klar ist, wie man mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Multiplikation umgehen soll. Daß überhaupt jeder Ansatz zum Scheitern verurteilt ist, erkennt man etwa daran, daß es in D Elemente gibt mit $d = \sup_D X \Rightarrow d \in X$ für Teilmengen $X \subset D$, wie etwa $d := 1,0000\dots$, und andere Elemente wie etwa $d = 0,99999\dots$, für die diese Implikation nicht gilt. Für jeden angeordneten Körper K muß jedoch die Addition eines beliebigen Elements $k \in K$ ein Ordnungsisomorphismus $(k+) : K \xrightarrow{\sim} K$ sein.

Übungen

Übung 2.4.16. Man zeige, daß es für je zwei nichtleere Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ stets ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq a \leq y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$. Man zeige weiter, daß diese Bedingung an eine angeordnete Menge sogar gleichbedeutend ist zur Forderung, jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke möge auch eine größte untere Schranke besitzen.

Übung 2.4.17. Bezeichne $\mathbb{R} = \mathbb{R}_D$ das Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen. Man zeige, daß die durch die Struktur eines angeordneten Körpers auf \mathbb{R} nach 2.2.10 definierte Injektion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ auch beschrieben werden kann durch die Vorschrift $p \mapsto p_{\mathbb{R}} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > p\}$.

Übung 2.4.18 (Summe nichtnegativer Zahlen in Dezimaldarstellung). Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von \mathbb{R} . Mit der Notation $X + Y \subset \mathbb{R}$ für die Menge $\{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ zeige man $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$. Damit ist klar, wie man zu zwei durch Dezimalausdrücke dargestellten nichtnegativen reellen Zahlen einen Dezimalausdruck für ihre Summe bestimmen kann: Man betrachtet die Menge S aller Summen endlicher Teilausdrücke und nimmt den lexikographisch größten Dezimalausdruck, dessen sämtliche Anfangsstücke mit Anfangsstücken von Dezimalausdrücken aus unserer Menge S übereinstimmen. Da der Übertrag beim Addieren jeweils höchstens Eins sein kann, ist an jeder Stelle, an der nicht zwei Neuner übereinanderstehen, schon klar, welche Ziffer in unserem Dezimalausdruck für die Summe an der Stelle davor stehen muß.

Übung 2.4.19 (Differenz nichtnegativer Zahlen in Dezimaldarstellung). Man überlegt sich, daß man sich mit 2.4.18 darauf zurückziehen kann zu erklären, wie man für jede durch einen Dezimalausdruck a mit einer Null vor dem Komma gegebene reelle Zahl α einen Dezimalausdruck für $\beta := 1 - \alpha$ bestimmt. Sind aber a_1, a_2, \dots die Nachkommastellen unseres Dezimalausdrucks a , so sind die Ziffern b_i gegeben durch $a_i + b_i = 9$ nach 2.4.18 offensichtlich Nachkommastellen, die zusammen mit einer Null vor dem Komma einen Dezimalausdruck für β bilden.

Übung 2.4.20 (Produkt in Dezimaldarstellung). Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}_{>0}$. Mit der Notation $XY \subset \mathbb{R}$ für die Menge $\{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ zeige man $\sup(XY) = (\sup X)(\sup Y)$. Damit ist ähnlich wie in 2.4.18 klar, wie man zu je zwei durch Dezimalausdrücke dargestellten reellen Zahlen einen Dezimalausdruck für ihr Produkt bestimmen kann.

Ergänzende Übung 2.4.21 (Für höhere Semester). Man zeige die in 2.4.3.2 behauptete Eindeutigkeit der reellen Zahlen bis auf eindeutigen Isomorphismus. Hinweis: Die gesuchte Bijektion φ kann zum Beispiel konstruiert werden durch die Vorschrift $\varphi(\alpha) = \inf\{q_{\mathbb{R}'} \mid q \in \mathbb{Q}, q_{\mathbb{R}'} > \alpha\}$. Man zeige allgemeiner auch, daß jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität ist. Hinweis: Nach 3.3.14

sind die nichtnegativen reellen Zahlen genau die Quadrate, jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erhält also die Anordnung. Andererseits aber muß er auf \mathbb{Q} die Identität sein.

Ergänzende Übung 2.4.22 (Für höhere Semester). Gegeben ein archimedisch angeordneter Körper k gibt es genau einen ordnungserhaltenden Körperhomomorphismus $k \rightarrow \mathbb{R}$. Hinweis: Ähnlich wie 2.4.21, das man umgekehrt aus diesem Resultat ableiten kann, sobald man weiß, daß es zu jeder positiven reellen Zahl eine Quadratwurzel gibt.

2.5 Rationale und reelle Zahlen im Vergleich

Definition 2.5.1. Eine Menge heißt **abzählbar**, wenn es eine Bijektion unserer Menge mit einer Teilmenge der Menge \mathbb{N} aller natürlichen Zahlen gibt. Gleichbedeutend können wir auch fordern, daß unsere Menge entweder leer ist oder es eine Surjektion von \mathbb{N} darauf gibt. Eine Menge heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie abzählbar aber nicht endlich ist. Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.

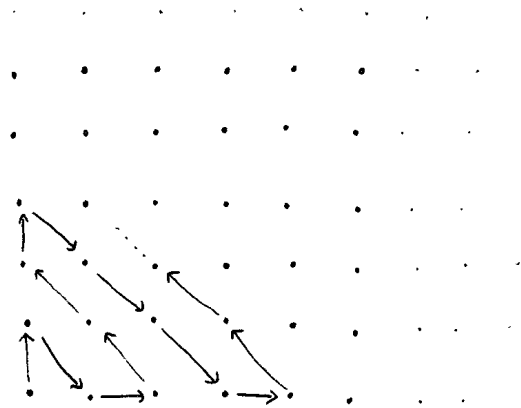
Satz 2.5.2. 1. Es gibt eine Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$, in Worten: Die Menge der rationalen Zahlen ist **abzählbar unendlich**;

2. Es gibt keine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, in Worten: Die Menge der reellen Zahlen ist **überabzählbar**.

Beweis. 1. Für jede natürliche Zahl N gibt es nur endlich viele Brüche $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und $|p| \leq N$, $|q| \leq N$. Wir beginnen unser Abzählen von \mathbb{Q} mit den Brüchen für $N = 1$, dann nehmen wir die Brüche hinzu mit $N = 2$, und indem wir so weitermachen zählen wir ganz \mathbb{Q} ab.

2. Hierzu verwenden wir das **Cantor'sche Diagonalverfahren**. Man beachte zunächst, daß ein unendlicher Dezimalbruch, in dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen, nur dann dieselbe reelle Zahl darstellt wie ein beliebiger anderer unendlicher Dezimalbruch, wenn die beiden in jeder Stelle übereinstimmen. Wir betrachten nun eine beliebige Abbildung $\mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \mapsto r_i$, und zeigen, daß sie keine Surjektion sein kann. Wir schreiben dazu jedes r_i als unendlichen Dezimalbruch. Dann finden wir einen unendlichen Dezimalbruch r , bei dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen und so, daß r für an der i -ten Stelle nach dem Komma verschieden ist von r_i . Dies r ist dann verschieden von allen r_i und unsere Abbildung $i \mapsto r_i$ kann keine Surjektion gewesen sein. \square

Bemerkung 2.5.3. Man kann sich fragen, ob jede Teilmenge der reellen Zahlen entweder abzählbar ist oder in Bijektion zu den reellen Zahlen selber. Die schon



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar und damit auch allgemeiner das Produkt von je zwei und dann auch von endlich vielen abzählbaren Mengen.

$$\begin{aligned}
 r_0 &= 1\textcircled{2}87538\dots \\
 r_1 &= 0,0\textcircled{1}1338\dots \\
 r_2 &= 14,2\textcircled{2}222\dots \\
 r_3 &= 338,12\textcircled{3}45\dots \\
 &\vdots \\
 r &= 1,134\dots
 \end{aligned}$$

Illustration zum Cantor'schen Diagonalverfahren. Ähnlich zeigt man, daß die Menge $\text{Ens}(\mathbb{N}, E)$ aller Abbildungen von \mathbb{N} in eine Menge E mit mindestens zwei Elementen nicht abzählbar ist.

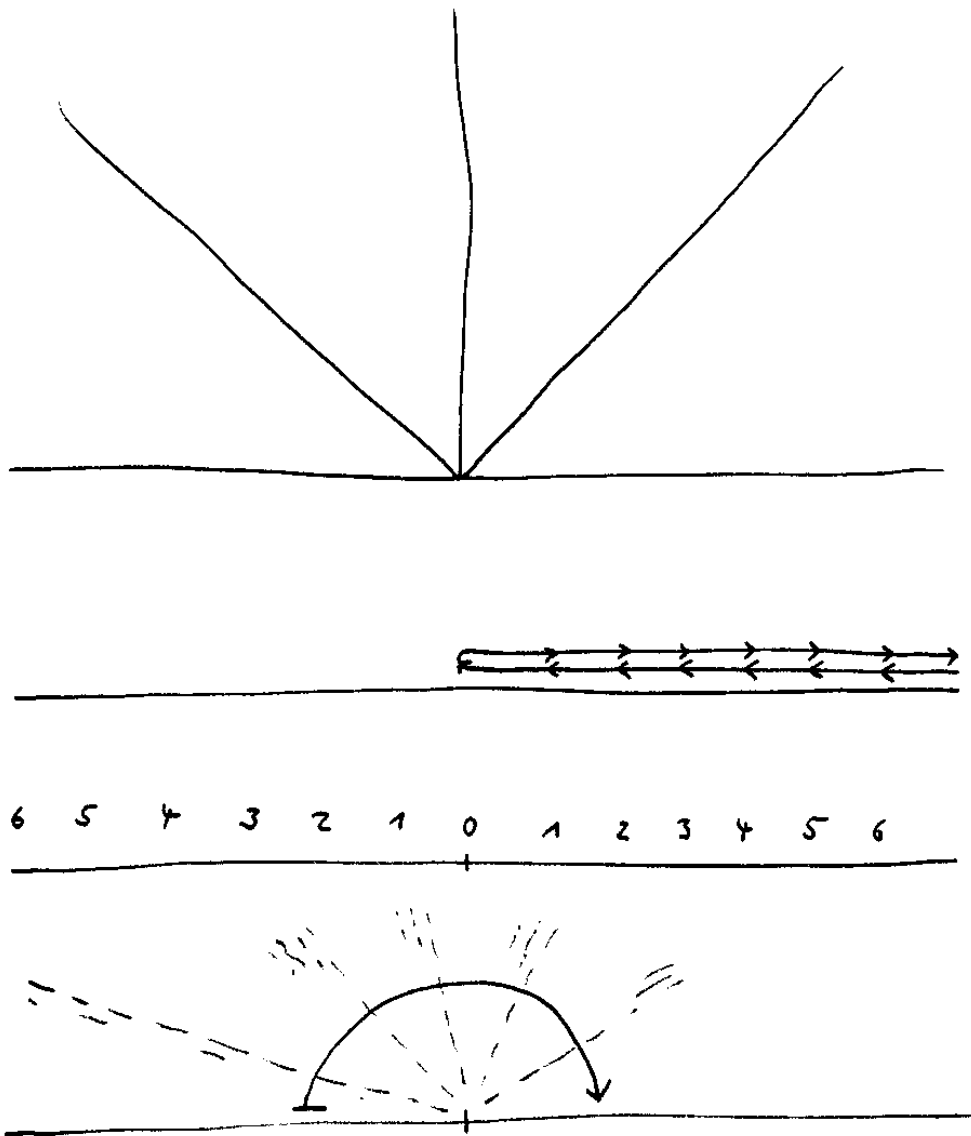
auf Cantor zurückgehende Vermutung, das könnte gelten, ist bekannt als die **Kontinuumshypothese**. Sie wurde 1963 von Paul Cohen in sehr merkwürdiger Weise geklärt: Er zeigte, daß unsere Frage in dem axiomatischen Rahmen, in dem man die Mengenlehre üblicherweise formalisiert, nicht entscheidbar ist. Cohen wurde für diese Leistung auf dem internationalen Mathematikerkongress 1966 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Die Kontinuumshypothese ist übrigens die erste Frage einer berühmten Liste von 23 Fragestellungen, den sogenannten **Hilbert'schen Problemen**, die David Hilbert in seiner Ansprache auf dem internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris vorstellte in seinem Bemühen, „aus verschiedenen mathematischen Disziplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läßt“.

3 Stetigkeit und Grenzwerte

3.1 Anschauung für Funktionen

3.1.1. Abbildungen mit Werten in irgendeiner Art von Zahlen nennen wir **Funktionen**. Wir erlauben hier auch Werte in \mathbb{R} . Wollen wir besonders betonen, daß nur reelle Zahlen als Werte angenommen werden, so sprechen wir von **reellwertigen Funktionen**. Reellwertige Funktionen auf der reellen Zahlengeraden mag man sich auf viele verschiedene Arten vorstellen. Gleichzeitig diskutiere ich Anschauungen für Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. In der Schule ist es üblich, eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch ihren Graphen $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ zu veranschaulichen, also durch eine Teilmenge der Ebene \mathbb{R}^2 .
2. In der Physik ist es üblich, sich eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow X, t \mapsto f(t)$ von \mathbb{R} in irgendeine Menge X vorzustellen als ein Teilchen, das sich im Raum X bewegt und sich zur Zeit t für lateinisch „tempus“ am Punkt $f(t)$ befindet. Im Fall $X = \mathbb{R}$ hätten wir uns also ein Teilchen vorzustellen, das sich auf der Zahlengerade bewegt. Im Fall $X = \mathbb{R}^2$ beziehungsweise $X = \mathbb{R}^3$ können wir uns ein Teilchen vorzustellen, das sich auf der Koordinatenebene beziehungsweise im dreidimensionalen Raum bewegt.
3. Eine reellwertige Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer beliebigen Menge kann man sich als eine Temperaturverteilung auf besagter Menge vorstellen, im Fall $X = \mathbb{R}$ also als eine Temperaturverteilung auf der reellen Zahlengeraden, im Fall $X = \mathbb{R}^2$ beziehungsweise $X = \mathbb{R}^3$ als Temperaturverteilung auf der Ebene beziehungsweise im Raum.
4. In der Mathematik ist es auch nützlich, sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wirklich als Abbildung der Zahlengerade auf sich selber vorzustellen. Als Beispiel betrachten wir den Absolutbetrag, der als Abbildung aufgefaßt den negativen Teil der Zahlengerade auf den positiven Teil herüberklappt. Ebenso mag man sich eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vorstellen als eine Beschreibung für das Aufspannen eines Gummituchs im Raum.
5. Im Fall $m + n \leq 3$ kann man sich eine Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ auch noch durch ihren Graphen vorstellen. Im Fall $m = 2$ wäre der Graph eine hügelige Landschaft, jedem Punkt der Ebene wird die dortige Höhe zugeordnet. Im Fall $m = 1$ wäre der Graph eher eine Art Draht im Raum, zum Beispiel ist der Graph von $t \mapsto (\sin t, \cos t)$ ein Draht, der als Spirale um die t -Achse liegt.



Vier verschiedene Anschauungen für eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen am Beispiel des Absolutbetrags $x \mapsto |x|$

3.1.2. Bereits beliebige Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ können „wild aussehen“. Man denke etwa an die Abbildung, die jeder rationalen Zahl den Betrag ihres Nenners nach vollständigem Kürzen zuordnet und jeder irrationalen Zahl ihre fünfte Nachkommastelle. Wir führen nun die „stetigen Funktionen“ ein und zeigen insbesondere, daß für stetige auf einem Intervall definierte und injektive Funktionen auch ihr Bild ein Intervall ist und die Umkehrfunktion stetig. Das liefert uns viele Funktionen als Umkehrfunktionen bereits bekannter Funktionen. In der schmutzigen Anschauung ist eine reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall stetig, wenn man „ihren Graphen zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen“. Diese Anschauung werden wir im Folgenden präzisieren.

3.1.3. Die mit dieser Materie bereits Vertrauten seien vorgewarnt, daß ich im folgenden bei der Behandlung von Grenzwerten und Stetigkeit einen eher ungewöhnlichen Ansatz verfolge. Am Anfang steht der Begriff einer Intervallumgebung eines Punktes in den erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{\infty, -\infty\}$ und allgemeiner eines Quaders um einen Punkt in $\bar{\mathbb{R}}^n$. Danach erklären wir, wann eine Abbildung von einer Teilmenge $D \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ nach $\bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist bei einem Punkt $p \in D$ und besprechen die Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Abbildungen. Die Betrachtung mehrerer Variablen scheint mir didaktisch vorteilhaft, weil sie ausdrucksstärkere graphische Illustrationen erlaubt und darin Aussagen wie die Stetigkeit der Addition und Multiplikation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ formuliert und bewiesen werden können. Danach erst erklären wir den Grenzwert einer Funktion als den „Funktionswert der eindeutigen stetigen Fortsetzung“ und den Grenzwert einer Folge als den Spezialfall des Grenzwerts einer auf \mathbb{N} definierten Funktion. Dieses Vorgehen steht im Kontrast zu der übliche Vorgehensweise, bei der man mit Grenzwerten von Folgen beginnt, bevor man von dort ausgehend zur Stetigkeit von Funktionen und ihren Grenzwerten kommt.

3.2 Intervalle und Stetigkeit

Definition 3.2.1. Eine Teilmenge einer teilgeordneten Menge heißt ein **Intervall**, wenn mit zwei beliebigen Punkten auch jeder Punkt dazwischen zu unserer Teilmenge gehört. Ist in Formeln (X, \leq) eine teilgeordnete Menge, so heißt demnach eine Teilmenge $I \subset X$ ein Intervall oder noch präziser ein **Intervall in X** , wenn für $x, y, z \in X$ mit $x < y < z$ aus $x, z \in I$ folgt $y \in I$.

Definition 3.2.2. Wir erweitern die reellen Zahlen durch zwei zusätzliche Punkte $-\infty$ und ∞ zu der in offensichtlicher Weise angeordneten Menge der **erweiterten reellen Zahlen**

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

3.2.3 (**Reelle Intervalle**). Jede Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt in $\bar{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum. Wir kürzen im folgenden meist $\sup_{\bar{\mathbb{R}}} = \sup$ und $\inf_{\bar{\mathbb{R}}} = \inf$ ab. Für

ein Intervall $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ mit Supremum $a = \sup I$ und Infimum $b = \inf I$ gibt es die Alternativen $a \in I$ oder $a \notin I$ und $b \in I$ oder $b \notin I$. Es gibt damit vier Typen von Intervallen in $\bar{\mathbb{R}}$, für die die beiden folgenden Notationen gebräuchlich sind:

$$\begin{aligned} [a, b] &= [a, b] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\} \\]a, b[&= (a, b) = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x < b\} \\ [a, b[&= [a, b) = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\} \\]a, b] &= (a, b] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}$$

Wählen wir hier $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ beliebig mit $a < b$, so erhalten wir genau alle Intervalle in $\bar{\mathbb{R}}$ mit mehr als einem Element, die **mehrpunktigen Intervalle**. Wir benutzen die eben erklärten Notationen jedoch auch im Fall $a \geq b$, sie bezeichnen dann manchmal eine einpunktige Menge und meist die leere Menge. Ein Intervall in $\bar{\mathbb{R}}$ nennen wir ein **reelles Intervall**.

3.2.4 (Diskussion der Notation). Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann mit (a, b) ein Intervall gemeint ist und wann ein Paar aus \mathbb{R}^2 . Sind a und b konkrete Zahlen, etwa $a = 1$ und $b = 27$, so wäre zu allem Überfluß auch noch eine dritte Lesart von $(1, 27)$ als die in Klammern notierte Dezimalzahl $1,27$ denkbar. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, was jeweils gemeint ist. Wenn man genau hinguckt, sollte auch im letzteren Fall der Abstand nach dem Komma etwas kleiner sein.

3.2.5. Ein Intervall in $\bar{\mathbb{R}}$ heißt **kompakt**, wenn es eines unserer Intervalle $[a, b]$ ist. Der Begriff „kompakt“ wird in 5.1.1 auf beliebige Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$ verallgemeinert.

3.2.6. Ein reelles Intervall heißt **offen**, wenn es eines unserer Intervalle (a, b) ist. Der Begriff „offen“ wird in 5.5.1 auf beliebige Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$ verallgemeinert.

Definition 3.2.7. Gegeben ein Punkt $p \in \bar{\mathbb{R}}$ verstehen wir unter einer **Intervallumgebung von p** ein Intervall $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ mit $p \in I$, das auch einen Punkt $\beta > p$ enthält, falls es einen solchen Punkt in $\bar{\mathbb{R}}$ gibt, sowie einen Punkt $\alpha < p$, falls es einen solchen Punkt in $\bar{\mathbb{R}}$ gibt.

Beispiel 3.2.8. Intervallumgebungen von $p \in \mathbb{R}$ sind alle Intervalle der Gestalt $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) mit $a < p < b$ und $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiel 3.2.9. Intervallumgebungen von ∞ sind alle Intervalle der Gestalt $[a, \infty]$ oder $(a, \infty]$ mit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ und $a < \infty$.

Beispiel 3.2.10. Intervallumgebungen von $-\infty$ sind alle Intervalle der Gestalt $[-\infty, b]$ oder $[-\infty, b)$ mit $b \in \bar{\mathbb{R}}$ und $-\infty < b$.

Definition 3.2.11. Gegeben ein Punkt $p = (p_1, \dots, p_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$ verstehen wir unter einer **Quaderumgebung von p** oder kurz einem **Quader um p** eine Teilmenge $Q \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ der Gestalt $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ mit I_ν jeweils einer Intervallumgebung von p_ν .

Definition 3.2.12. Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ heißt **stetig an einer Stelle** $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$, wenn es für jeden Quader Q um $f(p)$ einen Quader Q' um p gibt mit $f(Q') \subset Q$.

3.2.13. Ein Datum bestehend aus einer Menge X , einer Teilmenge $D \subset X$ und einer Abbildung $f : D \rightarrow Y$ in eine weitere Menge Y notieren wir im folgenden abkürzend

$$f : X \supset D \rightarrow Y$$

Definition 3.2.14. Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ heißt **stetig an einer Stelle** $p \in D$, wenn es für jeden Quader Q um $f(p)$ einen Quader Q' um p gibt mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. Eine Abbildung, die stetig ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs, heißt **stetig**.

3.2.15. Auf Englisch sagt man für stetig **continuous**, auf Französisch **continue**.

Beispiel 3.2.16 (Aufschneiden der Ebene). Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x, y)$ für $x < 0$ und $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ für $x \geq 0$ bedeutet anschaulich, daß wir die Ebene längs der y -Achse aufschneiden und den rechten Teil, dem wir auch die y -Achse selbst zuschlagen, um Eins nach rechts schieben. Sie ist nicht stetig an allen Punkten der y -Achse, ist jedoch stetig an allen Punkten außerhalb der y -Achse. An dieser Stelle möge als Argumentation ein Bild genügen.

Beispiel 3.2.17 (Stetigkeit konstanter Funktionen). Konstante Abbildungen $c : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ sind stetig. In diesem Fall gilt für jeden Quader Q um $c(p)$ und jeden beliebigen Quader Q' um p bereits $c(Q' \cap D) \subset Q$.

Beispiel 3.2.18 (Stetigkeit von Einbettungen). Eine beliebige Einbettungsabbildung $i : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^m$ gegeben durch $x \mapsto x$ ist stetig. In diesem Fall ist für jeden Quader Q um $p = i(p)$ bereits $Q' := Q$ selbst ein Quader um p mit $i(Q' \cap D) \subset Q$.

3.2.19. Gegeben $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ erklären wir $|x| := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ als das Maximum der Absolutbeträge der Koordinaten von x . Gegeben $p \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ erklären wir den **ε -Quader um p** durch die Vorschrift

$$B(p; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |p - x| < \varepsilon\}$$

Die Notation B für unseren Quader bedeutet „Ball“ und ist die übliche Bezeichnung für dieses Konzept im Kontext allgemeiner „metrischer Räume“.

3.2.20. Offensichtlich sind für $p \in \mathbb{R}^n$ die ε -Quader um p auch Quader um p . Offensichtlich umfaßt weiter jeder Quader um $p \in \mathbb{R}^n$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ den ε -Quader um p . Wenn „nirgends $\pm\infty$ vorkommt“, können wir die Stetigkeit auch mit diesen speziellen Quadern charakterisieren, wie im folgenden Lemma ausgeführt wird.

Lemma 3.2.21 (ε - δ -Kriterium für Stetigkeit). Seien $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $p \in D$ ein Punkt. Genau dann ist f stetig bei p , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Beweis. Ist f stetig bei p , so gibt es insbesondere für jedes $\varepsilon > 0$ und den Quader $Q := B(f(p), \varepsilon)$ um $f(p)$ einen Quader Q' um p mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. Für diesen Quader Q' hinwiederum gibt es $\delta > 0$ mit $B(p, \delta) \subset Q'$ und dann gilt a fortiori $f(B(p, \delta) \cap D) \subset B(f(p), \varepsilon) = Q$ alias

$$(|x - p| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(p)| < \varepsilon)$$

Ist umgekehrt das ε - δ -Kriterium erfüllt und ist Q ein Quader um $f(p)$, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B(f(p), \varepsilon) \subset Q$ und finden dazu ein $\delta > 0$ mit $f(B(p, \delta) \cap D) \subset B(f(p), \varepsilon)$ und dann ist $Q' := B(p, \delta)$ ein Quader um p mit $f(Q' \cap D) \subset Q$ und f ist stetig bei p . \square

3.2.22 (**Konventionen zu ε**). Wenn Sie in der Analysis die Formulierung „für alle $\varepsilon > 0$ gilt was auch immer“ antreffen, so dürfen Sie erwarten, daß dieses „was auch immer“, wenn es denn für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt, für alle größeren $\varepsilon > 0$ erst recht gilt. Salopp gesprochen besteht also die unausgesprochene Übereinkunft, durch die Verwendung des Buchstabens ε das anzudeuten, was man umgangssprachlich vielleicht mit „für jedes auch noch so kleine $\varepsilon > 0$ “ ausdrücken würde. Sie müssen nur einmal versuchen, beim Vorrechnen einer Übungsaufgabe statt ε den Buchstaben M zu verwenden: Auch wenn formal alles richtig sein sollte, wird Ihr Tutor deutlich länger darüber nachdenken müssen, ob Ihre Formulierung auch wirklich stimmt. „Sei $\varepsilon < 0$ “ schließlich ist ein mathematischer Witz.

3.2.23. Wenn wir den Beweis des ε - δ -Kriteriums nocheinmal durchgehen, stellen wir fest, daß dabei nur zwei Eigenschaften unserer ε -Quader $B(p, \varepsilon)$ eine Rolle spielen: Zum ersten, daß jeder ε -Quader $B(p, \varepsilon)$ um p einen Quader um p umfaßt, etwa sich selber, und zum zweiten, daß jeder Quader Q um $p \in \mathbb{R}^n$ einen ε -Quader $B(p, \varepsilon)$ um p umfaßt, für geeignetes $\varepsilon > 0$. Gegeben $p \in \mathbb{R}^n$ nennt man allgemeiner $U \subset \mathbb{R}^n$ eine **Umgebung von p** , wenn es einen Quader Q um p gibt mit $p \in Q \subset U$, und erhält in derselben Weise ein weiteres Stetigkeitskriterium, das weniger eckig daherkommt.

Lemma 3.2.24 (Umgebungskriterium für Stetigkeit). Seien $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $p \in D$ ein Punkt. Genau dann ist f stetig bei p , wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U' \cap D) \subset U$.

Beweis. Analog zum Beweis von 3.2.21 und dem Leser überlassen. \square

Beispiel 3.2.25 (Stetigkeit des Absolutbetrags). Der Absolutbetrag $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig. In der Tat gilt in diesem Fall an jeder Stelle p das ε - δ -Kriterium mit $\delta = \varepsilon$, denn aus $|x - p| < \varepsilon$ folgt $||x| - |p|| < \varepsilon$. Sogar die Fortsetzung des Absolutbetrags zu $\text{abs} : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ durch $|\infty| = |\infty| = \infty$ ist stetig, wie der Leser zur Übung selbst zeigen mag.

3.2.26. Ich will versuchen, an der Tafel einem Farbencode zu folgen, nach dem vorgegebene Umgebungen von Grenzwerten und dergleichen in gelber Farbe dargestellt werden, dazu zu findende N und dergleichen dahingegen in blauer Farbe. Rote Farbe ist an grünen Tafeln für nicht wenige Menschen schwer zu lesen.

Beispiel 3.2.27 (Stetigkeit der Addition). Die Addition ist eine stetige Abbildung $\text{add} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$. Um das zu sehen, müssen wir zeigen, daß sie stetig ist an jedem Punkt $p := (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt aber offensichtlich

$$\text{add}(B(p; \varepsilon/2)) \subset B(\text{add}(p); \varepsilon)$$

Also ist an jeder Stelle $p = (a, b)$ das ε - δ -Kriterium erfüllt mit $\delta = \varepsilon/2$.

Beispiel 3.2.28 (Stetigkeit der Multiplikation). Die Multiplikation ist eine stetige Abbildung $\text{mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$. Um das zu sehen, müssen wir zeigen, daß sie stetig ist an jedem Punkt $p := (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Wir überlegen uns dazu zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |(x - a)y + a(y - b)| \\ &\leq |x - a||y| + |a||y - b| \end{aligned}$$

Aus den beiden Ungleichungen $|x - a| < \eta$ und $|y - b| < \eta$ folgt zunächst $|y| < |b| + \eta$ und dann

$$|xy - ab| \leq \eta(|b| + \eta + |a|)$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, nämlich $\delta = \varepsilon/(|b| + 1 + |a|)$, mit

$$\text{mult}(B(p; \delta)) \subset B(\text{mult}(p); \varepsilon)$$

Mithin ist das ε - δ -Kriterium erfüllt an jeder Stelle $p = (a, b)$. Man beachte, daß im Gegensatz zur Addition unser δ hier nicht nur von ε abhängt, sondern auch von der auf Stetigkeit untersuchten Stelle p .

Beispiel 3.2.29 (Stetigkeit von Projektionen). Die Projektionen $\text{pr}_\nu : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ gegeben durch $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_\nu$ sind stetig. Der Einfachheit der Notation halber zeigen wir das nur für $\nu = 1$. Ist aber Q ein Quader um $p_1 = \text{pr}_1(p)$ alias eine Intervallumgebung von p_1 , so ist $Q' := Q \times \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ein Quader um p mit $\text{pr}_1(Q') \subset Q$.

Satz 3.2.30 (Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Abbildungen). Seien Abbildungen $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ und $g : \bar{\mathbb{R}}^n \supset E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^l$ gegeben und es gelte $f(D) \subset E$. Ist f stetig bei $p \in D$ und g stetig bei $f(p) \in E$, so ist auch $g \circ f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^l, x \mapsto g(f(x))$ stetig bei p .

3.2.31. Genau genommen ist die Notation $g \circ f$ in der Formulierung von Satz 3.2.30 im Sinne von 1.4.9 nicht ganz korrekt: Wir müßten eigentlich erst eine Abbildung $\tilde{f} : D \rightarrow E$ definieren durch $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und dann die Abbildung $g \circ \tilde{f}$ betrachten. Das scheint mir jedoch ein Fall, in dem größere Präzision nicht zu größerer Verständlichkeit führt.

Beweis. Da g stetig ist bei $f(p)$, finden wir für jeden Quader Q um $g(f(p))$ einen Quader Q' um $f(p)$ mit $g(Q' \cap E) \subset Q$. Da f stetig ist bei p , finden wir für diesen Quader Q' von $f(p)$ einen Quader Q'' um p mit $f(Q'' \cap D) \subset Q'$. Damit finden wir in der Tat für jeden Quader Q um $(g \circ f)(p)$ einen Quader Q'' um p mit $(g \circ f)(Q'' \cap D) \subset Q$. \square

Variante zum Beweis. Idem mit Umgebungen statt Quadern und dem Umgebungskriterium für Stetigkeit 3.2.24. \square

3.2.32 (**Schnitte von Umgebungen**). Offensichtlich ist der Schnitt von zwei Intervallumgebungen von $p \in \bar{\mathbb{R}}$ wieder eine Intervallumgebung von p . Offensichtlich ist allgemeiner der Schnitt von zwei Quadern um $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ wieder ein Quader um p . Offensichtlich ist folglich der Schnitt von zwei Umgebungen von $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ wieder eine Umgebung von p .

Satz 3.2.33 (Stetigkeit als komponentenweise Stetigkeit). Eine vorgegebene Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ ist stetig bei p genau dann, wenn alle ihre Komponenten $f_\nu := \text{pr}_\nu \circ f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig sind bei p für $1 \leq \nu \leq n$.

Beweis. Ist die Abbildung f stetig bei p , so auch alle $\text{pr}_\nu \circ f$ als die Verknüpfung der bei p stetigen Funktion f mit der nach 3.2.29 überall stetigen Projektion pr_ν . Seien umgekehrt alle f_ν stetig bei p und sei Q ein Quader um $f(p)$. Per definitionem finden wir Intervallumgebungen I_ν von $f_\nu(p)$ mit $I_1 \times \dots \times I_n = Q$. Da wir f_ν stetig bei p annehmen, gibt es jeweils einen Quader Q'_ν um p mit $f_\nu(Q'_\nu \cap D) \subset I_\nu$. Dann ist $Q' := Q'_1 \cap \dots \cap Q'_n$ nach 3.2.32 wieder ein Quader um p und offensichtlich gilt $f(Q') \subset Q$. \square

Korollar 3.2.34 (Summe und Produkt stetiger Funktionen sind stetig). Seien Funktionen $f, g : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig bei $p \in D$. So sind auch die Funktionen $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ und $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ stetig bei p .

Beweis. Wir schreiben $f + g = \text{add} \circ (f, g)$ und $fg = \text{mult} \circ (f, g)$ für $(f, g) : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(f, g) : x \mapsto (f(x), g(x))$. Nun ist (f, g) stetig bei p nach 3.2.33, denn seine Komponenten f, g sind stetig bei p nach Annahme. Weiter sind Addition und Multiplikation stetig nach 3.2.27, 3.2.28. Also sind auch $f + g = \text{add} \circ (f, g)$ und $fg = \text{mult} \circ (f, g)$ stetig bei p nach 3.2.30 als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. \square

Beispiel 3.2.35 (Stetigkeit von Polynomfunktionen). Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben wird durch eine Abbildungsvorschrift der Gestalt $x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit konstanten $a_\nu \in \mathbb{R}$, heißt eine **Polynomfunktion**. Jede Polynomfunktion ist stetig, denn konstante Funktionen sind stetig nach 3.2.17, die identische Funktion $x \mapsto x$ ist stetig nach 3.2.18 und Produkte sowie Summen stetiger Funktionen sind stetig nach 3.2.34.

Vorschau 3.2.36. Jede Familie reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in der höchstens endlich viele a_n von Null verschieden sind, liefert eine Polynomfunktion $\sum a_n x^n$. Nach Übung 3.5.53 oder allgemeiner [LA1] 5.4.3 liefern verschiedene Familien auch stets verschiedene Funktionen. Im Licht dieser Tatsache werden wir unsere Polynomfunktionen meist kürzer Polynome nennen, obwohl eigentlich der Begriff Polynom eher den formalen Ausdruck meint. Diese Unterscheidung ist aber erst in der Algebra wirklich von Belang. Wenn man nämlich mit endlichen Körpern arbeitet, so können verschiedene formale Ausdrücke $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ durchaus dieselbe Funktion liefern, vergleiche [LA1] 5.3.2.

3.2.37 (Diskussion der Terminologie). Das Wort „Polynom“ kommt von der griechischen Vorsilbe „poly“ für „viele“ und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Allgemeiner betrachtet man auch Polynome in mehreren Veränderlichen und meint damit Ausdrücke wie etwa $xyz + 7x^2y^4 - 12z + 1$. Dieses Polynom ist die Summe der vier **Monome** $xyz, 7x^2y^4, -12z$ und 1 , wobei das Wort „Monom“ diesmal mit der griechischen Vorsilbe „mono“ für „allein“ gebildet ist. Einen Ausdruck wie $xyz + 7x^2y^4$ würde man als **Binom** bezeichnen, diesmal mit der griechischen Vorsilbe „bi“ für „Zwei“. Ein anderes Binom wäre der Ausdruck $(x + y)$, dessen Potenzen die „binomische“ Formel [EIN] 1.1.23 explizit angibt. Es sollte klar sein, wie man aus unserer binomischen Formel auch Formeln für die Potenzen eines beliebigen Binoms erhält.

Beispiel 3.2.38 (Stetigkeit von Einschränkungen). Ist $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig bei $p \in E$ und $D \subset E$ eine Teilmenge mit $p \in D$, so ist auch die Einschränkung $f|_D : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig bei p . Das folgt sofort aus der Definition oder alternativ daraus, daß Einbettungen stetig sind nach 3.2.18 und die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig nach 3.2.30.

Satz 3.2.39 (Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft). Seien $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Abbildung und $p \in D$ ein Punkt. Gibt es eine Umgebung V von p derart, daß

die Einschränkung $f : V \cap D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist bei p , so ist auch $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ bereits stetig bei p .

Beweis. Gegeben ein Quader Q um $f(p)$ finden wegen der Stetigkeit der Einschränkung einen Quader Q'_1 um p mit $f(Q'_1 \cap V \cap D) \subset Q$. Da V eine Umgebung von p ist, finden wir weiter einen Quader Q'_2 um p mit $Q'_2 \subset V$. Ihr Schnitt $Q' := Q'_1 \cap Q'_2$ ist dann der gesuchte Quader um p mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. \square

Variante zum Beweis. Statt der Definition verwenden wir das Umgebungskriterium für Stetigkeit 3.2.24. Gegeben eine Umgebung U von $f(p)$ finden wegen der Stetigkeit der Einschränkung eine Umgebung U' von p mit $f(U' \cap (V \cap D)) \subset U$. Dann ist $U' \cap V$ die gesuchte Umgebung von p mit $f((U' \cap V) \cap D) \subset U$. \square

3.2.40 (Partiell stetig impliziert nicht stetig). Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß sowohl $x \mapsto f(x, b)$ als auch $y \mapsto f(a, y)$ stetig sind für alle b beziehungsweise alle a , daß aber dennoch die Funktion f selbst nicht stetig ist. Als Beispiel betrachte man die Funktion mit $(x, y) \mapsto xy/(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $(0, 0) \mapsto 0$. Sie ist nicht stetig am Nullpunkt nach dem anschließenden Satz 3.2.30, da nämlich ihre Verknüpfung mit $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$ nicht stetig ist bei $t = 0$. Die Stetigkeit von $t \mapsto (t, t)$ hinwiederum mag man aus der Komponentenregel 3.2.33 folgern. Der Anschauung mag die Erkenntnis helfen, daß unsere merkwürdige Funktion, wenn man vom Ursprung selbst einmal absieht, auf allen Geraden durch den Ursprung konstant ist. Auf den beiden Koordinatenachsen ist unsere Funktion konstant Null, auf allen anderen Geraden durch den Ursprung jedoch nimmt sie nur am Ursprung den Wert Null an und sonst konstant einen von Null verschiedenen Wert.

Übungen

Übung 3.2.41. In einer teilgeordneten Menge ist jeder Schnitt von Intervallen wieder ein Intervall.

Ergänzende Übung 3.2.42. Jede Teilmenge Y einer angeordneten Menge X ist die disjunkte Vereinigung aller maximalen in Y enthaltenen nichtleeren Intervalle von X . Hinweis: Hat ein System von Intervallen von X nichtleeren Schnitt, so ist auch seine Vereinigung wieder ein Intervall von X .

Übung 3.2.43 (Eine nur im Ursprung stetige Funktion). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist nur an der Stelle $p = 0$ stetig.

Übung 3.2.44 (Addition und Multiplikation im Unendlichen). Addition und Multiplikation lassen sich auf genau eine Weise fortsetzen zu stetigen Abbildun-

gen

$$\begin{aligned} \text{add} : \bar{\mathbb{R}}^2 \setminus \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\} &\rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \text{mult} : \bar{\mathbb{R}}^2 \setminus \{(\pm\infty, 0), (0, \pm\infty)\} &\rightarrow \bar{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

und zwar durch

$$\begin{aligned} a + \infty = \infty + a = \infty & \quad \text{falls } a \neq -\infty; \\ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty & \quad \text{falls } a \neq \infty; \\ a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty & \quad \text{falls } a > 0; \\ a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty & \quad \text{falls } a < 0; \\ a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty & \quad \text{falls } a > 0; \\ a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty & \quad \text{falls } a < 0. \end{aligned}$$

Sie lassen sich nicht weiter stetig fortsetzen auf die oben ausgeschlossenen Punkte $(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)$ für die Addition beziehungsweise $(\pm\infty, 0), (0, \pm\infty)$ für die Multiplikation.

Übung 3.2.45. Gegeben $f : \bar{\mathbb{R}} \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig bei $p \in D$ und $g : \bar{\mathbb{R}} \supset E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig bei $q \in E$ ist $f \times g : D \times E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^2$ stetig bei (p, q) .

Übung 3.2.46 (Stetigkeit durch Einquetschen). Gegeben $f, g, h : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in D$ und f, h stetig bei $p \in D$ mit $f(p) = h(p)$ ist auch g stetig bei p .

Übung 3.2.47 (Stetigkeit durch Verkleben). Seien $I, J \subset \bar{\mathbb{R}}$ Intervalle mit nicht-leerem Schnitt $I \cap J \neq \emptyset$ und sei $f : (I \cup J) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Man zeige: Sind die Einschränkungen $f|_I$ und $f|_J$ stetig, so ist auch f selbst stetig. Im übrigen wird sich der „schwierige“ Fall dieser Übung als Spezialfall von [AN2] 1.5.12 erweisen.

Übung 3.2.48. Man zeige, daß auf einem offenen reellen Intervall I jede konvexe reelle Funktion stetig ist. Hinweis: Die graphische Darstellung zum Beweis von 5.5.15 mag helfen. Eine Funktion heißt **konvex**, wenn für alle $x, z \in I$ gilt

$$f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Anschaulich bedeutet das, daß unsere Funktion „unter jeder ihrer Sekanten liegt“. Die Stetigkeit durch Einquetschen 3.2.46 mag helfen.

3.3 Zwischenwertsatz und Umkehrfunktionen

Definition 3.3.1. Eine Abbildung f zwischen teilgeordneten Mengen heißt

monoton wachsend,	wenn gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
streng monoton wachsend,	wenn gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
monoton fallend,	wenn gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
streng monoton fallend,	wenn gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

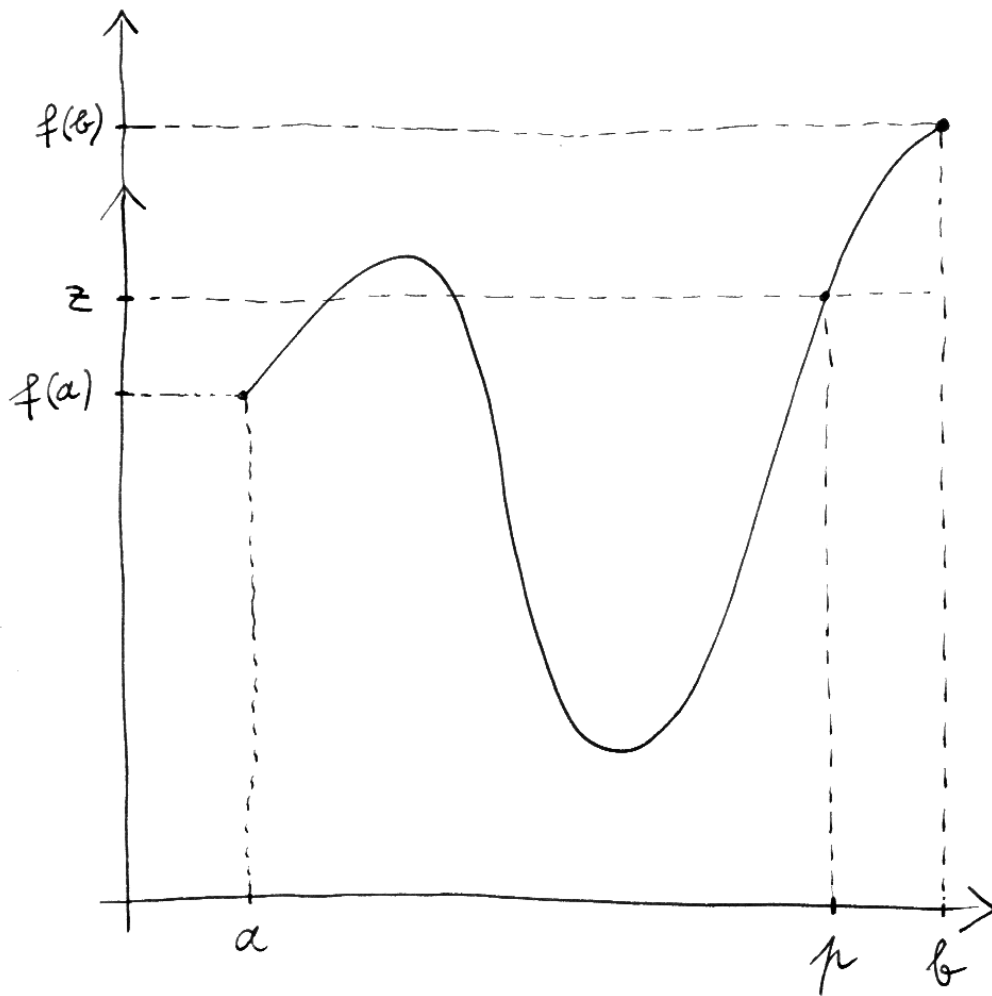


Illustration zum Zwischenwertsatz. Im vorliegenden Fall wird der gegebene Zwischenwert z sogar dreimal als Funktionswert angenommen. Unser erster Beweis führt stets zum hier eingezeichneten größten $p \in [a, b]$, an dem z als Funktionswert angenommen wird.

Eine Abbildung heißt **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder fallend ist. Eine Abbildung heißt **streng monoton**, wenn sie streng monoton wachsend oder fallend ist.

Proposition 3.3.2 (Stetigkeit monotoner Surjektionen auf Intervalle). *Es sei $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Abbildung. Ist ihr Bild $f(D)$ ein Intervall in \mathbb{R} , so ist f stetig.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit f monoton wachsend. Gegeben $p \in D$ gilt es, für jeden Quader Q um $f(p)$ einen Quader Q' um p zu finden mit $f(Q' \cap D) \subset Q$. Wir setzen $I := f(D)$ und unterscheiden vier Fälle.

1. Ist $f(p) \in I$ weder das größte noch das kleinste Element von I , so umfaßt jeder Quader Q um $f(p)$ ein Intervall der Gestalt $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha < f(p) < \beta$ und $\alpha, \beta \in I$, also $\alpha = f(a)$ und $\beta = f(b)$ mit $a, b \in D$ und $a < p < b$. Dann können wir $Q' = [a, b]$ nehmen;
2. Ist $f(p) \in I$ das größte aber nicht das kleinste Element von I , so umfaßt jeder Quader Q um $f(p)$ ein Intervall der Gestalt $[\alpha, f(p)]$ mit $\alpha < f(p)$ und $\alpha \in I$, also $\alpha = f(a)$ mit $a \in D$ und $a < p$. Dann können wir $Q' = [a, \infty]$ nehmen;
3. Ist $f(p) \in I$ das kleinste aber nicht das größte Element von I , so argumentieren wir analog;
4. Ist $f(p) \in I$ das kleinste und das größte alias das einzige Element von I , so ist f konstant und wir können $Q' = [-\infty, \infty]$ nehmen. \square

Beispiel 3.3.3 (Stetigkeit des Invertierens). Die Funktion $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig. In der Tat reicht es aufgrund der Lokalität der Stetigkeit 3.2.39 zu zeigen, daß ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}_{>0}$ und auf $\mathbb{R}_{<0}$ jeweils stetig ist. Diese Einschränkungen sind jedoch beide monoton und haben als Bildmenge jeweils ein Intervall.

Beispiel 3.3.4 (Stetigkeit des erweiterten nichtnegativen Invertierens). Die Abbildung

$$\text{inv}^+ : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$$

gegeben durch $x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x \in (0, \infty)$ sowie $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$ ist stetig. In der Tat ist diese Abbildung monoton und ihr Bild ist ein Intervall und die Behauptung folgt aus der Stetigkeit monotoner Surjektionen auf Intervalle 3.3.2.

Korollar 3.3.5 (Quotienten stetiger Funktionen sind stetig). *Gegeben stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0 \forall x \in D$ ist auch die Funktion $f/g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig.*

Beweis. Bezeichne $i : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto 1/x$. Sie ist stetig nach 3.3.3. Also ist auch $i \circ g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/g(x)$ stetig und dann auch das Produkt dieser Funktion mit der stetigen Funktion f . \square

Beispiel 3.3.6. Die Funktion

$$x \mapsto \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

ist stetig auf $D := \mathbb{R} \setminus 1$. Sie kann sogar zu einer stetigen Funktion auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden, die gegeben wird durch die Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

3.3.7. Eine Funktion, die sich als der Quotient eines Polynoms durch ein von Null verschiedenes Polynom darstellen läßt, heißt eine **rationale Funktion**. So eine Funktion ist a priori natürlich nur da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, und ist nach dem vorhergehenden Korollar auf dem Komplement der Nullstellenmenge ihres Nenners stetig. Betrachten wir unsere rationale Funktion jedoch nicht als Abbildung, sondern als formalen Ausdruck, so verstehen wir unter ihrem Definitionsbereich die etwas größere Menge, auf der „nach maximalem Kürzen“ der Nenner keine Nullstellen hat, vergleiche [LA1] 5.5.7. Man beachte, daß die hier gegebene etwas unscharfe Formulierung „nach maximalem Kürzen“ eigentlich erst in [AL] 2.4.19 gerechtfertigt wird, wo wir die Eindeutigkeit der „Primfaktorzerlegung“ in Polynomringen diskutieren. Bleibt auch nach maximalem Kürzen noch ein nichtkonstantes Polynom im Nenner stehen, so spricht man von einer **gebrochenrationalen Funktion**.

Satz 3.3.8 (Zwischenwertsatz). Für $a \leq b$ aus $\overline{\mathbb{R}}$ nimmt eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

3.3.9 (**Die schmutzige Anschauung**). Wenn man sich eine stetige reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall vorstellt als eine Funktion, deren Graphen man zeichnen kann ohne den Bleistift abzusetzen, so ist auch der Zwischenwertsatz anschaulich klar: Wenn unser Graph unter einer horizontalen Linie anfängt und oberhalb aufhört oder umgekehrt, so muß er an irgendeiner Stelle unsere horizontale Linie kreuzen.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(a) \leq f(b)$ annehmen. Gegeben $z \in [f(a), f(b)]$ suchen wir $p \in [a, b]$ mit $f(p) = z$. Wir betrachten dazu

$$p := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq z\}$$

und behaupten $f(p) = z$. Um das zu zeigen führen wir die Annahmen $f(p) < z$ und $z < f(p)$ beide zum Widerspruch. Aus $f(p) < z$ folgte zunächst $p < b$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein q mit $p < q < b$ und $f(q) \leq z$ und p wäre gar keine obere Schranke unserer Menge gewesen. Aus $z < f(p)$ dahingegen folgte zunächst $a < p$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein r mit $a < r < p$ und $z < f(x)$ für alle $x \in [r, p]$. Also wäre auch r schon eine obere Schranke unserer Menge und p könnte nicht ihre kleinste obere Schranke gewesen sein. \square

Korollar 3.3.10 (Abstrakter Zwischenwertsatz). *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist ein Intervall. Ist also in Formeln $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig, so ist auch $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Das ist nur eine Umformulierung des Zwischenwertsatzes 3.3.8. \square

Satz 3.3.11 (über die Umkehrfunktion). *Ist $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ streng monoton und stetig, so ist auch $f(I) \subset \bar{\mathbb{R}}$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist streng monoton und stetig.*

3.3.12. Hier ist unsere Notation wieder nicht ganz korrekt: Wir müßten genau genommen eigentlich die Bijektion $\tilde{f} : I \xrightarrow{\sim} f(I)$, $x \mapsto f(x)$ betrachten, dazu die inverse Abbildung $\tilde{f}^{-1} : f(I) \xrightarrow{\sim} I$ nehmen, und unser $f^{-1} : f(I) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definieren als die Verknüpfung von \tilde{f}^{-1} mit der Einbettung $I \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Beweis. Die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ ist offensichtlich monoton und ihr Bild ist ein Intervall, nämlich das Intervall I , also ist sie nach 3.3.2 stetig. Daß $f(I)$ ein Intervall ist, war die Aussage des abstrakten Zwischenwertsatzes 3.3.10. \square

3.3.13 (**Diskussion der Notation**). Die Umkehrfunktion f^{-1} darf nicht verwechselt werden mit der Funktion $x \mapsto 1/f(x)$: Ist zum Beispiel $q : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $q(x) = x^2$, so haben wir $1/q(x) = x^{-2}$, aber die Umkehrabbildung ist gegeben durch die Funktion $q^{-1}(y) = \sqrt{y}$, die Sie aus der Schule kennen und die wir im Anschluß auf ganz $[0, \infty)$ einführen. Die Notation ist hier leider nicht ganz eindeutig. Oft muß man aus dem Kontext erschließen, ob mit f^{-1} die Umkehrfunktion von f oder vielmehr die „Kehrwertfunktion“ $x \mapsto 1/f(x)$ gemeint ist.

3.3.14 (**Potenz- und Wurzelfunktionen**). Gegeben $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die n -te Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ auf $[0, \infty)$ nach 3.2.35 stetig und nach 2.2.9.3 streng monoton wachsend. Ihr Bild ist nach dem Zwischenwertsatz 3.3.10 ein Intervall und da für $a \geq 1$ gilt $a^n \geq a$ und andererseits $0^n = 0$ muß dies Intervall wieder $[0, \infty)$ sein. Wir definieren die **n -te Wurzel**

$$\sqrt[n]{} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

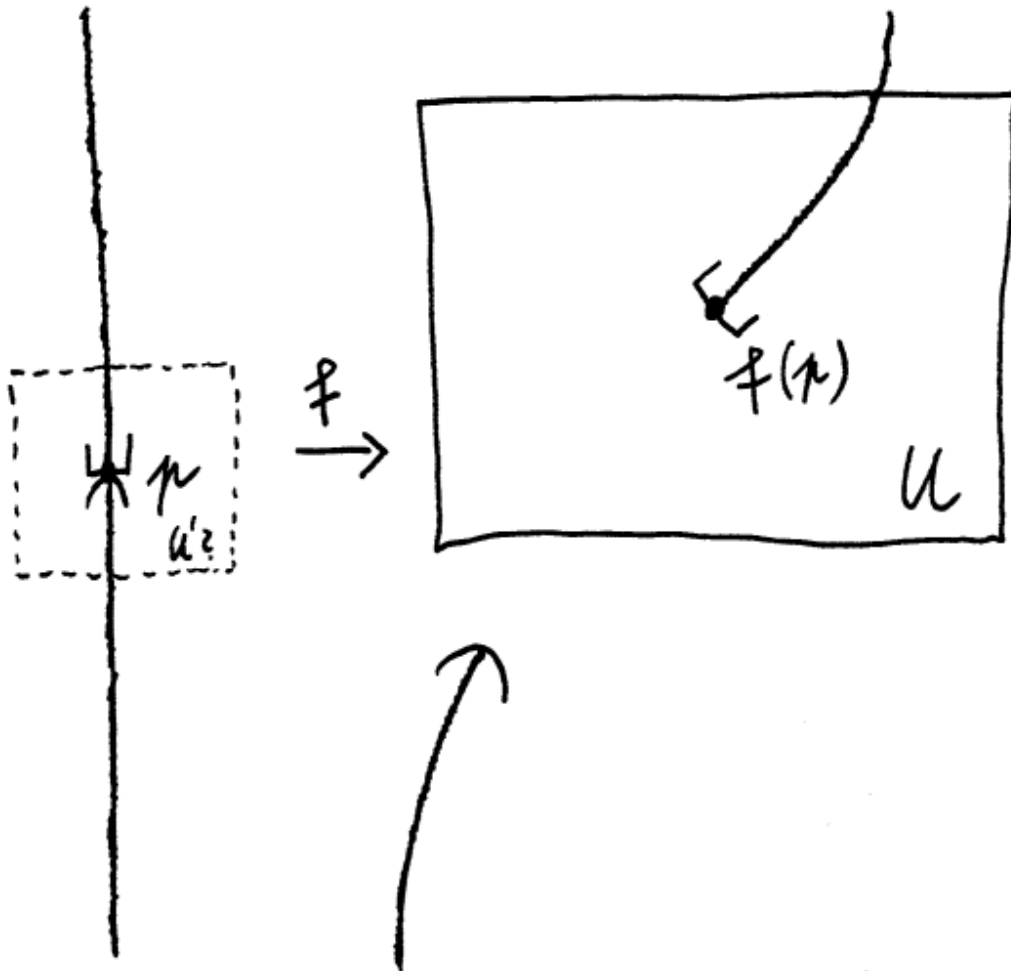


Illustration zur Stetigkeit in mehreren Veränderlichen. Dargestellt ist ein Geradenstück D in der Ebene nebst einer Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, die es in die Ebene abbildet und es dabei an einer Stelle $p \in D$ zerreißt. Dargestellt ist weiter eine Umgebung U von $f(p)$, für die es keine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$, so daß in der Tat f an dieser Aufreistelle p nicht stetig ist.

als die Umkehrfunktion zur n -ten Potenzfunktion $x \mapsto x^n$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion 3.3.11 ist $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ stetig. Im Fall $n = 2$ verwendet man die Abkürzung $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

3.3.15 (Potenz- und Wurzelfunktionen im Unendlichen). Immer noch für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist auch die Fortsetzung der n -ten Potenz durch $\infty \mapsto \infty$ zu einer Abbildung $\overline{\text{pot}}_n : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ stetig, da sie monoton und surjektiv ist. Die n -te Wurzel besitzt mithin auch eine stetige streng monotone Fortsetzung durch $\infty \mapsto \infty$ zu $\overline{\text{wurz}}_n : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$.

Beispiel 3.3.16. Die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \sqrt{x^4 + 5}$ liefert eine stetige Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ergänzung 3.3.17. Alle Definitionen und Ergebnisse dieses Abschnitts, die nicht Summen oder Produkte verwenden, bleiben gültig und sinnvoll, wenn wir $\overline{\mathbb{R}}$ durch eine allgemeinere angeordnete Menge ersetzen derart, daß zwischen je zwei verschiedenen Punkten stets noch ein weiterer Punkt liegt und daß jede nach oben beziehungsweise unten beschränkte Teilmenge in unserer Menge ein Supremum und beziehungsweise Infimum besitzt.

Übungen

Übung 3.3.18. Man zeige, daß die Funktion $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x/y$ stetig ist.

Übung 3.3.19. Man zeige, daß die Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x^2y + xy^3)/(x^2 + y^2 + 1)$ stetig ist.

Ergänzende Übung 3.3.20. Seien $a \leq b$ aus $\overline{\mathbb{R}}$ gegeben und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(b) = 0$. Man zeige, daß dann f eine kleinste Nullstelle in $[a, b]$ hat.

Übung 3.3.21. Jede Polynomfunktion $x \mapsto a_n x^n + \dots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Ist $a_n > 0$ und $a_0 > 0$, so besitzt sie sogar mindestens eine negative Nullstelle.

Übung 3.3.22. Gegeben ein Intervall $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist jede injektive stetige Funktion $I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ streng monoton.

3.4 Umfang des Einheitskreises

3.4.1. Bekanntlich bezeichnet π , ein kleines griechisches P für „Perimeter“, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Um diese Anschauung zu formalisieren zur Definition einer reellen Zahl im Sinne von 2.4.7 gehen wir aus von der anschaulichen Bedeutung von π als Länge des Halbkreises H mit Radius Eins

$$H := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1, b \geq 0\}$$

Seien $x, y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die beiden Abbildungen, die jedem Punkt der Ebene seine erste beziehungsweise zweite Koordinate zuordnen, also $v = (x(v), y(v)) \forall v \in \mathbb{R}^2$. Die Distanz $d(v, w) \in \mathbb{R}$ zwischen zwei Punkten $v, w \in \mathbb{R}^2$ der Ebene erklären wir in Erinnerung an den Satz des Pythagoras durch die Formel

$$d(v, w) := \sqrt{(x(v) - x(w))^2 + (y(v) - y(w))^2}$$

Die **Kreiszahl** $\pi \in \mathbb{R}$ definieren wir dann als das Supremum über die „Längen aller in unseren Halbkreis H einbeschriebenen Polygonzüge“, in Formeln

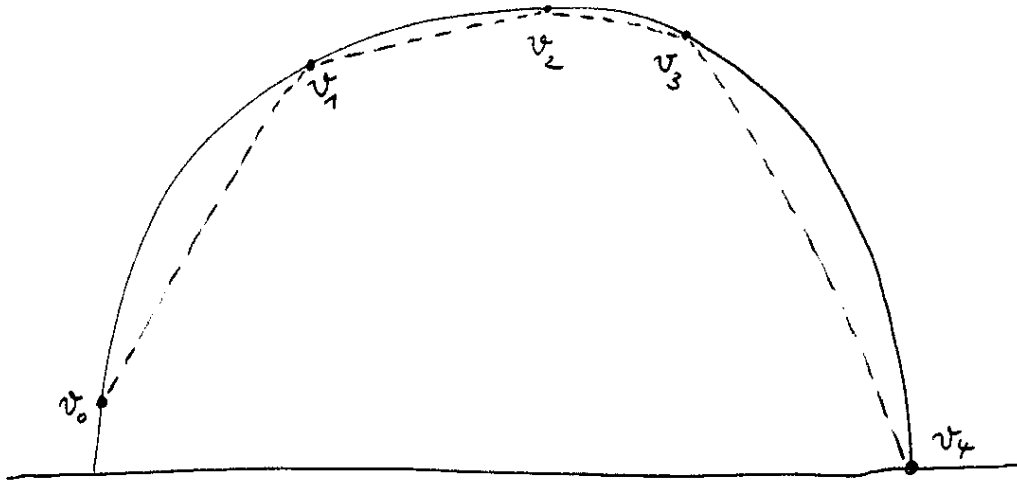
$$\pi := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(v_{i-1}, v_i) \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, v_0, v_1, \dots, v_n \in H, \\ x(v_0) < x(v_1) < \dots < x(v_n) \end{array} \right\}$$

Mithilfe der einfachen Abschätzung $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ erkennt man, daß die Zahl 4 eine obere Schranke ist für unsere Menge von Längen von Polygonzügen, mithin haben wir hier in der Tat eine reelle Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ definiert. Wir werden in 6.1.31 sehen, wie man diese Zahl im Prinzip bis zu einer beliebig vorgegebenen Stelle nach dem Komma berechnen kann. Die Definition selbst ist elementar. Ich habe sie nur deshalb nicht gleich im Zusammenhang mit der Definition der reellen Zahlen gegeben, weil sie die Existenz reeller Quadratwurzeln von nichtnegativen reellen Zahlen benötigt, die erst in 3.3.14 gezeigt wurde.

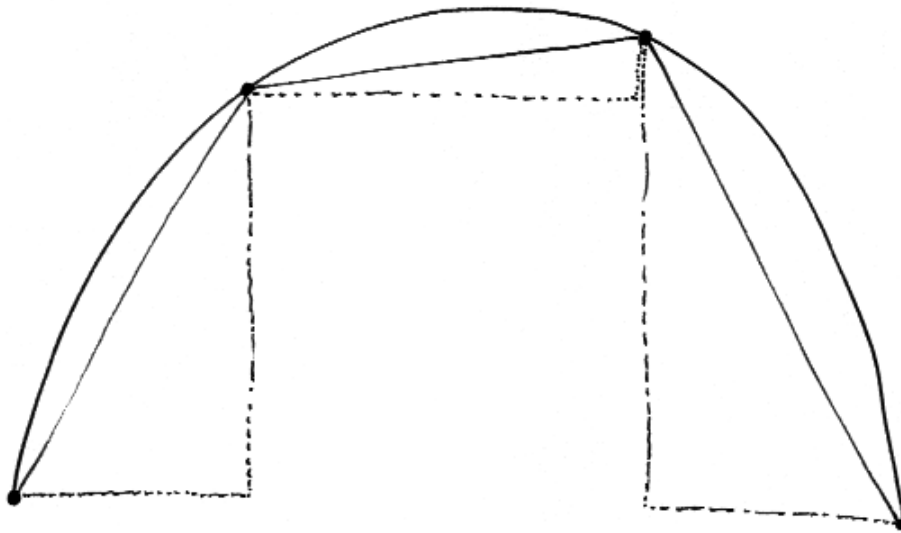
Ergänzung 3.4.2. Die Zahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$, wie Lambert bereits 1761 zeigen konnte. Anders ausgedrückt läßt sich π nicht durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen. Wir beweisen diese Tatsache in 5.8.12. Unsere Kreiszahl π ist noch nicht einmal **algebraisch**, als da heißt Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Es gilt in anderen Worten keine Gleichung der Gestalt

$$\pi^n + q_{n-1}\pi^{n-1} + \dots + q_1\pi + q_0 = 0 \quad \text{mit } q_{n-1}, \dots, q_0 \in \mathbb{Q} \text{ und } n \geq 1.$$

Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen **transzendent**, lateinisch für „überschreitend“, da ihre Behandlung „die Grenzen der Algebra überschreitet“. Die Transzendenz von π wurde 1882 von Lindemann in Freiburg bewiesen. Seine Büste steht im vierten Stock des Mathematischen Instituts. Er war übrigens Hilbert's Doktorvater. Johann Heinrich Lambert alias Jean-Henri Lambert wurde 1728 als Sproß einer hugenottischen Familie in Mulhouse geboren, das zu der Zeit mit den umgebenden Landstrichen als unabhängige Republik Mitglied der Eidgenossenschaft war. Er veröffentlichte seine Arbeit zur Irrationalität von π auf französisch in der „Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres“ in Berlin, wo er 1763 eine Anstellung an der preußischen Akademie der Wissenschaften erhielt.



Ein eingeschriebener Polygonzug



Diese Abbildung soll veranschaulichen, warum 4 eine obere Schranke für die Längen eingeschriebener Polygonzüge ist: Die horizontalen Stücke und die vertikalen Stücke haben jeweils zusammengenommen eine Gesamtlänge ≤ 2 .

3.5 Grenzwerte

Definition 3.5.1. Seien $C, D \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ Teilmengen.

1. Ein Punkt $p \in D$ heiße ein **Häufungspunkt von D** , wenn jede Umgebung von p in $\bar{\mathbb{R}}^n$ mindestens einen von p verschiedenen Punkt mit D gemeinsam hat;
2. Ein Punkt $p \in D$ heiße ein **isolierter Punkt von D** , wenn er kein Häufungspunkt von D ist. Gleichbedeutend ist die Bedingung, daß es eine Umgebung V von p in $\bar{\mathbb{R}}^n$ gibt mit $V \cap D = \{p\}$.
3. Ein Punkt $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ heiße ein **Häufungspunkt zu C** , wenn er ein Häufungspunkt von $C \cup \{p\}$ ist;

3.5.2. Ich verwende hier die Bezeichnungen p, C, D in der Weise, daß a priori p ein Häufungspunkt von D und ein Häufungspunkt zu C ist, salopp gesprochen $D = C \cup \{p\}$, so daß also p in D liegen muß und in C liegen darf. Je nach Kontext ist die eine oder die andere Konvention geschickter.

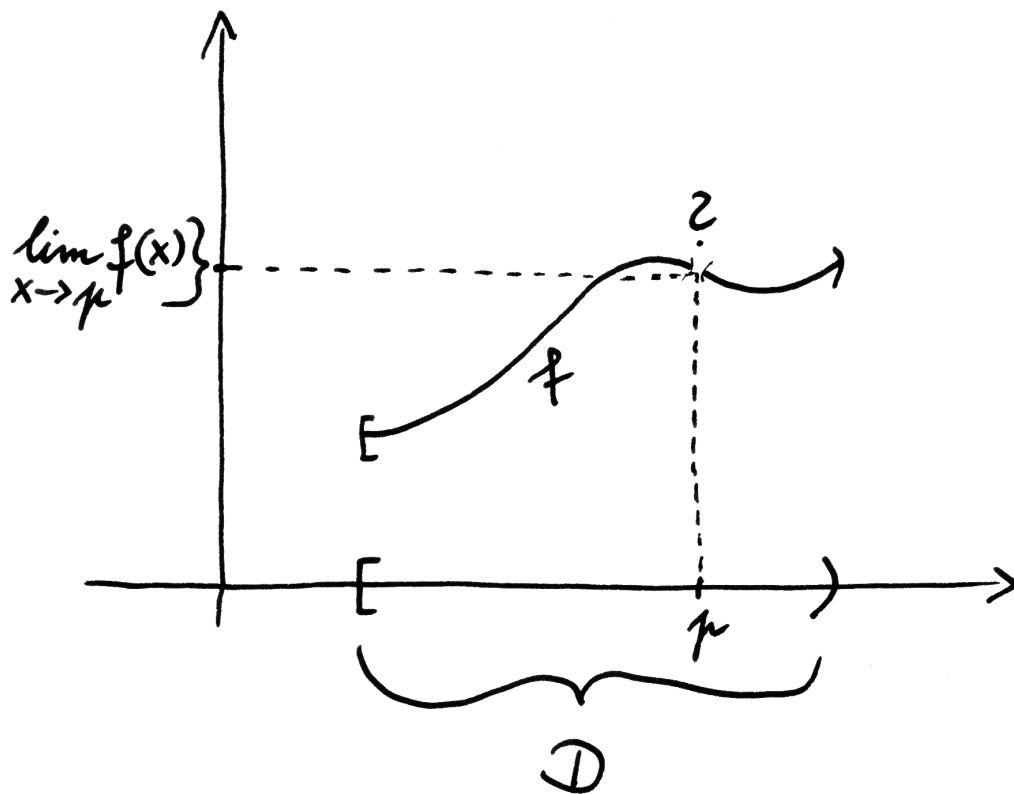
3.5.3 (**Diskussion der Terminologie**). Die im vorhergehenden eingeführte Terminologie der „Häufungspunkte von und zu“ ist ein Versuch, die sprachlichen Schwierigkeiten zu vermeiden, die in der üblichen Terminologie dadurch entstehen, daß ein Häufungspunkt einer Menge kein Punkt besagter Menge zu sein braucht.

Beispiele 3.5.4. Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen besteht aus isolierten Punkten. Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen besteht aus Häufungspunkten. Die Menge $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ hat als einzigen Häufungspunkt den Punkt ∞ . Daß dieser Punkt in der Tat ein Häufungspunkt ist, folgt aus der Archimedizität des angeordneten Körpers \mathbb{R} der reellen Zahlen 2.4.9.

3.5.5 (**Notation für Komplemente einpunktiger Teilmengen**). Wir vereinbaren für die Differenz einer Menge X und einer einpunktigen Menge $\{p\}$ die abkürzende Schreibweise $X \setminus p := X \setminus \{p\}$. Der Punkt p muß dabei nicht zu X gehören, dann haben wir eben $X \setminus p = X$.

Satz 3.5.6 (Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten). *Seien $D \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Abbildung. So gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$, die stetig ist bei p .*

Beweis. Wären sonst f_1, f_2 zwei stetige Fortsetzungen mit $f_1(p) \neq f_2(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen U_1 und U_2 der beiden Punkte $f_1(p)$ und $f_2(p)$



Der Grenzwert oder Limes einer Funktion mit einer „Fehlstelle“ in ihrem Definitionsbereich ist, wenn er existiert, der Wert an der fraglichen Fehlstelle der einzig möglichen dort stetigen Fortsetzung.

sowie Umgebungen U'_1 und U'_2 von p mit $f_1(U'_1 \cap D) \subset U_1$ und $f_2(U'_2 \cap D) \subset U_2$. Daraus folgte aber

$$f(U'_1 \cap U'_2 \cap D \setminus p) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

im Widerspruch dazu, daß $U'_1 \cap U'_2 \cap D$ nicht nur aus unserem Häufungspunkt p bestehen kann, weil ja nach 3.2.32 auch $U'_1 \cap U'_2$ eine Umgebung von p ist. \square

Definition 3.5.7. Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge, $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f : C \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Funktion. Sei b ein weiterer Punkt aus $\bar{\mathbb{R}}^n$. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen b für $x \rightarrow p$** und schreiben

$$\lim_{C \ni x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung unserer Funktion f zu einer Funktion $f : C \cup \{p\} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ durch $f(p) := b$ stetig ist bei p . In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisch **Limes** der Funktion f für $x \rightarrow p$.

3.5.8 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). Nach der Eindeutigkeit 3.5.6 stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten folgt aus $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ und $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$ bereits $a = b$.

3.5.9. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Funktion mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung ist dann per definitionem der Grenzwert unserer Funktion an besagter Stelle.

Beispiel 3.5.10. Wir haben

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

Beispiel 3.5.11. Wir haben $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ und $\lim_{(0,1) \ni x \rightarrow 0} 1/x = \infty$, denn unser erweitertes nichtnegatives Invertieren $\text{in}\bar{\nu}^+ : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ ist stetig nach 3.3.4 mit $\text{in}\bar{\nu}^+(\infty) = 0$ und $\text{in}\bar{\nu}^+(0) = \infty$.

3.5.12 (ε - δ -Kriterium für Grenzwerte). Seien $D \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge, $p \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \setminus p \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Sei weiter $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Genau dann gilt $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Das ist eine direkte Konsequenz des ε - δ -Kriteriums für Stetigkeit 3.2.21.

Lemma 3.5.13 (Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$). Sei $f : \mathbb{R} \supset C \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion und sei ∞ ein Häufungspunkt zu C . Sei weiter $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Genau dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Beweis. Wir wenden das Umgebungskriterium für Stetigkeit 3.2.24 an und setzen $D := C \cup \{\infty\}$. Ist die Fortsetzung von f zu $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $f(\infty) := b$ stetig bei ∞ , so gibt es für die Umgebung $U = B(b; \varepsilon)$ von $b = f(\infty)$ eine Umgebung U' von ∞ mit $f(U' \cap D) \subset B(b; \varepsilon)$. Diese Umgebung U' von ∞ umfaßt aber per definitionem eine Teilmenge der Gestalt $(N, \infty]$ mit $N \in \mathbb{R}$. Wir sehen so, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit $x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Sei umgekehrt diese Bedingung erfüllt. Es gilt zu folgern, daß unsere Fortsetzung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig ist bei $p := \infty$. Gegeben eine Umgebung U von $b = f(\infty)$ finden wir $\varepsilon > 0$ mit $B(b; \varepsilon) \subset U$. Zu diesem ε finden wir dann ein $N \in \mathbb{R}$ mit $f((N, \infty) \cap C) \subset B(b; \varepsilon)$. Somit ist $U' := (N, \infty]$ die gesuchte Umgebung von ∞ mit $f(U' \cap D) \subset U$. \square

Beispiel 3.5.14 (Grenzwerte konstanter Funktionen). Wir haben $\lim_{x \rightarrow p} c = c$ für jede konstante Funktion c , denn konstante Funktionen sind stetig.

Beispiel 3.5.15 (Grenzwert der Identitätsfunktion). Wir haben $\lim_{x \rightarrow p} x = p$, denn die Identität id ist stetig.

3.5.16. Gegeben Mengen A und I bezeichnet man eine Abbildung $I \rightarrow A$ ganz allgemein auch als eine **durch I indizierte Familie von Elementen von A** und benutzt die Notation

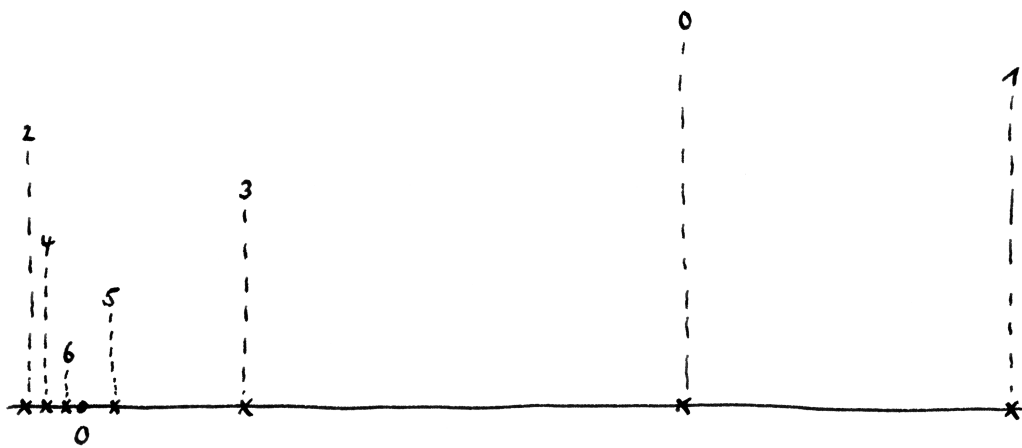
$$(a_i)_{i \in I}$$

Diese Sprechweise und Notation für Abbildungen verwendet man insbesondere dann, wenn man der Menge I eine untergeordnete Rolle zugeordnet hat. Im Fall $I = \emptyset$ spricht man von der **leeren Familie** von Elementen von A .

Definition 3.5.17. Eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X$, $n \mapsto a_n$ von den natürlichen Zahlen in eine Menge X nennen wir eine **Folge in X** . Wir schreiben eine Folge meist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder a_0, a_1, a_2, \dots oder auch einfach nur (a_n) . Die Elemente a_n heißen die **Folgliedern**. Manchmal nennen wir auch Abbildungen Folgen, die erst ab $n = 1$ definiert sind.

3.5.18 (**Folgenkonvergenz**). Eine Folge (a_n) in $\bar{\mathbb{R}}^d$ ist dasselbe wie eine Funktion $f : \bar{\mathbb{R}} \supset \mathbb{N} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^d$, nämlich die Funktion $f(n) := a_n$. Der Punkt ∞ ist ein Häufungspunkt zu \mathbb{N} in $\bar{\mathbb{R}}$, wie wir bereits in 3.5.4 bemerkt hatten. Gegeben $b \in \bar{\mathbb{R}}^d$ sagen wir, **die Folge a_n konvergiere gegen a** , wenn im Sinne des allgemeinen Grenzwertbegriffs 3.5.7 gilt

$$\lim_{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} a_n = a$$



Graphische Darstellung der Folge $a_n = 3^{3-n} - (-2)^{4-n}$, die gegen Null konvergiert, wie Sie bald werden zeigen können. Die Folgenglieder sind die kleinen Kreuzchen auf der reellen Achse, ihre Indizes tragen sie an unterschiedlich langen gestrichelt eingezeichneten Stangen.

In diesem Fall nennen wir a den **Grenzwert** oder lateinisch **Limes** der Folge.

3.5.19. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Elemente** einer Menge, so soll das bedeuten, daß sie gilt für alle Elemente bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Glieder** einer Folge, so soll das bedeuten, daß für fast alle Indizes n unsere Aussage für das n -te Folgenglied gilt.

3.5.20 (**ε - N -Kriterium für Folgenkonvergenz**). Gegeben eine Folge (a_n) in \mathbb{R}^d und $a \in \mathbb{R}^d$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ nach 3.5.13 gleichbedeutend dazu, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt mit $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Lemma 3.5.21 (Charakterisierung der Folgenkonvergenz). Gegeben eine Folge (a_n) in \mathbb{R}^d ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gleichbedeutend dazu, daß jede Umgebung von a fast alle Glieder unserer Folge enthält.

Beweis. Wir setzen $D := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Bezeichne $\bar{a} : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^d$ die Fortsetzung von $n \mapsto a_n$ durch $\infty \mapsto a$. Per definitionem ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gleichbedeutend dazu, daß \bar{a} stetig ist bei ∞ . Das ist gleichbedeutend dazu, daß es für jede Umgebung U von $a = \bar{a}(\infty)$ eine Umgebung U' von ∞ gibt mit $\bar{a}(U' \cap D) \subset U$. Das hinwiederum ist gleichbedeutend dazu, daß es für jede Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit $\bar{a}((N, \infty] \cap D) \subset U$ oder, wegen $\bar{a}(\infty) = a \in U$ immer noch gleichbedeutend, mit $\bar{a}((N, \infty] \cap \mathbb{N}) \subset U$. \square

3.5.22. Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Zum Beispiel folgt aus Korollar 2.4.10 zur Archimedizität der reellen Zahlen sofort, daß die Folge $n \mapsto 1/n$ gegeben für $n \geq 1$ eine Nullfolge ist, in Formeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$$

Alternativ folgt das auch durch Einschränkung der Erkenntnis $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ aus 3.5.11 auf positive natürliche Zahlen. Bei dieser Argumentation versteckt sich die Archimedizität der reellen Zahlen in der implizit verwendeten Eigenschaft, daß ∞ ein Häufungspunkt zu \mathbb{N} in $\bar{\mathbb{R}}$ ist.

3.5.23 (**Diskussion der Terminologie**). Mit unserer Konvention für die „Konvergenz gegen $\pm\infty$ “ bewegen wir uns zwar im Rahmen des allgemeinen Begriffs der „Konvergenz in topologischen Räumen“ [AN2] 1.4.5, aber außerhalb der in der einführenden Literatur zur Analysis üblichen Konventionen. Üblicherweise wird stattdessen die Terminologie **bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$** verwendet. Üblicherweise bleibt in anderen Worten der Begriff der konvergenten Folge reserviert für Folgen, die gegen eine reelle Zahl konvergieren. Wir nennen solche Folgen **reell konvergent**. Falls eine Folge nicht konvergiert, auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$, so nennt man sie **unbestimmt divergent**. Wir verlieren mit unserer Terminologie zwar etwas an terminologischer Kohärenz, da wir im weiteren „Reihen“

aus wieder anderen Gründen nur dann konvergent nennen werden, wenn die Folge ihrer Partialsummen *reell* konvergent ist. Das schien mir jedoch ein kleineres Übel, als es eine unnötig einschränkende oder in Fälle aufspaltende Formulierung von Aussagen wie 3.5.32 wäre.

3.5.24 (Lokalität des Grenzwerts). Der Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow p$ hängt nur von ihrem Verhalten in einer Umgebung von p ab. Ist genauer $p \in D$ Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $f : D \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Funktion und V eine Umgebung von p , so existiert $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow p} (f|_{V \cap D \setminus p})(x)$ existiert, und unter diesen Umständen gilt

$$\lim_{(V \cap D) \ni x \rightarrow p} f(x) = \lim_{D \ni x \rightarrow p} f(x)$$

Beispiel 3.5.25 (Grenzwerte von Einschränkungen). Gegeben $C \subset E \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f : E \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ haben wir

$$\lim_{C \ni x \rightarrow p} f(x) = \lim_{E \ni x \rightarrow p} f(x)$$

wenn der rechte Grenzwert existiert, denn Einschränkungen stetiger Funktionen sind stetig.

3.5.26. Man beachte den Unterschied zur Lokalität des Grenzwerts 3.5.24, der ein Kriterium für die Existenz eines Grenzwerts angibt, wohingegen die Aussage 3.5.25 über Grenzwerte von Einschränkungen nur Eigenschaften von Grenzwerten behauptet, deren Existenz bereits bekannt ist.

3.5.27 (Grenzwerte von Verknüpfungen). Die Definition des Grenzwerts 3.5.7 als Wert der eindeutigen stetigen Fortsetzung zusammen mit der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 3.2.30 liefern für den Grenzwert einer Verknüpfung die folgenden drei Implikationen. Die Terminologie „Limites“ meint hier das „Bilden von Grenzwerten“ und soll zum Ausdruck bringen, daß eben nicht der Grenzwert selbst die fraglichen Eigenschaften hat, sondern vielmehr das Bilden von Grenzwerten.

Limites vertauschen mit dem Nachschalten stetiger Funktionen:

$$\left(\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q \text{ und } g \text{ stetig bei } q \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = g(q)$$

Limites bleiben gleich beim Vorschalten stetiger Funktionen:

$$\left(f \text{ stetig bei } p \text{ und } \lim_{y \rightarrow f(p)} g(y) = c \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = c$$

Limites lassen sich iterieren:

$$\left(\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q \text{ und } \lim_{y \rightarrow q} g(y) = c \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = c$$

Im folgenden führen wir das genauer aus.

3.5.28 (Limites vertauschen mit dem Nachschalten stetiger Funktionen). Wir schreiben die erste Eigenschaft nach 3.5.27 noch einmal mit allen Voraussetzungen und den entsprechenden Notationen aus. Seien gegeben $C \subset \mathbb{R}^m$ und $p \in \overline{\mathbb{R}^m}$ ein Häufungspunkt zu C und $f : C \setminus p \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit Bild in $E \subset \mathbb{R}^n$. Gilt $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$ und $q \in E$ und ist $g : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ stetig bei q , so folgt

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = g(q)$$

Beispiel 3.5.29 (Folgenkonvergenz und Nachschalten stetiger Funktionen). Gegeben eine Funktion $g : \mathbb{R}^k \supset E \rightarrow \mathbb{R}^l$, die stetig ist bei einer Stelle $a \in E$, und eine Folge (a_n) in E mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(a)$$

Das zeigen wir, indem wir unsere Erkenntnisse aus 3.5.28 zum Vertauschen von Limites mit dem Nachschalten stetiger Funktionen anwenden auf $C := \mathbb{N}$ und den Häufungspunkt $p := \infty$ und a_n statt $f(x)$ schreiben.

Beispiel 3.5.30. Wenden wir unsere Erkenntnisse 3.5.29 zur Vertauschung von Folgenkonvergenz und stetigen Funktionen nach einer geschickten Umformung auf die Funktion $f(x) := \frac{5+x^2}{3+x}$ und die Folge $a_n := 1/n$ an, so erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n}{3n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + (1/n)^2}{3 + (1/n)} = \frac{5}{3}$$

Definition 3.5.31. Sei b_0, b_1, b_2, \dots eine Folge. Ist $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennen wir die Folge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Gliedern

$$b_{n_0}, b_{n_1}, b_{n_2}, \dots$$

eine **Teilfolge** der Folge b_n . Schreiben wir eine Folge in X als eine Abbildung $b : \mathbb{N} \rightarrow X$, $n \mapsto b(n) = b_n$, so ist eine Teilfolge von b demnach eine Abbildung der Gestalt $b \circ a$ für eine streng monoton wachsende Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $a(k) := n_k$.

3.5.32 (Konvergenz von Teilfolgen). Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge.

In der Tat liegen in jeder Umgebung des Grenzwerts fast alle Glieder unserer Folge und a fortiori auch fast alle Glieder jeder Teilfolge. Alternativ ist es auch eine formale Konsequenz aus der Regel für iterierte Limites nach 3.5.27, die wir spezialisieren können zu

$$(\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = b$$

Nach unseren Annahmen ist hier $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ offensichtlich. Formal folgt es auch aus der Regel für den Grenzwert durch Einquetschen 3.5.36.

3.5.33 (Grenzwert als komponentenweiser Grenzwert). Sei $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f = (f_1, \dots, f_n) : C \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Abbildung und $b = (b_1, \dots, b_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$ ein Punkt. So gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f_\nu(x) = b_\nu \quad \forall \nu$$

In der Tat folgt das unmittelbar aus unserer Erkenntnis 3.5.33, daß Stetigkeit gleichbedeutend ist zu komponentenweiser Stetigkeit.

3.5.34 (Grenzwert von Summe, Produkt und Quotient). Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und seien $f, g : C \setminus p \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen mit reellen Grenzwerten $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$ und $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = c$. So folgt aus der Stetigkeit von Summe und Produkt stetiger Funktionen 3.2.34 unmittelbar $\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = b + c$ und $\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = bc$. Ebenso folgt aus der Stetigkeit des Quotienten 3.3.5 unter der zusätzlichen Annahme, daß g keine Nullstelle hat und der Grenzwert c nicht Null ist, auch $\lim_{x \rightarrow p} f(x)/g(x) = b/c$.

3.5.35 (Grenzwert durch Einquetschen). Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge und $p \in \bar{\mathbb{R}}^m$ ein Häufungspunkt zu C und $f, g, h : C \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Funktionen mit

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{für alle } x \in C \setminus p.$$

So folgt aus $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$ schon $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$. In der Tat gibt es unter diesen Annahmen für jede Intervallumgebung I von b Umgebungen U, W von p mit $f(U \cap C \setminus p) \subset I$ und $h(W \cap C \setminus p) \subset I$. Dann aber ist $V := U \cap W$ offensichtlich eine Umgebung von p mit $g(V \cap C \setminus p) \subset I$. Alternativ folgt das auch sofort aus unserer Übung zur Stetigkeit durch Einquetschen 3.2.46.

Beispiel 3.5.36. Aus $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$ und $f(x) \leq g(x) \quad \forall x$ folgt durch Einquetschen $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \infty$. In diesem Fall können wir als „obere Quetschfunktion“ h die konstante Funktion $h(x) = \infty \quad \forall x$ wählen.

Lemma 3.5.37 (Erhaltung schwacher Ungleichungen im Grenzwert). Seien $C \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ eine Teilmenge und p ein Häufungspunkt zu C und $f, g : C \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in C \setminus p$. Existieren die Grenzwerte von f und g für $x \rightarrow p$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow p} g(x)$$

3.5.38. Man beachte den Unterschied zum Grenzwert durch Einquetschen 3.5.35. Er gibt ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Grenzwerts, wohingegen Lemma 3.5.37 über die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert nur Eigenschaften von Grenzwerten behauptet, deren Existenz bereits bekannt ist.

Beweis. Durch Widerspruch. Sei a der Grenzwert von f und b der Grenzwert von g . Hätten wir $a > b$ alias $b < a$, so fänden wir k mit $b < k < a$. Dann wäre $[-\infty, k)$ eine Umgebung von b und $(k, \infty]$ eine Umgebung von a . Es gäbe also Umgebungen U und V von p mit $f(U \cap C \setminus p) \subset (k, \infty]$ und $g(V \cap C \setminus p) \subset [-\infty, k)$. Da p Häufungspunkt zu C ist, wäre $U \cap V \cap C \setminus p$ nicht leer. Für jeden Punkt x aus dieser Menge gälte aber $f(x) > g(x)$ im Widerspruch zu unserer Annahme. \square

Proposition 3.5.39. *Die folgende Tabelle beschreibt das Konvergenzverhalten der Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Potenzen von x in Abhängigkeit von x :*

$$\begin{array}{ll} x > 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty; \\ x = 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1; \\ |x| < 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0; \\ x \leq -1 & \text{Die Folge } x^n \text{ divergiert unbestimmt.} \end{array}$$

Beweis. Im Fall $x > 1$ schreiben wir $x = 1 + y$ mit $y > 0$ und erhalten mit der binomischen Formel

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny$$

Die Folge $n \mapsto 1 + ny$ strebt aber gegen ∞ und nach 3.5.36 strebt dann die Folge x^n auch gegen ∞ . Im Fall $x = 1$ ist die Folge konstant 1 und es ist nichts zu zeigen. Falls $0 < x < 1$ gilt nach dem Vorhergehenden $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x^n = \infty$ und daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ durch Anwenden der stetig von $(0, \infty)$ auf $[0, \infty]$ fortgesetzten Funktion $t \mapsto 1/t$ aus 3.3.4. Für $-1 < x \leq 0$ folgt die Behauptung dann wegen $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$ durch Einquetschen. Im Fall $x \leq -1$ gilt $|x^n - x^{n+1}| \geq 2$ für alle n . Also kann die Folge nicht gegen eine reelle Zahl a konvergieren, denn dann müßte gelten $|a - x^n| < 1$ für fast alle n und dann nach der Dreiecksungleichung $|x^n - x^{n+1}| < 2$ für fast alle n . Die Folge kann in diesem Fall aber auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$ konvergieren, da die Folgenglieder immer abwechselnd positiv und negativ sind. \square

Satz 3.5.40 (Gruppenwege in \mathbb{R}). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der additiven Gruppe der reellen Zahlen in sich selber sind genau die Abbildungen $x \mapsto \lambda x$ für beliebiges aber festes $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit $f(x + y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Es reicht zu zeigen,

daß f die Gleichung $f(x) = xf(1)$ erfüllt. Auch ohne die Stetigkeit von f zu benutzen, folgern wir $f(q) = qf(1)$ zunächst für alle $q \in \mathbb{N}$, dann für alle $q \in \mathbb{Z}$, dann für alle $q \in \mathbb{Q}$. Um unsere Gleichung $f(x) = xf(1)$ sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen, nutzen wir die Erkenntnis, daß nach 2.4.10 jede reelle Zahl x ein Häufungspunkt zu \mathbb{Q} ist. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also

$$f(x) = \lim_{\mathbb{Q} \ni q \rightarrow x} f(q) = \lim_{\mathbb{Q} \ni q \rightarrow x} qf(1) = xf(1)$$

und so folgt wie gewünscht $f(x) = \lambda x$ für $\lambda := f(1)$. □

3.5.41. Gegeben eine Teilmenge $C \subset \bar{\mathbb{R}}$ und ein Punkt $p \in \bar{\mathbb{R}}$, der Häufungspunkt sowohl zu $D \cap \bar{\mathbb{R}}_{<p}$ als auch zu $D \cap \bar{\mathbb{R}}_{>p}$ ist, sprechen wir vom **linksseitigen** beziehungsweise **rechtsseitigen Grenzwert** einer Funktion $f : C \setminus p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, wenn wir den Grenzwert ihrer Einschränkung auf diese beiden Teilmengen untersuchen wollen, und notieren diese Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{C \cap \bar{\mathbb{R}}_{<p}} \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow p} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{C \cap \bar{\mathbb{R}}_{>p}}$$

Ofensichtlich existiert in dieser Situation der Grenzwert bei p genau dann, wenn der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen.

Beispiel 3.5.42. Es gilt $\lim_{x \searrow 0} 1/x = \infty$ und $\lim_{x \nearrow 0} 1/x = -\infty$.

Satz 3.5.43 (Stetigkeit als Folgestetigkeit). Seien $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. So sind gleichbedeutend:

1. f ist stetig bei a ;
2. Für jede Folge a_0, a_1, \dots von Punkten aus D mit $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ gilt bereits $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = f(a)$.

3.5.44. Dieser Satz ist für uns bis auf weiteres nicht relevant. Soweit ich sehen kann, benötigen wir ihn im hier verfolgten Aufbau der Theorie erst in Analysis 3, um zu zeigen, daß die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion stetig ist. Allerdings kann es leicht passieren, daß Sie in einer Prüfung nach diesem Satz gefragt werden.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ haben wir schon in 3.5.29 erledigt. Wir konzentrieren uns deshalb auf $2 \Rightarrow 1$. Das zeigen wir durch Widerspruch. Für unser $a \in \bar{\mathbb{R}}^n$ finden wir nach Übung 3.5.46 eine absteigende Folge von Umgebungen $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$ derart, daß jede Umgebung V von a fast alle V_i umfaßt. Ist f nicht stetig bei a , so gibt es eine Umgebung U von $f(a)$ derart, daß für kein i gilt $f(V_i \cap D) \subset U$. Für jedes i finden wir also $a_i \in V_i \cap D$ mit $f(a_i) \notin U$. Die a_i bilden dann eine Folge in D mit $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$, für die nicht gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = f(a)$. □

Übungen

Übung 3.5.45. Sei $C \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge derart, daß ∞ ein Häufungspunkt zu C ist, und sei $f : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Man zeige, daß genau dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $N = N_M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x > N \Rightarrow f(x) < M$$

Übung 3.5.46. Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ gibt es eine absteigende Folge von Umgebungen $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$ derart, daß jede Umgebung von a fast alle der V_i umfaßt.

Übung 3.5.47. Ist $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtleere Teilmenge, so ist $\sup A$ das größte Element in der Menge G aller Punkte aus den erweiterten reellen Zahlen, die Grenzwerte von Folgen aus A sind. Diese Übung wird verwendet für die Herleitung des Satzes über Extrema auf Kompakta.

Übung 3.5.48. Sei $C \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge. Genau dann ist $p \in \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt zu C , wenn es eine Folge reeller Zahlen x_n in $C \setminus p$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$.

Übung 3.5.49. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. Umgekehrt folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ bereits $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Übung 3.5.50. Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, die gegen eine reelle Zahl konvergiert, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

Übung 3.5.51 (Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen). Sei $C \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, p ein Häufungspunkt zu C und $f : C \setminus p \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. So gilt $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$ genau dann, wenn für jede Folge x_n in $C \setminus p$ mit $x_n \rightarrow p$ gilt $f(x_n) \rightarrow b$.

Übung 3.5.52. Sei $C \subset \overline{\mathbb{R}^m}$ eine Teilmenge, p ein Häufungspunkt zu C , $f : C \setminus p \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. So gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x) - b| = 0$$

Übung 3.5.53 (Polynomiale Funktionen als formale Ausdrücke). Man zeige: Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ gegebene Funktion $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ und ein $p \in \mathbb{R}$ die Formel $\lim_{x \rightarrow p} f(x)/(x-p)^n = 0$, so folgt $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Insbesondere liefert ein Polynom mit reellen Koeffizienten nur dann die Nullfunktion, wenn alle seine Koeffizienten Null sind. Wir nennen es dann das **Nullpolynom**. Hinweis: Durch Verschieben kann man sich auf den Fall $p = 0$ zurückziehen.

Übung 3.5.54 (Rationale Funktionen als formale Ausdrücke). Seien Polynome mit reellen Koeffizienten P_1, P_2, Q_1, Q_2 gegeben und seien Q_1, Q_2 nicht das Nullpolynom. Man zeige: Gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q_1(x) \neq 0 \neq Q_2(x)$ die Gleichheit von reellen Zahlen $P_1(x)/Q_1(x) = P_2(x)/Q_2(x)$, so folgt die Gleichheit von Polynomen $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$. Hinweis: Übung 3.5.53.

Übung 3.5.55. Man zeige: Die Regeln zum Vertauschen von Grenzwertbildung mit Addition und Multiplikation gelten auch noch, wenn wir $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ zulassen und $a + b$ beziehungsweise ab sinnvoll definiert sind im Sinne von Übung 3.2.44.

Ergänzende Übung 3.5.56. Sei $L \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen, die keine Häufungspunkte in \mathbb{R} hat. So gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $L = \mathbb{Z}\alpha$.

3.6 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition 3.6.1. Eine Menge von reellen Zahlen heißt **beschränkt**, wenn sie in \mathbb{R} eine obere und eine untere Schranke besitzt. Eine Folge von reellen Zahlen heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist. Allgemeiner heißt eine reellwertige Funktion **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Funktionswerte beschränkt ist.

Lemma 3.6.2. *Jede reell konvergente Folge von reellen Zahlen ist beschränkt.*

Beweis. Ist $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert unserer Folge, so liegen fast alle Folgenglieder in $[x-1, x+1]$. Die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große obere und untere Schranke auch noch einfangen. \square

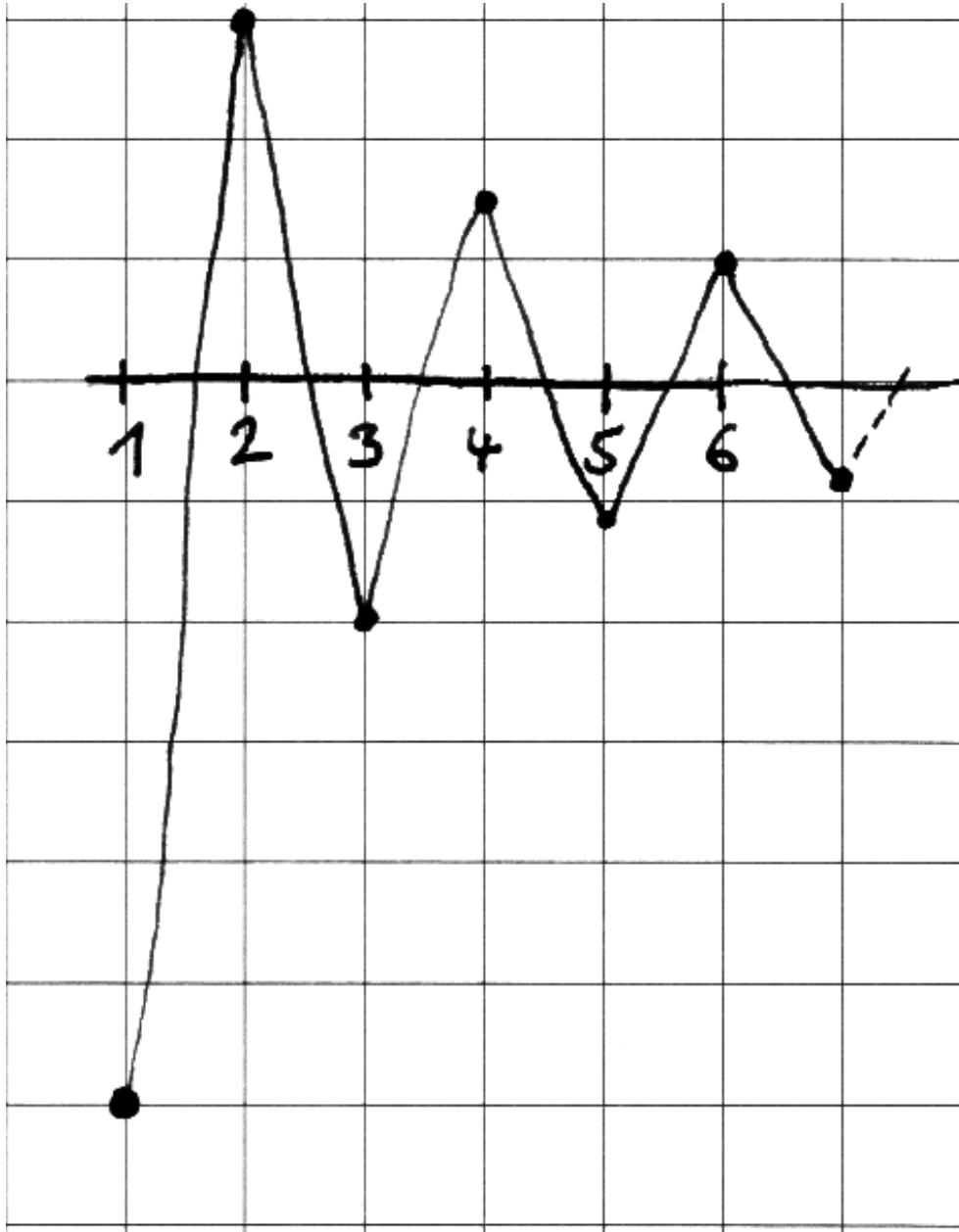
Satz 3.6.3 (Konvergenz monotoner reeller Folgen). *Jede monoton wachsende Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Supremum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monoton fallende Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Infimum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monotone beschränkte Folge von reellen Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die Zweite zeigt man analog und die Dritte ist eine offensichtliche Konsequenz. Sei s das Supremum alias die kleinste obere Schranke der Menge aller Folgenglieder. Kein p mit $p < s$ ist dann eine obere Schranke der Menge aller Folgenglieder, folglich liegen für jedes $p < s$ ein und damit wegen der Monotonie fast alle x_n in $(p, s]$. Damit liegen in jeder Umgebung von s fast alle Folgenglieder. \square

Lemma 3.6.4. *Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt eine monotone Teilfolge.*

3.6.5. Hier mögen Sie sich an unsere Sprachregelung [GR] 1.7.3 erinnern. Gemeint ist demnach: Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt *mindestens* eine monotone Teilfolge.

Beweis. Wir nennen ein Folgenglied x_n oder präziser seinen Index n einen „Aussichtspunkt“ der Folge, wenn alle späteren Folgenglieder kleiner sind, in Formeln $x_n > x_m$ für alle $m > n$. Besitzt unsere Folge unendlich viele Aussichtspunkte,



Bei der Folge $(-1)^n 6/n$ ist jedes zweite Folgenglied ein Aussichtspunkt im Sinne des Beweises von Lemma 3.6.4.

so bilden diese eine streng monoton fallende Teilfolge. Sonst gibt es einen letzten Aussichtspunkt x_n . Dann finden wir aber eine monoton wachsende Teilfolge, die mit x_{n+1} beginnt, denn ab dem Index $n + 1$ kommt dann nach jedem Folgenglied noch ein anderes, das mindestens ebenso groß ist. \square

Satz 3.6.6 (Bolzano-Weierstraß). *Jede Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt eine in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergente Teilfolge. Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine reell konvergente Teilfolge.*

Beweis. Jede Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt nach 3.6.4 eine monotone Teilfolge, und diese ist nach 3.6.3 konvergent in $\bar{\mathbb{R}}$. Ist unsere Folge beschränkt, so ist auch jede solche Teilfolge beschränkt und konvergiert folglich gegen eine reelle Zahl. \square

Definition 3.6.7. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$ falls $n, m \geq N$.

Satz 3.6.8. *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Daß jede reell konvergente Folge Cauchy sein muß, ist leicht zu sehen: Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ folgt, daß es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|x_n - x| < \varepsilon/2$ für $n \geq N$. Daraus folgt dann $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Wir zeigen nun umgekehrt, daß auch jede Cauchy-Folge gegen eine reelle Zahl konvergiert. Eine Cauchy-Folge x_n ist sicher beschränkt, denn wählen wir für $\varepsilon = 1$ ein $N = N_\varepsilon$, so liegen fast alle Folgenglieder im Intervall $(x_N - 1, x_N + 1)$, und die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große Schranke auch noch einfangen. Unsere Cauchy-Folge besitzt daher nach 3.6.6 eine reell konvergente Teilfolge x_{n_k} , sagen wir $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Wir behaupten, daß dann auch die Folge x_n selbst gegen x konvergiert. In der Tat gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. Aus $n \geq N_\varepsilon$ folgt damit insbesondere $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$ für fast alle k und dann im Grenzwert $|x_n - x| \leq \varepsilon$, da ja die Ungleichungen $-\varepsilon \leq x_n - x_{n_k} \leq \varepsilon$ bestehen bleiben beim Grenzübergang $k \rightarrow \infty$. \square

3.6.9. Ein angeordneter Körper, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständig**. Dieser Begriff ist Teil einer alternativen Charakterisierung der reellen Zahlen, die wir im folgenden als Übung formulieren.

Übungen

Übung 3.6.10. Gegeben ein angeordneter Körper sind gleichbedeutend: (1) Jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke besitzt eine größte untere Schranke; (2) Der Körper ist archimedisch angeordnet und vollständig.

Übung 3.6.11 (Intervallschachtelungsprinzip). Gegeben eine absteigende Folge von nichtleeren kompakten reellen Intervallen $\mathbb{R} \supset I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots$ ist auch ihr Schnitt $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} I_\nu$ nicht leer.

Übung 3.6.12 (Cauchy-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen). Sei $C \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, p ein Häufungspunkt zu C und $f : C \setminus p \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Genau dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ und ist eine reelle Zahl, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U = U_\varepsilon$ von p gibt mit $(a, b \in U \cap C \setminus p) \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

Übung 3.6.13. Ich erinnere an die Fibonacci-Folge und den goldenen Schnitt aus [EIN] 1.2.2. Man zeige, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Fibonacci-Folge gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also in Formeln gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

für unsere Fibonacci-Folge x_0, x_1, x_2, \dots aus [EIN] 1.2.2.

Übung 3.6.14. Gegeben zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man ihr **arithmetisches Mittel** als die Zahl $(a + b)/2$. Gegeben zwei nichtnegative reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert man ihr **geometrisches Mittel** als die Zahl \sqrt{ab} . Anschaulich ist das die Kantenlänge eines Quadrats, das dieselbe Fläche hat wie das Rechteck mit den Seitenlängen a und b , und daher kommt vermutlich auch die Terminologie. Man zeige für je zwei positive reelle Zahlen die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel und zeige, daß Gleichheit nur gilt im Fall $a = b = 0$.

3.7 Algorithmisches Wurzelziehen*

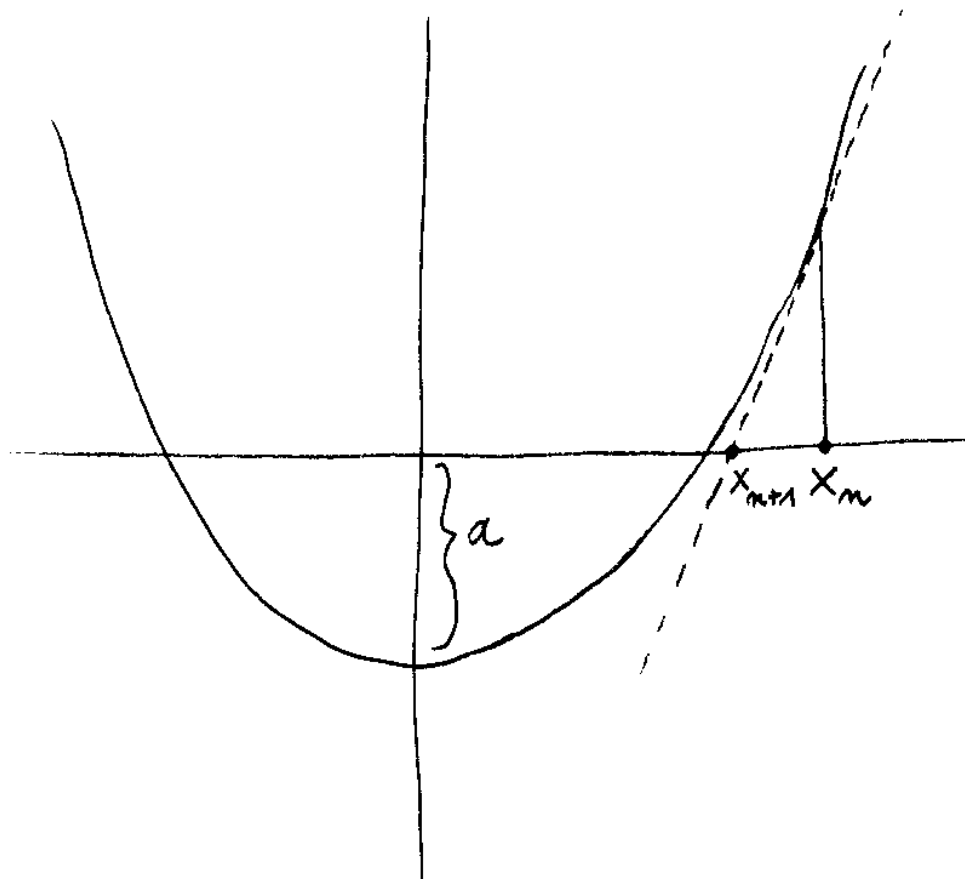
3.7.1. Gegeben eine reelle Zahl $a \geq 0$ geben wir ein Verfahren zur Berechnung der nichtnegativen Quadratwurzel von a an. Wir konstruieren dazu eine Folge und beginnen mit $x_0 := \max(1, a)$. Dann gilt sicherlich schon einmal $x_0^2 \geq a$. Gegeben $x_n > 0$ mit $x_n^2 \geq a$ machen wir den Ansatz $(x_n - \varepsilon)^2 = a$ und erhalten $\varepsilon = (x_n^2 + \varepsilon^2 - a)/2x_n$. Nun vernachlässigen wir $\varepsilon^2/2x_n$, vergessen unseren Ansatz und setzen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Man sieht sofort, daß aus $x_n^2 \geq a$ und $x_n > 0$ folgt $x_{n+1}^2 \geq a$ und $x_n \geq x_{n+1} > 0$. Da die Folge der x_n monoton fällt und durch Null nach unten beschränkt ist, besitzt sie einen Grenzwert $x \geq 0$. Aus der Gleichung

$$2x_n x_{n+1} = x_n^2 + a$$

folgt dann $x^2 = a$ durch Übergang zum Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten.



Graphische Darstellung unserer induktiven Formel für die Glieder der Folge x_n
mit Grenzwert \sqrt{a} aus dem Beweis von 3.3.14

3.7.2. Die Ungleichungen $a/x_n \leq \sqrt{a} < x_n$ erlauben uns sogar abzuschätzen, wie gut unsere Approximation x_n mindestens sein muß. Machen wir für den Fehler den Ansatz $x_n = \sqrt{a}(1 + f_n)$, so ergibt sich mit etwas Rechnen

$$f_{n+1} = \frac{f_n^2}{2(1 + f_n)}$$

und indem wir im Nenner die 1 beziehungsweise f_n verkleinern zu Null erhalten wir die Abschätzung $f_{n+1} \leq \frac{1}{2} \min(f_n, f_n^2)$. Wenn also x_n so nah bei \sqrt{a} ist, daß gilt $f_n < 1$, so „verdoppelt sich die Anzahl der richtigen Stellen beim Übergang von x_n zu x_{n+1} “. Man spricht unter diesen Umständen auch von **quadratischer Konvergenz**. Anschaulich erhält man x_{n+1} , indem man von x_n senkrecht hochgeht zum Graph der Funktion $y = x^2 - a$ und dann auf der Tangente an diesen Graphen wieder herunter auf die x -Achse. Es ist damit auch anschaulich klar, daß unser Verfahren sehr schnell konvergieren sollte. Dieses Verfahren kann auch zur Bestimmung der Nullstellen allgemeinerer Funktionen anwenden. Es heißt das **Newton-Verfahren**.

3.7.3 (**Intervallhalbierungsverfahren**). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Einfachheit halber nehmen wir zusätzlich $f(a) \leq f(b)$ an. Gegeben $z \in [f(a), f(b)]$ suchen wir $p \in [a, b]$ mit $f(p) = z$. Dazu nehmen wir den Mittelpunkt m_0 unseres Intervalls her und werten unsere Funktion dort aus. Gilt $f(m_0) \geq z$, so setzen wir $a_1 = a$ und $b_1 = m_0$. Sonst setzen wir $a_1 = m_0$ und $b_1 = b$. In jedem Fall gilt $f(a_1) \leq z \leq f(b_1)$. Anschließend nehmen wir den Mittelpunkt m_1 des nur noch halb so großen Intervalls $[a_1, b_1]$ her und verfahren genauso. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge $a = a_0, a_1, \dots$ und eine monoton fallende Folge $b = b_0, b_1, \dots$ mit $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ und $f(a_n) \leq z \leq f(b_n)$ und für alle n . Unsere beiden Folgen müssen also konvergieren, und zwar gegen denselben Grenzwert $p \in [a, b]$. Aus der Stetigkeit von f und der Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert nach 3.5.28 folgt dann

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq z \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(p)$$

und damit $z = f(p)$.

4 Exponentialfunktion

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition 4.1.1. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet sowohl die Folge (s_n) der **Partialsommen** $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ als auch, falls die Folge der Partialsommen konvergiert, ihren Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Wir sagen dann, die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere gegen** s . Nennen wir eine Reihe **konvergent**, so meinen wir stets, daß unsere Reihe gegen eine reelle Zahl konvergiert und nicht etwa gegen $\pm\infty$. Die a_k heißen die **Reihenglieder**.

4.1.2 (**Ändern endlich vieler Reihenglieder**). Es spielt für das Konvergenzverhalten einer Reihe offensichtlich keine Rolle, wenn wir endlich viele ihrer Glieder abändern. Das beeinflusst nur den Grenzwert und ändert ihn eben um die Summe unserer endlich vielen Änderungen.

4.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Es wäre terminologisch kohärenter gewesen, wie bei Folgen auch bei Reihen von „reell konvergenten Reihen“ zu sprechen. Das schien mir jedoch ungeschickt, da man den Begriff dann nicht als Verb verwenden kann: „Die Reihe reell-konvergiert“ klingt einfach zu holprig, und Sprechweisen wie „die Reihe konvergiert absolut“ sind oft praktisch.

Beispiel 4.1.4. Dies Beispiel illustriert den oft nützlichen **Teleskopsummentrick**.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Satz 4.1.5 (Geometrische Reihe). Sei $|x| < 1$. So gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Beweis. Sicher gilt $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$, die Partialsommen unserer Reihe ergeben sich also zu

$$1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

und streben für $n \rightarrow \infty$ wie gewünscht gegen $\frac{1}{1-x}$. □

4.1.6 (**Herkunft der Terminologie**). Die Folgen der Gestalt ax^n heißen **geometrische Folgen**, da bei ihnen zumindest im Fall $a > 0, x > 0$ jedes Folgenglied nach dem ersten das geometrische Mittel im Sinne von 3.6.14 seines Vorgängers und seines Nachfolgers ist. Die geometrische Reihe hinwiederum erbt ihren Namen von der geometrischen Folge.

Beispiel 4.1.7. Es gilt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$ und

$$0,999\dots = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 1$$

Satz 4.1.8. Sind $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen $\sum(a_k + b_k)$ und $\sum \lambda a_k$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum(a_k + b_k) &= \sum a_k + \sum b_k \\ \sum \lambda a_k &= \lambda \sum a_k \end{aligned}$$

Beweis. Das folgt, indem man die Vertauschbarkeit 3.5.34 von Summen und Produkten mit Grenzwerten auf die Folgen der Partialsummen anwendet. \square

4.1.9. Eine Reihe kann nur dann konvergieren, wenn die Folge der Reihenglieder gegen Null strebt. In der Tat folgt das sofort, wenn wir Übung 3.5.50 auf die Folge der Partialsummen anwenden. Diese Übung besagte, nur zur Erinnerung, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder einer reell konvergenten Folge stets eine Nullfolge bilden.

Lemma 4.1.10 (Konvergenz beschränkter nichtnegativer Reihen). Eine Reihe, die aus nichtnegativen Gliedern besteht, konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

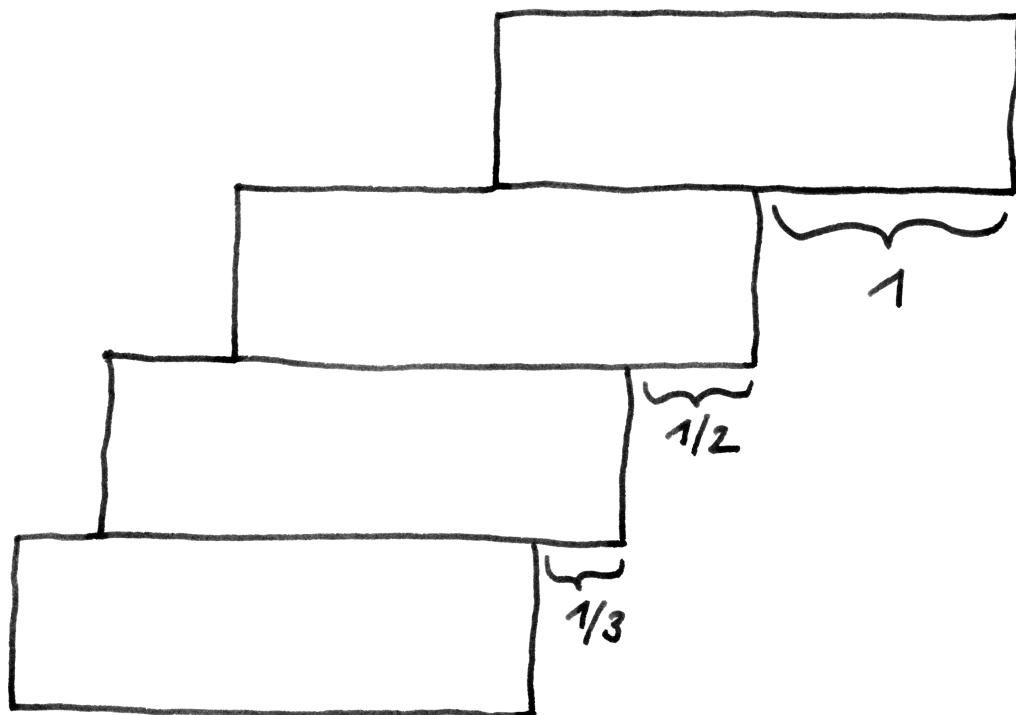
Beweis. Ist kein Reihenglied negativ, so wächst die Folge der Partialsummen monoton. Ist diese Folge auch noch beschränkt, so muß die Folge der Partialsummen nach 3.6.3 reell konvergent sein. Die Umkehrung ist eh klar. \square

Beispiel 4.1.11. Die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht, da ja gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und so weiter.

Jedoch konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s = 2, 3, 4, \dots$, da für jede dieser Reihen die Folge der Partialsummen beschränkt ist durch $1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2$.



Die Divergenz der harmonischen Reihe 4.1.11 zeigt, daß man mit hinreichend vielen identischen Bauklötzen einen beliebig weit neben seinem Grundklotz endenden Turm bauen kann. Obiges Bild zeigt etwa, wie weit man mit vier Klötzen so gerade eben mal kommen kann.

Vorschau 4.1.12. In der Funktionentheorie können Sie lernen, daß diese Reihen sogar eine außerordentlich interessante Funktion $\zeta(s)$ definieren, die sogenannte **Riemann'sche ζ -Funktion**. Wir werden in [FT1] 6.2.9 zeigen, daß zum Beispiel gilt $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ und nach [FT1] 6.2.7 haben wir sogar ganz allgemein $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 1$. Alle diese Formeln sind berühmte Resultate des 1707 in Basel geborenen Mathematikers **Leonhard Euler**. Als Übung 5.5.28 werden Sie im übrigen zeigen, daß auch die Reihe der Kehrwerte aller Primzahlen bereits divergiert. Für diejenigen unter Ihnen, die die komplexen Zahlen bereits kennen, sei erwähnt, daß es mit etwas größerem Aufwand sogar gelingt, $\zeta(s)$ zu definieren für jede komplexe Zahl $s \neq 1$, vergleiche etwa [FT1] 7.1.7. Die vielleicht berühmteste Vermutung der Mathematik, die **Riemann'sche Vermutung**, besagt, daß alle Nullstellen der Riemann'schen ζ -Funktion, die nicht auf der reellen Achse liegen, Realteil $1/2$ haben müssen. Ein Beweis dieser Vermutung hätte weitreichende Konsequenzen für unser Verständnis der Verteilung der Primzahlen, wie der Beweis des Primzahlsatzes [FT1] 7.1.1 illustriert. Die Riemann'sche Vermutung ist übrigens der Kern des **achten Hilbert'schen Problems**.

Definition 4.1.13. Wir sagen, eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere absolut**, wenn die Reihe der Absolutbeträge der Reihenglieder konvergiert, wenn also in Formeln gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Beispiel 4.1.14. Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert, aber nicht absolut. Daß die Reihe nicht absolut konvergiert, hatten wir schon in 4.1.11 gesehen. Um zu zeigen, daß unsere Reihe dennoch konvergiert, beachten wir, daß für die Folge s_n der Partialsummen gilt

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

Folglich existiert $S = \sup\{s_2, s_4, \dots\}$. Da aber gilt $s_{2k} \leq S \leq s_{2k+1}$ für alle k erhalten wir $|S - s_n| \leq \frac{1}{n}$ und folglich $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$. Wir werden in 6.4.1 sehen, daß genauer gilt $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$.

Satz 4.1.15. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unsere absolut konvergente Reihe. Seien

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

die Partialsummen der Reihe selbst und der Reihe der Absolutbeträge. Nach Annahme konvergiert die Folge der S_n in \mathbb{R} und ist also eine Cauchy-Folge. Da aber für $n > m$ gilt $|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^n a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = S_n - S_m$, ist dann auch s_n eine Cauchy-Folge und konvergiert in \mathbb{R} nach 3.6.8. \square

Proposition 4.1.16 (Majorantenkriterium). Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Gibt es für unsere Reihe eine konvergente Majorante, als da heißt eine konvergente Reihe $\sum b_k$ mit $|a_k| \leq b_k$ für fast alle k , so konvergiert unsere Reihe $\sum a_k$ absolut.

Beweis. Indem wir endlich viele Glieder abändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $|a_k| \leq b_k$ sogar für alle k gilt. Die Reihe $\sum |a_k|$ besteht nun aus nichtnegativen Gliedern und die Folge ihrer Partialsummen ist beschränkt durch $\sum b_k$. Aus der Konvergenz beschränkter nichtnegativer Reihen 4.1.10 folgt damit die Konvergenz der Reihe $\sum |a_k|$. \square

Korollar 4.1.17 (Quotientenkriterium). Sei (a_k) eine Folge. Gibt es $\theta < 1$ mit $|a_{k+1}| \leq \theta |a_k|$ für fast alle k , so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.

4.1.18. Gilt $a_k \neq 0$, so kann man die Bedingung zu $|a_{k+1}/a_k| \leq \theta$ umschreiben, deshalb die Bezeichnung als Quotientenkriterium.

4.1.19. Bei diesem Kriterium ist wesentlich, daß θ nicht von k abhängt. Die Ungleichungen $|a_{k+1}/a_k| < 1$ gelten ja auch für die divergente harmonische Reihe. Es gibt jedoch auch Reihen wie $\sum \frac{1}{k^2}$, die absolut konvergieren, obwohl sie unser Kriterium nicht dazu zwingt.

Beweis. Indem wir endlich viele Glieder abändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $|a_{k+1}| \leq \theta |a_k|$ sogar für alle k gilt. Daraus folgt induktiv $|a_k| \leq |a_0| \theta^k$ für alle k . Mithin ist die nach 4.1.5 konvergente geometrische Reihe $\sum |a_0| \theta^k$ eine Majorante unserer Reihe und wir können das Majorantenkriterium 4.1.16 anwenden. \square

Korollar 4.1.20. Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit nichtverschwindenden Gliedern. Gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.

Beweis. Klar nach dem Quotientenkriterium 4.1.17. \square

Satz 4.1.21 (Umordnungssatz). Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$ eine absolut konvergente Reihe und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis. Da $\sum |a_k|$ konvergiert, finden wir schon mal für jedes $\varepsilon > 0$ ein N mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$. Ist M so groß, daß gilt $u(\{1, \dots, M\}) \supset \{1, \dots, N\}$, so erhalten wir daraus für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^M a_{u(k)} - \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt nach der Erhaltung 3.5.37 von Ungleichungen im Grenzwert und der Vertauschbarkeit 3.5.28 von stetigen Funktionen und insbesondere der Betragsfunktion mit Grenzwerten dann auch im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ und zeigt, daß die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe konvergiert und denselben Grenzwert hat wie die Folge der Partialsummen der ursprünglichen Reihe. Wenden wir diese Erkenntnis auf die Reihe der Absolutbeträge an, so folgt auch die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe. \square

4.1.22 (Problematik der Umordnung nicht absolut konvergenter Reihen). Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen, die nicht absolut konvergiert, so gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = x$. In der Tat divergieren in diesem Fall die Reihen ihrer positiven und ihrer negativen Terme jeweils für sich genommen. Die Strategie im Fall $x \in \mathbb{R}$ ist nun, erst nur positive Reihenglieder zu nehmen, bis man oberhalb von x ist, dann nur negative, bis man wieder drunterrutscht, und immer so weiter. Für $x = \pm\infty$ muß man diese Strategie noch etwas verfeinern.

Definition* 4.1.23. Gegeben eine Familie von reellen Zahlen $(a_i)_{i \in I}$ und $s \in \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir

$$\sum_{i \in I} a_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $I_U \subset J$ gilt $\sum_{i \in J} a_i \in U$. Es ist klar, daß hier s eindeutig bestimmt ist, wenn es existiert. Ist zusätzlich s reell, so nennen wir unsere Familie von reellen Zahlen **summierbar**.

4.1.24. Mir gefällt am Konzept der Summierbarkeit, daß darin von einer Reihenfolge der Summanden erst gar nicht die Rede ist. Später, wenn wir auch in „normierten“ Vektorräumen unendlicher Dimension summieren, sind Summierbarkeit und absolute Konvergenz nicht mehr gleichbedeutend, und dann erweist sich das Analogon der Summierbarkeit 4.1.23 als der nützlichere Begriff.

Satz* 4.1.25 (Summierbarkeit und absolute Konvergenz). Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ von reellen Zahlen ist genau dann summierbar, wenn entweder I endlich ist oder

es eine Injektion $z : \mathbb{N} \hookrightarrow I$ gibt mit $(a_i \neq 0 \Rightarrow i \in z(\mathbb{N}))$ derart, daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt dann

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$$

Beweis. Bei einer summierbaren Familie kann es offensichtlich für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ höchstens endlich viele Indizes i geben mit $a_i \geq 1/n$ und ebenso höchstens endlich viele Indizes i mit $a_i \leq -1/n$. Ist I unendlich, so finden wir demnach eine Injektion $z : \mathbb{N} \hookrightarrow I$ mit $(a_i \neq 0 \Rightarrow i \in z(\mathbb{N}))$. Weiter müssen bei einer summierbaren Familie die Werte endlicher Teilsummen offensichtlich eine beschränkte Menge von reellen Zahlen bilden. Das gilt insbesondere für alle endlichen Teilsummen aus positiven a_i ebenso wie für alle endlichen Teilsummen aus negativen a_i und zeigt die absolute Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{z(k)}| < \infty$. Setzen wir nun $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$ und ist U eine Umgebung von s , so finden wir $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U$ und wegen der absoluten Konvergenz weiter N gibt mit $\sum_{k=N}^{\infty} |a_{z(k)}| < \varepsilon$. Nehmen wir also $I_U := z(\{0, 1, \dots, N-1\})$, so folgt für endliches $J \subset I$ aus $J \supset I_U$ bereits $\sum_{i \in J} a_i \in U$ und damit

$$\sum_{i \in I} a_i = s = \sum_{k=0}^{\infty} a_{z(k)}$$

Daß umgekehrt aus absoluter Konvergenz die Summierbarkeit folgt wie im Satz behauptet, zeigt dieses Argument gleich mit. \square

Übungen

Übung 4.1.26. Genau dann läßt sich eine reelle Zahl durch einen periodischen Dezimalausdruck darstellen, wenn sie rational ist.

Übung 4.1.27. Man zeige das **Leibniz'sche Konvergenzkriterium**: Ist a_k eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Ergänzende Übung 4.1.28. Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen und $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Umordnung mit der Eigenschaft, daß $|u(k) - k|$ beschränkt ist, so konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum a_{u(k)}$ und zwar gegen denselben Grenzwert. Für derartige Umordnungen erhält man also die Aussage des Umordnungssatzes auch ohne absolute Konvergenz.

Ergänzende Übung 4.1.29. Gegeben eine summierbare Familie von reellen Zahlen $(a_i)_{i \in I}$ zeige man, daß auch für eine beliebige Teilmenge $J \subset I$ die Familie $(a_i)_{i \in J}$ summierbar ist und daß für eine beliebige Zerlegung $I = \bigsqcup_{k \in K} I(k)$ von

I in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen $I(k)$ gilt

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I(k)} a_i \right)$$

Weiter zeige man für jede aufsteigende Folge von Teilmengen $I_0 \subset I_1 \subset \dots$ mit Vereinigung I die Formel $\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} a_i$. Diese Aussagen werden sich im übrigen als Spezialfälle des Satzes von Fubini [AN3] 1.7.16 und des Satzes über dominierte Konvergenz [AN3] 1.6.10 aus der Theorie des Lebesgue-Integrals erweisen.

4.2 Wachstum und Zerfall

Definition 4.2.1. Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

und erhalten so eine Abbildung $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die **Exponentialfunktion**.

4.2.2. Die fragliche Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Quotientenkriterium oder noch besser seinem Korollar 4.1.20, und sie konvergiert sogar außerordentlich schnell. Von einem formalen Standpunkt aus betrachtet ist unsere Definition also völlig unproblematisch und von einem rechentechnischen Standpunkt aus betrachtet ist sie sogar ziemlich geschickt. Sie hat nur den Nachteil, daß aus der Definition heraus weder klar wird, warum gerade diese Funktion den Namen Exponentialfunktion verdienen sollte, noch warum sie überhaupt von Belang ist. Ich erläutere das in den gleich anschließenden Bemerkungen 4.2.6 und 4.2.5.

Proposition 4.2.3 (Exponentialfunktion als Grenzwert von Potenzen). *Es gilt*

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Beweis. Mit der binomischen Formel 1.1.23 ergibt sich

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n} \right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}$$

Für beliebige $M, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt also

$$\begin{aligned} \left| \exp(x) - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| &\leq \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^M \frac{x^k}{k!} \right| \\ &+ \left| \sum_{k=0}^M \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^M \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \right| \\ &+ \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \right| \end{aligned}$$

Da die Exponentialreihe für vorgegebenes x absolut konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M = M_\varepsilon$ derart, daß für jedes n der erste und der letzte Term rechts beschränkt sind durch ε . Für dies feste M geht der mittlere Term bei $n \rightarrow \infty$ gegen Null, es gibt also $N = N_\varepsilon$ derart, daß er für dies feste M kleiner wird als ε falls $n \geq N$. Damit gilt $|\exp(x) - (1 + \frac{x}{n})^n| \leq 3\varepsilon$ falls $n \geq N$. \square

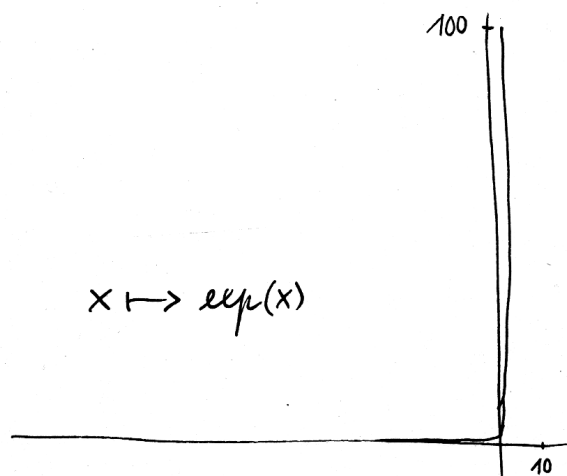
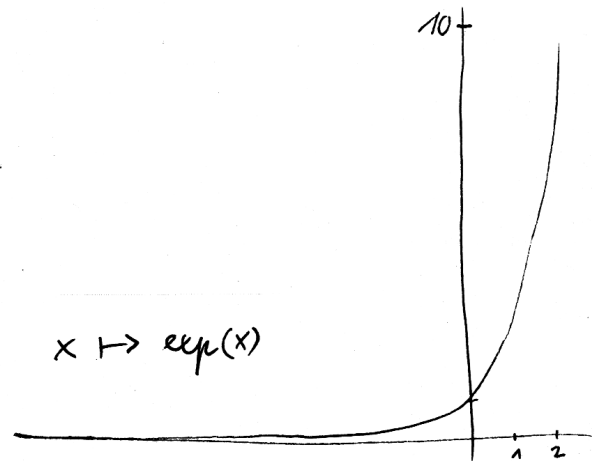
4.2.4. Aus unserer Proposition 4.2.3 folgt unmittelbar für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Formel $\exp(kx) = (\exp x)^k$ mittels der Rechnung

$$\exp(kx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kx}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kx}{kn}\right)^{kn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{kn} = (\exp x)^k$$

Mit der Notation $e := \exp(1)$ erhalten wir insbesondere $\exp(k) = e^k$ und dann auch $e = \exp(k/k) = (\exp(1/k))^k$ alias $\exp(1/k) = \sqrt[k]{e}$ und zusammen für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Formel $\exp(p/q) = (\sqrt[q]{e})^p$. Alternativ folgt das alles auch aus der Funktionalgleichung 4.2.10.

4.2.5 (**Exponentialfunktion und Wachstum**). Die Darstellung der Exponentialfunktion als Grenzwert von Potenzen 4.2.3 kann man dahingehend interpretieren, daß $\exp(x)$ das Kapital ist, das in x Jahren aus einem Euro entsteht bei einer „kontinuierlichen Verzinsung mit einem Zinssatz von 100%“. Legen wir das Geld zum Beispiel für ein Jahr an, so haben wir bei jährlicher Verzinsung am Ende des Jahres zwei Euro auf dem Konto. Bei monatlicher Verzinsung ergeben sich mit Zinseszinsen schon $(1 + \frac{1}{12})^{12}$ Euro, und bei kontinuierlicher Verzinsung $e := \exp(1) = 2,781 \dots$ Euro. Man nennt e die **Euler'sche Zahl**. In der Schule haben Sie möglicherweise e^x statt $\exp(x)$ geschrieben, aber wir erlauben uns das erst ab 4.3.5, wo wir für beliebiges $a > 0$ die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a^n$ zu einer Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, b \mapsto a^b$ fortsetzen und zwar nach 4.3.21 auf die einzig mögliche Weise, bei der die Funktion $b \mapsto a^b$ monoton ist und die „Funktionalgleichung“ $a^{b+c} = a^b a^c$ erfüllt.

4.2.6. In einem Ausdruck der Gestalt a^b nennt man für gewöhnlich a die **Basis** und b den **Exponenten**, weil er eben exponiert oben an die Basis geschrieben wird. Daher rührt auch die Bezeichnung als „Exponentialfunktion“. Ich würde unsere Funktion viel lieber ihrer Natur nach die „Funktion des natürlichen Wachstums“ oder die „Wachstumsfunktion“ nennen, aber die aus der Schreibweise abgeleitete Bezeichnung hat sich nun einmal durchgesetzt, mag sie auch aus historischen Zufällen entstanden sein: Hätte sich für die Bezeichnung des Quadrats einer Zahl a statt der Notation a^2 die Notation a_2 eingebürgert, so würde in Anbetracht dieses Schemas der Begriffsbildung unsere Exponentialfunktion heute vielleicht „Pedestalfunktion“ heißen. . .



Der Graph der Exponentialfunktion in zwei Maßstäben. Man erkennt unschwer, daß ein konstantes Wirtschaftswachstum über längere Zeiträume in einer Katastrophe enden muß. In derselben Weise entwickelt sich im Übrigen auch die Geschwindigkeit einer Vorlesung unter der Annahme, daß die Stoffmenge, die in einer Stunde vermittelt werden kann, proportional ist zur Menge des Stoffes, den die Zuhörer bereits kennen...

4.2.7 (Didaktische Gedanken zur Einführung der Exponentialfunktion). Eine infinitesimale Formulierung der in 4.2.5 erläuterten Bedeutung der Exponentialfunktion gibt Korollar 5.5.9, in dem die Exponentialfunktion charakterisiert wird als die eindeutig bestimmte differenzierbare Funktion von den reellen Zahlen in sich selber, die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt und bei Null den Wert Eins annimmt. Gehen wir von dieser Charakterisierung aus, so führt uns der Formalismus der Taylorreihen 6.2.2 ganz natürlich zu der Reihe, die wir in 4.2.1 haben vom Himmel fallen lassen. Ein anderer Zugang zur Exponentialfunktion besteht darin, von der Funktion $x \mapsto \int_1^x (1/t) dt$ auszugehen, von der man unschwer zeigt, daß sie einen stetigen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ liefert, und dann die Exponentialfunktion als deren Umkehrfunktion zu erhalten. Das bedeutet jedoch, daß man mit der Einführung der Exponentialfunktion die Konstruktion des Integrals abwarten muß. Eigentlich will ich es ja nach Möglichkeit vermeiden, Formeln vom Himmel fallen zu lassen. In diesem Fall schienen mir aber die didaktischen Vorteile der dadurch ermöglichten frühzeitigen Einführung dieser außerordentlich wichtigen Funktion zu überwiegen.

4.2.8. Die Exponentialfunktion wächst ungeheuer schnell. Eine gewisse Vorstellung davon mag die Erkenntnis 7.1.16 geben, nach der der Graph der Funktion $(\exp(x) + \exp(-x))/2$, in einem jeweils der speziellen Situation angepaßten Maßstab auf die Wand gemalt, genau die Gestalt einer zwischen zwei Nägeln durchhängenden Kette hat. Ist die Kette zwanzigmal so lang ist wie der Abstand der beiden Nägel, so stellt sie unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von $-2,3$ bis $2,3$ dar. Ist die Kette zweihundertmal so lang wie der Abstand der beiden Nägel, so erhalten wir unsere Funktion in etwa auf dem Intervall von $-4,6$ bis $4,6$. Und eine Zwei-Meter-Kette hängt zwischen zwei im Abstand von einem knappen Zentimeter eingeschlagenen Nägeln schon recht steil!

4.2.9. In 1.3.11 habe ich erklärt, wie man mit einem Blatt Papier auf den Mond kommt und wie auch der Fortgang dieser Vorlesung exponentiellen Charakter hat. In der Wirtschaft ist es nicht anders. Ein jährliches Wirtschaftswachstum von 3% bedeutet wegen $(1,03)^{25} > 2$ etwas mehr als eine Verdopplung der Wirtschaftsleistung in 25 Jahren und muß auf die Dauer unweigerlich in einer Katastrophe enden.

Satz 4.2.10 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion ist ein Monoidhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in das multiplikative Monoid der reellen Zahlen. In Formeln ausgedrückt gilt also $\exp(0) = 1$ und*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

4.2.11. Unsere Formel $\exp(kx) = (\exp x)^k$ aus 4.2.4 können wir auch unschwer mit Induktion über k aus der Funktionalgleichung herleiten.

4.2.12. Stellen wir uns $\exp(x)$ vor als das Vermögen, daß in x Jahren aus einem Euro entsteht bei kontinuierlicher Verzinsung mit 100%, so erhalten wir offensichtlich gleichviel, ob wir unser Vermögen $\exp(x)$ nach x Jahren gleich wieder für y Jahre anlegen, oder ob wir unseren Euro gleich von Anfang an $x + y$ Jahre arbeiten lassen. Das ist die Bedeutung der Funktionalgleichung. Nach 1.5.43 induziert jeder Monoidhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$. In 4.3.21 werden Sie zeigen, daß die Gruppenhomomorphismen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ mit der Eigenschaft $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$ genau die Abbildungen $\varphi(x) = \exp(ax)$ sind mit $a > 0$. In 4.3.2 werden wir zeigen, daß die Exponentialfunktion sogar einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen liefert.

Ergänzung 4.2.13. Der gleich folgende Beweis der Funktionalgleichung gefällt mir nicht besonders. Ein anderer aber in seiner Weise auch etwas verwickelter Beweis wird in 4.2.22 vorgestellt. Ein mehr konzeptueller Zugang zur Exponentialfunktion und ihrer Funktionalgleichung wird in 5.8.11 und 5.8.22 skizziert. Er benötigt jedoch Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen. Er läßt auch nicht so einfach auf den Fall von komplexen Zahlen verallgemeinern, der für uns bei der Diskussion von Sinus und Cosinus eine wesentliche Rolle spielen wird. Aus diesen Gründen gebe ich für die Funktionalgleichung zunächst den algebraisch-formalen Beweis. Wir schicken dem eigentlichen Beweis einige allgemeine Betrachtungen voraus.

Satz 4.2.14 (Produkt von Reihen). Sind $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergente Reihen, so konvergiert auch für jede Bijektion $(u, v) : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Summe der Produkte $a_{u(k)} b_{v(k)}$ absolut und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Beweis. Natürlich haben wir

$$\sum_{k=0}^n |a_{u(k)} b_{v(k)}| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right)$$

und das zeigt bereits die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} b_{v(k)}$. Nach dem Umordnungssatz 4.1.21 ist ihr Grenzwert also unabhängig von der Wahl der Bijektion $(u, v) : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nun können wir diese Bijektion sicher so wählen, daß sie Bijektionen

$$\{0, \dots, N^2 - 1\} \xrightarrow{\sim} \{0, \dots, N - 1\} \times \{0, \dots, N - 1\}$$

induziert. Dann gilt offensichtlich

$$\sum_{k=0}^{N^2-1} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{N-1} b_j \right)$$

Im Limes für $N \rightarrow \infty$ und unter Verwendung der Erkenntnisse, daß jede absolut konvergente Reihe konvergent ist und daß jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert, folgt die Behauptung. \square

Beweis der Funktionalgleichung 4.2.10. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} x^i y^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i y^j}{i!j!} \right) \end{aligned}$$

Hier verwenden wir im zweiten Schritt die binomische Formel und der Index $i+j=k$ an einer Summe bedeutet, daß wir über alle Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i+j=k$ summieren. Andererseits erhalten wir mit unserem Satz über das Produkt von Reihen 4.2.14 bei einer geeigneten Wahl der Bijektion $(u, v) : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nach Übergang zu einer Teilfolge der Folge der Partialsummen auch

$$\begin{aligned} \exp(x) \exp(y) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i y^j}{i!j!} \right) \end{aligned}$$

Die Identität $\exp(0) = 1$ ist offensichtlich. \square

Lemma 4.2.15. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Vorschau 4.2.16. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion können wir später auch aus dem allgemeinen Satz 6.1.4 folgern, der besagt, daß Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich immer stetige Funktionen darstellen.

Beweis. Wir wenden das ε - δ -Kriterium 3.2.21 an. Mit der Funktionalgleichung finden wir

$$|\exp(x) - \exp(p)| = |\exp(p)| \cdot |\exp(x-p) - \exp(0)|$$

Nun beachten wir, daß für $|y| \leq 1$ gilt

$$|\exp(y) - \exp(0)| = |y| \cdot \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{i-1}}{i!} \right| \leq |y| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y|^{i-1}}{(i-1)!} \leq |y| \exp(1)$$

wo wir im zweiten Schritt die Dreiecksungleichung sowie die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert verwenden und die Nenner verkleinern. Aus $|x - p| \leq 1$ folgt also $|\exp(x) - \exp(p)| \leq \exp(p)|x - p|e$ und für gegebenes $\varepsilon > 0$ können wir mithin $\delta = \inf\{1, \varepsilon/(\exp(p)e)\}$ nehmen. \square

Korollar* 4.2.17 (Produkt summierbarer Familien). Sind $(a_i)_{i \in I}$ und $(b_j)_{j \in J}$ summierbare Familien reeller Zahlen, so bilden auch ihre Produkte eine summierbare Familie $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ und es gilt

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

Beweis. Wir wissen aus 4.1.25, daß die Summierbarkeit einer Familie reeller Zahlen im wesentlichen gleichbedeutend ist zu absoluter Konvergenz. Damit erweist sich das Korollar als eine Umformulierung des vorhergehenden Satzes. \square

Übungen

Übung 4.2.18. Man folgere aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 4.2.10 die Formeln $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$, $\exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(n) = e^n$, $\exp(nx) = (\exp x)^n \forall n \in \mathbb{Z}$ sowie $\exp(x/2) = \sqrt{\exp(x)}$.

Ergänzende Übung 4.2.19. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir hier im Vorgriff auf 4.3.5 schon $\exp(x) = e^x$ ab. Man zeige, daß für alle $i, N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i} = \frac{N^i e^{-N}}{i!}$$

Dieses Resultat ist in der Stochastik wichtig, wie ich im folgenden ausführen will. Gegeben $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $i \mapsto \lambda^i e^{-\lambda} / i!$ ganz allgemein die **Poisson-Verteilung** mit Parameter λ . Sie hat die folgende Bedeutung: Knetet man in einen großen Teig genau nN Rosinen ein und teilt ihn dann in n Rosinenbrötchen, so ist $\left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß i vorgegebene Rosinen in einem fest gewählten Brötchen landen und die restlichen Rosinen in den anderen Brötchen. Mithin ist $\binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß in einem fest gewählten Brötchen genau i Rosinen landen. Ist unser Brötchen klein im Vergleich zum ganzen Teig, so liegt diese Wahrscheinlichkeit also nahe bei $N^i e^{-N} / i!$ oder allgemeiner bei $\lambda^i e^{-\lambda} / i!$ mit λ der durchschnittlichen Zahl von Rosinen in dem Teigvolumen, das man für ein Brötchen braucht. Genau genommen stimmt das allerdings nur für punktförmige Rosinen, denn sonst liefert die Größe des Brötchens eine obere Schranke für die möglichen Anzahlen der darin verbackenen Rosinen.

Ergänzende Übung 4.2.20. Man berechne die Euler'sche Zahl e bis auf 5 sichere Stellen hinter dem Komma.

Ergänzende Übung 4.2.21. Die Euler'sche Zahl e ist nicht rational. Man zeige dies, indem man von ihrer Darstellung als Reihe ausgeht und durch geeignete Abschätzungen nachweist, daß $q!e$ für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ nie eine ganze Zahl sein kann.

Ergänzende Übung 4.2.22. In dieser Übung sollen Sie einen anderen Zugang zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ausarbeiten, den ich in einer Arbeit von Martin Kneser kennengelernt habe: Man zeige, indem man den Beweis von 4.2.3 verallgemeinert, daß für jede Folge reeller Zahlen $x_n \in \mathbb{R}$ aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x)$. Mithilfe der Identität

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{x + y + (xy/n)}{n}\right)$$

folgere man dann die Funktionalgleichung.

4.3 Logarithmus und allgemeine Potenzen

4.3.1 (**Monotonie der Exponentialfunktion**). Die Exponentialfunktion wächst streng monoton. In der Tat erhalten wir $(0 \leq x < y) \Rightarrow (1 \leq \exp(x) < \exp(y))$ direkt aus der Definition und $(z < w \leq 0) \Rightarrow (\exp(z) < \exp(w) \leq 1)$ folgt mit der Identität $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$.

Definition 4.3.2. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, denn wir haben offensichtlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \infty$ und damit $\lim_{n \rightarrow -\infty} \exp(n) = 0$ nach 3.3.4. Wir können also den **natürlichen Logarithmus** oder kurz **Logarithmus** einführen als die Umkehrfunktion

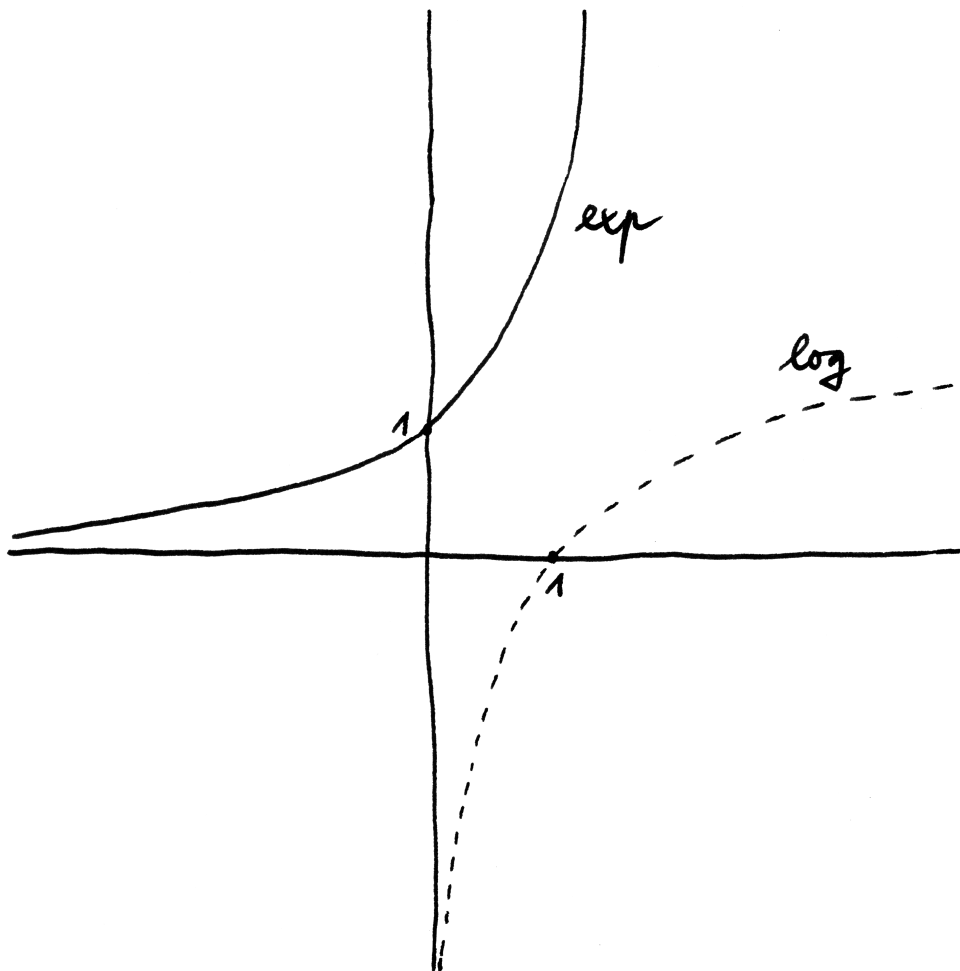
$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion, $\log(\exp(x)) = x$, und erhalten aus Satz 3.3.11 die Stetigkeit des Logarithmus. In der französischen Literatur bezeichnet man diese Funktion auch als **logarithme népérien** in Erinnerung an den schottischen Mathematiker John Napier, der die ersten Logarithmentafeln aufstellte.

4.3.3. Die Exponentialfunktion liefert nach 4.2.10 und 4.3.2 einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe aller positiven reellen Zahlen. Daraus folgt sofort

$$\log(xy) = \log x + \log y \text{ und } \log(e) = 1.$$

Die erste Formel mag man die **Funktionalgleichung des Logarithmus** nennen.



Die Graphen von Logarithmus und Exponentialfunktion gehen wie immer bei Umkehrfunktionen durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen $x = y$ auseinander hervor.

4.3.4 (Diskussion der Terminologie). Die Notation „log“ ist leider nicht universell. Auf vielen Taschenrechnern und auch in älteren Büchern wird unsere Funktion „log“ notiert als „ln“ für „logarithmus naturalis“ oder „logarithme néperien“ und das Kürzel „log“ steht für den „Logarithmus zur Basis 10“, den wir in 4.3.9 einführen und mit \log_{10} bezeichnen werden. Der Logarithmus zur Basis 10 wird in manchen Quellen auch der „Brigg’sche Logarithmus“ genannt und mit „lg“ bezeichnet. Die Norm ISO 31-11 empfiehlt die Notationen „ln“ und „lg“. Wir verwenden jedoch \log statt \ln , weil das in der reinen Mathematik so üblich ist und wir damit der Konvention folgen, spezielle Funktionen nach Möglichkeit mit Kürzeln aus drei Buchstaben zu notieren. „Logarithmus“ ist das griechische Wort für „Rechnung“, und für das Rechnen waren die Logarithmentafeln, in denen die Werte des Logarithmus zur Basis Zehn aufgelistet wurden, auch außerordentlich praktisch: Mit ihrer Hilfe konnte man nämlich Divisionen in Subtraktionen verwandeln und Wurzelziehen in Divisionen, wie wir gleich näher ausführen. Die Entdeckung der Logarithmen und die ersten Logarithmentafeln von Napier bedeuteten für die damalige Wissenschaft eine ungeheure Arbeitserleichterung und wurden begeistert begrüßt.

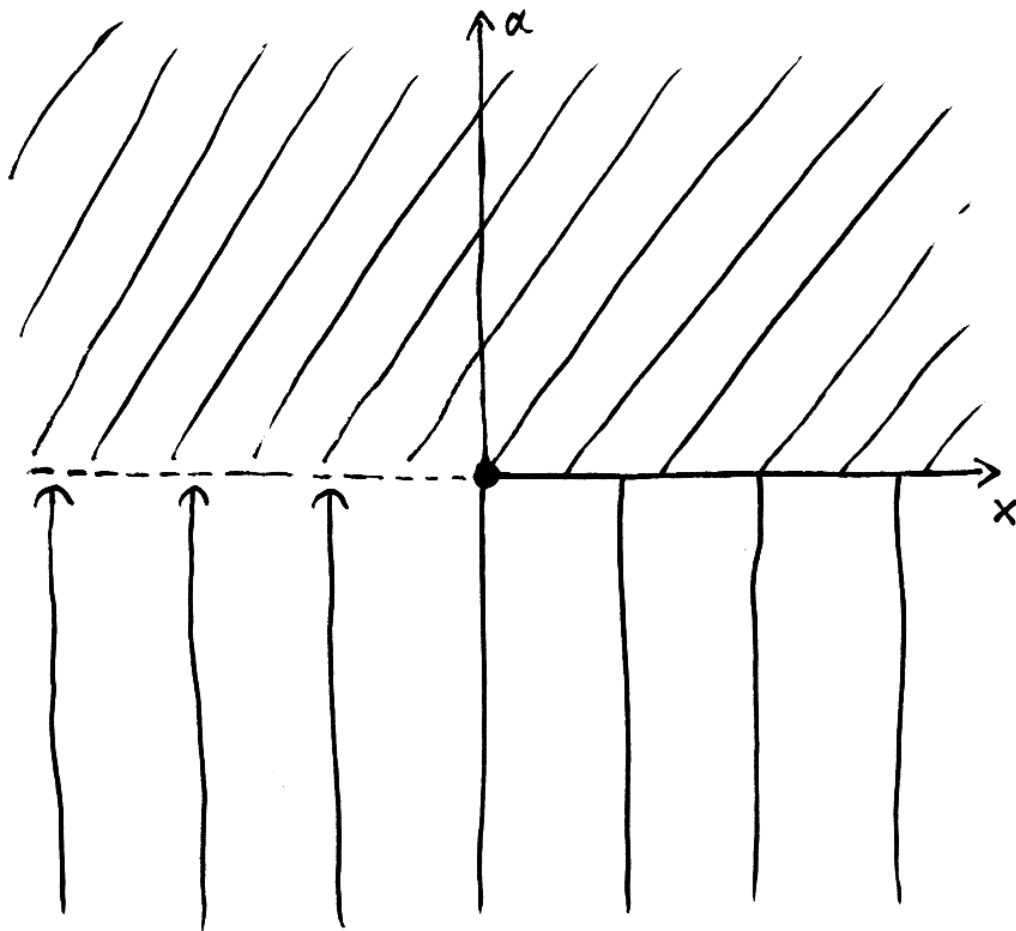
Definition 4.3.5 (Allgemeine Potenzen). Gegeben $a, x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ setzen wir

$$a^x := \exp(x \log a)$$

Im Fall $x > 0$ vereinbart man zusätzlich $0^x = 0$. Das führt dazu, daß für $x > 0$ die Funktion $a \mapsto a^x$ sogar stetig ist auf $[0, \infty)$. Es führt allerdings auch dazu, daß die Funktion $x \mapsto 0^x$ mit unserer Konvention $0^0 = 1$ zwar auf $[0, \infty)$ definiert aber bei $x = 0$ *nicht* stetig ist. Damit müssen wir nun weiterleben.

4.3.6 (Eigenschaften der allgemeinen Potenzen). Man prüft ohne Schwierigkeiten die Formeln $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x a^y$ und folgert insbesondere, daß im Fall $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ oder $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ das hier definierte a^n übereinstimmt mit unserem a^n aus 1.5.16. Für beliebige $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ prüft man leicht die Rechenregeln $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$ und $\log(a^x) = x \log a$. Ist speziell $a = e$ die Euler’sche Zahl, so gilt $\log e = 1$ und folglich $\exp(x) = e^x$. Für beliebige $a, b \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ prüft man ebensoleicht die Rechenregeln $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$ und $\sqrt[q]{a} = a^{1/q}$.

4.3.7 (Einige Grenzwerte mit Exponentialfunktion und Logarithmus). Aus dem Quetschlemma 3.5.35 und der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$. Aus 3.5.7 und 3.3.2 folgt dann $\lim_{y \rightarrow \infty} \log y = \infty$. Das Quetschlemma mit der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe liefert auch $\lim_{x \rightarrow \infty} (x/e^x) = 0$ und durch Substitution $x = \log y$ und 3.5.7 und 3.2.30 folgt dann $\lim_{y \rightarrow \infty} (\log y)/y = 0$.



Dieses Bild stellt den unangenehm verzwickelten Bereich aller $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ dar, für die a^x definiert ist: Bei $x \in \mathbb{N}$ sind das jeweils alle $a \in \mathbb{R}$, bei $x \in \mathbb{Z}_{<0}$ nur alle $a \in \mathbb{R}^\times$, bei reellem nichtganzen $x > 0$ alle $a \geq 0$, bei reellem nichtganzen $x < 0$ alle $a > 0$. Besonders schlimm ist die Unstetigkeitsstelle am Ursprung, auf der senkrechten Koordinatenachse ist ja unsere Funktion konstant Eins und auf der positiven waagerechten Koordinatenachse konstant Null. Diese Unstetigkeitsstelle ist aber auch die Einzige.

Satz 4.3.8 (Gruppenwege in \mathbb{R}^\times). Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die Abbildungen $x \mapsto a^x$ für beliebiges aber festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis. Ist $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so bildet G notwendig das neutrale Element auf das neutrale Element ab, in Formeln $G(0) = 1$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt $G(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Damit können wir den Gruppenhomomorphismus $F = \log \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bilden und aus 3.5.40 folgt sofort $F(x) = xF(1)$, also $G(x) = \exp(F(x)) = \exp(xF(1)) = \exp(x \log G(1))$. \square

Definition 4.3.9. Gegeben $a > 1$ nennt man die Umkehrabbildung der streng monoton wachsenden Abbildung $x \mapsto a^x$ auch den **Logarithmus zur Basis a**

$$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

4.3.10. Der natürliche Logarithmus ist also der Logarithmus mit der Euler'schen Zahl e als Basis, in Formeln $\log = \log_e$. Der Logarithmus zur Basis a läßt sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken vermittels der Formel $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$. Man kommt deshalb meist mit dem natürlichen Logarithmus aus. Die Notation \log_a ist konform mit der Norm ISO 31-11, in der zusätzlich auch noch die Abkürzung $\log_2 = \text{lb}$ für den **binären Logarithmus** empfohlen wird. In Logarithmentafeln wird üblicherweise der Logarithmus zur Basis 10 tabelliert, weil ja gilt $\log_{10}(10 \cdot x) = 1 + \log_{10}(x)$ und man sich so auf Dezimalausdrücke x mit einer Null vor dem Komma und keiner Null nach dem Komma beschränken kann.

Beispiel 4.3.11. Für alle $a > 0$ folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und indem man für ein logisch vollständiges Argument die folgende Gleichungskette von hinten nach vorne liest

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \log a\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a\right) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Beispiel 4.3.12. Aus dem Quetschlemma 3.5.35 und der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$. Aus 3.5.7 und 3.3.2 folgt dann weiter $\lim_{y \rightarrow \infty} \log y = \infty$. Das Quetschlemma mit der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe liefert auch $\lim_{x \rightarrow \infty} (x/e^x) = 0$ und durch Substitution $x = \log y$ und 3.5.7 sowie 3.2.30 folgt $\lim_{y \rightarrow \infty} (\log y)/y = 0$.

Übungen

Ergänzende Übung 4.3.13. Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Man zeige das **Wurzelkriterium**: Gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut. Hinweis: Analog zum Beweis des Quotientenkriteriums. Meiner Erfahrung nach ist dies Kriterium in der Praxis selten von Nutzen, da es meist auf schwer zu bestimmende Grenzwerte führt.

Übung 4.3.14. Man folgere aus der Funktionalgleichung 4.3.3 des Logarithmus die Formeln $\log(1) = 0$, $\log(x^{-1}) = -\log(x)$, $\log(x^n) = n \log(x)$ und $\log(\sqrt[q]{x}) = \frac{1}{q} \log(x)$.

Übung 4.3.15. Man zeige für $a > 0$ die Identität $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt[n]{a}) = \log a$.

Übung 4.3.16. Man zeige $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^a/b^x) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b > 1$. Man zeige $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x/x^c) = 0$ für alle $c > 0$. Man zeige $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Man zeige

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(5n)!}{(n!)^5}} = 5^5$$

Beispiel 4.3.17. Bei einem radiokativen Material wird nach einem Tag nur noch 90% der Strahlungsaktivität gemessen. Wie lange dauert es, bis die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist? Nun, halten wir einen Referenzzeitpunkt beliebig fest, so wird die Aktivität nach Vergehen einer Zeitspanne τ gemäß Überlegungen wie in 4.2.5 gegeben durch eine Formel der Gestalt $M e^{c\tau}$ mit unbekanntem M und c . Wir kürzen die Zeiteinheit „Stunde“ ab mit dem Buchstaben h für lateinisch „hora“. Formal ist h eine Basis des in [EIN] 1.2.6 angedachten eindimensionalen reellen Vektorraums „aller Zeitspannen“, und formal ist auch M ein Element eines gedachten eindimensionalen reellen Vektorraums „aller Strahlungsaktivitäten“ und c liegt im Raum der Linearformen auf dem Raum aller Zeitspannen, in dem wir mit h^{-1} dasjenige Element bezeichnen werden, das auf h den Wert Eins annimmt. So formal will ich hier aber eigentlich gar nicht werden und schreibe das Auswerten solch einer Linearform auf einer Zeitspanne schlicht als Produkt. Für $\tau = 24 h$ wissen wir nun nach unserer Messung $M e^{c \cdot 24 h} = \frac{90}{100} M$ und damit $c = ((\log 9/10)/24) h^{-1}$. Bezeichnet t die Zeitspanne, nach der die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist, so haben wir also $M e^{ct} = M/2$ alias $ct = -\log 2$ und damit

$$t = -\frac{\log 2}{c} = \frac{-\log(2) \cdot 24}{\log(9/10)} h$$

Ergänzende Übung 4.3.18. Das eingestrichene A liegt bei 440 Herz. Bei wieviel Herz etwa liegt das eingestrichene F? Hinweis: Die Lösung dieser Aufgabe benötigt zusätzlich zu mathematischen Kenntnissen auch physikalische und musikalische Vorkenntnisse.

Ergänzung 4.3.19. Versteht man eine positive reelle Zahl als das Verhältnis zweier gleichartiger Größen, so sagt man für den Zehnerlogarithmus besagter Zahl auch, er „drücke das Verhältnis in **Bel** aus“. Diese Sprechweise ehrt Alexander Graham Bell, der das Telephon einführte. So könnte man etwa sagen, das Verhältnis von Gramm zu Kilo betrage 3 Bel, statt von einem Verhältnis von Eins zu Tausend alias 1 zu 10^3 zu reden. Das Verhältnis von Kilo zu Tonne beträgt natürlich auch 3 Bel, und das Verhältnis von Gramm zu Tonne folglich 6 Bel. Häufig redet man auch von **Dezibel** alias „zehntel Bel“. Das ist jedoch „multiplikativ“ zu verstehen, ein Verhältnis von 1 Dezibel meint also ein Verhältnis von Eins zu $\sqrt[10]{10} \approx 1,26$.

Ergänzung 4.3.20. Physikalisch beschreibt man eine Lautstärke durch die Leistung, die sie etwa an einer Membran verrichtet. Gibt man eine Lautstärke in Dezibel an, so ist allerdings das Verhältnis des Quadrats dieser Leistung zum Quadrat der Leistung einer Standardlautstärke gemeint. Diese Standardlautstärke ist so vereinbart, daß sie etwa bei der Hörschwelle eines menschliches Ohrs liegt. Eine Lautstärke von Null Dezibel bedeutet also, daß ein gesunder Mensch das Geräusch so gerade noch hören kann, und jede Erhöhung einer Lautstärke um zwanzig Dezibel bedeutet, daß das Ohr zehnmal soviel Leistung aufnehmen wird. Bei einer Erhöhung um zehn Dezibel wird das Ohr also $\sqrt{10} \approx 3$ mal soviel Leistung aufnehmen.

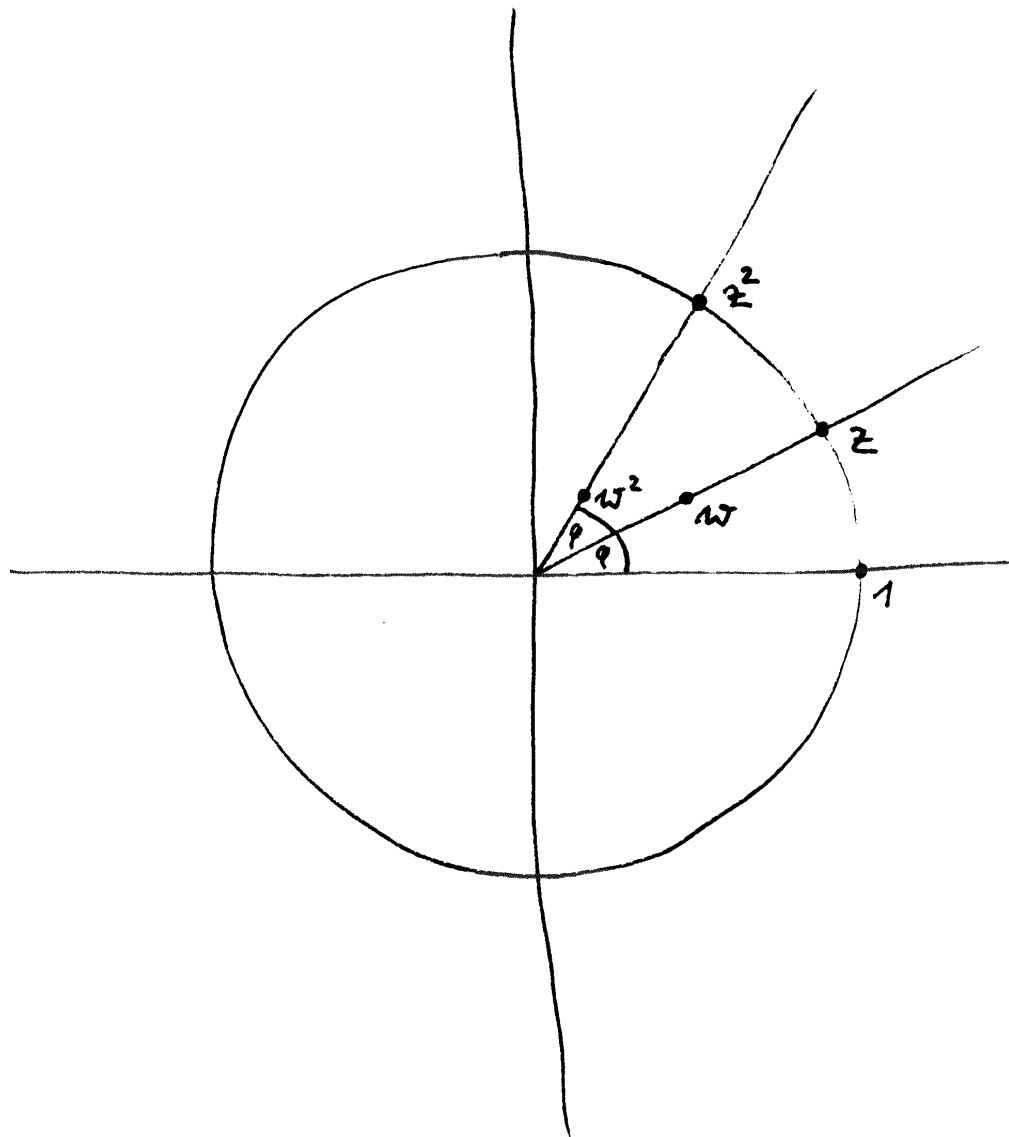
Ergänzende Übung 4.3.21. Die monotonen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die stetigen Gruppenhomomorphismen, also genau die Abbildungen $x \mapsto a^x$ für festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ergänzende Übung 4.3.22. Man finde alle stetigen Funktionen $G : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G(xy) = G(x) + G(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^\times$, also alle stetigen Gruppenhomomorphismen von der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen in die additive Gruppe aller reellen Zahlen.

Ergänzende Übung 4.3.23. Man zeige, daß die Aussage der vorhergehenden Sätze 3.5.40 und 4.3.8 sogar folgt, wenn wir von unseren Gruppenhomomorphismen nur die Stetigkeit bei Null fordern.

4.4 Komplexe Zahlen

4.4.1. Viele mathematische Zusammenhänge werden bei einer Behandlung im Rahmen der sogenannten „komplexen Zahlen“ besonders transparent. Ich denke hier etwa an die Integration rationaler Funktionen 5.10 oder die Lösung der Schwingungsgleichung 7.3.1. Die abschreckenden Bezeichnungen „komplexe Zahlen“ oder auch „imaginäre Zahlen“ für diesen ebenso einfachen wie konkreten Körper haben historische Gründe: Als Mathematiker in Italien bemerkten, daß man polynomiale Gleichungen der Grade Drei und Vier lösen kann, wenn man so



Anschauung für das Quadrieren komplexer Zahlen in ihrer anschaulichen Interpretation als Punkte der komplexen Zahlenebene

tut, als ob man aus (-1) eine Quadratwurzel ziehen könnte, gab es noch keine Mengenlehre und erst recht nicht den abstrakten Begriff eines Körpers 1.6.4. Das Rechnen mit Zahlen, die keine konkreten Interpretationen als Länge oder Guthaben oder zumindest als Schulden haben, schien eine „imaginäre“ Angelegenheit, ein bloßer Trick, um zu reellen Lösungen reeller Gleichungen zu kommen.

4.4.2. Der **Körper der komplexen Zahlen** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ mit Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Diese Struktur ist nach Übung 1.6.21 ein Körper und die Abbildung $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto (a, 0)$ ist ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $\kappa(a)$ zu a ab und setzen $i := (0, 1)$, so gilt $i^2 = -1$ und $(a, b) = a + bi$. Wenn wir die Vorstellung von \mathbb{C} als die Menge aller Punkte der Koordinatenebene evozieren wollen, sprechen wir von der **komplexen Zahlenebene**.

4.4.3. Ich hoffe, Sie werden schnell merken, daß sich viele Fragestellungen bei Verwendung dieser sogenannten komplexen Zahlen sehr viel leichter lösen lassen und daß die komplexen Zahlen auch der Anschauung ebenso zugänglich sind wie die reellen Zahlen. Früher schrieb man „complex“, deshalb die Bezeichnung \mathbb{C} . Unser i ist eine „Wurzel aus (-1) “, und weil es so eine Wurzel in den reellen Zahlen nicht geben kann, notiert man sie i wie „imaginär“.

4.4.4. Für $w \in \mathbb{C}$ bedeutet die Additionsabbildung $(w+) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto w + z$ anschaulich die Verschiebung um den Vektor w . Die Multiplikationsabbildung $(w\cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto wz$ dahingegen bedeutet anschaulich diejenige Drehstreckung der komplexen Zahlenebene, die $(1, 0)$ in w überführt.

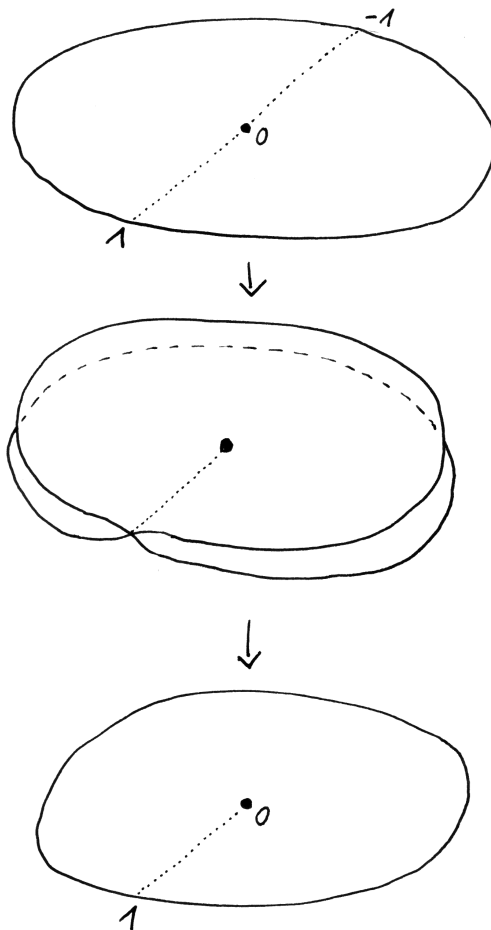
4.4.5. Gegeben eine komplexe Zahl $z = x + yi$ nennt man x ihren **Realteil** $\operatorname{Re} z := x$ und y ihren **Imaginärteil** $\operatorname{Im} z := y$. Wir haben damit zwei Funktionen

$$\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert und es gilt $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man definiert weiter die **Norm** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + yi \in \mathbb{C}$ durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Im Fall einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist diese Norm genau unser Absolutbetrag aus 2.2.12, in Formeln $|x| = |x|$. In der Anschauung der komplexen Zahlenebene bedeutet die Norm einer komplexen Zahl ihren Abstand vom Ursprung.



Dies Bild soll zusätzliche Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der komplexen Zahlenebene auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotonies und in einer Umgebung von Null streng monotonies ε , gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

4.4.6 (**Verschiedene Bedeutungen von $|z|$**). Hier ist unsere Notation nicht vollständig konsistent, da wir für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bereits $|(x, y)| = \max(|x|, |y|)$ vereinbart hatten und nun $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ setzen. Für Stetigkeitsbetrachtungen spielt diese Verwirrung keine Rolle, da stets gilt

$$|(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} |(x, y)|$$

Bei der Betrachtung komplexer Zahlen hat bei uns $|z|$ a priori die eben in 4.4.5 eingeführte Bedeutung als „komplexe Norm“.

4.4.7 (**Diskussion der Terminologie**). Bei rechtem Lichte besehen scheint mir an dieser Terminologie absonderlich, daß der Imaginärteil einer komplexen Zahl darin eine reelle Zahl ist, aber so hat es sich nun einmal eingebürgert.

4.4.8. Stellen wir uns $|z|$ vor als den Streckfaktor der Drehstreckung $(z \cdot)$, so wird anschaulich klar, daß für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten muß

$$|zw| = |z||w|$$

Besonders bequem rechnet man diese Formel nach, indem man zunächst für $z = x + yi \in \mathbb{C}$ die **konjugierte komplexe Zahl** $\bar{z} = x - yi \in \mathbb{C}$ einführt. Im Bild der komplexen Zahlenebene bedeutet das komplexe Konjugieren anschaulich die Spiegelung an der reellen Achse. Nun prüft man durch explizite Rechnung unschwer die Formeln

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ |z|^2 &= z\bar{z} \end{aligned}$$

Dann rechnet man einfach

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

Nach dem vorhergehenden ist $z \mapsto \bar{z}$ ein Körperisomorphismus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die **komplexe Konjugation**. Offensichtlich gilt auch $\bar{\bar{z}} = z$ und ebenso offensichtlich gilt $|z| = |\bar{z}|$.

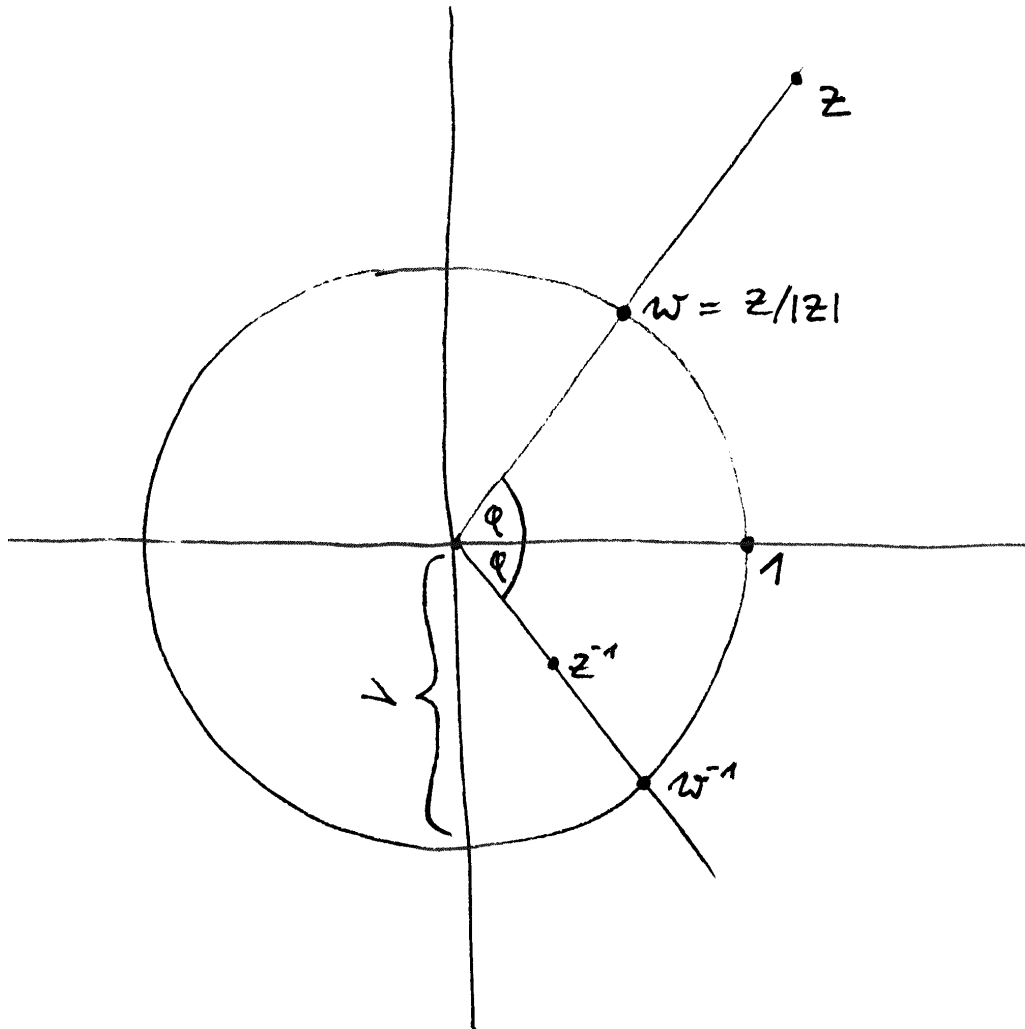
4.4.10. Für unsere Norm komplexer Zahlen aus 4.4.5 gilt offensichtlich

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Da in einem Dreieck eine einzelne Seite nicht länger sein kann als die beiden anderen zusammengenommen, erwarten wir weiter die **Dreiecksungleichung**

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Formal mag man sie prüfen, indem man beide Seiten quadriert, wodurch die äquivalente Behauptung $(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \leq z\bar{z} + 2|z||w| + w\bar{w}$ entsteht, und dann vereinfacht zu immer noch äquivalenten Behauptung $2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z\bar{w}|$. Die Abschätzungen $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$ und $\operatorname{Im}(u) \leq |u|$ sind aber für jede komplexe Zahl u auch formal offensichtlich.



Anschauung für das Invertieren komplexer Zahlen

4.4.9. Wir können den Realteil und den Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der konjugierten komplexen Zahl ausdrücken als

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Weiter gilt offensichtlich $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ und für komplexe Zahlen z der Norm $|z| = 1$ ist die konjugierte komplexe Zahl genau das Inverse, in Formeln $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$. Im Bild der komplexen Zahlenebene kann man das Bilden des Inversen einer von Null verschiedenen komplexen Zahl anschaulich interpretieren als die „Spiegelung“ oder präziser **Inversion** am Einheitskreis $z \mapsto z/|z|^2$ gefolgt von der Spiegelung an der reellen Achse $z \mapsto \bar{z}$. Der Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ ist insbesondere eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen und die Multiplikation liefert einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}_{>0} \times S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$. Wir nennen S^1 die **Kreisgruppe**.

Übungen

Übung 4.4.11. Gegeben eine komplexe Zahl $z \neq -1$ vom Betrag $|z| = 1$ zeige man, daß sie genau eine Wurzel w mit positivem Realteil hat und daß diese gegeben wird durch $w = (1+z)/|1+z|$. Können Sie auch die geometrische Bedeutung dieser Formel erklären? Man folgere, daß für beliebiges $a < 1$ jedes Element von S^1 eine Potenz eines Elements z mit Realteil $\operatorname{Re}(z) > a$ ist.

4.5 Trigonometrische Funktionen

Definition 4.5.1. Eine Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ komplexer Zahlen heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Absolutbeträge konvergiert, in Formeln $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < \infty$.

Lemma 4.5.2. *Jede absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen konvergiert, als da heißt, die Folge ihrer Partialsummen konvergiert gegen eine komplexe Zahl.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unsere Reihe. Aus $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ folgt zunächst einmal $\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k| < \infty$ und nach 4.1.15 konvergiert dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$. Ebenso sehen wir, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergiert, und damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nach unserer Beschreibung des Grenzwerts als komponentenweiser Grenzwert 3.5.33, nur eben gegen eine komplexe Zahl. \square

4.5.3. Der Umordnungssatz 4.1.21 gilt analog für absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Das folgt, indem wir den reellen Umordnungssatz 4.1.21 auf Real- und Imaginärteil anwenden.

Definition 4.5.4. Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ erklären wir eine weitere komplexe Zahl $\exp(z) \in \mathbb{C}$ durch die Vorschrift

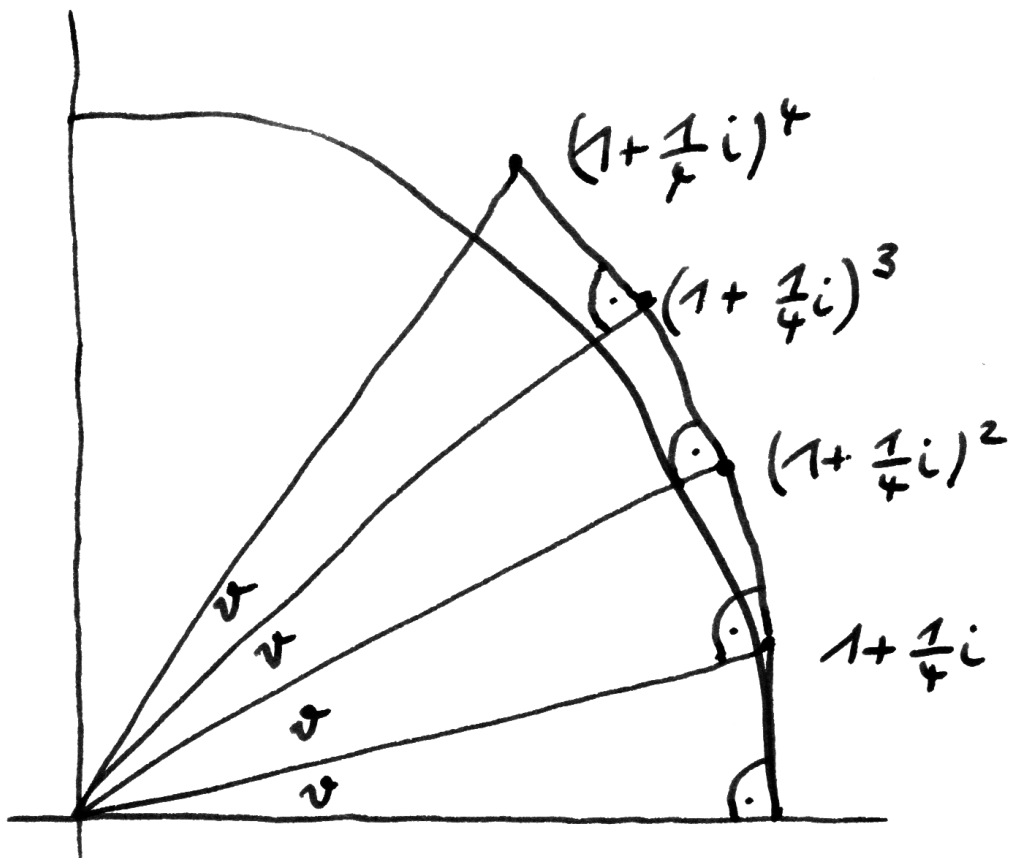
$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Diese Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ nach 4.5.2, da sie absolut konvergiert. Wir erhalten so eine Abbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die **komplexe Exponentialfunktion**.

4.5.5 (**Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion**). Man prüft genau wie in 4.2.10 im Reellen auch im Komplexen die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

Dazu gehen wir den Beweis im reellen Fall nochmal durch und müssen insbesondere prüfen, daß der Satz 4.2.14 über das Produkt absolut konvergenter Reihen



Auch für komplexes z zeigt man wie in 4.2.3 die Formel

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Das obige Bild stellt unter anderem den vierten Term dieser Folge im Fall $z = i$ dar. Ich finde, man kann recht gut erkennen, wie diese Folge bei wachsendem n gegen den Punkt auf der Kreislinie konvergiert, für den das Segment der Kreislinie, das von ihm zur reellen Achse herunterläuft, die Länge Eins hat.

auch im Komplexen gilt. In der Tat funktioniert derselbe Beweis auch in diesem Fall. Offensichtlich gilt immer noch $\exp(0) = 1$. In der Sprache der Algebra ausgedrückt ist die Exponentialabbildung also ein Monoidhomomorphismus $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$ und induziert damit nach 1.5.43 einen Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der komplexen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen komplexen Zahlen. Man erhält insbesondere $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. Wie im Reellen 4.2.15 zeigt man auch die Stetigkeit von $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zunächst im Nullpunkt über die Reihenentwicklung und dann an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der Funktionalgleichung.

4.5.6 (Komplexe Exponentialfunktion und Konjugation). Aus der Stetigkeit der komplexen Konjugation und ihrer Vertauschbarkeit mit Summe und Produkt folgern wir

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Für den Betrag von $\exp z$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |\exp z|^2 &= (\exp z)(\overline{\exp z}) \\ &= \exp(z) \exp(\bar{z}) \\ &= \exp(z + \bar{z}) \\ &= \exp(2 \operatorname{Re} z) \end{aligned}$$

Folglich gilt $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$ und speziell $|\exp(it)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

4.5.7. Ich nenne $u : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(it)$ die **Umlaufabbildung**. Sie beschreibt salopp gesprochen einen Punkt, der „mit konstanter Geschwindigkeit Eins im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis S^1 umläuft und sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $u(0) = 1$ befindet“. In den folgenden Sätzen 4.5.8 und 4.5.10 will ich diese Anschauung rechtfertigen. Aus der Funktionalgleichung 4.5.5 folgt unmittelbar, daß unsere Umlaufabbildung ein Gruppenhomomorphismus von der Zahlengeraden zur Kreisgruppe ist. Aus der Abschätzung

$$|\exp(it) - \exp(is)| = |\exp(i(t-s)) - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i(t-s))^k}{k!} \right| \leq \exp(|s-t|) - 1$$

oder auch direkt aus der Stetigkeit der komplexen Exponentialfunktion folgt, daß die Umlaufabbildung u stetig ist.

Satz 4.5.8 (Gruppenwege in der Kreisgruppe). Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die Kreisgruppe sind genau alle Abbildungen der Gestalt $t \mapsto \exp(ait)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Unsere Umlaufabbildung u ist nicht konstant, aus der Reihenentwicklung folgt genauer die Abschätzung $\operatorname{Im}(\exp(it)) > 0$ für $t \in (0, 1]$. Aufgrund der Stetigkeit gibt es folglich $c > 0$ mit $\operatorname{Re} u(c) < 1$ und

$$(t \in [-c, c] \Rightarrow \operatorname{Re} u(t) > 0)$$

Ist $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit stetigem Realteil, so gibt es auch $b > 0$ mit $(t \in [-b, b] \Rightarrow \operatorname{Re} \gamma(t) \geq \operatorname{Re} u(c))$. Es folgt, daß wir $g \in [-c, c]$ finden mit $\operatorname{Re} \gamma(b) = \operatorname{Re} u(g)$. Indem wir notfalls g durch $-g$ ersetzen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß auch gilt $\operatorname{Im} \gamma(b) = \operatorname{Im} u(g)$ und damit

$$\gamma(b) = u(g) \quad \text{und} \quad (|s| \leq b \Rightarrow \operatorname{Re} \gamma(s) > 0) \quad \text{sowie} \quad (|t| \leq g \Rightarrow \operatorname{Re} u(t) > 0).$$

Daraus aber folgt $\gamma(b/2) = u(g/2)$, denn beide Seiten sind die eindeutig bestimmte Quadratwurzel aus $\gamma(b) = u(g)$ mit positivem Realteil. Induktiv folgt erst $\gamma(b/2^n) = u(g/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann $\gamma(mb/2^n) = u(mg/2^n)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und dann aufgrund der Stetigkeit $\gamma(tb) = u(tg)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

4.5.9. Ich erinnere daran, daß in der Algebra der **Kern** $\ker \gamma$ eines Gruppenhomomorphismus $\gamma : G \rightarrow H$ erklärt wird als die Menge $\ker \gamma := \gamma^{-1}(e_H)$ aller Elemente von G , die auf das neutrale Element von H abgebildet werden.

Satz 4.5.10 (Komplexe Exponentialfunktion und Kreiszahl). *Die Umlaufabbildung $u : t \mapsto \exp(it)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $u : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit Kern $\ker(u) = 2\pi\mathbb{Z}$ für unsere Kreiszahl π aus 3.4.1.*

Vorschau 4.5.11. Wir überlegen uns in 4.5.22, daß der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ gegeben durch dieselbe Formel $z \mapsto \exp(iz)$ immer noch denselben Kern hat, so daß gilt $\ker(\exp(\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times)) = 2\pi i\mathbb{Z}$.

Beweis. Beim Beweis von 4.5.8 haben wir bereits gesehen, daß es $a < 1$ gibt derart, daß alle Elemente der Kreislinie mit Realteil $> a$ im Bild von u liegen müssen. Nach Übung 4.4.11 sind aber alle Elemente von S^1 Potenzen derartiger Elemente. Folglich ist u eine Surjektion. Mit

$$\kappa := \inf\{t > 0 \mid u(t) = -1\}$$

gilt offensichtlich $u(\kappa) = u(-\kappa) = -1$, aber u nimmt auf dem offenen Intervall $(-\kappa, \kappa)$ den Wert (-1) nicht an. So folgt $(\ker u) \cap (0, 2\kappa) = \emptyset$ und $2\kappa\mathbb{Z} \subset \ker u$. Hätten wir in $\ker u$ noch Elemente außerhalb von $2\kappa\mathbb{Z}$, so müßten wir darin auch Elemente aus $(0, 2\kappa)$ finden und erhielten einen Widerspruch. So folgt $\ker u = 2\kappa\mathbb{Z}$ und es bleibt nur noch zu zeigen

$$\kappa = \pi$$

für unsere Kreiszahl π aus 3.4.1. Dieser Teil des Beweises wird sich in 7.1.15 als ein Spezialfall unserer Sätze über die sogenannte „Bogenlänge“ erweisen, aber hier argumentieren wir noch „zu Fuß“. Sicher gilt $u(0) = 1$ und u induziert eine Bijektion $u : (-\kappa, \kappa] \xrightarrow{\sim} S^1$, denn das Bild ist dasselbe wie das Bild von $\mathbb{R} = (-\kappa, \kappa] + 2\kappa\mathbb{Z}$ und aus $u(t) = u(s)$ folgt $t - s \in 2\kappa\mathbb{Z}$. Der Imaginärteil von u

hat auf diesem Intervall also nur die beiden Nullstellen 0 und κ . Wir wissen schon vom Beginn des vorhergehenden Beweises, daß gilt $\operatorname{Im}(u(t)) > 0$ für $t \in (0, 1]$. Also induziert u eine Bijektion

$$u : [0, \kappa] \xrightarrow{\sim} \{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

und $\operatorname{Re} u$ muß auf diesem Intervall nach Übung 3.3.22 streng monoton fallen. Dieses Erkenntnis liefert für unsere Kreiszahl π aus 3.4.1 die alternative Beschreibung

$$\pi = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |u(t_i) - u(t_{i-1})| \mid 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq \kappa \right\}$$

Im Anschluß leiten wir für $t \geq 0$ die Abschätzungen $t - t^2 \leq |u(t) - 1| \leq t$ her. Für $t > s$ folgt aus der oberen Abschätzung $|u(t) - u(s)| \leq t - s$ und damit sofort $\pi \leq \kappa$. Verwenden wir andererseits für $n \geq 1$ die äquidistante Unterteilung mit $0 = t_0$ und $t_n = \kappa$, so folgt aus der unteren Abschätzung

$$\pi \geq \sum_{i=1}^n |u(t_i) - u(t_{i-1})| \geq \kappa - n(\kappa/n)^2$$

und im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ erhalten wir auch umgekehrt $\pi \geq \kappa$, also zusammen

$$\pi = \kappa$$

Es bleibt, für $t \geq 0$ unsere Abschätzungen $t - t^2 \leq |u(t) - 1| \leq t$ herzuleiten. Nun erhalten wir für $|t| \leq 2$ leicht die Abschätzung

$$|u(t) - 1|^2 = 2 - 2 \operatorname{Re} u(t) = t^2 - 2t^4/4! + 2t^6/6! - \dots \leq t^2$$

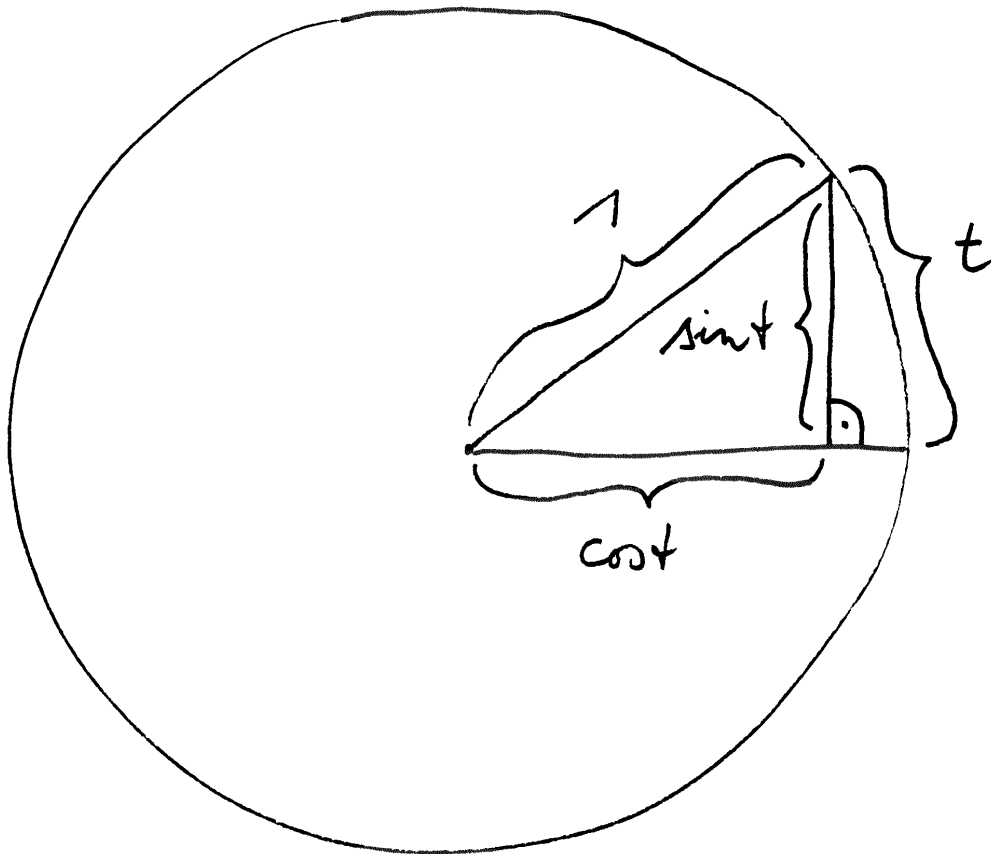
und in der Wurzel unsere obere Abschätzung, da ja $|u(t) - 1| \leq 2$ eh klar ist für alle t . Andererseits zeigt die Reihenentwicklung auch

$$u(t) - 1 = it - t^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} (it)^{\nu-2} / \nu!$$

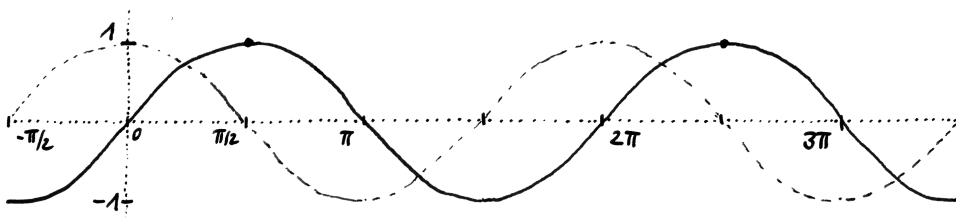
und so die untere Abschätzung $|u(t) - 1| \geq t - t^2$, erst für $t \in [0, 1]$ wegen $1 = \sum_{\nu=2}^{\infty} 1/2^{\nu-1} \geq \sum_{\nu=2}^{\infty} 1/\nu!$, dann aber aus offensichtlichen Gründen sogar für alle t . \square

Definition 4.5.12. Wir nennen den Real- beziehungsweise Imaginärteil der Umlaufabbildung $u : t \mapsto \exp(it)$ den **Cosinus** beziehungsweise den **Sinus** $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In Formeln werden die Funktionen Sinus und Cosinus bei uns also definiert durch die sogenannte **Euler'sche Gleichung**

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t$$



Sinus und Cosinus am Einheitskreis



Die Graphen vom Sinus als durchgezogene Linie und vom Cosinus als gestrichelte Linie.

4.5.13. Das Wort **Trigonometrie** bedeutet so etwas wie „Dreiwinkelmessung“. Die Wurzel „gon“ taucht auch im deutschen Wort „Knie“ auf und bedeutet im Griechischen sowohl „Knie“ als auch im übertragenen Sinne „Winkel“. In der Linearen Algebra [LA2] 1.7.5 führe ich die „abstrakte Winkelgruppe“ \mathbb{W} ein sowie in [LA2] 1.7.9 den „Standardisomorphismus“

$$\text{kw} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$$

der Winkelgruppe mit der Kreisgruppe $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Ich schlage vor, zu unterscheiden zwischen einerseits dem **geometrischen Cosinus**, den ich in [LA2] 1.7.11 einführe als die Abbildung

$$\text{cos}_g := \text{Re} \circ \text{kw} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$$

der „Winkelgruppe“ in die reellen Zahlen, die durch die Regel „Ankathete durch Hypotenuse“ beschrieben wird, und andererseits dem hier erklärten **analytischen Cosinus** $\text{cos} = \text{cos}_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, der sich daraus ergibt durch das Vorschalten der Umlaufabbildung $u : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gefolgt vom invertierten Standardisomorphismus als

$$\text{cos} = \text{cos}_a = \text{cos}_g \circ \text{kw}^{-1} \circ u = \text{Re} \circ u$$

Analog mag man für die anderen Winkelfunktionen vorgehen.

4.5.14 (**Bezug zum Bogenmaß**). Dieselbe Argumentation wie beim vorhergehenden Beweis zeigt für alle $t \geq 0$ die Formel

$$t = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |u(t_i) - u(t_{i-1})| \mid 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t \right\}$$

Anschaulich bedeutet mithin t die Länge des Kreisbogens von 1 bis $\exp(it)$. Auf Taschenrechnern muß man, um die hier definierten Funktionen \sin und \cos zu erhalten, meist noch spezifizieren, daß die Eingabe im Bogenmaß, auf englisch „Radians“ oder abgekürzt „rad“, zu verstehen sein soll. Auf lateinisch bedeutet Sinus übrigens „Bodenwelle“ und „Busen“, wortverwandt ist französisch „le sein“.

4.5.15 (**Eigenschaften von Sinus und Cosinus**). Aus der Definition 4.5.12 von Sinus und Cosinus folgen unmittelbar eine ganze Reihe von Eigenschaften.

1. Aus den Definitionen folgt sofort die Identität $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Diese Formel wird oft nach **Pythagoras** benannt. Hier haben wir $(\sin t)^2 = \sin^2 t$ und $(\cos t)^2 = \cos^2 t$ abgekürzt. Diese Abkürzungen sind auch üblich für alle anderen Potenzen und alle anderen trigonometrischen beziehungsweise hyperbolischen trigonometrischen Funktionen, denn das spart Klammern und die alternativ möglichen Bedeutungen $\sin^2 t = \sin(\sin t)$ und dergleichen

kommen nie vor. Für die Umkehrfunktionen vereinbaren wir bald die Notation \arcsin sowie \arccos und verwenden auch für negative obere Indizes die Notationen $\sin^{-1}(x) := 1/\sin(x)$ sowie $\cos^{-1}(x) := 1/\cos(x)$. Man findet für diese Funktionen auch die Bezeichnung als **Secans** $\sec(x) := 1/\cos(x)$ beziehungsweise **Cosecans** $\operatorname{cosec}(x) := 1/\sin(x)$.

- Die **Symmetrie-Eigenschaften** $\sin(-t) = -\sin t$ und $\cos(-t) = \cos t$ folgen aus $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$.
- Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgen die **Additionsformeln**

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b\end{aligned}$$

aus der Funktionalgleichung $\exp(i(a+b)) = \exp(ia) \exp(ib)$.

- Die **Periodizitäten** $\sin(t) = \sin(t+2\pi)$ und $\cos(t) = \cos(t+2\pi)$ folgen unmittelbar aus der Beschreibung des Kerns von $t \mapsto \exp(it)$ in 4.5.10.
- Daß der Cosinus eine streng monoton fallende Bijektion $\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$ ist, wissen wir bereits aus dem Beweis von 4.5.10. Die Formel des Pythagoras zeigt dann, daß π die kleinste positive Nullstelle von \sin ist. Zusammen mit $\sin(0) = 0$ und der Periodizität folgt, daß die **Nullstellen des Sinus** genau die ganzzahligen Vielfachen von π sind.
- Mit den Additionsformeln erhalten wir $\sin(t+\pi) = -\sin t$ und ebenso $\cos(t+\pi) = -\cos t$ und damit $\cos(\pi/2) = 0$ und $\cos t = \sin(t+\pi/2)$ und $\sin t = -\cos(t+\pi/2)$. Die **Nullstellen des Cosinus** sind folglich genau die Elemente von $2\pi\mathbb{Z} + \pi/2$.
- Unsere Funktionen \cos und \sin werden, wie sofort aus 4.5.12 folgt, dargestellt durch die absolut konvergenten Reihen

$$\begin{aligned}\cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \\ \sin t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

4.5.16. Wir wissen bereits aus dem Beweis von 4.5.10, daß der Cosinus eine stetige streng monoton fallende Bijektion $\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$ ist. Deren Umkehrabbildung ist nach 3.3.11 auch stetig. Sie heißt der **Arcuscosinus** und wird notiert als

$$\arccos : [-1, 1] \xrightarrow{\sim} [0, \pi]$$

4.5.17. Der Sinus wächst wegen 4.5.16 und der zuvor gezeigten Identität $\sin t = -\cos(t + \pi/2)$ streng monoton auf $[-\pi/2, \pi/2]$ und definiert folglich eine Bijektion $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$. Deren Umkehrabbildung ist nach 3.3.11 auch stetig. Sie heißt der **Arcussinus** und wird notiert als

$$\arcsin : [-1, 1] \xrightarrow{\sim} [-\pi/2, \pi/2]$$

4.5.18. Die Bezeichnungen „arcussinus“ und „arcuscosinus“ kommen von lateinisch „arcus“ für „Bogen“. In der Tat bedeutet $\arcsin b$ für $b \in [0, 1]$ die Länge des Kreisbogens, der vom Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt $(\sqrt{1-b^2}, b)$ der Höhe b auf dem Einheitskreis reicht, wie der Leser zur Übung nachrechnen mag.

Definition 4.5.19. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ definieren wir den **Tangens** von x durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

4.5.20. Anschaulich bedeutet $\tan(x)$ für $x \in (0, \pi/2)$ die Höhe, in der der Strahl durch den Nullpunkt und den Punkt des Einheitskreises, der mit dem Punkt $(1, 0)$ ein Kreissegment der Länge x begrenzt, die Tangente an unseren Einheitskreis im Punkt $(1, 0)$ trifft. Man benutzt auch den **Cotangens**

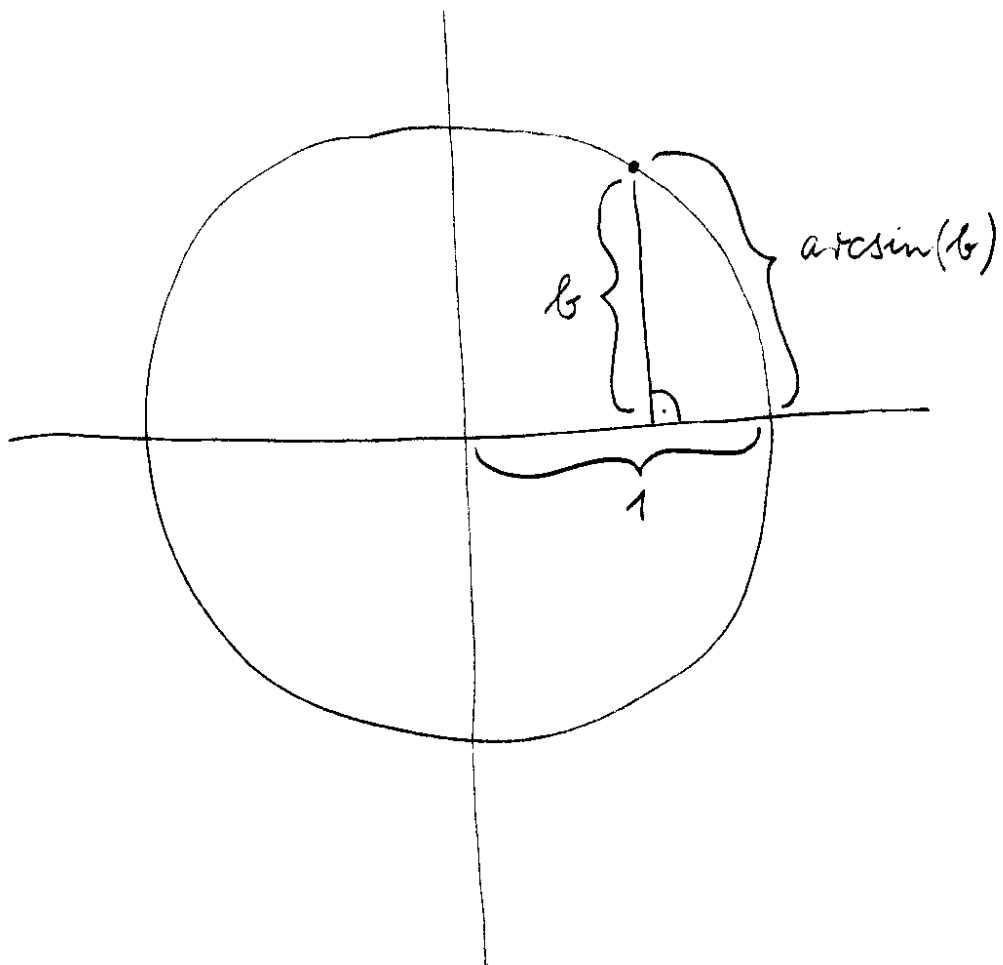
$$\cot(x) := \frac{\cos x}{\sin x}$$

4.5.21. Der Tangens wächst streng monoton auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$. Wegen $\tan(-t) = -\tan(t)$ reicht es, das auf $[0, \pi/2)$ zu prüfen, und dort sind Sinus und Cosinus nichtnegativ und der Sinus wächst streng monoton, wohingegen der Cosinus streng monoton fällt. Da der Tangens an den Grenzen sogar gegen $\pm\infty$ strebt, liefert der Tangens eine Bijektion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion heißt der **Arcustangens**

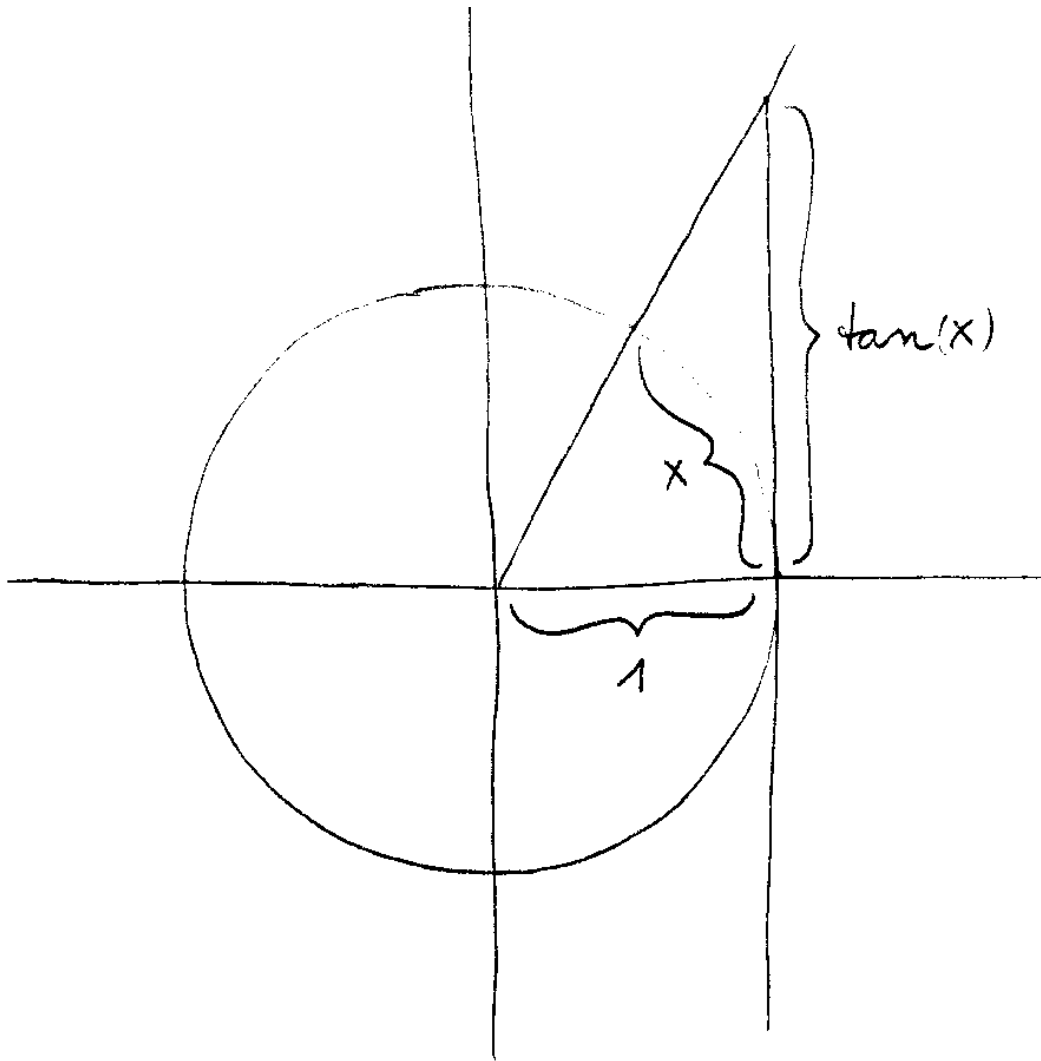
$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

In derselben Weise erklärt man den **Arcuscotangens** $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ als die Umkehrfunktion des Kotangens $\cot : (0, \pi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

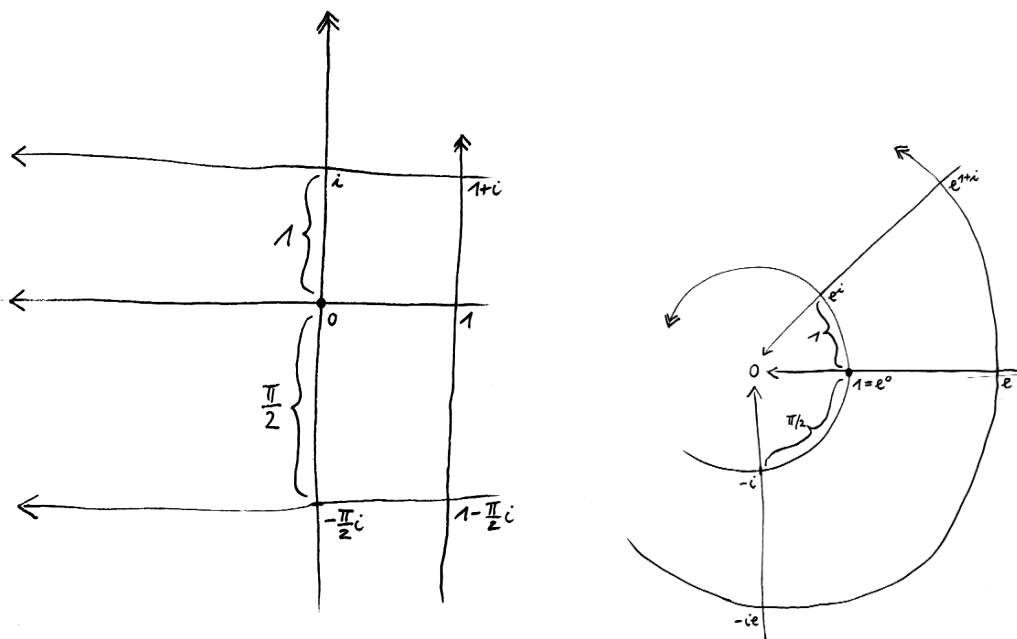
4.5.22 (**Kern und Bild der komplexen Exponentialfunktion**). Nach 4.5.10 induziert die Exponentialfunktion eine Surjektion der imaginären Geraden $i\mathbb{R}$ auf den Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Daß die Exponentialfunktion eine Bijektion $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$ induziert, wissen wir bereits aus 4.3.2. Da sich nun jede von Null verschiedene komplexe Zahl w schreiben läßt als Produkt $w = (w/|w|)|w|$ mit $w/|w|$ auf dem Einheitskreis und $|w|$ positiv, ist die Exponentialfunktion nach der Funktionalgleichung sogar ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, als da heißt



Der Arcussinus



Der Tangens



Die Bilder ausgewählter Teile der komplexen Zahlenebene unter der komplexen Exponentialfunktion. Die Vertikalen werden zu Kreislinien aufgewickelt, die Horizontalen in vom Nullpunkt ausgehende Strahlen transformiert. Anschaulich mag man sich die komplexe Exponentialfunktion denken als Abbildung, bei der die komplexe Zahlenebene zunächst in horizontaler Richtung verzerrt und ganz auf die Halbebene mit positivem Realteil herüberschoben wird mit $x + iy \mapsto \exp(x) + iy$, gefolgt von einer Aufwicklung dieser Halbebene zu einer Wendeltreppe $a + iy \mapsto (a \cos y, a \sin y, y)$ in den Raum gefolgt von einer senkrechten Projektion dieser Wendeltreppe auf die Ebene alias dem Weglassen der letzten Koordinate.

das Urbild des neutralen Elements $1 \in \mathbb{C}^\times$, besteht aufgrund unserer Gleichung $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$ aus allen ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$, in Formeln

$$\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$$

4.5.23. Wir bestimmen mit dieser Erkenntnis die **n -ten Einheitswurzeln**, als da heißt die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Nach 4.5.22 hat jede Lösung die Gestalt $z = e^b$ für geeignetes $b \in \mathbb{C}$ und so ein z löst unsere Gleichung genau dann, wenn gilt $z^n = e^{nb} = 1$ alias $nb \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Wir erhalten so die Lösungen $\exp(2\pi i\nu/n)$ für $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ und erkennen auch, daß sie paarweise verschieden sind und es keine anderen Lösungen geben kann. In der komplexen Zahlenebene kann man sich die n -ten Einheitswurzeln veranschaulichen als die Ecken desjenigen in den Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecks, das als eine Ecke die 1 hat.

Ergänzung 4.5.24. Der Satz von **Hermite-Lindemann** besagt, daß für eine von Null verschiedene im Sinne von 3.4.2 algebraische komplexe Zahl α der Wert der Exponentialfunktion $\exp(\alpha)$ stets transzendent ist. Daraus folgt sowohl, daß die Euler'sche Zahl $e = \exp(1)$ transzendent ist, als auch, daß $2\pi i$ und damit natürlich auch π transzendent sind, da nämlich $\exp(2\pi i) = 1$ nicht transzendent ist. In etwas allgemeinerer Form sagt der Satz, daß gegeben komplexe algebraische Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, die linear unabhängig sind über \mathbb{Q} , die Werte der Exponentialfunktion $\exp(\alpha_1), \dots, \exp(\alpha_n)$ algebraisch unabhängig sind über \mathbb{Q} im Sinne von [KAG] 5.6.2. Mehr dazu findet man etwa in [Lor96]. Schanuels Vermutung, wie das zu verallgemeinern sein sollte, findet man in [KAG] 5.6.17.

4.5.25 (**Potenzen mit komplexen Exponenten**). Für eine reelle Zahl $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ setzen wir wieder

$$a^z := \exp(z \log a)$$

und schreiben insbesondere auch $\exp z = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$. Mit dieser Notation liest sich die Euler'sche Formel dann als $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Insbesondere erfüllen unsere Hauptdarsteller die bemerkenswerte Identität $e^{i\pi} = -1$. Aus $\exp(-it) = \overline{\exp(it)}$ folgern wir umgekehrt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Diese Formeln verwenden wir, um den Sinus und Cosinus zu Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auszudehnen.

Vorschau 4.5.26 (**Potenzen komplexer Zahlen mit komplexen Exponenten**). Die Frage, inwieweit auch Ausdrücke wie i^i sinnvoll als komplexe Zahlen interpretiert werden können, stellen wir zurück bis zu ersten Anwendungen in 5.10.15.

Übungen

Übung 4.5.27. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede komplexe Zahl $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Übung 4.5.28. Man zeige: Jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit stetigem Real- und Imaginärteil hat die Gestalt $t \mapsto \exp(at)$ für genau eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$. Hinweis: Man wiederhole den Beweis von 4.5.8 und beachte 4.5.22.

Übung 4.5.29 (Unmöglichkeit globaler stetiger komplexer Wurzelfunktionen). Gäbe es eine stetige Funktion $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $w(z)^2 = z$ für alle z , so folgte $w(z^2) = \pm z$ für alle z und damit wäre $\varepsilon : z \mapsto w(z^2)/z$ eine stetige Funktion $\varepsilon : \mathbb{C}^\times \rightarrow \{1, -1\}$ mit $\varepsilon(-z) = -\varepsilon(z)$. Man führe das zum Widerspruch. Hinweis: Zwischenwertsatz.

Ergänzende Übung 4.5.30 (Der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck). In einem regelmäßigen Fünfeck stehen die Längen der Diagonalen zu den Längen der Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts. Man prüfe diese elementargeometrisch leicht einzusehende Behauptung durch algebraische Rechnung. Hinweis: Der goldene Schnitt ist die positive Lösung der Gleichung $a/1 = (1+a)/a$ alias $a^2 - a - 1 = 0$, seine geometrische Bedeutung wurde in [EIN] 1.2.2 erklärt. Es gilt zu zeigen, daß für $\zeta = e^{2\pi i/5}$ der Ausdruck $a = |1 - \zeta^2|/|1 - \zeta| = |1 + \zeta|$ die fragliche Gleichung löst. Man verwende $\zeta^4 = \bar{\zeta}$.

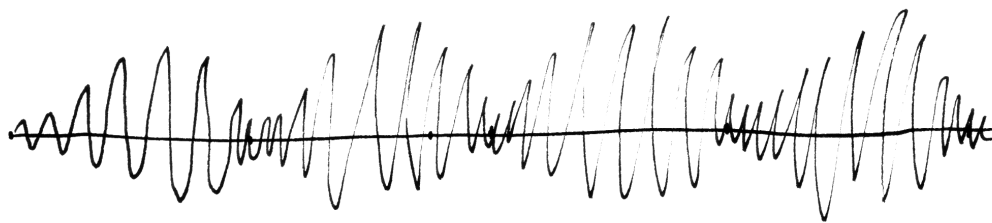
Ergänzende Übung 4.5.31. In einem regelmäßigen Siebeneck sei a der Abstand von einer Ecke zur nächsten Ecke, b der Abstand zur übernächsten Ecke, und c der Abstand zur überübernächsten Ecke. Man zeige

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

In Formeln zeige man für $\zeta = e^{2\pi i/7}$ die Identität $|1 - \zeta|^{-1} = |1 - \zeta^2|^{-1} + |1 - \zeta^3|^{-1}$.

Ergänzende Übung 4.5.32. Die Nullstellen des komplexen Sinus liegen alle auf der reellen Achse.

Ergänzende Übung 4.5.33. Man leite einige Formeln der nachstehenden Tabelle her.



Die Überlagerung zweier Sinuswellen mit nahe beieinanderliegender Periode.
Rechnerisch finden wir etwa die Identität

$$e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} = e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} (e^{i(\omega_1 + \omega_2)t/2} + e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2})$$

und durch Betrachtung der Imaginärteile beider Seiten

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin((\omega_1 - \omega_2)t/2) \cos((\omega_1 + \omega_2)t/2)$$

Liegen hier ω_1 und ω_2 nah beieinander, so ergibt sich für diesen Ausdruck als Funktion von t das obige Bild, in dem sich anschaulich gesprochen immer abwechselnd beide Sinuswellen einmal gegenseitig auslöschen und dann wieder addieren. Man kann das auch mit eigenen Ohren erfahren, wenn man sich von zwei Kommilitonen zwei nahe beieinanderliegende Töne vorsingen läßt: Es ist dann so eine Art Wummern zu hören, das eben mit der Frequenz $\omega_1 - \omega_2$ geschieht.

	sin	cos
π	0	-1
$\pi/2$	1	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/5$	$\sqrt{5 - \sqrt{5}}/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{5} + 1)/4$
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$
$\pi/7$?	?
$\pi/8$	$\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{2}}$
$\pi/9$?	?
$\pi/10$	$(\sqrt{5} - 1)/4$	$\sqrt{5 + \sqrt{5}}/2\sqrt{2}$
$\pi/11$?	?

Man bemerkt, daß sich für $\cos(\pi/5)$ gerade die Hälfte unseres „goldenen Schnitts“ aus 4.5.30 ergibt. Bei der Bestimmung der Werte für $\pi/5$ und $\pi/10$ mag man von nebenstehendem Bild ausgehen, das insbesondere bei der Bestimmung von $\sin(\pi/10)$ helfen sollte. Wir zeigen in [AL] 4.8.9, warum es unmöglich ist, Formeln derselben Bauart auch für $\sin(\pi/7)$ oder $\sin(\pi/9)$ oder $\sin(\pi/11)$ anzugeben.

Ergänzende Übung 4.5.34. Man zeige mit der Euler'schen Gleichung 4.5.12 die Identität $\sin^3 \vartheta = \frac{3}{4} \sin \vartheta - \frac{1}{4} \sin(3\vartheta)$.

Ergänzende Übung 4.5.35. Man zeige, daß der Sinus keine Polynomfunktion ist.

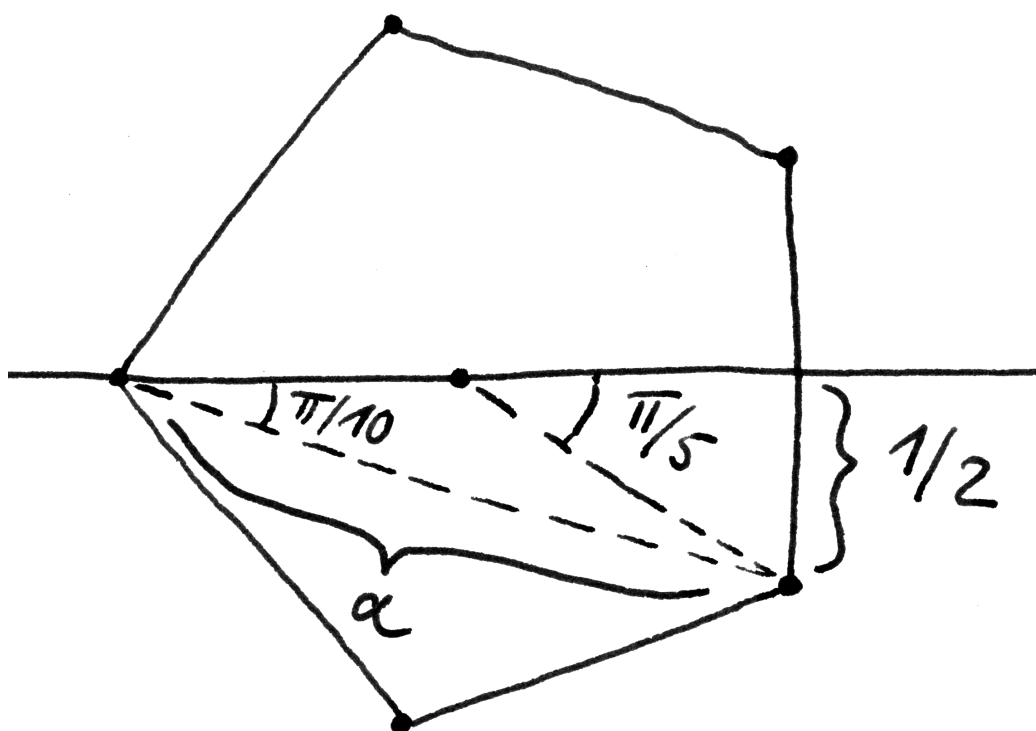


Illustration zur Berechnung von $\sin(\pi/10)$

5 Integration und Ableitung

5.1 Stetige Funktionen auf Kompakta

Definition 5.1.1. Man nennt eine Teilmenge $K \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ **kompakt** oder ein **Kompaktum**, wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus K konvergiert.

Beispiel 5.1.2 (Kompakte Intervalle). Der Satz von Bolzano-Weierstraß 3.6.6 zeigt, daß die kompakten Intervalle in $\bar{\mathbb{R}}$ genau die Intervalle der Gestalt $[a, b]$ sind mit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiel 5.1.3 (Kompakte Rechtecke). Gegeben $a, b, c, d \in \bar{\mathbb{R}}$ ist das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ kompakt. In der Tat besitzt jede Folge in diesem Rechteck nach 5.1.2 eine Teilfolge, bei der die ersten Koordinaten der Folgenglieder eine konvergente Folge bilden, und diese hat wiederum eine Teilfolge, bei der auch die zweiten Koordinaten der Folgenglieder eine konvergente Folge bilden.

Vorschau 5.1.4. Der Begriff der „Kompaktheit“ ist für weite Teile der Mathematik grundlegend. Sie werden in [AN2] 5.1.3 folgende sehen, wie er im Fall allgemeiner „topologischer Räume“ in die beiden Begriffe „folgenkompakt“ und „überdeckungskompakt“ aufspaltet. Sie werden auch sehen, daß es letzterer Begriff ist, der weiter trägt und zu „kompakt“ abgekürzt wird, obwohl ersterer Begriff die natürlichere Verallgemeinerung unserer obigen Definition zu sein scheint. Aber alles zu seiner Zeit!

Satz 5.1.5 (Extremwerte auf Kompakta). *Jede stetige Funktion $f : K \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ auf einem nichtleeren Kompaktum K nimmt das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.*

5.1.6. Ist in Formeln $K \neq \emptyset$ kompakt und $f : K \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig, so gibt es demnach $p, q \in K$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in K$. Ist die Funktion f reellwertig, so ist insbesondere ihr Bild beschränkt. Salopp gesprochen kann also eine stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum nicht nach Unendlich streben. Man beachte, eine wie wichtige Rolle im Falle eines kompakten Intervalls die Endpunkte hier spielen: Eine stetige reellwertige Funktion auf einem offenen Intervall kann ja durchaus nach Unendlich streben, wie etwa die Funktion $x \mapsto (1/x)$ auf dem Intervall $(0, 1)$.

Beweis. Da wir $K \neq \emptyset$ angenommen hatten, finden wir nach Übung 3.5.47 eine Folge x_n in K mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup f(K)$. Diese Folge besitzt nun nach Annahme eine Teilfolge, die gegen einen Punkt q aus K konvergiert. Indem wir zu dieser Teilfolge übergehen, dürfen wir sogar annehmen, unsere Folge sei selbst

schon konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$. Durch Vertauschen der stetigen Funktion f mit Folgenkonvergenz nach 3.5.29 folgt dann

$$f(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup f(K)$$

Die Existenz von $p \in K$ mit $f(p) = \inf f(K)$ zeigt man analog. □

Satz 5.1.7 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

5.1.8. Der im folgenden wiedergegebene Beweis von Jean-Robert Argand hat den Vorteil, mit besonders wenigen technischen Hilfsmitteln auszukommen. Einen Überblick über die gängigsten alternativen Beweise mit ihren Stärken und Schwächen gebe ich in [LA1] 5.3.25. Alle Beweise benutzen wesentlich analytische Methoden und das muß auch so sein, da ja \mathbb{R} und \mathbb{C} Objekte der Analysis sind. Merkwürdig ist eher die Bezeichnung als „Fundamentalsatz der Algebra“ für ein Resultat der Analysis.

Vorschau 5.1.9. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgert man unschwer, daß das Aufmultiplizieren eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Multimengen} \\ \text{von komplexen Zahlen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Komplexe Polynome} \\ \text{mit Leitkoeffizient Eins} \end{array} \right\}$$

$$\mu\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \mapsto (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$$

liefert. Das vorgestellte μ aus der linken Seite ist ein „Multimengenanzeiger“, mit dem wir es uns erlauben, Elemente mit Vielfachheiten zu betrachten und anzugeben. Den Beweis überlassen wir der Algebra. Man muß dazu im wesentlichen nur wissen, daß man für jede Nullstelle einen Linearfaktor abspalten kann. Das hinwiederum folgt aus dem Teilen mit Rest in Polynomringen.

Beweis. Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ unser Polynom. Wir zeigen zunächst, daß es eine Stelle $p \in \mathbb{C}$ gibt, an der die Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto |P(z)|$ ihr Minimum annimmt, in Formeln $|P(z)| \geq |P(p)| \forall z \in \mathbb{C}$. Sei dazu $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$. Aus $|z| > 0$ folgt

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &\geq |a_n| |z|^n - |a_{n-1}| |z|^{n-1} - \dots - |a_0| \\ &\geq |z|^n (|a_n| - |a_{n-1}|/|z| - \dots - |a_0|/|z|^n) \end{aligned}$$

Nun finden wir sicher $R > 0$ mit $|a_{n-1}|/R + \dots + |a_0|/R^n \leq |a_n|/2$. Aus $|z| > R$ folgt dann $|P(z)| \geq |z|^n (|a_n|/2)$. Nehmen wir also irgendein $u \in \mathbb{C}$ her, so gibt es $R \in \mathbb{R}$ derart, daß aus $|z| \geq R$ folgt

$$|P(z)| \geq |z|^n (|a_n|/2) \geq |P(u)|$$

Als stetige Funktion nimmt aber die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ auf einem beliebigen kompakten Rechteck $K \subset \mathbb{C}$, das die Kreisscheibe $\{z \mid |z| \leq R\}$ umfaßt, ein Minimum an, sagen wir an der Stelle $p \in K$. Das muß dann auch das Minimum von $|P(z)|$ auf ganz \mathbb{C} sein. Wir zeigen nun $P(p) = 0$ durch Widerspruch und zeigen dazu: Ist $p \in \mathbb{C}$ gegeben und P eine nichtkonstante Polynomfunktion mit $P(p) \neq 0$, so nimmt die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ bei p nicht ihr Minimum an. Es reicht, das für $p = 0$ zu zeigen. Wir dürfen auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich $P(0) = 1$ annehmen. Dann hat unser Polynom die Gestalt

$$P(X) = 1 + bX^m + X^{m+1}Q(X)$$

mit $b \neq 0$ und $m \geq 1$ und einem weiteren Polynom $Q(X)$ und wir müssen zeigen, daß $|P(z)|$ nicht minimal ist bei $z = 0$. Dafür müssen wir nur eine Richtung $w \in \mathbb{C}$ finden derart, daß $|P(z)|$ kleiner wird, wenn wir uns in dieser Richtung w vom Ursprung entfernen, in Formeln $|P(tw)| < 1$ für hinreichend kleines $t > 0$. Nach 4.5.27 gibt es jedoch $w \in \mathbb{C}$ mit $w^m b = -1$ und für solch ein w finden wir

$$P(tw) = 1 - t^m + t^{m+1}w^{m+1}Q(tw)$$

Für $t \in [0, 1]$ und $C > 0$ eine positive obere Schranke für die stetige Funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto |w^{m+1}Q(tw)|$ folgt nach der Dreiecksungleichung

$$|P(tw)| \leq 1 - t^m + t^{m+1}C$$

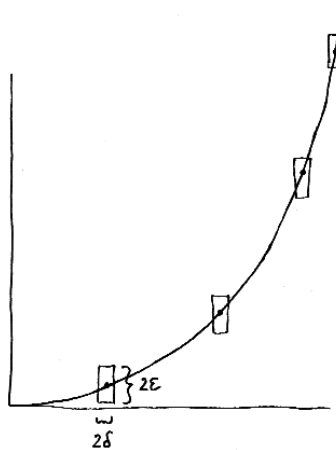
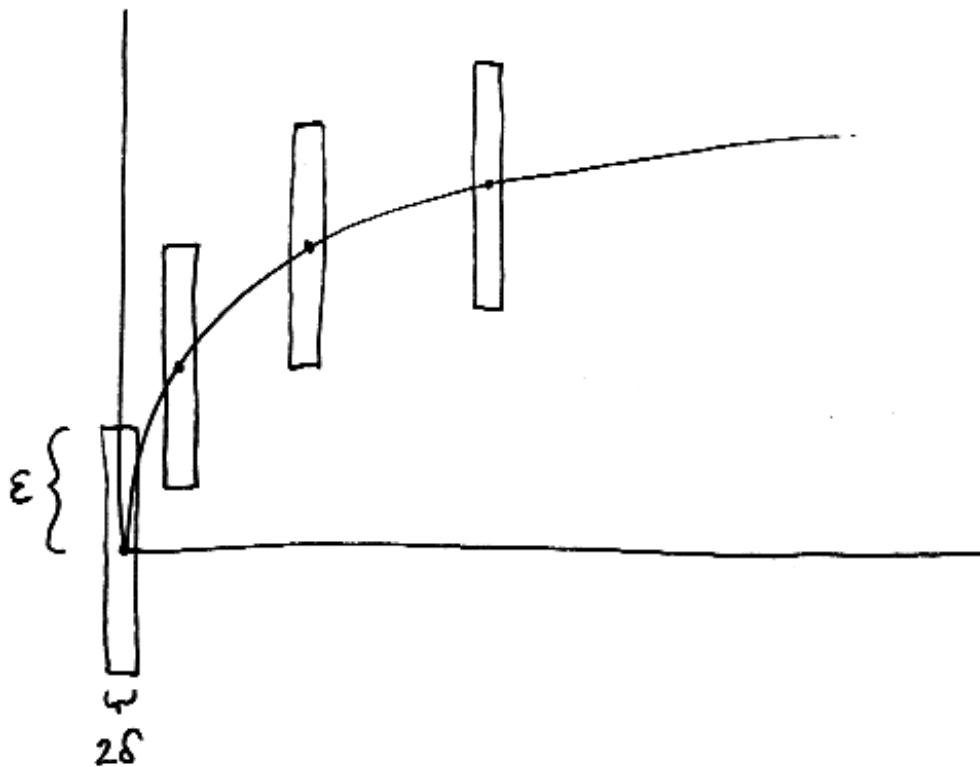
Gilt zusätzlich $0 < t < C^{-1}$, so ist das sicher kleiner als Eins. □

Definition 5.1.10. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

5.1.11. Bei der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit kommt es wesentlich auf den Definitionsbereich D an. Da wir Funktionen vielfach angeben, ohne ihren Definitionsbereich explizit festzulegen, ist es in diesem Zusammenhang oft sinnvoll, den jeweils gemeinten Definitionsbereich zu präzisieren. Dazu benutzen wir die Sprechweise **f ist gleichmäßig stetig auf D** .

5.1.12. Im Gegensatz zur Stetigkeit ist die gleichmäßige Stetigkeit kein sinnvoller Begriff für Funktionen $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$.

5.1.13 (**Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit**). Ich will nun den Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit diskutieren. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ja nach dem ε - δ -Kriterium 3.2.21 stetig bei $p \in D$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ gibt derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta(\varepsilon, p)$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Des weiteren heißt sie stetig, wenn sie an jeder Stelle $p \in D$ stetig ist. Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet nun, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ gewählt werden kann, das es als $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, p)$ für alle $p \in D$ gleichzeitig tut.



Gleichmäßige Stetigkeit für stetige Funktionen auf Intervallen kann man sich anschaulich wie folgt denken: Für eine beliebig für ein Rechteck vorgegebene Höhe $2\varepsilon > 0$ findet man bei gleichmäßiger Stetigkeit immer eine Breite $2\delta > 0$ derart, daß an welchen Punkt des Graphen meiner Funktion ich das Zentrum meines Rechtecks auch verschiebe, der Graph das Rechteck nie durch die Ober- oder Unterkante verläßt. So ist etwa die Wurzelfunktion gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die Quadratfunktion jedoch nicht.

5.1.14 (Eine nicht gleichmäßig stetige Funktion). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} , denn $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$ kann auch für sehr kleines $|x - y|$ noch groß sein, wenn nur $|x + y|$ hinreichend groß ist. Die Einschränkung dieser Funktion auf ein beliebiges reelles Kompaktum ist aber daselbst gleichmäßig stetig nach dem anschließenden Satz.

Satz 5.1.15 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset K \rightarrow \mathbb{R}^d$ auf einem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^m$ ist auf besagtem Kompaktum gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und zeigen, daß eine Funktion auf einem Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, für das wir kein $\delta > 0$ finden könnten: Wir probieren alle $\delta = 1/n$ aus und finden immer wieder Punkte $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$, für die dennoch gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Gehen wir zu einer Teilfolge über, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge der x_n gegen einen Punkt von K konvergiert, in Formeln $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ mit $x \in K$. Damit folgt natürlich auch $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$. Wäre nun f stetig bei x , so folgte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

und damit lägen notwendig fast alle $f(x_n)$ und desgleichen fast alle $f(y_n)$ im Quader $B(f(x); \varepsilon/2)$. Das steht jedoch im Widerspruch dazu, daß ja nach Konstruktion gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ für alle n . Wir haben also gezeigt, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. \square

Übungen

Übung 5.1.16. Jeder Quader der Gestalt $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ ist kompakt.

Übung 5.1.17. Jede endliche Vereinigung von Kompakta $K_i \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ ist kompakt.

Übung 5.1.18. Das Bild eines Kompaktums $K \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ unter einer stetigen Abbildung $K \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^m$ ist stets kompakt.

Übung 5.1.19. Man zeige, daß jede beschränkte, monotone und stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Übung 5.1.20. Sind $K \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ und $L \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ kompakt, so ist auch $K \times L \subset \bar{\mathbb{R}}^{m+n}$ kompakt.

5.2 Integration stetiger Funktionen

Definition 5.2.1. Gegeben $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren kompakten reellen Intervall erklären wir die Menge $T(f) \subset \mathbb{R}$ aller „naiven Integrale zu Treppen, die unter f liegen“ durch

$$T(f) := \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i) \left| \begin{array}{l} \text{Alle möglichen Wahlen von } n \in \mathbb{N} \\ \text{und von Stellen } a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b \\ \text{und von Werten } c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ derart,} \\ \text{daß gilt } f(x) \geq c_i \text{ für alle } x \in [a_i, a_{i+1}] \end{array} \right. \right\}$$

Da f stetig ist, hat es nach 5.1.5 einen beschränkten Wertebereich, als da heißt, es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$. Daraus folgt, daß $m(b-a)$ zu $T(f)$ gehört und daß $M(b-a)$ eine obere Schranke von $T(f)$ ist. Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} hat $T(f)$ nach 2.4.4 ein Supremum in \mathbb{R} . Wir nennen dies Supremum das **Integral der Funktion f über das Intervall $[a, b]$** und schreiben

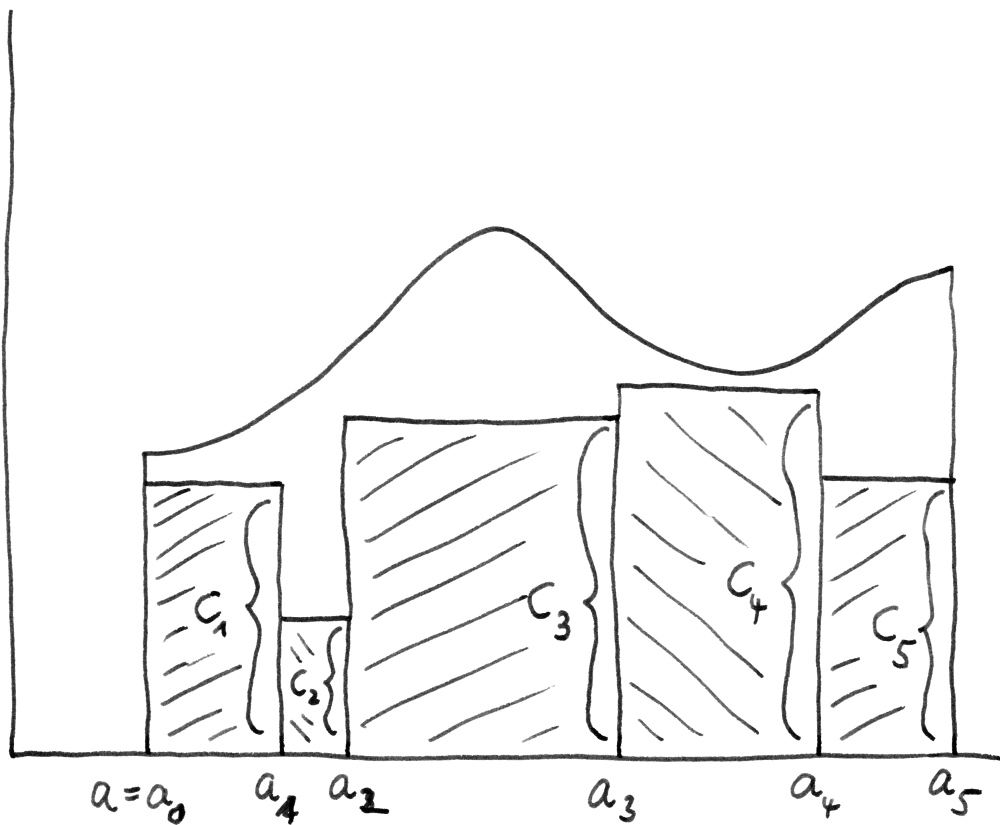
$$\sup T(f) := \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

Auf die Bedeutung der Notationen für das Integral gehen wir in 5.2.6 ein.

5.2.2. Anschaulich mißt das Integral von f die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse, wobei Flächenstücke unterhalb der x -Achse negativ zu rechnen sind. Das Wort ist aus dem Lateinischen abgeleitet und bedeutet so etwas wie „Zusammenfassung“. Der folgende Satz listet einige Eigenschaften unseres Integrals auf. Man kann leicht zeigen, daß unser Integral sogar durch diese Eigenschaften charakterisiert wird.

Satz 5.2.3 (Integrationsregeln). Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall.

1. Für die konstante Funktion mit dem Wert 1 gilt $\int_a^b 1 = b - a$;
2. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $z \in [a, b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^z f + \int_z^b f$;
3. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, in Kurzschreibweise $f \leq g$, so folgt $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;
4. Für $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;
5. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.



Die schraffierte Fläche stellt ein Element von $T(f)$ dar für die durch den geschwungenen Graphen dargestellte Funktion f .

5.2.4. Die beiden letzten Punkte bedeuten in der Sprache der linearen Algebra, daß das Integral eine Linearform auf dem reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem kompakten Intervall ist, als da heißt, eine lineare Abbildung in den Körper der reellen Zahlen.

Beweis. 1. Wir wissen ja schon, daß aus $m = 1 \leq f(x) \leq 1 = M$ folgt $b - a \leq \int_a^b f \leq b - a$.

2. Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ definiert man eine neue Teilmenge $A + B \subset \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Offensichtlich gilt

$$T(f) = T(f|_{[a,z]}) + T(f|_{[z,b]})$$

Für beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ haben wir aber $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ nach Übung 2.4.18.

3. Aus $f \leq g$ folgt offensichtlich $T(f) \subset T(g)$.

4 & 5. Um die letzten beiden Aussagen zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen. Für unsere stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ unterteilen wir unser Intervall **äquidistant**, lateinisch für „mit gleichen Abständen“, durch

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r = b$$

Es gilt also $t_i = a + i(b - a)/r$. Wir definieren nun die **r -te Riemann-Summe** $S^r(f) \in \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i) \left(\frac{b-a}{r}\right)$$

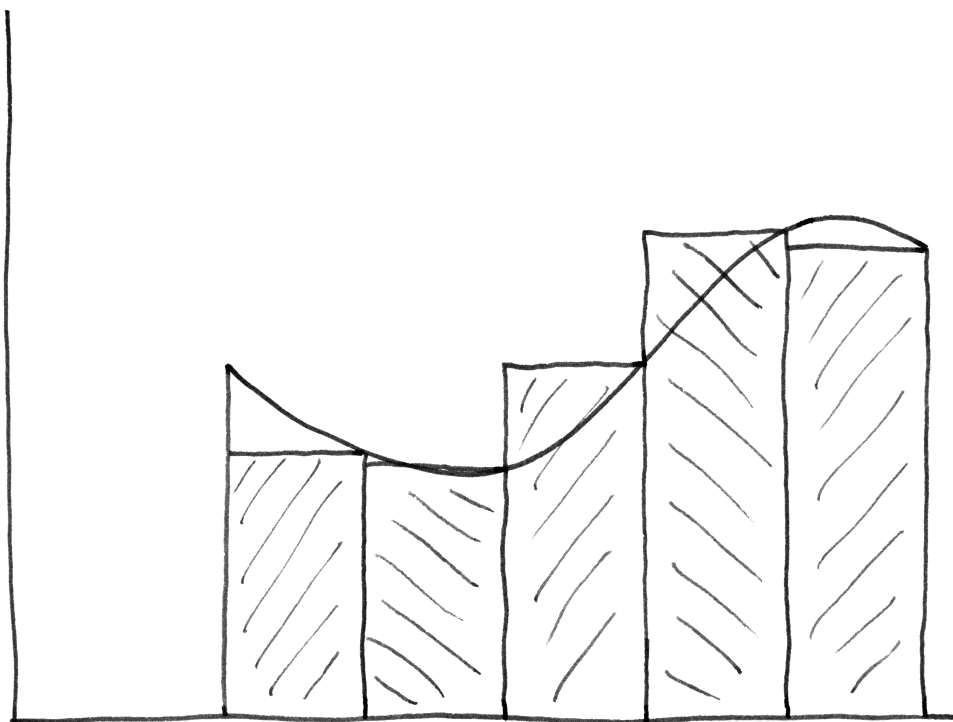
In der anschließenden Proposition 5.2.5 werden wir

$$\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

zeigen. Damit erhalten wir dann sofort

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f + g) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (S^r(f) + S^r(g)) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} S^r f + \lim_{r \rightarrow \infty} S^r g \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g \end{aligned}$$

und ähnlich folgt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. □



Die schraffierte Fläche stellt die fünfte Riemannsumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar.

Proposition 5.2.5. Für $a \leq b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$.

Ergänzung 5.2.6. In der Notation $\int_a^b f(x) dx$, die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen \int ein S wie „Summe“ und dx meint die „Differenz im x -Wert“. Manchmal verwendet man auch allgemeiner für eine weitere Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit guten Eigenschaften, etwa für g die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen, die Notation $\int f dg$, und meint damit den Grenzwert der Summen $\sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i))$, dessen Existenz in [AN2] 8.4.2 folgende in großer Allgemeinheit diskutiert wird.

5.2.7. Man mag versucht sein, die in Proposition 5.2.5 enthaltene Beschreibung gleich als Definition des Integrals zu nehmen. Ich rate davon jedoch ab, da die Existenz des fraglichen Grenzwerts nicht so leicht zu zeigen ist, und da auch die Zweite unserer Integrationsregeln 5.2.3 aus dieser Definition nicht so direkt folgt. Nun kommt das natürlich eigentlich nicht darauf an, wenn unsere Definitionen äquivalent sind. Aber man legt eben auch in Deutschland ein zentrales Auslieferungslager besser nach Frankfurt als nach Freiburg!

Beweis. Wir definieren zusätzlich zur r -ten Riemann-Summe die **r -ten Untersummen** und **Obersummen** durch

$$\underline{S}^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (\inf f[t_i, t_{i+1}]) \left(\frac{b-a}{r}\right) \quad \text{und} \quad \overline{S}^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (\sup f[t_i, t_{i+1}]) \left(\frac{b-a}{r}\right)$$

und behaupten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \underline{S}^r(f) &\leq S^r(f) \leq \overline{S}^r(f) \\ \underline{S}^r(f) &\leq \int_a^b f \leq \overline{S}^r(f) \end{aligned}$$

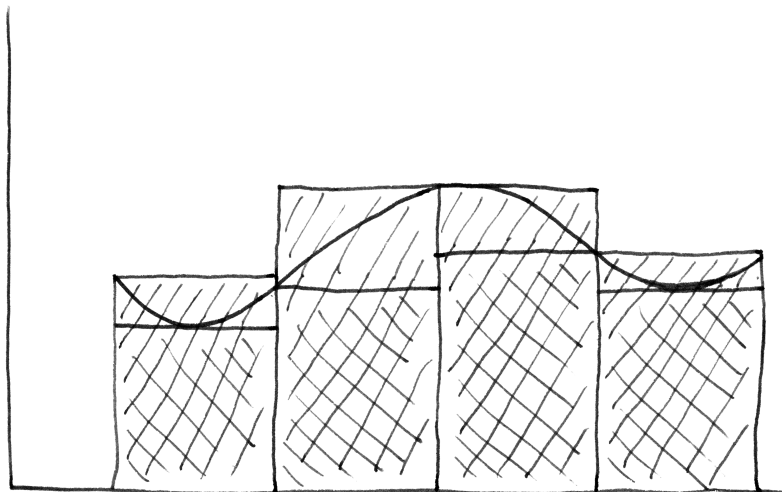
Die erste Zeile ist offensichtlich. Die zweite Zeile erhalten wir zum Beispiel, indem wir aus den bereits bewiesenen Teilen 1 und 3 des Satzes die Ungleichungen

$$(\inf f[t_i, t_{i+1}]) \left(\frac{b-a}{r}\right) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} f \leq (\sup f[t_i, t_{i+1}]) \left(\frac{b-a}{r}\right)$$

folgern, diese Ungleichungen aufsummieren, und die Mitte mit dem auch bereits bewiesenen Teil 2 des Satzes zu $\int_a^b f$ zusammenfassen. Damit sind beide Zeilen von Ungleichungen bewiesen. Nun ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig nach 5.1.15, für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert also $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wählen wir N mit $\frac{b-a}{N} < \delta$ und nehmen dann $r \geq N$, so schwankt unsere Funktion f auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ höchstens um ε , mithin gilt $0 \leq \overline{S}^r(f) - \underline{S}^r(f) \leq \varepsilon(b - a)$ und damit $|S^r(f) - \int_a^b f| \leq \varepsilon(b - a)$. Die Proposition ist gezeigt. \square

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) (a_i - a_{i-1})$$
$$\int_a^b f(x) dx$$

In der Notation $\int_a^b f(x) dx$, die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen \int ein S wie „Summe“ und dx meint die „Differenz im x -Wert“.



Die schraffierte Fläche stellt die vierte Obersumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar, der kreuzweise schraffierte Teil ihre Untersumme.

Beispiel 5.2.8 (Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks als Integral). Für $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ finden wir

$$\begin{aligned} \int_0^b x \, dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{0}{r} + \frac{b}{r} + \frac{2b}{r} + \dots + \frac{(r-1)b}{r} \right) \frac{b}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{b^2}{r^2} \quad \text{nach 1.1.1} \\ &= \frac{b^2}{2} \end{aligned}$$

Lemma 5.2.9 (Standardabschätzung für Integrale). Gegeben $a \leq b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Beweis. Aus $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$. □

5.2.10 (Integrale mit vertauschten Grenzen). Ist $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall ein Intervall I und sind $a, b \in I$ gegeben mit $a > b$, so erklären wir $\int_a^b f(x) \, dx$ durch die Vorschrift

$$\int_a^b f(x) \, dx := - \int_b^a f(x) \, dx$$

Mit dieser Konvention gilt dann für beliebige $a, b, c \in I$ die Formel

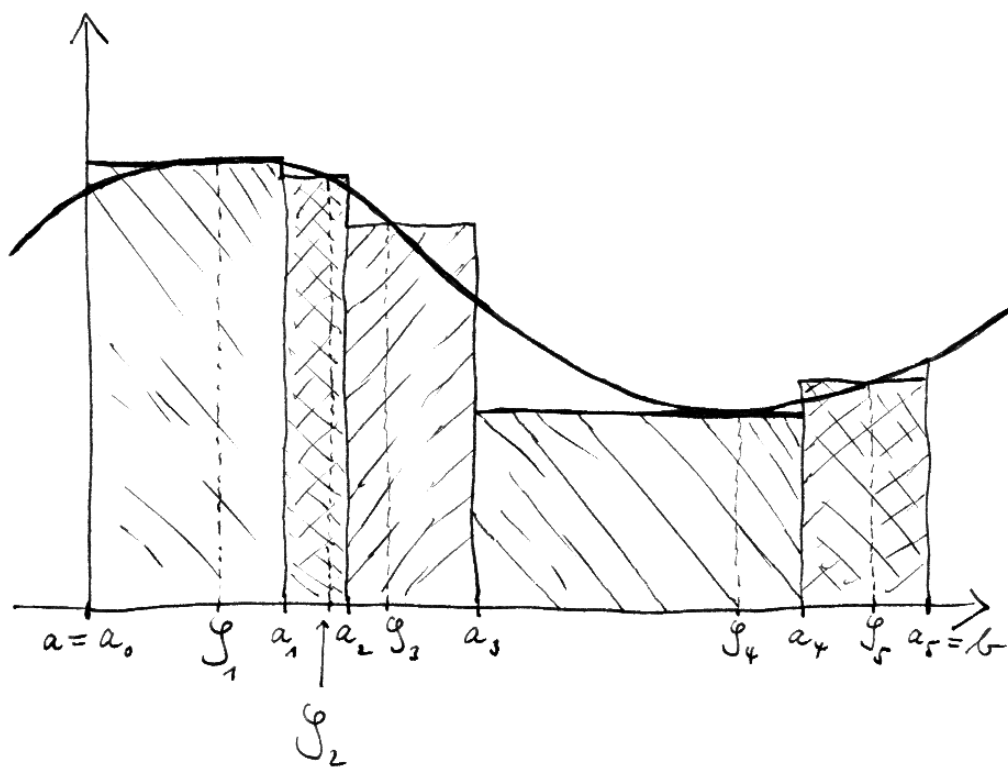
$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

Übungen

Übung 5.2.11. Diese Übung wird verwendet bei der Diskussion der Bogenlänge. Sei $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = b$ eine **Unterteilung** des kompakten reellen Intervalls $[a, b]$. Gegeben eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man die Summen

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)(a_{i+1} - a_i)$$

mit beliebigen $\zeta_i \in [a_i, a_{i+1}]$ als die **Riemann-Summen** von f zur vorgegebenen Unterteilung. Die maximale Länge $\sup\{a_i - a_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ eines Teilintervalls heißt die **Feinheit** der Unterteilung. Man zeige: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß alle Riemannsummen von f zu Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$ vom Integral $\int f$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben.



Darstellung einer Riemannsumme im Sinne von 5.2.11.

Ergänzung 5.2.12. Allgemeiner heißt eine nicht notwendig stetige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **Riemann-integrierbar mit Integral** $\int f$, wenn die Bedingung vom Ende der vorhergehenden Übung erfüllt ist, daß es nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß alle Riemann-Summen von f zu Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$ von $\int f$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben. Wir werden in diesem Text den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit vermeiden: Später wird eh das sehr viel stärkere Lebesgue-Integral eingeführt, und bis dahin reicht unser Integrationsbegriff für stetige Funktionen aus. Für ein vertieftes Studium der Analysis ist jedoch auch der Begriff der Riemann-Integrierbarkeit relevant.

Ergänzende Übung 5.2.13. Man zeige den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: Gegeben ein nichtleeres kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int f = (b - a)f(\xi)$. Gegeben eine weitere stetige Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es sogar $\xi \in [a, b]$ mit $\int fg = f(\xi) \int g$.

5.3 Ableitung an einer Stelle

Definition 5.3.1. Wir nennen eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ **halboffen**, wenn sie mit jedem Punkt auch mehrpunktiges Intervall umfaßt, das besagten Punkt enthält.

Definition 5.3.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit halboffenem Definitionsbereich D heißt **differenzierbar bei** $p \in D$ **mit Ableitung** $b \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = b$$

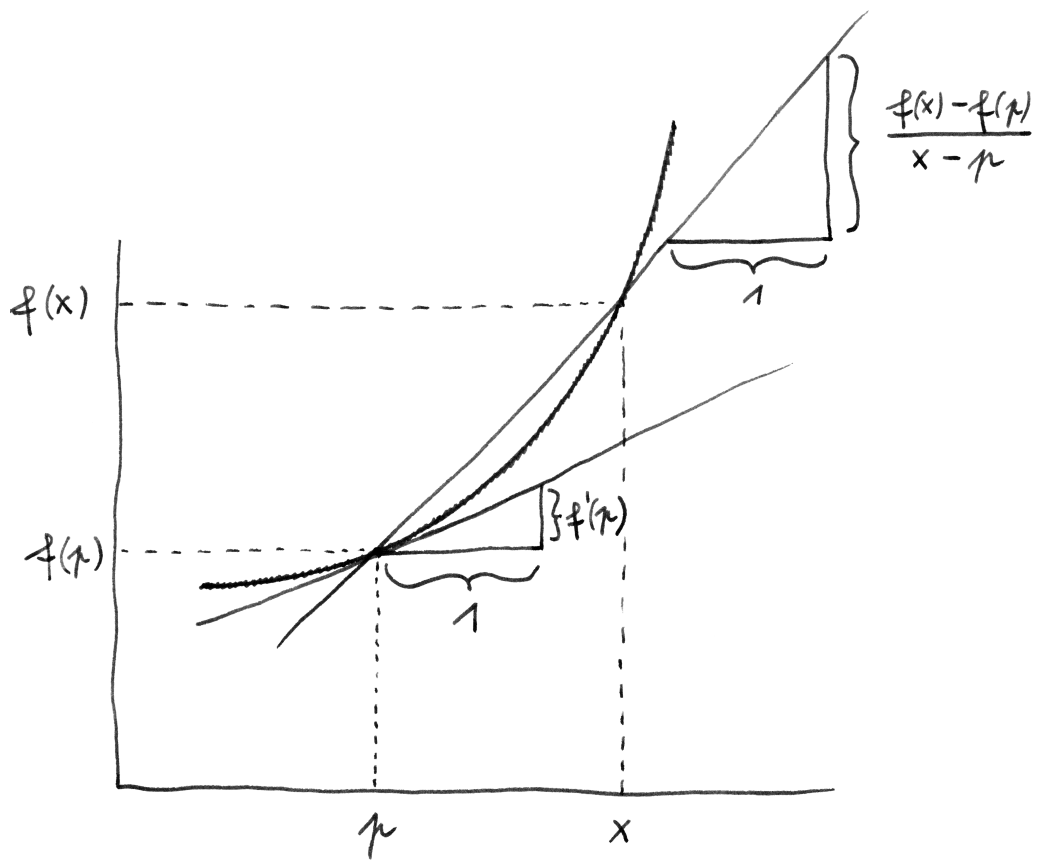
Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$ oder $\frac{df}{dx}(p) = b$ oder, wenn die Funktion $x \mapsto f(x)$ durch einen größeren Ausdruck in x gegeben ist, durch

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=p} f(x) = b$$

5.3.3. Jede nicht vertikale alias nicht zur y -Achse parallele Gerade in der Ebene ist die Lösungsmenge genau einer Gleichung der Gestalt $y = a + bx$. Die reelle Zahl b heißt in diesem Fall die **Steigung** unserer Gerade. Anschaulich bedeutet der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

die Steigung der Gerade durch die Punkte $(p, f(p))$ und $(x, f(x))$. Diese Gerade heißt auch eine **Sekante**, lateinisch für „Schneidende“, da sie eben den Graphen unserer Funktion in den beiden besagten Punkten schneidet. Der Grenzwert $f'(p)$



Eine Sekantensteigung und die Tangentensteigung der durch den gezahnten Graphen dargestellten Funktion

der Sekantensteigungen bedeutet anschaulich die Steigung der **Tangente**, lateinisch für „Berührende“, an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$. Die Umkehrung dieser Anschauung liefert auch eine präzise Definition besagter Tangente als der Gerade durch den Punkt $(p, f(p))$ mit der Steigung $f'(p)$.

5.3.4 (Differenzierbarkeit, Umformulierungen der Definition). Wir geben noch zwei Umformulierungen der Definition der Differenzierbarkeit. Ist $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, so ist nach 3.5.7 eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn es eine Funktion $\varphi = \varphi_p : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = b$ alias $\lim_{x \rightarrow p} \varphi(x) = \varphi(p) = b$ derart, daß für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(p) + (x - p)\varphi(x)$$

Das bedeutet, daß die **Sekantensteigungsfunktion** $\varphi(x) := (f(x) - f(p))/(x - p)$ durch die Vorschrift $\varphi(p) = b$ stetig an die Stelle p fortgesetzt werden kann. In nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion ε , die stetig ist bei Null und die dort den Wert $\varepsilon(0) = 0$ annimmt, in Formeln $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$. Hierbei ist zu verstehen, daß die Funktion ε definiert sein soll auf der Menge aller h mit $h + p \in D$. Diese Formulierung des Ableitungsbegriffs hat den Vorteil, besonders gut zum Ausdruck zu bringen, inwiefern für festes p und kleines h der Ausdruck $f(p) + bh$ eine besonders gute Approximation von $f(p + h)$ ist.

Beispiele 5.3.5. Eine konstante Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ hat bei jedem Punkt p die Ableitung $\text{id}'(p) = \frac{dx}{dx}(p) = 1$.

Lemma 5.3.6. Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist differenzierbar bei jedem Punkt von \mathbb{R}^\times und ihre Ableitung bei einer Stelle $p \in \mathbb{R}^\times$ ist $-\frac{1}{p^2}$.

Beweis. Wir rechnen $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{-1}{xp} = -\frac{1}{p^2}$ nach 3.5.9. □

Lemma 5.3.7. Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit halboffenem Definitionsbereich D differenzierbar bei $p \in D$, so ist f stetig bei p .

Beweis. Das folgt aus der Darstellung $f(x) = f(p) + (x - p)\varphi(x)$ mit φ stetig bei p aus 5.3.4. □

5.3.8. Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt $p \in (a, b)$ und existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{x \searrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

im Sinne von 3.5.41, so nennen wir sie die **linksseitige** beziehungsweise die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle p . Nach der Charakterisierung 3.5.41 eines Grenzwerts als übereinstimmender rechts- und linksseitiger Grenzwert ist f differenzierbar bei p genau dann, wenn dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen. Man erkennt so zum Beispiel, daß der Absolutbetrag $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist bei $p = 0$, da dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung zwar existieren, aber nicht übereinstimmen.

5.4 Ableitungsregeln

Proposition 5.4.1. *Seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ für D halboffen differenzierbar bei $p \in D$. So sind auch die Funktionen $f + g$ und fg differenzierbar bei p und es gilt*

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \text{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Beweis. Wir schreiben wie in 5.3.4

$$\begin{aligned} f(p + h) &= f(p) + f'(p)h + \varepsilon(h)h \\ g(p + h) &= g(p) + g'(p)h + \hat{\varepsilon}(h)h \end{aligned}$$

für Funktionen $\varepsilon, \hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Lassen wir der Übersichtlichkeit halber alle (p) weg, so liest sich das

$$\begin{aligned} f(p + h) &= f + f'h + \varepsilon(h)h \\ g(p + h) &= g + g'h + \hat{\varepsilon}(h)h \end{aligned}$$

Durch Addieren beziehungsweise Multiplizieren dieser Gleichungen erhalten wir dann

$$\begin{aligned} (f + g)(p + h) &= (f + g)(p) + [f' + g']h + (\varepsilon(h) + \hat{\varepsilon}(h))h \\ (fg)(p + h) &= (fg)(p) + [f'g + fg']h \\ &\quad + (\varepsilon(h)g + f\hat{\varepsilon}(h) + (f' + \varepsilon(h))(g' + \hat{\varepsilon}(h))h)h \end{aligned}$$

Nach unseren Kenntnissen über stetige Funktionen steht aber in der letzten eckigen Klammer auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen eine Funktion, die stetig ist bei $h = 0$ und die dort den Wert Null annimmt. \square

Definition 5.4.2. Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit D halboffen differenzierbar an jedem Punkt von D , so nennen wir f **differenzierbar auf D** und nennen die Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f'(p)$ ihre **Ableitung**.

Beispiel 5.4.3. Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist differenzierbar auf \mathbb{R}^\times mit Ableitung $-1/x^2$. Sind f und g differenzierbar, so auch $f + g$ und fg und für ihre Ableitungen gelten die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Korollar 5.4.4 (Ableiten ganzzahliger Potenzen). Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und unter der Voraussetzung $x \neq 0$ im Fall $n \leq 0$ ist die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^n$ die Funktion $x \mapsto nx^{n-1}$.

5.4.5. Im Fall $n = 0$ ist die Ableitung der konstanten Funktion $x^0 = 1$ natürlich überall definiert und Null, kann aber nur für $x \neq 0$ in der Form $0x^{-1}$ geschrieben werden.

Beweis. Man zeigt das durch vollständige Induktion über n separat für $n \geq 0$ und $n \leq -1$. □

Satz 5.4.6 (Kettenregel). Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ halboffene Teilmengen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und es gelte $f(D) \subset E$. Sei f differenzierbar bei $p \in D$ und g differenzierbar bei $f(p)$. So ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

Beweis. Der besseren Übersichtlichkeit halber benutzen wir hier Großbuchstaben für die Ableitungen und setzen $f'(p) = L$ und $g'(f(p)) = M$. Wir haben

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + Lh + \varepsilon(h)h \\ g(f(p)+k) &= g(f(p)) + Mk + \hat{\varepsilon}(k)k \end{aligned}$$

für Funktionen ε und $\hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir erhalten durch Einsetzen von $Lh + \varepsilon(h)h$ für k sofort

$$\begin{aligned} g(f(p+h)) &= g(f(p) + Lh + \varepsilon(h)h) \\ &= g(f(p)) + MLh + M\varepsilon(h)h + \hat{\varepsilon}(Lh + \varepsilon(h)h)(L + \varepsilon(h))h \end{aligned}$$

Es ist nun aber offensichtlich, daß sich hier die Summe der Terme ab dem dritten Summanden einschließlich in der Gestalt $\eta(h)h$ schreiben läßt für eine Funktion η , die stetig ist bei Null und die dort verschwindet, und wir erhalten

$$(g \circ f)(p+h) = (g \circ f)(p) + MLh + \eta(h)h \quad \square$$

Proposition 5.4.7 (Quotientenregel). Sei $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ohne Nullstelle und $D \subset \mathbb{R}$ halboffen.

1. Ist f differenzierbar bei $p \in D$, so ist auch $1/f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/f(x)$ differenzierbar bei p und hat dort die Ableitung $-f'(p)/f(p)^2$;
2. Ist zusätzlich $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei p , so ist auch g/f differenzierbar bei p mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus der Formel 5.3.6 für die Ableitung der Funktion $x \mapsto 1/x$ mit der Kettenregel. Teil 2 folgt aus Teil 1 mit der Produktregel. \square

5.4.8. Seien $D \subset \mathbb{R}$ halboffen und $g, f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f keine Nullstelle auf D , so ist auch g/f differenzierbar auf D mit der Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

Lemma 5.4.9 (Ableitung der Exponentialfunktion). Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung, in Formeln $\exp'(p) = \exp(p) \forall p \in \mathbb{R}$.

Beweis. In 6.1.16 werden wir lernen, daß man „Potenzreihen gliedweise differenzieren darf“. Da wir das aber bis jetzt noch nicht wissen, müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir bestimmen zunächst die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle $p = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \exp'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i!} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

nach unseren Erkenntnissen zum Grenzwert durch Einquetschen 3.5.35 und Grenzwert von Summe und Produkt 3.5.34, da ja $|\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}|$ für $|x| \leq 1$ beschränkt ist durch die Euler'sche Zahl e . Um $\exp'(p)$ für beliebiges p zu bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} \exp'(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(p+h) - \exp(p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \exp(p) \\ &= \exp(p) \end{aligned}$$

Hier verwenden wir im letzten Schritt den schon behandelten Fall $p = 0$ und formal im ersten Schritt eine der Verknüpfungsregeln für Grenzwerte aus 3.5.27, um den Grenzwert $x \rightarrow p$ in einen Grenzwert $h \rightarrow 0$ umzuformen. \square

5.4.10 (Ableitung der trigonometrischen Funktionen). Ganz genau wie im vorhergehenden Beweis zeigt man, daß Sinus und Cosinus bei Null differenzierbar sind mit der Ableitung $\sin'(0) = 1$ und $\cos'(0) = 0$. Mit der Additionsformel $\sin(t+h) = \sin(t)\cos(h) + \cos(t)\sin(h)$ folgt $\sin' = \cos$ und mit der anderen Additionsformel $\cos' = -\sin$.

Satz 5.4.11 (Ableitung von Umkehrfunktionen). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall sowie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton, stetig auf I und differenzierbar bei $p \in I$ mit Ableitung $f'(p) \neq 0$. So ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei $q = f(p)$ mit Ableitung

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

Beweis. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) - f(p) = (x - p)\varphi(x)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $x = f^{-1}(y)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $(y - q)\psi(y) = f^{-1}(y) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$. \square

Beispiel 5.4.12. Die **Ableitung des Logarithmus** ist mithin

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

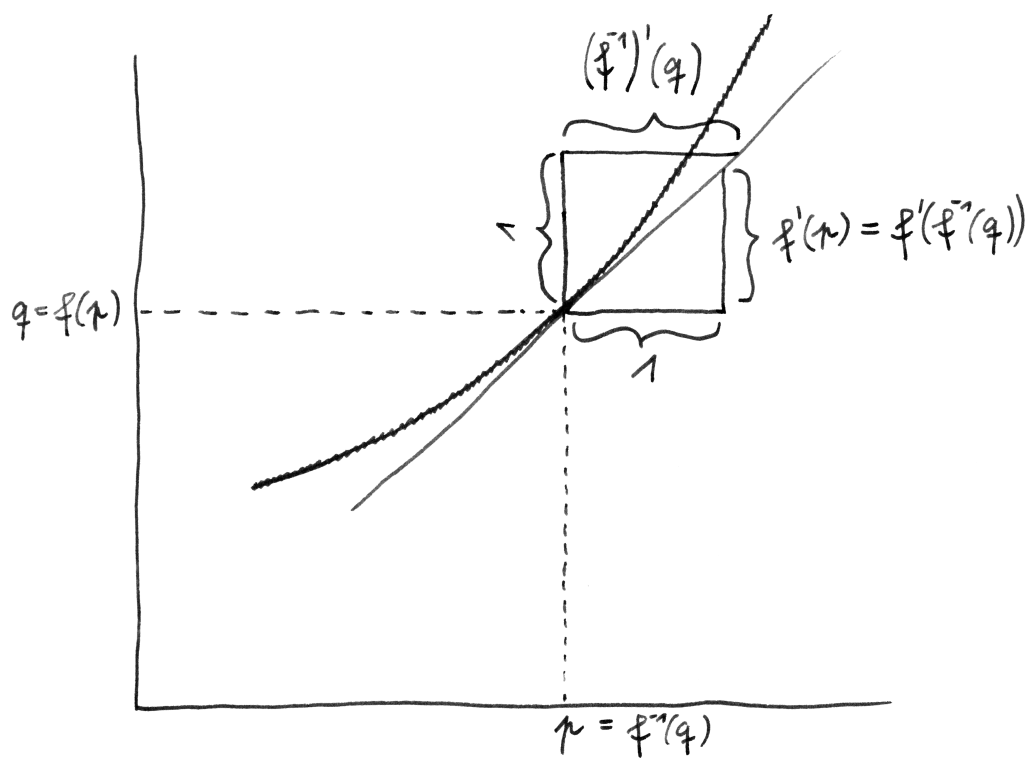
Damit ergibt sich für alle $a \in \mathbb{R}$ die **Ableitung der allgemeinen Potenzen**, also der Funktionen $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$, zu $x \mapsto ax^{a-1}$. In der Tat, nach Definition gilt ja $x^a = \exp(a \log x)$, die Ableitung wird also $a \frac{1}{x} \exp(a \log x) = ax^{a-1}$.

Beispiel 5.4.13. Der Arcussinus ist nach 5.4.11 differenzierbar auf $(-1, 1)$ und seine Ableitung ergibt sich mit unserer Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion zu

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= 1/(\cos(\arcsin x)) \\ &= 1/\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \\ &= 1/\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Beispiel 5.4.14. Die Ableitung des Tangens ergibt sich mit der Quotientenregel zu $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$. Die Ableitung von arctan ergibt sich mit der Regel 5.4.11 über die Ableitung der Umkehrfunktion zu

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$



Veranschaulichung der Formel 5.4.11 für die Ableitung von Umkehrfunktionen

Lemma 5.4.15. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis. Wir betrachten allgemeiner für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-n} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

und zeigen, daß sie differenzierbar ist mit Ableitung $f'_n = -nf_{n+1} + f_{n+2}$. Damit sind wir dann natürlich fertig. Das einzige Problem ist die Ableitung an der Stelle $p = 0$, wo wir nachweisen müssen, daß die Sekantensteigungen „von rechts“ auch gegen Null streben, daß also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^{-n-1} e^{-1/x} = 0$$

Nun wissen wir aber nach der Definition von \exp , daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt $\exp(x) > x^m/m!$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt also $\exp(1/x) > x^{-n-2}/(n+2)!$ und wir folgern $0 < x^{-n-1} e^{-1/x} < (n+2)! x$ für $x > 0$. \square

Übungen

Übung 5.4.16 (Eine differenzierbare Funktion mit unstetiger Ableitung). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar auf \mathbb{R} , aber ihre Ableitung ist nicht stetig beim Nullpunkt.

5.5 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung

Definition 5.5.1. Eine Teilmenge der reellen Zahlen heißt **offen**, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist. In Formeln ist demnach eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ offen genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset U$.

Satz 5.5.2 (Notwendige Bedingung für ein Extremum). Nimmt eine reellwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, an einem Punkt dieser offenen Teilmenge ihr Maximum oder ihr Minimum an, und ist sie dort differenzierbar, so verschwindet an diesem Punkt ihre Ableitung.

5.5.3. In Formeln haben wir also

$$(f : \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R} \text{ diffbar bei } p \in U \text{ mit } f(x) \geq f(p) \forall x \in U) \Rightarrow f'(p) = 0.$$

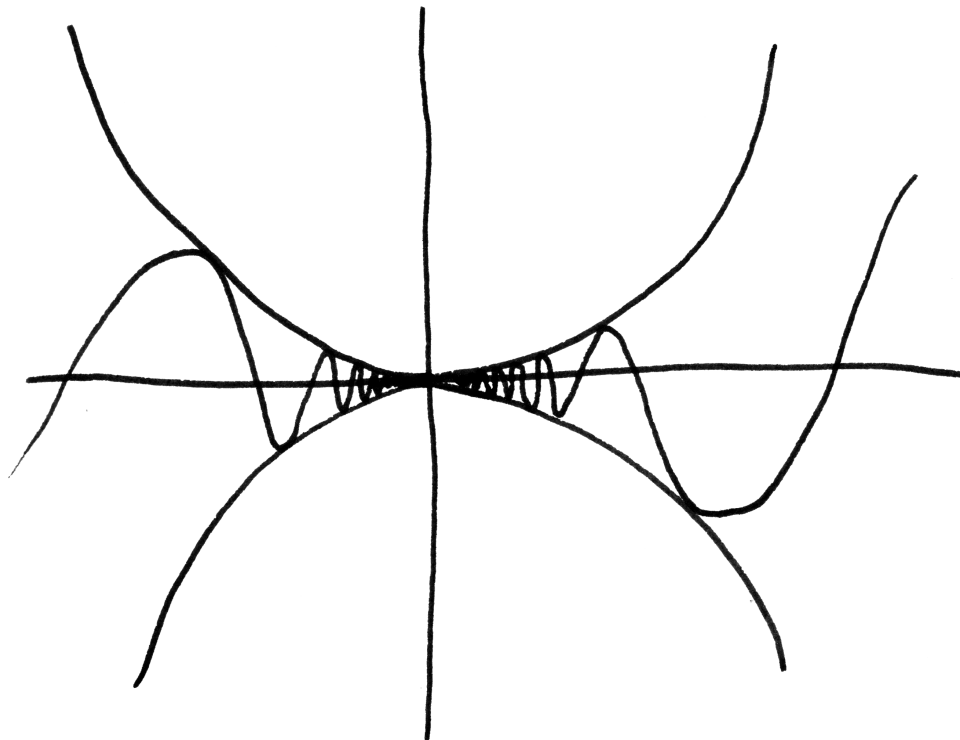


Illustration zu 5.4.16. Der Graph der Funktion ist zwischen zwei parabolischen Backen eingezwängt und hat deshalb am Ursprung Null Grenzwert der Sekantensteigungen, hat aber beliebig nah am Ursprung immer wieder Stellen mit Steigung Eins. Die entsprechend durch $x^2 \sin(x^{-2})$ gegebene Funktion wird sogar beliebig nah am Ursprung beliebig steil.

5.5.4. Die Bedingung, unsere Teilmenge sei offen, ist an dieser Stelle wesentlich: Gegeben reelle Zahlen $a < b$ nimmt etwa die Funktion $x \mapsto x$ auf dem Intervall $[a, b]$ ihr Minimum bei a und ihr Maximum bei b an, aber die Ableitung unserer Funktion verschwindet weder bei a noch bei b . Für Minima oder Maxima einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf (a, b) differenzierbar ist, kommen ganz allgemein nach unserem Satz nur in Frage: Einerseits Endpunkte des Intervalls, und andererseits die Punkte im Innern des Intervalls, an denen die Ableitung verschwindet. Mit etwas Glück können wir unter diesen Punkten dann durch Ausprobieren herauskriegen, wo das Minimum und das Maximum wirklich angenommen werden.

Beweis. Bezeichne $U \subset \mathbb{R}$ unsere offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ unsere Funktion. Nimmt f ein Maximum an bei $p \in U$, so gilt für die Sekantensteigungsfunktion $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ offensichtlich $\varphi(x) \geq 0$ für $x < p$ und $\varphi(x) \leq 0$ für $x > p$. Wenn der Grenzwert der Sekantensteigungen existiert, so folgt aus der Erhaltung 3.5.37 von Ungleichungen im Grenzwert $0 \leq \lim_{x \nearrow p} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow p} \varphi(x) = \lim_{x \searrow p} \varphi(x) \leq 0$ und damit ist dann dieser Grenzwert Null. Nimmt f ein Minimum an bei p , so argumentiert man analog. \square

Beispiel 5.5.5. Das **Brechungsgesetz** behauptet, daß das Verhältnis vom Sinus des Eintrittswinkels zum Sinus des Austrittswinkels eines Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien, sagen wir Luft und Wasser, konstant ist. Wir leiten es nun ab aus dem sogenannten **Fresnel'schen Prinzip**, nach dem ein Lichtstrahl „stets den schnellsten Weg nimmt“. Ist sagen wir die Lichtgeschwindigkeit in Wasser das γ -fache der Lichtgeschwindigkeit in Luft, so sollte nach diesem Prinzip der Lichtstrahl mit den Bezeichnungen aus nebenstehendem Bild bei dem x in das Wasser eintauchen, für das der Ausdruck

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \gamma \sqrt{b^2 + (L - x)^2}$$

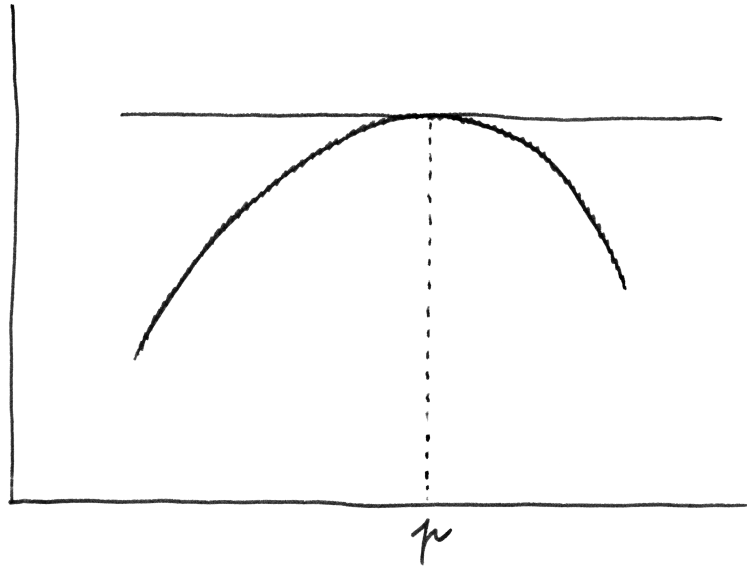
minimal wird. Ableiten liefert dafür die notwendige Bedingung

$$\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \gamma \frac{-2(L - x)}{2\sqrt{b^2 + (L - x)^2}} = 0$$

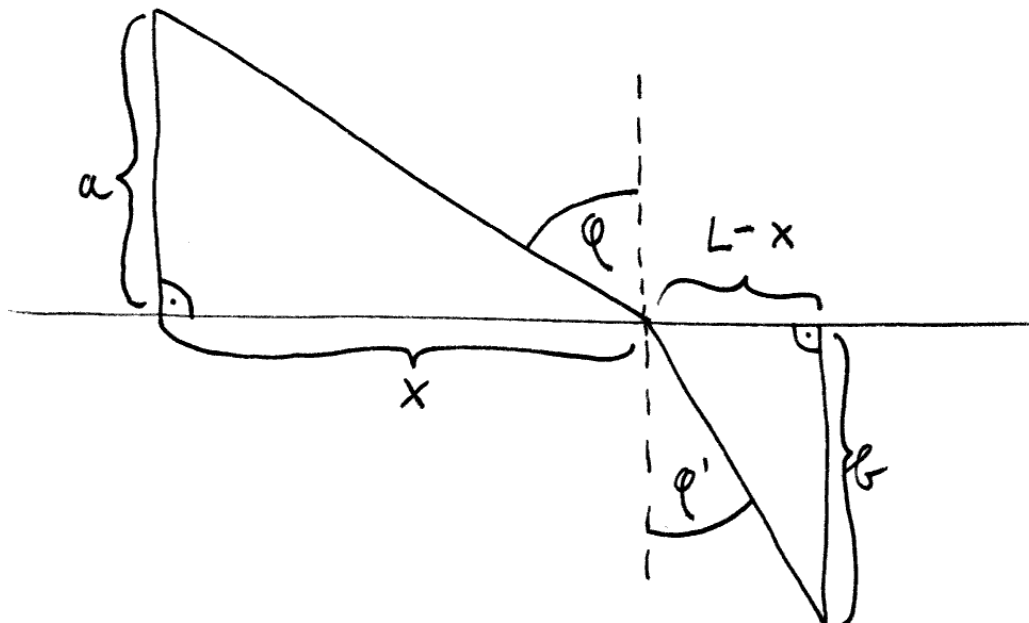
und damit steht das Brechungsgesetz $\sin \varphi = \gamma \sin \varphi'$ auch schon da.

Satz 5.5.6 (von Rolle). Seien $a < b$ aus $\bar{\mathbb{R}}$ gegeben und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b) . Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.

Beweis. Nach 5.1.5 gibt es Punkte $p, q \in [a, b]$, an denen f sein Maximum und sein Minimum annimmt. Liegt einer dieser Punkte im Innern (a, b) unseres Intervalls, so verschwindet dort die Ableitung nach dem vorhergehenden Satz und



Veranschaulichung der notwendigen Bedingung für ein Maximum 5.5.2



Zum Brechungsgesetz

wir sind fertig. Nimmt f sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand des Intervalls an, so ist die Funktion f wegen unserer Annahme $f(a) = f(b)$ konstant und wir sind auch fertig. \square

Korollar 5.5.7 (Mittelwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem ganzen kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b) . So gibt es $p \in (a, b)$ mit

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Man wende den vorhergehenden Satz von Rolle 5.5.6 an auf die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, die aus f entsteht durch „Subtraktion der globalen Sekanten“. \square

Satz 5.5.8 (Erste Ableitung und Monotonie). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. So gilt

$$\begin{aligned} f' > 0 &\Rightarrow f \text{ w\u00e4chst streng monoton} \\ f' \geq 0 &\Leftrightarrow f \text{ w\u00e4chst monoton} \\ f' < 0 &\Rightarrow f \text{ f\u00e4llt streng monoton} \\ f' \leq 0 &\Leftrightarrow f \text{ f\u00e4llt monoton} \\ f' = 0 &\Leftrightarrow f \text{ ist konstant} \end{aligned}$$

Beweis. Es reicht, die beiden ersten Aussagen zu zeigen. W\u00e4chst f nicht streng monoton, so gibt es $a < b$ mit $f(a) \geq f(b)$ und nach dem Mittelwertsatz finden wir $p \in (a, b)$ mit

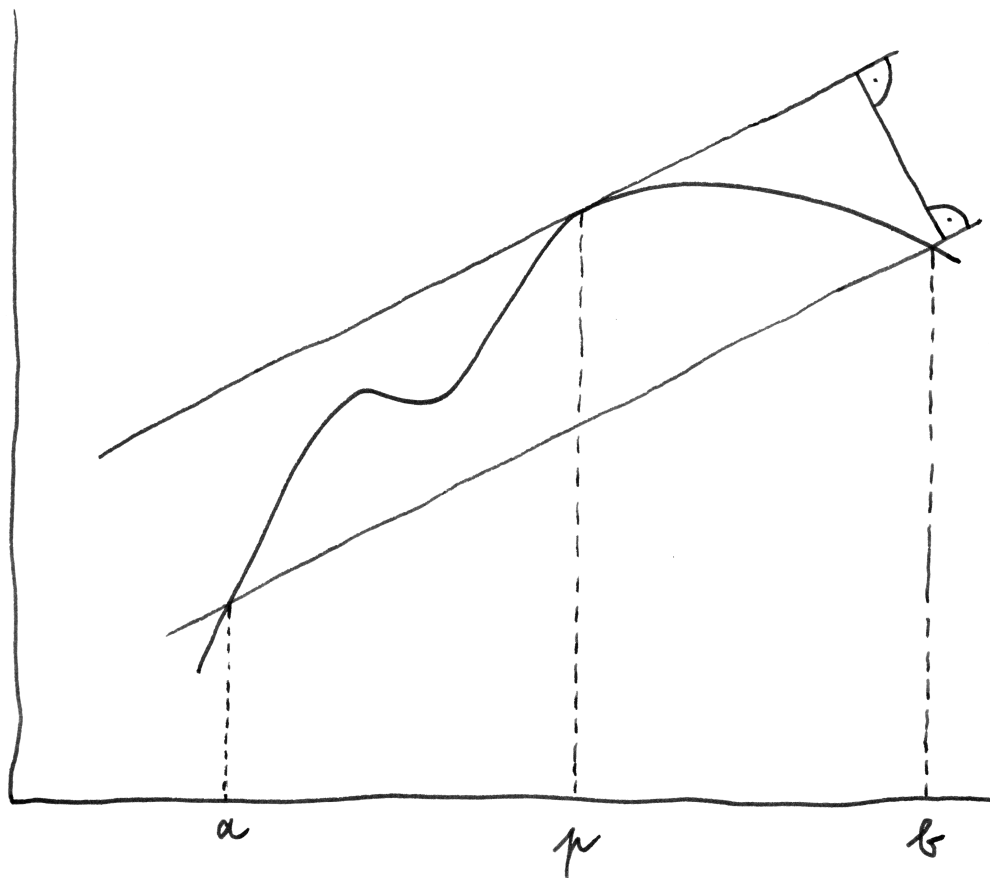
$$f'(p) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq 0$$

W\u00e4chst f nicht monoton, so finden wir in derselben Weise $p \in I$ mit $f'(p) < 0$. Das zeigt schon mal \Rightarrow . Umgekehrt folgt aus f monoton wachsend, da\u00df alle Sekantensteigungen nichtnegativ sind, und damit auch alle Grenzwerte von Sekantensteigungen. \square

Korollar 5.5.9 (Funktionen, die ihre eigene Ableitung sind). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall. Genau dann stimmt eine differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ \u00fcberein mit ihrer eigenen Ableitung, wenn sie ein Vielfaches der Exponentialfunktion ist, in Formeln

$$f' = f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = c \exp(x)$$

5.5.10. Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' = f$ mu\u00df keineswegs ein Vielfaches der Exponentialfunktion sein. Zum Beispiel w\u00e4re die Funktion f mit $f(x) = 0$ f\u00fcr $x < 0$ und $f(x) = 5 \exp(x)$ f\u00fcr $x > 0$ auch eine M\u00f6glichkeit. Aber gut, \mathbb{R}^\times ist ja auch kein Intervall.



Veranschaulichung des Mittelwertsatzes 5.5.7

Beweis. Bezeichne $I \subset \mathbb{R}$ unser mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unsere differenzierbare Funktion mit $f = f'$. Die Ableitung der Funktion $f(x) e^{-x}$ ergibt sich mit der Produktregel zu $f'(x) e^{-x} - f(x) e^{-x} = 0$, mithin ist die Funktion $f(x) e^{-x}$ konstant, sagen wir mit einzigem Funktionswert c , und wir folgern $f(x) = c e^x \quad \forall x \in I$. \square

5.5.11 (Terminologisches zu Intervallen). Ein reelles Intervall ist halboffen im Sinne unserer Definition 5.3.1 genau dann, wenn es nicht aus einem einzigen Punkt besteht. In der Literatur wird der Begriff „halboffen“ meist abweichend verwendet für Intervalle, die weder offen noch kompakt sind, also für reelle Intervalle der Gestalt $(a, b]$ oder $[a, b)$. Bei uns heißen jedoch auch Intervalle der Gestalt $[a, b]$ mit $a < b$ halboffen, da sie eben halboffen sind als Teilmengen von \mathbb{R} im Sinne der obigen Definition. Da aber der Begriff eines „halboffenen Intervalls“ schon so fest besetzt ist und da auch der Terminus „unendliches Intervall“ vermutlich eher als „Intervall unendlicher Länge“ verstanden wird, will ich stattdessen lieber von „nicht einpunktigen Intervallen“ oder im Fall, daß sie auch nicht leer sind, wie bisher von „mehrpunktigen reellen Intervallen“ reden. So richtig gefällt mir das auch nicht, es hört sich so diskret an. Mir ist aber nichts Besseres eingefallen, und das Konzept wird uns so oft begegnen, daß es eine griffige Bezeichnung braucht.

Satz 5.5.12 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges reelles Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in I$ ein Punkt mit $f'(p) = 0$. Sei zusätzlich die Ableitung f' von f differenzierbar bei p .

1. Gilt $f''(p) > 0$, so besitzt f ein **isoliertes lokales Minimum** bei p , als da heißt, es gibt $r > 0$ derart, daß gilt $f(q) > f(p)$ für alle $q \in I$ mit $0 < |q - p| < r$;
2. Gilt $f''(p) < 0$, so besitzt f ein **isoliertes lokales Maximum** bei p .

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(p) + (x - p)\varphi(x) \\ &= (x - p)\varphi(x) \end{aligned}$$

mit φ stetig in p und $\varphi(p) = f''(p) > 0$. So gibt also $r > 0$ mit $\varphi(q) > 0$ für $q \in I \cap (p - r, p + r)$, und wir folgern $f'(q) < 0$ für $q \in I \cap (p - r, p)$ und $f'(q) > 0$ für $q \in I \cap (p, p + r)$. Unseren Funktion f fällt also streng monoton auf $I \cap (p - r, p)$ und wächst streng monoton auf $I \cap (p, p + r)$. Der andere Fall $f''(p) < 0$ wird analog behandelt. \square

Definition 5.5.13. Wir nennen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **konvex** beziehungsweise **konkav**, wenn ihr Graph unter beziehungsweise

über jeder seiner Sekanten liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

beziehungsweise \geq für konkave Funktionen.

5.5.14. Man zeigt leicht, daß die Bedingung der Konvexität gleichbedeutend ist zu

$$f(tx + sz) \leq tf(x) + sf(z) \quad \forall s, t \in [0, 1] \text{ mit } s + t = 1.$$

Satz 5.5.15 (Zweite Ableitung und Konvexität). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. So gilt

$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$$f \text{ ist konkav} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Ist f nicht konvex, so gibt es x, y, z mit $x < y < z$ aber

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Nach dem Mittelwertsatz finden wir dann aber $\xi < \zeta$ mit $f'(\xi) > f'(\zeta)$ und bei nochmaligem Anwenden η mit $f''(\eta) < 0$. Ist umgekehrt f konvex, so reicht es nach 5.5.8 zu zeigen, daß f' monoton wächst. Kürzen wir die Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ ab mit $s_{xy} := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$, so impliziert die Konvexität die Ungleichungskette

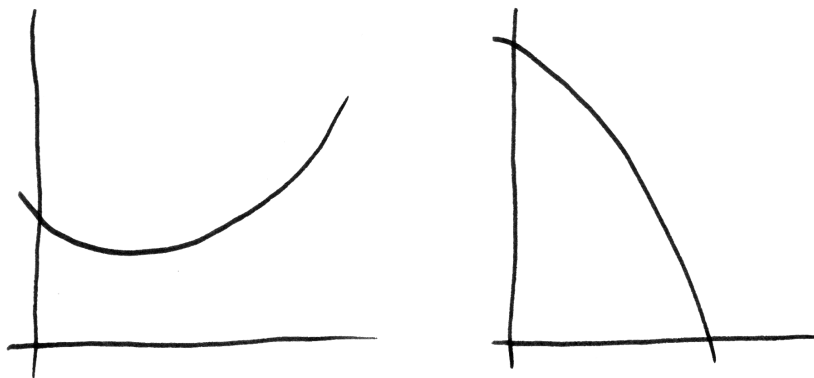
$$s_{xy} \leq s_{xz} \leq s_{yz}$$

Hier ist $s_{xy} \leq s_{yz}$ eine direkte Konsequenz der Konvexität, und da sicher gilt $(x - y)s_{xy} + (y - z)s_{yz} = (x - z)s_{xz}$, liegt s_{xz} als ein „gewichtetes Mittel“ zwischen s_{xy} und s_{yz} . Unsere Ungleichungskette schreiben wir aus zu

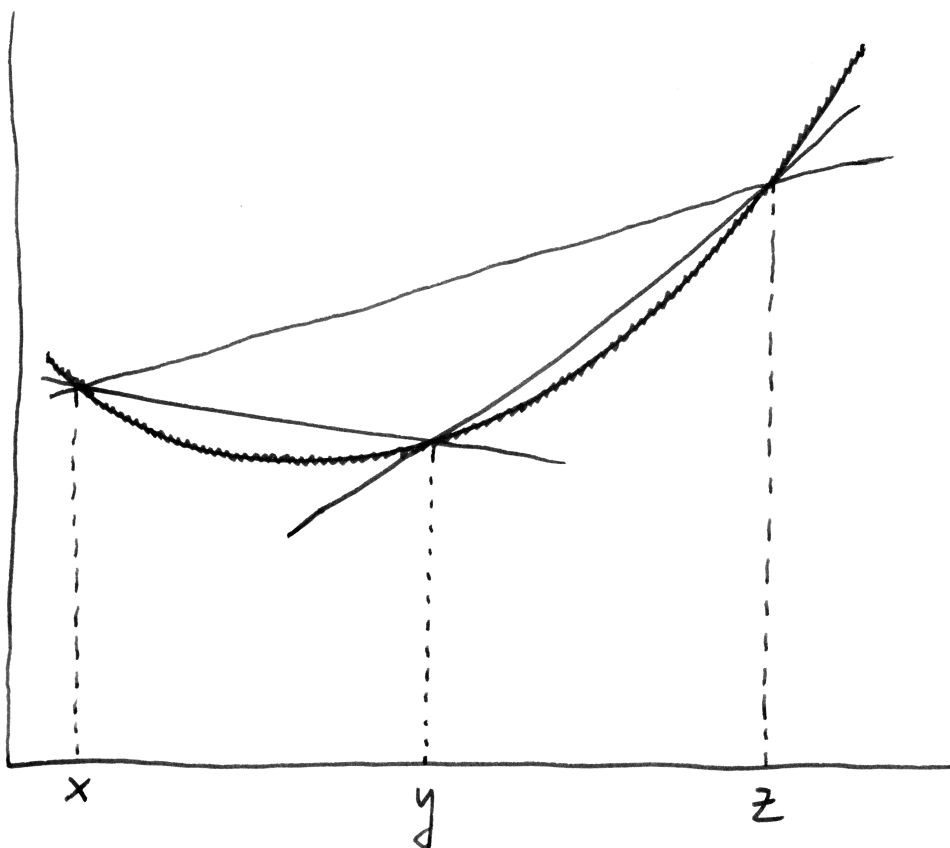
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Die Sekantensteigungsfunktionen $y \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ und $y \mapsto \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$ wachsen insbesondere monoton auf $(x, z]$ beziehungsweise $[x, z)$ und im Grenzwert folgt

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq f'(z) \quad \square$$



Links der Graph einer konvexen, rechts der einer konkaven Funktion



Veranschaulichung unserer Ungleichungskette für die Sekantensteigungen bei konvexen Funktionen aus dem Beweis von 5.5.15

Definition 5.5.16. Wir nennen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **streng konvex** beziehungsweise **streng konkav**, wenn ihr Graph echt unter beziehungsweise echt über jeder Sekante liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

beziehungsweise $>$ für streng konkave Funktionen.

Satz 5.5.17. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. So gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist streng konvex} &\Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist streng konkav} &\Leftrightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Beweis. Übung. □

Übungen

Übung 5.5.18. An welchen Stellen nimmt die Funktion $[-1, 2] \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto |2 - x^2|$ ihr Minimum und Maximum an?

Ergänzende Übung 5.5.19. Bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe umfaßt eine Konservendose mit fest vorgegebener Oberfläche das größtmögliche Volumen?

Übung 5.5.20. Eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall, deren Ableitung beschränkt ist, ist gleichmäßig stetig.

Ergänzende Übung 5.5.21. Gegeben eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall ist das Bild des fraglichen Intervalls unter der Ableitung unserer Funktion wieder ein Intervall. Hinweis: Mittelwertsatz. Man beachte, daß die Stetigkeit der Ableitung nicht vorausgesetzt wird.

Übung 5.5.22. Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und löst die Differentialgleichung $f' = af$, so gilt $f(x) = f(0)e^{ax}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übung 5.5.23 (Funktionen, die mindestens ihre eigene Ableitung sind). Ist eine Funktion $f : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [0, b)$, so folgt $f(t) \leq f(0)e^t$ für alle $t \in [0, b)$. Ist allgemeiner $f : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, daß gilt $f'(t) \leq \alpha f(t)$ für alle $t \in [0, b)$, so folgt $f(t) \leq f(0)e^{\alpha t}$ für alle $t \in [0, b)$.

Übung 5.5.24. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Man zeige, daß dann f in

I höchstens eine Nullstelle haben kann, und daß f links von dieser Nullstelle positiv und rechts davon negativ sein muß. Hinweis: Zwischen zwei verschiedenen Nullstellen muß es nach Voraussetzung eine Nichtnullstelle geben und dann eine kleinste Nullstelle oberhalb und eine größte Nullstelle unterhalb dieser Nichtnullstelle. Von da aus finde man einen Widerspruch zu den Annahmen. Die Übung wird bei der Diskussion differentieller Ungleichungen helfen.

Ergänzende Übung 5.5.25. Man zeige, daß ein Punkt $(x, y) \in (0, 1)^2$ genau dann auf einem Geradensegment der Länge Eins mit einem Ende auf der x -Achse und dem anderen Ende auf der y -Achse liegt, wenn gilt $y^{2/3} + x^{2/3} \leq 1$. Hinweis: Man halte x fest und berechne für alle $a \in [x, 1]$ die Höhe $h_x(a)$ an der Stelle x eines Brettes der Länge 1, das bei a auf der x -Achse steht und an die y -Achse angelehnt ist. Man bestimme das Maximum dieser Höhen bei festem x und variablem a .

Übung 5.5.26. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zeige man die **Young'sche Ungleichung** $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$. Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Exponentialfunktion aus.

Übung 5.5.27. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p \geq 1$ zeige man die Ungleichung $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$. Hinweis: Man gehe von der Konvexität der Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^p$ aus.

Ergänzende Übung 5.5.28. Für $P \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen gilt

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = \infty$$

In der Tat folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Entwicklung $(1 - 1/p)^{-1} = (1 + p^{-1} + p^{-2} \dots)$ in eine geometrische Reihe, daß die Menge der partiellen Produkte des unendlichen Produkts $\prod_{p \in P} (1 - 1/p)^{-1}$ nicht beschränkt sein kann. Nun wende man den Logarithmus an und schätze ab.

5.6 Regeln von de l'Hospital

Satz 5.6.1 (Regeln von de l'Hospital). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges reelles Intervall und p ein Häufungspunkt zu I in $\bar{\mathbb{R}}$. Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen derart, daß gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow p} |g(x)| = \infty.$$

Haben g und g' keine Nullstelle auf $I \setminus p$ und existiert der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen $\lim_{x \rightarrow p} (f'(x)/g'(x))$ in $\bar{\mathbb{R}}$, so existiert auch der Grenzwert des

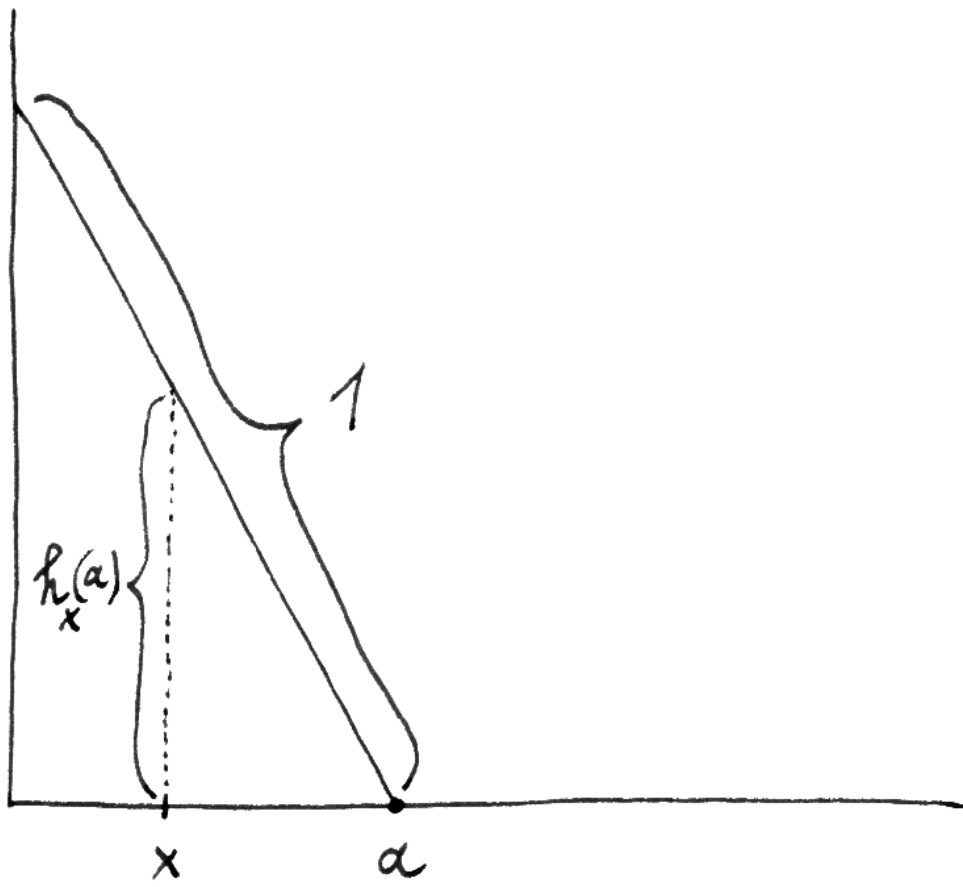


Illustration zu Übung 5.5.25.

Quotienten der Funktionen $\lim_{x \rightarrow p} (f(x)/g(x))$ in $\bar{\mathbb{R}}$ und diese beiden Grenzwerte stimmen überein, in Formeln

$$\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgendem

Lemma 5.6.2 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien $a < b$ in $\bar{\mathbb{R}}$ gegeben und seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, die differenzierbar sind auf dem offenen Intervall (a, b) . So gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)(g(a) - g(b)) = g'(\xi)(f(a) - f(b))$$

Vorschau 5.6.3. Um dieses Lemma anschaulich zu verstehen, mag man den Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachten, der durch $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ gegeben wird. Es sagt dann, daß der Vektor $\gamma(a) - \gamma(b)$ und der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ nicht für alle $t \in (a, b)$ voneinander linear unabhängig sein können. Das ist eh klar, wenn $\gamma(a) - \gamma(b)$ Null ist oder $\gamma'(t)$ irgendwo den Wert Null annimmt, und scheint mir andernfalls zumindest anschaulich offensichtlich.

5.6.4. Verschwindet g' nirgends auf (a, b) , so gilt $g(a) \neq g(b)$ nach dem Satz von Rolle 5.5.6 und wir können unsere Gleichung schreiben in der Form

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ist $g(x) = x$, so erhalten wir unseren Mittelwertsatz 5.5.7 als Spezialfall. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz wird in dieser Vorlesung ebenso wie die Regeln von de l'Hospital bei der Diskussion von Restgliedern in der Taylorentwicklung noch eine Rolle spielen.

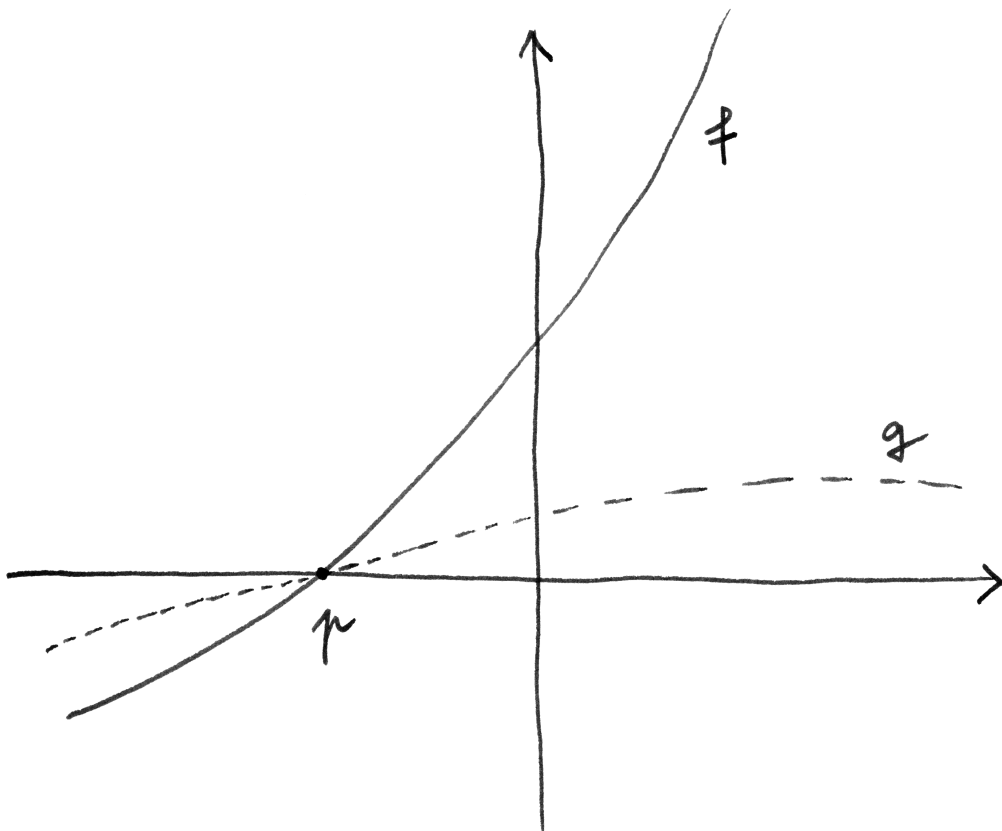
Beweis. Man wende den Satz von Rolle 5.5.6 an auf die Funktion

$$F(x) := f(x)(g(a) - g(b)) - g(x)(f(a) - f(b)) \quad \square$$

Jetzt zeigen wir die Regeln von de l'Hospital. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \notin I$ annehmen, indem wir sonst I an der Stelle p in zwei Teile zerschneiden und den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert bei p getrennt betrachten. Für jede Umgebung W des Grenzwerts

$$q := \lim_{x \rightarrow p} f'(x)/g'(x)$$

finden wir per definitionem eine Intervallumgebung V von p mit der Eigenschaft $\xi \in I \cap V \Rightarrow f'(\xi)/g'(\xi) \in W$. Für beliebige $a, b \in I \cap V$ mit $a \neq b$ gilt weiter



Veranschaulichung der Regel von de l'Hospital 5.6.1 im Fall $p \in \mathbb{R}$ unter der Annahme, daß beide Funktionen bei p nach Null streben. Es scheint mir anschaulich klar, daß der Grenzwert des Quotienten sich nicht ändert, wenn wir beide Funktionen durch ihre beste lineare Approximation bei p ersetzen, und das ist auch genau die anschauliche Bedeutung der Regel von de l'Hospital.

$g(a) \neq g(b)$, da nach Annahme die Ableitung von g keine Nullstelle auf $I \setminus p$ hat. Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 5.6.2 folgt dann

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} \in W \quad \text{für alle } a, b \in I \cap V \text{ mit } a \neq b.$$

Von nun an müssen wir die beiden Fälle im Satz getrennt weiterbehandeln. Als erstes behandeln wir den Fall $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$. Ist W ein kompaktes Intervall, so folgt $f(a)/g(a) \in W$ sofort, indem wir a festhalten, b gegen p streben lassen und uns an die Erhaltung von schwachen Ungleichungen im Grenzwert 3.5.37 erinnern. Die Behauptung im ersten Fall folgt dann, da für jeden Punkt $q \in \mathbb{R}$ jede Umgebung von q eine kompakte Intervallumgebung von q umfaßt. Jetzt behandeln wir noch den Fall $\lim_{x \rightarrow p} |g(x)| = \infty$. Dafür schreiben wir unseren Quotienten um zu

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f(b)/g(b) - f(a)/g(b)}{1 - g(a)/g(b)}$$

und folgern unmittelbar

$$\frac{f(b)}{g(b)} \in (1 - g(a)/g(b))W + f(a)/g(b) \quad \text{für alle } a, b \in I \cap V \text{ mit } a \neq b.$$

Ist nun $a \in I \cap V$ fest gewählt, so finden wir für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ eine Umgebung U_ε von p derart, daß gilt $b \in U_\varepsilon \cap I \Rightarrow |f(a)/g(b)| < \varepsilon$, $|g(a)/g(b)| < \varepsilon$ und insbesondere $a \neq b$. Damit sehen wir, daß wir für jede Umgebung W von q und jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ eine Umgebung U_ε von p finden können mit

$$b \in U_\varepsilon \cap I \Rightarrow \frac{f(b)}{g(b)} \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)W + (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Die Behauptung folgt im zweiten Fall, da es für jede Umgebung W' von q eine Umgebung W von q und $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt mit $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)W + (-\varepsilon, \varepsilon) \subset W'$. \square

Beispiel 5.6.5. Für $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)/x^\lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)/\lambda x^{\lambda-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1/\lambda x^\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.7 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

Satz 5.7.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Gegeben eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem mehrpunktigen reellen Intervall I und

ein Punkt $a \in I$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) \, dt \end{aligned}$$

die einzige differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

5.7.2. Im Fall $x < a$ ist dies Integral unter Verwendung unserer Konvention 5.2.10 als $\int_a^x f(t) \, dt = -\int_x^a f(t) \, dt$ zu interpretieren.

Beweis. Für $p \in I$ rechnen wir

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{x - p} \int_p^x f(t) \, dt$$

Da f stetig ist, finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß aus $|t - p| \leq \delta$ folgt $f(p) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(p) + \varepsilon$. Aus $0 < x - p \leq \delta$ folgen also durch Bilden des Integrals und Teilen durch $(x - p)$ die Ungleichungen

$$f(p) - \varepsilon \leq \frac{1}{x - p} \int_p^x f(t) \, dt \leq f(p) + \varepsilon$$

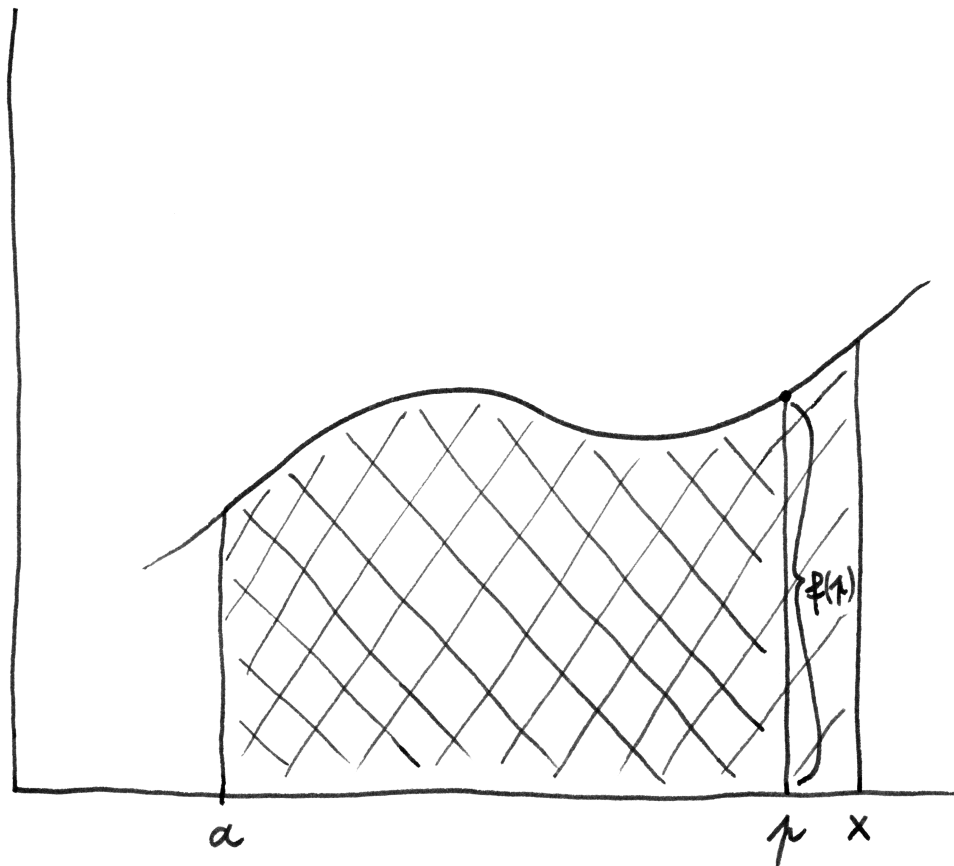
und aus $-\delta \leq x - p < 0$ folgen mit zweimaligem Umdrehen der Ungleichungen beim Integrieren und beim Teilen durch $(x - p)$ dieselben Ungleichungen. Damit zeigt das ε - δ -Kriterium für Grenzwerte 3.5.12, daß der Ausdruck in der Mitte für $x \rightarrow p$ gegen $f(p)$ konvergiert. Es folgt $F'(p) = f(p)$ für alle $p \in I$. Ist $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ auch differenzierbar mit $G' = f$, so verschwindet die Ableitung der Differenz $G - F$. Nach 5.5.8 ist diese Differenz also konstant. Haben wir zusätzlich $G(a) = 0$, so ist sie konstant Null und wir folgern $F = G$. \square

Korollar 5.7.3 (Integrieren mit Stammfunktionen). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Stammfunktion von f** , als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G' = f$, so gilt für alle $a, b \in I$ die Formel

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a)$$

Beweis. Wir betrachten $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ wie im Hauptsatz 5.7.1 und folgern aus der Eindeutigkeitsaussage von dort $F(x) = G(x) - G(a)$ für alle $x \in [a, b]$. \square

5.7.4. Ist G ein komplizierterer Ausdruck, so ist es bequem und üblich, die Differenz $G(b) - G(a)$ mit $G(x)|_a^b$ abzukürzen. Man spricht einen solchen Ausdruck



Veranschaulichung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung 5.7.1.

Die kreuzweise schraffierte Fläche stellt $F(p)$ dar, die irgendwie schraffierte $F(x)$, die einfach schraffierte $F(x) - F(p)$. Ich hoffe, man sieht, daß die Fläche unter der Kurve beim Verschieben der oberen Grenze um so stärker wächst, je größer dort der Wert unserer Funktion ist. Das ist qualitativ ausgedrückt die anschauliche Bedeutung des Hauptsatzes.

„ G , ausgewertet zwischen den Grenzen a und b “. Für a, b positiv ergibt sich zum Beispiel

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_a^b = \log b - \log a$$

Die Ableitung von $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log|x|$ ist im übrigen $x \mapsto 1/x$, als da heißt, für a, b negativ würden wir $\log|b| - \log|a|$ erhalten. Über den Nullpunkt hinweg dürfen wir die Funktion $1/x$ aber trotzdem nicht in dieser Weise integrieren. Unser Korollar erlaubt das auch nicht, es trifft vielmehr nur Aussagen über die Integration von auf einem mehrpunktigen Intervall definierten stetigen Funktionen.

Übungen

Übung 5.7.5. Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ zeige man, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^\alpha dx$ existiert in $\bar{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha < -1$. Des weiteren zeige man, daß $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha dx$ existiert in $\bar{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha > -1$. Anschaulich gesprochen ist also die Hyperbel $x \mapsto (1/x)$ gerade der Grenzfall, in dem sowohl die Fläche zwischen Kurve und x -Achse ab jedem x -Wert als auch symmetrisch die Fläche zwischen Kurve und y -Achse ab jedem y -Wert unendlich groß sind.

Ergänzende Übung 5.7.6. Der **Integral-Logarithmus** $\text{Li} : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wird erklärt durch die Vorschrift

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Man zeige $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log(x) \text{Li}(x)/x) = 1$.

Übung 5.7.7. Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Eigenschaften $|f(x)| \leq 1$ und $|f''(x)| \leq 1$ für alle x . Man zeige $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$ für alle x .

5.8 Integrationsregeln

Satz 5.8.1 (Integration durch Substitution). Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : g([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

Im Fall $g(b) < g(a)$ ist das Integral rechts dabei der Konvention 5.2.10 gemäß als das Negative des Integrals über das Intervall $[g(b), g(a)]$ zu verstehen.

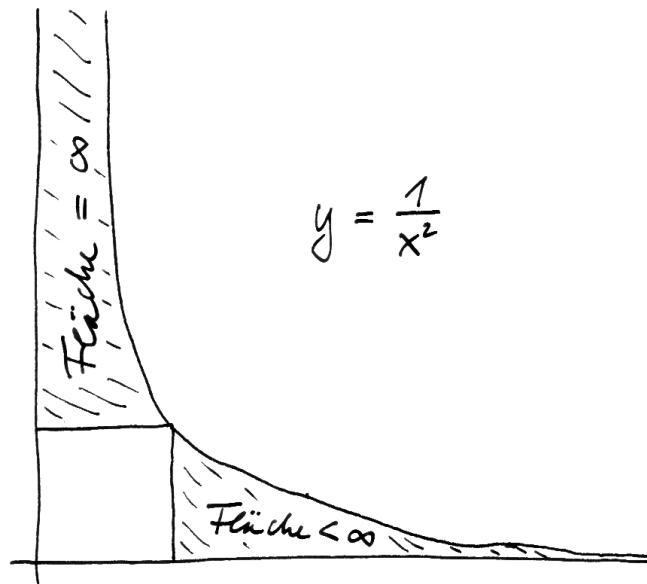
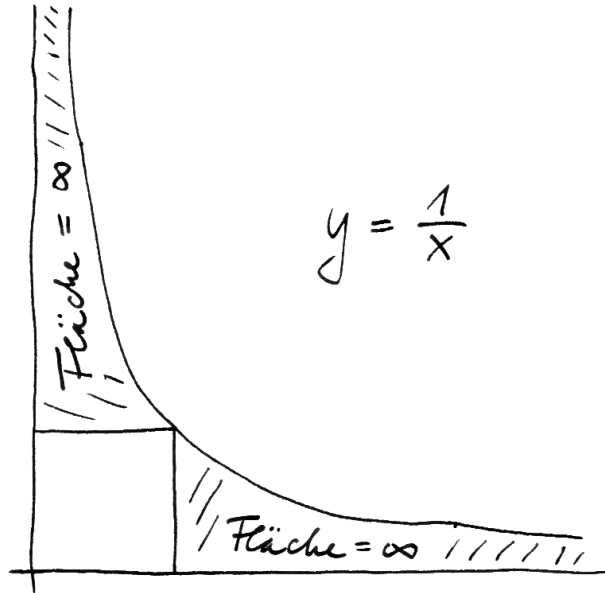


Illustration zu Übung 5.7.5.

5.8.2. Es gibt durchaus differenzierbare Abbildungen, deren Ableitung nicht stetig ist, vergleiche 5.4.16. Das Wort „Substitution“ bedeutet ebenso wie „Prostitution“ auf lateinisch „Ersetzen“.

Beweis. Ist g konstant, so verschwinden beide Seiten und die Formel gilt. Ist sonst F eine Stammfunktion von f , in Formeln $F' = f$, so ist $F \circ g$ nach der Kettenregel 5.4.6 eine Stammfunktion von $t \mapsto f(g(t))g'(t)$. Berechnen wir beide Integrale mithilfe dieser Stammfunktionen, so ergibt sich auf beiden Seiten der Wert $F(g(b)) - F(g(a))$. \square

5.8.3 (**Anschauung für die Substitutionsregel**). Wächst g streng monoton, so kann man einen anschaulicheren Beweis geben, indem man $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ äquidistant unterteilt und nach dem Mittelwertsatz $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$ findet mit $g(a_i) - g(a_{i-1}) = g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$. Damit gilt ja die Gleichheit von Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))(g(a_i) - g(a_{i-1}))$$

Mithilfe der Beschreibung 5.2.11 des Integrals durch Riemann-Summen zeigt man dann, daß diese Gleichheit im Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ gerade die Substitutionsregel liefert.

5.8.4. Als Gedächtnisstütze, die in [AN2] 8.4 auch echte Bedeutung erhält, kann man sich merken, daß beim Substituieren von y durch $g(x)$ nicht nur $f(y)$ durch $f(g(x))$ ersetzt werden muß, sondern auch dy durch $g'(x) dx$, wie es die Notation $g'(x) = \frac{dy}{dx}$ suggeriert.

Beispiel 5.8.5. Indem wir uns das Integral etwas zurechtlegen, erhalten wir durch die Substitution $g(x) = x^2 = y$, $g'(x) = 2x dx = dy$ leicht

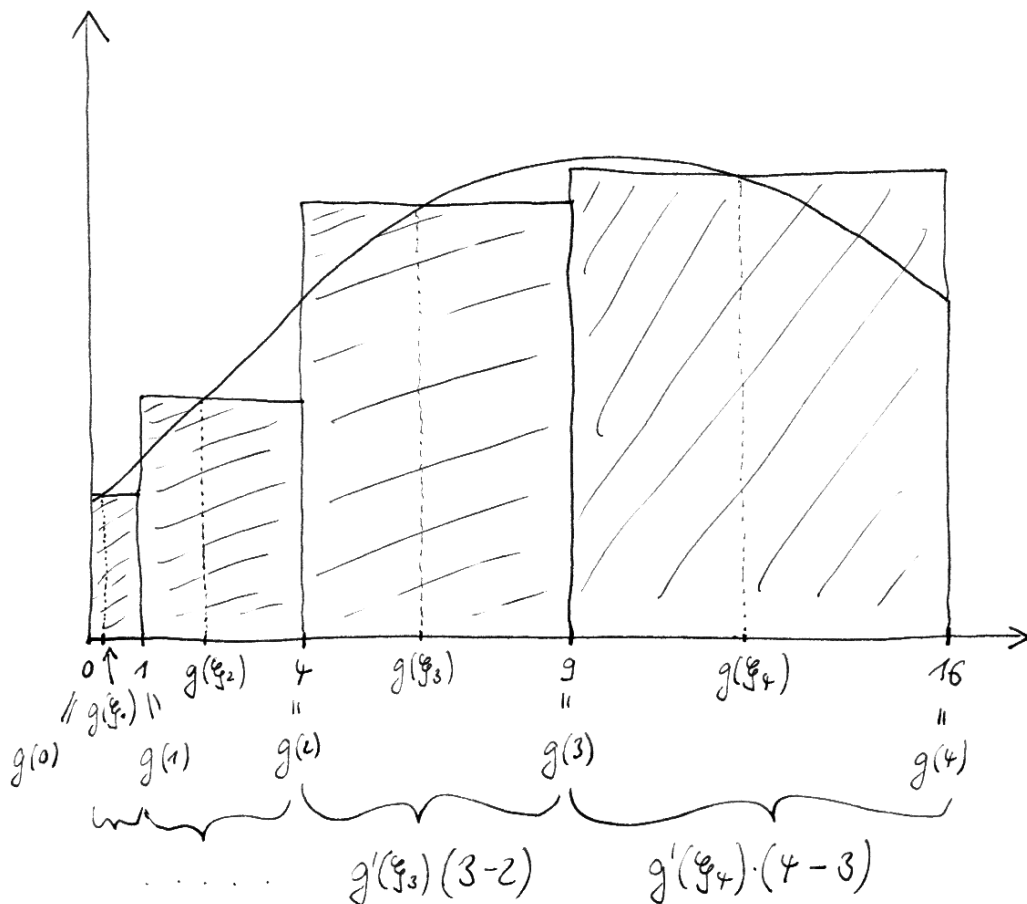
$$\int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+y} \Big|_{a^2}^{b^2} = \sqrt{1+x^2} \Big|_a^b$$

und als eine Stammfunktion des ursprünglichen Integranden ergibt sich die Funktion $\sqrt{1+x^2}$.

5.8.6. Beim Anwenden der Substitutionsregel wird man oft mit einer umkehrbaren Abbildung g arbeiten und die Regel in der Form

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))g'(x) dx$$

verwenden. Auch wenn g nicht umkehrbar ist, kann man in dieser Weise vorgehen und statt $g^{-1}(\alpha)$ und $g^{-1}(\beta)$ eben irgendwelche a, b wählen derart, daß g auf ganz



Anschauliche Bedeutung der Substitutionsregel nach 5.8.3 im Fall $g(x) = x^2$.
 Die schraffierte Fläche stellt in diesem Spezialfall für $r = 4$ und das Intervall
 $[a, b] = [0, 4]$ die Summe

$$\sum_{i=0}^{r-1} f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{r-1} f(g(\xi_i))(g(a_{i+1}) - g(a_i))$$

dar. Die ξ_i sind mit dem Mittelwertsatz gerade so gewählt, daß gilt
 $g(a_{i+1}) - g(a_i) = g'(\xi_i)(a_{i+1} - a_i)$. Ich finde, man sieht sehr gut, daß diese
 Summen gegen $\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_0^{16} f(y) dy$ konvergieren.

$[a, b]$ stetig differenzierbar ist mit $\alpha = g(a)$ und $\beta = g(b)$. Meist arbeiten wir sogar ohne explizite Erwähnung der Grenzen: Suchen wir nur eine Stammfunktion, so kommt es auf die untere Grenze eh nicht an und die obere Grenze wird mitgedacht und nach gelungener Integration wieder „zurücksubstituiert“, wie es unsere Formel fordert.

Beispiel 5.8.7. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $f(y) = y\sqrt{1-y}$ durch die Substitution $\sqrt{1-y} = x$, $y = 1 - x^2 = g(x)$, $dy = -2x dx$ zu

$$\begin{aligned} \int y\sqrt{1-y} dy &= \int (1-x^2)x(-2x) dx \\ &= \int (2x^4 - 2x^2) dx \\ &= \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \\ &= \frac{2}{5}(1-y)^2\sqrt{1-y} - \frac{2}{3}(1-y)\sqrt{1-y} \end{aligned}$$

Beispiel 5.8.8 (Fläche des Einheitskreises). Es gilt $\pi/2 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$. In der schmutzigen Anschauung ist also π die Fläche des Einheitskreises. Um das zu prüfen, substituieren wir $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ und erhalten

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx$$

Mithilfe der Formel $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$, die ihrerseits aus den Additionsformel folgt, ergibt sich unser Integral mühelos zu

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Satz 5.8.9 (Partielle Integration). Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

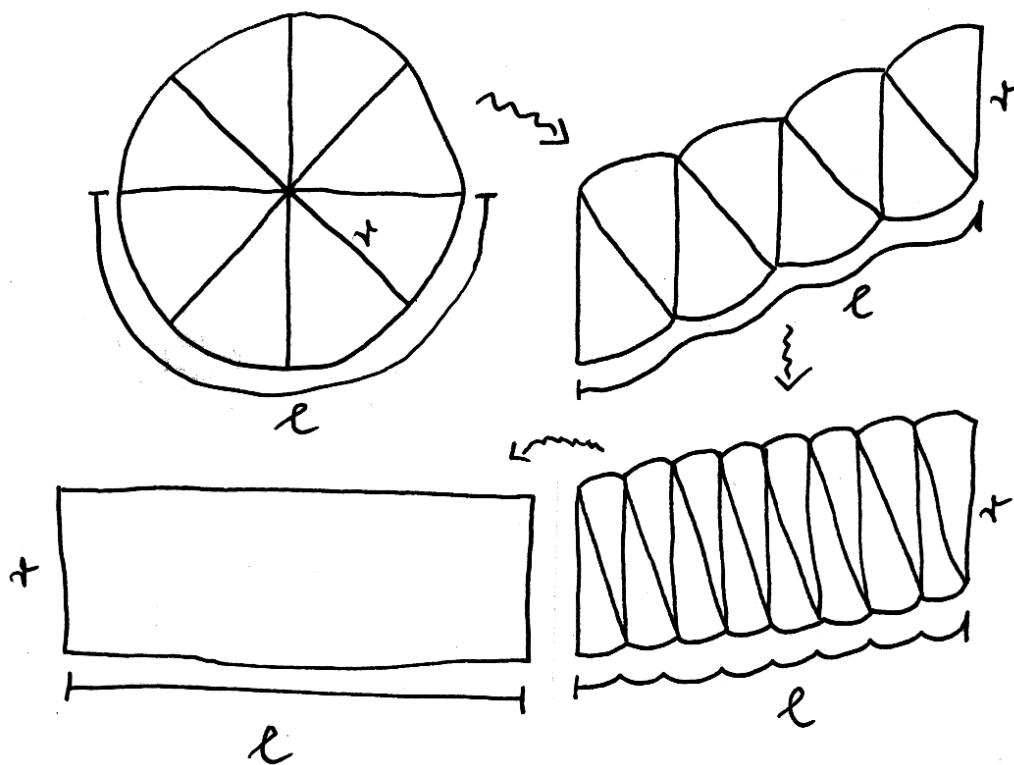
$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt $fg' = (fg)' - f'g$ auf $[a, b]$, folglich stimmen auch die Integrale dieser Funktionen überein. \square

Beispiele 5.8.10.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 e^x dx \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x \end{aligned}$$



Eine anschauliche Begründung dafür, daß die Fläche einer Kreisscheibe das Produkt aus Radius und halbem Umfang sein sollte. Der erste geschlängelte Pfeil deutet dabei ein Zerschneiden und Neu-Zusammenfügen an, die anderen einen Grenzübergang.

5.8.11 (**Alternativer Zugang zur Exponentialfunktion**). Ich erkläre nun noch einen alternativen Zugang zur Exponentialfunktion, der unsere Definition über eine a priori unmotivierte Reihe vermeidet. Suchen wir eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $g' = g$ und $g(0) = 1$, so haben wir nach der Substitutionsregel

$$x = \int_0^x dt = \int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \int_1^{g(x)} \frac{1}{u} du$$

Man definiert also notgedrungen eine Funktion $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $\log(y) = \int_1^y \frac{1}{u} du$ und die gesuchte Funktion g muß deren Umkehrfunktion sein.

Satz* 5.8.12. Die Kreiszahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$.

5.8.13. Das wurde bereits 1766 von Johann Heinrich Lambert gezeigt. Der Beweis der Transzendenz von π ist schwieriger, mir gefällt die Darstellung in [Lor96]. Der hier gegebene Beweis der Irrationalität wirkt auf mich wie Zauberei. Ich folge der Darstellung von Stewart [Ste89].

Beweis. Man betrachte für reelles $\alpha \neq 0$ und natürliches $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$I_n = I_n(\alpha) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos(\alpha x) dx$$

Partielles Integrieren liefert $\alpha^2 I_n(\alpha) = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$ für $n \geq 2$. Vollständige Induktion zeigt dann

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P_n(\alpha) \sin \alpha + Q_n(\alpha) \cos \alpha)$$

für $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ Polynome vom Grad $\leq 2n$. Wäre nun $\pi = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und setzen wir oben $\alpha = \pi$ ein, so ergäbe sich, daß

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n(\pi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine von Null verschiedene ganze Zahl sein muß. Das steht im Widerspruch dazu, daß dieser Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Dasselbe Argument zeigt: Gegeben $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ können nicht $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ beide rational sein. \square

Übungen

Übung 5.8.14. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x , und **ungerade**, wenn gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle x . Man zeige für jede ungerade stetige Funktion und alle reellen r die Formel $\int_{-r}^r f = 0$.

Übung 5.8.15. Man finde Stammfunktionen zu den Kehrwerten quadratischer Polynome, also zu Funktionen der Gestalt $x \mapsto (x^2 + ax + b)^{-1}$. Hinweis: Hat das fragliche quadratische Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda \neq \mu$, so kann man unsere Funktion in der Gestalt $\alpha/(x - \lambda) + \beta/(x - \mu)$ schreiben. Sonst bringe man sie in die Form $((x + a/2)^2 + d)^{-1}$ mit $d \geq 0$ und erinnere sich an $\arctan'(t) = 1/(1 + t^2)$.

Übung 5.8.16. Man finde eine Stammfunktion von $\sqrt{1 - t^2}$. Hinweis: Bei der Berechnung 5.8.8 der Fläche des Einheitskreises haben wir das schon fast erreicht.

Übung 5.8.17. Man finde eine Stammfunktion für den Arcustangens. Hinweis: Man wende auf das Produkt $1 \cdot \arctan$ partielle Integration an.

Ergänzende Übung 5.8.18. Man führe die partiellen Integrationen des Beweises von 5.8.12 aus und prüfe die Induktionsbasis, als da heißt die Fälle $n = 0, 1$.

Übung 5.8.19. Man zeige $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$.

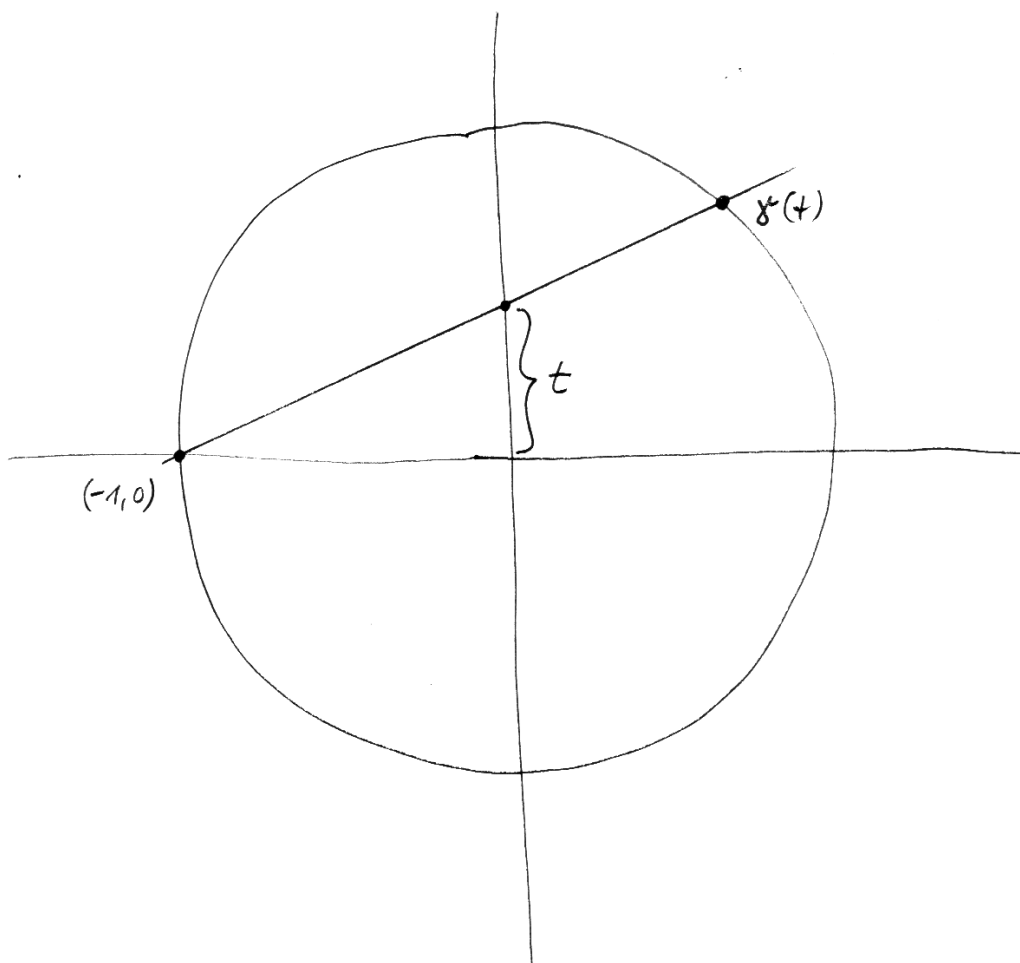
Übung 5.8.20. Sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis. Wir konstruieren eine Bijektion $\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus (-1, 0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt der Gerade durch $(-1, 0)$ und $(0, t)$ mit $S^1 \setminus (-1, 0)$ zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\gamma(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

Man prüfe $\|\gamma'(t)\| = 2/(1 + t^2)$ und interpretiere die vorstehende bemerkenswerte Formel aus 5.8.19. Der Punkt $(\cos \tau, \sin \tau)$ für $\tau \in (-\pi, \pi)$ wird hierbei übrigens parametrisiert durch $t = \tan(\tau/2)$, wie man durch Rechnung oder elementargeometrische Überlegungen prüft. Man beachte auch die Ähnlichkeit zur Parametrisierung der Hyperbel 5.9.6.

Ergänzung 5.8.21. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert im Übrigen auch eine Bijektion von \mathbb{Q} auf die Punkte von $S^1 \setminus (-1, 0)$ mit rationalen Koordinaten. Diese Bijektion ist äußerst hilfreich bei der Bestimmung aller **pythagoreischen Zahlentripel**, als da heißt, aller Tripel a, b, c von natürlichen Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert allgemeiner sogar für jeden Körper k einer von Zwei verschiedenen Charakteristik eine Bijektion von k auf das Komplement des Punktes $(-1, 0)$ in der Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ in der Ebene $k^2 = k \times k$. In der algebraischen Geometrie können Sie dann lernen, wie man das zu einer Bijektion von $\mathbb{P}^1 k$ mit der Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^2 k$ erweitert, die durch die homogenisierte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ definiert wird.

Ergänzende Übung 5.8.22. Wie könnte ein Autor, der den Zugang 5.8.11 zur Exponentialfunktion gewählt hat, die Funktionalgleichung 4.2.10 beweisen?



Die Abbildung γ aus 5.8.20

Ergänzende Übung 5.8.23. Man zeige durch Vergleich mit dem Integral der Funktion $x^{-\alpha}$, daß für jedes $\alpha > 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ konvergiert.

5.9 Hyperbolische trigonometrische Funktionen

Definition 5.9.1. Der **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** sind die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben werden durch die Formeln

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

5.9.2. Den Graphen des Cosinus hyperbolicus nennt man auch die **Kettenlinie**, weil er dieselbe Gestalt hat wie eine hängende Kette. Wir zeigen das in 7.1.16 im Anschluß an die Diskussion der Bogenlänge.

5.9.3. Offensichtlich gilt $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, und $\cosh(-x) = \cosh(x)$, die Ableitungen unserer Funktionen sind

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

es gelten $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ und die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b) \\ \cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \end{aligned}$$

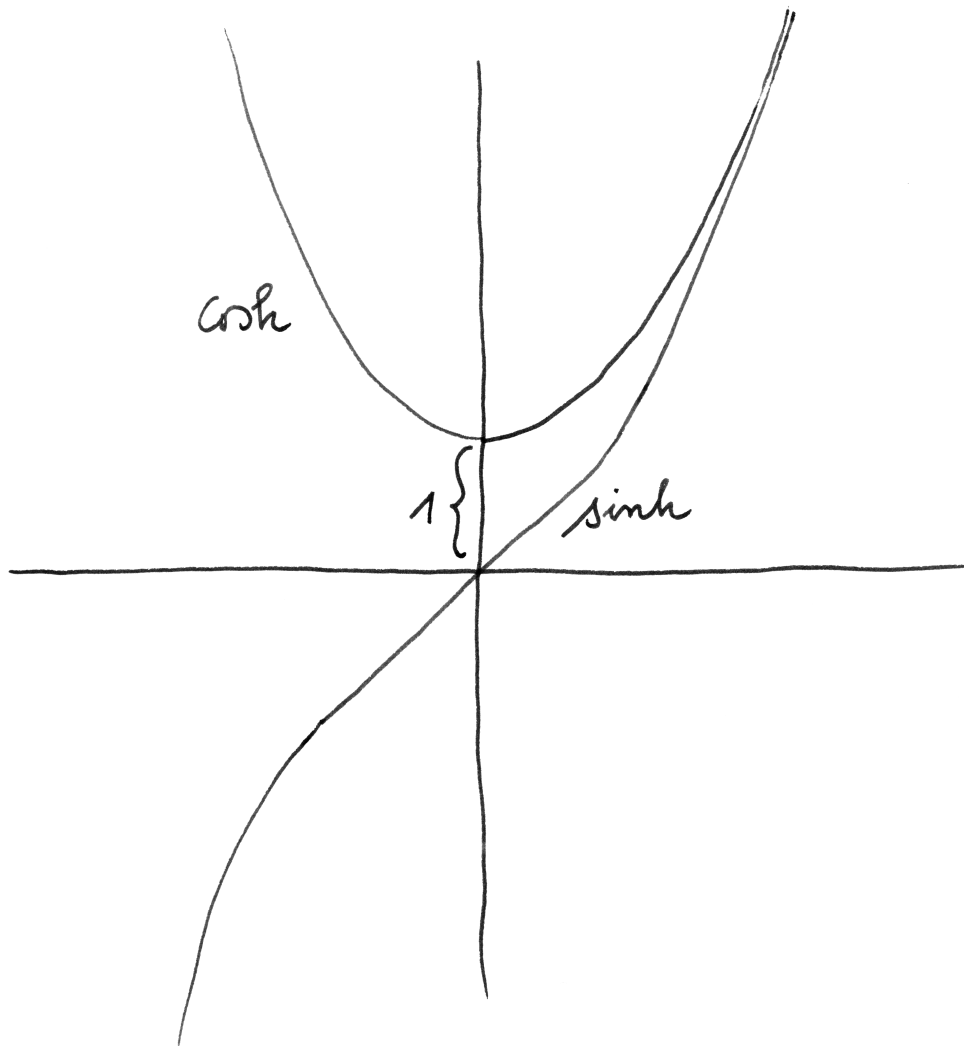
Die Funktion \cosh nimmt bei $x = 0$ ihr Minimum an und \sinh ist eine Bijektion $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die inverse Abbildung nennt man **Area Sinus hyperbolicus** und bezeichnet sie mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sie läßt sich auch elementar ausdrücken als $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ und für die Ableitung von arsinh erhalten wir

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

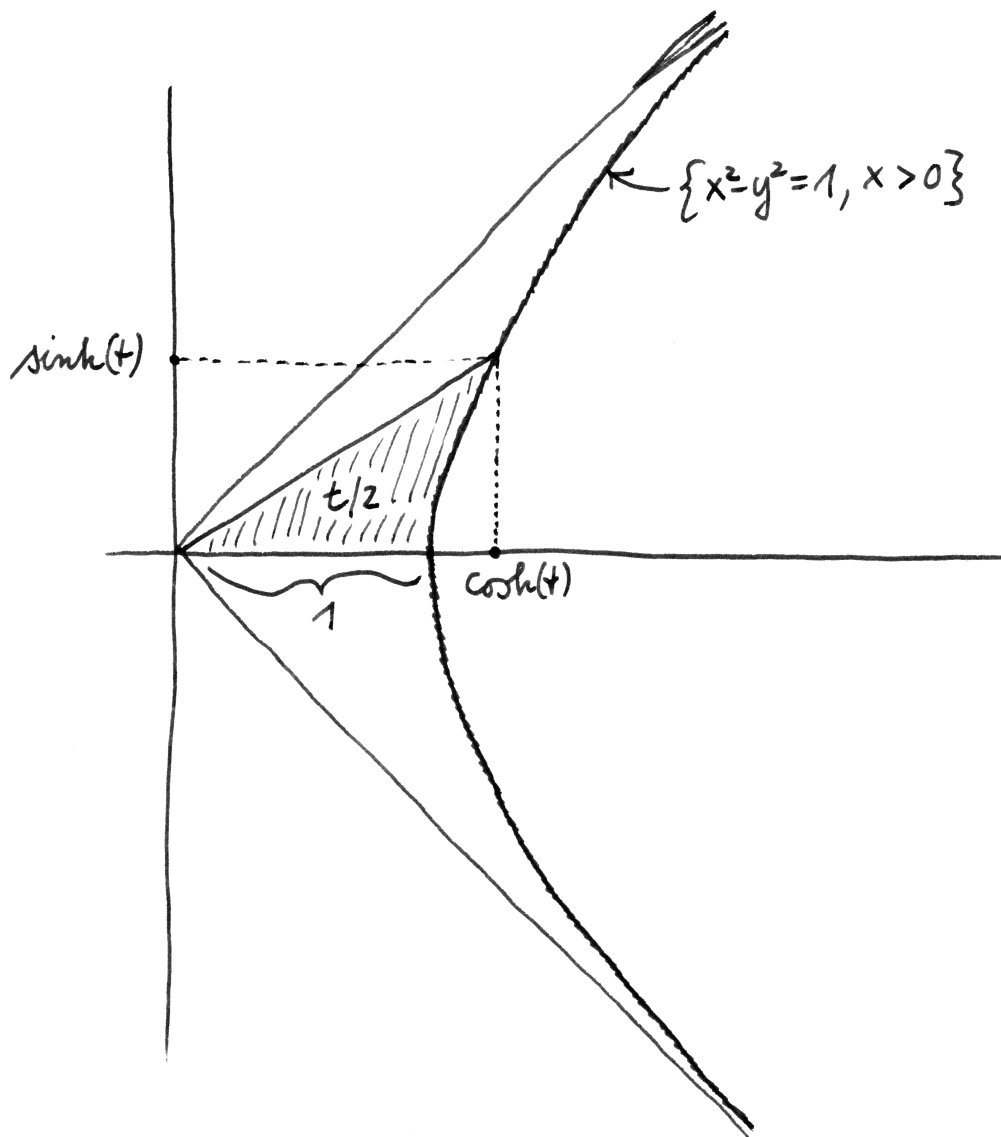
In der Tat gilt $\sinh'(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 - \sinh^2(x)}$, $\sinh'(\operatorname{arsinh} y) = \sqrt{1 + y^2}$. Ähnlich liefert \cosh eine Bijektion $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, die inverse Abbildung **Area Cosinus hyperbolicus** $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ kann geschrieben werden als $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ und ist differenzierbar auf $(1, \infty)$ mit der Ableitung

$$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Sehr viel seltener benutzt man den **Secans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\cosh(x)$, den **Cosecans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\sinh(x)$ und den **Tangens hyperbolicus** $\tanh : x \mapsto \sinh(x)/\cosh(x)$ sowie seine Umkehrung $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.



Die Graphen von Sinus und Cosinus hyperbolicus



Die geometrische Bedeutung von Sinus und Cosinus hyperbolicus

5.9.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Namen unserer Funktionen haben den folgenden geometrischen Hintergrund: Für $t \in \mathbb{R}$ durchläuft der Punkt mit Koordinaten $(\cosh t, \sinh t)$ den Hyperbelast

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(x - y) = 1, x > 0\}$$

Hierbei ist $|t/2|$ gerade die Fläche oder lateinisch „area“, die von x -Achse, Hyperbel und dem Geradensegment von $(0, 0)$ nach $(\cosh t, \sinh t)$ eingeschlossen wird. Es ist eine ausgezeichnete Übung, diese Behauptung nachzurechnen. Man sieht so die Verwandtschaft zu den üblichen trigonometrischen Funktionen, bei denen man nur die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu ersetzen hat durch den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Dehnen wir die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen in der offensichtlichen Weise zu Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aus, so können wir die formale Analogie mit den gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen präzisieren zu den Formeln $\cos z = \cosh(iz)$ und $\sin z = -i \sinh(iz)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

5.9.5. Die Lösungsmengen in der Ebene \mathbb{R}^2 von Gleichungen der Gestalt $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ heißen **ebene Quadriken** oder auch **Kegelschnitte**, da man sie erhalten kann als Schnitte räumlicher Ebenen mit dem **Kegel** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ bei geeigneter orthonormaler Identifikation unserer räumlichen Ebenen mit dem \mathbb{R}^2 . Jeder Kegelschnitt ist bis auf Drehung und Verschiebung eine **Ellipse** $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ mit $\alpha, \beta > 0$, eine **Hyperbel** $xy = \gamma$ mit $\gamma > 0$, eine **Parabel** $x^2 = \delta y$ mit $\delta > 0$, ein Geradenkreuz, eine Gerade, ein Punkt oder die leere Menge. Die Bezeichnung „Parabel“ kommt hier vom griechischen Wort für „Werfen“. In der Tat beschreibt ein Wurfgeschoss unter Vernachlässigung des Luftwiderstands stets eine „parabolische“ Bahn, vergleiche [AN2] 10.1.10.

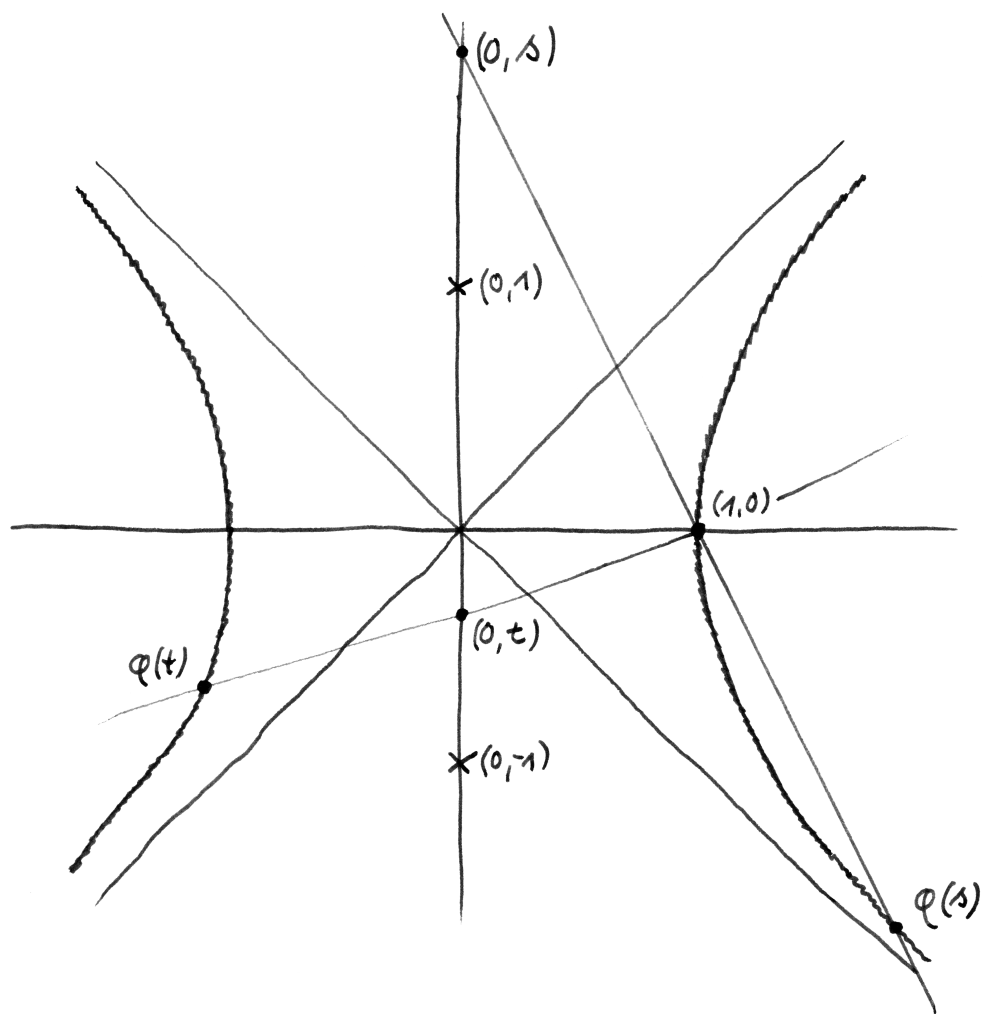
Übungen

Ergänzende Übung 5.9.6. Sei $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ die Hyperbel. Wir konstruieren eine Bijektion $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} H \setminus (1, 0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ den Schnittpunkt der Geraden durch $(0, t)$ und $(1, 0)$ mit $H \setminus (1, 0)$ zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\varphi(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \frac{2t}{t^2 - 1} \right)$$

Eine eng verwandte Parametrisierung des Einheitskreises wurde in 5.8.20 besprochen.

Übung 5.9.7. Man finde eine Stammfunktion von $\sqrt{1 + t^2}$. Hinweis: Bei der Berechnung 5.8.8 der Fläche des Einheitskreises haben wir fast eine Stammfunktion von $\sqrt{1 - t^2}$ bestimmt. Man gehe ähnlich vor mit der Substitution $t = \sinh x$.



Die geometrische Bedeutung der Abbildung φ aus 5.9.6

5.10 Integration rationaler Funktionen

5.10.1 (**Das Prinzip der Integration durch Partialbruchzerlegung**). Zur Integration rationaler Funktionen erinnern wir zunächst die Partialbruchzerlegung aus [LA1] 5.5.12. Danach bilden die Potenzen $(X^n)_{n \geq 0}$ mitsamt den Potenzen der Inversen der Linearfaktoren $((X - \mu)^{-n})_{n \geq 1, \mu \in \mathbb{C}}$ eine \mathbb{C} -Basis des Körpers der komplexen rationalen Funktionen $\mathbb{C}(X)$. Wenn wir vergessen, daß wir uns dabei in die komplexe Zahlenebene vorgewagt haben, so wird das Integrieren rationaler Funktionen sehr einfach. Es reicht damit nämlich, Stammfunktionen für die Funktionen $x \mapsto (x - \mu)^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ anzugeben, und derartige Stammfunktionen sind für $\mu \in \mathbb{R}$ bekanntlich $\frac{1}{m+1}(x - \mu)^{m+1}$ im Fall $m \neq -1$ sowie $\log|x - \mu|$ im Fall $m = -1$. Im folgenden soll ausgeführt werden, inwiefern diese Formeln für $\mu \in \mathbb{C}$ im wesentlichen genauso gelten, wenn wir sie nur richtig interpretieren.

5.10.2. Es gibt auch eine Partialbruchzerlegung für reelle rationale Funktionen und man kann auch mit ihrer Hilfe reelle rationale Funktionen integrieren. So kann man die komplexen Zahlen weitgehend vermeiden, erhält aber kompliziertere Formeln gewinnt weniger konzeptuelle Klarheit.

Beispiel 5.10.3. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $1/(x^2 - 1)$. Die Nullstellen des Nenners sind ± 1 und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners. Wir dürfen den Ansatz

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$$

machen und finden sofort $(a + b)x - a + b = 1$, also $a + b = 0$ und $b - a = 1$ und folglich $a = -1/2$ und $b = 1/2$. Eine Stammfunktion ist mithin

$$\frac{1}{2} \log|x - 1| - \frac{1}{2} \log|x + 1|$$

Man beachte, daß unsere Funktion zwei Definitionslücken hat und wir mit unserer Stammfunktion nur die Integrale über Intervalle $[a, b]$ bestimmen können, die keine der beiden Definitionslücken enthalten.

Beispiel 5.10.4. Wir bestimmen zu $(x^4 + 2x^2)/(x^2 + 2x + 1)$ eine Stammfunktion. Die Partialbruchzerlegung haben wir bereits in [LA1] 5.5.17 durchgeführt und erhielten

$$\frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 5 - \frac{8}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}$$

Als Stammfunktion finden wir damit sofort

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 8 \log|x + 1| - \frac{3}{(x + 1)}$$

Beispiel 5.10.5. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $1/(x^2 + 1)$. Wir wissen zwar bereits aus 5.4.14, daß der Arcustangens $\arctan(x)$ so eine Stammfunktion ist, aber diesmal geht es uns um das allgemeine Prinzip. Die Nullstellen des Nenners sind $\pm i$ und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners. Wir dürfen deshalb den Ansatz

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x+i} + \frac{b}{x-i}$$

machen und finden sofort $(a+b)x - ia + ib = 1$, also $a+b = 0$ und $a-b = i$ und folglich $a = i/2$ und $b = -i/2$. Wir dürfen folglich die Hoffnung haben, daß

$$\frac{i}{2} \log(x+i) - \frac{i}{2} \log(x-i)$$

eine Stammfunktion ist, wenn wir diesen Ausdruck richtig interpretieren. Dazu lege ich eine Pause ein und diskutiere den komplexen Logarithmus.

5.10.6. Aus unseren Erkenntnissen 4.5.22 über die komplexe Exponentialfunktion folgt, daß sie eine Bijektion

$$\exp : \mathbb{R} + (-\pi, \pi]i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$$

liefert. Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} + (-\pi, \pi]i$$

wird auf der positiven reellen Achse gegeben durch unseren üblichen Logarithmus $u \mapsto \log u$, auf der negativen reellen Achse durch $u \mapsto \log(-u) + i\pi/2$ und auf der oberen beziehungsweise unteren komplexen Halbebene durch die Vorschrift

$$\log(u + iv) = \log \sqrt{u^2 + v^2} \pm i \frac{\pi}{2} - i \arctan \frac{u}{v} \quad \text{für } \pm v > 0$$

Diese Funktion \log heißt der **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**. Man beachte, daß er nicht stetig ist längs der negativen reellen Achse, obwohl seine Einschränkung auf die negative reelle Achse durchaus stetig ist: Wir haben für $u < 0$ genauer

$$\lim_{v \searrow 0} \log(u + iv) = \log(u) = \lim_{v \nearrow 0} \log(u + iv) + 2\pi i$$

Beispiel 5.10.7. Wir arbeiten weiter an unserer Stammfunktion zu $1/(x^2 + 1)$. Interpretieren wir in unserer obigen Hoffnung \log als den Hauptzweig des komplexen Logarithmus, so können wir unsere Hoffnung $\frac{i}{2} \log(x+i) - \frac{i}{2} \log(x-i)$ auf eine Stammfunktion zu $1/(x^2 + 1)$ umschreiben zu

$$\frac{i}{2} \log \sqrt{x^2 + 1} - \frac{i}{2} \log \sqrt{x^2 + 1} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \arctan(-x)$$

und erhalten als Stammfunktion $\arctan(x) - \pi/2$ in Übereinstimmung mit unserer Berechnung der Ableitung des Arcustangens aus 5.4.14. Unsere Hoffnung war also berechtigt.

5.10.8. Um zu erklären, warum dieses Verfahren auch im allgemeinen funktioniert, diskutiere ich im folgenden einige Grundlagen der komplexen Ableitung.

Definition 5.10.9. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist, wenn sie also anschaulich gesprochen mit jedem Punkt ein ganzes Rechteck um diesen Punkt umfaßt. Wir schreiben $U \Subset \mathbb{C}$ als Abkürzung für die Aussage, daß U eine offene Teilmenge von \mathbb{C} sein soll.

Definition 5.10.10. Eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt **komplex differenzierbar bei** $p \in U$, wenn es $b \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{U \ni z \rightarrow p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage auch in dieser Situation ab durch $f'(p) = b$. Unsere Funktion heißt **komplex differenzierbar** oder gleichbedeutend **holomorph**, wenn sie bei jeder Stelle $p \in U$ komplex differenzierbar ist.

5.10.11 (**Regeln für die komplexe Ableitung**). Genau wie für die reelle Differenzierbarkeit zeigt man auch für komplexe Differenzierbarkeit die Summenregel, Produktregel und Kettenregel. Genau wie im Reellen zeigt man weiter, daß die Ableitung jeder konstanten Funktion die Nullfunktion ist und daß die Ableitung der Funktion $f(z) = 1/z$ gegeben wird durch $f'(z) = -1/z^2$. Genau wie im Reellen folgt, daß $(z - \mu)^n$ die Ableitung $n(z - \mu)^{n-1}$ hat für alle $n \in \mathbb{Z}$. Genau wie im Reellen zeigt man auch, daß die komplexe Exponentialfunktion ihre eigene komplexe Ableitung ist, in Formeln $\exp' = \exp$. Genau wie im Reellen zeigt man schließlich, daß wenn $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und injektiv ist mit offenem Bild $V := f(U) \Subset \mathbb{C}$ und nirgends verschwindender Ableitung und wenn zusätzlich die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig ist, daß dann auch die Umkehrfunktion g komplex differenzierbar ist mit der Ableitung

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$$

Daraus folgt, daß unser geeignet eingeschränkter Hauptzweig des Logarithmus $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

Nach der Kettenregel hat somit $\log(z - \mu)$ auf $\mathbb{C} \setminus (\mu + \mathbb{R}_{\leq 0})$ die komplexe Ableitung $(z - \mu)^{-1}$.

Vorschau 5.10.12. Die Theorie holomorpher Funktionen heißt die „Funktionentheorie“ und ist der Gegenstand einer eigenen Vorlesung. Man zeigt dort zum Beispiel, daß jede injektive holomorphe Funktion bereits offenes Bild und eine holomorphe Umkehrfunktion hat.

5.10.13. Eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ halboffen heißt **differenzierbar** oder genauer **reell-komplex differenzierbar bei $p \in D$** , wenn es $b \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage auch in dieser Situation ab durch $f'(p) = b$. Nimmt hier f nur reelle Werte an, ist das unsere ganz gewöhnliche Ableitung. Nach unseren Regeln für komponentenweise Grenzwerte 3.5.33 ist f in dieser Situation allgemeiner genau dann reell-komplex differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reell differenzierbar sind, und dann gilt

$$f'(p) = (\operatorname{Re} f)'(p) + i(\operatorname{Im} f)'(p)$$

Schränken wir andererseits eine komplex differenzierbare Funktion $h : \mathbb{C} \ni U \rightarrow \mathbb{C}$ ein auf die reelle Achse zu $\underline{h} : \mathbb{R} \ni D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D := \mathbb{R} \cap U$, so gilt für alle $p \in D$ offensichtlich die Beziehung

$$h'(p) = \underline{h}'(p)$$

zwischen der komplexen Ableitung und der reell-komplexen Ableitung der Einschränkung auf die reelle Achse. Eine Funktion $F : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$ im Sinne der reell-komplexen Ableitung nennen wir wieder eine **Stammfunktion von f** oder ausführlicher eine **Stammfunktion im Sinne der reell-komplexen Ableitung**. Dann ist $\operatorname{Re}(F)$ eine Stammfunktion von $\operatorname{Re} f$ im ursprünglichen Sinne.

5.10.14 (**Stammfunktion durch komplexe Partialbruchzerlegung**). Wir erinnern, daß die Potenzen $(X^n)_{n \geq 0}$ mitsamt den Potenzen der Inversen der Linearfaktoren $((X - \mu)^{-n})_{n \geq 1, \mu \in \mathbb{C}}$ eine \mathbb{C} -Basis des Körpers der komplexen rationalen Funktionen $\mathbb{C}(X)$ bilden. Um eine Stammfunktion im Sinne der reell-komplexen Ableitung einer komplexen rationalen Funktion $P(x)/Q(x)$ anzugeben, reicht es aus, ihre Partialbruchzerlegung zu bestimmen und Stammfunktionen aller $(x^n)_{n \geq 0}$ und aller $((x - \mu)^{-n})_{n \geq 1, \mu \in \mathbb{C}}$ anzugeben. Nach unseren Vorüberlegungen sind solche Stammfunktionen $x^{n+1}/(n+1)$ beziehungsweise $(x - \mu)^{-n+1}/(-n+1)$ falls $n > 1$ beziehungsweise $\log(x - \mu)$ falls $n = 1$, jeweils mit \log unserem Hauptzweig des Logarithmus. Damit ist unsere Integrationsaufgabe zurückgeführt auf die Bestimmung der Partialbruchzerlegung. Dieses Problem hinwiederum läßt sich algorithmisch lösen, wenn man die Nullstellen des Nennerpolynoms kennt. Für die Bestimmung dieser Nullstellen jedoch gibt es nur algebraische Verfahren, wenn unser Polynom höchstens den Grad vier hat.

5.10.15 (Die Problematik komplexer Potenzen). Setzt man für $a \in \mathbb{C}^\times$ und $b \in \mathbb{C}$ ähnlich wie im Reellen $a^b := \exp(b \log a)$ mit \log dem eben definierten Hauptzweig des komplexen Logarithmus, so ergibt sich $i^i = \exp(-\pi/2)$. Insbesondere ist in diesem Sinne also i^i reell. Allerdings ist dann $a \mapsto a^b$ für $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ unstetig längs der negativen reellen Achse und wir haben im allgemeinen $a^{bc} \neq (a^b)^c$.

5.10.16 (Integrale rationaler Ausdrücke $R(e^t), R(\sqrt[n]{t})$). Gegeben eine rationale Funktion $R = P/Q$ betrachten wir die Funktion $D \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto R(e^t)$ mit dem Definitionsbereich $D = \{t \in \mathbb{R} \mid Q(e^t) \neq 0\}$. Das Integral eines solchen rationalen Ausdrucks in e^t kann man auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen durch die Substitution $x = e^t, dx = e^t dt = x dt$. Zum Beispiel berechnen wir

$$\int \frac{dt}{\cosh t} = \int \frac{2 dt}{e^t + \frac{1}{e^t}} = \int \frac{2 dx}{x^2 + 1} = 2 \arctan x = 2 \arctan(e^t)$$

Das Integral eines rationalen Ausdrucks in $\sqrt[n]{t}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ kann man ähnlich durch die Substitution $\sqrt[n]{t} = x, dt = nx^{n-1} dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion in x zurückführen.

5.10.17 (Integrale rationaler Ausdrücke $R(\sin, \cos)$). Das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar (\sin, \cos) wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau) + \cos(\tau)}{\cos(\tau) + \cos^2(\tau)}$$

kann man auffassen als Kurvenintegral im Sinne von 7.1.23 einer rationalen Funktion in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel das Integral der Funktion

$$R(x, y) = \frac{y^3 + x}{x + x^2}$$

über ein Stück des Einheitskreises. Mit der Umparametrisierung 5.8.20, also mithilfe der Substitution $t = \tan(\tau/2)$ und folglich $\sin(\tau) = 2t/(1+t^2), \cos(\tau) = (1-t^2)/(1+t^2), d\tau = (2/(1+t^2)) dt$ läßt es sich dann umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen.

5.10.18 (Integrale rationaler Ausdrücke $R(\sqrt{1-x^2}, x)$). Integrale über rationale Ausdrücke im Funktionenpaar $(\sqrt{1-x^2}, x)$ kann man in ähnlicher Weise als Kurvenintegral auffassen und lösen, im Gegensatz zu eben hat nur $x \mapsto (\sqrt{1-x^2}, x)$ nicht konstante absolute Geschwindigkeit 1, sondern vielmehr die absolute Geschwindigkeit $1/\sqrt{1-x^2}$. Formal mag man auch $x = \sin t, dx = \cos t dt$ substituieren und sich so auf den bereits behandelten Fall eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar (\sin, \cos) zurückziehen.

5.10.19 (**Integrale rationaler Ausdrücke** $R(\sqrt{x^2 \pm 1}, x)$). Integrale von rationalen Ausdrücken in den Funktionenpaaren $(\sqrt{x^2 + 1}, x)$ oder $(\sqrt{x^2 - 1}, x)$ kann man auf die bereits in 5.10.16 behandelten Integrale rationaler Funktionen in e^t zurückführen durch die Substitution $x = \sinh t$, $dx = \cosh t dt$ beziehungsweise $x = \cosh t$, $dx = \sinh t dt$.

Ergänzung 5.10.20. Ein geometrischer Zugang zu all diesen Integralen wird in [AN2] 8.4.20 diskutiert.

Übungen

Übung 5.10.21. Man zeige für die reell-komplexe Ableitung differenzierbarer komplexwertiger Funktionen $f, g : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ einer reellen Veränderlichen auf einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ die Summenregel $(f + g)' = f' + g'$, die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ und die Regel für die Ableitung des Kehrwerts $(1/f)' = -f'/f^2$.

Ergänzende Übung 5.10.22. Man finde eine Stammfunktion zu $1/(1 + x^4)$.

Übung 5.10.23. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ hat die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{\lambda z}$ die komplexe Ableitung $z \mapsto \lambda e^{\lambda z}$.

6 Potenzreihen und höhere Ableitungen

6.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

Satz 6.1.1. Sei $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert für eine reelle Zahl z die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ absolut für alle reellen Zahlen x mit $|x| < |z|$.

Vorschau 6.1.2. Dieser Satz gilt ganz genauso und mit demselben Beweis, wenn wir darin überall „reell“ durch „komplex“ ersetzen. Wir konzentrieren uns hier auf den Fall reeller Potenzreihen.

Beweis. Die Glieder einer konvergenten Reihe sind beschränkt, unter unseren Annahmen gibt es also eine endliche Schranke B mit $|a_\nu z^\nu| \leq B$ für alle ν . Aus $|x| < |z|$ folgt mithilfe der Konvergenz der geometrischen Reihe 4.1.5 dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x^\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu z^\nu| |x/z|^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} B |x/z|^\nu < \infty \quad \square$$

6.1.3. Ein Ausdruck der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ heißt eine **Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ihrer Koeffizienten anzugeben. Der **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ ist per definitionem das Supremum

$$r := \sup\{ |z| \mid \sum a_\nu z^\nu \text{ konvergiert} \}$$

Die Bezeichnung als „Radius“ kommt vom Kontext komplexer Potenzreihen her. Nach 6.1.1 definiert jede Potenzreihe mit Konvergenzradius r mittels der Abbildungsvorschrift $x \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eine reellwertige Funktion auf dem Intervall $(-r, r)$ sowie eine komplexwertige Funktion auf der Kreisscheibe $|z| < r$.

Satz 6.1.4 (Stetigkeit und gliedweises Ableiten von Potenzreihen). Die durch eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ gegebene Funktion $s : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, ja sogar differenzierbar, und ihre Ableitung wird an jeder Stelle $x \in (-r, r)$ gegeben durch die Potenzreihe

$$s'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$$

Beispiel 6.1.5. Dieser Satz liefert einen zweiten Beweis für die bereits in 5.4.9 bewiesene Tatsache, daß die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist.

Vorschau 6.1.6. Obiger Satz gilt auch für komplexe Potenzreihen und die komplexe Ableitung. Er braucht dann aber einen anderen Beweis, den Sie in der Funktionentheorie kennenlernen können.

6.1.7. Der Beweis dieses Satzes wird den größten Teil dieses Abschnitts einnehmen. Wir zeigen in 6.1.13, daß jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion stetig ist, und zeigen die weitergehenden Aussagen in 6.1.16. Zunächst jedoch müssen wir einige technische Hilfsmittel bereitstellen.

Definition 6.1.8. Seien D eine Menge, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von auf D definierten Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

1. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert punktweise** gegen die Funktion f , wenn für alle $x \in D$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$;
2. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion f und schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, wenn es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

6.1.9. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt sicher punktweise Konvergenz. Das Umgekehrte gilt nicht: Die Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 1$.

Satz 6.1.10 (Stetigkeit bleibt erhalten unter gleichmäßiger Konvergenz). *Konvergiert eine Folge von stetigen reellwertigen Funktionen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, so ist auch diese Grenzfunktion stetig.*

Beweis. Sei $D \subset \mathbb{R}$ der gemeinsame Definitionsbereich und seien $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen unserer gleichmäßig konvergenten Folge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ihre Grenzfunktion. Es gilt, die Stetigkeit von f in jedem Punkt $p \in D$ zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sicher finden wir ein n derart, daß für alle $x \in D$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

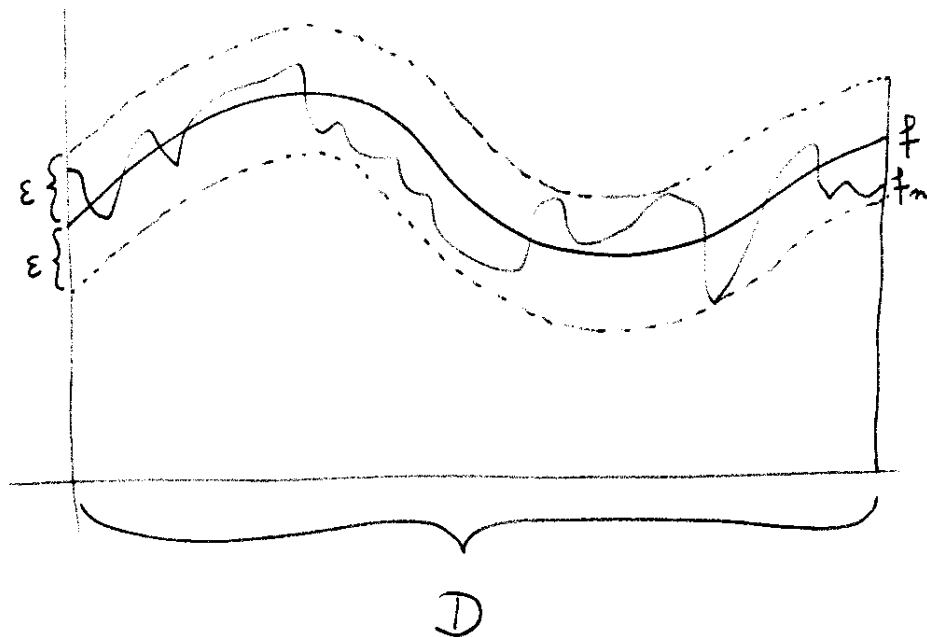
Da f_n stetig ist in p , finden wir weiter $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt

$$|f_n(x) - f_n(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

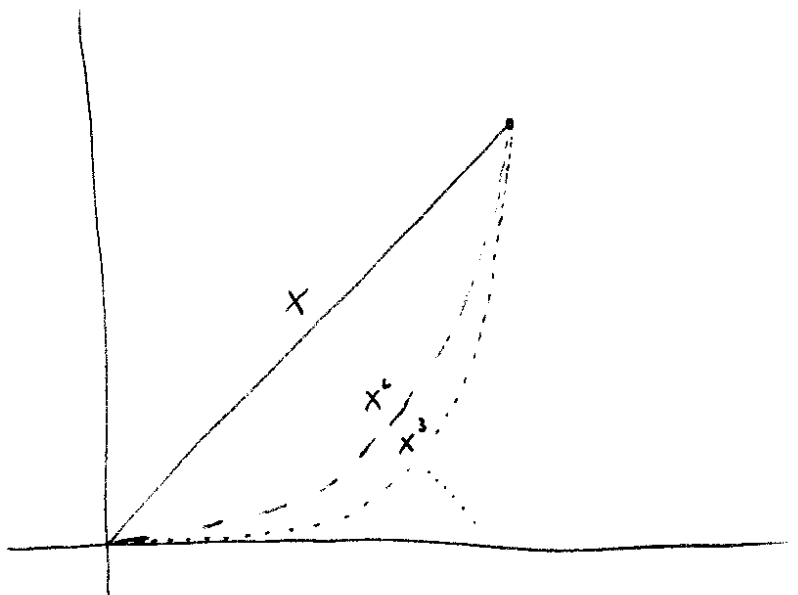
Es folgt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ unmittelbar

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| &\leq |f(x) - f_n(x)| \\ &\quad + |f_n(x) - f_n(p)| \\ &\quad + |f_n(p) - f(p)| < \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 6.1.11 (Gleichmäßige Konvergenz bei Potenzreihen). *Ist $\sum a_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r , so konvergiert die Folge ihrer Partialsummen $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu$ für alle $\rho \in [0, r)$ gleichmäßig auf dem Kompaktum $D = [-\rho, \rho]$.*



Bei gleichmäßiger Konvergenz müssen für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle f_n auf dem ganzen Definitionsbereich D im „ ε -Schlauch um f “ bleiben.



Die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergente Funktionenfolge der Funktionen $x \mapsto x^n$ aus 6.1.9

6.1.12. Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r konvergiert im allgemeinen keineswegs gleichmäßig auf dem ganzen Intervall $(-r, r)$. Ein Gegenbeispiel wäre etwa die Exponentialfunktion, ein anderes die geometrische Reihe.

Beweis. Für alle $x \in [-\rho, \rho]$ gilt $|a_\nu x^\nu| \leq |a_\nu \rho^\nu|$ und folglich

$$|s_n(x) - s(x)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$$

Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu| < \varepsilon$$

Für $n \geq N$ und beliebiges $x \in [-\rho, \rho]$ gilt dann $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$. □

Korollar 6.1.13 (Stetigkeit von Potenzreihen). *Die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ auf $(-r, r)$ definierte Funktion ist stetig.*

Beweis. Nach Proposition 6.1.11 und Satz 6.1.10 ist unsere Funktion für alle $\rho \in [0, r)$ stetig auf $[-\rho, \rho]$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, muß sie damit stetig sein auf ganz $(-r, r)$. □

Satz 6.1.14 (Vertauschen von Integral und Grenzübergang). *Ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt*

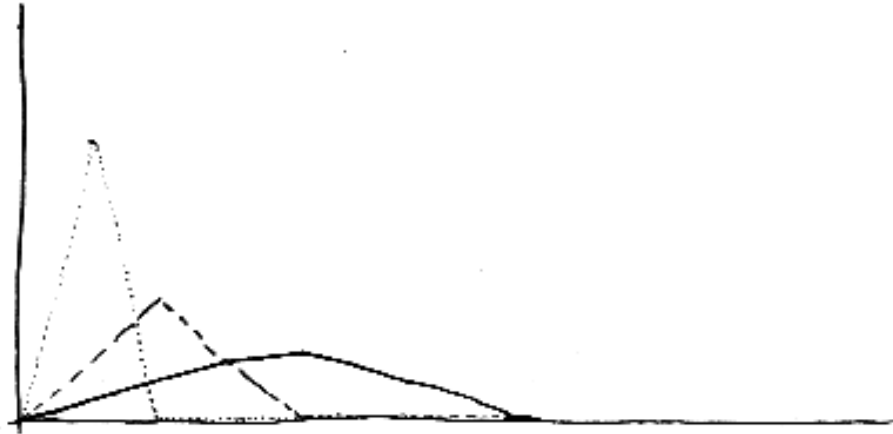
$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

Vorschau 6.1.15. Sehr viel stärkere Sätze in dieser Richtung werden wir im Rahmen der Integrationstheorie von Lebesgue als Satz über monotone Konvergenz [AN3] 1.5.12 und Satz über dominierte Konvergenz [AN3] 1.6.10 kennenlernen.

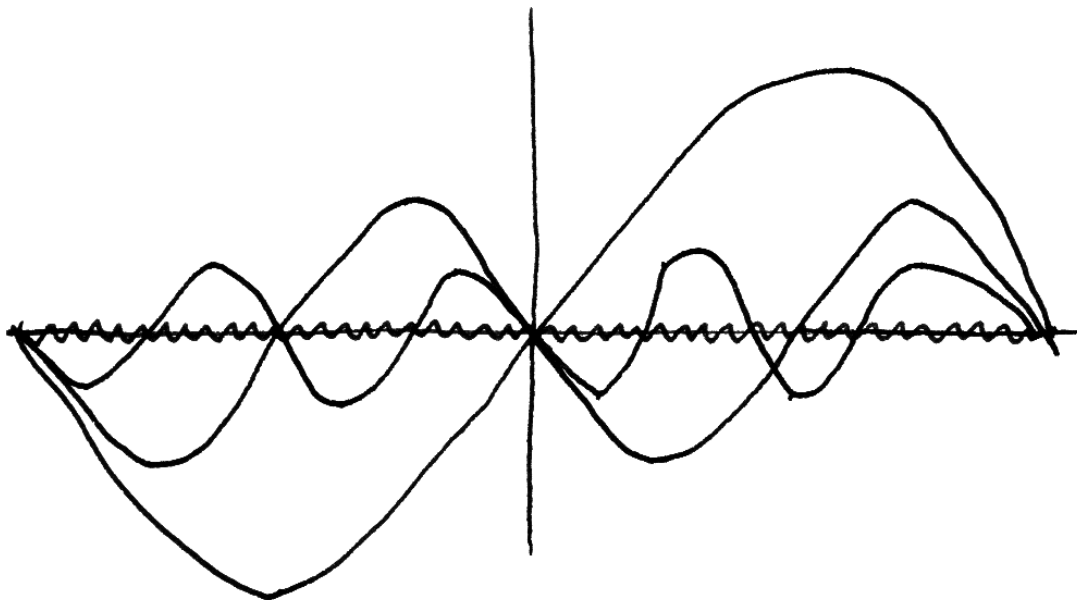
Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a, b]$. Es folgt

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq (b - a)\varepsilon$$

für alle $n \geq N$. □



Einige Glieder einer Funktionenfolge, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch nicht gegen das Integral der Nullfunktion konvergieren. Später mögen Sie lernen, daß unsere Funktionenfolge im Raum der „verallgemeinerten Funktionen“ gegen die „Dirac’sche δ -Funktion bei Null“ konvergiert.



Einige Glieder einer Funktionenfolge vom Typ $f_n = \frac{1}{n} \sin(nx)$, die gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Ableitungen jedoch nicht gleichmäßig gegen die Ableitung der Nullfunktion konvergieren.

Satz 6.1.16 (Integration und Ableiten von Potenzreihen). 1. Ist eine Funktion $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$, so konvergiert auch die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} a_{\nu} x^{\nu+1}$$

auf $(-r, r)$, und zwar gegen eine Stammfunktion von f ;

2. Ist eine Funktion $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} x^{\nu}$, so ist g differenzierbar und die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$$

konvergiert auf $(-r, r)$ gegen die Ableitung g' unserer Funktion g .

Beweis. 1. Man wende den vorhergehenden Satz 6.1.14 auf die Folge $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu}$ der Partialsummen an.

2. Wir zeigen zunächst, daß die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$ auch auf $(-r, r)$ konvergiert. Nach dem Quotientenkriterium 4.1.17 konvergiert schon mal die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^{\nu-1}$ für $|z| < 1$. Für $|x| < r$ wählen wir nun ein ρ mit $|x| < \rho < r$ und dazu eine Schranke B mit $|b_{\nu} \rho^{\nu-1}| \leq B$ für alle ν . Dann können wir abschätzen

$$|\nu b_{\nu} x^{\nu-1}| = |\nu b_{\nu} \rho^{\nu-1} (x/\rho)^{\nu-1}| \leq \nu B z^{\nu-1}$$

für $z = |x/\rho| < 1$. Nach dem Majorantenkriterium 4.1.16 konvergiert also die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$. Dann wissen wir aber nach Teil 1, daß für die Funktion $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} x^{\nu-1}$ unser $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} x^{\nu}$ eine Stammfunktion ist. \square

Definition 6.1.17. Die n -te Ableitung einer Funktion f bezeichnen wir, falls sie existiert, mit $f^{(n)}$. Es ist also $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ und allgemein $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

6.1.18 (Koeffizienten konvergenter Potenzreihen und höhere Ableitungen). Ist eine Funktion $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch die für $x \in (-r, r)$ konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$, so folgt mit gliedweisem Ableiten nach 6.1.16 sofort

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

Wenn also in anderen Worten eine Funktion f in einer Umgebung des Nullpunkts durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, so muß unsere Funktion dort beliebig oft differenzierbar sein und die fragliche Potenzreihe ist notwendig

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}$$

Diese Potenzreihe hinwiederum kann man ganz allgemein für jede in einer Umgebung des Nullpunkts beliebig oft differenzierbare Funktion betrachten. Sie heißt dann die **Taylorreihe** besagter Funktion oder genauer ihre **Taylorreihe am Nullpunkt**, muß aber keineswegs positiven Konvergenzradius haben und muß, selbst wenn sie positiven Konvergenzradius haben sollte, keineswegs gegen besagte Funktion konvergieren. Zum Beispiel hat nach 5.4.15 die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0; \end{cases}$$

im Nullpunkt die Ableitungen $f^{(\nu)}(0) = 0 \forall \nu \geq 0$, aber dennoch gilt $f(x) > 0$ für $x > 0$. Inwiefern die Taylorreihe dennoch unsere Funktion recht gut approximiert, diskutieren wir in 6.2.

Beispiel 6.1.19. Die Darstellung

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

ergibt sich, indem wir die geometrische Reihe $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots$ gliedweise integrieren.

Beispiel 6.1.20. Mit unserer Formel $\arctan'(t) = 1/(1+t^2)$ für die Ableitung des Arcustangens aus 5.4.14 erhalten wir durch gliedweises Integrieren der geometrischen Reihe 4.1.5 für den Arcustangens für $|t| < 1$ die Reihenentwicklung

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots$$

und mit dem Abel'schen Grenzwertsatz 6.4.2 ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Es scheint, daß diese Formel bereits in dem 1530 erschienenen Analysis-Buch „Ganita Yuktibhasa“ des Autors Jyesthadeva zu finden ist, eines Mathematikers aus Kerala in Indien, und daß sie auf den indischen Mathematiker Madhava zurückgeht.

Beispiel 6.1.21. Um die fünfte Ableitung bei $x = 0$ von $(e^{x^2} \sinh x)$ bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ e^{x^2} \sinh x &= x + x^3 \left(\frac{1}{3!} + 1 \right) + x^5 \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Hier haben wir einmal unsere Erkenntnisse über das Produkt absolut konvergenter Reihen verwendet. Die gesuchte fünfte Ableitung bei $x = 0$ ergibt sich mit 6.1.18 zu

$$5! \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2} \right) = 1 + 20 + 60 = 81$$

Definition 6.1.22 (Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ falls } k \geq 1 \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Proposition 6.1.23 (Binomische Reihe). Für $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Vorschau 6.1.24. Die Proposition gilt mit demselben Beweis auch für $x, \alpha \in \mathbb{C}$, vergleiche [FT1] 4.2.15. Aus unseren Überlegungen in 6.1.18 zu den Koeffizienten konvergenter Potenzreihen folgt auch unmittelbar, daß die Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung von $(1+x)^\alpha$, wenn es sie denn gibt, notwendig die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten sein müssen. Daß es aber eine derartige Entwicklung auch wirklich gibt, muß noch gezeigt werden. Also an die Arbeit!

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ kennen wir diese Formel schon: Im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{\alpha}{k} = 0$ falls $k > \alpha$ und wir erhalten einen Spezialfall der binomischen Formel 1.6.13. Im Fall $\alpha = -1$ gilt $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$ und wir erhalten die geometrische Reihe 4.1.5 für $-x$. Unter der Annahme $\alpha \notin \mathbb{N}$ sagt uns das Quotientenkriterium, daß die Potenzreihe rechts für $|x| < 1$ konvergiert, sagen wir gegen die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Ich behaupte $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$. Das prüft man durch gliedweises Differenzieren der binomischen Reihe mithilfe der Beziehung

$$\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = \binom{\alpha}{k}$$

Diese Beziehung kann durch eine kurze Rechnung gezeigt werden. Rechenfaule können sie auch als eine Gleichheit von Polynomen in α verstehen, von der wir bereits wissen, daß sie nach Einsetzen von $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt, und die folglich als Gleichheit von Polynomen gelten muß, da ja Polynome nur endlich viele Nullstellen haben. Aus $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ und $f(0) = 1$ folgt aber schon $f(x) = (1+x)^\alpha$, denn setzt man $\varphi(x) = f(x)/(1+x)^\alpha$, so gilt $\varphi(0) = 1$ und

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \quad \square$$

Beispiel 6.1.25. Aus unserer Formel $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ nach 5.4.13 ergibt sich die Reihenentwicklung

$$\arcsin(x) = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

In der Tat gilt $\arcsin(x) = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt$, und nach der binomischen Reihe 6.1.23 haben wir

$$(1-t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-t^2)^k = 1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \dots$$

Ähnlich ergibt sich die Entwicklung von $\operatorname{arsinh}(x)$ in eine Potenzreihe, indem wir in der binomischen Reihe für $(1+y)^{-1/2}$ überall y durch x^2 ersetzen und die so entstehende Potenzreihe für $(1+x^2)^{-1/2}$ gliedweise integrieren.

6.1.26. Die Formel für die binomische Reihe kann umgeschrieben werden zur nun für alle $y \in (0, 2)$ gültigen Darstellung

$$y^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (y-1)^k$$

Gehört allgemeiner ein Punkt p zum Definitionsbereich einer Funktion f , so bezeichnen wir eine Darstellung von f der Gestalt

$$f(p+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu h^\nu \quad \text{alias} \quad f(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (y-p)^\nu$$

als eine **Entwicklung von f in eine Potenzreihe um den Punkt p** . Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt dann $a_\nu = f^{(\nu)}(p)/\nu!$. Ist allgemeiner f beliebig oft differenzierbar bei p , so erklären wir die **Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt p** als die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} h^\nu$$

Auch wenn die Partialsummen dieser Reihe nicht gegen $f(p+h)$ konvergieren müssen, liefern sie doch die „bestmöglichen“ Approximationen von $f(p+h)$ durch Polynome in h von einem vorgegebenen maximalen Grad, wie wir im folgenden Abschnitt 6.2 ausführen werden.

Übungen

Übung 6.1.27. Ist $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von von Null verschiedenen reellen Zahlen und existiert der Grenzwert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_\nu/a_{\nu+1}|$ in $[0, \infty]$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$.

Ergänzende Übung 6.1.28. Eine Funktion, die für jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in einer Umgebung besagten Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**. Wir werden erst in [FT1] 4.2.8 im Rahmen der Funktionentheorie zeigen, daß Potenzreihen analytische Funktionen liefern: Dort geht es mit den Tricks der Funktionentheorie sehr elegant, wir könnten es aber etwas weniger elegant auch hier schon zeigen. Man zeige: Stimmen zwei auf demselben reellen Intervall definierte analytische Funktionen auf der Umgebung eines Punktes aus unserem Intervall überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man betrachte das Supremum der Menge aller Punkte, an denen unsere beiden Funktionen übereinstimmen.

Ergänzende Übung 6.1.29. Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1+x}$? Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2+x}$? Gemeint ist jeweils die Entwicklung um $x = 0$.

Ergänzende Übung 6.1.30. Wir würfeln mit einem Würfel eine unendlich lange Zahlenreihe. Anschaulich ist klar, daß der durchschnittliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einsen gerade Sechs sein muß. Betrachtet man nun die Wahrscheinlichkeiten, daß die nächste Eins beim nächsten Wurf, beim übernächsten Wurf etc. kommt, multipliziert sie jeweils mit Eins, Zwei etc. und summiert diese Produkte auf, so sollte sich auch dieser durchschnittliche Abstand ergeben. Die Aufgabe ist nun, zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

auch tatsächlich gegen 6 konvergiert.

Ergänzende Übung 6.1.31. Mithilfe der Relation $\tan(\pi/6) = 1/2$ berechne man π auf drei sichere Stellen hinter dem Komma. Es gibt im übrigen wesentlich effizientere Verfahren zur Berechnung von π , vergleiche [Cou71].

Übung 6.1.32 (Vertauschen von Ableitung und Grenzübergang). Ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und konvergieren deren Ableitungen $f'_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion g , so ist f differenzierbar auf $[a, b]$ mit Ableitung $f' = g$. Hinweis: 6.1.14.

6.2 Taylorentwicklung

6.2.1. Um im folgenden auch den Fall $n = 0$ zulassen zu dürfen, vereinbaren wir, daß „0-mal differenzierbar bei p “ zu verstehen sein soll als „stetig bei p “.

Satz 6.2.2 (Taylorentwicklung). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, deren $(n - 1)$ -te Ableitung $f^{(n-1)}$ auf ganz I existiert und deren n -te Ableitung $f^{(n)}(p)$ an einer Stelle $p \in I$ existiert. So gilt:

1. Es gibt genau ein Polynom Q vom Grad $\leq n$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = Q(x) + (x - p)^n \varepsilon(x - p)$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$, die also in Worten stetig ist bei Null mit Funktionswert Null;

2. Dieses Polynom ist das eindeutig bestimmte Polynom Q vom Grad $\leq n$ mit $Q^{(\nu)}(p) = f^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$, dessen Funktionswert und Ableitungen bei p also bis zur n -ten Ableitung einschließlich mit den entsprechenden Ableitungen bei p unserer Funktion f übereinstimmen.

6.2.3. Wir nennen Q das **Approximationspolynom bis zur Ordnung n an die Funktion f bei der Stelle p** .

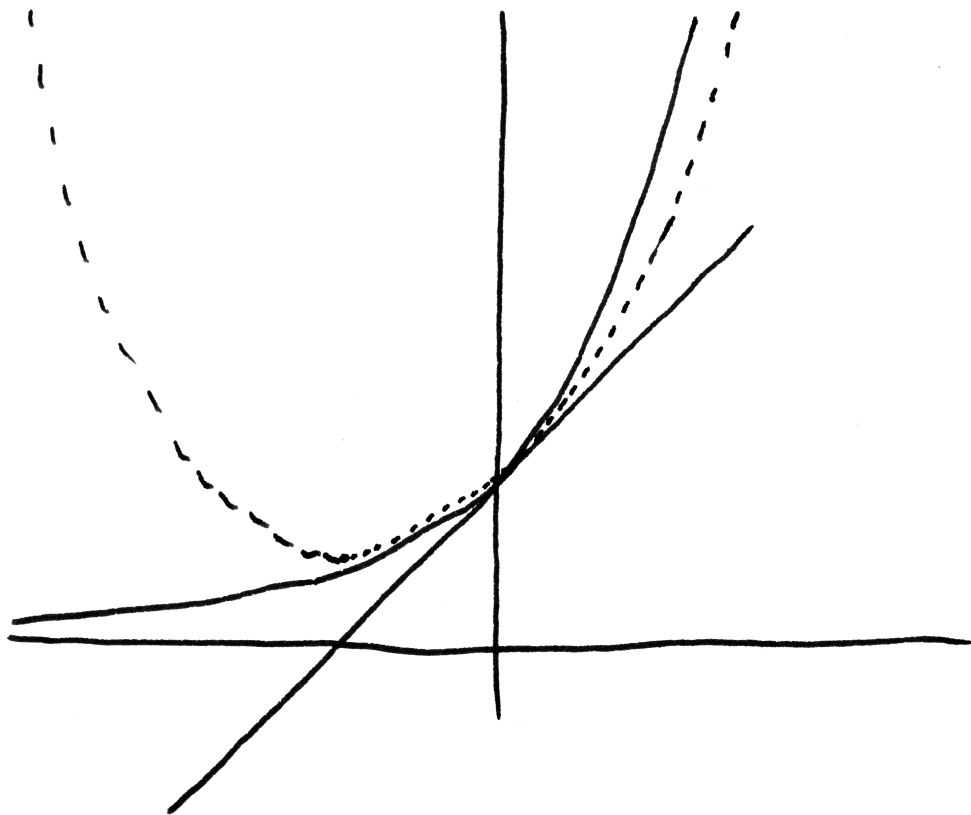
1. Der Graph des Approximationspolynoms bis zur nullten Ordnung ist die Parallele zur x -Achse durch $(p, f(p))$;
2. Der Graph des Approximationspolynoms bis zur ersten Ordnung heißt die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$;
3. Der Graph des Approximationspolynoms bis zur zweiten Ordnung heißt die **Schmiegeparabel** an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$.

Beweis. Sicher gibt es genau ein Polynom Q , das die Bedingung aus Teil 2 erfüllt, nämlich das Polynom

$$Q(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}(x - p)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x - p)^n$$

Es besteht genau aus den ersten $n + 1$ Termen der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt p . Betrachten wir für dieses Polynom Q die Differenz $r = f - Q$, so verschwinden der Funktionswert und die ersten n Ableitungen von r bei $x = p$ und wir erhalten durch wiederholte Anwendung der Regeln von de l'Hospital 5.6.1 und mit der Definition von $r^{(n)}(p)$ im letzten Schritt in der Tat

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{(x - p)^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow p} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n! (x - p)} = \frac{r^{(n)}(p)}{n!} = 0$$



Eine unvollkommene Darstellung der Tangente $y = x + 1$ und Schmiegeparabel $y = x^2/2 + x + 1$ an den Graph der Exponentialfunktion im Punkt $(0, 1)$.

Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß kein anderes Polynom \hat{Q} die Bedingung aus Teil 1 erfüllen kann. In der Tat folgt aber für zwei Polynome vom Grad $\leq n$ aus

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\hat{Q}(x) - Q(x)}{(x - p)^n} = 0$$

nach Übung 3.5.53 bereits $\hat{Q}(x) = Q(x)$. □

6.2.4. Wir können die Aussage des Satzes dahingehend umformulieren, daß für jede auf einem mehrpunktigen Intervall I definierte $(n - 1)$ -mal differenzierbare Funktion f und jeden Punkt $p \in I$, an dem sie sogar n -mal differenzierbar ist, gilt

$$f(p + h) = f(p) + f'(p)h + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h)$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$. Schärfere Abschätzungen für das Restglied unter stärkeren Annahmen an die zu approximierende Funktion liefert die gleich folgende Proposition.

Proposition 6.2.5 (Restglieddarstellungen zur Taylorentwicklung). *Gegeben $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion und $p \in I$ ein Punkt gilt:*

Umformulierung der Taylorentwicklung: *Ist f bei p sogar $(n + 1)$ -mal differenzierbar, so gibt es eine Funktion ε mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$ und*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} (x - p)^\nu + \left(\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n + 1)!} + \varepsilon(x - p) \right) (x - p)^{n+1}$$

Lagrange'sche Form des Restglieds: *Ist f sogar $(n + 1)$ -mal differenzierbar auf dem ganzen Intervall I , so gibt es für alle $x \in I$ ein ξ zwischen p und x mit*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} (x - p)^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - p)^{n+1}$$

Das gilt zusätzlich für jeden reellen Punkt x im Abschluß von I , auf den die Funktion f stetig fortgesetzt werden kann.

Integraldarstellung des Restglieds: *Ist $f^{(n+1)}$ zusätzlich auch noch stetig auf ganz I , so gilt für alle $x \in I$ die Formel*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} (x - p)^\nu + \frac{1}{n!} \int_p^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Beweis. Nur die zweite und dritte Darstellung des Restglieds sind noch zu zeigen. Wir kürzen die Summe wie zuvor mit $\sum = Q(x)$ ab. Für den Rest $r(x) = f(x) - Q(x)$ verschwinden, wie wir bereits wissen, die ersten n Ableitungen bei $x = p$, und unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen ist r sogar $(n + 1)$ -mal differenzierbar auf ganz I mit $r^{(n+1)} = f^{(n+1)}$. Um daraus die beiden Darstellungen des Restglieds zu erhalten, brauchen wir zwei Rechnungen.

2. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 5.6.2 und der Erkenntnis, daß Nenner und Zähler bei $x = p$ verschwinden, erhalten wir unter der Annahme $p \neq x$ sofort

$$\frac{r(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{r'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-p)^n} = \frac{r''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-p)^{n-1}} = \dots = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

mit ξ_1, \dots, ξ im offenen Intervall zwischen p und x .

3. Durch wiederholtes partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} r(x) &= \int_p^x r'(t) dt = \int_p^x (x-t)r''(t) dt = \frac{1}{2} \int_p^x (x-t)^2 r'''(t) dt \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n r^{(n+1)}(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

6.2.6. Diese Abschätzungen liefern umgekehrt auch alternative Beweise für den Satz 6.2.2 über die Taylorentwicklung, aber eben nur unter stärkeren Voraussetzungen an die zu entwickelnde Funktion.

Übungen

Übung 6.2.7 (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion und sei $p \in I$ gegeben mit $f^{(1)}(p) = \dots = f^{(n)}(p) = 0$. Sei weiter und $f^{(n)}$ differenzierbar an der Stelle p . Man zeige: Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(p) > 0$ beziehungsweise $f^{(n+1)}(p) < 0$, so hat f ein isoliertes lokales Minimum beziehungsweise Maximum bei p . Ist I offen und n gerade und $f^{(n+1)}(p) \neq 0$, so hat f weder ein isoliertes lokales Minimum noch ein isoliertes lokales Maximum bei p . Hinweis: Taylorentwicklung.

Übung 6.2.8. Gegeben eine differenzierbare Funktion f auf einem offenen reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, deren Ableitung bei $p \in I$ differenzierbar ist, zeige man

$$f''(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) + f(p-h) - 2f(p)}{h^2}$$

Übung 6.2.9 (Spezielles zu Potenzreihen mit nichtnegativen Koeffizienten). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten $a_k \geq 0$ und

sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ echt kleiner als ihr Konvergenzradius. Hat die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt r der durch unsere ursprüngliche Reihe gegebenen Funktion f den Konvergenzradius ρ , so hat unsere ursprüngliche Reihe mindestens den Konvergenzradius $r + \rho$. Hinweis: Man drücke $f^{(\nu)}(r)$ durch die ursprüngliche Reihe aus und folgere $\sum a_k(r + \varepsilon)^k < \infty$ für $0 \leq \varepsilon < \rho$.

6.3 Rechnen mit Approximationen

Definition 6.3.1. Seien $f, g : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $p \in D$ ein Punkt und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, f und g stimmen bei p überein bis zur Ordnung n und schreiben

$$f \sim_p^n g \quad \text{oder genauer} \quad f(x) \sim_{x=p}^n g(x)$$

wenn gilt $f(p + h) = g(p + h) + h^n \varepsilon(h)$ für eine Funktion ε , die stetig ist bei Null mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$ und die definiert ist auf der Menge aller h mit $p + h \in D$.

6.3.2. Die Notation $f \sim_p^n g$ scheint mir bequem und suggestiv, sie ist aber nicht üblich. Häufig nennt man eine Funktion, die bei $x = 0$ mit der Nullfunktion übereinstimmt bis zur Ordnung n , auch ein **kleines o von x^n** und bezeichnet so eine Funktion mit $o(x^n)$. In dieser Notation würde man statt $f \sim_p^n g$ schreiben $f(x) = g(x) + o((x - p)^n)$.

6.3.3. Natürlich folgt aus $f \sim_p^n g$ und $g \sim_p^n h$ schon $f \sim_p^n h$. Sind P und Q Polynome vom Grad $\leq n$ und ist p ein Häufungspunkt von D , so folgt aus $P \sim_p^n Q$ schon $P = Q$. Der Satz über die Taylorentwicklung 6.2.2 liefert uns für eine n -mal stetig differenzierbare Funktion f auf einem mehrpunktigen Intervall D das eindeutig bestimmte Polynom Q vom Grad $\leq n$, das bei p mit f übereinstimmt bis zur Ordnung n . Genauer besagt dieser Satz, daß dieses Polynom Q charakterisiert werden kann durch die Bedingungen $Q^{(\nu)}(p) = f^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$.

Satz 6.3.4. 1. (**Höhere Summen- und Produktregel**). Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_p^n Q$. So folgt

$$f + g \sim_p^n P + Q \quad \text{und} \quad fg \sim_p^n PQ$$

2. (**Höhere Kettenregel**). Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf Teilmengen $D, E \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen mit $f(D) \subset E$. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_{f(p)}^n Q$. So folgt

$$g \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

6.3.5. Im Fall $n = 0$ spezialisiert dieser Satz zur Stetigkeit von Summen und Produkten 3.2.34 sowie Verknüpfungen 3.2.30. Im Fall $n = 1$ spezialisiert er zur Summenregel 5.4.1, Produktregel 5.4.1 und Kettenregel 5.4.6.

Vorschau 6.3.6. Alle Aussagen dieses Satzes werden sich als Konsequenzen des Approximationssatzes in mehreren Veränderlichen [AN2] 3.3.6 erweisen.

Beweis. 1. Das bleibt dem Leser überlassen. Im Fall der Summe gilt das sogar für beliebige Funktionen P und Q . Im Fall des Produkts reicht anstelle der Polynomialität die schwächere Annahme, daß P und Q in einer Umgebung von p beschränkt sind.

2. Wir zeigen zunächst $g \circ f \sim_p^n Q \circ f$ und dann $Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$. Zum Beweis der ersten Aussage schreiben wir $g(y) = Q(y) + (y - f(p))^n \varepsilon(y - f(p))$ für ε stetig bei Null mit Funktionswert Null. Durch Einsetzen von $y = f(x)$ und Erweitern des letzten Terms mit $(x - p)^n$ erhalten wir

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + (x - p)^n \left[\left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right)^n \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle $x \neq p$. Im Fall $n \geq 1$ stimmt f bei p bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit dem Polynom P , folglich ist f differenzierbar bei p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \rightarrow p$ gegen Null. Im Fall $n = 0$ stimmt f bei p bis zur Ordnung 0 überein mit dem Polynom P , also ist f zumindest stetig in p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \rightarrow p$ wieder gegen Null. Wir müssen also nur noch für jedes Polynom Q zeigen

$$Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

Das hinwiederum folgt sofort aus Teil 1. □

Beispiel 6.3.7. Beim konkreten Rechnen wird man sich nach Möglichkeit die Funktionen so zurechtlegen, daß wir nur Approximationen an der Stelle Null zu betrachten haben. Um etwa die sechste Ableitung bei $x = 0$ von $1/\cosh(x)$ zu berechnen, schreiben wir das als $g \circ f$ mit $f(x) = \cosh(x) - 1$ und $g(y) = (1 + y)^{-1}$, da dann gilt $f(0) = 0$. Nun erinnern wir uns an

$$\begin{aligned} \cosh(x) - 1 &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ (1 + y)^{-1} &= 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6 \dots \end{aligned}$$

wo wir Gleichheitszeichen und Pünktchen geschrieben haben statt \sim^6 mit entsprechenden Spezifikationen. Mit unserer „höheren Kettenregel“ 6.3.4 erhalten

wir wegen $f(0) = 0$ dann sofort

$$\begin{aligned} 1/\cosh(x) &= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Als Koeffizient von x^6 ergibt sich

$$-\frac{1}{6!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6!}(-1 + 30 - 90) = -\frac{61}{6!}$$

Die fragliche sechste Ableitung bei $x = 0$ ist mithin -61 . Eine andere Möglichkeit wäre, das Approximationspolynom sechsten Grades an $1/\cosh(x)$ in $x = 0$ als $a_0 + a_1x + \dots + a_6x^6$ anzusetzen und aus der „höheren Produktregel“ die Gleichung

$$\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) (a_0 + a_1x + \dots + a_6x^6) = 1 + bx^8 + \dots$$

zu folgern, die es uns hinwiederum erlaubt, induktiv die a_ν zu bestimmen. Diese Rechnung kann im vorliegenden Fall zusätzlich vereinfacht werden durch die Erkenntnis, daß eh gilt $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$, da unsere Funktion gerade ist.

Ergänzung 6.3.8 (Geschlossene Formel für die Catalan-Zahlen). Wir zeigen nun die in [GR] 2.1.13 versprochene Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

für die ebendort eingeführten Catalan-Zahlen C_n , die die Zahl der möglichen Verklammerungen eines Wortes in $(n+1)$ Symbolen angeben. Diese Zahlen erfüllen offensichtlich die Rekursion

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$

Die **erzeugende Funktion** der Folge der Catalan-Zahlen alias die formale Potenzreihe $P = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ erfüllt demnach im Ring der formalen Laurentreihen aus [LA1] 5.3.43 die Formel $xP^2 = P - 1$ alias $P^2 - \frac{1}{x}P + \frac{1}{x} = 0$. Damit folgt, immer im Ring der formalen Laurentreihen, eine Identität der Form

$$P = \frac{1}{2x} \pm \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

falls die fragliche Wurzel im Ring der formalen Laurentreihen existieren sollte, wobei das Vorzeichen noch zu bestimmen ist. Nach 6.3.9 existiert diese Wurzel jedoch in der Tat und kann beschrieben werden durch die binomische Reihe

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

Deren konstanter Term ist Eins, so daß für unser Vorzeichen nur das Minus in Frage kommt. Damit muß notwendig gelten

$$P = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Die Koeffizienten unserer binomischen Reihe lassen sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} (-1)^n 4^n &= \frac{1}{n!} \binom{1}{2} \binom{-1}{2} \binom{-3}{2} \cdots \binom{-2n+3}{2} (-1)^n 4^n \\ &= -\frac{1}{n!} (1 \cdot 3 \cdots (2n-3)) 2^n \\ &= \frac{-2(2(n-1))!}{(n-1)!(n-1)!} \end{aligned}$$

Die letzte Identität stimmt dabei nur für $n \geq 1$. Setzen wir alles zusammen, so ergibt sich wie gewünscht

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Übungen

Übung 6.3.9. Gegeben zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen auf einem Intervall ist die Taylorreihe ihrer Summe die Summe der Taylorreihen und die Taylorreihe des Produkts das Produkt der Taylorreihen. Hier verstehen wir Produkt und Summe von Potenzreihen im formalen Sinn, vergleiche [LA1] 5.3.42.

Ergänzende Übung 6.3.10. Man zeige, daß die Identitäten $\exp(\log(x+1)) = x+1$ und $\log((e^x-1)+1) = x$ auch als formale Identitäten von Potenzreihen gelten, daß also etwa im ersten Fall für $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j(1)+\dots+j(i)=k} \frac{1}{i!} \binom{-(-1)^{j(1)}}{j(1)} \cdots \binom{-(-1)^{j(i)}}{j(i)} = 0$$

wo die Summe über alle $i \geq 1$ und alle Abbildungen $j : \{1, \dots, i\} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ läuft, bei denen k die Summe der Werte ist, wohingegen dieselbe Summe für

$k = 1$ gerade den Wert Eins ergibt. Allgemeiner führe man aus, inwiefern die Taylorreihe der Verknüpfung zweier unendlich oft differenzierbarer Funktionen gerade die Verknüpfung ihrer Taylorreihen ist.

Ergänzende Übung 6.3.11. Gegeben ein Kring k , für den ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \rightarrow k$ existiert, liefert das formale Einsetzen in formale Potenzreihen eine Bijektion $\exp : tk[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tk[[t]]$ mit der Inversen \log gegeben durch die Potenzreihe von $\log(1+x)$. Diese Bijektion ist ein Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe $tk[[t]]$ und der multiplikativen Gruppe $1 + tk[[t]]$.

6.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz*

6.4.1. In diesem Abschnitt will ich mein Versprechen einlösen und die Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

zeigen. Wenn wir $x = 1$ in die Reihenentwicklung von $\log(1+x)$ einsetzen dürften, so folgte das sofort. Die Schwierigkeit liegt darin, daß wir bisher nur für $|x| < 1$ nachgewiesen haben, daß unsere Potenzreihe aus 6.1.19 gegen $\log(1+x)$ konvergiert. Der folgende Satz hilft uns, diese Schwierigkeit zu überwinden, und wird auch in 5.4.14 bei der Herleitung der wunderbaren Formel

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4}$$

benötigt. In beiden Formeln sehe aber eher schöne Blüten als zentrale Inhalte. Davon abgesehen spielt der abelsche Grenzwertsatz im weiteren Verlauf dieser Vorlesung keine Rolle.

Satz 6.4.2 (Abel'scher Grenzwertsatz). *Konvergiert eine reelle Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihres Konvergenzbereichs, so stellt sie bis in diesen Randpunkt hinein eine stetige Funktion dar.*

Vorschau 6.4.3. Für diejenigen Leser, die bereits mit komplexen Potenzreihen vertraut sind, sei bemerkt, daß die entsprechende Aussage im Komplexen in dieser Form nicht mehr gilt. Mehr dazu finden Sie etwa in [FT1] 4.2.2.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $x = 1$ der besagte Randpunkt des Konvergenzbereichs ist. Sei also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Wir müssen zeigen, daß die Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in [0, 1]$ eine stetige Funktion darstellt. Dazu schreiben wir die Differenzen

der Partialsummen in der Form

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m a_k x^k &= (x^n - x^{n+1}) (a_n) \\ &+ (x^{n+1} - x^{n+2}) (a_n + a_{n+1}) \\ &+ (x^{n+2} - x^{n+3}) (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &\quad \dots \quad \dots \\ &+ (x^{m-1} - x^m) (a_n + \dots + a_{m-1}) \\ &+ x^m (a_n + \dots + a_{m-1} + a_m) \end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir nun wegen der Konvergenz unserer Reihe ein N derart, daß für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ gilt $|a_n + \dots + a_m| \leq \varepsilon$. Für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ und alle $x \in [0, 1]$ folgt daraus die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k x^k \right| \leq (x^n - x^m) \varepsilon + x^m \varepsilon \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Partialsummen auf $[0, 1]$ und damit die Stetigkeit der Grenzfunktion. \square

Vorschau 6.4.4. Läßt sich die durch eine Potenzreihe im Inneren des Konvergenzintervalls definierte Funktion stetig auf einen Randpunkt fortsetzen, so muß die Potenzreihe an besagtem Randpunkt keineswegs konvergieren. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß das Konvergenzintervall $(-1, 1)$ ist und der fragliche Randpunkt die 1, so folgt die Konvergenz von $\sum a_n$ jedoch aus der stetigen Fortsetzbarkeit der Funktion $\sum a_n x^n$ von $x \in [0, 1)$ auf $[0, 1]$ zusammen mit der **Tauber-Bedingung**, daß die Folge na_n betragsmäßig beschränkt sein möge. Unter der stärkeren Annahme $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ wurde das bereits von Tauber gezeigt.

7 Raumwertige Funktionen und Schwingungen

7.1 Bogenlänge und Geschwindigkeit

7.1.1. Gegeben $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

und nennen diese Zahl die **Skalarproduktnorm** oder kurz **Länge von v** . Offensichtlich haben wir $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Auf der Schule und in der Linearen Algebra lernen Sie, inwieweit $\|v\|$ dem entspricht, was wir anschaulich die „Länge des Vektors v “ nennen würden, und daß für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ die **Dreiecksungleichung** $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ gilt.

Definition 7.1.2. Gegeben ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ erklären wir die **Länge** $L(\gamma) \in \bar{\mathbb{R}}$ von γ als das Supremum über „die Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge“, in Formeln

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\| \mid t_0, \dots, t_r \in I, t_0 \leq \dots \leq t_r \right\}$$

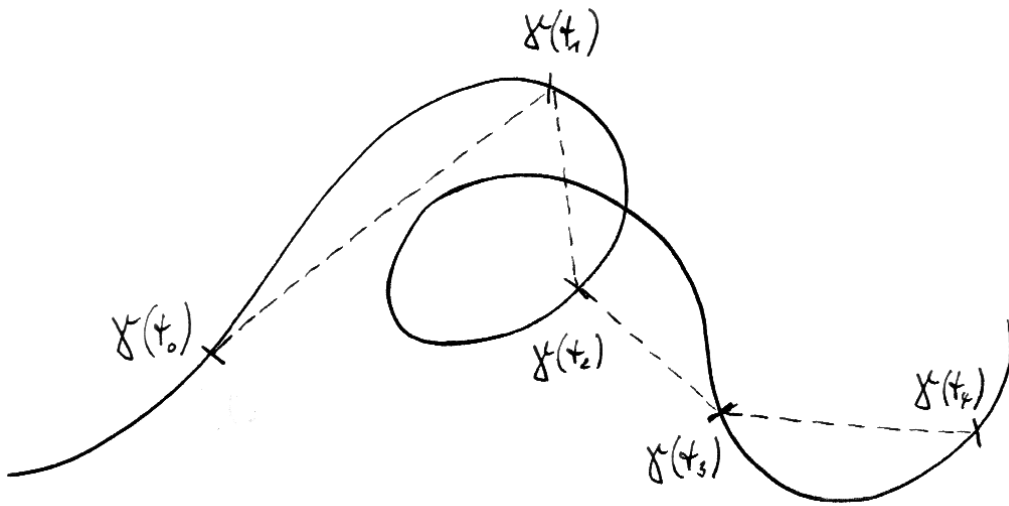
Man spricht in diesem Zusammenhang meist von der **Bogenlänge** und nennt eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie oben einen **Weg** in \mathbb{R}^n .

7.1.3. Offensichtlich ist unsere Bogenlänge „invariant unter Reparametrisierung“. In Formeln haben wir stärker sogar für jede monotone Surjektion $\psi : J \rightarrow I$ offensichtlich $L(\gamma \circ \psi) = L(\gamma)$. Unsere Definition der Kreiszahl π aus 3.4.1 bedeutet in dieser Terminologie $\pi = L(\gamma)$ für $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$.

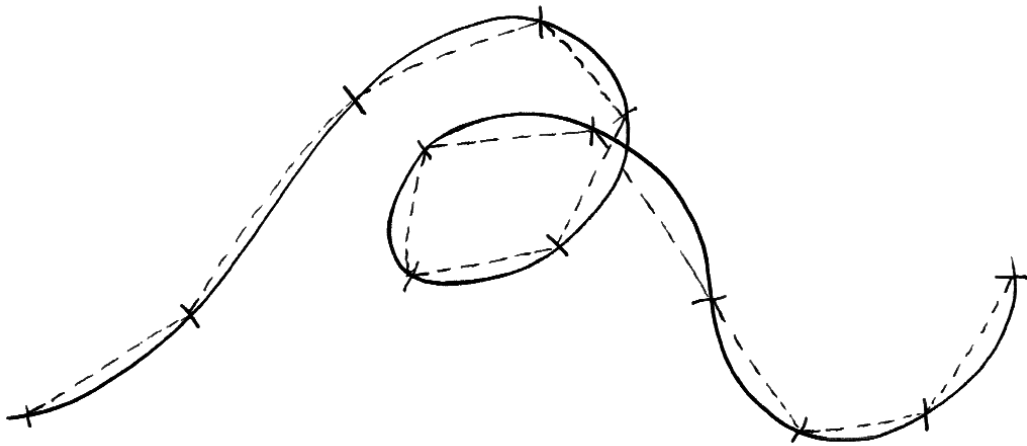
7.1.4. Seien $\gamma : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ nach \mathbb{R}^n und sei $p \in D$ ein Punkt. Wir nennen γ **differenzierbar bei p** , wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(p+t) - \gamma(p)}{t}$$

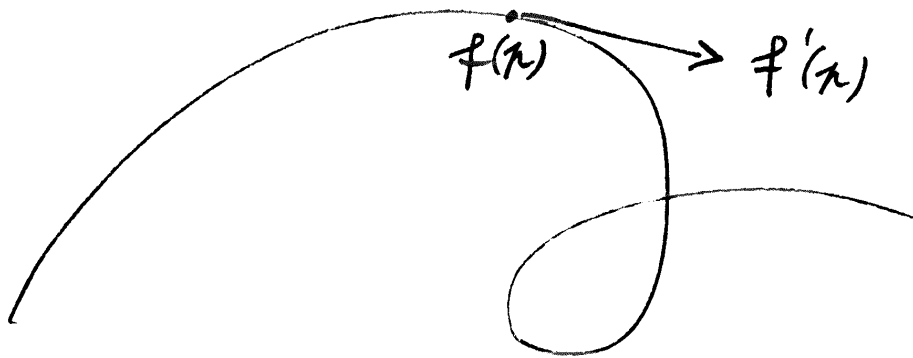
Dann schreiben wir $\gamma'(p) := v$ und nennen $\gamma'(p)$ die **Ableitung von γ bei p** oder, wenn wir uns t als Zeit denken, den **Geschwindigkeitsvektor**. Die Länge $\|\gamma'(p)\|$ des Geschwindigkeitsvektors nennen wir die **absolute Geschwindigkeit**. Ist γ differenzierbar an allen Stellen $p \in D$, so nennen wir γ **differenzierbar** oder genauer **differenzierbar auf D** .



Eine Approximation eines Weges durch einen Polygonzug



Eine bessere Approximation desselben Weges durch einen Polygonzug



Denken wir uns t als Zeit, so mag man $\gamma'(p)$ auch den „Geschwindigkeitsvektor“ nennen. Er ist stets tangential an die Bahnkurve. Seine Länge hängt jedoch von der Anzeige des Tachometers ab, wenn wir uns hier mal ein Auto denken, das auf einem Fußballfeld herumkurvt. Dieser Aspekt ist in einem Bild leider schwer darzustellen.

7.1.5. Seien $\gamma : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ nach \mathbb{R}^n und sei $p \in D$ ein Punkt. Nach unseren Regeln über komponentenweise Grenzwerte ist $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ differenzierbar bei p genau dann, wenn alle $\gamma_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar sind bei p , und dann haben wir

$$\gamma'(p) = (\gamma_1'(p), \dots, \gamma_n'(p))$$

Beispiel 7.1.6. Für Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ stimmt unsere hier erklärte Ableitung überein mit der reell-komplexen Ableitung komplexwertiger Funktionen aus 5.10.13.

Vorschau 7.1.7 (Lamento über das Arbeiten ohne Einheiten). Eigentlich sollte man sich mehr Mühe geben, um guten Gewissens von Länge und Geschwindigkeit reden zu können. Ich würde gerne einen „euklidischen Raum“ einführen als einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum E mit einer ausgezeichneten $\mathbb{R}_{>0}$ -Bahn von Skalarprodukten auf dem zugehörigen Richtungsraum \vec{E} und dazu einen orientierten eindimensionalen Vektorraum $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\vec{E})$ konstruieren, seine „Längengerade“. Dann konstruiert man die „Länge“ als eine Abbildung

$$\| \cdot \| : \vec{E} \rightarrow \mathbb{L}$$

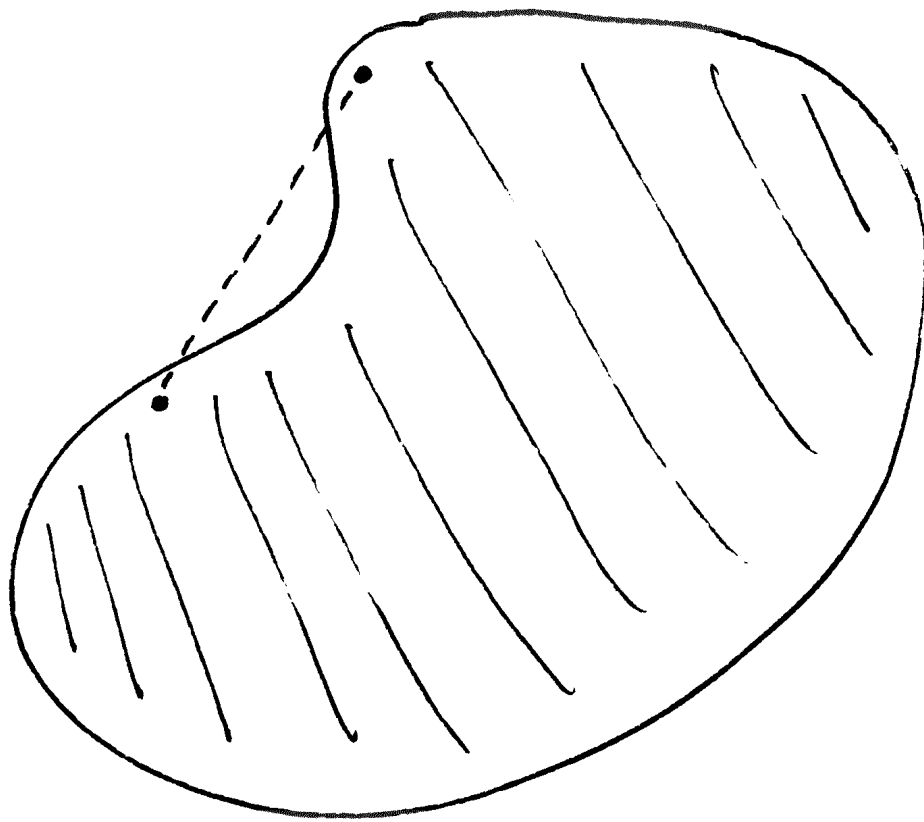
Danach postuliert man einen orientierten eindimensionalen affinen Raum \mathbb{T} der „Zeitpunkte“, diskutiert differenzierbare Abbildungen $\gamma : \mathbb{T} \supset D \rightarrow E$ und erhält als Geschwindigkeitsvektor bei $p \in D$ ein Element $\dot{\gamma}(p) \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{E})$. Die absolute Geschwindigkeit schließlich wird eine orientierungserhaltende lineare Abbildung $\|\dot{\gamma}(p)\| \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{T}}, \mathbb{L})$. Das wäre aussagekräftiger als, wie wir hier, $E = \vec{E} = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{T} = \vec{\mathbb{T}} = \mathbb{L} = \mathbb{R}$ zu identifizieren. Dazu müßte ich aber auf entsprechender Vorarbeit aus der Linearen Algebra aufbauen, und selbst wenn ich das dürfte, wäre es zu viel Begrifflichkeit für einen Abschluß des ersten Semesters.

7.1.8. Wie in [LA1] 3.5.2 heißt eine Teilmenge des \mathbb{R}^n **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze die beiden Punkte verbindende Geradensegment enthält. Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n heißt **offen**, wenn sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist.

Beispiel 7.1.9. Für alle $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{R}^n$ ist sowohl der in 3.2.19 eingeführte Quader $B(p; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |p - x| < \varepsilon\}$ als auch der **euklidische Ball** $B_2(p; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|p - x\| < \varepsilon\}$ offen und konvex.

Satz 7.1.10 (Schranksatz). Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Teilmenge und gilt $\gamma'(t) \in C$ für alle $t \in [a, b]$, so folgt

$$\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C$$



Eine nicht konvexe Teilmenge der Ebene

Vorschau 7.1.11. Der Satz gilt genauso für C konvex und „abgeschlossen“, da wir so ein C schreiben können als den Schnitt der offenen konvexen Mengen $C = \bigcap_{\eta>0} (C + B(0; \eta))$.

Beispiel 7.1.12 (**Anschauung für den Schrankensatz**). Anschaulich können wir den Inhalt des Satzes interpretieren wie folgt: Sei C eine Kreisscheibe im Richtungsraum der Anschauungsebene mit Radius 20 km/h. Fahren wir mit einem Geländewagen um 14:00 Uhr an einem Parkplatz los und kurven durch die Gegend und der Tacho zeigt nie mehr als 20 km/h an, so sind wir um 17:00 Uhr höchstens 60 km von unserem ursprünglichen Parkplatz entfernt. Besteht C dahingegen aus einem einzigen Punkt, der sagen wir die Geschwindigkeit von 20 km/h in einer festen Richtung bedeutet, so besagt unser Satz: Fahren wir konstant mit 20 km/h in diese Richtung, so haben wir um 17:00 Uhr genau 60 km in besagte Richtung zurückgelegt. Für dieses Beispiel wählen wir implizit einen Isomorphismus der Zeitachse \mathbb{T} mit der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} derart, daß jeder Stunde ein Intervall der Länge Eins entspricht. Das bedeutet insbesondere, daß wir implizit auch vektorielle Geschwindigkeiten mit Richtungsvektoren identifizieren. Im übrigen wird in [AN2] 2.3.11 erklärt, wie man auch mit „echten“ Geschwindigkeiten formal korrekt arbeiten kann.

7.1.13 (**Beziehung zwischen Schrankensatz und Mittelwertsatz**). Der Satz folgt im Fall $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ leicht aus unserem bisherigen Mittelwertsatz 5.5.7 und er spielt auch im allgemeinen eine ähnliche Rolle, indem er es erlaubt, „den von einem Teilchen in einem Zeitintervall $[a, b]$ gewonnenen Abstand von seinem Ausgangspunkt aus der Kenntnis seiner lokalen Geschwindigkeiten abzuschätzen“. Jedoch kann man im allgemeinen Fall des \mathbb{R}^n im allgemeinen keinen Zeitpunkt mehr finden, zu dem das Teilchen „mittlere Geschwindigkeit“ hätte. Es gibt in anderen Worten im allgemeinen keinen Punkt $\xi \in [a, b]$ mit $\gamma(b) - \gamma(a) = (b - a)\gamma'(\xi)$. Man stelle sich etwa vor, daß unser Geländewagen ein Rundtour fährt, bei der er zu keiner Zeit die Geschwindigkeit Null hat. Mich befriedigt deshalb die in der älteren Literatur übliche Bezeichnung als „Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen“ nicht vollständig.

Beweis. Offensichtlich gilt für eine konvexe Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ und beliebige reelle $s, t \geq 0$ stets $sC + tC = (s + t)C$. Das zeigt, daß in unserem Satz die Aussage für das ganze Intervall folgt, wenn wir sie für alle Stücke einer Zerlegung in endlich viele Teilintervalle zeigen können. Kürzen wir genauer für $p, q \in [a, b]$ mit $S(p, q)$ die Aussage $\gamma(q) - \gamma(p) \in (q - p)C$ ab, so gilt für $a \leq p \leq q \leq r \leq b$ in Formeln ausgedrückt

$$(S(p, q) \text{ und } S(q, r)) \Rightarrow S(p, r)$$

Da wir C offen angenommen hatten, besitzt jeder Punkt $p \in [a, b]$ eine Umgebung

U_p mit

$$q \in [a, b] \cap U_p \setminus p \Rightarrow \frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{q - p} \in C$$

oder umgeschrieben eine Umgebung U_p mit $(q \in [a, b] \cap U_p) \Rightarrow S(p, q)$. Nun setzen wir

$$s := \sup\{c \in [a, b] \mid \text{Es gilt } S(a, x) \forall x \in [a, c]\}$$

Dann gilt $S(a, s)$, denn im Fall $a = s$ ist das eh klar und sonst gibt es $x \in [a, s)$ mit $S(x, s)$ wahr und $S(a, x)$ gilt nach Annahme eh für alle $x \in [a, s)$. Hätten wir nun nicht $s = b$, so fänden wir $q \in (s, b]$ mit $S(s, q)$ wahr für alle $x \in [s, q]$ und damit $S(a, x)$ wahr für alle $x \in [a, q]$ im Widerspruch zur Wahl von s . \square

Satz 7.1.14 (Bogenlänge als Integral). Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stimmt überein mit dem Integral über seine absolute Geschwindigkeit, in Formeln

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da γ' nach 5.1.15 gleichmäßig stetig ist auf $[a, b]$, finden wir ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| < \varepsilon$ falls $|x - y| \leq \delta$. Gegeben eine Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$ einer Feinheit $\leq \delta$ folgern wir aus dem Schrankensatz 7.1.10 dann

$$\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) \in (a_{i+1} - a_i) B(\gamma'(a_i); \varepsilon)$$

und insbesondere $\|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| \in (a_{i+1} - a_i)(\|\gamma'(a_i)\| + [-\varepsilon, \varepsilon])$. Durch Aufsummieren folgt

$$\left| \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| \leq (b - a)\varepsilon$$

für jede Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$. Das zeigt schon mal $L(\gamma) < \infty$, da $\|\gamma'(t)\|$ beschränkt sein muß auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Nach Übung 5.2.11 zum Riemannintegral können wir δ zusätzlich so klein wählen, daß für jede Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$ auch noch gilt

$$\left| \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) - \int \|\gamma'\| \right| \leq \varepsilon$$

Da aber die Länge approximierender Polygonzüge beim Hinzufügen von Zwischenpunkten nur größer werden kann, finden wir eine Unterteilung dieser Feinheit mit

$$\left| L(\gamma) - \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| \right| \leq \varepsilon$$

Zusammen erhalten wir

$$\left| L(\gamma) - \int \|\gamma'\| \right| \leq (b-a)\varepsilon + 2\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $L(\gamma) = \int \|\gamma'\|$ wie gewünscht. \square

Beispiel 7.1.15 (Kreislänge). Unsere Definition der Kreiszahl π aus 3.4.1 bedeutet wie bereits erwähnt in der hier eingeführten Terminologie $\pi = L(\gamma)$ für $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$. Bezeichne andererseits $\kappa > 0$ die kleinste positive Zahl mit $u(\kappa) = -1$ für unsere Umlaufabbildung $u(t) := e^{it}$. Es gilt zu zeigen $\kappa = \pi$. Wir wissen $\sin(t) > 0$ für $t \in (0, \kappa)$, folglich fällt \cos streng monoton auf $[0, \kappa]$ und induziert eine Bijektion $\cos : [0, \kappa] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$. Unter der Umparametrisierung mit dem Cosinus erhalten wir $\gamma(\cos t) = (\cos t, \sin t)$. Weil die Länge sich bei monotoner Umparametrisierung nicht ändert, folgern wir

$$\pi = L(\gamma) = L(\gamma \circ \cos) = \int_0^\kappa \|(\gamma \circ \cos)'(t)\| dt = \int_0^\kappa 1 dt = \kappa$$

Ergänzung 7.1.16 (Gestalt einer hängenden Kette). Wir gehen davon aus, daß die Gestalt einer hängenden Kette durch den Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben wird, und zeigen, daß diese Funktion bei Wahl einer geeigneten Längeneinheit und eines passenden Ursprungs der Cosinus hyperbolicus sein muß. Auf das Kettensegment über einem kompakten Intervall $[a, b]$ wirken die Zugkraft in der Kette von beiden Seiten sowie die Schwerkraft. Bezeichnet L_a^b die Länge des besagten Kettensegments und $v_x = (1, f'(x))$ den Tangentenvektor an unsere Kurve bei $(x, f(x))$ mit 1 als erster Komponente, so impliziert das Kräftegleichgewicht die vektorielle Gleichung

$$0 = -c_a v_a + c_b v_b - D(0, L_a^b)$$

für geeignete positive Zahlen c_a, c_b und eine positive Konstante D , die von den physikalischen Konstanten unseres Problems abhängen. Die Positivität von c_a, c_b und D wird dabei auch nur anschaulich motiviert und nicht mathematisch hergeleitet. Mathematisch wäre auch durchaus die an der y -Achse gespiegelte „stehende Kette“ eine mögliche Lösung, aber eben mit negativen c_a, c_b . Durch Betrachtung der ersten Komponenten liefert unsere vektorielle Gleichung für das Kräftegleichgewicht erst einmal $c_a = c_b = c$. Insbesondere ist der horizontale Anteil der Zugspannung in der Kette also an jeder Stelle derselbe. Durch Betrachtung der zweiten Komponenten folgt weiter

$$cf'(a) - cf'(b) = -DL_a^b = -D \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

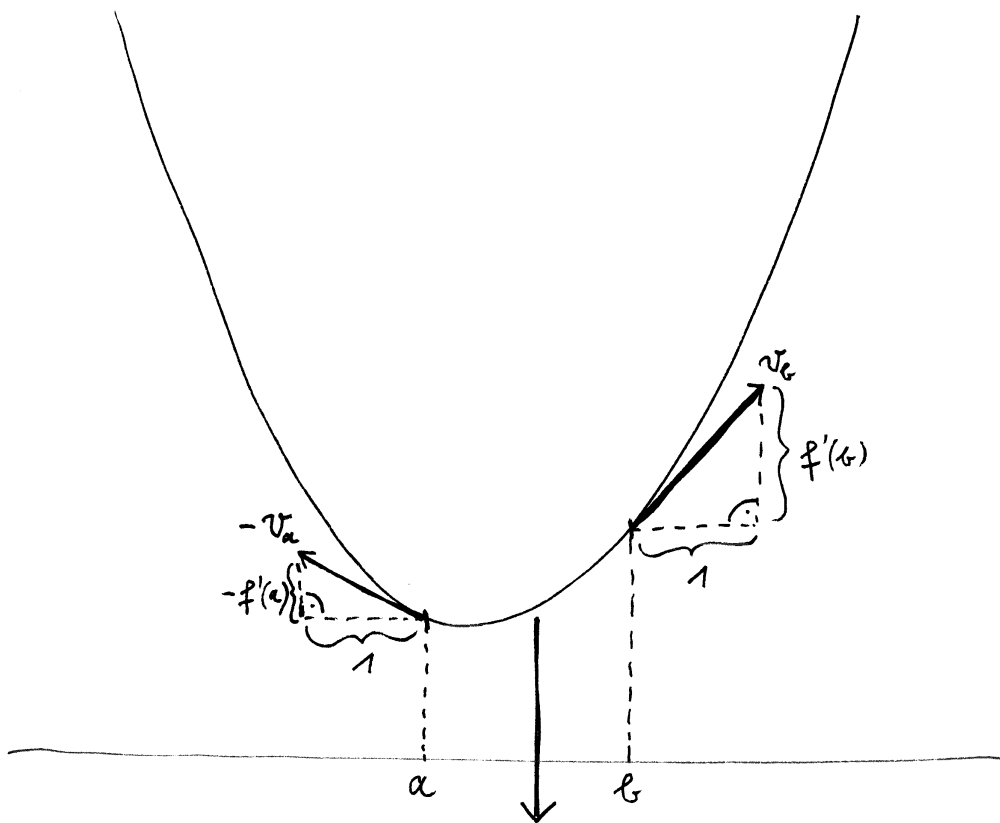


Illustration zur hängenden Kette

Folglich erfüllt unsere Funktion eine Differentialgleichung der Gestalt

$$f'(a) - f'(b) = -k \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

für positives $k := D/c$, mithin gilt $f''(x) = k\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Daraus folgern wir

$$\int_a^b \frac{f''(x) dx}{k\sqrt{1 + f'(x)^2}} = b - a$$

und mit der Substitution $f'(x) = y$, $f''(x) dx = dy$ weiter

$$\int_{f'(a)}^{f'(b)} \frac{dy}{k\sqrt{1 + y^2}} = b - a$$

Dies Integral lösen wir durch die Substitution $y = \sinh t$, $dy = \cosh t dt$ und erhalten als Stammfunktion für den Integranden $k^{-1} \operatorname{arsinh} y$. Damit ergibt sich $k^{-1} \operatorname{arsinh} f'(b) = b + m$ für eine Konstante m und $f'(b) = \sinh(k(b + m))$ und schließlich

$$f(b) = k^{-1} \cosh(k(b + m)) + h$$

für geeignete Konstanten k, m und h . Hier beschreibt k , wie „steil“ die Kette hängt, m ist das Negative der x -Koordinate der Stelle kleinster Höhe, und h beschreibt, wie hoch unsere Kette hängt. In Worten bedeutet das, daß es für eine vorgegebene hängende Kette stets ein orthogonales Koordinatensystem und insbesondere eine Längeneinheit gibt, für die sie genau entlang des Graphen des Cosinus hyperbolicus hängt.

Vorschau 7.1.17. In [TM] 4.6.10 skizziere ich einen Beweis dafür, daß sogar ein „Weg gegebener Länge kleinster potentieller Energie“ zwischen vorgegebenen Aufhängepunkten existiert und eindeutig bestimmt ist und unsere Kettenlinie sein muß.

Übungen

Übung 7.1.18. Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und $A : D \rightarrow \operatorname{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ sowie $B : D \rightarrow \operatorname{Mat}(m \times k; \mathbb{R})$ differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar und die Geschwindigkeit $(AB)'$ der Produktfunktion $AB : D \rightarrow \operatorname{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ wird gegeben durch die Formel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

Übung 7.1.19. Gegeben $s \in \mathbb{R}$ bezeichne $(s \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Multiplikation mit s . Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einem Intervall nach \mathbb{R}^n . Man zeige $L((s \cdot) \circ \gamma) = |s|L(\gamma)$ für $s \neq 0$.

Übung 7.1.20. Für jede Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $L(\gamma) \geq \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$. Ist γ zusätzlich stetig, so haben wir Gleichheit genau dann, wenn γ aus dem Weg $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow t\gamma(a) + (1-t)\gamma(b)$ entsteht durch monotone Umparametrisierung.

Übung 7.1.21. Eine Abbildung von einem reellen Intervall I nach \mathbb{R}^n heiße **nach der Bogenlänge parametrisierend**, wenn ihre Einschränkung auf jedes nicht-leere kompakte Teilintervall dieselbe Länge hat wie das Teilintervall selber. Man zeige, daß sich eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall nach \mathbb{R}^n , die auf keinem mehrpunktigen Teilintervall konstant ist und deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall endliche Länge hat, stets „nach der Bogenlänge parametrisieren“ läßt, daß es also genauer für solch eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stets eine stetige Bijektion $\psi : J \xrightarrow{\sim} I$ von einem weiteren reellen Intervall J nach I gibt derart, daß $\gamma \circ \psi$ nach der Bogenlänge parametrisierend ist.

Übung 7.1.22. Man zeige, daß eine stetig differenzierbare Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in den \mathbb{R}^n genau dann nach der Bogenlänge parametrisierend ist, wenn die zugehörige absolute Geschwindigkeit konstant Eins ist.

Übung 7.1.23. Gegeben ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt man das **Kurvenintegral von f längs γ** als die reelle Zahl

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Man zeige, daß dies Kurvenintegral unabhängig ist von der Parametrisierung und daß es mit denselben Notationen wie oben geschrieben werden kann als der Grenzwert der Riemannsummen

$$S_{\gamma}^r(f) = \sum_{i=0}^{r-1} f(\gamma(a_i)) \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|$$

7.1.24 (Anschauung zum Kurvenintegral). Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges ist in dieser Terminologie das Kurvenintegral der konstanten Funktion Eins längs unseres Weges. Der „Schwerpunkt“ eines durch eine Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschriebenen homogenen gebogenen Drahtes müßte mathematisch dadurch definiert werden, daß seine Koordinaten die Kurvenintegrale der Koordinatenfunktionen x, y, z längs γ dividiert durch die Länge unseres Weges sind. Stellen wir uns allgemeiner eine Erdwrmeanlage vor, bei der kaltes Wasser in einem Rohr durch heißes Gestein gepumpt wird, um am Ende immer noch vergleichsweise kalt aber doch etwas wrmer herauszukommen, und beschreibt γ unser Rohr und f die Wärme der Erde an den jeweiligen Stellen, so würde unser Kurvenintegral nach Einfügen der entsprechenden physikalischen Konstanten die

Temperaturdifferenz zwischen eintretendem und austretendem Wasser beschreiben.

7.1.25 (**Diskussion der Terminologie**). Das hier definierte Kurvenintegral wird oft auch als „Wegintegral“ bezeichnet. Ich will den Begriff des Wegintegrals jedoch für eine andere Konstruktion reservieren, die in [AN2] 8.4 besprochen werden wird.

Übung 7.1.26 (Länge des Graphen einer Funktion). Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird die Länge ihres Graphen, als da heißt die Länge des Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$, gegeben durch das Integral $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$.

7.2 Systeme von linearen Differentialgleichungen

7.2.1. Wir bestimmen für eine gegebene quadratische Matrix $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ alle differenzierbaren Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

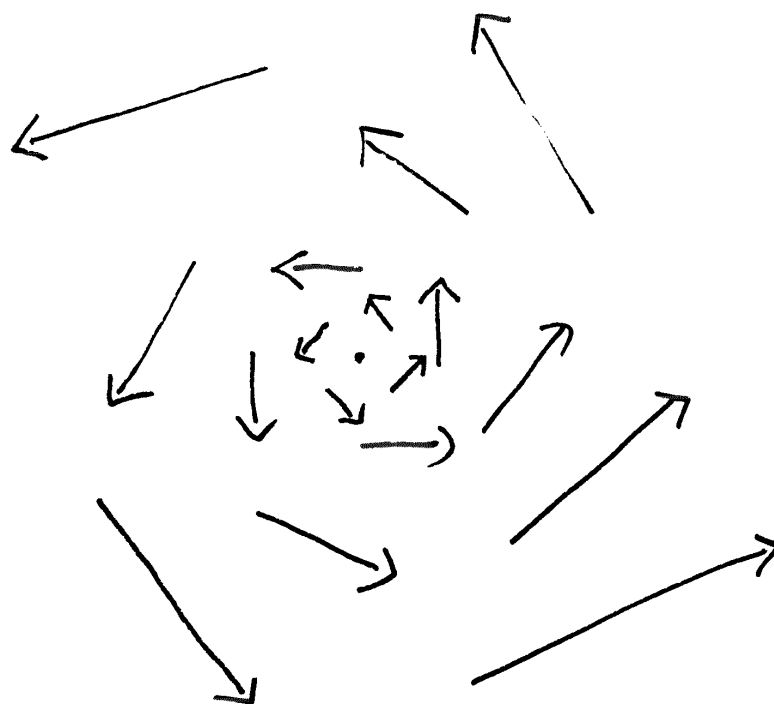
$$\gamma'(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bei dieser Schreibweise fassen wir implizit die Elemente des \mathbb{R}^n als Spaltenvektoren auf, also $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top$, wo der obere Index \top unsere Zeilenmatrix in eine Spaltenmatrix transponiert. Man nennt so eine Gleichung ein **homogenes System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**. Die Spezifikation „mit konstanten Koeffizienten“ grenzt unsere Gleichung ab von dem noch allgemeineren Fall, bei dem auch die Matrix A noch von t abhängen darf, also $A = A(t)$, und der noch außerhalb unserer Reichweite ist. Die Spezifikation „homogen“ grenzt es ab vom allgemeineren Fall einer Gleichung der Gestalt $\gamma'(t) = A\gamma(t) + f(t)$ für eine zusätzlich gegebene vektorwertige Funktion f , den wir in 7.6.1 diskutieren. Anschaulich gesprochen geben wir uns auf dem \mathbb{R}^n das sehr spezielle Vektorfeld $x \mapsto Ax$ vor und interessieren uns für die Bahnen solcher Teilchen, die bei $x \in \mathbb{R}^n$ jeweils die Geschwindigkeit Ax haben.

Beispiel 7.2.2. Im Fall $n = 1$ hat A genau einen Eintrag $a \in \mathbb{R}$ und wir hatten schon in 5.5.9 im Fall $a = 1$ und in Übung 5.5.22 für allgemeines a gesehen, daß alle Lösungen der Differentialgleichung $\gamma' = a\gamma$ die Form $\gamma(t) = c \exp(at)$ haben.

7.2.3. Im Allgemeinen erklären wir die **Exponentialfunktion auf Matrizen** durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \exp : \text{Mat}(n; \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots \end{aligned}$$



Das ebene Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Hier bedeutet $A^0 = I$ nach unserer Konvention 1.5.16 die Einheitsmatrix und unsere unendliche Reihe ist zu verstehen als der Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen. Wir zeigen, daß diese Grenzwerte existieren. Bezeichnen wir dazu für eine quadratische Matrix $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ mit $|A|$ das Maximum der Absolutbeträge ihrer Einträge, so gilt offensichtlich $|AB| \leq n|A||B|$ für jede weitere Matrix $B \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$. Daraus folgt $|A^k| \leq (n|A|)^k$ und dann zeigt die Konvergenz der Exponentialreihe zu $n|A|$ die absolute Konvergenz aller Reihen von Matrixeinträgen in der Exponentialreihe zu A .

Lemma 7.2.4 (Funktionalgleichung für das Exponential von Matrizen). *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, in Formeln $\exp(0) = I$. Sind A, B zwei kommutierende quadratische Matrizen $AB = BA$, so gilt*

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

7.2.5. Insbesondere folgt $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$. Die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge aller quadratischen Matrizen in die Menge aller invertierbaren quadratischen Matrizen

$$\exp : \text{Mat}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$$

Beweis. Aus 7.2.3 wissen wir für $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ um die absolute Konvergenz

$$(\exp A)_{pq} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^k)_{pq}$$

der Exponentialreihe in jedem Matrixeintrag. Aus unseren Erkenntnissen über Umordnung und Produkt absolut konvergenter Reihen folgt dann

$$\begin{aligned} ((\exp A)(\exp B))_{pr} &= \sum_{q=1}^n (\exp A)_{pq} (\exp B)_{qr} \\ &= \sum_{q=1}^n \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{i!j!} (A^i)_{pq} (B^j)_{qr} \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{i!j!} (A^i B^j)_{pr} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((A + B)^k)_{pr} \\ &= (\exp(A + B))_{pr} \end{aligned}$$

Die Annahme $AB = BA$ brauchen wir, um $(A + B)^k = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j$ verwenden zu dürfen. \square

Satz 7.2.6 (Erste lineare Differentialgleichungen). *Ist $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ derart, daß gilt $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

7.2.7. Es ist durchaus möglich, mithilfe dieses Satzes auch ganz konkrete Differentialgleichungen ganz konkret zu lösen. Wir gehen darauf in den weiteren Abschnitten näher ein.

Beweis. Wir behaupten zunächst, daß die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{R}), t \mapsto \exp(tA)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $g'(t) = A \exp(tA)$. In der Tat wissen wir nach 6.1.16, daß man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, und unsere Formel ergibt sich, wenn wir diese Erkenntnis anwenden auf alle Einträge unserer Matrix. Nach der matrixwertigen Produktregel 7.1.18 ist nun auch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \exp(tA)c$ differenzierbar mit Ableitung $\gamma'(t) = A \exp(tA)c = A\gamma(t)$ und die Bedingung $\gamma(0) = c$ ist offensichtlich. Unsere Funktion ist damit eine Lösung der Differentialgleichung mit dem vorgegebenen Anfangswert. Ist umgekehrt $\gamma(t)$ eine beliebige Lösung unserer Differentialgleichung $\gamma' = A\gamma$, so berechnen wir die Ableitung der Funktion $t \mapsto h(t) = \exp(-tA)\gamma(t)$ mithilfe der matrixwertigen Produktregel 7.1.18 und erhalten

$$h'(t) = -A \exp(-tA)\gamma(t) + \exp(-tA)\gamma'(t) = 0$$

Die Funktion $h(t) = \exp(-tA)\gamma(t)$ ist also konstant mit Wert $\gamma(0)$ und mit der matrixwertigen Funktionalgleichung 7.2.4 folgt $\gamma(t) = \exp(tA)\gamma(0)$. \square

Satz 7.2.8 (Erste lineare Differentialgleichungen, Variante). *Ist $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $t_0 \in I$ ein Punkt, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Anfangswert $\gamma(t_0) = c$ derart, daß gilt $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in I$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp((t - t_0)A)c$$

Beweis. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der Beweis von 7.2.6. \square

7.2.9. Ist $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, so bildet die Menge aller differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in I$ einen Untervektorraum L im Vektorraum $\text{Ens}(I, \mathbb{R}^n)$ aller Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$, den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung, und das Auswerten an einer beliebigen Stelle $t_0 \in I$ liefert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n, \gamma \mapsto \gamma(t_0)$, den **Anfangswertisomorphismus**. All das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satz 7.2.8.

Übungen

Übung 7.2.10. Gegeben eine Diagonalmatrix $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ haben wir $\exp(A) = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$. Analoges gilt für blockdiagonale Matrizen.

7.3 Gedämpfte Schwingungen

7.3.1. Wir interessieren uns für die Bewegung eines Massepunktes, der an einer Feder aufgehängt ist und dessen Bewegung durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung gedämpft wird. Mißt die Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ seine Auslenkung von der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt t , so muß unsere Funktion aus physikalischen Gründen eine Differentialgleichung zweiten Grades der Gestalt

$$x'' = -ax' - bx$$

erfüllen, wobei die Konstanten a und b die Stärke der Feder und der Dämpfung ausdrücken und in physikalisch relevanten Fällen nichtnegativ sind. Wir lösen diese Differentialgleichung hier erst einmal ad hoc und erheben danach in 7.4.2 diesen Zugang zur Methode.

Lemma 7.3.2 (Lösung einiger Schwingungsgleichungen). *Seien reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x'' + ax' + bx = 0$ bildet einen Untervektorraum des Raums $\text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, den **Lösungsraum** L unserer Differentialgleichung;*
2. *Die Abbildung $x \mapsto (x(0), x'(0))$ liefert einen Isomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ dieses Lösungsraums mit dem \mathbb{R}^2 , den **Anfangswertisomorphismus**;*
3. *Hat das Polynom $X^2 + aX + b$ zwei verschiedene reelle Nullstellen λ und μ , so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = e^{\lambda t}$ und $x_2(t) = e^{\mu t}$ eine Basis des Lösungsraums. Hat es dahingegen eine doppelte reelle Nullstelle λ , so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = e^{\lambda t}$ und $x_2(t) = t e^{\lambda t}$ eine Basis des Lösungsraums.*

Vorschau 7.3.3. Um den Fall, daß unser Polynom keine reelle Nullstelle hat, werden wir uns gleich noch gesondert kümmern.

Beweis. Teil 1 scheint mir offensichtlich. Um Teil 2 zu zeigen beachten wir, daß die Vorschrift $x \mapsto (x, x')$ offensichtlich einen Isomorphismus zwischen unserem Lösungsraum L und dem Lösungsraum des Systems $\gamma'_1 = \gamma_2, \gamma'_2 = -b\gamma_1 - a\gamma_2$ induziert, das in Matrixschreibweise die Gestalt $\gamma' = A\gamma$ annimmt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Teil 2 folgt damit aus 7.2.9. Für Teil 3 müssen wir folglich nur prüfen, daß die beiden angegebenen Funktionen in der Tat linear unabhängige Lösungen sind. Das kann dem Leser überlassen bleiben. \square

Ergänzung 7.3.4 (Lösung mithilfe des Exponentials von Matrizen). Statt beim Beweis von Teil 3 des vorhergehenden Satzes mögliche Lösungen einfach zu erraten, hätten wir uns auch daran erinnern können, daß ja nach 7.2.8 jede Lösung von der Form

$$x(t) = \gamma_1(t) = \text{pr}_1(\exp(tA)c)$$

sein muß für $c = (x(0), x'(0))$. Jetzt brauchen wir weitergehende Kenntnisse in linearer Algebra. Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ergibt sich zu $X^2 + aX + b$. Hat es zwei verschiedene reelle Nullstellen λ, μ und bilden wir eine Matrix P mit Eigenvektoren zu λ und μ als Spalten, so gilt $A = P \text{diag}(\lambda, \mu)P^{-1}$ und $\exp(tA) = P \text{diag}(e^{\lambda t}, e^{\mu t})P^{-1}$ und wir erkennen auf Anhieb, daß jede Lösung eine Linearkombination der Gestalt $x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}$ sein muß. Im Fall einer doppelten reellen Nullstelle finden wir ähnlich ein P mit

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

und die Funktionalgleichung für das Exponential von Matrizen 7.2.4 liefert

$$\exp \begin{pmatrix} u & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u & t e^u \\ 0 & e^u \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich so als eine Linearkombination der Gestalt $\alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}$.

7.3.5. Im Fall der gedämpften Schwingung hat unser Polynom $X^2 + aX + b$ die beiden Nullstellen

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Bei hinreichend großer Dämpfung $a^2/4 \geq b$ erhalten wir reelle nichtpositive Lösungen und unser Massepunkt kehrt mit höchstens einmaligem Überschwingen zum Ruhezustand zurück. Im Fall kleiner Dämpfung $a^2/4 < b$ hat unser Polynom dahingegen keine reellen Nullstellen mehr und stattdessen die beiden komplexen Nullstellen $\pm i\omega - a/2$ mit $\omega = \sqrt{b - a^2/4} > 0$. Um hier weiterzukommen verallgemeinern wir zunächst einmal alles bisher Gesagte ins Komplexe.

Proposition 7.3.6 (Lösung der Schwingungsgleichung im Komplexen). Seien komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben.

1. Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x'' + ax' + bx = 0$ bildet einen komplexen Untervektorraum des Raums $\text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, den **Lösungsraum** L unserer Differentialgleichung;

2. Die Abbildung $x \mapsto (x(0), x'(0))$ liefert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$, den **Anfangswertisomorphismus**;
3. Hat das Polynom $X^2 + aX + b$ zwei verschiedene Nullstellen λ und μ , so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = e^{\lambda t}$ und $x_2(t) = e^{\mu t}$ eine Basis des Lösungsraums L . Hat es eine doppelte Nullstelle λ , so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = e^{\lambda t}$ und $x_2(t) = t e^{\lambda t}$ eine Basis des Lösungsraums.

Beweis. Der Beweis ist identisch zum Beweis im Reellen 7.3.2, sobald man die dazu benötigten Hilfsmittel ins Komplexe verallgemeinert hat. Das gelingt ohne weitere Schwierigkeiten und ich fasse es nur kurz zusammen. Man erklärt zunächst die Exponentialabbildung auf komplexen quadratischen Matrizen durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \exp : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{aligned}$$

und zeigt, daß $g : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C})$, $g(t) = \exp(tA)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $g'(t) = A \exp(tA)$. Dann zeigt man die Produktregel für Abbildungen der Zahlengerade in Räume komplexer Matrizen und folgert, daß die Abbildung $\gamma(t) = \exp(tA)c$ eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ und

$$\gamma'(t) = A\gamma(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Schließlich prüft man wieder mit der matrixwertigen Produktregel, daß für jede Lösung γ dieser Differentialgleichung die Abbildung $\exp(-tA)\gamma(t)$ die Ableitung Null hat und folglich konstant ist. Daraus folgt der Anfangswertisomorphismus und die Erkenntnis, daß die Lösungsmenge der Differentialgleichung $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ ein n -dimensionaler komplexer Untervektorraum des Abbildungsraums $\text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ ist. Indem wir von unserer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung übergehen, ergeben sich die beiden ersten Aussagen der Proposition. Durch explizites Rechnen folgt dann leicht der dritte Teil. \square

7.3.7 (Beziehung zwischen reellen und komplexen Lösungen). Sind in der Situation aus 7.3.6 die Koeffizienten a, b beide reell, so bilden die reellwertigen Lösungen unseres Systems nach 7.3.2 einen zweidimensionalen reellen Untervektorraum $L_{\mathbb{R}} \subset \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Seine komplexwertigen Lösungen bilden dagegen nach 7.3.6 einen zweidimensionalen komplexen Untervektorraum $L_{\mathbb{C}} \subset \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, der stabil ist unter dem Übergang zu den komplex konjugierten Funktionen, in Formeln

$$f \in L_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \bar{f} \in L_{\mathbb{C}}$$

Per definitionem gilt weiter $L_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{C}} \cap \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Haben wir nun Erzeuger f_1, \dots, f_r für den \mathbb{C} -Vektorraum der komplexwertigen Lösungen gefunden, so

erzeugen deren Realteile und Imaginärteile den \mathbb{R} -Vektorraum der reellwertigen Lösungen. In der Tat schreibt sich jede Lösung f als $f = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r$ mit $c_\nu \in \mathbb{C}$, und ist f reellwertig und schreiben wir $c_\nu = a_\nu + ib_\nu$ mit $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ und nehmen auf beiden Seiten den Realteil, so ergibt sich für f die Darstellung

$$f = a_1 \operatorname{Re}(f_1) - b_1 \operatorname{Im}(f_1) + \dots + a_r \operatorname{Re}(f_r) - b_r \operatorname{Im}(f_r)$$

7.3.8 (Gedämpfte Schwingungen mit kleiner Dämpfung). Im Fall der gedämpften Schwingungen 7.3.1 mit kleiner Dämpfung und folglich komplexen Nullstellen $\pm i\omega - a/2$ erhalten wir die komplexen Lösungen $x_\pm(t) = e^{-at/2} e^{\pm i\omega t}$ und die Eulerformel liefert, daß die Funktionen

$$x_1(t) = e^{-at/2} \cos \omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-at/2} \sin \omega t$$

den Raum der reellwertigen Lösungen aufspannen. Die Größe ω heißt in diesem Zusammenhang auch die **Winkelgeschwindigkeit**. Die Additionstheoreme zeigen, daß sich jede reelle Linearkombination $\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$ der Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ als Sinuswelle mit **Amplitude** k und **Phase** ϕ in der Form

$$\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) = k \sin(\omega t + \phi)$$

schreiben läßt, für $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und ϕ einer Lösung des Gleichungssystems $k \cos \phi = \alpha$, $k \sin \phi = \beta$. Im Fall kleiner Dämpfung kann die allgemeine Lösung also geschrieben werden als $x(t) = k e^{-at/2} \sin(\omega t + \phi)$ und beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude bei positiver Dämpfung $a > 0$ exponentiell abfällt.

Vorschau 7.3.9. Gegeben $A, P \in \operatorname{Mat}(n; \mathbb{C})$ mit P invertierbar zeigt man leicht die Regel $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$. Die Berechnung des Exponentials einer beliebigen quadratischen Matrix wird Ihnen auf dieser Grundlage leicht gelingen, sobald sie in der linearen Algebra die Theorie der „Jordan’schen Normalform“ [LA2] 3.4.5 kennengelernt haben.

Übungen

Übung 7.3.10. Ist $A \in \operatorname{Mat}(n; \mathbb{R})$ eine reelle Matrix und $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine komplexe Lösung der Differentialgleichung $\gamma'(t) = A\gamma(t)$, so sind ihr koordinatenweise gebildeter Real- und Imaginärteil $\operatorname{Re} \gamma$ und $\operatorname{Im} \gamma$ reelle Lösungen. Erzeugt eine Menge \mathbb{C}^n -wertiger Funktionen den \mathbb{C} -Vektorraum der \mathbb{C}^n -wertigen Lösungen unserer Differentialgleichung, so erzeugen ihre Real- und Imaginärteile zusammen den \mathbb{R} -Vektorraum der \mathbb{R}^n -wertigen Lösungen.

7.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

7.4.1. Die Erfahrungen, die wir bei der Behandlung gedämpfter Schwingungen gemacht haben, fassen wir nun noch allgemeiner.

Satz 7.4.2. Seien komplexe Zahlen $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ gegeben.

1. Die komplexwertigen n -mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_0f = 0$ bilden einen Untervektorraum im Raum aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung;
2. Die Abbildung $f \mapsto (f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0))$ ist ein Isomorphismus dieses Lösungsraums mit dem \mathbb{C}^n , der **Anfangswertisomorphismus**;
3. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ der Vielfachheit r , so sind die Funktionen $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{r-1}e^{\lambda t}$ Lösungen unserer Differentialgleichung, und durchläuft λ alle Nullstellen unseres Polynoms, so bilden diese Lösungen eine Basis des Lösungsraums.

Ergänzung 7.4.3. Der Satz bleibt gültig, wenn wir darin \mathbb{R} durch ein beliebiges mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ersetzen.

Beweis. Teil 1 ist offensichtlich. Um die in Teil 2 behauptete Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen beachten wir zunächst, daß unsere Überlegungen aus 7.2.6 ohne Änderungen auch im Komplexen gültig sind. Für eine quadratische Matrix $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ mit komplexen Einträgen haben also die differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, die die Differentialgleichung $g' = Ag$ lösen, die Form $g(t) = (\exp tA)g(0)$ wo wir den Anfangswert $g(0) \in \mathbb{C}^n$ frei wählen dürfen. Insbesondere definiert die Abbildung $g \mapsto g(0)$ einen Isomorphismus vom Lösungsraum der Differentialgleichung $g' = Ag$ mit dem \mathbb{C}^n . Jetzt beachten wir, daß die Vorschrift $f \mapsto g = (f, f', f'', \dots, f^{(n-1)})^\top$ eine Bijektion induziert zwischen der Menge aller n -mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die die Differentialgleichung aus dem Satz erfüllen, und der Menge aller differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, die das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} g'_0 &= g_1 \\ g'_1 &= g_2 \\ &\vdots \\ g'_{n-1} &= a_{n-1}g_{n-1} + \dots + a_1g_1 + a_0g_0 \end{aligned}$$

lösen, wo wir etwas ungewöhnlich $g = (g_0, \dots, g_{n-1})$ indiziert haben der besseren Übersichtlichkeit halber. Damit folgt Teil 2 aus 7.2.6.

3. Motiviert durch unsere Erkenntnisse bei der Lösung von 7.3.6 beginnen wir

mit dem Ansatz $f(t) = e^{\lambda t}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Mögliche λ sind dann offensichtlich genau die Nullstellen des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$. Ist λ eine Nullstelle der Vielfachheit r , so sind sogar, wieder in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse bei der Lösung von 7.3.6, auch $te^{\lambda t}, \dots, t^{r-1}e^{\lambda t}$ noch Lösungen unserer Gleichung. Um das einzusehen, betrachten wir den Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und fassen das Ableiten auf als eine lineare Abbildung

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Zerfällt unser Polynom in Linearfaktoren

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

so können wir den Operator $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ auch schreiben als Verknüpfung der Operatoren $(D - \lambda_i)^{n_i}$, und es reicht folglich $(D - \lambda)^r t^{r-1} e^{\lambda t} = 0$ nachzuweisen. Nun gilt aber offensichtlich

$$(D - \lambda)t^m e^{\lambda t} = mt^{m-1} e^{\lambda t}$$

und die Behauptung folgt per Induktion. Um zu zeigen, daß die $t^j e^{t\lambda_i}$ für $0 \leq j < n_i$ eine Basis des Lösungsraums bilden, reicht es deren lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra, so erkennt man leicht, daß die $t^m e^{\lambda t}$ jeweils zum Hauptraum $\text{Hau}(D; \lambda)$ gehören und muß wegen [LA2] 3.2.7 nur noch die lineare Unabhängigkeit der $t^m e^{\lambda t}$ für festes λ und variables m zeigen, die wiederum sofort aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen t^m folgt. Man vergleiche hierzu auch [LA2] 3.2.9.

Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra noch nicht, so muß man mehr arbeiten. Man setzt dann etwa eine Linearkombination $\sum c_{ji} t^j e^{\lambda_i t} = 0$ an und muß zeigen, daß alle c_{ji} verschwinden. Sonst könnten wir aber nach eventueller Ummummerierung der Nullstellen ein k finden mit $c_{k1} \neq 0$ aber $c_{j1} = 0$ für $j > k$. Wenden wir dann auf unsere Summe den Differentialoperator

$$(D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2)^N \dots (D - \lambda_r)^N$$

an für hinreichend grosses N , so ergibt sich $c_{k1} e^{t\lambda_1} = 0$ im Widerspruch zu unserer Annahme $c_{k1} \neq 0$. □

Übungen

Ergänzende Übung 7.4.4. Man bestimme eine Basis des komplexen sowie des reellen Lösungsraums der Differentialgleichung $f''' = f$.

7.5 Gekoppelte Schwingungen*

7.5.1. In diesem Abschnitt wird mehr lineare Algebra benötigt, als ich im derzeitigen Studienplan voraussetzen kann.

Beispiel 7.5.2. An gegenüberliegenden Wänden eines Zimmers ist jeweils ein Wägelchen mit einer Feder befestigt und die beiden Wägelchen sind auch untereinander durch eine Feder verbunden. Bezeichnen $x(t)$ beziehungsweise $y(t)$ die Position des ersten beziehungsweise zweiten Wägelchens auf einer Skala, auf der $x = y = 0$ den Gleichgewichtszustand bedeuten und größere x beziehungsweise y einen größeren Abstand eines Wägelchens von „seiner“ Wand, so genügt unser System einer Differentialgleichung

$$\begin{aligned}x'' &= -ax - b(x + y) \\y'' &= -cy - d(y + x)\end{aligned}$$

für Konstanten $a, b, c, d > 0$, in die die Stärke der Federn und die Massen der Wägelchen eingehen. Erklären wir $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto v(t) = (x(t), y(t))$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -(a+b) & -b \\ -d & -(c+d) \end{pmatrix}$$

so können wir unser System schreiben als

$$v''(t) = Av(t)$$

Der Leser mag als Übung zeigen, daß der Lösungsraum vierdimensional sein muß. Unsere Matrix A hat, wie man dem charakteristischen Polynom ansieht, negative reelle Eigenwerte λ_1, λ_2 . Also hat bereits der \mathbb{R}^2 eine Basis v_1, v_2 aus Eigenvektoren von A . Dann sind die vier Funktionen

$$t \mapsto \exp((\pm\sqrt{\lambda_i})t)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2$$

offensichtlich Lösungen, und ähnliche Argumente wie im vorhergehenden Beispiel zeigen, daß sie sogar eine Basis Lösungsraums bilden. Setzen wir $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, so erhalten wir eine alternative Basis des Lösungsraums durch die vier Funktionen

$$\cos(t\omega_i)v_i \quad \text{und} \quad \sin(t\omega_i)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2.$$

Ist noch spezieller unsere Situation symmetrisch unter der Vertauschung der beiden Wägelchen, haben sie also dieselbe Masse und sind durch dieselben Federn mit den Wänden verbunden, so folgt $b = d$ und $a = c$ und wir erhalten $v_1 = (1, 1)$ mit $\lambda_1 = -a - 2b$ sowie $v_2 = (1, -1)$ mit $\lambda_2 = -a$. Diese Eigenvektoren entsprechen den zwei **Eigenschwingungen** des Systems, bei denen beide Wägelchen zu

allen Zeiten in derselben beziehungsweise in entgegengesetzten Richtungen fahren. Die Bewegung der einzelnen Wägelchen $x(t) = x_+(t)$ und $y(t) = x_-(t)$ wird dann beschrieben durch

$$\operatorname{Re} (c_1 e^{i\omega_1 t} \pm c_2 e^{i\omega_2 t}) = \operatorname{Re} (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} (c_1 e^{i(\omega_1 + \omega_2)t/2} \pm c_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2}))$$

mit komplexen c_i . Nimmt man hier zum Beispiel $c_1 = c_2 = 1$, so ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t/2) \cos((\omega_1 + \omega_2)t/2) \\ y(t) &= 2 \sin((\omega_1 - \omega_2)t/2) \sin((\omega_1 + \omega_2)t/2) \end{aligned}$$

Ist die verbindende Feder schwach im Verhältnis zu den Federn gegen die Wände, in Formeln $a \gg b$, so liegen die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 und damit auch die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 verhältnismäßig nah beieinander. Im Versuch kann man in diesem Fall schon sehen, wie die beiden Wägelchen mit der Winkelgeschwindigkeit $(\omega_1 - \omega_2)/2$ ihre Energie untereinander austauschen.

7.5.3. Im übrigen ist es auch a priori klar, daß in der symmetrischen Situation die zweielementige Symmetriegruppe unserer Gleichung, die der Vertauschung der beiden Wägelchen entspricht, auf dem Lösungsraum operieren muß, daß wir also uns schon von Anfang an hätten darauf beschränken dürfen, nur die symmetrischen und die antisymmetrischen Lösungen zu bestimmen und die allgemeine Lösung als Linearkombination solcher speziellen Lösungen zu erhalten.

7.6 Angeregte Schwingungen

7.6.1. Ist A eine komplexe $(n \times n)$ -Matrix und ist zusätzlich eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ vorgegeben und man sucht alle differenzierbaren $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, die das „inhomogene“ System von Differentialgleichungen

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) + f(t)$$

lösen, so rät einem die Methode der **Variation der Konstanten** zum Ansatz

$$\gamma(t) = \exp(tA)g(t)$$

Man erkennt leicht, daß dieser Ansatz eine Lösung liefert, wenn $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ differenzierbar ist und die Gleichung $f(t) = \exp(tA)g'(t)$ erfüllt, als da heißt für

$$g(t) = \int^t \exp(-\tau A) f(\tau) d\tau$$

Hier ist $g(t)$ als unbestimmtes Integral nur bis auf eine additive Konstante aus dem \mathbb{C}^n wohldefiniert. Daß wir mit diesem Verfahren tatsächlich auch alle Lösungen

$\gamma(t)$ unseres inhomogenen Systems von Differentialgleichungen erhalten ergibt sich daraus, daß ja ganz offensichtlich die Differenz von je zwei Lösungen unserer inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung $\gamma' = A\gamma(t)$ sein muß. In der Sprache der linearen Algebra bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung also einen affinen Teilraum des Raums aller Funktionen, dessen Raum von Richtungsvektoren der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist.

Beispiel 7.6.2 (Angeregte Schwingungen). Eine Lampe ist mit einer Feder an einer vibrierenden Decke aufgehängt. Sei $h(t)$ die Auslenkung der Decke zur Zeit t und $x(t)$ die Höhe der Lampe zur Zeit t , beide gemessen auf einer gegen den Boden festen Skala, auf der $h = x = 0$ einen Zustand beschreibt, in dem sich die Federkraft, die die Lampe zur Decke zieht, und die Schwerkraft der Lampe die Waage halten. So genügt $x(t)$ einer Differentialgleichung der Gestalt

$$x''(t) = -a(x(t) - h(t))$$

Hierbei ist a positiv und hängt von der Masse der Lampe und der Federkonstante ab. Wir schreiben das um zu einem System erster Ordnung

$$\begin{aligned}\gamma'_0 &= \gamma_1 \\ \gamma'_1 &= -a\gamma_0 + ah\end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 0 \\ ah \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ist $X^2 + a$, die Eigenwerte ergeben sich zu $\pm i\eta$ für $\eta = \sqrt{a}$ und als zugehörige Eigenvektoren finden wir $(1, \pm i\eta)^\top$. Wir nehmen diese Eigenvektoren als Spalten einer Matrix

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\eta & i\eta \end{pmatrix}$$

So haben wir offensichtlich $AP = PB$ alias $P^{-1}AP = B$ mit $B = \text{diag}(-i\eta, i\eta)$ einer Diagonalmatrix und $\varphi := P^{-1}\gamma$ erfüllt die Differentialgleichung $\varphi'(t) = B\varphi(t) + f(t)$ mit

$$f(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\eta} \begin{pmatrix} i\eta & -1 \\ i\eta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{ah(t)}{2i\eta} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich betrachte von nun an diese Differentialgleichung, da es mir übersichtlicher scheint, mit $\exp tB$ anstelle von $\exp tA = P(\exp tB)P^{-1}$ zu hantieren. Nach

unseren Überlegungen 7.6.1 lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$\varphi(t) = \exp(tB)g(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \int^t \exp(-\tau B)f(\tau) d\tau$$

Nehmen wir zum Beispiel an, unsere Decke vibriere mit $h(t) = k \sin(\omega t)$ für $\omega > 0$, so ergibt sich die erste Komponente $g_1(t)$ von $g(t)$ zu

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -\frac{ka}{2i\eta} \int^t e^{i\tau\eta} \left(\frac{e^{i\tau\omega} - e^{-i\tau\omega}}{2i} \right) d\tau \\ &= \frac{ka}{4\eta} \int^t e^{i\tau(\eta+\omega)} d\tau - \frac{ka}{4\eta} \int^t e^{i\tau(\eta-\omega)} d\tau \\ &= \text{konst} + \frac{ka}{4i\eta(\eta+\omega)} e^{it(\eta+\omega)} - \begin{cases} \frac{ka}{4i\eta(\eta-\omega)} e^{it(\eta-\omega)} & \text{falls } \eta \neq \omega; \\ \frac{ka}{4\eta} t & \text{falls } \eta = \omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Ähnlich berechnen wir $g_2(t)$ und erkennen, daß in dem Fall, daß die Eigenfrequenz der Lampe nahe an der Frequenz der Decke ist, also für $|\eta - \omega|$ klein, die Schwingung sehr groß werden kann und im Fall $\eta = \omega$ die Auslenkung eventuell sogar gegen Unendlich strebt. In der Physik spricht man in diesen Fällen von **Resonanz** beziehungsweise von einer **Resonanzkatastrophe**. Seien nun die Eigenschwingung unseres Systems $t \mapsto e^{i\eta t}$ und die Anregung $t \mapsto h(t)$ oder gleichbedeutend $t \mapsto f(t)$ periodisch mit derselben Periode. Nehmen wir der Einfachheit halber $p = 2\pi$ an, so finden wir $\eta \in \mathbb{Z}$, und entwickeln wir f in eine „Fourierreihe“, so zeigt unsere obige Formel $g(t) = \int^t \exp(-\tau B)f(\tau) d\tau$, daß nur die Summanden $c_{\pm\eta} e^{\pm i\eta t}$ für die Resonanz verantwortlich sind in dem Sinne, daß alle anderen Summanden der Fourierreihe nur periodische Beiträge zu $g(t)$ liefern. Später in [AN3] 3.1.2 folgende werden Sie lernen, daß $g_1(t)$ im allgemeinen bis auf eine Konstante auch interpretiert werden kann als der „Wert bei $-\eta$ der Fouriertransformierten des Produkts von f_1 mit der charakteristischen Funktion des Intervalls $[0, t]$ “.

8 Danksagung

Dieser Text hat sich über lange Jahre aus meiner Auseinandersetzung mit der Lehrbuchliteratur im Rahmen meiner Vorlesungstätigkeit entwickelt. Besonders prägend waren die Einflüsse von Forster [For92], Königsberger [Kön97], Lang [Lan68], Rudin [Rud76], Bröcker [Brö95], Courant [Cou71] und Dieudonné [Die03]. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Christina Pflanz, Olaf Schnürer,

...

9 Tagebuch WS 22/23

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung Analysis 1, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 18.10 Vollständige Induktion und binomische Formel 1.1.1. Mengen 1.2. Leere Menge noch nicht eingeführt.
- 19.10 Kardinalität. Leere Menge. Teilmengen 1.2.9. Potenzmenge. Mengenoperationen 1.3. Abbildungen 1.4. Identität, Konstanten und konstante Abbildungen.
- 25.10 Injektiv, surjektiv, bijektiv. Verknüpfung von Abbildungen 1.4.9. Umkehrabbildung. Mengen mit Verknüpfung 1.5. Assoziativ, kommutativ, neutrales Element, Monoid. Iterierte Verknüpfung, Regeln. Invertierbare Elemente, Gruppe, negativ iterierte Verknüpfung, Regeln.
- 26.10 Homomorphismen. Körper im Sinne der Algebra 1.6. Morphismus $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zu jedem Körper. Das noch fertig diskutieren. Noch nicht: Homomorphismen oder Isomorphismen von Körpern.
 - 2.11 Homomorphismen von Körpern und Ringen. Der eindeutige Ringhomomorphismus von \mathbb{Z} in einen beliebigen Ring. Rationale Wurzeln 2.1.1. Ordnungen und Teilordnungen 2.3, angeordnete Ringe und Körper, Supremum und Infimum, Charakterisierung der reellen Zahlen. Noch nicht Isomorphismen von Körpern oder Ringen. Noch nicht Intervall.
 - 8.11 Die reellen Zahlen 2.4, Konstruktion und Eindeutigkeit. Noch nicht: Rationale und reelle Zahlen im Vergleich 2.5.
 - 9.11 Kurze Diskussion der Eindeutigkeit von \mathbb{R} . Rationale und reelle Zahlen im Vergleich 2.5. Intervalle und Umgebungen 3.2. Beginn der Diskussion der Stetigkeit 3.1. Stetigkeit der Addition bisher nur graphisch.
 - 15.11 Stetigkeit der Addition nochmal formal. Konstante Funktionen sind stetig, Einbettungen sind stetig. Stetig meint stetig bei jedem Punkt. Stetigkeit von Multiplikation, Verknüpfung. Komponentenweise Stetigkeit. Zwischendrin Anschauung für Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Folgerungen. Im wesentlichen Abschnitt 3.1. Epsilon-Delta-Charakterisierung der Stetigkeit.
 - 16.11 Lokalität der Stetigkeit. Zwischenwertsatz 3.3.8. Stetigkeit monotoner Surjektionen auf Intervalle 3.3.2. Umkehrfunktionen, Wurzeln. Kreiszahl 3.4.1.

- 22.11 Grenzwerte 3.5. Häufungspunkte, Eindeutigkeit stetiger Fortsetzung, Definition des Grenzwerts, Charakterisierung für Folgenkonvergenz, auch ε - N -Kriterium. Lokalität, Vertauschen mit Anwenden stetiger Funktionen, speziell auch für Folgen. Konvergenz von Teilfolgen.
- 23.11 Grenzwert als komponentenweiser Grenzwert, Grenzwerte fertig 3.5. Bis Bolzano-Weierstraß 3.6.6.
- 29.11 Konvergenz von Reihen 4.1. Absolute Konvergenz. Cauchy-Folgen und deren Konvergenz. Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Konvergenz der Exponentialreihe. Umordnungssatz.
- 30.11 Wachstum und Zerfall 4.2. Logarithmus und allgemeine Potenzen 4.3.
- 6.12 Komplexe Zahlen 4.4 und komplexe Exponentialfunktion 4.5.
- 7.12 Stetige Gruppenwege in der Kreisgruppe. Trigonometrische Funktionen 4.5.
- 13.12 Nocheinmal Grenzwerte und Stetigkeit wiederholen. Quader 3.2.19 einführen. Epsilon-Delta-Kriterium 3.2.21 beweisen. Folgenkonvergenzkriterium 3.5.13 beweisen. Zeit lassen. Stetige Funktionen auf Kompakta 5.1. Fundamentalsatz der Algebra.
- 14.12 Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta. Integration stetiger Funktionen 5.2.
- 20.12 Ableitung 5.3. Ableitungsregeln 5.4. Lemma 5.4.15 weggelassen, das die Existenz einer beliebig differenzierbaren zeigt, die Null ist für $x \leq 0$ und positiv für $x > 0$. Ableitung des Arcussinus besprochen, Ableitung des Arcustangens weggelassen.
- 21.12 Differenzierbarkeit von Umkehrfunktion 5.4.11 bewiesen. Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung 5.5. Brechungsgesetz weggelassen.
- 10.1 Hospital 5.6.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 5.7.1. Substitutionsregel, erste Beispiele.
- 11.1 Partielle Integration 5.8. Beweis der Irrationalität von π weggelassen. Hyperbolische Funktionen 5.9. $\int \sqrt{1+t^2}$. Integration rationaler Funktionen begonnen. $\int 1/(1-t^2)$. Integral $\int 1/(1+t^2)$ noch unfertig.
- 17.1 Integration rationaler Funktionen 5.10, Zugang über komplexe Partialbruchentwicklung. Integration rationaler Ausdrücke in anderen Funktionenpaaren weggelassen. Potenzreihen und Konvergenzradius. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Gleichmäßige Konvergenz bei Potenzreihen noch nicht fertig diskutiert 6.1.

- 18.1 Gleichmäßige Konvergenz bei Potenzreihen fertig diskutiert. Gliedweise Ableitung und Integration von Potenzreihen 6.1. Binomische Reihe. Beispiele. Noch nicht Beispiel mit Berechnung höherer Ableitungen.
- 24.1 Beispiel mit Berechnung höherer Ableitungen. Taylorreihe 6.2 und ihre Restglieder.
- 25.1 Rechnen mit Approximationen 6.3. Abelscher Grenzwertsatz 6.4. Bogenlänge und Geschwindigkeit 7.1.2 begonnen. Geschwindigkeitsvektor eingeführt. Bogenlänge eingeführt. Bogenlänge als Integral der Geschwindigkeit. Noch nicht Unabhängigkeit der Bogenlänge von der Parametrisierung.
- 31.1 Schrankensatz. Bogenlänge als Integral der Geschwindigkeit mit Beweis. Hängende Kette.
- 1.2 Systeme von linearen Differentialgleichungen. Schwingungsgleichung und ihr Lösung. Noch nicht der Fall einer mehrfachen Nullstelle.
- 7.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung 7.4.2. Methode der Variation der Konstanten 7.6.1. Resonanzkatastrophe.
- 8.2 Axiomatik der euklidischen Ebene, fasteuklidische Ebenen, hyperbolische Ebene [EL] 1.1.1 folgende. Nicht prüfungsrelevant. Kontrastiert die „klassische Axiomatik“ des Euklid, in der die Ebene durch geometrisch sinnvolle Axiome modelliert wird, mit der „modernen Axiomatik“, in der die Zahlengerade durch algebraisch sinnvolle Axiome modelliert wird.

Literatur

- [AL] **Skriptum Algebra und Zahlentheorie.** Wolfgang Soergel.
- [AN2] **Skriptum Analysis 2.** Wolfgang Soergel.
- [AN3] **Skriptum Analysis 3.** Wolfgang Soergel.
- [Brö95] Theodor Bröcker. *Analysis 1 und 2.* Spektrum, 1995.
- [Cou71] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.* Springer, 1971.
- [Die03] Jean Dieudonné. *Éléments d'Analyse.* Jacques Gabay, 2003.
- [EIN] **Skriptum Einstimmung.** Wolfgang Soergel.
- [EL] **Skriptum Elementargeometrie.** Wolfgang Soergel.
- [For92] Otto Forster. *Analysis 1-3. Aufbaukurs Mathematik.* Vieweg, 1992.
- [FT1] **Skriptum Funktionentheorie 1.** Wolfgang Soergel.
- [GR] **Skriptum Grundlagen.** Wolfgang Soergel.
- [KAG] **Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie.** Wolfgang Soergel.
- [Kön97] Königsberger. *Analysis 1 und 2.* Springer, 1997.
- [LA1] **Skriptum Lineare Algebra 1.** Wolfgang Soergel.
- [LA2] **Skriptum Lineare Algebra 2.** Wolfgang Soergel.
- [Lan68] Serge Lang. *Analysis I.* Addison-Wesley, 1968.
- [Lor96] Falko Lorenz. *Einführung in die Algebra I.* Spektrum, 1996.
- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1976.
- [Ste89] Ian Steward. *Galois Theory.* Chapman and Hall, second edition, 1989.
- [TM] **Skriptum Topologie und kompakte Gruppen.** Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- $f : X \supset D \rightarrow Y$, 68
- 0 neutrales Element für $+$, 33
 - 0_M im Fall von $(M, +)$, 33
 - natürliche Zahl, 33
- 1 neutrales Element für \cdot , 33
 - 1_M im Fall von (M, \cdot) , 33
 - natürliche Zahl, 33
- | Notation bei Teilmengen, 16
- \neg Verneinung, 37
- \square Beweisende, 5
- \sharp Kardinalität, 15
- \sqrt{x} Wurzel, 80
- $n!$ Fakultät, 8
- f' Ableitung, 157
- \emptyset leere Menge, 14
- \in Element von, 14
- \notin nicht Element von, 14
- $X \setminus Y$ Differenz von Mengen, 18
- $X \setminus p$ Komplement des Punktes p , 83
- \hookrightarrow Injektion, 26
- \mapsto wird abgebildet auf, 25
- \rightarrow Abbildung, 24
- $\xrightarrow{\sim}$ Bijektion, 26
- \twoheadrightarrow Surjektion, 26
- $\{ \}$ Mengenklammern, 14
- $||$ Absolutbetrag, 47
- $||$ Kardinalität, 15
- $(x|y)$ Notation für Paare, 19
- $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient, 9
- f' Ableitung, 157
- $X^2 = X \times X$, 18
- \bar{z} komplexe Konjugation, 43
- f^{-1} Kehrwertfunktion, 78
- f^{-1} Umkehrabbildung, 28
- $=$ Gleichheitszeichen, 14
- $:=$ wird definiert als, 7
- $:=$ ist definiert durch, 7
- \circ Verknüpfung
 - von Abbildungen, 27
 - Differenz von Mengen, 18
- a^k Potenz, 10
- a^x allgemeine Potenz, 117
- $\geq, >, \leq, <$ bei Ordnungsrelation, 45
- \prod Produkt
 - von Zahlen, 8
- \sum Summe
 - von Zahlen, 7
- \cap Schnitt, 18
- \subset Teilmenge, 19
- \cup Vereinigung, 18
- \times
 - kartesisches Produkt, 18
- $(x|y)$ Notation für Paare, 19
- $G(x)|_a^b := G(b) - G(a)$, 180
- $f|_X$ Einschränkung auf X , 27
- $f|_X$ Einschränkung auf X , 27
- Abbildung, 24
 - identische, 25
 - inverse, 28
 - Umkehrabbildung, 28
- Abel'scher Grenzwertsatz, 220
- abelsch
 - Gruppe, 34
 - Verknüpfung, 33
- Ableitung
 - n -te Ableitung, 207
 - allgemeiner Potenzen, 163
 - als Funktion, 161
 - bei fester Stelle, 157
 - Exponentialfunktion, 162
 - linksseitige, rechtsseitige, 160
 - Logarithmus, 163
 - vektorwertige, 222
 - von Brüchen, reell, 162
 - von Umkehrfunktion

reell, 163
 absolut konvergente Reihe, 104
 Absolutbetrag, 47
 abzählbar, 61
 abzählbar unendlich, 61
 Additionsformeln
 für \sin und \cos , 134
 äquidistante Unterteilung, 151
 algebraisch
 reelle Zahl, 81
 allgemeine Potenzen, 117
 alternierende harmonische Reihe, 104
 Amplitude, 240
 analytisch
 auf \mathbb{R} , 211
 Anfangswertisomorphismus, 236, 241
 bei reeller Schwingungsgleichung,
 237
 bei Schwingungsgleichung, 239
 angeordnet
 Ring, 46
 Anordnung, 45
 antisymmetrisch
 Relation, 45
 Approximationspolynom, 212
 arccot Arcuscotangens, 135
 archimedisch
 angeordnet, 57
 arctan Arcustangens, 135
 Arcuscosinus, 134
 Arcuscotangens, 135
 Arcussinus, 135
 Arcustangens, 135
 Area Cosinus hyperbolicus, 191
 Area Sinus hyperbolicus, 191
 arithmetisches Mittel, 98
 assoziativ, 31
 Auswerten, 24

 Bel, 121
 Bernoulli-Ungleichung, 49

 beschränkt
 Menge reeller Zahlen, 95
 bestimmte Divergenz, 88
 Betrag, 47
 Bijektion, 26
 bijektiv
 Abbildung, 26
 Bild, 24
 binärer Logarithmus, 119
 Binom, 72
 Binomialkoeffizienten, 9
 binomische Formel, 10
 Binomische Reihe, 209
 Bogenlänge, 222
 parametrisiert nach, 232
 Bolzano-Weierstraß, 97
 Brechungsgesetz, 167
 Bruchzahlen, 14

 Cantor'sches Diagonalverfahren, 61
 card, 15
 Catalan-Zahlen
 Herleitung der Formel, 218
 Cauchy-Folge, 97
 continue, 68
 continuous, 68
 cos Cosinus
 komplexer, 139
 Cosecans, 134
 Cosecans hyperbolicus, 191
 cosh Cosinus hyperbolicus, 191
 Cosinus, 131
 Cosinus hyperbolicus, 191
 Cotangens, 135

 de Morgan'sche Regeln, 20
 Dedekind'scher Schnitt, 54
 Definition, 7
 Definitionsbereich, 25
 Dezibel, 121
 Differenz

- von Mengen, 18
- differenzierbar
 - in einer Veränderlichen, 157
 - reell-komplex, 199
 - vektorwertige Funktion, 222
- disjunkt, 19
- Distributivgesetz
 - bei Ring, 38
- Dreiecksungleichung
 - für Absolutbetrag eines angeordneten Körpers, 48
 - für komplexen Absolutbetrag, 125
- Durchschnitt
 - zweier Mengen, 18
- ebene Quadriken, 194
- echt
 - Teilmenge, 15
- Eigenschwingungen, 243
- Einbettung
 - einer Teilmenge, 27
- Einheitswurzel
 - in \mathbb{C} , 139
- Eins-Element, 33
- Einschränkung, 27
- Einsetzen, 24
- Element, 13
- Ellipse, 194
- endlich
 - Menge, 15
- erweiterte reelle Zahlen, 66
- erzeugende Funktion
 - der Catalan-Zahlen, 218
- Euler, 104
- Euler'sche Gleichung, 131
- Euler'sche Zahl, 109
- Exponentialfunktion, 108
- Extrema
 - bei einer Veränderlichen, 171
- Faktoren, 8
- Fakultät, 8
- Familie, 86
- fast alle
 - Menge, 88
- Folge, 86
 - geometrische, 102
- Fresnel'sches Prinzip, 167
- Fundamentalsatz der Algebra, 145
- Funktion, 64
 - gebrochenrationale, 77
 - rationale, 77
 - Umkehrfunktion, 28
- Funktionalgleichung
 - des Logarithmus, 115
- $\Gamma(f)$ Graph von f , 24
- ganze Zahlen, 14
- Gedämpfte Schwingungen, 237
- geometrische Folge, 102
- Geometrische Reihe, 101
- geometrisches Mittel, 98
- gerade
 - Funktion, 188
- Geschwindigkeit
 - absolute, 222
- gleichmäßig stetig
 - reelle Funktion einer Variablen, 146
- Graph
 - einer Abbildung, 24
- Grenzwert
 - linksseitiger Grenzwert, 93
 - rechtsseitiger Grenzwert, 93
 - von Folge, 88
 - von Funktion, 85
- größtes Element, 49
- Gruppe, 34
- Gruppenhomomorphismus, 36
- Gruppenweg
 - in \mathbb{R} , 92
 - in \mathbb{R}^{\times} , 119
- Häufungspunkt, 83

halboffen
 Teilmenge von \mathbb{R} , 157
Halbordnung, 45
 harmonische Reihe, 102
 Hauptzweig des Logarithmus, 197
 Hermite-Lindemann, 139
 Hilbert'sche Probleme, 63
 Nummer 1, 63
 Nummer 8, 104
 holomorph, 198
 Hospital, Regeln von, 175
 Hyperbel, 194

 id, 25
 Identität, 25
 Imaginärteil
 bei komplexen Zahlen, 123
 Induktion, vollständige, 5
 Induktionsannahme, 5
 Induktionsbasis, 5
 Induktionsschritt, 5
 Induktionsvoraussetzung, 5
 inf, Infimum, 51
 Infimum, 51
 Injektion, 26
 injektiv
 Abbildung, 26
 Inklusion, 27
 Integral
 stetige reelle Funktion
 über kompaktes Intervall, 149
 Integrallogarithmus, 182
 Integration
 partielle, 186
 integrierbar
 Riemann-integrierbar, 157
 Intervall, 66
 mehrpunktiges, 67
 Intervallschachtelungsprinzip, 98
 Intervallumgebung, 67
 invers
 in Monoid, 34
 Inversion, 126
 invertierbar, 34
 isolierter Punkt, 83
 isoliertes lokales Maximum, 171
 isoliertes lokales Minimum, 171

 Jensen'sche Ungleichung
 diskrete, 49

 Kardinalität, 15
 kartesisch
 Produkt
 von zwei Mengen, 18
 Kegel
 im \mathbb{R}^3 , 194
 Kegelschnitt, 194
 Kettenlinie, 191
 Kettenregel
 höhere, 216
 in einer Veränderlichen
 reell, 161
 kleines o von x^n , 216
 kleinstes
 Element, 49
 Körper, 38
 kommutativ
 Verknüpfung, 33
 kompakt
 Intervall in $\bar{\mathbb{R}}$, 67
 Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}^n$, 144
 Kompaktum, 144
 Komplement, 18
 Komplementmenge, 18
 komplexe Exponentialfunktion, 127
 komplexe Konjugation, 43
 komplexe Zahlen, 43
 konjugierte komplexe Zahl, 125
 konkave Funktion, 171
 konstante Abbildung, 26
 Kontinuumshypothese, 63

konvergent
 reelle Reihe, 101
 Konvergenz
 gleichmäßige
 reeller Funktionen, 203
 punktweise
 reeller Funktionen, 203
 von Folgen
 in $\bar{\mathbb{R}}^d$, 86
 von reellen Reihen, 101
 Konvergenzradius
 im Reellen, 202
 konvex
 Funktion, 49, 74, 171
 in \mathbb{R}^n , 225
 Korrespondenz, 45
 Kreisgruppe, 126
 Kring
 angeordneter, 46
 Kringanordnung, 46
 Kurvenintegral, 232

 $L(\gamma)$ Länge eines Weges, 222
 Länge, 222
 eines Weges, 222
 Laufindex, 7
 lb, 119
 leer
 Familie, 86
 Menge, 14
 Leibniz'sches Konvergenzkriterium, 107
 Leibniz-Regel
 für reelle Funktionen, 161
 $\lg = \log_{10}$, 117
 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ Grenzwert von Folge
 in $\bar{\mathbb{R}}^d$, 88
 $\lim_{x \nearrow p}$ linksseitiger Grenzwert, 93
 $\lim_{x \searrow p}$ rechtsseitiger Grenzwert, 93
 $\lim_{x \rightarrow p}$ Grenzwert von Abbildung
 von Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}^n$, 85
 Limes
 von Folge, 88
 von Funktion, 85
 \ln *logarithmus naturalis*, 117
 Lösungsraum
 einer linearen Differentialgleichung,
 241
 einer Schwingungsgleichung, 237,
 238
 lineare Differentialgleichung
 konstante Koeffizienten, 236
 log Logarithmus, 115
 logarithme népérien, 115
 Logarithmus
 binärer, 119
 Hauptzweig des komplexen, 197
 natürlicher, 115

 Mächtigkeit, 15
 Magma, 29
 Magmahomomorphismus, 36
 Majorante, 105
 Majorantenkriterium, 105
 max, 46
 maximal
 Element, 49
 Maximum, 171
 mehrpunktiges Intervall, 67
 Menge, 13
 leere Menge, 14
 Potenzmenge, 16
 Teilmenge, 15
 Mengenklammern, 14
 min, 31
 min, 46
 minimales
 Element, 49
 Minimum, 171
 Mittelwertsatz, 169
 der Integralrechnung, 157
 in mehreren Veränderlichen, 227
 verallgemeinerter, 177

Monoid, 33
 additiv notiertes, 33
 multiplikativ notiertes, 33
 Monoidhomomorphismus, 36
 Monom, 72
 monoton, 74
 Multinomialkoeffizient, 29

 \mathbb{N} natürliche Zahlen, 14
 \mathbb{N}_0 , 14
 népérien, logarithme, 115
 Nachschalten von Abbildung, 27
 natürliche Zahlen, 14
 negativ, 46
 Negatives, 35
 neutrales Element, 33
 Newton-Verfahren, 100
 nichtnegativ, 46
 nichtpositiv, 46
 Norm
 einer komplexen Zahl, 123
 Null-Element, 33
 Nullfolge, 88

 Obersumme, 153
 offen
 in \mathbb{R} , 165
 in \mathbb{R}^n , 225
 in der komplexen Zahlenebene, 198
 reelles Intervall, 67
 Ordnung, 45
 für Teilordnung, 45
 lineare, 45
 partielle, 45
 totale, 45
 Ordnungsrelation, 45

 π Kreiszahl, 80
 $\mathcal{P}(X)$ Potenzmenge, 16
 \prod Produkt
 von Zahlen, 8
 Paar
 angeordnetes, 18
 Parabel, 194
 Partialsumme, 101
 partiell
 Integration, 186
 Ordnung, 45
 Pascal'sches Dreieck, 11
 Phase, 240
 pythagoreische Zahlentripel, 189
 Poisson-Verteilung, 114
 Polynomfunktion, 72
 poset, 45
 positiv, 46
 $\text{Pot}(X)$ Potenzmenge, 16
 Potenzmenge, 16
 Potenzreihe, 202
 pr_X
 Projektion, 26
 Produkt
 von Reihen, 112, 114
 Produktregel
 für reelle Funktionen, 161
 Projektion
 bei zwei Mengen, 26
 Punkt, 13

 \mathbb{Q} rationale Zahlen, 14
 Quaderumgebung
 in \mathbb{R}^n , 67
 Quotientenkriterium, 105
 Quotientenregel, 162

 \mathbb{R} reelle Zahlen, 57
 rad
 Radian, 133
 rationale Zahlen, 14
 Raum, 13
 Realteil
 bei komplexen Zahlen, 123
 reell konvergent, 88
 reelle Zahl, 57

reflexiv
 Relation, 45
 Regeln von de l'Hospital, 175
 Reihenglieder, 101
 Relation
 auf einer Menge, 45
 mehrstellige, 45
 zwischen zwei Mengen, 45
 Resonanz, 246
 Resonanzkatastrophe, 246
 Restglied
 Integraldarstellung, 214
 Lagrange'sche Form, 214
 Riemann
 ζ -Funktion, 104
 Riemann'sche Vermutung, 104
 Riemann-integrierbar, 157
 Riemannsumme
 für reelle Funktion, 151, 155
 Ring, 38
 Ringhomomorphismus, 41
 Rolle, 167
 Russell'sches Paradoxon, 23

 S^1 Einheitskreis, 126
 \int Integral, 149
 \sum Reihe, 101
 \sum Summe
 von Zahlen, 7
 Schmiegeparabel, 212
 Schnitt
 zweier Mengen, 18
 Schranke
 größte untere, 51
 kleinste obere, 51
 obere, 51
 untere, 51
 Schrankensatz, 225
 Secans, 134
 Secans hyperbolicus, 191
 Sekante, 157

 sin Sinus
 komplexer, 139
 sinh Sinus hyperbolicus, 191
 Sinus, 131
 Sinus hyperbolicus, 191
 Skalarproduktnorm, 222
 Stammfunktion, 180
 Steigung, 157
 stetig
 gleichmäßig
 reelle Funktion, 146
 stimmen überein bis zur Ordnung, 216
 Substitutionsregel, 182
 Summanden, 7
 Summenregel, 161
 summierbar
 Familie reeller Zahlen, 106
 sup, Supremum, 51
 Supremum, 51
 Surjektion, 26
 surjektiv
 Abbildung, 26

 Tangens, 135
 Tangens hyperbolicus, 191
 Tangente, 159, 212
 Tauber-Bedingung, 221
 Taylorentwicklung
 in einer Veränderlichen, 212
 Taylorreihe
 in einer Veränderlichen, 208, 210
 Teilfolge, 90
 Teilmenge, 15
 echte, 15
 Teilordnung, 45
 Teleskopsumme, 101
 Totalität
 für Relation, 45
 transitiv
 Relation, 45
 transzendent

reelle Zahl, 81
 Trigonometrie, 133
 überabzählbar, 61
 Umgebung
 eines Punktes von $\bar{\mathbb{R}}^n$, 69
 Umkehrfunktion, 28
 Umordnungssatz, 105
 unbestimmt divergent, 88
 unendlicher Dezimalausdruck, 58
 ungerade
 Funktion, 188
 Untersumme, 153
 Unterteilung
 von Intervall, 155

 van-de-Ven-Diagramm, 19
 Variation der Konstanten, 244
 verallgemeinerter Mittelwertsatz, 177
 Vereinigung, 18
 Verknüpfung
 auf einer Menge, 29
 von Abbildungen, 27
 Verknüpfungstafel, 30
 vollständig
 angeordneter Körper, 97
 Vorschalten von Abbildung, 27

 Wahrheitstafel, 31
 Wert, 24
 Wertebereich, 25
 Winkelgeschwindigkeit, 240
 Wurzel
 n -te Wurzel, 78
 Wurzelkriterium, 120

 Young'sche Ungleichung, 175

 \mathbb{Z} ganze Zahlen, 14
 ζ -Funktion
 Riemann'sche, 104
 Zahl
 ganze, 14
 natürliche, 14
 rationale, 14
 reelle, 57
 Zwischenwertsatz, 77