

ELEMENTARGEOMETRIE

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Inzidenzgeometrie	3
1.1	Axiomatik der euklidischen Ebene	3
1.2	Affine Inzidenzebenen	16
1.3	Parallelprojektion und Zentralprojektion	35
1.4	Projektive Räume	39
1.5	Projektivitäten und Photographien	51
1.6	Die Sätze von Desargues und Pappos	54
1.7	Punkt-Geraden-Dualität	56
2	Möbiusgeometrie und hyperbolische Ebene	59
2.1	Kreisspiegelungen	59
2.2	Möbiustransformationen	64
2.3	Möbiusgeometrie und komplexe Zahlen	68
2.4	Die hyperbolische Ebene	71
2.5	Möbiusgeometrie in beliebigen Dimensionen	75
3	Danksagung	80
4	Die Vorlesung Elementargeometrie im SS 18	81
	Literaturverzeichnis	83
	Indexvorwort	84
	Index	85

1 Inzidenzgeometrie

1.1 Axiomatik der euklidischen Ebene

Definition 1.1.1. Eine **Inzidenzgeometrie** ist ein Paar (X, G) bestehend aus einer Menge X mit einem System von Teilmengen $G \subset \mathcal{P}(X)$ derart, daß jedes $g \in G$ mindestens zwei Elemente hat und daß es für je zwei Elemente $x, y \in X$ mit $x \neq y$ genau ein $g \in G$ gibt mit $x, y \in g$.

1.1.2. Wir nennen die Elemente von X die **Punkte** unserer Inzidenzgeometrie und die Elemente von G ihre **Geraden**. Wir notieren \overline{xy} die eindeutig bestimmte Gerade durch zwei verschiedene Punkte x und y . In der damit frisch eingeführten Terminologie ausgedrückt fordern wir in unserer Definition einer Inzidenzgeometrie also, daß auf jeder Gerade mindestens zwei Punkte liegen und daß durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht.

1.1.3 (**Ursprung der Terminologie**). Bei der Diskussion der „Punkt-Geraden-Dualität projektiver Inzidenzebenen“ in 1.7, die Punkte zu Geraden macht und Geraden zu Punkten, ist es geschickt und üblich, statt ein Punkt „liegt auf einer Geraden“ zu sagen, der Punkt „indiziert mit der Geraden“. Daher rührt die Bezeichnung als „Inzidenzgeometrie“.

Beispiel 1.1.4. Gegeben ein Körper oder auch ein Schiefkörper L wird $X := L^n$ eine Inzidenzgeometrie, wenn wir als Geraden alle Teilmengen der Gestalt $g = p + Lv$ auszeichnen für $p, v \in L^n$ mit $v \neq 0$.

Beispiel 1.1.5. Diejenigen unter Ihnen, die die Terminologie affiner Räume bereits kennen, sehen unmittelbar: Jeder affine Raum X über einem Körper L wird eine Inzidenzgeometrie, wenn wir als Geraden alle affinen Geraden auszeichnen. Das ist im wesentlichen auch nur das vorangegangene Beispiel, aber in koordinatenfreier Terminologie.

1.1.6. Eine Menge von Punkten einer Inzidenzgeometrie, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, heißt **kollinear**. Eine Menge von Geraden einer Inzidenzgeometrie, die einen Punkt gemeinsam haben, heißt **konfluent**. Eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten heißt ein **Dreieck**.

Definition 1.1.7. Eine **Zwischenrelation** auf einer Inzidenzgeometrie (X, G) ist eine Teilmenge $Z \subset X^3$, die aus kollinearen Tripeln besteht und die die beiden im folgenden erklärten Eigenschaften „verträgliche Anordnungen“ und „Axiom von Pasch“ hat.

Verträgliche Anordnungen: Auf jeder Gerade $g \in G$ gibt es eine Anordnung \leq derart, daß für $x, y, z \in g$ gilt $(x, y, z) \in Z$ genau dann, wenn $x \leq y \leq z$ oder $x \geq y \geq z$.

So eine Anordnung auf einer Gerade heißt **mit der Zwischenrelation verträglich**. Wir bilden weiter für $p, q \in X$ die Menge $[p, q] := \{x \in X \mid (p, x, q) \in Z\}$ und nennen sie die **Strecke mit Endpunkten** p, q . Es gibt in unserer Terminologie also auch Strecken, die nur aus einem einzigen Punkt bestehen. In dieser Begrifflichkeit fordern wir dann weiter:

Axiom von Pasch: Gegeben Punkte $p, q, r \in X$ trifft jede Gerade $g \in G$ von den drei Strecken $[p, q]$, $[q, r]$ und $[r, p]$ entweder keine oder mindestens zwei.

1.1.8. Manche Quellen nennen eine Inzidenzgeometrie mit ausgezeichnete Zwischenrelation eine „angeordnete Inzidenzgeometrie“.

Beispiel 1.1.9 (Zwischenrelation auf affiner Ebene zu angeordnetem Körper). Es ist leicht zu sehen, daß wir für jeden angeordneten Körper L eine Zwischenrelation auf L^2 erhalten durch die Vorschrift, daß $(x, y, z) \in Z$ gleichbedeutend ist zu $y = \lambda x + \mu z$ mit $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ und $\lambda + \mu = 1$. Weiter erhalten wir die Anordnung auf unserem Körper L zurück, indem wir einen affinen Isomorphismus von L mit irgendeiner Gerade von L^2 wählen und diejenige mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung auf besagter Gerade zurückziehen, für die die zurückgezogene Anordnung die Eigenschaft $0 < 1$ hat.

1.1.10. Gegeben eine Inzidenzgeometrie (X, G) mit Zwischenrelation Z heiße eine Teilmenge $A \subset X$ eine **Halbgerade**, wenn es eine Gerade $g \in G$ gibt und einen Punkt $p \in g$ und eine mit unserer Zwischenrelation verträgliche Anordnung \leq auf g mit $A = \{x \in g \mid x \leq p\}$.

Definition 1.1.11. Gegeben eine Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation Z verstehen wir unter einer **Kongruenzgruppe von** (X, Z) eine Gruppe K von Automorphismen von (X, Z) derart, daß je zwei Halbgeraden von X durch genau zwei Automorphismen aus K ineinander überführt werden. In Formeln fordern wir also, daß es für je zwei Halbgeraden $A, B \subset X$ genau zwei Elemente $h, k \in K$ gibt mit

$$h(A) = B = k(A)$$

Die Automorphismen aus K nennen wir in diesem Zusammenhang **Kongruenzen** und das Tripel (X, Z, K) eine **Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen**.

1.1.12. Wir sagen, eine Zwischenrelation auf einer Inzidenzgeometrie habe die **Supremumseigenschaft**, wenn für jede Anordnung einer Gerade, die mit der Zwischenrelation verträglich ist, jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Definition 1.1.13. Eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen, in der es eine Gerade gibt und in der die Supremumseigenschaft erfüllt ist, nennen wir eine **fasteuklidische Geometrie**.

1.1.14. Wir sagen, eine fasteuklidische Geometrie erfülle das **Parallelenaxiom**, wenn es zu jeder Gerade g und jedem Punkt $p \notin g$ höchstens eine Gerade h durch p gibt mit $h \cap g = \emptyset$.

1.1.15 (**Diskussion der Terminologie**). In einer allgemeinen Inzidenzgeometrie nenne ich Geraden, die sich nicht schneiden, **disjunkt**. In speziellen Situationen wie etwa unserer Inzidenzgeometrie L^2 und erst recht \mathbb{R}^2 sind zwei Geraden genau dann disjunkt, wenn sie parallel sind im Sinne von [LA1] 3.2.11. Daher rührt oben die Bezeichnung als Parallelenaxiom. In Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation erlaube ich mir dieselbe Terminologie und nenne zwei Geraden **parallel**, wenn sie disjunkt sind.

Beispiel 1.1.16. Der \mathbb{R}^2 ist eine fasteuklidische Geometrie, wenn wir als Kongruenzen alle Abbildungen der Gestalt $v \mapsto Av+b$ nehmen mit $A \in O(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Dieses Beispiel ist unser Standardmodell für eine fasteuklidische Geometrie mit Parallelenaxiom.

Satz 1.1.17 (Charakterisierung der euklidischen Ebene). *Je zwei fasteuklidische Geometrien mit Parallelenaxiom sind zueinander isomorph und sind insbesondere isomorph zu unserem Standardmodell \mathbb{R}^2 .*

1.1.18. Der Beweis füllt diesen Abschnitt und wird in 1.1.46 zum Abschluß gebracht. Genauer zeigen wir, daß unsere Inzidenzgeometrie der \mathbb{R}^2 sein muß und stützen uns für den Rest des Beweises auf Sätze, die wir bereits in der linearen Algebra bewiesen hatten. Die hier gegebene Axiomatik für die euklidische Ebene ist eine Variante der Hilbert-Axiomatik. Sie ist recht ähnlich zu einer Variante der Hilbert-Axiomatik aus einer unveröffentlichten Arbeit von Maximilian Gerhards und zu den Anmerkungen in [Fil93], Abschnitt 2.7.2, Bewegungssaxiome B1 bis B4.

Beispiel 1.1.19. Gegeben ein echter Teilkörper $L \subsetneq \mathbb{R}$, in dem jedes positive Element eine Wurzel besitzt, erfüllt die Inzidenzgeometrie L^2 aus 1.1.9 mit der offensichtlichen Zwischenrelation und als Kongruenzen allen affinen Automorphismen, deren Richtungsanteil das Standardskalarprodukt erhält, alle unsere Axiome mit Ausnahme der Supremumseigenschaft.

Lemma 1.1.20 (Geraden, keine Ecke eines Dreiecks treffen). *Gegeben ein Dreieck in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation trifft jede Gerade, die durch keine Ecke unseres Dreiecks geht, von unserem Dreieck entweder genau zwei Kanten oder gar keine Kante.*

Beweis. Sei $\{x, y, z\}$ unser Dreieck. Unsere Gerade g treffe $[x, y]$ in p und $[x, z]$ in q . Die Gerade \overline{zp} trifft $[x, y]$ in p und trifft $[x, z]$ nicht, folglich trifft sie $[y, z]$, und dieser Schnittpunkt kann offensichtlich nicht q sein. Ebenso trifft die Gerade

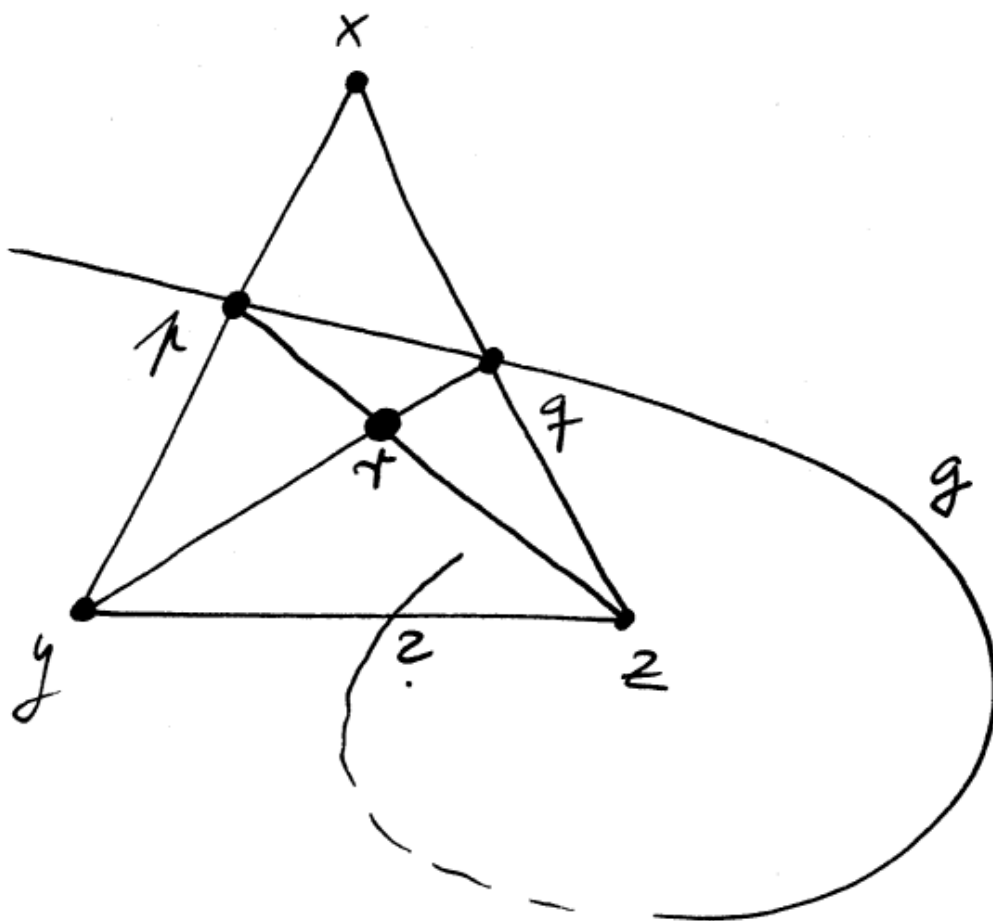


Illustration zu Lemma 1.1.20

\overline{yq} das Segment $[z, p]$, und dieser Schnittpunkt kann offensichtlich nicht p sein. Damit treffen sich $[z, p]$ und $[y, q]$, sagen wir in r mit $r \neq p$ und $r \neq q$. Träfe g die dritte Kante $[y, z]$ unseres ursprünglichen Dreiecks, so träfe g auch $[r, y]$ oder $[r, z]$. Das steht aber im Widerspruch zu $q \notin [r, y]$ und $p \notin [r, z]$. \square

1.1.21 (Halbebenen in Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation). In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation erhalten wir auf dem Komplement jeder Gerade g eine Äquivalenzrelation durch die Vorschrift $(x \sim y) \Leftrightarrow [x, y] \subset X \setminus g$. Deren Äquivalenzklassen nennen wir die **Halbebenenalkoven** g . Nach Lemma 1.1.20 über Geraden, die keine Ecke eines Dreiecks treffen, gibt es zu jeder Gerade höchstens zwei Halbebenenalkoven. Die Vereinigung eines Halbebenenalkoven zu einer Gerade g mit der Gerade selbst nennen wir eine **Halbebene** zu g .

1.1.22 (Konvexität in Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation). In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation nennen wir eine Teilmenge $T \subset X$ **konvex**, wenn gilt $x, y \in T \Rightarrow [x, y] \subset T$. Offensichtlich ist jeder Schnitt von konvexen Teilmengen konvex. Gegeben eine Gerade $g \subset X$ sind die Halbebenenalkoven zu g genau die maximalen konvexen Teilmengen von $X \setminus g$.

Lemma 1.1.23 (Unendlichkeit von Halbgeraden). *Gegeben eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen hat jede Halbgerade unendlich viele Punkte und jede Kongruenz, die eine Halbgerade bijektiv auf sich selber abbildet, hält besagte Halbgerade sogar punktweise fest.*

1.1.24. Insbesondere gibt es zu jeder Halbgerade A genau eine nichttriviale Kongruenz s_A , die sie festhält und damit auch punktweise festhält. Wir nennen sie die **Spiegelung von A** . Damit gibt es auch zu jeder Gerade g genau eine nichttriviale Kongruenz s_g , die sie punktweise festhält, nämlich $s_A = s_g$ für jede Halbgerade $A \subset g$. Wir nennen sie die **Spiegelung an g** . Diejenigen Kongruenzen k , für die es eine Gerade g gibt mit $k = s_g$, heißen **Spiegelungen**.

1.1.25 (Existenz eines Dreiecks). Da Spiegelungen nach Annahme nie die Identität sind, impliziert in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen die Existenz einer Gerade bereits die Existenz eines Tripels nicht kollinearere Punkte alias eines Dreiecks. Ebenso sehen wir, daß es zu jeder Gerade genau zwei Halbebenen geben muß.

Beweis. Nach unserer Definition einer Inzidenzgeometrie hat jede Gerade mindestens zwei Punkte. Gibt es eine Gerade, so gibt es folglich auch eine Halbgerade mit mindestens zwei Punkten. Also hat jede Halbgerade mindestens zwei Punkte. Es folgt, daß eine und damit jede Halbgerade eine weitere Halbgerade als echte Teilmenge enthält. Daraus folgt weiter, daß jede Halbgerade unendlich viele Punkte haben muß und daß davon nur einer nicht zwischen zwei anderen liegt. Seien nun g eine Gerade und \leq eine mit der Zwischenrelation verträgliche

Anordnung auf g . Seien weiter $x \in g$ ein Punkt und $A := \{z \in g \mid z \geq x\}$ eine der beiden zugehörigen Halbgeraden. Sei schließlich $k \in K \setminus \text{id}$ die nichttriviale Kongruenz mit $k(A) = A$. Natürlich gilt $k(x) = x$ und $k^2 = \text{id}$ und k ist streng monoton wachsend auf g . Gäbe es einen Punkt $z \in A$ mit $k(z) \neq z$, so könnten wir $k(z) > z$ annehmen und es folgte $k(k(z)) > k(z) > z$ im Widerspruch zu $k^2 = \text{id}$. Folglich gilt $k(z) = z \forall z \in A$. \square

1.1.26. Gegeben eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen gibt es insbesondere auf jeder Halbgerade nur genau einen Punkt, der nicht zwischen zwei anderen Punkten unserer Halbgerade liegt. Er heiße der **Endpunkt** unserer Halbgerade.

Lemma 1.1.27 (Unendlichkeit von Geradensegmenten). *Gegeben eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen liegt auf der Strecke $[p, q]$ zwischen je zwei verschiedenen Punkten $p \neq q$ stets ein weiterer Punkt, der von beiden verschieden ist.*

Beweis. Aus der Existenz eines Dreiecks 1.1.25 folgt, daß es eine Halbgerade A mit Endpunkt p gibt, die nicht kollinear ist mit der Halbgerade B mit Endpunkt p , auf der q liegt. Auf A finden wir von p verschiedene und untereinander verschiedene Punkte $x \neq y$ mit (x, y, p) in unserer Zwischenrelation. Auf der Gerade \overline{xq} finden wir einen Punkt r , der nicht zur Kante $[x, q]$ des Dreiecks $\{p, q, x\}$ gehört. Die Gerade \overline{ry} muß dann $[p, q]$ treffen, kann aber weder p noch q enthalten. \square

Lemma 1.1.28 (Spiegelungen vertauschen Halbebenen). *In einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen werden von der Spiegelung s_g an einer Gerade g die beiden nach 1.1.25 zugehörigen Halbebenen vertauscht.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Wir finden sicher $x \in X \setminus g$ mit $y := s_g(x) \neq x$. Werden die beiden Halbebenen nicht vertauscht, so kann die Gerade $h := \overline{xy}$ unsere Gerade g nicht treffen, da mit einem eventuellen Schnittpunkt z nur genau eine der Zwischenrelationen (z, x, y) und (z, y, x) gelten könnte im Widerspruch dazu, daß s_g unsere Zwischenrelation erhält. Das Komplement unserer beiden Geraden zerfällt also in die disjunkte Vereinigung

$$X \setminus (g \cup h) = H_g \sqcup S \sqcup H_h$$

eines Halbebenenalkoven zu g , des Streifens zwischen unseren beiden Geraden alias dem Schnitt des anderen Halbebenenalkoven zu g mit einem Halbebenenalkoven zu h sowie dem anderen Halbebenenalkoven zu h . Gegeben $p \in g$ können wir sicher $q \in g \setminus p$ so wählen, daß x und q auf verschiedenen Seiten von \overline{py} liegen. Dann trifft $[q, x]$ die Gerade \overline{py} notwendig in einem Punkt z des Streifens S , da

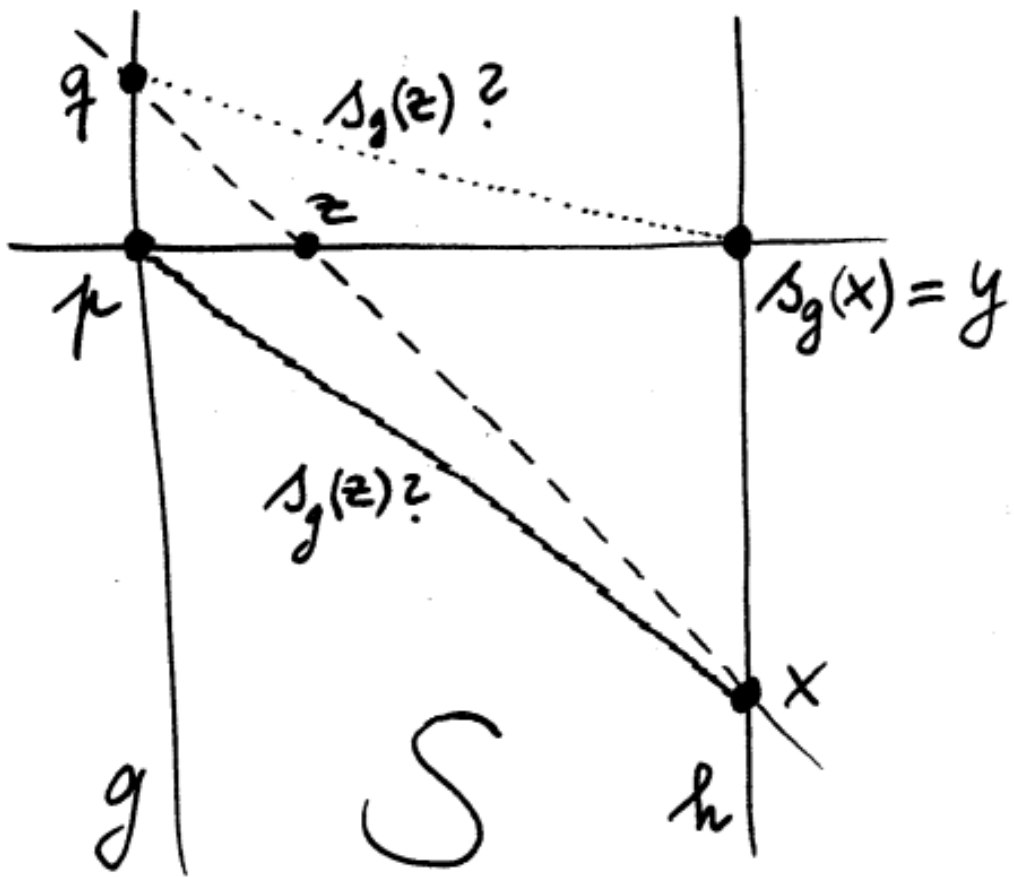


Illustration zu Lemma 1.1.28

dieser Schnittpunkt ja weder q noch x sein kann. Es folgt $z \in [p, y]$. Nun ist $s_g(z)$ notwendig im Schnitt von $[p, x]$ mit $[q, y]$. Dieser Schnitt ist aber leer, da $[q, y] \setminus y$ und $[p, x] \setminus p$ in verschiedenen Halbebenenalkoven zu \overline{py} liegen. Widerspruch! \square

1.1.29. In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen sagen wir, die **Gerade h stehe senkrecht auf der Geraden g** und schreiben in Formeln $h \perp g$, wenn gilt $h \neq g$ und $s_g(h) = h$. Weil Spiegelungen nach 1.1.28 Halbebenen vertauschen, müssen sich unsere Geraden dann schneiden.

1.1.30. In einer Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen seien zwei verschiedene sich schneidende Geraden $g \neq h$, $g \cap h \neq \emptyset$ gegeben. Wir betrachten die größte Partition von X , die die beiden Partitionen in die jeweilige Gerade und ihre beiden Halbebenenalkoven verfeinert. Sie hat neun Stücke: Den Schnittpunkt, die vier davon ausgehenden Halbgeraden längs g und h vermindert um ihren Endpunkt, die wir **Halbgeradenfacetten** nennen, sowie vier weitere Stücke, die wir **Winkelalkoven** nennen. Daß diese Stücke auch in der Tat alle nicht leer sind, wie wir es von einer Partition stets fordern, folgt aus der Unendlichkeit von Halbgeraden 1.1.23 und Geradensegmenten 1.1.27. Alle diese Stücke sind konvex. Wir nennen zwei Stücke **benachbart**, wenn ihre Vereinigung auch konvex ist. Der kombinatorische Graph im Sinne von [LA2] 5.4.21 mit den Stücken unserer Partition als Ecken und jeweils einer Kante zwischen zwei benachbarten Stücken hat die Gestalt eines „Rades mit 8 Speichen“, die das ein-elementige Stück abwechselnd verbinden mit einer Halbgeradenfacette und einem Winkelalkoven.

Lemma 1.1.31 (Eigenschaften des Senkrechtstehens). *Gegeben eine Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen gilt:*

1. *Zu jeder Gerade $g \subset X$ und jedem Punkt $x \in X$ gibt es genau eine Gerade h durch x mit $h \perp g$, das **Lot durch x auf g** ;*
2. *Gegeben Geraden $g \neq h$ in X gilt $h \perp g$ genau dann, wenn die zugehörigen Spiegelungen kommutieren, in Formeln $s_h s_g = s_g s_h$;*
3. *Gegeben Geraden g, h in X gilt $(h \perp g) \Leftrightarrow (g \perp h)$;*
4. *Stehen Geraden h_1 und h_2 senkrecht auf einer Geraden g in verschiedenen Punkten $x_1 \neq x_2$ von g , so gilt $h_1 \cap h_2 = \emptyset$.*

Beweis. Für $x \notin g$ ist offensichtlich die Gerade durch x und $s_g(x)$ die einzige zu g senkrechte Gerade durch x . Mit Kongruenzen folgt, daß es auch durch jeden Punkt $x \in g$ mindestens eine zu g senkrechte Gerade h gibt. Jede weitere Gerade durch x muß durch zwei im kombinatorischen Graphen aus 1.1.30 gegenüberliegende Winkelalkoven zu g, h gehen und kann folglich nicht unter s_g stabil sein.

Das zeigt die erste Aussage. Es folgt weiter $s_g s_h s_g = s_h$, da beide Kongruenzen die Halbebenen von h vertauschen und die Halbgeraden auf h mit Endpunkt x stabilisieren. Umgekehrt folgt aus $s_g s_h s_g = s_h$ aber auch, daß s_g die Menge der Fixpunkte von s_h stabilisiert, also $s_g(h) = h$, und somit die zweite Aussage. Die dritte Aussage folgt unmittelbar aus der zweiten Aussage. Die letzte Aussage folgt, da für jeden Schnittpunkt auch sein Bild unter der Spiegelung s_g an g ein Schnittpunkt sein müßte. \square

1.1.32 (Existenz von Parallelen und Parallelogramme). Insbesondere gibt es in jeder Inzidenzgeometrie X mit Zwischenrelation und Kongruenzen zu jeder Gerade g durch jeden Punkt x außerhalb dieser Gerade stets mindestens eine Parallele: Wir fällen mit 1.1.31 das Lot h von unserem Punkt x auf unsere Gerade g und errichten dann wieder mit 1.1.31 auf diesem Lot die Senkrechte g' durch besagten Punkt x . Die so erhaltene Gerade g' ist nach 1.1.31 parallel zu unserer ursprünglichen Gerade. Das Parallelenaxiom fordert, daß es in dieser Situation auch nicht mehr als eine Parallele gibt. Nehmen wir zusätzlich auch noch das Parallelenaxiom an, so ist unsere eben konstruierte Parallele sogar die einzige Parallele zu g durch x . Das bedeutet, daß wenn wir zwei parallele Geraden gegeben haben und von einem beliebigen Punkt der einen das Lot auf die andere fällen, daß dieses Lot dann auf unseren beiden parallelen Geraden senkrecht stehen muß.

1.1.33 (Verschiebungen längs Geraden). Sei (X, K) eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Gegeben eine Gerade g untersuchen wir die Gruppe $K|_g \subset K$ aller Kongruenzen, die sowohl g als auch die beiden Halbebenen zu g nach 1.1.25 stabilisieren. Wir nennen sie **halbebenenenerhaltend**. Diejenigen halbebenenenerhaltenden Kongruenzen v , die beide mit der Zwischenrelation verträglichen Anordnungen auf g erhalten, in Formeln $x \leq y \Rightarrow v(x) \leq v(y)$, bilden eine Untergruppe

$$\vec{g} \subset K|_g$$

vom Index Zwei. Offensichtlich operiert \vec{g} frei und transitiv auf g . Wir nennen die Elemente dieser Gruppe **Verschiebungen längs g** .

Lemma 1.1.34 (Richtung einer Verschiebung). Seien X eine fasteuklidische Geometrie und $g \subset X$ eine Gerade und \leq eine mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung auf g . Gegeben eine nichttriviale Verschiebung $v \neq \text{id}$ längs g gilt dann entweder $v(x) > x \forall x \in g$ oder $v(x) < x \forall x \in g$.

Beweis. In der Tat seien sonst $p, q \in g$ gegeben mit $v(p) > p$ und $v(q) < q$. Indem wir andernfalls v durch v^{-1} ersetzen, dürfen wir $p < q$ annehmen und finden also $p < v(p) < v(q) < q$. Induktiv sehen wir, daß die $v^n(p)$ streng monoton wachsen und die $v^n(q)$ streng monoton fallen, wobei aber stets gilt $v^n(p) < v^n(q)$. Dann besitzen die $v^n(p)$ aber nach der Supremumseigenschaft eine kleinste obere

Schranke $z := \sup\{v^n(p) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und z ist ein Fixpunkt von v im Widerspruch dazu, daß wir v nichttrivial angenommen hatten. \square

Lemma 1.1.35 (Halbebenenerhaltende Nichtverschiebungen). *Gegeben eine fasteuklidische Geometrie X und eine Gerade $g \subset X$ sind alle Nichtverschiebungen aus $K|_g$ ihre eigenen Inversen.*

Beweis. Gegeben $k \in K|_g \setminus \vec{g}$ gilt es, $k^2 = \text{id}$ zu zeigen. Klar ist, daß k jede verträgliche Anordnung auf g umkehrt und daß k^2 jede verträgliche Anordnung auf g erhält, in Formeln $k^2 \in \vec{g}$. Es reicht damit zu zeigen, daß k^2 als die Identität auf g operiert. Sonst gäbe es aber $x \in g$ mit $k^2(x) \neq x$. Sei \leq diejenige mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung auf g mit $x < k(x)$. Dann folgt $k(x) > k^2(x)$ und indem wir notfalls zu k^{-1} übergehen, dürfen wir zusätzlich $k^2(x) < x$ annehmen. Dann folgt $k^3(x) > k(x)$ und insgesamt

$$k^2(x) < x < k(x) < k^3(x)$$

Das Anwenden der Verschiebung k^2 verkleinert also x und vergrößert $k(x)$ und dieser Widerspruch zu 1.1.34 beendet den Beweis. \square

Lemma 1.1.36 (Vertauschen von Punkten durch Spiegelungen). *Sei X eine fasteuklidische Geometrie. Gegeben zwei verschiedene Punkte $x \neq y$ gibt es stets genau eine Spiegelung $s \in K$, die x und y vertauscht, und diese stabilisiert beide Halbebenen zu \overline{xy} .*

Beweis. Wir setzen $g := \overline{xy}$. Es gibt in $K|_g$ genau eine Nichtverschiebung s mit $s : x \mapsto y$, nämlich eine der beiden Kongruenzen, die die Halbgerade durch y mit Endpunkt x auf die Halbgerade durch x mit Endpunkt y abbildet. Es reicht zu zeigen, daß s eine Spiegelung ist. Nach 1.1.35 gilt schon mal $s^2 = \text{id}$ und insbesondere $s : y \mapsto x$. Sei z ein Punkt außerhalb von g . Bezeichne $T := \Delta(x, y, z) \subset X$ die Dreiecksfläche zu unserem Dreieck, einen Schnitt von drei Halbebenen und gleichbedeutend die konvexe Hülle von $\{x, y, z\}$. Aus dieser Teilmenge können wir die Ecken unseres Dreiecks zurückgewinnen als die eindeutig bestimmten Punkte, bei deren Entfernung unsere Teilmenge jeweils konvex bleibt. Wegen $s^2 = \text{id}$ gilt entweder $s(T) = T$ und damit $s(z) = z$ oder $s(T) \not\subset T$ und damit $s(z) \notin T$. Dann muß aber $s(z)$ entweder auf der falschen Seite von \overline{xz} liegen und $ys(z)$ trifft \overline{xz} , oder $s(z)$ muß auf der falschen Seite von \overline{yz} liegen und $xs(z)$ trifft \overline{yz} . In beiden Fällen ist so ein Schnittpunkt w ein Fixpunkt unserer Kongruenz s außerhalb von g . Nach 1.1.31 gibt es eine Gerade h durch w mit $h \perp g$ und dann gilt offensichtlich $s(h) = h$. Weiter hält s eine Halbgerade A von h mit dem Schnittpunkt von g und h als Endpunkt fest, in Formeln $s(A) = A$, und es folgt $s = s_h$. \square

1.1.37. Gegeben eine Gerade g in einer fasteuklidischen Geometrie (X, K) und dazu eine ausgezeichnete Halbebene H liefert das Bilden des Endpunkts eine Bijektion zwischen g und der Menge g_H^\perp aller Halbgeraden mit Endpunkt in g , die auf g senkrecht stehen und in H enthalten sind. Zu je zwei Halbgeraden $A, B \in g_H^\perp$ sind die beiden Kongruenzen $k \in K$ mit $k(A) = B$ nach 1.1.36 mithin (1) eine Verschiebung aus \vec{g} und (2) eine Spiegelung aus $K|_g$, die ihrerseits die Gestalt $k = s_C$ hat für genau ein $C \in g_H^\perp$.

Lemma 1.1.38 (Gruppe halbebenenenerhaltender Kongruenzen). *Seien eine fasteuklidische Geometrie (X, K) und eine Gerade $g \subset X$ gegeben. So gilt:*

1. *Alle Nichtverschiebungen aus $K|_g$ sind Spiegelungen und diese Spiegelungen erzeugen $K|_g$;*
2. *Jede Verschiebung aus \vec{g} ist das Quadrat einer weiteren Verschiebung aus \vec{g} und konjugieren wir eine Verschiebung mit einer Spiegelung aus $K|_g$, so erhalten wir die inverse Verschiebung;*
3. *Die Gruppe der Verschiebungen längs einer Gerade ist kommutativ.*

Beweis. 1. Nach 1.1.37 werden je zwei Halbgeraden $A, B \in g_H^\perp$ von einer Spiegelung $s \in K|_g$ vertauscht. Die zweite Kongruenz, die A in B überführt, ist $s s_A = s_B s$ und ist offensichtlich eine Verschiebung. Nach 1.1.37 haben wir damit alle Elemente von $K|_g$ untersucht.

2. Sei $v \in \vec{g}$ eine Verschiebung und sei $A \in g_H^\perp$ beliebig. Sei s die Spiegelung, die A und $v(A)$ vertauscht, und sei $B \in g_H^\perp$ bestimmt durch $s = s_B$. Für die Verschiebung $\varphi \in \vec{g}$ mit $\varphi(A) = B$ behaupten wir dann $\varphi^2 = v$. Um das zu sehen betrachten wir die Spiegelung σ , die A und B vertauscht. Natürlich ist dann $\tau := s_B \sigma s_B$ die Spiegelung, die $v(A)$ und B vertauscht. Aus $\varphi = s_B \sigma$ folgt so $\varphi = \tau s_B$ und $\varphi^2(A) = v(A)$. Das zeigt $\varphi^2 = v$. Aus $\varphi = \sigma s_A$ folgt weiter $s_A \varphi s_A = s_A \sigma = \sigma s_B = \varphi^{-1}$ und damit auch $s_A v s_A = v^{-1}$.

3. Die Konjugation mit einer beliebigen Spiegelung aus $K|_g$ ist ein Automorphismus von \vec{g} und bildet jedes Element auf sein Inverses ab. Das zeigt, daß \vec{g} kommutativ sein muß. \square

1.1.39. Wir nennen zwei Halbebenen in einer fasteuklidischen Geometrie **zwischenäquivalent**, wenn die eine in der anderen enthalten ist oder umgekehrt. Der Leser mag zur Übung zeigen, daß das in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

Proposition 1.1.40 (Verschiebungsgruppe bei Parallelenaxiom). *Sei (X, K) eine fasteuklidische Geometrie mit Parallelenaxiom. So gilt:*

1. *Die Verschiebungen längs paralleler Geraden sind dieselben, in Formeln $g \parallel h \Rightarrow \vec{g} = \vec{h}$;*

2. Alle Verschiebungen längs irgendwelcher Geraden bilden eine kommutative Untergruppe $\vec{X} \subset K$, die frei und transitiv auf der Menge X der Punkte unserer Geometrie operiert.

1.1.41. Wir notieren die Gruppe \vec{X} der Verschiebungen einer fasteuklidischen Geometrie X mit Parallelenaxiom additiv. Wir setzen weiter $v + x := v(x)$ für $v \in \vec{X}$ und $x \in X$.

Beweis. Nach 1.4.9 besteht \vec{g} genau aus allen Kongruenzen, die wir als Verknüpfung von zwei Spiegelungen an zu g senkrechten Geraden schreiben können. Unter der Annahme des Parallelenaxioms sind nach 1.1.32 die zu g senkrechten Geraden dieselben wie die zu h senkrechten Geraden. Das zeigt Teil 1. In einer fasteuklidischen Geometrie mit Parallelenaxiom kann man die Verschiebungen beschreiben als die Gesamtheit aller Kongruenzen, die jede Halbebene in eine dazu zwischenäquivalente Halbebene überführen. Es dann klar, daß es für jedes Paar von Punkten nur genau eine Verschiebung gibt, die den einen in den anderen überführt. Daraus hinwiederum folgt die Kommutativität mit unseren Erkenntnissen 1.1.32 zu Parallelogrammen beziehungsweise der Kommutativität der Gruppe der Verschiebungen längs einer Geraden. \square

Lemma 1.1.42 (Angeordnete Gruppen als Untergruppen der reellen Zahlen). Sei A eine angeordnete Gruppe, in der keine nichttriviale zyklische Untergruppe eine obere Schranke hat und in der jedes Element das Quadrat eines weiteren Elements ist. So gibt es für jedes $a \in A$ oberhalb des neutralen Elements genau einen ordnungserhaltenden Gruppenhomomorphismus $A \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ mit $a \mapsto 1$, und dieser Gruppenhomomorphismus ist injektiv.

1.1.43. Die Bedingung, daß jedes Element das Quadrat eines anderen sein soll, ist nach einem Satz von Hölder hier überflüssig. Allerdings wird der Beweis dann schwieriger.

Beweis. Wir setzen A nicht als abelsch voraus, notieren es aber dennoch additiv, um das Kleingedruckte klein zu halten. Gegeben $x \in A$ und $b \in A_{>0}$ positiv erklären wir $[x : b] \in \mathbb{Z}$ als die größte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \geq nb$. Sicher gilt $[x + y : b] \in [x : b] + [y : b] + \{0, 1\}$ sowie $[x : b] \in 2[x : 2b] + \{0, 1\}$. Für unser ausgezeichnetes Element $a = a_0 \in A_{>0}$ finden wir nach Annahme genau eine Folge (a_n) in A mit $2a_n = a_{n-1}$ für $n \geq 1$. Jetzt erklären wir eine Abbildung $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = [x : a] := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x : a_n]}{2^n}$$

Der Grenzwert existiert, da der Abstand vom n -ten zum vorhergehenden Folgenglied entweder Null oder $1/2^n$ ist. Die Abbildung ist nach dem Vorhergehenden

offensichtlich ein mit den jeweiligen Anordnungen verträglicher Gruppenhomomorphismus und offensichtlich der Einzige, der das Element $a \in A_{>0}$ auf $1 \in \mathbb{R}$ wirft. Wäre ihr Kern nicht trivial, so müßte er ein nichttriviales Element $x > 0$ enthalten, und dann gäbe es ein n mit $2^n x \geq a$ und a fortiori $x \geq a_n$ und $\varphi(x) \geq 1/2^n$ im Widerspruch zu $\varphi(x) = 0$. Also ist φ ein injektiver ordnungserhaltender Gruppenhomomorphismus. \square

1.1.44 (Vektorraumstruktur der Verschiebungsgruppe längs einer Gerade). Gegeben eine Gerade g in einer fasteuklidischen Geometrie induziert jede mit der Zwischenordnung verträgliche Anordnung unserer Gerade eine Anordnung auf der Gruppe \vec{g} der Verschiebungen längs unserer Gerade. Eine zyklische Untergruppe $H \subset \vec{g}$ mit oberer Schranke müßte eine kleinste obere Schranke s haben und für jedes $h \in H$ wäre dann auch $s + h$ eine kleinste obere Schranke, also $s + h = s$ und $h = \text{id}$. Das vorhergehende Lemma 1.1.42 zeigt somit, daß unsere Gruppe \vec{g} als angeordnete Gruppe isomorph ist zu \mathbb{R} und daß es auf \vec{g} genau eine Struktur als \mathbb{R} -Vektorraum gibt, für die alle diese Isomorphismen lineare Abbildungen sind.

Proposition 1.1.45 (Vektorraumstruktur der Verschiebungsgruppe). Gegeben eine fasteuklidische Geometrie X mit Parallelenaxiom besitzt die Gruppe der Verschiebungen \vec{X} genau eine Struktur als reeller Vektorraum derart, daß für jede Gerade g die Einbettung der Untergruppe $\vec{g} \subset \vec{X}$ linear ist in Bezug auf die in 1.1.44 auf \vec{g} erklärte Struktur als reeller Vektorraum. In Bezug auf diese Struktur gilt $\dim_{\mathbb{R}} \vec{X} = 2$.

Beweis. Um die behauptete Vektorraumstruktur auf \vec{X} zu erhalten, müssen wir nur noch für je zwei Verschiebungen $v, w \in \vec{X}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ zeigen

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

Das ist klar für $\lambda \in \mathbb{Z}$. Da jede Verschiebung genau eine Wurzel alias Hälfte hat, folgt es für jeden Bruch $\lambda \in \mathbb{Z}[2^{-1}]$ mit einer Zweierpotenz im Nenner. Um es im allgemeinen zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß v und w nicht zu derselben Untergruppe \vec{g} gehören. Dann erhalten wir für jeden Punkt $p \in X$ eine Bijektion $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} X$ durch die Vorschrift $(\mu, \nu) \mapsto p + \mu v + \nu w$. Unter dieser Bijektion werden Halbebenen zu Parallelen der Koordinatenachsen auf Halbebenen abgebildet und zwischenäquivalente Halbebenen zu Parallelen der Koordinatenachsen auf zwischenäquivalente Halbebenen. Damit werden auch abgeschlossene Quader in \mathbb{R}^2 auf konvexe Teilmengen von X abgebildet. Für $\lambda \in [2^{-n}a, 2^{-n}(a+1)]$ mit $a \in \mathbb{Z}$ liegen dann sowohl $p + \lambda(v + w)$ als auch $p + \lambda v + \lambda w$ im Bild des Quaders $[2^{-n}a, 2^{-n}(a+1)]^2$. Da das für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die behauptete Gleichheit. \square

Satz 1.1.46 (Charakterisierung der euklidischen Ebene). *Je zwei fasteuklidische Geometrien mit Parallelenaxiom sind zueinander isomorph und sind insbesondere isomorph zu unserem Standardmodell \mathbb{R}^2 .*

Beweis. Nach 1.1.45 ist unsere Inzidenzgeometrie eine reelle affine Ebene. Nach Annahme bilden die Elemente unserer Kongruenzgruppe Geraden auf Geraden ab, sind nach [LA1] 3.3.1 also Affinitäten. Folglich kommt unsere Struktur von einer Kongruenzebene im Sinne von [LA2] 1.1.10 her. Wir wissen aber bereits, etwa aus [LA2] 1.2.13, daß je zwei Kongruenzebenen isomorph sind. \square

Vorschau 1.1.47. In 2.4.3 konstruieren wir eine fasteuklidische Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, die sogenannte „hyperbolische Geometrie“. Die Frage nach der Existenz solcher „nichteuklidischer Geometrien“ hat die Mathematik lange umgetrieben.

1.2 Affine Inzidenzebenen

Definition 1.2.1. Eine **affine Inzidenzebene** ist eine Inzidenzgeometrie (X, G) mit den beiden folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

1. (**Parallelenaxiom**) Gegeben $g \in G$ und $x \in X \setminus g$ gibt es genau ein $h \in G$ mit $x \in h$ und $h \cap g = \emptyset$;
2. (**Dreieck**) Es gibt in unserer Inzidenzgeometrie ein Dreieck, also eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten.

1.2.2. Im Kontext fasteuklidischer Ebenen konnten wir das zugehörige Parallelenaxiom schwächer fassen als die Forderung 1.1.14 nach der Existenz von höchstens einer Parallele. Diese schwächere Forderung liefert jedoch im Kontext allgemeiner Inzidenzgeometrien keine interessante Theorie mehr.

1.2.3. Geraden in einer affinen Inzidenzebene, die sich nicht schneiden, nennt man **parallel**. Mit diesen Worten können wir die erste Bedingung dahingehend umformulieren, daß es gegeben eine Gerade und ein Punkt außerhalb besagter Geraden genau eine Parallele durch besagten Punkt zu besagter Gerade gibt. Unsere affinen Inzidenzebenen heißen „affin“, um sie von den „projektiven“ Inzidenzebenen zu unterscheiden, von denen wir in dieser Vorlesung einige Beispiele, aber keine formale Definition sehen werden. Wir beschäftigen uns im folgenden mit der Frage, unter welchen Zusatzannahmen eine affine Inzidenzebene sogar eine affine Ebene im Sinne der linearen Algebra ist.

Beispiel 1.2.4. Gegeben ein Körper oder auch ein Schiefkörper K ist unsere Inzidenzgeometrie $X = K^2$ aus 1.1.4 eine affine Inzidenzebene. Wir nennen diese Struktur die **affine Standardinzidenzebene über dem Schiefkörper K** .

Definition 1.2.5. Unter einem **Isomorphismus von Inzidenzgeometrien** oder gleichbedeutend einer **Kollineation** versteht man eine Bijektion der zugrundeliegenden Punktmengen, die eine Bijektion zwischen den jeweiligen Mengen von Geraden induziert. Zwei Inzidenzgeometrien heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt. Ein Isomorphismus einer Inzidenzgeometrie mit sich selber heißt ein **Automorphismus** unserer Inzidenzgeometrie.

Beispiel 1.2.6. Im Fall des Körpers mit zwei Elementen besteht die zugehörige affine Standardinzidenzebene aus vier Punkten und ihre Geraden sind alle zweielementigen Teilmengen, so daß es insgesamt genau sechs Geraden gibt. Man überlegt sich leicht, daß jede affine Inzidenzebene, in der es eine Gerade mit nur einer einzigen Parallelen gibt, zu dieser vierelementigen Inzidenzebene isomorph sein muß.

Beispiel 1.2.7. Für diejenigen unter Ihnen, die die Terminologie affiner Räume bereits kennen, sei bemerkt, daß für jeden zweidimensionalen affinen Raum X über einem Körper K unsere Inzidenzgeometrie aus 1.1.5 eine affine Inzidenzebene ist und daß jede Wahl eines Koordinatensystems bestehend aus einem ausgezeichneten Punkt und zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren eine Kollineation $K^2 \xrightarrow{\sim} X$ liefert.

1.2.8. Sei (X, G) eine affine Inzidenzebene. Wir überlegen uns, daß die Relation „gleich oder parallel“ eine Äquivalenzrelation auf G ist. In der Tat, haben zwei Parallelen zu einer gegebenen Geraden einen Schnittpunkt, so müssen sie beide die eindeutig bestimmte Parallele durch diesen Schnittpunkt sein. Wir notieren diese Äquivalenzrelation im folgenden

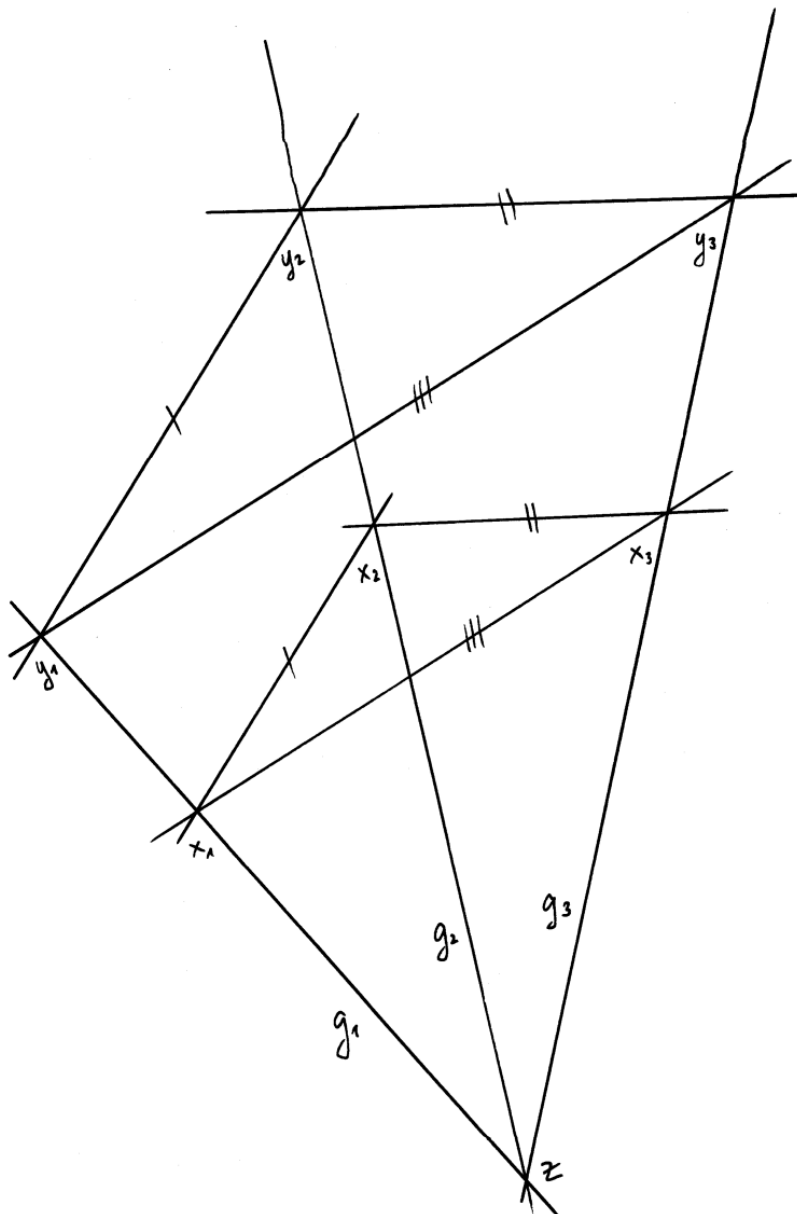
||

Definition 1.2.9. Wir sagen, eine affine Inzidenzebene habe die **Desargues-Eigenschaft**, wenn gegeben drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3 mit einem gemeinsamen Punkt z und für $i \in \{1, 2, 3\}$ Punkte $x_i, y_i \in g_i \setminus z$ stets gilt

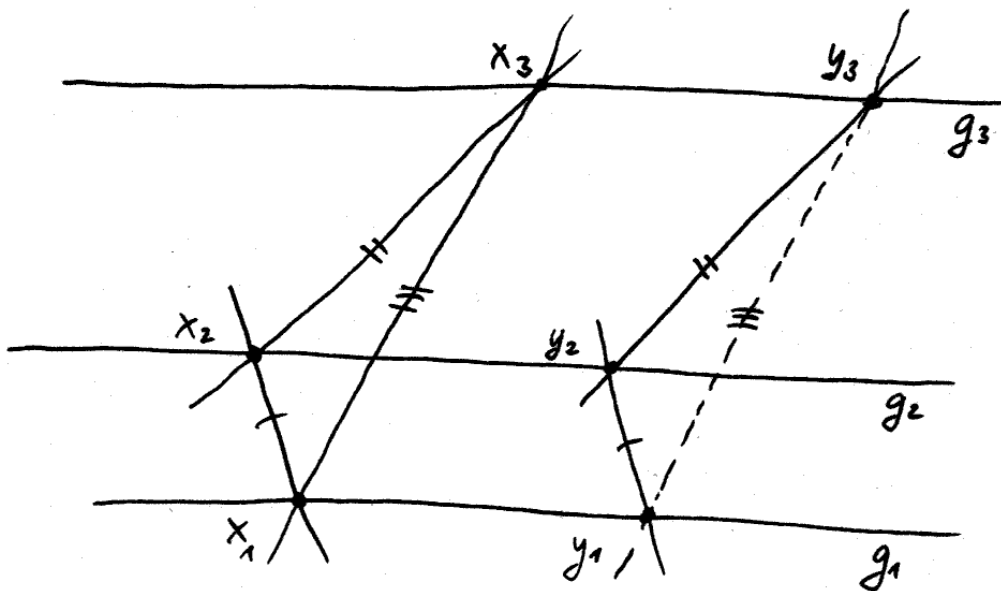
$$(\overline{x_1x_2} \parallel \overline{y_1y_2} \text{ und } \overline{x_2x_3} \parallel \overline{y_2y_3}) \Rightarrow \overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_3}$$

Satz 1.2.10 (Desargueseseigenschaft und Koordinatisierung). *Eine affine Inzidenzebene hat genau dann die Desargueseseigenschaft, wenn sie isomorph ist zur affinen Standardinzidenzebene K^2 über einem Schiefkörper K .*

1.2.11. Dieser Satz ist in meinen Augen eine besonders schöne Illustration der innigen Beziehung zwischen Geometrie und Algebra. Wir schicken dem Beweis ein Lemma voraus.



Die Desarguesseigenschaft besagt, daß in jeder Situation der hier dargestellten Art die Parallelität der beiden eingestrichelten und der beiden zweigestrichelten Geraden die Parallelität der beiden dreigestrichelten Geraden impliziert.



Skizze zur ausgearteten Desarguesseigenschaft 1.2.12

Lemma 1.2.12 (Ausgeartete Desargueseigenschaft). Sei X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft. Gegeben drei paarweise verschiedene parallele Geraden g_1, g_2, g_3 und Punkte $x_i, y_i \in g_i$ gilt dann

$$(\overline{x_1x_2} \parallel \overline{y_1y_2} \text{ und } \overline{x_2x_3} \parallel \overline{y_2y_3}) \Rightarrow \overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_3}$$

Vorschau 1.2.13. Die Aussage des Lemmas kann als ein Analogon der Desargueseigenschaft verstanden werden, bei der der Punkt z ein „unendlich ferner Punkt“ ist. Im Rahmen des Studiums projektiver Ebenen werden wir diese Intuition zu einer präzisen Aussage machen und sie als eine Konsequenz der sehr viel stärkeren „projektiven Desargueseigenschaft“ verstehen lernen.

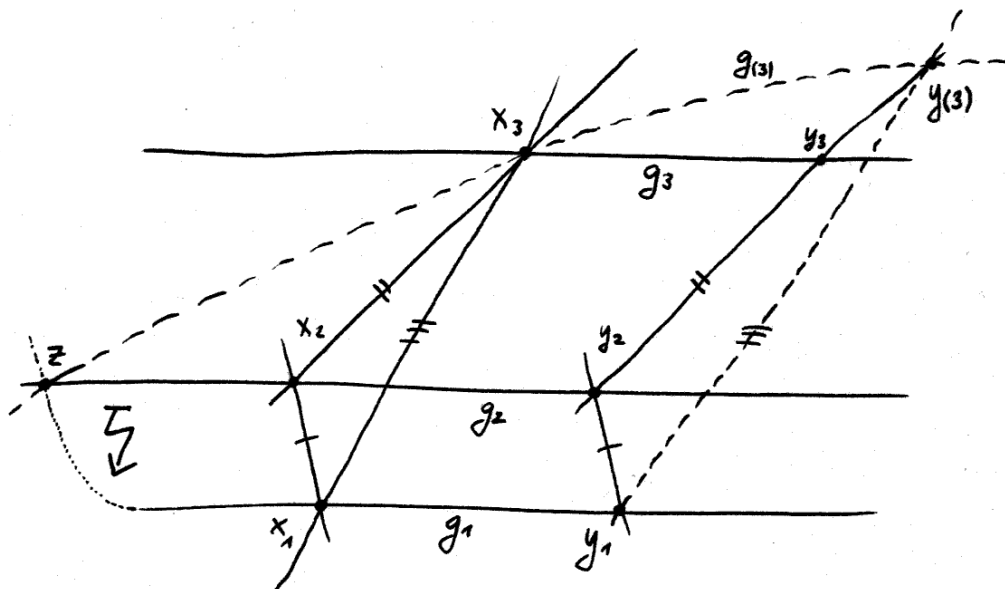
Beweis. Sind die x_i kollinear, so ist das eh klar. Anderfalls können wir $y_{(3)}$ erklären durch $\overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_{(3)}}$ und $y_{(3)} \in \overline{y_2y_3}$. Die Gerade $g_{(3)} := \overline{x_3y_{(3)}}$ schneidet g_2 in einem Punkt z , und dann müßte g_1 auch durch z gehen im Widerspruch zu unseren Annahmen. \square

Beweis des Koordinatisierungssatzes 1.2.10. Um zu sehen, daß die Standardinzidenzebene über einem Schiefkörper stets die Desargueseigenschaft hat, dürfen wir als Schnittpunkt z unserer drei Geraden den Ursprung $(0, 0) \in K^2$ annehmen. Weiter beachten wir $\lambda g \parallel g$ für jede Gerade g und alle $\lambda \in K^\times$. Für das $\lambda \in K$ mit $\lambda x_1 = y_1$ folgt dann aus $\overline{x_1x_2} \parallel \overline{y_1y_2}$ sofort $\lambda x_2 = y_2$ und aus $\overline{x_2x_3} \parallel \overline{y_2y_3}$ weiter $\lambda x_3 = y_3$ und so schließlich $\overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_3}$. Um umgekehrt zu zeigen, daß jede affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft isomorph ist zur Standardinzidenzebene über einem Schiefkörper, gehen wir in mehreren Schritten vor.

1.a. Unter einem **Parallelogramm** in einer affinen Inzidenzebene X verstehen wir ein Quadrupel von Punkten $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in X^4$ derart, daß es Paare von Geraden $g_1 \parallel g_2$ und $h_1 \parallel h_2$ gibt mit $h_i \not\parallel g_j$ und $h_i \cap g_j = x_{ij}$. Hier verwenden wir unsere Notation \parallel für „gleich oder parallel“. Gegeben eine affine Inzidenzebene X betrachten wir auf der Menge X^2 aller Punktpaare aus X die **Parallelogrammrelation** \sim mit $(x, y) \sim (x', y')$, wenn unsere vier Punkte ein Parallelogramm (x, y, x', y') bilden. Die Parallelogrammrelation ist sicher symmetrisch und reflexiv. Bezeichne \approx die davon erzeugte Äquivalenzrelation, die **Parallelogramm-Äquivalenz**. Per definitionem gilt also $(x, y) \approx (x', y')$ genau dann, wenn es eine endliche Folge von Punktpaaren (x_i, y_i) gibt mit

$$(x, y) = (x_0, y_0) \sim \dots \sim (x_n, y_n) = (x', y')$$

1.b. Wir überlegen uns, daß sich unter der Annahme der Desargueseigenschaft je zwei parallelogramm-Äquivalente Punktpaare $(x, y) \approx (x', y')$ auch durch einen



Skizze zum Beweis der ausgearteten Desarguesseigenschaft 1.2.12

„Zweisprung von Parallelogrammen“ verbinden lassen, als da heißt durch eine Folge wie oben der Länge $n \leq 2$. Dazu vereinbaren wir die Notation $g_i := \overline{x_i y_i}$. Gilt $g_i = g_{i+1}$, so folgt $(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ und wir können unsere Folge verkürzen. Sind die Geraden g_i, g_{i+1}, g_{i+2} paarweise verschieden, so folgt aus Lemma 1.2.12 bereits $(x_i, y_i) \sim (x_{i+2}, y_{i+2})$ und wir können unsere Folge auch verkürzen. Haben wir schließlich $g_i = g_{i+2} \neq g_{i+1} = g_{i+3}$, so können wir, da der Fall der vierelementigen Ebene eh unproblematisch ist, mit 1.2.6 annehmen, daß es eine weitere Gerade g gibt mit $g \parallel g_i$ aber $g_i \neq g \neq g_{i+1}$. Es gibt dann nach Lemma 1.2.12 Punkte $x''', y''' \in g$ mit $(x_\nu, y_\nu) \sim (x''', y''')$ für $i \leq \nu \leq i+3$ und wir können unsere Folge auch wieder verkürzen. Damit ist klar, daß wie behauptet je zwei äquivalente Paare durch eine Folge mit höchstens einem Zwischenschritt verbunden werden können.

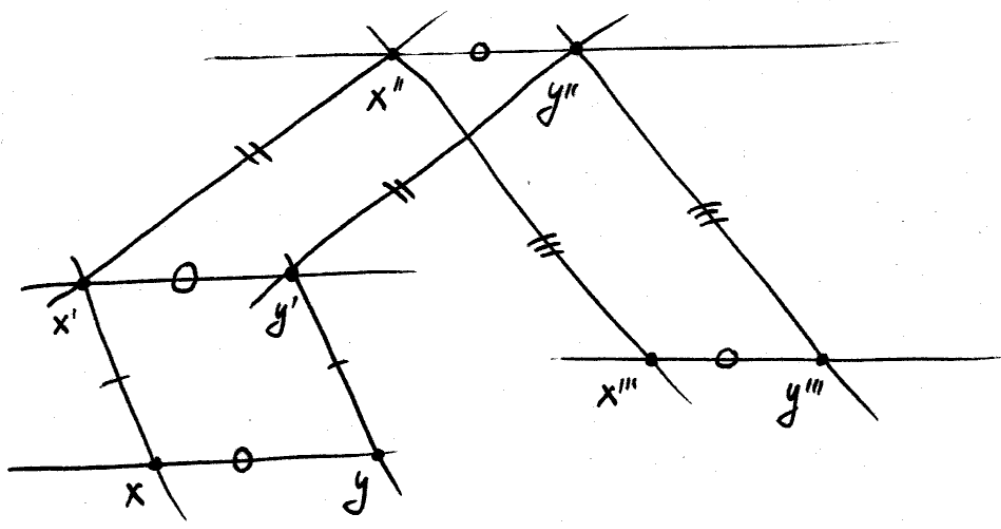
1.c. Es folgt, daß die Äquivalenzklassen unserer Äquivalenzrelation Graphen von Abbildungen $X \rightarrow X$ sind. Die Abbildung zu einem Punktepaar (x, y) notiere ich $\overrightarrow{xy} = \overleftarrow{yx}$ und nenne sie die **Verschiebung** zu unserem Punktepaar. Ich behaupte, daß unsere Verschiebungen eine Untergruppe der Automorphismengruppe unserer Inzidenzebene bilden. Es ist klar, daß $\overleftarrow{yx} \circ \overrightarrow{xy} = \text{id}_X$ die Identität auf X sein muß. Es ist auch klar, daß jede Verschiebung Geraden in Geraden überführt. Folglich sind alle unsere Verschiebungen Automorphismen unserer Inzidenzebene. Die Identität ist die Verschiebung \overleftarrow{xx} und so bleibt nur zu zeigen, daß die Verknüpfung von zwei Verschiebungen stets wieder eine Verschiebung ist. Sind x, y, z kollinear, so folgt $\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx} = \overleftarrow{zx}$ direkt aus den Definitionen. Andernfalls folgt

$$(\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx})(p) = \overleftarrow{zx}(p)$$

für jeden Punkt p auf keiner der drei Geraden $\overline{zy}, \overline{yx}, \overline{zx}$ aus der ausgearteten Desargues-Eigenschaft 1.2.12 und für jeden Punkt $p \in \overline{zy}$ aus den Definitionen und für jeden Punkt auf einer der beiden anderen Geraden aus dieser Erkenntnis zusammen mit $\overleftarrow{yx} \circ \overleftarrow{xy} = \text{id}_X$. Unsere Verschiebungen bilden folglich in der Tat eine Gruppe von Automorphismen unserer Inzidenzebene.

1.d. Wir zeigen, daß unsere Gruppe von Verschiebungen kommutativ ist. Liegen $x, y, z \in X$ nicht auf einer Geraden, so ergänzen wir sie zu einem Parallelogramm (x, y, z, w) und die Definitionen zeigen $\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx} = \overleftarrow{zx} = \overleftarrow{zw} \circ \overleftarrow{wx}$ und $\overleftarrow{zy} = \overleftarrow{wx}$ und $\overleftarrow{zw} = \overleftarrow{yx}$ und die Kommutativität $\overleftarrow{zy} \circ \overleftarrow{yx} = \overleftarrow{yx} \circ \overleftarrow{zy}$ folgt. Liegen alle drei Punkte auf einer Geraden, so finden wir w außerhalb und schreiben $\overleftarrow{yx} = \overleftarrow{yw} \circ \overleftarrow{wx}$ und beide Verschiebungen rechts kommutieren mit \overleftarrow{yz} , also auch ihre Verknüpfung. So sehen wir, daß unsere Gruppe kommutativ sein muß. Wir schreiben ihre Verknüpfung von nun an $+$ und notieren unsere Gruppe \vec{X} .

1.e. Wir bemerken, daß jeder Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ von affinen Inzidenze-



Skizze zur Parallelogrammäquivalenz

benen mit Desargueseigenschaft einen Isomorphismus $\vec{\varphi} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ zwischen den zugehörigen Gruppen von Verschiebungen induziert mit

$$\vec{\varphi} : \overrightarrow{xy} \mapsto \overrightarrow{\varphi(x)\varphi(y)}$$

2. Sei weiter X eine affine Inzidenzebene. Wir halten einen Punkt $o \in X$ willkürlich fest. Unter einem **o -Trapez** in X verstehen wir dann ein Quadrupel von Punkten $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in (X \setminus o)^4$ derart, daß es Geraden h_1, h_2 durch o und Geraden $g_1 \parallel g_2$ gibt mit $h_i \cap g_j = x_{ij}$. Nun betrachten wir auf der Menge $P := \{(x, y) \in (X \setminus o)^2 \mid x, y, o \text{ sind kollinear}\}$ die Relation \sim mit $(x, y) \sim (x', y')$, wenn unsere vier Punkte (x, y, x', y') ein o -Trapez bilden. Diese Relation ist sicher symmetrisch und reflexiv. Bezeichne \approx die davon erzeugte Äquivalenzrelation. Genau wie zuvor zeigen wir, daß unter der Annahme der Desargueseigenschaft ihre Äquivalenzklassen die Graphen von bijektiven Abbildungen $(X \setminus o) \xrightarrow{\sim} (X \setminus o)$ sind, und daß die Fortsetzungen dieser Bijektionen durch die Vorschrift $o \mapsto o$ die einzigen Automorphismen ψ unserer Inzidenzebene sind mit Fixpunkt o und $\psi(g) \parallel g$ für jede Gerade g . Diese Automorphismen bilden dann natürlich auch eine Gruppe von Automorphismen unserer affinen Ebene, die wir die **Homothetien mit Zentrum o** nennen und $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}$ notieren.

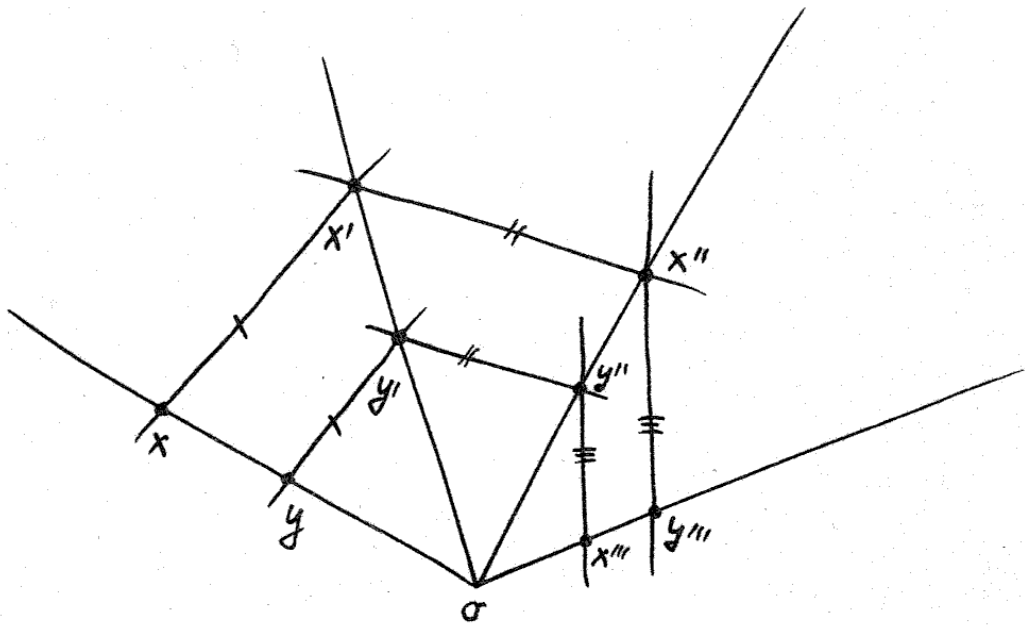
3. Sei X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft. Gegeben ein Punkt $o \in X$ erhalten wir eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$ durch die Vorschrift $x \mapsto \overrightarrow{ox}$. Wir erklären eine Verknüpfung $+_o$ auf X durch die Vorschrift, daß sie unter unserer Injektion der Addition in \vec{X} entsprechen soll. So wird $(X, +_o)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element o . Jede Gerade $K \subset X$ mit $o \in K$ ist offensichtlich eine Untergruppe und jeder Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ von Inzidenzebenen ein Gruppenisomorphismus

$$\varphi : (X, +_o) \xrightarrow{\sim} (Y, +_{\varphi(o)})$$

4. Sei X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft. Gegeben eine Gerade $K \subset X$ und zwei Punkte $i \neq o$ in K liefert das Anwenden auf $i \in K$ offensichtlich eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_o & \xrightarrow{\sim} & K \setminus o \\ \psi & \mapsto & \psi(i) \end{array}$$

zwischen unserer Gruppe von Homothetien und dem Komplement des Punktes o in unserer Geraden K . Die Umkehrabbildung notieren wir $\lambda \mapsto (\lambda^*) = (\lambda^*_{i,o})$.



Skizze zur Äquivalenzrelation durch iterierte o -Trapeze

Vereinbaren wir zusätzlich $o * x = o$ für alle $x \in X$, so erhalten wir eine Verknüpfung

$$* : K \times X \rightarrow X$$

mit $\iota * x = x$. Für diese Verknüpfung gilt $\lambda * (\mu * x) = (\lambda * \mu) * x$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $x \in X$, was wir nur für $x = \iota$ prüfen müssen und dann für alle x folgern können. Unsere Verknüpfung induziert eine Verknüpfung $K \times K \rightarrow K$ und darunter ist $K \setminus o$ abgeschlossen und wird offensichtlich eine Gruppe mit neutralem Element ι . Da alle Homothetien Automorphismen unserer Inzidenzebene sind, die o festhalten, liefern sie Gruppenhomomorphismen $\lambda * : (X, +_o) \xrightarrow{\sim} (X, +_o)$ und es folgt

$$\lambda * (x +_o y) = (\lambda * x) +_o (\lambda * y)$$

für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in K \setminus o$ und dann offensichtlich sogar für alle $\lambda \in K$. Um zu zeigen, daß K mit diesen Verknüpfungen ein Schiefkörper wird, müssen wir nur noch die Distributivität für die Multiplikation von rechts auf K zeigen.

5. Seien X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft, $K \subset X$ eine Gerade und $\iota \neq o$ zwei Punkte aus K . Wir kürzen $+_o = +$ und $*_{\iota, o} = *$ ab. Das nebenstehende Bild zeigt $(\iota + \lambda) * x = x + \lambda * x$ für alle $x \in X \setminus K$ und $\lambda \in K \setminus \{o, -\iota\}$. Indem wir in derselben Weise „von unseren drei Punkten auf der Gerade $\overline{o\lambda}$ ausgehen und mit Parallelen auf die Gerade K zurückgehen“, folgt dasselbe für alle $x \in X \setminus o$. Mit explizitem Prüfen der zusätzlichen Fälle, das dem Leser zur Übung überlassen sei, folgt es für alle $x \in X$ und $\lambda \in K$. Zusammen mit der Assoziativität erhalten wir so die Distributivität

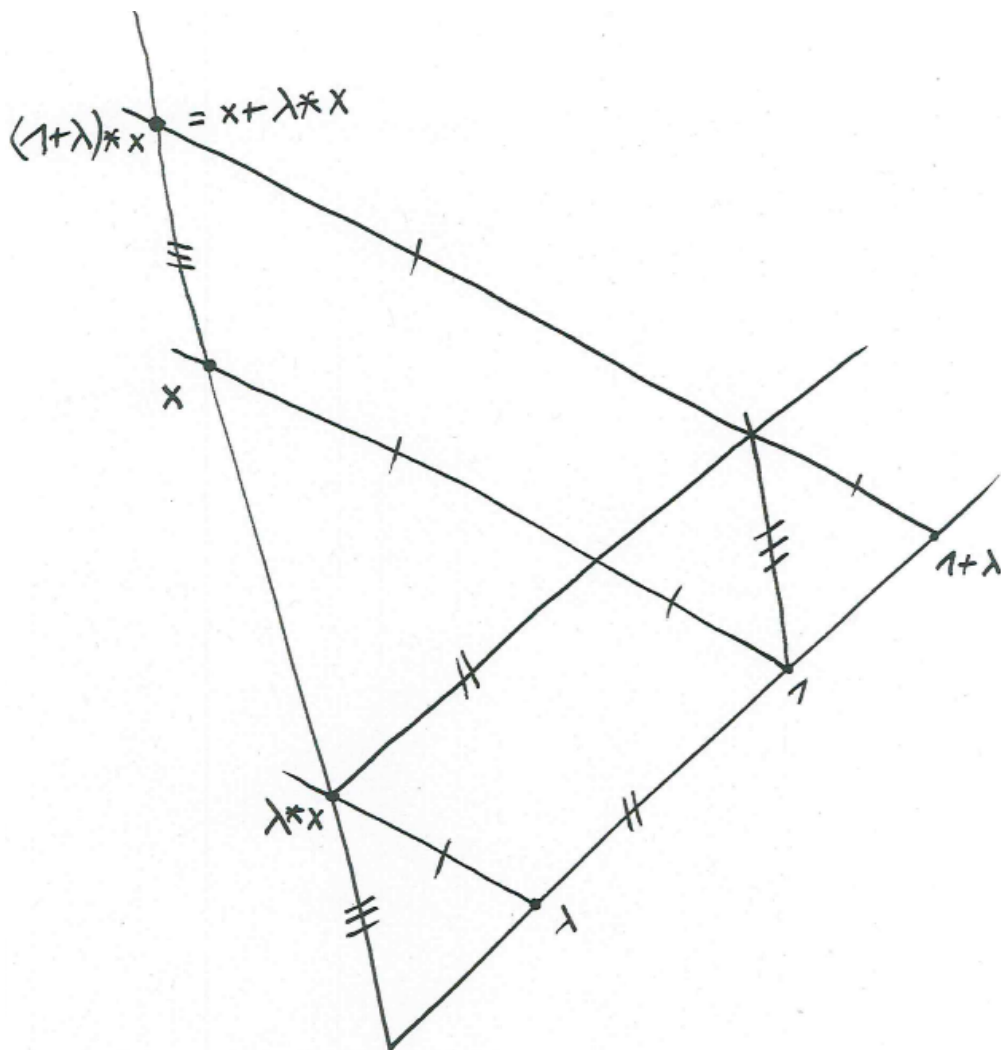
$$(\mu + \lambda) * x = \mu * x + \lambda * x$$

für alle $x \in X$ und $\lambda, \mu \in K$. Insbesondere wird unsere Gerade K mit $+$ als Addition und $*$ als Multiplikation ein Schiefkörper.

6. Seien weiter X eine affine Inzidenzebene mit der Desargueseigenschaft und $K \subset X$ eine Gerade mit zwei ausgezeichneten Punkten $\iota \neq o$ und der zugehörigen Struktur als Schiefkörper. Für $x \neq o$ liefert sicher $\lambda \mapsto \lambda * x$ eine Bijektion $K \xrightarrow{\sim} \overline{o\lambda}$. Gegeben $x, y \in X$ derart, daß x, y, o nicht kollinear ist, erhalten wir damit eine Bijektion und sogar einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} K^2 &\xrightarrow{\sim} X \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda * x + \mu * y \end{aligned}$$

Offensichtlich entsprechen unter φ die eindimensionalen Untervektorräume von K^2 eineindeutig den Geraden durch o in X . Verschiebung zeigt dann, daß unter dieser Bijektion die Geraden von X den affinen Geraden von K^2 entsprechen. \square



Skizze zum Beweis einer Distributivität beim Beweis der Koordinatisierbarkeit von affinen Ebenen mit der Desargueseseigenschaft

1.2.14. Gegeben Schiefkörper K, L und eine Kollineation $\varphi : K^2 \xrightarrow{\sim} L^2$ induziert die Abbildung $\text{Ens}^\times(K^2) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}^\times(L^2)$ gegeben durch $\pi \mapsto \varphi \circ \pi \circ \varphi^{-1}$ einen Gruppenisomorphismus $\vec{\varphi}$ zwischen den jeweiligen Richtungsräumen und es gibt genau einen Ringisomorphismus alias Schiefkörperisomorphismus

$$\tilde{\varphi} : K \xrightarrow{\sim} L$$

mit $\vec{\varphi}(\lambda\vec{v}) = \tilde{\varphi}(\lambda)\vec{\varphi}(\vec{v})$ für alle $\lambda \in K$. Diese Aussage ist in den Konstruktionen des obigen Beweises enthalten und erlaubt uns, mit einem bestimmten Artikel von **dem Koordinatenschiefkörper** einer affinen Inzidenzebene mit der Desargues-eigenschaft zu reden.

Definition 1.2.15. Wir sagen, eine affine Inzidenzebene habe die **Pappos-Eigenschaft**, wenn gegeben Geraden g, h und für $i \in \{1, 2, 3\}$ Punkte $x_i \in g \setminus h$ und $y_i \in h \setminus g$ stets gilt

$$(\overline{x_1y_2} \parallel \overline{x_2y_1} \text{ und } \overline{x_2y_3} \parallel \overline{x_3y_2}) \Rightarrow \overline{x_1y_3} \parallel \overline{x_3y_1}$$

1.2.16. Sie dürfen als Übung 1.2.27 zeigen, daß diese Eigenschaft für beliebige Geraden g, h bereits folgt, wenn wir sie nur für sich schneidende Geraden fordern.

1.2.17. Unter einer **Papposebene** verstehen wir eine affine Inzidenzebene mit der Papposeigenschaft und der Desargues-eigenschaft.

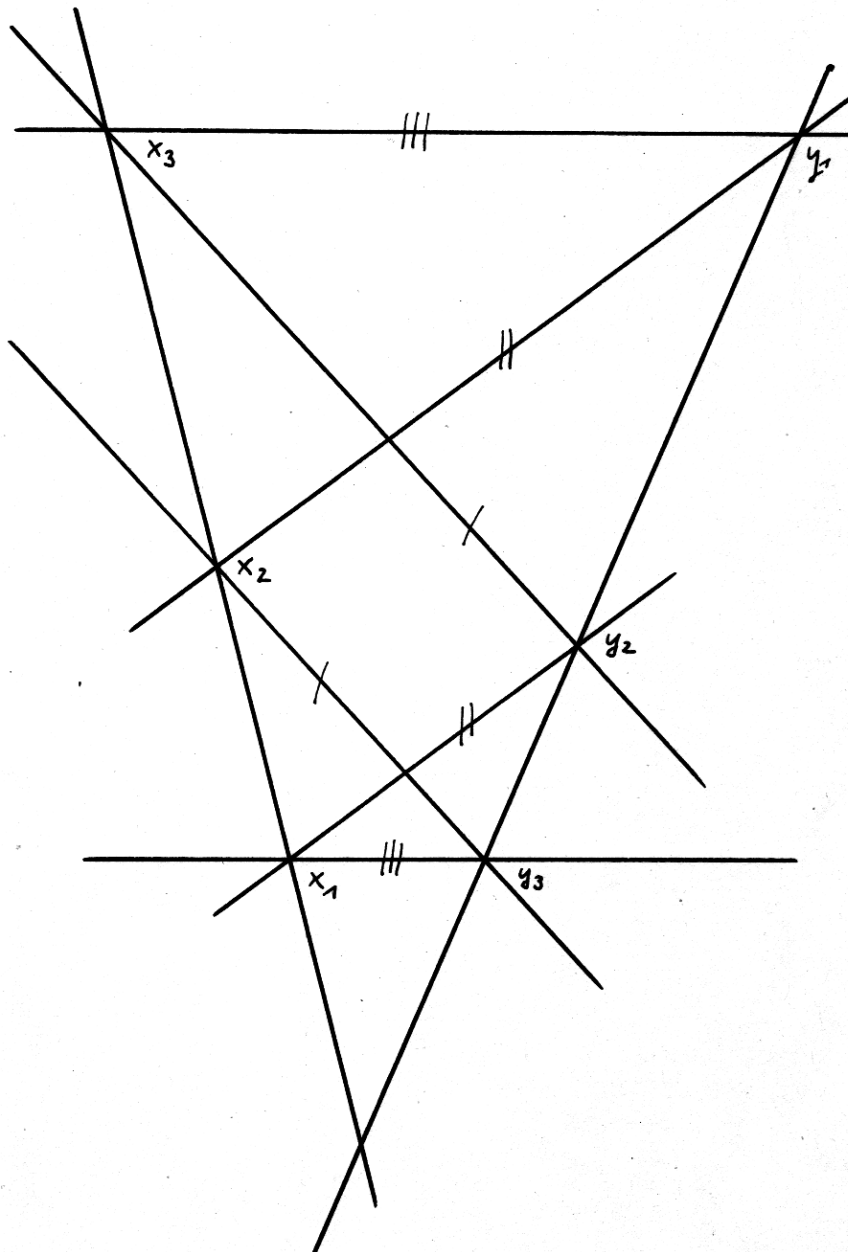
1.2.18. Es ist nicht schwer zu sehen, daß eine affine Inzidenzebene mit der Desargues-eigenschaft genau dann die Papposeigenschaft hat, wenn ihr nach 1.2.14 bis auf Isomorphismus wohlbestimmter Koordinatenschiefkörper kommutativ ist. Hierfür muß man nur die Streckfaktoren der Streckungen untersuchen, die die verschiedenen Parallelen in der Papposeigenschaft ineinander überführen. Der im folgenden bewiesene Satz von Hessenberg 1.2.19 zeigt sogar, daß die Papposeigenschaft bereits die Desargues-eigenschaft impliziert.

Satz* 1.2.19 (Hessenberg). *Jede affine Inzidenzebene mit der Papposeigenschaft hat auch die Desargues-eigenschaft.*

Beweis. Gegeben eine Konstellation aus drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3 mit einem gemeinsamen Punkt z und für $i \in \{1, 2, 3\}$ Punkte $x_i, y_i \in g_i \setminus z$ mit $\overline{x_1x_2} \parallel \overline{y_1y_2}$ und $\overline{x_2x_3} \parallel \overline{y_2y_3}$ gilt es, aus der Papposeigenschaft

$$\overline{x_1x_3} \parallel \overline{y_1y_3}$$

zu folgern. Wir sagen dann, „Desargues gelte für diese Konstellation“. Wenn die x_i kollinear sind, so folgt auch ohne Pappos bereits, daß die y_i kollinear sind und damit gilt Desargues für die gegebene Konstellation. Wir dürfen also zusätzlich



Die Pappuseigenschaft besagt, daß in jeder Situation der hier dargestellten Art die Parallelität der beiden eingestrichelten und der beiden zweigestrichelten Geraden die Parallelität der beiden dreigestrichelten Geraden impliziert.

annehmen, daß die x_i und dann auch die y_i jeweils nicht kollinear sind. Gilt $\overline{x_1x_3} \parallel g_2$ und $\overline{y_1y_3} \parallel g_2$, so folgt wieder Desargues für die gegebene Konstellation auch ohne Pappos. Wir dürfen also zusätzlich auch noch annehmen, daß $\overline{y_1y_3}$ nicht zu g_2 parallel ist. Jetzt betrachten wir die zu g_2 parallele Gerade g durch x_3 und setzen

$$p := g \cap g_1 \quad q := g \cap \overline{y_1y_3} \quad \text{und} \quad r := \overline{qy_2} \cap \overline{x_2x_3}$$

und holen das Argument dafür nach, daß auch r sinnvoll definiert ist. Wir haben nämlich $q \notin \overline{y_2y_3}$, da die y_i nicht kollinear sind und damit andernfalls $q = y_3$ folgern würde im Widerspruch dazu, daß y_3 nicht auf g liegen kann. Damit gilt schon mal $q \neq y_2$ und $\overline{qy_2}$ ist eine wohldefinierte Gerade. Diese Gerade schließlich ist nicht parallel zu $\overline{x_2x_3}$, da sie nicht parallel ist zu $\overline{y_2y_3}$, da eben gilt $q \notin \overline{y_2y_3}$. Damit ist also auch r sinnvoll definiert. Jetzt wenden wir dreimal Pappos an.

1. Wir betrachten die Geraden $\overline{r\bar{q}}$ sowie g_3 und darauf die Punkte r, y_2, q sowie y_3, x_3, z . Wir bemerken $r \neq x_3$, da sonst x_3, q und y_2 kollinear wären und wir $g = g_2$ folgern könnten im Widerspruch zu $x_3 \notin g_2$. Wir haben nun $r \notin g_3$ wegen $x_2 \notin g_3$ und $y_2 \notin g_3$ nach Annahme und $q \notin g_3$, da sonst folgte $q = x_3$ und wieder x_3, q und y_2 kollinear wären, was ja nicht sein kann. Andererseits haben wir $y_3 \notin \overline{r\bar{q}}$, weil die y_i nicht kollinear sind, und $x_3 \notin \overline{r\bar{q}}$, weil $x_3 \neq q$, und $z \notin \overline{r\bar{q}}$, weil g_2 nicht parallel ist zu $\overline{r\bar{q}}$. Nun haben wir $\overline{rx_3} \parallel \overline{y_2y_3}$ und $\overline{y_2z} \parallel \overline{qx_3}$ und mit Pappos folgt

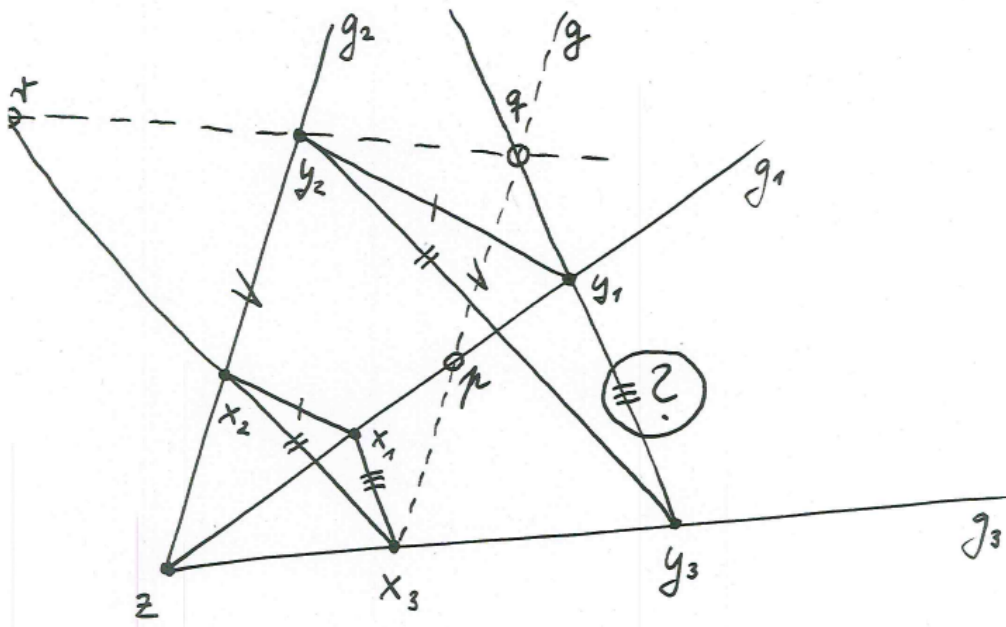
$$\overline{rz} \parallel \overline{qy_3}$$

2. Wir betrachten die Geraden $\overline{ry_2}$ sowie g_1 und darauf die Punkte r, q, y_2 sowie y_1, z, p . Wir haben $r \notin g_1$ wegen $\overline{rz} \parallel \overline{qy_3} = \overline{y_1y_3}$. Wir haben $q \notin g_1$, da sonst folgte $q = y_1$ und dann die y_i kollinear wären. Wir haben $y_2 \notin g_1$ nach Annahme. Wir haben weiter $z \notin \overline{ry_2}$, weil g_2 nicht parallel ist zu $\overline{ry_2} = \overline{qy_2}$. Haben wir außerdem $y_1, p \notin \overline{ry_2}$, so können wir aus $\overline{rz} \parallel \overline{qy_1}$ und $\overline{qp} \parallel \overline{y_2z}$ mit Pappos folgern

$$\overline{rp} \parallel \overline{y_2y_1}$$

Haben wir andererseits $p \in \overline{ry_2}$ oder $y_1 \in \overline{ry_2}$, so folgt $p = q = y_1$. Auch in diesem Fall haben wir jedoch $r \neq p$, da sonst gälte $r \in g$ und folglich $r = x_3$. Auch in diesem Fall ist also \overline{rp} eine wohlbestimmte Gerade und wir haben sogar $\overline{rp} = \overline{y_2y_1}$ und a fortiori $\overline{rp} \parallel \overline{y_2y_1}$.

3. Wir betrachten die Geraden $\overline{x_2x_3}$ sowie g_1 und darauf die Punkte x_3, x_2, r sowie z, p, x_1 . Nach Annahme gilt $x_3, x_2 \notin g_1$ und $r \notin g_1$ hatten wir bereits geprüft. Unsere Annahmen zeigen auch unmittelbar $z, x_1 \notin \overline{x_2x_3}$. Aus $p \in \overline{x_2x_3}$ schließlich folgte $p = x_3$ und das ist unmöglich wegen $x_3 \notin g_1$. Wegen



Skizze zum Beweis des Satzes von Hessenberg

$\overline{x_3p} \parallel \overline{x_2z}$ und $\overline{x_2x_1} \parallel \overline{rp}$, letzteres nach dem vorhergehenden, folgern wir mit Pappos

$$\overline{x_3x_1} \parallel \overline{rz}$$

Zusammen zeigen der erste und dritte Teil $\overline{x_3x_1} \parallel \overline{rz} \parallel \overline{qy_3} = \overline{y_1y_3}$. \square

1.2.20 (Anordnung des Koordinatenkörpers und Geometrie). Sei X eine Papposebene mit Zwischenrelation Z . Es ist zunächst einmal klar, daß für jede Verschiebung φ und jede Gerade g mit $\varphi(g) \neq g$ und $x, y, z \in g$ mit $(x, y, z) \in Z$ auch gilt $(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)) \in Z$. Daraus folgt dieselbe Aussage auch im Fall $\varphi(g) = g$ und wir sehen, daß jede Verschiebung die Zwischenrelation erhält. Insbesondere muß jede Verschiebung, die eine Gerade stabilisiert, die beiden Anordnungen auf unserer Gerade, die mit der Zwischenrelation verträglich sind, entweder festhalten oder vertauschen. Diejenigen Verschiebungen, die sie festhalten, bilden eine Untergruppe vom Index höchstens Zwei. Haben also Geraden mehr als zwei Punkte, so gibt es eine von der Identität verschiedene Verschiebung, die unsere Gerade und beide Anordnungen festhält. Es folgt, daß unser Koordinatenkörper, wenn er denn mehr als zwei Elemente hat, die Charakteristik Null haben muß. Dann aber ist jede Verschiebung, die eine Gerade stabilisiert, das Quadrat einer weiteren Verschiebung, die dieselbe Gerade stabilisiert, und hält folglich jede der beiden mit unserer Zwischenrelation verträglichen Anordnungen fest. Ebenso ist für jede Homothetie ψ mit Zentrum o klar, daß aus $(o, x, \psi(x)) \in Z$ für ein $x \in X \setminus o$ folgt $(o, y, \psi(y)) \in Z$ für alle $y \in X \setminus o$ und daß ebenso aus $(o, \psi(x), x) \in Z$ für ein $x \in X \setminus o$ folgt $(o, \psi(y), y) \in Z$ für alle $y \in X \setminus o$. Die Homothetien $\psi \in \mathcal{H}_o$ mit $(x, o, \psi(x)) \in Z \Rightarrow x = o$ bilden also eine Untergruppe. Halten wir also eine Gerade K fest und zeichnen auf ihr zwei verschiedene Punkte $o \neq \iota$ aus und versehen K mit der beim Beweis des Koordinatisierungssatzes konstruierten Struktur eines Körpers, so macht diejenige mit der Zwischenrelation verträgliche Anordnung von K , für die zusätzlich gilt $o < \iota$, unser K zu einem angeordneten Körper, wenn K mehr als zwei Elemente hat. Ergänzen wir nun o zu einem nicht kollinearen Tripel x, y, o und betrachten die zugehörige Bijektion $K^2 \xrightarrow{\sim} X$ aus dem Beweis des Koordinatisierungssatzes, so sieht man leicht, daß die durch unsere Anordnung auf K gegebene Zwischenordnung auf K^2 der Zwischenordnung auf X entsprechen muß. Wir erhalten also eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Angeordnete} \\ \text{Körper} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Papposebenen mit Zwischenrelation} \\ \text{und mehr als zwei Punkten auf jeder Gerade} \end{array} \right\}$$

$$K \quad \mapsto \quad K^2$$

Schließlich prüft man, daß gegeben angeordnete Körper K, L eine Kollineation $K^2 \xrightarrow{\sim} L^2$ genau dann die jeweiligen Zwischenrelationen ineinander überführt,

wenn der ihr nach 1.2.14 zugeordnete Körperisomorphismus die jeweiligen Anordnungen ineinander überführt. So erhält man auch für jeden Körper K mit mehr als zwei Elementen eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Anordnungen} \\ \text{auf dem Körper } K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zwischenrelationen} \\ \text{auf der Papposebene } K^2 \end{array} \right\}$$

Satz 1.2.21 (Geometrische Charakterisierung reeller Inzidenzebenen). *Genau dann kann eine Papposebene, deren Geraden mehr als zwei Punkte haben, mit einer Zwischenrelation versehen werden, die die Supremumseigenschaft hat, wenn sie isomorph ist zu \mathbb{R}^2 . Des Weiteren ist in diesem Fall die fragliche Zwischenrelation bereits eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nach dem Vorhergehenden finden wir einen Isomorphismus von Inzidenzebenen $X \xrightarrow{\sim} K^2$ für einen Körper K und unserer Zwischenrelation entspricht eineindeutig eine Anordnung auf K . Hat unsere Zwischenrelation zusätzlich die Supremumseigenschaft, so erfüllt die fragliche Anordnung auf K alle Axiome [AN1] 2.4.3, die den Körper der reellen Zahlen charakterisieren. Unsere affine Inzidenzebene ist folglich isomorph zu \mathbb{R}^2 , und da es auf dem Körper \mathbb{R} nur eine einzige Körperanordnung gibt, ist die fragliche Zwischenrelation bereits durch die Struktur als Inzidenzgeometrie eindeutig bestimmt. \square

Übungen

Übung 1.2.22. Man zeige, daß eine affine Inzidenzebene, in der es eine Gerade mit nur einer einzigen Parallelen gibt, isomorph sein muß zu \mathbb{F}_2^2 .

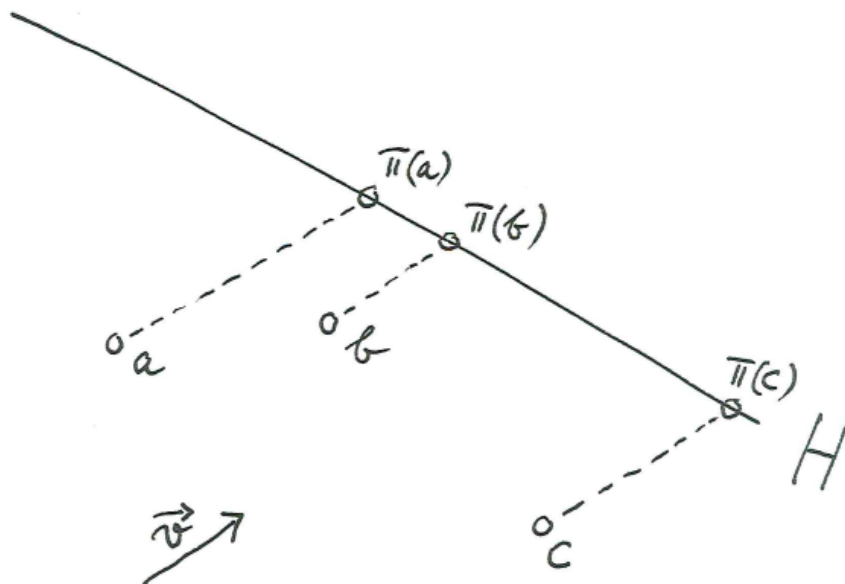
Übung 1.2.23. Man zeige, daß für jeden Schiefkörper K die Punktmenge K^2 mit den in 1.2.7 beschriebenen Geraden eine affine Inzidenzebene ist und daß diese affine Inzidenzebene die affine Desargues-Eigenschaft hat.

Übung 1.2.24. Man prüfe die Formel $(-i) * x +_o x = o$, deren Nachweis im Beweis des Koordinatisierungssatzes noch offen geblieben war.

Übung 1.2.25. Man zeige, daß es in einer affinen Inzidenzebene zwischen je zwei Geraden eine Bijektion gibt. Salopp gesprochen haben also „je zwei Geraden gleich viele Punkte“.

Übung 1.2.26. Gibt es in einer affinen Inzidenzebene eine endliche Gerade mit genau n Punkten, so hat unsere affine Inzidenzebene genau n^2 Punkte und $n^2 + n$ Geraden.

Übung 1.2.27. Man zeige, daß die Papposeigenschaft für parallele Geraden bereits folgt, wenn wir sie nur für sich schneidende Geraden fordern. Hinweis: Man mag sich am Beweis der analogen Aussage 1.2.12 in Bezug auf die Desargues-Eigenschaft orientieren.



Eine Parallelprojektion

1.3 Parallelprojektion und Zentralprojektion

1.3.1. Je nach Vorkenntnissen müssen hier erst einmal affine Räume und affine Teilräume etwa im Umfang von [LA1] 3.1, [LA1] 3.2 besprochen werden. Die Annahme endlicher Dimension ist im folgenden meist überflüssig und dient nur dazu, die Darstellung zu vereinfachen. Besonders wichtig ist die Erkenntnis, daß in einem affinen Raum der Schnitt einer Gerade mit einem weiteren affinen Teilraum entweder leer ist oder ein Punkt oder die ganze Gerade. Ist unser affiner Teilraum eine Hyperebene H und \vec{v} der Richtungsvektor unserer Gerade g , so folgt des weiteren aus $\vec{v} \notin \vec{H}$ bereits $|g \cap H| = 1$.

1.3.2. Gegeben $E \supset H$ ein endlichdimensionaler affiner Raum mit einer Hyperebene sowie ein Vektor $\vec{v} \in \vec{E} \setminus \vec{H}$ erklären wir die **Parallelprojektion in Richtung** \vec{v} von E auf H als die eindeutig bestimmte Abbildung

$$\pi = \pi_{\vec{v}} = \pi_{\vec{v}, H} : E \rightarrow H$$

mit der Eigenschaft $\pi(e) \in e + \langle \vec{v} \rangle$.

1.3.3. Gegeben $E \supset H$ ein endlichdimensionaler affiner Raum mit einer Hyperebene sowie ein Punkt $q \in E \setminus H$ erklären wir die **Zentralprojektion mit Zentrum** q von E auf H als die eindeutig bestimmte Abbildung

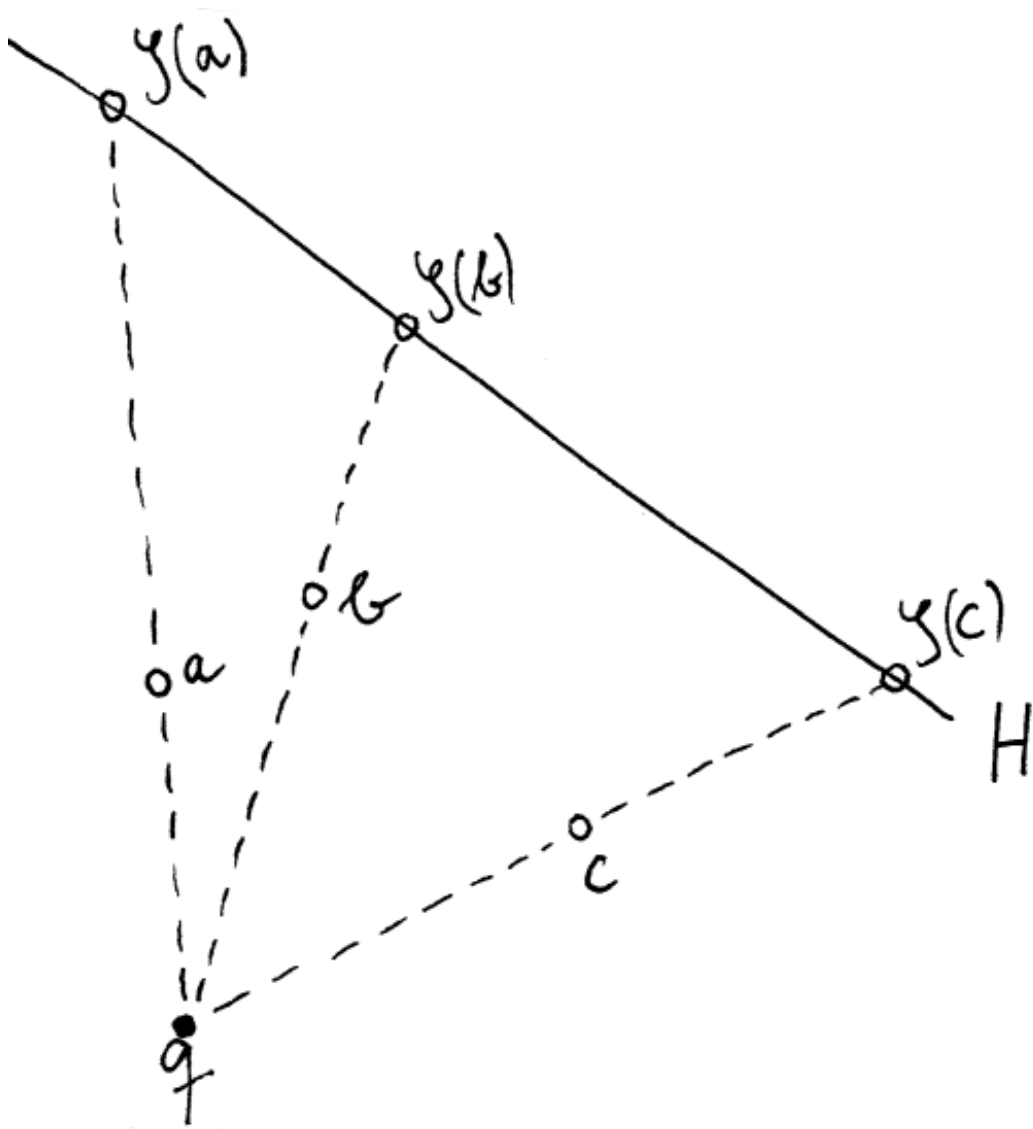
$$\zeta = \zeta_q = \zeta_{q, H} : E \setminus (q + \vec{H}) \rightarrow H$$

mit $q, e, \zeta(e)$ kollinear. Die Menge $E \setminus (q + \vec{H})$ nennen wir den **Definitionsbereich** unserer Zentralprojektion, die Hyperebene H ihre **Bildebene**, das Zentrum q auch den **Augpunkt**.

Beispiel 1.3.4 (**Foto als Zentralprojektion**). Ein schmutziges Beispiel für eine Zentralprojektion ist das Photographieren mit einer Lochkamera und in erster Näherung überhaupt jedes Foto. In diesem Fall ist die Linse oder besser das Loch der Augpunkt. Etwas genauer gesagt erhält man beim Photographieren eine auf die „Punkte vor der Linse“ eingeschränkte Zentralprojektion und unsere Kamera projiziert auch von diesen Punkten nur einen Ausschnitt auf einen Ausschnitt der Hyperebene H , nämlich auf die Bildplatte unseres Fotoapparats.

Satz 1.3.5 (Bilder von Geraden unter Zentralprojektionen). *Als das Bild einer Gerade unter einer Zentralprojektion, genauer als das Bild ihres Schnittes mit dem Definitionsbereich unserer Zentralprojektion können wir erhalten: Eine Gerade, bei der ein Punkt fehlt, der **Fluchtpunkt**; Eine Gerade; Einen Punkt; und die leere Menge.*

Beweis. Wie das Bild einer Gerade aussieht, hängt nur davon ab, ob sie den Augpunkt trifft und ob sie die Bildebene in genau einem Punkt trifft, wie es die folgende Tabelle präzisiert.



Eine Zentralprojektion

	trifft Augpunkt	trifft Augpunkt nicht
trifft Bildebene in genau einem Punkt	Punkt	Gerade ohne einen Punkt
trifft Bildebene nicht in genau einem Punkt	leer	Gerade

Wir überlegen uns nun, daß diese Tabelle korrekt ist. Seien dazu $E \supset H$ unser endlichdimensionaler affiner Raum mit der Bildebene und $q \in E \setminus H$ der Augpunkt und $\zeta_q : E \setminus (q + \vec{H}) \rightarrow H$ die Zentralprojektion. Gegeben eine Gerade $g \subset E$ ist klar, daß $\zeta_q(g \setminus (q + \vec{H}))$ im Schnitt $\langle g, q \rangle_{\text{aff}} \cap H$ des affinen Erzeugnisses von q und g mit der Bildebene H enthalten sein muß. Indem wir E durch $\langle g, q \rangle_{\text{aff}}$ ersetzen, ziehen wir uns darauf zurück, den Fall $\dim E \leq 2$ zu betrachten. In diesem Fall aber kann man die Aussage anhand einer Zeichnung mühelos einsehen. \square

1.3.6 (Fluchtpunkte in Photographien). Bei Fluchtpunkten in Photographien etwa von Eisenbahngleisen sieht man als Bild eines Gleises üblicherweise nur eine Halbgerade, die im Fluchtpunkt endet. Das liegt daran, daß wir mit der Kamera „nur nach vorne fotografieren“, während unsere mathematische Zentralprojektion auch die „Gleise hinter dem Betrachter“ noch ins Bild projiziert.

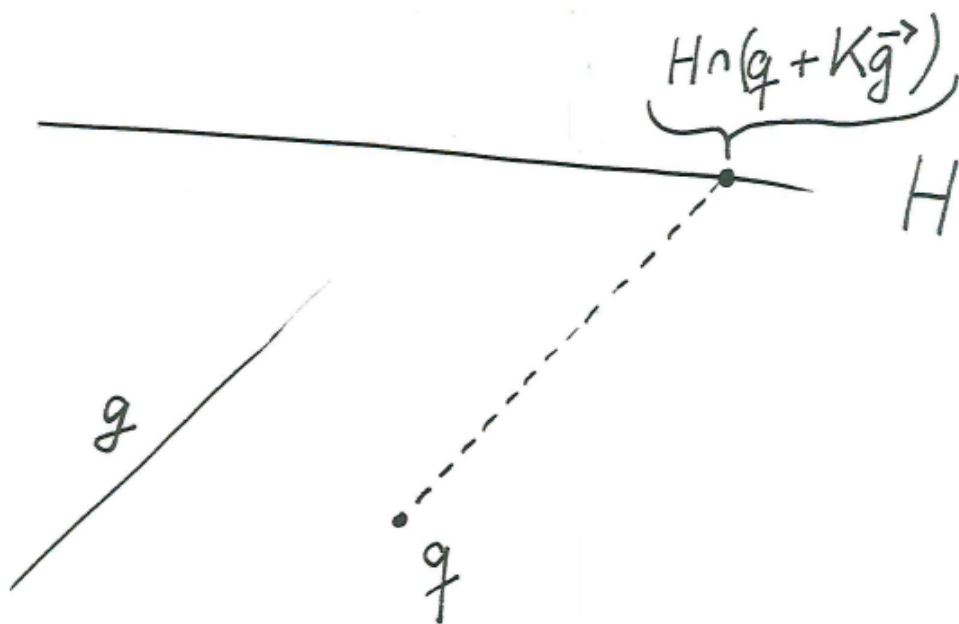
Ergänzung 1.3.7. Der Satz gilt unverändert auch ohne die Annahme endlicher Dimension. Ein mit Quotientenräumen geübter Leser wird keine Schwierigkeiten haben, unseren Beweis auf diesen Fall zu verallgemeinern.

1.3.8 (Ein Fußballfeld und seine Fotografie). Jetzt denken wir uns einmal, wir fotografierten ein Fußballfeld. Formal und in Koordinaten ausgedrückt betrachten wir Einbettungen $i, j : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ der Gestalt $i : (x, y)^\top \mapsto A(0, x, y)^\top + \vec{v}$ und $j : (x, y)^\top \mapsto B(0, x, y)^\top + \vec{w}$ für $A, B \in \text{SO}(3)$ Drehmatrizen und $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren und wählen als Augpunkt einen Punkt $q \in \mathbb{R}^3$, der weder im Bild von i noch im Bild von j liegt, also weder in der Fotoplatte alias Bildebene $H := j(\mathbb{R}^2)$ noch auf dem Fußballfeld alias der **Urebene** $U := i(\mathbb{R}^2)$. Die „partiell definierte Abbildung“

$$\phi := j^{-1} \zeta_{q,H} i : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$$

beschreibt dann die „Umrechnung zwischen dem durch i mit Koordinaten versehenen Fußballfeld $i(\mathbb{R}^2)$ und seiner durch j mit Koordinaten versehenen Fotografie $j(\mathbb{R}^2)$ “. Ihr Definitionsbereich ist genauer $i^{-1}(\mathbb{R}^3 \setminus (q + \vec{H}))$. Wir nennen sie eine **Fototransformation**.

Beispiel 1.3.9. Betrachten wir etwa $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 1)$ und $j : (x, y) \mapsto (1, x, y)$ und $q = (0, 0, 0)$, so wird die Zentralprojektion $\zeta_q = \zeta$ auf die Ebene $j(\mathbb{R}^2) = \{(x, y, z) \mid x = 1\}$ gegeben durch $(x, y, z) \mapsto (1, y/x, z/x)$ und



Das Bild unter einer Zentralprojektion einer zur Projektionsebene nicht parallelen und mit dem Projektionszentrum nicht inzidenten Gerade g ist eine Gerade abzüglich eines Punktes, genauer abzüglich des Fluchtpunktes.

ist nicht definiert auf den Punkten „neben der Linse“, also den Punkten mit $x = 0$. So finden wir in diesem Fall

$$\phi(x, y) = j^{-1}\zeta(x, y, 1) = j^{-1}(1, y/x, 1/x) = (y/x, 1/x)$$

Vorschau 1.3.10 (Umrechnen von Photographien). Im folgenden wollen wir salopp gesagt zeigen, daß die partiell definierten Abbildungen, die durch das wiederholte Photographieren von Photographien entstehen, genau alle partiell definierten Abbildungen sind, die durch Formeln der Gestalt

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \end{pmatrix}$$

gegeben werden mit (a_{ij}) einer invertierbaren (3×3) -Matrix. Um das korrekt formulieren zu können, erweitern wir unsere Ebene durch Hinzunahme geeigneter „unendlich ferner Punkte“ in der Weise, daß unsere partiell definierten Abbildungen zu global definierten Abbildungen werden, den sogenannten „Projektivitäten“. Eine entsprechend präzisierte Aussage zeigen wir dann als Satz 1.5.4.

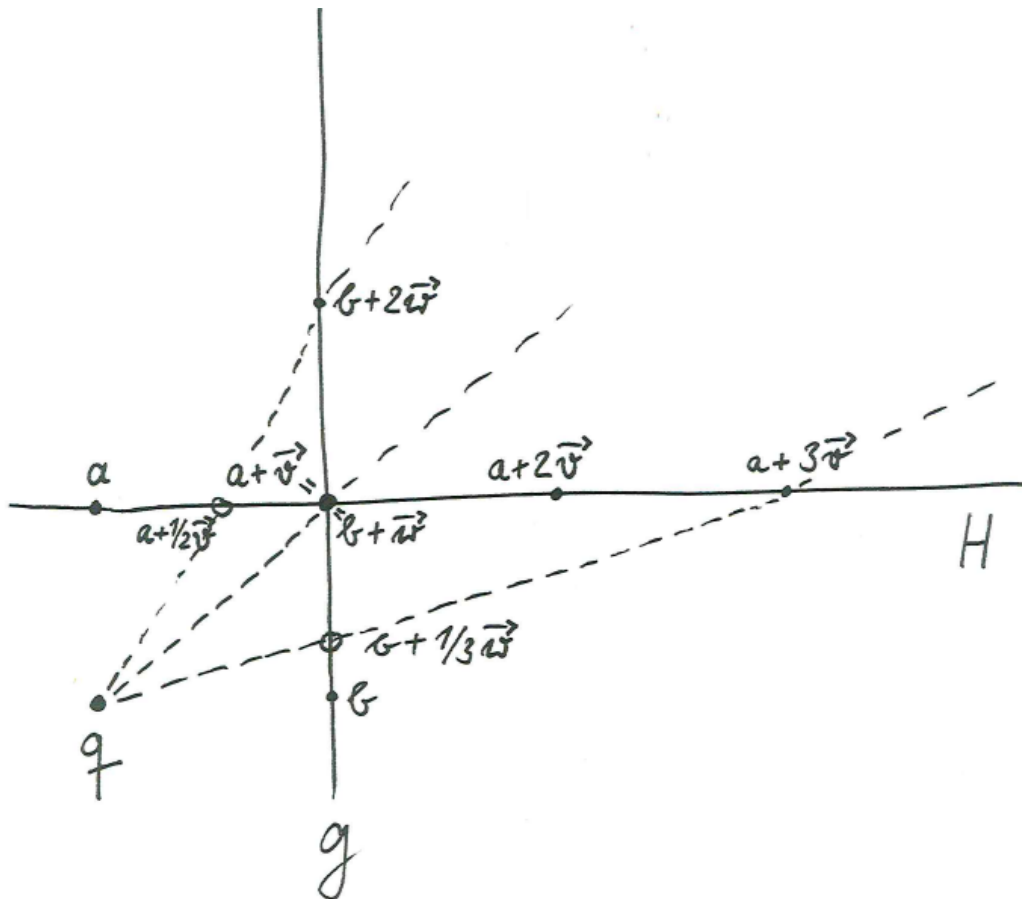
1.4 Projektive Räume

1.4.1 (Projektivisierung von Vektorräumen). Gegeben ein Körper K und ein K -Vektorraum V bezeichnen wir die Menge aller Ursprungsgeraden in V mit

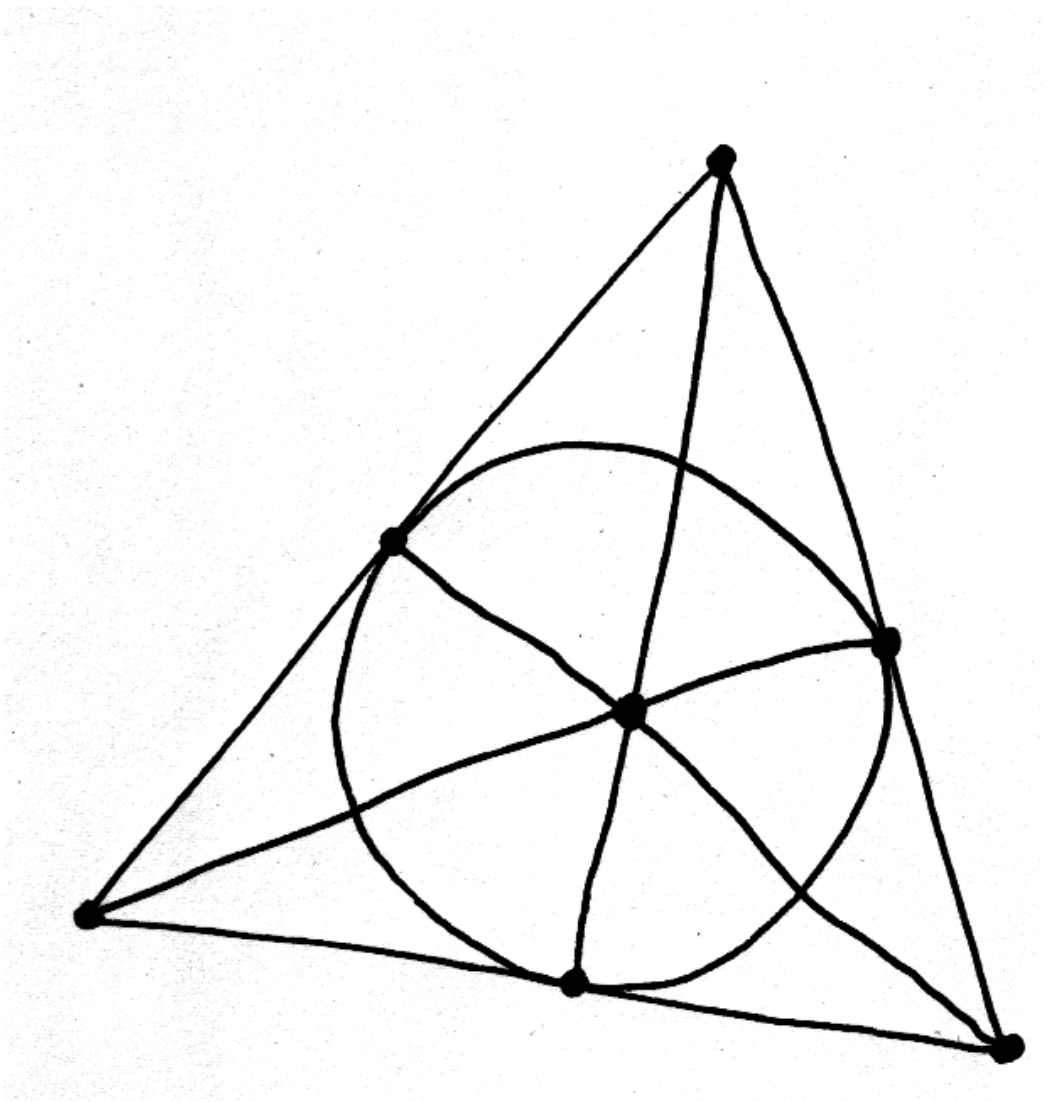
$$\mathbb{P}V = \mathbb{P}_K V := \{L \subset V \mid L \text{ ist ein eindimensionaler Untervektorraum}\}$$

Wir nennen diese Menge die **Projektivisierung des Vektorraums V** . Jeder Punkt von $\mathbb{P}V$ hat die Gestalt $\langle v \rangle$ für $v \in V \setminus 0$ und wir haben $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ genau dann, wenn es $\lambda \in K^\times$ gibt mit $\lambda v = w$. Eine Teilmenge $g \subset \mathbb{P}V$ heißt eine **projektive Gerade**, wenn sie aus allen eindimensionalen Untervektorräumen in einem zweidimensionalen Untervektorraum $V_g \subset V$ besteht. Offensichtlich wird die Projektivisierung $\mathbb{P}V$ von V so zu einer **Inzidenzgeometrie**, als da heißt, durch je zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{P}V$ geht genau eine projektive Gerade und jede projektive Gerade hat mindestens zwei Punkte.

Beispiele 1.4.2. Ist V der Nullvektorraum, so ist $\mathbb{P}V$ leer. Ist V eindimensional, so besteht $\mathbb{P}V$ aus einem einzigen Punkt. Man mag sich $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ veranschaulichen als eine „Sphäre, bei der gegenüberliegende Punkte jeweils als derselbe Punkt zu denken sind“. Um zusätzliche Anschauung bereitzustellen, bespreche ich nun die alternative Interpretation der Inzidenzgeometrien $\mathbb{P}V$ als „projektive Vervollständigungen affiner Räume“.



Die von einer Zentralprojektion von einer Geraden auf eine andere Gerade induzierte Abbildung. Bei der hier angegebenen Situation und Parametrisierung ist $a \in H$ der Fluchtpunkt und $b \in g$ die Definitionslücke unserer Zentralprojektion ζ_q und die davon auf dem Definitionsbereich induzierte Abbildung ist $b + x\vec{w} \mapsto a + (1/x)\vec{v}$.



Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_2$ über dem Körper mit zwei Elementen hat sieben Punkte und sieben Geraden.

1.4.3 (**Projektive Vervollständigung affiner Räume**). Gegeben ein affiner Raum E über einem Körper K können wir die disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{V}E := E \sqcup \mathbb{P}\vec{E}$$

von E mit der Projektivisierung $\mathbb{P}\vec{E}$ seines Richtungsraums \vec{E} mit einer Struktur als Inzidenzgeometrie versehen, indem wir folgende Teilmengen als Geraden auszeichnen:

1. Die Teilmengen $g \sqcup \{\vec{g}\}$ für $g \subset E$ eine affine Gerade;
2. Die projektiven Geraden $l \subset \mathbb{P}\vec{E}$ nach 1.4.1.

Wir nennen diese Inzidenzgeometrie die **projektive Vervollständigung von E** . Die Punkte von $\mathbb{P}\vec{E}$ heißen die **unendlich fernen Punkte** unserer Vervollständigung, die eben gerade entsteht, indem wir zu unserem affinen Raum noch diese unendlich fernen Punkte mit hinzunehmen. Die Geraden dieser Vervollständigung, soweit sie nicht nur aus unendlich fernen Punkten bestehen, entstehen, indem wir zu einer affinen Gerade jeweils noch einen unendlich fernen Punkt hinzunehmen. Ist E zweidimensional, so gibt es in $\mathbb{V}E$ eine einzige Gerade aus unendlich fernen Punkten, nämlich die **unendlich ferne Gerade**, die genau aus allen unendlich fernen Punkten besteht.

1.4.4 (**Projektive Vervollständigung als Projektivisierung**). Gegeben ein affiner Raum E über einem Körper K und eine affine Einbettung $i : E \hookrightarrow V$ als eine den Ursprung vermeidende affine Hyperebene in einem K -Vektorraum erhalten wir durch die Abbildungsvorschrift $e \mapsto \langle i(e) \rangle$ und $\langle \vec{v} \rangle \mapsto \langle i(\vec{v}) \rangle$ offensichtlich eine Kollineation

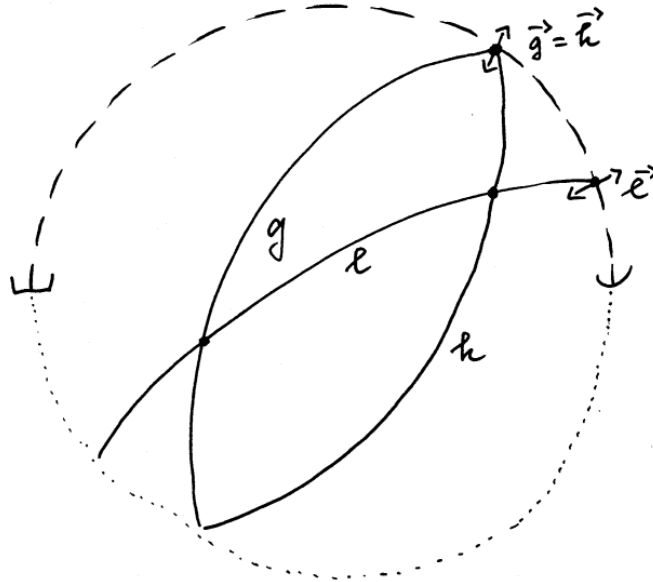
$$\mathbb{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}V$$

1.4.5. Im Spezialfall $E = K^n$ wählen wir standardmäßig die durch das Davorschreiben einer 1 als erster Koordinate gegebene affine Einbettung $K^n \hookrightarrow K^{n+1}$ als eine den Ursprung vermeidende Hyperebene und setzen $\mathbb{P}^n K := \mathbb{P}(K^{n+1})$ und nennen für $n \geq 0$ diese Inzidenzgeometrie den **n -dimensionalen projektiven Raum über dem Körper K** . Wir erhalten so unsere **Standardidentifikation**

$$s : K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}K = \mathbb{V}K^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n K$$

Im Fall $n = 1$ notiert man das Bild des einzigen Punktes von $\mathbb{P}^0 K$ ebenso wie sein Bild in $\mathbb{P}^1 K$ meist ∞ . Damit wird unsere Standardidentifikation in diesem Fall eine Bijektion $s : K \sqcup \{\infty\} = \mathbb{V}K \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 K$ und wir erhalten, wenn wir kurzerhand K mit seinem Bild identifizieren, eine mit den nötigen Hintergedanken zu verstehende Zerlegung

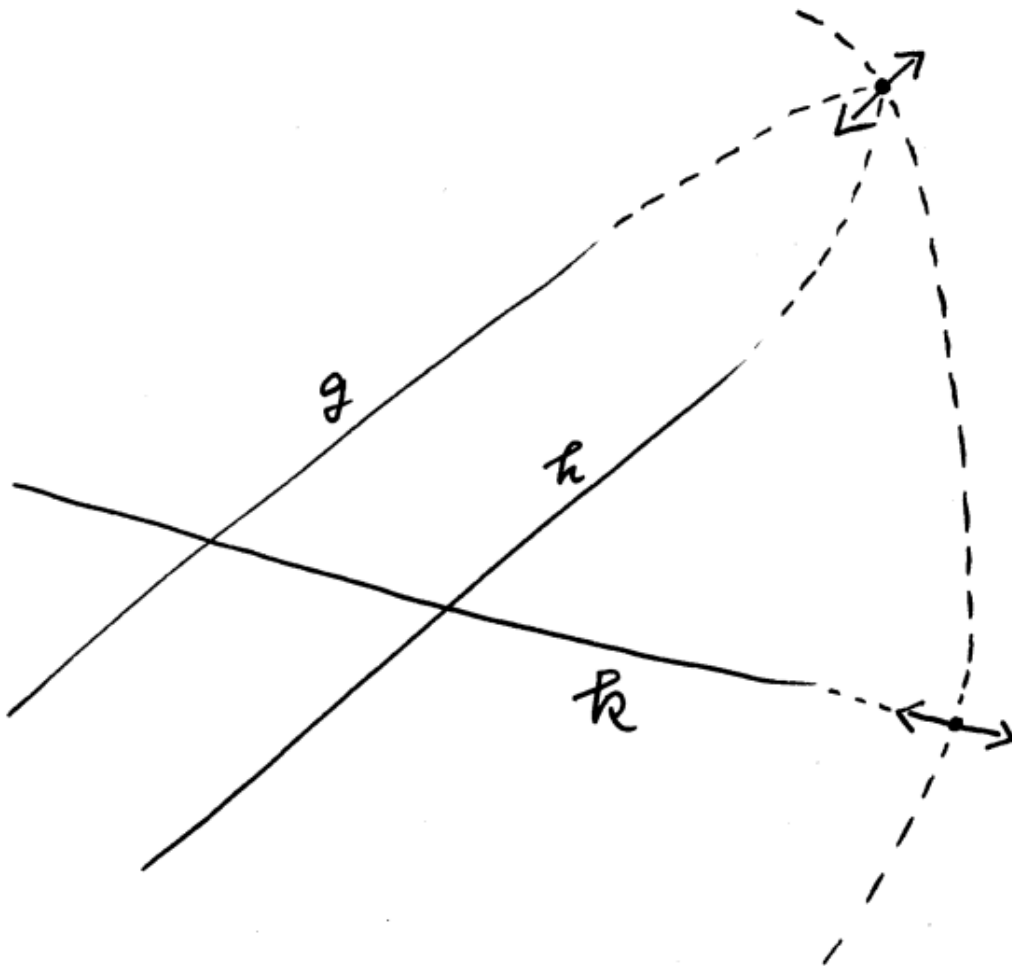
$$K \sqcup \{\infty\} = \mathbb{P}^1 K$$



Versuch einer graphischen Darstellung von $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Jede Ursprungsgerade im \mathbb{R}^3 geht durch einen Punkt der oberen Hemisphäre in der Einheitskugel. Nun lassen wir aus dieser Hemisphäre auch noch an ihrem Rand den halben Äquator weg und betrachten genauer die Menge

$$H := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0, z = 0 \Rightarrow y \geq 0, z = y = 0 \Rightarrow x \geq 0\}$$

Dann erhalten wir eine Bijektion $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} H$, indem wir jeder Ursprungsgerade ihren Schnittpunkt mit H zuordnen. Weiter liefert die Zentralprojektion mit Augpunkt in $(0, 0, -1)$ auf die xy -Ebene eine Bijektion von H mit der Einheitskreisscheibe, von der man dabei denselben halben Äquator am Rand wegzulassen hat. Die Bilder der projektiven Geraden unter der Verknüpfung dieser Bijektionen sind die Schnitte unserer halbantendeten Einheitskreisscheibe mit beliebigen Kreisen oder Geraden durch gegenüberliegende Punkte auf dem Einheitskreis. Die unendlich ferne Gerade entspricht dem Schnitt mit dem Einheitskreis. Im Bild sind zwei parallele Geraden g, h eingezeichnet sowie eine weitere Gerade l und gestrichelt die unendlich ferne Gerade.



Versuch einer graphischen Darstellung von $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ in der Art des Kubismus. Hier habe ich die zwei unendlich fernen Punkte zu drei affinen Geraden durch bepunktete Doppelpfeile symbolisiert. Bei dieser Darstellung kommt es nur auf die Richtung der Doppelpfeile an, nicht auf die Stelle, an der sie auf's Papier gemalt sind, noch auf ihre Länge, und jeder Doppelpfeil symbolisiert den durch seine Richtung gegebenen unendlich fernen Punkt. Wie im Kubismus stellen verschiedene Teile dieses Bildes verschiedene Aspekte der reell projektiven Ebene dar und es gibt keine gemeinsame Perspektive oder globale Regel, der sich all diese Darstellungen unterordnen ließen.

1.4.6. Unter einer **Einbettung von Inzidenzgeometrien** verstehen wir eine injektive Abbildung $X \hookrightarrow Y$ der zugehörigen Punktmengen derart, daß Teilmengen von X mit mindestens drei Elementen genau dann **kollinear** sind, wenn ihre Bilder in Y kollinear sind.

Beispiele 1.4.7. Jede bijektive Einbettung von Inzidenzgeometrien ist eine Kollineation. Jeder injektive Vektorraumhomomorphismus $W \hookrightarrow V$ induziert eine Einbettung von Inzidenzgeometrien $\mathbb{P}W \hookrightarrow \mathbb{P}V$. Im Fall eines Untervektorraums $W \subset V$ ist das die Einbettung einer Teilmenge $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}V$. Gegeben ein affiner Raum E sind sowohl $E \hookrightarrow \mathbb{V}E$ als auch $\mathbb{P}\vec{E} \hookrightarrow \mathbb{V}E$ Einbettungen von Inzidenzgeometrien. Jede injektive affine Abbildung $F \hookrightarrow E$ von affinen Räumen ist eine Einbettung von Inzidenzgeometrien und induziert eine Einbettung $\mathbb{V}E \hookrightarrow \mathbb{V}F$ zwischen ihren projektiven Vervollständigungen. Ist $E \subset F$ ein affiner Teilraum, so behandeln wir die zugehörige Einbettung der projektiven Vervollständigungen in unserer Notation auch als eine Einbettung $\mathbb{V}E \subset \mathbb{V}F$ von Mengen. Gegeben eine affine Gerade $g \subset E$ ist insbesondere $\mathbb{V}g = g \sqcup \{\vec{g}\}$ ihre Vervollständigung zu einer projektiven Gerade.

1.4.8. Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{P}V$ seiner Projektivisierung heißt eine **projektive Hyperebene**, wenn sie aus allen eindimensionalen Untervektorräumen eines Untervektorraums $W \subset V$ der Kodimension Eins besteht, wenn also in Formeln gilt $P = \mathbb{P}W$ für $\text{codim}(W \subset V) = 1$.

Lemma 1.4.9 (Schnitte von Geraden und projektiven Hyperebenen). *Gegeben V ein Vektorraum, $\mathbb{P}V$ seine Projektivisierung und $P \subset \mathbb{P}V$ eine projektive Hyperebene trifft jede projektive Gerade $g \subset \mathbb{P}V$, die nicht in unserer projektiven Hyperebene P enthalten ist, besagte projektive Hyperebene in genau einem Punkt.*

1.4.10. Der Punkt ist hierbei, daß im Projektiven der Schnitt einer Gerade mit einer Hyperebene nie leer sein kann. Das steht im Gegensatz zur Situation im Affinen, bei der das ja durchaus möglich ist.

Beweis. Wir haben per definitionem $g = \mathbb{P}V_g$ und $P = \mathbb{P}W$ mit $\dim V_g = 2$ und $\text{codim}(W \subset V) = 1$. Dann folgt aus $V_g \not\subset W$ bereits $\dim(V_g \cap W) = 1$, denn wäre der Schnitt Null, so könnte W keine Hyperebene gewesen sein. Dieser eindimensionale Untervektorraum $(V_g \cap W) \subset V$ ist dann als Punkt des projektiven Raums $\mathbb{P}V$ aufgefaßt der gesuchte Schnittpunkt. \square

1.4.11. Gegeben in der Projektivisierung $\mathbb{P}V$ eines Vektorraums V eine projektive Hyperebene $P \subset \mathbb{P}V$ sowie ein Punkt $q \in \mathbb{P}V \setminus P$ im Komplement unserer Hyperebene erklären wir die **Projektion mit Zentrum q auf die Hyperebene P** als die durch die Eigenschaft $\{\pi_q(x)\} = \overline{qx} \cap P$ nach 1.4.9 eindeutig bestimmte Abbildung

$$\pi_q : \mathbb{P}V \setminus q \rightarrow P$$

Hier meint \overline{qx} die Gerade durch q und x in der Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}V$. In anderen Worten wird also $\pi_q(x) \in P$ durch die Bedingung festgelegt, daß q, x und $\pi_q(x)$ kollinear sind. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir diesen Projektionsbegriff meinen, sprechen wir von einer **projektiven Projektion**.

Proposition 1.4.12 (Projektive Projektionen projektiver Geraden). *Unter der projektiven Projektion eines projektiven Raums auf eine projektive Hyperebene wird jede projektive Gerade, die nicht durch das Zentrum der Projektion geht, bijektiv auf eine projektive Gerade abgebildet.*

Vorschau 1.4.13. In 1.4.15 wird sich erweisen, in welchem Sinn dieser Satz als eine Verbesserung unseres Satzes 1.3.5 über die Bilder von Geraden unter Zentralprojektionen in affinen Räumen verstanden werden kann.

Beweis. Seien $V \supset W$ ein Vektorraum mit einer Hyperebene und $q \in \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ ein Punkt und $\pi = \pi_q : \mathbb{P}V \setminus q \rightarrow \mathbb{P}W$ die projektive Projektion. Gegeben $\vec{v} \in V$ mit $\langle \vec{v} \rangle = q$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} V & \longleftarrow & V \setminus \langle \vec{v} \rangle & \longrightarrow & \mathbb{P}V \setminus q \\ \downarrow \pi_{\vec{v}} & & \downarrow & & \downarrow \pi_q \\ W & \longleftarrow & W \setminus 0 & \longrightarrow & \mathbb{P}W \end{array}$$

mit einer Parallelprojektion ganz links. Diese Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung und bildet folglich Untervektorräume von V , die $\langle \vec{v} \rangle$ nicht umfassen, auf Untervektorräume von W derselben Dimension ab. Mithin bildet unsere Projektion π_q jede projektive Gerade in $\mathbb{P}V$, die nicht durch q läuft, bijektiv auf eine projektive Gerade in $\mathbb{P}W$ ab. \square

Proposition 1.4.14 (Projektionen in projektiven Vervollständigungen). *Seien $E \supset H$ ein affiner Raum mit einer Hyperebene und $q \in \mathbb{V}E \setminus \mathbb{V}H$ ein Punkt. So gibt es für alle $e \in \mathbb{V}E \setminus q$ genau ein Element $\pi_q(e) \in \mathbb{V}H$ mit q, e und $\pi_q(e)$ kollinear, und die durch die Vorschrift $e \mapsto \pi_q(e)$ erklärte **projektive Projektion***

$$\pi = \pi_q : \mathbb{V}E \setminus q \rightarrow \mathbb{V}H$$

bildet projektive Geraden in $\mathbb{V}E$, die nicht durch q gehen, bijektiv auf projektive Geraden in $\mathbb{V}H$ ab.

Beweis. Offensichtlich gibt es stets ein Paar $V \supset W$ aus einem Vektorraum mit einem Teilraum der Kodimension Eins und eine Kollineation $\mathbb{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}V$, unter dem $\mathbb{V}H$ bijektiv auf $\mathbb{P}W$ abgebildet wird. Damit folgen unsere Behauptungen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für projektive Räume 1.4.9 und 1.4.12. \square

1.4.15 (Zentralprojektion als Einschränkung einer projektiven Projektion).

Gegeben ein affiner Raum E mit einer Hyperebene $H \subset E$ und ein Punkt $q \in E \setminus H$ erhalten wir für die Zentralprojektion ζ_q ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \setminus (q + \vec{H}) & \hookrightarrow & \mathbb{V}E \setminus q \\ \downarrow \zeta_q & & \downarrow \pi_q \\ H & \hookrightarrow & \mathbb{V}H \end{array}$$

1.4.16 (Nocheinmal Bilder von Geraden unter Zentralprojektionen). Nach unseren Erkenntnissen in 1.4.14 werden unter projektiven Projektionen Geraden von $\mathbb{V}E$, die nicht durch den Augpunkt q laufen, bijektiv auf Geraden in $\mathbb{V}H$ abgebildet. Das liefert einen alternativen Zugang zu unserem Satz 1.3.5 über Bilder von affinen Geraden unter Zentralprojektionen. Gegeben eine Gerade $g \subset E \setminus q$ wird ihre Vervollständigung $\mathbb{V}g \subset \mathbb{V}E \setminus q$ nach 1.4.14 unter π_q bijektiv auf eine projektive Gerade

$$\pi_q(\mathbb{V}g) \subset \mathbb{V}H$$

abgebildet. Jetzt gibt es nach 1.4.9 nur die beiden Möglichkeiten $\pi_q(\mathbb{V}g) \subset \mathbb{P}\vec{H}$ oder $|\pi_q(\mathbb{V}g) \cap \mathbb{P}\vec{H}| = 1$, und im letzteren Fall ist dieser eindeutige Schnittpunkt entweder $\pi_q(\vec{g})$ oder eben ein anderer Punkt. Im ersten Fall trifft g den Definitionsbereich unserer Zentralprojektion ζ_q überhaupt nicht. Im zweiten Fall wird g bijektiv auf eine Gerade in H abgebildet. Im dritten Fall haben wir $\pi_q(\vec{g}) \in H$ und dieses Bild des unendlich fernen Punktes ist der Fluchtpunkt zu g .

1.4.17 (Parallelprojektion als Einschränkung einer projektiven Projektion).

Gegeben ein affiner Raum E mit einer Hyperebene $H \subset E$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E} \setminus \vec{H}$ mit zugehörigem unendlich fernen Punkt $q := \langle \vec{v} \rangle \in \mathbb{V}E$ erhalten wir für die Parallelprojektion $\pi_{\vec{v}}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \hookrightarrow & \mathbb{V}E \setminus q \\ \downarrow \pi_{\vec{v}} & & \downarrow \pi_q \\ H & \hookrightarrow & \mathbb{V}H \end{array}$$

Zusammen mit 1.4.15 sehen wir so, daß sowohl Parallelprojektionen wie auch Zentralprojektionen beide Einschränkungen projektiver Projektionen zwischen den jeweiligen Vervollständigungen sind.

1.4.18 (Homogene Koordinaten). Gegeben $x_0, x_1, \dots, x_n \in K$ nicht alle Null bezeichnen wir die Gerade durch den Ursprung und den Punkt mit den Koordinaten x_0, x_1, \dots, x_n , aufgefaßt als Punkt des n -dimensionalen projektiven Raums, mit

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle := \langle \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \rangle$$

Üblich sind auch die Schreibweisen $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ und $(x_0; x_1; \dots; x_n)$ für diesen Punkt des projektiven Raums $\mathbb{P}^n K$. Unsere Standardeinbettung $K^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n K$ wird gegeben durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle 1, x_1, \dots, x_n \rangle$.

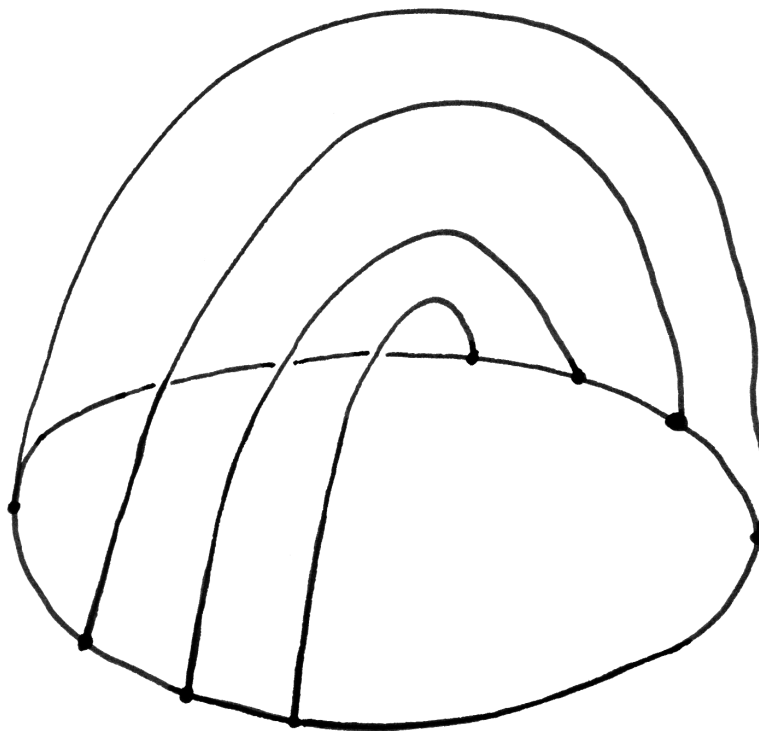
Vorschau 1.4.19. Die projektiven Räume $\mathbb{P}V$ zu endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorräumen V können mit einer Topologie versehen werden durch die Vorschrift, daß eine Teilmenge offen sein soll genau dann, wenn ihr Urbild in $V \setminus 0$ offen ist. Mehr zu dieser sogenannten „Quotiententopologie“ diskutieren wir in [TM] 2.3. Bereits hier sei erwähnt, daß es für diese Topologien stetige Bijektionen mit stetiger Umkehrung gibt, die $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ mit der Kreislinie S^1 und $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ mit der Kugelschale S^2 identifizieren. Deshalb heißt die komplexe projektive Gerade $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ auch die **Riemann'sche Zahlenkugel**. Genauer erhalten wir eine derartige Identifikation für $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$, indem wir eine Kugelschale auf die komplexe Zahlenebene legen, eine Lampe an den höchsten Punkt P stellen und jeden Punkt der Kugelschale, der nicht gerade der höchste Punkt ist, auf seinen Schatten in der Ebene \mathbb{C} abbilden, den höchsten Punkt P jedoch auf ∞ . Für $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ verfährt man analog. Weiter ist $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ nach [TM] 2.3.8 homöomorph ist zu einer Kugelschale, in die man ein kreisrundes Loch geschnitten hat, um dort ein Möbiusband einzukleben. Um das präzise zu verstehen und zu beweisen, braucht es jedoch eine gewisse Übung im Umgang mit den Grundbegriffen der mengentheoretischen Topologie.

Proposition* 1.4.20. *Gegeben ein endlicher Körper \mathbb{F} gibt es eine zyklische Gruppe von Automorphismen der Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}^2 \mathbb{F}$, die frei und transitiv sowohl auf der Menge der Punkte als auch auf der Menge der Geraden operiert.*

Beweis. Wir betrachten für eine Primzahlpotenz q die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q$. Dann ist \mathbb{F}_{q^3} ein dreidimensionaler \mathbb{F}_q -Vektorraum und wir erhalten so eine Untergruppe $\mathbb{F}_{q^3}^\times \hookrightarrow \text{GL}(3; \mathbb{F}_q)$, die frei und transitiv auf dem Komplement des Ursprungs operiert. Als multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers ist sie zyklisch nach [LA2] 4.4.17. Der Quotient $\mathbb{F}_{q^3}^\times/\mathbb{F}_q^\times$ ist dann auch zyklisch und operiert frei und transitiv auf $\mathbb{P}^2 \mathbb{F}_q$ und bildet Geraden auf Geraden ab. Weiter ist die Spurform unserer Körpererweiterung $\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q$ nach Übung [AL] 4.1.36 nicht ausgeartet und induziert einen \mathbb{F}_q^\times -äquivalenten Isomorphismus von \mathbb{F}_q -Vektorräumen $\mathbb{F}_{q^3} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^3}, \mathbb{F}_q)$. So sehen wir, daß $\mathbb{F}_{q^3}^\times$ auch frei und transitiv auf der Menge der von Null verschiedenen \mathbb{F}_q -Linearformen auf \mathbb{F}_{q^3} operiert und $\mathbb{F}_{q^3}^\times/\mathbb{F}_q^\times$ folglich frei und transitiv auf der Menge der Geraden in $\mathbb{P}^2 \mathbb{F}_q$. \square

Übungen

Übung 1.4.21. Gegeben ein affiner Raum E sind zwei affine Geraden $g, h \subset E$ genau dann gleich oder parallel, wenn sie sich im Unendlichen schneiden. Genau-



Versuch einer Darstellung der reell-projektiven Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ als topologischer Raum. Unten denke man sich an die Kreislinie eine Hemisphäre angeklebt, oben verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte des Einheitskreises durch einen Bogen mit variierender mittlerer Höhe. So entsteht eine sich selbst durchdringende räumliche Fläche, bei der man sich die Selbstdurchdringung leicht wegdenken kann. Man nennt sie auch die **Kreuzhaube**.

er und in Formeln gilt also

$$g \parallel h \Leftrightarrow \mathbb{V}g \cap \mathbb{V}h \cap \mathbb{P}\vec{E} \neq \emptyset$$

Übung 1.4.22. Gegeben ein Vektorraum V und im projektiven Raum $\mathbb{P}V$ zwei projektive Hyperebenen $U, H \subset \mathbb{P}V$ sowie ein Punkt $q \in \mathbb{P}V \setminus (H \cup U)$ im Komplement ihrer Vereinigung induziert unsere Projektion aus 1.4.11 eine Bijektion

$$\pi_q : U \xrightarrow{\sim} H$$

Ergänzende Übung 1.4.23 (Linearisierung). Sei E ein affiner Raum über einem Körper K . Jede affine Einbettung $i : E \hookrightarrow V$ als affine den Ursprung vermeidende Hyperebene in einen Vektorraum V hat die universelle Eigenschaft, daß für jeden K -Vektorraum W das Vorschalten von i eine Bijektion

$$\text{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Aff}_K(E, W)$$

induziert. Eine solche affine Einbettung ist folglich eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen sie die **Linearisierung von E** . Jede Linearisierung von E liefert offensichtlich eine Bijektion $(E \times K^\times) \sqcup \vec{E} \xrightarrow{\sim} V$ durch $(e, \lambda) \mapsto \lambda i(e)$ und $\vec{v} \mapsto \vec{i}(\vec{v})$. Man gebe Formeln an für diejenige Verknüpfung auf $(E \times K^\times) \sqcup \vec{E}$, die unter dieser Bijektion der Addition von Vektoren in V entspricht.

Ergänzende Übung 1.4.24. Sei K ein Körper. Man zeige, daß die Homothetien und Translationen bereits alle Permutationen von K^2 sind, die sich so zu Kollineationen von $\mathbb{V}K^2$ fortsetzen lassen, daß die unendlich ferne Gerade punktwise festgehalten wird. Hinweis: Nach [LA1] 3.3.5 sind alle Kollineationen $K^2 \xrightarrow{\sim} L^2$ die von einem Körperisomorphismus von $K \xrightarrow{\sim} L$ induzierte Abbildung gefolgt von einer bijektiven K -linearen Abbildung und einer Translation.

Übung 1.4.25. Gegeben ein Körper K scheiden sich je zwei verschiedene Geraden von $\mathbb{P}^2 K$ in genau einem Punkt.

Übung 1.4.26 (Kartenspiel zu endlicher projektiver Ebene). Ich habe zu Hause ein Spiel mit gut 50 Karten und 8 Symbolen auf jeder Karte derart, daß je zwei Karten genau ein Symbol gemeinsam haben. Es gilt dann, als erster das Symbol zu nennen, das die erste Karte vom Kartenstapel eines Spielers mit dem in der Mitte liegenden Ablagestapel gemeinsam hat, und dann darf man seine Karte in der Mitte ablegen. Wer als Erster alle Karten seines eigenen Stapels in der Mitte abgelegt hat, hat gewonnen. Können Sie so ein Spiel entwerfen? Mit wievielen Karten kriegen Sie es maximal hin? Wieviele Symbole verwenden Sie dabei?

1.5 Projektivitäten und Photographien

1.5.1. Gegeben ein Körper K induziert der offensichtliche Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(n+1; K) \rightarrow \mathrm{Ens}^\times(K^{n+1})$ einen natürlichen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(n+1; K) \rightarrow \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{P}^n K)$. Dessen Bild heißt die **projektive Gruppe**

$$\mathrm{PGL}(n+1; K) \subset \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{P}^n K)$$

Die Elemente der projektiven Gruppe heißen **Projektivitäten**. Der Kern der Surjektion $\mathrm{GL}(n+1; K) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(n+1; K)$ besteht aus allen invertierbaren skalaren Matrizen, wie Sie als Übung 1.5.8 selbst zeigen dürfen. So liefert unsere Surjektion einen Isomorphismus $\mathrm{GL}(n+1; K)/K^\times \mathrm{I} \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}(n+1; K)$.

1.5.2. Offensichtlich sind alle Projektivitäten Kollineationen. Offensichtlich gibt es für je zwei projektive Geraden in einem projektiven Raum eine Projektivität, die sie ineinander überführt.

1.5.3 (**Vervollständigte Fototransformationen**). Wir erinnern aus 1.3.8 unsere Fototransformationen $\phi := j^{-1}\zeta_{q,H}i : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$ zu Einbettungen $i, j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Gestalt $i : (x, y)^\top \mapsto A(0, x, y)^\top + \vec{v}$ und $j : (x, y)^\top \mapsto B(0, x, y)^\top + \vec{w}$ für $A, B \in \mathrm{SO}(3)$ Drehmatrizen und $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren und einem Augpunkt $q \in \mathbb{R}^3$, der weder im Bild von i noch im Bild von j liegt. Sicher erhalten wir dieselben Fototransformationen, wenn wir uns auf den Fall beschränken, daß $q = 0$ der Ursprung des Koordinatensystems ist. Dann induzieren i und j Bijektionen $\hat{i}, \hat{j} : \mathbb{V}\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, die für gewöhnlich von unseren Standardidentifikationen abweichen, und unsere partiell definierte Fototransformation ist eine Einschränkung der Bijektion

$$\hat{\phi} := \hat{j}^{-1}\hat{i} : \mathbb{V}\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}\mathbb{R}^2$$

Wir nennen auch diese Bijektionen **Fototransformationen** oder, wenn wir sie von unseren partiell definierten Fototransformationen aus 1.3.8 unterscheiden wollen, **vervollständigte Fototransformationen**. Sie sind stets Kollineationen.

Satz 1.5.4 (Projektive Gruppe und Photographien). *Die von den vervollständigten Fototransformationen erzeugte Untergruppe $F \subset \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{V}\mathbb{R}^2)$ entspricht unter unserer Standardidentifikation $s : \mathbb{V}\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ der projektiven Gruppe, in Formeln*

$$sFs^{-1} = \mathrm{PGL}(3; \mathbb{R})$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Inklusion \subset . In der Tat bilden ja nach Annahme und in den Notationen aus 1.5.3 die Vektoren $i(0, 0)$, $i(1, 0)$ und $i(0, 1)$ eine Basis des \mathbb{R}^3 und dasselbe gilt für die Vektoren $j(0, 0)$, $j(1, 0)$ und $j(0, 1)$. Für den linearen Automorphismus $L \in \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$, der die Erste dieser Basen in die Zweite

überführt, kommutieren sicher die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^3 \\ \parallel & & \downarrow L \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{V}\mathbb{R}^2 & \xrightarrow[\sim]{i} & \mathbb{P}^2\mathbb{R} \\ \parallel & & \downarrow L \\ \mathbb{V}\mathbb{R}^2 & \xrightarrow[\sim]{j} & \mathbb{P}^2\mathbb{R} \end{array}$$

Es folgt $\hat{j}^{-1} \in \text{PGL}(3; \mathbb{R})$ und wegen $s = \hat{\sigma}$ für $\sigma : (x, y) \mapsto (1, x, y)$ auch $s(\hat{j}^{-1}i)s^{-1} = (\hat{\sigma}\hat{j}^{-1})(\hat{i}\hat{\sigma}^{-1}) \in \text{PGL}(3; \mathbb{R})$. Um die andere Inklusion \supset zu zeigen, bemerken wir zunächst $s(\hat{\sigma}^{-1}\hat{i})s^{-1} = \hat{i}\hat{\sigma}^{-1} \in sFs^{-1}$ für alle i , und dies Element der projektiven Gruppe hinwiederum wird nach unseren Diagrammen repräsentiert durch die lineare Abbildung L , die $e_1, e_1 + e_2$ und $e_1 + e_3$ auf $i(0, 0)$, $i(1, 0)$ und $i(0, 1)$ wirft. Geht etwa das zweite Tripel durch eine „Verschiebung der Fotoplatte gegen das Gemälde um λe_2 “ aus dem ersten Tripel hervor, so daß in Formeln $e_1 + \lambda e_2, e_1 + e_2 + \lambda e_2, e_1 + e_3 + \lambda e_2$ unser zweites Tripel ist, so wird die zugehörige Projektivität induziert durch die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiter sehen wir, daß auch die Projektivitäten zu Permutationsmatrizen alle zu sFs^{-1} gehören, indem wir für eine Permutation $\tau \in \mathcal{S}_3$ eben $e_{\tau(1)}, e_{\tau(1)} + e_{\tau(2)}$ und $e_{\tau(1)} + e_{\tau(3)}$ als unser zweites Tripel nehmen. Die Untergruppe $sFs^{-1} \subset \text{PGL}(3; \mathbb{R})$ umfaßt damit die Klassen aller speziellen Elementarmatrizen. Da aber die speziellen Elementarmatrizen nach [LA2] 1.4.17 bereits die ganze spezielle lineare Gruppe $\text{SL}(3; \mathbb{R})$ erzeugen, folgt $sFs^{-1} = \text{PGL}(3; \mathbb{R})$. \square

Satz 1.5.5 (Projektive Gruppe und Kollineationen). *Die Gruppe aller Kollineationen in $\text{Ens}^\times(\mathbb{P}^2\mathbb{R})$ ist genau die projektive Gruppe $\text{PGL}(3; \mathbb{R})$.*

1.5.6. Salopp gesprochen sind also unsere „Umrechnungen zwischen verschiedenen Photographien“ aus 1.5.4 genau diejenigen Permutationen der reell-projektiven Ebene, die Geraden in Geraden überführen.

Ergänzung 1.5.7. Dasselbe sollte auch in allen endlichen höheren Dimensionen gelten mit im wesentlichen demselben Beweis. Als neue Zutat gilt es nur zu zeigen, daß jede maximale echte Teilmenge eines $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, die mit je zwei verschiedenen Punkten auch die ganze projektive Gerade durch sie umfaßt, eine projektive Hyperebene ist.

Beweis. Es ist klar, daß die projektive Gruppe $\text{PGL}(3; \mathbb{R})$ aus Kollineationen besteht. Gegeben eine Kollineation $k : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ wird andererseits die unendlich ferne Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ auf eine Gerade abgebildet und wir finden ein Element

$g \in \text{PGL}(3; \mathbb{R})$ derart, daß gk die unendlich ferne Gerade stabilisiert. Dann induziert gk nach [LA1] 3.3.1 eine affine Abbildung auf dem Komplement \mathbb{R}^2 der unendlich fernen Gerade, und indem wir g geeignet abändern, dürfen wir annehmen, daß gk auf diesem Komplement die Identität ist. Eine derartige Kollineation muß aber auch auf der unendlich fernen Geraden die Identität sein und so folgt $k = g^{-1}$. \square

Übungen

Übung 1.5.8. Ein Automorphismus eines Vektorraums, der jeden eindimensionalen Untervektorraum stabilisiert, ist ein skalares Vielfaches der Identität.

Übung 1.5.9. Gegeben in einem projektiven Raum zwei Paare $(g_i, x_i)_{i=1,2}$ aus einer Geraden und einen Punkt außerhalb dieser Gerade gibt es stets eine Projektivität, die das eine Paar in das andere ineinander überführt. Idem für einen Punkt auf einer Gerade. Idem für zwei verschiedene Punkte auf einer Gerade.

Übung 1.5.10. Sei K ein Körper. Man zeige: Gegeben zwei Tripel von paarweise verschiedenen Ursprungsgeraden in der Ebene K^2 gibt es stets eine lineare Abbildung, die das eine Tripel in das andere überführt, und diese lineare Abbildung ist eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar.

Übung 1.5.11. Sei K ein Körper. Die vorhergehende Übung zeigt, daß es für jedes Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) von paarweise verschiedenen Punkten der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1 K$ genau ein Element $g \in \text{PGL}(2; K)$ gibt, das es in ein Quadrupel der Gestalt $(x, 0, 1, \infty)$ überführt. Man zeige, daß hier x im Fall, daß keiner unserer ursprünglichen Punkte ∞ ist, gegeben wird durch die Formel

$$x = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} \bigg/ \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}$$

Übung 1.5.12. Sei K ein Körper. Wir erinnern an die kanonische Bijektion $K \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 K$ aus 1.4.18 mit $z \mapsto \langle 1, z \rangle$ und $\infty \mapsto \langle 0, 1 \rangle$. Man zeige: Gegeben zwei Tripel von paarweise verschiedenen Geraden in der Ebene K^2 gibt es stets eine lineare Abbildung, die das eine Tripel in das andere überführt, und diese lineare Abbildung ist eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar. Für unsere Operation von $\text{PGL}(2; K)$ auf $(\mathbb{P}^1 K)^3$ liefert demnach die Vorschrift $g \mapsto g(0, 1, \infty)$ eine Bijektion

$$\text{PGL}(2; K) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}^1 K)^3 \setminus \Delta$$

für Δ die „dicke Diagonale“ alias die Menge aller Tripel mit mindestens zwei gleichen Einträgen. Man definiert das **Doppelverhältnis**

$$b : (\mathbb{P}^1 K)^4 \setminus \Delta \xrightarrow{\sim} K \setminus \{0, 1\}$$

auf der Menge aller Quadrupel mit vier paarweise verschiedenen Einträgen durch die Vorschrift, daß jedem derartigen Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) derjenige eindeutig bestimmte Punkt $x \in K$ zugeordnet werden soll, für den es ein $g \in \text{GL}(2; K)$ gibt mit $g : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x, 0, 1, \infty)$. Man zeige für dies Doppelverhältnis im Fall, daß keiner unserer vier Punkte der Punkt ∞ ist, die Formel

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} \bigg/ \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}$$

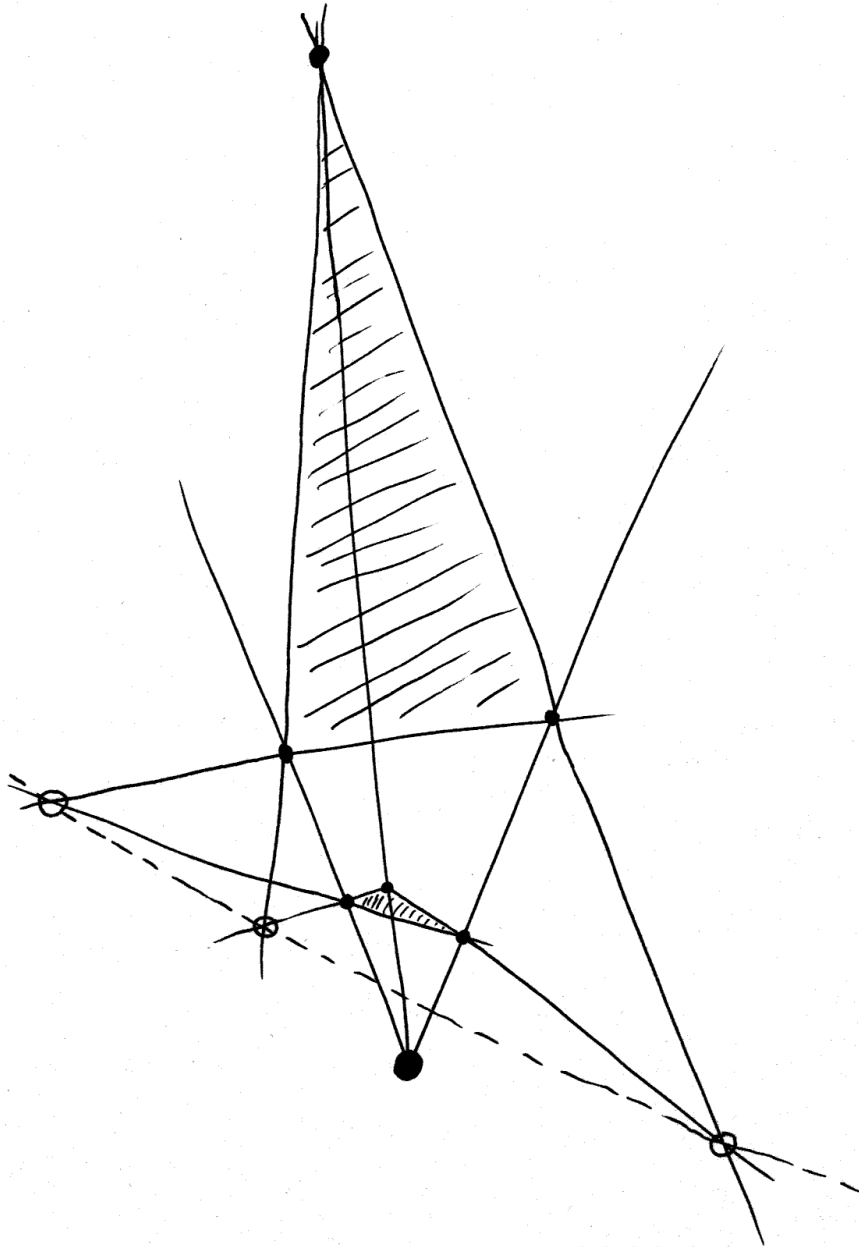
Sie erklärt auch die Herkunft der Bezeichnung als Doppelverhältnis. Im Fall, daß einer unserer vier Punkte ∞ ist, gilt unsere Formel dem Sinne nach immer noch, muß aber mit einer gewissen Sorgfalt interpretiert werden.

Weiterführende Übung 1.5.13. Ich bin ziemlich sicher, daß die vervollständigten Fototransformationen eine offene dichte Teilmenge der projektiven Gruppe $\text{PGL}(3; \mathbb{R})$ bilden. Daraus würde unmittelbar folgen, daß jedes Element der projektiven Gruppe als Verknüpfung von zwei vervollständigten Fototransformationen dargestellt werden kann. Ich hätte gerne eine etwas explizitere Beschreibung derjenigen Elemente der projektiven Gruppe, die keine vervollständigten Fototransformationen sind. Ich erwarte, daß sich insbesondere die meisten Scherungen nicht als Fototransformationen realisieren lassen.

1.6 Die Sätze von Desargues und Pappos

1.6.1 (Motivation durch Photographie). Ich erinnere an die Desargueseigenschaft 1.2.9 und die Papposeigenschaft 1.2.15 für affine Inzidenzebenen. Wir wissen, daß sie für \mathbb{R}^2 und allgemeiner für jede zweidimensionale affine Ebene über einem Körper gelten und diese sogar charakterisieren. Wenn wir nun die Figur zu einem dieser Sätze auf ein Papier malen und dies Papier von irgendwoher mit einer Lochkamera photographieren, bleiben salopp gesprochen in unserer Photographie Geraden immer noch Geraden, aber parallele Geraden bleiben nicht parallel. Vielmehr schneiden sich die Bilder paralleler Geraden in ihrem gemeinsamen Fluchtpunkt und alle diese Fluchtpunkte von parallelen Geraden in Ebene des Papiers, das sagen wir auf einem Tisch liegt, bilden ihrerseits eine Gerade, den Horizont. Diese Erkenntnis führt uns zur Formulierung und dem Beweis der beiden folgenden Sätze.

Satz 1.6.2 (von Desargues). *Seien in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 K$ über einem Körper K drei paarweise verschiedene projektive Geraden g_1, g_2, g_3 mit einem gemeinsamen Punkt z gegeben und für $i \in \{1, 2, 3\}$ Punkte $x_i, y_i \in g_i \setminus z$ mit $x_i \neq y_i$. So sind die Schnittpunkte $\overline{x_1 x_2} \cap \overline{y_1 y_2}$ und $\overline{x_2 x_3} \cap \overline{y_2 y_3}$ und $\overline{x_1 x_3} \cap \overline{y_1 y_3}$ kollinear.*



Der Satz von Desargues besagt, daß die drei als hohle Kreise dargestellten Schnittpunkte stets auf einer hier gestrichelt gezeichneten Gerade liegen.

Beweis. Wir bezeichnen unsere drei Schnittpunkte mit dem jeweils fehlenden Index als s_3, s_1 und s_2 . Fallen zwei dieser Schnittpunkte zusammen, so bleibt eh nichts mehr zu zeigen. Sonst betrachten wir die projektive Gerade $l := \overline{s_3 s_1}$ durch die ersten beiden unserer Schnittpunkte und finden nach 1.5.2 eine Kollineation, die l in die projektive Gerade der unendlich fernen Punkte transformiert. Liegt keiner der Punkte x_i, y_i auf l , so verwandelt sich unser Satz von Desargues unter dieser Kollineation in die Desargueseigenschaft aus 1.2.9 falls $z \notin l$ beziehungsweise die ausgeartete Desargueseigenschaft aus 1.2.12 falls $z \in l$ und wir sind fertig. Nun argumentieren wir noch, warum keiner der Punkte x_i, y_i auf l liegen kann. Der Schnittpunkt $s_3 := \overline{x_1 x_2} \cap \overline{y_1 y_2}$ kann weder auf g_1 noch auf g_2 liegen, höchstens auf g_3 . Analog kann s_1 nicht auf g_2 und g_3 liegen, höchstens auf g_1 . So folgt schon einmal $l \neq g_i$ für alle i . Hätten wir nun etwa $x_1 \in l$, so folgte $x_1 = l \cap g_1 = s_3$ und so $g_1 = \overline{y_1 y_2}$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Analog argumentieren wir für die anderen Punkte x_i, y_i . \square

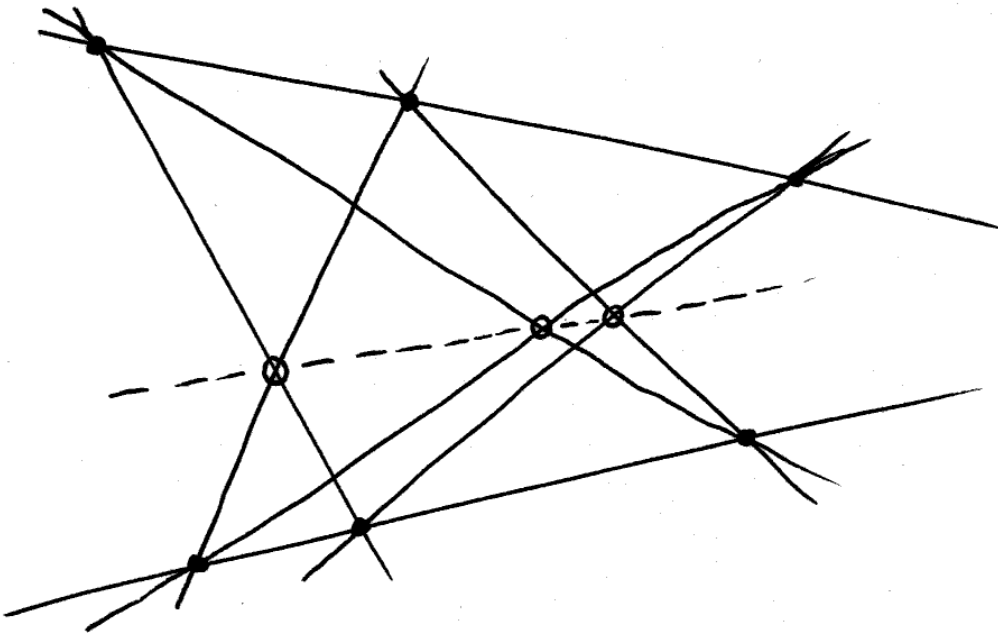
Satz 1.6.3 (von Pappos). *Seien in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 K$ über einem Körper K Geraden g, h gegeben und für $i \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschiedene Punkte $x_i \in g \setminus h$ und $y_i \in h \setminus g$. So sind die Schnittpunkte $\overline{x_1 y_2} \cap \overline{x_2 y_1}$ und $\overline{x_2 y_3} \cap \overline{x_3 y_2}$ und $\overline{x_1 y_3} \cap \overline{x_3 y_1}$ kollinear.*

1.6.4. Salopp ausgedrückt sagt unsere Eigenschaft: Gegeben zwei verschiedene Geraden und ein Sechseck, dessen Ecken abwechselnd auf der einen und auf der anderen Gerade liegen, sind die drei Schnittpunkte jeweils gegenüberliegender Kantengeraden unseres Sechsecks kollinear.

Beweis. Wir bezeichnen unsere drei Schnittpunkte mit dem jeweils fehlenden Index als s_3, s_1 und s_2 . Fallen zwei dieser Schnittpunkte zusammen, so bleibt eh nichts mehr zu zeigen. Sonst betrachten wir die projektive Gerade $l := \overline{s_3 s_1}$ durch die ersten beiden unserer Schnittpunkte und finden nach 1.5.2 eine Kollineation, die l in die projektive Gerade der unendlich fernen Punkte transformiert. Liegt keiner der Punkte x_i, y_i auf l , so verwandelt sich unser Satz von Pappos unter dieser Kollineation in die Papposeigenschaft aus 1.2.15 und wir sind fertig. Nun argumentieren wir noch, warum keiner der Punkte x_i, y_i auf l liegen kann. Der Schnittpunkt $s_3 := \overline{x_1 y_2} \cap \overline{x_2 y_1}$ kann nicht auf g liegen, da wir sonst $x_1 = s_3 = x_2$ haben müßten. Wir folgern $l \neq g$ und ebenso $l \neq h$. Weiter finden wir $l \neq \overline{x_1 y_2}$, da wir sonst $s_1 = y_2 \in h$ haben müßten. Also gilt $l \cap \overline{x_1 y_2} = \{s_3\}$ und so $x_1 \notin l$. Analog argumentieren wir für die anderen Punkte x_i, y_i . \square

1.7 Punkt-Geraden-Dualität

Definition 1.7.1. Eine **Inzidenzstruktur** ist ein Datum (X, G, I) bestehend aus zwei Mengen X und G und einer Teilmenge $I \subset X \times G$. Statt $(x, g) \in I$ schrei-



Der Satz von Pappos besagt, daß die drei als hohle Kreise dargestellten Schnittpunkte stets auf einer hier gestrichelt gezeichneten Gerade liegen.

ben wir auch xIg oder gIx und sagen x **inzidiert mit** g und g **inzidiert mit** x . Gegeben zwei Inzidenzstrukturen (X, G, I) und (X', G', I') verstehen wir unter einem **Isomorphismus von Inzidenzstrukturen** ein Paar (φ, ψ) bestehend aus einer Bijektion $\varphi : X \xrightarrow{\sim} X'$ und einer Bijektion $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ derart, daß gilt $(\varphi \times \psi)(I) = I'$.

Beispiel 1.7.2. Jeder Inzidenzgeometrie (X, G) können wir eine Inzidenzstruktur (X, G, I) zuordnen durch die Vorschrift $I := \{(x, g) \mid x \in g\}$. Gegeben eine weitere Inzidenzgeometrie (X', G') ist darüber hinaus eine Abbildung $\psi : X \rightarrow X'$ genau dann eine **Kollineation**, wenn sie sich zu einem Isomorphismus der zugehörigen Inzidenzstrukturen fortsetzen läßt, und diese Fortsetzung ist dann eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.7.3. Gegeben eine Inzidenzstruktur (X, G, I) betrachten wir die Vertauschungsabbildung $\tau : X \times G \xrightarrow{\sim} G \times X$ gegeben durch $\tau(x, g) := (g, x)$ und nennen $(G, X, \tau(I))$ die **duale Inzidenzstruktur**.

Satz 1.7.4 (Punkt-Geraden-Dualität). *Seien V ein dreidimensionaler Vektorraum und V^* sein Dualraum.*

1. *Wir erhalten eine Bijektion φ zwischen $\mathbb{P}(V^*)$ und der Menge der projektiven Geraden in $\mathbb{P}(V)$ durch die Abbildungsvorschrift $\langle \lambda \rangle \mapsto \mathbb{P}(\ker \lambda)$;*
2. *Wir erhalten eine Bijektion φ_* zwischen $\mathbb{P}(V)$ und der Menge der projektiven Geraden in $\mathbb{P}(V^*)$ durch die Abbildungsvorschrift $\langle v \rangle \mapsto \mathbb{P}(\ker \text{ev}(v))$;*
3. *Das Paar $(\varphi, \varphi_*^{-1})$ ist ein Isomorphismus zwischen der Inzidenzstruktur zur Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}(V^*)$ und dem Dualen der Inzidenzstruktur zur Inzidenzgeometrie $\mathbb{P}(V)$.*

Beweis. Ganz allgemein liefert für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V die Vorschrift $U \mapsto U^\perp$ eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen der Menge aller Untervektorräume von V und der Menge aller Untervektorräume von V^* . Der Satz folgt. \square

2 Möbiusgeometrie und hyperbolische Ebene

2.1 Kreisspiegelungen

2.1.1. Unter einer **euklidischen Ebene** verstehen wir wie in [LA2] 1.5.1 ein Paar $E = (E, S)$ bestehend aus einem zweidimensionalen reellen affinen Raum E und einer $\mathbb{R}_{>0}$ -Bahn S von Skalarprodukten auf seinem Richtungsraum.

2.1.2. Wir hatten in [LA2] 1.5.12 jedem euklidischen Vektorraum (V, S) einen orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$ zugeordnet und ihn seine **Längengerade** genannt. Weiter hatten wir eine **Längenabbildung**

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{L}$$

erklärt. Unter dem Nachschalten eines beliebigen orientierungserhaltenden Isomorphismus $\mathbb{L} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ wird diese Abbildung zur Norm eines Skalarprodukts der euklidischen Struktur S . Im Fall des Richtungsraums \vec{E} unserer euklidischen Ebene nennen wir $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\vec{E})$ die **Längengerade unserer euklidischen Ebene**.

2.1.3. Seien E eine euklidische Ebene und \mathbb{L} ihre Längengerade. Wir setzen

$$\hat{E} := E \sqcup \{\infty\}$$

und nennen diese Menge die **erweiterte Ebene**. Eine Teilmenge $K \subset \hat{E}$ heißt ein **verallgemeinerter Kreis**, wenn sie entweder ein Kreis in E ist, also von der Gestalt

$$K = K(c; r) := \{x \in E \mid \|x - c\| = r\}$$

für $c \in E$ und $r \in \mathbb{L}_{>0}$, oder eine affine Gerade g disjunkt vereinigt mit der einpunktigen Menge $\{\infty\}$. Im ersten Fall sprechen wir von einem **echten Kreis**. Im zweiten Fall sprechen wir von einer **erweiterten Gerade** und verwenden dafür die Notation $K = \hat{g} := g \sqcup \{\infty\}$.

2.1.4. Sei E eine euklidische Ebene. Jedem verallgemeinerten Kreis $K \subset \hat{E}$ ordnen wir eine Abbildung

$$s_K : \hat{E} \rightarrow \hat{E}$$

der erweiterten Ebene in sich selber zu, die wir die **Spiegelung an unserem Kreis** oder **Kreisspiegelung** oder auch **Inversion** nennen, und zwar die übliche orthogonale Spiegelung $E \rightarrow E$ an der Geraden mit der Zusatzregel $\infty \mapsto \infty$ im Fall, daß unser verallgemeinerter Kreis eine erweiterte Gerade \hat{g} ist, und die **Inversion**

$$c + \vec{v} \mapsto c + (r/\|\vec{v}\|)^2 \vec{v} \quad \text{für } \vec{v} \neq 0$$

mit der Zusatzregel $c \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto c$ im Fall eines echten Kreises $K = K(c; r)$. Es ist leicht zu sehen, daß auch im Fall einer echten Kreises K Zentrum und Radius und damit auch die Kreisspiegelung s_K bereits durch die Teilmenge $K \subset E$ eindeutig festgelegt werden.

2.1.5. Offensichtlich gibt es für je zwei verschiedene Punkte einer erweiterten euklidischen Ebene eine Kreisspiegelung, die sie vertauscht.

2.1.6. Man beachte den fundamentalen Unterschied zwischen der hier betrachteten erweiterten Ebene $\hat{E} = E \sqcup \{\infty\}$ und der projektiven Vervollständigung $\mathbb{V}E$ von E aus 1.4.3, bei der eine ganze projektive Gerade aus unendlich fernen Punkten zu E mit hinzugenommen wird. Wir werden im weiteren Verlauf sehen, daß unsere erweiterte Ebene \hat{E} hier vielmehr eine Variante der komplex-projektiven Gerade alias Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ ist.

Lemma 2.1.7 (Kreisspiegelungen erhalten Kreise). *Jede Kreisspiegelung auf einer erweiterten euklidischen Ebene macht verallgemeinerte Kreise zu verallgemeinerten Kreisen.*

Beweis. Das war bereits Übung [LA1] 2.7.18. Es reicht, es für die Kreisspiegelung am Einheitskreis im Fall $E = \mathbb{R}^2$ zu zeigen. Die Schnitte unserer verallgemeinerten Kreise mit \mathbb{R}^2 sind die Nullstellenmengen in \mathbb{R}^2 von Gleichungen der Gestalt

$$p\langle x, x \rangle - 2\langle x, v \rangle + q$$

für $v \in \mathbb{R}^2$ und $p, q \in \mathbb{R}$ mit $\langle v, v \rangle > pq$. Gegeben $x \neq 0$ gilt aber für $y := x/\langle x, x \rangle$ nach kurzer Rechnung

$$p\langle x, x \rangle - 2\langle x, v \rangle + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q\langle y, y \rangle - 2\langle y, v \rangle + p = 0$$

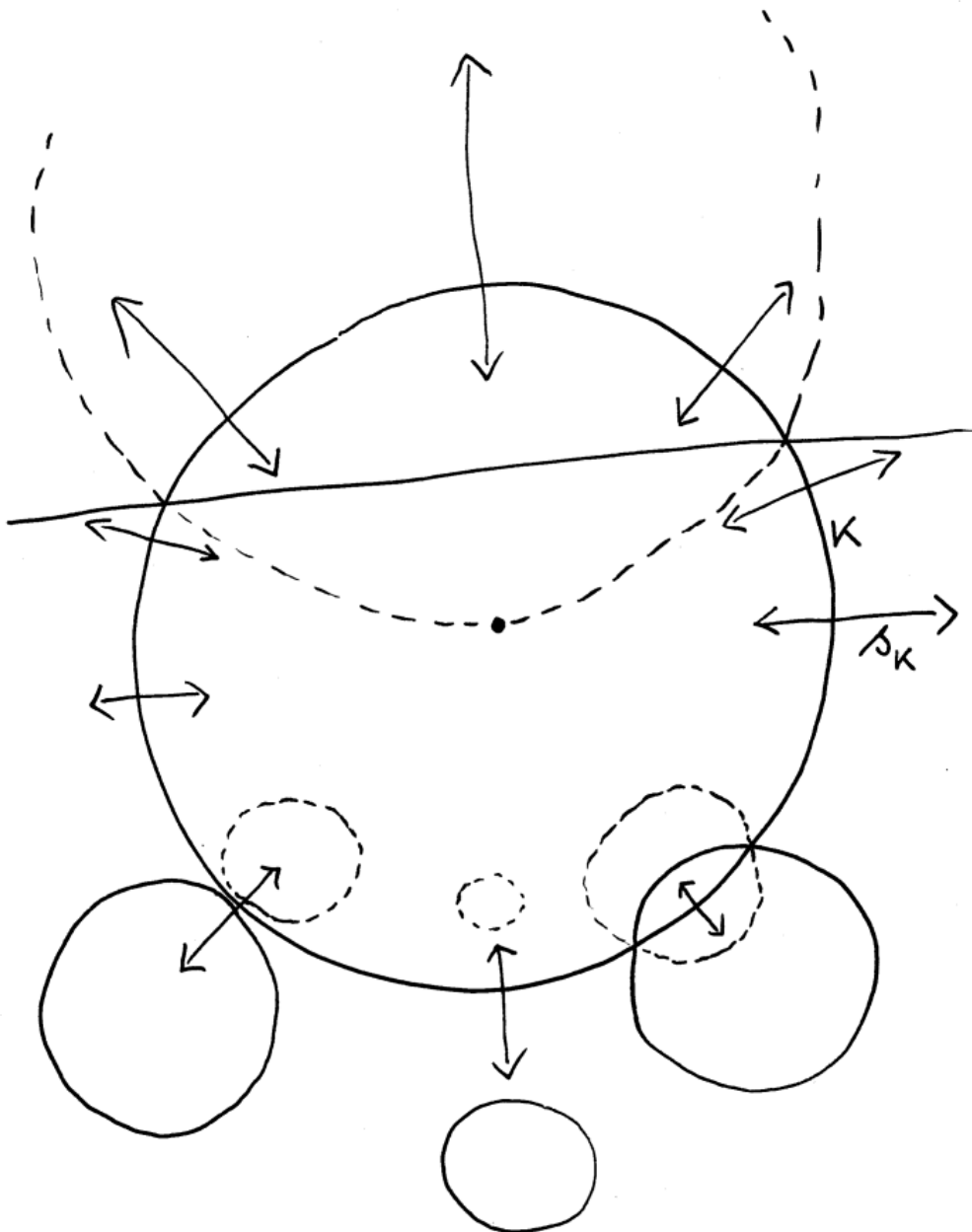
Daß das mit den Punkten 0 und ∞ auch paßt, prüft man leicht explizit. □

Beispiel 2.1.8. Eine Kreisspiegelung an einem echten Kreis macht jeden verallgemeinerten Kreis, der durch sein Zentrum geht, zu einem verallgemeinerten Kreis, der durch ∞ geht, mithin zu einer erweiterten Geraden.

2.1.9 (**Kreisspiegelungen mit Zirkel und Lineal**). Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben ein Kreis K mit Zentrum c und ein Punkt $p \in E$ außerhalb unseres Kreises können wir sein Bild unter der Kreisspiegelung s_K mit Zirkel und Lineal konstruieren. Wir zeichnen dazu die Gerade \overline{pc} durch p und c und den Kreis L durch p und c mit Zentrum auf \overline{pc} , so daß gilt $\{p, c\} = \overline{pc} \cap L$. Dann ist notwendig $s_K(L)$ die Gerade durch die beiden Punkte von $K \cap L$ und wir haben $\{s_K(p)\} = \overline{pc} \cap s_K(L)$. Indem wir diese Konstruktion umgekehren, erhalten wir auch eine Konstruktion für die Bildpunkte unter s_K von Punkten innerhalb unseres Kreises.

2.1.10. Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben ein verallgemeinerter Kreis $K \subset \hat{E}$ zerfällt $E \setminus K$ in zwei Wegzusammenhangskomponenten. Nehmen wir im Fall $\infty \notin K$ zur unbeschränkten Komponente noch den Punkt ∞ hinzu, so erhalten wir für jeden verallgemeinerten Kreis $K \subset \hat{E}$ eine Partition

$$\hat{E} = K \sqcup K^b \sqcup K^u$$



Eine Kreisspiegelung sowie einige verallgemeinerte Kreise und ihre Bilder unter besagter Kreisspiegelung

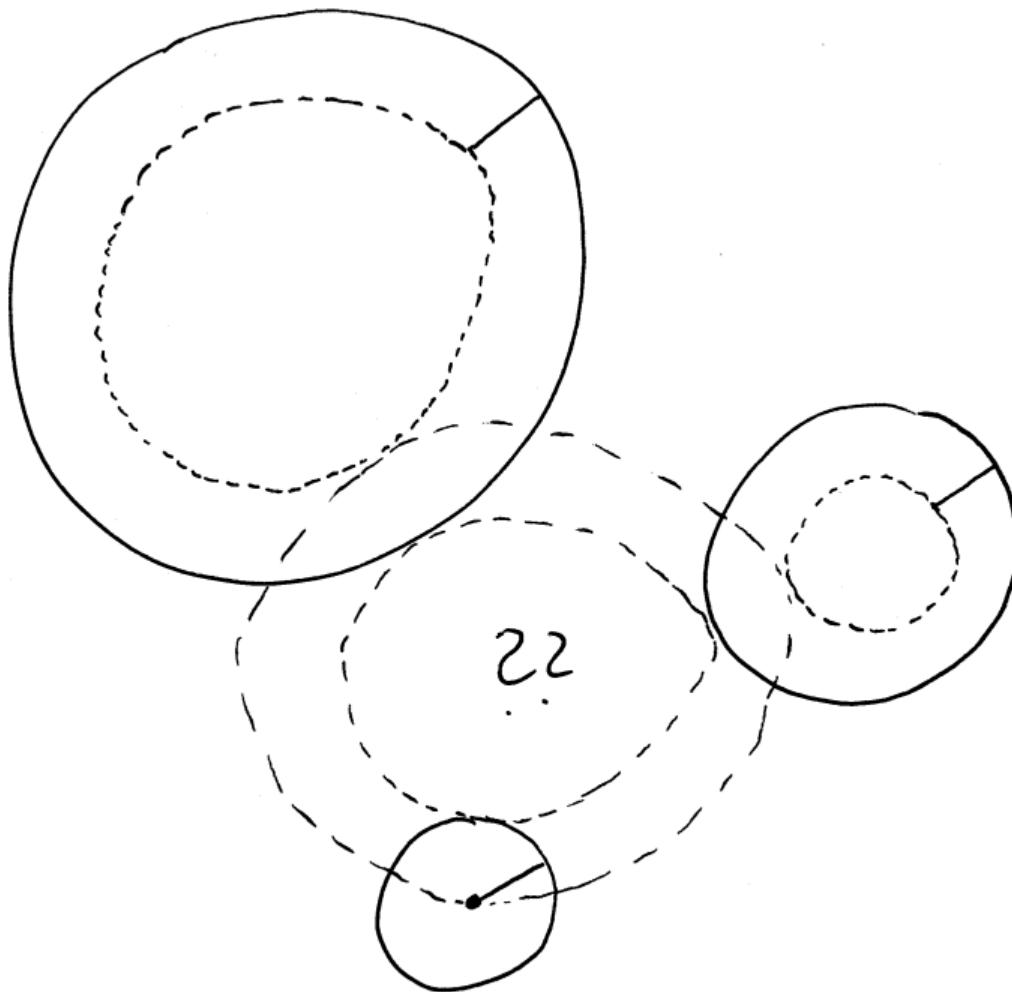
mit $s_K : K^b \xrightarrow{\sim} K^u$. Im Fall eines echten Kreises meint K^u die unbeschränkte Komponente zusammen mit dem Punkt ∞ und K^b die beschränkte Komponente. Ansonsten sei die Indizierung willkürlich gewählt. Es wäre natürlicher, für jeden verallgemeinerten Kreis $K \subset \hat{E}$ und jeden Punkt $p \in \hat{E} \setminus K$ gleich die disjunkte Zerlegung $\hat{E} = K \sqcup K^{\ni p} \sqcup K^{\not\ni p}$ einzuführen, aber so weit will ich hier nicht gehen.

2.1.11. Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben verallgemeinerte Kreise $K, L \subset \hat{E}$ sind wir in genau einem der folgenden vier Fälle:

1. Es gilt $K \cap L = \emptyset$ und L ist entweder in K^u oder in K^b enthalten. Wir sagen, die Kreise sind **disjunkt**;
2. Es gilt $|K \cap L| = 1$ und L liegt entweder in $K \cup K^u$ oder in $K \cup K^b$. Wir sagen, die Kreise **berühren sich**;
3. Es gilt $|K \cap L| = 2$ und L trifft K, K^u und K^b . Wir sagen, die Kreise **schneiden sich transversal**;
4. Es gilt $K = L$. Wir sagen, die Kreise **sind gleich**.

Insbesondere ist klar, daß sich zwei verallgemeinerte Kreise genau dann berühren, wenn sich ihre Bilder unter einer beliebigen Kreisspiegelung berühren. Ich verzichte auf einen formalen Beweis der in der obigen Fallunterscheidung enthaltenen Behauptungen in der Erwartung, daß sich der Leser davon leicht selbst in der von ihm gewünschten Ausführlichkeit und Exaktheit wird überzeugen können.

2.1.12 (**Apollonisches Problem**). Es geht erst einmal ganz salopp gesprochen darum, Kreise zu konstruieren, die drei verschiedene vorgegebene Kreise berühren. Manchmal gibt es gar keine Lösung, wenn nämlich ein Kreis die beiden anderen trennt. Es kann bis zu acht Lösungen geben. Ich diskutiere nun beispielhaft den Fall, daß wir drei paarweise disjunkte echte Kreise vor uns haben, von denen keiner in einem anderen enthalten ist. Wir suchen einen verallgemeinerten Kreis, der sie alle berührt und so, daß sie alle in derselben Komponente seines Komplements liegen. Indem wir die Radien unserer drei vorgegebenen Kreise um den Radius des kleinsten schrumpfen, können wir uns auf den ausgearteten Fall zurückziehen, daß mindestens einer unserer drei Ausgangskreise ein Punkt ist. Indem wir eine Kreisspiegelung an einem Kreis mit Zentrum in diesem besagten Punkt durchführen, wird der gesuchte Kreis eine zu suchende Gerade und wir können uns weiter auf das Problem zurückziehen, gemeinsame Tangenten an zwei vorgegebene Kreise zu finden. Das aber ist nun nicht mehr weiter schwierig.



Kreisschrumpfung zur Lösung des Apollonischen Problems

2.2 Möbiustransformationen

2.2.1. Sei E eine euklidische Ebene. Wir erinnern an ihre Vervollständigung $\hat{E} := E \sqcup \{\infty\}$ und an verallgemeinerte Kreise $K \subset \hat{E}$ und an die Spiegelung an einem verallgemeinerten Kreis $s_K : \hat{E} \rightarrow \hat{E}$. Eine Verknüpfung von Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen heißt eine **Möbiustransformation**. Die Möbiustransformationen bilden eine Untergruppe

$$\text{Möb} = \text{Möb}(\hat{E}) \subset \text{Ens}^\times(\hat{E})$$

der Gruppe der Permutationen der erweiterten Ebene $\hat{E} = E \sqcup \{\infty\}$. Alle Möbiustransformationen machen nach 2.1.7 verallgemeinerte Kreise zu verallgemeinerten Kreisen.

Satz 2.2.2 (Möbiustransformationen, die den Punkt ∞ festhalten). *Sei E eine euklidische Ebene. Die Möbiustransformationen von \hat{E} , die den Punkt ∞ festhalten, sind genau alle Fortsetzungen durch $\infty \mapsto \infty$ von Ähnlichkeiten von E .*

2.2.3. Der folgende Beweis zeigt allgemeiner für eine euklidische Ebene E , daß jede bijektive Selbstabbildung von \hat{E} mit Fixpunkt ∞ , die verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise überführt, eine Fortsetzung durch $\infty \mapsto \infty$ einer Ähnlichkeit von E sein muß. Insbesondere sind mit 2.1.5 alle bijektiven Selbstabbildungen von \hat{E} , die verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise überführen, bereits Möbiustransformationen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $E = \mathbb{R}^2$. Alle Ähnlichkeiten von \mathbb{R}^2 liefern, wenn man sie durch die Vorschrift $\infty \mapsto \infty$ fortsetzt, Möbiustransformationen. In der Tat erhält man alle Kongruenzen durch sukzessive Spiegelungen an Geraden und alle Streckungen mit positivem Streckfaktor als Verknüpfung der Kreisspiegelungen an zwei konzentrischen echten Kreisen. Sei nun umgekehrt φ eine Möbiustransformation mit $\varphi(\infty) = \infty$. So überführt die induzierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ Geraden in Geraden und ist damit nach [LA1] 3.3.1 schon einmal affin. Wir finden andererseits eine Ähnlichkeit $\psi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ derart, daß $\psi\varphi$ sowohl $(0, 0)$ als auch $(1, 0)$ festhält. Da dann $\psi\varphi$ affin ist und $(0, 0)$ festhält, muß $\psi\varphi$ linear sein. Da $\psi\varphi$ außerdem $(1, 0)$ festhält und echte Kreise in echte Kreise überführt, muß $\psi\varphi$ Längen von Vektoren erhalten und ist damit eine orthogonale Abbildung, genauer die Identität oder die Spiegelung an der x -Achse. Also ist auch φ eine Ähnlichkeit. \square

Lemma 2.2.4. *Je zwei verallgemeinerte Kreise können durch eine Möbiustransformation ineinander überführt werden.*

Beweis. Je zwei erweiterte Geraden können offensichtlich ineinander überführt werden, und jeder echte Kreis kann in eine erweiterte Gerade überführt werden

durch eine Kreisspiegelung an einem echten Kreis mit Zentrum auf unserem echten Kreis. \square

Proposition 2.2.5 (Charakterisierung von Kreisspiegelungen). *Jede Möbiustransformation, die einen vorgegebenen verallgemeinerten Kreis K punktweise festhält, ist die Kreisspiegelung s_K an besagtem Kreis oder die Identität.*

Beweis. Da sich nach 2.2.4 je zwei verallgemeinerte Kreise durch eine Möbiustransformation ineinander überführen lassen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, unser K sei eine erweiterte Gerade. Nach 2.2.2 müssen wir also nur zeigen, daß alle Ähnlichkeiten, die eine erweiterte Gerade punktweise festhalten, entweder die Identität oder die Spiegelung an besagter Gerade sind. Das ist aber klar. \square

Korollar 2.2.6. *Gegeben eine Möbiustransformation φ und ein verallgemeinerter Kreis K gilt $\varphi s_K \varphi^{-1} = s_{\varphi(K)}$.*

Beweis. Beide Seiten sind Möbiustransformationen, die nicht die Identität sind und den verallgemeinerten Kreis $\varphi(K)$ punktweise festhalten. Das Korollar folgt so aus der Charakterisierung von Kreisspiegelungen 2.2.5. \square

Korollar 2.2.7. *Gegeben eine Möbiustransformation φ und ein verallgemeinerter Kreis K ist $\varphi(K) = K$ gleichbedeutend zu $\varphi s_K = s_K \varphi$.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Korollar 2.2.6. \square

Definition 2.2.8. Sei E eine euklidische Ebene. Gegeben verallgemeinerte Kreise $K, L \subset \hat{E}$ sagen wir, K **stehe senkrecht auf** L und schreiben $K \perp L$, wenn gilt $K \neq L$ und $s_K s_L = s_L s_K$.

2.2.9 (**Bezug zur Anschauung**). Nach 2.2.7 ist $s_K s_L = s_L s_K$ gleichbedeutend zur Bedingung $s_K(L) = L$, die vielleicht besser unserem anschaulichen Begriff von Senkrechtstehen entspricht, die aber weniger symmetrisch ist.

2.2.10 (**Bezug zur Differentialgeometrie**). Wenn Sie etwa aus [AN2] 4.2.6 wissen, welche Teilmengen $M \subset E$ „eindimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeiten“ heißen, und etwa aus [AN2] 10.5.2, wie für jeden Punkt $p \in M$ solch einer Untermannigfaltigkeit der „Tangentenraum“ $T_p M \subset \vec{E}$ erklärt wird, so werden Sie unschwer erkennen, daß die Schnitte unserer verallgemeinerten Kreise mit E eindimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeiten sind und daß zwei verallgemeinerte Kreise K, L genau dann aufeinander senkrecht stehen im Sinne der obigen Definition, wenn sie mindestens einen Schnittpunkt in E haben und wenn für jeden Punkt $p \in K \cap L$ mit $p \neq \infty$ gilt $T_p K \perp T_p L$.

Proposition 2.2.11. *Sei E eine euklidische Ebene. Sind $K, L \subset \hat{E}$ verallgemeinerte Kreise mit $K \perp L$ und ist φ eine Möbiustransformation, so gilt auch $\varphi(K) \perp \varphi(L)$.*

Vorschau 2.2.12. Wenn Sie bereits etwas mit den Anfängen der Funktionentheorie vertraut sind, mag Ihnen bekannt sein, daß alle biholomorphen Abbildungen „winkeltreu“ sind. Mit den Resultaten des folgenden Abschnitts oder Grundkenntnissen in Differentialgeometrie folgt leicht, daß auch alle Möbiustransformationen „winkeltreu“ sind. Ich will aber an dieser Stelle nicht diskutieren, was das nun ganz genau bedeuten soll.

Beweis. Kommutieren die Kreisspiegelungen s_K und s_L , so gilt dasselbe für die Kreisspiegelungen $s_{\varphi(K)} = \varphi s_K \varphi^{-1}$ und $s_{\varphi(L)} = \varphi s_L \varphi^{-1}$. \square

2.2.13. Gegeben zwei disjunkte verallgemeinerte Kreise K, L verstehen wir unter einer **geschlossenen Kreiskette zwischen K und L** eine Familie

$$M_1, \dots, M_n$$

von verallgemeinerten Kreisen, die alle K und L berühren und so, daß M_i und M_{i+1} sich für $i = 1, \dots, n-1$ jeweils auch untereinander berühren und daß M_n auch M_1 berührt, daß aber M_i und M_j sonst disjunkt sind.

Satz 2.2.14 (Kreiskettensatz von Steiner). *Seien zwei disjunkte Kreise gegeben. Gehört ein Kreis, der sie beide berührt, zu einer geschlossenen Kreiskette zwischen unseren beiden disjunkten Kreisen, so gehört jeder Kreis, der sie beide berührt, zu einer geschlossenen Kreiskette zwischen unseren beiden disjunkten Kreisen.*

2.2.15. In diesem Satz und seinem Beweis sind Kreise, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, stets im verallgemeinerten Sinne zu verstehen. Wenn man den Satz auf den Fall von zwei echten Kreisen K, L spezialisiert, von denen einer im anderen liegt, in Formeln $L \subset K^b$, so muß man das noch nicht einmal dazusagen.

Beweis. Für zwei disjunkte konzentrische echte Kreise ist das klar. Für zwei beliebige disjunkte Kreise gilt es offensichtlich genau dann, wenn es für ihre Bilder unter irgendeiner Möbiustransformation gilt. Es reicht also zu zeigen, daß wir für je zwei disjunkte Kreise eine Möbiustransformation finden, die sie in konzentrische echte Kreise überführt. Das schließlich leistet das folgende Lemma 2.2.16. \square

Lemma 2.2.16. *Zu je zwei disjunkten verallgemeinerten Kreisen K, L finden wir eine Möbiustransformation, die sie in konzentrische echte Kreise überführt.*

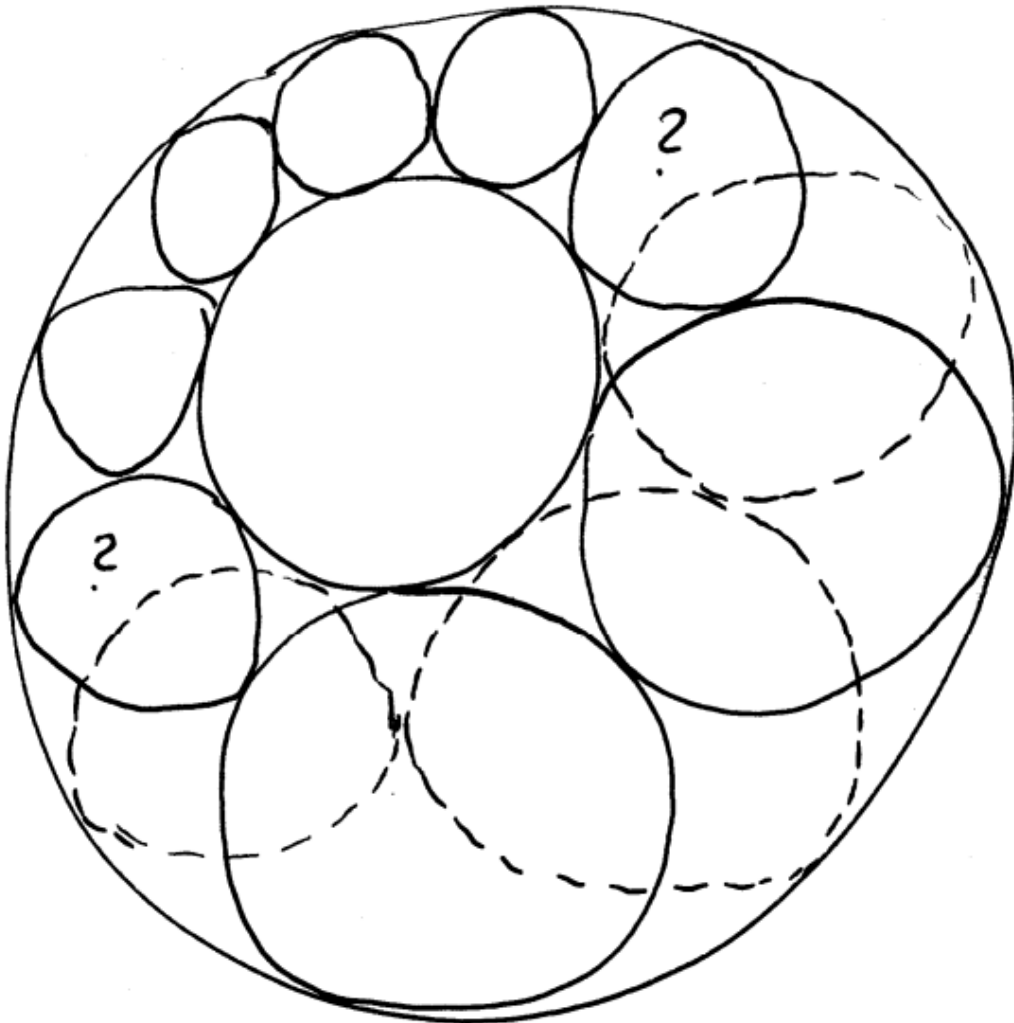


Illustration zum Kreiskettensatz. Da sich die durchgezogen eingezeichnete Kreiskette schließt, muß sich auch die nur teilweise und gestrichelt eingezeichnete Kreiskette schließen und muß dann ebenfalls aus acht Kreisen bestehen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß L eine erweiterte Gerade ist. Dann ist notwendig K ein echter Kreis. Nun finden wir sicher eine erweiterte Gerade A mit $A \perp L$ durch das Zentrum von K , also mit $A \perp K$. Außerdem finden wir mit elementaren Konstruktionen einen echten Kreis B mit Zentrum in $A \cap L$, der auf K senkrecht steht. Für jede Inversion s an einem Punkt von $A \cap B$ sind dann $s(A)$ und $s(B)$ aufeinander senkrechte erweiterte Geraden, die beide auf $s(K)$ und $s(L)$ senkrecht stehen. Damit aber sind $s(K)$ und $s(L)$ konzentrische echte Kreise. \square

Übungen

2.2.17. Die folgenden vier Übungen 2.2.18, 2.2.19, 2.2.20 und 2.2.21 werden wir bei unserer Konstruktion 2.4.5 einer nichteuklidischen Ebene benötigen.

Übung 2.2.18. Gegeben ein verallgemeinerter Kreis L und zwei Punkte p, q gibt es stets einen verallgemeinerten Kreis K , der durch unsere beiden Punkte geht und auf L senkrecht steht. Unter der Annahme $p \neq q$, $s_L(q)$ ist K eindeutig bestimmt.

Übung 2.2.19. Gegeben zwei verallgemeinerte Kreise $K \perp L$ und zwei Punkte $p, q \in L \setminus K$ gibt es stets eine Möbiustransformation, die unsere beiden verallgemeinerten Kreise stabilisiert und den einen Punkt auf den anderen abbildet.

Übung 2.2.20. Gegeben zwei verallgemeinerte Kreise, die beide auf einem Dritten senkrecht stehen, gibt es stets eine Möbiustransformation, die den Dritten stabilisiert und den Ersten auf den Zweiten abbildet.

Übung 2.2.21. Es gibt genau zwei Möbiustransformationen von $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$, die sowohl die erweiterte x -Achse als auch das Stück $\{(0, y) \mid 0 < y \leq 1\}$ der y -Achse stabilisieren.

2.3 Möbiusgeometrie und komplexe Zahlen

2.3.1. Eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ von komplexen Vektorräumen heißt **schieflinear**, wenn sie ein Homomorphismus der zugrundeliegenden additiven Gruppen ist und wenn zusätzlich für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in V$ gilt

$$\varphi(\lambda v) = \bar{\lambda} \varphi(v)$$

2.3.2 (**Projektivierte schieflineare Automorphismen**). Bezeichne $\gamma : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ die schieflineare Abbildung $\gamma : (w, z) \mapsto (\bar{w}, \bar{z})$. Die Gruppe

$$\mathrm{GL}(2; \mathbb{C}) \langle \gamma \rangle := \mathrm{GL}(2; \mathbb{C}) \sqcup \mathrm{GL}(2; \mathbb{C}) \gamma \subset \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{C}^2)$$

aller linearen oder schieflinearen Automorphismen des komplexen Vektorraums \mathbb{C}^2 operiert offensichtlich auf der Menge $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ aller Ursprungsgeraden in \mathbb{C}^2 und

wir erhalten in Formeln einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{GL}(2; \mathbb{C})\langle\gamma\rangle \rightarrow \mathrm{Ens}^\times(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$$

Unter der Bijektion $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto \langle 1, z \rangle$ und $\infty \mapsto \langle 0, 1 \rangle$ wird daraus ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{GL}(2; \mathbb{C})\langle\gamma\rangle \rightarrow \mathrm{Ens}^\times(\hat{\mathbb{C}})$$

Man sieht leicht ein, daß unter unserer Operation die Untergruppe $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R})\langle\gamma\rangle$ die erweiterte Gerade $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$ stabilisiert. Unser γ wird zur Spiegelung an der erweiterten Gerade $\hat{\mathbb{R}}$ und eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2; \mathbb{C})$ liefert die Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{C}}$ mit $z \mapsto (c + dz)/(a + bz)$ falls $z \neq \infty$ und $a + bz \neq 0$ sowie gewissen Sonderregeln an den verbleibenden Stellen.

Satz 2.3.3 (Möbiustransformationen und Projektivitäten). *Der in 2.3.2 konstruierte Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(2; \mathbb{C})\langle\gamma\rangle \rightarrow \mathrm{Ens}^\times(\hat{\mathbb{C}})$ induziert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\mathrm{GL}(2; \mathbb{C})\langle\gamma\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$$

auf die Gruppe der Möbiustransformationen. Der Kern dieses Homomorphismus ist die Gruppe $\mathbb{C}^\times I$ aller von Null verschiedenen skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß unser Gruppenhomomorphismus in der Gruppe der Möbiustransformationen landet. Es reicht zu zeigen, daß er irgendwelche Erzeuger unserer Gruppe $\mathrm{GL}(2; \mathbb{C})\langle\gamma\rangle$ auf Möbiustransformationen abbildet. Erzeuger sind etwa die Elementarmatrizen sowie γ oder auch die Matrizen $\mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie γ . Von den letzteren Erzeugern geht $\mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ auf eine Drehstreckung und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf die Translation $z \mapsto z + 1$, beide erweitert um $\infty \mapsto \infty$, die nach 2.2.2 beide Möbiustransformationen sind. Weiter geht $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf die Abbildung $z \mapsto z^{-1}$ alias die Kreispiegelung am Einheitskreis gefolgt von der Spiegelung an der erweiterten Gerade $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$, also auch auf eine Möbiustransformation. Und schließlich geht γ auf die Spiegelung an der erweiterten Gerade $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$ und wir sehen so, daß unser Gruppenhomomorphismus in der Tat in $\mathrm{Möb}(\mathbb{C})$ landet. Um zu sehen, daß er surjektiv ist, bemerken wir, daß in seinem Bild die Inversion am Einheitskreis liegt sowie alle Streckungen und Translationen, mithin alle Inversionen an echten Kreisen. Weiter bemerken wir, daß in seinem Bild die Spiegelung an einer erweiterten Geraden liegt sowie alle Drehungen um den Ursprung und alle Translationen, mithin alle Spiegelungen an erweiterten Geraden. Folglich ist unser Gruppenhomomorphismus surjektiv. Es bleibt, den Kern zu betimmen. Nun kann ein schieflinerer Automorphismus φ von \mathbb{C}^2 nicht

alle Geraden stabilisieren, denn aus $\varphi(1, 0) = (\lambda, 0)$ und $\varphi(0, 1) = (0, \mu)$ folgt $\varphi(1, 1) = (\lambda, \mu)$, also $\lambda = \mu$ und dann $\varphi(i, 1) = \lambda(-i, 1)$ und das zeigt, daß die Gerade mit Richtungsvektor $(i, 1)$ nicht stabilisiert wird, wenn die Geraden mit den Richtungsvektor $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ stabilisiert werden. Im Kern können also nur lineare Automorphismen liegen, und von denen wissen wir bereits aus 1.5.8, daß genau die skalaren Matrizen als die Identität auf der projektiven Gerade operieren. \square

2.3.4. Sei E eine euklidische Ebene. Jede Möbiustransformation $\varphi : \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ induziert eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : E \setminus \{\varphi^{-1}(\infty)\} \rightarrow E$ und die Funktionaldeterminante dieser Abbildung hat keine Nullstelle. Sie ist also entweder an jeder Stelle positiv oder an jeder Stelle negativ. Es ist klar, daß wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\text{Möb}(\hat{E}) \rightarrow \{+1, -1\}$$

erhalten, indem wir jeder Möbiustransformation das Vorzeichen dieser Funktionaldeterminante zuordnen. Dessen Kern bezeichnen wir mit $\text{Möb}^+(\hat{E})$ und nennen seine Elemente **orientierungserhaltende Möbiustransformationen**. Das Komplement des Kerns bezeichnen wir mit $\text{Möb}^-(\hat{E})$ und nennen seine Elemente **orientierungsumkehrende Möbiustransformationen**. Natürlich haben wir dann eine Zerlegung

$$\text{Möb}(\hat{E}) = \text{Möb}^+(\hat{E}) \sqcup \text{Möb}^-(\hat{E})$$

Alle Kreisspiegelungen sind orientierungsumkehrende Möbiustransformationen. Man prüft leicht, daß unser Gruppenhomomorphismus aus Satz 2.3.3 einen Isomorphismus

$$\text{PGL}(2; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$$

der projektiven Gruppe mit der Gruppe der orientierungserhaltenden Möbiustransformationen induziert. Salopp gesprochen sind also die orientierungserhaltenden Möbiustransformationen das Analogon im komplex-eindimensionalen Fall unserer Fototransformationen 1.5.4 im reell-zweidimensionalen Fall, wo wir einen Isomorphismus $\text{PGL}(3; \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} F$ angegeben hatten.

Übungen

Übung 2.3.5 (Stabilisator von $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ in den Möbiustransformationen). Bezeichne $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$ die durch $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ bestimmte erweiterte Gerade in der erweiterten euklidischen Ebene zu \mathbb{C} und $\text{Möb}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{C}}) \subset \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ die Gruppe aller Möbiustransformationen, die diese erweiterte Gerade stabilisieren. Man zeige,

daß unser Gruppenhomomorphismus $GL(2; \mathbb{C})\langle\gamma\rangle \rightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ aus 2.3.3 einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$GL(2; \mathbb{R})\langle\gamma\rangle \rightarrow \text{Möb}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{C}})$$

mit Kern $\mathbb{R}^{\times}I$ induziert. Hinweis: Nach 2.2.7 besteht das Bild aus denjenigen Möbiustransformationen, die mit dem Bild von γ kommutieren.

2.3.6. Im folgenden bezeichnet \mathbb{H} nicht den Schiefkörper der Quaternionen, sondern die offene obere Halbebene in der komplexen Zahlenebene. Ich hoffe, der Leser kann aus dem Kontext erschließen, was jeweils gemeint ist.

Übung 2.3.7 (Stabilisator einer Hemisphäre der Zahlenkugel). Bezeichne $\mathbb{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\} \subset \mathbb{C}$ die durch die reelle Achse begrenzte offene obere Halbebene und $\text{Möb}_{\mathbb{H}}(\hat{\mathbb{C}})$ die Gruppe aller Möbiustransformationen, die diese offene Halbebene stabilisieren. Wir setzen $\tau := \text{diag}(1, -1)$. Man zeige, daß unser surjektiver Gruppenhomomorphismus $GL(2; \mathbb{R})\langle\gamma\rangle \rightarrow \text{Möb}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{C}})$ aus 2.3.5 einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$SL(2; \mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle \rightarrow \text{Möb}_{\mathbb{H}}(\hat{\mathbb{C}})$$

mit Kern $\pm I$ induziert, wobei das Bild von $SL(2; \mathbb{R})$ gerade $\text{Möb}_{\mathbb{H}}(\hat{\mathbb{C}}) \cap \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$ ist und $\tau\gamma$ der Spiegelung an der imaginären Achse $\mathbb{R}i$ entspricht. Explizit wird diese Operation von $SL(2; \mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle$ auf \mathbb{H} gegeben durch die Formeln

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{c + dz}{a + bz} \quad \text{und} \quad (\tau\gamma)z = -\bar{z}.$$

Übung 2.3.8 (Die Hemisphäre als homogener Raum). Man zeige, daß die in 2.3.7 konstruierte Operation von $SL(2; \mathbb{R})$ auf \mathbb{H} transitiv ist und daß $SO(2)$ die Standgruppe von i ist. Unsere Operation induziert mithin eine Bijektion

$$SL(2; \mathbb{R})/SO(2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$$

A fortiori induziert die in 2.3.7 konstruierte Operation von $SL(2; \mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle$ auf \mathbb{H} eine Bijektion $SL(2; \mathbb{R})\langle\tau\gamma\rangle/SO(2)\langle\tau\gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$ und die Fixpunktmenge von $\tau\gamma$ ist die offene halbe imaginäre Achse $\mathbb{H}^{\tau\gamma} = i\mathbb{R}_{>0}$. Im übrigen induziert die Operation von $SL(2; \mathbb{R})$ auf $i \in \mathbb{H}$ eine Bijektion der Untergruppe $\{\text{diag}(\lambda, \lambda^{-1}) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ mit unserer Fixpunktmenge $\mathbb{H}^{\tau\gamma}$.

2.4 Die hyperbolische Ebene

2.4.1. Über zweitausend Jahre lang wurde die Geometrie nach einem axiomatischen Aufbau gelehrt, den Euklid in seinen „Elementen“ niedergelegt hat. Dieses

Buch war auch ein Modell für den axiomatischen Aufbau einer Theorie überhaupt und spielte damit eine zentrale Rolle beim Aufbau der modernen Mathematik. Als Grundlage für die heutige Mathematik reichen jedoch Euklid's Definitionen wie etwa „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“ oder „Eine Linie ist eine breitenlose Länge“ nicht mehr aus. Stattdessen bauen wir die heutige Mathematik seit Cantor auf den Begriffen der Mengenlehre auf. Natürlich sind die Grundbegriffe der naiven Mengenlehre ähnlich vage, aber hier existiert mittlerweile in der Logik ein solider Unterbau, auf den man sich im Notfall stützen kann. Eine Formalisierung der Ebene des Euklid im Rahmen der Mengenlehre sind unsere fasteuklidischen Ebenen mit Parallelenaxiom aus 1.1.17. Wir haben dort auch gezeigt, daß und wie die Strukturen auf einer Menge X als fasteuklidische Ebene mit Parallelenaxiom eineindeutig den Strukturen auf derselben Menge X als euklidische Ebene im Sinne der linearen Algebra [LA2] 1.5.1 entsprechen.

2.4.2. Über Jahrhunderte ist versucht worden, das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen von Euklid herzuleiten, bis man im 19.-ten Jahrhundert Geometrien fand, die alle Axiome von Euklid mit Ausnahme des Parallelenaxioms erfüllen. Sie heißen die **nichteuklidischen Geometrien**. Wir geben nun eine unserer Axiomatik angepaßte Präzisierung für die Behauptung der Existenz nichteuklidischer Geometrien.

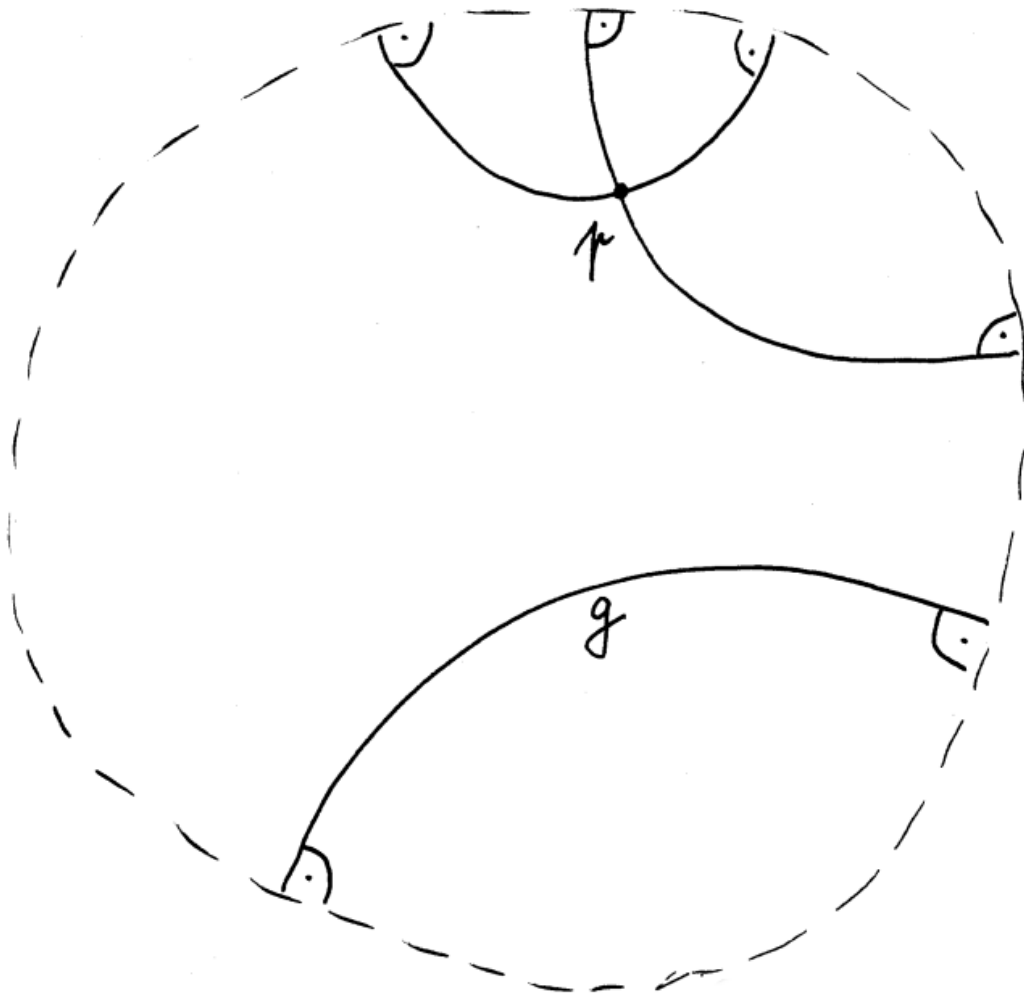
Satz 2.4.3 (Nichteuklidische Geometrien). *Es gibt fasteuklidische Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht gilt.*

2.4.4. Der Beweis besteht in der Konstruktion eines Beispiels, ja einer ganzen Klasse von paarweise isomorphen Beispielen, die unter dem Oberbegriff der **hyperbolischen Ebene** zusammengefaßt werden. Für den Beweis unseres Satzes reicht natürlich eines dieser Beispiele bereits aus. Die anderen Beispiele aber helfen, diese Struktur besser zu verstehen.

2.4.5 (**Kreisscheibenmodell der hyperbolischen Ebene**). Als Punktmenge X nehmen wir alle Punkte der offenen Einheitskreisscheibe

$$X := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Als Geraden nehmen wir alle Schnitte mit der offenen Einheitskreisscheibe von solchen verallgemeinerten Kreisen alias gewöhnlichen Kreisen oder Geraden, die auf dem Einheitskreis senkrecht stehen. Nach 2.2.18 ist das eine Inzidenzgeometrie. Als Zwischenrelation nehmen wir die Offensichtliche und verzichten auf das formale Prüfen der Eigenschaften, das keine wesentlichen Schwierigkeiten aufwirft und dem Leser leicht selbst gelingen wird. Als Gruppe K von Kongruenzen schließlich nehmen wir die Gruppe aller Möbiustransformationen, die die offene Einheitskreisscheibe in sich selber überführen. Mit den Übungen 2.2.19



Kreisscheibe von Poincaré mit einer Gerade g und einem Punkt p außerhalb dieser Gerade und zwei verschiedenen Parallelen zu g durch den Punkt p

und 2.2.20 und 2.2.21 sieht man leicht, daß es für je zwei Halbgeraden A, B in X genau zwei Transformationen $h, k \in K$ gibt mit $h(A) = k(A) = B$. Daß es in dieser Inzidenzgeometrie durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mehr als eine Parallele zu besagter Geraden gibt, ist offensichtlich. Dieses Modell der hyperbolischen Ebene heißt die **Kreisscheibe von Poincaré**.

2.4.6 (Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene). Die offene Einheitskreisscheibe können wir mithilfe einer Möbiustransformation bijektiv mit der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ identifizieren. Unter einer und jeder solchen Identifikation entsprechen die Möbiustransformationen den Möbiustransformationen. Weiter entsprechen die verallgemeinerten Kreise, die senkrecht auf dem Einheitskreis stehen, den verallgemeinerten Kreisen, die senkrecht auf der erweiterten reellen Achse stehen. Wir erhalten so ein weiteres Modell derselben Struktur, die **obere Halbebene von Poincaré**

$$X = \mathbb{H}$$

Im Bild der Kreisscheibe sind die durch Rotation gegebenen Automorphismen besonders gut zu sehen, im Bild der oberen Halbebene die durch Translation in Richtung der reellen Achse gegebenen Automorphismen. Für die Kongruenzgruppe K liefert 2.3.7 in diesem Modell einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} K^+$ mit den Notationen $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})/\pm I$ und $K^+ := K \cap \mathrm{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$.

2.4.7 (Gruppentheoretisches Modell der hyperbolischen Ebene). Das Modell der oberen Halbebene führt mit unseren Bijektionen aus 2.3.8 zum **gruppentheoretischen Modell** als die Nebenklassenmenge

$$X := \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$$

oder äquivalent $X := \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})\langle \tau\gamma \rangle / \mathrm{SO}(2)\langle \tau\gamma \rangle$. In diesem Modell ist unsere Kongruenzgruppe K das Bild des durch Linksmultiplikation gegebenen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})\langle \tau\gamma \rangle \rightarrow \mathrm{Ens}^\times(X)$. Eine erste Gerade ist die Fixpunktmenge $X^{\tau\gamma}$, die anderen Geraden sind die Bilder dieser Gerade unter K . In diesem Modell sind alle Automorphismen gut zu sehen, aber die Struktur als Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation ist weniger offensichtlich und ich kann sie von unserem Kenntnisstand aus nur über die Isomorphie mit den anderen Modellen begründen.

2.4.8 (Hyperboloidmodell der hyperbolischen Ebene). Die Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ operiert durch Konjugation auf dem reellen Vektorraum $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ aller reellen (2×2) -Matrizen mit Spur Null. Man prüft unschwer, daß die Standgruppe von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gerade $\mathrm{SO}(2)$ ist und die Bahn dieses Elements unter $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ die Menge aller spurlosen Matrizen A der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ mit $\mathrm{tr}(A^2) = 2(a^2 + bc) = -2$ und $b > 0$. Diese Bahn ist also ein Hyperboloid und ebenfalls in Bijektion zu

$SL(2; \mathbb{R})/SO(2)$. Daher mag auch die Bezeichnung als **hyperbolische Ebene** rühren. In Hyperboloidmodell kann man die Inzidenzstruktur gut sehen, die Geraden sind in diesem Fall genau alle nichtleeren Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ mit unserem Hyperboloid. Das Hyperboloidmodell ist jedoch schwer zu zeichnen, da es sich um eine Fläche im dreidimensionalen Raum handelt. Führen wir neue Koordinaten ein durch $a = x$, $b = y + z$ und $c = y - z$, so wird unser Hyperboloid gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ und die Zusatzbedingung $z > 0$, wir haben also in Formeln

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$$

Diese Definition verallgemeinern wir in [?] ?? zur Definition des „ n -dimensionalen hyperbolischen Raums“, einer speziellen „riemannschen Mannigfaltigkeit“.

2.4.9 (Klein'sches Modell der hyperbolischen Ebene). Es ist klar, daß die Zentralprojektion mit Augpunkt im Ursprung auf die affine Ebene $\{(x, y, 1)\}$ unser Hyperboloid bijektiv mit der offenen Kreisscheibe $\{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ identifiziert. Unter dieser Bijektion entsprechen die Geraden unserer Inzidenzstruktur den mehrpunktigen Schnitten von Geraden mit der besagten Kreisscheibe alias den „Sehnen“. Insbesondere ist dies Modell verschieden von der Kreisscheibe von Poincaré. Es heißt das **Klein'sche Modell** der hyperbolischen Ebene. In diesem Modell ist die Inzidenzstruktur mit Zwischenrelation besonders gut zu sehen, aber die meisten Kongruenzen sind eher schwer zu sehen.

2.5 Möbiusgeometrie in beliebigen Dimensionen

2.5.1 (Spiegelungen an verallgemeinerten Sphären). Sei E ein endlichdimensionaler euklidischer Raum mit Längengerade \mathbb{L} . Wir setzen $\hat{E} := E \sqcup \{\infty\}$. Eine Teilmenge

$$K \subset \hat{E}$$

heiße eine **verallgemeinerte Sphäre**, wenn sie entweder eine Sphäre in E ist, also $K = K(c; r) := \{x \in E \mid \|x - c\| = r\}$ für $c \in E$ und $r \in \mathbb{L}_{>0}$, oder aber eine affine Hyperebene disjunkt vereinigt mit der einpunktigen Menge $\{\infty\}$. Im ersten Fall sprechen wir von einer **echten Sphäre**, im Zweiten von einer **erweiterten Hyperebene**. Die Bezeichnung K rührt von der alternativen Bezeichnung einer Sphäre als „Kugelschale“ her. Jeder verallgemeinerten Sphäre K ordnen wir eine Abbildung

$$s_K : \hat{E} \rightarrow \hat{E}$$

zu, die wir die **Spiegelung an unserer verallgemeinerten Sphäre** nennen, und zwar die übliche Spiegelung $E \rightarrow E$ mit der Zusatzregel $\infty \mapsto \infty$ im Fall, daß

unsere verallgemeinerte Sphäre eine Hyperebene ist, und die **Inversion**

$$y \mapsto c + \frac{r^2}{\|y - c\|^2}(y - c)$$

mit der Zusatzregel $c \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto c$ im Fall einer echten Sphäre $K = K(c; r)$. Die von Spiegelungen an verallgemeinerten Sphären erzeugte Untergruppe von $\text{Ens}^\times(\hat{E})$ heißt die **Möbiusgruppe** $\text{Möb}(\hat{E})$ und ihre Elemente heißen **Möbiustransformationen**. Die von allen Verknüpfungen von zwei solchen Spiegelungen erzeugte Untergruppe heißt die Gruppe der **orientierungserhaltenden Möbiustransformationen**. Sie besteht genau aus denjenigen Möbiustransformationen, deren Differential [AN2] 2.3.1 an jeder Stelle von E , die nicht gerade nach ∞ abgebildet wird, die Orientierung erhält.

2.5.2 (Möbiustransformationen erhalten verallgemeinerte Sphären). Möbiustransformationen überführen verallgemeinerte Sphären stets in verallgemeinerte Sphären. Man erkennt das, indem man die Argumentation aus 2.1.7 wiederholt. Andererseits zeigt man wie in 2.2.4 auch in beliebiger Dimension leicht, daß sich je zwei verallgemeinerte Sphären durch eine Möbiustransformation ineinander überführen lassen.

2.5.3 (Identifikation der erweiterten Ebene mit einer Sphäre). Gegeben ein euklidischer Raum mit einer Hyperebene $E \supset H$ induziert die Inversion an jeder echten Sphäre $K \subset E$, deren Mittelpunkt nicht auf H liegt, eine Bijektion

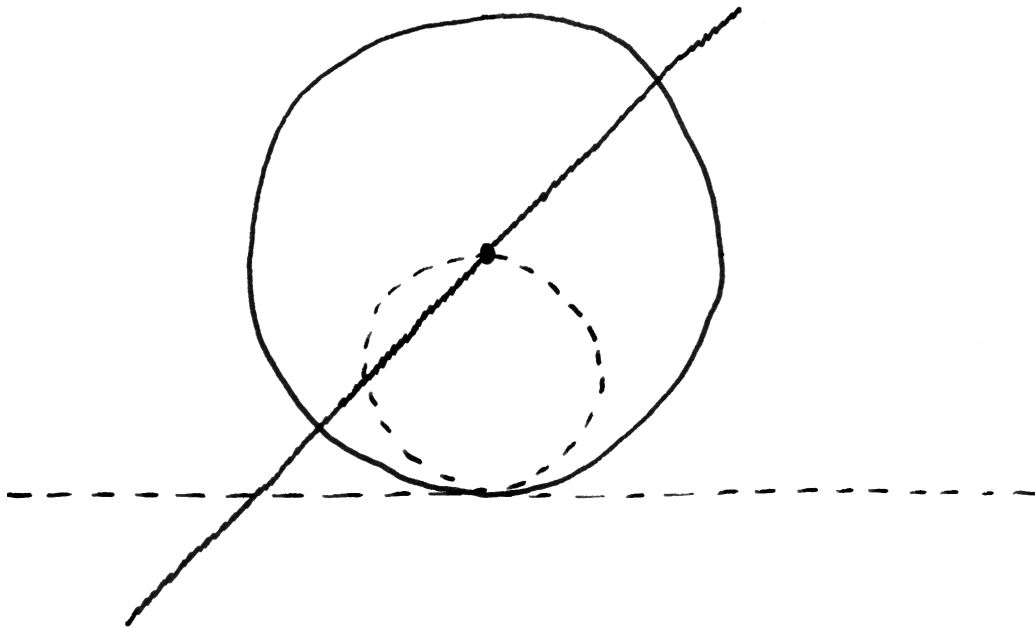
$$\hat{H} \xrightarrow{\sim} L$$

von der erweiterten Hyperebene $\hat{H} = H \sqcup \{\infty\}$ mit einer echten Sphäre $L \subset E$. Man prüft unschwer, daß es genau eine Topologie auf \hat{H} gibt, für die alle diese Bijektionen Homöomorphismen sind. So versehen wir unsere erweiterten Räume und insbesondere auch $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ mit einer Topologie. Will man an diese Vorstellung appellieren, so nennt man $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ die **Riemann'sche Zahlenkugel**.

2.5.4 (Kreise auf der Riemann'sche Zahlenkugel). Unter jeder der Identifikationen $S^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ aus 2.5.3 entsprechen die anschaulichen Kreise auf der Einheitssphäre genau unseren verallgemeinerten Kreisen in $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$. In der Tat haben wir unsere Identifikation ja als die Restriktion einer Möbiustransformation auf $\mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ konstruiert, und diese muß mehrpunktige Schnitte von zwei verallgemeinerten Sphären auf ebensolche abbilden.

Übungen

Übung 2.5.5 (Reelle Formen und verallgemeinerte Kreise). Man zeige: Unter der Komposition $\text{Pot}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}) \xrightarrow{\sim} \text{Pot}(\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\})$



Der gestrichelte Kreis wird durch die „stereographische Projektion“ mit der gestrichelten Geraden identifiziert. Demnächst werden Sie diese Abbildung auch als „Inversion“ am durchgezogenen Kreis verstehen lernen. Diese Inversion hält jeden Punkt auf dem durchgezogenen Kreis fest und wirft sein Zentrum nach ∞ . Folglich vertauscht die Inversion am durchgezogenen Kreis den gestrichelten Kreis mit der gestrichelten Geraden. Die gezackte Gerade oder vielmehr der zugehörige verallgemeinerte Kreis wird von besagter Inversion auf sich selbst geworfen, folglich wirkt unsere Inversion auf den Punkten des gestrichelten Kreises wie die stereographische Projektion.

der offensichtlichen Abbildungen wird das System $\text{ReFo} \subset \text{Pot}(\mathbb{C}^2)$ der reellen Formen nach [LA2] 1.12.45 von \mathbb{C}^2 auf das System $\text{VerKr} \subset \text{Pot}(\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\})$ der verallgemeinerten Kreise abgebildet. Hinweis: Das System der verallgemeinerten Kreise ist die Bahn der erweiterten x -Achse in $\text{Pot}(\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\})$ unter der Gruppe der Möbiustransformationen. Unter der so gegebenen Surjektion $\text{ReFo} \rightarrow \text{VerKr}$ oder ausgeschrieben

$$\{\text{Reelle Formen von } \mathbb{C}^2\} \rightarrow \{\text{Verallgemeinerte Kreise in } \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}\}$$

werden zwei reelle Formen genau dann auf denselben verallgemeinerten Kreis abgebildet, wenn sie durch die Multiplikation mit einer von Null verschiedenen komplexen Zahl auseinander hervorgehen.

Übung 2.5.6. Man zeige, daß Inversionen Winkel erhalten in dem Sinne, daß ihr Differential an jedem vom Zentrum der Inversion verschiedenen Punkt Winkel erhält. Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß *eine* Orthonormalbasis unter dem Differential an jedem festen Punkt eine mit einem festen Faktor skalierte Orthonormalbasis wird. Man betrachte hierzu Orthonormalbasen, bei denen ein Vektor die Richtung vom Zentrum der Inversion zu unserem festen Punkt angibt. Alternativ löst das auch [AN2] 2.6.18 in sogar noch größerer Allgemeinheit.

Ergänzende Übung 2.5.7. Sei E ein endlichdimensionaler euklidischer Raum. Die Möbiustransformationen $\hat{E} \rightarrow \hat{E}$ mit Fixpunkt ∞ sind genau die Fortsetzungen der Ähnlichkeiten von E durch die Vorschrift $\infty \mapsto \infty$. Hinweis: Mithilfe von [LA1] 3.3.1 folgere man dann, daß unsere Abbildung auf E affin sein muß. Mit [LA2] 1.10.18 folgere man dann, daß diese affine Abbildung eine Ähnlichkeit sein muß.

Ergänzende Übung 2.5.8. Sei E ein endlichdimensionaler euklidischer Raum einer Dimension $\dim E \geq 2$. Man zeige, daß jede bijektive Abbildung $\hat{E} \xrightarrow{\sim} \hat{E}$ mit der Eigenschaft, daß das Bild jeder verallgemeinerten Sphäre eine verallgemeinerte Sphäre ist, bereits eine Möbiustransformation sein muß. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall zurück, daß ∞ ein Fixpunkt unserer Abbildung ist, so daß man 2.5.7 anwenden kann.

Ergänzende Übung 2.5.9. Wir betrachten für $n \geq 1$ das Anfügen einer Null $\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \sqcup \{\infty\}$. Man zeige, daß eine Selbstabbildung von $\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ eine Möbiustransformation ist genau dann, wenn sie sich zu einer Möbiustransformation auf $\mathbb{R}^{n+1} \sqcup \{\infty\}$ fortsetzen läßt. Hinweis: Will man direkte Rechnung vermeiden, mag man mit 2.5.8 argumentieren.

Ergänzende Übung 2.5.10. Hält eine Möbiustransformation auf $\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ für $n \geq 1$ eine verallgemeinerte Sphäre punktweise fest, so ist sie entweder die Identität oder aber die Inversion an besagter verallgemeinerter Sphäre. Hinweis: 2.5.7

Ergänzende Übung 2.5.11. Man betrachte die **stereographische Projektion** der Einheitssphäre auf die xy -Ebene vermehrt um einen Punkt ∞ , die jedem Punkt außer dem Nordpol $n = (0, 0, 1)$ den Schnittpunkt mit der xy -Ebene der Geraden durch diesem Punkt und den Nordpol zuordnet, und die den Nordpol auf ∞ wirft. Sie kann verstanden werden als Restriktion der Inversion an derjenigen Sphäre mit Zentrum im Nordpol, die die xy -Ebene im Einheitskreis schneidet. Mit der vorhergehenden Übung 2.5.6 erkennt man so, daß unter der stereographischen Projektion Kreise auf der Einheitssphäre als Schnitte der Einheitssphäre mit anderen Sphären übergehen in verallgemeinerte Kreise in der xy -Ebene, und daß die stereographische Projektion Winkel erhält.

Ergänzende Übung 2.5.12 (Möbiustransformationen als Liegruppe). Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ erklären wir $O(p, q) \subset GL(p + q; \mathbb{R})$ als die Gruppe aller derjenigen Matrizen, die die quadratische Form $f = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$ auf \mathbb{R}^{p+q} invariant lassen. Den Spezialfall $O(1, 1)$ haben wir bereits in [LA2] 2.7.10 recht explizit beschrieben. Die Gruppe $O(p, q)$ stabilisiert den Nullkegel N aller Vektoren, auf denen unsere quadratische Form verschwindet, und induziert eine Operation auf dem Quotienten $(N \setminus 0)/\mathbb{R}_{>0}$. Da die Einbettung $S^{p-1} \times S^{q-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ offensichtlich eine Bijektion $S^{p-1} \times S^{q-1} \xrightarrow{\sim} (N \setminus 0)/\mathbb{R}_{>0}$ induziert, erbt die linke Seite eine Operation von $O(p, q)$. Speziell erhalten wir eine Operation der Gruppe $O(n+1, 1)$ auf $S^n \times S^0$. Bezeichnet $O(n+1, 1)^+$ die Untergruppe der Matrizen, die beide Komponenten von $S^n \times S^0$ stabilisieren, so erhalten wir eine Operation von $O(n+1, 1)^+$ auf S^n . Man erinnere die stereographische Projektion $\text{ster} : S^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ und zeige, daß wir einen Isomorphismus

$$\varphi : O(n+1, 1)^+ \xrightarrow{\sim} \text{Möb}(\mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\})$$

angeben können durch die Vorschrift $\text{ster}(gx) = \varphi(g) \text{ster}(x)$. Vergleiche auch [TM] 2.2.22. Unsere Gruppe $O(n+1, 1)^+$ operiert auch auf dem Komplement des Nullkegels und stabilisiert darin die Teilmenge $I := \{x \mid f(x) < 0, x_{n+2} > 0\}$ und den zugehörigen Quotienten $I/\mathbb{R}_{>0}$, der mit dem „ $(n+1)$ -dimensionalen hyperbolischen Raum“ aus [?] ?? identifiziert werden kann.

Ergänzende Übung 2.5.13. Gegeben $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 - s^2 = 1$ gehört die Matrix $\begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix}$ zu $O(1, 1)$ und folglich gehört die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

zu $O(2, 1)$. Man prüfe durch explizite Rechnung, daß die Operation unserer Matrix auf dem projektivisierten Lichtkegel unter seiner Identifikation mit S^1 durch $(x, y) \mapsto \langle x, y, 1 \rangle$ und der Identifikation $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ mit der stereographischen Projektion gegeben durch $(x, y) \mapsto x/(1-y)$ mit ihrer Inversen $t \mapsto (2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2))$ der Streckung um den Faktor $a = c - s$ entspricht.

3 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Bei der Behandlung von Fragen der Inzidenzgeometrie war mir ein Skript von Hubert Kiechle sehr hilfreich.

4 Die Vorlesung Elementargeometrie im SS 18

Es handelte sich um eine zweistündige Vorlesung, also wöchentlich 2×45 Minuten Vorlesung mit wöchentlich 2×45 Minuten Übungen. Wegen des ungeschickten Donnerstags-Termins gab es nur elf Vorlesungen. Im Modulhandbuch steht:

Die Studierenden kennen den axiomatischen und den analytischen Zugang zur Geometrie. Sie verstehen die mathematischen Grundlagen und die Inhalte des Geometrieunterrichts an Gymnasien und können diese mathematikgeschichtlich einordnen.

Und als Inhalte: Axiomensysteme für die affine und die euklidische Geometrie; Der analytische Zugang zur Geometrie über Koordinaten; Nichteuklidische Geometrie – ein Modell der hyperbolischen Ebene; Projektionen und projektive Geometrie; Isometriegruppen euklidischer Räume und platonische Körper, Eulersche Polyederformel; Geometrie der Kegelschnitte. Hier nun das Tagebuch der Vorlesung.

- 19.4 Affine Inzidenzebenen 1.2, Desargues-Eigenschaft und Koordinatisierung 1.2.10, Verschiebungen, noch nicht deren Gruppeneigenschaft.
- 26.4 Koordinatisierung 1.2.10 fertig bewiesen, aber zum Teil auch eher skizzenhaft. Pappus angegeben und gezeigt, daß er gleichbedeutend ist zur Kommutativität eines und jedes Koordinatenschiefkörpers. Satz von Hessenberg 1.2.19 angegeben, aber nicht beweisen. Charakterisierung 1.2.20 reeller Inzidenzebenen durch „Zwischenrelation“ nur ganz kurz angesprochen. Neues Kapitel begonnen: Definition affiner Räume und affiner Abbildungen [LA1] 3.1. Lemma [LA1] 3.3.4 über affine Räume und ihre Geraden steht noch aus.
- 3.5 Affine Räume und affine Abbildungen [LA1] 3.1. Affine Teilräume [LA1] 3.2. Charakterisierung affiner Abbildungen [LA1] 3.3.1. Baryzentrische Koordinaten [LA1] 3.4.2 nur ganz kurz, sollen in den Übungen weiter besprochen werden.
- 17.5 Parallel- und Zentralprojektion 1.3. Bilder von Geraden unter Zentralprojektionen. Umrechnung zwischen Photographien 1.3.8. Projektive Räume als Inzidenzgeometrien 1.4.1. Anschauung für die reelle projektive Ebene. Projektive Vervollständigungen affiner Räume als Inzidenzgeometrien 1.4.3. Explizite Beschreibung der Geraden. Projektive Hyperebenen und deren Schnitte mit projektiven Geraden 1.4.9. Kurz: Nach projektiver Vervollständigung sind Parallelprojektionen spezielle Zentralprojektionen und die

Zentralprojektion von einer Hyperebene auf eine weitere Hyperebene verliert ihre Definitionslücken und wird eine Bijektion. 1.4.11 und 1.4.22 waren noch nicht dran.

7.6 Die euklidische Ebene als Kongruenzebene [LA2] 1.1.10. Gut fertig geworden, noch Pythagoras gezeigt.

14.6 Winkel [LA2] 1.7: Zweistrahlen, Orientierte und nichtorientierte Winkel, Winkelgruppe und Winkelmenge, Identifikation der Winkelgruppe mit $U(1)$ durch Standardorientierung von \mathbb{C} und mit $SO(2)$ durch Standardorientierung von \mathbb{R}^2 , Winkelmaße, Beziehung zum Skalarprodukt, Winkelsumme im Dreieck mit Beweis. Ich war nachher nicht sicher, ob das eine Doppelstunde wert war.

21.6. Isometrien euklidischer Räume [LA2] 1.10.1 und [LA2] 1.10.9. Endliche Untergruppen der Drehgruppe, bis zur entscheidenden Gleichung

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

gekommen, daraus aber noch nichts gefolgert.

28.6. Mögliche Polordnungsmengen [LA2] 5.4.2 und platonische Körper [LA2] 5.4.9. Euler'sche Polyederformel [LA2] 5.5.3. Hauptachsentransformation [LA2] 1.12.1 und ihre inhomogene Variante [LA2] 1.12.34.

5.7. Fototransformationen 1.5.4 und Kollineationen 1.5.5 als Elemente der projektiven Gruppe $PGL(3; \mathbb{R})$. Inzidenzstrukturen, abstrakte projektive Inzidenzebenen, Punkt-Geraden-Duales einer abstrakten projektiven Inzidenzebene, Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}V$ und dem Punkt-Geraden-Dualen von $\mathbb{P}(V^*)$ im Fall $\dim V = 3$ nach 1.7.

12.7 Desargues und Pappus im Vollausbau 1.6. Kreispiegelungen 2.1.3. Erhalten Kreise. Apollonisches Problem 2.1.12. Möbiustransformationen 2.2. Deren komplexe Interpretation als komplexe projektive Gruppe $PGL(2; \mathbb{C})$ für orientierungserhaltende Möbiustransformationen und $PGL(2; \mathbb{C})\langle\bar{\gamma}\rangle$ für alle Möbiustransformationen 2.3.3.

19.7 Orthogonalität von verallgemeinerten Kreisen 2.2.8. Bleibt erhalten unter Möbiustransformationen. Disjunkte Kreise können in konzentrische echte Kreise Möbiustransformiert werden. Kreiskettensatz von Steiner 2.2.14. Die hyperbolische Ebene als Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und ausgezeichnete Automorphismengruppe 1.1.10, 2.4.5.

Literatur

- [AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.
- [AN1] Skriptum Analysis 1. Wolfgang Soergel.
- [AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.
- [Fil93] Andreas Filler. *Euklidische und nichteuklidische Geometrie*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1993.
- [LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.
- [LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.
- [TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ Punkt des $\mathbb{P}^n K$, 48
- \parallel gleich oder parallel, 17
- Augpunkt
 - einer Zentralprojektion, 35
- Bildebene
 - einer Zentralprojektion, 35
- Desargues-Eigenschaft
 - affine, 17
- Doppelverhältnis, 53
- Dreieck
 - in Inzidenzgeometrie, 3
- dual
 - Inzidenzstruktur, 58
- Ebene
 - erweiterte, 59
- Einbettung
 - von Inzidenzgeometrien, 45
- fasteuclidisch
 - Geometrie, 4
- Fluchtpunkt, 35
- Fototransformation, 37
 - vervollständigte, 51
- Gerade
 - erweiterte, 59
 - projektive, 39
 - von Inzidenzgeometrie, 3
- $GL(2; \mathbb{C}) \langle \gamma \rangle$, 68
- \mathbb{H} obere Halbebene, 71
- Halbebene
 - bei Inzidenzgeometrie, 7
- Halbebenenalkove
 - bei Inzidenzgeometrie, 7
- Homothetie, 24
- hyperbolische Ebene, 72, 75
- Hyperebene
 - erweiterte, 75
 - projektive, 45
- Inversion, 59, 76
- Inzidenzebene
 - affine konkrete, 16
 - über Schiefkörper, 16
- Inzidenzgeometrie, 3
 - angeordnete*, 4
- Inzidenzstruktur, 56
- Klein'sches Modell, 75
- kollinear, 3
- Kollineation, 17
- konfluent, 3
- Kongruenz, 4
- konvex
 - in Inzidenzgeometrie, 7
- Koordinatenschiefkörper, 28
- Kreis
 - echter, 59
 - verallgemeinerter, 59
- Kreiskette, 66
- Kreisspiegelung, 59
- Kreuzhaube, 49
- Linearisierung
 - von affinem Raum, 50
- Lot, 10
- Möbiusgeometrie, 59, 75
- Möbiusgruppe, 76
- Möbiustransformation
 - orientierungserhaltende, 70
 - orientierungsumkehrende, 70
- Möbiustransformation, 64, 76
- nichteuklidisch

Geometrie, 72
 $O(p, q)$, 79
 $\mathbb{P}V$ projektiver Raum zu V , 39
 $\mathbb{P}^n K$ projektiver Raum, 42
 Pappos-Eigenschaft
 affine, 28
 Papposebene, 28
 parallel
 in Inzidenzebene, 16
 in Inzidenzgeometrie, 5
 Parallelenaxiom, 5
 Parallelprojektion, 35
 $PGL(r; K)$ projektive Gruppe, 51
 Poincaré
 obere Halbebene, 74
 Projektion, 45
 projektive, 46
 projektiv
 Gruppe, 51
 projektive Vervollständigung, 42
 Projektivisierung, 39
 Projektivität, 51
 Punkt
 unendlich ferner, 42

 Riemann'sche Zahlenkugel, 48, 76

 schieflinear, 68
 senkrecht
 Geraden, 10
 Sphäre
 echte, 75
 verallgemeinerte, 75
 Spiegelung
 an Kreis, 59
 an Sphäre, 75
 stereographische Projektion, 79

 unendlich fern
 Punkt, 42

 Urebene, 37

 verallgemeinerte Sphäre, 75
 verallgemeinerter Kreis, 59
 Verschiebung, 11, 22
 Vervollständigung
 projektive, 42

 Winkelalkoven, 10

 Zahlenkugel, 48, 76
 Zentralprojektion, 35
 zwischenäquivalent, 13
 Zwischenrelation, 3