

ANALYSIS 3

Wolfgang Soergel

16. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Maß und Integral	4
1.1	Maßräume und Maße	4
1.2	Konstruktion des Lebesguemaßes auf \mathbb{R}	12
1.3	Vervollständigung von Maßräumen*	23
1.4	Meßbare Abbildungen	25
1.5	Das Integral von nichtnegativen Funktionen	33
1.6	Integrierbare Funktionen und ihr Integral	40
1.7	Integration auf Produkträumen	46
1.8	Kompakte Räume	57
1.9	Regularität von Borelmaßen	60
1.10	Rechnen mit dem Lebesgue-Integral	62
1.11	Flächenmaß	66
2	Funktionsräume und Fourierreihen	70
2.1	Lebesgue-Integral vektorwertiger Funktionen	70
2.2	Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen	71
2.3	Räume integrierbarer Funktionen	77
2.4	Hilberträume und Hilbertbasen	81
2.5	Vervollständigung metrischer Räume*	86
2.6	Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen	90
2.7	Fourierreihen und Charaktere	92
2.8	Orthogonale Projektionen in Hilberträumen	100
3	Fouriertransformation	106
3.1	Definition und erste Eigenschaften	106
3.2	Fouriertransformation ohne Koordinaten	111
3.3	Poissonformel und Inversionsformel	118
3.4	Die Topologie der Charaktergruppe	125
3.5	Natürlichkeit der Fouriertransformation	130
3.6	Die Inversionsformel für Fouriergruppen*	133
3.7	Faltung von Maßen	140
3.8	Translationsinvariante Teilräume*	146
3.9	Faltung von Maßen und Funktionen*	148
4	Spektraltheorie in Hilberträumen*	152
4.1	Unitäre Darstellungen von \mathbb{R}	152
4.2	Selbstadjungierte Operatoren	159
4.3	Spektren in Banach-Ringalgebren	165
4.4	Weitere Eigenschaften des Spektrums*	170

4.5	Spektren selbstadjungierter Operatoren	172
4.6	Der Riesz'sche Darstellungssatz	178
4.7	Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren	181
4.8	Beweis des Spektralsatzes	187
4.9	Spektralzerlegung unitärer Darstellungen	191
4.10	Operationen von Maßen auf Darstellungen	194
4.11	Variationen zum Spektralsatz	199
4.12	Unbeschränkte Operatoren	203
4.13	Distributionen und verallgemeinerte Funktionen*	206
5	Danksagung	219
6	Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16	220
	Literaturverzeichnis	224
	Index	225

1 Maß und Integral

Es mag nahe liegen zu versuchen, jeder Teilmenge des \mathbb{R}^n ein „Volumen“ in $[0, \infty]$ so zuzuordnen, daß (1) das Verschieben oder Verdrehen von Mengen ihr Volumen nicht ändert, daß (2) bei beliebigen disjunkten Vereinigungen das Volumen der Vereinigung die Summe der Volumina ist, und daß (3) dem Einheitswürfel $[0, 1]^n$ das Volumen Eins zugeordnet wird. Kurzes Nachdenken zeigt jedoch, daß das unmöglich gelingen kann: Für solch ein Volumen müßte nämlich jeder Punkt Volumen Null haben, da ja unendlich viele Punkte im Einheitswürfel liegen, und dann müßte auch der ganze Einheitswürfel Volumen Null haben als disjunkte Vereinigung einpunktiger Teilmengen. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, mag man etwas schwächer statt (2) nur noch bei *abzählbaren* oder noch schwächer *endlichen* disjunkten Vereinigungen fordern wollen, daß das Volumen der Vereinigung die Summe der Volumina ist, aber auch solch einen Volumenbegriff kann es für beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n nicht geben, wie im abzählbaren Fall in 1.1.31 bereits für $n = 1$ ausgeführt wird und im endlichen Fall für $n \geq 3$ aus dem sogenannten „Banach-Tarski-Paradoxon“ 1.1.32 oder auch schon aus seinem Vorläufer, dem sogenannten „Hausdorff-Paradoxon“ folgt. Hausdorff zeigte in seinem Buch über Mengenlehre aus dem Jahre 1914 auch, daß es in den Dimensionen $n \leq 2$ durchaus endlich additive Volumenbegriffe der oben beschriebenen Art gibt, aber diese haben in der Mathematik wenig Relevanz. Es ist jedoch möglich, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gewisse Teilmengen des \mathbb{R}^n als „meßbar“ auszuzeichnen derart, daß alle „einigermaßen vernünftigen“ Teilmengen meßbar sind, und jeder dieser meßbaren Mengen ein Volumen so zuzuordnen, daß Bedingung (1), die abzählbare Variante von (2) sowie (3) entsprechend gelten. Im folgenden will ich das ausführen und auch zeigen, wie davon ausgehend eine sehr allgemeine Integrationstheorie entwickelt werden kann, die sich sowohl in der weiteren Entwicklung der Analysis als auch bei der mathematischen Modellierung der Wahrscheinlichkeit als außerordentlich nützlich erweisen wird: Das Lebesgue-Integral.

1.1 Maßräume und Maße

1.1.1. Gegeben eine Menge X erinnere ich daran, daß wir nach [GR] 2.2.7 die Menge aller ihrer Teilmengen bilden dürfen, und daß diese Menge die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ von X heißt. Weiter erinnere ich daran, daß in diesem Text aus rein didaktischen Erwägungen heraus Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X vorzugsweise als „Systeme von Teilmengen von X “ oder „Mengensysteme“ angesprochen werden.

Definition 1.1.2. Ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ einer Menge X heißt eine **Mengenalgebra**, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$;
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{A}$.

In Worten ist ein System von Teilmengen einer Menge X also eine Mengenalgebra genau dann, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und unter dem Bilden von Komplementen bezüglich X .

1.1.3. Ich will kurz diskutieren, warum unsere Definition in Formeln zu unserer Definition in Worten gleichbedeutend ist. Bei der Definition in Worten ist mitgemeint, daß eine Mengenalgebra die leere Menge enthalten soll als „die Vereinigung über überhaupt keine Teilmenge von X “, vergleiche [LA1] 1.5.13. Bei der Definition in Formeln folgt umgekehrt die Stabilität von \mathcal{A} unter endlichen Vereinigungen von mehr als zwei Mengen induktiv.

1.1.4. Eine Mengenalgebra ist nach den de Morgan'schen Regeln [GR] 2.2.13 auch stabil unter dem Bilden von endlichen Schnitten und von Differenzmengen.

Definition 1.1.5. Eine Mengenalgebra, die sogar stabil ist unter abzählbaren Vereinigungen, heißt eine σ -**Algebra**, französisch **tribu**. Ein Paar (X, \mathcal{M}) bestehend aus einer Menge X und einer σ -Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein **Meßraum**. Die Mengen aus \mathcal{M} heißen dann die **meßbaren Mengen** von (X, \mathcal{M}) oder kurz die **meßbaren Teilmengen von X** .

1.1.6. In Formeln ist eine σ -Algebra also eine Mengenalgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ derart, daß für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{M} \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. Gegeben ein Meßraum (X, \mathcal{M}) ist natürlich auch ganz X meßbar und abzählbare Schnitte meßbarer Mengen sind wieder meßbar nach den de Morgan'schen Regeln in ihrer etwas allgemeineren Form aus [AN1] 6.5.12.

Beispiel 1.1.7. In jeder Menge bilden die endlichen Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine Mengenalgebra, die jedoch nur dann eine σ -Algebra ist, wenn wir unsere Konstruktion in einer endlichen Menge durchführen. In jeder Menge bilden die abzählbaren Teilmengen mitsamt ihren Komplementen eine σ -Algebra.

Beispiel 1.1.8. Alle endlichen Vereinigungen von Intervallen bilden eine Mengenalgebra von Teilmengen von \mathbb{R} . Die abzählbaren Vereinigungen von Intervallen bilden *keine* σ -Algebra von Teilmengen von \mathbb{R} , da dieses Mengensystem nicht unter dem Bilden von Komplementen stabil ist: Zum Beispiel ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von Intervallen, genauer von einpunktigen Intervallen, aber ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist keine abzählbare Vereinigung von Intervallen.

Definition 1.1.9. Sei $X = (X, \mathcal{M})$ ein Maßraum. Ein **Maß** oder genauer ein **nichtnegatives Maß** auf X ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ derart, daß gilt $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten meßbaren Mengen, in Formeln Mengen mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Obige Gleichheit ist in $[0, \infty]$ zu verstehen. Die Summe auf der rechten Seite ist zu verstehen als das Supremum über alle endlichen Teilsummen.

1.1.10. Ich benutze gerne wie in [LA2] 8.6.15 erklärt statt \cup das Symbol \sqcup , wenn ich andeuten will, daß die zu vereinigenden Teilmengen paarweise disjunkt sein sollen. Mit dieser Vereinbarung hätten wir etwa schon bei der Definition eines Maßes übersichtlicher

$$\mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

schreiben können. Unsere beiden Bedingungen an ein Maß kann man auch zusammenfassen, indem man für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten meßbaren Mengen die Formel $\mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ fordert. Die Bedingung $\mu(\emptyset) = 0$ erweist sich in unseren Konventionen dann als der Spezialfall der leeren Familie.

Definition 1.1.11. Ein **Maßraum** ist ein Tripel $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ bestehend aus einer Menge X , einer σ -Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ und einem Maß $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$.

Ergänzung 1.1.12. Ein Maßraum, bei dem die ganze Menge Maß Eins hat, heißt ein **Wahrscheinlichkeitsraum**. Mit diesem Wort geht meist eine völlig andere Motivation, Intuition und Buchstabenwahl einher: Das Ziel ist nun nicht mehr ein begrifflicher Rahmen zur Berechnung von Volumina und dergleichen, also die explizite Berechnung von Maßen vorgegebener Mengen, sondern die mathematische Modellierung des Zufalls. Man notiert Wahrscheinlichkeitsräume statt (X, \mathcal{M}, μ) meist (Ω, \mathcal{A}, P) , denkt sich dabei Ω als eine völlig unstrukturierte und von der speziell untersuchten Fragestellung unabhängige Menge von „sich paarweise ausschließenden Möglichkeiten“, und $P(A)$ mit P wie „Probability“ als die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten einer Möglichkeit aus A . Die meßbaren Teilmengen von Ω heißen auch **Ereignisse**. Ist jede einelementige Teilmenge von Ω meßbar, so mag man die Elemente der Menge Ω auch **Elementar-Ereignisse** nennen.

Beispiele 1.1.13. Einfache Beispiele für Maße auf der gesamten Potenzmenge einer beliebigen Menge X sind das **Dirac-Maß** δ_x an einem Punkt $x \in X$, gegeben

durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und das **Zählmaß** $\zeta(A) = |A| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, das jeder Teilmenge die Zahl ihrer Elemente zuordnet. Allgemeiner kann man für jede Menge X und jede Abbildung $f : X \rightarrow [0, \infty]$ wieder auf der gesamten Potenzmenge von X das Maß $A \mapsto \sum_{x \in A} f(x)$ betrachten, bei dem in gewisser Weise „jeder Punkt $x \in X$ mit dem Faktor $f(x)$ gewichtet wird“. Das vielleicht wichtigste Beispiel für ein Maß ist das „Lebesgue-Maß“ auf den „topologisch meßbaren Mengen“ oder „Borelmengen“ des \mathbb{R}^n , dessen Konstruktion noch aussteht.

1.1.14. Sei X eine feste Menge. Sind $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ zwei σ -Algebren, so ist auch ihr Schnitt $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ eine σ -Algebra. Sogar ein beliebiger Schnitt von σ -Algebren in X ist wieder eine σ -Algebra in X .

Definition 1.1.15. Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ irgendein System von Teilmengen einer Menge X , so betrachten wir den Schnitt aller σ -Algebren, die \mathcal{A} enthalten. Dieser Schnitt ist sicher die kleinste σ -Algebra auf X , die \mathcal{A} enthält. Er heißt die **von \mathcal{A} erzeugte σ -Algebra** und wird $\sigma(\mathcal{A})$ notiert.

1.1.16 (**Diskussion des Konzepts einer σ -Algebra**). Eine explizite Beschreibung für die von einem Mengensystem erzeugte σ -Algebra zu geben, ist nicht ganz einfach, aber für uns im weiteren Verlauf dieser Vorlesung auch nicht relevant. Um Ihnen die Schwierigkeiten einer expliziten Beschreibung zu zeigen, will ich erst einmal andeuten, wie es *nicht* geht. Man könnte versucht sein, unser Mengensystem zunächst einmal zu ergänzen durch das Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen. Dann durch Hinzunehmen aller Komplementmengen. Dann wieder durch Hinzunehmen aller abzählbaren Vereinigungen, und immer so weiter. Kriegt man so jede Menge der von unserem Mengensystem erzeugten σ -Algebra in endlich vielen Schritten? Eben nicht: Denn nun muß man auch noch die Vereinigungsmengen aller Mengenfolgen dazunehmen, bei denen die erste Menge nach einem Schritt erhalten wurde, die zweite nach zwei Schritten und so weiter. Um die ganze σ -Algebra zu beschreiben, muß man stattdessen mit transfiniten Induktion arbeiten, wie etwa im Beweis von Lemma [AL] 5.4.5 ausgeführt wird.

1.1.17. Gegeben eine Menge X und ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es auch stets eine kleinste Topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, die \mathcal{E} umfaßt, nämlich den Schnitt aller Topologien, die \mathcal{E} umfassen. Dieser Schnitt heißt die **von \mathcal{E} erzeugte Topologie**. Man kann diese Topologie explizit beschreiben, indem man erst die Gesamtheit \mathcal{S} aller endlichen Schnitte von Mengen aus \mathcal{E} betrachtet und dann beliebige Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{S} bildet. In der Tat ist das so entstehende Mengensystem schon automatisch stabil unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen.

1.1.18. Man beachte den Kontrast zwischen der von einem Mengensystem erzeugten Topologie, die recht explizit angegeben werden kann, und der von einem Mengensystem erzeugten σ -Algebra. Der Ursprung dieser Diskrepanz liegt darin, daß die Potenzmenge einer endlichen Menge stets wieder endlich ist, die Potenzmenge einer abzählbaren Menge aber im allgemeinen nicht abzählbar. Man könnte aber das kleinste Mengensystem, das ein Gegebenes umfaßt und stabil ist unter abzählbaren Schnitten und beliebigen Vereinigungen, ebenso explizit angeben wie die von einem Mengensystem erzeugte Topologie.

Definition 1.1.19. Die von den offenen Mengen eines metrischen oder allgemeiner eines topologischen Raums X erzeugte σ -Algebra nennen wir die σ -Algebra der **topologisch meßbaren Teilmengen** oder auch der **Borelmengen** von X oder auch die **borelsche σ -Algebra** und notieren sie

$$\text{Borel}(X)$$

Unter einem **topologischen Maß** verstehen wir ein Maß auf der σ -Algebra aller topologisch meßbaren Mengen eines topologischen Raums. Ein **Borelmaß** auf einem topologischen Raum definieren wir als ein topologisches Maß, das auf allen abgeschlossenen Kompakta endliche Werte annimmt.

Vorschau 1.1.20. Wir werden in 1.8.8 zeigen, daß in einem Hausdorffraum jedes Kompaktum abgeschlossen ist.

1.1.21 (**Diskussion der Terminologie**). Das Zählmaß auf \mathbb{R} etwa ist in unserem Sinne ein topologisches Maß, aber kein Borelmaß. Für den Begriff einer Borelmenge und eines Borelmaßes sind jedoch leider auch viele andere Bedeutungen in der Literatur verbreitet.

Ergänzung 1.1.22. Auch ohne die Kontinuumshypothese vorauszusetzen kann man zeigen, daß jede überabzählbare Borelmenge bereits in Bijektion zu ganz \mathbb{R} ist. Wie das genau geht, können Sie etwa in der Mengenlehre lernen.

1.1.23. Natürlich sind mit unserer Definition auch alle abgeschlossenen Mengen topologisch meßbar, und für jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$ ist auch die verschobene Menge $a + A$ eine Borelmenge.

Definition 1.1.24. Ein topologisches Maß auf dem \mathbb{R}^n heißt **translationsinvariant** genau dann, wenn für beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(a + A) = \lambda(A)$.

Satz 1.1.25 (Charakterisierung des Lebesguemaßes). *Es gibt auf dem \mathbb{R}^n genau ein translationsinvariantes topologisches Maß λ , das dem Einheitswürfel das Maß Eins zuordnet, für das also in Formeln gilt $\lambda([0, 1]^n) = 1$.*

1.1.26. Dieses Maß λ heißt das **Lebesgue-Maß** auf dem \mathbb{R}^n . Wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, welches n gemeint ist, notieren wir es auch λ^n . Die zweite Bedingung an unser Lebesguemaß nennen wir seine **Normierung**. In dieser Terminologie können wir also das Lebesguemaß charakterisieren als das eindeutig bestimmte normierte translationsinvariante Maß auf den Borelmengen des \mathbb{R}^n . Anschaulich ordnet λ jeder Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ihr **Volumen** oder **Maß** $\lambda(A) \in [0, \infty]$ zu. Der Nachweis der Eindeutigkeit wird dem Leser als Übung 1.2.34 und 1.2.35 überlassen. Die Existenz zeigen wir für $n = 1$ im folgenden Abschnitt in Bemerkung 1.2.12 und für beliebiges n in 1.7.3.

1.1.27 (**Diskussion der Terminologie**). Viele Autoren verstehen unter dem Lebesguemaß abweichend die „Vervollständigung“ im Sinne von 1.3.2 des hier beschriebenen Maßes. Wenn es auf derlei Feinheiten ankommt, mag man das in Satz 1.1.25 beschriebene Maß genauer das „Lebesguemaß auf den Borelmengen“ nennen.

Satz 1.1.28 (Regularität des Lebesguemaßes). *Für das Lebesguemaß λ auf dem \mathbb{R}^n und jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ offen in } \mathbb{R}^n}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

1.1.29. Dieser Satz wird in 1.9.4 gezeigt. Er deutet eine mögliche Konstruktion des Lebesgue-Maßes λ auf dem \mathbb{R}^n an: Um das Lebesguemaß einer Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ zu bestimmen können wir beginnen mit dem Fall endlicher disjunkter Vereinigungen von Produkten von Intervallen. Solche „Quadermengen“ haben noch ein anschauliches Volumen. Dann wird für U offen der Wert $\lambda(U)$ definiert als das Supremum über die Volumina aller in U enthaltenen Quadermengen, und schließlich erhält man das Maß $\lambda(A)$ einer beliebigen Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ als Infimum von $\lambda(U)$ über alle offenen U , die A umfassen. Diese Beschreibung von $\lambda(A)$ ähnelt unserer definitiven Konstruktion des Lebesguemaßes. Die wesentliche Schwierigkeit ist, zu zeigen, daß die so konstruierte Abbildung von den Borelmengen in die um ∞ erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen auch tatsächlich ein Maß ist.

1.1.30. Wir wollen uns zur besseren Motivation sofort überlegen, daß es schon im Fall $n = 1$ keinen vernünftigen Volumenbegriff für beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n geben kann.

Lemma 1.1.31. *Es gibt kein Maß $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ auf der σ -Algebra aller Teilmengen von \mathbb{R} , das translationsinvariant und normiert ist.*

Erster Beweis, mit viel Algebra, schön übersichtlich. Solch ein Maß könnten wir auf Teilmengen von $(0, 1]$ einschränken und erhielten vermittels der von der Projektion induzierten Bijektion $(0, 1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auf die Nebenklassengruppe ein Maß

$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow [0, \infty]$ mit der Gesamtmasse Eins und der Eigenschaft $\mu(x+A) = \mu(A)$ für alle $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Jede irrationale Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ erzeugt nun eine unendliche zyklische Untergruppe $\mathbb{Z}q = Z \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, und ist $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von Z , das es nach dem Auswahlaxiom geben muß, so hat die Zerlegung von \mathbb{R}/\mathbb{Z} in die disjunkte Vereinigung der Nebenklassen von Z die Gestalt

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} nq + A$$

Aus unserer Definition eines Maßes folgt dann

$$1 = \mu(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(nq + A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(A)$$

Daraus folgt aber erst $\mu(A) = 0$ und dann der Widerspruch $1 = 0$. □

Zweiter Beweis, mit wenig Algebra. Wir werden eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und Folgen r_n und q_n reeller Zahlen konstruieren derart, daß gilt:

1. Die Mengen $r_n + A$ sind paarweise disjunkt und alle in $[0, 3]$ enthalten.
2. Die Mengen $q_n + A$ überdecken \mathbb{R} .

Für unsere Menge A müßte also gleichzeitig gelten

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(r_n + A) \leq \lambda([0, 3]) \leq 3\lambda([0, 1]) = 3 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(q_n + A) \geq \lambda(\mathbb{R}) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(2n + [0, 1]) = \infty \end{aligned}$$

und dieser Widerspruch zeigt dann das Lemma. Um unsere Menge A zu konstruieren, wählen wir mithilfe von [LA1] 1.9.15 eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ derart, daß $\{1\} \cup I$ eine \mathbb{Q} -Basis von \mathbb{R} ist, und betrachten den von I erzeugten \mathbb{Q} -Untervektorraum $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ und die Menge $A = \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [0, 2]$. Für jede Folge r_n von paarweise verschiedenen rationalen Zahlen aus $[0, 1]$ sind dann die $r_n + A$ paarweise disjunkt und in $[0, 3]$ enthalten. Andererseits finden wir auch für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein $b_n \in \langle I \rangle_{\mathbb{Q}} \cap [n-1, n]$, es folgt $\langle I \rangle_{\mathbb{Q}} = \bigcup b_n + A$ und dann

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}} q + b_n + A \quad \square$$

Ergänzung 1.1.32. Es kommt sogar noch schlimmer: Nach Banach und Tarski ist es möglich, die abgeschlossene Einheitskugel im \mathbb{R}^3 so in sechs paarweise disjunkte Teilmengen zu zerlegen, daß sich diese Teilmengen geeignet verschoben und im Raum gedreht ohne Überlappungen zu zwei Einheitskugeln zusammenfügen lassen. Das ist das sogenannte **Banach-Tarski-Paradoxon**. Die fraglichen sechs Teilmengen sind dann natürlich nicht alle meßbar.

Übungen

Übung 1.1.33. Man zeige, daß die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten die σ -Algebra aller Borelmengen der reellen Zahlengeraden erzeugen.

Übung 1.1.34. Gegeben ein Maßraum und darin eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ zeige man

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Hinweis: Man schreibe die fragliche Vereinigung als die disjunkte Vereinigung der $A_{n+1} \setminus A_n$.

Übung 1.1.35. Gegeben ein Maßraum und darin eine absteigende Folge meßbarer Mengen endlichen Maßes $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ zeige man

$$\mu \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Man zeige auch durch ein Gegenbeispiel, daß das nicht mehr gelten muß, wenn alle Mengen unserer Folge unendliches Maß haben.

Übung 1.1.36 (Vorbereitung zum Beweis des Satzes von Fubini). Sei X eine Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra. Man zeige: (1) Genau dann ist \mathcal{M} eine σ -Algebra, wenn \mathcal{M} stabil ist unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen. (2) Genau dann ist \mathcal{M} eine σ -Algebra, wenn \mathcal{M} stabil ist unter abzählbaren *aufsteigenden* Vereinigungen im Sinne von [1.2.19](#).

Übung 1.1.37. Konstruieren Sie in \mathbb{R} eine offene dichte Teilmenge von endlichem Lebesguemaß.

Übung 1.1.38 (Restriktion von Maßen). Ist (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge, so bilden die in A enthaltenen meßbaren Mengen von X eine σ -Algebra $\mathcal{M}|_A \subset \mathcal{P}(A)$ und die Einschränkung von μ ist ein Maß $\mu|_A : \mathcal{M}|_A \rightarrow [0, \infty]$, das wir je nach Kontext auch ausführlicher $\mu|_A$ oder $\mu|_A$ notieren. Wir nennen $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ den **induzierten Maßraum**.

Übung 1.1.39 (Verkleben von Maßen). Sei ein Maßraum X die Vereinigung einer Folge X_n meßbarer Teilmengen. Sei auf jeder unserer Teilmengen X_n ein Maß μ_n gegeben derart, daß gilt $\mu_n|(X_n \cap X_m) = \mu_m|(X_n \cap X_m)$ für alle m, n . Man zeige, daß es dann genau ein Maß μ auf X gibt mit $\mu_n = \mu|_{X_n}$ für alle n .

Ergänzende Übung 1.1.40. Sei X ein Maßraum und μ_i eine Folge von endlichen Maßen derart, daß für jedes meßbare $A \subset X$ die Folge der $\mu_i(A)$ monoton wachsend und beschränkt ist. So wird durch die Formel $\mu(A) := \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(A)$ ein weiteres Maß auf X erklärt.

Ergänzende Übung 1.1.41 (Gitterpunkte und Volumen). Gegeben eine kompakte konvexe Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ zeige man

$$\lambda(K) = \lim_{l \searrow 0} l^n |K \cap l\mathbb{Z}^n| = \lim_{l \searrow 0} l^n |\{q \in l\mathbb{Z}^n \mid K \cap (q + [0, l]^n) \neq \emptyset\}|$$

In Worten hängt das Maß von K also eng zusammen mit der Zahl der Gitterpunkte in K , und je feiner das Gitter wird, desto besser wird diese Approximation. Hinweis: Liegt K nicht in einem echten affinen Teilraum von \mathbb{R}^n , so umfaßt es einen offenen Ball, ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen offenen Ball um den Ursprung. Dann versuche man, K auf Rechenpapier zu zeichnen und zwischen K und eine gestreckte Kopie $(1 + \varepsilon)K$ eine Vereinigung von Rechenkästchen einzuschachteln.

1.2 Konstruktion des Lebesguemaßes auf \mathbb{R}

Definition 1.2.1. Ein System von Teilmengen einer gegebenen Menge heißt ein **Mengenring**, wenn es stabil ist unter dem Bilden von endlichen Vereinigungen und von Differenzmengen. In Formeln ausgedrückt ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ einer Menge X also ein Mengenring, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$;
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (B \setminus A) \in \mathcal{A}$.

1.2.2. Daß unsere Definition in Worten und unsere Definition in Formeln gleichbedeutend sind, erkennt man wie in 1.1.3. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Mengenalgebra genau dann, wenn \mathcal{A} ein Mengenring ist und wenn zusätzlich gilt $X \in \mathcal{A}$.

1.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Identifiziert man $\mathcal{P}(X)$ mit der Menge $\text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$ aller Abbildungen von X in den zweielementigen Körper, indem man jeder Menge ihre Indikatorfunktion zuordnet, so entsprechen unsere Mengenringe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ genau den „nicht-unitären Teilringen“ oder in unserer Terminologie den Unterhalbgebren von $\text{Ens}(X, \mathbb{F}_2)$ unter der punktweisen Addition und Multiplikation, und unsere Mengenalgebren entsprechen den „unitären Teilringen“, die wir in unserer Terminologie [AL] 2.2.1 schlicht Teilringe nennen. Wir kommen nicht umhin, hier einen Unfall kollidierender Begriffswelten zu konstatieren.

Definition 1.2.4. Seien X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengenring. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein **Prämaß auf \mathcal{A}** oder gleichbedeutend **σ -additiv**,

wenn gilt $\mu(\emptyset) = 0$ und wenn für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus unserem Mengerring mit der Eigenschaft, daß deren Vereinigung wieder zu unserem Mengerring gehört, gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

1.2.5 (Alternative Definition der σ -Additivität). Unsere Forderungen an ein Prämaß sind gleichbedeutend zur Bedingung, daß für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus \mathcal{A} , deren Vereinigung wieder zu \mathcal{A} gehört, gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

In der Tat enthält diese Bedingung über den Fall $N = \emptyset$ nach unseren Konventionen [GR] 3.1.23 auch die Forderung $\mu(\emptyset) = 0$. Das zeigt, wie natürlich es ist, diese Forderung bei der Definition der Begriffe Maß, Prämaß und σ -Additivität mit hinzuzunehmen. Mir scheint diese Definition des Begriffs der σ -Additivität eigentlich natürlicher. Das Arbeiten Folgen hat aber den Vorteil, daß das Symbol \mathbb{N} auf den ersten Blick klar macht, daß es um ein abzählbar unendliche Indexmenge geht, während diese in der ganzen Theorie oft wesentliche Information bei anders notierten abzählbaren Indexmengen leicht im Fließtext untergeht.

Lemma 1.2.6 (Ein Prämaß zum Lebesguemaß). *Auf dem Mengerring $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ aller endlichen Vereinigungen von beschränkten Intervallen gibt es genau ein Prämaß λ derart, daß für jedes nichtleere beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\lambda(I) = \sup I - \inf I$$

Beweis. Gegeben $A \in \mathcal{I}$ betrachten wir die bis auf Reihenfolge eindeutige Darstellung $A = I_1 \cup \dots \cup I_r$ von A als disjunkte Vereinigung der maximalen in A enthaltenen Intervalle und müssen setzen

$$\lambda(A) = \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I_r)$$

Das zeigt die Eindeutigkeit. Es gilt nur noch zu zeigen, daß für $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine disjunkte Vereinigung mit $A, A_n \in \mathcal{I}$ gilt

$$\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$$

Offensichtlich gilt schon einmal $\lambda(B \sqcup C) = \lambda(B) + \lambda(C)$ für $B, C \in \mathcal{I}$ disjunkt. Wir setzen nun $B_n = A \setminus (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)$. Dann gilt $B_n \in \mathcal{I}$ und $B_0 \supset B_1 \supset \dots$ sowie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Es reicht, wenn wir folgern

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n) = 0$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden für jedes n ein kompaktes $C_n \in \mathcal{I}$ mit $C_n \subset B_n$ und

$$\lambda(B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} \varepsilon$$

Jetzt betrachten wir $D_n = C_0 \cap \dots \cap C_n$. Auch die D_n sind kompakt, es gilt $D_n \subset C_n \subset B_n$, und zusätzlich haben wir nach Konstruktion $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \dots$. Wir zeigen nun $\lambda(B_n \setminus D_n) \leq 2\varepsilon$ für alle n . In der Tat gilt ja

$$B_n \setminus D_n = \bigcup_{k=0}^n B_n \setminus C_k \subset \bigcup_{k=0}^n B_k \setminus C_k$$

und folglich

$$\lambda(B_n \setminus D_n) \leq \sum_{k=0}^n \lambda(B_k \setminus C_k) \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Nun folgt aber aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$ und der Kompaktheit der D_n und [AN1] 7.1.17 schon $D_N = \emptyset$ für ein N , und damit ergibt sich $\lambda(B_n) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq N$. \square

1.2.7. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **linksseitig stetig**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{y \nearrow x} f(y) = f(x)$.

Lemma 1.2.8 (Stieltjes-Prämaße). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig. So gibt es auf dem Mengenring \mathcal{I} aller endlichen Vereinigungen beschränkter Intervalle der Gestalt $[a, b)$ genau ein Prämaß $\lambda = df$ mit $\lambda([a, b)) = f(b) - f(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Beweis. Wir können den Beweis des vorhergehenden Lemmas 1.2.6 im wesentlichen übernehmen. Statt Kompakta $C_n \in \mathcal{I}$, von denen es im hier betrachteten Mengenring ja nur eines gibt, suchen wir nun Elemente $C_n \in \mathcal{I}$ mit $\bar{C}_n \subset B_n$ und $\lambda(B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} \varepsilon$. Wir finden solche C_n aufgrund unserer Annahme, daß f linksseitig stetig sein soll. Dann argumentieren wir wie zuvor und folgern $D_N = \emptyset$ für hinreichend großes N aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{C}_n = \emptyset$, die \bar{C}_n sind ja schließlich kompakt und wir können wieder [AN1] 7.1.17 anwenden. \square

Definition 1.2.9. Eine Teilmenge eines Raums mit Prämaß heißt **σ -endlich** genau dann, wenn sie sich durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus dem entsprechenden Mengenring überdecken läßt. Ein Prämaß heißt **σ -endlich** genau dann, wenn der ganze Raum in diesem Sinne σ -endlich ist.

Satz 1.2.10 (Maßfortsetzungssatz von Caratheodory). Gegeben eine Menge X , ein Mengenring $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein σ -endliches Prämaß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ existiert genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf der von \mathcal{A} erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{A})$.

1.2.11. Sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit von Maßfortsetzungen unter den gegebenen Voraussetzungen sind zentrale Aussagen der Maßtheorie. Der Beweis des Maßfortsetzungssatzes wird nach einigen Vorbereitungen direkt vor [1.3.1](#) geführt werden.

1.2.12 (**Lebesguemaß auf \mathbb{R}**). In [1.2.6](#) haben wir auf dem Mengerring aller endlichen Vereinigungen beschränkter reeller Intervalle ein translationsinvariantes Prämaß konstruiert, das dem abgeschlossenen Einheitsintervall den Wert Eins zuweist. Mit dem Satz über Maßfortsetzungen [1.2.10](#) folgt sofort die in [1.1.25](#) behauptete Existenz eines normierten translationsinvarianten topologischen Maßes auf der reellen Zahlengeraden. Den Nachweis der Eindeutigkeit in [1.1.25](#) überlassen wir dem Leser als Übung [1.2.34](#).

1.2.13. Gegeben zwei Maße μ, ν auf demselben Meßraum (X, \mathcal{M}) sagen wir, μ sei **größergleich** ν und schreiben $\mu \geq \nu$, wenn gilt $\mu(M) \geq \nu(M) \forall M \in \mathcal{M}$.

Proposition 1.2.14 (Konstruktion einer größten Maßfortsetzung). *Gegeben eine Menge X , ein Mengerring $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein Prämaß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ existiert eine größte Fortsetzung von μ zu einem Maß μ^* auf der von \mathcal{A} erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{A})$, und der Wert dieser größten Maßfortsetzung wird für alle $M \in \sigma(\mathcal{A})$ gegeben durch*

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } M \subset \bigcup A_n \right\}$$

1.2.15. Ich erinnere hier an unsere Konvention, nach der das Infimum der leeren Menge als ∞ zu verstehen ist. Der Beweis der Proposition wird im Anschluß an den Beweis des Zerlegerlemmas [1.2.25](#) gegeben. Wir zeigen nur noch, daß die Formel in der Proposition auch wirklich eine Maßfortsetzung liefert. Daß diese Maßfortsetzung die größte Maßfortsetzung sein muß, ist dann eh klar.

1.2.16. Ist unser Prämaß nicht σ -endlich, so muß die größte Maßfortsetzung nicht die einzige Maßfortsetzung sein. Als erstes Beispiel betrachte man in einer nicht-leeren Menge den Mengerring, der nur aus der leeren Menge besteht. Als etwas feineres Beispiel betrachte man den Mengerring aller endlichen Teilmengen von \mathbb{R} und darauf das Prämaß, das jeder endlichen Menge die Null zuordnet. Die von unserem Mengerring erzeugte σ -Algebra besteht aus allen Teilmengen von \mathbb{R} , die entweder abzählbar sind oder abzählbares Komplement haben, und die möglichen Fortsetzungen unseres Prämaßes sind alle die Abbildungen, die allen abzählbaren Mengen die Null zuordnen und allen Komplementen abzählbarer Mengen ein beliebiges aber festes Element von $[0, \infty]$. Die größte Fortsetzung kann im übrigen auch charakterisiert werden als die eindeutig bestimmte Fortsetzung, die allen den Mengen von $\sigma(\mathcal{A})$ das Maß Unendlich zuordnet, die nicht in einer abzählbaren Vereinigung von Mengen endlichen Maßes aus \mathcal{A} enthalten sind.

Definition 1.2.17. Sei X eine Menge und $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra. Ein **äußeres Maß auf \mathcal{N}** ist eine Abbildung $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty]$ derart, daß aus $Y \subset Z$ folgt $\alpha(Y) \leq \alpha(Z)$ und daß gilt $\alpha(\emptyset) = 0$ und daß für jede Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus unserer σ -Algebra \mathcal{N} gilt

$$\alpha\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(Y_n)$$

Die erste Bedingung nennen wir die **Monotonie**, die Zweite die **σ -Subadditivität**.

1.2.18. Wir werden in diesem Text äußere Maße fast nur auf der gesamten Potenzmenge einer vorgegebenen Menge betrachten.

1.2.19 (**Jedes Maß ist ein äußeres Maß**). Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) gilt für beliebige meßbare $A, B \in \mathcal{M}$ stets $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, es gilt ja sogar genauer $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Ist weiter $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Mengen, so können wir ihre Vereinigung $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ auch als die disjunkte Vereinigung $A = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} B_n$ der kleineren Mengen $B_n := A_n \setminus (A_{n-1} \cup \dots \cup A_0)$ schreiben und erhalten so die Abschätzung

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Lemma 1.2.20 (Konstruktion äußerer Maße). Gegeben eine Menge X , ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{A}$ und eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ erhalten wir ein äußeres Maß μ^* auf $\mathcal{P}(X)$ durch die Vorschrift

$$\mu^*(Y) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \mid (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } Y \subset \bigcup A_i \right\}$$

1.2.21. Die Bedingungen $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ sind unnatürlich und könnten unterdrückt werden, wenn wir statt mit Folgen allgemeiner mit abzählbaren Familien arbeiten würden, was ja nach unseren Konventionen die leere Familie einschließt. Mir schien aber hier das Arbeiten mit Folgen vom didaktischen Standpunkt aus so viel günstiger, daß ich diese Unnatürlichkeit der Darstellung dafür in Kauf genommen habe.

Beweis. Es ist klar, daß μ^* die von einem äußeren Maß geforderte Monotonie hat. Es bleibt, die σ -Subadditivität zu zeigen. Dafür reicht es, die fragliche Abschätzung für jede Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen $Y_n \subset X$ mit $\mu^*(Y_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_n^i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A} mit $Y_n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_n^i$ und

$$\mu^*(Y_n) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_n^i) \leq \mu^*(Y_n) + \varepsilon/2^n$$

Dann gilt aber $\bigcup Y_n \subset \bigcup_{i,n} A_n^i$ und aus der Definition von μ^* folgern wir

$$\mu^* \left(\bigcup Y_n \right) \leq \sum_{i,n} \mu(A_n^i) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Y_n) + 2\varepsilon$$

Da das nun gilt für alle $\varepsilon > 0$, ist μ^* auch subadditiv. □

Lemma 1.2.22 (Ausdehnen von Prämaß zu äußerem Maß). *Gegeben eine Menge X , ein Mengenring $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und ein Prämaß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ stimmt das in 1.2.20 konstruierte äußere Maß μ^* auf dem vorgegebenen Mengenring \mathcal{A} mit dem vorgegebenen Prämaß μ überein, in Formeln $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Die Ungleichung $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ ist offensichtlich. Wir müssen also nur noch $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ zeigen. Dazu reicht es, wenn wir zeigen $\mu(A) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir aber eine Folge A_n in \mathcal{A} mit $A \subset \bigcup A_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$, und indem wir A_n verkleinern zu $A_n \setminus (A_{n-1} \cup \dots \cup A_0)$ dürfen wir hier sogar die Fonglieder paarweise disjunkt annehmen. Wegen $A = \bigsqcup (A \cap A_n)$ erhalten wir dann wie gewünscht

$$\mu(A) = \sum \mu(A \cap A_n) \leq \sum \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \quad \square$$

1.2.23. Gegeben eine feste Menge X und eine Teilmenge $A \subset X$ verwenden wir im folgenden für das Komplement von A die Abkürzung $A^c := X \setminus A$.

Definition 1.2.24. Sei X eine Menge und α ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt α -**meßbar** oder auch ein α -**Zerleger** genau dann, wenn für jede Teilmenge $Y \subset X$ gilt

$$\alpha(Y) = \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap A^c)$$

Lemma 1.2.25 (Zerleger-Lemma). *Gegeben eine Menge X und ein äußeres Maß α auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X ist das System $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$ aller α -Zerleger eine σ -Algebra und α ist ein Maß auf \mathcal{Z} .*

Ergänzung 1.2.26. Ist allgemeiner X eine Menge und α ein äußeres Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$, so definieren wir analog das System $\mathcal{Z} \subset \mathcal{N}$ der \mathcal{N} - α -Zerleger, und derselbe Beweis zeigt, daß auch diese Zerleger eine σ -Algebra bilden und daß unser äußeres Maß zu einem Maß auf dieser σ -Algebra einschränkt.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß \mathcal{Z} eine Mengenalgebra ist. Sicher gilt $\emptyset \in \mathcal{Z}$, und aus $A \in \mathcal{Z}$ folgt $A^c \in \mathcal{Z}$. Wir müssen nur noch zeigen, daß aus $A, B \in \mathcal{Z}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{Z}$. Sei dazu $Y \subset X$ beliebig. Es gilt, für α -Zerleger A und B zu zeigen

$$\alpha(Y) = \alpha(Y \cap (A \cap B)) + \alpha(Y \cap (A \cap B)^c)$$

Da A und B schon α -Zerleger sind, finden wir aber in der Tat

$$\begin{aligned}
\alpha(Y \cap (A \cap B)^c) + \alpha(Y \cap A \cap B) &= \alpha(Y \cap (A \cap B)^c \cap A) \\
&\quad + \alpha(Y \cap (A \cap B)^c \cap A^c) \\
&\quad + \alpha(Y \cap A \cap B) \\
&= \alpha(Y \cap B^c \cap A) \\
&\quad + \alpha(Y \cap A^c) \\
&\quad + \alpha(Y \cap A \cap B) \\
&= \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap A^c) = \alpha(Y)
\end{aligned}$$

Also ist \mathcal{Z} schon mal eine Mengenalgebra. Als nächstes zeigen wir, daß \mathcal{Z} auch stabil ist unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen und damit eine σ -Algebra. Sind zunächst einmal $A, B \in \mathcal{Z}$ disjunkt, so gilt

$$\alpha(Y \cap (A \sqcup B)) = \alpha(Y \cap A) + \alpha(Y \cap B)$$

für beliebiges $Y \subset X$, denn unter der Voraussetzung $A \cap B = \emptyset$ können wir schreiben $Y \cap A = Y \cap (A \sqcup B) \cap A$ und $Y \cap B = Y \cap (A \sqcup B) \cap A^c$. Induktiv folgt für $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{Z}$ paarweise disjunkt und $Y \subset X$ beliebig die Gleichheit

$$\alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)) = \sum_{\nu=0}^n \alpha(Y \cap A_\nu)$$

Haben wir also eine Folge (A_ν) von paarweise disjunkten Zerlegern mit Vereinigung $A := \bigsqcup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu$ gegeben, so gilt für jede Teilmenge $Y \subset X$ aufgrund der Monotonie unseres äußeren Maßes die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\alpha(Y) &= \alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)^c) + \alpha(Y \cap (A_0 \sqcup \dots \sqcup A_n)) \\
&\geq \alpha(Y \cap A^c) + \sum_{\nu=0}^n \alpha(Y \cap A_\nu)
\end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ergibt sich so die erste Ungleichung der Ungleichungskette

$$\alpha(Y) \geq \alpha(Y \cap A^c) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha(Y \cap A_\nu) \geq \alpha(Y \cap A^c) + \alpha(Y \cap A) \geq \alpha(Y)$$

Die anderen beiden Ungleichungen folgen aus der σ -Subadditivität unseres äußeren Maßes. Damit haben wir überall Gleichheit und A ist auch ein Zerleger und \mathcal{Z} eine σ -Algebra. Setzen wir in unserer Ungleichungskette $Y = A$, so folgt wiederum die σ -Additivität von $\alpha : \mathcal{Z} \rightarrow [0, 1]$. Also ist α in der Tat ein Maß auf der σ -Algebra \mathcal{Z} aller Zerleger. \square

Beweis von Proposition 1.2.14 über die größte Maßfortsetzung. Seien \mathcal{A} ein Mengerring, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf \mathcal{A} und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das in 1.2.22 konstruierte äußere Maß. Um Proposition 1.2.14 zur Konstruktion der größten Maßfortsetzung aus dem Zerlegerlemma 1.2.25 abzuleiten, müssen wir nur noch zeigen, daß \mathcal{A} aus μ^* -Zerlegern besteht. Für jedes äußere Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und beliebige $A, Y \subset X$ gilt per definitionem

$$\mu^*(Y) \leq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

Wir müssen für $A \in \mathcal{A}$ und beliebiges $Y \subset X$ auch die andere Ungleichung zeigen. Das ist nur im Fall $\mu^*(Y) < \infty$ problematisch. Unter dieser Voraussetzung finden wir aber für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Folge (B_n) in \mathcal{A} mit $Y \subset \bigcup_n B_n$ und

$$\begin{aligned} \mu^*(Y) + \varepsilon &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \end{aligned}$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die andere Ungleichung

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

und damit die Gleichheit. Also besteht \mathcal{A} in der Tat aus μ^* -meßbaren Mengen und die Proposition 1.2.14 ist bewiesen. \square

Beweis des Maßfortsetzungssatzes von Caratheodory 1.2.10. Die Existenz einer Maßfortsetzung haben wir bereits als Proposition 1.2.14 gezeigt und nur die Eindeutigkeit ist noch zu zeigen. Sei dazu ν eine zweite Fortsetzung. Es gilt zu zeigen $\mu(C) = \nu(C)$ für alle $C \in \mathcal{M}$. Aus der Konstruktion von μ in 1.2.14 folgt bereits $\nu(C) \leq \mu(C)$. Da wir unser Prämaß σ -endlich angenommen hatten, gibt es jedoch eine aufsteigende Folge $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ in \mathcal{A} mit $\bigcup A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty \quad \forall n$. Wir müssen nur für alle n die Gleichungen

$$\mu(C \cap A_n) = \nu(C \cap A_n)$$

zeigen, dann ergibt sich $\mu(C) = \nu(C)$ im Grenzwert $n \rightarrow \infty$. Wie bereits erwähnt gilt jedoch $\nu(C \cap A_n) \leq \mu(C \cap A_n)$ und ganz genauso auch $\nu(C^c \cap A_n) \leq \mu(C^c \cap A_n)$, und da die Summe dieser Ungleichungen die Gleichung $\nu(A_n) = \mu(A_n)$ liefert, müssen unsere Ungleichungen beide schon Gleichungen gewesen sein. \square

Proposition 1.2.27 (Maße und ihre Integrale). *Wir erhalten eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \{ \text{Borelmaße auf } \mathbb{R} \} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Monoton wachsende} \\ \text{linksseitig stetige Funktionen} \\ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(0) = 0 \end{array} \right\} \\ \mu &\mapsto \left(f_\mu : x \mapsto \begin{cases} \mu[0, x) & \text{falls } x \geq 0; \\ -\mu[x, 0) & \text{falls } x \leq 0. \end{cases} \right) \end{aligned}$$

1.2.28. Die Umkehrabbildung zur Bijektion aus unserer Proposition notieren wir $f \mapsto df$. Das Maß df heißt auch das **Stieltjes-Maß zu f** .

Beweis. Man prüft leicht, daß unsere Abbildungsvorschrift $\mu \mapsto f_\mu$ in der Tat eine Abbildung zwischen den im Satz beschriebenen Mengen liefert. Es gilt, eine Umkehrabbildung zu konstruieren. Dazu betrachten wir zu f monoton wachsend linksseitig stetig das in 1.2.8 konstruierte Prämaß df und erweitern es mit dem Maßfortsetzungssatz zu einem Maß df auf den Borelmengen. Das so konstruierte Maß $\mu = \mu_f$ hat offensichtlich die Eigenschaft $f = f_\mu + f(0)$. Gehen wir andererseits von μ aus, so stimmt das Maß df_μ auf einem erzeugenden Mengenring der borelschen σ -Algebra mit μ überein und wir haben folglich $\mu = df_\mu$. \square

1.2.29. Es gibt also für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau ein topologisches Maß df auf \mathbb{R} mit $(df)([a, b)) = f(b) - f(a)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Unser Lebesguemaß kann man in dieser Notation auch schreiben als das Maß dx , mit x als alternativer Bezeichnung für die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ auf der reellen Zahlengeraden. Etwas allgemeiner kann man so auch für jeden orientierten eindimensionalen reellen affinen Raum X und jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ in natürlicher Weise ein topologisches Maß df auf X erklären. Die Beziehung zu unseren Kovektorfeldern df für differenzierbare Funktionen f diskutieren wir in 1.5.28.

Korollar 1.2.30 (Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen). *Wir erhalten eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \{ \text{Wahrscheinlichkeitsmaße auf } \mathbb{R} \} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Monoton wachsende} \\ \text{linksseitig stetige Funktionen} \\ V : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \text{ mit} \\ \inf V(\mathbb{R}) = 0 \text{ und } \sup V(\mathbb{R}) = 1 \end{array} \right\} \\ \mu &\mapsto (V_\mu : x \mapsto \mu(-\infty, x)) \end{aligned}$$

Ergänzung 1.2.31. Im Fall von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ auf \mathbb{R} mit seiner σ -Algebra der topologisch meßbaren Mengen ist es üblich, eine Variante der Konstruktion aus Satz 1.2.27 zu betrachten und die **Verteilungsfunktion** des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ zu definieren durch die Vorschrift $V_\mu(x) = \mu(-\infty, x)$ und allgemeiner $V_\mu(x_1, \dots, x_n) = \mu((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n))$ für Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R}^n . Damit erhalten wir dann eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} und der Menge aller linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins, in Formeln $\inf(V(\mathbb{R})) = 0$ und $\sup(V(\mathbb{R})) = 1$, oder allgemeiner zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R}^n und der Menge aller in jeder Variablen linksseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins. Andere Quellen erklären die Verteilungsfunktion abweichend als $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$ und erhalten dann analog eine eindeutige Entsprechung zwischen der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} und der Menge aller rechtsseitig stetigen monoton wachsenden Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Infimum Null und Supremum Eins.

Übungen

Übung 1.2.32. Gegeben Mengen X und Y sowie Mengensysteme $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ ist auch das System aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten Mengen der Gestalt $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ ein Mengensystem in $\mathcal{P}(X \times Y)$. Diese Übung ist wichtig zur Vorbereitung der Diskussion von Produktmaßen.

Übung 1.2.33. Man zeige, daß zwei Maße auf ein- und derselben σ -Algebra übereinstimmen, sobald sie auf einem schnittstabilen Erzeugendensystem unserer σ -Algebra übereinstimmen, das darüber hinaus σ -**endlich** ist in dem Sinne, daß die ganze Menge durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus besagtem Erzeugendensystem überdeckt werden kann. Hierbei heißt ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ **schnittstabil** genau dann, wenn gilt $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.

Übung 1.2.34. Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf \mathbb{R} geben kann. Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lambda(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$; Zeigen Sie anschließend, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lambda([0, 1/n]) = 1/n$. Erweitern Sie als nächstes die Aussage auf Intervalle mit rationalen Endpunkten und schließlich auf beliebige Intervalle. Wenden Sie dann den Satz über Maßfortsetzungen an.

Übung 1.2.35. Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf \mathbb{R}^n geben kann. Hinweis: 1.2.34.

Übung 1.2.36 (Mengensystem erzeugt von Mengensystem). Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen einer Menge X , so heißt der Schnitt aller Mengenal-

geben, die \mathcal{A} umfassen, die **von \mathcal{A} erzeugte Mengenalgebra**. Weiter heißt der Schnitt aller Mengenringe, die \mathcal{A} umfassen, der **von \mathcal{A} erzeugte Mengenring**. Man zeige: Die von einem endlichen System $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Teilmengen einer gegebenen Menge X erzeugte Mengenalgebra kann beschrieben werden als das System aller Mengen, die man erhält, wenn man erst für alle $I \subset \Lambda$ die paarweise disjunkten Mengen

$$A_{(I)} = \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda \cap \bigcap_{\lambda \notin I} (X \setminus A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \notin I} A_\lambda$$

bildet und dann Vereinigungen derartiger $A_{(I)}$ nimmt. Nimmt man Vereinigungen derartiger $A_{(I)}$ mit $I \neq \emptyset$, so ergibt sich der von den A_λ erzeugte Mengenring. Die von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugte Mengenalgebra ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenalgebren. Der von einem beliebigen System von Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugte Mengenring ist die Vereinigung der von allen endlichen Teilsystemen erzeugten Mengenringe.

Ergänzende Übung 1.2.37 (Benford's Gesetz). Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall $I = [a, b]$ genau ein topologisches Maß μ gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das „partiell translationsinvariant“ ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge $A \subset I$ und jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a + A \subset I$ gilt $\mu(A) = \mu(a + A)$. Zeigen Sie, daß es auf jedem nichtleeren kompakten Intervall $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_{>0}$ genau ein topologisches Maß μ gibt, das dem ganzen Intervall das Maß Eins zuweist und das „partiell skaleninvariant“ ist in dem Sinne, daß für jede Borelmenge $A \subset I$ und jedes $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $cA \subset I$ gilt $\mu(A) = \mu(cA)$. Zeigen Sie weiter, daß dieses Maß, wenn unser Intervall nicht nur aus einem Punkt besteht, von der Gestalt $ax^{-1}dx$ ist mit $a > 0$. Gegeben ein derartiges Maß und I so groß, daß gilt $\beta > 10^n \alpha$ für $n \geq 1$, wird dann für jede Ziffer $i \in \{1, \dots, 9\}$ das Maß der Menge M_i aller $x \in I$, die als Dezimalbruch mit erster von Null verschiedener Ziffer i geschrieben werden können, von $(\log(i+1) - \log(i))/\log(10)$ um weniger als $1/(n+1)$ abweichen. Diese Verteilung der Anfangsziffern „zufälliger“ Zahlenreihen tritt in der Wirklichkeit häufig auf und heißt **Benford's Gesetz**. Benford fand es beim Nachdenken über die Tatsache, daß bei gut gebrauchten Büchern mit Logarithmentafeln die Seiten mit den Logarithmen zu kleinen Anfangsziffern am Rand viel schwärzer sind als die Seiten mit den Logarithmen zu großen Anfangsziffern. Benford's Gesetz wird unter anderem eingesetzt, um Steuerbetrug zu entlarven, da von Menschen willkürlich hingeschriebene Zahlenreihen typischerweise eine andere Verteilung von Anfangsziffern haben.

Ergänzende Übung 1.2.38 (Gleichverteilung im Folgenraum). Man zeige: Auf dem Raum $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$ aller Folgen in der zweielementigen Menge $\{W, Z\}$

mit der in [AN1] 7.1.19 erklärten Metrik gibt es genau ein Borelmaß, das für jeden n -gliedrigen Folgenanfang der Menge aller Folgen mit diesem Anfang das Maß 2^{-n} zuordnet. Man zeige weiter, daß die durch die dyadische Entwicklung gegebene Surjektion $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\}) \rightarrow [0, 1]$ stetig ist und daß hier das Maß des Urbilds einer Borelmenge gerade das Lebesguemaß der ursprünglichen Menge ist. Hinweis: Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums „ n -vernünftig“ nennen genau dann, wenn sie mit einer Folge auch alle anderen Folgen enthält, die sich von dieser frühestens im n -ten Folgenglied unterscheiden. Man mag eine Teilmenge unseres Folgenraums „vernünftig“ nennen genau dann, wenn sie n -vernünftig ist für mindestens ein n . Man mag von der Erkenntnis ausgehen, daß die vernünftigen Teilmengen einen Mengenring bilden, und verwenden, daß alle vernünftigen Teilmengen sowohl offen als auch abgeschlossen und damit nach [AN1] 7.1.19 kompakt sind. Jede Überdeckung einer vernünftigen Teilmenge durch vernünftige Teilmengen besitzt folglich eine endliche Teilüberdeckung.

Ergänzende Übung 1.2.39. Wir betrachten die **Cantor-Menge** C , die aus dem Einheitsintervall $C_0 = [0, 1]$ entsteht, indem wir das mittlere Drittel $(1/3, 2/3)$ herausnehmen, dann aus den beiden so entstehenden kompakten Intervallen wieder jeweils das offene mittlere Drittel und so weiter, und schließlich als C den Schnitt über alle Mengen C_n nehmen, die wir in dieser Weise in n Schritten erhalten. Man zeige, daß die Cantor-Menge das Lebesguemaß $\lambda(C) = 0$ Null hat und überabzählbar ist. Hinweis: Man kann die Cantor-Menge auch beschreiben als die Menge aller Zahlen, die sich in der Basis Drei mit einer Null vor dem Komma und ohne die Ziffer Eins ausdrücken lassen, in Formeln

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

Ergänzende Übung 1.2.40. Die Menge aller reellen Zahlen, die sich darstellen lassen durch einen unendlichen Dezimalbruch, in dem die Ziffer 6 nicht vorkommt, bilden eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} vom Lebesguemaß Null.

1.3 Vervollständigung von Maßräumen*

Definition 1.3.1. Eine Teilmenge eines Maßraums, die in einer meßbaren Menge vom Maß Null enthalten ist, heißt eine **Nullmenge** unseres Maßraums. Ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn jede Nullmenge bereits meßbar ist, d.h. zu \mathcal{M} gehört.

Proposition 1.3.2 (Vervollständigung von Maßräumen). *Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) gibt es genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß μ^* auf der von \mathcal{M} und den μ -Nullmengen erzeugten σ -Algebra \mathcal{M}^* , und der so entstehende Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ ist vollständig.*

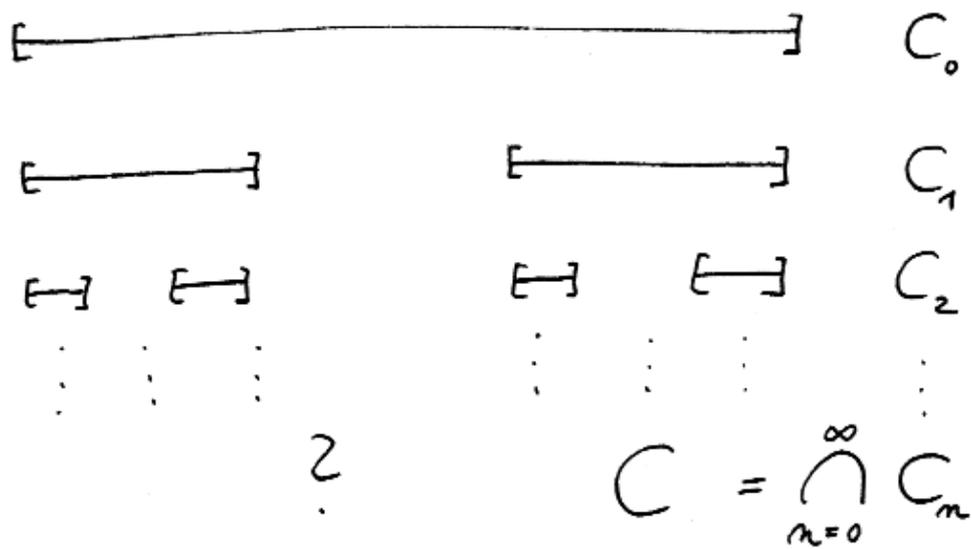


Illustration zur Cantor-Menge

Beweis. Erweitern wir μ zu einem äußeren Maß μ^* auf $\mathcal{P}(X)$ wie in Lemma 1.2.22 und wenden auf dieses äußere Maß das Zerleger-Lemma 1.2.25 an, so folgt, daß alle μ -Nullmengen bereits μ^* -meßbar sind und daß mithin μ^* ein Maß ist auf \mathcal{M}^* . Das zeigt die Existenz von μ^* . Für die Eindeutigkeit prüft man, daß \mathcal{M}^* genau aus allen Teilmengen $E \subset X$ besteht derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. In der Tat bilden nämlich alle diese E eine σ -Algebra. Jedes erweiterte Maß μ^* nimmt aber auf einer solchen Teilmenge E notwendig den Wert $\mu^*(E) = \mu(A)$ an. \square

1.3.3. Der Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ heißt die **Vervollständigung** des Maßraums (X, \mathcal{M}, μ) . Die bezüglich der Vervollständigung des Lebesguemaßes meßbaren Teilmengen von \mathbb{R} oder auch \mathbb{R}^n nennt man die **Lebesgue-meßbaren** Teilmengen oder kurz **Lebesgue-Mengen**. Es ist nicht ganz einfach, eine Lebesgue-Menge in \mathbb{R} explizit anzugeben, die nicht topologisch meßbar ist. Genauer gesagt wüßte ich selber nicht, wie ich das machen sollte, und müßte einen Logiker um Hilfe bitten. Man kann jedoch zeigen, daß es im Sinne der Mengenlehre „mehr“ Lebesgue-Mengen in \mathbb{R} gibt als topologisch meßbare Teilmengen, vergleiche etwa [AL] 5.4.6.

Übungen

Übung 1.3.4. Man arbeite den Schluß des Beweises von 1.3.2 aus und zeige, daß gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) das Mengensystem aller $E \subset X$ derart, daß es $A, B \in \mathcal{M}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$, eine σ -Algebra ist.

Übung 1.3.5. Zeigen Sie, daß es in \mathbb{R} Teilmengen gibt, die nicht Borel-meßbar und noch nicht einmal Lebesgue-meßbar sind. Hinweis: 1.1.31.

Übung 1.3.6. Man zeige: Eine Teilmenge der reellen Zahlengeraden ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Intervallen $[a_n, b_n]$ überdecken läßt derart, daß gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$. Hinweis: 1.2.10 und 1.2.14.

1.4 Meßbare Abbildungen

1.4.1. Bis jetzt haben wir uns nur mit dem Messen von Mengen beschäftigt. Wir haben gesehen, daß das Messen ganz beliebiger Teilmengen der reellen Zahlengerade problematisch ist, konnten jedoch gewisse Mengen als meßbar auszeichnen und solchen Mengen sinnvoll ein Maß zuordnen. Nun wollen wir reellwertigen Funktionen auf Maßräumen ein Integral zuordnen. Wieder ist das für ganz beliebige Funktionen problematisch, und wieder können wir gewisse Funktionen als „meßbar“ auszeichnen und zumindest allen nichtnegativen meßbaren Funktionen

sinnvoll ein Integral zuordnen. In einem zweiten Schritt geben wir dann auch eine Definition für das Integral beliebiger meßbarer reellwertiger Funktionen, wann immer ihr Betrag ein endliches Integral hat.

Definition 1.4.2. Seien (X, \mathcal{M}) und (Y, \mathcal{N}) Meßräume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **meßbar**, wenn das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist, in Formeln $V \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.

1.4.3. Nach Übung 1.3.5 sind nicht alle Teilmengen von \mathbb{R} borelmeßbar, und dann können natürlich auch nicht alle Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borelmeßbar sein.

Ergänzung 1.4.4. Eine meßbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) in einen Meßraum heißt auch eine **Zufallsvariable** auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum mit Werten in besagtem Meßraum oder ein **zufälliges Element** von besagtem Meßraum. So würde etwa ein gerechter Würfel modelliert durch eine Abbildung $W : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}$ mit $W^{-1}(i)$ meßbar und $P(W^{-1}(i)) = 1/6$ für $1 \leq i \leq 6$. Das Interesse konzentriert sich in diesem Zusammenhang auf das Studium der Beziehungen zwischen derartigen Zufallsvariablen.

Lemma 1.4.5. *Jede Verknüpfung meßbarer Abbildungen ist meßbar.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition mit demselben Argument wie wir es in [AN1] 6.6.8 für die Stetigkeit der Verknüpfung gesehen hatten. \square

1.4.6. Wenn nichts anderes gesagt ist, denken wir uns metrische oder allgemeiner topologische Räume stets mit der durch die Borel'sche σ -Algebra gegebenen Struktur eines Meßraums versehen. Wir machen unsere erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ zu einem Meßraum, indem wir darauf die von allen Intervallen erzeugte σ -Algebra betrachten. Für die natürliche Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ im Sinne von [AN1] 6.5.9 ist das auch genau die Borel'sche σ -Algebra.

Proposition 1.4.7. *Alle stetigen Abbildungen sind meßbar.*

Beweis. Da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen nach [AN1] 6.6.6 offen sind, folgt das aus dem anschließenden Lemma 1.4.9. \square

Definition 1.4.8. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f_*\mathcal{M} := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{M}\}$ eine σ -Algebra. Es heißt das **Bild unter f** der σ -Algebra \mathcal{M} ;
2. Ist $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ -Algebra, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f^*\mathcal{N} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{N}\}$ eine σ -Algebra. Sie heißt das **Urbild unter f** der σ -Algebra \mathcal{N} ;

3. Ist speziell $i : B \hookrightarrow Y$ die Einbettung einer Teilmenge $B \subset Y$ eines Meßraums (Y, \mathcal{N}) , so setzen wir $i^*\mathcal{N} = \mathcal{N}|_B$ und nennen das die **auf B induzierte σ -Algebra $\mathcal{N}|_B$** . Sie besteht also gerade aus allen Schnitten mit B von meßbaren Mengen in Y , in Formeln $\mathcal{N}|_B := \{Z \cap B \mid Z \in \mathcal{N}\}$.

Lemma 1.4.9. *Seien (X, \mathcal{M}) und (Y, \mathcal{N}) zwei Meßräume und sei die σ -Algebra \mathcal{N} erzeugt von einem Teilsystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$. Genau dann ist $f : X \rightarrow Y$ meßbar, wenn die Urbilder aller Mengen aus \mathcal{S} meßbar sind, wenn also in Formeln gilt*

$$V \in \mathcal{S} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$$

Beweis. Wir verwenden unsere Notation $f_*\mathcal{M}$ für das Bild einer σ -Algebra und insbesondere die Erkenntnis, daß das wieder eine σ -Algebra ist. Aus $\mathcal{S} \subset f_*\mathcal{M}$ folgt damit $\sigma(\mathcal{S}) \subset f_*\mathcal{M}$, und wegen unserer Annahme $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{N}$ bedeutet das gerade die Meßbarkeit von f . \square

1.4.10. Weil die Beweise vollständig analog sind und die Terminologie sich als nützlich erweisen wird, formulieren wir auch gleich noch die Analoga dieser Aussagen für topologische Räume.

Definition 1.4.11. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. Ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f_*\mathcal{T} := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie, die **Finaltopologie**;
2. Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine Topologie, so ist offensichtlich auch das Mengensystem $f^*\mathcal{S} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{S}\}$ eine Topologie auf X , die **Initialtopologie**;

Beispiel 1.4.12. Ist $i : B \hookrightarrow Y$ die Einbettung einer Teilmenge in einen topologischen Raum, so ist die Initialtopologie unsere induzierte Topologie aus [AN1] 6.6.2.

Lemma 1.4.13. *Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) zwei topologische Räume und sei die Topologie \mathcal{S} erzeugt von einem Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$. Genau dann ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, wenn die Urbilder aller Mengen aus \mathcal{E} offen sind, wenn also in Formeln gilt*

$$V \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$$

Beweis. Vollständig analog zum Beweis von 1.4.9. \square

Definition 1.4.14. Gegeben Meßräume (X, \mathcal{M}) und (Y, \mathcal{N}) heißt die von allen Produkten $A \times B$ mit $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ die **Produkt- σ -Algebra**.

1.4.15. Die Projektionen eines Produkts von Meßräumen auf seine Faktoren sind meßbar nach 1.4.9. Mit 1.4.9 sieht man auch leicht, daß wir so ein Produkt im Sinne von [LA2] 8.6.1 in der Kategorie der Meßräume mit den meßbaren Abbildungen als Morphismen erhalten. Sind also X, Y, Z Meßräume und $f : Z \rightarrow X$ sowie $g : Z \rightarrow Y$ Abbildungen, so sind f und g meßbar genau dann, wenn $(f, g) : Z \rightarrow X \times Y$ meßbar ist.

Definition 1.4.16. Gegeben topologische Räume X, Y erklärt man auf $X \times Y$ die **Produkttopologie** als die Topologie, die erzeugt wird von allen $U \times V$ mit $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$.

1.4.17. Die Projektionen eines Produkts topologischer Räume auf seine Faktoren sind stetig nach 1.4.13. Mit 1.4.13 sieht man auch leicht, daß wir so ein Produkt in der Kategorie der topologischen Räume im Sinne von [LA2] 8.6.1 erhalten. Sind also X, Y, Z topologische Räume und $f : Z \rightarrow X$ sowie $g : Z \rightarrow Y$ Abbildungen, so sind f und g stetig genau dann, wenn $(f, g) : Z \rightarrow X \times Y$ stetig ist. Ebenso sieht man leicht ein, daß gegeben zwei metrische Räume die Topologie zur Produktmetrik mit der Produkttopologie zusammenfällt.

Definition 1.4.18. Gegeben ein topologischer Raum X heißt ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine **Basis der Topologie**, wenn die offenen Mengen unseres topologischen Raums X alle beliebigen Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{E} sind. Ein topologischer Raum heißt **abzählbar basiert**, wenn er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Beispiel 1.4.19. Gegeben topologische Räume X, Y bilden die Produkte $U \times V$ mit $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ eine Basis der Produkttopologie. In der Tat ist das System all dieser Produkte stabil unter endlichen Schnitten, und nun müssen wir nur unsere explizite Beschreibung 1.1.17 der von einem Mengensystem erzeugten Topologie erinnern.

Beispiel 1.4.20. Gegeben topologische Räume X, Y und \mathcal{E}, \mathcal{F} jeweils eine Basis der Topologie bilden die Produkte $U \times V$ mit $U \in \mathcal{E}$ und $V \in \mathcal{F}$ eine Basis der Produkttopologie. In der Tat folgt das sofort aus dem vorhergehenden Beispiel.

Beispiel 1.4.21. Ein überabzählbarer diskreter Raum ist nicht abzählbar basiert. Der \mathbb{R}^n ist abzählbar basiert, wie man leicht einsieht und auch aus der anschließenden Bemerkung folgern kann. Jede Teilmenge eines abzählbar basierten Raums ist abzählbar basiert in Bezug auf ihre Spurtopologie.

Beispiel 1.4.22. Ein metrischer Raum ist genau dann abzählbar basiert, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. In der Tat, wählen wir aus jeder Menge einer Basis der Topologie einen Punkt aus, so erhalten wir sicher eine dichte Teilmenge, und ist umgekehrt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in einem metrischen Raum, so bilden die offenen Bälle $B(x_n; 1/m)$ eine Basis der Topologie. Man nennt metrische Räume, die eine abzählbare dichte Teilmenge besitzen, auch **separabel**.

1.4.23 (**Diskussion der Terminologie**). Statt „abzählbar basiert“ sagt man in der Literatur meist, der Raum „besitze eine abzählbare Basis“ oder er „gehörte dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom“. Weiter nennen viele Autoren auch einen allgemeinen topologischen Raum „separabel“, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Das gefällt mir nicht, da dies Konzept meines Erachtens in dieser Allgemeinheit nicht relevant genug ist, um eine eigene Bezeichnung zu verdienen. Im Buch von Halmos zur Maßtheorie wird der Begriff „separabel“ auch für allgemeine topologische Räume als Synonym für unser „abzählbar basiert“ verwendet, aber damit steht er alleine da.

1.4.24. Besitzt ein topologischer Raum eine abzählbare Basis der Topologie, so erzeugen die offenen Mengen aus dieser Basis die Borel'sche σ -Algebra.

Proposition 1.4.25. *Gegeben abzählbar basierte topologische Räume X, Y ist die Borel'sche σ -Algebra ihres Produkts die Produkt- σ -Algebra der Borel'schen σ -Algebren der Faktoren, in Formeln*

$$\text{Borel}(X) \boxtimes \text{Borel}(Y) = \text{Borel}(X \times Y)$$

Beweis. Die Projektionen auf die Faktoren sind stetig, also sind die Urbilder von Borelmengen wieder Borelmengen. Gegeben $A \in \text{Borel}(X)$ und $B \in \text{Borel}(Y)$ folgt so $A \times Y, X \times B \in \text{Borel}(X \times Y)$. Dann gilt aber auch für den Schnitt $A \times B \in \text{Borel}(X \times Y)$ und so folgt $\text{Borel}(X) \boxtimes \text{Borel}(Y) \subset \text{Borel}(X \times Y)$. Um die Gegenrichtung zu zeigen, wählen wir zu X und Y jeweils eine abzählbare Basis \mathcal{E}, \mathcal{F} der Topologie. Nach 1.4.20 bilden dann die Produkte $U \times V$ mit $U \in \mathcal{E}$ und $V \in \mathcal{F}$ eine Basis der Produkttopologie. Nach 1.4.24 erzeugen aber diese Produkte bereits die Borel'sche σ -Algebra von $X \times Y$, und so folgt die umgekehrte Inklusion $\text{Borel}(X) \boxtimes \text{Borel}(Y) \supset \text{Borel}(X \times Y)$. \square

Korollar 1.4.26. *Die Summe und das Produkt reellwertiger meßbarer Funktionen sind wieder meßbar.*

Beweis. Sei X ein Meßraum und seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ meßbare Funktionen. Nach 1.4.15 ist dann $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ meßbar in Bezug auf die Produkt- σ -Algebra $\text{Borel}(\mathbb{R}) \boxtimes \text{Borel}(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^2 . Andererseits sind Addition und ebenso die Multiplikation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und folglich meßbar für die σ -Algebra $\text{Borel}(\mathbb{R}^2)$. Da \mathbb{R} abzählbar basiert ist, stimmen diese σ -Algebren nach 1.4.25 überein und folglich sind auch $f + g$ und fg als Verknüpfungen meßbarer Abbildungen auch selbst meßbar. \square

Satz 1.4.27 (Meßbarkeit von Grenzwerten von Funktionenfolgen). *Sei ein Meßraum (X, \mathcal{M}) gegeben.*

1. *Eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \mid f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty]$ meßbar ist in X ;*

2. Für jede Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind auch ihr Supremum und ihr Infimum $s, i : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s(x) = \sup f_n(x)$ bzw. $i(x) = \inf f_n(x)$ meßbar;
3. Konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ punktweise gegen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so ist auch f meßbar.

Beweis. 1. Die Intervalle der Form $(a, \infty]$ erzeugen die σ -Algebra der Borel-Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ und wir können 1.4.9 anwenden.

2. Es gilt $s^{-1}(a, \infty] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(a, \infty]$ und $i^{-1}[-\infty, a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}[-\infty, a)$.

3. Nach 2 sind auch die Funktionen $s_N(x) = \sup_{n \geq N} f_n(x)$ meßbar, und dann auch die Funktion $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) = \inf_N s_N(x)$. Diese Funktion bezeichnet man auch mit $g = \limsup f_n$. Falls die f_n punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergieren, so gilt insbesondere $f = \limsup f_n$, mithin ist dann auch f meßbar. \square

Lemma 1.4.28. *Ist X ein Meßraum und Y ein metrischer Raum und konvergiert eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow Y$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : X \rightarrow Y$, so ist auch die Grenzfunktion f meßbar.*

1.4.29. Wir können den dritten Teil von Satz 1.4.27 auch als Spezialfall dieses Lemmas erhalten, wenn wir etwa beachten, daß unsere Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ auch als eine metrische Topologie erhalten werden kann. Das Lemma gilt im übrigen mit demselben Beweis für einen beliebigen Hausdorffraum mit der Eigenschaft, daß jede seiner abgeschlossenen Mengen als der Schnitt einer abzählbaren Familie offener Mengen geschrieben werden kann.

Beweis. Nach 1.4.9 reicht es, für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq Y$ zu zeigen, daß ihr Urbild unter f meßbar ist. Nun gibt es jedoch eine absteigende Folge offener Mengen $U_0 \supset U_1 \supset \dots$ mit Schnitt A . Dann ist $f(x) \in A$ gleichbedeutend dazu, daß es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $N = N(x, i)$ gibt mit $f_n(x) \in U_i$ für $n \geq N(x, i)$. Damit können wir $f^{-1}(A)$ wie folgt beschreiben: Wir bilden zunächst für jedes i die Menge

$$V_i := \{x \in X \mid \exists N \text{ mit } n \geq N \Rightarrow f_n(x) \in U_i\} = \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(U_i)$$

und erhalten $f^{-1}(A) = \bigcap_{i \geq 0} V_i$. Diese Darstellung zeigt, daß mit den $f_n^{-1}(U_i)$ auch $f^{-1}(A)$ meßbar sein muß. \square

Ergänzung 1.4.30. Eine Funktion auf einem Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) , die meßbar ist auf dem in Bezug auf das Maß μ vervollständigten Maßraum $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$, nennen

wir μ -**meßbar**. Insbesondere heißt eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ **Lebesgue-meßbar** genau dann, wenn sie λ -**meßbar** ist für λ das Lebesguemaß. Wir werden nach Möglichkeit versuchen, ohne diese Begrifflichkeit auszukommen. Die Beziehung dieses Begriffs zur Meßbarkeit in Bezug auf \mathcal{M} klärt 1.5.18.

1.4.31. Geht man von diskreten Mengen zu allgemeineren „Räumen“ über, so gibt es zwei besonders natürliche Verallgemeinerungen für das Konzept einer Funktion: Funktionen und Maße. Gegeben eine Abbildung $X \rightarrow Y$ können Funktionen auf Y zu Funktionen auf X zurückgezogen werden, Maße auf X jedoch liefern in der Gegenrichtung Bildmaße auf Y . Diese zugegebenermaßen vagen Andeutungen werden im folgenden in speziellen Situationen ausgeführt.

Definition 1.4.32. Gegeben eine meßbare Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ von Meßräumen und ein Maß μ auf X erklärt man das **Bildmaß** $\phi_*\mu$ auf Y dadurch, daß man für jede meßbare Menge $A \subset Y$ setzt

$$(\phi_*\mu)(A) := \mu(\phi^{-1}A)$$

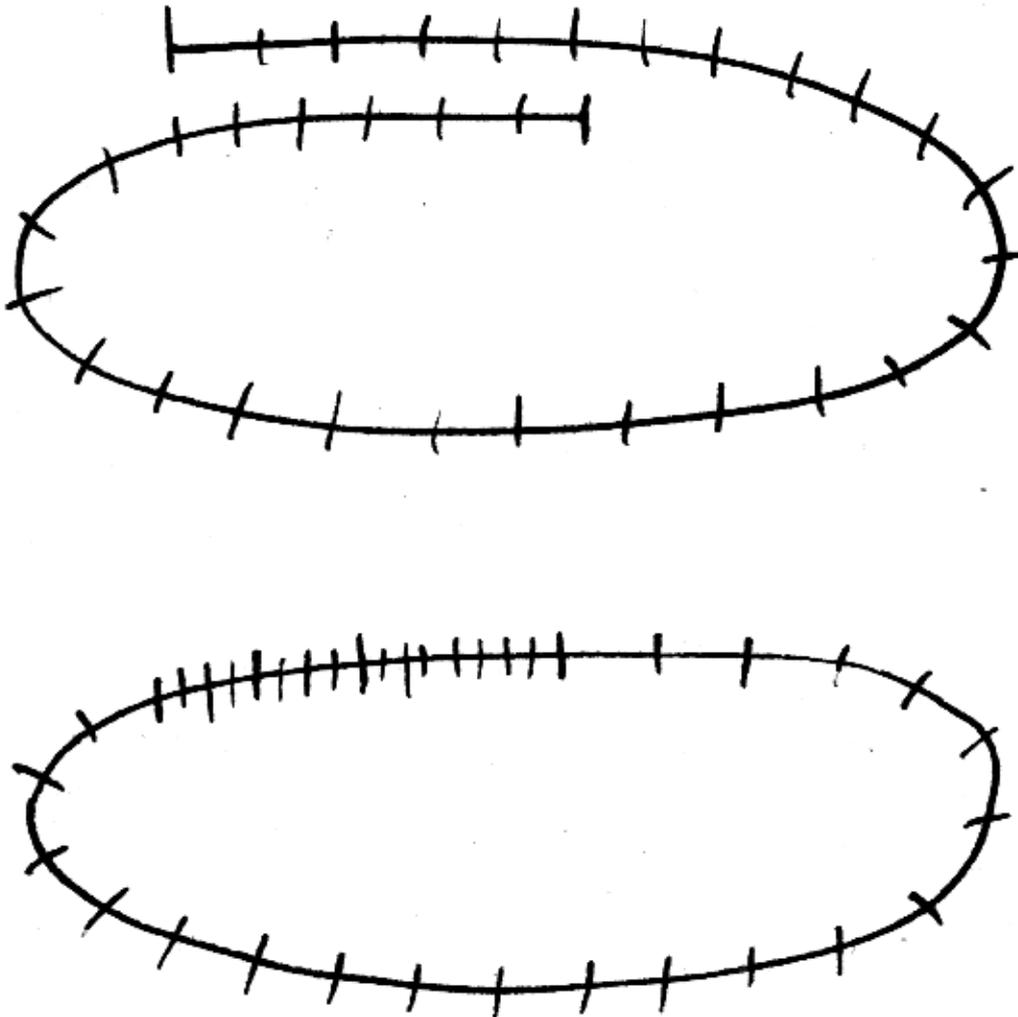
1.4.33. Offensichtlich liefert diese Vorschrift in der Tat ein Maß auf Y . Zusätzlich gilt für jede weitere meßbare Abbildung $\psi : Y \rightarrow Z$ von Meßräumen die Formel $\psi_*(\phi_*\mu) = (\psi \circ \phi)_*\mu$ und für die Identität auf X die Formel $\text{id}_*\mu = \mu$.

Beispiel 1.4.34. Das Bildmaß des Dirac-Maßes auf einer einpunktigen Menge unter einer meßbaren Abbildung in einen Meßraum ist das Dirac-Maß am Bildpunkt.

1.4.35. Ist (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, so heißt das Bildmaß des Wahrscheinlichkeitsmaßes unter einer Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow Y$ die **Verteilung der Zufallsvariable** und wird $P^X := X_*P$ notiert. Im Fall einer reellwertigen Zufallsvariable $Y = \mathbb{R}$ ist also P^X ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} . Seine Verteilungsfunktion im Sinne von 1.2.31 heißt die **Verteilungsfunktion** oder präziser die **kumulative Verteilungsfunktion** unserer Zufallsvariablen.

Beispiel 1.4.36. Die **geometrische Verteilung** mit Parameter $p \in [0, 1)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 1}$ ist das Maß $\mu = \mu_p$ auf $\mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\mu(i) = p^{i-1}(1-p)$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gerechten Würfel beim i -ten Wurf zum ersten Mal eine Sechs zu würfeln, ist zum Beispiel $\mu_{5/6}(i) = (5/6)^{i-1} \cdot (1/6)$.

1.4.37. Manchmal scheint mir die äquivalente Terminologie der „Verwandtschaft“ transparenter, die ich nun einführe. Gegeben eine meßbare Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ von Meßräumen und ein Maß μ auf X und ein Maß ν auf Y heißen die beiden Maße ϕ -**verwandt** und wir schreiben $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$, wenn gilt $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}A)$ für jede meßbare Teilmenge $A \subset Y$. Gleichbedeutend ist per definitionem $\nu = \phi_*\mu$. Jedes Maß hat also unter jeder meßbaren Abbildung genau einen „Vorwärtsverwandten“. Das mag den konzeptionellen Unterschied zwischen Maßen und Funktionen deutlich machen, die im Gegensatz dazu stets genau einen „Rückwärtsverwandten“ haben. Die Verwandtschaft von Maßen erfüllt offensichtlich die für



Versuch der graphischen Darstellung eines Bildmaßes. Das Maß einer Teilmenge ist hier so in etwa zu verstehen als die Zahl der Strichle in besagter Teilmenge.

Verwandtschaften gewohnten Regeln, daß gilt $\text{id} : \mu \rightsquigarrow \mu$ und daß aus $\psi : \lambda \rightsquigarrow \mu$ und $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$ und folgt $(\phi \circ \psi) : \lambda \rightsquigarrow \nu$.

1.4.38. Unter einer **Verfeinerung** eines Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, \mathcal{A}, P) verstehe ich eine meßbare Abbildung $\Omega' \rightarrow \Omega$ von einem weiteren Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ nach Ω derart, daß P das Bildmaß von P' ist. Ganz allgemein interessieren in der Wahrscheinlichkeitstheorie nur diejenigen Konstruktionen und Definitionen, die veträglich sind mit dem Zurückholen unter einer beliebigen Verfeinerung. Im Fall eines Würfels könnte Ω etwa aus den sechs möglichen Ausgängen eines Würfelxperiments bestehen, es könnte jedoch auch viel größer sein und etwa aus allen möglichen Ausgängen eines einmaligen Würfeln mit hundert Würfeln bestehen, von denen unser Würfel nur einer ist, oder aus allen Paaren in $\{1, \dots, 6\} \times \{\text{an}, \text{aus}\}$ bestehen, bei denen der zweite Eintrag erinnert, ob das Licht in dem Raum, in dem gewürfelt wurde, nun an oder aus war. Man beachte, daß bei Verfeinerungen neue Ereignisse hinzukommen können und Elementar-Ereignisse im allgemeinen keine Elementar-Ereignisse bleiben werden. Insofern ist der Begriff eines Elementar-Ereignisses der Wahrscheinlichkeitstheorie fremd.

Übungen

Übung 1.4.39. Man zeige, daß jede linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar ist. Hinweis: Man schreibe f als punktweisen Grenzwert stückweise konstanter Funktionen. Man zeige, daß jede in jeder Variablen monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar ist.

Übung 1.4.40. Alle monotonen Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind meßbar.

Ergänzende Übung 1.4.41. Jeder kompakte metrische Raum ist separabel.

Übung 1.4.42. Jede offene Überdeckung eines abzählbar basierten Raums besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung. In einem abzählbar basierten Raum ist jede diskrete Teilmenge abzählbar.

Übung 1.4.43. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **final**, wenn Y die **Finaltopologie** in Bezug auf f trägt. Man zeige: Gegeben $f : X \rightarrow Y$ final und ein weiterer topologischer Raum Z ist eine Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ genau dann stetig, wenn $g \circ f$ stetig ist.

1.5 Das Integral von nichtnegativen Funktionen

Definition 1.5.1. Eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt, nenne ich eine **Stufenfunktion**.

1.5.2. Ist X eine Menge und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist die **charakteristische Funktion** $\chi_A = [A] : X \rightarrow \{0, 1\}$ von A eine Stufenfunktion. Ich erinnere daran,

daß sie definiert wird durch die Vorschrift

$$[A](x) := \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Sie heißt auch die **Indikatorfunktion von A** und wird oft alternativ 1_A notiert. Ich ziehe jedoch in der Linie meines allgemeinen Kampfes gegen den Index die Notation $[A]$ vor.

Beispiele 1.5.3. Ist (X, \mathcal{M}) ein Maßraum, so ist jede reellwertige meßbare Stufenfunktion $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form

$$s = \sum_{i=1}^n c_i [A_i]$$

für eine Zerlegung $X = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ von X in endlich viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen und geeignete $c_i \in \mathbb{R}$. Offensichtlich bilden dann auch die reellwertigen meßbaren Stufenfunktionen einen Untervektorraum im Raum aller reellwertigen Funktionen auf X .

Definition 1.5.4 (Integral nichtnegativer reeller Stufenfunktionen). Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und eine meßbare reellwertige nichtnegative Stufenfunktion $s : X \rightarrow [0, \infty)$ erklärt man das **Integral** $\int s = \int_X s = \int_X s \mu \in [0, \infty]$ **von s über X** durch die Formel

$$\int_X s \mu := \sum_{c \in s(X) \setminus \{0\}} c \cdot \mu(s^{-1}(c))$$

1.5.5. Ich habe in dieser Formel den Summanden für $c = 0$ weggelassen, um den Ausdruck $0 \cdot \infty$ zu vermeiden. Im folgenden erweist es sich jedoch als bequemer, diesen Summanden zuzulassen und mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ zu arbeiten. Weiter habe ich nur $c \in s(X)$ statt $c \in \mathbb{R}$ geschrieben, um eine endliche Summe zu erhalten. Da aber die Summanden für $c \notin s(X)$ eh Null sind, hätten wir, ohne etwas am Resultat zu ändern, auch über alle $c \in \mathbb{R}$ summieren können.

1.5.6 (**Eigenschaften des Integrals reeller meßbarer Stufenfunktionen**). Natürlich gilt $\int \alpha s = \alpha \int s, \forall \alpha \in (0, \infty)$, und ist $t : X \rightarrow [0, \infty)$ eine zweite meßbare Stufenfunktion, so gilt

$$\int s + t = \int s + \int t$$

und mithin auch $s \leq t \Rightarrow \int s \leq \int t$. In der Tat, schreiben wir $X_{a,b} := s^{-1}(a) \cap t^{-1}(b)$, so ergibt sich mit der Additivität des Maßes unmittelbar

$$\begin{aligned} \int s + t &= \sum_c c \cdot \mu \left(\bigcup_{c=a+b} X_{a,b} \right) &= \sum_{a,b} (a + b) \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int s &= \sum_a a \cdot \mu \left(\bigcup_b X_{a,b} \right) &= \sum_{a,b} a \cdot \mu(X_{a,b}) \\ \int t &= \sum_b b \cdot \mu \left(\bigcup_a X_{a,b} \right) &= \sum_{a,b} b \cdot \mu(X_{a,b}) \end{aligned}$$

Für $s := \sum_{i=1}^n c_i [A_i]$ mit $c_i \in [0, \infty)$ wird also das Integral gegeben durch die Formel $\int s = \sum_i c_i \mu(A_i)$.

Definition 1.5.7 (Integral nichtnegativer Funktionen). Gegeben ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ und eine meßbare Abbildung $f : X \rightarrow [0, \infty]$ definieren wir ein Element $\int f \mu$ aus $[0, \infty]$, das **Integral von f über X** , als das Supremum der Integrale aller reellwertigen nichtnegativen meßbaren Stufenfunktionen $s : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $s(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$, in Formeln

$$\int f \mu := \sup_{s \leq f} \int_X s \mu$$

1.5.8. Ist f bereits selbst eine reelle Stufenfunktion, so wird das fragliche Supremum offensichtlich bei $s = f$ angenommen und wir erhalten unser Integral von Stufenfunktionen 1.5.4 für $s = f$.

1.5.9. Wir verwenden für dies Integral auch die Notationen

$$\int f = \int_X f \mu = \int_X f(x) \mu \langle x \rangle$$

Die eckigen Klammern sollen andeuten, daß mit $\mu \langle x \rangle$ nicht der Wert einer etwaigen Funktion μ an einer Stelle x gemeint ist. Vielmehr wird dieser Ausdruck erst in Verbindung mit dem Integralzeichen sinnvoll.

1.5.10 (**Diskussion der Notation**). In der Literatur findet man meist die Notation $\int_X f d\mu$. Diese leider allgemein übliche Notation scheint mir jedoch im Lichte der ursprünglichen Bedeutung des Symbols d unter dem Integralzeichen völlig abwegig, um nicht zu sagen irreführend: Das Differential d macht aus einer Funktion ein Maß, wie etwa in 1.2.8 erklärt, aber wo bereits ein Maß steht, hat es nichts mehr zu suchen. Neuerdings sieht man vielfach auch die Notation $\int f(x) \mu(dx)$, die mich aber im Fall allgemeiner Maßräume auch nicht überzeugt: Man denke etwa an das Zählmaß auf einem diskreten Raum.

Ergänzung 1.5.11 (**Bedeutung der Meßbarkeit**). Unsere Definition des Integrals 1.5.7 ist sogar für ganz beliebige, nicht notwendig meßbare Funktionen $f : X \rightarrow [0, \infty]$ sinnvoll. Das Supremum heißt dann das **Unterintegral** von f . Der Beweis des folgenden Satzes über monotone Konvergenz zeigt, welche Rolle die Meßbarkeit von f spielt. Der Beweis des gleich anschließenden Satzes 1.5.14 zeigt dann weiter, wie die Meßbarkeit in den Beweis der Formel $\int f + g = \int f + \int g$ eingeht, die für nicht meßbare Funktionen f und g im Allgemeinen nicht mehr gilt.

Satz 1.5.12 (über monotone Konvergenz). *Ist (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und (f_n) eine monoton wachsende Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$, gilt also*

in Formeln $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$, so ist auch der punktweise Grenzwert $f : X \rightarrow [0, \infty]$, $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ der f_n meßbar und es gilt

$$\int_X f \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \mu$$

1.5.13. Das Bild zu [AN1] 5.1.13 zeigt eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren, ohne daß ihre Integrale gegen Null streben. Die Annahme der Monotonie unserer Folge ist also wesentlich.

Beweis. Die Meßbarkeit von f folgt aus 1.4.27. Die Abschätzung \geq ist evident. Es gilt, \leq zu zeigen. Dafür reicht es, wenn wir für jede meßbare Stufenfunktion $s : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $s \leq f$ und jedes $\eta \in (0, 1)$ die Abschätzung

$$\eta \int s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

zeigen. Nun haben wir ja $s = \sum_{i=0}^r c_i [A_i]$ für geeignete paarweise disjunkte meßbare Mengen A_i und $c_i \in (0, \infty)$. Setzen wir $A_i^n = \{x \in A_i \mid f_n(x) \geq \eta c_i\}$, so sind auch die A_i^n meßbar und es gilt $A_i^0 \subset A_i^1 \subset A_i^2 \subset \dots$ sowie $\bigcup A_i^n = A_i$. Nach 1.1.34 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i^n) = \mu(A_i)$$

Betrachten wir die Stufenfunktionen $s_n = \sum_i \eta c_i [A_i^n]$, so gilt mithin

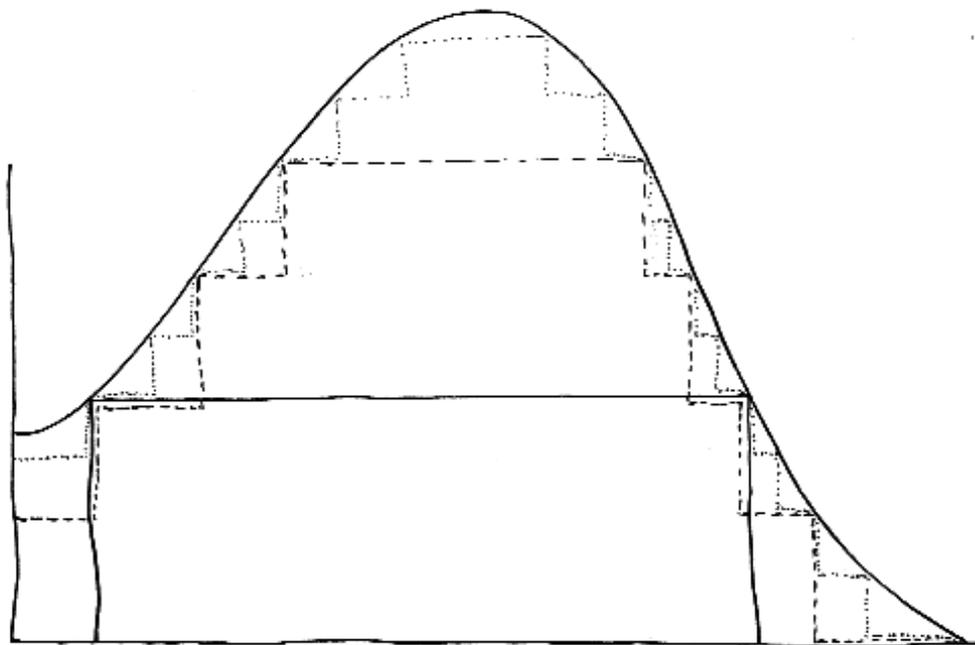
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n = \eta \int s$$

Andererseits haben wir aber nach Konstruktion $s_n \leq f_n$ und folglich $\int s_n \leq \int f_n$. Bilden wir nun auf beiden Seiten den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$, so ergibt sich zusammenfassend $\eta \int s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ wie gewünscht. \square

Satz 1.5.14 (Eigenschaften des Integrals nichtnegativer Funktionen). Gegeben nichtnegative meßbare Funktionen f, g mit Werten in $[0, \infty]$ auf einem Maßraum gilt

1. $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$;
2. $\int cf = c \int f \quad \forall c \in (0, \infty)$;
3. $\int f + g = \int f + \int g$.

Beweis. Nur der dritte Punkt braucht einen Beweis. Sind f und g reelle Stufenfunktionen, so haben wir die Behauptung schon in 1.5.6 gezeigt. Um den allgemeinen Fall daraus abzuleiten, brauchen wir ein Lemma.



Die ersten Glieder unserer monotonen Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen, die punktweise gegen eine gegebene nichtnegative Funktion konvergieren.

Lemma 1.5.15. Sei (X, \mathcal{M}) ein Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. So gibt es eine monotone Folge $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots$ von meßbaren Stufenfunktionen mit Werten in $[0, \infty)$, die punktweise gegen f konvergiert.

Beweis. Wir konstruieren φ_n zum Beispiel wie folgt: Sei $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = n$ die äquidistante Einteilung von $[0, n]$ in Stücke der Länge 2^{-n} , also $r = n2^n$ und $a_i = i2^{-n}$. Wir setzen $A_i = f^{-1}[a_i, a_{i+1})$ für $0 \leq i < r$ sowie $A_r = f^{-1}[n, \infty)$ und bilden $\varphi_n = \sum_{i=0}^r a_i \mathbb{1}_{A_i}$. Es ist offensichtlich, daß wir so eine monotone Folge von Stufenfunktionen erhalten, die punktweise gegen f konvergiert. \square

Jetzt schreiben wir f und g als punktweise Grenzwerte von monotonen Folgen meßbarer Stufenfunktionen, $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots$ und $0 \leq \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots$, und folgern mit dem Satz 1.5.12 über monotone Konvergenz

$$\int f + g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n = \int f + \int g \quad \square$$

1.5.16 (Integrale über Restriktionen von Maßen). Ist (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge und $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ der induzierte Maßraum nach 1.1.38, so notieren wir Integrale in Bezug auf diesen Maßraum gerne $\int_A f \mu$ oder auch $\int_A f$. Ist $f : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so haben wir offensichtlich

$$\int_A f = \int_X [A]f$$

Hier ist links das Integral der Restriktion von f auf A gemeint und rechts das Integral des Produkts von f mit der charakteristischen Funktion von A , gebildet mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

Ergänzung 1.5.17. Ich habe nicht durchdacht, ob für $j : A \hookrightarrow X$ eine injektive meßbare Abbildung von Maßräumen mit der Eigenschaft, daß die Bilder meßbarer Mengen wieder meßbar sind, die Notation $j^! \mu$ für das mittels j eingeschränkte Maß sinnvoll sein könnte. Es ist ja schon so, daß derartige Abbildungen das meßbare Analogon von étalen Abbildungen sind, und in kartesischen Diagrammen in der Kategorie der Maßräume gilt durchaus $\psi_* j^! \mu = i^! \phi_* \mu$.

Ergänzung 1.5.18. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Für jede μ -meßbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ im Sinne von 1.4.30 gibt es eine meßbare Funktion $\tilde{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die außerhalb einer μ -Nullmenge mit f übereinstimmt. In der Tat können wir f nach 1.5.15 schreiben als punktweisen Grenzwert einer Folge von μ -meßbaren Stufenfunktionen $f(x) = \lim s_n(x)$. Dann verkleinern wir die Grundflächen aller Stufen von Null verschiedener Höhe zu meßbaren Mengen so, daß sich das Maß der Stufen nicht ändert, und erhalten eine Folge von meßbaren Stufenfunktionen \tilde{s}_n , die außerhalb einer meßbaren Nullmenge A punktweise gegen f konvergiert, und betrachten den punktweisen Grenzwert $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [A](x) \tilde{s}_n(x)$.

Übungen

Übung 1.5.19 (Verträglichkeit des Integrals mit Verwandtschaft). Sei $\phi : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen. Seien μ und ν unter ϕ verwandte Maße auf X beziehungsweise Y , in Formeln $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$, und seien f und g unter ϕ verwandte meßbare Funktionen nach $[0, \infty]$, in Formeln $\phi : f \rightsquigarrow g$. So gilt

$$\int_X f \mu = \int_Y g \nu$$

Ist gleichbedeutend in unserer alternativen Terminologie μ ein Maß auf X und $g : Y \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so gilt $\int_X (g \circ \phi) \mu = \int_Y g(\phi_* \mu)$.

Übung 1.5.20. Sei (X, \mathcal{M}) ein Meßraum. Man zeige: Die Summe zweier Maße μ, ν auf \mathcal{M} ist wieder ein Maß $\mu + \nu$ auf \mathcal{M} und für jede meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ gilt $\int f(\mu + \nu) = \int f \mu + \int f \nu$.

Übung 1.5.21. Sei (N, μ) ein Maßraum mit dem Nullmaß $\mu(N) = 0$. So verschwindet für jede meßbare Funktion $f : N \rightarrow [0, \infty]$ das Integral, in Formeln

$$\int_N f \mu = 0$$

Übung 1.5.22. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ eine Zerlegung in abzählbar viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen. So gilt für jede meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ die Formel

$$\int_X f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{X_n} f$$

Übung 1.5.23. Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion g auf einem Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) mit $\int_X g \mu < \infty$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\alpha = \alpha_\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt

$$\mu(A) < \alpha \Rightarrow \int_A g \mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion $h : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $h \leq g$ und $\int g \mu \leq \int h \mu + \varepsilon/2$.

Übung 1.5.24. Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion g auf einem Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) mit $\int_X g \mu < \infty$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\beta = \beta_\varepsilon > 0$ mit

$$\int \inf(g, \beta) \mu < \varepsilon$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion $h : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $h \leq g$ und $\int g \mu \leq \int h \mu + \varepsilon/2$.

Übung 1.5.25. Man zeige: Gegeben ein Maßraum X und eine Folge (f_n) nichtnegativer meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ist auch ihre Summe $\sum f_n$ meßbar und es gilt

$$\int \sum f_n = \sum \int f_n$$

Übung 1.5.26 (Produkte von Maßen mit Funktionen). Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so erhalten wir ein neues Maß $g\mu$ auf X durch die Vorschrift $(g\mu)(A) = \int_A g\mu$ und für jede weitere meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ gilt mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0 = \infty \cdot 0$ die Identität von Maßen $f(g\mu) = (fg)\mu$. Ist ähnlich $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so ist f integrierbar in Bezug auf $(g\mu)$ genau dann, wenn unter der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ die Funktion fg integrierbar ist in Bezug auf μ , und unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg) \mu = \int f (g\mu)$$

Übung 1.5.27. Ist (X, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sind $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar, so gilt die Gleichheit von Maßen $f\mu = g\mu$ genau dann, wenn f und g außerhalb einer meßbaren Menge vom Maß Null übereinstimmen. Man gebe auch ein Gegenbeispiel im Fall nicht σ -endlicher Maßräume. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $\mu(X) < \infty$ zurück und betrachte dann zunächst die Mengen $\{x \mid n > f(x) > g(x) + 1/n\}$.

Ergänzende Übung 1.5.28. Nach 1.2.27 gibt es für jede linksseitig stetige monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau ein topologisches Maß df auf \mathbb{R} mit $(df)([a, b)) = f(b) - f(a)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man zeige: Ist unser f zusätzlich stetig differenzierbar, so stimmt df überein mit dem Vielfachen $f'(x)dx$ des Lebesguemaßes im Sinne von 1.5.26.

1.6 Integrierbare Funktionen und ihr Integral

Definition 1.6.1. Gegeben ein Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **integrierbar**, wenn sie meßbar ist und wenn zusätzlich gilt $\int |f| < \infty$ im Sinne des Integrals nichtnegativer Funktionen 1.5.7. Wir definieren das **Integral** $\int f \in \mathbb{R}$ einer integrierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

Hier bezeichnet $f^+, f^- : X \rightarrow [0, \infty)$ den **positiven** beziehungsweise **negativen Anteil** von f , der gegeben wird durch $f^\pm(x) = \sup(\pm f(x), 0)$. Die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ notieren wir je nach der gewünschten Präzision $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X; \mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X; \mathcal{M}, \mu)$.

1.6.2 (Beziehung unserer beiden Varianten des Integralbegriffs). Wir haben nun genau genommen für jeden Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) zwei Integrale definiert: Ein Integral für meßbare nichtnegative Funktionen mit Werten in $[0, \infty]$, das Werte in $[0, \infty]$ annimmt, und ein Integral für integrierbare reellwertige Funktionen, das reelle Werte annimmt. Offensichtlich stimmen im Fall einer nichtnegativen reellwertigen integrierbaren Funktion diese beiden Integrale überein, auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche liefern unsere beiden Varianten des Integralbegriffs in anderen Worten dasselbe. Es ist deshalb sinnvoll, für beide Konzepte dasselbe Symbol zu verwenden.

Ergänzung 1.6.3 (Erweiterungen des Integralbegriffs). Man kann in einer gemeinsamen Verallgemeinerung unserer beiden Varianten des Integralbegriffs auch beliebigen meßbaren Funktionen mit Werten in $(-\infty, \infty]$ und integrierbarem Negativteil f_- noch sinnvoll ein Integral in $(-\infty, \infty]$ zuordnen. In dieser Allgemeinheit werde ich jedoch das Integral nie verwenden.

Ergänzung 1.6.4 (Erweiterungen des Begriffs der Integrierbarkeit). Der Begriff der Integrierbarkeit wird in der Literatur oft weiter gefaßt als in diesem Text, um alle Funktionen einzuschließen, denen man „noch irgendwie in sinnvoller Weise ein Integral zuordnen kann“. Eine so abgeänderte Terminologie entspricht möglicherweise besser unserem Sprachempfinden, sie schien mir jedoch für die präzise Formulierung der Theorie ungeschickt. Hier will ich die verschiedenen in der Literatur gängigen Begriffsvarianten Revue passieren lassen. Zunächst mag man auch solche Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ noch „integrierbar“ nennen wollen, die im Sinne der vorhergehenden Definition integrierbar sind in Bezug auf den vervollständigten Maßraum. In einer anderen Richtung mag man auch solche Funktionen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ noch „integrierbar“ nennen wollen, für die die Stellen, an denen sie einen der Werte $\pm\infty$ annimmt, eine Nullmenge bilden, auf deren Komplement sie in dann unserem Sinne integrierbar sind. Weiter kann man diese beiden Erweiterungen natürlich auch kombinieren. Und schließlich versteht man oft unter einer „integrierbaren Funktion“ gewisse Objekte, die im Sinne der Mengenlehre streng genommen gar keine Funktionen mehr sind und die wir in 2.2.17 als „integrierbare fast überall definierte Funktionen“ einführen werden. Diese Objekte hängen dann nicht mehr davon ab, mit Hilfe welcher der obigen Begriffsvarianten wir sie konstruieren.

Ergänzung 1.6.5. Gegeben eine reellwertige integrierbare Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) heißt ihr Integral der **Erwartungswert** der Zufallsvariable und wird $E(X) := \int_{\Omega} X(\omega)P\langle\omega\rangle$ notiert.

Beispiel 1.6.6 (Integrierbarkeit und absolute Konvergenz). Ist I eine abzählbare Menge, so ist eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn für eine oder gleichbedeutend jede „Abzählung“ von I die Reihe $\sum_{i \in I} f(i)$ absolut konvergiert. Das Integral unserer Funktion ist in diesem Fall

genau der Grenzwert der Reihe. Ist I eine beliebige Menge, so ist eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für das Zählmaß genau dann, wenn die Familie der $f(i)$ summierbar ist im Sinne von [AN1] 3.1.22, was ja nach [AN1] 3.1.27 auch im Wesentlichen absolute Konvergenz bedeutet.

1.6.7. Aus der Definition erhalten wir für f, g integrierbar sofort $|\int f| \leq \int |f|$ und $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

Satz 1.6.8 (Linearität des Integrals). Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Der Raum $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X)$ aller integrierbaren Funktionen ist ein Untervektorraum im Raum aller Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$, und das Integral ist eine lineare Abbildung

$$\int : \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

Beweis. Wir überlassen den Nachweis der ersten Aussage dem Leser und zeigen nur die Linearität des Integrals. Man kann sie direkt aus Übung [LA1] ?? folgern, und im folgenden schreiben wir nur eine Lösung dieser Übung in unserem Spezialfall aus. Zunächst zeigen wir die Additivität

$$\int f + g = \int f + \int g$$

Seien $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ und $f + g = h = h^+ - h^-$ die Zerlegungen in den positiven und negativen Anteil. Wir folgern durch Einsetzen $f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$ und mit 1.5.14 ergibt sich $\int f^+ + \int g^+ + \int h^- = \int f^- + \int g^- + \int h^+$, woraus mit der Definition dann wieder $\int f + \int g = \int f + g$ folgt. Nun zeigen wir noch die Verträglichkeit mit der Multiplikation mit Skalaren

$$\int cf = c \int f$$

Für $c = -1$ folgt das aus den Definitionen, für $c \geq 0$ folgt es aus 1.5.14, und der allgemeine Fall ergibt sich aus diesen beiden Spezialfällen. \square

Satz 1.6.9 (über dominierte Konvergenz). Seien (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge meßbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Gibt es eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f_n| \leq g$ für alle n , so sind alle f_n und auch f integrierbar und es gilt

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

1.6.10. Eine eher unwesentliche Verallgemeinerung erhält man, wenn man allgemeiner nur eine Domination der Konvergenz durch eine meßbare Funktion $g : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $\int g < \infty$ voraussetzt: Aus dieser Annahme folgt nämlich, daß g außerhalb einer Nullmenge doch wieder reelle Werte annehmen muß, und so finden wir uns dann unmittelbar in der Situation des Satzes wieder.

Ergänzung 1.6.11. Andere Quellen sprechen gleichbedeutend vom **Satz über majorisierte Konvergenz**. Verschärfungen dieses Satzes zeigen wir in [?] ??, dort fordern wir statt punktweiser Konvergenz nur „stochastische Konvergenz“, und noch weitergehend in [?] ??, dort fordern wir außerdem statt der Dominiertheit nur noch die „gleichgradige Integrierbarkeit“.

Beweis. Aus unseren Annahmen folgt $\int |f_n| \leq \int g < \infty$, also sind die f_n integrierbar. Weiter ist f auch meßbar als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen und dann ist mit demselben Argument auch f integrierbar. Um die Vertauschbarkeit des Grenzwerts mit dem Integral zu zeigen, betrachten wir nun die Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} i_n(x) &= \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} \\ s_n(x) &= \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} \end{aligned}$$

Sie bestehen aus meßbaren Funktionen, beide Folgen konvergieren punktweise gegen f , und es gilt

$$-g \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq s_1 \leq s_0 \leq g$$

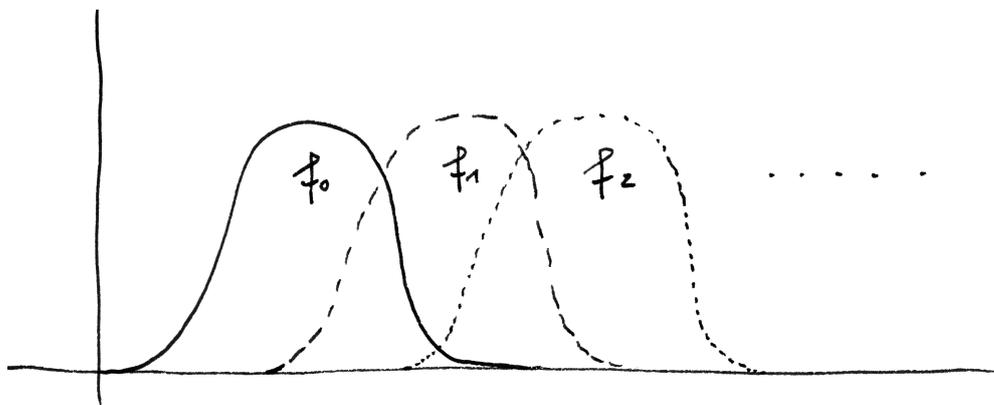
Mit dem Satz über monotone Konvergenz erhalten wir also $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g + i_n = \int g + f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g - s_n = \int g - f$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int i_n = \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n$$

Da aber nach Definition gilt $i_n \leq f_n \leq s_n$, folgt die Behauptung aus dem Quetschlemma [AN1] ??.

Korollar 1.6.12 (Riemann-Integral als Lebesgue-Integral). *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten reellen Intervall ist integrierbar im Sinne der vorhergehenden Definition 1.6.1 und ihr Riemann-Integral stimmt mit ihrem Lebesgue-Integral überein.*

Beweis. Jede stetige reellwertige Funktion f auf einem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ ist meßbar und beschränkt. Aus $|f| \leq M$ folgt dann sofort $\int |f| \leq M(b - a) < \infty$ und damit die Integrierbarkeit von f . Bilden wir Stufenfunktionen f_r , indem wir $[a, b]$ äquidistant unterteilen durch Zwischenpunkte $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ und f_r auf $[a_{i-1}, a_i)$ konstant den Wert $f(a_i)$ geben und bei b den Wert $f(b)$, so konvergieren die f_r wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f punktweise gegen f . Andererseits sind ihre Integrale offensichtlich genau unsere Riemannsummen $S^r(f)$ aus [AN1] 4.2.5, in Formeln $S^r(f) = \int f_r$, und für $r \rightarrow \infty$ strebt die linke Seite nach [AN1] 4.2.5 gegen das Riemannintegral und die Rechte nach dem Satz über dominierte Konvergenz 1.6.9 gegen das Lebesgueintegral von f .



Eine Folge integrierbarer Funktionen auf der reellen Zahlengeraden, die zwar punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Integrale jedoch keine Nullfolge bilden. In diesem Fall können wir auch offensichtlich keine alle Funktionen unserer Folge dominierende integrierbare Funktion g finden.

Übungen

Übung 1.6.13. Auf einem topologischen Raum mit einem Borelmaß ist jede stetige reellwertige Funktion mit kompaktem Träger integrierbar.

Übung 1.6.14. Man zeige, daß für jede integrierbare Funktion die Menge der Punkte, auf denen sie nicht den Wert Null annimmt, σ -endlich sein muß.

Übung 1.6.15 (Vertauschen von Integration und Ableitung). Sei (X, μ) ein Maßraum und $I \subset \mathbb{R}$ halboffen und $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung derart, daß $x \mapsto f(x, t)$ integrierbar ist für alle $t \in I$ und $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar für alle $x \in X$. Existiert eine integrierbare Abbildung $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \geq |\partial_t f(x, t)|$ für alle x und t , so ist $x \mapsto \partial_t f(x, t)$ integrierbar für alle t und es gilt

$$\partial_t \int f(x, t) \mu\langle x \rangle = \int \partial_t f(x, t) \mu\langle x \rangle$$

Hinweis: Dominierte Konvergenz 1.6.9 und Mittelwertsatz.

Übung 1.6.16 (Integrale unter Bildmaßen). Man folgere aus 1.5.19, daß das Integral auch in dieser Situation Verwandtschaft respektiert. Sind genauer $\phi : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen, μ ein Maß auf X und $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung, so ist $X : Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar in Bezug auf $\phi_*\mu$ genau dann, wenn $f \circ \phi$ integrierbar ist in Bezug auf μ , und unter dieser Voraussetzung

$$\int_Y g(\phi_*\mu) = \int_X (g \circ \phi)\mu$$

Übung 1.6.17 (Satz von Beppo Levi). Sei f_n eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. Ist die Folge ihrer Integrale beschränkt, so ist die Menge N aller $x \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ meßbar vom Maß Null und die Funktion $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : (X \setminus N) \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar mit Integral $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

Übung 1.6.18. Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Träger in Q . Sei weiter μ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^2 . Für $r \geq 1$ definieren wir dann die r -te **Riemannsumme** $S^r(f; \mu)$ von f wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$$

$$c = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_r = d$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten auf diese Weise r^2 klitzekleine halboffene Rechtecke $Q_{i,j}^+ = [a_i, a_{i+1}) \times [c_j, c_{j+1})$ und setzen

$$S^r(f; \mu) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j) \mu(Q_{i,j}^+)$$

Man zeige, daß unter unseren Annahmen diese Riemannsummen gegen das Integral streben, in Formeln

$$\int_Q f \mu = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f; \mu)$$

Übung 1.6.19. Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar und $g\mu$ das in 1.5.26 konstruierte Maß, so zeige man für $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, daß f integrierbar ist in Bezug auf $(g\mu)$ genau dann, wenn unter der üblichen Konvention $0 \cdot \infty = 0$ die Funktion fg integrierbar ist in Bezug auf μ , und daß unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int (fg) \mu = \int f (g\mu)$$

Übung 1.6.20. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : \Omega \rightarrow I$ integrierbar. Man zeige, daß dann auch $\int_\Omega f \mu$ in I liegt.

Übung 1.6.21. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, also nach [AN1] 2.3.31 stetig im Inneren von I . Seien weiter (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f : \Omega \rightarrow I$ integrierbar. So gilt die **Jensen'sche Ungleichung**

$$\phi \left(\int_\Omega f \mu \right) \leq \int_\Omega (\phi \circ f) \mu$$

Auf der rechten Seite ist die Formulierung etwas sorglos, man möge genauer $\int_\Omega (\phi \circ f)^- \mu < \infty$ zeigen und die rechte Seite als $\int_\Omega (\phi \circ f)^+ \mu - \int_\Omega (\phi \circ f)^- \mu$ verstehen. Hinweis: Ist $t := \int_\Omega f \mu$ ein Randpunkt von I , so muß f außerhalb einer Nullmenge konstant sein. Sonst liegt der Graph von ϕ oberhalb einer Geraden durch $(t, \phi(t))$, es gibt also in Formeln $c \in \mathbb{R}$ mit $\phi(s) \geq \phi(t) + c(s - t)$ für alle $s \in I$. Nun setze man $s = f(\omega)$ ein und integriere. Einen diskreten Spezialfall kennen Sie im übrigen bereits aus [AN1] 1.4.10.

Übung 1.6.22. Besitzt die nichtnegative reelle Zufallsvariable X einen Erwartungswert $E(X)$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ die **Markov-Ungleichung**

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} E(X)$$

1.7 Integration auf Produkträumen

Satz 1.7.1 (Produktmaß). Für σ -endliche Maßräume (X, \mathcal{M}, μ) und (Y, \mathcal{N}, ν) gibt es auf der **Produkt- σ -Algebra** $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ genau ein Maß $\mu \boxtimes \nu$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ gilt

$$(\mu \boxtimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

1.7.2. Die Produkte rechts sind im Sinne unsere Konvention $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ zu verstehen. In der Literatur wird für die Produkt- σ -Algebra und Produktmaße meist das Symbol \otimes verwendet, aber mir gefällt das Symbol \boxtimes hier besser, da es sich beim Produkt von Maßen eher um eine Art „äußeres Produkt“ und jedenfalls nicht um ein Tensorprodukt handelt.

1.7.3. Mit diesem Satz und 1.4.25 können wir durch Induktion über n das Lebesguemaß auf dem \mathbb{R}^n aus dem Lebesguemaß auf \mathbb{R} konstruieren und so dessen Existenz 1.1.25 im allgemeinen zeigen.

Ergänzung 1.7.4. Sind unsere Maßräume nicht σ -endlich, so wird das Produktmaß durch die im Satz angegebene Bedingung noch nicht eindeutig festgelegt. Wir verstehen in diesem Fall das **Produktmaß** $\mu \boxtimes \nu$ als die größte Maßfortsetzung nach 1.2.14 des im folgenden Beweis beschriebenen Prämaßes.

Beweis. Wir machen zunächst noch keinerlei Annahmen über die σ -Endlichkeit unserer Maße. Die Gesamtheit aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern $A \times B$ mit $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{N}$ bildet nach Übung 1.2.32 einen Mengering, ja sie bildet offensichtlich sogar eine Mengenalgebra, die wir $[\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ notieren. Wir zeigen, daß es auf dieser Mengenalgebra $[\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ genau ein Prämaß $\mu \times \nu$ gibt mit $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Dessen Eindeutigkeit ist klar. Um die Existenz zu zeigen, bemerken wir, daß für $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ und beliebiges $y \in Y$ die Abbildung $x \mapsto [C](x, y)$ eine meßbare Stufenfunktion $X \rightarrow \{0, 1\}$ ist und daß wir weiter mit $y \mapsto \int_X [C](x, y) \mu \langle x \rangle$ eine meßbare Stufenfunktion $Y \rightarrow [0, \infty]$ erhalten. Wir können also für $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$ in $[0, \infty]$ das Element

$$(\mu \times \nu)(C) := \int_Y \left(\int_X [C](x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

bilden. Die σ -Additivität von $\mu \times \nu$ folgt dann aus der Additivität der Integrale 1.5.14 zusammen mit dem Satz über monotone Konvergenz 1.5.12. Unser Satz zum Produktmaß folgt dann, und erst hier wird die σ -Endlichkeit der beteiligten Maße benötigt, aus dem Maßfortsetzungssatz 1.2.10. \square

1.7.5. Bezeichnet $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$ das Vertauschen der Komponenten in einem Produkt beliebiger Maßräume, so haben wir offensichtlich eine Verwandtschaft von Maßen $\tau : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \nu \boxtimes \mu$.

Satz 1.7.6 (positiver Fubini). *Gegeben σ -endliche Maßräume (X, μ) und (Y, ν) sowie eine meßbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ ist $x \mapsto f(x, y)$ für alle $y \in Y$ eine meßbare Funktion $X \rightarrow [0, \infty]$ und das partielle Integral $y \mapsto \int f(x, y) \mu \langle x \rangle$ ist eine meßbare Funktion $Y \rightarrow [0, \infty]$ und es gilt*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle$$

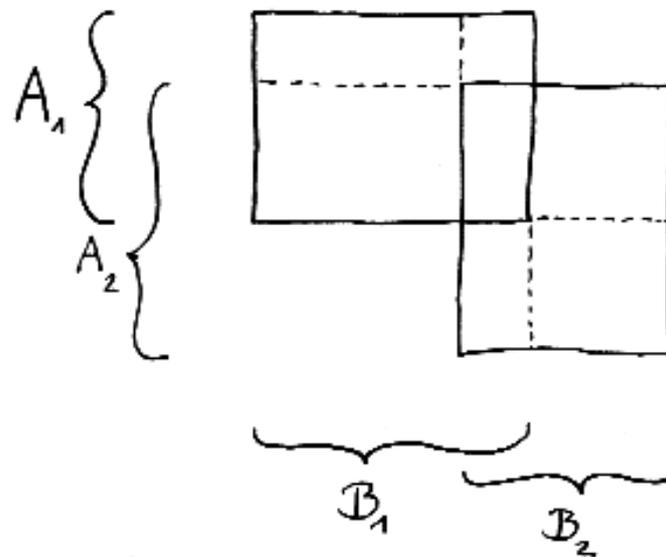


Illustration der Tatsache, daß die Vereinigung zweier Quader auch als die disjunkte Vereinigung von sieben Quadern geschrieben werden kann.

1.7.7. Unser Satz impliziert insbesondere, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die partiellen Integrale vertauscht werden dürfen. Bezeichnet in der Tat $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$ das Vertauschen, so haben wir die Verwandtschaft $\tau : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \nu \boxtimes \mu$ von Maßen und die Verwandtschaft $\tau : f \rightsquigarrow \tilde{f}$ von Funktionen mit $\tilde{f}(y, x) = f(x, y)$ und damit unmittelbar und formal nach 1.5.19 die Gleichheit

$$\int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y \rangle = \int_{Y \times X} \tilde{f}(y, x) (\nu \boxtimes \mu)\langle y, x \rangle$$

1.7.8. Dieser Satz und verschiedene seiner Varianten werden auch oft als **Satz von Tonelli** zitiert. Daß die partiellen Integrale bei nicht notwendig σ -endlichen Maßräumen im allgemeinen nicht mehr vertauscht werden dürfen, zeigt das folgende Beispiel: Sei $X = Y = [0, 1]$ versehen mit der borelschen σ -Algebra \mathcal{B} und dem Lebesguemaß λ beziehungsweise dem Zählmaß ζ . Die Diagonale Δ ist dann meßbar, für ihre charakteristische Funktion $[\Delta]$ gilt jedoch

$$\int_Y \left(\int_X [\Delta](x, y) \lambda\langle x \rangle \right) \zeta\langle y \rangle = 0 \neq 1 = \int_X \left(\int_Y [\Delta](x, y) \zeta\langle y \rangle \right) \lambda\langle x \rangle$$

Für das Produktmaß 1.7.4 hätte unsere Diagonale im übrigen das Maß ∞ und wäre noch nicht einmal σ -endlich. Das ist auch besser so, denn für meßbare Abbildungen $X \times Y \rightarrow [0, \infty]$, die außerhalb einer σ -endlichen Menge verschwinden, gilt der Satz analog und kann leicht aus dem oben formulierten Fall abgeleitet werden.

Beweis. Für jedes $y \in Y$ ist die y -Horizontale $X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y)$ meßbar nach Lemma 1.4.9, da die Urbilder von Erzeugern der σ -Algebra der meßbaren Mengen des Produkts meßbar sind. Also ist auch $x \mapsto f(x, y)$ meßbar auf X als die Verknüpfung von f mit der y -Horizontalen. Um die anderen Aussagen des Satzes zu zeigen, müssen wir weiter ausholen. Zunächst einmal dürfen wir annehmen, daß X und Y endliches Maß haben: Sonst schreiben wir X bzw. Y als aufsteigende Vereinigungen von Teilmengen X_n bzw. Y_m endlichen Maßes und erhalten die Meßbarkeit des partiellen Integrals über X_n und

$$\int_{X_n \times Y_m} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y \rangle = \int_{Y_m} \left(\int_{X_n} f(x, y) \mu\langle x \rangle \right) \nu\langle y \rangle$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ergibt sich dann auf der linken Seite nach dem Satz 1.5.12 über monotone Konvergenz $\int_{X \times Y_m} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu)\langle x, y \rangle$, und auf der rechten streben die meßbaren Funktionen $y \mapsto \int_{X_n} f(x, y) \mu\langle x \rangle$ punktweise monoton gegen $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu\langle x \rangle$. Mithin ist diese Funktion auch meßbar und hat das Integral

$$\int_{Y_m} \left(\int_X f(x, y) \mu\langle x \rangle \right) \nu\langle y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Y_m} \left(\int_{X_n} f(x, y) \mu\langle x \rangle \right) \nu\langle y \rangle$$

Bilden wir dann schließlich den Grenzwert für $m \rightarrow \infty$, so folgt wie gewünscht $\int_{X \times Y} f = \int_Y \int_X f$. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß X und Y endliches Maß haben. Wir zeigen nun den Satz zunächst für Funktionen der Gestalt $f = [C]$ mit $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$. Dazu brauchen wir einen neuen Begriff.

Definition 1.7.9. Sei Z eine Menge. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Z)$ von Teilmengen von Z heißt **monoton**, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:

1. Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$ und liegen $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ alle in \mathcal{A} , so auch $\bigcup A_n$;
2. Es gilt $Z \in \mathcal{A}$ und liegen $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$ alle in \mathcal{A} , so auch $\bigcap B_n$.

In Worten fordern wir also, daß die Vereinigung und der Schnitt über jedes abzählbare angeordnete Teilsystem wieder zu unserem Mengensystem gehören sollen.

Lemma 1.7.10 (über monotone Systeme). *Ist Z eine Menge und $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(Z)$ eine Mengenalgebra, so kann die von \mathcal{R} erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ auch beschrieben werden als das kleinste monotone System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Z)$, das \mathcal{R} umfaßt, alias als der Schnitt aller monotonen Systeme, die \mathcal{R} umfassen.*

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{R})$. Wir müssen also nur zeigen, daß \mathcal{A} eine σ -Algebra ist. Dazu reicht es nach 1.1.36 zu zeigen, daß \mathcal{A} eine Mengenalgebra ist. Zunächst zeigen wir, daß \mathcal{A} stabil ist unter dem Bilden von Komplementen. Bezeichne für $Y \subset Z$ wieder $Y^c := Z \setminus Y$ sein Komplement. Gegeben ein Mengensystem \mathcal{T} setzen wir $\mathcal{T}^c := \{T^c \mid T \in \mathcal{T}\}$. Ist nun \mathcal{R} ein beliebiges System von Teilmengen von Z und $\mathcal{A} \supset \mathcal{R}$ das kleinste monotone System über \mathcal{R} , so ist offensichtlich $\mathcal{A}^c \supset \mathcal{R}^c$ das kleinste monotone System über \mathcal{R}^c . Insbesondere folgt aus $\mathcal{R} = \mathcal{R}^c$ sofort $\mathcal{A} = \mathcal{A}^c$. Ähnlich ist für jede Teilmenge $Y \subset Z$ mit \mathcal{A} auch $\mathcal{A}_Y := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap Y \in \mathcal{A}\}$ ein monotones System. Für $Y \in \mathcal{R}$ gilt, da unser \mathcal{R} ja eine Mengenalgebra ist, natürlich $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_Y$, und daraus folgt mit der Minimalität von \mathcal{A} sofort $\mathcal{A} = \mathcal{A}_Y$. Damit haben wir gezeigt:

$$A \in \mathcal{A} \text{ und } Y \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap Y \in \mathcal{A}.$$

Mit dieser Erkenntnis lassen wir nun dasselbe Argument nocheinmal laufen: Für $X \in \mathcal{A}$ wissen wir damit nämlich, daß gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_X$, und daraus folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_X$, also $\mathcal{A} = \mathcal{A}_X$. Damit haben wir gezeigt

$$A \in \mathcal{A} \text{ und } X \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap X \in \mathcal{A}.$$

Also ist \mathcal{A} eine Mengenalgebra, und da es auch stabil ist unter abzählbaren aufsteigenden Vereinigungen, ist es dann wie bereits erwähnt sogar eine σ -Algebra. \square

Mit dem Lemma über monotone Systeme können wir nun den Satz im Fall $f = [C]$ für $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ zeigen: Da wir uns nämlich bereits auf den Fall $\mu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$ zurückgezogen haben, ist die konstante Funktion 1 integrierbar auf $X \times Y$, und natürlich dominiert diese Funktion die charakteristischen Funktionen aller Teilmengen von $X \times Y$. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz 1.6.9 folgt also, daß das System aller der $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, für deren charakteristische Funktion der Satz gilt, ein monotones System ist. Dies monotone System enthält aber offensichtlich alle $C \in [\mathcal{M} \times \mathcal{N}]$, mithin besteht es nach dem Lemma aus allen meßbaren Mengen $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$. Damit ist der Satz nun auch für meßbare Stufenfunktion $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty)$ klar. Für beliebiges meßbares f folgert man die Aussage dann, indem man f mithilfe von 1.5.15 als punktwweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge meßbarer Stufenfunktionen schreibt und beachtet, daß nach dem Satz über monotone Konvergenz 1.5.12 auf beiden Seiten Integral und Grenzwert vertauscht werden dürfen. \square

1.7.11. Nimmt man im vorherigen Satz für f die charakteristische Funktion einer σ -endlichen meßbaren Menge $C \in \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, so ergibt sich, daß für $C_x = i_x^{-1}(C)$ das Urbild von C unter der x -Vertikalen $i_x : Y \rightarrow X \times Y$, $y \mapsto (x, y)$ die Abbildung $X \rightarrow [0, \infty]$, $x \mapsto \mu(C_x)$ meßbar ist und daß gilt

$$(\mu \boxtimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x) \mu \langle x \rangle$$

Kippen wir das in unserer Vorstellung, so folgt das **Prinzip von Cavalieri**, nach dem zwei Borelmengen $C, D \subset \mathbb{R}^3$ dasselbe Volumen haben, wenn ihre horizontalen Schnitte in jeder Höhe dieselbe Fläche haben, in Formeln

$$\lambda^2(i_z^{-1}(C)) = \lambda^2(i_z^{-1}(D)) \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda^3(C) = \lambda^3(D)$$

mit $i_z : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $i_z : (x, y) \mapsto (x, y, z)$. Weiter können wir so beweisen, daß das Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion auf \mathbb{R} tatsächlich die zwischen ihrem Graphen und der x -Achse eingeschlossene Fläche ist, wie im folgenden Korollar ausgeführt wird.

Korollar 1.7.12 (Integral als Fläche unter dem Graphen). *Seien (X, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. So ist auch die Teilmenge $M \subset X \times \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift $M := \{(x, y) \mid 0 \leq y < f(x)\}$ meßbar und es gilt $(\mu \boxtimes \lambda)(M) = \int_X f \mu$.*

Beweis. Um zu zeigen, daß M meßbar ist, schreiben wir M als abzählbare Vereinigung von Quadern $M = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_{>0}} f^{-1}([q, \infty]) \times [0, q)$. Die Formel für das Volumen von M folgt sofort aus dem Prinzip von Cavalieri 1.7.11. \square

Ergänzung 1.7.13. Im Rückblick könnten wir das Integral auch auf diesem Wege einführen, müßten dazu aber bei der Konstruktion des Produktmaßes auf den Satz über monotone Konvergenz verzichten. Das wäre nun nicht weiter schlimm, wir brauchen ihn da nur für meßbare Stufenfunktionen, für die er besonders leicht zu zeigen ist. Ich habe diesen Zugang dennoch nicht gewählt, weil mir die direkte Konstruktion des Integrals, die schnell einen Kontakt zu bekannten Konzepten herstellt, didaktisch geschickter schien.

Ergänzung 1.7.14. Man findet bei Lebesgue und auch in vielen anderen Texten die Bemerkung, das Lebesgue-Integral unterscheide sich vom Riemann-Integral dadurch, daß die Fläche unter dem Graphen der Funktion in horizontale statt in vertikale Streifen aufgeschnitten werde, deren Flächen man dann addiert. Ich kann das nur bedingt nachvollziehen, nach Cavalieri liefert ja beides dasselbe Integral. Der wesentliche Schritt ist meines Erachtens vielmehr der Übergang vom Messen reeller Intervalle zum Messen beliebiger „meßbarer Mengen“. Ich gebe aber zu, daß die horizontalen Streifen im Gegensatz zu den vertikalen Streifen eben keine Intervalle und dadurch näher an allgemeinen meßbaren Mengen sind.

Beispiel 1.7.15. Es folgt sofort, daß für $k < n$ die Teilmenge $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist. Es folgt weiter mit [AN1] 4.8.8, daß das Lebesguemaß einer Kreisscheibe D vom Radius r in der Tat gegeben wird durch $\lambda^2(D) = \pi r^2$. Ist schließlich $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall oder allgemeiner eine meßbare Teilmenge und $f : I \rightarrow [0, \infty]$ stetig oder allgemeiner meßbar, so folgt für das **Volumen des Rotationskörpers** $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$ die Formel

$$\lambda^3(R) = \pi \int_I f(z)^2 dz$$

Satz 1.7.16 (Fubini). *Gegeben σ -endliche Maßräume (X, μ) und (Y, ν) und eine integrierbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge N aller $y \in Y$, für die $x \mapsto f(x, y)$ nicht integrierbar ist, meßbar vom Maß $\nu(N) = 0$, und die Funktion $Y \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle$ ist integrierbar mit Integral*

$$\int_{Y \setminus N} \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle = \int_{X \times Y} f(x, y) (\mu \boxtimes \nu) \langle x, y \rangle$$

1.7.17. Will man diesen Satz in der Praxis anwenden, so wird man in der Regel zuerst den positiven Fubini 1.7.6 benutzen, um die Integrierbarkeit von f nachzuweisen.

Beweis. Ist f nichtnegativ, so folgt die Behauptung aus dem positiven Fubini 1.7.6, denn aus $\int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle \right) \nu \langle y \rangle < \infty$ folgt, daß die Menge N aller $y \in Y$ mit $\int_X f(x, y) \mu \langle x \rangle = \infty$ Maß Null hat. Im allgemeinen folgt die Behauptung dann mit der Zerlegung $f = f^+ - f^-$. \square

Beispiel 1.7.18. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die außerhalb der x -Achse verschwindet und auf der x -Achse bei $(x, 0)$ jeweils den Wert x annimmt, ist integrierbar auf \mathbb{R}^2 . Jedoch ist $x \mapsto f(x, y)$ nur integrierbar für $y \neq 0$.

Beispiel 1.7.19. Unser Satz sagt insbesondere, daß wir unter gewissen Umständen „die Integrationsreihenfolge vertauschen dürfen“. Das folgende Beispiel zeigt, welche Probleme beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge im allgemeinen auftreten können. Sei ζ das Zählmaß auf \mathbb{N} . Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Träger in der „treppenförmigen“ Menge $\{(i, j) \mid 0 \leq i - j \leq 1\}$ mit $f(i, j) = (-1)^{i-j}$. Die beiden partiellen Integrale von f existieren und sind integrierbar. Ihre Integrale sind jedoch verschieden, genauer gilt

$$\int \left(\int f(n, m) \zeta \langle n \rangle \right) \zeta \langle m \rangle = 0 \neq 1 = \int \left(\int f(n, m) \zeta \langle m \rangle \right) \zeta \langle n \rangle$$

Indem wir unsere Funktion etwas „verschmieren“ erhalten wir auch eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^2 mit entsprechenden Eigenschaften, und durch geeignete Transformation sogar eine stetige reellwertige Funktion auf dem offenen Einheitsquadrat derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt.

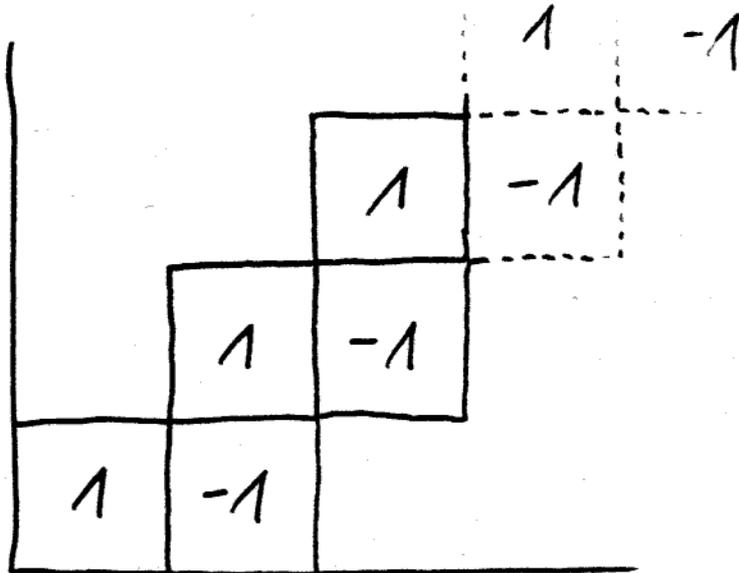
Beispiel 1.7.20. Wir integrieren die Funktion y über die durch eine Parabel und die Gerade $y = 0$ begrenzte Fläche $P = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_P y &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} y dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Teilen wir noch durch die Gesamtfläche

$$\int_P 1 = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

so ergibt sich die Höhe des Schwerpunkts unserer abgeschnittenen Parabelfläche zu $2/5$. Hier haben wir den Satz von Fubini, und zwar die positive Variante, angewandt auf das Produkt der Funktion y mit der charakteristischen Funktion $[P]$ unserer Fläche P . Die Funktion y ist meßbar, weil sie stetig ist, die Funktion $[P]$ ist meßbar als charakteristische Funktion einer meßbaren da abgeschlossenen Menge, und das Produkt dieser beiden meßbaren Funktionen ist damit auch meßbar nach 1.4.26.



Eine meßbare Funktion auf \mathbb{R}^2 wie in 1.7.19 derart, daß die partiellen Integrale existieren und selbst wieder integrierbar sind, das Endresultat jedoch von der Integrationsreihenfolge abhängt. Der „positive Fubini“ greift hier nicht, da unsere Funktion auch negative Werte annimmt, der „Fubini“ greift nicht, da unsere Funktion nicht integrierbar ist.

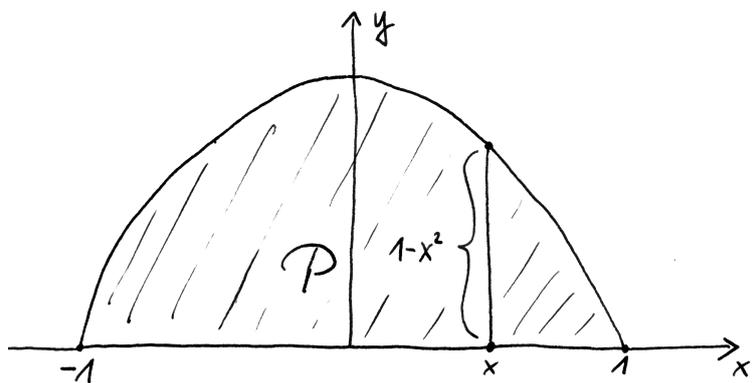


Illustration zur Anwendung des Satzes von Fubini in 1.7.20.

Proposition 1.7.21 (Partielle Integration). Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit „Stammfunktionen“ $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(y) = \int_a^y f(x)dx$ und $G(x) = \int_a^x g(y)dy$ gilt

$$\int_a^b Fg = FG|_a^b - \int_a^b fG$$

Dieselbe Formel gilt auch allgemeiner, wenn wir F oder G jeweils noch um eine additive Konstante abändern.

Beweis. Die zweite Aussage folgt leicht aus der ersten. Um die erste Aussage zu zeigen, berechnen wir das Integral der Funktion $f(x)g(y)$ über das Quadrat $[a, b]^2$ und finden mit Fubini $F(b)G(b)$. Andererseits können wir dies Integral auch schreiben als das Integral über das dreieckige Gebiet unterhalb der Diagonalen plus das Integral über das dreieckige Gebiet oberhalb der Diagonalen. Diese Integrale ergeben sich aber wieder mit Fubini leicht zu $\int_a^b Fg$ und $\int_a^b fG$. \square

Übungen

Ergänzende Übung 1.7.22. Gegeben zwei Mengen X, Y erhalten wir eine Bijektion

$$\text{Ens}(X, \mathcal{P}(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(X \times Y)$$

durch die Vorschrift $f \mapsto \{(x, y) \mid y \in f(x)\}$. Die Gesamtheit aller Abbildungen, die nur abzählbar viele Werte annehmen, entspricht dann sicher einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$. Diese fällt zusammen mit der von allen Produkten $A \times B$ mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ in $\mathcal{P}(X \times Y)$ erzeugten σ -Algebra. Für zwei überabzählbare diskrete metrische Räume ist also das Produkt der borelschen σ -Algebren eine echte Teilmenge der borelschen σ -Algebra des Produkts.

Übung 1.7.23. Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \rightarrow X'$ und $g : Y \rightarrow Y'$ ist auch ihr Produkt $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ meßbar. Sind zusätzlich μ ein Maß auf X und ν ein Maß auf Y , so ist das Bildmaß ihres Produkts das Produkt der Bildmaße, in Formeln

$$(f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu) = (f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu)$$

In der Formelsprache der Verwandtschaft ausgedrückt gilt für also

$$(f : \mu \rightsquigarrow \mu' \text{ und } g : \nu \rightsquigarrow \nu') \Rightarrow (f \times g) : \mu \boxtimes \nu \rightsquigarrow \mu' \boxtimes \nu'$$

Übung 1.7.24. Das Produkt von Meßräumen mit der Produkt- σ -Algebra ist ein Produkt in der Kategorie der Meßräume. Gegeben Maßräume $(X, \lambda), (Y, \mu), (Z, \nu)$ gilt weiter unter der offensichtlichen Bijektion $a : (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$

die Verwandtschaft von Maßen $a : (\lambda \boxtimes \mu) \boxtimes \nu \rightsquigarrow \lambda \boxtimes (\mu \boxtimes \nu)$. Das zu beiden verwandte Maß auf $X \times Y \times Z$ notieren wir

$$\lambda \boxtimes \mu \boxtimes \nu$$

Analog bilden wir Produktmaße auf Produkten von endlich vielen Maßräumen und verstehen darunter im Fall des leeren Produkts das Diracmaß δ auf dem einpunktigen Maßraum pt . Dafür gilt dann $\delta \boxtimes \mu \rightsquigarrow \mu$ unter der Projektion $\text{pt} \times X \xrightarrow{\sim} X$.

Vorschau 1.7.25 (Der Schmelzfunktor der Maße). Die Funktorialitäten $\text{id}_* \mu = \mu$ und $(gf)_* \mu = g_*(f_* \mu)$, die Formel $\tau_*(\mu \boxtimes \nu) = \nu \boxtimes \mu$ für die Vertauschung zweier Faktoren sowie die Formeln $(f_1 \times f_2)_*(\mu_1 \boxtimes \mu_2) = f_{1*} \mu_1 \boxtimes f_{2*} \mu_2$ und $\text{pr}_{X^*}(\delta \boxtimes \mu) = \mu$ für Bilder von Produktmaßen können in der in [TS] 5.8.1 eingeführten Terminologie zusammengefaßt werden zu der Aussage, daß wir einen „Schmelzfunktor von der kartesischen Schmelzkategorie der Maßräume in die kartesische Schmelzkategorie der Mengen erhalten, indem wir jedem Maßraum die Menge seiner Maße zuordnen und für Maßräume X_1, \dots, X_r, Y und eine meßbare Abbildung $f : X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow Y$ jeder Familie von Maßen μ_i auf den X_i das Bildmaß ihres Produktmaßes $f_*(\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_r)$ “. Eine Variante mit endlichen Maßen wird in [TS] 5.8.20 diskutiert.

Ergänzende Übung 1.7.26. Gegeben ein endlichdimensionaler Raum X induziert das Bilden des Produkts mit dem Lebesguemaß eine Bijektion zwischen der Menge aller Borelmaße auf X und der Menge derjenigen Borelmaße auf $X \times \mathbb{R}$, die invariant sind unter allen Translationen in der zweiten Komponente. Hinweis: Gegeben ein in dieser Weise translationsinvariantes Borelmaß μ auf $X \times \mathbb{R}$ beachte man, daß für $A \subset X$ mit kompaktem Abschluss die Vorschrift $B \mapsto \mu(A \times B)$ ein translationsinvariantes Borelmaß auf \mathbb{R} definiert.

Übung 1.7.27. Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Quader im \mathbb{R}^n ist integrierbar und ihr Riemann-Integral nach [AN2] 2.1.2 stimmt mit ihrem Lebesgue-Integral überein. Hinweis: 1.6.12.

Übung 1.7.28. Zeige: Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$ hat das Volumen $(n!)^{-1}$.

Übung 1.7.29. Man diskutiere den Zusammenhang zwischen dem Satz von Fubini und dem Satz über das Produkt von Reihen [AN1] 3.2.12.

Übung 1.7.30 (Partielle Integration, Variante). Die vorhergehende Proposition gilt sogar noch etwas allgemeiner: Ist $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig und dG das zugehörige Maß auf $[a, b)$ nach 1.2.8 und $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar nach dem Lebesguemaß λ und F eine Stammfunktion wie in der Proposition, so gilt

$$\int_{[a,b)} F dG = FG|_a^b - \int_a^b f G \lambda$$

Dieselbe Formel gilt auch allgemeiner, wenn wir F noch um eine additive Konstante abändern. Hinweis: Man berechne $\int_{[a,b]^2} f(x)(\lambda \boxtimes dG) \langle x, y \rangle$ auf zwei Weisen wie im Beweis der Proposition.

1.8 Kompakte Räume

1.8.1. In diesen Vorlesungen haben wir bis hierher vom Begriff der Kompaktheit allgemeiner topologischer Räume wenig mehr als die Definition [AN1] 7.5.5 kennengelernt. Um aber im folgenden den Satz über die Regularität von Borelmaßen 1.9.4 in der ihm angemessenen Allgemeinheit zeigen zu können, müssen wir nun etwas mehr über dieses Konzept lernen. Der Begriff der Kompaktheit mit seinen Eigenschaften ist ein zentrales Konzept der Mathematik. Er wird Ihnen im weiteren Verlauf des Studiums noch oft begegnen. Ich beginne mit einer Wiederholung der Definition.

Definition 1.8.2. Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

1.8.3. Ist X unser topologischer Raum, so fordern wir also in Formeln ausgedrückt, daß es für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ gibt mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

1.8.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Konventionen sind, was den Begriff der Kompaktheit angeht, nicht ganz einheitlich. Die hier gewählte Konvention ist im englischen Sprachraum weit verbreitet. Bourbaki und mit ihm die meisten französischen und auch viele andere Autoren nennen die in unserem Sinne kompakten Räume nur **quasikompakt** und fordern von kompakten Räumen zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft. Eine Teilmenge eines topologischen Raums, deren Abschluß kompakt ist, nennt man **relativ kompakt**.

Beispiel 1.8.5 (Kompaktheit metrischer Räume). Nach [AN1] 7.5.3 ist ein metrischer Raum „folgenkompakt“, als da heißt kompakt im Sinne von [AN1] 7.1.1 genau dann, wenn er für seine metrische Topologie kompakt ist im Sinne unserer abstrakten Definition 1.8.2.

Beispiele 1.8.6. Eine Menge mit der diskreten Topologie ist kompakt genau dann, wenn sie endlich ist. Eine Menge mit der Klumpentopologie ist stets kompakt.

1.8.7 (**Ausformulierung der Kompaktheit für die Spurtopologie**). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. So sind gleichbedeutend nach unseren Definitionen (1) A ist kompakt mit der induzierten Topologie und (2) für jedes System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ finden wir ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.

Lemma 1.8.8. *Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Durch Widerspruch. Sei X unser Hausdorffraum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es $x \in \bar{A} \setminus A$. Für jedes $a \in A$ finden wir dann in X disjunkte offene Umgebungen U_a und V_a von a und x . Natürlich gilt $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$, also gibt es auch endlich viele $a, \dots, b \in A$ mit $A \subset U_a \cup \dots \cup U_b$. Als endlicher Schnitt offener Mengen ist dann jedoch auch $V_a \cap \dots \cap V_b$ offen und nach Konstruktion gilt $A \cap V_a \cap \dots \cap V_b = \emptyset$ im Widerspruch zu unserer Annahme $x \in \bar{A}$. \square

Lemma 1.8.9. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist \mathcal{U} ein System von offenen Teilmengen von X , deren Vereinigung A umfaßt, so schließen wir

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \\ &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_k \\ &\Rightarrow A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$. \square

Satz 1.8.10. *Das Bild eines kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets kompakt.*

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und X kompakt. Es gilt zu zeigen, daß auch $f(X)$ kompakt ist. Sei dazu \mathcal{U} ein System von offenen Teilmengen von Y . So gilt

$$\begin{aligned} f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U &\Rightarrow X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U) \\ &\Rightarrow X = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k) \\ &\Rightarrow f(X) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$. \square

Definition 1.8.11. Eine nicht notwendig stetige Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist.

Satz 1.8.12. *Eine stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist stets abgeschlossen. Eine stetige surjektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist stets **final**. Eine stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist stets ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei X kompakt, Y Hausdorff und $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Es reicht zu zeigen, daß f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. Aber in der Tat gilt ja $A \subseteq X \Rightarrow A$ kompakt $\Rightarrow f(A)$ kompakt $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ nach 1.8.9 und 1.8.10 und 1.8.8. \square

1.8.13 (Hausdorff-Eigenschaft versus Kompaktheit). Die Hausdorff-Eigenschaft und die Kompaktheit sind Antagonisten: Die Hausdorff-Eigenschaft verlangt nach vielen offenen Mengen und die Kompaktheit nach wenigen. Ist beides gleichzeitig erfüllt, so kann man nach dem vorhergehenden Satz 1.8.12 keine zusätzlichen Mengen als offen deklarieren, ohne die Kompaktheit zu verlieren, und nicht weniger Mengen als offen deklarieren, ohne die Hausdorff-Eigenschaft zu verlieren.

Satz 1.8.14 (Extrema auf Kompakta). *Eine stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren kompakten Raum ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an.*

Beweis. Ist X kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ auch kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Haben wir zusätzlich $X \neq \emptyset$, so folgt $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$. \square

Vorschau 1.8.15. Aus der Analysis vertraute Kriterien für Abgeschlossenheit, Stetigkeit, Kompaktheit und dergleichen über Eigenschaften von Folgen übertragen sich erst auf beliebige topologische Räume, wenn man den Begriff der Folge zu dem des Filters verallgemeinert. Wir stellen die Diskussion dieses Begriffs zurück bis zum Beweis des Satzes von Tychonoff [TM] 2.2.10. Daß „folgenabgeschlossen“ keineswegs „abgeschlossen“ impliziert, zeigt das Beispiel [TM] 1.2.18.

Übungen

Übung 1.8.16. Man sagt, ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X habe **nichtleere endliche Schnitte**, wenn für jedes endliche Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ der Schnitt $\bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$ nicht leer ist. Man zeige: Ein topologischer Raum X ist kompakt genau dann, wenn für jedes System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit nichtleeren endlichen Schnitten auch der gesamte Schnitt nicht leer ist, in Formeln $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Übung 1.8.17. Sind A und B disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums X , so gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß A nur aus einem Punkt besteht.

Übung 1.8.18. In einem kompakten Hausdorffraum läßt sich jede Umgebung eines Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern. Hinweis: 1.8.17.

Übung 1.8.19. Die Abbildung $(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$ ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Übung 1.8.20. Man zeige, daß das Produkt von zwei kompakten Räumen stets wieder kompakt ist.

1.9 Regularität von Borelmaßen

1.9.1. Ein topologischer Raum heißt **lokal kompakt**, wenn sich für jeden Punkt jede Umgebung zu einer kompakten Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt.

1.9.2 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Terminologie ist nicht unumstritten. Viele Autoren schreiben auch lokalkompakt zusammen und definieren diesen Begriff als das, was wir „lokal kompakt und Hausdorff“ nennen.

Beispiel 1.9.3. Der \mathbb{R}^n ist lokal kompakt. Jede abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt. Jede offene Teilmenge eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt.

Satz 1.9.4 (Regularität von Borelmaßen). *Gegeben ein Borelmaß λ auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum X gelten für jede Borelmengenge $M \subset X$ die Identitäten*

$$\lambda(M) = \inf_{\substack{U \supset M \\ U \text{ offen in } X}} \lambda(U) = \sup_{\substack{K \subset M \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(K)$$

1.9.5. Das „umgekehrte“ Approximieren durch Kompakta von außen oder durch offene Mengen von innen ist nicht möglich, wie bereits die Fälle der Mengen M aller rationalen beziehungsweise aller irrationalen Punkte in $[0, 1]$ zeigen.

Ergänzung 1.9.6. Ein Borelmaß auf einem Hausdorffraum heißt **regulär**, wenn das Maß jeder offenen Menge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta ist und das Maß jeder meßbaren Menge das Infimum über die Maße der sie umfassenden offenen Mengen. Der Beweis unseres Satzes 1.9.4 zeigt auch, daß dann das Maß jeder σ -endlichen meßbaren Menge das Supremum über die Maße der in ihr enthaltenen Kompakta sein muß. In dieser Terminologie zeigt der Satz also, daß auf einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum jedes Borelmaß regulär ist.

Beweis. Der von den Kompakta eines topologischen Raums erzeugte Mengerring \mathcal{Q} läßt sich nun nach Übung 1.2.36 beschreiben als das Mengensystem aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Komplementen eines Kompaktums in einem anderen. In einem abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffraum ist jede

offene Menge die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Kompakta. Andererseits liegt jede kompakte Menge in einer offenen Menge mit kompaktem Abschluß. Damit erkennt durch Bilden von Komplementen, daß auch jede kompakte Menge als Schnitt einer absteigenden Folge offener Mengen mit kompaktem Abschluß geschrieben werden kann. A fortiori gilt letzteres auch für das Komplement eines Kompaktums in einem anderen alias den Schnitt eines Kompaktums mit einer offenen Menge. In einem lokal kompakten Hausdorffraum kann also jedes $Q \in \mathcal{Q}$ als Schnitt einer absteigenden Folge offener Mengen mit kompaktem Abschluß geschrieben werden. Gegeben ein Borelmaß λ existiert nach 1.1.35 also für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Obermenge $U \supset Q$ mit $\lambda(Q) \leq \lambda(U) \leq \lambda(Q) + \varepsilon$. Nun erzeugt der Mengerring $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ in unserem Fall sicher die borelsche σ -Algebra. Indem wir die Beschreibung der größten Maßfortsetzung 1.2.14 in Verbindung mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Caratheodory 1.2.10 auf diesen Mengerring anwenden, erhalten wir für jede Borelmenge $M \subset X$ die Identität

$$\lambda(M) = \inf \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) \right)$$

Das Infimum wird dabei gebildet über alle Folgen Q_{ν} in \mathcal{Q} mit $M \subset \bigcup_{\nu} Q_{\nu}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir demnach eine Folge Q_{ν} in \mathcal{Q} mit

$$\lambda(M) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) \leq \lambda(M) + \varepsilon$$

Weiter finden wir für jeden dieser Quader Q_{ν} eine offene Obermenge U_{ν} mit $\lambda(Q_{\nu}) \leq \lambda(U_{\nu}) \leq \lambda(Q_{\nu}) + 2^{-\nu}\varepsilon$. Für die offene Menge $U = \bigcup_{\nu} U_{\nu}$ folgt dann

$$\lambda(M) \leq \lambda(U) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(U_{\nu}) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda(Q_{\nu}) + 2^{-\nu}\varepsilon \leq \lambda(M) + 3\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist das Maß von M in der Tat das Infimum über die Maße aller offenen Mengen, die M umfassen. Um die zweite Behauptung zu zeigen, wählen wir eine Folge $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots$ kompakter Teilmengen von X mit $\bigcup L_i = X$. Nach Übung 1.1.34 gilt $\lambda(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(M \cap L_i)$ und es reicht folglich, die zweite Gleichung für alle $M \cap L_i$ zu zeigen. In anderen Worten dürfen wir annehmen, daß es ein Kompaktum L gibt mit $M \subset L$. Nach dem schon bewiesenen Teil gilt nun a fortiori

$$\lambda(L \setminus M) = \inf_{\substack{U \supset L \setminus M \\ U \text{ offen in } L}} \lambda(U) = \inf_{\substack{A \subset M \\ A \text{ abgeschlossen in } L}} \lambda(L \setminus A) = \inf_{\substack{K \subset M \\ K \text{ kompakt}}} \lambda(L \setminus K)$$

Wegen $\lambda(L \setminus M) = \lambda(L) - \lambda(M)$ und $\lambda(L \setminus K) = \lambda(L) - \lambda(K)$ folgt die Behauptung. \square

Übungen

Übung 1.9.7. Eine Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Quadern Q_n überdecken läßt mit $\sum_{n=0}^{\infty} \text{vol } Q_n < \varepsilon$.

1.10 Rechnen mit dem Lebesgue-Integral

Satz 1.10.1 (Transformationsformel). Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\phi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. So gilt für jede meßbare Funktion $f : V \rightarrow [0, \infty]$ in $[0, \infty]$ die Gleichheit

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

Ist stattdessen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so ist auch die Funktion $(f \circ \phi) |\det d\phi| : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und dieselbe Formel gilt in \mathbb{R} .

1.10.2. Wir kennen unsere Formel aus [AN2] 4.1.10 bereits für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger.

1.10.3. Steht x für eine Veränderliche des \mathbb{R}^n , so benutzen wir die Notation $\int f(x) d^n x$ auch für Integrale bezüglich des Lebesguemaßes. In diesem Zusammenhang hat also $d^n x$ dieselbe Bedeutung wie $\lambda^n \langle x \rangle$. Wir können die Aussage des Satzes mit dieser Notation auch interpretieren als die Verwandtschaft von Maßen

$$\phi : |\det d\phi| d^n x \rightsquigarrow d^n y$$

Lemma 1.10.4. Ist $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, so gibt es eine monoton wachsende Folge von stetigen, ja sogar von glatten nichtnegativen Funktionen mit kompaktem Träger, die punktweise gegen die charakteristische Funktion $[W]$ von W strebt.

Beweis. Man schreibe W als Vereinigung einer Folge offener Quader Q_k mit kompaktem Abschluß, wähle etwa mithilfe von [AN1] 4.4.15 für jedes Q_k eine glatte Funktion g_k auf \mathbb{R}^n , die auf Q_k positiv ist und außerhalb von Q_k verschwindet, und betrachte die Folge der Funktionen $f_k = g_1 + \dots + g_k$. Des weiteren wähle man eine Folge von monoton wachsenden glatten Funktionen $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß h_k unterhalb von $1/(k+1)$ verschwindet und oberhalb von $1/k$ konstant den Wert 1 annimmt. Die $h_k \circ f_k$ bilden dann eine Folge von Funktionen der gewünschten Art. \square

Beweis der Transformationsformel 1.10.1. Es gilt, die Gleichheit von Maßen

$$\phi_* (|\det d\phi| d^n x) = d^n y$$

zu zeigen. Mit Lemma 1.10.4 folgt unsere Transformationsformel schon einmal für die charakteristischen Funktionen $f = [W]$ von offenen Teilmengen $W \subseteq V$, indem wir $[W]$ als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge aus $\mathcal{C}_1(V, [0, \infty])$ schreiben und den Satz über monotone Konvergenz 1.5.12 verwenden und erinnern, daß wir die Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger bereits als [AN2] 4.1.10 gezeigt haben. Folglich nehmen unsere beiden Maße auf allen offenen Mengen dieselben Werte an. Andererseits sind unsere Maße beide Borelmaße und damit nach 1.9.4 regulär. Damit müssen unsere beiden Maße dann auf allen Borelmengen dieselben Werte annehmen. \square

Proposition 1.10.5 (Nützliche Nullmengen). Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $k < n$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist $\varphi(U)$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .

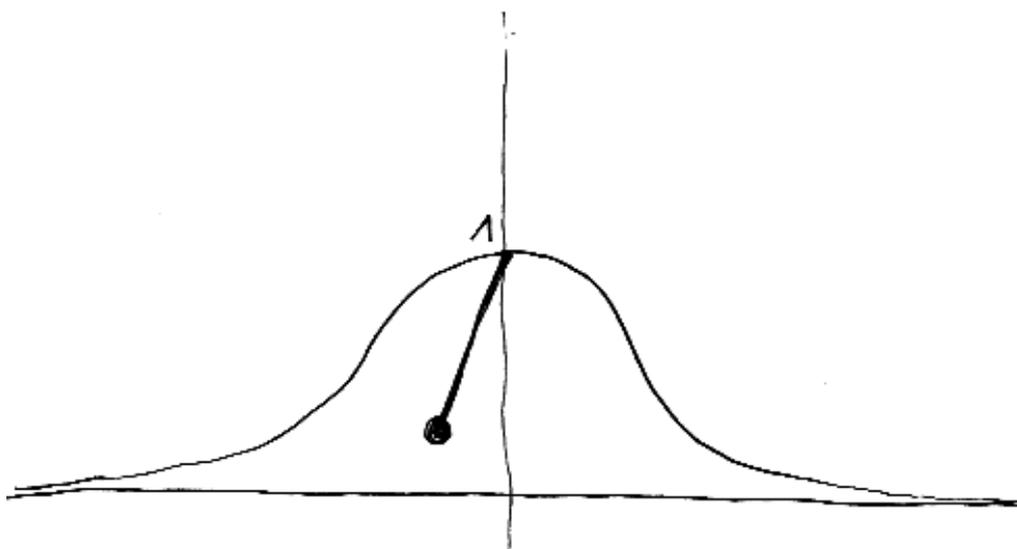
Ergänzung 1.10.6. Der **Satz von Sard** besagt, daß auch für $k \geq n$ und φ mindestens $(k-n+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar auf U das Bild unter φ der Menge aller Stellen $p \in U$, an denen $d_p\varphi$ nicht surjektiv ist, eine Lebesgue-Nullmenge sein muß. Wir werden das nicht zeigen.

Beweis. Nach Übung 1.4.42 können wir U schreiben als abzählbare Vereinigung über eine Folge von offenen Quadern Q_ν mit \bar{Q}_ν kompakt und $\bar{Q}_\nu \subset U$. Folglich dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß \bar{U} selbst ein kompakter Quader ist und daß $|d\varphi|$ beschränkt ist auf U . Nach einer affinen Koordinatentransformation dürfen wir zusätzlich sogar $U = (0, 1)^k$ annehmen. Wir arbeiten wie immer mit der Maximumnorm auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^k , die Bälle $B(x, \delta)$ sind also offene Würfel und ihre Abschlüsse $\bar{B}(x; \delta)$ abgeschlossene Würfel. Ist C eine Schranke für $|d\varphi|$, so gilt nach dem Schrankensatz $\varphi(U \cap \bar{B}(x; \delta)) \subset \bar{B}(\varphi(x); C\delta)$ für alle $x \in U$. Für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ finden wir nun eine Überdeckung von $(0, 1)^k$ durch r^k abgeschlossene Würfelchen der Gestalt $\bar{B}(x; 1/r)$, also finden wir eine Überdeckung von $\varphi(U)$ durch r^k abgeschlossene Würfelchen der Gestalt $\bar{B}(y; C/r)$ mit Gesamtvolumen $r^k(2C/r)^n$. Dies Gesamtvolumen strebt aber gegen Null für $r \rightarrow \infty$, mithin ist $\varphi(U)$ eine Nullmenge. \square

Satz 1.10.7 (Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve). Für die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve gilt die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$.

Vorschau 1.10.8. Die Gauß'sche Glockenkurve spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie in 3.7.9 ausgeführt wird.

Beweis. Wir rechnen das Integral über die Ebene der nichtnegativen Funktion $\exp(-(x^2 + y^2))$ auf zwei Weisen aus, einmal direkt mit Fubini und ein zweites Mal, indem wir mithilfe von 1.10.5 die Ebene längs der negativen x -Achse



Skizze der Gauß'schen Glockenkurve alias dem Graphen von $x \mapsto \exp(-x^2)$ mit zusätzlich eingezeichnetem Klöppel.

aufschneiden und mit 1.10.1 zu Polarkoordinaten übergehen. Ein Vergleich der Resultate liefert die Behauptung. Genauer rechnen wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \exp(-y^2) dx dy \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 \\
 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \leq 0\}} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy \\
 &= \int_{(0,\infty) \times (-\pi,\pi)} \exp(-r^2) r dr d\theta \\
 &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \exp(-r^2) r dr d\theta \\
 &= -\pi \exp(-r^2) \Big|_0^\infty \\
 &= \pi \qquad \square
 \end{aligned}$$

Übungen

Übung 1.10.9. Sei $A \Subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Man zeige: Liefern zwei Borelmaße auf A dasselbe Integral für alle stetigen Funktionen auf A mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 1.10.4 und die Regularität 1.9.4.

Übung 1.10.10. Sei $W \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Man zeige: Liefern zwei Borelmaße auf W dasselbe Integral für alle glatten Funktionen auf W mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 1.10.4 und die Regularität 1.9.4.

Übung 1.10.11. Man zeige: Gegeben eine meßbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(cA) = |c|^n \lambda(A)$. Zum Beispiel hat eine Kugel vom doppelten Radius das achtfache Volumen.

Übung 1.10.12. Gegeben ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ mit $P \neq 0$ hat seine Nullstellenmenge $P^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguemaß Null. Hinweis: Induktion über den Grad des Polynoms. Außerhalb der kritischen Stellen ist $P^{-1}(0)$ eine Untermanigfaltigkeit.

Übung 1.10.13. Jede konvexe Teilmenge K eines \mathbb{R}^n ist Lebesgue-meßbar, genauer ist $\bar{K} \setminus K^\circ$ eine Nullmenge. Hinweis: Man zeige zunächst, daß K entweder in einem echten affinen Teilraum von \mathbb{R}^n enthalten ist oder aber einen inneren Punkt besitzt. Weiter zeige man im Fall, daß die Null ein innerer Punkt von K ist, daß gilt $\bar{K} \subset \lambda K^\circ$ für alle $\lambda > 1$. Schließlich ziehe man sich auf den Fall von beschränkten K zurück.

Übung 1.10.14 (Gitterpunktsatz von Minkowski). Für jede offene konvexe Teilmenge K eines \mathbb{R}^n mit $x \in K \Rightarrow (-x) \in K$ und Lebesguemaß $\lambda(K) > 1$ enthält

$2K$ außer dem Ursprung noch weitere Punkte aus \mathbb{Z}^n . Hinweis: Wir schreiben K als disjunkte Vereinigung der $K \cap (x + [0, 1]^n)$ für $x \in \mathbb{Z}^n$. Aus Volumengründen gibt es $x \neq y \in \mathbb{Z}^n$ mit $x + K \cap y + K \neq \emptyset$, also $k, h \in K$ mit $k - h = x - y$, also $(x - y) \in 2K$. Die Bedingung K offen ist hier sogar unnötig nach 1.10.13. Ist K kompakt, so reicht sogar die Annahme $\lambda(K) \geq 1$, denn dann ist das Bild von K in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ abgeschlossen.

1.11 Flächenmaß

1.11.1. Ich erinnere aus [AN2] 4.3.5 an die Begriffe einer Fastfaltung und einer Integrationskarte.

Satz 1.11.2. *Auf jeder k -Fastfaltung $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein topologisches Maß $\sigma = \sigma_M$ derart, daß für jede Integrationskarte $\varphi : Q \rightarrow M$ und jede topologisch meßbare Menge $A \subset \varphi(Q)$ gilt*

$$\sigma(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det(d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)} \, d^k x$$

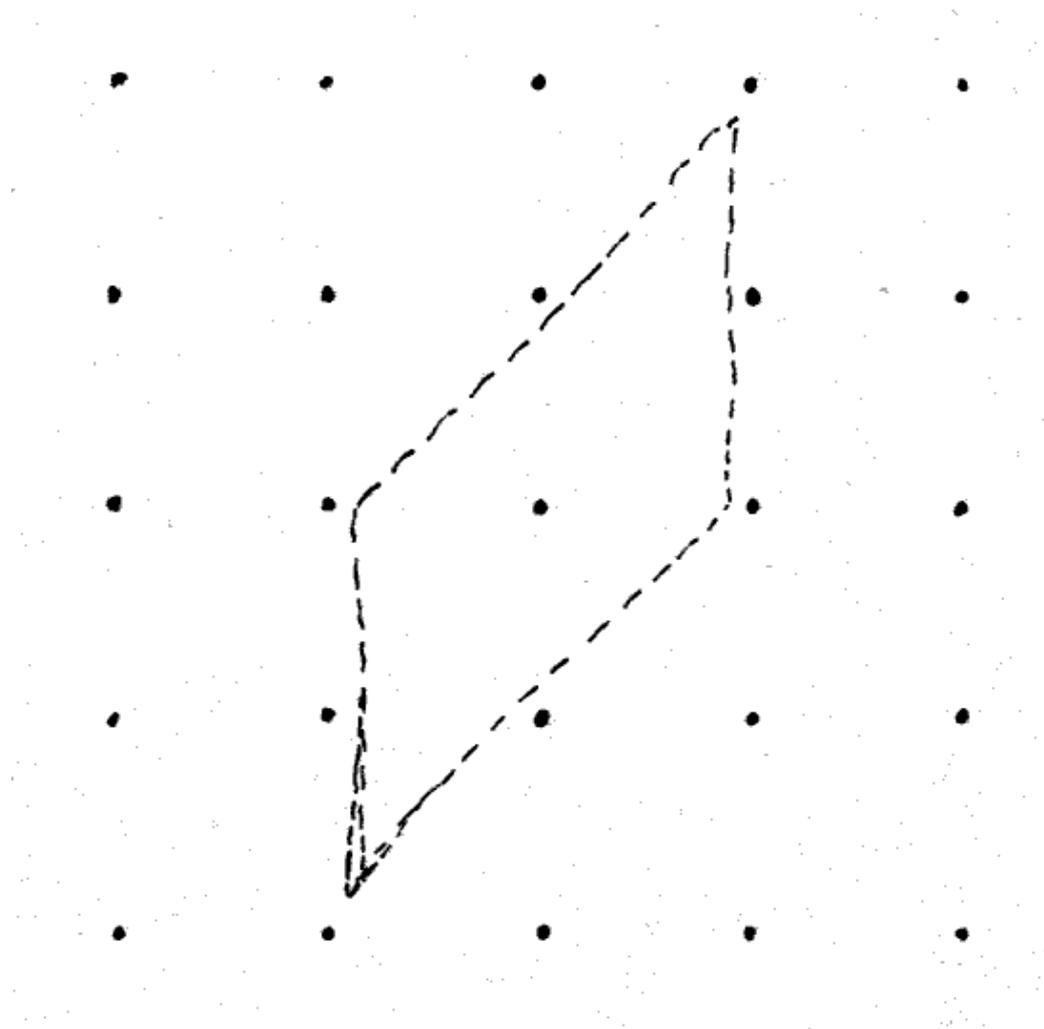
mit dem Lebesgue-Integral über $\varphi^{-1}(A) \subset Q \subset \mathbb{R}^k$ auf der rechten Seite. Dieses Maß heißt das **Flächenmaß** von M . Es ist ein Borelmaß.

1.11.3. Nach 1.4.42 und 1.4.21 existiert eine Folge von Integrationskarten (Q_n, φ_n) , deren Bilder unsere Fastfaltung überdecken. Insbesondere ist jede Fastfaltung Borel-meßbar. Im Fall $n = k$ einer n -Fastfaltung $M \subset \mathbb{R}^n$ mögen Sie zur Übung zeigen, daß unser Flächenmaß mit der Einschränkung auf M des Lebesguemaßes von \mathbb{R}^n übereinstimmt. Man kriegt also dasselbe Kugelvolumen heraus, egal ob man wie in [AN2] 4.4.7 eine Integrationskarte zu Hilfe nimmt, oder ob man vielmehr mit dem Prinzip von Cavalieri 1.7.11 arbeitet.

1.11.4. Die hinter dieser Definition stehende Anschauung wurde bereits in [AN2] 4.2.1 diskutiert. Man sieht leicht ein, daß das dort für stetige Funktionen mit kompaktem Träger erklärte Integral mit ihrem Lebesgue-Integral in Bezug auf das hier erklärte Flächenmaß übereinstimmen muß. Der Buchstabe σ steht für englisch und französisch „surface“. Die Bezeichnung suggeriert zwar die Vorstellung zweidimensionaler Fastfaltungen, aber wir benutzen sie auch im allgemeinen. Gegeben eine integrierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ notieren wir ihr Integral bezüglich des Flächenmaßes

$$\int_M f = \int_M f \sigma = \int_M f(x) \sigma \langle x \rangle$$

In der Literatur ist es üblich, $d\sigma$ hinter das Integral zu schreiben, und man findet auch die Notationen dS und in der deutschen Literatur $d\omega$ oder dO mit ω oder O wie „Oberfläche“.



Skizze zum Gitterpunktsatz einer konvexen zum Ursprung punktsymmetrischen Teilmenge der Ebene, die fast die Fläche 4 hat und dennoch außer dem Ursprung keinen Punkt des Gitters \mathbb{Z}^2 trifft. Der Gitterpunktsatz besagt, daß das ab einer Fläche > 4 nicht mehr möglich ist.

Beweis von Satz 1.11.2. Nach 1.4.42 und 1.4.21 existiert eine Folge von Integrationskarten (Q_n, φ_n) , deren Bilder unsere Fastfaltigkeit überdecken. Auf dem Bild jeder dieser Integrationskarten liefert unsere Vorschrift ein topologisches Maß. Wir wollen diese Maße mit Hilfe von Übung 1.1.39 verkleben. Wir müssen dazu nur zeigen, daß gegeben zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) von M und $A \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ meßbar gilt

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \int_{\psi^{-1}(A)} \text{vol}(d_y \psi) d^k y$$

Im Fall $A \subset \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ folgt das wie Fall der Integration über Mannigfaltigkeiten [AN2] 4.2.1 aus der Transformationsformel 1.10.1, angewandt auf den Kartenwechsel. Es reicht also, im Fall $A = (\varphi(Q) \cap \psi(P)) \setminus (\varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ))$ zu zeigen, daß beide Seiten Null werden. Es reicht weiter, das für die linke Seite zu zeigen, und dafür reicht es zu zeigen, daß für die Restriktion $\varphi_\circ : Q^\circ \hookrightarrow M$ von φ das Urbild $\varphi_\circ^{-1}(\psi(\partial P))$ eine Nullmenge ist. Nach [AN2] 3.4.7 angewandt auf die Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ)$ ist aber $(\varphi_\circ^{-1} \circ \psi) : \psi^{-1}(\varphi(Q^\circ)) \rightarrow Q^\circ$ stetig differenzierbar und nach 1.10.5 wird darunter $\psi^{-1}(\varphi(Q^\circ)) \cap \partial P$ in der Tat auf eine Nullmenge abgebildet. Daß schließlich unser Flächenmaß endlich ist auf Kompakta, scheint mir offensichtlich. \square

Übungen

Übung 1.11.5. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -Fastfaltigkeit. Man zeige: Ist $K \subset \mathbb{R}^{k-1}$ ein kompakter Quader und $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Bild $\varphi(K) \subset M$, so ist $\varphi(K)$ für das Flächenmaß von M eine Nullmenge.

Übung 1.11.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. So ist die **Mantelfläche** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$ eine zweidimensionale Randfaltigkeit im \mathbb{R}^3 . Man zeige man für das Bildmaß des Oberflächenmaßes unter der orthogonalen Projektion $p : M \rightarrow I$ unserer Mantelfläche auf die z -Achse die Formel $p_* \sigma = 2\pi f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$. Ist speziell M die Einheitskugel, so zeige man $p_* \sigma = 2\pi dz$ und berechne nochmals die Oberfläche der Einheitskugel.

Übung 1.11.7 (Zwiebelformel). Ist $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitskugel mit ihrem Flächenmaß σ , so ist unter der Multiplikationsabbildung $\text{mult} : \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \setminus 0$ das Produktmaß $r^{n-1} dr \boxtimes \sigma$ verwandt zum Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n \setminus 0$, in Formeln

$$\text{mult} : r^{n-1} dr \boxtimes \sigma \rightsquigarrow \lambda^n$$

Hinweis: Man rechne mit einer beliebigen Karte von S^{n-1} und erweitere sie zu einer Karte von $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Man beachte, daß für eine differenzierbare Kurve, die ganz in

der Einheitssphäre verläuft, der Geschwindigkeitsvektor stets auf dem Ortsvektor senkrecht steht.

Übung 1.11.8. Genau dann ist die Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, $x \mapsto \|x\|^\alpha$ für gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ integrierbar auf dem Komplement eines und jedes offenen Balls um den Ursprung, wenn gilt $\alpha < (-n)$. Hinweis: Zwiebelformel [1.11.7](#).

Übung 1.11.9. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, als da heißt das Gruppenerzeugnis einer Basis von \mathbb{R}^n als \mathbb{R} -Vektorraum. Genau dann konvergiert $\sum_{\omega \in \Gamma \setminus 0} \|\omega\|^\alpha$, wenn gilt $\alpha < (-n)$. Hinweis: [1.11.8](#).

2 Funktionenräume und Fourierreihen

2.1 Lebesgue-Integral vektorwertiger Funktionen

2.1.1. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow V$ heißt **integrierbar**, wenn sie meßbar ist und für eine und jede Norm auf V gilt $\int \|f\| < \infty$. Unter diesen Umständen erklären wir das **Integral** unserer Funktion f als den eindeutig bestimmten Vektor

$$v = \int f = \int_X f(x) \mu \langle x \rangle$$

mit der Eigenschaft $L(v) = \int L(f(x)) \mu \langle x \rangle$ für jede Linearform $L : V \rightarrow \mathbb{R}$. Um die Existenz und Eindeutigkeit von v zu zeigen, können wir etwa $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und müssen nur prüfen, daß dann das komponentenweise Integral den einzig möglichen Vektor v mit den angeführten Eigenschaften liefert. Das ist leicht zu sehen.

2.1.2. In [AN2] 7.2.3 hatten wir eine andere Verallgemeinerung des Integrationsbegriffs zu einem Integral für stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in Banachräumen besprochen. Auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich, also für stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in endlichdimensionalen Banachräumen, liefern unsere beiden Verallgemeinerungen offensichtlich dasselbe Integral. Eine weitere Verallgemeinerung des Integralbegriffs wird in ?? besprochen.

Übungen

Übung 2.1.3. Unsere Sätze über dominierte Konvergenz und Integration auf Produkträumen gelten unverändert auch für Funktionen mit Werten in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen. Für jede lineare Abbildung $\Lambda : V \rightarrow W$ in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt weiter die Formel $\int (\Lambda \circ f) = \Lambda (\int f)$.

Übung 2.1.4. Sei (X, μ) ein Maßraum. Nimmt eine integrierbare Abbildung $f : X \rightarrow V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum nur endlich viele Werte an, so haben wir

$$\int_X f(x) \mu \langle x \rangle = \sum_{v \neq 0} \mu(f^{-1}(v)) v$$

Übung 2.1.5. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Gegeben eine integrierbare Abbildung $f : X \rightarrow V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt

für jede Norm auf V die Abschätzung

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|$$

Hinweis: Man zeige das zunächst für meßbare Stufenfunktionen und argumentiere dann mit dem Satz über dominierte Konvergenz.

Ergänzung 2.1.6. Im Fall komplexwertiger Funktionen und der Standardnorm auf \mathbb{C} kann man die Abschätzung $|\int f| \leq \int |f|$ aus 2.1.5 auch einfacher zeigen, indem man $\lambda \in \mathbb{C}$ wählt mit $|\lambda| = 1$ und $\lambda \int f > 0$, woraus dann folgt

$$\left| \int f \right| = \lambda \int f = \int \lambda f = \int \operatorname{Re}(\lambda f) \leq \int |\lambda f| = \int |f|$$

2.2 Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen

2.2.1. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **quadratintegrierbar**, wenn sie meßbar ist und ihr Betragsquadrat integrierbar ist, in Formeln $\int |f|^2 < \infty$. Die Menge $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(X, \mu)$ aller quadratintegrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Untervektorraum im \mathbb{C} -Vektorraum aller meßbaren komplexwertigen Funktionen auf X , denn wir haben $2|f| \cdot |g| \leq |f|^2 + |g|^2$ und $|f + g|^2 \leq |f|^2 + 2|f| \cdot |g| + |g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$. Dieselben Abschätzungen zeigen auch, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \int \bar{f}g \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und schieflinear im ersten Eintrag sowie linear im zweiten. Es gilt auch offensichtlich $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{L}^2$. Dennoch liefert unsere Paarung im Allgemeinen kein Skalarprodukt auf \mathcal{L}^2 im Sinne von [LA2] 1.2.5, da aus $\langle f, f \rangle = 0$ nicht notwendig folgt $f = 0$. Um einen Skalarproduktraum zu erhalten, betrachten wir den Untervektorraum $\mathcal{R} := \{f \in \mathcal{L}^2 \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall g \in \mathcal{L}^2\}$, das sogenannte Radikal. Unsere hermitesche Form induziert dann offensichtlich ein Skalarprodukt auf dem Quotientenvektorraum

$$L^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2 / \mathcal{R}$$

2.2.2. Ich erinnere an den Begriff der Summierbarkeit von Familien [AN1] 9.2.5. Gegeben ein normierter Vektorraum V nennt man eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V **summierbar mit Summe** $s \in V$ und schreibt

$$\sum_{i \in I} v_i = s$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt

$$\sum_{i \in J} v_i \in U$$

Satz 2.2.3 (Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen). *Sei das Intervall $[0, 2\pi]$ mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesguemaß $\mu := dt/2\pi$ versehen und \mathbb{Z} mit dem Zählmaß ζ . So erhalten wir einen Isomorphismus von Skalarprodukträumen*

$$L^2(\mathbb{Z}, \zeta) \xrightarrow{\sim} L^2([0, 2\pi], \mu)$$

durch die Vorschrift $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$. Insbesondere ist also für jede Familie $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von komplexen Zahlen mit $\sum |c_n|^2 < \infty$ die Familie der Funktionen $c_n e^{int}$ im Skalarproduktraum $L^2([0, 2\pi], \mu)$ summierbar.

2.2.4. Den Beweis dieses Satzes müssen wir zurückstellen, bis wir die Theorie weiter ausgebaut haben. Er wird dann im Anschluß an 2.6.3 gegeben werden. Im folgenden geben wir alternative Beschreibungen unserer Räume $L^2(X, \mu)$, die eine bessere Anschauung dafür geben mögen und sich auch sonst als nützlich erweisen werden.

Definition 2.2.5. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und Y eine Menge. Auf der Menge $\text{Ens}(X, Y)$ aller Abbildungen von unserem Maßraum X in die Menge Y können wir eine Äquivalenzrelation \sim_μ erklären durch die Vorschrift

$$f \sim_\mu g \Leftrightarrow \{\exists N \in \mathcal{M} \text{ mit } \mu(N) = 0 \text{ und } f(x) = g(x) \forall x \in X \setminus N\}$$

In Worten sind also Abbildungen f, g genau dann äquivalent, wenn sie außerhalb von einer Nullmenge übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen von \sim_μ heißen **μ -fast überall definierte Abbildungen** von X nach Y . Wir notieren fast überall definierte Abbildungen

$$f : X \dashrightarrow Y$$

Wenn wir betonen wollen, daß eine Abbildung im ursprünglichen Sinne zu verstehen ist, sprechen wir von einer **überall definierten Abbildung**. Die Menge aller fast überall definierte Abbildungen von X nach Y notieren wir

$$\text{Ens}_\mu(X, Y) := \text{Ens}(X, Y) / \sim_\mu$$

2.2.6. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Gilt eine Aussage für alle $x \in X$ außerhalb einer Nullmenge, so sagt man auch, die Aussage gelte **fast überall** oder genauer **μ -fast überall**.

2.2.7. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Ist K ein Körper, so bildet im Vektorraum $\text{Ens}(X, K)$ der K -wertigen Funktionen auf X die Teilmenge

$$\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow K \mid f \sim_{\mu} 0\}$$

der fast überall verschwindenden Funktionen einen Untervektorraum. Offensichtlich ist dann $f \sim_{\mu} g$ gleichbedeutend zu $(f - g) \in \mathcal{N}$. Folglich induziert die kanonische Surjektion $\text{Ens}(X, K) \twoheadrightarrow \text{Ens}_{\mu}(X, K)$ eine Bijektion

$$\text{Ens}(X, K)/\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{\mu}(X, K)$$

So wird die Menge $\text{Ens}_{\mu}(X, K)$ der fast überall definierten K -wertigen Funktionen zu einem K -Vektorraum.

2.2.8 (Diskussion der Terminologie). Den Begriff *fast überall* verwenden wir unglücklicherweise in zwei Bedeutungen: Auf einem Maßraum X als Abkürzung für „die Ausnahmen bilden eine Nullmenge“, auf einer beliebigen Menge X als Abkürzung für „die Ausnahmen bilden eine endliche Menge“. Mir ist keine griffige Terminologie eingefallen, die diese Unschärfe ausräumt. Ich kann nur hoffen, daß aus dem Kontext erschlossen werden kann, welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist.

2.2.9 (Operationen mit fast überall definierten Funktionen). Man kann reellwertige oder auch komplexwertige fast überall definierte Funktionen addieren und multiplizieren, man darf beim Rechnen mit fast überall definierten Funktionen sogar auch dann noch den Quotienten f/g bilden, falls g nur fast überall von Null verschieden ist. Es ist sinnvoll, von einer Folge fast überall definierter Funktionen zu sagen, daß sie fast überall punktweise gegen eine weitere fast überall definierte Funktion konvergiert. Man kann die Verknüpfung $g \circ f$ einer fast überall definierten Funktion f mit einer überall definierten Funktion g bilden und erhält so wieder eine fast überall definierte Funktion. Nicht sinnvoll ist das Auswerten einer fast überall definierten Funktion an einem Punkt, es sei denn, der fragliche Punkt habe positives Maß.

Definition 2.2.10. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und Y ein Meßraum. Eine fast überall definierte Abbildung $f : X \dashrightarrow Y$ heißt **meßbar**, wenn sie einen meßbaren Repräsentanten hat.

2.2.11. Ist unser Maßraum nicht vollständig, so kann eine meßbare fast überall definierte Abbildung durchaus auch nicht-meßbare Repräsentanten haben.

Definition 2.2.12. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Unter einer **L^1 -Funktion** auf X versteht man eine fast überall definierte Funktion $X \dashrightarrow \mathbb{C}$, die einen integrierbaren Repräsentanten besitzt.

2.2.13. Es ist etwas unglücklich, daß eine L^1 -Funktion damit genau genommen gar keine Funktion ist, sondern vielmehr eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Der Buchstabe L steht in diesem Zusammenhang für „Lebesgue“. Die Menge aller L^1 -Funktionen notiert man

$$L^1(X) = L^1(X; \mu)$$

Lemma 2.2.14. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $h : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar. Genau dann gilt $\int h = 0$, wenn h außerhalb einer Nullmenge verschwindet.

Beweis. Verschwindet h außerhalb von einer Nullmenge, so gilt offensichtlich $\int h = 0$. Gilt umgekehrt $\int h = 0$, so hat $h^{-1}([1/n, \infty])$ Maß Null für alle n , und damit hat auch $h^{-1}((0, \infty])$ Maß Null als abzählbare Vereinigung von Mengen vom Maß Null. \square

Satz 2.2.15. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) ist $L^1(X) \subset \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum des Raums der fast überall definierten Funktionen und die Vorschrift $\|g\|_1 := \int |g|$ definiert darauf eine Norm.

Beweis. Wir überlassen alles dem Leser bis auf den Nachweis der Implikation $\|g\|_1 = 0 \Rightarrow g = 0$. Per definitionem haben wir $\|g\|_1 = \int |\tilde{g}|$ für einen und jeden integrierbaren Repräsentanten $\tilde{g} : X \rightarrow \mathbb{C}$ von g . Aus $\|g\|_1 = \int |\tilde{g}| = 0$ folgt nun erst $|\tilde{g}| \sim_\mu 0$ nach 2.2.14 und dann $\tilde{g} \sim_\mu 0$ und dann aus den Definitionen $g = 0$. \square

Definition 2.2.16. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Unter einer L^2 -Funktion auf X versteht man eine fast überall definierte Funktion $X \rightarrow \mathbb{C}$, die einen quadratintegrierbaren Repräsentanten besitzt.

2.2.17. Wieder ist es etwas unglücklich, daß eine L^2 -Funktion damit genau genommen gar keine Funktion ist, sondern vielmehr eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Die Menge aller L^2 -Funktionen notiert man

$$L^2(X) = L^2(X; \mu)$$

Satz 2.2.18. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) ist $L^2(X; \mu) \subset \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum des Raums der fast überall definierten Funktionen und die Vorschrift $\langle f, g \rangle := \int \bar{f}g$ definiert darauf ein Skalarprodukt.

Beweis. Dem Leser überlassen. \square

Lemma 2.2.19. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) induziert die offensichtliche Abbildung $\mathcal{L}^2(X, \mu) \rightarrow \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ einen Isomorphismus

$$L^2(X, \mu) \xrightarrow{\sim} L^2(X; \mu)$$

zwischen unserem in 2.2.1 als Quotient $L^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2(X, \mu)/\mathcal{R}$ erklärten Raum, den wir zur Unterscheidung mit einem Komma notieren, und unserem gerade eben in 2.2.17 als Untervektorraum $L^2(X; \mu) \subset \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ erklärten Raum, den wir mit einem Semikolon notieren.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß das Radikal $\mathcal{R} = \{f \in \mathcal{L}^2 \mid \langle f, g \rangle = 0 \forall g \in \mathcal{L}^2\}$ aus 2.2.1 auch beschrieben werden kann als die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{N}$ der fast überall verschwindenden Funktionen aus \mathcal{L}^2 . In der Tat ist \supset offensichtlich und \subset folgt aus der Kette von Implikationen

$$f \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \int |f|^2 = 0 \Rightarrow |f|^2 \sim_\mu 0 \Rightarrow f \sim_\mu 0$$

Die dritte Implikation kommt dabei von 2.2.14 her. □

Übungen

Übung 2.2.20. Man gebe eine quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht integrierbar ist. Man gebe eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht quadratintegrierbar ist. Man zeige, daß jede quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger integrierbar ist.

Übung 2.2.21. Sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ fast überall gleich und stetig bei $p \in \mathbb{R}^n$, so gilt $f(p) = g(p)$.

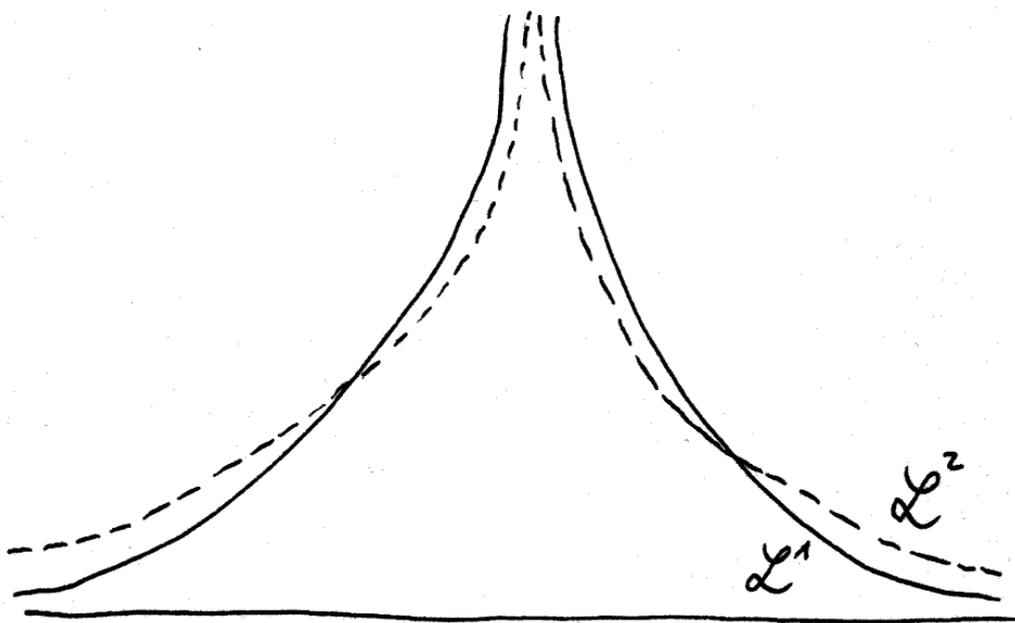
Übung 2.2.22. Man berechne die Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion $t \mapsto |t|$ für $t \in [-\pi, \pi]$ und der Funktion $t \mapsto \exp(\exp(2\pi it))$.

Ergänzende Übung 2.2.23. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Periode 2π und integrierbar auf $[0, 2\pi]$ und sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Lassen sich die Restriktionen $f|_{(-\infty, a)}$ und $f|_{(a, \infty)}$ auf die jeweiligen abgeschlossenen reellen Intervalle fortsetzen zu bei a differenzierbaren Funktionen, so konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle a , genauer die Folge der Partialsummen $\sum_{|\nu| \leq n} c_\nu e^{i\nu a}$ gegen den Wert

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{t \nearrow a} f(t) + \lim_{t \searrow a} f(t) \right)$$

Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $a = 0$ und f ist gerade und stetig bei Null mit $f(0) = 0$. Nun setze man $P_n = \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu t}$ und prüfe $P_n(t) = \cos(nt) + \cot(t/2) \sin(nt)$. Dann zeige man $\langle f, P_n \rangle \rightarrow 0$.

Übung 2.2.24. Man zeige für $f, g \in L^2$ die sogenannte **Hölder-Ungleichung** $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. *Hinweis:* Man wende die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung auf die Beträge unserer Funktionen an.



Anschaulich und unpräzise gesprochen ist die Quadratintegrierbarkeit im Vergleich zur Integrierbarkeit für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine schwächere Bedingung an das Abfallen für $x \rightarrow \pm\infty$, aber eine stärkere Bedingung an die Natur möglicher Polstellen.

2.3 Räume integrierbarer Funktionen

2.3.1. Um unsere Räume integrierbarer und quadratintegrierbarer fast überall definierter Funktionen simultan behandeln zu können, führen wir eine gemeinsame Verallgemeinerung ein, die sogenannten L^p -Räume. Im Rahmen dieser Vorlesung könnte man im Folgenden stets mit $p \in \{1, 2\}$ arbeiten und so die Diskussion allgemeiner L^p -Räume vermeiden. In anderen Zusammenhängen scheinen jedoch auch die L^p -Räume für andere p von Bedeutung zu sein.

Definition 2.3.2. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und $p \in [1, \infty)$ erklärt man $L^p(X) = L^p(X; \mu) = L^p(X; \mathcal{M}, \mu) \subset \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ als die Menge der fast überall definierten **meßbaren** Funktionen $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int |f|^p < \infty$$

Beispiel 2.3.3. Für $p = 1$ und $p = 2$ erhalten wir die bereits in 2.2 ausführlich diskutierten Räume $L^1(X)$ und $L^2(X)$.

Definition 2.3.4. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) notiert man die Menge aller fast überall definierten **meßbaren** Funktionen $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ mit mindestens einem betragsmäßig beschränkten Repräsentanten

$$L^\infty(X) = L^\infty(X; \mu) = L^\infty(X; \mathcal{M}, \mu) \subset \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$$

2.3.5. Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum. Ein Element der Menge $L^p(X; \mu)$ heißt eine **L^p -Funktion**. Eine meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, die ein Element von $L^p(X; \mu)$ repräsentiert, heißt eine **\mathcal{L}^p -Funktion**.

Proposition 2.3.6. Gegeben ein Maßraum (X, μ) ist die Menge der L^∞ -Funktionen ein Untervektorraum $L^\infty(X; \mu) \subset \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ im Raum der fast überall definierten Funktionen und wir erhalten darauf eine Norm, indem wir für $\|g\|_\infty$ das Minimum der Supremumsnormen aller betragsmäßig beschränkten Repräsentanten \tilde{g} von g nehmen oder äquivalent setzen

$$\|g\|_\infty := \sup\{c \geq 0 \mid \mu(\tilde{g}^{-1}\{z \mid |z| > c\}) > 0\}$$

für einen und jeden Repräsentanten \tilde{g} von g .

2.3.7 (**Diskussion der Notation**). Leider hat nun das Symbol $\|f\|_\infty$ zwei Bedeutungen: Einmal für eine beschränkte komplexwertige Funktion auf einer beliebigen Menge als Supremum der Beträge aller Funktionswerte bzw. Null für die einzige Funktion auf der leeren Menge, ein andermal als das eben definierte, so genannte **essentielle Supremum** einer fast überall definierten Funktion auf einem Maßraum. Welche Bedeutung im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser meist aus dem Kontext erschließen. Wenn ich explizit auf dem essentiellen Supremum bestehen will schreibe ich $\|f\|_\infty^{\text{ess}}$.

Proposition 2.3.8. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und $p \in [1, \infty)$ ist die Menge der L^p -Funktionen $L^p(X; \mu) \subset \text{Ens}_\mu(X, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum im Raum aller fast überall definierten Funktionen, und wir erhalten darauf eine Norm durch die Vorschrift

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$$

2.3.9. Wir erinnern aus [AN1] 4.5.24 und [AN1] 4.5.25 zwei nützliche Ungleichungen: Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt die **Young'sche Ungleichung** $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$ aus der Konvexität der Exponentialfunktion. Weiter folgt, sogar für $p \geq 1$, die Ungleichung $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ aus der Konvexität der Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^p$.

Beweis. Sicher gilt $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ und aus $\|f\|_p = 0$ folgt $f = 0$ fast überall mit 2.2.14. Um zu sehen, daß L^p stabil ist unter der Addition, gehen wir von 2.3.9 aus und folgern

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

Um schließlich zu zeigen, daß $\|\cdot\|_p$ ein Norm auf L^p ist, müssen wir weiter ausholen. Den Fall $p = 1$ haben wir bereits behandelt, wir dürfen also $p \in (1, \infty)$ annehmen und finden dann $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alias $p + q = pq$. Solche p, q heißen **konjugierte Exponenten**. Nach 2.3.9 gilt für reelle $a, b > 0$ dann

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Aus $f \in L^p$ und $g \in L^q$ folgt mithin $fg \in L^1$. Wir behaupten unter diesen Annahmen sogar stärker die **Hölder-Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Auch das folgt im Fall $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ sofort aus unserer obigen Ungleichung und im allgemeinen durch Reskalierung. Gegeben $f, g \in L^p$ zeigen wir nun schließlich $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir f und g nichtnegativ und von Null verschieden annehmen. Setzen wir $h = (f + g)^{p-1}$, so ergibt sich $h^q = (f + g)^p$. Es folgt $h \in L^q$ und wir erhalten

$$\|f + g\|_p^p = \|(f + g)h\|_1 \leq \|fh\|_1 + \|gh\|_1 \leq \|f\|_p \|h\|_q + \|g\|_p \|h\|_q$$

Beachten wir nun $\|h\|_q = \|f + g\|_p^{(p/q)}$ und teilen das auf beiden Seiten weg, so ergibt sich die Behauptung. \square

2.3.10. Man bezeichnet etwas allgemeiner als im vorherigen Beweis eingeführt auch 1 und ∞ als **konjugierte Exponenten**. Ist nun (X, μ) ein Maßraum und sind $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, so folgt aus $f \in L^p$ und $g \in L^q$ stets $fg \in L^1$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Für $p, q \in (1, \infty)$ hatten wir das bereits im vorhergehenden Beweis gesehen. Im verbleibenden Fall ist es eh klar.

Satz 2.3.11 (Vollständigkeit der L^p -Räume). *Für jeden Maßraum X und alle $p \in [1, \infty]$ sind die normierten Vektorräume $L^p(X)$ vollständig. Jede konvergente Folge in einem dieser Räume besitzt des weiteren eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion konvergiert.*

Beispiel 2.3.12. Die charakteristischen Funktionen der Intervalle $[0, 1]$, $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[0, 1/4]$, $[1/4, 2/4]$, $[2/4, 3/4]$, $[3/4, 1]$, $[0, 1/8]$, $[1/8, 2/8]$, \dots bilden eine Nullfolge im Raum der L^1 -Funktionen auf dem Einheitsintervall, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert.

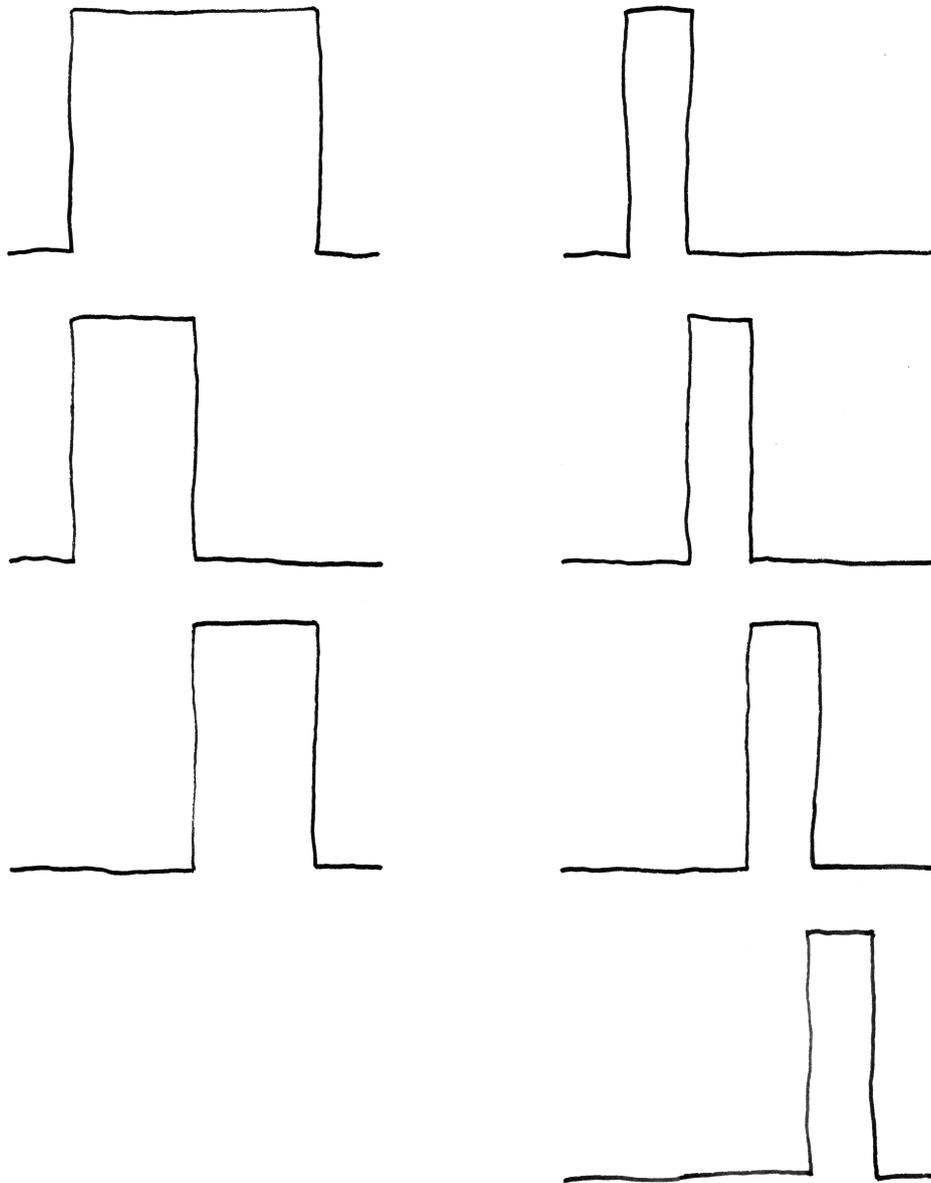
Beweis. Wir überlassen den Fall $p = \infty$ dem Leser zur Übung und führen den Beweis nur im Fall $p < \infty$. Es gilt zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in $L^p(X)$ konvergiert. Seien die $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ meßbare Repräsentanten der Glieder einer Cauchy-Folge in $L^p(X)$. Indem wir falls nötig zu einer Teilfolge übergehen, dürfen wir annehmen, daß gilt $\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}$. Wir betrachten nun die Funktionen $g_k, g : X \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch

$$g_k = \sum_{n=0}^k |f_n - f_{n+1}| \quad \text{und} \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n - f_{n+1}|$$

Aus unseren Annahmen folgt $\|g_k\|_p \leq 2$ für alle k , und da die Funktion g^p der monotone punktweise Grenzwert der g_k^p ist, erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz $\int g^p \leq 2^p$. Insbesondere gilt also $g(x) < \infty$ fast überall auf X . Sicher gilt aber auch

$$f_0 - f_{k+1} = \sum_{n=0}^k (f_n - f_{n+1})$$

und diese Reihe konvergiert absolut an allen Stellen $x \in X$ mit $g(x) < \infty$, als da heißt fast überall. Mithin konvergiert auch die Folge der f_k fast überall, und wir erhalten als ihren punktweisen Grenzwert eine fast überall definierte meßbare Funktion f . Wir müssen nur noch zeigen, daß f in L^p liegt und daß die Folge der f_k auch in der L^p -Norm gegen f konvergiert. Offensichtlich sind aber die Funktionen $|f_0 - f_k|$ fast überall beschränkt durch g , folglich ist $|f_0 - f|$ fast



Die ersten Glieder der Nullfolge in L^1 aus 2.3.12, die nicht fast überall punktweise gegen Null konvergiert. Die graphische Darstellung ist etwas fragwürdig, da Graphen von Funktionen keine senkrechten Linien enthalten dürfen, aber wir vereinbaren einfach, daß in diesem Fall stets der oberste mögliche Wert gemeint ist.

überall beschränkt durch g , also gehört $f_0 - f$ zu L^p , und dann gehört auch f zu L^p . Weiter können wir mit 2.3.9 abschätzen

$$|f - f_k|^p \leq 2^{p-1}(|f - f_0|^p + |f_0 - f_k|^p) \leq 2^p g^p$$

Damit folgt dann $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_p = 0$ aus dem Satz über dominierte Konvergenz, angewandt auf die Funktionenfolge $|f - f_k|^p$. \square

Übungen

Übung 2.3.13. Ist (X, μ) ein Maßraum und $E \subset X$ eine meßbare Teilmenge endlichen Maßes, so liefert für alle $p \in [1, \infty]$ die Einschränkung von Funktionen eine stetige Abbildung $L^p(X) \rightarrow L^1(E)$.

Übung 2.3.14. Gegeben ein Maßraum liegen für $1 \leq p < \infty$ die integrierbaren Stufenfunktionen auf unserem Raum dicht im Raum der L^p -Funktionen. Hinweis: Man verwende Lemma 1.5.15.

Übung 2.3.15. Gegeben eine Menge X und ein Prämaß μ auf einem Mengerring $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugen für $1 \leq p < \infty$ die charakteristischen Funktionen der Mengen endlichen Maßes aus \mathcal{A} einen dichten Teilraum im Raum der L^p -Funktionen in Bezug auf die größte Maßfortsetzung auf der von \mathcal{A} erzeugten σ -Algebra. Hinweis: Man verwende die vorhergehende Übung 2.3.14 und die Konstruktion der größten Maßfortsetzung 1.2.14.

Übung 2.3.16. Gegeben Maßräume (X, μ) und (Y, ν) erzeugen für alle $p \in [1, \infty)$ die charakteristischen Funktionen $[A \times B]$ für $A \subset X$ und $B \subset Y$ meßbar von endlichem Maß einen dichten Teilraum von $L^p(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$. Speziell erzeugen die Funktionen mit $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ mit $f \in L^2(X; \mu)$ und $g \in L^2(Y; \nu)$ einen dichten Teilraum von $L^2(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$. Hinweis: 2.3.15.

Übung 2.3.17. Gegeben ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} und $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $L^p(\mathbb{R}; \mu)$ endlichdimensional genau dann, wenn μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist. Hinweis: Man betrachte die Variante 1.2.27 der Verteilungsfunktion unseres Maßes.

2.4 Hilberträume und Hilbertbasen

Definition 2.4.1. Ein **Hilbertraum** ist ein komplexer, seltener auch reeller Skalarproduktraum, der vollständig ist für die von diesem Skalarprodukt induzierte Metrik. Bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ unser Skalarprodukt, so wird die davon induzierte Metrik gegeben durch die Vorschrift $d(x, y) = \|x - y\|_2$ mit $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, vergleiche [LA2] 1.2.8. Einen reellen oder komplexen Skalarproduktraum bezeichnet man insbesondere dann, wenn unser Raum nicht vollständig ist, auch als **Prähilbertraum**.

2.4.2 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Quellen fordern von einem Hilbertraum zusätzlich noch, daß er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzen möge. Wir schließen uns dieser Konvention nicht an und nennen derartige Hilberträume „separabel“, da es sich dabei offensichtlich genau um die Hilberträume handelt, die als metrische Räume separabel sind im Sinne von 1.4.18.

Beispiel 2.4.3. Nach 2.3.11 ist für jeden Maßraum $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ der Raum $L^2(X)$ der fast überall definierten quadratintegrierbaren Funktionen auf X ein Hilbertraum. Wir werden im Folgenden zeigen, daß es keine wesentlich anderen Beispiele für Hilberträume gibt, ja sogar, daß jeder Hilbertraum bereits isomorph ist zum Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer mit dem Zählmaß versehenen Menge. Dazu müssen wir jedoch zunächst etwas mehr Theorie entwickeln.

2.4.4. Ich erinnere daran, daß nach [LA2] 1.2.12 eine Familie von Vektoren $(e_i)_{i \in I}$ eines Skalarproduktraums ein **Orthonormalsystem** heißt, wenn gilt $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ mit dem Kroneckerdelta aus [LA1] 2.4.2.

Definition 2.4.5. Eine **Hilbertbasis** eines Hilbertraums oder gleichbedeutend ein **vollständiges Orthonormalsystem** ist ein Orthonormalsystem, dessen Vektorraumergänzung dicht ist in unserem Hilbertraum.

2.4.6. Eine Hilbertbasis ist im allgemeinen keine Basis unseres Hilbertraums im Sinne der linearen Algebra. Genauer gilt das nur für endlichdimensionale Hilberträume, und für diese ist eine Hilbertbasis dasselbe wie eine Orthonormalbasis. Man vergleiche dazu auch Übung 2.4.19.

Definition 2.4.7. Für eine Menge I bezeichne $L^2(I)$ den Raum der in Bezug auf das Zählmaß quadratintegrierbaren Funktionen $I \rightarrow \mathbb{C}$ und $\chi_i \in L^2(I)$ die charakteristische Funktion der einelementigen Menge $\{i\}$. In der Literatur wird unser $L^2(I)$ auch oft $l^2(I)$ notiert.

2.4.8. Nach 2.3.14 bilden die χ_i eine Hilbertbasis von $L^2(I)$. Nach [AN1] 3.1.27 ist jede quadratintegrierbare Funktion $I \rightarrow \mathbb{C}$ im übrigen höchstens auf einer abzählbaren Teilmenge von I verschieden von Null.

2.4.9. Wir erinnern, daß wir nach [AN1] 9.2.5 eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren eines normierten Vektorraums V summierbar mit Summe $s \in V$ nennen und

$$\sum_{i \in I} v_i = s$$

schreiben als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt $\sum_{i \in J} v_i \in U$.

- Satz 2.4.10 (über Hilbertbasen).** 1. Ist $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum \mathcal{H} , so gibt es genau eine stetige lineare Abbildung $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\chi_i \mapsto e_i$ für alle $i \in I$, und diese Abbildung erhält das Skalarprodukt;
2. Ist $(e_i)_{i \in I}$ sogar eine Hilbertbasis, so ist besagte Abbildung ein Isomorphismus von Hilberträumen $L^2(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$ und ihre Inverse $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} L^2(I)$, $v \mapsto \hat{v}$ wird gegeben durch $\hat{v}(i) = \langle e_i, v \rangle$;
3. Gegeben eine Hilbertbasis $(e_i)_{i \in I}$ in einem Hilbertraum \mathcal{H} gilt für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ im Sinne von 2.4.9 die Darstellung

$$v = \sum_{i \in I} \langle e_i, v \rangle e_i$$

2.4.11. Wir schicken dem Beweis zwei Lemmata voraus.

Lemma 2.4.12 (Stetige Fortsetzung von dichten Teilmengen). Seien X, Y metrische Räume und $A \subset X$ eine dichte Teilmenge. So gilt:

1. Jede Abbildung $g : A \rightarrow Y$ besitzt höchstens eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{g} : X \rightarrow Y$;
2. Ist $g : A \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig und Y vollständig, besitzt g genau eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{g} : X \rightarrow Y$.

2.4.13. Im Wesentlichen haben Sie das Lemma bereits als Übung [AN1] 9.2.18 gezeigt. Die Abbildung $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (1/x)$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, und läßt sich nicht stetig auf die Vervollständigung $[0, 1]$ des offenen Intervalls $(0, 1)$ fortsetzen.

Vorschau 2.4.14. In [TM] 1.8.13 wird erklärt, unter welchen Voraussetzungen sich die erste Aussage auf den Fall topologischer Räume verallgemeinern läßt. Die zweite Aussage läßt sich allgemeiner für sogenannte „uniforme Räume“ zeigen, wie sie in [TM] 2.5 eingeführt werden. Wir gehen hier darauf nicht näher ein.

Beweis. Gegeben $x \in X$ finden wir eine Folge a_n in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Natürlich muß für jede stetige Erweiterung \tilde{g} von g gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \tilde{g}(x)$$

und das zeigt auch schon die Eindeutigkeit von \tilde{g} . Ist g nun gleichmäßig stetig, so ist mit a_n auch $g(a_n)$ eine Cauchy-Folge, und ist Y vollständig, so muß $g(a_n)$

konvergieren. Haben weiter zwei Folgen a_n, b_n in A denselben Grenzwert x , so strebt auch die Folge c_n mit den Gliedern $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ gegen x . Wir folgern

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n)$$

und können also definieren $\tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$ für eine und jede Folge a_n aus A , die gegen x strebt. Wir müssen nur noch zeigen, daß \tilde{g} stetig ist. Sei dazu für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gegeben mit $d(a, b) \leq \delta \Rightarrow d(g(a), g(b)) \leq \varepsilon$. Wir zeigen $d(x, z) \leq \delta/2 \Rightarrow d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$ für alle $x, z \in X$. In der Tat, ist $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $z = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, so folgt aus der Dreiecksungleichung $d(a_n, b_n) \leq \delta$ für fast alle n und damit $d(g(a_n), g(b_n)) \leq \varepsilon$ für fast alle n und dann im Grenzwert auch $d(\tilde{g}(x), \tilde{g}(z)) \leq \varepsilon$ mithilfe der Stetigkeit der Metrik $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ nach [AN1] 6.2.24. \square

2.4.15. Wir erinnern daran, daß nach [LA2] 1.3.1 eine lineare Abbildung zwischen zwei Skalarprodukträumen $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ unitär heißt genau dann, wenn sie das Skalarprodukt erhält, wenn also in Formeln gilt $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathcal{H}$.

2.4.16. Eine unitäre Einbettung von einem Hilbertraum in einen Prähilbertraum und allgemeiner eine normerhaltende Einbettung von einem Banachraum in einen weiteren normierten Vektorraum hat stets abgeschlossenes Bild. In der Tat ist nach [AN1] 9.2.16 eine vollständige Teilmenge eines metrischem Raums stets abgeschlossen.

Lemma 2.4.17. *Seien X, Y normierte Vektorräume, $A \subset X$ ein dichter Teilraum und $g : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist die Einschränkung $g|_A : A \rightarrow Y$ linear, so ist auch g linear. Sind X, Y Skalarprodukträume und ist die Einschränkung $g|_A : A \rightarrow Y$ unitär, so ist auch g unitär.*

Beweis. Die Abbildung $X \times X \rightarrow Y, (v, w) \mapsto g(v) + g(w)$ ist stetig und stimmt auf der dichten Teilmenge $A \times A$ mit der stetigen Abbildung $(v, w) \mapsto g(v + w)$ überein. Also sind diese Abbildungen gleich und es gilt $g(v + w) = g(v) + g(w)$ für alle $v, w \in X$. Mit ähnlichen Argumenten beendet man den Nachweis der Linearität von g und zeigt die Verträglichkeit mit dem Skalarprodukt. \square

Beweis von Satz 2.4.10 über Hilbertbasen. Bezeichne $\mathbb{C}I \subset L^2(I)$ den Raum aller Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{C}$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden sind. Natürlich bilden die χ_i eine Basis von $\mathbb{C}I$ und wir erhalten eine lineare Abbildung $\mathbb{C}I \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\chi_i \mapsto e_i$. Da sowohl die χ_i als auch die e_i Orthonormalsysteme sind, ist unsere Abbildung mit den Skalarprodukten verträglich, insbesondere erhält sie Abstände. Da \mathcal{H} vollständig ist und $\mathbb{C}I$ dicht liegt in $L^2(I)$, läßt sich unsere Abbildung nach Lemma 2.4.12 auf genau eine Weise zu einer stetigen

Abbildung $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$ ausdehnen, und nach 2.4.17 ist diese Ausdehnung sogar unitär. Damit ist Teil 1 bewiesen. Nach 2.4.16 ist das Bild unserer unitären Abbildung notwendig abgeschlossen, und im Fall einer Hilbertbasis folgt ihre Surjektivität. Um die inverse Abbildung zu beschreiben, rechnen wir

$$\hat{v}(i) = \langle \chi_i, \hat{v} \rangle = \langle \varphi(\chi_i), \varphi(\hat{v}) \rangle = \langle e_i, v \rangle$$

Mit der Notation aus 2.4.9 kann die im Beweis konstruierte Abbildung $\varphi : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$ auch suggestiver geschrieben werden in der Form

$$\varphi : f \mapsto \sum_{i \in I} f(i) e_i$$

In der Tat gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches $I_\varepsilon \subset I$ mit $\sum_{i \notin I_\varepsilon} |f(i)|^2 < \varepsilon^2$, und für J endlich mit $I_\varepsilon \subset J \subset I$ und der Notation χ_A für die charakteristische Funktionen einer Teilmenge $A \subset I$ folgt $f = \chi_J f + (1 - \chi_J)f$ und zusätzlich $\|(1 - \chi_J)f\|_2 < \varepsilon$, mithin $\|\varphi(f) - \varphi(\chi_J f)\|_2 < \varepsilon$. Daraus folgt unmittelbar der letzte Teil des Satzes. \square

Übungen

Übung 2.4.18. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von paarweise orthogonalen Vektoren eines Hilbertraums ist summierbar im Sinne von 2.4.9 genau dann, wenn gilt $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$, und in diesem Fall haben wir

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|v_i\|^2$$

Übung 2.4.19. Man zeige, daß ein unendlichdimensionaler Hilbertraum keine Orthonormalbasis im Sinne der linearen Algebra besitzen kann.

Ergänzende Übung 2.4.20. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und ein abzählbar basierter alias separabler Hilbertraum \mathcal{H} bilden die meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : X \rightarrow \mathcal{H}$, für die $\|\cdot\|^2 \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist, mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int \langle f(x), g(x) \rangle$ selbst einen Hilbertraum

$$L^2(X, \mathcal{H}) = L^2(X, \mathcal{H}; \mu)$$

und die meßbaren Stufenfunktionen mit Träger von endlichem Maß bilden darin einen dichten Teilraum. Hinweis: Man verallgemeinere den Beweis von 2.3.11. Die Bedingung der Separabilität von \mathcal{H} ist nötig wegen 1.4.25, da im allgemeinen $\langle f(x), g(x) \rangle$ nicht meßbar sein müßte, etwa wenn X endliches Maß hat und f jedem Punkt von X den durch diesen Punkt indizierten Vektor einer durch X

indizierten Orthonormalbasis zuordnet. Die Aussage gilt aber entsprechend für beliebige Hilberträume \mathcal{H} , wenn wir $L^2(X, \mathcal{H})$ feiner erklären als die Menge aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : X \dashrightarrow \mathcal{H}$, deren Bild in einem separablen Teilraum von \mathcal{H} enthalten ist und für die $\| \cdot \|^2 \circ f : X \dashrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Ergänzende Übung 2.4.21. Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) und eine Menge Z notieren wir die Menge der fast überall definierten Abbildungen von X nach Z als $\text{Ens}_\mu(X, Z)$. Gegeben zwei σ -endliche Maßräume X, Y und eine Menge Z induziert die offensichtliche Bijektion zwischen den entsprechenden Räumen überall definierter Abbildungen aus [GR] 2.3.34 nach Fubini eine Bijektion

$$\text{Ens}_\mu(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_\mu(X, \text{Ens}_\mu(Y, Z))$$

Man zeige, daß diese Abbildung im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{C}$ einen Isomorphismus $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$ induziert. Hinweis: Geeignete Stufenfunktionen bilden auf beiden Seiten dichte Teilräume, die als Prähilberträume unter unserer Abbildung identifiziert werden. Dann benutze man, daß punktweise Konvergenz fast überall unter unserer Abbildung punktweise Konvergenz fast überall wird, und schließe mit 2.3.11.

2.5 Vervollständigung metrischer Räume*

2.5.1. Dieser Abschnitt ist für den weiteren Fortgang der Vorlesung nicht unmittelbar relevant. Es stellt sich jedoch heraus, daß viele unserer Funktionenräume auch als Vervollständigungen einfacherer Funktionenräume konstruiert werden können, und so mag dieser alternative Zugang zum Verständnis beitragen. In vielen Zusammenhängen spielen auch direkte Summen von unendlichen Familien von Hilberträumen eine wichtige Rolle, die bequem als Vervollständigungen konstruiert werden können. Wir erinnern aus [LA2] 1.7.9, daß eine Abbildung von metrischen Räumen isometrisch heißt genau dann, wenn sie alle Abstände unverändert läßt. Sind (X, d) und (X', d') unsere metrischen Räume, so heißt also in Formeln eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ isometrisch genau dann, wenn gilt

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Definition 2.5.2. Eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild von einem metrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum heißt eine **Vervollständigung** des Ausgangsraums.

Satz 2.5.3 (Vervollständigung). 1. Für jeden metrischen Raum X existiert eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild $a : X \rightarrow Y$ in einen vollständigen metrischen Raum Y ;

2. Ist $b : X \rightarrow Z$ eine weitere isometrische Abbildung mit dichtem Bild in einen vollständigen metrischen Raum Z , so existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ mit $f \circ a = b$, und diese Abbildung f ist isometrisch und bijektiv.

2.5.4. Der vollständige metrische Raum Y oder genauer das Paar (Y, a) ist also durch X eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus von metrischen Räumen. Wir gönnen ihm deshalb den bestimmten Artikel und nennen (Y, a) oder auch einfach den Raum Y selbst die **Vervollständigung von X** .

Beweis. 2. Nach 2.4.12 kann man jede gleichmäßig stetige Abbildung von einer dichten Teilmenge eines metrischen Raums in einen vollständigen metrischen Raum auf genau eine Weise stetig fortsetzen. Sind also $a : X \rightarrow Y$ und $b : X \rightarrow Z$ Vervollständigungen eines metrischen Raums X , so gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ mit $fa = b$ und genau eine stetige Abbildung $g : Z \rightarrow Y$ mit $gb = a$ und wegen $gfa = a$ und $fgb = b$ gilt $gf = \text{id}$ und $fg = \text{id}$. Weiter prüft man leicht, daß auch f und g Isometrien sein müssen.

1. Zu jedem metrischen Raum (X, d) kann man wie folgt eine Vervollständigung $\text{can} : X \rightarrow \hat{X}$ konstruieren: Auf der Menge \mathcal{C} aller Cauchy-Folgen in X betrachte man die Äquivalenzrelation \sim gegeben durch

$$a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$$

und erkläre \hat{X} als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in X unter dieser Äquivalenzrelation, in Formeln

$$\hat{X} = \mathcal{C} / \sim$$

Gegeben eine Cauchyfolge $a \in \mathcal{C}$ bezeichne $[a] \in \hat{X}$ ihre Äquivalenzklasse. Der Leser mag selbst prüfen, daß es genau eine Abbildung $d : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$d([a], [b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) \quad \forall a, b \in \mathcal{C}$$

und daß diese Abbildung eine Metrik auf \hat{X} ist. Die Abbildung $\text{can} : X \rightarrow \hat{X}$, die jedem Punkt $x \in X$ die Klasse der konstant bei x verweilenden Folge zuordnet, heißt die **kanonische Einbettung**. Sie ist offensichtlich isometrisch mit dichtem Bild. Es bleibt nur zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in \hat{X} konvergiert. Seien dazu $a_0, a_1, \dots \in \mathcal{C}$ Repräsentanten für die Glieder einer Cauchy-Folge in \hat{X} . Jedes a_i ist also eine Cauchy-Folge in X alias eine Abbildung $a_i : \mathbb{N} \rightarrow X$, und wir notieren die Glieder dieser Folge $a_i(0), a_i(1), \dots$. Man zeigt nun mühelos, daß die „diagonale“ Folge $l : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit $i \mapsto a_i(i)$ eine Cauchy-Folge in X ist und daß die Klasse $[l] \in \hat{X}$ von l der Limes in \hat{X} der Folge der $[a_i]$ ist. \square

2.5.5 (Produkt von Vervollständigungen). Das Produkt zweier Vervollständigungen ist wieder eine Vervollständigung. Sind also in Formeln $X \rightarrow V$ und $Y \rightarrow W$ Vervollständigungen, so ist auch $X \times Y \rightarrow V \times W$ eine Vervollständigung. In der Tat ist $V \times W$ nach [AN1] 9.2.17 wieder vollständig. Nach der Eindeutigkeit von Vervollständigungen 2.5.4 existiert also für metrische Räume X, Y stets genau eine Isometrie zwischen dem Produkt ihrer Vervollständigungen und der Vervollständigung ihres Produkts, die als untere Horizontale das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & = & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{X} \times \hat{Y} & \xrightarrow{\sim} & (\hat{X \times Y}) \end{array}$$

zum Kommutieren bringt, mit dem Produkt der kanonischen Einbettungen bzw. der kanonischen Einbettung des Produkts als vertikalen Abbildungen.

Definition 2.5.6. Gegeben ein normierter Vektorraum $(V, \| \cdot \|)$ bildet man einen weiteren normierten Vektorraum $(\hat{V}, \| \cdot \|)$, seine **Vervollständigung**, indem man auf dem vervollständigten metrischen Raum \hat{V} die Addition, Multiplikation mit Skalaren und Norm „durch stetige Fortsetzung“ nach 2.4.12 erklärt. So erhält man etwa die Addition als stetige Fortsetzung auf $\hat{V} \times \hat{V}$ von $\text{can} \circ \text{add} : V \times V \rightarrow \hat{V}$, und so weiter. Die Axiome eines normierten Vektorraums folgen dann aus der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzungen nach 2.4.12.

Ergänzung 2.5.7. Eine **Pseudometrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die alle Eigenschaften einer Metrik [AN1] 6.2.1 hat mit Ausnahme der Eigenschaft, daß verschiedene Punkte positiven Abstand haben müssen. Ein **pseudometrischer Raum** ist eine Menge mit einer Pseudometrik. Eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild von einem pseudometrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum heißt wieder eine **Vervollständigung** des Ausgangsraums. Alle oben gezeigten Eigenschaften übertragen sich auf den pseudometrischen Fall, in dem nur die kanonische Abbildung $X \rightarrow \hat{X}$ in die Vervollständigung eben nicht mehr injektiv zu sein braucht.

Ergänzung 2.5.8 (Alternativer Zugang zur Integrationstheorie). Man könnte das Konzept der Vervollständigung dazu benutzen, sich eine Weile alle Maßtheorie zu sparen und etwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ schlicht definieren als die Vervollständigung des Raums der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Bezug auf die L^p -Norm, für $p \in [0, \infty)$. Mithilfe einer Variante von 2.3.11 identifiziert man dann Elemente dieser Vervollständigungen mit gewissen fast überall definierten Funktionen, wobei Nullmengen ohne Rückgriff auf das Lebesgue-Maß erklärt werden als solche Mengen, die von einer Folge von Quadern mit beliebig kleinem Gesamtvolumen überdeckt werden können. Im Fall $n = 1$ erklärt man dann das

Integral $\int : L^1 \rightarrow \mathbb{C}$ als die stetige Fortsetzung des Riemann-Integrals, und erklärt schließlich Lebesgue-Mengen endlichen Maßes als solche Teilmengen des \mathbb{R}^n , deren charakteristische Funktion integrierbar ist, und das Maß der Menge eben als besagtes Integral. Dieser Zugang scheint mir recht elegant, da sich das Konzept eines Maßes und eines Maßraums natürlich ergibt und nicht willkürlich vorgegeben werden muß. Ich habe dennoch den maßtheoretischen Zugang vorgezogen, da er mit sehr viel weniger Vorkenntnissen verstanden werden kann und die grundlegenden Resultate direkt in der Allgemeinheit liefert, in der sie auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht werden.

Übungen

Übung 2.5.9. Die Vervollständigung eines Prähilbertraums besitzt genau eine Struktur als Hilbertraum derart, daß die kanonische Einbettung unitär ist. Hinweis: Man dehne zuerst das Skalarprodukt mit einem festen Vektor auf die Vervollständigung aus.

Übung 2.5.10. Gegeben eine dichte Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raums X liefert 2.4.12 eine isometrische Bijektion $\hat{A} \xrightarrow{\sim} X$. Insbesondere erhalten wir so für jede offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ einen Isomorphismus von Hilberträumen $\mathcal{C}_1(\Omega)^\wedge \xrightarrow{\sim} L^2(\Omega)$, wo die Kompletterung des Prähilbertraums $\mathcal{C}_1(\Omega)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ bezüglich der L^2 -Norm $\|f\|_2 := (\int |f|^2)^{1/2}$ gemeint ist.

Übung 2.5.11. Gegeben eine Familie von Hilberträumen $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ erklären wir auf der direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ der zugrundeliegenden Vektorräume ein Skalarprodukt durch die Vorschrift $\langle (v_i), (w_i) \rangle := \sum_{i \in I} \langle v_i, w_i \rangle$. Die Vervollständigung dieses Prähilbertraums im Sinne von 2.5.9 heißt die **Hilbertsumme** unserer Hilberträume und wird

$$\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$$

notiert. Man zeige, daß sich die Hilbertsumme auch beschreiben läßt als der Teilraum ihres Produkts aller Tupel (v_i) mit der Eigenschaft $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$, mit dem Skalarprodukt $\langle (v_i), (w_i) \rangle := \sum_{i \in I} \langle v_i, w_i \rangle$. Ist speziell $B_i \subset \mathcal{H}_i$ jeweils eine Hilbertbasis, so ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} \text{in}_i(B_i)$ eine Hilbertbasis unserer Hilbertsumme.

Übung 2.5.12. Man erinnere die Konstruktion $L^2(X, \mathcal{H})$ aus 2.4.20. Gegeben ein σ -endlicher Maßraum und eine abzählbare Familie \mathcal{H}_i von separablen Hilberträumen liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\hat{\bigoplus} L^2(X, \mathcal{H}_i) \xrightarrow{\sim} L^2\left(X, \hat{\bigoplus} \mathcal{H}_i\right)$$

Ergänzende Übung 2.5.13. Gegeben zwei Hilberträume \mathcal{H} und \mathcal{L} definiert man ihr **vervollständigtes Tensorprodukt**

$$\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{L}$$

als die Vervollständigung ihres algebraischen Tensorprodukts mit seiner offensichtlichen Struktur als Prähilbertraum. Man zeige, daß für (v_i) eine Hilbertbasis von \mathcal{H} und (w_j) eine Hilbertbasis von \mathcal{L} die Tensoren $(v_i \otimes w_j)$ eine Hilbertbasis von $\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{L}$ bilden. Gegeben Maßräume (X, μ) und (Y, ν) zeige man allgemeiner: Für das Produktmaß $\mu \boxtimes \nu$ nach 1.7.4 liefert die von $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ mit $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ induzierte Abbildung einen Hilbertraumisomorphismus

$$L^2(X; \mu) \hat{\otimes} L^2(Y; \nu) \xrightarrow{\sim} L^2(X \times Y; \mu \boxtimes \nu)$$

Hinweis: Das Bild ist dicht nach 2.3.16.

2.6 Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen

Satz 2.6.1 (Approximation durch glatte Funktionen). *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und μ ein Borelmaß auf U , so liegen die glatten Funktionen mit kompaktem in U enthaltenen Träger für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p -Funktionen auf U , in Formeln*

$$\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)} = L^p(U; \mu)$$

2.6.2. Diese Aussage ist im Fall $p = \infty$ nicht mehr richtig. So kann man etwa auf \mathbb{R} mit dem Lebesguemaß die konstante Funktion 1 in L^∞ nicht als Grenzwert einer Folge von Funktionen mit kompaktem Träger erhalten.

Beweis. Natürlich ist $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)} \subset L^p(U; \mu)$ ein Untervektorraum. Wir zeigen nun für immer größere Funktionenklassen, daß sie zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$ gehören.

1. Ist $A \subseteq U$ offen von endlichem Maß $\mu(A) < \infty$, so gehört die charakteristische Funktion $[A]$ von A zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$. Das folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz sofort aus Lemma 1.10.4, nach dem eine Folge nichtnegativer glatter Funktionen mit kompaktem, in A enthaltenem Träger monoton gegen die charakteristische Funktion von A konvergiert.

2. Ist $B \subset U$ meßbar von endlichem Maß $\mu(B) < \infty$, so gehört $[B]$ zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$. In der Tat, für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir aufgrund der Regularität unseres Maßes nach 1.9.4 eine offene Teilmenge $A \subseteq U$ mit $B \subset A$ und $\mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon$. Für deren charakteristische Funktion gilt dann $\|[B] - [A]\|_p < \varepsilon^{1/p}$. Also ist $[B]$ Grenzwert einer Folge aus $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$ und gehört mithin selbst zu $\overline{\mathcal{C}_1^\infty(U)}$.

3. Für jeden Maßraum liegen die integrierbaren Stufenfunktionen für alle $p \in [1, \infty)$ dicht im Raum der L^p -Funktionen, siehe 2.3.14. \square

Vorschau 2.6.3. Ist (X, μ) ein abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffraum mit einem Borelmaß, so liegen für $p \in [1, \infty)$ die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht im Raum der L^p -Funktionen. Das zeigen wir hier nicht.

Satz 2.6.4 (Fourierreihen für L^2 -Funktionen). Sei das Intervall $[0, 2\pi]$ mit dem auf Gesamtmaß Eins normierten Lebesgue-Maß $\mu := dt/2\pi$ versehen und \mathbb{Z} mit dem Zählmaß ζ . So liefert die Fourierentwicklung $f \mapsto f^\wedge$ gegeben durch $f^\wedge(n) := \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mu\langle t \rangle$ einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2([0, 2\pi]; \mu) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{Z}; \zeta)$$

Beweis. Wir müssen nach 2.4.10 nur zeigen, daß die Funktionen $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ im Sinne von 2.4.5 eine Hilbertbasis von $L^2([0, 2\pi]; \mu)$ bilden. Wir haben schon im Beweis von [AN1] 10.1.3 gesehen, daß sie ein Orthonormalsystem bilden. Aus [AN1] 10.2.16 wissen wir weiter, daß sich jede stetige Funktion der Periode 2π beliebig gut gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren läßt. Da hinwiederum die stetigen, ja sogar die glatten Funktionen auf $[0, 2\pi]$ mit Träger im offenen Intervall $(0, 2\pi)$ nach 2.6.1 ihrerseits dicht in L^2 liegen, liegen auch die trigonometrischen Polynome dicht in L^2 . \square

Übungen

Übung 2.6.5 (Fourierreihen in mehreren Veränderlichen). Man zeige, daß die Funktionen $x \mapsto e^{2\pi i x \cdot \xi}$ für $\xi \in \mathbb{Z}^n$ eine Hilbertbasis des Raums $L^2([0, 1]^n; \lambda)$ der in Bezug auf das Lebesgue-Maß quadratintegrierbaren Funktionen auf dem n -dimensionalen Einheitswürfel bilden.

Übung 2.6.6. Gegeben $y \in \mathbb{R}^n$ und $p \in [1, \infty)$ bezeichne $\tau_y : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ die Verschiebung, in Formeln $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$. Man zeige die Stetigkeit der Abbildung $\mathbb{R}^n \times L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, $(y, f) \mapsto \tau_y f$. Hinweis: Man zeige zunächst die Stetigkeit von $y \mapsto \tau_y f$ für $f \in C_1(\mathbb{R}^n)$. Der Buchstabe τ steht für das Wort „Translation“.

Ergänzende Übung 2.6.7. Hier dürfen Sie zeigen, daß für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ meßbar von positivem Maß die Menge $A + B$ eine nichtleere offene Teilmenge umfaßt. Man folgere zunächst aus 2.6.6, daß für alle $g \in L^1(\mathbb{R}^n; \lambda)$ die Funktion $y \mapsto \int f(y - x)[B](x) \lambda\langle x \rangle$ stetig sein muß. Dann beachte man, daß diese Funktion im Fall $f = [A]$ mit A meßbar von positivem endlichen Maß nichtnegativ ist und positives Integral hat. Man folgere, daß jede meßbare echte Untergruppe von \mathbb{R}^n Maß Null haben muß. Man folgere, daß jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ konstant sein muß.

Ergänzende Übung 2.6.8. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und μ darauf ein Borelmaß, so gibt es für jede beschränkte meßbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine

Folge f_n in $C_1^\infty(U)$ mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ für alle n und $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für fast alle $x \in U$. Hinweis: Da unser Maß notwendig σ -endlich ist, findet man ein endliches Maß mit denselben Nullmengen, für das dann f integrierbar ist. Nun verwende man [2.3.11](#).

2.7 Fourierreihen und Charaktere

2.7.1. Seine natürlichste Form erhält unser Satz über Fourierreihen, wenn man das Intervall $[0, 2\pi]$ zur Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ zusammenbiegt. Das soll im folgenden ausgeführt werden.

Definition 2.7.2. Eine **topologisches Monoid** ist ein Monoid G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ stetig ist für die **Produkttopologie** auf $G \times G$. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ und die Inversenabbildung $G \rightarrow G$ stetig sind. Eine Hausdorffsche topologische Gruppe nenne ich auch eine **Hausdorffgruppe**.

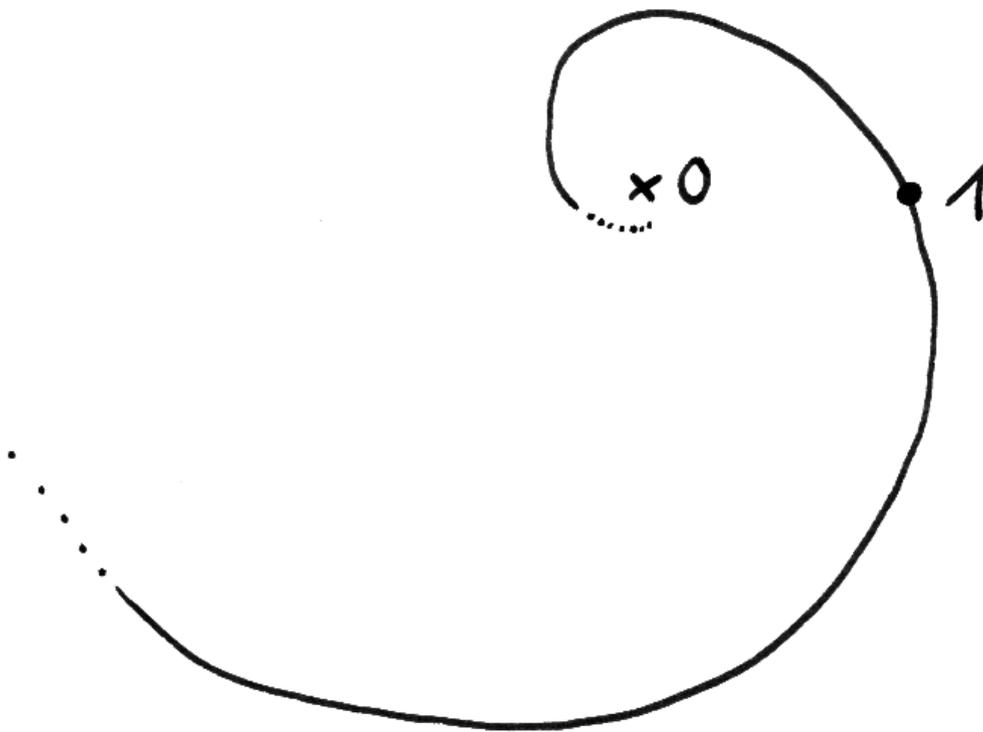
2.7.3. Die topologischen Gruppen bilden mit stetigen Gruppenhomomorphismen als Morphismen eine Kategorie, die ich GrpTop notiere. Gegeben topologische Gruppen G, H bezeichnet insbesondere $\text{GrpTop}(G, H)$ die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von G nach H .

Beispiele 2.7.4. Die additive Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist eine topologische Gruppe. Die additive Gruppe jedes normierten reellen Vektorraums ist eine topologische Gruppe. Die multiplikative Gruppe \mathbb{C}^\times des Körpers der komplexen Zahlen ist eine topologische Gruppe. Die Gruppe S^1 aller komplexen Zahlen der Norm Eins ist mit der von \mathbb{C} induzierten Topologie eine topologische Gruppe, die **Kreisgruppe**. Jede Gruppe ist mit der diskreten Topologie eine topologische Gruppe. In der Zahlentheorie sind auch die topologischen Gruppen der sogenannten „ p -adischen Zahlen“ und „Adele“ von großer Bedeutung.

Definition 2.7.5. Gegeben eine topologische Gruppe G nennen wir die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ nach G alias die Elemente von $\text{GrpTop}(\mathbb{R}, G)$ die **Gruppenwege in G** .

2.7.6 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere Gruppenwege heißen in der Literatur meist **Einparameteruntergruppen**. Diese Terminologie schien mir aber ungeschickt, da es sich dabei ja nicht um Untergruppen, sondern vielmehr um Wege in einer Gruppe handelt.

Satz 2.7.7 (Gruppenwege in \mathbb{C}^\times). Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ hat die Gestalt $\varphi(t) = \exp(at)$ für genau ein $a \in \mathbb{C}$.



Das Bild eines stetigen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ hat im allgemeinen die Gestalt einer Spirale. Sie wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen, aber der Radius hängt exponentiell von der Zeit ab.

Vorschau 2.7.8. Allgemeinere Aussagen dieser Art können Sie zum Beispiel in [ML] 1.4.1 oder 4.1.18 kennenlernen.

Beweis. Die Eindeutigkeit von a folgt aus $\varphi'(0) = a$. Nur die Existenz von a ist also noch zu zeigen. Die offene Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ hat die Eigenschaft, daß es für jedes $z \in H$ genau ein $w \in H$ gibt mit $w^2 = z$. Gegeben ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ finden wir nun sicher erst ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset W$ und dann ein $b \in U$ mit $\varphi(\varepsilon) = \exp(b)$. Es folgt

$$\varphi(\varepsilon/2) = \sqrt{\exp(b)} = \exp(b/2)$$

und induktiv $\varphi(\varepsilon/2^n) = \exp(b/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann sogar $\varphi(m\varepsilon/2^n) = \exp(mb/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $a = b/\varepsilon$, so gilt mithin $\varphi(t) = \exp(at)$ für alle reellen Zahlen t der Gestalt $t = m\varepsilon/2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Da beide Seiten stetig sind, gilt das dann auch für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

Definition 2.7.9. Die stetigen Gruppenhomomorphismen von einer topologischen Gruppe G in die Kreisgruppe heißen ganz allgemein die **Charaktere** oder genauer die **unitären multiplikativen Charaktere von G** .

2.7.10. Sei G eine topologische Gruppe. Die Menge der Charaktere von G bildet mit der Verknüpfung $(\chi + \psi)(g) := \chi(g)\psi(g)$ eine abelsche Gruppe

$$\hat{G} = \mathfrak{X}(G) := \operatorname{GrpTop}(G, S^1)$$

Diese Gruppe heißt die **Charaktergruppe von G** . Ihre Verknüpfung notiert man additiv, wenn man sich die Charaktere als Elemente einer abstrakten abelschen Gruppe denkt, und multiplikativ, wenn man sie sich als konkrete Funktionen denkt. Für jeden unitären Charakter χ ist sein Negatives alias Inverses in der Charaktergruppe der komplex konjugierte Charakter $\bar{\chi}$, denn für jede komplexe Zahl z vom Betrag Eins gilt $z\bar{z} = 1$.

Beispiel 2.7.11 (Charaktere der Zahlengeraden). Unser Satz 2.7.7 über die Gruppenwege in \mathbb{C}^\times beschreibt auch die Charaktere der additiven Gruppe \mathbb{R} . Genauer erhalten wir durch die Abbildungsvorschrift $y \mapsto (x \mapsto e^{ixy})$ einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

Dies Beispiel wird bei der Fouriertransformation wichtig werden.

Beispiel 2.7.12 (Charaktere zyklischer Gruppen). Das Auswerten eines Charakters auf der Eins liefert nach der universellen Eigenschaft [GR] 3.3.29 von \mathbb{Z} einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} S^1$$

Gegeben $m \in \mathbb{N}$ liefert das Auswerten eines Charakters auf der Nebenklasse der Eins nach der universellen Eigenschaft [LA2] 4.2.1 des Quotienten weiter einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mu_m := \{\zeta \in S^1 \mid \zeta^m = 1\}$$

der Charaktergruppe von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit der Gruppe μ_m der m -ten Einheitswurzeln. Wir können das Auswerten auch als Paarung $\mu_m \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow S^1$, $(\zeta, n) \mapsto \zeta^n$ lesen. Diese Paarung liefert dann auch umgekehrt einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mu_m)$$

Lemma 2.7.13 (Charaktere der Kreisgruppe). *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ ist von der Form $\chi = \chi_n : z \mapsto z^n$ für genau ein $n \in \mathbb{Z}$ und die Abbildung $n \mapsto \chi_n$ ist ein Gruppenisomorphismus*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(S^1)$$

Beweis. Das einzige Problem ist nachzuweisen, daß es außer den χ_n keine weiteren stetigen Gruppenhomomorphismen $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ gibt. Ist aber χ solch ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\varphi : t \mapsto \chi(\exp(it))$ ein Gruppenweg in \mathbb{C}^\times . Nach 2.7.7 gibt es folglich $a \in \mathbb{C}$ mit $\chi(\exp(it)) = \exp(at)$. Wegen $\chi(1) = 1$ folgt erst $\exp(2\pi a) = 1$ und dann $2\pi a \in 2\pi i\mathbb{Z}$ und so $a = in$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und dann schließlich $\chi(\exp(it)) = (\exp(it))^n$ alias $\chi = \chi_n$. \square

Zweiter Beweis. Die Algebra zeigt, daß das Auswerten an der Restklasse von 1 für jede Gruppe G eine Bijektion $\text{Grp}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} \{g \in G \mid g^n = e\}$ liefert. Jeder Gruppenhomomorphismus $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ induziert nun auf den 2^s -ten Einheitswurzeln einen Gruppenhomomorphismus, der nach dem Vorhergehenden die Gestalt $\chi(z) = z^{n(s)}$ haben muß. Hier wird $n(s)$ durch die zusätzlichen Bedingung $-2^{s-1} < n(s) \leq 2^{s-1}$ eindeutig festgelegt. Ist χ stetig, so liegt für hinreichend großes s das Bild von $\exp(2\pi i/2^s)$ in der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil, und dann gilt sogar $-2^{s-2} < n(s) \leq 2^{s-2}$. Dann zeigt aber die Rückwärtskompatibilität $n(s) \equiv n(s+1) \pmod{2^s}$, daß unsere Folge stagnieren muß, und ein Dichtheitsargument beendet den Beweis. \square

Definition 2.7.14. Unter einer **Fourier-Gruppe** verstehen wir eine topologische Gruppe, die isomorph ist zum Produkt einer endlich erzeugten diskreten abelschen Gruppe mit endlich vielen Kopien der Kreisgruppe und endlich vielen Kopien der additiven Gruppe \mathbb{R} .

2.7.15 (Diskussion der Terminologie). Die Terminologie „Fouriergruppe“ ist nicht gebräuchlich. Für diese topologischen Gruppen läßt sich jedoch die Theorie

der allgemeinen Fouriertransformation sehr viel leichter entwickeln als für allgemeine abelsche lokal kompakte Hausdorffgruppen. Deshalb wollte ich mich hier auf diesen Fall beschränken, und dafür brauchte er einen griffigen Namen. In der üblichen Terminologie, wie sie in [ML] 3.2.16 eingeführt wird, sind unsere Fouriergruppen genau die „abelschen Liegruppen mit endlich erzeugter Komponentengruppe“, vergleiche [ML] 4.6.20 und [ML] 4.6.2.

Beispiel 2.7.16. Die multiplikativen Gruppen \mathbb{C}^\times und \mathbb{R}^\times sind Fouriergruppen. Jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum ist eine Fouriergruppe.

Definition 2.7.17. Ein **Haar-Maß** auf einer Fouriergruppe G ist ein von Null verschiedenes Borelmaß μ mit $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$.

Beispiele 2.7.18. Ein erstes Beispiel für ein Haarmaß ist das Lebesgue-Maß, vielleicht sogar noch davor kommt das Zählmaß auf einer beliebigen diskreten Gruppe, bald danach das Haarmaß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, das man durch Wahl eines Isomorphismus mit einem \mathbb{R}^n konstruiert.

Vorschau 2.7.19. Allgemeiner betrachtet man „Haar-maße“ auf beliebigen lokal kompakten Hausdorffgruppen G und versteht darunter von Null verschiedene reguläre Borel-maße μ mit $\mu(gA) = \mu(A)$ für jede Borelmenge $A \subset G$ und alle $g \in G$. Die Regularität mußten wir im Fall von Fouriergruppen in unserer Definition nicht extra fordern, da sie in diesem Fall bereits aus Satz 1.9.4 über die Regularität von Borel-maßen folgt. Für Matrix-Liegruppen diskutieren wir Haar-maße in [ML] 2.4.3, für allgemeine Liegruppen in ??, in der Allgemeinheit abzählbar basierter lokal kompakter Hausdorffgruppen in [ML] ??, und in der Allgemeinheit beliebiger lokal kompakter Hausdorffgruppen als Radon-maße in [ML] ??.

Satz 2.7.20 (Haar-maße auf Fouriergruppen, Existenz und Eindeutigkeit). *Auf jeder Fouriergruppe existiert ein Haar-maß und je zwei Haar-maße unterscheiden sich höchstens um eine positive multiplikative Konstante.*

Beweis. Im Fall $G = \mathbb{R}$ hatten wir das Lebesguemaß bereits dadurch definiert, daß es das einzige Haar-maß ist, das dem Einheitsintervall den Wert Eins zuordnet. In diesem Fall zeigt also der Beweis der Existenz des Lebesguemaßes auch unseren Satz. Den Fall der Kreisgruppe kann der Leser leicht ableiten. Im Fall einer endlich erzeugten abelschen Gruppe sind offensichtlich das Zählmaß und seine Vielfachen die einzigen Haar-maße. Im allgemeinen können wir die Existenz eines Haar-maßes zeigen, indem wir Produkte dieser Haar-maße bilden. Für die Eindeutigkeit reicht es zu zeigen, daß gegeben zwei Fouriergruppen G, H mit einem jeweils bis auf eine positive multiplikative Konstante eindeutigen Haar-maß jedes Haar-maß ν auf dem Produkt das Produkt-maß zu Haar-maßen auf den Faktoren ist.

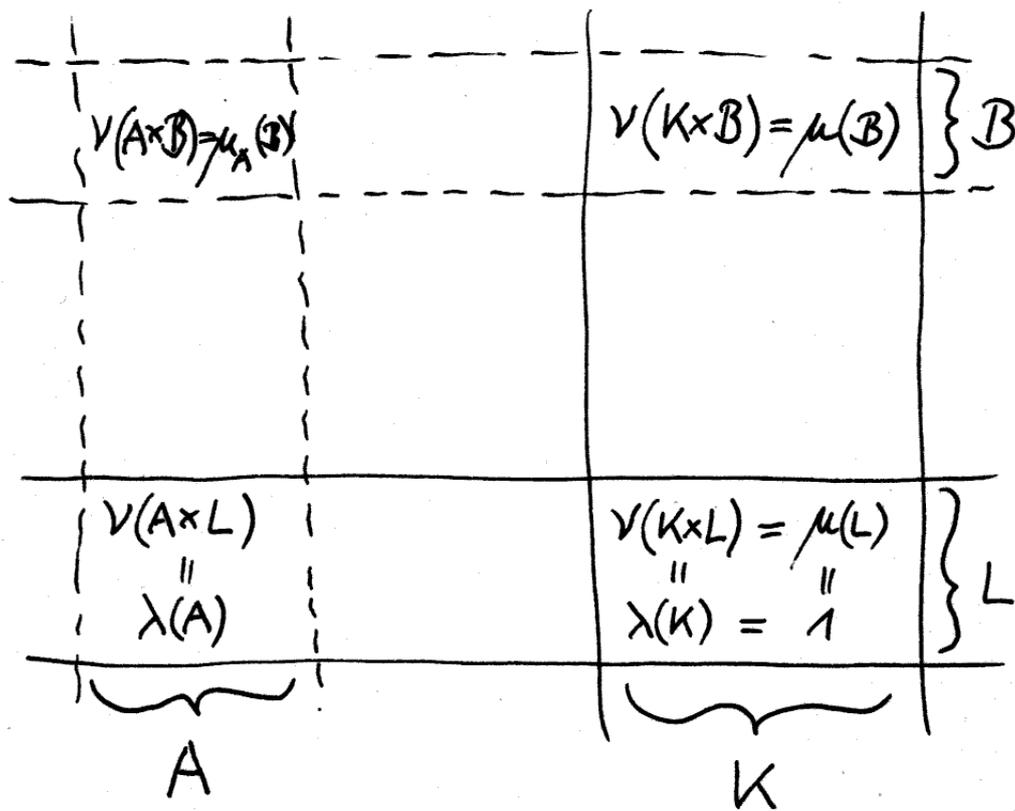


Illustration zum Beweis der Eindeutigkeit von Haarmaßen für Fouriergruppen.

Sicher gibt es in $G \times H$ ein Kompaktum von positivem Maß. Dessen Projektionen sind dann Kompakta $K \subset G$ und $L \subset H$ mit $\nu(K \times L) > 0$. Durch Multiplikation mit einer Konstante dürfen wir sogar $\nu(K \times L) = 1$ annehmen. Dann erhalten wir offensichtlich ein Haarmaß λ auf G durch die Vorschrift $\lambda(A) := \nu(A \times L)$ und ein Haarmaß μ auf H durch die Vorschrift $\mu(B) := \nu(K \times B)$. Ist A enthalten in einem Kompaktum, so liefert weiter die Vorschrift $\mu_A(B) := \nu(A \times B)$ ein Haarmaß oder das Nullmaß auf H . Also gibt es nach Annahme eine nur von A abhängende Konstante $c_A \geq 0$ mit $\mu_A(B) = c_A \mu(B)$ und durch Einsetzen von $B = L$ ergibt sich

$$\lambda(A) = \nu(A \times L) = \mu_A(L) = c_A \mu(L) = c_A$$

Das zeigt für alle meßbaren Mengen $A \subset G$ und $B \subset H$ mit A enthalten in einem Kompaktum die Identität

$$\nu(A \times B) = \mu_A(B) = c_A \mu(B) = \lambda(A) \mu(B)$$

Da aber jede Fouriergruppe als abzählbare Vereinigung von Kompakta geschrieben werden kann, folgt das für beliebige meßbare Mengen A, B , und dann folgt mit dem Satz von Caratheodory $\nu = \lambda \boxtimes \mu$. \square

Definition 2.7.21. Ein Haarmaß heißt **normiert**, wenn es der ganzen Gruppe das Maß Eins zuordnet.

Satz 2.7.22 (Fourierreihen und Charaktere). *Jede kompakte Fouriergruppe K besitzt genau ein normiertes Haarmaß μ und ihre Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums $L^2(K; \mu)$ der für das normierte Haarmaß μ quadratintegrierbaren Funktionen auf K .*

Vorschau 2.7.23. Der Satz gilt allgemeiner für jede abelsche kompakte Hausdorffgruppe. Für den Beweis dieses Satzes in dieser Allgemeinheit verweise ich auf [\[ML\] ??](#).

Beispiel 2.7.24 (Der Fall einer Kreisgruppe). Im Fall der Kreisgruppe liefert die Abbildung $E : t \mapsto \exp(it)$ einen Isomorphismus $([0, 2\pi], dt/2\pi) \xrightarrow{\sim} (S^1, \mu)$ von Maßräumen und folglich einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2([0, 2\pi]; dt/2\pi) \xrightarrow{\sim} L^2(S^1; \mu)$$

Die Charaktere $\chi_n : z \mapsto z^n$ bilden also genau dann eine Hilbertbasis von $L^2(S^1; \mu)$, wenn die Funktionen $\chi_n \circ E : t \mapsto \exp(int)$ eine Hilbertbasis von $L^2([0, 2\pi]; dt/2\pi)$ oder gleichbedeutend von $L^2([0, 2\pi]; dt/2\pi)$ bilden. So sehen wir, daß unser Satz [2.7.22](#) in diesem Fall nur eine Umformulierung des Satzes [2.6.4](#) über die Fourierreihe ist.

Beispiel 2.7.25 (Der Fall einer endlichen Gruppe). Unser Satz ist bereits im Fall einer endlichen Gruppe durchaus relevant, wenn er auch in diesem Fall besser in eine Algebra-Vorlesung paßt. Im Spezialfall einer zyklischen Gruppe von Einheitswurzeln $\mu_m := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^m = 1\} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ etwa sind die Charaktere genau alle Abbildungen $\chi_n : \zeta \mapsto \zeta^n$ für $n = 0, 1, \dots, m-1$ und der in unserem Satz versteckte Hilbertraumisomorphismus

$$L^2(\hat{K}; \zeta) \xrightarrow{\sim} L^2(K; \mu)$$

heißt die **diskrete Fouriertransformation**. Die diskrete Fouriertransformation ist für konkrete Anwendungen von besonderer Bedeutung, da in der Praxis ja stets nur endlich viele Messungen durchgeführt werden können.

Vorschau 2.7.26. In der Algebra werden wir dieses Beispiel in [NAS] 1.3.12 auf den Fall allgemeinerer Grundkörper verallgemeinern und in [NAS] 2.8.7 auf den Fall endlicher nicht notwendig kommutativer Gruppen. In ?? schließlich führen wir im Fall komplexer Koeffizienten diese Verallgemeinerungen in verschiedene Richtungen wieder zusammen unter dem Dach einer „Fouriertransformation für kompakte Liegruppen“, die übrigens mutatis mutandis auch noch allgemeiner für beliebige kompakte Hausdorffgruppen gilt.

Beweis des Satzes über Fourierreihen und Charaktere. Die Existenz und Eindeutigkeit normierter Haarmaße für kompakte Fouriergruppen folgt unmittelbar aus Satz 2.7.20 zur Existenz und Eindeutigkeit von Haarmaßen auf beliebigen Fouriergruppen. Gegeben ein Haarmaß μ gilt für jedes Element $g \in K$ per definitionem $(g \cdot)_* \mu = \mu$. Gegeben ein Charakter $\chi : K \rightarrow S^1$ gilt damit

$$\int \chi \mu = \int \chi (g \cdot)_* \mu = \int (\chi \circ (g \cdot)) \mu = \int \chi(g) \chi \mu = \chi(g) \int \chi \mu$$

Ist insbesondere χ ein nichttrivialer Charakter von K , gibt es in anderen Worten $g \in K$ mit $\chi(g) \neq 1$, so folgt $\int \chi \mu = 0$. Gegeben zwei Charaktere χ, ψ gilt in $L^2(K; \mu)$ also

$$\langle \chi, \psi \rangle = \int \bar{\chi} \psi \mu = \delta_{\chi, \psi}$$

Damit haben wir gesehen, daß die Charaktere ein Orthonormalsystem bilden. Es bleibt zu zeigen, daß es vollständig ist. Wir wissen das bereits für K endlich zyklisch durch Dimensionsvergleich und für K die Kreisgruppe aus der Theorie der Fourierreihen. Im allgemeinen folgt es dann aus 2.3.16. \square

Übungen

Übung 2.7.27. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $(S^1)^m \rightarrow (S^1)^n$ und der Menge $\text{Mat}(n \times m; \mathbb{Z})$ aller $(n \times m)$ -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Hinweis: 2.7.13.

Ergänzende Übung 2.7.28. Gegeben $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \{0, 1\}$ betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\rho_{\lambda, \varepsilon} : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\rho_{\lambda, \varepsilon}(x) = |x|^\lambda (\operatorname{sgn}(x))^\varepsilon$. Man zeige, daß wir so genau alle stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ erhalten. Hinweis: Man beachte $\mathbb{R} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0} \times \{1, -1\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\times$ mittels $(\exp \times \operatorname{id})$ bzw. der Multiplikation und wende 2.7.7 an.

Übung 2.7.29 (Charaktere von Produkten). Gegeben topologische Gruppen G, H zeige man, daß die durch $\chi \mapsto (\chi \circ i, \chi \circ j)$ gegebene Abbildung ein Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

ist, mit $i : G \hookrightarrow G \times H, g \mapsto (g, 1)$ und $j : H \hookrightarrow G \times H, h \mapsto (1, h)$.

Übung 2.7.30 (Meßbare Gruppenhomomorphismen von Fouriergruppen). Man zeige, daß jeder meßbare Gruppenhomomorphismus von Fouriergruppen stetig ist. Hier darf meßbar sogar in Bezug auf die Vervollständigung der Borel'schen σ -Algebra nach dem Haar-Maß verstanden werden. Hinweis: Man zeigt wie in 2.6.6 für jede Fouriergruppe G , daß die Abbildung $G \times L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ gegeben durch $(w, f) \mapsto (f \circ (w \cdot))$ stetig ist. Man folgere, daß für kompaktes G jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow S^1$ stetig ist. Wie in 2.6.7 zeigt man, daß für jede Fouriergruppe G jeder meßbare Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \Gamma$ in eine diskrete Fouriergruppe stetig ist. Damit kann man sich dann durchtricksen.

2.8 Orthogonale Projektionen in Hilberträumen

2.8.1. Wir holen den Beweis nach für unsere Behauptung, daß jeder Hilbertraum eine Hilbertbasis besitzt. Dem liegt der folgende allgemeine Satz zugrunde.

Satz 2.8.2 (Hilbertraumkomplemente). *Für jede Teilmenge U eines Hilbertraums \mathcal{H} ist der Orthogonalraum $U^\perp := \{v \in \mathcal{H} \mid \langle u, v \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$ ein abgeschlossener Teilraum. Ist U bereits selbst ein abgeschlossener Teilraum, so definiert die Addition eine Bijektion*

$$U \times U^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$$

Satz 2.8.3 (Prähilbertraumkomplemente). *Für jeden vollständigen Teilraum U eines Prähilbertraums \mathcal{H} ist der Orthogonalraum U^\perp ein abgeschlossener Teilraum und die Addition liefert eine Bijektion*

$$U \times U^\perp \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$$

2.8.4. Im Fall eines Hilbertraums sind nach [AN1] 9.2.16 und [AN1] 9.2.2 die vollständigen Teilräume genau die abgeschlossenen Teilräume, der zweite Satz ist also stärker. Wir zeigen gleich den zweiten Satz.

Beweis. Sicher ist für alle $x \in \mathcal{H}$ die Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, v \mapsto \langle x, v \rangle$ stetig und linear. Das Urbild x^\perp von $0 \in \mathbb{C}$ unter dieser Abbildung ist also ein abgeschlossener Untervektorraum von \mathcal{H} , und dann muß auch für beliebiges $U \subset \mathcal{H}$ die Menge

$$U^\perp = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall x \in U\} = \bigcap_{x \in U} x^\perp$$

ein abgeschlossener Untervektorraum von \mathcal{H} sein. Offensichtlich gilt zusätzlich $U \cap U^\perp = 0$, damit ist unsere Additionsabbildung injektiv. Um für U einen vollständigen Teilraum ihre Surjektivität zu zeigen, wählen wir ein $v \in \mathcal{H}$ und setzen $d = d(v, U) := \inf_{u \in U} \|v - u\|$. Sicher gibt es eine Folge u_n von Vektoren aus U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - u_n\| = d$. Wir erinnern nun die Parallelogrammregel [LA2] 1.1.34, nach der die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms gleich ist zur Summe der Quadrate der beiden Diagonalen. Ist also eine Diagonale fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein. In Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 &= \|u_n - u_m\|^2 + \|2v - u_n - u_m\|^2 \\ &= \|u_n - u_m\|^2 + 4\|v - (u_n + u_m)/2\|^2 \end{aligned}$$

Da aber $(u_n + u_m)/2$ auch in U liegt, folgt

$$2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4d^2 \geq \|u_n - u_m\|^2$$

Aus dieser Abschätzung erkennt man, daß die u_n eine Cauchyfolge bilden. Da U vollständig ist, gibt es $u \in \mathcal{H}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Da die Norm stetig ist, gilt weiter $d = \|v - u\|$. Wir behaupten $(v - u) \in U^\perp$. In der Tat, für alle $h \in U$ nimmt die Funktion

$$t \mapsto \|v - u + th\|^2 = \|v - u\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle v - u, h \rangle + t^2 \|h\|^2$$

bei $t = 0$ ein Minimum an, folglich verschwindet dort ihre Ableitung, und wir erhalten $\operatorname{Re}\langle v - u, h \rangle = 0$ für alle $h \in U$. Damit haben wir die gesuchte Zerlegung $v = u + (v - u)$ mit $u \in U$ und $(v - u) \in U^\perp$ gefunden. \square

Korollar 2.8.5 (Riesz'scher Darstellungssatz für Hilberträume). *Jede stetige Linearform auf einem Hilbertraum kann beschrieben werden als das Bilden des Skalarprodukts mit einem durch die besagte Linearform eindeutig bestimmten Vektor.*

Beweis. Sei \mathcal{H} unser Hilbertraum und $l : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ unsere Linearform. Der Kern $\ker l \subset \mathcal{H}$ ist ein abgeschlossener Teilraum und die Linearform l induziert eine Injektion $(\ker l)^\perp \hookrightarrow \mathbb{C}$. Im Fall $l = 0$ ist $x = 0$ das gesuchte Element von \mathcal{H} . Sonst finden wir genau ein $x \in (\ker l)^\perp \cong \mathbb{C}$ mit $\langle x, v \rangle = l(v) \quad \forall v \in (\ker l)^\perp$, und da diese Gleichung eh gilt für alle $v \in \ker l$, folgt sie für alle $v \in \mathcal{H}$. \square

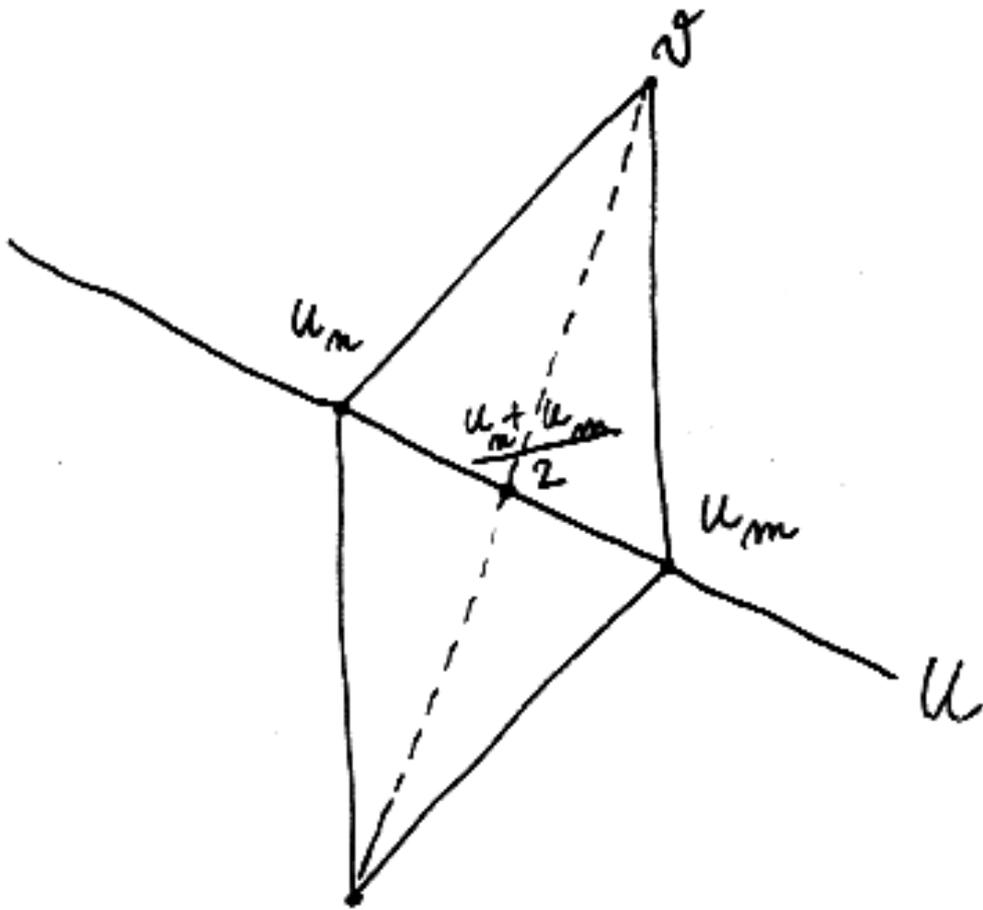


Illustration zum Beweis des Satzes über das orthogonale Komplement: Ist in einem Parallelogramm eine Diagonale, hier etwa die gestrichelt eingezeichnete, fast so lang wie der halbe Umfang, so muß die andere Diagonale sehr kurz sein.

Definition 2.8.6. Sei $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ eine lineare Abbildung von Hilberträumen und $B : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung in die Gegenrichtung. Die beiden Abbildungen A und B heißen **adjungiert**, wenn gilt

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}, w \in \mathcal{H}'$$

2.8.7. Wir werden in 4.2.1 zeigen, daß eine lineare Abbildung zwischen Hilberträumen genau dann stetig ist, wenn sie eine adjungierte Abbildung besitzt. In der folgenden Übung sollen Sie von dieser Aussage die einfache Richtung zeigen.

Korollar 2.8.8. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Hilbertbasis.*

Beweis. Nach dem Zorn'schen Lemma finden wir ein bezüglich Inklusion maximales Orthonormalsystem. Wäre der Abschluß seines Erzeugnisses nicht der ganze Raum, so könnten wir unser Orthonormalsystem nach 2.8.2 doch noch vergrößern durch Hinzunahme eines Vektors der Länge Eins aus seinem orthogonalen Komplement, im Widerspruch zur Maximalität. \square

2.8.9. Damit ist insbesondere gezeigt, daß sich jeder Hilbertraum schreiben läßt als ein Raum von quadratintegrierbaren Funktionen, und das sogar auf einer Menge mit Zählmaß.

Ergänzung 2.8.10 (Keele-Vermutung). Gegeben eine abgeschlossene beschränkte nichtleere Teilmenge eines Hilbertraums wird vermutet, daß es zu jedem Punkt unseres Hilbertraums nur einen nächsten Punkt in unserer Teilmenge gibt genau dann, wenn unsere Teilmenge konvex ist. Das ist derzeit (2004) meines Wissens nur für endlichdimensionale Räume bewiesen.

Beispiel 2.8.11. Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum muß keine abzählbare Hilbertbasis besitzen. Um ein Beispiel dafür anzugeben, muß ich jedoch mehr Wissen voraussetzen. Betrachten wir den Raum $X = \text{Ens}(I, \{1, -1\})$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge I in die zweielementige Menge $\{1, -1\}$. Mit der Produkttopologie zur diskreten Topologie auf $\{1, -1\}$ ist X kompakt nach dem Satz von Tychonov [ML] ?? . Jetzt liefert eine analoge Argumentation wie in 1.2.38 ein wohlbestimmtes Borelmaß auf X , das jedem Urbild eines Punktes unter der Projektion auf einen der Faktoren das Maß $1/2$ zuordnet. Die Projektionen auf die Faktoren bilden dann ein Orthonormalsystem in $L^2(X)$.

Übungen

Übung 2.8.12. Jede stetige lineare Abbildung von Hilberträumen hat genau eine adjungierte Abbildung, und diese ist auch stetig. Man notiert die adjungierte Abbildung zu A in der mathematischen Literatur meist A^* , in der physikalischen Literatur dahingegen meist A^\dagger . Man zeige nun weiter $(A^*)^* = A$ und

$(AB)^* = B^*A^*$ und $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\|A\| = \|A^*\|$ sowie $\|A^*A\| = \|A\|^2$ für die Operatornorm. Hinweis: Zuerst mag der Riesz'sche Darstellungssatz helfen, angewandt auf $v \mapsto \langle Av, w \rangle$ für festes w , dann die Erkenntnis $\|A\| = \sup\{\langle Av, v' \rangle \mid \|v\| = \|v'\| = 1\}$ im Fall, daß keiner unserer beiden Räume der Nullraum ist.

Übung 2.8.13. Die orthogonalen Projektionen auf abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraums sind genau die idempotenten selbstadjungierten Operatoren, als da heißt die stetigen linearen Selbstabbildungen P unseres Hilbertraums mit $P^2 = P$ und $P^* = P$.

Übung 2.8.14. Eine stetige lineare Abbildung zwischen Hilberträumen hat dichtes Bild genau dann, wenn die adjungierte Abbildung injektiv ist. Allgemeiner zeige man, daß das orthogonale Komplement des Bildes der Kern der adjungierten Abbildung ist.

Übung 2.8.15. Es gibt ein elegantes direktes Argument, das für jeden selbstadjungierten Operator T auf einem Hilbertraum die Identität

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| \mid \|x\| \leq 1\}$$

zeigt: Bezeichnet M die rechte Seite, so ist $\|T\| \geq M$ eh klar. Für die andere Ungleichung betrachte man für x von der Länge Eins mit $Tx \neq 0$ sein auf Länge Eins normiertes Bild $y = Tx/\|Tx\|$. Dann gilt $\|Tx\| = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ und man erhält von der Mitte ausgehend

$$4M = M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \geq \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 4\|Tx\|$$

Ergänzende Übung 2.8.16. Man zeige: Gegeben eine stetige beschränkte Abbildung von einem topologischen Raum in einen Hilbertraum $f : X \rightarrow \mathcal{H}$ und ein komplexes Maß $\mu \in M(X)$ gibt es genau einen Vektor $\int f(x) \mu\langle x \rangle$ in \mathcal{H} mit Eigenschaft

$$\left\langle w, \int f(x) \mu\langle x \rangle \right\rangle = \int \langle w, f(x) \rangle \mu\langle x \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Man zeige weiter, daß dieses Integral $\int f(x) \mu\langle x \rangle$ linear ist in f und μ . Hinweis: **2.8.5.**

Übung 2.8.17. Man zeige, daß jeder abgeschlossene Teilraum von $L^2(S^1)$, der unter dem Vorschalten aller Multiplikationen $(z \cdot)$ für $z \in S^1$ stabil ist, der Abschluß des Erzeugnisses der in ihm enthaltenen Charaktere sein muß. Hinweis: Man betrachte die linearen Abbildungen $p_n : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ mit

$$(p_n(f))(w) = \int_{S^1} z^n f(zw) \mu\langle z \rangle$$

und überlege sich etwa mit **2.8.16**, daß sie auch unsere abgeschlossenen Teilräume von oben in sich überführen müssen.

Übung 2.8.18. Man zeige: Genau dann besitzt ein Hilbertraum eine abzählbare dichte Teilmenge, wenn er eine abzählbare Hilbertbasis besitzt.

3 Fouriertransformation

3.1 Definition und erste Eigenschaften

3.1.1 (**Motivation**). Ich will am akustischen Beispiel ausführen, welche konkreten Inhalte man mit der Fouriertransformation verbinden mag. In diesem Beispiel bedeutet diese Transformation, ein zeitabhängiges Signal nach seinen Frequenzanteilen zu zerlegen und in der umgekehrten Richtung eine Vorgabe von Frequenzanteilen mit ihren jeweiligen Stärken zu einem zeitabhängigen Signal zusammenzufassen. Letztere Operation leistet etwa ein Klavier und Erstere unser Ohr, so daß man fast Lust hätte, statt von Fouriertransformationen und ihren Inversen von „Klaviertransformationen“ und „Hörtransformationen“ zu reden. Mich verblüfft immer wieder, daß diese Transformationen beide im Wesentlichen durch dieselbe mathematische Formel beschrieben werden. Aber genug geredet, her mit den Formeln!

Definition 3.1.2. Gegeben eine integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ erklären wir ihre **Fouriertransformierte** als die Funktion $f^\wedge : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$f^\wedge(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} d^n x$$

Hier bezeichnet $x \cdot y \in \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt der Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wenn ich auf der in diese Formeln eingearbeiteten Standardisierung bestehen will, rede ich von der **physikalisch standardisierten Fouriertransformierten**. Offensichtlich liefert die Abbildungsvorschrift $f \mapsto f^\wedge$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ von zumindest im Fall $n \geq 1$ unendlichdimensionalen komplexen Vektorräumen, die **Fouriertransformation** oder genauer **Fouriertransformation auf integrierbaren Funktionen**.

3.1.3. Natürlich kann man die Fouriertransformierte auch berechnen, wenn man eine integrierbare Funktion nur fast überall kennt. In diesem Sinne ist die Fouriertransformation also eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

Das Vorzeichen im Exponenten kommt her vom Vorzeichen aus unserer Formel für die Koeffizienten der Fourierreihe am Ende des Beweises von [AN1] 10.1.3 und verbessert die Verträglichkeit beider Formalismen. Es gibt noch verschiedene andere gängige Standardisierungen. Für das Lösen von Differentialgleichungen besonders beliebt ist die Variante $f^\wedge(y) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} d^n x$. Ich nenne sie die **mathematisch standardisierte Fouriertransformation**. In der Stochastik arbeitet man meist mit der Variante $f^\wedge(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix \cdot y} d^n x$. Ich nenne

sie die **stochastisch standardisierte Fouriertransformation**, ohne implizieren zu wollen, daß die Stochastik kein Teil der Mathematik sei. Normalisierungsfragen werden wir später noch ausführlicher besprechen. In jeder unserer Normalisierungen werden wieder andere Formeln besonders einfach. Ich ziehe die physikalische Standardisierung vor, weil sie meiner Vorstellung am besten angepaßt ist. Wenn nichts anderes gesagt ist, ist im folgenden stets die physikalische Standardisierung gemeint.

Beispiel 3.1.4. Wir berechnen die Fouriertransformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{-|x|}$ und erhalten

$$\begin{aligned} f^\wedge(y) &= \int e^{-|x|} e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(2\pi i y + 1)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-(2\pi i y - 1)x} dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i y + 1} - \frac{1}{2\pi i y - 1} \right) \\ &= \frac{2}{4\pi^2 y^2 + 1} \end{aligned}$$

Satz 3.1.5 (Formeln für die Fouriertransformation). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine integrierbare Funktion. So gilt:

1. Die Fouriertransformierte f^\wedge von f ist stetig und beschränkt, genauer gilt $f^\wedge(y) \leq \|f\|_1$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$;
2. Für $g(x) := f(x) e^{2\pi i \alpha \cdot x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ haben wir $g^\wedge(y) = f^\wedge(y - \alpha)$;
3. Für $g(x) := f(x - b)$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ haben wir $g^\wedge(y) = f^\wedge(y) e^{-2\pi i b \cdot y}$;
4. Für $g(x) := \overline{f(x)}$ haben wir $g^\wedge(y) = \overline{f^\wedge(-y)}$;
5. Für $g(x) := f(cx)$ mit $c \in \mathbb{R}^\times$ haben wir $g^\wedge(y) = |c|^{-n} f^\wedge(y/c)$;
6. Ist für ein ν mit $1 \leq \nu \leq n$ die Funktion g mit $g(x) := x_\nu f(x)$ auch integrierbar, so ist f^\wedge partiell differenzierbar nach der ν -ten Variablen und es gilt $g^\wedge(y) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f^\wedge}{\partial y_\nu}(y)$;
7. Ist für ein ν mit $1 \leq \nu \leq n$ die Funktion f stetig partiell differenzierbar nach der ν -ten Variablen und ist $h(x) := \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$ auch integrierbar, so gilt $h^\wedge(y) = 2\pi i y_\nu f^\wedge(y)$.

Vorschau 3.1.6. In 3.1.15 zeigen wir stärker als in Teil 1, daß die Fouriertransformierte f^\wedge einer integrierbaren Funktion f für $\|y\| \rightarrow \infty$ stets gegen Null strebt.

Beweis. Per definitionem ist die Fouriertransformierte von f beschränkt durch $\|f\|_1$. Nach der Charakterisierung der Stetigkeit bei metrischen Räumen als Folgenstetigkeit aus [AN1] 6.3.9 reicht es zum Nachweis der Stetigkeit (1), wenn wir

für jede konvergente Folge $y_r \rightarrow y$ zeigen, daß gilt $f^\wedge(y_r) \rightarrow f^\wedge(y)$. Das folgt jedoch leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz 1.6.9. Die Behauptungen (2) bis (5) ergeben sich durch mühelose Rechnungen. Um (6) zu zeigen, wenden wir unsere Erkenntnisse zum Differenzieren unter dem Integral aus 1.6.15 an. Formal ist das allerdings etwas mühsam, da wir dort noch keine vektorwertigen Funktionen betrachtet hatten und hier zumindest mit komplexwertigen Funktionen arbeiten müssen, so daß es mir das Einfachste scheint, den Beweis nochmal in unserem Fall mit den entsprechenden Variationen auszuführen. Dazu bezeichnen wir mit $e_\nu \in \mathbb{R}^n$ den ν -ten Einheitsvektor und rechnen

$$\frac{f^\wedge(y + t e_\nu) - f^\wedge(y)}{t} = \int f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} \frac{e^{-2\pi i t x_\nu} - 1}{t} d^n x$$

Jetzt beachten wir die Abschätzung $|e^{ita} - 1| \leq |ta|$. Der Integrand ist damit beschränkt durch die integrierbare Funktion $|2\pi x_\nu f(x)|$. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt also für jede Folge t_r aus \mathbb{R}^\times mit $t_r \rightarrow 0$ notwendig

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f^\wedge(y + t_r e_\nu) - f^\wedge(y)}{t_r} = \int f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} (-2\pi i x_\nu) d^n x = -2\pi i g^\wedge(y)$$

Die Behauptung folgt damit aus Übung [AN1] 3.3.26 über den Zusammenhang zwischen Grenzwerten von Funktionen und Folgen. Um (7) zu zeigen beginnen wir mit dem Fall $n = 1$ und rechnen

$$f'^\wedge(y) = \int f'(x) e^{-2\pi i x y} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{a_r}^{b_r} f'(x) e^{-2\pi i x y} dx$$

für beliebige Folgen a_r, b_r mit $a_r \rightarrow -\infty$ und $b_r \rightarrow \infty$. Mit einer partiellen Integration dürfen wir das umschreiben zu

$$f'^\wedge(y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(f(x) e^{-2\pi i x y} \Big|_{a_r}^{b_r} - \int_{a_r}^{b_r} f(x) (-2\pi i y) e^{-2\pi i x y} dx \right)$$

Da f integrierbar ist, können wir unsere Folgen a_r, b_r sogar so wählen, daß gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} f(a_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(b_r) = 0$, und auf diese Weise sehen wir

$$f'^\wedge(y) = 2\pi i y f^\wedge(y)$$

Für beliebiges n folgt unsere Behauptung dann mit dem Satz von Fubini. □

3.1.7. Bezeichnet $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation und τ_a die Verschiebung wie in 2.6.6, also $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$, so bedeuten die Formeln 2 und 3 der Proposition 3.1.5 kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \\ \tau_b \downarrow & & \downarrow e^{-2\pi i b \cdot y} \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \\ e^{2\pi i a \cdot x} \downarrow & & \downarrow \tau_a \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung gemeint.

Definition 3.1.8. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum aller glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ derart, daß für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ die Funktion $x^\alpha \partial^\beta f$ beschränkt ist. Hier verwenden wir die Multiindexschreibweise aus [AN2] 2.2.3. Im Fall einer Veränderlichen bedeutet unsere Forderung also in Worten, daß alle Ableitungen unserer Funktion multipliziert mit beliebigen Polynomfunktionen beschränkt bleiben.

3.1.9. Im Schwartzraum liegen insbesondere alle glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Offensichtlich ist der Schwartzraum stabil unter Multiplikationen mit beliebigen x^α und unter allen partiellen Ableitungen ∂^β . Offensichtlich sind alle Funktionen des Schwartzraums integrierbar.

Beispiel 3.1.10. Die Funktion $x \mapsto e^{-x^2}$ liegt im Schwartzraum.

Lemma 3.1.11. Die Fouriertransformation führt den Schwartzraum in sich selber über.

Beweis. Für eine Funktion aus dem Schwartzraum $f \in \mathcal{S}$ finden wir nach 3.1.9 und Proposition 3.1.5 induktiv, daß f^\wedge beliebig stetig partiell differenzierbar ist und daß für alle Multiindizes α, β gilt

$$(\partial^\beta x^\alpha f)^\wedge = (2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|} y^\beta \partial^\alpha f^\wedge$$

Die Fouriertransformierten integrierbarer Funktionen sind aber nach 3.1.5.1 stets beschränkt, und damit gehört f^\wedge auch zum Schwartzraum. \square

3.1.12. Bezeichnet $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum und bezeichnet τ_a die Verschiebung wie in 2.6.6, in Formeln gegeben durch $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$, so liefert die Proposition 3.1.5 uns vier kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ \tau_b \downarrow & & \downarrow e^{-2\pi i b \cdot y} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ e^{2\pi i a \cdot x} \downarrow & & \downarrow \tau_a \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ x_\nu \downarrow & & \downarrow -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} \downarrow & & \downarrow 2\pi i y_\nu \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S} \end{array}$$

Steht hier neben einem vertikalen Pfeil eine Funktion, so ist die durch Multiplikation mit besagter Funktion gegebene Abbildung $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ gemeint, im Fall des

vertikalen Pfeils links unten also die Abbildung $f \mapsto x_\nu f$, wobei $x_\nu f$ die Funktion meint mit den Werten $(x_\nu f)(x_1, \dots, x_n) = x_\nu f(x_1, \dots, x_n)$. Die Fouriertransformation verwandelt nach den unteren Diagrammen insbesondere partielles Ableiten in algebraische Operationen. Eine beliebte Anwendung ist denn auch das Lösen von Differentialgleichungen. Im Übrigen wird die Inversionsformel 3.3.20 zwei unserer vier Diagramme überflüssig machen.

Ergänzung 3.1.13. Hätten wir hier statt mit unseren Konventionen mit der mathematischen Standardisierung $(\mathcal{F}f)(y) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} d^n x$ gearbeitet, so würden sich obige Diagramme dahingehend vereinfachen, daß alle Faktoren 2π darin wegfallen. Der Vorfaktor $(2\pi)^{-n/2}$ bei der mathematischen Standardisierung ist an dieser Stelle noch irrelevant.

3.1.14. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow Z$ Abbildungen von topologischen Räumen. Manchmal schreibt man

$$\lim_{g(x) \rightarrow z} f(x) = y$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von y eine Umgebung U' von z gibt mit $g(x) \in U' \Rightarrow f(x) \in U$. Wir erlauben uns das nur, wenn Y Hausdorff ist und $z \notin g(X)$ aber wenn $g(X)$ jede Umgebung von z trifft.

3.1.15 (**Werte von Fouriertransformierten fern vom Ursprung**). Für alle integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt mit der Notation 3.1.14 sogar die Formel

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} f^\wedge(y) = 0$$

Für $f \in C_1^\infty$ folgt das bereits aus unserer Erkenntnis 3.1.11, daß die Fouriertransformation den Schwartzraum in sich selber überführt. Für beliebiges $f \in \mathcal{L}^1$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ finden wir nach 2.6.1 ein $g \in C_1^\infty$ mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ und damit folgt dann sofort $|f^\wedge(y) - g^\wedge(y)| < \varepsilon \quad \forall y$. So erhalten wir unsere Aussage für beliebiges integrierbares f . Anschaulich mag man das etwa im Fall $n = 1$ wie folgt verstehen: Ist $|y|$ sehr groß, so beschreibt $x \mapsto e^{-2\pi i x y}$ eine Funktion, die sehr schnell oszilliert. Ändert sich f nicht ganz so schnell, so wird sich beim Integrieren von $f(x) e^{-2\pi i x y}$ sehr viel wegheben, so daß das Integral sehr klein wird.

Übungen

Übung 3.1.16 (Fouriertransformierte der Glockenkurve). Die Gauß'sche Glockenkurve ist für die mathematisch standardisierte Fouriertransformation 3.1.3 ihre eigene Fouriertransformierte, in Formeln gilt für die Funktion $g(x) = e^{-x^2/2}$ also $\hat{g}(y) = e^{-y^2/2}$. Hinweis: g erfüllt die Differentialgleichung $g'(x) = -xg(x)$.

Auch ohne den Eindeigkeitssatz über Lösungen von Differentialgleichungen zu bemühen, kann man durch Ableiten von $f(x)/(e^{-x^2/2})$ zeigen, daß diese Differentialgleichung bis auf konstante Faktoren keine anderen Lösungen f hat. Jetzt zeige man, daß \hat{g} dieselbe Differentialgleichung löst. So folgt $g = c\hat{g}$. Die Konstante c schließlich ergibt sich aus [1.10.7](#).

Übung 3.1.17. Gegeben integrierbare Funktionen f_1, \dots, f_n einer reellen Veränderlichen ist die Fouriertransformierte von $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ das Produkt $f^\wedge(y) = f_1^\wedge(y_1) \dots f_n^\wedge(y_n)$. Das gilt für alle drei Standardisierungen. Speziell ist die Funktion $g(x) = e^{-x \cdot x/2}$ auf \mathbb{R}^n für die mathematische Standardisierung ihre eigene Fouriertransformierte $\hat{g} = g$.

Übung 3.1.18. Man berechne die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion f , die gegeben wird durch die Vorschrift $f(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und Null sonst, und zeige $f^\wedge(y) = (\sin \pi y)/\pi y$. Man berechne auch die Fouriertransformierten der Produkte $f(x) \sin(\alpha x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und diskutiere den Zusammenhang mit dem Hören von Akkorden.

Weiterführende Übung 3.1.19. Für $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $g|_{(-\infty, 0]} = 0$ gibt es eine holomorphe Funktion g^\wedge auf der komplexen unteren Halbebene $\text{Im } z < 0$, die die auf $\mathbb{R} = \{z \mid \text{Im } z = 0\}$ definierte Fouriertransformierte g^\wedge stetig fortsetzt. Im übrigen kann man im Rahmen der Funktionentheorie [\[FT1\] 2.3.10](#) zeigen, daß diese stetige Fortsetzung sogar eindeutig ist. Die auf der rechten Halbebene $\{z \mid \text{Re}(z) \geq 0\}$ definierte Funktion $t \mapsto g^\wedge(-it)$ nennt man die **Laplace-Transformierte** von g , vergleiche auch [\[FT1\] 5.1.13](#).

Ergänzende Übung 3.1.20. Wir betrachten in dieser Übung der Einfachheit halber nur Funktionen auf der reellen Zahlengeraden. Man zeige: Die Fouriertransformierte einer geraden Funktion ist gerade; die Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion ist ungerade. Die Fouriertransformierte einer geraden reellwertigen Funktion ist reellwertig; die Fouriertransformierte einer ungeraden reellwertigen Funktion nimmt nur rein imaginäre Werte an. Schreiben wir eine integrierbare Funktion f als Summe $f = g + u$ ihres geraden und ihres ungeraden Anteils, so gilt $g^\wedge(y) = (2\pi)^{-1} \int f(x) \cos(xy) dx$ und $iu^\wedge(y) = (2\pi)^{-1} \int f(x) \sin(xy) dx$ für die mathematische Fouriertransformation. Diese beiden Integrale, aufgefaßt als Funktionen von y , sind auch bekannt als die **Cosinustransformation** und die **Sinustransformation** von f . Sie haben den Vorteil, reelle Funktionen wieder zu reellen Funktionen zu machen. Ihre diskreten Analoga sind von großer technischer Bedeutung.

3.2 Fouriertransformation ohne Koordinaten

3.2.1. Um die Beziehung zwischen Fouriertransformationen und Fourierreihen herauszuarbeiten, um die verschiedenen Standardisierungen zu vereinheitlichen,

und insbesondere um der wahren Natur unserer Konstruktionen näher zu kommen, diskutiere ich nun einen allgemeineren Formalismus.

Definition 3.2.2. Sei (X, \mathcal{M}) ein Maßraum. Ein nichtnegatives Maß auf X heißt **endlich**, wenn es den Wert ∞ nicht annimmt. Ein **komplexes Maß auf X** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, die sich schreiben läßt als eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten von endlichen nichtnegativen Maßen $\mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$. Ein komplexes Maß, das nur reelle Werte annimmt, nennen wir ein **reelles Maß**. Wir verwenden für die Räume aller komplexen, reellen, endlichen nichtnegativen und beliebigen nichtnegativen Maße auf einem vorgegebenen Maßraum X die Bezeichnungen

$$M(X) \supset M(X; \mathbb{R}) \supset M(X; [0, \infty)) \subset M(X; [0, \infty])$$

Manchmal schreiben wir statt $M(X)$ auch ausführlicher $\text{Maß}(X)$ und erweitern unsere anderen Notationen entsprechend. Mehr zu komplexen Maßen diskutieren wir in den Übungen.

3.2.3. Sei (X, \mathcal{M}) ein Maßraum. Jede Abbildung von $M(X; [0, \infty))$ in einen reellen Vektorraum V , die verträglich ist mit der Addition von Maßen und der Multiplikation mit nichtnegativen reellen Skalaren, läßt sich auf genau eine Weise fortsetzen zu einer \mathbb{R} -linearen Abbildung $M(X; \mathbb{R}) \rightarrow V$. Das scheint mir evident und kann auch als Spezialfall von Übung [LA1] ?? verstanden werden. Jede \mathbb{R} -lineare Abbildung von $M(X; \mathbb{R})$ in einen komplexen Vektorraum W läßt sich weiter offensichtlich auf genau eine Weise zu einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $M(X) \rightarrow W$ fortsetzen.

3.2.4 (**Integration über komplexe Maße**). Gegeben ein Maßraum (X, \mathcal{M}) und ein komplexes Maß $\mu \in M(X)$ und eine beschränkte meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ erhalten wir in dieser Weise eine komplexe Zahl $\int_X f(x)\mu(x)$. Die zugehörige Abbildung $(f, \mu) \mapsto \int f\mu$ kann dadurch charakterisiert werden, daß sie bilinear ist und für nichtnegative Maße mit dem bereits in 2.1.1 konstruierten Integral übereinstimmt.

3.2.5. Gegeben ein Maßraum (X, λ) und $f \in L^1(X; \lambda)$ erhalten wir ein komplexes Maß $f\lambda$ auf X durch die Vorschrift $(f\lambda)(A) := \int_A f(x)\lambda(x)$.

Definition 3.2.6. Unter einer **Paarung** von **topologischen Gruppen** G, H verstehen wir einen stetigen Gruppenhomomorphismus $s : G \times H \rightarrow S^1$ ihres Produkts in die Kreisgruppe. Wir notieren solch eine Paarung meist in der Form $s : (g, h) \mapsto \langle g, h \rangle$. Unter der **dualen Paarung** verstehen wir dann die Paarung $\bar{s} : H \times G \rightarrow S^1$ gegeben durch

$$\langle h, g \rangle := \overline{\langle g, h \rangle}$$

Definition 3.2.7. Eine Paarung $G \times H \rightarrow S^1$ von **Fouriergruppen** heiße **exakt**, wenn sie sowohl eine Bijektion $G \xrightarrow{\sim} \hat{H}$, $g \mapsto \langle g, \cdot \rangle$ als auch eine Bijektion $H \xrightarrow{\sim} \hat{G}$, $h \mapsto \langle \cdot, h \rangle$ induziert.

Vorschau 3.2.8. Wir zeigen in 3.4.13, daß fur jede Fouriergruppe im Wesentlichen nur eine exakte Paarung mit einer weiteren Fouriergruppe existiert, ihrer „Charaktergruppe“, und daß von unseren beiden Bedingungen jeweils die Eine bereits die Andere induziert. Vorerst will ich das jedoch hintanstellen und erst einmal die Bedeutung exakter Paarungen herausarbeiten.

Beispiele 3.2.9. Exakte Paarungen von Fouriergruppen sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times S^1 &\rightarrow S^1, & (n, z) &\mapsto z^n \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1, & (x, y) &\mapsto e^{ixy} \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow S^1, & (x, y) &\mapsto e^{ix \cdot y} \\ V^* \times V &\rightarrow S^1, & (\phi, v) &\mapsto e^{i\phi(v)} \end{aligned}$$

Im letzten Beispiel bezeichnet V einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und V^* seinen Dualraum.

Definition 3.2.10 (Fouriertransformation zu einer Paarung). Gegeben eine Paarung von topologischen Gruppen $s : G \times H \rightarrow S^1$ und ein Maß $\mu \in M(G)$ erklären wir seine **Fouriertransformierte** $\mu^\wedge : H \rightarrow \mathbb{C}$ als die Funktion, die bei $h \in H$ den Wert

$$\mu^\wedge(h) := \int_G \langle g, h \rangle \mu(g)$$

annimmt. Wir erklären die zu unserer Paarung s gehörige **Fouriertransformation** als die durch $\mathcal{F} : \mu \mapsto \mu^\wedge$ gegebene lineare Abbildung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s : M(G) \rightarrow \text{Ens}(H, \mathbb{C})$$

vom Raum der komplexen Maße auf G in den Raum der komplexwertigen Funktionen auf H .

Beispiel 3.2.11 (Physikalische Standardisierung). Betrachtet man die exakte Paarung $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ gegeben durch $p : (x, y) \mapsto e^{-2\pi i x \cdot y}$ und die durch $f \mapsto f(x) dx$ gegebene Einbettung $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(\mathbb{R}^n)$, so ist die Verknüpfung

$$L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{dx} M(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \text{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Paarung p mit der Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße unsere physikalisch standardisierte Fouriertransformation aus 3.1.2.

Beispiel 3.2.12 (Mathematische Standardisierung). Betrachtet man die exakte Paarung $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ gegeben durch $s : (x, y) \mapsto e^{-ix \cdot y}$ und die durch $f \mapsto (2\pi)^{-n/2} f(x) d^n x$ gegebene Einbettung $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(\mathbb{R}^n)$, so ist die Verknüpfung

$$L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{(2\pi)^{-n/2} d^n x} M(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \text{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Paarung s mit einer entsprechend reskalierten Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße unsere mathematisch standardisierte Fouriertransformation aus 3.1.3.

Beispiel 3.2.13 (Entwicklung in eine Fourierreihe). Betrachtet man die exakte Paarung $p : S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ gegeben durch $p : (z, n) \mapsto z^{-n}$, so können wir die Abbildung, die jeder integrierbaren periodischen Funktion mit der Periode 2π ihre Fourierkoeffizienten zuordnet, schreiben als die Komposition

$$L^1([0, 2\pi]) \xrightarrow{dt/2\pi} M([0, 2\pi]) \xrightarrow{E_*} M(S^1) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \text{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$$

der abstrakten Fouriertransformation zur Paarung p mit einer entsprechend reskalierten Einbettung des Raums der integrierbaren Funktionen in den Raum der komplexen Maße gefolgt vom Bilden des Bildmaßes unter der „Aufwickelabbildung“ $E : [0, 2\pi] \xrightarrow{\sim} S^1$ gegeben durch $t \mapsto e^{it}$.

Beispiel 3.2.14 (Aufsummieren einer Fourierreihe). Das Aufsummieren einer Fourierreihe kann als abstrakte Fouriertransformation zu der zur Paarung p aus dem vorhergehenden Beispiel dualen Paarung $\bar{p} : \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1$ mit der Abbildungsvorschrift $(n, z) \mapsto z^n$ geschrieben werden, genauer als die Komposition

$$L^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\zeta} M(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}_{\bar{p}}} \text{Ens}(S^1, \mathbb{C}) \xrightarrow{\circ E} \text{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

der Multiplikation einer absolut summierbaren Familie mit dem Zählmaß ζ gefolgt von der abstrakten Fouriertransformation zu \bar{p} gefolgt Vorschalten der Abbildung $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $t \mapsto e^{it}$.

Beispiel 3.2.15 (Diskrete Fouriertransformation). Unsere diskrete Fouriertransformation aus 2.7.25 kann als abstrakte Fouriertransformation zur Paarung $s : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ mit der Abbildungsvorschrift $(a, b) \mapsto e^{2\pi i ab/m}$ geschrieben werden, genauer als die Komposition

$$L^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \zeta) \xrightarrow{\zeta/m} M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \text{Ens}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \equiv L^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \zeta)$$

3.2.16 (Eigenschaften der Fouriertransformierten von Maßen). Sei eine Paarung von topologischen Gruppen $s : G \times H \rightarrow S^1$ gegeben. Wir zeigen, daß die

Fouriertransformierte μ^\wedge eines komplexen Maßes notwendig folgenstetig und beschränkt ist. Es reicht, das für endliche nichtnegative Maße μ zu zeigen. Für diese folgt die Folgenstetigkeit von μ^\wedge aus dem Satz über dominierte Konvergenz, und die Beschränktheit ergibt sich aus der Schranke

$$|\mu^\wedge(h)| = \left| \int_G \langle g, h \rangle \mu\langle g \rangle \right| \leq \int_G |\langle g, h \rangle| \mu\langle g \rangle = \int_G 1 \mu\langle g \rangle = \mu(G)$$

Fallen für H die stetigen Funktionen mit den folgenstetigen Funktionen zusammen, etwa im Fall einer **Fouriergruppe** oder einer diskreten Gruppe H , so ist unsere **Fouriertransformation zur Paarung s** mithin eine Abbildung $\mathcal{F} : M(G) \rightarrow \mathcal{C}(H)$.

3.2.17 (Anschauliche Bedeutung der Fouriertransformation). Wir betrachten die exakte Paarung $\vec{\mathbb{T}} \times \vec{\mathbb{T}}^* \rightarrow S^1$ des Vektorraums der Zeitspannen mit seinem Dualraum, dem Raum der Frequenzen, die gegeben wird durch $(t, \omega) \mapsto e^{-2\pi i t \omega}$. Wird auf einer Orgel ein Akkord gespielt, so ist der Luftdruck in der Kirche eine Funktion der Zeit, die wir als die Fouriertransformierte einer Summe der Diracmaße zu denjenigen Frequenzen auffassen können, die zu den heruntergedrückten Tasten gehören. Wenn wir diese Funktion auf ein im Vergleich zum Inversen der Frequenz jedes einzelnen Tons großes Zeitintervall einschränken, durch Null ausdehnen, und dann die Fouriertransformation zur dualen Paarung anwenden, so erhalten wir wieder eine Funktion auf dem Raum aller möglichen Tonhöhen alias Frequenzen, die in der Nähe der angeschlagenen Tonhöhen sehr große Werte annimmt und sonst nur sehr kleine Werte, vergleiche 3.1.18. In diesem Sinne ist sowohl das Verwandeln eines durch die beteiligten Frequenzen bestimmten Akkordes in eine Funktion der Zeit als auch das Auflösen dieser Funktion der Zeit in einzelne Töne eine Fouriertransformation, und diese „Orgeltransformation“ von Maßen auf dem Frequenzraum in Funktionen auf der Zeitachse und „Hörtransformation“ von Maßen auf der Zeitachse in Funktionen auf dem Frequenzraum sind sogar zueinander invers in dem Sinne, in dem es die „Inversionsformel“ 3.3.5 präzisieren wird. Wenn man es ganz genau nimmt, muß man noch beachten, daß imaginäre Zahlen in unserem Beispiel eigentlich nicht vorkommen sollten und daß man auf der Orgel auch keine Tasten zu negativen Frequenzen hat, so daß wir eher eine Cosinustransformation im Sinne von 3.1.20 vor uns haben, aber so genau will ich es hier nicht nehmen. Die Fouriertheorie ist der Ausgangspunkt eines Teilgebiets der Mathematik, das man als **Harmonische Analysis** bezeichnet.

3.2.18. Die Frage nach einer Verallgemeinerung des Schwartzraums in dieser Allgemeinheit stellen wir zurück und entwickeln im nächsten Abschnitt erst einmal die konkrete Theorie weiter.

Übungen

3.2.19. Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) erklärt man ein nichtnegatives reelles Maß $|\mu|$, seine **Variation**, durch die Vorschrift

$$|\mu|(A) = \sup \sum |\mu(A_\nu)|$$

mit dem Supremum über alle Zerlegungen $A = \bigsqcup A_\nu$ von A in eine disjunkte Vereinigung einer abzählbaren Familie von meßbaren Teilmengen.

Übung 3.2.20. Man zeige für unsere Fouriertransformation zu einer Paarung die Verallgemeinerungen $((a \cdot)_* \mu)^\wedge(h) = \langle a, h \rangle \mu^\wedge(h)$ und $(\langle g, b \rangle \mu)^\wedge(h) = \mu^\wedge(bh)$ unserer Formeln 3.1.5.2 und 3.1.5.3.

Übung 3.2.21. Man zeige für die stochastische Fouriertransformierte eines Maßes $\mu \in M(\mathbb{R})$, daß unter der Voraussetzung, daß x integrierbar ist nach μ , die Fouriertransformierte differenzierbar ist mit der Ableitung $(\mu^\wedge)'(y) = i(x\mu)^\wedge$.

Übung 3.2.22. Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) nimmt seine in 3.2.19 erklärte Variation $|\mu|$ Werte in $[0, \infty)$ an und ist ein Maß auf \mathcal{M} . Weiter ist $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ eine Norm auf dem Raum $M(X)$ der komplexen Maße auf X , die **Variationsnorm**. Jedes komplexe Maß μ auf einem Meßraum läßt sich darstellen als Linearkombination von vier nichtnegativen reellen Maßen in der Form

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$$

und so, daß zusätzlich gilt $\mu_r \leq |\mu|$ für $1 \leq r \leq 4$ als da heißt $\mu_r(A) \leq |\mu|(A)$ für jede meßbare Menge $A \subset X$. Hinweis: Im Fall eines reellen Maßes mag man etwa mit $\mu_1 = (|\mu| + \mu)/2$ beginnen.

Übung 3.2.23 (Integration nach komplexen Maßen). Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) gibt es genau eine Linearform $L^1(X; |\mu|) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f \mapsto \int f \mu$$

mit der Eigenschaft $\int f \mu = \int f \mu_1 - \int f \mu_2 + i \int f \mu_3 - i \int f \mu_4$ für eine und jede Darstellung von μ wie in 3.2.22. Man zeige weiter die Abschätzung $|\int f \mu| \leq \int |f| |\mu|$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß f eine Stufenfunktion ist.

Übung 3.2.24 (Produkte komplexer Maße mit Funktionen). Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) und eine Funktion $f \in L^1(X; |\mu|)$ erhalten wir ein weiteres komplexes Maß $f\mu$ auf X durch die Vorschrift

$$(f\mu)(A) = \int [A] f \mu \quad \text{für alle meßbaren } A \subset X$$

Dieses Maß hat dann die Variation $|f\mu| = |f||\mu|$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß f eine Stufenfunktion ist. Ist $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere meßbare Funktion, so gilt $g \in L^1(X; |f\mu|)$ genau dann, wenn fg zu $L^1(X; |\mu|)$ gehört, und in diesem Fall haben wir die Gleichheit komplexer Maße

$$g(f\mu) = (gf)\mu$$

Übung 3.2.25. Sei (X, μ) ein Maßraum und $f \in L^1(X; \mu)$ integrierbar. Ist das Maß $f\mu$ Null, so war f bereits die Null von $L^1(X; \mu)$.

3.2.26 (Produktmaß für komplexe Maße). Bezeichnet $X \times Y$ das Produkt zweier Maßräume, versehen mit der Produkt- σ -Algebra aus 1.7.1, so liefert das Bilden des Produktmaßes mit zweimaligem Anwenden von 3.2.3 eine bilineare Abbildung auf den zugehörigen Räumen komplexwertiger Maße

$$\begin{aligned} M(X) \times M(Y) &\rightarrow M(X \times Y) \\ (\mu, \nu) &\mapsto \mu \boxtimes \nu \end{aligned}$$

3.2.27 (Bildmaße komplexer Maße). Gegeben eine meßbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von Maßräumen und ein komplexes Maß μ auf X erklärt man wie in 1.4.32 das **Bildmaß** $f_*\mu$ auf Y dadurch, daß man für jede meßbare Menge $A \subset Y$ setzt

$$(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

Offensichtlich gilt wieder $\text{id}_*\mu = \mu$ und für verknüpfbare Abbildungen haben wir $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Vorschau 3.2.28. In der in [TS] 5.4 eingeführten Terminologie erhalten wir einen Schmelzfunktor von der kartesischen Schmelzkategorie der Maßräume in die Schmelzkategorie der \mathbb{C} -Vektorräume, indem wir jedem Maßraum X den Raum $M(X)$ seiner komplexen Maße zuordnen und gegebenen Maßräume X_1, \dots, X_r, Y und eine meßbare Abbildung $f : X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow Y$ jeder Familie von Maßen μ_i auf den X_i das Bildmaß ihres Produktmaßes $f_*(\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_r)$ als Maß auf Y . Diese Aussage faßt verschiedene mehr oder weniger offensichtliche Verträglichkeiten zwischen Produktmaßen und Bildmaßen zusammen.

Übung 3.2.29 (Integration über Bildmaße). Gegeben eine meßbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von Maßräumen und ein komplexes Maß μ auf X ist die Variation des Bildmaßes nach oben beschränkt durch das Bildmaß der Variation, in Formeln

$$|f_*\mu| \leq f_*|\mu|$$

Gehört für eine meßbare Funktion $h : Y \rightarrow \mathbb{C}$ die Verknüpfung $h \circ f$ zu $L^1(X; |\mu|)$, so ist h integrierbar nach $|f_*\mu|$ und es gilt

$$\int_Y h (f_*\mu) = \int_X (h \circ f) \mu$$

Übung 3.2.30 (Bilder von Produktmaßen). Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \rightarrow X'$ und $g : Y \rightarrow Y'$ und $\mu \in M(X)$ und $\nu \in M(Y)$ komplexe Maße, so ist das Bildmaß ihres Produkts das Produkt der Bildmaße, in Formeln

$$(f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu) = (f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu)$$

3.3 Poissonformel und Inversionsformel

3.3.1. In diesem Abschnitt treiben wir wieder die konkrete Theorie voran, bevor wir in den anschließenden Abschnitten ihre koordinatenfreie Bedeutung und Verallgemeinerungen diskutieren.

Satz 3.3.2 (Poisson'sche Summationsformel). Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartzfunktion und f^\wedge ihre *physikalisch standardisierte Fouriertransformierte* gegeben durch $f^\wedge(y) := \int f(x) e^{-2\pi ixy} dx$. So gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^\wedge(n)$$

3.3.3. In \mathbb{R}^d zeigt man die analoge Aussage analog. In 3.6.15 werden wir lernen, wie man sie aus allgemeinen Prinzipien herleiten kann.

Beweis. Wir betrachten die glatte Funktion $g(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ mit der Periode Eins. Ihre Entwicklung in eine Fourierreihe hat die Form $g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi itk}$ mit $a_k = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi itk} dt$. Die Summe ist hierbei zu verstehen im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Damit finden wir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = g(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 g(t) e^{-2\pi itk} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi itk} dt$$

Im letzten Schritt haben wir die Identität $e^{-2\pi itk} = e^{-2\pi i(t-n)k}$ verwendet. \square

3.3.4 (**Fouriertransformation und Fourierreihe**). Gegeben $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ konvergiert die Reihe $g(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ für fast alle $t \in [0, 1]$ absolut, die so erklärte fast überall definierte Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gehört zu $L^1([0, 1])$, und für ihre Fourierkoeffizienten gilt

$$\int_0^1 g(t) e^{-2\pi int} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi int} dt$$

Das alles folgt unmittelbar mit Fubini 1.7.16 aus der Bemerkung, daß die Addition $\mathbb{Z} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ einen Isomorphismus von Maßräumen induziert, wenn

man links das Produkt von Zählmaß und Lebesguemaß betrachtet. Bei geeigneter Normalisierung sind also die Fourierkoeffizienten von g genau die Werte der Fouriertransformierten von f auf den ganzen Zahlen, was wir ja auch unter etwas stärkeren Voraussetzungen bereits beim Beweis der Poisson-Formel gesehen hatten.

Satz 3.3.5 (Inversionsformel). *Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartzfunktion, so gilt für die zweimal fouriertransformierte Funktion $f^{\wedge\wedge}$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ die Identität*

$$f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$$

3.3.6. In \mathbb{R}^d folgt dieselbe Aussage analog. Die Aussage gilt auch für unsere mathematische Fouriertransformation aus 3.1.3, und genau um das zu erreichen wird bei dieser Normalisierung der merkwürdige Vorfaktor $(2\pi)^{-d/2}$ mit dazugenommen.

Beweis. Unsere Formeln 3.1.5.2 und 3.1.5.3 zeigen $\tau_a(f^{\wedge\wedge}) = (\tau_{-a}f)^{\wedge\wedge}$. Es reicht also, die Identität $f^{\wedge\wedge}(0) = f(0)$ zu zeigen. Die Poisson'sche Summationsformel 3.3.2 liefert durch Umnormieren für alle $b > 0$ die Identität

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nb) = \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^{\wedge}(n/b)$$

Die linke Seite strebt für $b \rightarrow \infty$ gegen $f(0)$, da f eine Schwarzfunktion ist. Andererseits ist dann auch $g := f^{\wedge}$ eine Schwarzfunktion und damit strebt, wie wir uns gleich überlegen, die rechte Seite gegen $\int f^{\wedge} = f^{\wedge\wedge}(0)$. Um uns das noch zu überlegen, spezialisieren wir der Einfachheit halber zu $b = 2^N$ und betrachten den Grenzwert für $N \rightarrow \infty$. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es sicher $K \in \mathbb{N}$ mit $|\int_{-\infty}^{-K} g| < \varepsilon$ und $|\int_K^{\infty} g| < \varepsilon$ und $|\frac{1}{b} \sum_{n/b \leq -K} g(n/b)| < \varepsilon$ und $|\frac{1}{b} \sum_{n/b \geq K} g(n/b)| < \varepsilon$. Da aber auf dem Intervall $[-K, K]$ die Riemannsummen von g gegen das Integral von g streben, folgt die Behauptung. \square

Alternativer Beweis ohne Poissonformel. Wir arbeiten bei diesem Beweis mit der mathematischen Normalisierung 3.1.3 und betrachten zunächst im Schwartzraum eine beliebige weitere Funktion $g \in \mathcal{S}$ und behaupten

$$\int f^{\wedge}(y)g(y)d^n y = \int f(x)g^{\wedge}(x)d^n x$$

In der Tat ist das nach unseren Definitionen und Fubini gleichbedeutend zu

$$\int \int f(x) e^{-ix \cdot y} g(y) d^n x d^n y = \int \int f(x) e^{-ix \cdot y} g(y) d^n y d^n x$$

und damit offensichtlich. Ist etwas allgemeiner $h \in \mathcal{S}$ eine Funktion aus dem Schwartzraum und betrachten wir für $r > 0$ die Funktion $g = h_r = h(y/r)$, so erhalten wir mit 3.1.5.5 sofort $g^\wedge = h_r^\wedge = r^n h^\wedge(rx)$ und damit

$$\int f^\wedge(y)h(y/r) = \int f(x)h_r^\wedge(x) = \int f(x)r^n h^\wedge(rx) = \int f(x/r)h^\wedge(x)$$

Hier haben wir im letzten Schritt die Transformationsformel [AN2] 4.1.10 angewandt. Für $r \rightarrow \infty$ folgt dann aus dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\int f^\wedge(y)h(0) = \int f(0)h^\wedge(x)$$

Wenn wir $(2\pi)^{-n/2}$ davormultiplizieren und integrieren, ergibt sich

$$f^\wedge(0) \cdot h(0) = f(0) \cdot h^\wedge(0)$$

Setzen wir hier speziell für h das Produkt von Gauss'schen Glockenkurven $e^{-x \cdot x/2}$ ein, so folgt aus 3.1.16 sofort, daß für jede Schwartzfunktion ihre zweimal Fouriertransformierte am Ursprung denselben Wert hat wie die Funktion selbst. Dann kann man wie im anderen Beweis zu Ende argumentieren. \square

Satz 3.3.7 (Fouriertransformation von L^2 -Funktionen). *Die physikalisch standardisierte Fouriertransformation nach 3.1.2 läßt sich auf genau eine Weise vom Schwartzraum fortsetzen zu einem unitären Isomorphismus von Hilberträumen*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}^n)$$

Beweis. Bezeichne $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Multiplikation mit (-1) und $f\iota = f \circ \iota$. Natürlich gilt dann $(f^\wedge)\iota = (f\iota)^\wedge$ und unsere Inversionsformel sagt $f = (f\iota)^\wedge$. Als nächstes prüfen wir, daß die Abbildungen $f \mapsto f^\wedge$ und $g \mapsto (g\iota)^\wedge$ für die L_2 -Skalarprodukte auf unseren Schwartzräumen zueinander adjungiert sind. In Formeln behaupten wir also $\langle f^\wedge, g \rangle = \langle f, (g\iota)^\wedge \rangle$ oder ausgeschrieben

$$\int \overline{f(x)}g(-y)e^{-2\pi ixy}d^n x d^n y = \int \overline{f(x)e^{-2\pi ixy}}g(y)d^n x d^n y$$

Das war auch schon der Beweis für die behauptete Adjunktion. Für jede Schwartzfunktion f folgt daraus

$$\langle f^\wedge, f^\wedge \rangle = \langle f, (f\iota)^\wedge \rangle = \langle f, f \rangle$$

mit der Inversionsformel 3.3.5 im zweiten Schritt. Nach 2.6.1 liegt jedoch der Schwartzraum dicht im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen. Unser Satz folgt damit aus dem Lemma über die Existenz stetiger Fortsetzungen 2.4.12 und dem Lemma über die Linearität und Unitarität stetiger Fortsetzungen 2.4.17. \square

Proposition 3.3.8. Für Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ stimmt die durch unsere explizite Formel 3.1.2 gegebene Fouriertransformierte überein mit der durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum 3.3.7 Erhaltenen.

Beweis. Wir bezeichnen nur für diesen Beweis unsere durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum 3.3.7 konstruierte Fouriertransformation mit \mathcal{F}_2 . Nun bilden wir den algebraischen Dualraum \mathcal{S}^* des Schwartzraums, also den Raum

$$\mathcal{S}^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}, \mathbb{C})$$

aller Linearformen auf dem Schwartzraum. Das „Daranmultiplizieren und Integrieren“ liefert für alle $p \in [1, \infty]$ eine lineare Abbildung $\text{int} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}^*$, die in Formeln durch die Vorschrift $f \mapsto (g \mapsto \int fg)$ gegeben wird. Mit der zu unserer Fouriertransformation auf dem Schwartzraum transponierten Abbildung $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$ erhalten wir, wie wir gleich prüfen, kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{S}^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{S}^* \end{array}$$

Die Kommutativität des Linken zeigt dieselbe Rechnung, wie wir sie bereits im Beweis der Inversionsformel durchgeführt haben, wenn man darin das komplexe Konjugieren wegläßt. Die Kommutativität des Rechten folgt, wenn man statt quadratintegrierbarer Funktionen oben nur Schwartzfunktionen betrachtet. Für beliebige Schwartzfunktionen f, g gilt also $(\text{int } f)(g) = (\text{int } (\mathcal{F}f))(\mathcal{F}g)$ alias $\langle \bar{f}, g \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}f}, \mathcal{F}g \rangle$ mit unserem L^2 -Skalarprodukt. Aus Stetigkeitsgründen gilt das dann für beliebige L^2 -Funktionen f , und das zeigt dann die Kommutativität des rechten Diagramms. Im folgenden konstruieren wir einen Raum $L^1_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ von fast überall definierten meßbaren Funktionen, der alle $L^p(\mathbb{R}^n)$ umfaßt, nebst einer linearen Abbildung $\text{int} : L^1_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}^*$, die alle unsere vorherigen Abbildungen int fortsetzt. Zusätzlich zeigen wir noch, daß diese Abbildung injektiv ist. Dann ist der Beweis zu Ende und wir können unsere Notation \mathcal{F}_2 wieder stornieren. \square

Ergänzung 3.3.9. Man kann allgemeiner zeigen, daß unter \mathcal{F}^\top für konjugierte Exponenten p, q mit $1 \leq p \leq 2$ Funktionen aus $L^p \subset \mathcal{S}^*$ in Funktionen aus $L^q \subset \mathcal{S}^*$ übergehen, vergleiche etwa [Wer05].

Definition 3.3.10. Eine fast überall definierte Funktion $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal integrierbar**, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf das Lebesgue-Maß. Wir bezeichnen den Raum aller reellwertigen bzw. komplexwertigen lokal integrierbaren Funktionen auf dem \mathbb{R}^n mit

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

Lemma 3.3.11. *Zwei lokal integrierbare Funktionen auf dem \mathbb{R}^n , deren Produkt mit jeder kompakt getragenen glatten Funktion dasselbe Integral hat, stimmen bereits als fast überall definierte Funktionen überein.*

Beweis. In Formeln ausgedrückt müssen wir zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow C_1^\infty(\mathbb{R}^n)^* \\ f &\mapsto (g \mapsto \int fg) \end{aligned}$$

von unserem Raum lokal integrierbarer Funktionen in den Dualraum des Raums aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger eine Injektion ist. Sicher reicht es, wenn wir zeigen, daß dieselbe Abbildungsvorschrift im Fall reellwertiger Funktionen eine Injektion

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \hookrightarrow C_1^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

liefert. Sicher reicht es sogar zu zeigen, daß die Restriktion dieser Abbildung auf die Teilmenge $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$ aller nichtnegativen lokal integrierbaren Funktionen injektiv ist. Diese Restriktion jedoch können wir schreiben als die Verknüpfung von Injektionen

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0}) \hookrightarrow \{\text{Borelmaße auf } \mathbb{R}^n\} \hookrightarrow C_1^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$$

wo die erste Abbildung jeder Funktion f das Borelmaß $f(x)d^n x$ zuordnet und die zweite Abbildung jedem Borelmaß das Integrieren nach diesem Maß. Hier ist die erste Abbildung injektiv nach 1.5.27 und die Zweite injektiv nach 1.10.10 und das Lemma ist bewiesen. \square

3.3.12. Etwas feiner betrachten wir den Raum $L_S^1(\mathbb{R}^n)$ aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß ihr Produkt mit jeder Schwartzfunktion integrierbar ist. Offensichtlich erhalten wir so einen Untervektorraum

$$L_S^1(\mathbb{R}^n) \subset L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$$

und ebenso offensichtlich liegen alle L^p -Funktionen, ja sogar alle meßbaren Funktionen von höchstens polynomialem Wachstum bereits in diesem Teilraum. Nach 3.3.11 erhalten wir aber durch die Vorschrift $f \mapsto (g \mapsto \int fg)$ erst recht eine Inklusion

$$\text{int} : L_S^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$$

3.3.13 (**Berechnung der Fouriertransformierten einer L^2 -Funktion**). Es ist nicht ganz leicht, eine explizite Formel für die Fourier-Transformierte einer L^2 -Funktion $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{C}$ anzugeben. In der Tat kann man ja nicht erwarten, daß das Integral 3.1.2 für alle y konvergiert. Das wäre sogar beunruhigend, da es uns unter Verwendung der Inversionsformel erlauben würde, zu jeder quadratintegrierbaren

Funktion einen wohlbestimmten „überall definierten Repräsentanten“ auszuzeichnen. Stattdessen können wir wie folgt vorgehen: Wir wählen reelle Folgen a_n, b_n mit $a_n \rightarrow -\infty$ und $b_n \rightarrow \infty$ und betrachten die integrierbaren Funktionen f_n , die durch Restriktion von f auf das kompakte Intervall $[a_n, b_n]$ und Ausdehnen durch Null entstehen. Dann gilt $f_n \rightarrow f$ im L^2 -Sinne und folglich auch $\mathcal{F}(f_n) \rightarrow \mathcal{F}(f)$ im L^2 -Sinne. Da die f_n integrierbar sind, kann nach Proposition 3.3.8 nun aber $\mathcal{F}(f_n) = \widehat{f_n}$ mit unserer Formel 3.1.2 jedenfalls im Prinzip ausgerechnet werden. Die so gebildeten fast überall definierten Funktionen $\widehat{f_n}$ streben demnach im L^2 -Sinne gegen $\mathcal{F}(f)$. Gelingt es uns also zum Beispiel, Folgen a_n, b_n so geschickt zu wählen, daß die Folge der Fouriertransformierten $\widehat{f_n}$ fast überall punktweise konvergiert, so ist dieser punktweise Grenzwert nach 2.3.11 notwendig bereits quadratintegrierbar und ist unsere gesuchte Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f)$.

Proposition 3.3.14. *Die Fouriertransformation von Maßen ist injektiv, als da heißt, nur das Nullmaß liefert die Nullfunktion.*

3.3.15. Das rechtfertigt die in der Stochastik übliche Bezeichnung der Fouriertransformierten eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf \mathbb{R} als dessen **charakteristische Funktion**. Man beachte jedoch, daß man in der Stochastik üblicherweise mit der Paarung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $(x, y) \mapsto e^{ixy}$ arbeitet.

Beweis. Nach 1.10.10 ist, wie bereits im vorhergehenden Beweis bemerkt, auch $\text{int} : M(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}^*$ gegeben durch $\mu \mapsto (f \mapsto \int f \mu)$ eine Injektion. Mit derselben Rechnung wie zuvor erhalten wir auch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^\top} & \mathcal{S}^* \end{array}$$

Das zeigt, daß verschiedene reelle Maße in $M(\mathbb{R}^n)$ auch verschiedene Fouriertransformierte haben. □

Vorschau 3.3.16. Bezeichne λ das Lebesguemaß auf dem \mathbb{R}^n . Motiviert durch die vorhergehenden Überlegungen definiert man den Raum

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}^*$$

aller **temperierten Distributionen** als den kleinsten Untervektorraum des vollen Dualraums \mathcal{S}^* des Raums der Schwartzfunktionen, der (1) alle Linearformen umfaßt, die die Gestalt $\varphi \mapsto \int f \varphi \lambda$ haben für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ stetig von höchstens polynomialem Wachstum, und der (2) stabil ist unter den Transponierten $\partial_\nu^\top : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$ der partiellen Ableitungen $\partial_\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Man überlegt

sich ohne große Schwierigkeiten, daß die Transponierte der Fouriertransformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^*$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$$

auf den temperierten Distributionen induziert, und daß sich alle L^p -Funktionen f als temperierte Distributionen auffassen lassen, ja daß das Bild unserer Einbettung $\text{int} : L^1_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}^*$ aus 3.3.12 gegeben durch die Vorschrift $\varphi \mapsto \int f\varphi\lambda$ aus temperierten Distributionen besteht, in Formeln $L^p \subset L^1_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$. Darüberhinaus lassen sich auch alle endlichen Borelmaße μ als die temperierte Distributionen auffassen mittels der immergleichen Vorschrift $\varphi \mapsto \int \varphi\mu$, und alle bisher betrachteten Varianten der Fouriertransformation können als Einschränkung unserer Transformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$ verstanden werden. Welche Vorteile die temperierten Distributionen gegenüber allgemeinen Linearformen auf dem Schwartzraum bieten, und wie allgemeiner beliebige, nicht notwendig temperierte Distributionen erklärt werden, mögen Sie in Vorlesungen zur Funktionalanalysis oder in 4.13.12 lernen.

Satz* 3.3.17 (Abtast-Satz). *Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die physikalisch normalisierte Fouriertransformierte einer quadratintegrierbaren Funktion mit Träger im kompakten Intervall $[-1/2, 1/2]$. So wird die Funktion h bereits durch ihre Werte an den ganzzahligen Stellen festgelegt mittels der Entwicklung*

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)}$$

als Summe einer im Hilbertraum der L^2 -Funktionen summierbaren Familie.

3.3.18. Dieser Satz ist wichtig in der Signalverarbeitung. Für die weitere Entwicklung der Theorie in dieser Vorlesung ist er eher nicht relevant. Eine Funktion auf dem Richtungsraum der Zeitachse \mathbb{T} heißt in diesem Zusammenhang ein „Signal“ und eine Funktion, die durch Fouriertransformation aus einem komplexen Maß auf einem Intervall im Raum der Frequenzen entsteht, ein „auf ein Frequenzband beschränktes Signal“. Genau genommen wird diese Anwendung noch besser modelliert durch reellwertige Funktionen auf der Zeitachse und die Beschränkung auf nichtnegative Frequenzen, aber dabei verliert die mathematische Beschreibung an Transparenz. Auf Englisch heißt unser Satz das **Sampling Theorem** und wird Shannon und Nyquist zugeschrieben, neuerdings auch Kotelnikow. Mathematisch betrachtet werden wir den Abtastatz in 3.6.15 als eine offensichtliche und unmittelbare Konsequenz der Natürlichkeit der Fouriertransformation verstehen lernen, und sogar für die Fouriertransformierten der Ausdehnungen durch Null von Maßen in $M([-1/2, 1/2])$ zeigen, aber die praktische Bedeutung mußte eben auch erkannt werden.

Beweis. Sei $h = f^\wedge$ für f quadratintegrierbar mit Träger in $[-1/2, 1/2]$. Dann wird f bereits festgelegt durch die Koeffizienten seiner Fourierreihe, nach 3.3.4 also durch die Werte $h(n)$ der Fouriertransformierten von h an allen ganzzahligen Stellen $n \in \mathbb{Z}$. Genauer haben wir in $L^2([-1/2, 1/2])$ die Darstellung $f(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{2\pi i n \omega}$ als Summe einer im Hilbertraum der L^2 -Funktionen summierbaren Familie. Dehnen wir diese Funktion f durch Null aus auf die ganze Zahlengerade \mathbb{R} und wenden die L^2 -Fouriertransformation an, so ergibt sich mit der Fouriertransformation 3.1.18 von Rechtecksfunktionen und der Beziehung 3.1.5.2 die Entwicklung

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \mathcal{F}(e^{2\pi i n \omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)}$$

als Summe einer im Hilbertraum der L^2 -Funktionen summierbaren Familie. \square

Übungen

Übung 3.3.19. Jede L^p -Funktion auf \mathbb{R}^n für $p \in [1, \infty]$ ist lokal integrierbar. Genau dann ist eine fast überall definierte Funktion lokal integrierbar, wenn ihre Einschränkung auf jedes Kompaktum integrierbar ist. Jede lokal integrierbare Funktion ist meßbar.

Übung 3.3.20. Ist die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ wieder integrierbar, so gilt $f^\wedge(x) = f(-x)$ für fast alle x . Insbesondere besitzt jede L^1 -Funktion mit einer integrierbaren Fouriertransformierten einen stetigen Repräsentanten.

Ergänzende Übung 3.3.21. Ist μ ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum X , so nennen wir eine μ -fast überall definierte Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ **lokal integrierbar in Bezug auf μ** genau dann, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Funktion auf besagte Umgebung integrierbar ist in Bezug auf μ . Diesen Funktionenraum notieren wir dann $L^1_{\text{loc}}(X; \mu)$. Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Borelmaß μ auf U zeige man, daß lokal integrierbare Funktionen aus $L^1_{\text{loc}}(U; \mu)$ genau dann fast überall übereinstimmen, wenn ihr Produkt mit jeder Funktion aus $\mathcal{C}_1^\infty(U)$ in Bezug auf μ dasselbe Integral hat.

3.4 Die Topologie der Charaktergruppe

3.4.1. In diesem Abschnitt soll besprochen werden, warum und in welcher Weise es zu jeder Fouriergruppe im Wesentlichen genau eine **exakte Paarung** gibt.

Definition 3.4.2. Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\text{Top}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y . Gegeben Teilmengen $K \subset X$ und $U \subset Y$ bezeichne

$$\mathcal{O}(K, U) \subset \text{Top}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(K) \subset U$. Die auf $\text{Top}(X, Y)$ von den Mengen $\mathcal{O}(K, U)$ für $K \subset X$ kompakt und $U \Subset Y$ offen erzeugte Topologie heißt die **kompakt-offene Topologie**. Wir denken uns Räume stetiger Abbildungen im Zweifelsfall stets mit dieser Topologie versehen und verwenden für den so entstehenden topologischen Raum die Notation

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

Lemma 3.4.3 (Funktorialitäten der kompakt-offenen Topologie). Gegeben stetige Abbildungen $f : X' \rightarrow X$ und $g : Y \rightarrow Y'$ sind auch die induzierten Abbildungen $(\circ f) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X', Y)$ und $(g \circ) : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')$ stetig.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus $(\circ f)^{-1}\mathcal{O}(K', U) = \mathcal{O}(f(K'), U)$, da das Bild $f(K')$ eines Kompaktums K' nach 1.8.10 wieder kompakt ist. Die zweite Behauptung folgt aus $(g \circ)^{-1}\mathcal{O}(K, U') = \mathcal{O}(K, g^{-1}(U'))$, da das Urbild $g^{-1}(U')$ einer offenen Menge U' wieder offen ist. \square

Lemma 3.4.4 (Sehr schwaches Exponentialgesetz). Gegeben topologische Räume X, Y, Z und eine stetige Abbildung $f : X \times Y \rightarrow Z$ ist auch die induzierte Abbildung $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig.

Vorschau 3.4.5. Wir werden in [TM] 1.12.10 zeigen, daß wir so für Y lokal kompakt sogar eine Bijektion $\text{Top}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ und für X und Y lokal kompakt einen Homöomorphismus $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ erhalten. Diese Aussagen nennen wir dann das „schwache Exponentialgesetz“ und das „Exponentialgesetz“.

Beweis. Gegeben $K \subset Y$ kompakt und $V \Subset Z$ offen und $x \in X$ mit $F(x) \in \mathcal{O}(K, V)$ gilt es, eine Umgebung $U \Subset X$ von x zu finden mit $F(U) \subset \mathcal{O}(K, V)$. Nun sagen unsere Annahmen $f(x \times K) \subset V$. Für jedes $y \in K$ gibt es nach der Definition der Produkttopologie eine Umgebung $U_y \Subset X$ von x und eine Umgebung $W_y \Subset Y$ von y mit $f(U_y \times W_y) \subset V$. Endlich viele der W_y überdecken das Kompaktum K , sagen wir die W_y für $y \in E$ mit $E \subset K$ endlich. Dann ist $U := \bigcap_{y \in E} U_y$ die gesuchte Umgebung U von x . \square

Lemma 3.4.6. Gegeben topologische Räume X, Y, Z liefert die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z)$$

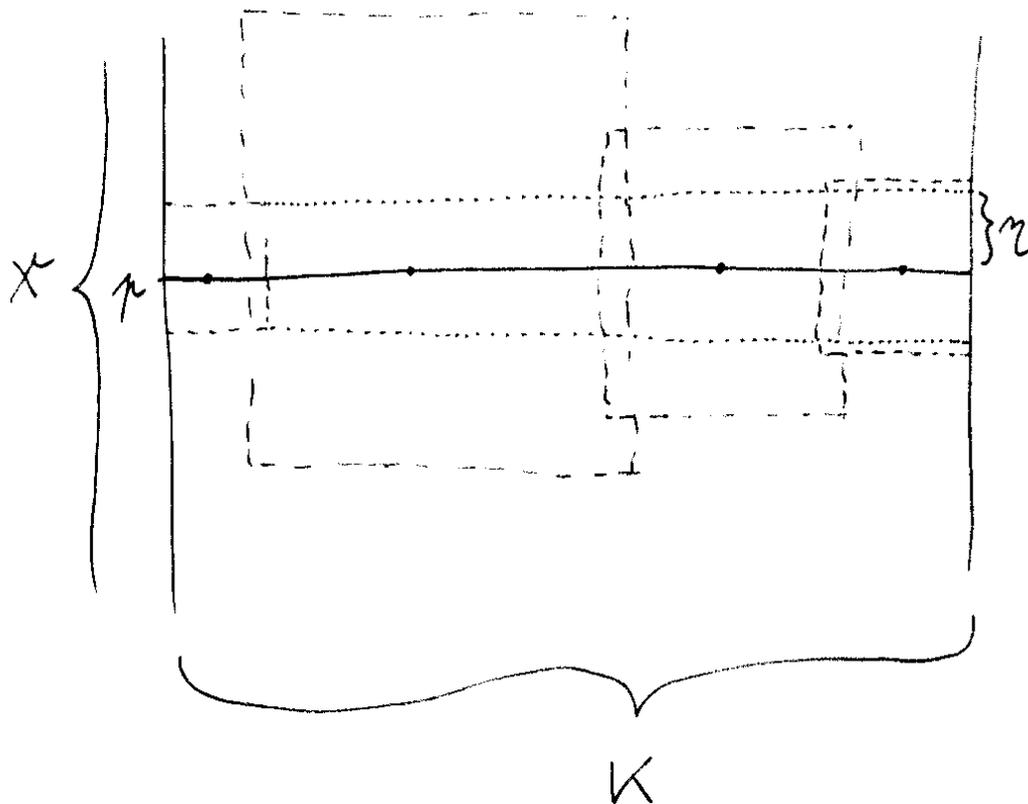


Illustration zum Beweis von Satz 3.4.4. Das Bild kommt von dem Beweis des Spezialfalls [AN1] 7.6.4. Das p im Bild heißt in unserem Beweis x , das η im Bild ist so gewählt, daß der η -Ball um x alias p in V enthalten wäre.

3.4.7. In kategorieller Sprache ausgedrückt besagt unser Lemma, daß der Funktor $\mathcal{C}(X, \) : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ verträglich ist mit endlichen Produkten.

Beweis. Per definitionem ist unsere Abbildung eine Bijektion von Mengen. Für $K \subset X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen induziert unsere Abbildung sicher eine Bijektion $\mathcal{O}(K, U \times Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(K, U) \times \mathcal{C}(X, Z)$. Für $K \subset X$ kompakt und $V \subseteq Z$ offen induziert sie ebenso eine Bijektion $\mathcal{O}(K, Y \times V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{O}(K, V)$. Diese Mengen erzeugen aber die jeweiligen Topologien. \square

Lemma 3.4.8. *Gegeben ein topologischer Raum X und eine topologische Gruppe G ist auch $\mathcal{C}(X, G)$ mit seiner kompakt-offenen Topologie eine topologische Gruppe.*

Beweis. Die Verknüpfung von $\mathcal{C}(X, G)$ ist stetig als die Komposition

$$\mathcal{C}(X, G) \times \mathcal{C}(X, G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(X, G)$$

unserer Produktverträglichkeit 3.4.6 mit dem Nachschalten der Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$. Die Inversenbildung ist stetig als das Nachschalten der Inversenbildung in G . \square

Beispiel 3.4.9 (Topologie der Charaktergruppe). Gegeben eine topologische Gruppe G wird ihre Charaktergruppe $\hat{G} = \mathfrak{X}(G) \subset \mathcal{C}(G, S^1)$ mit der von der kompakt-offenen Topologie induzierten Topologie eine topologische Gruppe und jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ induziert durch Vorschalten einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\hat{\varphi} : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$.

Beispiel 3.4.10 (Charaktergruppe von \mathbb{R}). Die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \exp(ixy)$ induziert einen Homöomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

In der Tat ist diese Abbildung bijektiv aufgrund unserer Beschreibung 2.7.7 der Einparameteruntergruppen von \mathbb{C}^\times . Sie ist stetig, da die ursprüngliche Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ stetig war. Schließlich ist das Bild des offenen Intervalls $(-a, a)$ die offene Menge $\mathcal{O}([-\pi/2a, \pi/2a], H)$ aller Abbildungen, die besagtes Kompaktum in die offene Halbebene $H := \{z \mid \text{Re}(z) > 0\}$ abbilden. Durch Verschieben sehen wir, daß alle offenen Intervalle $c + (-a, a) = (c - a, c + a)$ auf offene Mengen abgebildet werden. Damit ist unsere Abbildung auch offen.

Beispiel 3.4.11 (Weitere Charaktergruppen). Die Topologie auf der Charaktergruppe der Kreisgruppe ist die diskrete Topologie, da der stetige surjektive Gruppenhomomorphismus $\exp : \mathbb{R}i \rightarrow S^1$ eine stetige Einbettung $\mathfrak{X}(S^1) \hookrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}i)$ mit

dem diskreten Bild $2\pi i\mathbb{Z}$ induziert. Die stetige Abbildung $S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ gegeben durch $(z, n) \mapsto z^n$ liefert weiter einen Homöomorphismus

$$S^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathbb{Z})$$

Die Stetigkeit ist wieder klar, und da dann Kompakta auf Kompakta gehen müssen, gehen nach 1.8.8 auch abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen, wenn $\mathfrak{X}(\mathbb{Z})$ Hausdorff ist. Sogar für eine beliebige topologische Gruppe G folgt aber die Hausdorff-Eigenschaft von $\mathfrak{X}(G)$ unmittelbar aus den Definitionen. Für jede endliche Gruppe schließlich ist die Charaktergruppe offensichtlich diskret.

Lemma 3.4.12 (Produktverträglichkeit der Charaktergruppe). *Gegeben topologische Gruppen G, H ist die vom Rückzug längs der Einbettungen $\text{in}_G : G \rightarrow G \times H, g \mapsto (g, 1)$ und $\text{in}_H : H \rightarrow G \times H, h \mapsto (1, h)$ induzierte Abbildung ein Homöomorphismus*

$$(\mathfrak{X}(\text{in}_G), \mathfrak{X}(\text{in}_H)) : \mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

Beweis. Sie haben bereits in 2.7.29 geprüft, daß diese Abbildung bijektiv ist. Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $\mathfrak{X}(\text{in}_G)$ und $\mathfrak{X}(\text{in}_H)$. Andererseits betrachten wir die stetigen Abbildungen $\mathfrak{X}(\text{pr}_G) : \mathfrak{X}(G \times H) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$ und $\mathfrak{X}(\text{pr}_H) : \mathfrak{X}(G \times H) \rightarrow \mathfrak{X}(H)$. Die Abbildung

$$(+)\circ(\mathfrak{X}(\text{pr}_G) \times \mathfrak{X}(\text{pr}_H)) : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(G \times H)$$

ist dann stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen. Man sieht aber leicht, daß sie zur Abbildung aus unserem Lemma invers ist. \square

Satz 3.4.13 (Pontrjagin-Dualität für Fouriergruppen). *Ist G eine Fouriergruppe, so ist auch die zugehörige Charaktergruppe $\mathfrak{X}(G)$ eine Fouriergruppe und das Auswerten induziert eine exakte Paarung*

$$a : G \times \mathfrak{X}(G) \rightarrow S^1$$

Ist umgekehrt $G \times H \rightarrow S^1$ eine exakte Paarung von Fouriergruppen, so sind die davon induzierten Bijektionen Homöomorphismen $G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(H)$ und $H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $a : G \times \mathfrak{X}(G) \rightarrow S^1$ eine exakte Paarung ist. Für G die reelle Zahlengerade, die Kreisgruppe oder eine diskrete zyklische Gruppe hatten wir das schon in den vorangehenden Beispielen gesehen. Der Fall einer beliebigen Fouriergruppe folgt mit der Produktverträglichkeit der Charaktergruppe 3.4.12. Ist umgekehrt $G \times H \rightarrow S^1$ eine exakte Paarung von Fouriergruppen, so folgt die Stetigkeit der induzierten Bijektion $H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G)$ leicht aus dem sehr schwachen Exponentialgesetz 3.4.4. Wir sind fertig, sobald wir zeigen, daß jeder

stetige bijektive Homomorphismus von Fouriergruppen bereits ein Homöomorphismus ist. Das ist aber klar, denn die Bilder von Kompakta sind kompakt und in einer Fouriergruppe ist eine Teilmenge genau dann abgeschlossen, wenn ihr Schnitt mit jedem Kompaktum kompakt ist. Also sind auch Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. \square

Übungen

Übung 3.4.14. Die Charaktergruppe \hat{V} eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V wird selbst ein reeller Vektorraum, indem man für jeden Charakter χ und jeden Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ den Charakter $\alpha\chi$ erklärt durch die Vorschrift

$$(\alpha\chi)(v) := \chi(\alpha v)$$

Ich rede dann auch vom **Charakterraum**. Der Charakterraum hat dieselbe Dimension wie der ursprüngliche Raum. Jede lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ von endlichdimensionalen reellen Vektorräumen liefert durch Vorschalten eine lineare Abbildung $\hat{L} : \hat{W} \rightarrow \hat{V}$ in die Gegenrichtung auf den Charakterräumen.

Übung 3.4.15. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V liefert das Nachschalten der Exponentialabbildung einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, i\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{V} \\ \phi & \mapsto & \exp \circ \phi \end{array}$$

Dessen Inverse kann durch die Formel $\chi \mapsto d_0\chi$ beschrieben werden, wobei man $\chi \in \hat{V}$ als Abbildung $\chi : V \rightarrow \mathbb{C}$ auffaßt und beachtet, daß deren Differential im Ursprung $d_0\chi : V \rightarrow \mathbb{C}$ nur rein imaginäre Werte annehmen kann.

3.5 Natürlichkeit der Fouriertransformation

3.5.1. Ist G eine topologische Gruppe und \hat{G} ihre Charaktergruppe, so ist das Auswerten eines Charakters auf einem Gruppenelement $a : (g, \chi) \mapsto \chi(g)$ stets eine Paarung

$$a : G \times \hat{G} \rightarrow S^1$$

Die zugehörige Fouriertransformation \mathcal{F}_a bezeichnen wir meist ohne Index als \mathcal{F} . Wir notieren sie $\mu \mapsto \mu^\wedge$ und nennen sie die **kanonische Fouriertransformation**

$$\mathcal{F} : M(G) \rightarrow \text{Ens}(\hat{G}, \mathbb{C})$$

3.5.2. Die kanonische Fouriertransformation ist insofern besonders kanonisch, als sie nur von der topologischen Gruppe G und von sonst gar nichts abhängt. Sie ist auch von besonderer Bedeutung, da jede Paarung von topologischen Gruppen

$s : G \times H \rightarrow S^1$ eine Abbildung $\hat{s} : H \rightarrow \hat{G}$ induziert und die zugehörige Fouriertransformation \mathcal{F}_s als die Komposition $\mathcal{F}_s = (\circ\hat{s}) \circ \mathcal{F}$ der kanonischen Fouriertransformation mit dem Vorschalten von \hat{s} dargestellt werden kann. Die Notation \mathcal{F}_s wird damit in gewisser Weise überflüssig. Sie schien mir jedoch besonders gut geeignet, die Symmetrie zwischen einer Gruppe und ihrer Charaktergruppe transparent zu machen.

3.5.3 (Natürlichkeit der Fouriertransformation). Für jeden stetigen Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ von topologischen Gruppen ist das Vorwärtsdrücken von Maßen eine Abbildung $\varphi_* : M(G) \rightarrow M(H)$. Umgekehrt liefert das Vorschalten von φ eine Abbildung $\hat{\varphi} : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$ auf den Charakteren in die Gegenrichtung. Nach 1.6.16 kommutiert mit unseren kanonischen Fouriertransformationen in den Horizontalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Ens}(\hat{G}, \mathbb{C}) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \circ\hat{\varphi} \\ M(H) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Ens}(\hat{H}, \mathbb{C}) \end{array}$$

Lemma 3.5.4. Die Fouriertransformierte eines komplexen Maßes auf einer Fouriergruppe ist eine beschränkte stetige Funktion auf der Charaktergruppe.

3.5.5. Wir hatten bereits die Folgenstetigkeit gezeigt, aus der im Fall von Fouriergruppen auch die Stetigkeit folgt. Der hier gegebene Beweis ist aber natürlicher.

Beweis. Sei G unsere Fouriergruppe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei μ ein endliches nichtnegatives Maß. Dann ist seine Fouriertransformierte beschränkt durch $\mu(G)$, denn es gilt

$$|\mu^\wedge(\chi)| = \left| \int_G \chi \mu \right| \leq \int_G |\chi| \mu = \int_G 1 \mu = \mu(G)$$

Weiter gibt es, da G als die Vereinigung einer Folge von Kompakta geschrieben werden kann, für jedes $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset G$ mit $\mu(K) \leq \mu(G) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Gilt dann $|\chi - \psi| \leq \varepsilon$ auf diesem Kompaktum, so folgt die Abschätzung $|\mu^\wedge(\chi) - \mu^\wedge(\psi)| \leq \varepsilon(\mu(G) + 2)$. Also ist μ^\wedge stetig für die kompakt-offene Topologie. \square

3.5.6. Für jeden stetigen Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ von Fouriergruppen erhalten wir, indem wir 3.5.3 und 3.5.4 zusammenführen, mit den kanonischen Fouriertransformationen in den Horizontalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\hat{G}) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \circ\hat{\varphi} \\ M(H) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\hat{H}) \end{array}$$

Beispiel 3.5.7 (Fouriertransformation und Koordinatenwechsel). Wir betrachten den Gruppenisomorphismus $\varphi = A : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gegeben durch $x \mapsto Ax$ mit $A \in GL(n; \mathbb{R})$ und die Paarung $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ mit $(x, y) \mapsto e^{-2\pi i x \cdot y}$. Für die von dieser Paarung induzierte Abbildung $\hat{b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ prüft man $\hat{\varphi} \circ \hat{b} = \hat{b} \circ A^\top$ mit $A^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Multiplikation mit der transponierten Matrix. Mit dieser Erkenntnis und der Natürlichkeit der Fouriertransformation 3.5.3 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d^n x} & M(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\hat{\mathbb{R}}^n) & \xrightarrow{\circ \hat{b}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \\
 \downarrow |\det A|^{-1} \circ A^{-1} & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \circ \hat{\varphi} & & \downarrow \circ A^\top \\
 L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d^n x} & M(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\hat{\mathbb{R}}^n) & \xrightarrow{\circ \hat{b}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)
 \end{array}$$

mit unseren standardisierten Fouriertransformierten als Verknüpfung in den Horizontalen. Diese Verträglichkeit prüft man auch leicht durch explizite Rechnung, mit der Transformationsformel ergibt sich für alle $y \in \mathbb{R}^n$ eben

$$\int |\det A|^{-1} f(A^{-1}x) e^{-2\pi i x \cdot y} d^n x = \int f(x) e^{-2\pi i x^\top A^\top y} d^n x$$

Das verallgemeinert unsere Formel 3.1.5.5 für die Fouriertransformierte einer „gestreckten“ Funktion und zeigt, daß unsere Fouriertransformationen mit orthogonalen Abbildungen A verträglich sind.

Ergänzung 3.5.8. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Der **Satz von Bochner** beschreibt das Bild der durch die Fouriertransformation gegebenen Einbettung $\mathcal{F} : M(V; [0, \infty)) \hookrightarrow \mathcal{C}_b(\hat{V})$ des Raums der nichtnegativen endlichen Borelmaße in den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf der Charaktergruppe als die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen $\phi : \hat{V} \rightarrow \mathbb{C}$, die „positiv semidefinit“ sind in dem Sinne, daß für beliebiges n und beliebige paarweise verschiedene $\chi_1, \dots, \chi_n \in \hat{V}$ die quadratische Matrix mit Einträgen $\phi(\chi_i - \chi_j)$ positiv semidefinit ist. Daß unsere Abbildung in den positiv semidefiniten Funktionen landet, mag der Leser zur Übung selbst prüfen. Daß auch alle beschränkten positiv semidefiniten Funktionen im Bild liegen, ist nicht so leicht zu sehen.

Übungen

Übung 3.5.9 (Fouriertransformation und äußeres Produkt). Gegeben abzählbar basierte topologische Gruppen G und H kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(G) \times M(H) & \xrightarrow{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} & \mathcal{C}(\hat{G}) \times \mathcal{C}(\hat{H}) \\ \boxtimes \downarrow & & \downarrow \boxtimes \\ M(G \times H) & \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}(\mathfrak{X}(G \times H)) \xleftarrow{\circ p} & \mathcal{C}(\hat{G} \times \hat{H}) \end{array}$$

mit dem von der offensichtlichen exakten Paarung induzierten Fouriertransformation unten. Sind in Formeln komplexe Maße $\mu \in M(G)$, $\nu \in M(H)$ gegeben, so entspricht die Fouriertransformierte des Produktmaßes $\mu \boxtimes \nu \in M(G \times H)$ unter dem Isomorphismus der Produktverträglichkeit der Charaktergruppen $p : \mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$ dem äußeren Produkt der Fouriertransformierten unserer beiden Maße. In Formeln gilt mithin

$$p : (\mu \boxtimes \nu)^\wedge \xrightarrow{\sim} \mu^\wedge \boxtimes \nu^\wedge$$

Gegeben ein Ring k und Mengen X, Y und Abbildungen $f : X \rightarrow k$ sowie $g : Y \rightarrow k$ notieren wir hier $f \boxtimes g$ die Funktion $X \times Y \rightarrow k$ gegeben durch $(f \boxtimes g) : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$. Wir nennen $f \boxtimes g$ das **äußere Produkt** der beiden Funktionen f und g .

3.6 Die Inversionsformel für Fouriergruppen*

3.6.1. Wir beginnen mit der Konstruktion des Schwartzraums für allgemeine Fouriergruppen und verallgemeinern dazu unsere Formeln 3.1.5.7 und 3.1.5.6 für die Beziehung zwischen partiellen Ableitungen und der Fouriertransformation.

Definition 3.6.2. Gegeben ein Gruppenweg $\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ in einer Fouriergruppe und eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sagen wir, f besitze bei $g \in G$ eine **Richtungsableitung in Richtung** ξ , wenn $t \mapsto f(\xi(t)g)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist. Die Ableitung dieser Abbildung bei $t = 0$ notieren wir dann

$$(\partial_\xi f)(g)$$

Existiert sie für alle $g \in G$, so nennen wir f **differenzierbar nach** ξ und notieren die entsprechende Funktion auf unserer Gruppe $\partial_\xi f$.

Proposition 3.6.3. Seien G eine Fouriergruppe, μ ein Haarmaß und $\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein Gruppenweg. Ist $f \in \mathcal{L}^1(G, \mu)$ differenzierbar nach ξ mit $\partial_\xi f \in \mathcal{L}^1(G, \mu)$, so gilt

$$\mathcal{F}((\partial_\xi f)\mu) = -i\check{\xi}\mathcal{F}(f\mu)$$

für $\check{\xi} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{R}$ die Verknüpfung von $\hat{\xi} : \hat{G} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ mit dem Inversen des Isomorphismus $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{R}}, y \mapsto (x \mapsto e^{ixy})$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, (g, t) \mapsto f(\xi(t)g)$. An jeder Stelle $(g, t) \in G \times \mathbb{R}$ ist sie differenzierbar nach t mit der Ableitung $h(g, t) = (\partial_{\xi} f)(\xi(t)g)$. Also gilt für festes $g \in G$ und $a \in \mathbb{R}$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integrationsrechnung

$$\int_0^a h(g, t) dt = f(\xi(a)g) - f(g)$$

Nach unseren Annahmen ist h für festes $a > 0$ integrierbar auf $G \times [0, a]$ und wir erhalten für jeden Charakter $\chi \in \hat{G}$ die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\chi(\xi(-a))(\mathcal{F}f\mu)(\chi) - (\mathcal{F}f\mu)(\chi)}{a} &= \frac{1}{a} \int_G \int_0^a \chi(g) h(g, t) dt \boxtimes \mu \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \int_G \chi(\xi(-t)g) (\partial_{\xi} f)(g) \mu \boxtimes dt \\ &= (\mathcal{F}(\partial_{\xi} f)\mu)(\chi) \frac{1}{a} \int_0^a \chi(\xi(-t)) dt \end{aligned}$$

Nun ist unsere Definition von $\check{\xi}$ gleichbedeutend zur Identität $\chi(\xi(t)) = e^{it\check{\xi}(\chi)}$. Im Grenzwert $a \rightarrow 0$ strebt aber $(e^{-ia\check{\xi}(\chi)} - 1)/a$ gegen $-i\check{\xi}(\chi)$. \square

Definition 3.6.4. Gegeben eine Fouriergruppe G erklären wir zu jedem stetigen Gruppenhomomorphismus $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Einparameteruntergruppe $\check{\psi} : \mathbb{R} \rightarrow \hat{G}$ als die Verknüpfung von $\hat{\psi} : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{G}$ mit unserer Identifikation $\mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}, y \mapsto (x \mapsto e^{ixy})$.

Proposition 3.6.5. Seien G eine Fouriergruppe, μ ein Haarmaß und $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Gegeben $f \in \mathcal{L}^1(G; \mu)$ mit $\psi f \in \mathcal{L}^1(G; \mu)$ ist $\mathcal{F}(f\mu)$ partiell differenzierbar nach $\check{\psi}$ und es gilt

$$\mathcal{F}(\psi f\mu) = -i\partial_{\check{\psi}}(\mathcal{F}f\mu)$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{F}f\mu)(\check{\psi}(t)\chi) - (\mathcal{F}f\mu)(\chi)}{t} &= \frac{1}{t} \int_G (\langle g, \check{\psi}(t)\chi \rangle - \langle g, \chi \rangle) f(g) \mu \langle g \rangle \\ &= \int_G \frac{\langle g, \check{\psi}(t) \rangle - 1}{t} \langle g, \chi \rangle f(g) \mu \langle g \rangle \end{aligned}$$

Nun gilt per definitionem $\langle g, \check{\psi}(t) \rangle = e^{i\psi(g)t}$ und damit strebt der Bruch gegen $i\psi(g)$ für $t \rightarrow 0$. Die Proposition folgt so aus dem Satz über dominierte Konvergenz. \square

Definition 3.6.6. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S}(G)$ einer Fouriergruppe G bestehe aus allen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ derart, daß für beliebige Einparameteruntergruppen $\xi_1, \dots, \xi_k : \mathbb{R} \rightarrow G$ die iterierten partiellen Ableitungen $\partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_k} f$ existieren und daß für beliebige stetige Gruppenhomomorphismen $\psi_1, \dots, \psi_l : G \rightarrow \mathbb{R}$ die Produkte $\psi_1 \dots \psi_l \partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_k} f$ betragsmäßig beschränkt bleiben.

Beispiel 3.6.7. Im Fall der Fouriergruppe \mathbb{Z} ist der Schwartzraum der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \text{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ aller Abbildungen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^l a_n| < \infty$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.6.8. Im Fall der Kreisgruppe S^1 besteht der Schwartzraum $\mathcal{S}(S^1)$ aus allen Funktionen $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, für die $t \mapsto f(e^{it})$ eine glatte Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Lemma 3.6.9. Gegeben eine Fouriergruppe G ist für jede Schwartzfunktion f und jedes Haarmaß λ auch die Fouriertransformierte von $f\lambda$ eine Schwartzfunktion, in Formeln

$$f \in \mathcal{S}(G) \Rightarrow \mathcal{F}(f\lambda) \in \mathcal{S}(\hat{G})$$

Beweis. Man prüft unschwer $\partial_\xi(\psi f) = (\partial_\xi \psi)f + \psi(\partial_\xi f)$ und $\partial_\xi \psi$ ist eine Konstante. \square

3.6.10. Der Raum der **Schwartzmaße** $\mathcal{M}(G) \subset M(G)$ einer Fouriergruppe G bestehe aus allen Maßen, die Vielfache eines Haarmaßes mit einer Schwarzfunktion sind. Die Multiplikation mit jedem Haarmaß λ von G induziert folglich einen Isomorphismus

$$(\cdot\lambda) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$$

Satz 3.6.11 (Inversionsformel für Fouriergruppen). Sei $p : G \times H \rightarrow S^1$ eine exakte Paarung von Fouriergruppen mit ihrer dualen Paarung $\bar{p} : H \times G \rightarrow S^1$. So gilt:

1. Es gibt für jedes Haarmaß λ auf G genau ein Haarmaß μ auf H mit der Eigenschaft, daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}_p} & \mathcal{S}(H) \\ \cdot\lambda \uparrow & & \downarrow \cdot\mu \\ \mathcal{S}(G) & \xleftarrow{\mathcal{F}_{\bar{p}}} & \mathcal{M}(H) \end{array}$$

mit den Fouriertransformationen zu unseren Paarungen 3.2.10 in den Horizontalen das „Einmal-im-Kreis-Herumgehen“ an jeder Stelle die Identität liefert. Man nennt μ das **Plancherel-Maß zu λ** und notiert es $\mu = \hat{\lambda}$;

2. Für λ ein Haarmaß und μ das zugehörige Plancherelmaß erhalten die zwischen den Schwartzräumen induzierten Isomorphismen $\mathcal{F}_{p,\lambda}$ und $\mathcal{F}_{\bar{p},\mu}$ die L^2 -Norm und induzieren zueinander inverse Hilbertraumisomorphismen

$$L^2(G; \lambda) \xleftarrow{\sim} L^2(H; \mu)$$

Beweis. Im Fall $G = \mathbb{R}$ sind das genau unsere Inversionsformeln 3.3.5 und 3.3.7. Im Fall der Kreisgruppe $G = S^1$ ist das Übung [AN1] 10.3.9 und 2.7.22, 2.7.25. Der Fall der Gruppe \mathbb{Z} ist damit auch abgedeckt. Im Fall einer endlichen abelschen Gruppe ist die Aussage in 2.7.22, 2.7.25 enthalten, das Plancherelmaß zum normierten Haarmaß ist das Zählmaß. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß unser Satz für das Produkt $G = G_1 \times G_2$ zweier Fouriergruppen folgt, wenn wir ihn für die Faktoren kennen. Seien λ_1 und λ_2 Haarmaße. Das Erzeugnis von äußeren Produkten $f_1 \boxtimes f_2$ mit $f_1 \in \mathcal{S}(G_1)$ und $f_2 \in \mathcal{S}(G_2)$ liegt sicher dicht in $L^2(G_1 \times G_2; \lambda_1 \boxtimes \lambda_2)$. Stetige Fortsetzung zeigt, daß es genau einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2(G_1 \times G_2; \lambda_1 \boxtimes \lambda_2) \xrightarrow{\sim} L^2(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2; \hat{\lambda}_1 \boxtimes \hat{\lambda}_2)$$

gibt mit $f_1 \boxtimes f_2 \mapsto \mathcal{F}(f_1 \lambda_1) \boxtimes \mathcal{F}(f_2 \lambda_2)$ für alle $f_1 \in \mathcal{S}(G_1), f_2 \in \mathcal{S}(G_2)$. Da wir das für die Schwartzfunktionen auf G_1 und G_2 bereits wissen, folgt auch hier, daß der zur dualen Paarung in derselben Weise konstruierte Isomorphismus die inverse Abbildung sein muß. Da schließlich beide Transformationen Schwartzfunktionen zu Schwartzfunktionen machen, folgt auch unsere Inversionsformel für Schwartzfunktionen auf beliebigen Fouriergruppen. \square

Ergänzung 3.6.12 (Fouriertransformation von Halbdichten). Ich will kurz erklären, wie man die Inversionsformel von der Wahl Haar'scher Maße befreien kann. Gegeben eine Fouriergruppe G erklärt man dazu den Vektorraum $\mathcal{H}(G)$ der **Schwartz-Halbdichten auf G** , indem man ausgeht von der Menge aller Paare (f, λ) bestehend aus einer Schwartzfunktion $f \in \mathcal{S}(G)$ und einem Haarmaß λ , modulo der Äquivalenzrelation gegeben durch $(f, a\lambda) \sim (\sqrt{a}f, \lambda)$ für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Äquivalenzklasse von (f, λ) notieren wir $f\sqrt{\lambda}$ und die Äquivalenzklasse von $(1, \lambda)$ abkürzend $\sqrt{\lambda}$. Es ist klar, wie wir Schwartzhalbdichten mit Schwartzfunktionen zu multiplizieren haben, und daß für jedes Haarmaß λ das Multiplizieren mit $\sqrt{\lambda}$ eine Bijektion

$$(\cdot\sqrt{\lambda}) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(G)$$

induziert. Weiter ist klar, daß es auf $\mathcal{H}(G)$ genau eine Struktur als \mathbb{C} -Vektorraum gibt, unter der alle diese Bijektionen Vektorraumisomorphismen werden. Schließlich ist auch klar, daß wir für jedes Haarmaß λ einen Vektorraumisomorphismus

$$(\cdot\sqrt{\lambda}) : \mathcal{H}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$$

erklären können durch die Vorschrift, daß er nach Vorschalten mit dem zuvor erklärten Isomorphismus den offensichtlichen Isomorphismus $(\cdot\lambda) : \mathcal{S}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G)$ liefert. Der Sinn dieser Konstruktion besteht nun darin, daß für eine exakte

Paarung $p : G \times H \rightarrow S^1$ von Fouriergruppen und ein Haarmaß λ auf G mit zugehörigem Plancherelmaß $\hat{\lambda}$ auf H die Komposition

$$\mathcal{H}(G) \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \mathcal{M}(G) \xrightarrow{\mathcal{F}_p} \mathcal{S}(H) \xrightarrow{\sqrt{\hat{\lambda}}} \mathcal{H}(H)$$

von der Wahl von λ gar nicht mehr abhängt und daß die duale Paarung die inverse Abbildung liefert. Weiter können wir auf $\mathcal{H}(G)$ ein Skalarprodukt erklären durch die Vorschrift $\langle f\sqrt{\lambda}, g\sqrt{\lambda} \rangle := \int \bar{f}g\lambda$ für ein und jedes Haarmaß λ und unsere Fouriertransformation von Halbdichten wird dann ein Isomorphismus von Skalarprodukträumen. Die Vervollständigung des Skalarproduktraums $\mathcal{H}(G)$ zu einem Hilbertraum notieren wir $L^2(G)$ und beachten, daß dieser Hilbertraum von keinerlei Wahlen mehr abhängt und daß die Fouriertransformation zu jeder exakten Paarung $p : G \times H \rightarrow S^1$ von Fouriergruppen einen vollständig kanonischen Hilbertraumisomorphismus

$$\mathcal{F}_p : L^2(G) \xrightarrow{\sim} L^2(H)$$

mit Inversem $\mathcal{F}_{\bar{p}}$ induziert. Die Elemente von $L^2(G)$ nennen wir **quadratintegrierbare Halbdichten auf G** .

3.6.13 (Injektivität der Fouriertransformation auf Maßen). Gegeben eine Fouriergruppe G erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto (\mu \mapsto \int f\mu)$ eine Inklusion $\text{int} : L^\infty(G) \hookrightarrow \mathcal{M}(G)^*$ und durch die Vorschrift $\mu \mapsto (f \mapsto \int f\mu)$ eine Inklusion $\text{int} : \mathcal{M}(G) \hookrightarrow \mathcal{S}(G)^*$ und mit diesen Vertikalen und der Transponierten der Fouriertransformation $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{\bar{a}}$ zur Paarung $\bar{a} : \hat{G} \times G \rightarrow S^1, (\chi, g) \mapsto \chi(g)$ in der unteren Horizontalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(G) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{F}}} & L^\infty(\hat{G}) \\ \text{int} \downarrow & & \downarrow \text{int} \\ \mathcal{S}(G)^* & \xrightarrow{\bar{\mathcal{F}}^\top} & \mathcal{M}(\hat{G})^* \end{array}$$

Es zeigt, daß unsere Fouriertransformation von komplexen Maßen nur das Maß Null zur Nullfunktion macht. Die behaupteten Injektivitäten zeigt man wie im Fall $G = \mathbb{R}^n$ in 3.3.11 folgende.

3.6.14 (Verträglichkeit der Transformation von Maßen und L^2 -Funktionen). Gegeben eine Fouriergruppe G betrachten wir den Raum $L^1_S(G)$ aller meßbaren fast überall definierten Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß ihr Produkt mit jeder Schwartzfunktion nach jedem Haarmaß integrierbar ist. Offensichtlich liegen für alle $p \in [1, \infty]$ alle L^p -Funktionen in Bezug auf ein Haarmaß in diesem Teilraum. Halten wir ein Haarmaß λ fest, so erhalten wir durch die Vorschrift $f \mapsto (g \mapsto \int fg\lambda)$ eine Inklusion $\text{int}_\lambda : L^1_S(G) \hookrightarrow \mathcal{S}(G)^*$. Mit diesen

Abbildungen erhalten wir nun kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L^1(G; \lambda) & \xrightarrow{\cdot\lambda} & M(G) \xrightarrow{\mathcal{F}} L^\infty(\hat{G}) \\
 \text{int}_\lambda \downarrow & & \text{int} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \text{int} \\
 \mathcal{S}(G)^* & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{S}(G)^* \xrightarrow{\bar{\mathcal{F}}^\top} \mathcal{M}(\hat{G})^*
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 L^2(G; \lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\hat{G}; \hat{\lambda}) \\
 \text{int}_\lambda \downarrow & & \downarrow \text{int} \\
 \mathcal{S}(G)^* & \xrightarrow{\bar{\mathcal{F}}^\top} & \mathcal{M}(\hat{G})^*
 \end{array}$$

mit derselben Abbildung $\bar{\mathcal{F}}^\top$ wie in 3.6.13 und der Fouriertransformation für L^2 -Funktionen oben rechts. Man zeigt das wie im Fall von \mathbb{R}^n beim Beweis von 3.3.8, ich führe das hier nicht mehr so genau aus. Es folgt wieder, daß die durch direktes Integrieren auf L^1 -Funktionen erklärte Transformation und die durch stetige Fortsetzung vom Schwartzraum auf L^2 -Funktionen erklärte Transformation auf dem Schnitt $L^1(G; \lambda) \cap L^2(G; \lambda)$ übereinstimmen. Ebenso folgt auch, daß uns für L^1 -Funktionen f mit nach Haarmaßen integrierbarer Fouriertransformierten eine nochmalige Transformation ihres Produkts mit dem Plancherelmaß die ursprüngliche Funktion zurückgibt, in Formeln $\mathcal{F}(\mathcal{F}f\lambda)\hat{\lambda} = f$.

Beispiel 3.6.15 (Abtastatz, Poisson-Formel und Natürlichkeit). Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $t \mapsto e^{2\pi it}$ sowie die Paarungen $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $(t, \omega) \mapsto e^{-2\pi i\omega t}$ und $p : S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ mit $(z, n) \mapsto z^{-n}$. Für die von diesen Paarungen induzierten Abbildungen $\hat{b} : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ und $\hat{p} : \mathbb{Z} \rightarrow \hat{S}^1$ prüft man $\hat{\varphi} \circ \hat{p} = \hat{b} \circ i$ für $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Einbettung. Mit dieser Erkenntnis und der Natürlichkeit der Fouriertransformation 3.5.3 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 M(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\hat{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\circ\hat{b}} & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\
 \varphi_* \downarrow & & \downarrow \circ\hat{\varphi} & & \downarrow \circ i \\
 M(S^1) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\hat{S}^1) & \xrightarrow{\circ\hat{p}} & \mathcal{C}(\mathbb{Z})
 \end{array}$$

Die Eindeutigkeitsaussage im Abtastatz 3.3.17 folgt, sobald wir gezeigt haben, daß unsere Fouriertransformation eine Injektion $M(S^1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\hat{S}^1)$ induziert. In der Tat ist die Restriktion von φ_* auf $M([-1/2, 1/2])$ sicher ein Isomorphismus und damit injektiv, und dann muß auch die Komposition längs der oberen und rechten Kante eine Injektion $M([-1/2, 1/2]) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ sein. Spezialisieren wir unser Diagramm auf die Schwartzräume und gehen in der unteren Horizontalen zur Inversen über, so erhalten wir das obere rechte Quadrat eines kommutativen

Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\cdot dt} & \mathcal{M}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_b} & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\
 \sigma \downarrow & & \varphi_* \downarrow & & \downarrow oi \\
 \mathcal{S}(S^1) & \xrightarrow{\cdot \mu} & \mathcal{M}(S^1) & \xrightarrow{\mathcal{F}_p} & \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \\
 & \searrow & \uparrow \cdot \mu & & \downarrow \cdot \zeta \\
 & & \mathcal{S}(S^1) & \xleftarrow{\mathcal{F}_{\bar{p}}} & \mathcal{M}(\mathbb{Z})
 \end{array}$$

mit μ dem normierten Haarmaß auf der Kreisgruppe und $\sigma : f \mapsto \tilde{g}$ gegeben durch $\tilde{g}(\varphi(t)) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ und ζ dem Zählmaß auf \mathbb{Z} . Füllen wir oben links eine Schwartzfunktion ein und lassen sie auf beiden Wegen nach unten in die Mitte laufen und werten das Resultat bei Null aus, so ergibt sich die Poissonformel.

Definition 3.6.16. Wir sagen, ein topologisches Maß auf einem topologischen Raum sei **kompakt getragen**, wenn es in unserem Raum ein Kompaktum gibt, dessen Komplement eine Nullmenge ist.

3.6.17 (**Fouriertransformierte kompakt getragener Maße**). Die Fouriertransformierte eines von Null verschiedenen kompakt getragenen Maßes $\lambda \in M(\mathbb{R})$ kann nie kompakten Träger haben. In der Tat fänden wir zu solch einem Maß mithilfe der Natürlichkeit 3.5.3 auch ein von Null verschiedenes Maß auf der Kreisgruppe $\mu \in M(S^1)$, das allen Teilmengen des „oberen Halbkreises“ Null zuordnet, und dessen Fouriertransformierte dennoch nur auf endlich vielen Elementen von $\hat{S}^1 \cong \mathbb{Z}$ von Null verschiedene Werte annähme. Wegen der Injektivität der Fouriertransformation $M(S^1) \hookrightarrow \text{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muß aber dann μ das Produkt von einem Haarmaß mit einem Laurentpolynom in $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ sein, und ein von Null verschiedenes Laurentpolynom kann unmöglich auf dem oberen Halbkreis verschwinden.

Vorschau 3.6.18. Sei G eine Fouriergruppe mit Haarmaß μ . Wie in 3.3.16 mag man wieder den Raum

$$S' \subset S^*$$

aller **temperierten Distributionen** als den kleinsten Untervektorraum des vollen Dualraums S^* des Raums der Schwartzfunktionen erklären, der (1) alle Linearformen umfaßt, die die Gestalt $\varphi \mapsto \int f\varphi\mu$ haben für $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und betragsmäßig beschränkt durch ein Vielfaches eines Produkts von stetigen Gruppenhomomorphismen $G \rightarrow \mathbb{R}$, und der (2) stabil ist unter den Transponierten $\partial_\xi^\top : S^* \rightarrow S^*$ der partiellen Ableitungen $\partial_\xi : S \rightarrow S$ nach Gruppenwegen $\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$. Man überlegt sich ohne große Schwierigkeiten, daß die Transponierte der Fouriertransformation $\mathcal{F}^\top : S^* \xrightarrow{\sim} S^*$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{F}^\top : S' \xrightarrow{\sim} S'$$

auf den temperierten Distributionen induziert, und daß sich alle L^p -Funktionen f als temperierte Distributionen auffassen lassen. Darüberhinaus lassen sich auch alle endlichen Borelmaße μ als die temperierte Distributionen auffassen vermittels der immergleichen Vorschrift $\varphi \mapsto \int \varphi \mu$, und alle bisher betrachteten Varianten der Fouriertransformation können als Einschränkung unserer Transformation $\mathcal{F}^\top : \mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'$ verstanden werden. Es sollte nun weiter so sein, daß es für Fouriergruppen G, H und temperierte Distributionen Λ auf G und Γ auf H genau eine temperierte Distribution $\Lambda \boxtimes \Gamma$ auf $G \times H$ gibt mit $(\Lambda \boxtimes \Gamma)(f \boxtimes g) = \Lambda(f)\Gamma(g)$ und daß die Fouriertransformation von temperierten Distributionen mit \boxtimes verträglich ist. Das habe ich mir aber nicht so genau überlegt.

Beispiel 3.6.19. Zum Beispiel sollte die Dirac'sche δ_1 -Distribution δ_1 auf S^1 der konstanten Funktion auf \mathbb{Z} entsprechen, so daß wir sie formal als $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ zu entwickeln hätten.

Übungen

Übung 3.6.20 (Poisson'sche Summationsformel, koordinatenfreie Variante). Seien $s : V \times W \rightarrow S^1$ eine exakte Paarung endlichdimensionaler reeller Vektorräume und $\Gamma := \mathbb{Z}v$ das Gruppenerzeugnis einer Basis v_1, \dots, v_n und λ das durch $\lambda(\sum_{i=1}^n [0, 1]v_i) = 1$ normalisierte Haarmaß auf V . Sei weiter

$$\Gamma^\wedge := \{w \in W \mid \langle \gamma, w \rangle = 1 \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

das sogenannte „duale Gitter“. Ist dann $f \in \mathcal{S}(V)$ eine Schwartzfunktion und $\hat{f} := \mathcal{F}_s(f\lambda)$ die Fouriertransformierte des Maßes $f\lambda$, so gilt

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\kappa \in \Gamma^\wedge} \hat{f}(\kappa)$$

3.7 Faltung von Maßen

Definition 3.7.1. Gegeben σ -endliche Maße μ, ν auf einem abzählbar basierten topologischen Monoid G erklären wir ein Maß $\mu * \nu$ auf G , die **Faltung** oder **Konvolution** unserer beiden Maße, als das Bildmaß unter der Multiplikationsabbildung $\text{mult} : G \times G \rightarrow G$ des Produktmaßes $\mu \boxtimes \nu$, in Formeln

$$\mu * \nu := \text{mult}_*(\mu \boxtimes \nu)$$

3.7.2. Der Begriff der Faltung scheint auf eine Arbeit aus dem Jahre 1923 von Gustav Doetsch mit dem Titel „Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus“ zurückzugehen. Gustav Doetsch begründete übrigens den Gebrauch der Laplace-Transformation in den Ingenieurwissenschaften und wurde 1931 Professor in Freiburg.

3.7.3 (Faltung komplexer Maße). Die Faltung zweier σ -endlicher Maße liefert nicht notwendig wieder ein σ -endliches Maß: So ist etwa die Faltung des Lebesgue-Maßes auf der reellen Zahlengeraden mit sich selbst das Maß, das jeder meßbaren Nullmenge den Wert Null zuordnet und jeder anderen meßbaren Menge den Wert Unendlich. Die Faltung zweier endlicher Maße liefert jedoch notwendig wieder ein endliches Maß. Deshalb können wir durch bilineare Fortsetzung auch die Faltung reeller beziehungsweise komplexer Maße erklären und erhalten so wieder reelle beziehungsweise komplexe Maße.

Beispiele 3.7.4. Die Faltung des Dirac-Maßes bei $g \in G$ mit dem Dirac-Maß bei $h \in G$ ist das Dirac-Maß bei gh , in Formeln $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$. Die Faltung eines beliebigen komplexen Maßes μ mit dem Dirac-Maß bei $g \in G$ ist das „um g verschobene Maß μ “, in Formeln $\delta_g * \mu = (g \cdot)_* \mu$. Insbesondere gilt stets $\delta_1 * \mu = \mu$.

Lemma 3.7.5. *Die Faltung von komplexen Maßen auf einem abzählbar basierten topologischen Monoid ist assoziativ und im Fall eines kommutativen Monoids auch kommutativ.*

3.7.6. Sei G unser abzählbar basiertes topologisches Monoid. Da wir bereits wissen, daß die Faltung bilinear ist und das Dirac-Maß beim neutralen Element ein Einselement, ist $M(G)$ mit der Konvolution als Multiplikation dann eine \mathbb{C} -Ringalgebra. Für $G = \mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie liefert etwa die Vorschrift $\sum a_n X^n \mapsto \sum a_n \delta_n$ einen Homomorphismus von Ringalgebren $\mathbb{C}[X] \hookrightarrow M(\mathbb{N})$ und dieselbe Vorschrift liefert auch einen Homomorphismus von Ringalgebren $\mathbb{C}[X, X^{-1}] \hookrightarrow M(\mathbb{Z})$.

Beweis. Sei G unser abzählbar basiertes topologisches Monoid. Wir zeigen nur die Assoziativität und überlassen den Beweis der übrigen Aussagen dem Leser zur Übung. Wir gehen aus vom kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 G \times (G \times G) & \xrightarrow{\text{id} \times \text{mult}} & G \times G \\
 \downarrow b & & \downarrow \text{mult} \\
 G \times G \times G & \xrightarrow{\text{multt}} & G \\
 \uparrow c & & \uparrow \text{mult} \\
 (G \times G) \times G & \xrightarrow{\text{mult} \times \text{id}} & G \times G
 \end{array}$$

Gegeben komplexe Maße μ, ν, λ sind die Maße $\mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)$ und $(\mu \boxtimes \nu) \boxtimes \lambda$ nach 1.7.24 unter den offensichtlichen Identifikationen in der linken Vertikalen verwandt zu ein- und demselben Maß auf $G \times G \times G$, das wir $\mu \boxtimes \nu \boxtimes \lambda$ notieren.

Mit 1.7.23 und folgt

$$\begin{aligned}
\mu * (\nu * \lambda) &= \text{mult}_*(\mu \boxtimes \text{mult}_*(\nu \boxtimes \lambda)) \\
&= \text{mult}_*(\text{id}_*(\mu) \boxtimes \text{mult}_*(\nu \boxtimes \lambda)) \\
&= \text{mult}_*(\text{id} \times \text{mult})_*(\mu \boxtimes (\nu \boxtimes \lambda)) \\
&= \text{multt}_*(\mu \boxtimes \nu \boxtimes \lambda)
\end{aligned}$$

Für $(\mu * \nu) * \lambda$ erhält man analog dieselbe Darstellung. \square

Satz 3.7.7 (Fouriertransformation und Faltung). *Die Fouriertransformierte der Faltung zweier komplexer Maße auf einer Fouriergruppe ist das punktweise Produkt der Fouriertransformierten unserer beiden Maße, in Formeln*

$$(\mu * \nu)^\wedge = \mu^\wedge \cdot \nu^\wedge$$

Beispiel 3.7.8. Im Fall eines Diracmaßes $\mu = \delta_a$ erhalten wir insbesondere in Verallgemeinerung von 3.1.5.3 die Formel $((a \cdot)_*\nu)^\wedge(\chi) = \chi(a)\nu^\wedge(\chi)$. Im Fall der Gruppe \mathbb{Z} ist die Verknüpfung

$$\mathbb{C}[X, X^{-1}] \hookrightarrow M(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}(\hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(S^1)$$

für den durch unsere Paarung $p : S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ mit $(z, n) \mapsto z^n$ gegebenen Isomorphismus $\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} S^1$ schlicht das Einsetzen der durch die Einbettung gegebenen Funktion $z : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ in ein Laurentpolynom.

Beweis. Sei G unsere Fouriergruppe und seien $\mu, \nu \in M(G)$ komplexe Maße. Da in der Behauptung beide Seiten bilinear sind, dürfen wir unsere Maße endlich und nichtnegativ annehmen. Gegeben $\chi \in \hat{G}$ gilt es zu zeigen $(\mu * \nu)^\wedge(\chi) = \mu^\wedge(\chi)\nu^\wedge(\chi)$ alias

$$\int_G \chi(g) (\mu * \nu)\langle g \rangle = \left(\int_G \chi(h)\mu\langle h \rangle \right) \left(\int_G \chi(k)\nu\langle k \rangle \right)$$

Mit Hilfe der Beschreibung 1.6.16 von Integralen unter Bildmaßen und der Definition der Faltung können wir die linke Seite umformen zu

$$\int_{G \times G} (\chi \circ \text{mult})(h, k) (\mu \boxtimes \nu)\langle h, k \rangle = \int_{G \times G} \chi(hk) (\mu \boxtimes \nu)\langle h, k \rangle$$

Wegen $\chi(hk) = \chi(h)\chi(k)$ folgt die Behauptung so aus dem Satz von Fubini. \square

Beweisvariante. Wir notieren die Verknüpfung $m : G \times G \rightarrow G$. Die Komposition $\mathfrak{X}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(G \times G) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G)$ des Komorphismus zur Verknüpfung \hat{m} mit dem Isomorphismus p der Produktverträglichkeit der Charaktergruppe ist

offensichtlich die diagonale Einbettung, in Formeln $p \circ \hat{m} = \Delta_{\hat{G}} : \hat{G} \rightarrow \hat{G} \times \hat{G}$. Unsere Formeln liefern für die Fouriertransformierte einer Faltung also

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)^\wedge &= (m_*(\mu \boxtimes \nu))^\wedge \text{ nach Definition der Faltung,} \\ &= (\mu \boxtimes \nu)^\wedge \circ \hat{m} \text{ nach der Natürlichkeit 3.5.3,} \\ &= (\mu^\wedge \boxtimes \nu^\wedge) \circ p \circ \hat{m} \text{ nach der Produktverträglichkeit 3.5.9,} \\ &= \mu^\wedge \cdot \nu^\wedge \text{ wegen } p \circ \hat{m} = \Delta_{\hat{G}}. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 3.7.9 (Abstrakter zentraler Grenzwertsatz). *Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} , unter dem x und x^2 integrierbar sind mit $\int x \mu \langle x \rangle = 0$ und $\int x^2 \mu \langle x \rangle = 1$, so konvergiert die Folge der jeweils um den Faktor \sqrt{n} gestauchten iterierten Faltungen μ^{*n} gegen die **Standard-Normalverteilung** $e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$ im Sinne einer gleichmäßigen Konvergenz der Verteilungsfunktionen. In Formeln haben wir also gleichmäßig in $a \in \mathbb{R}$ die Konvergenz*

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{n} \cdot a} \mu^{*n} \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^a \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Ergänzung 3.7.10. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hört sich unser zentraler Grenzwertsatz 3.7.9 dann so an: Gegeben eine Folge identisch verteilter stochastisch unabhängiger reeller Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots mit Erwartungswert Null und Varianz Eins konvergiert die Folge der Zufallsvariablen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$$

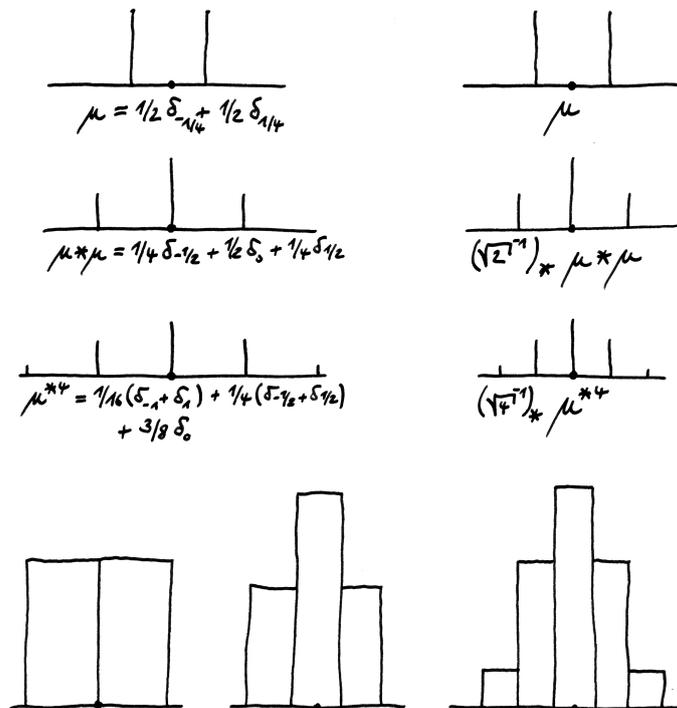
in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung.

Beweis. Unsere Bedingungen liefern, daß die Fouriertransformierte alias die charakteristische Funktion μ^\wedge von μ im Sinne von 3.3.15 zweimal stetig differenzierbar ist, und ihre Taylorentwicklung um den Nullpunkt liefert mithilfe einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 3.1.5.6 eine Darstellung

$$\mu^\wedge(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + y^2 \varepsilon(y)$$

für ε stetig mit Funktionswert Null bei Null. Nach 3.7.7 ist nun die Fouriertransformierte der Faltung das Produkt der Fouriertransformierten, und verwenden wir zusätzlich 3.1.5.5 oder besser 3.2.21, so ergibt sich für die charakteristische Funktion der um den Faktor \sqrt{n} gestauchten n -fach iterierten Faltung die Darstellung

$$\left((n^{-1/2})_* \mu^{*n} \right)^\wedge (y) = \left(1 - \frac{y^2}{2n} + \frac{y^2}{n} \varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right)^n$$



In der linken Spalte sind die erste, zweite und vierte Faltungspotenz desjenigen Wahrscheinlichkeitsmaßes μ dargestellt, das die Summe der Hälfte der Diracmaße an den Stellen $1/4$ und $-1/4$ ist. Diese Faltungspotenzen sind wieder Summen von Diracmaßen, und das Maß eines Punktes entspricht der Länge des an der entsprechenden Stelle angehefteten vertikalen Strichleins. In der rechten Spalte sind entsprechend für $n = 1, 2, 4$ die um den Faktor \sqrt{n} in x -Richtung gestauchten Maße dargestellt. Die untere Zeile schließlich entsteht aus der rechten Spalte, indem wir jedes Strichlein durch ein Türmchen ersetzen, dessen Fläche gerade die Länge unseres Strichleins ist. Der zentrale Grenzwertsatz bedeutet in obigem Spezialfall anschaulich, daß auf jedem kompakten Intervall die Treppenfunktionen der unteren Zeile gleichmäßig gegen eine entsprechend normalisierte Gauss'sche Glockenkurve streben.

Hier steht $(n^{-1/2})_*$ für das Bildmaß im Sinne von 1.4.32 unter der durch die Multiplikation mit $n^{-1/2}$ gegebenen Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Unsere Funktionenfolge strebt nun nach [AN1] 3.2.19 punktweise gegen die Funktion $e^{-y^2/2}$ und all ihre Glieder sind als charakteristische Funktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen betragsmäßig beschränkt durch Eins. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt damit für jede Funktion f des Schwartzraums

$$\int ((n^{-1/2})_* \mu^{*n})^\wedge(y) f(y) dy \rightarrow \int e^{-y^2/2} f(y) dy$$

bei $n \rightarrow \infty$. Nach 3.1.16 ist die Funktion $e^{-y^2/2}$ die charakteristische Funktion im Sinne von 3.3.15 des Maßes $e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$, so daß wir wie im Beweis von 3.3.14 mit der Erkenntnis, daß die Fouriertransformation im Wesentlichen ihre eigene Transponierte ist, folgern können, daß für alle Funktionen g des Schwarzraums gilt

$$\int g(x) ((n^{-1/2})_* \mu^{*n})\langle x \rangle \rightarrow \int g(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

bei $n \rightarrow \infty$. Das anschließende Lemma 3.7.11 beendet dann den Beweis. \square

Lemma 3.7.11. *Sei $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf \mathbb{R} und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit einer stetigen Verteilungsfunktion $V = V_\mu$. Gilt*

$$\int g(x) \mu_n \langle x \rangle \rightarrow \int g(x) \mu \langle x \rangle \quad \text{bei } n \rightarrow \infty$$

für jede Funktion g des Schwartzraums, so streben die Verteilungsfunktionen V_n der μ_n gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion V von μ .

Beweis. Alle unsere Verteilungsfunktionen streben gegen Null für $b \rightarrow -\infty$ und gegen Eins für $b \rightarrow \infty$ und wachsen monoton. Die Funktion g ist stetig und sogar gleichmäßig stetig nach [AN1] 4.1.13. Es ist damit nicht schwer einzusehen, daß aus der punktweisen Konvergenz $V_n(b) \rightarrow V(b)$ bereits die gleichmäßige Konvergenz folgt. Gegeben $I \subset J \subset \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle derart, daß der Abschluß des Ersten im Inneren des Zweiten enthalten ist, in Formeln $\bar{I} \subset J^\circ$, finden wir eine glatte Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, die auf I Eins ist und die außerhalb von J verschwindet. Sicher gilt dann

$$\mu(I) \leq \int g(x) \mu \langle x \rangle \leq \mu(J)$$

und ebenso für alle μ_n . Wir finden folglich für alle $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$n \geq N \Rightarrow \begin{cases} \mu_n(I) \leq \mu(J) + \varepsilon; \\ \mu(I) \leq \mu_n(J) + \varepsilon. \end{cases}$$

Sind also $I \subset J \subset K \subset \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle, von denen jeweils der Abschluß des einen im Inneren des nächsten liegt, so folgt

$$\mu(I) - \varepsilon \leq \mu_n(J) \leq \mu(K) + \varepsilon$$

für hinreichend großes n . Da wir die Verteilungsfunktion von μ stetig angenommen hatten, können wir für ein gegebenes beschränktes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ auch beschränkte Intervalle I, K wie oben finden mit $\mu(K) - \mu(I) \leq \varepsilon$. Zusammen folgt so für jedes beschränkte Intervall $J \subset \mathbb{R}$ bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(J) = \mu(J)$$

Schließlich finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein Intervall $[a, b)$ mit $\mu([a, b)) \geq 1 - \varepsilon$ und folglich $\mu((-\infty, a)) \leq \varepsilon$. Für hinreichend großes n gilt dann $\mu_n([a, b)) \leq 1 - 2\varepsilon$ und damit $\mu_n((-\infty, a)) \leq 2\varepsilon$. Für $x \leq a$ gilt bereits für diese n die Abschätzung $|\mu((-\infty, x)) - \mu_n((-\infty, x))| \leq 3\varepsilon$. Für $x > a$ müssen wir zusätzlich n noch so groß wählen, daß $|\mu([a, x)) - \mu_n([a, x))| \leq \varepsilon$, und dann folgt für derart große n offensichtlich

$$|\mu((-\infty, x)) - \mu_n((-\infty, x))| \leq 4\varepsilon$$

alias die punktweise Konvergenz der Verteilungsfunktionen. □

3.8 Translationsinvariante Teilräume*

3.8.1. In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man mithilfe der Fouriertheorie die abgeschlossenen translationsinvarianten Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum bestimmen kann. Wir werden das Resultat nicht benötigen, es wird später durch die Theorie der unitären Darstellungen von Vektorräumen überholt. Jedoch mag es für manche Vorlesung einen netten Abschluß liefern.

Definition 3.8.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Ein Teilraum $M \subset L^2(V)$ heißt **translationsinvariant** genau dann, wenn er für alle $a \in V$ invariant ist unter der Translation $\tau_a : L^2(V) \rightarrow L^2(V)$ gegeben durch $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$, wenn also in Formeln gilt

$$f \in M \Rightarrow \tau_a f \in M \quad \forall a \in V$$

Beispiel 3.8.3. Für $E \subset \hat{V}$ Borel-meßbar ist das Bild von $\chi_E L^2(\hat{V}) = L^2(E)$ unter der Fouriertransformation nach 3.7.8 ein translationsinvarianter Teilraum von $L^2(V)$, und nach [AN1] 9.2.16 ist dieser Teilraum auch abgeschlossen. Wir zeigen nun, daß diese Konstruktion bereits alle Beispiele für abgeschlossene translationsinvariante Teilräume liefert.

Satz 3.8.4 (Translationsinvariante Teilräume in $L^2(V)$). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. So gilt:

1. Jeder translationsinvariante abgeschlossene Teilraum $M \subset L^2(V)$ ist von der Form $M = L^2(E)^\wedge$ für eine Borelmenge $E \subset \hat{V}$.
2. Gegeben eine weitere Borelmenge $F \subset \hat{V}$ gilt $L^2(E)^\wedge = L^2(F)^\wedge$ genau dann, wenn $E \setminus F$ und $F \setminus E$ in Bezug auf ein und jedes Haarmaß Nullmengen sind.

3.8.5. Im Fall einer Veränderlichen mag man die Aussage dieses Satzes dahingehend zusammenfassen, daß die translationsinvarianten abgeschlossenen Teilräume durch die Vorgabe gewisser „erlaubter Frequenzanteile“ beschrieben werden können, also umgangssprachlich durch die Angabe des „erlaubten Tonumfangs“.

Beweis. Die zweite Behauptung ist klar. Für die Erste wählen wir ein Haarmaß λ und bemerken, daß ein Teilraum von $L^2(V; \lambda)$ nach 3.7.8 invariant ist unter allen Translationen genau dann, wenn sein Bild unter der Fouriertransformation invariant ist unter allen Multiplikationen mit Charakteren. Damit folgt unser Satz aus der anschließenden Proposition 3.8.6. \square

Proposition 3.8.6. Seien W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und μ ein Borelmaß auf W . So hat jeder unter der Multiplikation mit allen unitären Charakteren von W invariante abgeschlossene Teilraum $M \subset L^2(W; \mu)$ die Gestalt $M = L^2(E)$ für eine Borelmenge in $E \subset W$.

Beweis. Sei $P : L^2(W; \mu) \rightarrow M$ der orthogonale Projektor. Natürlich gilt

$$\langle Pf, g \rangle = \langle Pf, Pg \rangle = \langle f, Pg \rangle$$

für alle $f, g \in L^2(W; \mu)$. Für jeden Charakter $\chi \in \hat{W}$ gilt offensichtlich $P(\chi f) = \chi(Pf)$. Wir folgern $\langle Pf, \chi g \rangle = \langle f, \chi Pg \rangle$ für alle $\chi \in \hat{W}$ oder ausgeschrieben

$$\int \overline{Pf} \cdot \chi g = \int \bar{f} \cdot \chi Pg$$

Nach 3.3.14 haben aber zwei komplexe Maße nur dann dieselbe Fouriertransformierte, wenn sie übereinstimmen. Damit folgt die Gleichheit von Maßen

$$(\overline{Pf})g\mu = \bar{f}(Pg)\mu$$

Wir wählen nun $g \in \mathcal{L}^2$ Borelmeßbar und quadratintegrierbar mit $g(y) > 0$ für alle $y \in W$ und setzen $\varphi(y) = (Pg)(y)/g(y)$. Dann folgt aus unserer Gleichheit von Maßen mit 3.2.25 die Gleichheit $(Pf)(y) = \varphi(y)f(y)$ für fast alle y . Da aber gilt $P^2 = P$, nimmt $\varphi(y)$ fast überall nur die Werte 0 und 1 an. Also gibt es eine Borelmenge $E \subset W$ mit $Pf = [E]f$. Nun gilt aber $f = [E]f \Leftrightarrow f \in L^2(E)$ und es folgt $M = L^2(E)$. \square

3.9 Faltung von Maßen und Funktionen*

Definition 3.9.1 (Faltung von Maßen mit stetigen Funktionen). Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu \in M(V)$ ein komplexes Maß auf V und $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so erklären wir eine weitere stetige beschränkte Funktion $\mu * f$ auf V durch die Vorschrift

$$(\mu * f)(x) := \int f(x - y) \mu\langle y \rangle$$

Es reicht hier, die Stetigkeit der Funktion $\mu * f$ im Fall positiver endlicher Maße μ zu zeigen, in dem sie leicht aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt.

Beispiel 3.9.2 (Faltung mit Diracmaßen). Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $E \subset V$ eine endliche Teilmenge und $\mu = \sum_{y \in E} a_y \delta_y$ eine Linearkombination von Diracmaßen mit komplexen Koeffizienten, so haben wir

$$\mu * f = \sum_{y \in E} a_y (\tau_y f)$$

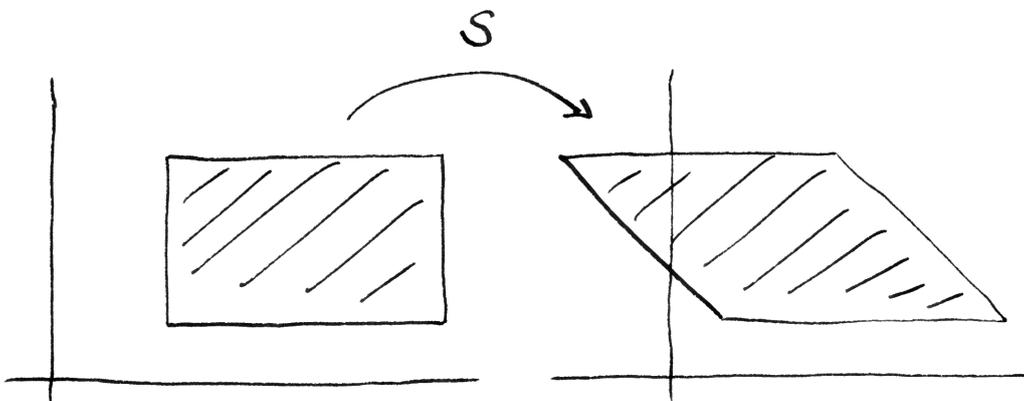
für $\tau_y f$ die um y verschobene Funktion gegeben durch $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$. Ähnliches gilt allgemeiner für abzählbare Linearkombinationen von Diracmaßen mit einer absolut konvergenten Familie von Koeffizienten.

Lemma 3.9.3 (Faltung von Maßen mit L^p -Funktionen). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu \in M(V; [0, \infty))$ ein endliches Maß auf V und $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ eine L^p -Funktion in Bezug auf ein Haar-Maß λ für $1 \leq p < \infty$. So ist die Funktion $y \mapsto f(x - y)$ für alle $x \in V$ außerhalb einer λ -Nullmenge integrierbar in Bezug auf μ und die fast überall definierte Funktion

$$x \mapsto \int f(x - y) \mu\langle y \rangle$$

ist wieder eine L^p -Funktion. Sie heißt die **Faltung** $(\mu * f)(x)$ **des Maßes μ mit der Funktion f** und erfüllt die Abschätzung $\|\mu * f\|_p \leq \mu(V) \|f\|_p$.

3.9.4. Wir erklären die Faltung von beliebigen komplexen Maßen mit L^p -Funktionen $M(V) \times L^p(V) \rightarrow L^p(V)$, $(\mu, f) \mapsto \mu * f$ dann durch lineare Fortsetzung. Im Rückblick wird sich die Konvolution von Maßen mit stetigen Funktionen oder auch mit L^p -Funktionen als Spezialfall der allgemeinen Konstruktion einer „Operation von Maßen auf Darstellungen“ erweisen, wie sie in 4.10.3 in einem anderen Spezialfall und in ?? in vergleichsweise großer Allgemeinheit diskutiert wird.



Ein Quader Q und sein Bild $S(Q)$ unter der Scherung $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (x - y, y)$. Berechnen wir die Maße unter $\lambda \boxtimes \mu$ für λ ein Haarmaß und μ ein beliebiges σ -endliches Maß, indem wir erst horizontal nach x und dann vertikal nach y integrieren, so erkennen wir unmittelbar, daß Q und $S(Q)$ dasselbe Maß haben.

Beweis. Der Satz von Fubini zeigt, daß für jedes Haar-Maß λ das Produktmaß $\lambda \boxtimes \mu$ unter der Scherung $S : V \times V \rightarrow V \times V, (x, y) \mapsto (x - y, y)$ invariant ist, in Formeln $S : \lambda \boxtimes \mu \rightsquigarrow \lambda \boxtimes \mu$. Wir behandeln nun zunächst den Fall $p = 1$. Für $f \in L^1(V; \lambda)$ bilden wir die Funktion $(f \circ \text{pr}_1) : (x, y) \mapsto f(x)$ und nach Fubini gilt

$$(f \circ \text{pr}_1) \in L^1(V \times V; \lambda \boxtimes \mu)$$

Daraus folgt, daß auch $(f \circ \text{pr}_1 \circ S) : (x, y) \mapsto f(x - y)$ integrierbar ist unter dem Produktmaß, und der Satz von Fubini zeigt dann die Behauptung. Im Fall von beliebigem p können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit f nichtnegativ annehmen. Dann können wir unsere bis hier gewonnenen Erkenntnisse auf die Funktion f^p anwenden und erhalten so, daß $y \mapsto f(x - y)^p$ für alle x außerhalb einer λ -Nullmenge nach $\mu\langle y \rangle$ integriert werden kann. Bemerkung 2.3.10 aus dem Kontext der Hölderungleichung angewandt auf die Funktion $h_x(y) = f(x - y)$ aus $L^p(V; \mu)$ und die konstante Funktion 1 aus $L^q(V; \mu)$ zeigt dann, daß für alle x außerhalb derselben λ -Nullmenge die Funktion h_x nach $\mu\langle y \rangle$ integrierbar ist. Bezeichnen wir dies Integral wie im Satz mit $(\mu * f)(x)$, so zeigt die Hölderungleichung 2.3.10 weiter

$$|(\mu * f)(x)| \leq \|h_x\|_1 \leq \|1\|_q \|h_x\|_p$$

für alle x außerhalb unserer λ -Nullmenge. Schreiben wir andererseits f als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge nichtnegativer integrierbarer Funktionen, so zeigt der bereits behandelte Fall $p = 1$ auch, daß $x \mapsto (\mu * f)(x)$ als fast überall definierte Funktion meßbar sein muß. Bilden wir nun auf beiden Seiten die p -te Potenz und integrieren über $\lambda\langle x \rangle$, so ergibt sich wegen $\|1\|_q = \mu(V)^{1/q}$ sofort

$$\begin{aligned} \int |(\mu * f)(x)|^p \lambda\langle x \rangle &\leq \mu(V)^{p/q} \left(\int |f(x - y)|^p (\lambda \boxtimes \mu)\langle x, y \rangle \right) \\ &= \mu(V)^{1+p/q} \|f\|_p^p = \mu(V)^p \|f\|_p^p \end{aligned}$$

und damit ist $\mu * f$ wieder eine L^p -Funktion mit $\|\mu * f\|_p \leq \mu(V) \|f\|_p$. \square

3.9.5 (Faltung von integrierbaren Funktionen). Sei λ ein Haar-Maß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V . Gegeben integrierbare Funktionen $f, g \in L^1(V; \lambda)$ erklären wir ihre **Faltung**, eine weitere integrierbare Funktion, durch die Vorschrift

$$f *_{\lambda} g := (f\lambda) * g$$

oder explizit $(f *_{\lambda} g)(x) = \int g(x - y)f(y)\lambda\langle y \rangle$. Die durch Multiplikation mit dem Maß λ nach 3.2.25 induzierte Einbettung $L^1(V; \lambda) \hookrightarrow M(V)$ ist nach 3.9.7 verträglich mit den jeweiligen Konvolutionen, in Formeln

$$(f *_{\lambda} g)\lambda = (f\lambda) * (g\lambda)$$

Insbesondere ist also auch die Faltung $*_{\lambda}$ von integrierbaren Funktionen assoziativ und kommutativ. Unsere mathematische Fouriertransformation aus 3.1.2 verträgt sich jedoch nicht so gut mit der Faltung von Funktionen wie die abstrakte Fouriertransformation mit der Faltung von Maßen, genauer gilt für integrierbare Funktionen f, g auf \mathbb{R}^n und Faltung in Bezug auf das Lebesgue-Maß die Formel

$$(f * g)^{\wedge} = (2\pi)^{n/2}(f^{\wedge} \cdot g^{\wedge})$$

Der Vorfaktor rührt daher, daß wir ja die mathematische Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n; d^n x)$ erklärt hatten als die Fouriertransformierte des Maßes $(2\pi)^{-n/2} f d^n x$. In diesem Zusammenhang erweist sich die in 3.1.3 erwähnte alternative Fouriertransformation als günstiger, die jedoch hinwiederum in 3.1.5 Komplikationen verursacht.

Übungen

Übung 3.9.6. Sind V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu, \nu \in M(V)$ komplexe Maße auf V und $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so gilt

$$\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$$

Übung 3.9.7. Gegeben ein Haarmaß λ auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und $f \in L^1(V; \lambda)$ zeige man für jedes weitere komplexe Maß $\mu \in M(V)$ die Gleichheit von Maßen $(\mu * f)\lambda = \mu * (f\lambda)$.

Übung 3.9.8. Für die für $v > 0$ um den Faktor \sqrt{v} verzerrten und auf Integral Eins normierten Gauss'schen Glockenkurven $G_v(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-x^2/2v)$ wird die Faltung in Bezug auf das Lebesgue-Maß gegeben durch

$$G_u * G_v = G_{u+v}$$

Übung 3.9.9. Man prüfe für die Standard-Normalverteilung $\mu = e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$ die Formel $\int x^2 \mu \langle x \rangle = 1$. Weiter prüfe man für das G_v aus 3.9.8 auch die Formel $\int x^2 G_v(x) dx = v$. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie hat also eine reelle Zufallsvariable mit der Verteilung $G_v(x) dx$ Varianz v und Standardabweichung \sqrt{v} .

4 Spektraltheorie in Hilberträumen*

4.1 Unitäre Darstellungen von \mathbb{R}

Definition 4.1.1. Die unitären Automorphismen eines Hilbertraums \mathcal{H} bilden eine Gruppe $U(\mathcal{H})$. Eine **unitäre Darstellung von \mathbb{R}** ist ein Paar (\mathcal{H}, ρ) bestehend aus einem Hilbertraum \mathcal{H} und einem Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$ derart, daß die zugehörige Operation $\mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $(t, v) \mapsto (\rho(t))(v)$ stetig ist für die Produktmetrik auf $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$. Gleichbedeutend reden wir auch von einer **unitären Operation** von \mathbb{R} auf \mathcal{H} .

4.1.2. In Formeln fordern wir von unserer Abbildung ρ also

$$\rho(s + t) = \rho(s) \circ \rho(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Unitäre Darstellungen von \mathbb{R} sind in der Quantenmechanik von grundlegender Bedeutung, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems durch eine unitäre Operation von \mathbb{R} oder noch präziser von der dazu isomorphen Gruppe $\vec{\mathbb{T}}$ der Zeitspannen auf dem Hilbertraum \mathcal{H} seiner Zustände modelliert wird. Als erstes Beispiel betrachten wir auf \mathbb{R} das Lebesgue-Maß dt und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$ durch das Verschieben von Funktionen $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 2.6.6 gezeigt wurde. Der folgende Satz 4.1.4 soll als Leitbild für die Entwicklung der Spektraltheorie dienen, die wir anschließend in Angriff nehmen werden. Er stellt gleichzeitig eine große Klasse von Beispielen bereit und wirft Licht auf die allgemeine Struktur.

Vorschau 4.1.3. Man kann $U(\mathcal{H})$ so mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen, daß unsere unitären Darstellungen gerade die Gruppenwege in $U(\mathcal{H})$ sind: Das leistet die sogenannte „starke Operatortopologie“, die definiert ist als die „Initialtopologie“ zu allen Auswertungen an Vektoren $U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$, vergleiche [TM] 1.9.25.

Satz 4.1.4 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von \mathbb{R}). *Ist \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor, so gibt es genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem endlichen nichtnegativen Borelmaß $\mu = \mu_v$ auf \mathbb{R} und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ derart, daß gilt $\varphi(1) = v$ und*

$$\rho(t) \circ \varphi = \varphi \circ (e^{itx} \cdot) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

4.1.5. Das Symbol x ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß Elemente $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ durch Funktionen $f(x)$ repräsentiert werden. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ ist also mit $(e^{itx} \cdot)$ die Abbildung $(e^{itx} \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ gemeint ist, die ein

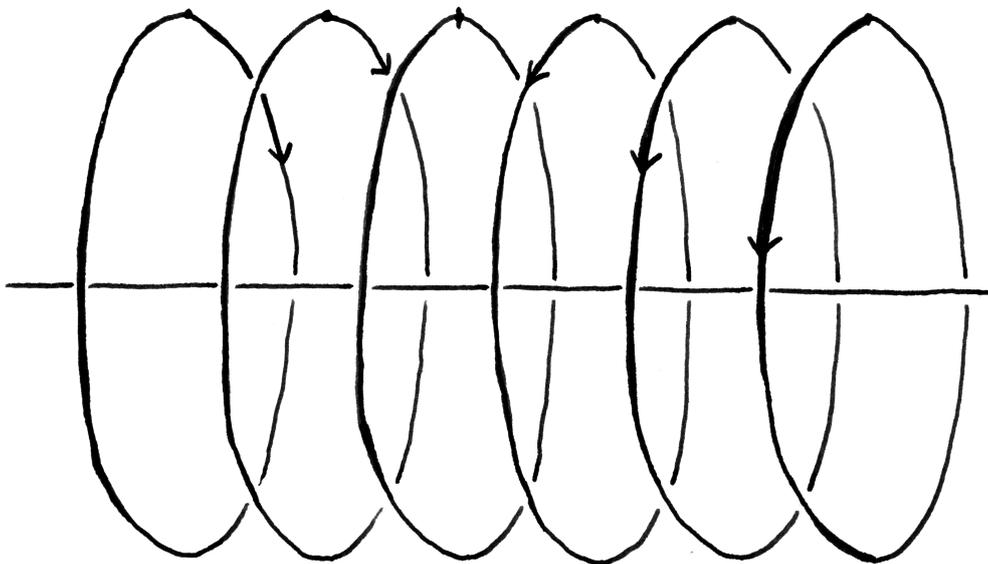


Illustration zur Operation von \mathbb{R} auf $L^2(\mathbb{R}; \mu)$. Den Graph einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mag man sich als Teilmenge von \mathbb{R}^3 vorstellen, die eingezeichneten Kreise sind jeweils als $S^1 \subset \mathbb{C}$ zu verstehen und die Multiplikation mit e^{ixt} für festes t bedeutet das Drehen um geeignet von x abhängende Winkel in den jeweiligen Ebenen $\{x\} \times \mathbb{C}$, anschaulich also ein Verdrillen des Graphen.

$f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ auf diejenige fast überall definierte Funktion abbildet, die an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ den Wert $e^{itx} f(x)$ annimmt. Die 1 meint die konstante Funktion 1 auf \mathbb{R} , die ja in Bezug auf jedes endliche Borelmaß quadratintegrierbar ist. Das Wörtchen „lokal“ spielt darauf an, daß die Darstellung in gewisser Weise nur „lokal um den Vektor v “ beschrieben wird. Eine globale Beschreibung werden wir als „Spektralzerlegung“ in 4.9.1 kennenlernen, und aus dieser Spektralzerlegung leiten wir dann auch erst den obigen Satz über die lokale Struktur her. Der besseren Übersichtlichkeit halber stelle ich die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccc}
 (x \mapsto f(x)) \in & L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\
 \downarrow & (e^{itx} \cdot) \downarrow & & \downarrow \rho(t) \\
 (x \mapsto e^{itx} f(x)) \in & L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\
 & 1 & \mapsto & v
 \end{array}$$

4.1.6. Ich formuliere diesen Satz auch noch im unwesentlich allgemeineren Fall einer **Geradengruppe**, als da heißt der additiven Gruppe G eines eindimensionalen reellen Vektorraums. Diese Allgemeinheit scheint mir aus mehreren Gründen sinnvoll: Erstens hoffe ich, daß selbst im Fall $G = \mathbb{R}$ die Aussage übersichtlicher wird, wenn in der Notation die drei verschiedenen Bedeutungen von \mathbb{R} als (1) dargestellte Gruppe, (2) deren Charaktergruppe und (3) auf dem Hilbertraum operierender Körper getrennt werden. Zweitens sind Operationen von Geradengruppen auf Hilberträumen in der Quantenmechanik besonders natürlich, da die zeitliche Entwicklung jedes quantenmechanischen Systems ja eigentlich durch eine unitäre Operation der Gruppe $G = \mathbb{T}$ aller Zeitspannen auf dem Hilbertraum \mathcal{H} aller Zustände des Systems modelliert wird. Und drittens gilt unser Satz in dieser Gestalt unverändert für die additive Gruppe jedes endlichdimensionalen reellen Vektorraums G , etwa auch die Gruppe \mathbb{E} der Translationen des Anschauungsraums, und mutatis mutandis für G eine beliebige kommutative „lokal kompakte Hausdorff’sche topologische Gruppe“. Bezeichne $\hat{G} = \text{Grpto}(G, S^1)$ den Charakterraum unserer Geradengruppe im Sinne von 3.4.14, also die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von G in die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Auf diesem Charakterraum haben wir in 3.4.14 die Struktur eines reellen Vektorraums erklärt und haben gezeigt, daß er im Fall einer Geradengruppe die Dimension Eins hat.

Satz 4.1.7 (Lokale Struktur unitärer Darstellungen von Geradengruppen). *Ist G eine Geradengruppe, \mathcal{H} ein Hilbertraum, $\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor, so gibt es genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem endlichen Borelmaß $\mu = \mu_v$ auf der Charaktergruppe \hat{G} und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\hat{G}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ derart, daß gilt $\varphi(1) = v$ und*

$$\rho(g) \circ \varphi = \varphi \circ (g \cdot) \quad \forall g \in G$$

4.1.8. Hier ist $(g \cdot)$ zu verstehen als die Multiplikation mit der durch das Auswerten an der Stelle g definierten Funktion $\hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Charaktergruppe. Der besseren Übersichtlichkeit halber stellen wir die Abbildungen dieses Satzes auch noch in einem kommutativen Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\chi \mapsto f(\chi)) & L^2(\hat{G}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} & \\
 \downarrow & (g \cdot) \downarrow & & \downarrow \rho(g) & \\
 (\chi \mapsto \chi(g)f(\chi)) & L^2(\hat{G}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} & \\
 & 1 & \mapsto & v &
 \end{array}$$

Hierbei meint $\chi \in \hat{G}$ einen variablen Charakter und $f(\chi)$ sowie $\chi(g)$ sind nur nur etwas ausführlichere Darstellungen einer Funktion $f : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. der durch das Auswerten bei $g \in G$ gegebenen Funktion $\hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$. Ich schlage vor, dies Maß μ das **Frequenzmaß** des Vektors v zu nennen. Es mißt in gewisser und im endlichdimensionalen Fall in 4.1.13 präzisierter Weise, „wie stark verschiedene Frequenzanteile in v vorkommen“. Die Abbildung φ nenne ich die **kanonische Einbettung** zu unserem Vektor v .

4.1.9. Eine **Unterdarstellung** einer unitären Darstellung (\mathcal{H}, ρ) ist ein abgeschlossener Teilraum von \mathcal{H} , der unter allen $\rho(t)$ in sich selber überführt wird. Ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ einer Darstellung heißt ein **zyklischer Vektor** unserer Darstellung genau dann, wenn es außer \mathcal{H} selbst keine Unterdarstellung gibt, die unseren Vektor enthält. Ist im vorhergehenden Satz v ein zyklischer Vektor, so ist φ ein Isomorphismus und liefert sogar eine explizite Beschreibung der „globalen Struktur“ unserer Darstellung. Umgekehrt zeigt unser Satz auch, daß für jedes Borelmaß μ auf \mathbb{R} die unitäre Darstellung $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ nach 4.1.23 zyklische Vektoren besitzt, ja sogar, daß für jedes endliche Borelmaß μ auf \mathbb{R} die konstante Funktion $1 \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ ein zyklischer Vektor ist: Andernfalls läge ja 1 in einer echten Unterdarstellung $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und wir fänden dazu neben dem Paar (μ, id) noch ein weiteres mögliches Paar (ν, φ) , bei dem φ über \mathcal{H} faktorisiert, im Widerspruch zur behaupteten Eindeutigkeit. Im allgemeinen gibt es zwar keinen zyklischen Vektor, aber in jedem Fall ist unser Raum die „Hilbertsumme“ von abgeschlossenen Unterdarstellungen, die jeweils einen zyklischen Vektor besitzen. Natürlich kann es viele verschiedene derartige Zerlegungen geben und im Fall der Existenz eines zyklischen Vektors auch noch viele andere zyklische Vektoren. Die dadurch erzeugten Mehrdeutigkeiten werden wir in späteren Abschnitten noch sorgfältig studieren. Jetzt diskutieren wir zunächst einmal beispielhaft den endlichdimensionalen Fall.

Proposition 4.1.10 (Endlichdimensionale unitäre Darstellungen von \mathbb{R}). *Ist $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} durch Operatoren auf einem*

Hilbertraum \mathcal{H} endlicher Dimension, so gibt es eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n von \mathcal{H} und reelle Zahlen x_1, \dots, x_n mit

$$\rho(t)v_\nu = \exp(ix_\nu t)v_\nu \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 1 \leq \nu \leq n.$$

4.1.11. In anderen Worten operiert also bezüglich einer Orthonormalbasis \mathcal{B} jedes $t \in \mathbb{R}$ durch die diagonale Matrix

$${}_{\mathcal{B}}[\rho(t)]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(e^{ix_1 t}, \dots, e^{ix_n t})$$

Beweis. Nach [LA2] 1.8.1 ist jede unitäre Matrix diagonalisierbar und hat nur Eigenwerte der Länge Eins. Insbesondere trifft das also auf alle $\rho(t)$ zu. Nach [LA2] 8.7.10 ist weiter jede Familie von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen simultan diagonalisierbar, wir finden also eine Basis e_1, \dots, e_n von \mathcal{H} aus simultanen Eigenvektoren aller $\rho(t)$. In Bezug auf diese Basis werden alle $\rho(t)$ durch Diagonalmatrizen dargestellt. Die diagonalen Matrixeinträge sind dann stetige Gruppenhomomorphismen $\rho_{\nu\nu} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ und damit nach 2.7.7 von der Gestalt $\rho_{\nu\nu}(t) = \exp(ix_\nu t)$ für wohlbestimmte $x_\nu \in \mathbb{R}$. Da die Eigenräume der unitären Automorphismen $\rho(t)$ jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$x_\nu \neq x_\mu \Rightarrow e_\nu \perp e_\mu$$

Indem wir jeweils im Erzeugnis der e_ν zu festem $x = x_\nu$ eine Orthonormalbasis wählen, erhalten wir also eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n von \mathcal{H} mit $\rho(t)v_\nu = \exp(ix_\nu t)v_\nu$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

Vorschau 4.1.12. Mit den Methoden der Lie-Theorie geht das auch schneller: Nach [ML] 1.4.3 und [ML] 1.2.24 ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$ von der Gestalt $\rho : t \mapsto \exp(tA)$ für genau ein schiefhermisches alias schiefadjungiertes $A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$, und damit folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Spektralsatz [LA2] 1.9.15 für selbstadjungierte Abbildungen, angewandt auf die selbstadjungierte Abbildung iA .

Beispiel 4.1.13 (**Frequenzmaß im Fall endlicher Dimension**). Gegeben ein Vektor $v = \sum \alpha_\nu v_\nu$ mit seiner Zerlegung in simultane Eigenvektoren in unserer in der obigen Proposition 4.1.10 diskutierten endlichdimensionalen Darstellung erhalten wir ein mögliches Paar (μ, φ) zu Satz 4.1.4, indem wir als Borelmaß μ die Linearkombination von Diracmaßen

$$\mu = |\alpha_1|^2 \delta_{x_1} + \dots + |\alpha_n|^2 \delta_{x_n}$$

nehmen und als unitäre Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die Abbildung $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu) \alpha_\nu v_\nu$. Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen.

Beispiel 4.1.14 (Frequenzmaß in einem Fall unendlicher Dimension). Wir betrachten auf \mathbb{R} das Lebesgue-Maß dt und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$ durch das Verschieben von Funktionen, $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 2.6.6 gezeigt wurde. Eine entsprechend normalisierte Variante der Fouriertransformation induziert in diesem Fall einen unitären Isomorphismus von Hilberträumen

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}; dx/2\pi) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}; dt)$$

Durch stetige Fortsetzung von 3.1.5.2 erkennt man, daß auch für quadratintegrierbare Funktionen f gilt $\mathcal{F}(e^{itx} \cdot h) = \rho(t)(\mathcal{F}h)$. Betrachten wir nun als φ die Verknüpfung dieser Fouriertransformation mit der unitären Einbettung

$$(f^\wedge \cdot) : L^2(\mathbb{R}; (|f^\wedge|^2/2\pi)dx) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}; dx/2\pi)$$

so ergibt sich zum Vektor $g = (f^\wedge)^\wedge$, also der Funktion $g : x \mapsto f(-x)$, ein mögliches Paar (μ, φ) mit $\mu = (|f^\wedge(x)|^2/2\pi)dx$ als Frequenzmaß von g . Daß es auch das einzig mögliche Paar ist, muß jedoch erst noch gezeigt werden.

4.1.15. Um die eben vorgestellten Sätze zu beweisen gilt es, die Theorie weiter zu entwickeln. Ist (ρ, \mathcal{H}) eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} , so nennen wir einen Vektor $v \in \mathcal{H}$ **differenzierbar** genau dann, wenn der Grenzwert

$$Sv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t)v - v}{t}$$

existiert. Sicher bilden die differenzierbaren Vektoren einen Teilraum $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}$ und $S = S_\rho : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}$ ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Ich will bereits verraten, daß diese lineare Abbildung der **infinitesimale Erzeuger** unserer Darstellung heißt, obwohl wir noch nicht wissen, in welcher Weise diese Abbildung denn nun unsere Darstellung erzeugt. Man beachte jedoch, daß weder der Teilraum der differenzierbaren Vektoren abgeschlossen zu sein braucht noch unser infinitesimaler Erzeuger stetig.

Definition 4.1.16. Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **selbstadjungiert** genau dann, wenn sie ihre eigene Adjungierte ist. Ist in Formeln \mathcal{H} unser Hilbertraum und $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unsere lineare Abbildung, so heißt in Formeln ausgedrückt A selbstadjungiert genau dann, wenn gilt

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$$

4.1.17. Eine lineare Selbstabbildung eines Hilbertraums heißt **schiefadjungiert** genau dann, wenn sie das Negative ihrer Adjungierten ist. Eine lineare Abbildung S ist demnach schiefadjungiert genau dann, wenn iS selbstadjungiert ist.

Proposition 4.1.18. *Ist (ρ, \mathcal{H}) eine unitäre Darstellung von \mathbb{R} , in der sämtliche Vektoren differenzierbar sind, so ist ihr infinitesimaler Erzeuger S stetig und schiefadjungiert und für alle $t \in \mathbb{R}$ mit der Exponentialfunktion von Operatoren aus [AN1] 9.2.12 gilt*

$$\rho(t) = \exp(tS)$$

Beweis. Sicher gilt ganz allgemein für alle differenzierbaren Vektoren v, w unserer Darstellung die Formel

$$\langle Sv, w \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\rho(t)v - v}{t}, w \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle v, \frac{\rho(-t)w - w}{t} \right\rangle = -\langle v, Sw \rangle$$

Sind alle Vektoren von \mathcal{H} differenzierbar, in Formeln $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}$, so ist demnach $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine schiefadjungierte lineare Abbildung. Die Stetigkeit von S folgt damit aus der im Anschluß bewiesenen Proposition 4.2.1, nach der schlicht alle selbstadjungierten und damit natürlich auch alle schiefadjungierten Selbstabbildungen eines Hilbertraums stetig sind. Damit folgt dann, daß für alle $v \in \mathcal{H}$ die Abbildung $t \mapsto \exp(-tS)\rho(t)v$ differenzierbar ist und die Ableitung Null hat, wie der Leser in der anschließenden Übung 4.1.21 selbst ausarbeiten mag. Nach [AN1] 8.2.9 ist diese Abbildung also konstant und die Proposition ist bewiesen. \square

4.1.19. Um unitäre Darstellungen von Geradengruppen zu verstehen, gilt es also, schiefadjungierte oder äquivalent selbstadjungierte Operatoren zu studieren. Damit werden wir uns nun zunächst beschäftigen.

Übungen

Übung 4.1.20. Besitzt jede endlichdimensionale unitäre Darstellung von \mathbb{R} einen zyklischen Vektor? Man finde eine dreidimensionale unitäre Darstellung von \mathbb{R} mit zyklischem Vektor.

Übung 4.1.21. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} , eine stetige lineare Abbildung $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ und eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ zeige man, daß auch die Abbildung $t \mapsto \exp(tS)f(t)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $S \exp(tS)f(t) + \exp(tS)f'(t)$. Hinweis: Man beachte dazu die Differenzierbarkeit von $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \mapsto tS$, von $\exp : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bei Null nach [AN2] 1.2.19 und von der Operation $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nach [AN2] 1.4.5.

Übung 4.1.22. Man zeige, daß für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ der translationsinvariante Teilraum $\mathcal{H} = L^2(K; dx)^\wedge \subset L^2(\mathbb{R}; dt)$ aller Fouriertransformierten quadratintegrierbarer Funktionen mit Träger in K in Bezug auf die Darstellung von \mathbb{R} durch Translationen vollständig aus differenzierbaren Vektoren besteht und daß der infinitesimale Erzeuger S in diesem Fall schlicht das negative Ableiten $-\partial$

ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Gleichung $\exp(-t\partial)f = \tau_t f$ und der Taylorentwicklung?

Übung 4.1.23. Gegeben ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} zeige man, daß die Abbildung $\rho : \mathbb{R} \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}; \mu))$ mit $(\rho(t)f)(x) = e^{itx} f(x)$ für $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ eine unitäre Darstellung ist, daß jedoch ρ als Abbildung von \mathbb{R} in den Raum der Operatoren auf unserem Hilbertraum mit seiner Operatornorm im allgemeinen nicht stetig ist: Ist μ das Lebesguemaß, so gilt sogar $s \neq t \Rightarrow \|\rho(t) - \rho(s)\| = 2$.

Übung 4.1.24. Man zeige unter der Annahme der Gültigkeit von 4.1.4: Betrachten wir zu einem Borelmaß μ auf \mathbb{R} den Raum $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ als unitäre Darstellung von \mathbb{R} wie in 4.1.23, so wird für $f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ das zugehörige Maß μ_f gegeben durch die Formel $\mu_f = |f|^2 \mu$.

Übung 4.1.25. Man zeige: Ein Vektor aus einer unitären Darstellung von \mathbb{R} ist differenzierbar im Sinne von 4.1.15 genau dann, wenn die Funktion x in Bezug auf sein Frequenzmaß quadratintegrierbar ist. Ist weiter $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung im Sinne von 4.1.8 zu solch einem Vektor v , so gilt

$$Sv = \varphi(ix)$$

4.2 Selbstadjungierte Operatoren

Proposition 4.2.1 (Hellinger-Toeplitz). *Jede lineare Abbildung von einem Hilbertraum in einen weiteren Hilbertraum, die eine Adjungierte besitzt, ist stetig.*

Beweis. Sei $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ unsere lineare Abbildung und $B : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ ihre Adjungierte, es gelte also $\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle$ für alle $v \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathcal{H}'$. Die schieflinaren Abbildungen

$$T_w : v \mapsto \langle Av, w \rangle$$

sind stetig, da sie auch als $v \mapsto \langle v, Bw \rangle$ geschrieben werden können. Die Werte der stetigen linearen Abbildungen T_w mit $\|w\| = 1$ sind auf jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ beschränkt durch $c(v) = \|A(v)\|$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 4.2.10, das wir gleich im Anschluß diskutieren, gibt es also C mit $\|T_w\| \leq C$ für alle w der Länge Eins alias mit

$$\langle Av, w \rangle \leq C\|v\|\|w\|$$

für alle $v \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathcal{H}'$. Das hinwiederum zeigt $\|Av\|^2 \leq C\|v\|\|Av\|$ und damit $\|Av\| \leq C\|v\|$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Als auf dem Einheitsball beschränkte lineare Abbildung ist damit A stetig nach [AN1] 7.4.9. \square

4.2.2. Wir beginnen die Diskussion des „Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit“ mit einem etwas schwächeren, aber allgemeineren und anschaulicheren Lemma.

Lemma 4.2.3 (Prinzip der lokalen Beschränktheit). *Gegeben ein vollständiger nichtleerer metrischer Raum X und eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ stetiger reellwertiger Funktionen auf X , deren Werte an jedem Punkt nach oben beschränkt sind, in Formeln $\sup\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty \ \forall x \in X$, gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$, auf der unsere Funktionen gleichmäßig beschränkt sind, in Formeln*

$$\sup\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}, x \in U\} < \infty$$

Beweis. Wir betrachten in X die abgeschlossenen Teilmengen

$$X_n := \{x \in X \mid f(x) \leq n \ \forall f \in \mathcal{F}\}$$

Nach Voraussetzung ist X die Vereinigung aller X_n und nach dem Satz von Baire 4.2.5, den wir im Anschluß beweisen, besitzt folglich mindestens eines der X_n einen inneren Punkt. \square

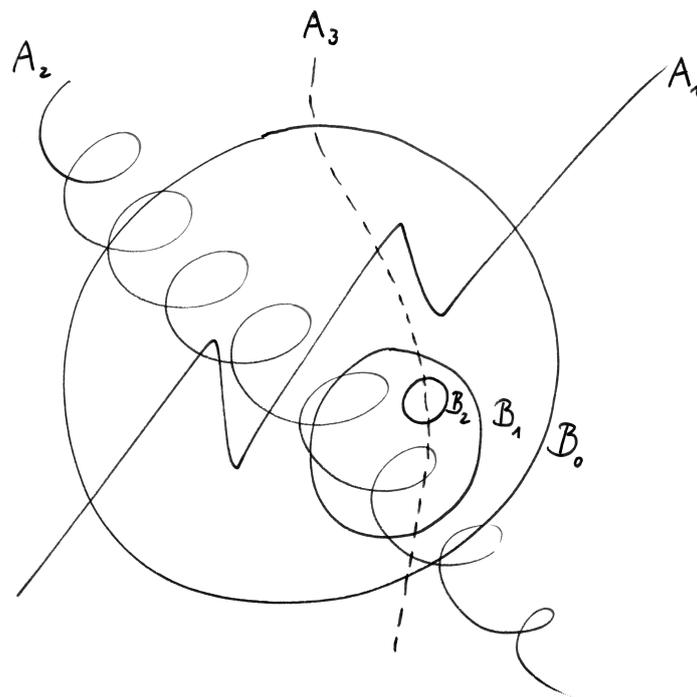
Definition 4.2.4. Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Element $x \in A$ heißt ein **innerer Punkt von A** oder genauer ein „innerer Punkt von A in Bezug auf X “ genau dann, wenn A eine Umgebung von x in X ist.

Satz 4.2.5 (Baire’scher Kategoriensatz). *In einem vollständigen metrischen Raum hat jede abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ohne innere Punkte auch selbst keine inneren Punkte.*

4.2.6. Die Bezeichnung „Baire’scher Kategoriensatz“ kommt daher, daß Baire eine Teilmenge „von erster Kategorie“ nennt, wenn sie eine abzählbare Vereinigung ist von Mengen, deren Abschluß jeweils keinen inneren Punkt enthält. Mit dieser Terminologie kann man den Satz umformulieren zu der Aussage, daß „in jedem vollständigen metrischen Raum das Komplement einer Menge von erster Kategorie dicht liegt“.

Ergänzung 4.2.7. Der Baire’sche Kategoriensatz gilt mit fast demselben Beweis für jeden lokal kompakten Hausdorff-Raum. Statt der Vollständigkeit benutzt man beim Beweis dann [AN1] 7.5.11.

Beweis. Sei X unser vollständiger Raum und seien A_1, A_2, \dots abgeschlossene Teilmengen. Wir argumentieren durch Widerspruch. Unter einem Ball verstehen wir stets einen Ball mit positivem Radius. Hätte die Vereinigung $A = \bigcup A_i$ einen inneren Punkt, so enthielte sie einen abgeschlossenen Ball B_0 . Da A_1 keinen inneren Punkt hat, kann der zugehörige offene Ball nicht in A_1 enthalten sein, und



Die Bild soll illustrieren, wie mit der Methode aus dem Beweis des Satzes von Baire 4.2.5 die Annahme, die Papierebene sei eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen ohne innere Punkte, zum Widerspruch geführt werden kann. Die abgeschlossenen Bälle B_i sollen hier die Kreisscheiben sein, von denen ich der besseren Übersichtlichkeit halber nur die Ränder eingezeichnet habe.

es gibt folglich einen abgeschlossenen Ball $B_1 \subset B_0$ mit $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Wir dürfen dabei sogar annehmen, daß der Radius von B_1 kleiner als 1 ist. Da auch A_2 keinen inneren Punkt hat, gibt es weiter einen abgeschlossenen Ball $B_2 \subset B_1$ mit $B_2 \cap A_2 = \emptyset$ und wir dürfen sogar annehmen, daß der Radius von B_2 kleiner als $1/2$ ist. Indem wir immer so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge von abgeschlossenen Bällen $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, deren Radien gegen Null streben und deren Schnitt die Menge A nicht trifft. Wegen $A \supset B_0$ muß der Schnitt dann leer sein. Die Zentren unserer Bälle bilden jedoch eine Cauchy-Folge, und deren Grenzwert liegt notwendig im Schnitt aller unserer Bälle. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. \square

Definition 4.2.8. Wir nennen eine Menge von stetigen Operatoren zwischen normierten Vektorräumen **gleichmäßig beschränkt** oder lateinisch **uniform beschränkt** genau dann, wenn die Menge ihrer Operatornormen eine reelle obere Schranke besitzt.

4.2.9. Es wird hierbei nicht vorausgesetzt, daß unsere Operatoren alle von demselben Raum ausgehen oder in demselben Raum landen. Wir denken also in Formeln an eine Menge von stetigen Operatoren $T_i : V_i \rightarrow W_i$.

Satz 4.2.10 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Eine Familie stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jeden Vektor des Ausgangsraums die Normen seiner Bilder unter unseren Operatoren eine beschränkte Menge bilden.*

4.2.11. Dieses Resultat wird auch als **Satz von Banach-Steinhaus** zitiert. Eine alternative äquivalente Formulierung lautet: Eine Menge stetiger Operatoren von einem festen Banachraum in weitere normierte Vektorräume ist gleichmäßig beschränkt genau dann, wenn für jede Gerade in unserem Ausgangsraum die Menge der Restriktionen unserer Operatoren auf diese Gerade gleichmäßig beschränkt ist.

Beweis. Wir zeigen nur die nichttriviale Implikation. Sei V unser Ausgangsraum und \mathcal{T} unsere Menge von stetigen Operatoren. Es gilt also, die Implikation

$$\left(\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tv\| < \infty \quad \forall v \in V \right) \Rightarrow \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty$$

zu zeigen. Dazu betrachten wir in V die abgeschlossenen Teilmengen

$$V_n = \{v \in V \mid \|Tv\| \leq n \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Nach Voraussetzung ist V die Vereinigung aller V_n und nach dem Satz von Baire 4.2.5 besitzt folglich mindestens eines der V_n einen inneren Punkt. Natürlich gilt

$V_n = nV_1$, also hat dann auch V_1 einen inneren Punkt und wegen $V_1 + V_1 \subset V_2$ ist damit der Ursprung ein innerer Punkt von V_2 . Folglich gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(0; \varepsilon) \subset V_2$ und das zeigt $\|v\| < \varepsilon \Rightarrow \|Tv\| \leq 2 \forall T \in \mathcal{T}$ alias $\|T\| \leq 2/\varepsilon \forall T \in \mathcal{T}$. \square

Ergänzung 4.2.12. Hier noch eine witzige wenn auch unwesentliche Anwendung. Es gibt ja eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die an allen irrationalen Stellen stetig ist und an allen rationalen Stellen unstetig, zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q}; \\ 1/q & x = p/q \text{ unkürzbarer Bruch mit } q \geq 1. \end{cases}$$

Es gibt jedoch keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die an allen rationalen Stellen stetig ist und an allen irrationalen Stellen unstetig: Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nämlich

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt eine Umgebung } V \text{ von } x \text{ mit} \\ |f(y) - f(z)| \leq 1/n \quad \forall y, z \in V \end{array} \right\}$$

offen in \mathbb{R} , und $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ist genau die Menge der Stetigkeitsstellen von f . Also sind die Komplemente $A_n = \mathbb{R} \setminus U_n$ abgeschlossen und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist die Menge der Unstetigkeitsstellen. Wäre diese Vereinigung $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so wäre die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ ganz \mathbb{R} und nach dem Baire'schen Kategoriensatz 4.2.5 müßte dann ein A_n oder ein $\{q\}$ einen inneren Punkt haben, im Widerspruch zu $A_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.2.13. Ist μ ein kompakt getragenes Borelmaß auf \mathbb{R} und T die Multiplikation $(x \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ mit der Identität auf \mathbb{R} , so ist T selbstadjungiert.

Satz 4.2.14 (Lokale Struktur selbstadjungierter Operatoren). *Ist \mathcal{H} ein Hilbertraum, $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor, so gibt es genau ein Paar $(\mu, \varphi) = (\mu_v, \varphi_v)$ bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf \mathbb{R} und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$ und $\varphi(xf) = T(\varphi(f)) \forall f \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$.*

4.2.15. Der Beweis wird im Anschluß an 4.5.8 gegeben. Wir stellen die Aussage dieses Satzes graphisch dar im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ (x \cdot) \downarrow & & \downarrow T \\ L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ 1 & \mapsto & v \end{array}$$

Hier meint $1 \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ die konstante Funktion Eins und $(x \cdot)$ das Multiplizieren mit der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$. Ich nenne φ_v im folgenden die **kanonische Einbettung zu v** und μ_v das **Spektralmaß von v** .

4.2.16. In der Quantenmechanik modelliert man ein „physikalisches System“ als einen Hilbertraum, einen „Zustand“ des Systems als einen von Null verschiedenen Vektor und die Messung eines reellen Parameters als einen möglicherweise unbeschränkten selbstadjungierten Operator mit der Maßgabe, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand gerade das auf Gesamtmasse Eins normierte Spektralmaß unseres Zustands sein soll. Den Fall unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren besprechen wir allerdings erst in 4.12.5. Messungen mit Werten in allgemeineren Meßräumen werden modelliert als Teilungen Φ der Identität im Sinne von 4.7.3 und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Meßergebnis bei einem gegebenen Zustand v ist dann das auf Gesamtmasse Eins normierte Maß $\langle v, \Phi v \rangle$.

Beispiel 4.2.17 (Spektralmaß im endlichdimensionalen Fall). Gegeben ein endlichdimensionaler Hilbertraum \mathcal{H} mit einem selbstadjungierten Operator T und ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ können wir sein Spektralmaß $\mu = \mu_v$ und die kanonische Einbettung $\varphi = \varphi_v$ nach 4.2.14 wie folgt erhalten: Wir schreiben $v = v_1 + \dots + v_n$ als Summe von paarweise orthogonalen Eigenvektoren zu Eigenwerten x_1, \dots, x_n und nehmen als Spektralmaß von v das Maß

$$\mu = \|v_1\|^2 \delta_{x_1} + \dots + \|v_n\|^2 \delta_{x_n}$$

und als Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die Abbildung $\varphi : f \mapsto \sum f(x_\nu) v_\nu$. Der Nachweis, daß das in diesem Fall auch das einzige mögliche derartige Paar ist, sei dem Leser zur Übung überlassen. Hinweis: Nach 2.3.17 kann unser Raum von quadratintegrierbaren Funktionen nur endlichdimensional sein, wenn das Maß μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist.

4.2.18. Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **offen**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

Satz* 4.2.19 (Satz vom offenen Bild). *Jede stetige surjektive lineare Abbildung von Banachräumen ist offen. Gegeben eine stetige bijektive lineare Abbildung von Banachräumen ist insbesondere auch die Umkehrabbildungen stetig.*

Beweis. Sei $f : V \rightarrow W$ unsere surjektive lineare Abbildung und $A \subset V$ der abgeschlossene Einheitsball. Sicher gilt

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{f(nA)}$$

Nach dem Baire'schen Kategoriensatz 4.2.5 muß dann ein $\overline{f(nA)}$ und damit auch $\overline{f(A)}$ selber mindestens einen inneren Punkt besitzen. Da $\overline{f(A)}$ konvex ist und stabil unter der Multiplikation mit (-1) , folgt leicht, daß auch der Nullpunkt ein

innerer Punkt von $\overline{f(A)}$ sein muß. Sei also $U \Subset W$ ein offener Ball um den Ursprung mit $U \subset \overline{f(A)}$. Offensichtlich gilt

$$\overline{f(A)} \subset f(A) + \frac{1}{2}U$$

Wegen $U \subset \overline{f(A)}$ finden wir für jedes $w \in \overline{f(A)}$ induktiv eine Folge von Elementen $w_n \in f(A)$ mit $w = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}w_n$ im Sinne der Konvergenz der Partialsummen. Wählen wir nun Urbilder $v_n \in A$ unserer w_n , so gilt offensichtlich $v = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}v_n \in 2A$ und $f(v) = w$. Es folgt $f(2A) \supset \overline{f(A)} \supset U$, mithin umfaßt $f(2A)$ eine offene Umgebung des Ursprungs. Daß dann f eine offene Abbildung sein muß, folgt ohne weitere Schwierigkeiten. \square

Satz* 4.2.20 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Eine lineare Abbildung von Banachräumen ist genau dann stetig, wenn ihr Graph abgeschlossen ist.*

Beweis. Ganz allgemein hat jede stetige Abbildung von metrischen Räumen nach Übung [AN1] 6.4.16 einen abgeschlossenen Graphen. Ist umgekehrt $f : V \rightarrow W$ unsere lineare Abbildung und ist $\Gamma(f) \subset V \times W$ abgeschlossen, so ist $\Gamma(f)$ selbst ein Banachraum mit der von der Produktnorm induzierten Norm und die Projektionen auf beide Faktoren sind stetig. Die Projektion auf den ersten Faktor ist aber sogar eine Bijektion $\Gamma(f) \xrightarrow{\sim} V$ und hat damit nach 4.2.19 eine stetige Umkehrung. So erhalten wir f als Verknüpfung stetiger Abbildungen $V \xrightarrow{\sim} \Gamma(f) \rightarrow W$. \square

Übungen

Übung 4.2.21. In einem vollständigen metrischen Raum ist der Schnitt einer abzählbaren Familie offener dichter Teilmengen zumindest noch dicht.

4.3 Spektren in Banach-Ringalgebren

Definition 4.3.1. Eine **Banach-Ringalgebra** ist ein Banachraum A mit einer stetigen bilinearen Verknüpfung $A \times A \rightarrow A$, die A zu einem Ring macht.

4.3.2. Wird nicht explizit das Gegenteil gesagt, nehmen wir \mathbb{C} als Grundkörper an. Meinen wir ausnahmsweise den Grundkörper \mathbb{R} , so sprechen wir von einer **reellen Banachringalgebra**. Wir verwenden in Formeln oft die Abkürzung $\lambda 1_A = \lambda$ für λ aus dem jeweiligen Grundkörper. In der Literatur wird diese Struktur meist als **Banach-Algebra** bezeichnet.

4.3.3 (**Kanonische Norm**). Auf jeder Banachringalgebra A erhält man eine Norm $\| \cdot \|$, die **kanonische Norm**, indem man den durch Multiplikation gegebenen Ringhomomorphismus $A \hookrightarrow \mathcal{B}(A)$, $a \mapsto (a \cdot)$ betrachtet und die Einschränkung der

Operatornorm bezüglich der Ursprungsnorm $\|\cdot\|_u$ nimmt. Die kanonische Norm ist äquivalent zur Ursprungsnorm, denn es gilt $\|a\| \leq \|a\|_u \leq \|a\| \|1_A\|_u$. Weiter haben wir für die kanonische Norm offensichtlich $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ und $\|1_A\| \leq 1$ mit $\|1_A\| = 1$ falls $A \neq 0$.

4.3.4. Ist A eine Banachringalgebra und gelten für ihr Ursprungsnorm $\|\cdot\|_u$ die Abschätzungen $\|1_A\|_u \leq 1$ und $\|ab\|_u \leq \|a\|_u \|b\|_u$ für alle $a, b \in A$, so ist $\|\cdot\|_u$ offensichtlich bereits die kanonische Norm. Wenn nichts anderes explizit gesagt ist, nehmen wir meist implizit an, daß eine Banachringalgebra bereits mit ihrer kanonischen Norm versehen ist.

Beispiel 4.3.5. Alle stetigen linearen Selbstabbildungen eines vorgegebenen Banachraums bilden mit der Operatornorm eine Banachringalgebra, vergleiche [AN1] 9.2.20 und [AN1] 7.4.27, und diese Norm ist auch bereits ihre kanonische Norm.

Definition 4.3.6. Das **Spektrum** eines Elements x einer Banachringalgebra A ist die Menge

$$\sigma(x) = \sigma_A(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - x) \text{ ist nicht invertierbar in } A\}$$

Reden wir vom Spektrum eines Operators auf einem Banachraum alias einer stetigen linearen Abbildung $T : E \rightarrow E$ von besagtem Banachraum in sich selbst, so meinen wir sein Spektrum in Bezug auf die Banachringalgebra aller stetigen linearen Selbstabbildungen unseres Banachraums als da heißt die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(T - \lambda \text{id}) : E \rightarrow E$ nicht stetig invertierbar ist.

Beispiel 4.3.7. Jede Norm auf \mathbb{C}^n liefert eine Operatornorm auf dem Matrizenring $\text{Mat}(n; \mathbb{C})$, der diesen Ring zu einer Banachringalgebra macht. Das Spektrum einer Matrix ist in diesem Fall genau die Menge ihrer Eigenwerte.

Ergänzung 4.3.8. In 4.4.4 zeigen wir, daß im Komplexen das Spektrum eines Elements einer von Null verschiedenen Banachringalgebra nie leer sein kann.

Ergänzung 4.3.9. Das Spektrum des Schrödinger-Operators, der ein quantenmechanisches Elektron im elektrischen Potential eines Protons beschreibt, besitzt viele isolierte Punkte. Sie entsprechen genau den Frequenzen, in die das Licht eines angeregten Wasserstoffgases beim Durchgang durch ein Prisma zerfällt. Unter diesem Blickwinkel ist die von Hilbert gewählte Bezeichnung als „Spektrum“ besonders passend.

Proposition 4.3.10 (Spektrum eines Multiplikationsoperators). *Gegeben ein Maßraum (X, μ) und darauf eine L^∞ -Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ im Sinne von 2.3.2 und $p \in [0, \infty]$ ist der durch Multiplikation mit unserer Funktion erklärte Operator*

$$(f \cdot) : L^p(X; \mu) \rightarrow L^p(X; \mu)$$

stetig. Ist unser Maßraum σ -endlich, so ist weiter die Operatornorm unseres Multiplikationsoperators das essentielle Supremum $\|f\|_\infty$ von f aus 2.3.7 und sein Spektrum ist die Menge

$$\sigma(f \cdot) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(f^{-1}(U)) > 0 \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } \lambda\}$$

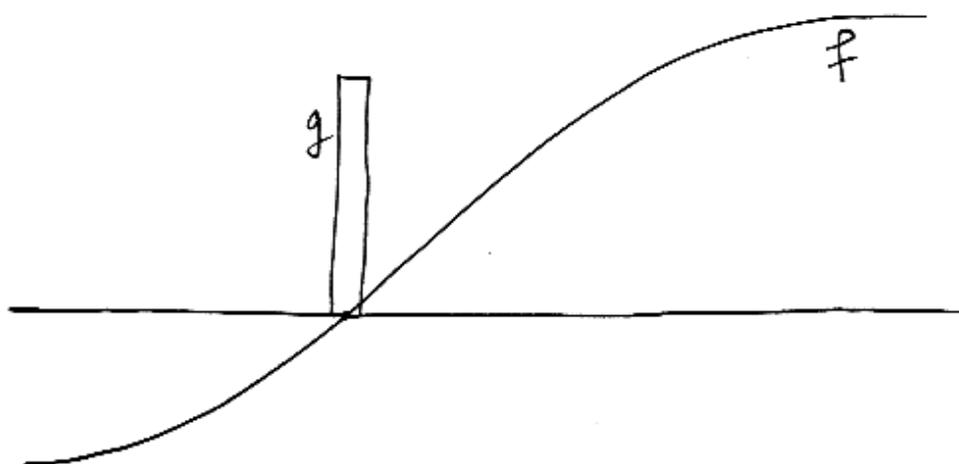
Beweis. Hat f einen Repräsentanten mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X$, so folgt $|f(x)g(x)| \leq C|g(x)|$ für alle $x \in X$. Diese Ungleichung bleibt erhalten beim Potenzieren mit p , Integrieren über X und Ziehen der p -ten Wurzel. Das zeigt $\|(f \cdot)\| \leq \|f\|_\infty$ für $p < \infty$. Ist andererseits $0 < a < \|f\|_\infty$, so gibt es $A \subset X$ meßbar von positivem Maß mit $|f(x)| \geq a \forall x \in A$. Ist X sogar σ -endlich, so können wir zusätzlich sogar $\mu(A)$ endlich annehmen. Dann liegt die charakteristische Funktion $[A]$ in $L^p(X; \mu)$ und ist dort nicht Null, und wir erkennen unschwer, daß gilt $\|f \cdot [A]\| \geq a\|[A]\|$. Es folgt umgekehrt $\|(f \cdot)\| \geq a$ und damit $\|(f \cdot)\| \geq \|f\|_\infty$. Damit ist die erste Aussage gezeigt im Fall $p < \infty$. Der Fall $p = \infty$ bleibe dem Leser überlassen. Für die Beschreibung des Spektrums reicht es, indem wir f durch $f - \lambda$ ersetzen, den Fall $\lambda = 0$ zu betrachten. Gibt es für $\lambda = 0$ eine Umgebung U mit $\mu(f^{-1}(U)) = 0$, so können wir für unsere fast überall definierte Funktion f auch einen Repräsentanten f wählen, der keine Werte in U annimmt, und dann ist f^{-1} beschränkt und der zugehörige Multiplikationsoperator stetig und invers zu $(f \cdot)$. Also gehört in diesem Fall $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum. Gibt es dahingegen für $\lambda = 0$ keine Umgebung U mit $\mu(f^{-1}(U)) = 0$, so finden wir in jeder ε -Umgebung eine Teilmenge A_ε endlichen positiven Maßes, und deren charakteristische Funktion $[A_\varepsilon]$ ist ein von Null verschiedener Vektor in $L^p(X; \mu)$ mit der Eigenschaft $\|f[A_\varepsilon]\|_p \leq \varepsilon\|[A_\varepsilon]\|_p$. Da also unser Multiplikationsoperator von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verkürzt, kann er unmöglich eine stetige Umkehrung besitzen: Selbst wenn er bijektiv wäre, müßte seine Umkehrabbildung von Null verschiedene Vektoren um beliebig große Faktoren verlängern und wäre mithin nie und nimmer stetig. \square

Lemma 4.3.11. Gegeben eine Banachringalgebra A ist für jedes Element $x \in A$ einer kanonischen Norm $\|x\| < 1$ die Differenz $(1 - x)$ invertierbar in A .

Beweis. Die absolut konvergente Reihe $1 + x + x^2 + \dots$ liefert nach [AN1] 9.2.8 ein Inverses. \square

Lemma 4.3.12. Die invertierbaren Elemente einer Banachringalgebra bilden eine offene Teilmenge $A^\times \subseteq A$.

Beweis. Nach 4.3.11 besitzt das Einselement eine Umgebung aus invertierbaren Elementen. Andererseits ist die Multiplikation mit jeder Einheit ein Homöomorphismus von A auf sich selbst, der Einheiten zu Einheiten macht. Das Lemma folgt. \square



Eine beschränkte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine meßbare Funktion alias ein Vektor $g \in L^p(\mathbb{R}; \lambda)$, der vom Multiplikationsoperator $(f \cdot)$ sehr viel kürzer gemacht wird. Indem wir eine geeignete Folge derartiger Vektoren g_n nehmen, die alle dieselbe Norm haben aber immer kleineren Träger, erkennen wir, daß der Multiplikationsoperator $(f \cdot)$ nicht stetig invertierbar sein kann, als da heißt, daß sein Spektrum den Nullpunkt enthält.

Lemma 4.3.13. *Das Spektrum eines Elements einer Banachringalgebra ist stets eine kompakte Teilmenge der komplexen Zahlenebene und ist enthalten in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit der kanonischen Norm unseres Elements als Radius.*

Beweis. Das Spektrum ist abgeschlossen, da sein Komplement offen ist nach 4.3.12. Es ist beschränkt, da für $|\lambda| > \|x\|$ die Differenz $\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$ stets invertierbar ist nach 4.3.11, und dies Argument liefert auch gleichzeitig die behauptete Schranke. \square

4.3.14. Der **Spektralradius** eines Elements x einer Banachringalgebra A ist definiert als

$$\rho(x) = \rho_A(x) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(x)\}$$

Ist das Spektrum leer, so erhalten wir folglich $-\infty$ als Spektralradius. Wir zeigen in 4.4.4, daß dieser Fall nur bei der Banachringalgebra $A = 0$ auftritt. Das vorhergehende Lemma 4.3.13 liefert die Abschätzung $\rho(x) \leq \|x\|$ für $\|x\|$ die kanonische Norm. Das Beispiel einer von Null verschiedenen nilpotenten Matrix zeigt, daß hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Lemma 4.3.15 (Polynomialer spektraler Abbildungssatz). *Gegeben ein Element x einer Banachringalgebra A und ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ ist das Spektrum des Bildes von x unter P das Bild des Spektrums von x unter P , in Formeln*

$$\sigma_A(P(x)) = P(\sigma_A(x))$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei P nicht das Nullpolynom. Gegeben $\lambda \in \mathbb{C}$ schreiben wir $P(X) - \lambda$ als Produkt von Linearfaktoren $P(X) - \lambda = \gamma(X - \mu_1) \dots (X - \mu_r)$. Dann sind die μ_i genau die Stellen, an denen unser Polynom den Wert λ annimmt, in Formeln $P^{-1}(\lambda) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$. Setzen wir nun x ein, so folgt $P(x) - \lambda = \gamma(x - \mu_1) \dots (x - \mu_r)$. Hier ist nun die linke Seite nicht invertierbar, also $\lambda \in \sigma_A(P(x))$, genau dann, wenn einer der Faktoren auf der rechten Seite nicht invertierbar ist, wenn also $\mu \in \sigma_A(x)$ existiert mit $P(\mu) = \lambda$. \square

Übungen

Übung 4.3.16. Gegeben eine beschränkte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zeige man, daß das Spektrum des durch Multiplikation mit f erklärten Operators auf $L^p(\mathbb{R}; dx)$ genau der Abschluß des Bildes $\overline{f(\mathbb{R})}$ ist. Was ist die Operatornorm dieses Operators? Hinweis: 4.3.10.

Übung 4.3.17. Man zeige, daß für $a \in \mathbb{R}$ der durch $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$ gegebene Verschiebungsoperator $\tau_a : L^2(\mathbb{R}; dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; dx)$ als Spektrum die Einheitskreislinie hat im Fall $a \neq 0$ und die einpunktige Menge $\{1\}$ im Fall $a = 0$. Hinweis: 3.1.12 und 4.3.16.

Übung 4.3.18. Man gebe einen Operator mit Spektrum $\{0\} \cup [1, 2]$ an.

Übung 4.3.19. Versetzen wir \mathbb{N} mit dem Zählmaß und betrachten den Operator T auf $L^2(\mathbb{N})$ mit $(Tf)(n) = f(n + 1)$, so gehört die Null zum Spektrum von T , ist aber kein Eigenwert von T . Genauer zeige man, daß das Spektrum von T genau die abgeschlossene Einheitskreisscheibe ist. Andererseits zeige man, etwa mit Fouriertheorie, daß das Spektrum des in derselben Weise auf $L^2(\mathbb{Z})$ erklärten Operators der Einheitskreis ist. Anders als im endlichdimensionalen Fall kann das Spektrum eines Operator also größer werden, wenn wir ihn auf einen unter unserem Operator stabilen Teilraum einschränken.

Übung 4.3.20. Man zeige: Ist x ein invertierbares Element einer Banachringalgebra, so gilt $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(x)\}$. Hinweis: $(x - \lambda)(\lambda x)^{-1} = (\lambda^{-1} - x^{-1})$.

Übung 4.3.21. Für jeden unitären Automorphismus x eines Hilbertraums \mathcal{H} ist das Spektrum von x als Element der Banachringalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ enthalten in der Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}$. Hinweis: Aus 4.3.11 folgt leicht, daß besagtes Spektrum in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe enthalten sein muß. Dann beachte man, daß dasselbe für das Spektrum von x^{-1} gelten muß und wende 4.3.20 an.

4.4 Weitere Eigenschaften des Spektrums*

4.4.1. Mit Funktionentheorie vertraute Leser können auch noch einige weitere fundamentale Eigenschaften des Spektrums unschwer einsehen. Sie werden jedoch im weiteren Verlauf dieser Vorlesung nicht benötigt.

4.4.2 (**Funktionentheorie für banachwertige Funktionen**). Große Teile der Funktionentheorie lassen sich ohne wesentliche Änderungen auf Funktionen auf offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene mit Werten in komplexen Banachräumen verallgemeinern. Die komplex differenzierbaren Funktionen nennen wir wieder **holomorph**. Für stetige banachwertige Funktionen erklären wir Wegintegrale durch die übliche Formel [FT1] 1.3.2 mithilfe unseres banachwertigen Integrals [AN1] ???. Mutatis mutandis zeigt man auch für holomorphe banachwertige Funktionen den Integralsatz von Cauchy [FT1] 1.5.1, die Integralformel von Cauchy [FT1] 2.1.1, den Satz von Liouville [FT1] 2.1.6, sowie die Sätze über die Potenzreihenentwicklung [FT1] 2.2.7 und Laurententwicklung [FT1] 3.1.13, bei denen dann eben die Koeffizienten Vektoren unseres Banachraums werden. Vielfach heißen unsere holomorphen banachwertigen Funktionen auch **analytisch** oder genauer **komplex-analytisch**, da sie sich eben lokal in Potenzreihen entwickeln las-

sen. Umgekehrt liefern auch alle Potenzreihen auf ihren Konvergenzbereich holomorphe Funktionen.

Beispiel 4.4.3. Sei A eine komplexe Banachringalgebra und $x \in A$ ein Element. So ist die Abbildung $\mathbb{C} \setminus \sigma(A) \rightarrow A$ gegeben durch $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ holomorph. Halten wir in der Tat ein λ fest und setzen $a := \lambda - x$, so gilt

$$(a - z)^{-1} = (a(1 - a^{-1}z))^{-1} = a^{-1}(1 + a^{-1}z + a^{-2}z^2 + \dots)$$

für $|z| < \|a^{-1}\|^{-1}$ und das ist eine Entwicklung in eine Potenzreihe.

Satz 4.4.4 (Operatornorm und Spektralradius). *In einer von Null verschiedenen komplexen Banachringalgebra A hat jedes Element $x \in A$ nichtleeres Spektrum und sein Spektralradius kann durch die kanonischen Normen seiner Potenzen ausgedrückt werden als*

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Beweis. Für alle $n \geq 1$ gilt $\rho(x)^n = \rho(x^n) \leq \|x^n\|$ nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz 4.3.15 und der allgemeinen Abschätzung 4.3.14, also $\rho(x) \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ für alle $n \geq 1$. Andererseits ist $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ nach 4.4.3 eine holomorphe A -wertige Funktion $\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \rightarrow A$. Diese Funktion läßt sich sogar holomorph „durch Null nach ∞ fortsetzen“. Konkreter und in Formeln läßt sich die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times \setminus \{\mu \mid \mu^{-1} \in \sigma(x)\} & \rightarrow & A \\ \mu & \mapsto & (\mu^{-1} - x)^{-1} \end{array}$$

holomorph auf den Ursprung fortsetzen, indem man $\mu = 0$ die Null aus A zuordnet: Für hinreichend kleines μ , genauer $|\mu| \cdot \|x\| < 1$ wird diese Abbildung nämlich dargestellt durch die Potenzreihe

$$\begin{aligned} (\mu^{-1} - x)^{-1} &= \mu(1 - \mu x)^{-1} \\ &= \mu + \mu^2 x + \mu^3 x^2 + \mu^4 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Da diese Potenzreihe auf jeder Kreisscheibe um den Ursprung konvergieren muß, auf der unsere Funktion holomorph ist, ist für alle $\lambda > \rho(x)$ die Folge $\lambda^{-n} \|x^n\|$ beschränkt und wir folgern $\lambda \geq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt die noch fehlende Abschätzung. Daß das Spektrum nicht leer ist, folgt mit der banachwertigen Variante des Satzes von Liouville: Da $(\lambda - x)^{-1}$ beschränkt ist, muß diese Funktion, wenn sie denn für alle λ definiert ist, bereits konstant sein. Eine Konstante hat aber unter der Annahme $A \neq 0$ stets nichtleeres Spektrum. \square

Übungen

Übung 4.4.5. Gegeben ein Banachraum V und ein abgeschlossener Teilraum $N \triangleleft V$ wird V/N ein Banachraum mit der **Quotientennorm**

$$\|v + N\| := \inf\{\|v + n\| \mid n \in N\}$$

Gegeben eine Banachringalgebra A und ein abgeschlossenes Ideal $I \triangleleft A$ ist auch A/I mit der Quotientennorm eine Banachringalgebra.

Übung 4.4.6. Jedes maximale Ideal einer Banachringalgebra ist abgeschlossen. Hinweis: Die Einheitsgruppe einer Banachringalgebra ist offen.

Übung 4.4.7 (Gelfand-Mazur). Ist eine Banachringalgebra ein Schiefkörper, so ist die Einbettung von \mathbb{C} ein Isomorphismus. Hinweis: Jedes Element hat nichtleeres Spektrum. Insbesondere induziert für den Quotienten einer Banachringalgebra nach einem maximalen Ideal stets die Einbettung von \mathbb{C} einen Isomorphismus mit \mathbb{C} .

Übung 4.4.8. Sei A eine Banachringalgebra und $a \in A$ ein Element. Genau dann gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zu Spektrum von a , wenn es einen Ringalgebrenhomomorphismus $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $\varphi(a) = \lambda$. Hinweis: Man konstruiert φ , indem man ein maximales Ideal \mathfrak{m} über $(a - \lambda 1)$ wählt, das nach 4.4.6 abgeschlossen sein muß, und dann folgert, daß nach Gelfand-Mazur 4.4.7 die offensichtlich Einbettung ein Isomorphismus $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ sein muß.

4.5 Spektren selbstadjungierter Operatoren

Proposition 4.5.1 (Spektralradius und Operatornorm). Für jeden selbstadjungierten Operator T auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum stimmen Spektralradius und Operatornorm überein, in Formeln

$$\rho(T) = \|T\|$$

4.5.2. Unsere Formel zeigt zumindest für jeden selbstadjungierten Operator auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum, daß sein Spektrum nicht leer sein kann. Später werden wir unsere Formel allgemeiner für „normale“ Operatoren zeigen.

Beweis. Sei $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unser Operator. Gegeben ein Vektor v der Länge Eins gilt $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^2v \rangle \leq \|v\| \|T^2v\| = \|T^2v\|$. Das zeigt $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$. Die andere Ungleichung gilt eh, womit wir für jeden selbstadjungierten Operator T folgern

$$\|T\|^2 = \|T^2\|$$

Da unser Raum \mathcal{H} nicht Null ist, finden wir in \mathcal{H} eine Folge von Einheitsvektoren v_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^2 v_n\| = \|T^2\|$. Wegen $\|T^2 v_n\| \leq \|T\| \|T v_n\| \leq \|T\|^2 = \|T^2\|$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T v_n\| = \|T\|$ zumindest falls $\|T\| \neq 0$, und im Fall $\|T\| = 0$ ist das eh klar. Wir setzen nun $c = \|T\|$ und behaupten, daß c^2 zum Spektrum von T^2 gehört. In der Tat gilt ja

$$\|(T^2 - c^2)v_n\|^2 = \langle v_n, (T^4 - 2c^2 T^2 + c^4)v_n \rangle = \|T^2 v_n\|^2 - 2c^2 \|T v_n\|^2 + c^4$$

und das strebt für $n \rightarrow \infty$ offensichtlich gegen Null. Damit haben wir per definitionem $c^2 \in \sigma(T^2)$ und es folgt $\|T^2\| \leq \rho(T^2)$ und, da wir die andere Abschätzung nach 4.3.14 bereits kennen, $\|T^2\| = \rho(T^2)$. Der spektrale Abbildungssatz 4.3.15 zeigt jedoch $\rho(T^2) = \rho(T)^2$ und wegen $\|T^2\| = \|T\|^2$ folgt die Behauptung. \square

Proposition 4.5.3 (Spektren selbstadjungierter Operatoren). *Jeder selbstadjungierte Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} hat ein rein reelles Spektrum, in Formeln $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Ist T selbstadjungiert, so gilt $\langle v, Tv \rangle = \langle Tv, v \rangle = \overline{\langle v, Tv \rangle}$ für alle $v \in \mathcal{H}$, mithin ist $\langle v, Tv \rangle$ stets reell. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ erhalten wir so wegen der offensichtlichen Abschätzung $|\operatorname{Im} z| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{C}$ von der Mitte ausgehend die Ungleichungen

$$|\operatorname{Im} \lambda| \|v\|^2 \leq |\langle (T - \lambda)v, v \rangle| \leq \|(T - \lambda)v\| \|v\|$$

und damit $|\operatorname{Im} \lambda| \|v\| \leq \|(T - \lambda)v\|$. Unter der Annahme $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist demnach die Abbildung $(T - \lambda)$ injektiv und nach 4.5.5 hat sie sogar abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig. Andererseits ist mit demselben Argument auch $(T - \lambda)^* = (T - \bar{\lambda})$ injektiv und damit hat $(T - \lambda)$ nach 2.8.14 dichtes Bild. Zusammen folgt, daß $(T - \lambda)$ invertierbar sein muß, so daß λ nicht zum Spektrum von T gehören kann. \square

Lemma 4.5.4. *Eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum, die keinen Vektor verkürzt, hat abgeschlossenes Bild und ihre auf diesem Bild definierte Umkehrabbildung ist stetig.*

4.5.5. Dieselbe Aussage folgt offensichtlich auch, wenn es eine positive reelle Zahl gibt derart, daß unsere Abbildung jeden Vektor höchstens um diesen Faktor verkürzt.

Beweis. Ist allgemeiner $f : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung von einem Banachraum in einen normierten Vektorraum und existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|f(v)\| \geq c\|v\| \ \forall v \in V$, so ist das Bild von f abgeschlossen, denn jede konvergente Folge $f(v_0), f(v_1), \dots$ im Bild $f(V)$ ist Cauchy, also ist auch v_0, v_1, \dots Cauchy in V und konvergiert gegen ein $v \in V$, und dann muß $f(v)$ der Grenzwert der $f(v_i)$ sein, der damit auch in $f(V)$ liegt. \square

Lemma 4.5.6 (Anwenden stetiger Funktionen auf Operatoren). *Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} gibt es genau einen stetigen \mathbb{C} -linearen Ringhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\sigma(T)) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto f(T) \end{aligned}$$

vom Ring aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Spektrum von T in den Ring aller beschränkten Operatoren unseres Hilbertraums, der die Einbettung $\sigma(T) \hookrightarrow \mathbb{R}$ auf den Operator T wirft, und dieser Ringhomomorphismus wirft konjugierte Funktionen auf adjungierte Operatoren, in Formeln $\bar{f}(T) = f(T)^$.*

4.5.7. Die Stetigkeit ist hier gemeint in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ und die Operatornorm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Schreiben wir im folgenden $f(T)$ für eine stetige auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion, so meinen wir, daß der Operator T im Sinne des vorhergehenden Lemmas in ihre Einschränkung $f|_{\sigma(T)}$ eingesetzt werden soll. Ich habe dieser Aussage nur den Status eines Lemmas gegeben, da sie sich als eine direkte Konsequenz aus dem Spektralsatz 4.7.9 ergeben wird und unter diesem Blickwinkel nur ein Schritt zum Beweis dieses zentralen Resultats ist.

Beweis. Der Teilring $\mathbb{C}[t] \subset \mathcal{C}(\sigma(T))$ aller Einschränkungen von Polynomfunktionen liegt nach Weierstraß [AN1] 10.2.13 dicht im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz. Gegeben ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ haben wir nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$, und hat P reelle Koeffizienten, so ist auch $P(T)$ selbstadjungiert und es folgt $\|P(T)\| = \|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$ wegen der Gleichheit von Norm und Spektralradius bei selbstadjungierten Operatoren 4.5.1 auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum. Ist P komplex, so können wir immer noch $P = A + iB$ schreiben mit reellen Polynomen A, B und folgern

$$\|P(T)\| \leq \|A(T)\| + \|B(T)\| \leq \|A|_{\sigma(T)}\|_\infty + \|B|_{\sigma(T)}\|_\infty \leq 2\|P|_{\sigma(T)}\|_\infty$$

Der offensichtliche Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P \mapsto P(T)$ faktorisiert also über einen stetigen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, und dessen eindeutig bestimmte stetige Ausdehnung auf $\mathcal{C}(\sigma(T))$ nach 2.4.17 ist die gesuchte Abbildung und ist wieder ein Ringhomomorphismus aufgrund der Stetigkeit der Multiplikationen. Ist $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, so ist $P(T)$ offensichtlich adjungiert zu $\bar{P}(T)$. Im allgemeinen ist $f(T)$ Grenzwert in Bezug auf die Operatornorm gewisser $P(T)$ und die Behauptung $\bar{f}(T) = f(T)^*$ folgt ohne weitere Schwierigkeiten. \square

Proposition 4.5.8 (Spektraler Abbildungssatz). *Ist T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so hat $f(T)$ das Spektrum*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

Beweis. Gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ nicht zum Bild von f , so ist $f - \lambda$ invertierbar in $\mathcal{C}(\sigma(T))$ und damit $f(T) - \lambda \text{id}$ invertierbar in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und wir haben $\lambda \notin \sigma(f(T))$. Das zeigt von der behaupteten Gleichheit die Inklusion \subset . Gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zum Bild von f , sagen wir $\lambda = f(x)$ für $x \in \sigma(T)$, so ist f der gleichmäßige Grenzwert einer Folge P_0, P_1, \dots von Polynomen mit $P_n(x) = \lambda$. Also ist $P_n(T) - \lambda \text{id}$ nicht invertierbar für alle n und damit auch $f(T) - \lambda \text{id}$ nicht invertierbar nach 4.3.12. Das zeigt die andere Inklusion \supset . \square

Beweis von 4.2.14. Gegeben ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ betrachten wir die \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \langle v, f(T)v \rangle \end{aligned}$$

Um den Riesz'schen Darstellungssatz 4.6.2 anwenden zu können, gilt es zu zeigen, daß unter dieser Abbildung nichtnegative reelle Funktionen nichtnegative reelle Zahlen liefern. Das ist aber klar, da jede nichtnegative reelle Funktion ein Quadrat ist, so daß wir haben $\langle v, f(T)v \rangle = \|\sqrt{f}(T)v\|^2$. Es gibt nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 4.6.2 also ein und sogar genau ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} mit

$$\int f(t) \mu(t) = \langle v, f(T)v \rangle$$

für alle stetigen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Für dieses Maß μ hat die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}_1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto f(T)v \end{aligned}$$

dann die Eigenschaft $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2 \mu$. Damit faktorisiert sie erstens über das Bild der offensichtlichen Abbildung $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und läßt sich nach 2.4.12 zweitens von diesem Bild zu einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ erweitern und wir haben ein mögliches Paar (μ, φ) gefunden. Um zu sehen, daß es auch das einzig mögliche Paar ist, müssen wir nur im Beweis einige Schritte rückwärts gehen: Gegeben ein Paar (μ, φ) haben wir ja für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ offensichtlich $\varphi(P) = P(T)v$ und folglich $\int P \mu = \langle v, P(T)v \rangle$. Ein kompakt getragenes Borelmaß auf \mathbb{R} wird jedoch nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 4.6.2 und dem Approximationssatz von Weierstraß [AN1] 10.2.9 durch die Kenntnis der Integrale aller Polynome nach diesem Maß bereits eindeutig festgelegt. \square

4.5.9. Wir können nun den Satz über die lokale Struktur unitärer Darstellungen der reellen Zahlengeraden 4.1.4 zeigen im Fall, daß alle Vektoren unserer Darstellung (\mathcal{H}, ρ) differenzierbar sind. In der Tat ist dann der infinitesimale Erzeuger S unserer Darstellung schiefadjungiert und folglich iS selbstadjungiert. Dann aber finden wir nach 4.2.14 genau ein Paar (μ, φ) bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf \mathbb{R} und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \\ (x \cdot) \downarrow & & \downarrow iS \\ L^2(\mathbb{R}; \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Damit kommutiert das Diagramm auch, wenn wir beide Vertikalen mit $-it$ multiplizieren und darauf \exp anwenden, und das zeigt die in 4.1.4 behauptete Existenz von (μ, φ) in diesem Fall. Der Nachweis der Eindeutigkeit im vorliegenden Fall, also immer noch unter der Annahme, daß alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar sind, mag dem Leser überlassen bleiben.

Definition 4.5.10. Gegeben ein positiv semidefiniter selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum erklären wir

$$\sqrt{T}$$

als den positiv semidefiniten Operator, der daraus durch Anwenden der Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$ entsteht. Das ist erlaubt, da nach 4.5.13 für das Spektrum gilt $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition 4.5.11. Gegeben ein beschränkter Operator A auf einem Hilbertraum ist A^*A selbstadjungiert und positiv semidefinit und wir setzen

$$|A| := \sqrt{A^*A}$$

Übungen

Übung 4.5.12. Eine stetige Abbildung von einem vollständigen metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum, die keinen Abstand verkleinert, ist injektiv mit abgeschlossenem Bild, und die auf dem Bild definierte Umkehrabbildung ist gleichmäßig stetig.

Übung 4.5.13. Ein beschränkter selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} heißt **positiv semidefinit** genau dann, wenn gilt

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

Man zeige, daß das Spektrum eines positiv semidefiniten Operators stets in der nichtnegativen reellen Zahlengeraden enthalten ist. Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von 4.5.3.

Übung 4.5.14. Genau dann besteht das Spektrum eines selbstadjungierten Operators aus einem einzigen Punkt λ , wenn unser Operator die Multiplikation mit dem Skalar λ auf einem von Null verschiedenen Hilbertraum ist. Hinweis: 4.5.1.

Übung 4.5.15. Jeder beschränkte Operator A auf einem Hilbertraum besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt

$$A = DP$$

mit P positiv semidefinit und D einer partiellen Isometrie im Sinne von [LA2] 1.9.29 mit $\ker D = (\operatorname{im} P)^\perp$. In einer solchen Darstellung gilt stets $P = |A|$. Man nennt diese Darstellung auch die **Polarzerlegung** von A . Ebenso besitzt er auch eine eindeutige Darstellung als Produkt $A = P'D'$ mit P' selbstadjungiert positiv semidefinit und D' einer partiellen Isometrie derart, daß gilt $\operatorname{im} D' = (\ker P')^\perp$. Hinweis: [LA2] 1.9.30.

Übung 4.5.16. Gegeben ein Maßraum (X, μ) und eine beschränkte meßbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Multiplizieren mit g ein selbstadjungierter Operator T auf $L^2(X; \mu)$. Gegeben $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist $f(T)$ dann das Multiplizieren mit der Funktion $f \circ g$.

Übung 4.5.17. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \end{array}$$

mit T, T' selbstadjungiert kommutiert für jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auch das entsprechende Diagramm mit $f(T), f(T')$ statt T, T' , in Formeln $AT = T'A \Rightarrow Af(T) = f(T')A$.

Übung 4.5.18. Wird ein selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum in einer geeigneten Basis gegeben durch eine Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$, so wird $f(T)$ in derselben Basis gegeben durch die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Übung 4.5.19. Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} verschwindet das Spektralmaß μ jedes Vektors auf dem Komplement des Spektrums unseres Operators, in Formeln $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(T)) = 0$. In anderen Worten paßt also unsere kanonische Einbettung in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_l(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}(\sigma(T)) & \rightarrow & \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ L^2(\mathbb{R}; \mu) & \xrightarrow{\sim} & L^2(\sigma(T); \mu) & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

Die obere Horizontale wird dabei durch $f \mapsto f(T)v$ gegeben.

4.6 Der Riesz'sche Darstellungssatz

Definition 4.6.1. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **nichtnegativ**, wenn sie jeder nichtnegativen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet.

Satz 4.6.2 (Darstellungssatz von Riesz). *Ist X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum, so liefert das Bilden des Integrals eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Borelma\ss e auf } X\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Nichtnegative Linearformen auf } \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})\} \\ \mu & \mapsto & (f \mapsto \int f \mu) \end{array}$$

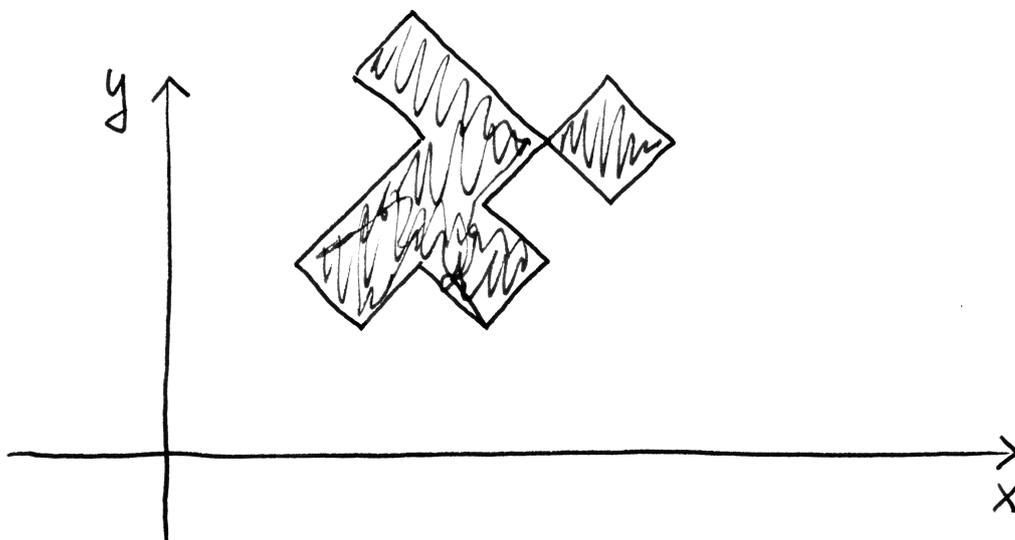
Vorschau 4.6.3. Dieser Satz gilt allgemeiner für jeden lokal kompakten abzählbar basierten Hausdorffraum X , vergleiche ??.

4.6.4. Auf der linken Seite sind nichtnegative Borelmaße gemeint, die also durchaus auch den Wert ∞ annehmen dürfen, nur eben nicht auf Kompakta. Statt nichtnegativen reell-linearen Abbildungen $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mag man gleichbedeutend komplexlineare Abbildungen $\Lambda : \mathcal{C}_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, die nichtnegativ sind in dem Sinne, daß sie jeder nichtnegativen reellen Funktion eine nichtnegative reelle Zahl zuordnen.

4.6.5. Für jedes Kompaktum $K \subset X$ in unserem endlichdimensionalen reellen Raum X ist die Einschränkung einer nichtnegativen Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ auf den Raum $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit Träger in K stetig für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. In der Tat gibt es offensichtlich eine stetige nichtnegative Funktion $h \in \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})$, die auf unserem Kompaktum K konstant Eins ist. Für $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ gilt dann $-\|f\|_\infty h \leq f \leq \|f\|_\infty h$ und Anwenden von Λ liefert $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(h) \|f\|_\infty$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X = \mathbb{R}^n$. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Sicher wird die σ -Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ erzeugt durch den Mengenring aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle. Sicher wird sie auch erzeugt durch den Mengenring \mathcal{D} , der daraus durch Anwenden eines beliebigen Vektorraumautomorphismus von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ entsteht. Wählen wir nun unseren Automorphismus so, daß er keine der Koordinatenhyperebenen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ auf eine Koordinatenhyperebene abbildet, dann ist für $D \in \mathcal{D}$ offensichtlich das Integral seiner charakteristischen Funktion $[D]$ nach der letzten Koordinate $\int [D] dy$ stetig mit kompaktem Träger auf \mathbb{R}^n und wir können für jede nichtnegative Linearform Λ wie oben die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_\Lambda : \mathcal{D} & \rightarrow & [0, \infty) \\ D & \mapsto & \Lambda(\int [D] dy) \end{array}$$



Eine Menge des Mengengerings \mathcal{D} von Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, der durch Drehung um 45° aus dem Mengengering aller endlichen Vereinigungen von Produkten endlicher Intervalle entsteht.

betrachten. Nun zeigt der Satz von Dini [AN1] 7.5.12 zusammen mit 4.6.5, daß $\tilde{\mu}$ ein Prämaß auf \mathcal{D} ist. Nach dem Maßerweiterungssatz 1.2.10 besitzt dies Prämaß genau eine Fortsetzung zu einem Borelmaß $\tilde{\mu}$ auf $X \times \mathbb{R}$. Schließlich erklären wir ein Borelmaß $\mu = \mu_\Lambda$ auf X , indem wir für jede Borelmenge $B \subset X$ setzen

$$\mu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0, 1])$$

Damit haben wir eine Abbildung $\Lambda \mapsto \mu$ in die Gegenrichtung konstruiert und müssen nur noch zeigen, daß unsere beiden Abbildungen zueinander invers sind. Wir beginnen mit der Situation $\nu \mapsto \Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu$ und zeigen die Gleichheit von Maßen $\mu = \nu$. Nach Fubini stimmen die Maße $\tilde{\mu}$ und $\nu \boxtimes dy$ auf \mathcal{D} überein und nach dem Maßerweiterungssatz 1.2.10 sind sie folglich gleich. Damit folgt dann für jede Borelmenge $B \subset X$ sofort $\nu(B) = \tilde{\mu}(B \times [0, 1]) = \mu(B)$. Nun gehen wir umgekehrt von Λ aus, betrachten also die Situation $\Lambda \mapsto \tilde{\mu} \mapsto \mu \mapsto \Gamma$ und zeigen die Gleichheit von Linearformen $\Gamma = \Lambda$. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf allen nichtnegativen Funktionen $f \in \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R})$ denselben Wert $\Gamma(f) = \Lambda(f)$ annehmen. Nun läßt sich jedoch das offene durch $X \times \{0\}$ und den Graphen von f begrenzte Gebiet

$$G = \{(x, y) \mid 0 < y < f(x)\}$$

als die Vereinigung einer aufsteigenden Folge $D_0 \subset D_1 \subset \dots$ von Mengen aus \mathcal{D} darstellen. Nach dem Satz von Dini [AN1] 7.5.12 gilt dann $\int [D_r] dy \rightarrow f$ gleichmäßig und folglich $\Lambda(\int [D_r] dy) \rightarrow \Lambda(f)$ für $r \rightarrow \infty$. Da $\tilde{\mu}$ per definitionem invariant ist unter Verschiebung in der letzten Koordinate, haben wir nach 1.7.26 notwendig $\tilde{\mu} = \mu \boxtimes dy$. Also strebt $\Lambda(\int [D_r] dy)$ auch gegen

$$\tilde{\mu}(G) = (\mu \boxtimes dy)(G) = \int f(x) \mu\langle x \rangle = \Gamma(f) \quad \square$$

Übungen

Übung 4.6.6. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum und sei weiter $\Lambda : \mathcal{C}_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform mit der Eigenschaft, daß für alle Kompakta $K \subset X$ ihre Restriktion auf $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{R})$ stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz. So ist Λ die Differenz zweier nichtnegativer Linearformen. Hinweis: Für $f \in \mathcal{C}_1(X)$ mit $f \geq 0$ setze man

$$\Lambda_+(f) = \sup\{\Lambda(g) \mid 0 \leq g \leq f\}$$

und zeige, daß das endlich ist mit $\Lambda_+(f+h) = \Lambda_+(f) + \Lambda_+(h)$ für $f, h \geq 0$ und $\Lambda_+(af) = a\Lambda_+(f)$ für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gegeben $f \in \mathcal{C}_1(X)$ setze man $\Lambda_+(f) = \Lambda_+(f_+) - \Lambda_+(f_-)$ für $f = f_+ - f_-$ die Zerlegung in einen positiven und einen negativen Teil wie in 1.6.1 und zeige, daß $\Lambda_+ : \mathcal{C}_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegativ und linear ist. Schließlich zeige man, daß auch $\Lambda_+ - \Lambda$ nichtnegativ ist.

4.7 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Definition 4.7.1. Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum und \mathcal{H} ein Hilbertraum. Ein auf X definiertes **\mathcal{H} -teilraumwertiges Maß** ist eine Abbildung E , die jeder meßbaren Menge $M \in \mathcal{M}$ einen abgeschlossenen Teilraum $E(M) \subset \mathcal{H}$ zuordnet derart, daß gilt:

1. Für je zwei disjunkte Mengen M, M' aus \mathcal{M} sind die zugehörigen Teilräume orthogonal, in Formeln $M \cap M' = \emptyset \Rightarrow E(M) \perp E(M')$;
2. Für jede abzählbare Familie $(M_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von meßbaren Mengen mit Vereinigung M ist das Erzeugnis der $E(M_\nu)$ ein dichter Teilraum von $E(M)$.

4.7.2. Aus der ersten Bedingung folgt über den Fall $M = M' = \emptyset$ insbesondere $E(\emptyset) = 0$. Das Konzept eines teilraumwertigen Maßes scheint mir besonders gut verständlich. Bei der expliziten Arbeit erweist sich jedoch das gleichwertige Konzept eines projektorwertigen Maßes als praktischer, das wir als nächstes diskutieren. Die Äquivalenz beider Konzepte dürfen sie als Übung 4.7.18 selbst ausarbeiten.

Definition 4.7.3. Sei (X, \mathcal{M}) ein Meßraum und \mathcal{H} ein Hilbertraum. Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt ein auf X definiertes **projektorwertiges Maß** genau dann, wenn die Operatoren $\Phi(M)$ alle selbstadjungiert und idempotent sind, also nach 2.8.13 orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Teilräume, und wenn darüber hinaus gilt:

1. Aus $M \cap M' = \emptyset$ folgt $\Phi(M) \circ \Phi(M') = 0$;
2. Für jede aufsteigende Folge meßbarer Mengen $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ mit Vereinigung M gilt $\Phi(M_n)v \rightarrow \Phi(M)v \quad \forall v \in \mathcal{H}$.

Ein projektorwertiges Maß mit der zusätzlichen Eigenschaft $\Phi(X) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ nennen wir eine **Teilung der Identität von \mathcal{H}** .

4.7.4. Gegeben ein Meßraum (X, \mathcal{M}) bezeichne $\mathcal{L}^\infty(X)$ den Vektorraum aller beschränkten meßbaren Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm. Man erkennt leicht, daß die meßbaren Stufenfunktionen darin einen dichten Teilraum bilden.

Lemma 4.7.5 (Integration nach projektorwertigen Maßen). *Gegeben ein Meßraum (X, \mathcal{M}) , ein Hilbertraum \mathcal{H} und ein projektorwertiges Maß $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gibt es genau eine stetige lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\infty(X) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \int f \Phi = \int f(x) \Phi \langle x \rangle \end{aligned}$$

vom Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen auf X in den Raum aller beschränkten Operatoren auf unserem Hilbertraum mit der Eigenschaft, daß der charakteristischen Funktion jeder meßbaren Menge der entsprechende Projektor zugeordnet wird, in Formeln $\int [M]\Phi = \Phi(M) \forall M \in \mathcal{M}$.

Beweis. Auf meßbaren Stufenfunktionen $s : X \rightarrow \mathbb{C}$ muß unsere Abbildung, wenn es sie denn überhaupt gibt, gegeben sein durch die Formel

$$\int s\Phi = \sum_{z \in \mathbb{C}} z \cdot \Phi(s^{-1}(z))$$

Wir haben gewonnen, sobald wir zeigen können, daß mit dieser Regel für jede Stufenfunktion s die Abschätzung $\|\int s\Phi\| \leq \|s\|_\infty$ gilt, da sich unsere Abbildung dann nach 2.4.17 und 4.7.4 auf genau eine Weise stetig und linear vom Raum aller Stufenfunktionen auf den Raum aller beschränkten meßbaren Funktionen fortsetzen läßt. Sei also s eine meßbare Stufenfunktion, die wir etwa als $s = c_1[M_1] + \dots + c_n[M_n]$ schreiben können mit M_1, \dots, M_n paarweise disjunkt und meßbar. Es gilt, für alle $v \in \mathcal{H}$ zu zeigen

$$\|(\int s\Phi)v\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

oder ausgeschrieben

$$\|c_1\Phi(M_1)v + \dots + c_n\Phi(M_n)v\| \leq \|s\|_\infty \|v\|$$

Nun bilden jedoch die $v_i = \Phi(M_i)v$ zusammen mit einem weiteren w eine Zerlegung $v = v_1 + \dots + v_n + w$ von v in eine Summe von paarweise orthogonalen Vektoren, und durch Quadrieren beider Seiten sehen wir, daß unsere Behauptung äquivalent ist zu der offensichtlichen Aussage

$$\|c_1v_1\|^2 + \dots + \|c_nv_n\|^2 \leq \|s\|_\infty^2 (\|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2 + \|w\|^2) \quad \square$$

Übung 4.7.6. Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß. Gegeben $v \in \mathcal{H}$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ gilt

$$\left\langle v, \left(\int f\Phi \right) v \right\rangle = \int f \langle v, \Phi v \rangle$$

für das in 4.7.19 definierte Maß $\langle v, \Phi v \rangle$ auf (X, \mathcal{M}) .

Übung 4.7.7 (Funktorialität des Integrals). Ist $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen und sind auf einem Meßraum (X, \mathcal{M}) projektorwertige Maße Φ in \mathcal{H} und Φ' in \mathcal{H}' gegeben mit der Eigenschaft $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A \quad \forall M \in \mathcal{M}$ oder in Kurzschreibweise $A \circ \Phi = \Phi' \circ A$, so gilt für jede beschränkte meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität

$$A \circ \left(\int f\Phi \right) = \left(\int f\Phi' \right) \circ A$$

Definition 4.7.8. Ein projektorwertiges Maß auf den Borelmengen eines topologischen Raums heißt **kompakt getragen** genau dann, wenn es Kompakta gibt, deren Komplement der Nulloperator zugeordnet wird.

Satz 4.7.9 (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren).

1. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte kompakt getragene} \\ \text{Teilungen der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Selbstadjungierte} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad \int x\Phi\langle x \rangle$$

2. Für die dem selbstadjungierten Operator T entsprechende Teilung der Identität Φ_T ist das Spektrum $\sigma(T)$ von T das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ mit $\Phi_T(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$.

3. Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ und selbstadjungierte Operatoren $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AT = T'A$ gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ die Identität

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

4.7.10. In diesem Satz ist \mathbb{R} mit seiner durch die Borelmengen gegebenen Struktur eines Meßraums zu verstehen. Die folgende Übung 4.7.24 zeigt, daß die durch einen selbstadjungierten Operator definierte Teilung der Identität die Zerlegung in Eigenräume [LA2] 1.9.38 verallgemeinert. Die letzte Aussage 4.7.9.3 verallgemeinert dann unsere Erkenntnis [LA2] 3.2.16, nach der A zumindest schon mal Eigenräume von T in Eigenräume von T' zum selben Eigenwert abbilden muß.

Beispiel 4.7.11. Sei $\mathcal{H} = L^2([0, 1]; \lambda)$ und $T = (x \cdot)$ der Operator $f \mapsto Tf$ mit $(Tf)(x) = xf(x)$. So kann die zugehörige Teilung der Identität $\Phi = \Phi_T$ beschrieben werden durch die Vorschrift, daß $\Phi(M)$ die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion von M oder besser von $(M \cap [0, 1])$ ist, in Formeln $\Phi(M) = (([M] \cap [0, 1]) \cdot) : L^2([0, 1]; \lambda) \rightarrow L^2([0, 1]; \lambda)$.

Ergänzung 4.7.12. Wir werden später auch zeigen, daß dieser Satz immer noch gilt, wenn wir darin „selbstadjungiert“ durch „unitär“ und \mathbb{R} durch S^1 ersetzen. Noch allgemeiner werden wir „normale“ Operatoren auf einem Hilbertraum definieren als Operatoren, die mit ihrem Adjungierten kommutieren, und zeigen, daß der obige Satz auch dann noch gilt, wenn wir darin überall „selbstadjungiert“ durch „normal“ und \mathbb{R} durch \mathbb{C} ersetzen. Und schließlich will ich auch noch erwähnen, daß der erste Teil immer noch gilt, wenn man oben links die Forderung „kompakt getragen“ fallen läßt und oben rechts auch sogenannte „unbeschränkte Operatoren“ im Sinne von 4.12.5 zuläßt.

Ergänzung 4.7.13. Der besonders einfache Fall kompakter selbstadjungierter Operatoren wird in ?? unabhängig behandelt.

4.7.14. Der Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren wird uns bis zum Ende des anschließenden Abschnitts beschäftigen. Zunächst einmal zeigt 4.7.15 unter anderem, daß die im Satz erklärte Abbildung in der Tat jedem kompakt getragenen projektorwertigen Maß auf \mathbb{R} einen selbstadjungierten Operator zuordnet. Dann konstruieren wir in 4.8.5 eine Abbildung $T \mapsto \Phi_T$ in die Gegenrichtung und zeigen in 4.8.7 und 4.8.9, daß unsere beiden Konstruktionen zueinander invers sind. Der zweite Teil des Satzes folgt aus 4.7.16 und der letzte Teil aus 4.8.10 mit der in 4.8.5 gegebenen Beschreibung von Φ_T .

Lemma 4.7.15 (Integration nach projektorwertigem Maß, Eigenschaften). Gegeben (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ beschränkt und meßbar, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß gilt

1. $\int \bar{f}\Phi = (\int f\Phi)^*$
2. $\int fg\Phi = (\int f\Phi) \circ (\int g\Phi)$
3. $\|\int f\Phi\| \leq \|f\|_\infty$

Beweis. Das alles ist für Stufenfunktionen leicht explizit zu sehen und folgt dann durch Grenzübergang im allgemeinen. Die Details können dem Leser überlassen bleiben. Man beachte, daß in Teil 2 das Produkt der Funktionen f und g gemeint ist, nicht etwa ihre Verknüpfung. \square

Lemma 4.7.16 (Spektrum eines Integrals). Ist Φ eine auf \mathbb{C} definierte kompakt getragene Teilung der Identität eines Hilbertraums \mathcal{H} und $T = \int x\Phi\langle x \rangle$, so ist $\sigma(T)$ das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $\Phi(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$.

Beweis. Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit $\Phi(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$, so ist nach 4.7.15 für $\lambda \notin K$ der Operator $\int_K (x - \lambda)^{-1}\Phi\langle x \rangle$ invers zu $\int_K (x - \lambda)\Phi\langle x \rangle = T - \lambda$ und es folgt $\lambda \notin \sigma(T)$. Das zeigt $\sigma(T) \subset K$. Andererseits ist für $\lambda \notin \sigma(T)$ der Operator $T - \lambda$ invertierbar, folglich existiert $c > 0$ derart, daß $T - \lambda$ von Null verschiedene Vektoren höchstens um den Faktor c verkürzt. Alle von Null verschiedenen Vektoren aus dem Bild von $\Phi(B(\lambda; c/2))$ werden jedoch von $T - \lambda$ nach 4.7.15 mindestens um den Faktor $c/2$ verkürzt, da die Funktion $(x - \lambda)$ auf $B(\lambda; c/2)$ eben beschränkt ist durch $c/2$, woraus wir sofort $\Phi(B(\lambda; c/2)) = 0$ folgern. Damit erhalten wir dann auch leicht $\Phi(H) = 0$ für jedes Kompaktum aus dem Komplement von $\sigma(T)$. Da nun dies Komplement wie jede offene Teilmenge der komplexen Zahlenebenen als eine abzählbare Vereinigung von Kompakta dargestellt werden kann, folgt $\Phi(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$. \square

Lemma 4.7.17 (Integral und Grenzübergang vertauschen). Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß. Konvergiert eine Folge f_n meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen eine Funktion f , so gilt $(\int f_n \Phi) v \rightarrow (\int f \Phi) v$ für alle $v \in \mathcal{H}$.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ annehmen. Gegeben $\varepsilon > 0$ bilden dann die

$$X_n = X_n^\varepsilon = \{x \in X \mid |f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n\}$$

eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen mit Vereinigung X . Aus den Eigenschaften eines projektorwertigen Maßes folgt $\Phi(X_n)v \rightarrow \Phi(X)v$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Nun schreiben wir

$$\int f_n \Phi = \int_{X_n} f_n \Phi + \int_{X \setminus X_n} f_n \Phi$$

Das erste Integral liefert einen Operator der Operatornorm $\leq \varepsilon$, und für C eine simultane Schranke der $\|f_n\|_\infty$ liefert das zweite Integral einen Operator der Operatornorm $\leq C$, der mit v dasselbe tut wie mit $\Phi(X)v - \Phi(X_n)v$. Gegeben v sinkt der Betrag von $(\int f_n \Phi) v$ also für hinreichend großes n unter $\varepsilon\|v\| + \varepsilon$, und da das für jedes positive ε gilt, folgt die Behauptung. \square

Übungen

Übung 4.7.18. Sei (X, \mathcal{M}) ein Meßraum und \mathcal{H} ein Hilbertraum. Wir erhalten zueinander inverse Bijektionen zwischen teilraumwertigen Maßen und projektorwertigen Maßen mittels der Zuordnungen $E \mapsto \Phi_E$ mit $\Phi_E(M)$ der orthogonalen Projektion auf $E(M)$ und $\Phi \mapsto E_\Phi$ mit $E_\Phi(M) = \text{im } \Phi(M)$ dem Bild des Projektors $\Phi(M)$.

Übung 4.7.19. Ist (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein projektorwertiges Maß, so ist für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Zuordnung $M \mapsto \langle v, \Phi(M)v \rangle$ ein nichtnegatives endliches Maß $\langle v, \Phi v \rangle$ auf (X, \mathcal{M}) , und stimmen bei zwei projektorwertigen Maßen für alle Vektoren v diese nichtnegativen Maße überein, so stimmen die besagten projektorwertigen Maße bereits selbst überein. Hinweis: Gegeben ein orthogonaler Projektor alias selbstadjungierter Idempotenter P auf einem Hilbertraum gilt $\ker P = \{v \mid \langle v, Pv \rangle = 0\}$.

Übung 4.7.20. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $\Phi = \Phi_T$ die zugehörige Teilung der Identität, so gilt für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Formel $f(T) = \int f \Phi$. Hinweis: Man beginne mit dem polynomialen Fall.

Übung 4.7.21. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist μ ein kompakt getragenes Borelmaß auf \mathbb{R} und T die Multiplikation mit x auf $L^2(\mathbb{R}; \mu)$, so ist der Projektor

$\Phi(M)$ der zugehörigen Teilung Φ der Identität für eine Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $[M]$ von M und der Operator $\int f\Phi$ für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ist schlicht die Multiplikation $(f \cdot) : L^2(\mathbb{R}; \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$. Hinweis: Man berechne $(\int x\Phi(x))(h)$ für h quadratintegrierbar vermittels einer Approximation der Identität auf einem geeigneten Kompaktum von \mathbb{R} durch immer feinere Stufenfunktionen.

Übung 4.7.22. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einer Teilung Φ der Identität und f beschränkt und meßbar und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom haben wir

$$P \left(\int f\Phi \right) = \int (P \circ f)\Phi$$

Übung 4.7.23. Seien (X, \mathcal{M}) ein Meßraum, $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ beschränkt und meßbar, \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Teilung der Identität. So gilt für alle $v \in \mathcal{H}$ die Abschätzung

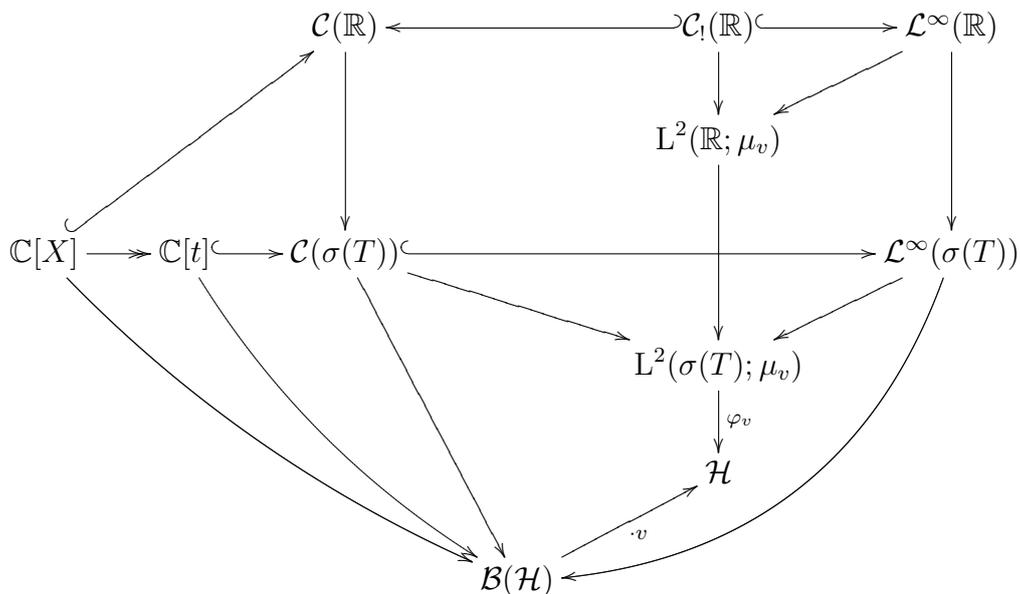
$$\left\| \left(\int f\Phi \right) v \right\| \geq (\inf_{x \in X} |f(x)|) \|v\|$$

Übung 4.7.24. Man folgere aus dem Spektralsatz: Ist $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $(e_i)_{i \in I}$ eine Hilbertbasis von \mathcal{H} aus Eigenvektoren von T , sagen wir mit $Te_i = \lambda_i e_i$, so hat für die im Sinne von [4.7.9](#) zugehörige Zerlegung $\Phi = \Phi_T$ der Identität und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ der zugehörige Projektor $\Phi(M)$ als Bild den Abschluß der Summe aller Eigenräume zu Eigenwerten aus M , in Formeln

$$\text{im}(\Phi(M)) = \overline{\langle e_i \mid \lambda_i \in M \rangle}$$

4.8 Beweis des Spektralsatzes

4.8.1. Das folgende Diagramm faßt den Aufbau des sogenannten „Funktionalkalküls“ in der hier gegebenen Darstellung zusammen:



Wir gehen aus von der Vertikale links außen, dem Einsetzen unseres selbstadjungierten Operators T in Polynome aus $\mathbb{C}[X]$. Nach dem polynomialen spektralen Abbildungssatz und der Gleichheit von Norm und Spektralradius faktorisiert sie über den Ring $\mathbb{C}[t]$ aller polynomialen Funktionen auf dem Spektrum, und zwar durch eine in Bezug auf die sup-Norm stetige Abbildung, die sich von dort mithilfe des Approximationssatzes von Weierstraß stetig auf den Ring $\mathcal{C}(\sigma(T))$ aller stetigen Funktionen auf dem Spektrum fortsetzen läßt. Gegeben ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ führt diese Fortsetzung zu einer nichtnegativen Linearform $f \mapsto \langle v, f(T)v \rangle$ auf $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ und mit dem Riesz'schen Darstellungssatz zum sogenannten Spektralmaß μ_v unseres Vektors und wieder durch stetige Fortsetzung zur kanonischen Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$, die im Diagramm durch die Verknüpfung des mit φ_v bezeichneten Pfeils mit dem darüberstehenden Pfeil dargestellt ist, der eh einen Isomorphismus darstellt. Diese kanonischen Einbettungen schließlich verwenden wir dann, um auch das Einsetzen unseres Operators in meßbare beschränkte Funktionen f zu erklären durch die Vorschrift $f(T)v := \varphi_v(f)$, wie wir im folgenden genauer ausführen werden.

Definition 4.8.2 (Anwenden meßbarer Funktionen auf Operatoren). Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} und eine beschränkte meßbare Funktion $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ auf seinem Spektrum erklären wir eine Abbil-

dung

$$f(T) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

durch die Vorschrift $f(T)v := \varphi_v(f)$ für $\varphi_v : L^2(\mathbb{R}; \mu_v) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung zu v im Sinne von 4.2.15. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 4.5.19 das Spektralmaß μ_v jedes Vektors $v \in \mathcal{H}$ auf dem Komplement des Spektrums von T verschwindet. Schreiben wir $f(T)$ für eine meßbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, so setzen wir implizit voraus, daß $f|_{\sigma(T)}$ beschränkt sein soll, und meinen das Anwenden dieser Einschränkung auf T .

4.8.3. Sobald wir den Spektralsatz zur Verfügung haben, können wir $f(T)$ auch als $f(T) = \int f(x)\Phi_T\langle x \rangle$ schreiben, wie in 4.8.7 ausgeführt wird, und dann die Aussagen des anschließenden Lemmas 4.8.4 aus 4.7.20, 4.7.15 und 4.7.17 folgern. Das anschließende Lemma ist also nur für den Beweis des Spektralsatzes von Bedeutung. Das Anwenden geeigneter Funktionen auf Operatoren ist auch als **Funktionalkalkül** bekannt.

Lemma 4.8.4 (Eigenschaften des Funktionalkalküls). *Sei T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum \mathcal{H} und sei $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und beschränkt. So gilt:*

1. *Ist f stetig, so stimmt unser eben in 4.8.2 definiertes $f(T)$ mit unserem in 4.5.6 durch polynomiale Approximation definierten $f(T)$ überein;*
2. *Die Abbildung $f(T)$ ist linear und stetig und für ihre Operatornorm gilt $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$;*
3. *Die adjungierte Abbildung zu $f(T)$ ist $f(T)^* = \bar{f}(T)$;*
4. *Ist $g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere meßbare und beschränkte Abbildung, so haben wir $(f \cdot g)(T) = f(T) \circ g(T)$;*
5. *Konvergiert eine Folge f_n meßbarer und simultan beschränkter Funktionen punktweise gegen f , so gilt $f_n(T)v \rightarrow f(T)v$ für alle $v \in \mathcal{H}$.*

Beweis. 1. Das folgt sofort aus den Definitionen, wir hatten ja unsere kanonische Einbettung φ gerade konstruiert als die stetige Fortsetzung der Abbildung $C_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}$ mit $f \mapsto f(T)v$.

2. Die Abschätzung $\|f(T)v\| \leq \|f\|_\infty \|v\|$ folgt auch sofort aus den Definitionen, aber die Linearität unserer Abbildung $f(T)$ muß noch gezeigt werden. Klar ist immerhin, daß gegeben eine Folge f_n beschränkter meßbarer Funktionen auf $\sigma(T)$, die für das Spektralmaß μ eines Vektors v im Hilbertraum $L^2(\sigma(T); \mu)$ gegen eine weitere beschränkte meßbare Funktion auf $\sigma(T)$ konvergiert, notwendig gilt

$$f_n(T)v \rightarrow f(T)v$$

Um nun die Additivität $f(T)(v + w) = f(T)v + f(T)w$ zu zeigen, suchen wir eine Folge $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ stetiger Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und zwar fast überall bezüglich der Summe der Spektralmaße der Vektoren v, w und $v + w$. Die Behauptung folgt dann im Grenzwert aus der Linearität der $f_n(T)$ für die stetigen Funktionen f_n . In derselben Weise zeigen wir $f(T)(\lambda v) = \lambda f(T)(v)$ und damit die Linearität von $f(T)$.

3. Es gilt für je zwei Vektoren v, w zu zeigen $\langle f(T)v, w \rangle = \langle v, \bar{f}(T)w \rangle$. Für stetige f wissen wir das bereits aus 4.5.6. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir eine Folge $f_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ stetiger Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und w . Es folgt $\langle f_n(T)v, w \rangle = \langle v, \bar{f}_n(T)w \rangle$ für alle n und $f_n(T)v \rightarrow f(T)v$ sowie $\bar{f}_n(T)w \rightarrow \bar{f}(T)w$ und damit die Behauptung.

4. Es reicht, für alle $v, w \in \mathcal{H}$ die Formel $\langle (f \cdot g)(T)v, w \rangle = \langle g(T)v, \bar{f}(T)w \rangle$ zu zeigen. Für stetige f, g folgt das aus 4.5.6. Um es im allgemeinen zu zeigen, suchen wir Folgen $f_n, g_n \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ von stetigen Funktionen mit $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, die fast überall punktweise gegen f bzw. g konvergiert, und zwar bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und w , und gehen zum Grenzwert über.

5. Das folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz aus den Definitionen. \square

Lemma 4.8.5 (Identitätsteilung zu einem selbstadjungierten Operator). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einem selbstadjungierten Operator T sind die Operatoren $[M](T)$ für Borelmengen $M \subset \mathbb{R}$ die Projektoren einer kompakt getragenen Teilung Φ_T der Identität von \mathcal{H} .

4.8.6. Hier meint $[M] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion der Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ und $[M](T)$ den Operator auf \mathcal{H} , der daraus im Rahmen unseres Funktionalkalküls durch Anwenden auf T entsteht.

Beweis. Die charakteristische Funktion $[M]$ von M ist reellwertig und idempotent, in Formeln $[M]^2 = [M]$, folglich ist $[M](T)$ selbstadjungiert und idempotent. Aus $M \cap M' = \emptyset$ folgt weiter $[M] \cdot [M'] = 0$ und nach 4.8.4 damit $[M](T) \circ [M'](T) = 0$. Als nächstes bemerken wir, daß nach 4.8.4.5 für jede aufsteigende Folge $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ von meßbaren Mengen mit Vereinigung M und für alle $v \in \mathcal{H}$ die Folge der $[M_n](T)v$ gegen $[M](T)v$ konvergiert. Schließlich bemerken wir noch, daß die Definition 4.8.2 für die konstante Funktion 1 auf dem Spektrum die Gleichung $[\sigma(T)](T) = \text{id}$ liefert und sind fertig. \square

Lemma 4.8.7 (Rekonstruktion eines Operators aus seiner Identitätsteilung). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einem selbstadjungierten Operator T und zuge-

höriger Teilung der Identität Φ_T im Sinne von 4.8.5 haben wir stets

$$T = \int x\Phi_T\langle x \rangle$$

4.8.8. Der Beweis zeigt sogar allgemeiner für jede meßbare beschränkte Funktion $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität

$$f(T) = \int f(x)\Phi_T\langle x \rangle$$

Sobald der Spektralsatz also einmal bewiesen ist, wird das Anwenden meßbarer Funktionen auf selbstadjungierte Operatoren sehr einfach.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten auf jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ denselben Wert annehmen. Ist $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung zu v , so folgt aus den Definitionen die Gleichung

$$\varphi(s) = \left(\int s(x)\Phi_T\langle x \rangle \right) (v)$$

erst für die charakteristische Funktion s jeder Borelmenge, dann für jede meßbare Stufenfunktion und dann wegen der Stetigkeit beider Seiten in Bezug auf die Supremumsnorm für jede beschränkte meßbare Funktion auf $\sigma(T)$, insbesondere auch für die Funktion $s(x) = x$. \square

Lemma 4.8.9. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einer kompakt getragenen auf \mathbb{R} definierten Teilung Φ der Identität und zugehörigem selbstadjungierten Operator $T = \int x\Phi\langle x \rangle$ haben wir stets

$$\Phi = \Phi_T$$

Beweis. Es gilt zu zeigen $[M](T)v = \Phi(M)v$ für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$. Da hier beide Seiten orthogonale Projektionen sind, reicht es zu zeigen

$$\langle v, [M](T)v \rangle = \langle v, \Phi(M)v \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$. Hier sind nun aber beide Seiten kompakt getragene Borelmaße, weshalb wir nach 4.6.2 und 4.6.5 und [AN1] 10.2.9 nur zeigen müssen, daß sie für jede Polynomfunktion P dasselbe Integral liefern. Die linke Seite ist per definitionem das Spektralmaß μ des Vektors v für den Operator T , für μ das Maß auf der linken Seite haben wir also

$$\int P(t)\mu\langle t \rangle = \langle v, P(T)v \rangle$$

Das Maß ν auf der rechten Seite hinwiederum hat die Eigenschaft

$$\int P(t)\nu\langle t \rangle = \left\langle v, \left(\int P\Phi \right) v \right\rangle$$

erst einmal für jede meßbare Stufenfunktion P aber dann wegen der Stetigkeit beider Seiten unter der Norm gleichmäßiger Konvergenz in P sogar für jede beschränkte meßbare Funktion P und damit auch für jede Polynomfunktion P . Damit folgt die Behauptung dann aus 4.7.22. \square

Übungen

Übung 4.8.10 (Funktorialität des Funktionalkalküls). Gegeben ein kommutatives Diagramm von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{H}' \end{array}$$

mit T, T' selbstadjungiert kommutiert für jede beschränkte meßbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auch das entsprechende Diagramm mit $f(T), f(T')$ statt T, T' , in Formeln $AT = T'A \Rightarrow Af(T) = f(T')A$. Hinweis: Man erinnere sich an 4.5.17 und finde für $v \in \mathcal{H}$ eine Folge stetiger durch $\|f\|_\infty$ beschränkter Funktionen, die bezüglich der Summe der Spektralmaße von v und Av fast überall gegen f strebt.

Übung 4.8.11. (Vorbereitung für 4.11.7.) Gegeben ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum \mathcal{H} mit zugehöriger Teilung der Identität Φ_T kann für jede abgeschlossene Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$ das Bild des zugehörigen Projektors beschrieben werden als

$$\begin{aligned} \text{im } \Phi_T(C) &= \{v \in \mathcal{H} \mid \inf_{\lambda \in C} \|(T - \lambda)v\| = 0\} \\ &= \{v \in \mathcal{H} \mid \mu_v(\mathbb{R} \setminus C) = 0 \text{ für } \mu_v \text{ das Spektralmaß von } v\} \end{aligned}$$

4.9 Spektralzerlegung unitärer Darstellungen

Satz 4.9.1 (Spektralzerlegung unitärer Darstellungen). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\ \Phi & \mapsto & (\rho : t \mapsto \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle) \end{array}$$

4.9.2. Gegeben eine unitäre Darstellung (\mathcal{H}, ρ) von \mathbb{R} gibt es also genau eine Teilung $\Phi = \Phi_\rho$ der Identität von \mathcal{H} auf \mathbb{R} mit

$$\rho(t) = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{itx} \Phi\langle x \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Diese Teilung der Identität nennen wir das **zu unserer Darstellung gehörige projektorwertige Maß** und die zugehörigen $\Phi(M)$ nennen wir **Spektralprojektoren**. In der Hoffnung, dadurch die zugrundeliegende Struktur deutlicher zu machen, formuliere ich auch noch eine koordinatenfreie Variante des Satzes, deren Beweis dem Leser überlassen sei: Gegeben eine Geradengruppe G mit Charaktergruppe \hat{G} und ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \hat{G} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } G \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \quad \mapsto \quad (\rho : g \mapsto \int \chi(g) \Phi\langle \chi \rangle)$$

Diese Aussage gilt auch für die additive Gruppe eines beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraums, ja sogar für die Gruppen S^1 , \mathbb{Z} und in voller Allgemeinheit für jede „abzählbar basierte lokal kompakte Hausdorff’sche kommutative topologische Gruppe“, aber in dieser Allgemeinheit werden wir sie nicht beweisen.

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis der Surjektivität. Sind alle Vektoren unserer Darstellung differenzierbar, so existiert nach 4.1.18 ein selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\rho(t) = \exp(tiT)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $\Phi = \Phi_T$ die nach 4.7.9 zu T gehörige Teilung der Identität, in Formeln $T = \int x \Phi\langle x \rangle$, so folgt mit 4.7.20 angewandt auf $f(x) = \exp(itx)$ sofort

$$\rho(t) = \exp(tiT) = \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle$$

und wir haben bereits ein mögliches Φ gefunden. Im allgemeinen finden wir mit 4.10.2 und dem Bilden sukzessiver orthogonaler Komplemente in unserer Darstellung eine Familie $(\mathcal{H}_\iota, \rho_\iota)_{\iota \in I}$ von paarweise orthogonalen Unterdarstellungen, deren Summe dicht liegt und in denen jeweils jeder Vektor differenzierbar ist. Für jedes $\iota \in I$ finden wir dann nach dem bereits Bewiesenen eine auf \mathbb{R} definierte Teilung Φ_ι der Identität von \mathcal{H}_ι mit

$$\rho_\iota(t) = \int e^{itx} \Phi_\iota\langle x \rangle$$

Die Summe dieser teilraumwertigen Maße im Sinne von 4.9.3 ist dann eine Teilung Φ der Identität von \mathcal{H} mit

$$\rho(t)v = \left(\int e^{itx} \Phi\langle x \rangle \right) v$$

erst für alle v aus einem der \mathcal{H}_i , aber dann wegen der Linearität und Stetigkeit beider Seiten sogar für alle $v \in \mathcal{H}$. Das zeigt die Surjektivität. Um die Eindeutigkeit von Φ zu zeigen, beachten wir zunächst, daß die in 4.7.19 erklärten Maße $\langle \Phi v, v \rangle$ für $v \in \mathcal{H}$ unser Φ bereits eindeutig festlegen. Nach 4.7.6 entspricht aber die Fouriertransformierte des Maßes $\langle \Phi v, v \rangle$ unter der Identifikation $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{R}}$, $t \mapsto (x \mapsto e^{itx})$ gerade der Funktion $t \mapsto \langle \rho(t)v, w \rangle$, und nach 3.3.14 wird ein reelles Maß durch seine Fouriertransformierte bereits eindeutig festgelegt. \square

Lemma 4.9.3. *Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} , eine Familie $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ von paarweise orthogonalen Teilräumen mit dichter Summe und Teilungen Φ_i der Identität auf jedem \mathcal{H}_i erhalten wir eine Teilung der Identität auf \mathcal{H} durch die Vorschrift*

$$\text{im } \Phi(M) = \overline{\sum_{i \in I} \text{im } \Phi_i(M)}$$

Beweis. Dem Leser überlassen. Man nutze 4.7.18. \square

Definition 4.9.4. Ein Homomorphismus zwischen Darstellungen (\mathcal{H}, ρ) und (\mathcal{H}', ρ') , auch genannt ein **Verflechtungsoperator**, ist eine stetige lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ mit $A\rho(t) = \rho'(t)A$ für alle Elemente t der dargestellten Gruppe.

Satz 4.9.5 (Funktorialität der Spektralzerlegung). *Gegeben unitäre Darstellungen von \mathbb{R} in Hilberträumen \mathcal{H} bzw. \mathcal{H}' sind die Verflechtungsoperatoren $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ genau die stetigen linearen Abbildungen mit der Eigenschaft, daß für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

Beweis. Daß alle stetigen linearen Abbildungen mit dieser Eigenschaft Verflechtungsoperatoren sind, scheint mir offensichtlich. Sei nun umgekehrt A ein Verflechtungsoperator und $M \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Natürlich reicht es, $A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$ auf einem dichten Teilraum von \mathcal{H} zu zeigen. Mithilfe von 4.10.2 können wir uns also auf den Fall beschränken, daß unsere beiden Darstellungen jeweils ganz aus differenzierbaren Vektoren bestehen. Dann gilt jedoch für die infinitesimalen Erzeuger S, S' offensichtlich $A \circ S = S' \circ A$ und die Behauptung folgt aus der Funktorialität des Spektralmaßes im Fall selbstadjungierter Operatoren 4.7.9.3. \square

Beweis von Satz 4.1.4 zur lokalen Struktur unitärer Darstellungen. Gegeben eine unitäre Darstellung (ρ, \mathcal{H}) von \mathbb{R} betrachten wir die zugehörige Teilung Φ der Identität und zu jedem Vektor $v \in \mathcal{H}$ das Maß $\mu = \langle \Phi v, v \rangle$ nach 4.7.19 und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto (\int f \Phi) v \end{aligned}$$

Nach 4.7.6 gilt hier $\|\varphi(f)\|^2 = \int |f|^2 \mu$. Folglich faktorisiert φ über das Bild von $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und läßt sich nach 2.4.17 von diesem Bild stetig zu einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ ausdehnen. Die Formel $\varphi(e^{itx} \cdot f) = \rho(t)(\varphi(f))$ folgt für alle Funktionen f mit beschränktem meßbaren Repräsentanten aus 4.7.15.2 und dann auf ganz $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ durch stetige Fortsetzung. Damit haben wir die Existenz eines Paares (μ, φ) mit den in 4.1.4 behaupteten Eigenschaften nachgewiesen. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, gehen wir von einem möglichen Paar (μ, φ) aus. Aus 4.9.5 und 4.9.6 folgt

$$\Phi(M) \circ \varphi = \varphi \circ ([M] \cdot)$$

und durch Anwenden beider Seiten auf die konstante Funktion 1 und Bilden des Skalarprodukts mit v weiter $\langle v, \Phi(M)v \rangle = \mu(M)$, womit die Eindeutigkeit von μ bereits gezeigt wäre. Andererseits zeigt die vorige Gleichung auch $\varphi([M]) = \Phi(M)v$, und das legt φ wegen der Linearität auf meßbaren Stufenfunktionen und dann wegen der Stetigkeit auf allen quadratintegrierbaren Funktionen fest. \square

Übungen

Übung 4.9.6. Gegeben ein Borelmaß μ auf \mathbb{R} und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} durch Automorphismen von $L^2(\mathbb{R}; \mu)$, bei der $t \in \mathbb{R}$ durch Multiplikation mit e^{itx} operiert, ist für das zugehörige projektorwertige Maß Φ der einer Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ zugeordnete Projektor $\Phi(M)$ gerade die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $[M]$ von M .

Übung 4.9.7. Betrachten wir auf \mathbb{R} das Lebesguemaß dt und die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}; dt)$ durch das Verschieben von Funktionen, $\rho(t)f = \tau_t f$, deren Stetigkeit in 2.6.6 gezeigt wurde, so hat für das zugehörige projektorwertige Maß Φ der einer Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ zugeordnete Projektor $\Phi(M)$ die Gestalt $\mathcal{F} \circ ([M] \cdot) \circ \mathcal{F}^{-1}$ für \mathcal{F} die wie in 3.1.2 normalisierte Fouriertransformation.

4.10 Operationen von Maßen auf Darstellungen

4.10.1. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und Φ eine auf \mathbb{R} definierte Teilung der Identität von \mathcal{H} und $\rho : t \mapsto \int e^{itx} \Phi\langle x \rangle$ die dazu wie in 4.9.1 gebildete unitäre Darstellung von \mathbb{R} in \mathcal{H} . Wenn wir einmal von unserem Satz 4.9.1 ausgehen, so kann man leicht sehen, daß für $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar das Bild des zugehörigen Projektors (im $\Phi(M)$) $\subset \mathcal{H}$ jeweils ganz aus differenzierbaren Funktionen besteht und daß der infinitesimale Erzeuger dort durch das Integral $\int it\Phi\langle t \rangle$ beschrieben werden kann. Wir werden nun für jede unitäre Darstellung der Gruppe \mathbb{R} oder

allgemeiner einer Geradengruppe G in einem Hilbertraum \mathcal{H} und jedes komplexe Maß $\mu \in M(\mathbb{R})$ bzw. $\mu \in M(G)$ einen beschränkten Operator

$$\mu * : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

einführen, die „Operation durch Konvolution“, von der wir später die Formel $\mu * = \int \mu^\wedge(x) \Phi \langle x \rangle$ zeigen werden. Die Konvolution mit μ wird also mit dem Integral seiner Fouriertransformierten $\mu^\wedge \in C^b(\mathbb{R})$ nach dem zu unserer Darstellung gehörigen projektorwertigen Maß übereinstimmen. Obwohl das alles noch nicht bewiesen ist, zeigt es uns doch schon eine Möglichkeit, auch ohne die Existenz von Φ zu kennen, gewisse Teilräume „mit Frequenzbeschränkungen“ zu definieren. Beim Beweis des folgenden technischen Lemmas, das wir bei unserer Herleitung der Spektralzerlegung unitärer Darstellungen von \mathbb{R} gebraucht und bereits im Vorgriff verwendet haben, ist dann der wesentliche Punkte der Nachweis, daß diese Teilräume aus differenzierbaren Vektoren bestehen und daß ihre Vereinigung dicht liegt.

Lemma 4.10.2. *Es ist möglich, simultan in jeder unitären Darstellung \mathcal{H} von \mathbb{R} eine aufsteigende Folge von unitären Unterdarstellungen $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \dots$ so zu wählen, daß (1) in jedem \mathcal{H}_i jeder Vektor differenzierbar ist, daß (2) deren Vereinigung dicht liegt, und daß (3) jeder Verflechtungsoperator $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ auch \mathcal{H}_i nach \mathcal{H}'_i abbildet.*

Beweis. In 4.10.9 werden wir zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $C \triangleleft \mathbb{R}$ eine unitäre Unterdarstellung $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}$ erklären und zwar derart, daß aus $C \subset D$ folgt $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}_D$ und daß jeder Verflechtungsoperator $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ auch \mathcal{H}_C in \mathcal{H}'_C abbildet. In 4.10.12 zeigen wir, daß für C kompakt \mathcal{H}_C aus differenzierbaren Vektoren besteht. Aus 4.10.13 folgt schließlich, daß die Vereinigung der besagten Unterdarstellungen zu den kompakten Intervallen $[-n, n]$ dicht liegt in unserer ursprünglichen Darstellung. \square

Definition 4.10.3 (Operationen von Maßen auf Darstellungen). Gegeben eine unitäre Darstellung (\mathcal{H}, ρ) einer Geradengruppe G erklären wir für jedes komplexe Maß $\mu \in M(G)$ eine lineare Abbildung $\mu * : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $v \mapsto \mu * v$ durch die Vorschrift

$$\mu * v = \int \rho(t)v \mu \langle t \rangle$$

wobei das Integral im Sinne von 2.8.16 zu verstehen ist, also charakterisiert wird durch $\langle w, \mu * v \rangle = \int \langle w, \rho(t)v \rangle \mu \langle t \rangle$ für alle $w \in \mathcal{H}$.

Vorschau 4.10.4. Wir werden in ?? sogar die Integration von Funktionen mit Werten in Banachräumen und in noch allgemeineren Räumen diskutieren und dann

erkennen, daß die Faltung von Maßen mit Funktionen aus 3.9.1 und 3.9.3 jedenfalls für kompakt getragene Maße gerade die analoge Operation von Maßen auf den nun nicht mehr unitären Darstellungen von \mathbb{R} durch Verschiebung auf den Funktionenräumen $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ bzw. $L^p(\mathbb{R})$ ist.

Beispiele 4.10.5. Ist $\mu = \delta_t$ ein Diracmaß, so gilt $\mu * v = \rho(t)(v)$. Durch diese Gleichheit motiviert vereinfachen wir unsere Notation und schreiben kurz

$$\rho(t)(v) = t * v$$

Ist $\mu = a_1\delta_{t(1)} + \dots + a_n\delta_{t(n)}$ eine Linearkombination von Diracmaßen, so gilt mit dieser Notation $\mu * v = a_1t(1) * v + \dots + a_nt(n) * v$. In der Tat ist unsere Operation von Maßen sicher eine bilineare Abbildung $M(G) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Lemma 4.10.6 (Stetigkeit der Konvolution). *Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G gilt für jedes komplexe Maß $\mu \in M(G)$ und jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Abschätzung*

$$\|\mu * v\| \leq \|\mu\| \cdot \|v\|$$

mit $\|\mu\|$ der Variationsnorm unseres Maßes aus 3.2.22.

Beweis. Für alle $w \in \mathcal{H}$ haben wir

$$|\langle w, \mu * v \rangle| = \left| \int \langle w, t * v \rangle \mu\langle t \rangle \right| \leq \int |\langle w, t * v \rangle| |\mu\langle t \rangle| \leq \|\mu\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

Setzen wir hier $w = \mu * v$, so ergibt sich die Behauptung sofort. \square

Lemma 4.10.7 (Assoziativität der Konvolution). *Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G und Maße $\mu, \nu \in M(G)$ und ein Vektor $v \in \mathcal{H}$ gilt stets*

$$\mu * (\nu * v) = (\mu * \nu) * v$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten mit jedem Vektor $w \in \mathcal{H}$ dasselbe Skalarprodukt haben. Wir finden nun nach den Definitionen

$$\begin{aligned} \langle w, \mu * (\nu * v) \rangle &= \int \langle w, t * (\nu * v) \rangle \mu\langle t \rangle \\ &= \int \langle (-t) * w, \nu * v \rangle \mu\langle t \rangle \\ &= \int \left(\int \langle (-t) * w, s * v \rangle \nu\langle s \rangle \right) \mu\langle t \rangle \\ \langle w, (\mu * \nu) * v \rangle &= \int \langle w, x * v \rangle (\mu * \nu)\langle x \rangle \\ &= \int \langle w, (s + t) * v \rangle (\mu \boxtimes \nu)\langle s, t \rangle \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt so aus dem Satz von Fubini. \square

Lemma 4.10.8. Sei \mathcal{H} eine unitäre Darstellung einer Geradengruppe G und $\mu_n \in M(G)$ eine Folge von nichtnegativen Maßen mit $\mu_n(G) = 1$ und der Eigenschaft, daß für jede offene Umgebung U des neutralen Elements $0 \in G$ fast alle unserer Maße auf $G \setminus U$ verschwinden. So gilt für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ die Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n * v = v$$

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung U des neutralen Elements mit $\|t * v - v\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in U$. Falls n so groß ist, daß gilt $\mu_n(G \setminus U) < \varepsilon$, so haben wir demnach

$$|\langle w, \mu_n * v - v \rangle| = \left| \int \langle w, t * v - v \rangle \mu_n \langle t \rangle \right| \leq \int |\langle w, t * v - v \rangle| \mu_n \langle t \rangle \leq \varepsilon \|w\|$$

□

Definition 4.10.9. Gegeben eine Geradengruppe G notieren wir die Inverse der abstrakten Fouriertransformation $\mathcal{M}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\hat{G})$ von den Schwartzmaßen in die Schwartzfunktionen aus ?? als $h \mapsto h^\vee$. Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} von G und eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset \hat{G}$ setzen wir

$$\mathcal{H}_C = \{v \in \mathcal{H} \mid h^\vee * v = 0 \text{ für alle } h \in \mathcal{S}(\hat{G}) \text{ mit } h|_C = 0\}$$

Nach 4.10.6 ist das ein abgeschlossener Teilraum und wegen der Kommutativität der Konvolution ist er sogar eine Unterdarstellung. Offensichtlich folgt aus $C \subset D$ auch $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}_D$.

4.10.10. Im folgenden will ich versuchen klar zu machen, daß man sich diesen Raum denken kann als die Menge aller Vektoren, die „keine spektralen Anteile zu Charakteren außerhalb von C besitzen“.

Beispiel 4.10.11. Gegeben $f \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit Träger in C gilt $f^\vee * \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_C$. In der Tat haben wir ja $h^\vee * (f^\vee * v) = (h^\vee * f^\vee) * v = (h \cdot f)^\vee * v = 0$ für alle $h \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit $h \cdot f = 0$.

Lemma 4.10.12. Für jede unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G und jedes Kompaktum $C \subset \hat{G}$ besteht \mathcal{H}_C aus differenzierbaren Vektoren.

Beweis. Wir behaupten zunächst für alle $v \in \mathcal{H}_C$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\hat{G})$ mit $\varphi|_C = 1$ die Formel

$$\varphi^\vee * v = v$$

Aus den Definitionen folgt schon mal, daß für jede weitere derartige Funktion ϕ gilt $\phi^\vee * v = \varphi^\vee * v$. Es reicht demnach, unsere Formel für ein derartiges φ zu zeigen, das wir konstant Eins auf einem C und den Ursprung umfassenden Intervall annehmen dürfen, so daß insbesondere für $r \geq 1$ auch $\varphi_r = \varphi \circ (r^{-1} \cdot)$

auf C konstant Eins ist. Damit hängt also $\varphi_r^\vee * v$ gar nicht von $r \geq 1$ ab. Unsere Formel ist mithin gezeigt, sobald wir nachweisen, daß $\langle \varphi_r^\vee * v, w \rangle$ für alle w bei $r \rightarrow \infty$ gegen $\langle v, w \rangle$ strebt. Ist nun λ ein Haarmaß auf G und $\varphi^\vee = \psi\lambda$, so haben wir $\varphi_r^\vee = r(\psi \circ (r \cdot))\lambda$ und

$$\langle w, \varphi_r^\vee * v \rangle = \int \langle w, t * v \rangle r\psi(rt) \lambda\langle t \rangle = \int \langle w, (u/r) * v \rangle \psi(u) \lambda\langle u \rangle$$

und das strebt nach dem Satz über dominierte Konvergenz bei $r \rightarrow \infty$ gegen $\langle v, w \rangle$. Damit ist die oben behauptete Formel bewiesen. Um nun zu zeigen, daß $v \in \mathcal{H}$ differenzierbar ist, beschränken wir uns auf den Fall $G = \mathbb{R}$. Für jede Funktion ψ aus dem Schwartzraum strebt dann $(\tau_t\psi - \psi)/t$ für $t \rightarrow 0$ in der L^1 -Norm gegen ψ' und damit ist $\psi\lambda * v$ differenzierbar nach 4.10.6 mit Ableitung $\psi'\lambda * v$. \square

Lemma 4.10.13. *Gegeben eine unitäre Darstellung \mathcal{H} einer Geradengruppe G liegt die Vereinigung der \mathcal{H}_C über alle Kompakta $C \subset \hat{G}$ dicht in \mathcal{H} .*

Beweis. Nach 4.10.8 liegt $\mathcal{M}(G) * \mathcal{H}$ dicht in \mathcal{H} . Nach 4.10.14 liegt $\mathcal{C}_1^\infty(\hat{G})^\vee$ dicht in $\mathcal{M}(G)$ für die Variationsnorm. Nach 4.10.6 liegt dann auch $\mathcal{C}_1^\infty(\hat{G})^\vee * \mathcal{H}$ dicht in \mathcal{H} . \square

Lemma 4.10.14. *Die Fouriertransformierten glatter Funktionen mit kompaktem Träger auf der reellen Zahlengeraden bilden einen dichten Teilraum im Raum aller integrierbaren Funktionen auf der reellen Zahlengeraden.*

Beweis. Zunächst einmal liegt der Schwartzraum dicht im Raum aller integrierbaren Funktionen, es reicht also für jede Funktion des Schwartzraums $f \in \mathcal{S}$ eine Folge $g_n \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R})$ anzugeben mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n^\wedge - f\|_1 = 0$. Dazu schreiben wir $f = g^\wedge$ mit $g \in \mathcal{S}$ und wählen $h \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R})$ mit $h|_{[-1,1]} = 1$ und betrachten die Funktionen h_n mit $h_n(x) = h(x/n)$ und setzen $g_n = h_n g$. Jetzt behaupte ich

$$(g_n)^{(i)} \rightarrow g^{(i)}$$

in der L^2 -Norm für $i = 0, 1, 2$, also für die Funktionen selbst und für ihre erste und zweite Ableitung. Sobald das gezeigt ist, folgern wir $y^i g_n^\wedge \rightarrow y^i g^\wedge$ in der L^2 -Norm für $i = 0, 1, 2$ und damit $(1 + y^2)g_n^\wedge \rightarrow (1 + y^2)g^\wedge$ in der L^2 -Norm. Da aber $(1 + y^2)^{-1}$ selbst quadratintegrierbar ist, folgt mit 4.10.15 sofort $g_n^\wedge \rightarrow g^\wedge$ in der L^1 -Norm. Warum aber gilt $(h_n g)^{(i)} \rightarrow g^{(i)}$ in der L^2 -Norm? Nun, wir finden eine Schranke C für $|h - 1|$ und eine Schranke M mit $|g(x)| \leq Mx^{-2}$ für $x \geq 1$ und folgern $|h_n g - g| = |h_n - 1| \cdot |g| \leq MCx^{-2}$ für $x \geq 1$. Für $|x| \leq n$ verschwindet andererseits diese Differenz identisch, und so folgt

$$\|h_n g - g\|_2 \leq 2MC \int_n^\infty x^{-2} dx$$

und das strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen Null. Die Behauptung für die höheren Ableitungen zeigt man ähnlich. \square

Übungen

Übung 4.10.15. Gegeben ein Maßraum X definiert für jede quadratintegrierbare Funktion $g \in L^2(X)$ das Multiplizieren mit g eine stetige lineare Abbildung $(g \cdot) : L^2(X) \rightarrow L^1(X)$ mit der Operatornorm $\|g\|_2$.

Übung 4.10.16. Gegeben unitäre Darstellungen (\mathcal{H}, ρ) und (\mathcal{H}', ρ') einer Geradengruppe G und ein Verflechtungsoperator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ zeige man für jedes komplexe Maß $\mu \in M(G)$ und alle $v \in \mathcal{H}$ die Formel $\mu * (Av) = A(\mu * v)$.

4.11 Variationen zum Spektralsatz

Satz 4.11.1 (Simultane Spektralzerlegung). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kompakt getragene auf} \\ \mathbb{R}^n \text{ definierte Teilungen} \\ \Phi \text{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} n\text{-Tupel } (T_1, \dots, T_n) \text{ von} \\ \text{paarweise kommutierenden} \\ \text{selbstadjungierten Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \quad \mapsto \quad (\int x_1 \Phi, \dots, \int x_n \Phi)$$

Gegeben eine stetige lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ von Hilberträumen und paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sowie $T'_1, \dots, T'_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AT'_\nu = T'_\nu A$ für $1 \leq \nu \leq n$ haben wir für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ weiter die Identität

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

4.11.2. Der Beweis variiert den Beweis des Spektralsatzes 4.7.9 und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Wir beginnen mit einer sehr groben Abschätzung für die Operatornorm eines polynomialen Ausdrucks in paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren.

Lemma 4.11.3. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} , darauf paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren T_1, \dots, T_n und ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $\sigma(T_\nu) \subset (a, b)$ für $1 \leq \nu \leq n$ gilt für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ die Abschätzung

$$\|P(T_1, \dots, T_n)\| \leq \sup\{P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_\nu \in [a, b] \forall \nu\}$$

Beweis. Bezeichne Φ_ν die nach dem Spektralsatz 4.7.9 durch T_ν definierte Teilung der Identität von \mathcal{H} . Wir bilden für jedes r die äquidistante Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$ und betrachten die Intervalle $I_i = (a_{i-1}, a_i]$ und die Operatoren

$$S_\nu^r = \sum_{i=1}^r a_i \Phi_\nu(I_i)$$

Nach dem Spektralsatz gilt in der Operatornorm $S_\nu^r \rightarrow T_\nu$ für $r \rightarrow \infty$ und daraus ergibt sich sofort ebenfalls in der Operatornorm

$$P(S_1^r, \dots, S_n^r) \rightarrow P(T_1, \dots, T_n) \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Der Operator $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$ kann hinwiederum wie folgt beschrieben werden: Man betrachte für jedes n -Tupel $(i(1), i(2), \dots, i(n))$ von Indizes aus $\{1, \dots, r\}$ den Projektor $\Phi_1(I_{i(1)}) \circ \dots \circ \Phi_n(I_{i(n)})$. Die Bilder dieser r^n Projektoren bilden eine Zerlegung unseres Hilbertraums \mathcal{H} in r^n paarweise orthogonale abgeschlossene Teilräume und unser Operator $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$ operiert auf dem entsprechenden Teilraum als der Skalar $P(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(n)})$. Im Fall $n = 2$ etwa ist das genau der Wert, den unser Polynom an der oberen linken Ecke des Rechtecks $I_{i(1)} \times I_{i(2)}$ annimmt. Damit ist klar, daß die Norm von $P(S_1^r, \dots, S_n^r)$ in der behaupteten Weise abgeschätzt werden kann, und dasselbe ergibt sich im Grenzwert auch für die Norm von $P(T_1, \dots, T_n)$. \square

Beweis von 4.11.1. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die Gegenrichtung. Seien T_1, \dots, T_n paarweise kommutierende selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Lemma 4.11.3 zeigt, daß es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt derart, daß für jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ gilt

$$\|P(T_1, \dots, T_n)\| \leq \|P|_K\|_\infty$$

Daraus folgern wir die Existenz und Eindeutigkeit der durch gestrichelte Pfeile angedeuteten stetigen Ringhomomorphismen im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] & \twoheadrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \hookrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) & & \end{array}$$

und haben so bereits das Anwenden einer stetigen Funktion auf einen selbstadjungierten Operator verallgemeinert zum Anwenden einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ auf ein n -Tupel von paarweise kommutierenden selbstadjungierten Operatoren. Wie beim Beweis von 4.2.14 im Anschluß an 4.5.8 folgern wir, daß es für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ genau ein Paar (μ, φ) gibt bestehend aus einem kompakt getragenen Borelmaß μ auf \mathbb{R}^n und einer unitären Einbettung $\varphi : L^2(\mathbb{R}^n; \mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi(1) = v$ und $\varphi \circ (x_i \cdot) = T_i \circ \varphi$ für $1 \leq i \leq n$. Wie in 4.8.2 folgende zeigen wir dann, daß es für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und beschränkt genau einen Operator $f(T_1, \dots, T_n)$ gibt mit $f(T_1, \dots, T_n)v = \varphi(f)$ für φ die kanonische Einbettung zu v wie eben, und daß wir so eine Teilung der Identität mit den gewünschten Eigenschaften erhalten. Der Rest des Beweises ist vollständig analog zum Beweis des Spektralsatzes aus 4.8 und mag dem Leser überlassen bleiben. \square

Korollar 4.11.4 (Spektralsatz für unitäre Operatoren). Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf der Kreislinie } S^1 \text{ definierte} \\ \text{Teilungen } \Phi \text{ der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\sim} \\ \mapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Automorphismen} \\ \text{des Hilbertraums } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \int_{S^1} z\Phi\langle z \rangle$$

Beweis. Nach 4.7.15 liefert für jede Teilung der Identität auf der Kreislinie besagtes Integral einen unitären Automorphismus unseres Hilbertraums. Daß diese Konstruktion eine Bijektion liefert, folgt mit 4.3.21 aus dem etwas allgemeineren Fall 4.11.6 sogenannter „normaler“ Operatoren. \square

Definition 4.11.5. Ein Operator auf einem Hilbertraum heißt **normal** genau dann, wenn er mit seinem Adjungierten vertauscht. In Formeln ist also ein Operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal genau dann, wenn gilt $NN^* = N^*N$. Insbesondere ist jeder selbstadjungierte und jeder unitäre Operator normal. Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Hilbertraums ist normal genau dann, wenn er diagonalisierbar ist mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Eigenräumen, und für jedes projektorwertige Maß Φ auf einem Meßraum und jede beschränkte meßbare komplexwertige Funktion f auf besagtem Raum ist $\int f\Phi$ normal.

Korollar 4.11.6 (Spektralsatz für normale Operatoren).

1. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } \mathbb{C} \text{ definierte kompakt getragene} \\ \text{Teilungen der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\sim} \\ \mapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Normale} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\Phi \qquad \qquad \qquad \int z\Phi\langle z \rangle$$

2. Für die einem normalen Operator N entsprechende Teilung der Identität Φ_N ist das Spektrum $\sigma(N)$ von N das kleinste Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ mit $\Phi_N(K) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ und der adjungierte Operator wird gegeben durch das Integral

$$N^* = \int \bar{z}\Phi_N\langle z \rangle$$

3. Gegeben eine stetige lineare Abbildung von Hilberträumen $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ und normale Operatoren $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $N' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit $AN = N'A$ gilt für die zugehörigen projektorwertigen Maße Φ, Φ' und $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Borelmenge

$$A \circ \Phi(M) = \Phi'(M) \circ A$$

Beweis. Jeder normale Operator N läßt sich in eindeutiger Weise darstellen als

$$N = R + iI$$

mit kommutierenden selbstadjungierten Operatoren R und I , nämlich mit $R = (N + N^*)/2$ und $I = (N - N^*)/2i$. Betrachten wir zu R und I die simultane Spektralzerlegung, d.h. die auf \mathbb{R}^2 definierte kompakt getragene Teilung Φ der Identität von \mathcal{H} mit

$$R = \int x\Phi\langle x, y \rangle \quad \text{und} \quad I = \int y\Phi\langle x, y \rangle$$

Wir erhalten unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$ eine Teilung Φ der Identität auf \mathbb{C} mit

$$N = \int z\Phi\langle z \rangle$$

Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben, für Teil 3 benutze man das anschließende Lemma 4.11.7. \square

Lemma 4.11.7. Gegeben $N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ und $N' : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ normale Operatoren auf Hilberträumen und $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ eine stetige lineare Abbildung mit $AN = N'A$ gilt auch für ihre Adjungierten $AN^* = N'^*A$.

Beweis. Seien $\Phi_N, \Phi_{N'}$ die zugehörigen Teilungen der Identität auf \mathbb{C} . Zunächst einmal gilt es, 4.8.11 auf den Fall normaler Operatoren zu verallgemeinern. Das zeigt dann $A\Phi_N(C) = \Phi_{N'}(C)A$ erst für $C \not\subseteq \mathbb{C}$ und dann durch die Betrachtung geeigneter Differenzmengen auch allgemeiner für halboffene Rechtecke der Gestalt $C = (a, b] \times i(c, d]$. Jetzt schreiben wir N^* und N'^* als Grenzwert von Riemannsummen wie im Beweis von 4.11.3 und das Lemma folgt. \square

Übungen

Übung 4.11.8. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} mit einer Teilung Φ der Identität und f beschränkt und meßbar und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom haben wir nach 4.7.22 die Identität

$$P\left(\int f\Phi\right) = \int (P \circ f)\Phi$$

Man zeige diese Identität nun für beliebige beschränkte meßbare Funktionen $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

4.12 Unbeschränkte Operatoren

4.12.1. In der Literatur trifft man unitäre Darstellungen von \mathbb{R} meist in einer mehr traditionellen Tracht als sogenannte „unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren“ an. Ich stelle hier dieses Konzept vor und erkläre in Satz 4.12.9 seine Beziehung zu unitären Darstellungen, beweise von diesem Satz jedoch nur noch einen Teil.

Definition 4.12.2. Unter einer **partiell definierten linearen Abbildung** von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W verstehen wir ein Paar (\mathcal{D}, T) bestehend aus einem Untervektorraum $\mathcal{D} \subset V$ und einer linearen Abbildung $T : \mathcal{D} \rightarrow W$. Wir notieren solch eine partiell definierte lineare Abbildung auch $T : V \dashrightarrow W$ und schreiben $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ und nennen diesen Untervektorraum den **Definitionsbereich von T** . Ist V ein normierter Vektorraum und $\mathcal{D} \subset V$ dicht, so sprechen wir von einer **dicht definierten** linearen Abbildung $V \dashrightarrow W$.

Beispiel 4.12.3. Ein typisches Beispiel für eine dicht definierte lineare Abbildung wäre $V = W = L^2(\mathbb{R}; dx)$ mit dem Teilraum $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}; dx) \cap C^1(\mathbb{R}) \mid f' \in L^2(\mathbb{R}; dx)\}$ als Definitionsbereich und dem Ableiten $Tf = f'$ als linearer Abbildung.

Definition 4.12.4. Gegeben $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}'$ eine dicht definierte lineare Abbildung von Hilberträumen erklären wir eine weitere partiell definierte lineare Abbildung $T^* : \mathcal{H}' \dashrightarrow \mathcal{H}$, ihre **adjungierte Abbildung**, indem wir den Teilraum $\mathcal{D}(T^*) = \{v' \in \mathcal{H}' \mid v \mapsto \langle v', Tv \rangle \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(T)\}$ als ihren Definitionsbereich wählen und dann $T^* : \mathcal{D}(T^*) \rightarrow \mathcal{H}$ unter Verwendung des Satzes von Riesz 2.8.5 erklären durch die Vorschrift

$$\langle T^*v', v \rangle = \langle v', Tv \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(T), v' \in \mathcal{D}(T^*)$$

Definition 4.12.5. Ein **unbeschränkter selbstadjungierter Operator** auf einem Hilbertraum ist eine dicht definierte lineare Abbildung von unserem Hilbertraum in sich selber, die mit ihrer Adjungierten zusammenfällt, in Formeln $T : \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}$ mit $T^* = T$. Mit gefordert wird hier implizit insbesondere auch die Gleichheit der Definitionsbereiche $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

4.12.6. Mich befriedigt diese Terminologie nicht vollständig, da natürlich auch alle beschränkten selbstadjungierten Operatoren Beispiele für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren sind. Stattdessen stets von „nicht notwendig beschränkten“ selbstadjungierten Operatoren zu reden, wäre aber auch wieder umständlich.

Lemma 4.12.7. Für jedes nichtnegative Borelmaß μ auf \mathbb{R} ist das Paar (\mathcal{D}, T) bestehend aus dem Teilraum $\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}; \mu) \mid xf \in L^2(\mathbb{R}; \mu)\}$ und der Abbildung $T : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mu)$, $f \mapsto xf$ ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator auf $L^2(\mathbb{R}; \mu)$. Hierbei meint x die Identität auf \mathbb{R} .

Beweis. Per definitionem besteht $\mathcal{D}(T^*)$ aus allen $g \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ derart, daß sich die Abbildung $f \mapsto \int \bar{g}xf\mu$ stetig von \mathcal{D} auf ganz $L^2(\mathbb{R}; \mu)$ fortsetzen läßt. Die Inklusion $\mathcal{D}(T^*) \supset \mathcal{D}$ scheint mir damit offensichtlich. Läßt sich andererseits für vorgegebenes $g \in L^2$ unsere Abbildung stetig von \mathcal{D} nach L^2 fortsetzen, so wird diese Fortsetzung nach 2.8.5 gegeben durch das Integrieren gegen eine Funktion $h \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ als $f \mapsto \int \bar{h}f\mu$. Insbesondere gilt also für jede glatte Funktion f mit kompaktem Träger $\int \bar{g}xf\mu = \int \bar{h}f\mu$ und daraus folgt mit 3.3.11 dann $\bar{g}x = \bar{h}$ fast überall, also $g \in L^2(\mathbb{R}; \mu)$ und damit $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}$. \square

Beispiel 4.12.8. Ich komme nocheinmal auf das Beispiel 4.12.3 zurück. Gegeben $f, g \in \mathcal{D}$ gilt ja sicher

$$\int_a^b \bar{g}f' = \bar{g}f \Big|_a^b - \int_a^b \bar{g}'f$$

und wegen $\bar{g}f \in L^1$ finden wir Folgen a_n, b_n mit $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow \infty$ und $(\bar{g}f)(a_n) \rightarrow 0, (\bar{g}f)(b_n) \rightarrow 0$. Daraus folgern wir

$$\langle g, Tf \rangle = -\langle Tg, f \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}$$

Mithin unterscheidet sich in diesem Fall der Operator $(iT)^*$ vom Operator iT höchstens dadurch, daß er eventuell einen größeren Definitionsbereich hat. Und den hat er in unserem Fall in der Tat, zum Beispiel gehört zu besagtem Definitionsbereich auch noch jede stetige Funktion, die auf $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ stetig differenzierbar ist und deren Ableitung dort jeweils quadratintegrierbar ist. Genauer erhalten wir eine Erweiterung unseres Operators zu einem selbstadjungierten Operator, wenn wir t statt x schreiben und den folgenden Satz 4.12.9 auf die unitäre Darstellung von \mathbb{R} auf $L^2(\mathbb{R}; dt)$ anwenden, bei der $t \in \mathbb{R}$ durch Verschiebung um t operiert, in Formeln $\rho(t) = \tau_t$.

Satz 4.12.9. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} liefert das Bilden des infinitesimalen Erzeugers S_ρ zu einer unitären Darstellung ρ im Sinne von 4.1.15 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unbeschränkte selbstadjungierte} \\ \text{Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\rho \qquad \mapsto \qquad (\mathcal{H}^1, -iS_\rho)$$

Beweis. Wir zeigen hier nur, daß wir so eine Abbildung erhalten. Das einzige Problem dabei ist zu zeigen, daß der adjungierte Operator zu iS_ρ auch keinen größeren Definitionsbereich hat als \mathcal{H}^1 . Das folgt jedoch sofort aus der lokalen Darstellung 4.1.4 in Verbindung mit 4.12.7. Daß die so konstruierte Abbildung eine Bijektion ist, wird erst später gezeigt werden. \square

4.12.10. Gegeben ein Hilbertraum \mathcal{H} folgern wir aus dem vorhergehenden Satz 4.12.9 in Verbindung mit dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 4.9.1 sogar ein kommutatives Dreieck von Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{c} \text{Unitäre Darstellungen} \\ \text{von } \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{H} \end{array} \right\} & & \\
 \nearrow \sim & & \sim \searrow \\
 \left\{ \begin{array}{c} \text{Auf } \mathbb{R} \text{ definierte Teilungen} \\ \text{der Identität von } \mathcal{H} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Unbeschränkte selbstadjun-} \\ \text{-gierte Operatoren auf } \mathcal{H} \end{array} \right\} \\
 \Phi & \mapsto & \int x\Phi(x)
 \end{array}$$

Hier ist der fragliche Operator nur auf den $v \in \mathcal{H}$ mit $\int |x|\langle v, \Phi v \rangle < \infty$ definiert, für $\langle v, \Phi v \rangle$ das in 4.7.19 erklärte Maß, und für diese v ist er definiert durch die Bedingung

$$\left\langle w, \left(\int x\Phi(x) \right) v \right\rangle = \int x\langle w, \Phi v \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Weiter meint \nearrow unsere Bijektion aus dem Satz über die Spektralzerlegung unitärer Darstellungen 4.9.1 und \searrow unsere Bijektion aus dem vorhergehenden Satz 4.12.9 und das a priori völlig unmotivierete Vorzeichen in 4.12.9 habe ich nur eingeführt, damit ein kommutatives Dreieck entsteht, ohne daß wir irgendwo anders ein noch unnatürlicheres Vorzeichen einführen müßten.

4.12.11. In der Quantenmechanik modelliert man die Menge aller möglichen Zustände eines vorgegebenen physikalischen Systems als die Menge $\mathbb{P}\mathcal{H}$ aller eindimensionalen Teilräume eines Hilbertraums \mathcal{H} . Messungen mit zwei möglichen Resultaten – Ja oder Nein – modelliert man als abgeschlossene Teilräume $T \subset \mathcal{H}$. Wenden wir auf einen Zustand $\mathbb{C}v \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ eine Messung T an, so gilt es, den Vektor v auf den vorgegebenen Teilraum $T \subset \mathcal{H}$ zu projizieren vermittels des zugehörigen orthogonalen Projektors pr_T , und das Verhältnis von $\|\text{pr}_T(v)\|^2$ zu $\|v\|^2$ wird dann interpretiert als die Wahrscheinlichkeit $P(v)$ für das Meßergebnis „Ja“, in Formeln

$$P(v) = \frac{\|\text{pr}_T(v)\|^2}{\|v\|^2}$$

Feinere Messungen, die als Meßergebnisse etwa beliebige reelle Zahlen liefern können, modelliert man als Teilungen Φ der Identität von \mathcal{H} , die etwa auf der reellen Zahlengeraden definiert sind, und interpretiert dann für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}$ den Projektor $\Phi(M)$ in der Weise, daß $\|\Phi(M)v\|^2/\|v\|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß der Zustand $\mathbb{C}v$ bei unserer Messung ein Resultat aus M liefert.

4.12.12. Eine partiell definierte lineare Abbildung von Banachräumen heißt ein **abgeschlossener Operator**, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im Produktraum. Das ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Abgeschlossenheit für Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß für eine konvergente Folge v_n im Definitionsbereich unseres Operators, für die auch die Folge der Bilder Tv_n konvergiert, der Grenzwert v auch im Definitionsbereich unseres Operators liegt und zusätzlich gilt $Tv_n \rightarrow Tv$. Man kann zeigen, daß jeder unbeschränkte selbstadjungierte Operator abgeschlossen ist.

Übungen

Übung 4.12.13. Ist Φ eine kompakte getragene auf \mathbb{R} definierte Teilung der Identität eines Hilbertraums \mathcal{H} und T der zugehörige selbstadjungierte Operator, so ist $\langle Tv, v \rangle / \|v\|^2$ der Erwartungswert für das Ergebnis, das man erhält, wenn man die durch Φ beschriebene Messung auf den Zustand $\mathbb{C}v$ anwendet. Das ist im übrigen genau die Zahl, für die wir im Beweis von [LA2] 1.9.15 die Bezeichnung als „Raleigh-Quotient“ eingeführt hatten.

4.13 Distributionen und verallgemeinerte Funktionen*

4.13.1 (**Algebraische Vorüberlegungen**). Sei k ein Körper und seien k -Vektorräume V, V', W, W' gegeben sowie nichtausgeartete Paarungen $b : V \times V' \rightarrow k$ und $c : W \times W' \rightarrow k$. Lineare Abbildungen $f : V \rightarrow W$ und $f' : W' \rightarrow V'$ mögen **zueinander transponiert** oder präziser **(b, c) -transponiert** heißen, wenn gilt

$$c(f(v), w') = b(v, f'(w')) \quad \forall v \in V, w' \in W'$$

Sicher gibt es zu jeder linearen Abbildung f höchstens eine transponierte Abbildung f' und umgekehrt. Wir notieren die Transponierte zu f gerne f^\top . Die **transponierbaren** linearen Abbildungen bilden jeweils einen Untervektorraum im Raum aller fraglichen linearen Abbildungen, und das Transponieren ist ein Vektorraumisomorphismus zwischen diesen Untervektorräumen. Im Fall $V = W$ und $V' = W'$ und $b = c$ ist die Identität auf V transponiert zur Identität auf V' . Sind zusätzlich Vektorräume U, U' gegeben und eine nichtausgeartete Paarung $a : U \times U' \rightarrow k$ sowie (a, b) -transponierte Abbildungen $g : U \rightarrow V$ und $g' : V' \rightarrow U'$, so sind auch fg und $g'f'$ transponiert, genauer (a, c) -transponiert.

Beispiel 4.13.2 (Der Fall der Dualräume). Sind $V' = V^*$ und ebenso $W' = W^*$ jeweils der volle Dualraum und sind unsere Paarungen durch das Auswerten gegeben, so besitzt jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ eine Transponierte $f^\top : W^* \rightarrow V^*$, eben das „Vorschalten von f “. Allerdings besitzt, sobald wir den endlichdi-

mensionalen Fall verlassen, keineswegs jede lineare Abbildung $g : W^* \rightarrow V^*$ auch umgekehrt eine Transponierte $V \rightarrow W$.

4.13.3 (**Testdichten**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}_1^\infty(U) \subset M(U)$$

den Teilraum aller komplexen Maße der Gestalt $g\lambda$ für λ ein Haarmaß auf X und $g \in \mathcal{C}_1^\infty(U)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger auf U . Ich nenne die Elemente von $\mathcal{D}_1^\infty(U)$ **glatte Dichten mit kompaktem Träger auf U** oder kurz **Testdichten**. Sie können in natürlicher Weise mit den glatten Schnitten mit kompaktem Träger des Dichtebündels aus ?? identifiziert werden, aber das spielt für uns vorerst keine Rolle. Das Integrieren liefert eine nichtausgeartete Paarung $\mathcal{C}(U) \times \mathcal{D}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$, $(f, \mu) \mapsto \int_U f \mu$ zwischen stetigen Funktionen und Testdichten. Durch Restriktion erhalten wir eine Paarung mit den glatten Funktionen $\mathcal{C}^\infty(U) \times \mathcal{D}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$, die nach [AN3] 1.10.10 immer noch nichtausgeartet ist. Schließlich können wir auch den vollen algebraischen Dualraum

$$C^+(U) := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_1^\infty(U), \mathbb{C})$$

betrachten. Unsere Paarung durch Integration liefert mit dieser Notation eine Einbettung $\mathcal{C}(U) \subset C^+(U)$. In diesem Sinne könnte man zumindest vorerst alle Elemente von $C^+(U)$ als „verallgemeinerte Funktionen auf U “ ansehen. Wir werden jedoch an unsere „verallgemeinerte Funktionen“ zu gegebener Zeit noch zusätzliche Bedingungen stellen, die es uns insbesondere erlauben werden, für verallgemeinerte Funktionen f auf U und g auf V sinnvoll ein „externes Produkt“ $f \boxtimes g$ als verallgemeinerte Funktion auf $U \times V$ zu erklären.

Ergänzung 4.13.4. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ kann man ähnlicher Weise auch vom Raum $\mathcal{C}_1^\infty(U)$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger alias **Testfunktionen** ausgehen und in dessen algebraischem Dualraum

$$D^+(U) := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_1^\infty(U), \mathbb{C})$$

gewisse „verallgemeinerte Borelmaße“ auszeichnen, die dann „Distributionen“ heißen. Die Funktorialitätseigenschaften dieser „Distributionen“ scheinen mir jedoch weniger intuitiv, weshalb ich mich an dieser Stelle zunächst auf verallgemeinerte Funktionen konzentrieren will.

4.13.5. Ist Y ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und $V \subseteq Y$ offen, so können wir für jede lineare Abbildung $L : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$, die eine Transponierte $L^\top : \mathcal{D}_1^\infty(V) \rightarrow \mathcal{D}_1^\infty(U)$ besitzt, eine Fortsetzung $L^+ : C^+(U) \rightarrow C^+(V)$ erklären durch die Vorschrift $L^+ := L^{\top\top}$. Im folgenden erkläre ich einige Spezialfälle dieser Konstruktion.

4.13.6 (Multiplikation mit glatten Funktionen). Gegeben eine glatte Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ besitzt die Multiplikation $(\varphi \cdot) : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ mit φ als Transponierte die Multiplikation mit φ , also die Abbildung $(\varphi \cdot) : \mathcal{D}_1^\infty(U) \rightarrow \mathcal{D}_1^\infty(U)$. Unser Formalismus liefert uns dann eine natürliche Fortsetzung $(\varphi \cdot)^+ : C^+(U) \rightarrow C^+(U)$ von $(\varphi \cdot) : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$. Auf diese Weise wird $C^+(U)$ ein $\mathcal{C}^\infty(U)$ -Modul, in den $\mathcal{C}(U)$ als Untermodul eingebettet ist.

4.13.7 (Ableiten nach glatten Vektorfeldern). Ist speziell $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist $f \in \mathcal{C}(U)$ stetig partiell differenzierbar nach der i -ten Koordinate, so liefert für $g \in \mathcal{C}_1^\infty(U)$ und λ das Lebesguemaß partielle Integration

$$\int (\partial_i f) g \lambda = - \int f (\partial_i g) \lambda$$

Die partielle Ableitung $\partial_i : \mathcal{C}^1(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ ist also transponierbar und unser Formalismus liefert uns eine natürliche Fortsetzung $\partial_i^+ : C^+(U) \rightarrow C^+(U)$. Im koordinatenfreien Fall erklären wir analog für jeden Richtungsvektor v die natürliche Fortsetzung der Richtungsableitung $D_v : \mathcal{C}^1(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ zu einer linearen Abbildung $D_v^+ : C^+(U) \rightarrow C^+(U)$. Anschließend erkennen wir, daß so das Anwenden jedes glatten Vektorfelds $A : U \rightarrow \vec{X}$ als Abbildung $A : \mathcal{C}^1(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ transponierbar ist und eine natürliche Fortsetzung zu $A^+ : C^+(U) \rightarrow C^+(U)$ besitzt. Die Lie-Klammer zweier glatter Vektorfelder operiert dann auch auf $C^+(U)$ wie der Kommutator, in Formeln

$$[A, B]^+ = A^+ B^+ - B^+ A^+$$

Des weiteren erweitert sich die **Leibniz-Regel** zur Formel

$$A(\varphi f) = (A\varphi)f + \varphi(Af)$$

mit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ beliebig, in der ich die oberen Indizes $+$ am Vektorfeld A der Übersichtlichkeit halber bereits weggelassen habe, und die jetzt für alle $f \in C^+(U)$ gilt.

4.13.8 (Zurückholen). Gegeben ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum Y und $V \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $\phi : V \rightarrow U$ eine **submersive** glatte Abbildung, als da heißt, eine glatte Abbildung mit surjektivem Differential $d_y \phi$ an jeder Stelle $y \in V$, ist auch das Zurückholen stetiger Funktionen transponierbar: Das direkte Bild von Maßen induziert in diesem Fall nämlich eine Abbildung $\phi_* : \mathcal{D}_1^\infty(V) \rightarrow \mathcal{D}_1^\infty(U)$, die dann auch schon die fragliche Transponierte ist. In der Tat können wir uns zum Nachweis unserer Behauptung $\mu \in \mathcal{D}_1^\infty(V) \Rightarrow \phi_* \mu \in \mathcal{D}_1^\infty(U)$ mithilfe einer Teilung der Eins und der Wahl geeigneter Koordinaten auf den Fall zurückziehen, daß gilt $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $m \leq n$ und daß ϕ die Projektion auf die ersten m Koordinaten ist. In dem Fall aber ist unsere Behauptung

klar. Damit erhalten wir also auch eine natürliche Fortsetzung des Zurückholens stetiger Funktionen zu einer linearen Abbildung $\phi^* : C^+(U) \rightarrow C^+(V)$. Statt $\phi^* f = g$ schreiben wir auch

$$\phi : g \rightsquigarrow f$$

und sprechen wie sonst auch von **Verwandtschaft**. Auch in dieser Allgemeinheit ist Verwandtschaft transitiv und verträglich mit dem Anwenden glatter Vektorfelder und der Multiplikation mit glatten Funktionen: Das folgt sofort aus den entsprechenden Aussagen für glatte Funktionen mit unserem allgemeinen Formalismus der linearen Algebra 4.13.1. Das Zurückholen vermittelt der Einbettung einer offenen Teilmenge nennen wir auch eine **Restriktion** oder **Einschränkung**.

4.13.9 (**Verkleben**). Ist X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und \mathcal{V} eine Überdeckung von U und ist für alle $V \in \mathcal{V}$ eine Linearform $\Lambda_V \in C^+(V)$ gegeben derart, daß für alle $V, W \in \mathcal{V}$ die Linearformen Λ_V und Λ_W dieselbe Restriktion auf $V \cap W$ haben, so gibt es genau eine Linearform $\Lambda \in C^+(U)$, deren Restriktion auf jedes $V \in \mathcal{V}$ mit dem dort vorgegebenen Λ_V übereinstimmt. Gegeben $\mu \in \mathcal{D}_1^\infty(U)$ finden wir eine Überdeckung des Trägers K von μ durch eine endliche Teilfamilie $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ und nach [AN2] 4.1.15 eine an diese Überdeckung angepaßte glatte Teilung der Eins durch gewisse α_V für $V \in \mathcal{E}$. Nun würden wir gerne

$$\Lambda(\mu) = \sum_{V \in \mathcal{E}} \Lambda_V(\alpha_V \mu)$$

setzen und müssen nur prüfen, daß das wohldefiniert ist. Ist aber $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$ eine weitere endliche Teilfamilie, die K überdeckt, und β_W für $W \in \mathcal{F}$ eine daran angepaßte glatte Teilung der Eins, so folgt aus unseren Annahmen

$$\Lambda(\mu) = \sum_{V, W} \Lambda_V(\alpha_V \beta_W \mu) = \sum_{V, W} \Lambda_W(\alpha_V \beta_W \mu) = \sum_W \Lambda_W(\beta_W \mu)$$

wobei stets über alle $V \in \mathcal{E}$ und $W \in \mathcal{F}$ summiert werden soll, und wir erkennen so, daß $\Lambda(\mu)$ in der Tat wohldefiniert ist. Daß es die einzig mögliche lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften ist, scheint mir offensichtlich.

Definition 4.13.10. Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums erklärt man eine **verallgemeinerte Funktion auf U** als eine Linearform $\Lambda \in C^+(U)$ alias $\Lambda : \mathcal{D}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subseteq U$ besitzt, für die die Restriktion von Λ auf $C^+(V)$ eine endliche Summe von Linearformen ist, die jeweils durch das Anwenden endlich vieler glatter Vektorfelder aus einer stetigen Funktion auf V hervorgehen. Den Vektorraum aller verallgemeinerten Funktionen auf U notieren wir

$$C^{-\infty}(U)$$

4.13.11. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums. Er ist offensichtlich stabil unter der Multiplikation mit glatten Funktionen und dem Anwenden glatter Vektorfelder. Ebenso offensichtlich ist, daß das Einschränken auf offene Teilmengen verallgemeinerte Funktionen wieder zu verallgemeinerten Funktionen macht, und daß das Verkleben verallgemeinerter Funktionen wieder verallgemeinerte Funktionen liefert.

Definition 4.13.12. Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums erklärt man eine **Distribution auf U** als eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß für ein und jedes Haarmaß λ auf X unser Λ durch Vorschalten von $(\cdot\lambda) : \mathcal{C}_1^\infty(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_1^\infty(U)$ aus einer verallgemeinerten Funktion auf U entsteht. Den Vektorraum aller Distributionen auf U notieren wir

$$\mathcal{D}^{-\infty}(U)$$

Ergänzung 4.13.13. in 3.3.16 hatten wir erklärt, welche Linearformen auf dem Schwartzraum $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}^n)$ man „temperierte Distributionen“ nennt. Es ist leicht zu sehen, daß die Restriktion auf glatte Funktionen diesen Raum der temperierten Distributionen in unseren Raum aller Distributionen einbettet.

Vorschau 4.13.14 (Verallgemeinerte Funktionen als Garbe). Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Für diejenigen Leser, die mit dem Begriff einer Garbe vertraut sind, sei ergänzt, daß die Zuordnung $U \mapsto C^+(U)$ eine abelsche Garbe C^+ auf X liefert und daß man die verallgemeinerten Funktionen charakterisieren kann als die Schnitte der kleinsten abelschen Untergarbe $C^{-\infty} \subset C^+$ von komplexen Vektorräumen, die die Untergarbe $\mathcal{C} \subset C^+$ der stetigen Funktionen umfaßt und die stabil ist unter dem Anwenden beliebiger glatter Vektorfelder.

Lemma 4.13.15 (Zurückholen verallgemeinerter Funktionen). *Sind X, Y endlichdimensionale reelle Räume und $U \subseteq X$ sowie $V \subseteq Y$ offene Teilmengen und $\phi : V \rightarrow U$ eine submersive glatte Abbildung, so macht das Zurückholen ϕ^* verallgemeinerte Funktionen zu verallgemeinerten Funktionen.*

Ergänzung 4.13.16. Es ist nicht möglich, Distributionen „zurückzuholen“. Dahingegen lassen sich Distributionen unter submersiven eigentlichen Abbildungen nach vorne drücken alias „längs der Fasern integrieren“. Ich gehe darauf hier nicht näher ein. *Was geht eigentlich genau? Sollte doch wohl Distributionen mit kompaktem Träger unter beliebigen glatten Abbildungen nach vorne drücken können! Oder noch allgemeiner beliebige Distributionen unter beliebigen glatten Abbildungen, wenn nur deren Restriktion auf den Träger unserer Distribution eigentlich ist..... Das braucht man dann zu Faltung von Distributionen.*

Beweis. Für das Zurückholen unter Diffeomorphismen oder die Restriktion auf offene Teilmengen folgt das unmittelbar aus den Definitionen. Mit dieser Erkenntnis und unseren Erkenntnissen zum Verkleben können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß ϕ die Projektion eines offenen Quaders auf einige seiner Koordinaten ist, etwa $\phi : Q \rightarrow W$ das Weglassen der Koordinaten mit Indizes $> m$ für $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}^m$ und $n > m$. Weiter können wir uns auf den Fall $\Lambda = \partial^\alpha f$ beschränken mit $f \in \mathcal{C}(W)$ und einem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^m$. Dann aber wissen wir wegen der Verträglichkeit 4.13.8 von Verwandtschaft mit dem Anwenden von Vektorfeldern bereits $\phi^* \Lambda = \partial^\alpha \phi^* f$, und das beendet den Beweis. \square

4.13.17. Wir erinnern [AN3] ???. Gegeben ein Ring k und Mengen X, Y und Abbildungen $f : X \rightarrow k$ und $g : Y \rightarrow k$ notieren wir $f \boxtimes g$ die Funktion $X \times Y \rightarrow k$ gegeben durch $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$, das äußere Produkt der Funktionen f und g .

Satz 4.13.18 (Äußeres Produkt von verallgemeinerten Funktionen). *Gegeben offene Teilmengen $U \subseteq X, V \subseteq Y$ endlichdimensionaler reeller Räume sowie verallgemeinerte Funktionen $\Lambda \in \mathcal{C}^{-\infty}(U)$ und $\Gamma \in \mathcal{C}^{-\infty}(V)$ gibt es genau eine verallgemeinerte Funktion*

$$\Lambda \boxtimes \Gamma \in \mathcal{C}^{-\infty}(U \times V)$$

mit $\Lambda \boxtimes \Gamma : (\mu \boxtimes \nu) \mapsto \Lambda(\mu)\Gamma(\nu)$ für alle $\mu \in \mathcal{D}_1^\infty(U), \nu \in \mathcal{D}_1^\infty(V)$.

4.13.19. Die analoge Aussage für Elemente der vollen algebraischen Dualräume $C^+(U), C^+(V)$ der Räume von glatten Dichten mit kompaktem Träger ist im allgemeinen falsch. Das scheint mir ein wesentlicher Grund dafür zu sein, daß es sinnvoll ist, im vollen Dualraum den Teilraum der verallgemeinerten Funktionen auszuzeichnen. Der Beweis des Satzes beruht auf einer Beschreibung unserer verallgemeinerten Funktionen durch Stetigkeitseigenschaften. Wir geben ihn oder vielmehr eine Variante für Distributionen in 4.13.32.

Proposition 4.13.20 (Borelmaße sind Distributionen). *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist für jedes Borelmaß μ auf U die Abbildung $\mathcal{C}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int f \mu$ eine Distribution.*

4.13.21. Diese Proposition wäre offensichtlich, wenn wir Distributionen durch Stetigkeitseigenschaften eingeführt hätten. Da wir jedoch Distributionen als formale Ableitungen stetiger Funktionen erklärt haben, muß an dieser Stelle einiges bewiesen werden.

Ergänzung 4.13.22. Nach [AN3] 1.10.10 liefern verschiedene Borelmaße auch verschiedene Distributionen, so daß wir im Lichte der Proposition Borelmaße als spezielle Distributionen auffassen dürfen. Als Übung mögen Sie zeigen, daß das auch noch gilt, wenn man komplexe Maße mitbetrachtet: Zwei Elemente von $M(U) \cup M(U; [0, \infty])$ definieren genau dann dieselbe Distribution, wenn sie als Abbildung von der σ -Algebra der Borelmengen nach $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ übereinstimmen.

Beispiel 4.13.23. Den Raum aller Borelmaße auf U können wir nach 4.13.20 in den Raum der Distributionen auf U einbetten, indem wir jedem Maß das „Integrieren nach besagtem Maß“ zuordnen. Signierte bzw. komplexe Maße entsprechen dann reellen bzw. komplexen Linearkombinationen endlicher Borelmaße im Raum der Distributionen. Ebenso natürlich scheint es mir jedoch, Linearkombinationen beliebiger Borelmaße zu betrachten, die als Distributionen durchaus wohldefiniert sind und anschaulich etwa als Ladungsverteilungen gedacht werden können, die man jedoch nicht mehr als Abbildungen vom System der Borelmengen nach \mathbb{C} interpretieren kann. Diese Distributionen heißen auch **Radonmaße** oder genauer **signierte Radonmaße** auf U und können im Raum aller Distributionen auf U dadurch charakterisiert werden, daß sie sich auf den Raum $\mathcal{C}_1(U)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger auf U so fortsetzen lassen, daß für jedes kompakte $K \subset U$ die Einschränkung auf $\mathcal{C}_K(U)$ stetig ist für die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall der reellen Zahlengeraden $U = \mathbb{R}$. Nach [AN3] 1.2.27 können wir jedes Borelmaß μ auf \mathbb{R} darstellen als $\mu = dg$ mit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig. Nach [AN3] 1.7.30 gilt für jedes $f \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R})$ dann

$$\int_{\mathbb{R}} f \mu = \int_{\mathbb{R}} f dg = - \int_{\mathbb{R}} f' g \lambda = \int_{\mathbb{R}} f'' G \lambda$$

für λ das Lebesgue-Maß und G eine „Stammfunktion“ von g gegeben durch $G(x) = \int_0^x g(t) dt$. Im wesentlichen geht also μ durch zweimaliges formales Ableiten aus der stetigen Funktion G hervor. Als nächstes besprechen wir den Fall $U = \mathbb{R}$ und schieben dazu einige Zwischenüberlegungen ein. \square

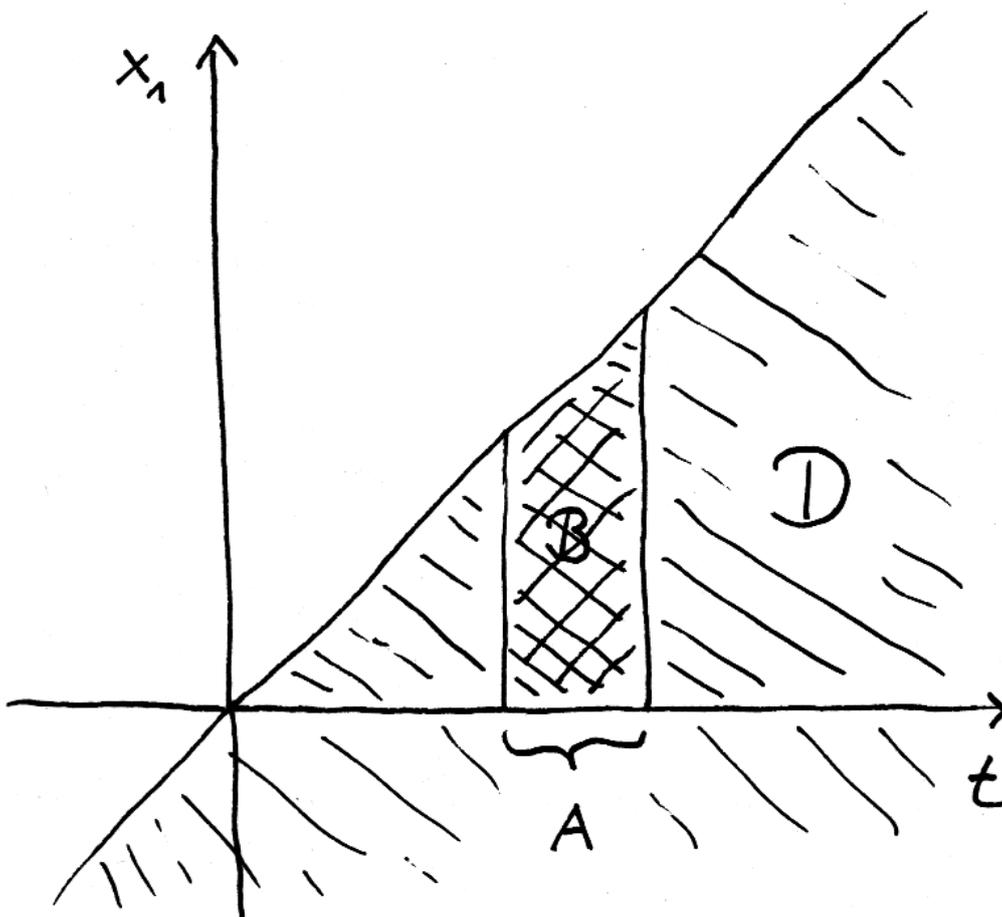
Beispiel 4.13.24. Unsere Fouriertransformation [AN3] 3.6.18 induziert einen Isomorphismus zwischen dem Raum der temperierten alias beliebigen Distributionen auf der Kreisgruppe S^1 und dem Raum aller Abbildungen $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ von höchstens polynomialem Wachstum.

Lemma 4.13.25 (Partielles Integrieren von Maßen). Sei μ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^n , bei dem die ganze Masse im positiven Quadranten $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ konzentriert ist. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die „Halbebene unter der Diagonalen“

$$D := \{(t, x_1, \dots, x_n) \mid t \geq x_1\}$$

und $\tilde{\mu} := p_*([D](\lambda \boxtimes \mu))$ das Bildmaß unter der Projektion auf (t, x_2, \dots, x_n) des Produktmaßes von μ mit dem Lebesguemaß λ , multipliziert mit der charakteristischen Funktion von D . So ist auch $\tilde{\mu}$ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^n , bei dem die ganze Masse im positiven Quadranten $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ konzentriert ist. Des weiteren gilt

$$\partial_1^\top \tilde{\mu} = -\mu$$



Das Bilden einer „partiellen Stammfunktion“ $\tilde{\mu}$ eines Maßes μ . Wir haben $\tilde{\mu}(A) = (\lambda \boxtimes \mu)(B)$ für B den kreuzweise schraffierten Bereich.

im algebraischen Dualraum $D^+(\mathbb{R}^n)$ des Raums der Testfunktionen, und für die Verteilungsfunktionen gilt $V_{\tilde{\mu}}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} V_{\mu}(t, x_2, \dots, x_n) dt$.

4.13.26. Wir müssen uns hier auf Maße beschränken, bei denen die Masse im positiven Quadranten konzentriert ist, da uns sonst das partielle Integrieren aus dem Bereich der Distributionen hinausführt, die durch Maße darstellbar sind. So wäre etwa das Integral des Lebesguemaßes λ auf \mathbb{R} die Dichte $x\lambda = xdx$, die nicht mehr als Maß, selbst nicht als signiertes Maß, dargestellt werden kann.

Beweis. Wir müssen für jede Testfunktion $\varphi \in C_1^\infty(\mathbb{R}^n)$ zeigen

$$\int \varphi \mu = \int (\partial_1 \varphi) \tilde{\mu}$$

Für $\psi := \partial_1 \varphi$ haben wir jedoch in der Tat

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) \mu \langle x \rangle &= - \int \left(\int_{x_1}^{\infty} \psi(t, x_2, \dots, x_n) \lambda \langle t \rangle \right) \mu \langle x \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \psi(t, x_2, \dots, x_n) D(t, x_1, \dots, x_n) (\lambda \boxtimes \mu) \langle t, x \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t, x_2, \dots, x_n) \tilde{\mu} \langle t, x_2, \dots, x_n \rangle \end{aligned}$$

Was die Verteilungsfunktionen angeht, so folgt die Behauptung mühelos mit Fubini. □

Fortsetzung des Beweises von 4.13.20. Ist in den Notationen unseres Lemmas 4.13.25 die Verteilungsfunktion V_{μ} partiell stetig in einigen der Variablen x_i , so ist die Verteilungsfunktion $V_{\tilde{\mu}}$ partiell stetig in denselben Variablen und zusätzlich in der Variablen x_1 . Man folgert das unschwer aus dem Satz über dominierte Konvergenz. Nun sind aber Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die in jeder Variablen stetig und monoton wachsend sind, notwendig bereits stetig. Wir können folglich jedes Borelmaß μ auf dem \mathbb{R}^n mit im positiven Quadranten konzentrierter Gesamtmasse schreiben als

$$\mu = \pm \partial_1^\top \dots \partial_n^\top \nu$$

für ein Borelmaß ν mit stetiger Verteilungsfunktion. Wenden wir ein weiteres Mal Lemma 4.13.25 an und beachten [AN3] ??, so erkennen wir, daß wir sogar schreiben können

$$\mu = \partial_1^\top \dots \partial_n^\top \partial_1^\top \dots \partial_n^\top (G d^n x)$$

für $d^n x$ das Lebesguemaß und $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion. Die Fälle, daß die Masse von μ nicht notwendig im positiven Quadranten konzentriert ist, und daß U ein beliebiger endlichdimensionaler reeller Raum ist, oder sogar eine offene Teilmenge desselben, erreicht man von hier aus ohne weitere Schwierigkeiten. □

Definition 4.13.27. Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $d \geq 0$ betrachte man auf dem Raum $\mathcal{C}_1^\infty(U)$ die Norm

$$p_{\leq d}(f) := \sup_{x \in U, |\alpha| \leq d} |(\partial^\alpha f)(x)|$$

wo das Supremum wie angedeutet über alle Punkte $x \in U$ und alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq d$ zu bilden ist. In Worten mag man das die „Norm der gleichmäßigen Konvergenz der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung d “ nennen.

Satz 4.13.28 (Distributionen als stetige Linearformen). Die Distributionen auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sind genau alle Linearformen

$$\Lambda : \mathcal{C}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset U$ ihre Einschränkung auf $\mathcal{C}_K^\infty(U)$ stetig ist in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz der partiellen Ableitungen bis zu einer geeigneten Ordnung $d = d_K$, die ihrerseits von K abhängen darf.

Ergänzung 4.13.29. Man kann diese Charakterisierung wie folgt umformulieren: Betrachtet man für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt auf dem Raum $\mathcal{C}_K^\infty(U)$ der glatten Funktionen auf U mit Träger in K die Initialtopologie zur Familie aller Normen $p_{\leq d}$, so daß also der Umgebungsfiler des Ursprungs von den $p_{\leq d}^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ für $d \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ erzeugt wird, so sind unsere Distributionen genau alle Linearformen $\Lambda : \mathcal{C}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum $K \subset U$ ihre Einschränkung auf $\mathcal{C}_K^\infty(U)$ stetig ist für besagte Initialtopologie.

Ergänzung 4.13.30 (Distributionen als Dualraum). Man kann diese Charakterisierung auch noch weiter umformulieren wie folgt. Betrachtet man auf $\mathcal{C}_1^\infty(U)$ alle Halbnormen, deren Restriktionen auf alle $\mathcal{C}_K^\infty(U)$ stetig sind, und versieht dann $\mathcal{C}_1^\infty(U)$ mit der von diesen Halbnormen erzeugten Struktur eines topologischen Vektorraums, so kann man den Raum der Distributionen auf U beschreiben als den Raum aller in Bezug auf diese Topologie stetigen Linearformen auf $\mathcal{C}_1^\infty(U)$. In ?? besprechen wir, daß das gerade der Kolimes der $\mathcal{C}_K^\infty(U)$ in der Kategorie der lokalkonvexen komplexen topologischen Vektorräume ist. Gegeben eine bezüglich dieser Topologie konvergente Folge gibt es stets ein Kompaktum K derart, daß alle Folgenglieder Träger in K haben. In der Tat reicht es, das für Nullfolgen zu zeigen. Wir finden eine Folge von Kompakta K_n mit $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ und $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Wäre nun f_n eine Nullfolge, die obige Bedingung verletzt, so könnten wir durch Übergang zu Teilfolgen $x_n \in K_{n+1}^\circ \setminus K_n$ finden mit $f_n(x_n) \neq 0$. Dann fänden wir eine stetige Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|\varphi(x_n)f(x_n)| \geq 1$ für alle n und dann wäre $f \mapsto \|\varphi f\|_\infty$ eine Halbnorm auf $\mathcal{C}_1(U)$, deren Restriktionen auf alle $\mathcal{C}_K(U)$ stetig ist und in der die Normen der Glieder unserer Folge f_n nicht nach Null streben. Mehr dazu findet man zum Beispiel in [Wer05].

Beweis. Der Nachweis, daß alle unsere Distributionen die geforderte Stetigkeitseigenschaft haben, ist nicht schwer und bleibe dem Leser überlassen. Habe nun umgekehrt eine Linearform $\Lambda : \mathcal{C}_1^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$ die geforderte Stetigkeitseigenschaft. Gegeben $x \in U$ gibt es sicher einen kompakten Quader $Q \subset U$, der eine Umgebung von x ist. Nach Annahme finden wir $\varepsilon > 0$ und $N \leq 0$ derart, daß für $f \in \mathcal{C}_Q^\infty(U)$ aus

$$|(\partial_\alpha f)(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in U, \forall \alpha \in [0, N]^n$$

folgt $|\Lambda(f)| < 1$. Natürlich hängt $\mathcal{C}_Q^\infty(U)$ nicht von U ab, wir dürfen unsere Notation deshalb zu \mathcal{C}_Q^∞ vereinfachen und uns diese Funktionen durch Null auf ganz \mathbb{R}^n fortgesetzt denken. Wir notieren nun für $\gamma \in \mathbb{N}^n$ mit $\|\cdot\|_{\leq \gamma}$ die Norm $\|f\|_\gamma = \sup_{\alpha \leq \gamma} \|\partial_\alpha f\|_\infty$ auf diesem Raum. Ich behaupte, daß für $\gamma_i > 0$ das partielle Ableiten

$$\partial_i : (\mathcal{C}_Q^\infty, \|\cdot\|_{\leq \gamma}) \rightarrow (\mathcal{C}_Q^\infty, \|\cdot\|_{\leq \gamma - e_i})$$

einen in Bezug auf die angedeuteten Normen stetigen Isomorphismus auf sein Bild liefert. Hier scheint mir die Stetigkeit ebenso wie die Injektivität offensichtlich, und die Stetigkeit der Umkehrabbildung auf besagtem Bild folgt daraus, daß kleine Funktionen auch nur kleine Integrale haben. Wir können diese Umkehrabbildung stetig auf ganz $(\mathcal{C}_Q^\infty, \|\cdot\|_{\leq \gamma - e_i})$ ausdehnen, indem wir irgendeine glatte Funktion h auf \mathbb{R} mit Träger in der i -ten Kante Q_i unseres Quaders und Integral Eins nehmen und die Projektion $f \mapsto Pf$ von \mathcal{C}_Q^∞ auf das Bild von ∂_i vorschalten, die gegeben wird durch

$$(Pf)(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_i \right) h(x_i)$$

So finden wir zu Λ erst eine stetige Linearform $\tilde{\Lambda} : (\mathcal{C}_Q^\infty, \|\cdot\|_{\leq \gamma - e_i}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Lambda(f) = \tilde{\Lambda}(\partial_i f)$ für alle $f \in \mathcal{C}_Q^\infty$ und dann induktiv eine in Bezug auf die gewöhnliche Norm der gleichmäßigen Konvergenz stetige Linearform $R : (\mathcal{C}_Q^\infty, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Lambda = R \partial_1^N \dots \partial_n^N$ auf \mathcal{C}_Q^∞ . Bezeichnet $B = Q^\circ$ das Innere unseres Quaders, so kann die Restriktion von R auf $\mathcal{C}_1^\infty(B)$ auf genau eine Weise zu einer Linearform auf $\mathcal{C}_1(B)$ ausgedehnt werden, die auf allen $\mathcal{C}_K(B)$ für $K \subset B$ kompakt stetig ist. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz [AN3] 4.6.2 in Verbindung mit Übung [AN3] 4.6.6 wird folglich R durch eine Linearkombination von Integralen gegen Borelmaße beschrieben. Daß diese Linearformen Distributionen sind, wissen wir jedoch bereits aus Lemma 4.13.20. \square

4.13.31. Wir erinnern [AN3] ???. Gegeben ein Ring k und Mengen X, Y und Abbildungen $f : X \rightarrow k$ und $g : Y \rightarrow k$ notieren wir $f \boxtimes g$ die Funktion $X \times Y \rightarrow k$ gegeben durch $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$. Wir nennen $f \boxtimes g$ das **externe Produkt** der Funktionen f und g .

Satz 4.13.32 (Externes Produkt von Distributionen). Gegeben offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ sowie Distributionen $\Lambda \in \mathcal{D}^{-\infty}(U)$, $\Gamma \in \mathcal{D}^{-\infty}(V)$ gibt es genau eine Distribution

$$\Lambda \boxtimes \Gamma \in \mathcal{D}^{-\infty}(U \times V)$$

mit der Eigenschaft $(f \boxtimes g) \mapsto \Lambda(f)\Gamma(g)$ für alle $f \in \mathcal{C}_1^\infty(U)$, $g \in \mathcal{C}_1^\infty(V)$.

4.13.33. Die analoge Aussage für die vollen algebraischen Dualräume der Räume von glatten Funktionen mit kompaktem Träger gilt in keinster Weise. Das scheint mir ein wesentlicher Grund dafür zu sein, daß es sinnvoll ist, im vollen Dualraum den Teilraum der Distributionen auszuzeichnen.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Nach unseren Erkenntnissen 4.13.9 zum Verkleben von Distributionen und den Definitionen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Λ und Γ durch endlich viele partielle Ableitungen aus stetigen Funktionen entstehen, etwa $\Lambda = \partial_x^\alpha \lambda$ und $\Gamma = \partial_y^\beta \gamma$ mit $\lambda = \lambda(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}(U)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $\gamma = \gamma(y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{C}(V)$, $\beta \in \mathbb{N}^m$. Dann ist $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (\lambda \boxtimes \gamma)$ schon mal eine Distribution auf $U \times V$ mit der geforderten Eigenschaft und es bleibt nur, die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien also $S, T \in \mathcal{D}^{-\infty}(U \times V)$ zwei Distributionen mit der entsprechenden Eigenschaft. Seien $A \subset U$ und $B \subset V$ kompakte Quader. Es reicht zu zeigen, daß S und T auf dem Inneren $A^\circ \times B^\circ$ des Produkts unserer Quader übereinstimmen. Unsere beiden Distributionen sind per definitionem stetig auf $\mathcal{C}_{A \times B}^\infty := \mathcal{C}_{A \times B}^\infty(U \times V)$ in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz partieller Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung. Man beachte nun, daß unsere stetigen Projektionen P von $\mathcal{C}_{A \times B}^\infty$ auf das Bild von ∂_i aus dem Beweis der Charakterisierung durch Stetigkeitseigenschaften 4.13.28 externe Produkte glatter Funktionen auf externe Produkte glatter Funktionen abbilden. Wir finden mit den Methoden des dortigen Beweises also stetige Linearformen \tilde{S} und \tilde{T} auf $\mathcal{C}_{A \times B}^\infty$ mit seiner Norm der gleichmäßigen Konvergenz, die auf externen Produkten glatter Funktionen übereinstimmen und unter ein- und derselben Folge von partiellen Ableitungen S und T liefern. Es reicht also, wenn wir $\tilde{S} = \tilde{T}$ zeigen. Nach dem Satz von Stone und Weierstraß [AN2] ?? liegt der von allen externen Produkten glatter Funktionen erzeugte Untervektorraum unseres Funktionenraums jedoch dicht im Raum $\mathcal{C}_{A \times B}(\mathbb{R}^{n+m})$ mit seiner Supremumsnorm: Man zeigt das, indem man den Rand unseres Quadrats $A \times B$ zu einem Punkt identifiziert und auf diesem Identifizierungsraum den Satz von Stone-Weierstraß anwendet. Es folgt erst $\tilde{S} = \tilde{T}$ als Linearformen auf $\mathcal{C}_1(A^\circ \times B^\circ)$ und dann $\tilde{S} = \tilde{T}$ als Distributionen auf $A^\circ \times B^\circ$. \square

Bemerkung 4.13.34. Man versieht den Raum der Distributionen mit der Initialtopologie zur Familie aller Auswertungen an glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Er wird dadurch offensichtlich zu einem lokal konvexen Hausdorffraum.

Bemerkung 4.13.35. Gegeben ein komplexer Vektorraum V und ein Teilraum $F \subset V^*$ seines Dualraums macht die Initialtopologie zur gegebenen Familie F von Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{C}$ unseren Vektorraum V zu einem topologischen Vektorraum. Trennt F die Punkte von V , so ist diese Initialtopologie Hausdorff und für die Konvergenz von Folgen in V gilt

$$\lim v_n = v \quad \Leftrightarrow \quad \lim f(v_n) = f(v) \quad \forall f \in F$$

Lemma 4.13.36. Eine Distribution auf einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n , deren sämtliche partiellen Ableitungen verschwinden, ist eine lokal konstante Funktion.

Beweis. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Teilmenge, so liefert eine Variante des Poincaré-Lemmas die Exaktheit der Sequenz

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{C}_1^\infty(U) \xrightarrow{(\partial_1, \dots, \partial_n)} \mathcal{C}_1^\infty(U) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \square$$

Definition 4.13.37. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\Lambda \in \mathcal{D}(U)$ eine Distribution. Sicher ist die Menge V aller $x \in U$ derart, daß Λ auf einer offenen Umgebung von x verschwindet, eine offene Teilmenge $V \subset U$, und nach 4.13.9 erhalten wir so die größte offene Teilmenge $V \subset U$, auf der unsere Distribution verschwindet. Ihr Komplement $A \subset U$ heißt der **Träger der Distribution** Λ und wird notiert

$$A = \text{supp } \Lambda$$

Definition 4.13.38. Die Menge der Distributionen mit kompaktem Träger auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ notieren wir

$$\mathcal{D}_1(U) \subset \mathcal{D}(U)$$

Durch Verkleben mit der Null auf dem Komplement des Trägers erhalten wir für jede größere offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset V$ die **Fortsetzung durch Null** $\mathcal{D}_1(U) \rightarrow \mathcal{D}_1(V)$.

Ergänzung 4.13.39. Gegeben $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und $\Lambda \in \mathcal{D}(U)$ können wir auch dann noch Λ sinnvoll auf f auswerten, wenn nur die Schnitte der jeweiligen Träger kompakt sind. In der Tat folgt für $h \in \mathcal{C}_1^\infty(U)$ aus $\text{supp } \Lambda \cap \text{supp } h = \emptyset$ sofort $\Lambda(h) = 0$. Für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ wie oben existiert aber $f_1 \in \mathcal{C}_1^\infty(U)$ mit $f_1 = f$ auf dem Träger von Λ . Da nun nach dem vorhergehenden $\Lambda(f_1)$ nicht von der Wahl von f_1 abhängt, können und werden wir diese Zahl auch gleich mit $\Lambda(f)$ bezeichnen.

4.13.40. Es wäre hier wichtig, Distributionen mit Träger in einem Punkt zu besprechen. Im eindimensionalen Fall scheint das schnell erledigt: Distributionen mit Träger in $0 \in \mathbb{R}$ müssen durch n -faches Ableiten aus einer stetigen Funktion entstehen, die auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ jeweils durch ein Polynom vom Grad $< n$ gegeben wird.

5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Kinan Halabi, Christina Pflanz,
...

6 Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 20.10 Integrale stetiger Funktionen über kompakte Quader, auch mit Riemannsummen. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger, deren Fortsetzung durch Null, deren Integral. Formulierung der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Erste Beispiele.
- 22.10 Beweis der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Motivation. Zerlegung der Eins.
- 27.10 Äquivalenz von je zwei Normen auf endlichdimensionalem reellen Vektorraum. Differential für Abbildungen einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen affinen Raum. Untermannigfaltigkeiten über Plättungen als Definition. Karten und Koordinatensysteme. Untermannigfaltigkeiten als Bilder noch ohne Beweis.
- 29.10 Untermannigfaltigkeiten als Bilder mit Beweis. Differenzierbarkeit der Kartenwechsel. Integration von Funktionen mit kompaktem Träger über in \mathbb{R}^n eingebettete Mannigfaltigkeiten. Approximation des Integrals durch Riemannsummen.
- 3.11 Fastfaltigkeiten, Integrationskarten, Integration über Fastfaltigkeiten, Oberfläche der Kugel.
- 5.11 Vektorfelder und Kovektorfelder, Schreibweise, Verwandtschaft, Zurückholen. Das Differential einer Funktion als Kovektorfeld. Zurückholen vertauscht mit dem Differential. Zurückholen in Koordinaten.
- 10.11 Wegintegral über Kovektorfeld und seine Eigenschaften. Beziehung zu Wegintegralen über Vektorfelder und Fluß durch eine Kurve. Am Schluß noch alternierende Multilinearformen. Satz über das Dachprodukt formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Basisformen noch nicht formuliert.
- 12.11 Dachprodukt, Formeln in der äußeren Algebra. Determinante und Rückzug, Satz über Basisformen. Felder von p -Formen, Rückzug von p -Formen, anschauliche Bedeutung.
- 17.11 Rückzug von Volumenformen und Determinante. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und Fastfaltigkeiten. Integration von Formen über orientierte Fastfaltigkeiten. Beispiel der Hemisphäre. Noch nicht: Beschreibung durch

- Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension.
- 19.11 Beschreibung des Formen-Integrals durch Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension, insbesondere Fluß durch Hyperfläche. Äußere Ableitung und Formelsammlung dazu noch ohne Beweis. Interpretation von Divergenz und Rotation als äußere Ableitung.
- 24.11 Anschauliche Bedeutung der äußeren Ableitung. Beweis der Formeln der Formelsammlung. Randfaltigkeiten und Beweis des Stokes'schen Integralsatzes.
- 26.11 Stokes'scher Integralsatz für Eckfaltigkeiten. Beispiele. Green'sche Formel. Ableitung der klassischen Sätze von Gauß und Stokes und Wegintegral über ein Feld mit Potential. Abschluß des ersten Teils der Vorlesung.
- 1.12 Mengenalgebren, σ -Algebren, Borelmengen, Meßräume, Maße. Charakterisierung des Lebesgue-Maßes. Unmöglichkeit eines translationsinvarianten Maßes auf der Potenzmenge der reellen Zahlengeraden, das dem Einheitsintervall das Maß Eins zuordnet. Noch nicht dessen Regularität.
- 3.12 Regularität für die Anschauung, Beweis kommt viel später. Prämaße, Konstruktion des Prämaßes zum Lebesguemaß und zu Stieltjes-Maßen auf der reellen Geraden. Maßfortsetzungssatz und Beschreibung der kanonischen Fortsetzung noch ohne Beweis. Nächstes Mal mit der Definition eines äußeren Maßes beginnen.
- 8.12 Äußere Maße, Zerlegerlemma, Beweis des Maßfortsetzungssatzes von Caratheodory. Vervollständigung von Maßräumen. Stieltjes-Maße nicht behandelt.
- 10.12 Stieltjes-Maße. Meßbarkeit. Summen, Produkte und Grenzwerte meßbarer Funktionen. Definition des Integrals meßbarer nichtnegativer reeller Stufenfunktionen. Noch nicht dessen Linearität.
- 15.12 Integral meßbarer nichtnegativer Funktionen und Satz über monotone Konvergenz. Integrierbare Funktionen, deren Integral, Linearität des Integrals, Satz über dominierte Konvergenz.
- 17.12 Produktmaß, Sätze von Tonelli und Fubini. Noch nichts außer der reinen Theorie. Noch nicht Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral.

- 22.12 Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral, partielle Integration. Regularität von Borelmaßen auf dem \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen.
- 7.1 Transformationsformel. Bildmaß, Integral über Bildmaß. Produkt von Maß mit meßbarer nichtnegativer Funktion. Regularität von Borelmaßen auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen. Nützliche Nullmengen. Fläche unter der Glockenkurve. Nicht Flächenmaß von Fastfaltigkeiten, nur kurz mündlich was dazu gesagt.
- 12.1 Integrierbarkeit und Integral komplexwertiger Funktionen. Räume quadratintegrierbarer Funktionen und Fouriertransformation. Räume integrierbarer Funktionen, fast überall definierte Funktionen, Raum der L^p -Funktionen. Noch nicht $\| \cdot \|_p$ -Norm.
- 14.1 Die $\| \cdot \|_p$ -Norm ist eine Norm. Die L^p -Räume sind vollständig. Hilberträume, Hilbertbasen. Noch nicht der Satz über Hilbertbasen.
- 19.1 Satz über Hilbertbasen. Die differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger auf einer offenen Teilmenge der \mathbb{R}^n liegen dicht in den L^p Funktionen für $p < \infty$. Konvergenz der Fourier-Reihe in $L^2([0, 2\pi])$.
- 21.1 Einparameteruntergruppen der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen. Charaktere der Kreisgruppe. Produkttopologie. Noch nicht topologische Gruppen.
- 26.1 Topologische Gruppen und ihre Charaktere. Charaktere von $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und von der Kreisgruppe. Fouriergruppen erklärt als topologische Gruppen, die isomorph sind zu endlichen Produkten der eben aufgezählten Beispiele. Definition, Existenz und Eindeutigkeit ihrer Haar-Maße bewiesen. Die Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer kompakten Fouriergruppe für das normierte Haarmaß.
- 28.1 Standardisierte Fouriertransformation. Formelsammlung. Die Fouriertransformation erhält den Schwarzraum. Fouriertransformierte integrierbarer Funktionen verschwinden im Unendlichen. Abstrakte Fouriertransformation eines Maßes und seine Beziehung zur standardisierten Fouriertransformation. Natürlichkeit, aber noch nicht Produktverträglichkeit.
- 2.2 Paarung, duale Paarung, exakte Paarung von Fouriergruppen. Zugehörige abstrakte Fouriertransformationen, Fourierreihe und Fouriertransformation

als Beispiele. Abstrakte Inversionsformel, konkrete Variante für \mathbb{R} , abstrakte und konkrete Poissonformel, Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel (bis auf letzten Schliff).

- 4.2 Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel. Interpretation der Poissonformel als Natürlichkeit. Fourierisomorphismus für quadratintegrierbare Funktionen. Gleichheit der verschiedenen Varianten der Fouriertransformation im Dualraum des Schwartzraums.
- 9.2 Falten von Maßen. Assoziativität. Verhalten unter Fouriertransformation. Beweis des zentralen Grenzwertsatzes begonnen. Gekommen bis zur punktweisen Konvergenz der charakteristischen Funktionen.
- 11.2 Beweis zentraler Grenzwertsatz beendet. Translationsinvariante abgeschlossene Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf der reellen Geraden.

Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*;
- [AN1] *Skriptum Analysis 1*;
- [AN2] *Skriptum Analysis 2*;
- [AN3] *Skriptum Analysis 3*;
- [FT1] *Skriptum Funktionentheorie 1*;
- [GR] *Skriptum Grundlagen*;
- [LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*;
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;
- [ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*;
- [NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie*;
- [TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen*;
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;
- [Wer05] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, 5 ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.

Index

- 1_A Indikatorfunktion von A , 34
- P^X Verteilung von X , 31
- $\hat{\otimes}$ vervollständigtes Tensorprodukt, 90
- σ -endlich, 21
- $\|f\|_\infty^{\text{ess}}$ essentielles Supremum, 77
- \dashrightarrow partiell definierte lineare Abbildung, 203
- \dashrightarrow fast überall definierten Abbildung, 72
- \rightsquigarrow verwandt
Maße, 31
- $[A]$ charakteristische Funktion von A , 34
- A^* adjungierter Operator, 103
- A^\dagger adjungierter Operator, 103
- *
- Faltung von Maßen, 140
- $\mu|_A$ Restriktion eines Maßes, 11
- \boxtimes
 - äußeres Produkt
 - von Funktionen, 133, 216
 - von verallgemeinerten Funktionen, 211
 - Produkt- σ -Algebra, 27
 - Produktmaß, 47
- Abbildung
 - überall definierte, 72
- abgeschlossen
 - Abbildung, 58
 - Operator, unbeschränkter, 206
- Abtast-Satz, 124
- abzählbar basiert
 - topologischer Raum, 28
- Abzählbarkeitsaxiom
 - zweites, 29
- additiv
 - σ -additiv
 - auf Mengerring, 12
- adjungiert
 - Operator, 103
 - partiell definierte Abbildung, 203
- äußeres Maß, 16
- äußeres Produkt
 - von Funktionen, 133
- Algebra
 - σ -Algebra, 5
- analytisch
 - banachwertige Funktion, 170
- Baire'scher Kategoriensatz, 160
- Banach-Algebra, 165
- Banach-Ringalgebra, 165
- Banach-Steinhaus, 162
- Banach-Tarski-Paradoxon, 10
- Basis einer Topologie, 28
- Benford's Gesetz, 22
- Beppo Levi, 45
- beschränkt
 - gleichmäßig, 162
 - uniform , 162
- Bild
 - von σ -Algebra, 26
- Bildmaß, 31, 117
- Bochner, Satz von, 132
- $\text{Borel}(X)$ Borelmengen von X , 8
- Borelmaß, 8
- Borelmenge, 8
- borelsche σ -Algebra, 8
- $\mathcal{C}(X, Y)$ Raum stetiger Abbildungen, 126
- $\mathcal{C}^{-\infty}$ verallgemeinerte Funktion, 209
- Cantor-Menge, 23
- Cavalieri, 51
- Charakter
 - unitärer, 94
 - von topologischer Gruppe, 94

Charaktergruppe, 94
 charakteristische Funktion
 einer Menge, 33
 eines Maßes, 123
 Charakterraum, 130
 χ_A charakteristische Funktion, 34
 Cosinustransformation, 111
 $\mathcal{D}^{-\infty}$ Distribution, 210
 Darstellung
 unitäre
 von \mathbb{R} , 152
 dicht
 definiert, 203
 Dichte
 glatte, 207
 differenzierbar
 Vektor, 157
 Dirac-Maß, 6
 Distribution
 temperierte, 123, 139
 verallgemeinerte Funktion, 210
 dominierte Konvergenz, 42
 $E(X)$ Erwartungswert der Zufallsvariable X , 41
 Einbettung
 kanonische unitäre, 155
 Einparameteruntergruppe, 92
 Element
 zufälliges, 26
 Elementar-Ereignis, 6
 endlich
 Maß, 112
 Ereignis, 6
 Erwartungswert
 einer Zufallsvariable, 41
 Erzeuger
 infinitesimaler, 157
 erzeugt
 σ -Algebra, 7
 Mengenalgebra, 22
 Mengenring, 22
 essentielle
 Supremum, 77
 Exponentialgesetz
 topologisch, sehr schwaches, 126
 externes Produkt
 von Funktionen, 216
 Faltung, 150
 von Maßen, 140
 fast überall
 auf Maßraum, 72
 final
 stetige Abbildung, 33
 Finaltopologie, 27
 Flächenmaß, 66
 Fortsetzung durch Null, 218
 Fouriergruppe, 95
 Fouriertransformation
 kanonische, 130
 mathematisch standardisierte, 106
 physikalisch standardisierte, 106
 stochastisch standardisierte, 107
 zu Paarung, 113
 Frequenzmaß, 155
 Fubini, 52
 Funktion
 verallgemeinerte, 209
 Funktionalkalkül, 188
 Gauß'sche Glockenkurve, 63
 Geradengruppe, 154
 Gitterpunktsatz, 66
 gleichmäßig beschränkt, 162
 gleichmäßige Beschränktheit, Prinzip der,
 162
 größte Fortsetzung
 von Prämaß, 15
 GrpTop Kategorie der topologischen Gruppen, 92

Gruppe
 topologische, 92
 Gruppenweg, 92
 in \mathbb{C}^\times , 92
 Haar-Maß
 auf Fouriergruppe, 96
 Halbdichte, 136
 Harmonische Analysis, 115
 Hausdorffgruppe, 92
 Hellinger-Toeplitz, 159
 Hilbertbasis, 82
 Hilbertsumme, 89
 Hölder-Ungleichung, 78
 holomorph
 banachwertige Funktion, 170
 Indikatorfunktion, 34
 induziert
 Maßraum, 11
 induzierte σ -Algebra, 27
 infinitesimaler Erzeuger, 157
 Initialtopologie, 27
 innerer Punkt einer Teilmenge
 eines metrischen Raums, 160
 Integral
 nichtnegative meßbare Funktion
 über Maßraum, 35
 von vektorwertiger Funktion
 über Maßraum, 70
 Integration
 partielle, 55
 integrierbar, 40
 vektorwertige Funktion, 70
 Jensen'sche Ungleichung
 kontinuierliche, 46
 kanonische Einbettung, 163
 kanonische Norm
 auf Banachringalgebra, 165
 kompakt
 relativ, 57
 topologischer Raum, 57
 kompakt getragen
 Maß, 139
 projektorwertiges Maß, 183
 kompakt-offene Topologie, 126
 komplex
 Maß, 112
 konjugiert
 Exponenten, 78
 konjugierte Exponenten, 79
 Konvolution
 von Maßen, 140
 Kreisgruppe, 92
 λ, λ^n Lebesguemaß auf \mathbb{R}^n , 9
 $l^2(I)$, 82
 $L^2(I)$ quadratintegrierbare Funktionen,
 82
 $L^p(X; \mathcal{M}, \mu)$ Funktionenraum, 77
 Laplace-Transformierte, 111
 Lebesgue-Mengen, 25
 Lebesgue-meßbar, 31
 Lebesgue-meßbaren, 25
 Leibniz-Regel
 bei verallgemeinerten Funktionen, 208
 $\lim_{g(x) \rightarrow z}$, 110
 linksseitig stetig, 14
 lokal integrierbar, 121
 lokal kompakt
 topologischer Raum, 60
 lokale Beschränktheit, Prinzip der, 160
 $\mathcal{M}(G)$ Schwartzmaße, 135
 $M(X)$ komplexe Maße auf X , 112
 $M(X; [0, \infty))$ endliche Maße, 112
 $M(X; [0, \infty])$ Maße, 112
 $M(X; \mathbb{R})$ reelle Maße, 112
 majorisierte Konvergenz, 43
 Mantelfläche, 68
 Markov-Ungleichung, 46

Maß, 6
 äußeres, 16
 endliches, 112
 komplexes, 112
 nichtnegatives, 6
 projektorwertiges, 181
 reelles, 112
 teilraumwertiges, 181
 topologisches, 8
 Maßraum, 6
 Mengenalgebra, 4
 erzeugt von Mengensystem, 22
 Mengenring, 12
 erzeugt von Mengensystem, 22
 meßbar
 α -meßbar, Menge, 17
 μ -meßbar, Funktion, 31
 Abbildung, 26
 fast überall definierte Funktion, 73
 Menge, 5
 Meßraum, 5
 Minkowski
 Gitterpunktsatz, 66
 Monoid
 topologische, 92
 monotone Konvergenz, 35

 nichtleere endliche Schnitte, 59
 nichtnegativ, 178
 normal
 Operator, 201
 Normalverteilung, 143
 Normierung, 9
 Nullmenge, 23

 \otimes Produkt- σ -Algebra
 externe Notation, 47
 offen
 Abbildung, 164
 offenes Bild, Satz von, 164
 Operator
 unbeschränkter, 203
 Operatortopologie
 starke, 152
 Orthonormalsystem, 82
 vollständiges, 82

 Paarung
 duale, 112
 exakte, 113
 von topologischen Gruppen, 112
 partiell
 definiert, lineare Abbildung, 203
 Integration, 55
 Plancherel-Maß, 135
 Polarzerlegung
 in Hilbertraum, 177
 positiv semidefinit
 Operator, 176
 Prähilbertraum, 81
 Prämaß, 12
 Prinzip von Cavalieri, 51
 Produkt- σ -Algebra, 27
 Produktmaß, 47
 Produkttopologie, 28
 Pseudometrik, 88
 pseudometrischer Raum, 88
 Punkt
 innerer, 160

 quadratintegrierbar
 Funktion, 71
 quasikompakt, 57
 Quotientennorm, 172

 Radonmaß
 signiertes, als Distribution, 212
 reell
 Maß, 112
 reellen Banachringalgebra, 165
 regulär
 Borelmaß, 60
 relativ

kompakt, 57
 Riemannsumme
 für Integral nach Maß, 45
 Riesz'scher Darstellungssatz
 bei Hilbertraum, 101
 Maßtheorie
 auf affinem Raum, 178
 Rotationskörper, 52

 σ -Algebra
 erzeugt von Mengensystem, 7
 $\sigma(\mathcal{A})$ von \mathcal{A} erzeugte σ -Algebra, 7
 $\mathcal{S}(G)$ Schwartzraum, 135
 σ -Subadditivität, 16
 σ -additiv
 auf Mengenring, 12
 σ -Algebra, 5
 Sampling Theorem, 124
 Sard
 Satz von, 63
 schiefadjungiert, 157
 schnittstabil, 21
 Schwartzmaß, 135
 Schwartzraum, 109, 135
 selbstadjungiert, 157
 σ -endlich, 14
 separabel
 metrischer Raum, 28
 topologischer Raum, 29
 Sinustransformation, 111
 Spektralmaß
 eines Vektors, 163
 Spektralprojektor
 einer unitären Darstellung, 192
 Spektralradius, 169
 Spektrum
 bei Banachalgebren, 166
 starke Operatortopologie, 152
 stetig
 linksseitig, 14
 Stieltjes-Maß, 20

 Stufenfunktion, 33
 submersiv
 glatte Abbildung, 208
 summierbar
 Familie in normiertem Vektorraum, 71
 supp Träger einer Distribution, 218
 Supremum
 essentielles, 77

 Teilung der Identität, 181
 temperiert
 Distribution, 123, 139
 Tensorprodukt
 vervollständigtes, 90
 Testdichte, 207
 Testfunktion, 207
 Tonelli, Satz von, 49
 $\text{Top}(X, Y)$ stetige Abbildungen, 126
 Topologie
 erzeugt von Mengensystem, 7
 topologisch
 Maß, 8
 meßbar, 8
 Monoid, 92
 topologische Gruppe, 92
 Träger
 einer Distribution, 218
 Transformationsformel
 für das Lebesgue-Integral, 62
 translationsinvariant, 8
 transponiert
 Abbildungen, 206
 tribu, 5

 überall definiert
 Abbildung, 72
 unbeschränkt
 Operator, 203
 uniform
 beschränkt, 162

- unitär
 - Darstellung
 - von \mathbb{R} , 152
- Unterdarstellung
 - unitäre, 155
- Urbild
 - von σ -Algebra, 26
- Variation
 - eines Maßes, 116
- Variationsnorm, 116
- Verfeinerung
 - von Wahrscheinlichkeitsraum, 33
- Verflechtungsoperator, 193
- Verteilung
 - einer Zufallsvariable, 31
 - geometrische, 31
- Verteilungsfunktion
 - eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, 21
 - von Zufallsvariable, 31
- Vervollständigung
 - von Maßraum, 25
 - von metrischem Raum, 87
 - von metrischem Raum, eine, 86
 - von normiertem Vektorraum, 88
 - von pseudometrischem Raum, 88
- verwandt
 - Maße, 31
 - verallgemeinerte Funktionen, 209
- vollständig
 - Maßraum, 23
- Wahrscheinlichkeitsraum, 6
- ☒
 - äußeres Produkt
 - von verallgemeinerten Funktionen, 211
- ☒
 - äußeres Produkt
 - von Funktionen, 133, 211, 216
 - Produkt- σ -Algebra, 27
- Produktmaß, 47
- Young'sche Ungleichung, 78
- Zählmaß, 7
- zentraler Grenzwertsatz, 143
- Zerleger, in der Maßtheorie, 17
- zufälliges Element, 26
- Zufallsvariable, 26
- zyklisch
 - Vektor in unitärer Darstellung, 155