

# FUNKTIONENTHEORIE 1

Wolfgang Soergel

25. April 2024

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Erinnerungen und Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1	Komplexe Zahlen (19.4) . . . . .	4
1.2	Komplexe Exponentialfunktion (21.4) . . . . .	10
1.3	Vorschläge zur Veranschaulichung (26.4) . . . . .	15
1.4	Zusammenhang und Wegzusammenhang* . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Differenzierbarkeit im Komplexen</b>	<b>18</b>
2.1	Holomorphe Funktionen (28.4) . . . . .	18
2.2	Komplexe und reelle Differenzierbarkeit (3.5) . . . . .	21
2.3	Integration komplexwertiger Funktionen (5.5) . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Wegintegrale und Integralsatz von Cauchy</b>	<b>33</b>
3.1	Komplexe Wegintegrale (10.5) . . . . .	33
3.2	Homotopie von Wegen (12.5) . . . . .	41
3.3	Integralsatz von Cauchy (17&19.5) . . . . .	45
3.4	Integralsatz von Cauchy durch Topologie* . . . . .	57
3.5	Bezug zu Wegintegralen im Reellen* . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Lokale Struktur holomorpher Funktionen</b>	<b>62</b>
4.1	Cauchy's Integralformel (31.5) . . . . .	62
4.2	Potenzreihenentwicklung (2.6) . . . . .	69
4.3	Nullstellenmengen holomorpher Funktionen (7.6) . . . . .	73
4.4	Lokale Struktur holomorpher Funktionen (9.6) . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Singuläre Stellen holomorpher Funktionen</b>	<b>83</b>
5.1	Isolierte Singularitäten und Laurentreihen (14&16.6) . . . . .	83
5.2	Umlaufzahl und Residuensatz (21.6) . . . . .	91
5.3	Anwendungen des Residuensatzes (23.6) . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Verschiedene weiterführende Resultate</b>	<b>105</b>
6.1	Harmonische Funktionen (28.6) . . . . .	105
6.2	Reihenentwicklung des Kotangens (30.6) . . . . .	112
6.3	Produktentwicklung des Sinus (30.6) . . . . .	116
6.4	Gammafunktion (5.7) . . . . .	119
6.5	Riemann'scher Abbildungssatz (7.7) . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Erste Anwendungen in der Zahlentheorie*</b>	<b>128</b>
7.1	Verteilung von Primzahlen (12&14.7) . . . . .	128
7.2	Primzahlen in Restklassen (19.7) . . . . .	137
7.3	Dirichlet-Reihen (21.7) . . . . .	141

7.4	Summen von drei Quadraten . . . . .	146
<b>8</b>	<b>Danksagung</b>	<b>149</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>150</b>
	<b>Indexvorwort</b>	<b>152</b>
	<b>Index</b>	<b>153</b>

# 1 Erinnerungen und Grundlagen

## 1.1 Komplexe Zahlen (19.4)

1.1.1. Ich beginne mit einer kurzen Wiederholung der Definition des Körpers der komplexen Zahlen. **Hier ist ein Film über die Körperoperationen in den komplexen Zahlen.** Für zusätzliche Details verweise ich auf [LA1] 2.7.

**Satz 1.1.2 (Charakterisierung der komplexen Zahlen).** 1. *Es gibt Tripel*

$$(\mathbb{C}, i, \kappa)$$

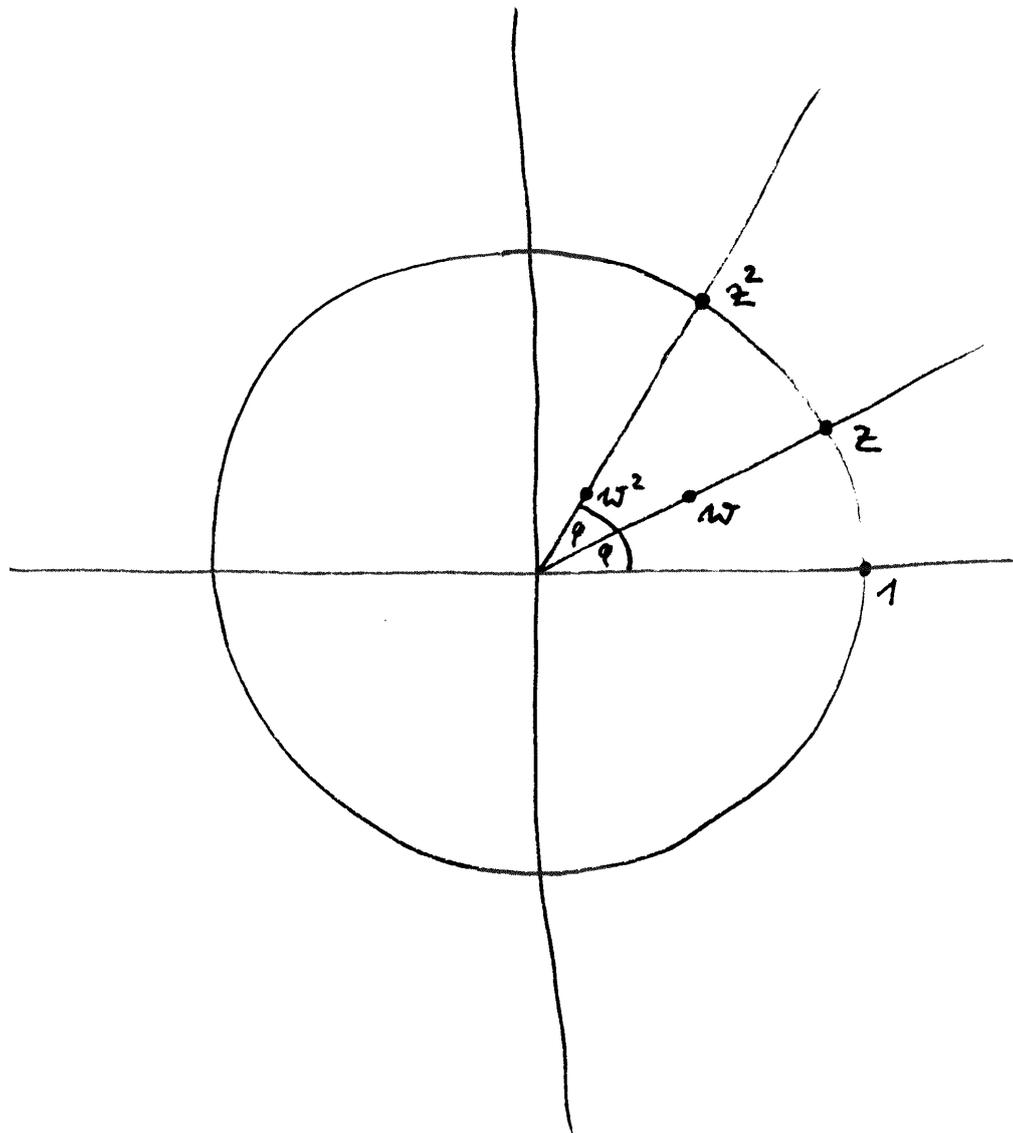
*bestehend aus einem Körper  $\mathbb{C}$ , einem Element  $i \in \mathbb{C}$  und einem Körperhomomorphismus  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  derart, daß gilt  $i^2 = -1$  und daß  $i$  und  $1$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}$  bilden in Bezug auf die durch  $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(a, z) \mapsto \kappa(a)z$  auf  $\mathbb{C}$  gegebene Struktur als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum;*

2. *Derartige Tripel sind eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist genauer  $(\mathbb{C}', i', \kappa')$  ein weiteres derartiges Tripel, so gibt es genau einen Körperhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}'$  mit  $\varphi : i \mapsto i'$  und  $\varphi \circ \kappa = \kappa'$  und der ist stets ein Isomorphismus.*

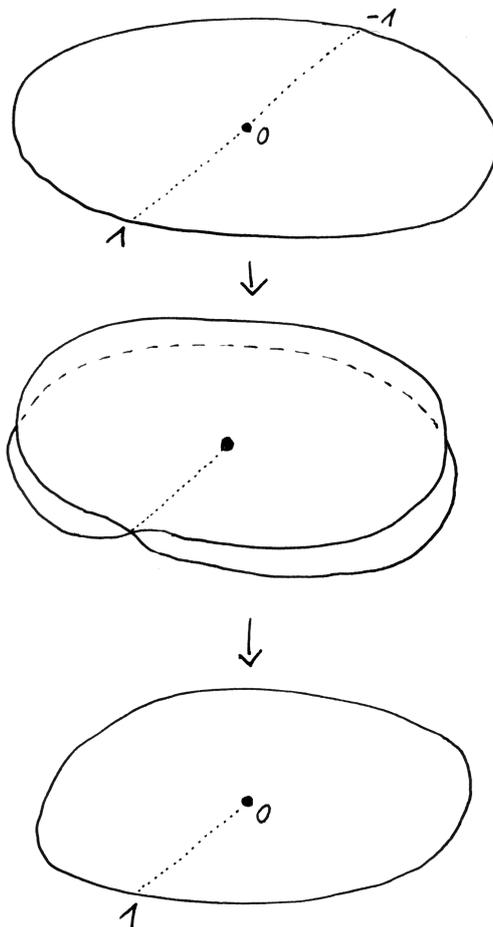
**Definition 1.1.3.** Wir wählen für den weiteren Verlauf der Vorlesung ein festes Tripel  $(\mathbb{C}, i, \kappa)$  der im Satz beschriebenen Art. Wegen der im zweiten Teil des Satzes formulierten „Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus“ erlauben wir uns den bestimmten Artikel und nennen  $\mathbb{C}$  den **Körper der komplexen Zahlen**. Weiter kürzen wir für reelle Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  stets  $\kappa(a) = a$  ab und gehen sogar so weit, die reellen Zahlen vermittels  $\kappa$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  aufzufassen.

*Ergänzung 1.1.4.* Für feinere Untersuchungen finde ich es praktisch, auch Paare  $(K, \kappa)$  zu betrachten, die aus einem Körper  $K$  nebst einem Körperhomomorphismus  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow K$  bestehen derart, daß es einen Körperisomorphismus  $a : K \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  gibt, der mit den vorgegebenen Einbettungen von  $\mathbb{R}$  verträglich ist, also algebraisch gesagt einen beliebigen algebraischen Abschluß  $K$  von  $\mathbb{R}$ . Auch bei solch einem Paar notiere ich den Körper  $K$  gerne  $\mathbb{C}$  und fasse die Einbettung von  $\mathbb{R}$  als Einbettung einer Teilmenge auf und notiere sie nicht. Ich rede dann von einem Körper von **vergeßlichen komplexen Zahlen**, da es sich dabei salopp gesprochen um eine „Kopie von  $\mathbb{C}$  handelt, die vergessen hat, welche ihrer beiden Wurzeln von  $(-1)$  sie als  $i$  auszeichnen wollte“.

1.1.5. Es ist allgemein üblich, komplexe Zahlen mit  $z$  zu bezeichnen und als  $z = x + yi$  zu schreiben mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Man mag sich die komplexe Zahl  $z = x + yi$  vorstellen als den Punkt  $(x, y)$  der Koordinatenebene  $\mathbb{R}^2$ . Wenn wir diese Vorstellung evozieren wollen, reden wir von der **komplexen Zahlenebene**. Unter



Anschauung für das Quadrieren komplexer Zahlen in ihrer anschaulichen Interpretation als Punkte der komplexen Zahlenebene



Dies Bild soll zusätzliche Anschauung für die Abbildung  $z \mapsto z^2$  der komplexen Zahlenebene auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt  $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$  in  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$  für geeignetes monotonies und in einer Umgebung von Null streng monotonies  $\varepsilon$ , gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

dieser Identifikation von  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  bedeutet für  $w \in \mathbb{C}$  die Additionsabbildung  $(w+) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto w + z$  anschaulich die Verschiebung um den Vektor  $w$ . Die Multiplikationsabbildung  $(w\cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto wz$  dahingegen bedeutet anschaulich diejenige Drehstreckung, die  $1 = 1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$  in  $w$  überführt.

1.1.6. Gegeben eine komplexe Zahl  $z = x + yi$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  nennt man  $x$  ihren **Realteil**  $\operatorname{Re} z := x$  und  $y$  ihren **Imaginärteil**  $\operatorname{Im} z := y$ . Wir haben damit zwei Funktionen

$$\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert und es gilt  $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Man definiert weiter die **Norm**  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  durch  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Im Fall einer reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  ist diese Norm der Absolutbetrag aus [AN1] 2.2.12, in Formeln  $|x| = |x|$ . In der Anschauung der komplexen Zahlenebene bedeutet die Norm einer komplexen Zahl ihren Abstand vom Ursprung.

1.1.7 (**Diskussion der Terminologie**). Bei rechtem Lichte besehen scheint mir an dieser Terminologie absonderlich, daß der Imaginärteil einer komplexen Zahl eine reelle Zahl sein soll, aber so hat es sich nun einmal eingebürgert.

1.1.8. Stellen wir uns  $|z|$  vor als den Streckfaktor der Drehstreckung  $(z\cdot)$ , so wird anschaulich klar, daß für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten muß

$$|zw| = |z||w|$$

Besonders bequem rechnet man diese Formel nach, indem man zunächst für  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  die **konjugierte komplexe Zahl**  $\bar{z} = x - yi \in \mathbb{C}$  einführt. Im Bild der komplexen Zahlenebene bedeutet das komplexe Konjugieren anschaulich die Spiegelung an der reellen Achse. Nun prüft man durch explizite Rechnung unschwer die Formeln

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ |z|^2 &= z\bar{z} \end{aligned}$$

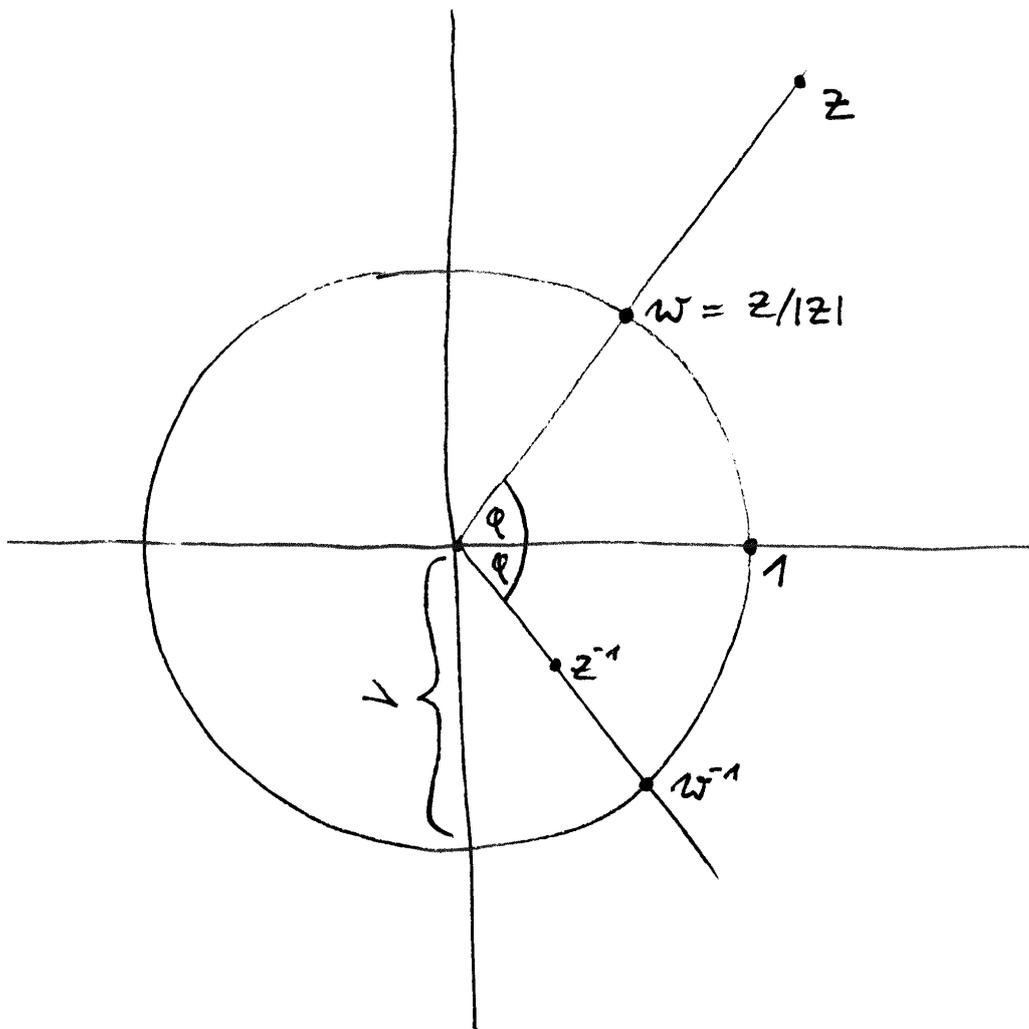
Dann rechnet man einfach

$$|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In der Terminologie aus [GR] 2.4.13 ist die komplexe Konjugation  $z \mapsto \bar{z}$  ein Körperisomorphismus  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Offensichtlich gilt auch  $\bar{\bar{z}} = z$  und ebenso offensichtlich gilt  $|z| = |\bar{z}|$ .

1.1.9. Wir können den Realteil und den Imaginärteil von  $z \in \mathbb{C}$  mithilfe der konjugierten komplexen Zahl ausdrücken als

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$



Anschauung für das Invertieren komplexer Zahlen

Weiter gilt offensichtlich  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ . Weiter ist für eine komplexe Zahl  $z$  der Norm  $|z| = 1$  die konjugierte komplexe Zahl genau ihre Inverse, in Formeln  $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$ . Im Bild der komplexen Zahlenebene kann man das Bilden des Inversen einer von Null verschiedenen komplexen Zahl anschaulich interpretieren als die „Spiegelung“ oder präziser **Inversion** am Einheitskreis  $z \mapsto z/|z|^2$  gefolgt von der Spiegelung an der reellen Achse  $z \mapsto \bar{z}$ . Der Einheitskreis  $S^1 := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$  ist insbesondere eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen und die Multiplikation liefert einen Gruppenisomorphismus  $\mathbb{R}_{>0} \times S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$ . Wir nennen  $S^1$  die **Kreisgruppe**. Im Fall eines vergeblichen Körpers von komplexen Zahlen notiere ich die Untergruppe der Elemente der Norm Eins  $U(1)$ , da uns in diesem Fall keine ausgezeichnete Bijektion mit  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  mehr zur Verfügung steht.

1.1.10. Für unsere Norm komplexer Zahlen aus 1.1.6 gilt offensichtlich

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Weiter gilt die **Dreiecksungleichung**

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

## Übungen

*Übung 1.1.11.* Man bestimme Real- und Imaginärteil einer Quadratwurzel von  $i$ . Man bestimme Real- und Imaginärteil einer Quadratwurzel von  $1 + i$ .

*Übung 1.1.12.* Gegeben eine von Null verschiedene komplexe Zahl  $z = x + iy$  zeige man für Real- und Imaginärteil ihrer Inversen die Formeln  $\operatorname{Re}(z^{-1}) = x/(x^2 + y^2)$  und  $\operatorname{Im}(z^{-1}) = -y/(x^2 + y^2)$ .

*Übung 1.1.13.* Gegeben eine komplexe Zahl  $z \neq -1$  vom Betrag  $|z| = 1$  zeige man, daß sie genau eine Wurzel  $w$  mit positivem Realteil hat und daß diese gegeben wird durch  $w = a/|a|$  für  $a = (1 + z)/2$ . Können Sie auch die geometrische Bedeutung dieser Formel erklären? Man folgere, daß gegeben  $\varepsilon > 0$  beliebig jedes Element von  $S^1$  eine Potenz eines Elements  $z$  mit Realteil  $\operatorname{Re}(z) > 1 - \varepsilon$  ist.

*Übung 1.1.14.* Eine Teilmenge von  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  heißt ein **verallgemeinerter Kreis**, wenn sie entweder ein Kreis

$$K(a; r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a|^2 = r^2\}$$

ist für  $a \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$  oder aber eine reelle affine Gerade vereinigt mit dem Punkt  $\infty$ . Man prüfe, daß die Selbstabbildung von  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  mit  $z \mapsto z^{-1}$  für  $z \in \mathbb{C}^\times$  und  $0 \mapsto \infty$  und  $\infty \mapsto 0$  verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise überführt.

**Übung 1.1.15 (Transitive Operation von  $SL(2; \mathbb{R})$  auf der oberen Halbebene).** Wir erinnern aus [LA2] 5.1.25 den projektiven Raum  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  mit seiner natürlichen Operation von  $GL(2; \mathbb{C})$  und der natürlichen Bijektion  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  durch  $z \mapsto \langle 1, z \rangle$  und  $\infty \mapsto \langle 0, 1 \rangle$ . Die offensichtliche Einbettung  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  hat als Bild eine unter  $GL(2; \mathbb{R})$  stabile Teilmenge, die  $\mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$  entspricht. Man zeige, daß die Einschränkung dieser Operation auf  $SL(2; \mathbb{R})$  die obere Halbebene  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  stabilisiert und darauf transitiv operiert. In Formeln operiert dabei eine Matrix wie in [LA2] 5.1.25 durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$$

Anschaulich ist das recht klar: Die Operation von  $GL(2; \mathbb{R})$  auf der Riemann'schen Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  stabilisiert den Äquator  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  und topologische Argumente, die uns nur an dieser Stelle noch nicht zur Verfügung stehen, zeigen, daß die nach [AN2] 8.5.19 zusammenhängende Gruppe der reellen Matrizen mit positiver Determinante dann auch die beiden Hemisphären stabilisieren muß. Die Transitivität der Operation auf beiden Hemisphären ist leicht explizit einzusehen.

**Übung 1.1.16 (Identifikation von oberer Halbebene und Einheitskreis).** Man zeige, daß die Kreisspiegelung am Kreis mit Zentrum bei  $i$  durch die Punkte  $\pm 1$ , in Formeln die Abbildung  $s : i + w \mapsto i + (2w/|w|^2)$ , die reelle Zahlengerade auf den Einheitskreis und den Einheitskreis ohne  $i$  miteinander vertauscht und daß sie die offene obere Halbebene  $H$  mit der offenen Einheitskreisscheibe  $E$  identifiziert, in Formeln

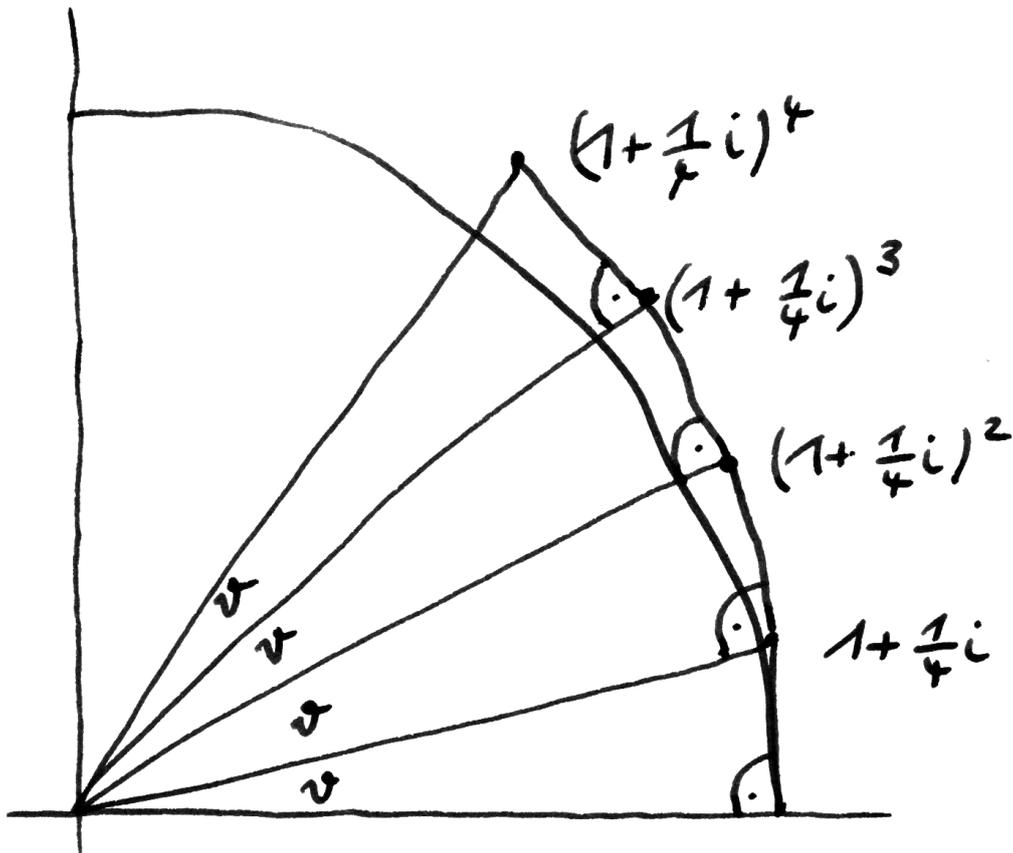
$$s : H \xrightarrow{\sim} E$$

Hinweis: 1.1.14. Schalten wir noch  $z \mapsto -\bar{z}$  dahinter, so sehen wir, daß die rationale Funktion  $i + w \mapsto i - (2w^{-1})$  alias  $k : z \mapsto i - 2/(z - i)$  dasselbe tut, in Formeln

$$k : H \xrightarrow{\sim} E$$

## 1.2 Komplexe Exponentialfunktion (21.4)

1.2.1 (Stetigkeit im Komplexen). Wir erinnern aus [AN1] ?? den Begriff der Stetigkeit in mehreren reellen Veränderlichen. Wenn wir im Kontext von komplexen Veränderlichen von Stetigkeit reden, denken wir uns stets unsere übliche Identifikation  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  dazu. Damit ist zum Beispiel eine Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann stetig, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil stetig sind. Zur Übung mögen sie die Stetigkeit von Addition und Multiplikation  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  zeigen sowie die Stetigkeit des Invertierens  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ .



Auch für komplexes  $z$  zeigt man wie in [AN1] 4.2.3 die Formel

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Das obige Bild stellt unter anderem den vierten Term dieser Folge im Fall  $z = i$  dar. Ich finde, man kann recht gut erkennen, wie diese Folge bei wachsendem  $n$  gegen den Punkt auf der Kreislinie konvergiert, für den das Segment der Kreislinie, das von ihm zur reellen Achse herunterläuft, die Länge Eins hat.

**Definition 1.2.2.** Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  erklären wir eine weitere komplexe Zahl  $\exp z \in \mathbb{C}$  durch die Vorschrift

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Diese Reihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut in Real- und Imaginärteil, etwa aufgrund der Abschätzungen  $|\operatorname{Re} z^k|, |\operatorname{Im} z^k| \leq |z^k| = |z|^k$  zusammen mit dem Majorantenkriterium, wenn man die reelle Exponentialreihe als Majorante verwendet. Wir erhalten folglich eine Abbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die **komplexe Exponentialfunktion**.

1.2.3 (**Erste Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion**). **Hier ist ein Film über die komplexe Exponentialfunktion.** Man prüft genau wie im Reellen [AN1] 4.2.10 auch im Komplexen die **Funktionalgleichung**

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

Die Identität  $\exp(0) = 1$  ist eh klar. In der Sprache der Algebra ausgedrückt ist die Exponentialabbildung also ein Monoidhomomorphismus  $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$  und induziert nach [GR] 2.3.23 folglich einen Homomorphismus  $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$  von der additiven Gruppe der komplexen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen komplexen Zahlen. Insbesondere folgt  $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$ . Aus der Vertauschbarkeit der komplexen Konjugation mit Summe und Produkt folgern wir auch noch

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Für den Betrag von  $\exp z$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |\exp z|^2 &= \exp z \exp \bar{z} \\ &= \exp z \exp \bar{z} \\ &= \exp(z + \bar{z}) \\ &= \exp(2 \operatorname{Re} z) \end{aligned}$$

Folglich gilt  $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$  und speziell  $|\exp(it)| = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

1.2.4. Ich gehe davon aus, daß Sie alle bereits mit der **Euler'schen Formel**

$$\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$$

vertraut sind. Es gibt verschiedene Zugänge zur Theorie der trigonometrischen Funktionen und jeder Zugang benötigt einen angepaßten Beweis unserer Formel. Ich ziehe es vor, unsere Formel als Definition der Funktionen Sinus und Cosinus anzusehen. Dann muß man, um den Bezug zur aus der Schule bekannten

Anschauung herzustellen, nur nachweisen, daß die Funktion  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $\gamma(t) := \exp(it)$  differenzierbar ist mit  $|\gamma(t)| = |\gamma'(t)| = 1 \ \forall t$  und  $\gamma'(0) = i$  und folglich im Bild der komplexen Zahlenebene „den Einheitskreis mit Absolutgeschwindigkeit Eins im Gegenuhrzeigersinn durchläuft“. Unsere Sätze [AN1] 6.1.4 über das gliedweise Ableiten von Potenzreihen liefern aber unmittelbar  $\gamma'(0) = i$  und mit der Funktionalgleichung  $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$  folgt unmittelbar  $\gamma'(s) = \gamma(s)\gamma'(0) = \gamma(s)i$  und so  $|\gamma'(s)| = 1 \ \forall s \in \mathbb{R}$ .

**Satz 1.2.5 (Gruppenwege in der Kreisgruppe).** *Die stetigen Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die Kreisgruppe sind genau alle Abbildungen der Gestalt  $t \mapsto \exp(ait)$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .*

1.2.6. Dieser Satz gehört eigentlich nicht in die Funktionentheorie. Ich behandle ihn hier nur, weil ich ihn für wichtig und grundlegend halte und fürchte, daß viele Leser ihn in ihrem bisherigen Studium noch nicht gesehen haben könnten.

*Beweis.* Hier ist ein Film über Gruppenwege in der Kreisgruppe. Aus 1.2.3 folgt unmittelbar, daß  $\gamma : t \mapsto \exp(it)$  ein Gruppenhomomorphismus mit Bild in der Kreisgruppe  $S^1$  ist. Aus der Abschätzung

$$|\exp(it) - \exp(is)| = |\exp(i(t-s)) - 1| \leq \exp(|s-t|) - 1$$

folgt, daß  $\gamma$  stetigen Real- und Imaginärteil hat. Unser Gruppenhomomorphismus ist auch nicht konstant, aus der Reihenentwicklung folgt etwa die Abschätzung  $\operatorname{Re}(\exp(i)) < 1$ . Aufgrund der Stetigkeit des Realteils gibt es folglich  $c > 0$  mit  $\operatorname{Re} \gamma(c) < 1$  und  $t \in [-c, c] \Rightarrow \operatorname{Re} \gamma(t) > 0$ . Ist  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit stetigem Realteil, so gibt es auch  $b > 0$  mit  $t \in [-b, b] \Rightarrow \operatorname{Re} \beta(t) \geq \operatorname{Re} \gamma(c)$ . Es folgt, daß wir  $g \in [-c, c]$  finden mit  $\operatorname{Re} \beta(b) = \operatorname{Re} \gamma(g)$ . Indem wir notfalls  $g$  durch  $-g$  ersetzen, dürfen wir zusätzlich  $\operatorname{Im} \beta(b) = \operatorname{Im} \gamma(g)$  und damit

$$\beta(b) = \gamma(g)$$

annehmen. Daraus aber folgt  $\varphi(b/2) = \gamma(g/2)$ , denn beide Seiten sind die eindeutig bestimmte Quadratwurzel aus  $\beta(b) = \gamma(g)$  mit positivem Realteil. Induktiv folgt erst  $\beta(b/2^n) = \gamma(g/2^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und dann  $\beta(mb/2^n) = \gamma(mg/2^n)$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$  und dann aufgrund der Stetigkeit  $\beta(tb) = \gamma(tg)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Proposition 1.2.7 (Kern und Bild der komplexen Exponentialfunktion).** *Die Exponentialfunktion ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit Kern  $\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Nach 1.2.4 induziert die Exponentialfunktion eine Surjektion der imaginären Geraden  $i\mathbb{R}$  auf den Einheitskreis  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Daß die Exponentialfunktion eine Bijektion  $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$  induziert, wissen wir bereits aus

[AN1] 4.3.2. Da sich nun jede von Null verschiedene komplexe Zahl  $w$  schreiben läßt als Produkt  $w = (w/|w|)|w|$  mit  $w/|w|$  auf dem Einheitskreis und  $|w|$  positiv, ist die Exponentialfunktion nach der Funktionalgleichung sogar eine Surjektion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, als da heißt das Urbild des neutralen Elements  $1 \in \mathbb{C}^\times$ , besteht aufgrund unserer Gleichung  $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$  und der Euler'schen Formel aus allen ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi i$ .  $\square$

**1.2.8 (Potenzen mit komplexen Exponenten).** Für eine reelle Zahl  $a > 0$  und  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir wieder

$$a^z := \exp(z \log a)$$

und schreiben insbesondere auch  $\exp z = e^z$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Mit dieser Notation liest sich die Euler'sche Formel dann als  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ . Insbesondere erfüllen unsere Hauptdarsteller die bemerkenswerte Identität  $e^{i\pi} = -1$ . Aus  $\exp(-it) = \overline{\exp(it)}$  folgern wir umgekehrt für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Formeln

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Diese Formeln verwenden wir, um den Sinus und Cosinus zu Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auszudehnen.

**1.2.9.** Allgemeiner überlegt man sich, daß die komplexe Exponentialfunktion eine Bijektion  $\exp : \mathbb{R} + (-\pi, \pi]i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$  liefert. Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} + (-\pi, \pi]i$$

heißt der **Hauptzweig des Logarithmus**. Er wird auf der positiven reellen Achse gegeben durch unseren üblichen Logarithmus  $u \mapsto \log u$ , auf der oberen beziehungsweise unteren komplexen Halbebene durch die Vorschrift

$$\log(u + iv) = \log \sqrt{u^2 + v^2} \pm i \frac{\pi}{2} - i \arctan \frac{u}{v} \quad \text{für } \pm v > 0$$

und auf der negativen reellen Achse durch  $u \mapsto \log(-u) + i\pi$ . Man beachte, daß dieser Hauptzweig nicht stetig ist längs der negativen reellen Achse, obwohl seine Einschränkung auf die negative reelle Achse durchaus stetig ist: Wir haben für  $u < 0$  genauer

$$\lim_{v \searrow 0} \log(u + iv) = \log(u) = \lim_{v \nearrow 0} \log(u + iv) + 2\pi i$$

**1.2.10 (Die Problematik komplexer Potenzen).** Setzt man für  $a \in \mathbb{C}^\times$  und  $b \in \mathbb{C}$  ähnlich wie im Reellen  $a^b := \exp(b \log a)$  mit  $\log$  dem in 1.2.9 definierten Hauptzweig des komplexen Logarithmus, so ergibt sich  $i^i = \exp(-\pi/2)$ . Insbesondere ist in diesem Sinne also  $i^i$  reell. Allerdings ist dann  $a \mapsto a^b$  für  $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  unstetig längs der negativen reellen Achse und wir haben im allgemeinen auch  $a^{bc} \neq (a^b)^c$ .

## Übungen

*Übung 1.2.11.* Man zeige: Jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  hat die Gestalt  $t \mapsto \exp(at)$  für genau eine komplexe Zahl  $a \in \mathbb{C}$ .

*Übung 1.2.12 (Nichtexistenz stetiger komplexer Wurzelfunktionen).* Hinweis: Gäbe es eine stetige Funktion  $w : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit  $w(z)^2 = z$  für alle  $z$ , so folgte  $w(z^2) = \pm z$  für alle  $z$  und damit wäre  $\varepsilon : z \mapsto w(z^2)/z$  eine stetige Funktion  $\varepsilon : \mathbb{C}^\times \rightarrow \{1, -1\}$  mit  $\varepsilon(-z) = -\varepsilon(z)$ . Man führe das zum Widerspruch.

*Ergänzende Übung 1.2.13 (Der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck).* In einem regelmäßigen Fünfeck stehen die Längen der Diagonalen zu den Längen der Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts. Man prüfe diese elementargeometrisch leicht einzusehende Behauptung durch algebraische Rechnung. Hinweis: Der goldene Schnitt ist die positive Lösung der Gleichung  $a/1 = (1+a)/a$  alias  $a^2 - a - 1 = 0$ , seine geometrische Bedeutung wurde in [EIN] 1.2.2 erklärt. Es gilt zu zeigen, daß für  $\zeta = e^{2\pi i/5}$  der Ausdruck  $a = |1 - \zeta^2|/|1 - \zeta| = |1 + \zeta|$  die fragliche Gleichung löst. Man verwende  $\zeta^4 = \bar{\zeta}$ .

*Ergänzende Übung 1.2.14.* In einem regelmäßigen Siebeneck sei  $a$  der Abstand von einer Ecke zur nächsten Ecke,  $b$  der Abstand zur übernächsten Ecke, und  $c$  der Abstand zur überübernächsten Ecke. Man zeige

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

In Formeln zeige man für  $\zeta = e^{2\pi i/7}$  die Identität  $|1 - \zeta|^{-1} = |1 - \zeta^2|^{-1} + |1 - \zeta^3|^{-1}$ .

*Ergänzende Übung 1.2.15.* Die Nullstellen des komplexen Sinus liegen alle auf der reellen Achse.

*Ergänzende Übung 1.2.16.* Man zeige mit der Euler'schen Formel 1.2.4 die Identität  $\sin^3 \vartheta = \frac{3}{4} \sin \vartheta - \frac{1}{4} \sin(3\vartheta)$ .

## 1.3 Vorschläge zur Veranschaulichung (26.4)

1.3.1 (**Anschauung für Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$** ). Bereits in der Schule lernen wir, uns Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vermittle ihres Graphen vorzustellen. Etwas allgemeiner gelingt das für Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $n + m \leq 3$ . Für Abbildungen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  versagt diese Anschauung jedoch kläglich. In diesem Fall kann man zwar noch den Graphen von  $|f| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  zeichnen, aber das ist für das Verständnis der in dieser Vorlesung behandelten Themen wenig hilfreich. Ich rate dazu sich Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  wirklich als Abbildungen der komplexen Zahlenebene auf sich selber zu denken. Man mag sich die komplexe Zahlenebene dafür als ein Gummituch denken und fragliche Abbildung in einer ersten Annäherung

als eine Vorschrift, nach der dies Gummituch verzogen und eventuell zusammengefaltet und dann wieder auf die Ebene gelegt wird. Zur graphischen Darstellung ist es oft geschickt, eine reelle Zahl  $a > 0$  zu wählen und eine Abbildung  $f$  darzustellen, indem man die Menge

$$f(\{x + iy \mid x \in \mathbb{Z}a \text{ oder } y \in \mathbb{Z}a\})$$

auf die Papierebene malt. Im folgenden diskutiere ich einige Beispiele.

*Beispiel 1.3.2.* Die Abbildung  $z \mapsto z + a$  für  $a \in \mathbb{C}$  bedeutet anschaulich eine Verschiebung unseres Gummituchs.

*Beispiel 1.3.3.* Die Abbildung  $z \mapsto iz$  bedeutet anschaulich eine Drehung unseres Gummituchs um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn mit Drehzentrum im Ursprung. Die Abbildung  $z \mapsto az$  für  $a \in \mathbb{C}$  bedeutet anschaulich eine Drehstreckung unseres Gummituchs mit Zentrum im Ursprung und Streckfaktor  $|a|$ . Im Fall  $|a| < 1$  mag man hier auch von einem Stauchfaktor reden wollen.

*Beispiel 1.3.4.* Die Abbildung  $z \mapsto \bar{z}$  bedeutet anschaulich die Spiegelung an der reellen Achse.

*Beispiel 1.3.5.* Die Abbildung  $z \mapsto 1/\bar{z}$  bedeutet anschaulich eine „Kreisspiegelung“ alias „Inversion“ am Einheitskreis. Die Abbildung  $z \mapsto 1/z$  bedeutet die Verkettung von besagter Kreisspiegelung mit der Spiegelung an der reellen Achse.

*Beispiel 1.3.6.* **Hier ist ein Film über die anschauliche Bedeutung der komplexen Exponentialfunktion.** Die Abbildung  $z \mapsto \exp z$  versuche ich anschaulich zu machen als die Verkettung

$$x + iy \mapsto (\exp x) + iy \mapsto \exp(x + iy)$$

Hier schiebt die erste Abbildung die ganze Ebene bijektiv in die offene Halbebene rechts von der  $y$ -Achse, und zwar landet dabei die offene Halbebene links der  $y$ -Achse stark in horizontaler Richtung zusammengedrückt im offenen senkrechten Streifen zwischen Realteil Null und Realteil Eins. Unter der zweiten Abbildung bleiben dann alle Punkte auf der reellen Achse an ihrer Stelle sitzen und alle Vertikalen werden zu Kreisen zusammengewickelt so, daß dabei alle Horizontalen zu vom Ursprung ausgehenden Strahlen werden und die erste Horizontale oberhalb der reellen Achse, die auf die positive reelle Achse geht, ist die Horizontale in der Höhe  $2\pi$ .

*Beispiel 1.3.7.* Das Quadrieren  $z \mapsto z^2$  bedeutet, wenn man es auf den Einheitskreis einschränkt, das „Doppelt-Nehmen eines Flitzgummis“ gefolgt vom Langziehen um den Faktor Zwei und dann wieder auf den Einheitskreis legen so, daß die Eins auf die Eins zu liegen kommt. Diese Abbildung gilt es nun vom Einheitskreis auf die ganze Ebene zu erweitern drart, daß vom Ursprung ausgehende

Strahlen auf vom Ursprung ausgehende Strahlen abgebildet werden, aber der Abstand jedes Punktes vom Ursprung quadriert wird. Höhere Potenzen  $z \mapsto z^n$  mag man sich entsprechend veranschaulichen.

## 1.4 Zusammenhang und Wegzusammenhang\*

1.4.1. Ich erinnere an einige Begriffsbildungen und Resultate aus der Analysis im Zusammenhang mit Zusammenhang und Wegzusammenhang.

1.4.2. Ist  $X$  ein topologischer Raum und sind  $x, y \in X$  Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  mit  $\gamma(a) = x$  und  $\gamma(b) = y$  einen **Weg von  $x$  nach  $y$** . Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und jede nichtleere Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, bereits der ganze Raum sein muß.

1.4.3 (**Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang**). Ich erkläre nun eine Lösung für Übung [AN2] 8.5.21, nach der jeder wegzusammenhängende Raum auch zusammenhängend ist. **Hier ist ein Film dazu**. Wäre in der Tat  $U$  wegzusammenhängend und  $N \subset U$  offen und abgeschlossen und weder ganz  $U$  noch leer, so fänden wir einen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  mit  $\gamma(a) \in N$  und  $\gamma(b) \notin N$ . Wir setzen dann

$$s := \sup\{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in N\}$$

Aus  $N \not\subset U$  folgt  $\gamma(s) \in N$  und insbesondere  $s < b$ . Aus  $N \not\supset U$  folgt aber andererseits  $\gamma(s) \notin N$ . Dieser Widerspruch zeigt dann, daß jede offene und abgeschlossene Teilmenge  $N$  eines wegzusammenhängenden Raums  $U$  entweder ganz  $U$  oder die leere Menge sein muß.

1.4.4 (**Zusammenhang impliziert manchmal Wegzusammenhang**). In [AN2] 8.5.13 besprechen wir unter anderem, warum eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist. Man betrachtet dazu die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit und zeigt, daß ihre Äquivalenzklassen im vorliegenden Fall offen sein müssen.

1.4.5 (**Wegzusammenhang und Wegzusammenhang durch Integrationswege**). In [AN2] 8.5.4 besprechen wir unter anderem, warum eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene genau dann wegzusammenhängend ist, wenn sie nicht leer ist und je zwei ihrer Punkte durch einen stückweise linearen Weg verbunden werden können. Man betrachtet dazu den Abstand der Punkte unseres Weges zum Komplement unserer offenen Teilmenge, der eine stetige Funktion ist und folglich aus unserem Weg ein Minimum annehmen muß. Dieses Minimum ist notwendig positiv und von dieser Erkenntnis ausgehend ist der Beweis dann schnell zu Ende.

## 2 Differenzierbarkeit im Komplexen

### 2.1 Holomorphe Funktionen (28.4)

2.1.1. Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $p \in X$  ein Häufungspunkt,  $Y$  Hausdorff und  $f : X \setminus p \rightarrow Y$  eine Abbildung. Ich erinnere an unsere Definition des Grenzwerts  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  aus [AN1] ?? als dem „Wert der einzig möglichen bei  $p$  stetigen Fortsetzung von  $f$  auf ganz  $X$ , wenn es denn solch eine Fortsetzung gibt“. **Hier ist ein Film über die Definition der komplexen Ableitung.**

**Definition 2.1.2.** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $p \in U$  ein Punkt. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $b \in \mathbb{C}$** , wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch  $f'(p) = b$  und nennen  $f'(p)$  die **Ableitung** oder ausführlicher die **komplexe Ableitung** der Funktion  $f$  an der Stelle  $p$ .

2.1.3. Man muß sich hier von der in der Schule liebgewonnenen Anschauung der Ableitung als „Steigung der Tangente“ verabschieden. Welche Anschauung man stattdessen mit dem Konzept der komplexen Ableitung verbinden mag, werden wir im folgenden noch ausführlich diskutieren.

**Definition 2.1.4.** Eine **holomorphe Funktion** ist eine auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  der komplexen Zahlenebene definierte komplexwertige Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die an jeder Stelle  $p \in U$  komplex differenzierbar ist. Wir erklären dann ihre Ableitung  $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $p \mapsto f'(p)$ .

*Beispiel 2.1.5.* Jede konstante Funktion auf  $U \subseteq \mathbb{C}$  ist holomorph mit der Nullfunktion als Ableitung.

*Beispiel 2.1.6.* Die Einbettung einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  ist eine holomorphe Funktion  $i : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit Ableitung  $i'(p) = 1 \forall p \in U$  alias  $i' = 1$ .

*Beispiel 2.1.7.* Das Invertieren  $z \mapsto 1/z$  ist eine holomorphe Abbildung  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Ableitung  $-1/z^2$ . Man zeigt das mit derselben Rechnung wie im Reellen [AN1] 5.3.6.

2.1.8 (**Anschauliche Bedeutung der komplexen Differenzierbarkeit**). **Hier ist ein Film über die anschauliche Bedeutung der komplexen Ableitung.** Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $p \in U$  ein Punkt ist offensichtlich  $f$  komplex differenzierbar bei  $p$  mit Ableitung  $f'(p) = b$  genau dann, wenn es eine komplexwertige Funktion  $\varepsilon$  gibt mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  und

$$f(p + h) = f(p) + bh + h\varepsilon(h)$$

Bis auf den Fehler  $h\varepsilon(h)$ , der für kleines  $h$  derart klein wird, daß er für  $h \rightarrow 0$  sogar dann noch gegen Null strebt, wenn man ihn durch  $h$  teilt, ist also  $f$  nah bei  $p$  die Drehstreckung  $p + h \mapsto p + bh$  mit Zentrum  $p$  und Faktor  $b \in \mathbb{C}$  gefolgt von der Verschiebung  $+(f(p) - p)$ . Anschaulich bedeutet das insbesondere im Fall  $f'(p) \neq 0$ , daß jede bei  $p$  komplex differenzierbare Abbildung bei  $p$  „winkeltreu und orientierungserhaltend“ ist.

**2.1.9 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit).** Quasi per definitionem [AN1] ?? ist  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  gleichbedeutend dazu, daß die einzige bei  $h = 0$  stetige Fortsetzung von  $\varepsilon$  an die Stelle  $h = 0$  durch  $\varepsilon(0) = 0$  geschieht. Insbesondere ist nach 2.1.8 eine komplex differenzierbare Funktion auch stetig.

**2.1.10 (Rechenregeln für die komplexe Ableitung).** Auch für komplex differenzierbare Funktionen gelten die Summenregel  $(f + g)' = f' + g'$ , Produktregel  $(fg)' = f'g + fg'$  und Kettenregel  $(f \circ g)' = g'(f' \circ g)$  mit demselben Beweis wie in [AN1] 5.4.1 beziehungsweise [AN1] 5.4.6. Insbesondere ist jede komplexe Polynomfunktion holomorph. Weiter folgt aus der Kombination von Produktregel, Kettenregel und unseren Erkenntnissen zum Ableiten des Invertierens 2.1.7 auch im Komplexen die Quotientenregel.

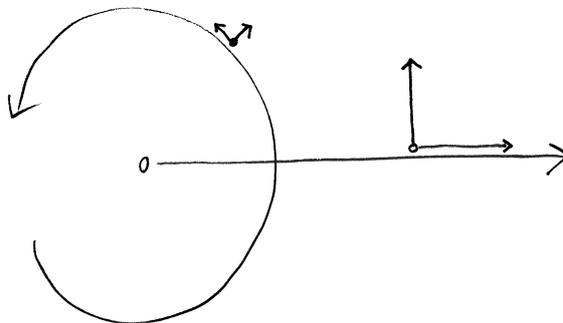
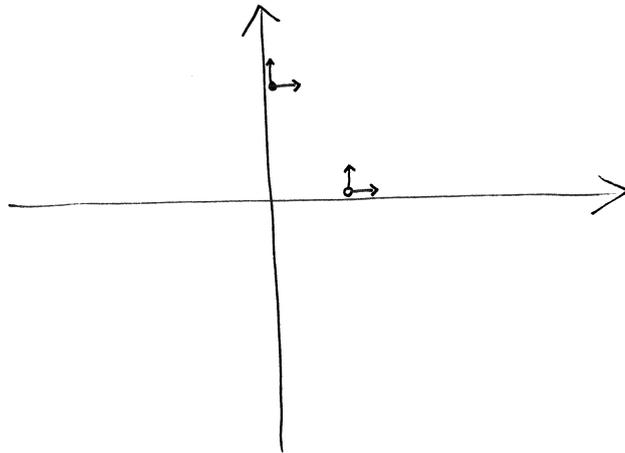
**2.1.11 (Ableiten ganzzahliger Potenzen).** Induktiv folgert man wie im Reellen für die Ableitung von  $z^n$  die Formel  $nz^{n-1}$  erst für  $n \geq 0$  und dann mit der Quotientenregel für  $n \leq -1$ .

**2.1.12 (Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion).** Genau wie im Fall der reellen Exponentialfunktion [AN1] 5.4.9 zeigt man, daß die komplexe Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist und mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt, in Formeln  $\exp' = \exp$ . Ich will nun beispielhaft die anschauliche Bedeutung der Identität  $\exp'(\pi i/2) = \exp(\pi i/2)$  herausarbeiten. Wir haben ja  $\exp(\pi i/2) = i$  und die imaginäre Achse wird unter  $\exp$  auf den Einheitskreis aufgewickelt. So sehen wir, daß  $\exp((\pi i/2) + h) = i \exp h$  für kleines  $h$  in erster Näherung  $i + i h$  ist, also eine Rotation um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn gefolgt von einer Verschiebung, und diese Rotation ist eine Drehstreckung um den Faktor  $i$  und das ist folglich auch unsere Ableitung  $i = \exp'(\pi i/2)$ .

## Übungen

**Übung 2.1.13 (Funktionen mit komplexer Ableitung Null).** Ein holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, deren komplexe Ableitung identisch verschwindet, ist konstant.

**Übung 2.1.14.** Sei  $g : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$  stetig ohne Nullstelle mit  $f := g^2$  holomorph. Man zeige daß auch  $g$  holomorph ist mit Ableitung  $g' = f'/2g$ .



Anschauliche Bedeutung der Ableitung der komplexen Exponentialfunktion. Das untere Bild entsteht aus dem oberen durch Anwenden der komplexen Exponentialfunktion. Man sieht, daß das Differential dieser Abbildung an einer Stelle auf der reellen Achse eine Streckung um einen reellen Faktor ist, an einer Stelle auf der imaginären Achse dahingegen eine Drehung alias eine Streckung um einen komplexen Faktor vom Absolutbetrag Eins.

*Übung 2.1.15.* Sei  $H := \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  die offene obere Halbebene. Man zeige, daß es für je zwei Punkte  $p, q \in H$  eine holomorphe Bijektion  $h : H \xrightarrow{\sim} H$  gibt mit  $h(p) = q$ . Hinweis: 1.1.15.

*Übung 2.1.16.* Sei  $E := \{z \mid |z| < 1\}$  die offene Einheitskreisscheibe. Man zeige, daß es für je zwei Punkte  $p, q \in E$  eine holomorphe Bijektion  $h : E \xrightarrow{\sim} E$  gibt mit  $h(p) = q$ . Hinweis: 2.1.15 und 1.1.16.

## 2.2 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit (3.5)

2.2.1. **Hier ist ein Film über Differenzierbarkeit im Reellen.** In [AN2] 2.3.16 haben wir vereinbart, daß wir eine Teilmenge  $A$  eines normierten reellen Raums  $X$  **halboffen** nennen wollen, wenn es für jeden Punkt  $p \in A$  eine nichtleere offene Teilmenge  $C \Subset \vec{X}$  gibt mit  $p + [0, 1]C \subset A$ , wenn es also anschaulich gesprochen ein kleines Kegelchen mit Spitze in  $p$  gibt, das ganz in  $A$  liegt. Gegeben eine halboffene Teilmenge  $A$  eines normierten reellen Raums  $X$  und eine Abbildung  $f : A \rightarrow Y$  in einen weiteren reellen Raum haben wir in [AN2] 2.3.1 und [AN2] 2.3.19 ihr **Differential**

$$d_p f : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$$

bei  $p$  definiert als eine stetige  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L$ , für die es eine  $\vec{Y}$ -wertige Abbildung  $\varepsilon$  gibt mit  $\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\vec{v}) = 0$  und

$$f(p + \vec{v}) = f(p) + L\vec{v} + \|\vec{v}\|\varepsilon(\vec{v})$$

Wir haben gezeigt, daß so eine Abbildung  $L$  eindeutig ist, wenn sie existiert, so daß sie Namen und Notation auch verdient. Wenn das Differential existiert, nennen wir  $f$  **differenzierbar**. Wenn wir den Unterschied zur partiellen Differenzierbarkeit besonders betonen wollen, sagen wir genauer **total differenzierbar**. Wenn wir den Unterschied zur komplexen Differenzierbarkeit besonders betonen wollen, sagen wir genauer **reell differenzierbar**.

2.2.2. Möglicherweise haben Sie diese Definition bisher nur im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  und  $Y = \mathbb{R}^m$  und für  $A \Subset X$  offen gesehen. In diesem Fall ist es nicht nötig, zwischen den affinen Räumen  $X, Y$  und ihren Richtungsräumen  $\vec{X}, \vec{Y}$  zu unterscheiden, und die darstellende Matrix des Differentials ist die **Jacobi-Matrix**

$$[d_p f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

In diesem Kontext ist jede total differenzierbare Abbildung auch partiell differenzierbar. Existieren umgekehrt alle partiellen Ableitungen auf ganz  $A$  und sind stetig, so ist nach [AN2] 2.5.1 unsere Funktion auch total differenzierbar.

2.2.3. **Hier ist ein Film über Geschwindigkeit und Differential.** Im Fall einer differenzierbaren Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$  der Zahlengerade in einen normierten reellen Raum  $X$  verwendet man die Notation  $\gamma'(t) := (d_t\gamma)(1)$  und erkennt, daß der Richtungsvektor  $\gamma'(t) \in \vec{X}$  auch beschrieben werden kann als der Grenzwert

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

Das ist, von den fehlenden Einheiten abgesehen, der **Geschwindigkeitsvektor** aus der Physik. Dasselbe gilt, wenn  $\gamma$  auf einem mehrpunktigen Intervall oder allgemeiner einer beliebigen halboffenen Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definiert ist.

2.2.4. Im Fall einer differenzierbaren Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  von einem normierten reellen Raum  $X$  in die Zahlengerade ist  $p \mapsto d_p f$  eine Abbildung  $X \rightarrow \vec{X}^*$  von  $X$  in den Dualraum des Richtungsraums. Sie heißt das **Differential von  $f$**  und wird notiert als

$$df : X \rightarrow \vec{X}^*$$

Eine Abbildung  $X \rightarrow \vec{X}^*$  heißt ein **Kovektorfeld auf  $X$** . Kovektorfelder werden punktweise addiert und mit reellwertigen Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  multipliziert. Im Spezialfall  $X = \mathbb{R}^n$  sind die Funktionen  $x_i$  die Projektionen auf die Koordinaten, also linear, also „ihr eigenes Differential“. Ihre Differentiale  $dx_i$  ordnen mithin jedem Punkt ebenfalls die Projektion auf die  $i$ -te Koordinate  $\text{pr}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zu. Für eine beliebige differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  findet man dann

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

alias für alle  $p$  die Identität  $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) d_p x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) d_p x_n$  in  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Analoges gilt, wenn  $f$  auf einer offenen Teilmenge von  $X$  beziehungsweise  $\mathbb{R}^n$  definiert ist.

2.2.5. Spezialisieren wir unsere allgemeine Definition der Differenzierbarkeit auf den Fall  $X = Y = \mathbb{C}$  und vergleichen sie mit der Charakterisierung 2.1.8 der komplexen Differenzierbarkeit, so erkennen wir, daß für  $p \in U \subseteq \mathbb{C}$  eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann komplex differenzierbar ist, wenn sie reell total differenzierbar ist und ihr a priori  $\mathbb{R}$ -lineares Differential  $d_p f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sogar eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung ist alias durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl gegeben wird, in Formeln

$$d_p f = (f'(p) \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

für die komplexe Ableitung  $f'(p)$ . Wir verwenden dabei, daß  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  gleichbedeutend ist zu  $\lim_{h \rightarrow 0} (|h|/h)\varepsilon(h) = 0$  für reelles und auch komplexes  $h$ .

**Satz 2.2.6.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Teilmenge und bezeichne  $\text{can} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$  die übliche Identifikation. Gegeben stetig partiell differenzierbare reelle Funktionen  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Funktion  $f : \text{can}(U) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$$

genau dann holomorph, wenn das Paar  $(u, v)$  die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** erfüllt, die da lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

*Vorschau 2.2.7.* Aus dem Satz von Goursat 4.1.5 werden Sie im weiteren Verlauf als Übung 4.1.17 folgern, daß gegeben eine holomorphe Funktion  $f$  auch umgekehrt ihr Realteil  $u$  und ihr Imaginärteil  $v$  stetig partiell differenzierbar sind.

2.2.8. Man kann sich diese Gleichungen veranschaulichen als die Bedingung, daß an jeder Stelle der Gradient des Imaginärteils  $v$  unserer Funktion aus dem Gradienten ihres Realteils  $u$  hervorgeht durch die Drehung um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn.

2.2.9 (**Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, Variante**). Verwenden wir partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen [AN2] 2.6.9 und nehmen der Einfachheit halber  $\text{can} = \text{id}$  an, so können wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen auch zusammenfassen zur Gleichung

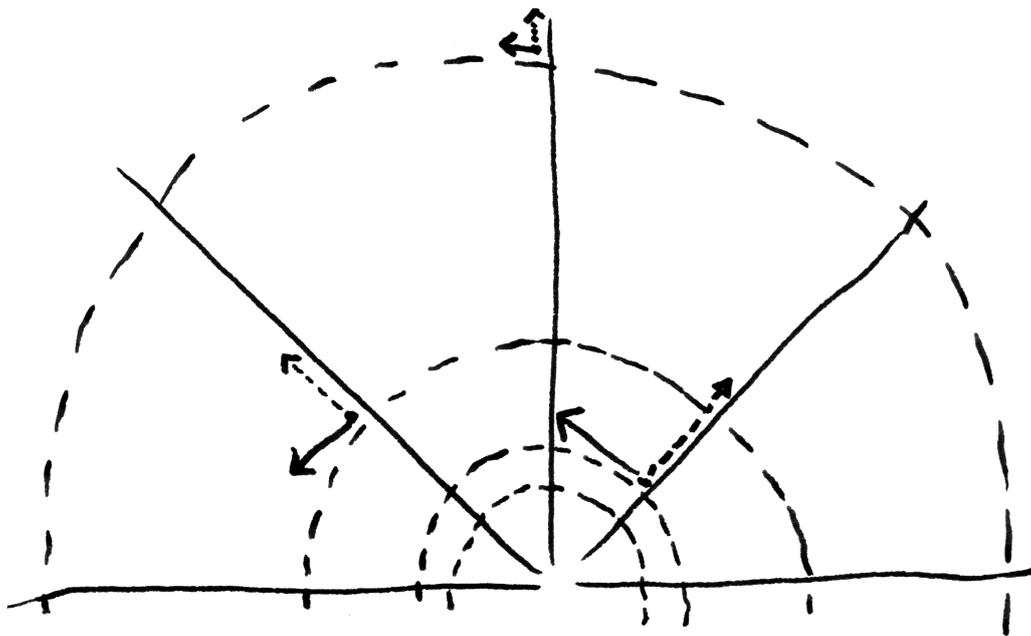
$$i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Die komplexe Ableitung von  $f$  wird dann gegeben durch  $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$  und wird auch bereits durch Real- oder Imaginärteil unserer Funktion festgelegt als  $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ . Fassen wir komplexwertige Funktionen auf einer Teilmenge der komplexen Zahlen als Vektorfelder auf, so entspricht die komplex konjugierte Ableitung mithin dem Gradienten des Realteils unserer Funktion, in Formeln

$$\overline{f'} = \text{grad}(\text{Re } f)$$

*Beweis der Hin-Richtung.* Hier ist ein erster Film über die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**. Die komplexe Ableitung können wir schreiben als

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{C}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$



Dieses Bild soll die Bedeutung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen veranschaulichen. Die gestrichelten beziehungsweise durchgezogenen Linien deuten die Niveaumengen seines Real- beziehungsweise Imaginärteils eines Zweiges des Logarithmus an, die gestrichelten beziehungsweise durchgezogenen Pfeile deren Gradienten. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen bedeuten gerade, daß an jeder Stelle der Gradient des Imaginärteils durch eine Drehung um  $90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn aus dem Gradienten des Realteils hervorgeht.

mit dem Grenzwert über komplexes  $h$ , was ich versuche dadurch anzudeuten, daß ich  $0_{\mathbb{C}}$  schreibe für die Null der komplexen Zahlenebene. Natürlich haben wir a fortiori

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \text{und} \quad f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$$

mit dem Grenzwert über reelle  $h$ , was ich durch die Notation  $0_{\mathbb{R}}$  andeute. Erinnern wir nun  $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$  und multiplizieren beide Seiten der rechten Gleichung mit  $i$ , so finden wir

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad \text{und} \quad if'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

Daraus folgen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sofort.  $\square$

**Beweis.** Hier ist ein Film über die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen vom höheren Standpunkt. Ich habe mir Mühe gegeben, den Satz so zu formulieren, daß er zu unserer Beschreibung der komplexen Zahlen bis auf eindeutigen Isomorphismus in 1.1.2 paßt. Für den Beweis dürfen wir uns ein beliebiges Modell der komplexen Zahlen aussuchen und mithin ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\text{can} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  die Identität ist. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist nun nach 2.1.8 komplex differenzierbar bei  $p \in U$  mit Ableitung  $b$  genau dann, wenn es eine komplexwertige Funktion  $\varepsilon$  gibt mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  und  $f(p+h) = f(p) + bh + h\varepsilon(h)$  oder auch gleichbedeutend eine komplexwertige Funktion  $\eta$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$  und

$$f(p+h) = f(p) + bh + |h|\eta(h)$$

In der Tat unterscheiden sich  $\eta(h)$  und  $\varepsilon(h)$  dabei für  $h \neq 0$  nur um den Faktor  $h/|h|$  der Norm Eins und für  $h = 0$  kommt es auf die genauen Werte dieser Funktionen eh nicht an. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist andererseits nach [AN2] 2.3.1 reell total differenzierbar bei  $p \in U$  mit Differential  $B \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  genau dann, wenn es eine komplexwertige Funktion  $\eta$  gibt mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$  und

$$f(p+h) = f(p) + Bh + |h|\eta(h)$$

Unsere Funktion ist also komplex differenzierbar bei  $p$  mit der komplexen Ableitung  $f'(p) = b$  genau dann, wenn  $f$  reell differenzierbar ist bei  $p$  und sein Differential  $d_p f = B \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  eine komplexlineare Abbildung ist, eben die Abbildung  $(b \cdot)$ . Gleichbedeutend ist dann auch die Forderung, daß  $d_p f$  mit der Multiplikation  $(i \cdot)$  mit  $i$  kommutiert. Um diese Bedingung in die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen zu übersetzen, ziehen wir uns nun auf

unser Modell  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  der komplexen Zahlen zurück. Sind  $u$  und  $v$  stetig partiell differenzierbar, so ist dann nach [AN2] 2.5.1 auch die Funktion  $f = (u, v)$  reell differenzierbar an jeder Stelle  $p \in U$  und ihr Differential  $d_p f = d_p(u, v)$  wird nach [AN2] 2.3.3 beschrieben durch die Jacobi-Matrix

$$[d_p(u, v)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

an der jeweiligen Stelle  $p$ . Damit ist  $f = (u, v)$  komplex differenzierbar bei  $p$  genau dann, wenn diese Matrix kommutiert mit der Matrix  $[(i \cdot)] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  der Multiplikation mit  $i$ , wenn also an der jeweiligen Stelle  $p$  gilt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \square$$

**Proposition 2.2.10 (Holomorphie der Umkehrfunktion, schwache Form).** *Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine injektive holomorphe Funktion mit stetiger nirgends verschwindender Ableitung ist auch ihr Bild eine offene Teilmenge  $f(U) \subseteq \mathbb{C}$  und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  ist holomorph mit der Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

2.2.11. Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  nennen wir eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine **biholomorphe Einbettung**, wenn sie injektiv ist mit offenem Bild  $f(U) \subseteq \mathbb{C}$  und wenn die Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  auch wieder eine holomorphe Funktion  $f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  ist. Unsere Proposition besagt in dieser Terminologie, daß jede injektive holomorphe Funktion mit stetiger nirgends verschwindender Ableitung eine biholomorphe Einbettung ist. In 4.4.8 zeigen wir stärker, daß überhaupt jede injektive holomorphe Funktion eine biholomorphe Einbettung ist. Unser Beweis dort stützt sich aber auf die hier gegebene Proposition.

*Vorschau 2.2.12.* In 3.3.19 wird skizziert, wie man beim Beweis dieser Proposition vorgehen kann, wenn man den Umkehrsatz der Analysis nicht voraussetzen will.

*Beweis.* Per definitionem ist eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stets reell differenzierbar im Sinne von [AN2] 2.3.1 und ihr Differential bei  $p \in U$  ist die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $d_p f = (f'(p) \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$  in sich selber. Ist  $f'$  stetig ohne Nullstelle, so ist  $f$  offen nach dem Satz über die Umkehrabbildung [AN2] 4.1.2. Ist  $f$  zusätzlich injektiv, so ist mithin seine Umkehrabbildung stetig, ja sogar stetig differenzierbar wieder nach dem Satz über die Umkehrabbildung [AN2] 4.1.2, und ihr Differential in  $q = f(p)$  ist die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$(d_q(f^{-1})) = (d_p f)^{-1} = (f'(p)^{-1} \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

In anderen Worten gilt  $f^{-1}(q+h) = f^{-1}(q) + f'(p)^{-1}h + \varepsilon(h)|h|$  für eine Funktion  $\varepsilon$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ , und das bedeutet ja genau die komplexe Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion an der Stelle  $q$  sowie die Formel  $(f^{-1})'(q) = f'(p)^{-1}$  für ihre Ableitung.  $\square$

**Beispiel 2.2.13 (Komplexe Wurzelfunktionen).** Das Quadrieren liefert eine Bijektion zwischen der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil und der „geschlitzten Zahlenebene“

$$\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$

Die Umkehrfunktion notieren wir  $z \mapsto \sqrt{z}$  und nennen sie die „Quadratwurzel mit positivem Realteil“. Sie ist nach 2.2.10 eine holomorphe Funktion auf der geschlitzten Zahlenebene mit Ableitung  $1/(2\sqrt{z})$ . Ist allgemeiner  $U \subseteq \mathbb{C}$  irgendeine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , auf der das Quadrieren eine Injektion  $q : U \hookrightarrow \mathbb{C}$  induziert, so gilt offensichtlich  $0 \notin U$  und die Umkehrfunktion  $w : q(U) \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph mit der Ableitung  $w'(z) = 1/(2w(z))$ . Analoges gilt für höhere Wurzeln.

**Beispiel 2.2.14.** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge derart, daß die komplexe Exponentialfunktion eine Injektion  $\exp : U \hookrightarrow \mathbb{C}$  liefert, so ist nach 2.2.10 auch die Umkehrfunktion  $\log : \exp(U) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit der Ableitung

$$\log'(z) = 1/z$$

In der Tat finden wir  $\log'(q) = 1/\exp(\log q) = 1/q$ . Diese Funktionen heißen **Zweige des Logarithmus**. Im Spezialfall  $U = \mathbb{R} + (-\pi, \pi)i$  spricht man vom **Hauptzweig des Logarithmus**. Wir hatten ihn bereits in 1.2.9 eingeführt und sogar auch noch auf der negativen reellen Achse erklärt, aber nicht in stetiger Weise.

2.2.15. **Hier ist ein Film über die reell-komplexe Kettenregel.** Schließlich erinnern wir auch noch an die Kettenregel in mehreren Veränderlichen

$$d_p(f \circ g) = (d_{g(p)}f) \circ (d_p g)$$

aus [AN2] 2.4.2 und wiederholen an dieser Stelle nicht mehr die Bedeutung aller Notationen und die jeweiligen Voraussetzungen. Geht etwa  $g$  von der reellen Zahlengerade aus und benennen wir es um in  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$  und werten beide Seiten der Kettenregel auf  $1_{\mathbb{R}}$  aus, so folgt

$$(f \circ \gamma)'(t) = (d_{\gamma(t)}f)(\gamma'(t))$$

Insbesondere folgt so im Fall  $X = \mathbb{C}$  für jede differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und jede holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die **reell-komplexe Kettenregel** in der Gestalt

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

mit einem Produkt von komplexen Zahlen auf der rechten Seite. Dasselbe gilt für Funktionen, die nur auf halboffenen Teilmengen definiert sind.

**Definition 2.2.16.** Bezeichne  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Konjugation. Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **antiholomorph**, wenn  $\bar{f} := c \circ f$  holomorph ist.

## Übungen

*Übung 2.2.17.* Man zeige, daß für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  der Hauptzweig des Logarithmus von  $1 + z$  auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Es reicht zu zeigen, daß für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| = 1$  das Einsetzen von  $z = wt$  auf beiden Seiten dieselbe Funktion in  $t \in (-1, 1)$  liefert. Beide Seiten nehmen aber bei  $z = 0$  den Wert Null an, so daß es reicht, die Gleichheit ihrer Ableitungen zu zeigen. In 4.2.11 dürfen Sie diese Übung mit mehr Theorie und weniger Rechnen ein weiteres Mal lösen.

*Übung 2.2.18.* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Man zeige, daß eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  antiholomorph ist genau dann, wenn  $f \circ c : c(U) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Insbesondere ist die Verknüpfung antiholomorpher Funktionen stets holomorph.

*Übung 2.2.19.* Eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, ist konstant.

*Übung 2.2.20.* Gegeben eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ohne Nullstelle erklärt man ihre **logarithmische Ableitung** durch die Vorschrift

$$\frac{d \log f(z)}{dz} := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Man zeige, daß die logarithmische Ableitung eines Produkts die Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren ist. Gibt es einen Zweig des Logarithmus  $\log : V \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{C}$  mit  $f(U) \subset V$ , so ist die logarithmische Ableitung von  $f$  für jeden solchen Zweig die Ableitung der Verknüpfung  $\log \circ f$ .

## 2.3 Integration komplexwertiger Funktionen (5.5)

2.3.1. Man muß sich hier von der in der Schule lieb gewonnenen Anschauung des Integrals als „Fläche unter einer Kurve“ verabschieden. Welche Anschauung man stattdessen damit verbinden mag, werden wir im folgenden noch ausführlich diskutieren. [Hier ist ein Film über Integration vektorwertiger Funktionen.](#)

2.3.2. Ich erinnere aus [AN2] 6.3 das Integrieren stetiger Funktionen auf kompakten reellen Intervallen mit Werten in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen. Uns wird besonders der Fall von komplexwertigen Funktionen betreffen.

**Definition 2.3.3.** Seien  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres kompaktes Intervall,  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $f : [a, b] \rightarrow V$  eine Abbildung. Wir betrachten für  $r \geq 1$  die äquidistante Unterteilung  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = b$  und definieren die  $r$ -te **Riemannsumme**  $S^r(f) \in V$  durch

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) = \left( \frac{b-a}{r} \right) \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)$$

**Satz 2.3.4 (Integration vektorwertiger Funktionen).** Ist  $f : [a, b] \rightarrow V$  eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten reellen Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ , so existiert der Grenzwert der zugehörigen Riemannsummen. Das als dieser Grenzwert erklärte **Integral**

$$\int f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) \, dt := \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

ordnet jedem  $f$  einen Vektor  $(\int f) \in V$  zu und hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für alle  $c \in [a, b]$  gilt  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ ;
2. Ist  $f = v$  konstant ein  $v \in V$ , so gilt  $\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b v \, dt = (b-a)v$ ;
3. Ist  $W$  ein weiterer endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\Lambda : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so gilt

$$\int (\Lambda \circ f) = \Lambda \left( \int f \right)$$

4. Gegeben eine Norm auf  $V$  gilt für die Norm des Integrals die Abschätzung  $\| \int f \| \leq \int \| f \|$ ;
5. Im Fall  $V = \mathbb{R}$  reellwertiger Funktionen erhalten wir unser Integral aus [AN1] 5.2.1 zurück.

2.3.5. Sie mögen in diesem Satz die Regeln  $\int \lambda f = \lambda \int f$  sowie  $\int (f + g) = \int f + \int g$  für stetige vektorwertige Funktionen  $f, g$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  vermißt haben. Sie folgen jedoch formal aus Teil 3. In der Tat dürfen wir dort  $\Lambda = (\lambda \cdot) : V \rightarrow V$  nehmen und auch  $\Lambda : V \times V \rightarrow V$  die Addition sowie die beiden Projektionen. So ergibt sich für die  $V \times V$ -wertige Funktion  $(f, g)$  zunächst  $\text{pr}_1 \int (f, g) = \int f$  und  $\text{pr}_2 \int (f, g) = \int g$  und damit  $\int (f, g) = (\int f, \int g)$  und durch Anwenden der Addition dann  $\int (f + g) = \int f + \int g$ .

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $V = \mathbb{R}^n$ . Alle Aussagen bis auf die Abschätzung der Norm des Integrals folgen dann unmittelbar aus dem wohlbekanntem Fall der Integrale reellwertiger Funktionen. Die Abschätzung der Norm des Integrals folgt aus der entsprechenden Abschätzung der Normen der Riemannsummen durch Übergang zum Grenzwert.  $\square$

*Beispiel 2.3.6.* Wir prüfen  $\int_0^{2\pi} e^{it} dt = 0$ . In der Tat erkennt man leicht, daß in diesem Fall sogar bereits alle Riemannsummen ab  $r \geq 2$  verschwinden als „Summen über die Speichenvektoren eines Rades mit  $r$  Speichen“. Alternativ finden wir auch mit der Euler'schen Formel

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \cos t + i \sin t dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt + i \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0 + i0 = 0$$

2.3.7. Wie im Fall reellwertiger Funktionen verwenden wir auch im Fall vektorwertiger Funktionen die Konvention  $\int_b^a f = -\int_a^b f$ . Ist dann  $f : I \rightarrow V$  eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so gilt für beliebige  $a, b, c \in I$  die Formel  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

**Satz 2.3.8 (Vektorwertige Variante des Hauptsatzes).** *Gegeben ein mehrpunktiges Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$ , eine stetige Funktion  $f : I \rightarrow V$  und ein Punkt  $a \in I$  ist die Funktion*

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow V \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

die einzige differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow V$  mit  $F' = f$  und  $F(a) = 0$ .

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $V = \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Korollar 2.3.9 (Integrieren mit Stammfunktionen).** *Seien  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $a < b$  reelle Zahlen und  $f : [a, b] \rightarrow V$  stetig. Ist  $G : [a, b] \rightarrow V$  eine **Stammfunktion** von  $f$ , als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung  $G'(t) = f(t)$ , so gilt*

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz 2.3.8.  $\square$

*Beispiel 2.3.10.* Wir berechnen gleich noch ein drittes Mal unser  $\int_0^{2\pi} e^{it} dt$ . Mit der reell-komplexen Kettenregel 2.2.15 finden wir, daß  $\frac{1}{i} e^{it}$  eine Stammfunktion des Integranden ist. So folgt ein weiteres Mal

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i} (e^{i2\pi} - e^0) = 0$$

2.3.11 (**Substitutionsregel**). Man folgert unmittelbar das Analogon

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \int_a^b f(g(s))g'(s) ds$$

der Substitutionsregel [AN1] 5.8.1 für  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f : g([a, b]) \rightarrow V$  stetig mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ . Damit das uneingeschränkt gilt, muß man wie vereits in der Analysis besprochen  $\int_c^d = -\int_d^c$  vereinbaren im Fall vertauschter Grenzen.

2.3.12 (**Integration rationaler Funktionen**). **Hier ist ein Film über Integration rationaler Funktionen**. Ich will nun im Lichte unserer neuen Erkenntnisse nocheinmal die Integration rationaler Funktionen diskutieren. Wir erinnern zunächst die Partialbruchzerlegung aus [LA1] 5.5.12. Danach bilden die Potenzen  $(X^n)_{n \geq 0}$  mitsamt den Potenzen der Inversen der Linearfaktoren  $((X - \mu)^{-n})_{n \geq 1, \mu \in \mathbb{C}}$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis des Funktionenkörpers  $\mathbb{C}(X) = \text{Quot } \mathbb{C}[X]$ . Es reicht also, die Funktionen  $\mathbb{R} \setminus \mu \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x - \mu)^m$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  und  $\mu \in \mathbb{C}$  zu integrieren, und Stammfunktionen für diese Funktionen sind eben

$$\frac{1}{m+1}(x - \mu)^{m+1} \text{ für } m \neq -1 \text{ und } \log(x - \mu) \text{ für } m = -1$$

für einen und jeden Zweig des Logarithmus, der auf der entsprechenden Parallele zur reellen Achse beziehungsweise der reellen Achse selbst mit Ausnahme des Ursprungs definiert ist, vergleiche unsere Formel  $\log'(z) = 1/z$  aus 2.2.14 für die Ableitung des komplexen Logarithmus.

*Beispiel 2.3.13.* Wir bestimmen eine Stammfunktion zu  $1/(1+x^2)$ . Die Nullstellen des Nenners sind  $\pm i$  und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners. Wir dürfen folglich den Ansatz

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x+i} + \frac{b}{x-i}$$

machen und finden sofort  $(a+b)x - ia + ib = 1$ , also  $a+b=0$  und  $a-b=i$  und folglich  $a=i/2$  und  $b=-i/2$ . Eine Stammfunktion ist mithin

$$\frac{i}{2} \log(x+i) - \frac{i}{2} \log(x-i)$$

Aus 1.2.9 erinnern wir für den Hauptzweig des Logarithmus die Formel

$$\log(u+iv) = \log \sqrt{u^2+v^2} \pm i \frac{\pi}{2} - i \arctan \frac{u}{v} \text{ für } \pm v > 0$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen beachten wir, daß unsere Stammfunktion bis auf eine Konstante eh eine reellwertige Funktion sein muß. Wir dürfen

also bereits vor dem Addieren die Realteile nehmen. Die Konstanten dürfen wir eh weglassen und erhalten so als reelle Stammfunktion sofort

$$\frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \arctan(-x) = \arctan(x)$$

in Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen aus [AN1] 5.4.14.

## Übungen

*Übung 2.3.14.* Man finde eine Stammfunktion von  $1/(x^4 + 1)$ .

*Übung 2.3.15 (Komplexes Ableiten unter dem Integral).* Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(z, t) \mapsto f(z, t)$  stetig. Ist  $f$  für alle  $t$  komplex differenzierbar in  $z$  und  $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so ist auch die Abbildung  $F : z \mapsto \int_a^b f(z, t) dt$  holomorph und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w, t) dt$$

Hinweis: [AN2] 3.1.15. In 4.1.15 diskutieren wir noch eine etwas stärkere Variante. Die Aussage dieser Übung wird im weiteren Verlauf der Vorlesung eine wichtige Rolle spielen.

*Übung 2.3.16 (Partielle Integration für komplexwertige Funktionen).* Man schreibe die Regel für die partielle Integration für stetig differenzierbare komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen aus und gebe einen Beweis. Hinweis: Es geht wie im Reellen, vergleiche [AN1] 5.8.9.

## 3 Wegintegrale und Integralsatz von Cauchy

### 3.1 Komplexe Wegintegrale (10.5)

**Definition 3.1.1.** Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetig differenzierbarer Weg und  $f$  eine stetige auf seinem Bild definierte komplexwertige Funktion, so definieren wir das **komplexe Wegintegral der Funktion  $f$  über den Weg  $\gamma$** , eine komplexe Zahl  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , durch die Vorschrift

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Ist allgemeiner  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar im Sinne von [AN2] 8.6.4, so nennen wir  $\gamma$  einen **Integrationsweg** und definieren das Wegintegral wie in [AN2] 8.6.5 als die Summe der Wegintegrale über seine maximalen stetig differenzierbaren Teilstücke. **Hier ist ein Film über das komplexe Wegintegral.**

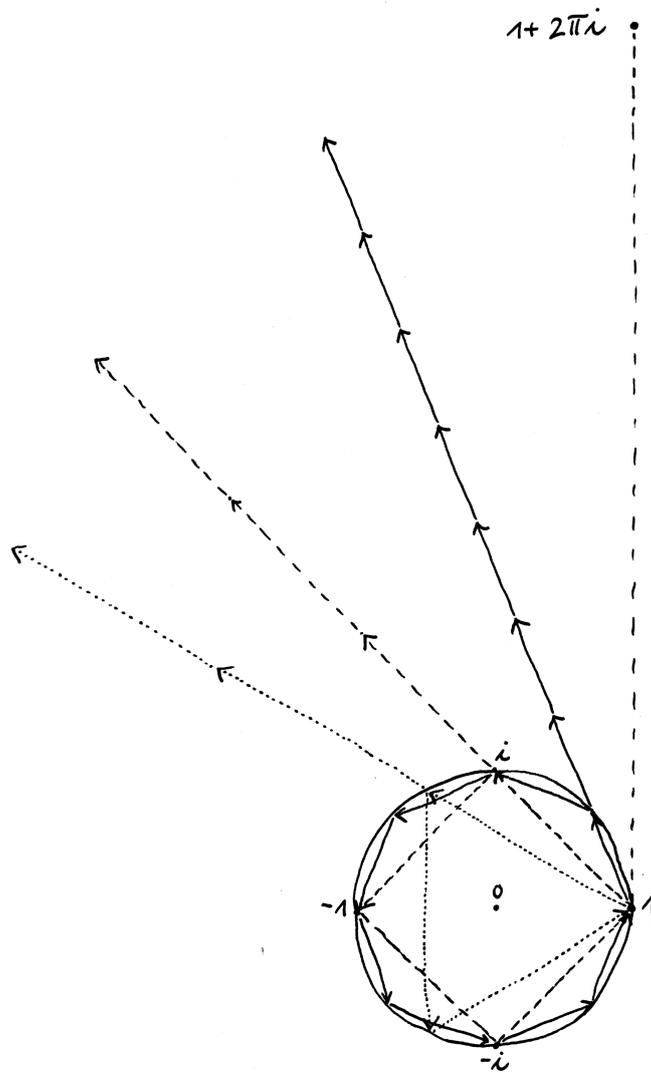
**3.1.2 (Komplexe Wegintegrale als Wegintegrale von Kovektorfeldern).** In 3.5.7 erläutern wir die Bedeutung von  $f(z) dz$  als „komplexwertiges Kovektorfeld“ und besprechen, in welcher Weise die vorstehende Definition als eine Verallgemeinerung unserer Definition des Wegintegrals über Kovektorfelder aus [AN2] 8.4 verstanden werden kann. Ich denke, dieser Zugang trägt am weitesten.

**3.1.3 (Komplexe Wegintegrale als Wegintegrale von Vektorfeldern).** Realteil und Imaginärteil des komplexen Wegintegrals können auch als Wegintegrale von Vektorfeldern auf  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  mit seinem Standardskalarprodukt im Sinne von [AN2] 8.4.12 verstanden werden, aber das wird dann ziemlich verquast. Noch in der vernünftigen Sprache der komplexwertigen Kovektorfelder aus 3.5.7 folgt aus  $z = x + iy$  sofort  $dz = dx + i dy$  und mit  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  dann  $f(z) dz = u dx - v dy + i(v dx + u dy)$ . Da das Wegintegral eines Vektorfeldes  $w = (w_1, w_2)$  auf  $\mathbb{R}^2$  mit dem Wegintegral des Kovektorfeldes  $w_1 dx + w_2 dy$  zusammenfällt, in Formeln  $\int_{\gamma} w \cdot dx = \int_{\gamma} w_1 dx + w_2 dy$ , finden wir so

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u, -v) \cdot dx \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (v, u) \cdot dx$$

Diese Formeln sind auch in Koordinaten schnell nachgerechnet. Das erste Vektorfeld mag man hier auch noch  $(u, -v) = \bar{f}$  schreiben und das zweite  $(v, u) = i\bar{f}$ . Wie gesagt scheint mir das alles ziemlich verquast. Einem Leser, der Wegintegrale von Vektorfeldern gewohnt ist, mag es dennoch weiterhelfen.

**3.1.4 (Anschauung für das komplexe Wegintegral).** Auf der rechten Seite ist  $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$  zu verstehen als Geschwindigkeit im Sinne von 2.2.3 und das Integral



Dieses Bild soll dazu helfen, eine Anschauung für die Riemannsummen zum Integral der Funktionen  $z^n$  über den Einheitskreis zu entwickeln. Im Fall  $n = 0$  sind alle Riemannsummen schlicht Null. Im Fall  $n = -1$  dahingegen werden durch den Faktor  $z^{-1}$  alle „Kanten unserer Vielecke in die Richtung der ersten Kante gedreht“, und man erkennt, wie die Riemannsummen, hier gezeichnet für  $n = 3, 4$  und  $8$ , gegen den Vektor alias die komplexe Zahl  $2\pi i$  konvergieren.

der stetigen komplexwertigen Funktion  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$  ist zu verstehen als Integral einer vektorwertigen Funktion im Sinne von 2.3.4. Betrachtet man in der Situation der Definition für alle  $r \geq 1$  die äquidistanten Unterteilungen  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$  und bildet die „Riemannsummen“

$$S_\gamma^r(f) = \sum_{i=0}^{r-1} f(\gamma(a_i)) (\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i))$$

mit nun in  $\mathbb{C}$  zu bildenden Produkten rechts, so ist unser Wegintegral mit denselben Argumenten wie in [AN2] 8.4.7 der Grenzwert der Folge der Riemannsummen

$$\int_\gamma f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} S_\gamma^r(f)$$

**3.1.5 (Abschätzungen für das komplexe Wegintegral).** Der Absolutbetrag eines Wegintegrals ist beschränkt durch das Produkt der Länge des Weges im Sinne von [AN1] ?? mit dem Supremum der Absolutbeträge der Funktionswerte auf dem Weg. Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  unser Integrationsweg, so gilt also in Formeln

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \left( \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \right) L(\gamma)$$

Man kann das direkt an der Darstellung des Wegintegrals durch Riemannsummen ablesen. Es folgt mit der Darstellung  $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  der Weglänge nach [AN1] 7.1.14 auch sofort aus der Abschätzung 2.3.4 der Norm des Integrals einer vektorwertigen Funktion durch das Integral über die Normen der Funktionswerte, angewandt im Spezialfall einer komplexwertigen Funktion.

*Beispiele* 3.1.6. Ist der Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  die Identität  $\gamma(t) = t$ , so haben wir offensichtlich

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$$

Ist unser Weg gegeben durch  $t \mapsto it$ , so haben wir ebenso offensichtlich

$$\int_\gamma f(z) dz = i \int_a^b f(it) dt$$

Bilden wir das komplexe Wegintegral über die konstante Funktion 1, so ist offensichtlich bereits die Folge der Riemannsummen konstant  $\gamma(b) - \gamma(a)$ , und das kommt nach elementarer Rechnung dann auch aus unserer Definition des komplexen Wegintegrals heraus und wird durch 3.1.7 verallgemeinert, in Formeln

$$\int_\gamma dz = \gamma(b) - \gamma(a)$$

Ist unser Weg ein kreisförmiger Weg im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung, der durch den Winkel parametrisiert ist und der also in Formeln gegeben wird durch  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto r e^{it}$  für einen festen Radius  $r > 0$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} i r e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall  $n \neq -1$  und ganz besonders im Fall  $n = 0$  scheint es mir in dieser Situation auch anschaulich recht klar, daß bereits fast alle Riemannsummen verschwinden, da die  $k$ -te Riemannsumme die Summe aller  $k$ -ten Einheitswurzeln ist, und damit verschwindet natürlich auch ihr Grenzwert. Der Fall  $n \neq -1$  läßt sich im Übrigen auch elegant als Spezialfall der anschließenden Proposition behandeln.

**Proposition 3.1.7 (Komplexes Wegintegral durch Stammfunktion).** *Seien  $U \Subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig komplex differenzierbar und  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg. So gilt*

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $\gamma$  stetig differenzierbar annehmen. Nach der reell-komplexen Kettenregel 2.2.15 hat  $(f \circ \gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  die Ableitung  $t \mapsto f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Damit finden wir

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = (f \circ \gamma)|_a^b$$

nach der Definition und der vektorwertigen Variante 2.3.9 des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.  $\square$

*Vorschau 3.1.8.* In der Sprache der komplexwertigen Kovektorfelder finden wir für  $f$  holomorph  $df = f'(z) dz$  und unsere Formel erweist sich als eine komplexwertige Variante der Formel [AN2] 8.4.9 des Wegintegrals über ein totales Differential.

3.1.9. Insbesondere ist also das Integral einer Ableitung über einen geschlossenen Weg stets Null. Das zeigt sofort  $\int_{\gamma} z^n dz = 0$  für  $n \neq -1$  und jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in der komplexen Zahlenebene. Im Fall  $n = -1$  kann dies Argument so nicht angewandt werden, da die Funktion  $1/z$  keine auf ganz  $\mathbb{C}^{\times}$  definierte Stammfunktion besitzt. Definieren wir aber  $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  als Umkehrung von  $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ , so ist  $\log$  nach 2.2.10 holomorph mit Ableitung  $1/z$ , und integrieren wir für  $\varepsilon > 0$  die Funktion  $1/z$  über einen Integrationsweg

von  $-1 - i\varepsilon$  bis  $-1 + i\varepsilon$  durch die geschlitzte Zahlenebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ , so ergibt sich  $\log(-1 + i\varepsilon) - \log(-1 - i\varepsilon)$  und das strebt für  $\varepsilon \searrow 0$  gegen  $2\pi i$ . So finden wir

$$\int_{\gamma} z^{-1} dz = 2\pi i$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg, der an einem Punkt der negativen reellen Zahlengeraden beginnt und endet, der sonst  $\mathbb{R}_{\leq 0}$  nicht trifft, und der „nach unten losgeht und von oben ankommt“.

**3.1.10 (Funktionen mit komplexer Ableitung Null).** Wir geben noch ein alternatives Argument für Übung 2.1.13, nach der eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, deren Ableitung identisch verschwindet, konstant sein muß. Nach 1.4.4 lassen sich ja je zwei Punkte des Definitionsbereichs durch einen Integrationsweg verbinden. Nach 3.1.7 hat also unsere Funktion an je zwei Punkten denselben Wert.

**3.1.11 (Stückweises Integrieren).** Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg und  $f$  eine auf seinem Bild definierte stetige komplexwertige Funktion, so gilt für alle  $c \in (a, b)$  offensichtlich oder genauer nach 2.3.4 die Identität

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma|_{[a,c]}} f(z) dz + \int_{\gamma|_{[c,b]}} f(z) dz$$

**Proposition 3.1.12 (Unabhängigkeit von der Parametrisierung).** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ist  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar mit  $t(c) = a$  und  $t(d) = b$ , so gilt

$$\int_{\gamma \circ t} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

*Ergänzung 3.1.13.* Kehrt hier alternativ unsere Reparametrisierung die Richtung um, gilt also  $t(c) = b$  und  $t(d) = a$ , so ändert unter unserer Reparametrisierung das Integral sein Vorzeichen. Die Proposition ist im übrigen eine Variante des Satzes über die Unabhängigkeit von der Parametrisierung von Wegintegralen im Reellen [AN2] 8.4.17 wird auch im wesentlichen genauso bewiesen. **Hier ist ein Film über das Umparametrisieren und Integrationswege.**

*Beweis.* Wir beachten  $(\gamma \circ t)'(\tau) = \gamma'(t(\tau))t'(\tau)$  nach der komplex-reellen Kettenregel, können unsere Behauptung demnach ausschreiben zur Behauptung

$$\int_d^c f(\gamma(t(\tau)))\gamma'(t(\tau))t'(\tau) d\tau = \int_{t(d)}^{t(c)} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

und diese Gleichung folgt aus der Substitutionsregel [AN1] 5.8.1, angewandt auf Real- und Imaginärteil, oder eleganter aus der Substitutionsregel 2.3.11 für vektorwertige Funktionen.  $\square$

**Proposition 3.1.14 (Existenz von Stammfunktionen).** *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene besitzt eine Stammfunktion genau dann, wenn ihr Wegintegral über jeden geschlossenen Integrationsweg in unserer offenen Teilmenge verschwindet.*

*Beweis.* Hier ist ein Film über Wegintegral und komplexe Stammfunktionen. Besitzt unsere Funktion eine Stammfunktion, so verschwinden alle Wegintegrale über geschlossene Integrationswege nach 3.1.7. Um die Gegenrichtung zu zeigen dürfen wir, da nach [AN2] 8.5.14 die Wegzusammenhangskomponenten einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene auch selbst offen sind, ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  zusammenhängend annehmen. Dann wählen wir  $p \in U$  fest und betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} F : U &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto \int_{\gamma_w} f(z) dz \end{aligned}$$

für  $\gamma_w$  einen beliebigen Integrationsweg von  $p$  nach  $w$ , den es nach 1.4.4 geben muß und von dessen Wahl unser Wegintegral nach Annahme ja nicht abhängt. Für kleines  $h \in \mathbb{C}$  können wir dann  $F(w+h)$  berechnen, indem wir an den Weg  $\gamma_w$  noch das Geradensegment  $[w, w+h]$  anhängen. Für kleines  $h \in \mathbb{C}$  gilt damit

$$F(w+h) - F(w) = \int_0^1 f(w+\tau h) h d\tau$$

Teilen wir durch  $h$ , so erhalten wir  $\int_0^1 f(w+\tau h) d\tau$ , und das strebt gegen  $f(w)$  für  $h \rightarrow 0$ . Genauer haben wir  $|f(w) - \int_0^1 f(w+\tau h) d\tau| = |\int_0^1 f(w) - f(w+\tau h) d\tau| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |f(w) - f(w+\tau h)| \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  aufgrund der Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $w$ . Folglich ist  $F$  eine Stammfunktion unserer stetigen Funktion  $f$ .  $\square$

3.1.15. Unter einem **Rechteck** oder genauer einem **achsenparallelen Rechteck** verstehen wir eine Teilmenge  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , die das Produkt von zwei kompakten reellen mehrpunktigen Intervallen ist. Unter dem **Randweg**  $\partial \vec{Q}$  eines Rechtecks  $Q$  verstehen wir den geschlossenen Weg, der von der unteren linken Ecke ausgehend „einmal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand unseres Rechtecks umläuft“, sagen wir mit konstanter Geschwindigkeit Eins auf jeder Kante. Hier vom „Gegenuhrzeigersinn“ zu sprechen, appelliert an unsere Anschauung und die übliche Identifikation des  $\mathbb{R}^2$  mit der Papierebene gemäß der Vereinbarung „ $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach oben“ und ist keine sehr mathematische Formulierung, aber ich hoffe, daß dem Leser umso genauer klar ist, welcher Weg gemeint ist. Der Pfeil über dem  $Q$  soll daran erinnern, daß es uns bei diesem Randweg auf die Richtung ankommt. Unter dem **Randintegral** einer stetigen komplexwertigen Funktion in Bezug auf ein Rechteck verstehen wir ihr komplexes Wegintegral über diesen Randweg.

*Ergänzung* 3.1.16. Diese Notation ist mit unserer Notation aus [AN2] 9.3 verträglich in dem Sinne, daß beide Notationen Spezialisierungen aus dem noch allgemeineren Rahmen der Integration von Differentialformen über orientierte Fastfaltungen sind. Versehen wir genauer  $\mathbb{C}$  mit der durch unsere übliche Identifikation  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  gegebenen Orientierung, so meint  $\vec{Q}$  das Rechteck mit seiner induzierten Orientierung und unter  $\partial\vec{Q}$  ist der Rand von  $Q$  mit seiner induzierten Orientierung im Sinne von [AN2] 9.7.18. Das ist dann zwar recht eigentlich kein Weg, sondern vielmehr eine orientierte 1-Fastfaltung, aber das Integral der komplexwertigen 1-Form  $f(z) dz$  im Sinne von 3.5.8 über diese 1-Fastfaltung fällt zusammen mit dem hier definierten komplexen Wegintegral.

**Lemma 3.1.17 (Stammfunktionen auf offenen Kreisscheiben).** *Eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene besitzt auf besagter Kreisscheibe eine Stammfunktion genau dann, wenn für jedes in unserer Kreisscheibe enthaltene achsenparallele Rechteck das Randintegral verschwindet.*

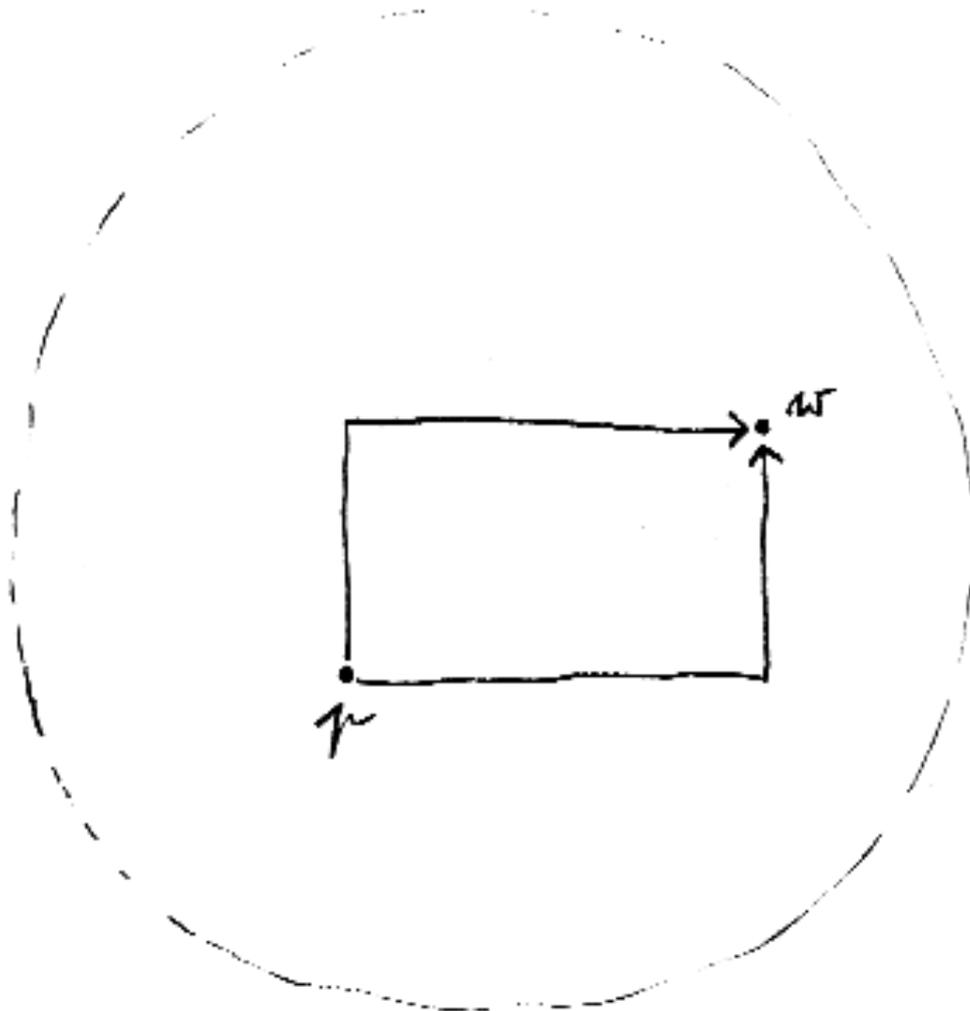
3.1.18. Diese Variante des Satzes über die Stammfunktion werden wir beim Beweis des Integralsatzes von Cauchy 3.3.1 und beim Beweis des Satzes von Morera 4.1.9 brauchen. Unter einem achsenparallelen Rechteck verstehen wir hier und im Folgenden ein Rechteck, dessen Kanten parallel sind zu den Koordinatenachsen oder in unserem Falle zur reellen beziehungsweise imaginären Achse.

*Beweis.* Man variiert das Argument des vorhergehenden Beweises für 3.1.14 dahingehend, daß man als Wege  $\gamma_w$  nur die beiden Wege nimmt, die längs der Kanten eines achsenparallelen Rechtecks mit Ecken  $p$  und  $w$  von  $p$  nach  $w$  laufen. Damit erkennt man zwar für die Stammfunktion in  $\text{spe } F$  zunächst nur  $\frac{\partial F}{\partial x} = f$  und  $\frac{\partial F}{\partial y} = if$ , da man  $F$  nur über ganz spezielle Wege erklärt hat und damit nur seine Veränderung auf vertikalen und horizontalen Geraden unmittelbar durch Integrale beschreiben kann, aber nach der Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit durch die stetige partielle reelle Differenzierbarkeit zusammen mit den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 2.2.6 folgt daraus bereits  $F' = f$ . **Hier ist ein Film über komplexe Stammfunktionen auf Kreisscheiben.**  $\square$

## Übungen

*Übung* 3.1.19 (**Das komplexe Wegintegral respektiert Verwandtschaft**). Man zeige: Gegeben  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg,  $\phi : U \rightarrow V$  holomorph mit stetiger komplexer Ableitung und  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  stetig gilt

$$\int_{\gamma} f(\phi(w))\phi'(w) dw = \int_{\phi \circ \gamma} f(z) dz$$



Die beiden Integrationswege, die wir im Beweis von Lemma 3.1.17 betrachten, um die Existenz einer Stammfunktion zu zeigen.

Diese Identität kann in der in 3.5.7 eingeführten Terminologie verstanden werden als eine Variante für komplexwertige Kovektorfelder unserer Erkenntnis [AN2] 8.4.9, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Als Vorschau sei erwähnt, daß der Satz von Goursat 4.1.5 zeigen wird, daß die komplexe Ableitung einer holomorphen Funktionen immer stetig und sogar immer holomorph ist.

## 3.2 Homotopie von Wegen (12.5)

3.2.1. Ich erinnere an die in [AN1] ?? eingeführte Terminologie. Eine stetige Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in einen topologischen Raum  $X$  heißt ein **Weg** in unserem Raum. Im folgenden mag man sich je nach Vorkenntnissen statt einem allgemeinen topologischen Raum  $X$  auch eine Teilmenge der komplexen Zahlenebene denken. Ist das Definitionsintervall kompakt, sprechen wir von einem **kompakten Weg**. Ist das Definitionsintervall das Einheitsintervall  $[0, 1]$ , sprechen wir von einem **normierten Weg**. Oft lassen wir diese Zusätze aber auch weg und hoffen, daß aus dem Kontext hervorgeht, was genau jeweils gemeint ist. Zu jedem kompakten Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  bilden wir den zugehörigen normierten Weg  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$  gegeben durch  $\hat{\gamma} : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb)$ .

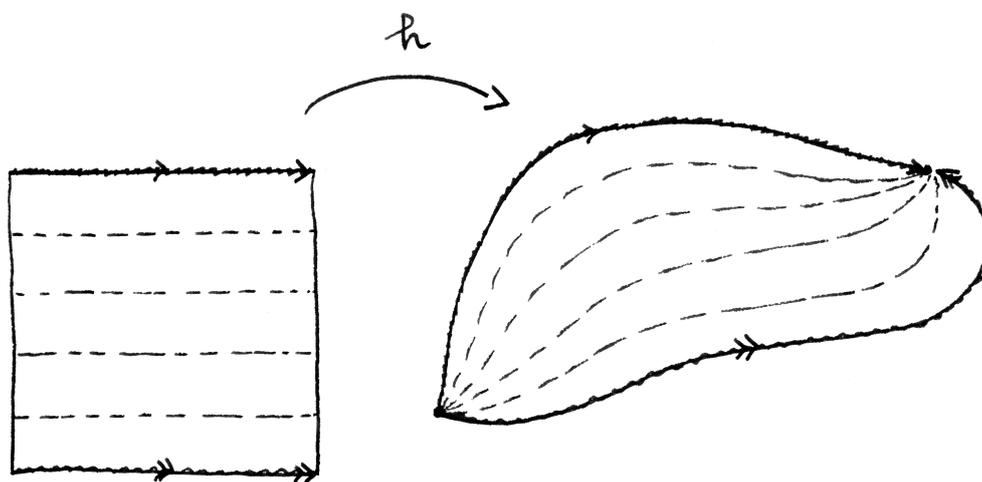
3.2.2. Wir erinnern im folgenden an Homotopie von Wegen und zusammenziehbare Wege, wie sie in [AN2] 8.7.2 und [AN2] 8.7.6 eingeführt wurden. **Hier ist ein Film über Homotopie von Wegen.**

**Definition 3.2.3.** Seien  $x, y$  Punkte eines topologischen Raums  $X$ . Zwei normierte Wege  $\alpha, \beta$  von  $x$  nach  $y$  heißen **homotop** oder präziser **homotop in  $X$**  oder ganz pedantisch **homotop in  $X$  mit festen Endpunkten** und wir schreiben  $\alpha \simeq \beta$ , wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- beziehungsweise Oberkante unseres Quadrats mit  $\alpha$  beziehungsweise  $\beta$  übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also  $h(t, 0) = \alpha(t)$  und  $h(t, 1) = \beta(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  sowie  $h(0, \tau) = x$  und  $h(1, \tau) = y$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Wir sagen dann auch,  $h$  sei eine **Homotopie zwischen  $\alpha$  und  $\beta$**  und schreiben  $h : \alpha \simeq \beta$ . Zwei beliebige Wege von  $x$  nach  $y$  nennen wir **homotop**, wenn die zugehörigen normierten Wege homotop sind.

3.2.4. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von normierten Wegen auch dahingehend interpretieren, daß es eine durch  $\tau \in [0, 1]$  parametrisierte Familie von normierten Wegen  $h_\tau$  von  $x$  nach  $y$  geben soll derart, daß gilt  $h_0 = \alpha$ ,  $h_1 = \beta$  und daß unsere Familie stetig von  $\tau$  abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung  $[0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $(t, \tau) \mapsto h_\tau(t)$  stetig ist.



Eine Homotopie zwischen zwei Wegen, in diesem Fall zwischen den beiden Randwegen unserer Banane.

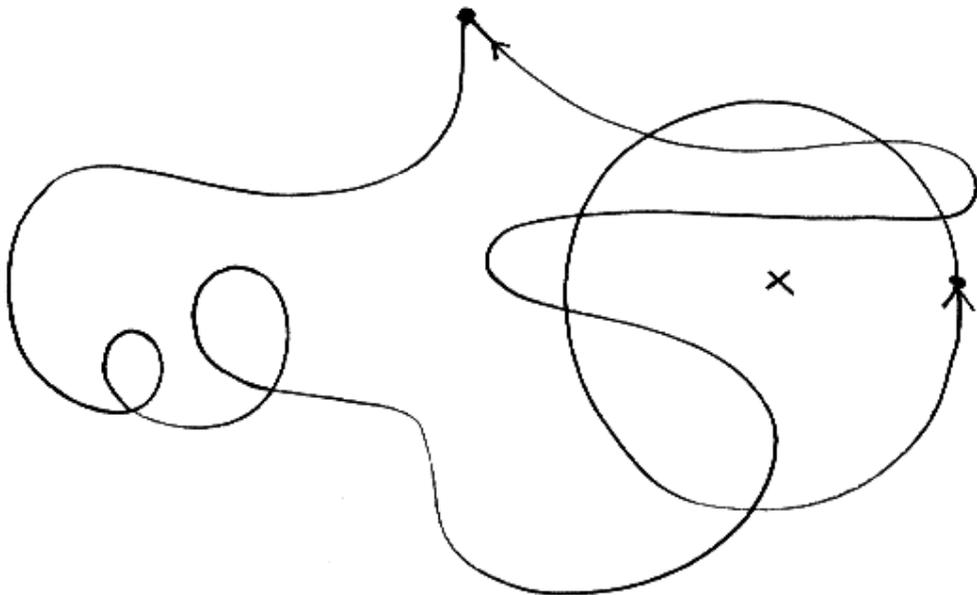
*Beispiel 3.2.5.* Für eine konvexe Teilmenge  $K$  eines endlichdimensionalen reellen Raums und zwei beliebige Punkte  $x, y \in K$  sind je zwei Wege  $\alpha, \beta$  von  $x$  nach  $y$  homotop in  $K$ . Sind unsere Wege normiert, so kann man eine Homotopie explizit angeben vermittels  $h(t, \tau) := (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$ .

**3.2.6 (Vorwärtsverwandte homotoper Wege sind homotop).** Ist genauer und in Formeln  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung topologischer Räume, so folgt aus  $h : \alpha \simeq \beta$  schon  $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ . Speziell ist jeder Weg homotop zu allen seinen Umparametrisierungen, denn nach 3.2.5 sind je zwei Wege in  $K := [a, b]$  mit denselben Anfangs- und Endpunkten homotop, also je zwei von  $a$  nach  $b$ , und damit gilt dasselbe für ihre Verknüpfung mit einer beliebigen stetigen Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ .

**Definition 3.2.7.** Ein Weg in einem topologischen Raum heißt **geschlossen**, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein Weg in einem topologischen Raum heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg. Per definitionem ist also jeder zusammenziehbare Weg geschlossen. Ein topologischer Raum heißt **schleifenfüllend**, wenn darin jeder geschlossene Weg zusammenziehbar ist.

**3.2.8 (Diskussion der Terminologie).** In der Literatur nennt man wegzusammenhängende schleifenfüllende Räume „einfach zusammenhängend“ und bei mir ausführlicher „einfach wegzusammenhängend“. Ich halte es nämlich für inkonsequent, erst die Unterscheidung zwischen „wegzusammenhängend“ und „zusammenhängend“ herauszuarbeiten und sie dann in der vergleichbaren Situation von einfachem Zusammenhang unter den Teppich zu kehren. In [TF] 3.1.15 erklären wir „einfach zusammenhängende“ topologische Räume als Synonym für „überlagerungstriviale“ Räume alias nichtleere Räume, deren Überlagerungen sämtlich trivial sind, und zeigen, daß offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene genau dann einfach zusammenhängend alias überlagerungstrivial sind, wenn sie im Sinne von 3.2.7 einfach wegzusammenhängend alias wegzusammenhängend und schleifenfüllend sind. In der Funktionentheorie sind wir deshalb in der glücklichen Lage, daß uns diese Begriffsverwirrung nicht eigentlich betrifft. Relevante Phänomene sind aber nicht weit: Lassen wir eine überlagerungstriviale abgeschlossene Teilmenge aus der komplexen Zahlenebene weg, so ist das Komplement nach [TG] 4.10.29 zusammenhängend. Lassen wir dahingegen eine wegzusammenhängende schleifenfüllende abgeschlossene Teilmenge aus der komplexen Zahlenebene weg, so muß das Komplement keineswegs zusammenhängend sein.

**3.2.9.** Im Rahmen der Funktionentheorie betrachten wir einfachen Zusammenhang nur für offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene. Wir vereinfachen



Ein zusammenziehbarer und ein nicht zusammenziehbarer geschlossener Weg in Komplement des durch ein Kreuzchen markierten Punktes in der Papierebene

deshalb unsere Terminologie und sagen in diesem Kontext statt „einfach wegzusammenhängend“ schlicht **einfach zusammenhängend**, obwohl wir weder den Begriff des topologischen einfachen Zusammenhangs eingeführt haben, noch seine Äquivalenz zum einfachen Wegzusammenhang im Fall offener Teilmengen der komplexen Zahlenebene. **Hier ist ein Film über einfachen Zusammenhang.**

## Übungen

*Übung 3.2.10.* Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten. Hinweis: [AN1] ??.

*Übung 3.2.11.* Ein Raum ist schleifenfüllend genau dann, wenn je zwei Wege mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt darin homotop sind.

*Ergänzende Übung 3.2.12.* Jeder Weg in einer offenen Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums ist in besagter offener Teilmenge homotop zu einem stückweise linearen Weg. Hinweis: [AN2] 8.5.4.

## 3.3 Integralsatz von Cauchy (17&19.5)

**Satz 3.3.1 (Integralsatz von Cauchy).** *Das komplexe Wegintegral einer holomorphen Funktion längs eines in ihrem Definitionsbereich zusammenziehbaren Integrationsweges ist stets Null. Hier ist ein Film über den Integralsatz von Cauchy.*

*Vorschau 3.3.2.* Formal gesehen gilt Vergleichbares auch im Reellen: Das Wegintegral einer stetigen Einsform auf einer offenen Teilmenge der Zahlengeraden längs eines geschlossenen Integrationsweges ist stets Null. Vom höheren Standpunkt ist sogar der Beweis fast derselbe: Beide Male geschieht das Integral über eine Einsform, die aus Dimensionsgründen geschlossen ist.

**3.3.3 (Struktur des Beweises des Integralsatzes von Cauchy).** **Hier ist ein Film über den Beweis des Integralsatzes von Cauchy.** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein in  $U$  zusammenziehbarer geschlossener Integrationsweg, so behauptet der Integralsatz von Cauchy in Formeln

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Wir werden diesen Satz in 3.3.10 aus dem noch allgemeineren Satz 3.3.9 folgern, bei dem sogar beliebige stetige, nicht notwendig stückweise stetig differenzierbare Wege zugelassen werden. Wir führen den Beweis in einer Art Kaminletterei. Zunächst zeigen wir in 3.3.4 das Verschwinden des Randintegrals einer holomorphen Funktion für jedes ganz in ihrem Definitionsbereich liegende achsenparallele Rechteck. Daraus folgern wir mit 3.1.17, daß jede holomorphe

Funktion auf einer offenen Kreisscheibe dort auch eine Stammfunktion besitzt. Mithilfe dieser Erkenntnis erklären wir in 3.3.8 für holomorphe Funktionen das Wegintegral längs beliebiger stetiger nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer Wege. Dann zeigen wir sogar in dieser Allgemeinheit die Homotopieinvarianz 3.3.9 des Wegintegrals. Den Cauchy'schen Integralsatz erhalten wir schließlich in 3.3.10 als eine einfache Konsequenz der Homotopieinvarianz. Der Cauchy'sche Integralsatz ist im übrigen auch selbst der Beginn einer noch größeren Kaminkletterei. Sie wird uns schließlich zum Residuensatz 5.2.11 führen, der den Cauchy'schen Integralsatz und viele weitere auf dem Weg dorthin bewiesene Sätze als Spezialfälle enthält.

**Lemma 3.3.4 (Integralsatz für Rechtecke).** *Gegeben eine holomorphe Funktion und ein achsenparalleles Rechteck, dessen ganze Fläche mitsamt ihrem Rand im Definitionsbereich unserer Funktion liegt, verschwindet das komplexe Wegintegral unserer Funktion über den Rand unseres Rechtecks.*

3.3.5. Dies Lemma kann für holomorphe Funktionen mit stetiger Ableitung mithilfe von 3.5 ohne Mühe aus dem Verschwinden des Wegintegrals geschlossener stetig differenzierbarer Kovektorfelder über zusammenziehbare Integrationswege [AN2] 8.8.8 gefolgert werden. Wir wollen es jedoch unter anderem benutzen, um zu zeigen, daß die Ableitung einer holomorphen Funktion stets stetig sein muß. Deshalb sowie der logischen Vollständigkeit halber geben wir hier auch noch einen eigenständigen Beweis.

*Beweis.* Hier ist ein Film über den Beweis Integralsatzes für Rechteckswege. Bezeichne  $Q_0$  unser Rechteck und  $I_0$  sein Randintegral. Unterteilen wir unser Rechteck  $Q_0$  in vier gleichgroße Teilrechtecke, so wird  $I_0$  die Summe der entsprechenden Randintegrale für diese vier Teilrechtecke und es gibt unter diesen notwendig ein Teilrechteck  $Q_1$  derart, daß für das zugehörige Randintegral  $I_1$  gilt

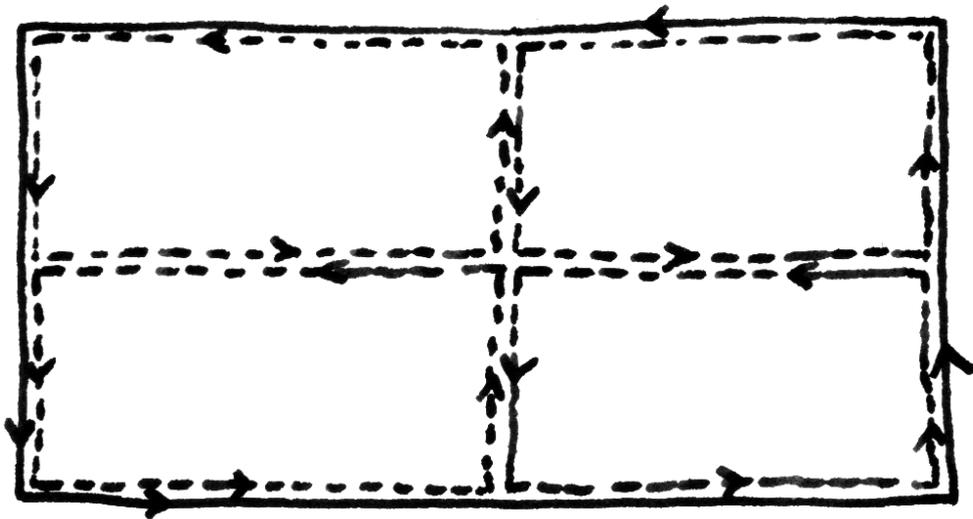
$$|I_0| \leq 4|I_1|$$

Indem wir so weitermachen, finden wir eine absteigende Folge  $Q_0 \supset Q_1 \supset \dots$  von Rechtecken  $Q_n$  mit Umfang  $2^{-n}a$  für konstantes  $a$  derart, daß für die zugehörigen Randintegrale  $I_n$  gilt

$$|I_0| \leq 2^{2n}|I_n|$$

Nun ist aber mit doppelter Anwendung des Intervallschachtelungsprinzips [AN1] 3.6.11 oder auch nach [AN1] ?? der Schnitt aller dieser Rechtecke  $Q_n$  nicht leer und besteht genauer aus einem einzigen Punkt  $p$ . Bezeichnet  $f$  unsere holomorphe Funktion, so können wir nach 2.1.8 schreiben

$$f(z) = f(p) + (z - p)f'(p) + (z - p)\varepsilon(z - p)$$



Das Randintegral des grossen Rechtecks ist die Summe der Randintegrale der vier kleinen Rechtecke.

für eine stetige Funktion  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon(0) = 0$ . Da der lineare Anteil eine Stammfunktion besitzt, trägt er nach 3.1.7 zum Randintegral  $I_n$  nichts bei und wir finden

$$I_n = \int_{\gamma} (z - p)\varepsilon(z - p) dz$$

für  $\gamma$  den Randweg um  $Q_n$ . Bezeichnet  $d$  die Länge der Diagonale von  $Q_0$ , so gilt  $|z - p| \leq 2^{-n}d$  für alle  $z \in Q_n$  und wir können unser Integral mit 3.1.5 abschätzen durch

$$|I_n| \leq (2^{-n}a)(2^{-n}d) \sup_{z \in Q_n} |\varepsilon(z - p)|$$

Daraus folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n}|I_n| = 0$  und damit dann auch  $I_0 = 0$ . Das zeigt den Integralsatz im Fall, daß unser Weg der Randweg eines im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen Rechtecks ist.  $\square$

**Lemma 3.3.6.** *Eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe besitzt dort stets eine Stammfunktion.*

*Vorschau 3.3.7.* In 3.3.11 werden wir aus dem Integralsatz von Cauchy allgemeiner ableiten, daß jede holomorphe Funktion mit schleifenfüllendem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt.

*Beweis.* Das eben gezeigte Verschwinden des Randintegrals für alle Rechtecke 3.3.4 ist genau die hinreichende Bedingung aus Lemma 3.1.17 für die Existenz einer Stammfunktion auf offenen Kreisscheiben.  $\square$

**Definition 3.3.8 (Wegintegrale längs beliebiger Wege).** Für eine holomorphe Funktion  $f$  und einen beliebigen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  in ihrem Definitionsbereich erklären wir das komplexe Wegintegral, indem wir erst eine Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  so wählen, daß jedes Wegstück ganz in einer offenen Kreisscheibe aus dem Definitionsbereich verläuft, dann auf diesen Kreisscheiben jeweils mit 3.3.6 eine Stammfunktion  $F_\nu$  von  $f$  wählen und schließlich setzen

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{\nu=1}^n F_\nu(\gamma(a_\nu)) - F_\nu(\gamma(a_{\nu-1}))$$

Um die Existenz einer derartigen Unterteilung zu zeigen, mag man von der Bemerkung ausgehen, daß der Abstand von  $\gamma(t)$  zum Komplement von  $U$  nach [AN1] ?? stetig von  $t$  abhängt und folglich sein Minimum annimmt, das notwendig positiv sein muß, und daß andererseits  $\gamma$  gleichmäßig stetig ist. Die weiteren Details seien dem Leser überlassen. Durch Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung wird klar, daß dies Integral weder von der gewählten Unterteilung noch von den jeweils gewählten Stammfunktionen abhängt. Wegen der Beschreibung

3.1.7 des Wegintegrals über Integrationswege durch Stammfunktionen ist diese Definition im Fall von Integrationswegen verträglich mit unserem Wegintegral für Integrationswege nach 3.1.1. Man beachte jedoch, daß in dieser Allgemeinheit, also längs beliebiger, nicht notwendig stückweise stetig differenzierbarer Wege, das Wegintegral nur noch für sehr spezielle Funktionen, wie etwa holomorphe Funktionen, sinnvoll erklärt werden kann.

**Satz 3.3.9 (Homotopieinvarianz des Wegintegrals).** *Die Wegintegrale einer holomorphen Funktion über je zwei in ihrem Definitionsbereich homotope Wege stimmen überein.*

3.3.10. Der Cauchy'sche Integralsatz 3.3.1 folgt sofort, da ein zusammenziehbarer Weg per definitionem homotop ist zu einem konstanten Weg und da Wegintegrale über konstante Wege offensichtlich verschwinden.

*Erster Beweis.* Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  unsere holomorphe Funktion. Sei  $h : [0, 1]^2 \rightarrow U$  eine Homotopie zwischen unseren Wegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Unser Quadrat  $[0, 1]^2$  können wir so in kleine „Schachfelder“ unterteilen, daß jedes dieser Felder unter  $h$  ganz in einer in  $U$  enthaltenen offenen Kreisscheibe landet: In der Tat wird ja  $U$  von offenen in  $U$  enthaltenen Kreisscheiben überdeckt, unser kompaktes Quadrat  $[0, 1]^2$  also von deren Urbildern, und nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue [AN1] ?? gibt es dann sogar ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß für jedes  $x \in [0, 1]^2$  der Ball  $B(x; \varepsilon)$  bereits ganz in einem dieser Urbilder liegt. Bezeichnet nun  $\rho_{i,j}$  die Randwege unserer Schachfelder, so verschwindet das Wegintegral über jeden der Wege  $h \circ \rho_{i,j}$ , da unsere Funktion auf Kreisscheiben ja nach 3.3.6 jeweils eine Stammfunktion hat. Die Summe der Wegintegrale über die  $h \circ \rho_{i,j}$  ist aber offensichtlich gerade die Differenz der Wegintegrale über unsere beiden ursprünglichen homotopen Wege.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Alternativ mag man auch wie beim Beweis von [AN2] 8.8.8 vorgehen. Das hat den Vorteil, daß wir keine Integrale über allgemeine stetige Wege zu diskutieren brauchen, aber dafür braucht die Argumentation einen zusätzlichen Schritt: Wir gehen erst von unseren ursprünglichen Wegen zu approximierenden Polygonzügen über und betrachten dann statt den möglicherweise nicht mehr differenzierbaren „ganz kleinen“ Wegen  $h \circ \rho_{i,j}$  die „ganz kleinen“ Wege, die zwischen den Bildern unter  $h$  der Ecken unserer kleinen Schachfelder gerade verlaufen.  $\square$

**Proposition 3.3.11 (Stammfunktionen holomorpher Funktionen).** *Jede holomorphe Funktion mit schleifenfüllendem Definitionsbereich besitzt eine auf dem ganzen Definitionsbereich definierte Stammfunktion.*

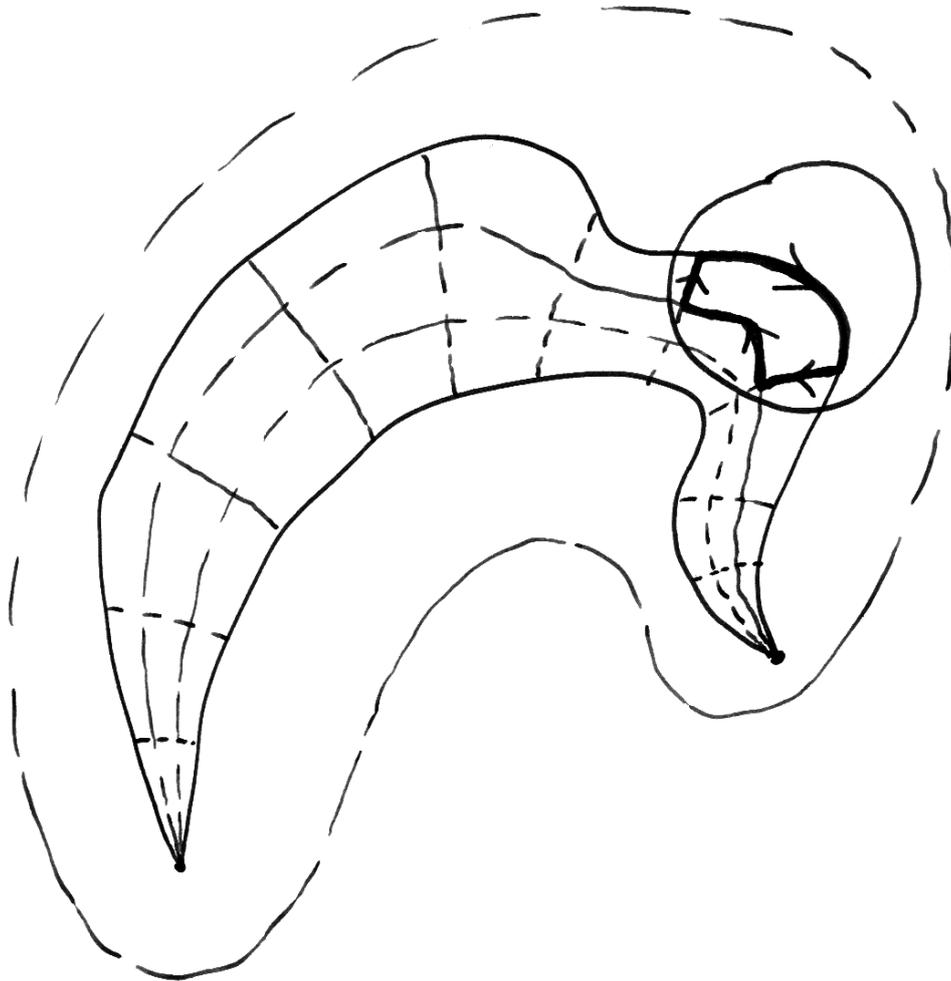


Illustration zum Beweis der Homotopieinvarianz des Wegintegrals holomorpher Funktionen. Eine Homotopie liefert wie angedeutet eine Darstellung der Differenz der Wegintegrale zweier homotoper Wege als eine Summe über die Wegintegrale von „ganz kleinen“ geschlossenen Wegen, wo „ganz klein“ bedeutet, daß sie jeweils ganz in einer im Definitionsbereich unserer Funktion enthaltenen offenen Kreisscheibe verlaufen. Auf jeder Kreisscheibe hat eine holomorphe Funktion aber, das haben wir bereits aus dem Integralsatz für Rechteckswegen gefolgert, eine Stammfunktion, folglich sind die Wegintegrale aller unserer ganz kleinen Wege Null.

*Beweis.* Nach 3.1.14 müssen wir nur zeigen, daß das Wegintegral unserer Funktion über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Nach Annahme ist aber jeder geschlossene Weg aus dem Definitionsbereich bereits im Definitionsbereich zusammenziehbar und damit verschwindet das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 3.3.1, den wir ja in 3.3.10 mittlerweile bewiesen haben.  $\square$

**Definition 3.3.12.** Zwei normierte geschlossene Wege  $\alpha, \beta$  in einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißen **frei homotop**, wenn es eine durch  $\tau \in [0, 1]$  parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege  $\gamma_\tau$  gibt mit  $\gamma_0 = \alpha, \gamma_1 = \beta$  und so, daß  $(t, \tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$  stetig ist auf  $[0, 1]^2$ . Zwei geschlossene Wege heißen frei homotop, wenn die zugehörigen normierten Wege frei homotop sind.

**Satz 3.3.13 (Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie).** *Die Wegintegrale über je zwei im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion frei homotope geschlossene Wege stimmen überein.*

*Beweis.* Das folgt leicht aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals für holomorphe Funktionen 3.3.9. **Hier ist ein Film über die Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie.** Die Details seien dem Leser zur Übung überlassen.  $\square$

*Vorschau 3.3.14 (Integralsatz für nullhomologe Wege).* Wir gehen aus von der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$ , entfernen daraus zwei Punkte  $a, b$  und betrachten den Integrationsweg  $\gamma$  gegeben durch das nebenstehende Bild. Es ist nicht klar, ob dieser Weg in  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  zusammenziehbar ist, und in [TF] 2.5.10 zeigen wir, daß er es in der Tat nicht ist. Klar ist jedoch, daß dennoch das Integral jeder auf  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  holomorphen Funktion längs dieses Weges verschwinden muß: Zerlegen wir nämlich unseren Weg in Stücke, indem wir ihn an den drei Selbstschnittstellen aufschneiden, und setzen diese Stücke so wieder zu zwei geschlossenen Wegen zusammen, daß der eine das Gebiet berandet, das von oben an das Mittelkreuz grenzt, und der andere das Gebiet, das von unten an das Mittelkreuz grenzt, so erhalten wir zwei in  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  zusammenziehbare Wege, über die das Wegintegral nach dem Integralsatz von Cauchy 3.3.1 jeweils verschwinden muß. Diesen Trick verwandeln wir im Rahmen der Homologietheorie in eine Methode, vergleiche [TS] 1.2.19.

*Beispiel 3.3.15.* Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

in dem Sinne, daß sowohl  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r$  als auch  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0$  existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Um das zu sehen, bemerken wir zunächst, daß

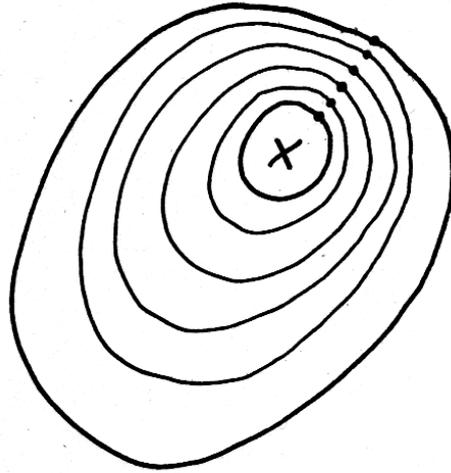


Illustration einer freien Homotopie zwischen zwei geschlossenen Wegen im Komplement eines Punktes der Ebene.

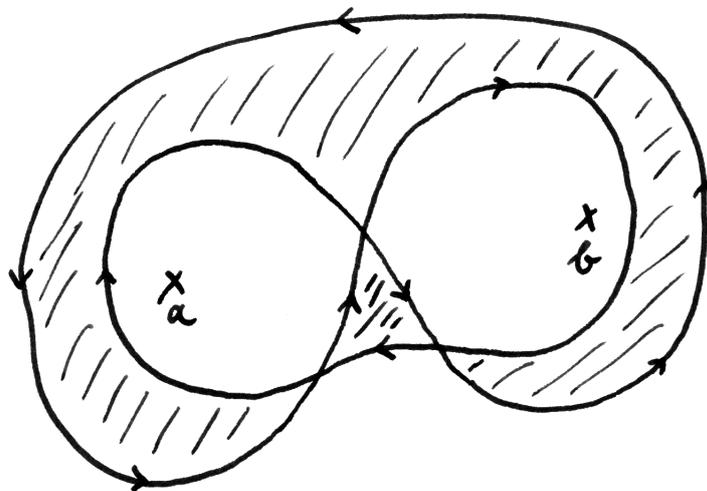
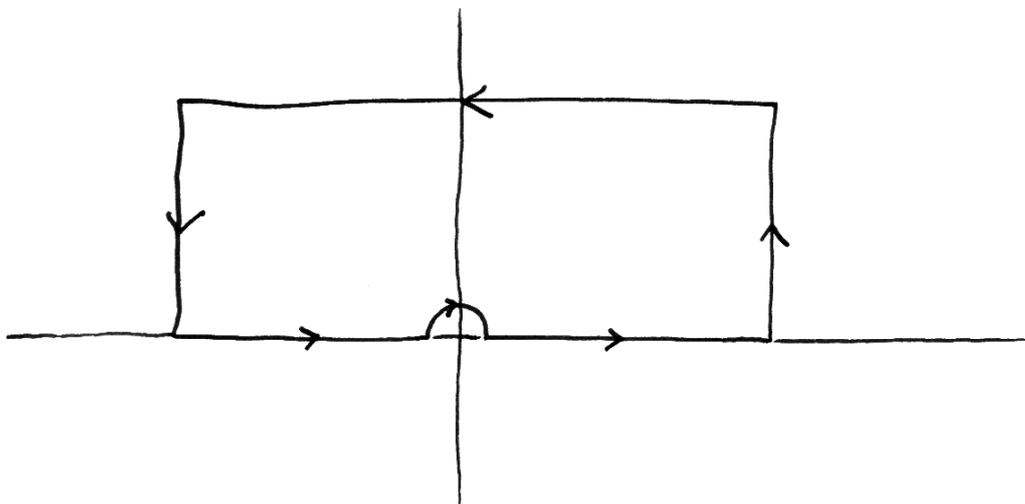


Illustration zu 3.3.14: Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer aber Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene, der dennoch die Eigenschaft hat, daß jedes Integral einer holomorphen Funktion auf unserem Komplement darüber verschwindet. Denkt man sich den Weg als Schnur und bei  $a$  und  $b$  Nägel in der Wand, so bleibt die Schnur durchaus hängen, fällt aber herunter, sobald nur Ein Nagel herausgezogen wird.



Einer der Integrationswege bei der Berechnung von  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . Zum Nachweis der Existenz des Grenzwerts betrachten wir allerdings auch entsprechend verschobene rechteckige Integrationswege, die ganz rechts oder links der imaginären Achse verlaufen.

der Integrand außerhalb des Ursprungs mit der Einschränkung des Imaginärteils von  $e^{iz}/z$  auf die reelle Achse zusammenfällt. Dann betrachten wir für  $a < b$  in  $\mathbb{R}^\times$  und  $h > 0$  Integrationswege, die einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks mit Ecken  $a, b, a + ih, b + ih$  umlaufen und im Fall  $a < 0 < b$  auf einem kleinen Halbkreis  $\gamma_\varepsilon$  mit Radius  $\varepsilon$  über die Polstelle beim Ursprung hopteln. Das Wegintegral von  $e^{iz}/z$  längs eines derartigen Weges ist Null nach dem Integralsatz. Die Integrale über die drei Kanten  $\rho, \lambda, \omega$  für „rechts, links und oben“ außerhalb der reellen Achse können wir jedoch auf der rechten Kante abschätzen durch

$$\left| \int_\rho \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^h \frac{e^{i(b+it)}}{b+it} i dt \right| \leq \frac{1}{|b|} \int_0^h e^{-t} dt \leq \frac{1}{|b|}$$

und analog auf der linken Kante durch  $1/|a|$ , auf der oberen Kante dahingegen durch

$$\left| \int_\omega \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq (b-a) \frac{e^{-h}}{h}$$

Für festes  $a > 0$  folgt so die Existenz des Grenzwerts  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r$  aus dem Cauchy-Kriterium [AN1] 3.6.12. Die Existenz des anderen Grenzwerts für  $b < 0$  in Richtung der negativen reellen Achse  $\lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^b$  zeigt man analog. Indem wir nun  $-a = b = h$  nehmen und das nach Unendlich streben lassen, ergibt sich für jedes  $\varepsilon > 0$  andererseits

$$0 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Durch explizite Rechnung erkennen wir, daß das Integral über den kleinen Halbkreis für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $-\pi i$  strebt. Jetzt brauchen wir nun noch den Imaginärteil unserer Gleichung zu nehmen. Nebenbei bemerkt ist  $\frac{\sin x}{x}$  Lebesgue'schen Sinne gar nicht auf  $\mathbb{R}$  integrierbar.

## Übungen

*Übung 3.3.16.* Sei  $\gamma$  ein stetiger geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$  und  $U \Subset \mathbb{C}$  das Komplement seines Bildes. Man zeige, daß die Funktion  $u_\gamma : U \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$u_\gamma(w) = \int_\gamma \frac{dz}{z-w}$$

lokal konstant ist, als da heißt holomorph mit Ableitung Null. In 5.2 werden wir sehen, daß  $f$  nur Werte in  $2\pi i\mathbb{Z}$  annimmt, und werden diese Werte als das  $2\pi i$ -fache der „Umlaufzahl von  $\gamma$  um den Punkt  $w$ “ verstehen lernen.

*Ergänzende Übung 3.3.17.* Man zeige, daß  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(z-x)^2} dx$  nicht von  $z \in \mathbb{C}$  abhängt. Vermittels quadratischer Ergänzung liefert das einen weiteren Zugang zur Berechnung der Fouriertransformierten der Gauß'schen Glockenkurve. Man kann auch den umgekehrten Weg gehen.

*Übung 3.3.18.* Das in 3.3.8 erklärte Wegintegral bleibt in Verallgemeinerung von 3.1.12 gleich bei beliebiger stetiger Umparametrisierung unseres Weges. Es ändert in Verallgemeinerung von 3.1.13 sein Vorzeichen bei einer Änderung der Durchlaufrichtung des Weges, wir dürfen wie in 3.1.11 stückweise integrieren, und das Integral über einen geschlossenen Weg von einer Funktion mit Stammfunktion verschwindet.

*Übung 3.3.19 (Umkehrsatz für holomorphe Funktionen).* Gegeben eine holomorphe Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $p \in U$  mit  $f'(p) \neq 0$  existieren offene Umgebungen  $V \subseteq U$  von  $p$  und  $W \subseteq \mathbb{C}$  von  $f(p)$  derart, daß  $f$  eine Bijektion  $f : V \xrightarrow{\sim} W$  mit stetiger Umkehrabbildung induziert, die dann sogar holomorph sein muß. Einen Beweis dieser Tatsache mithilfe des Umkehrsatzes aus der reellen Analysis [AN2] 4.1.2 haben wir in 4.4.1 gegeben. Hier wird ein alternativer Beweis skizziert. Man zeige der Reihe nach:

1. Es gibt eine offene Umgebung  $A \subseteq U$  von  $p$ , auf der  $f$  injektiv ist und auf der  $f'$  keine Nullstelle hat;
2. Für jeden Punkt  $q \in A$  ist für einen hinreichend kleinen Kreisweg  $\gamma_{\varepsilon,q} : [0, 2\pi] \rightarrow V$ ,  $t \mapsto q + \varepsilon \exp(it)$  um  $q$  der Weg  $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$  in  $\mathbb{C} \setminus f(q)$  frei homotop zu einem Kreisweg um  $f(q)$ ;
3. Ist für  $\varepsilon = \varepsilon_q$  wie im vorhergehenden Punkt  $B$  eine Kreisscheibe um  $f(q)$ , die den Weg  $f \circ \gamma_{\varepsilon,q}$  nicht trifft, so gilt  $B \subset f(A)$ ;
4. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) - f(p) = (z - p)\varphi(z)$  und  $\varphi(p) = f'(p)$ . Setzen wir hier  $z = f^{-1}(w)$ , so ist  $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $(w - q)\psi(w) = f^{-1}(w) - f^{-1}(q)$  und  $\psi(q) = 1/f'(p)$ .

**Hinweis:** Beim Nachweis der vorletzten Aussage verwende man für  $b \in B$  und  $\gamma = \gamma_{\varepsilon,q}$  die Formel

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z - b} = \int_{\gamma} \frac{f'(w) dw}{f(w) - b}$$

aus 3.1.19 und beachte, daß die linke Seite nach Teil 2 nicht verschwindet.

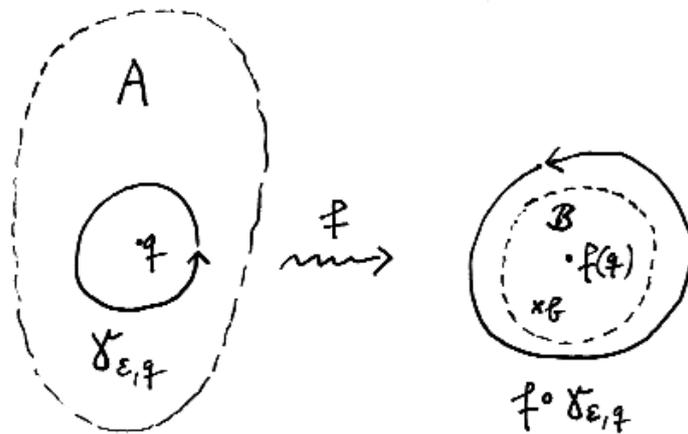


Illustration zu Übung 3.3.19. Wenn der Punkt  $b$  nicht in  $f(A)$  läge, müßte ein Wegintegral verschwinden, das nun einmal nach unserer Transformationsformel für Wegintegrale 3.1.19 definitiv nicht verschwindet.

### 3.4 Integralsatz von Cauchy durch Topologie\*

3.4.1. Die Suche nach einem besseren Verständnis grundlegender Sätze der Funktionentheorie und möglicher Verallgemeinerungen war eine wesentliche Motivation zur Entwicklung topologischer Methoden wie etwa der Überlagerungstheorie oder der Theorie der Garben. Ich will hier noch einen Zugang zum Beweis des Integralsatzes von Cauchy skizzieren, wie er sich von den Höhen dieser Theoriegebäude aus betrachtet im Rückblick darstellt. Das sprengt den Rahmen der Vorlesung. In gewisser Weise ist der Beweis derselbe, nur werden die meisten Beweisschritte als Folgerungen aus sehr viel allgemeineren Sätzen gesehen, was zu einem besseren Verständnis führen mag. Wir gehen dabei davon aus, daß wir die Theorie holomorpher Funktionen auf offenen Kreisscheiben so weit entwickelt haben, daß dort die Existenz von Stammfunktionen holomorpher Funktionen 3.3.6 bereits bewiesen ist.

3.4.2 (**Garbe holomorpher Funktionskeime**). Wir betrachten auf der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  die Garbe  $\mathcal{O}$  der holomorphen Funktionen im Sinne von [TG] 2.2.2 und ihren étalen Raum  $\bar{\mathcal{O}}$  nach [TG] 2.2.17. Seine Punkte sind Keime holomorpher Funktionen. Um den Satz von Goursat an dieser Stelle nicht verwenden zu müssen, betrachten wir zusätzlich die Garbe  $\mathcal{O}_1$  aller holomorphen Funktionen mit holomorpher Ableitung. Der Satz von Goursat sagt uns später einmal  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$ .

3.4.3 (**Ableiten als Überlagerung**). Das komplexe Ableiten ist ein Garbenhomomorphismus und induziert eine stetige Abbildung  $D : \bar{\mathcal{O}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{O}}$  zwischen den étalen Räumen der jeweiligen Garben. Diese Abbildung ist eine surjektive Überlagerung im Sinne von [TF] 3.1.2, da wir ja auf offenen Kreisscheiben stets Stammfunktionen finden und da diese eindeutig sind bis auf eine additive Konstante. Insbesondere liefert die „Additionen von Konstanten“  $(c+) : \bar{\mathcal{O}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{O}}_1$  eine Einbettung von  $(\mathbb{C}, +)$  in die Gruppe der Decktransformationen unserer Überlagerung und diese Untergruppe operiert frei und transitiv auf jeder Faser.

3.4.4 (**Existenz von Stammfunktionen**). Wir folgern die Existenz von Stammfunktionen holomorpher Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit schleifenfüllendem Definitionsbereich  $U$ , die wir in 3.3.11 bereits auf direktem Wege gezeigt hatten. Unter unseren Annahmen ist nämlich jede Komponente von  $U$  offen und überlagerungstrivial nach [TF] ?? und nach Satz [TF] 3.4.13 über das Liften bei überlagerungstrivialem Definitionsbereich besitzt der zu  $f$  gehörige stetige Schnitt  $\bar{f} : U \rightarrow \bar{\mathcal{O}}$  einen Lift, es gibt also in Formeln ausgedrückt  $\bar{F} : U \rightarrow \bar{\mathcal{O}}_1$  stetig mit  $D \circ \bar{F} = \bar{f}$ . Die zugehörige Funktion  $F$  ist dann die gesuchte Stammfunktion von  $f$ .

3.4.5 (**Integration durch Wegeliften**). Gegeben  $U \Subset \mathbb{C}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und ein Integrationsweg  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  können wir den Weg  $\bar{f} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\mathcal{O}}$  betrachten. Die Möglichkeit des Wegeliftens nach [TF] ?? und [TF] 3.4.13 zeigt, daß es Wege  $\tilde{\gamma}_f : [a, b] \rightarrow \bar{\mathcal{O}}_1$  gibt mit  $D \circ \tilde{\gamma}_f = \bar{f} \circ \gamma$ . Bezeichnet

$A : \bar{O}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  das Auswerten eines Funktionskeims an seinem Punkt, so zeigen unsere Erkenntnisse zum Integrieren mit Stammfunktionen

$$\int_{\gamma} f(z) dz = A(\tilde{\gamma}_f(b)) - A(\tilde{\gamma}_f(a))$$

Ist  $\gamma$  ein stetiger Weg, so beachten wir, daß allgemein der Lift eines Weges in eine Überlagerung und speziell  $\tilde{\gamma}_f$  durch seinen Ausgangspunkt eindeutig bestimmt ist und daß sich je zwei mögliche Ausgangspunkte durch eine Decktransformation der Gestalt  $(c+)$  ineinander überführen lassen. Das zeigt, daß  $A(\tilde{\gamma}_f(b)) - A(\tilde{\gamma}_f(a))$  nicht von der Wahl von  $\tilde{\gamma}_f$  abhängt. Das war im wesentlichen unsere Definition des Wegintegrals holomorpher Funktionen über stetige Integrationswege.

**3.4.6 (Cauchy's Integralsatz durch Liften von Homotopien).** Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und Wege  $\gamma, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  und  $h : [0, 1]^2 \rightarrow U$  eine Homotopie ist auch  $\bar{f} \circ h : [0, 1]^2 \rightarrow \bar{O}$  eine Homotopie zwischen  $\bar{f} \circ \gamma$  und  $\bar{f} \circ \beta$  und nach [TF] ?? und [TF] 3.4.13 kann jede derartige Homotopie geliftet werden zu einer Homotopie  $\tilde{h}_f : [0, 1]^2 \rightarrow \bar{O}_1$  zwischen Lifts  $\tilde{\gamma}_f$  und  $\tilde{\beta}_f$  von  $\bar{f} \circ \gamma$  und  $\bar{f} \circ \beta$ . Diese Lifts haben dann dieselben Anfangs- und Endpunkte und mit unseren Erkenntnissen 3.4.5 zur Integration durch Wegelifts folgt unmittelbar

$$\int_{\gamma} f(z) dz = A(\tilde{\gamma}_f(1)) - A(\tilde{\gamma}_f(0)) = A(\tilde{\beta}_f(1)) - A(\tilde{\beta}_f(0)) = \int_{\beta} f(z) dz$$

### 3.5 Bezug zu Wegintegralen im Reellen\*

3.5.1. Dieser Abschnitt ist für das Folgende entbehrlich. Er soll die Notation für komplexe Wegintegrale verständlich machen und den Zusammenhang des Satzes von Cauchy mit den Sätzen über Wegintegrale in rotationsfreien Vektorfeldern oder besser geschlossenen Kovektorfeldern [AN2] 8.8.8 erklären. Zunächst erinnere ich an Wegintegrale vektorwertiger Kovektorfelder nach [AN2] 8.4.21.

3.5.2 (**Vektorwertige Kovektorfelder**). Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $W$  ein reeller Vektorraum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Ein  **$W$ -wertiges Kovektorfeld auf  $A$**  ist eine Abbildung

$$\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Ein  $W$ -wertiges Kovektorfeld ordnet also jedem Punkt  $p \in A$  eine lineare Abbildung des Richtungsraums  $\vec{X}$  in den zusätzlich vorgegebenen Vektorraum  $W$  zu. Um hier noch Richtungsvektoren  $v \in \vec{X}$  einsetzen zu können, notieren wir vektorwertige Kovektorfelder  $p \mapsto \omega_p$ , so daß dann  $\omega_p(v)$  ein Vektor aus  $W$  wird. Im Fall  $W = \mathbb{C}$  sprechen wir von einem **komplexwertigen Kovektorfeld**.

**3.5.3 (Nachschalten linearer Abbildungen).** Gegeben ein Homomorphismus  $L : W \rightarrow V$  von reellen Vektorräumen und ein  $W$ -wertiges Kovektorfeld  $\omega$  erhalten wir ein  $V$ -wertiges Kovektorfeld  $L \circ \omega$  durch  $(L \circ \omega)_p := L \circ \omega_p$ . Ist  $M : V \rightarrow Z$  eine weitere lineare Abbildung, so haben wir  $M \circ (L \circ \omega) = (M \circ L) \circ \omega$  und natürlich gilt auch  $\text{id}_W \circ \omega = \omega$ . Ist  $\omega$  ein komplexwertiges Kovektorfeld und  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Konjugation, so verwenden wir die Notation  $\bar{\omega} := c \circ \omega$  und finden  $\bar{\bar{\omega}} = \omega$ .

**3.5.4 (Nachschalten variabler linearer Abbildungen).** Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $W$  ein reeller Vektorraum und  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Sei  $W$  ein reeller Vektorraum und  $\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$  ein  $W$ -wertiges Kovektorfeld auf  $A$ . Gegeben eine Abbildung  $L : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$  erhalten wir ein  $V$ -wertiges Kovektorfeld  $L \circ \omega$  durch  $(L \circ \omega)_p := L(p) \circ \omega_p$ . Natürlich haben wir  $M \circ (L \circ \omega) = (M \circ L) \circ \omega$  auch für das iterierte Nachschalten variabler linearer Abbildungen. Als Spezialfälle erhalten wir das Produkt  $f\omega$  eines  $W$ -wertigen Kovektorfelds  $\omega$  mit einer reellwertigen Funktion  $f$  und das Produkt  $f\omega$  eines komplexwertigen Kovektorfelds  $\omega$  mit einer komplexwertigen Funktion  $f$  und die Verträglichkeit  $\overline{g\omega} = \bar{g}\bar{\omega}$  mit der komplexen Konjugation.

**3.5.5 (Differenziale als Kovektorfelder).** Ist  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum,  $W$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $U \subseteq X$  offen oder allgemeiner halboffen und  $f : U \rightarrow W$  differenzierbar, so ist  $df$  oder genauer  $p \mapsto d_p f$  ein  $W$ -wertiges Kovektorfeld auf  $U$ . Ist  $L : W \rightarrow V$  eine lineare Abbildung in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so haben wir aufgrund der Kettenregel  $L \circ d_p f = d_p(L \circ f)$ . Man mag das die **Veträglichkeit des Differentials mit linearen Abbildungen** nennen. Sie impliziert formal eine „Komponentenregel“ und eine „Summenregel“ in derselben Weise, wie das bei der Integration in [AN2] 6.3.5 ausgeführt wurde. Beide Regeln kann man aber auch ohne diese formale Argumentation leicht einzusehen.

*Beispiele 3.5.6.* In der Funktionentheorie bezeichnet für  $U \subseteq \mathbb{C}$  meist  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$  die Einbettung und  $dz$  ihr Differential, ein komplexwertiges Kovektorfeld auf  $\mathbb{C}$ . Mit

$$f(z) dz$$

bezeichnet man dann das Produkt dieses komplexwertigen Kovektorfelds mit einer beliebigen komplexwertigen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Ist  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, so ist  $g$  auch reell differenzierbar und quasi per definitionem kann sein Differential durch die komplexe Ableitung beschrieben werden als

$$dg = g'(z) dz$$

**3.5.7 (Wegintegrale vektorwertiger Kovektorfelder).** Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow X$  ein stetig differenzierbarer Weg in einem endlichdimensionalen reellen Raum  $X$  und

sei  $\omega : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$  ein stetiges Kovektorfeld auf  $X$  mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $W$ . So definieren wir wie in [AN2] 8.4.21 einen Vektor  $(\int_{\varphi} \omega) \in W$ , das **Integral des  $W$ -wertigen Kovektorfelds  $\omega$  längs des Weges  $\varphi$** , durch die Vorschrift

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) dt$$

Auf der rechten Seite ist also für jedes  $t$  der Homomorphismus  $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \rightarrow W$  auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor  $\varphi'(t) \in \vec{X}$  und die so entstehende stetige Abbildung  $[a, b] \rightarrow W$  ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von 2.3.4. Im Übrigen muß unser stetiges Kovektorfeld gar nicht auf ganz  $X$  definiert sein, wenn es auf  $\varphi([a, b])$  definiert ist, reicht völlig aus. Zur Anschauung verweise ich auf die Darstellung als Grenzwert von Riemannsummen im Fall reellwertiger Kovektorfelder in [AN2] 8.4.7, die sich wortwörtlich übertragen läßt. Im Spezialfall  $X = W = \mathbb{C}$  stimmt das auf diese Weise definierte Wegintegral  $\int_{\varphi} f(z) dz$  überein mit dem Wegintegral gemäß der in 3.1.1 für diesen Spezialfall explizit gegebenen Definition und erklärt so insbesondere die für dieses Konzept übliche Notation.

**Ergänzung 3.5.8 (Integrale von Kovektorfeldern über Fastfaltigkeiten).** Ähnlich wie in [AN2] 9.4.3 für gewöhnliche Kovektorfelder alias Einsformen erklärt können wir auch kompakt getragene Kovektorfelder mit Werten in einem beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraum und insbesondere mit Werten in  $\mathbb{C}$  integrieren über orientierte 1-Fastfaltigkeiten. Salopp gesprochen liegt das daran, daß „sich für jede Parametrisierung unserer 1-Fastfaltigkeit durch einen Integrationsweg dasselbe Wegintegral ergibt“.

**3.5.9 (Geschlossene Kovektorfelder und Integralsatz von Cauchy).** Ist  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $W$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\omega : U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$  ein stetig differenzierbares  $W$ -wertiges Kovektorfeld auf  $U$ , so ist wie in [AN2] 8.8.8 eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Homotopieinvarianz der Wegintegrale zu  $\omega$ , daß unser Kovektorfeld geschlossen ist im zu [AN2] 8.8.1 analogen Sinn, daß also in Formeln für alle  $p \in U$  im Vektorraum  $W$  gilt

$$(d_p \omega)(\vec{v})(\vec{w}) = (d_p \omega)(\vec{w})(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$$

Ein komplexwertiges Kovektorfeld der Gestalt  $f(z) dz$  können wir umschreiben zu  $f(z) dz = f(z)(dx + i dy)$  und geschlossen bedeutet  $\partial_y f = i \partial_x f$  alias die Gültigkeit der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Für  $f$  stetig reell differenzierbar sind also Wegintegrale über  $f(z) dz$  gleich für homotope Integrationswege genau dann, wenn  $f$  holomorph ist. Wir erhalten so einen alternativen

Beweis für den Integralsatz von Cauchy, allerdings nur unter der stärkeren Annahme, daß  $f$  nicht nur komplex differenzierbar ist, sondern daß seine komplexe Ableitung  $f'$  zusätzlich auch noch stetig ist.

**3.5.10 (Wirtinger-Ableitung).** In der Funktionentheorie bezeichnet für  $U \subseteq \mathbb{C}$  meist  $\bar{z} := c \circ z : U \rightarrow \mathbb{C}$  die Einbettung gefolgt von der komplexen Konjugation und  $x : U \rightarrow \mathbb{R}$  den Realteil und  $y : U \rightarrow \mathbb{R}$  den Imaginärteil. Die Identitäten  $z = x + iy$  und  $\bar{z} = x - iy$  von komplexwertigen Funktionen führen dann aufgrund der Veträglichkeit des Differentials mit linearen Abbildungen 3.5.5 im Raum der komplexwertigen Kovektorfelder auf  $U$  zu den Identitäten

$$dz = dx + i dy \quad \text{und} \quad d\bar{z} = dx - i dy.$$

Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  reell differenzierbar, so haben wir weiter

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

für die partiellen Ableitungen zum Koordinatensystem  $x, y$  im Sinne von [AN2] 8.2.16. Für eine reell total differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  erklärt man zusätzlich zwei komplexwertige Funktionen auf  $A$ , ihre **Wirtinger-Ableitungen**  $\partial f = \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z}$  und  $\bar{\partial} f = \bar{\partial}_z f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ , durch die Vorschrift

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Die Beziehung dieser Wirtingerableitungen zu den partiellen Ableitungen von oben wird nach dem vorhergehenden gegeben durch die Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist also eine stetig partiell differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph genau dann, wenn gilt  $\bar{\partial} f = 0$ , und in diesem Fall ist  $\partial f = f'$  ihre komplexe Ableitung. Weiter prüft man unschwer  $\bar{\partial} \bar{f} = \bar{\partial} f$ . Die Wirtingerableitungen sind jedoch keine Vektorfelder in Bezug auf lokale Koordinatensysteme im Sinne von [AN2] 8.2.16.

### 3.5.1 Übungen

**Übung 3.5.11 (Rechnen mit Wirtinger-Ableitungen).** Man zeige  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$ . Man zeige weiter für  $w = w(z)$  eine reell differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  in eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , auf der hinwiederum eine reell differenzierbare komplexwertige Funktion  $f$  definiert ist, die Identitäten

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$$

Hinweis: Man gehe aus von den Identitäten  $d(\bar{f}) = \bar{d}f$  und  $d(f \circ w) = w^*(df)$ .

## 4 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

### 4.1 Cauchy's Integralformel (31.5)

**Satz 4.1.1 (Cauchy's Integralformel).** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $K \subset U$  eine ganz in  $U$  enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Bezeichne  $\partial \vec{K}$  einen Weg, der auf dem Rand unserer Kreisscheibe einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft. So gilt für alle Punkte  $w$  aus dem Inneren unserer Kreisscheibe die Formel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \vec{K}} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

4.1.2. **Hier ist ein Film über die Cauchyformel.** Beim ersten Hinsehen mag es so scheinen, als ob in dieser Formel die komplexe Zahl  $i$  eine ungebührliche Sonderrolle spielte, denn warum sollte eine der beiden Wurzeln aus  $-1$  hier besser sein als die andere? Dieser scheinbare Widerspruch löst sich jedoch auf, wenn wir bedenken, daß es auch von der Wahl einer Wurzel aus  $-1$  abhängt, welchen Weg um eine Kreisscheibe wir als „im Gegenuhrzeigersinn umlaufend“ bezeichnen. Das ist ja überhaupt keine streng mathematische Formulierung und hängt sowohl von der Konvention der Uhr ab als auch von der Konvention, daß wir in der Zahlenebene  $1$  nach rechts und  $i$  nach oben abtragen. Ist streng mathematisch formuliert  $p$  das Zentrum unserer Kreisscheibe und  $R$  ihr Radius, so meinen wir in Formeln den Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $t \mapsto p + Re^{2\pi i t}$ . Die Integralformel von Cauchy wird sich später als ein Spezialfall des Residuensatzes 5.2.11 erweisen.

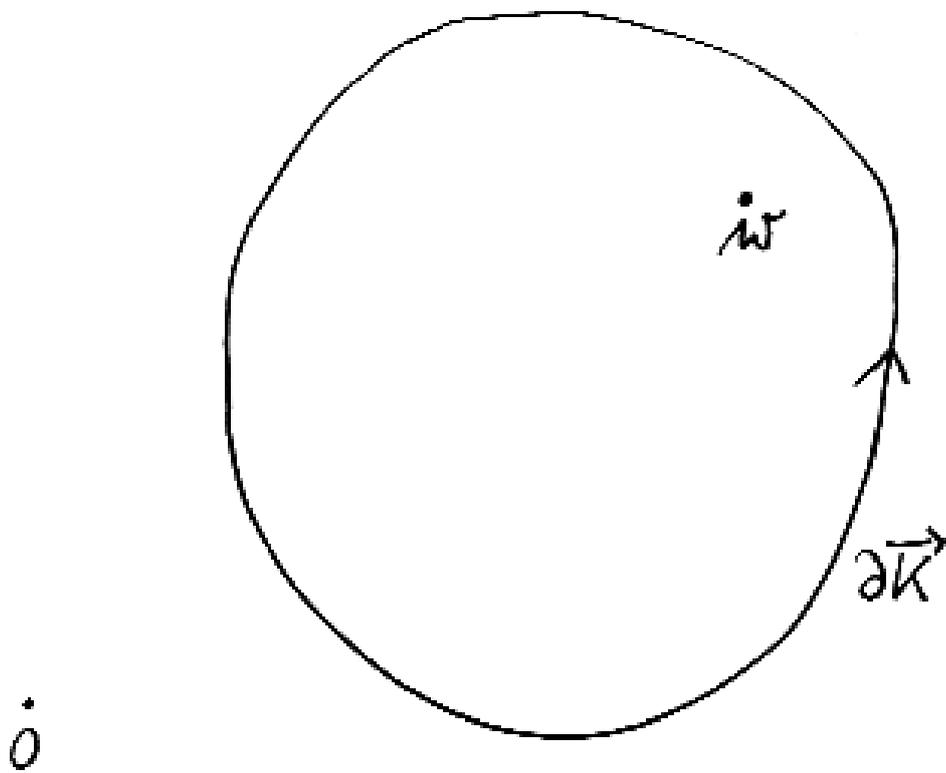
*Ergänzung 4.1.3.* Der Pfeil über dem  $K$  soll wie in [AN2] 9.3.6 die Wahl der Orientierung dieser berandeten Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}$  andeuten. Genauer versehen wir den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}$  mit der Orientierung, für die  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$  eine positiv orientierte Karte ist. Dann erbt  $K$  eine Orientierung als glatt berandete Teilmenge und  $\partial K$  schließlich wird versehen mit der auf dem Rand induzierten Orientierung.

*Beweis.* Nach der Invarianz des Wegintegrals unter freier Homotopie 3.3.13 bleibt die rechte Seite unverändert, wenn wir unseren Weg  $\partial \vec{K}$  ersetzen durch den kreisförmigen Weg  $\gamma_\varepsilon$  um  $w$  mit beliebigem Radius  $\varepsilon$ , sofern nur besagter Weg ganz in unserer Kreisscheibe verläuft. Es reicht also zu zeigen

$$f(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

Hier können wir etwa  $\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto w + \varepsilon e^{it}$  nehmen. Die fraglichen Integrale ergeben sich damit zu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon e^{it}) dt$$



Die Grundsituation bei Cauchy's Integralformel

und konvergieren wegen der Stetigkeit von  $f$  bei  $w$  offensichtlich gegen  $f(w)$ .  
Hier ist ein Film zu den anschließenden Folgerungen aus der Cauchyformel.  $\square$

**Korollar 4.1.4 (Mittelwerteigenschaft).** *Der Wert einer holomorphen Funktion im Zentrum einer beliebigen abgeschlossenen Kreisscheibe aus ihrem Definitionsbereich ist der Durchschnitt über ihre Funktionswerte auf dem Rand besagter Kreisscheibe.*

*Beweis.* Dieser Satz gibt nur in Worten die Aussage der Integralformel in dem Spezialfall wieder, daß  $w$  das Zentrum der Kreisscheibe ist, wie in den letzten Zeilen des vorhergehenden Beweises bereits ausgeführt wurde.  $\square$

**Korollar 4.1.5 (Goursat).** *Die Ableitung einer holomorphen Funktion ist auch selbst wieder holomorph.*

*Beweis.* Übung 2.3.15 über das komplexe Ableiten unter dem Integral zeigt, daß die rechte Seite der Cauchy'schen Integralformel 4.1.1 beliebig oft komplex nach  $w$  abgeleitet werden kann. Das liefert für die höheren Ableitungen einer holomorphen Funktion  $f$ , die auf einer offenen Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  definiert ist, und beliebiges  $w \in K \setminus \partial K$  sogar die explizite Darstellung

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \bar{K}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \square$$

**Satz 4.1.6 (Liouville).** *Jede holomorphe auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte und beschränkte Funktion ist konstant.*

4.1.7. Eine auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte holomorphe Funktion heißt auch eine **ganze Funktion**. Einen alternativen Beweis für den Satz von Liouville geben wir in 5.1.15.

*Beweis.* Lassen wir bei der Darstellung der Ableitung, also dem Fall  $n = 1$  der Formeln vom Ende des vorhergehenden Beweises des Satzes von Goursat 4.1.5 den Radius  $R$  unserer Kreisscheibe gegen Unendlich streben, so strebt die Länge des Integrationsweges linear mit dem Radius gegen Unendlich, das Supremum der zu integrierenden Funktion aber ist für  $R > |w|$  betragsmäßig beschränkt durch eine beliebige obere Schranke von  $|f|$  multipliziert mit  $(R - |w|)^{-2}$ , fällt also salopp gesprochen quadratisch mit dem Radius. Da unsere Formel hier auch für beliebig große Radien gilt, folgt  $f'(w) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C}$ .  $\square$

4.1.8 (**Fundamentalsatz der Algebra**). Hier ist ein Film zur Herleitung des Fundamentalsatzes der Algebra aus dem Satz von Liouville. Ich erinnere den an Fundamentalsatz der Algebra [LA1] 5.3.25: Jede Polynomfunktion ohne Nullstelle

$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist konstant. Wir zeigen das nun mit den Mitteln der Funktionentheorie. Da für jedes Polynom  $P$  positiven Grades gilt  $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ , ist für jede Polynomfunktion ohne Nullstelle aber  $1/P$  eine beschränkte holomorphe Funktion. Nach dem Satz von Liouville 4.1.6 ist dann  $1/P$  und folglich auch  $P$  konstant.

**Satz 4.1.9 (Morera).** *Eine stetige komplexwertige auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definierte Funktion ist holomorph genau dann, wenn für jedes achsenparallele Rechteck, dessen Fläche mitsamt ihrem Rand ganz im Definitionsbereich enthalten ist, das Randintegral verschwindet.*

*Ergänzung 4.1.10.* Eine in der Literatur oft bewiesene schwächere Variante besagt, daß eine stetige komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene holomorph ist genau dann, wenn ihr Wegintegral über jeden „Dreiecksrand“ verschwindet, sobald die ganze „Dreiecksfläche“ im Definitionsbereich unserer Funktion liegt.

*Beweis.* Hier ist ein Film zum Satz von Morera und seinem Korollar. Für holomorphe Funktionen verschwinden diese Integrale nach dem Integralsatz 3.3.1. Für die Umkehrung dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, unsere Teilmenge sei eine offene Kreisscheibe. Verschwinden dann alle die fraglichen Integrale, so besitzt unsere Funktion nach 3.1.17 eine Stammfunktion und ist folglich als Ableitung einer holomorphen Funktion nach dem Satz von Goursat 4.1.5 selbst holomorph.  $\square$

**Korollar 4.1.11 (Holomorphie durch Stetigkeit).** *Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer oder auch endlich vieler reeller affiner Geraden, so ist  $f$  bereits holomorph auf ganz  $U$ .*

4.1.12. Salopp gesprochen folgt also aus der komplexen Differenzierbarkeit „fast überall“ zusammen mit der Stetigkeit überall bereits die komplexe Differenzierbarkeit überall. Das steht in scharfem Kontrast zum Fall reeller Funktionen, in dem etwa der Absolutbetrag stetig ist und mit Ausnahme des Ursprungs überall differenzierbar, aber dennoch im Ursprung eben nicht differenzierbar ist. Man kann in ähnlicher Weise sehr viel stärkere Sätze beweisen. Als Übung mögen sie zeigen, daß eine stetige Funktion, die holomorph ist auf dem Komplement einer endlichen Vereinigung eindimensionaler in  $U$  abgeschlossener  $C^1$ -Untermannigfaltigkeiten der komplexen Zahlenebene im Sinne von [AN2] 4.2.6, bereits auf ganz  $U$  holomorph ist.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß unsere Funktion auf dem Komplement einer einzigen reellen Geraden holomorph ist und daß diese Gerade sogar die reelle Achse ist. Nach 4.1.9 reicht es nun zu zeigen,

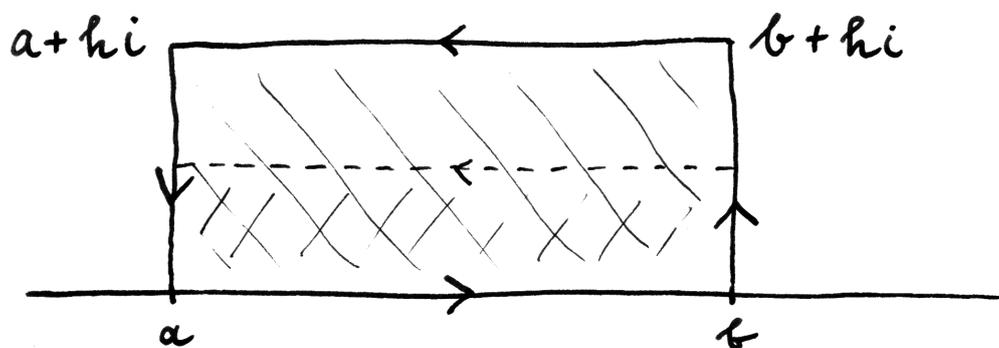


Illustration zum Beweis von 4.1.11. Die reelle Achse in der komplexen Zahlenebene ist als durchgehende Gerade eingezeichnet. Integrieren wir eine stetige Funktion, die außerhalb der reellen Gerade holomorph ist, über den Rand des großen Rechtecks, so kommt dasselbe heraus, wie wenn wir sie über den Rand des kleinen unteren doppelt schraffierten Rechtecks integrieren, denn das Integral über den Rand des einfach schraffierten oberen Rechtecks ist Null.

daß für jedes achsenparallele ganz in unserer Teilmenge enthaltene Rechteck das Randintegral verschwindet. Durch entsprechendes Zerschneiden von Rechtecken ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß eine Kante unseres Rechtecks auf der reellen Achse liegt. Seien also  $a, b, a + hi, b + hi$  mit  $a, b, h \in \mathbb{R}$  und  $a < b$  sowie  $0 \neq h$  die Ecken unseres Rechtecks. Nach elementaren Abschätzungen ist dies Randintegral für jedes stetige  $f$  eine stetige Funktion von  $h$ , die sich durch den Wert Null stetig nach  $h = 0$  fortsetzen läßt. Nach dem Integralsatz von Cauchy ist für  $f$  holomorph auf  $U \setminus \mathbb{R}$  dies Randintegral aber unabhängig von  $h$  für  $h > 0$  und, a priori eventuell mit einem anderen Wert, für  $h < 0$ . Das zeigt, daß unser Randintegral Null sein muß für alle  $h$ .  $\square$

## Übungen

**Übung 4.1.13 (Maximumsprinzip, schwache Form).** Man zeige: Gegeben eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und ein nichtleeres Kompaktum  $K \subset U$  gibt es  $p \in K$  derart, daß keine Kreisscheibe mit Zentrum  $p$  ganz in  $K$  liegt und daß gilt  $|f(p)| \geq |f(z)| \forall z \in K$ . Salopp gesprochen nimmt also die Restriktion unserer Funktion auf unser Kompaktum ihr Betragsmaximum stets in einem „Randpunkt“ unseres Kompaktums an. Eine noch stärkere Aussage in dieser Richtung liefert das Maximumsprinzip 4.3.9.

**Übung 4.1.14 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip).** Sei  $U \Subset \mathbb{C}$  offen und stabil unter der komplexen Konjugation. Wir zerlegen  $U$  in seinen Schnitt mit der reellen Achse und der oberen und unteren Halbebene in der Form

$$U = U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \sqcup U^-$$

mit  $U^\pm := \{z \in U \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ . Man zeige: Ist  $f : U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, holomorph auf  $U^+$  und reellwertig auf  $U \cap \mathbb{R}$ , so können wir  $f$  zu einer holomorphen Funktion auf  $U$  ausdehnen, indem wir für alle  $z \in U^-$  setzen  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . Hinweis: 2.2.18 und 4.1.11.

**Übung 4.1.15 (Integrale über Familien holomorpher Funktionen).** Seien  $U \Subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(z, t) \mapsto f(z, t)$  stetig. Ist  $z \mapsto f(z, t)$  für alle  $t \in [a, b]$  holomorph, so ist auch die Abbildung  $F : z \mapsto \int_a^b f(z, t) dt$  holomorph. Des weiteren ist dann  $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w, t) dt$$

Hinweis: Man folgere aus dem Satz von Morera 4.1.9, daß  $F$  holomorph ist, und aus der expliziten Formel für die Ableitung aus dem Beweis des Satzes von Goursat 4.1.5, daß  $\frac{\partial f}{\partial z}$  stetig ist. Dann kann man Übung 2.3.15 zum holomorphen Ableiten unter dem Integral anwenden.

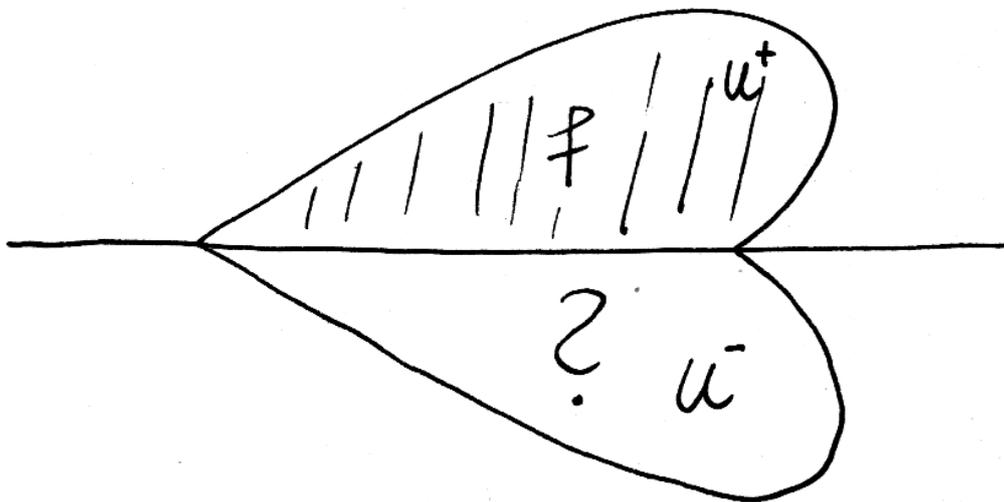


Illustration zum Schwarz'schen Spiegelungsprinzip

*Übung 4.1.16.* Jede nicht konstante holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  hat dichtes Bild. Hinweis: Für  $w \notin f(\mathbb{C})$  betrachte man die Funktionen  $g : z \mapsto 1/(f(z) - w)$ . In 5.1.18 werden sie stärker zeigen, daß dasselbe auch für jede nicht konstante holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  gilt im Fall einer endlichen Teilmenge  $E \subset \mathbb{C}$ .

*Übung 4.1.17.* Man folgere aus dem Satz von Goursat 4.1.5, daß für jede holomorphe Funktion  $f$  die durch  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  gegebenen reellen Funktionen  $u, v$  stetig partiell differenzierbar sind.

## 4.2 Potenzreihenentwicklung (2.6)

4.2.1. Hier ist ein Film über die Konvergenz komplexer Potenzreihen und die Holomorphie der durch sie dargestellten Funktionen. Einen Ausdruck der Form  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  mit  $a_{\nu} \in \mathbb{C}$  im Sinne von [LA1] 5.3.42 nennen wir eine **komplexe Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge ihrer Koeffizienten  $a_{\nu}$  anzugeben. Ist nun  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  eine komplexe Potenzreihe und konvergiert die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  für ein  $z \in \mathbb{C}$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} w^{\nu}$  absolut für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| < |z|$ . Der Beweis dieser Tatsache ist identisch zum Beweis der entsprechenden Aussage im Reellen [AN1] 6.1.1, den wir dort nur deshalb nicht im Komplexen geführt haben, weil uns die komplexen Zahlen noch nicht zur Verfügung standen. Wir erklären den **Konvergenzradius**  $r \in [0, \infty]$  einer Potenzreihe  $\sum a_{\nu} z^{\nu}$  wie im Reellen in [AN1] 6.1.3 durch

$$r = \sup\{|z| \mid \sum a_{\nu} z^{\nu} \text{ konvergiert}\}$$

und erkennen dabei auch gleich den geometrischen Ursprung der Bezeichnung „Konvergenzradius“, die im Rahmen der reellen Analysis noch recht unmotiviert daherkommt. Genau wie in [AN1] 6.1.4 zeigt man, daß die Partialsummen einer komplexen Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$  gleichmäßig konvergieren auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung und Radius  $\rho < r$ . Das folgende Korollar 4.2.6 zeigt dann, daß eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$  auf der ganzen offenen Kreisscheibe  $\{z \mid |z| < r\}$  vom Radius  $r$  eine holomorphe Funktion darstellt.

*Ergänzung 4.2.2 (Komplexe Analoga des Abel’schen Grenzwertsatzes).* Der Abel’sche Grenzwertsatz [AN1] 6.4.2 muß im Komplexen sorgfältiger formuliert werden: Konvergiert eine komplexe Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihrer offenen Konvergenzkreisscheibe, so stellt sie nicht notwendig auf der ganzen offenen Kreisscheibe vereinigt mit diesem Randpunkt eine stetige Funktion dar, sondern nur auf jedem abgeschlossenen Winkelsegment, das „vom fraglichen Randpunkt aus ins Innere der Kreisscheibe geht“. Diese Stetigkeit auf Winkelsegmenten zeigen wir im allgemeineren Kontext der Dirichlet-Reihen in 7.3.2.

Welche Schwierigkeiten im allgemeinen auftreten können, zeigt die Poissontransformation 6.1.13.

4.2.3. Einen Ausdruck der Form  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z-p)^{\nu}$  mit  $a_{\nu} \in \mathbb{C}$  nennt man auch eine **Potenzreihe mit Entwicklungspunkt**  $p$ . Ihr Konvergenzbereich besteht dann aus allen  $z$  in einer geeigneten offenen Kreisscheibe mit Zentrum  $p$ , möglicherweise noch zusammen mit einigen Punkten auf deren Rand.

**Definition 4.2.4.** Eine Folge komplexwertiger Funktionen auf einem metrischen oder allgemeiner topologischen Raum heißt **kompakt konvergent** gegen eine Grenzfunktion, wenn sie auf allen Kompakta unseres Raums gleichmäßig gegen besagte Grenzfunktion konvergiert.

4.2.5. Im Rahmen der Funktionentheorie nennt man eine Reihe von Funktionen **normal konvergent**, wenn die Folge ihrer Partialsummen im Sinne der vorhergehenden Definition 4.2.4 kompakt konvergiert.

**Korollar 4.2.6 (Grenzwerte von Folgen holomorpher Funktionen).** *Konvergiert eine Folge holomorpher Funktionen kompakt, so ist die Grenzfunktion holomorph und die Folge der Ableitungen konvergiert kompakt gegen die Ableitung der Grenzfunktion.*

*Beweis.* Hier ist ein Film über kompakte Konvergenz und das gliedweise Ableiten komplexer Potenzreihen. Die erste Aussage folgt sofort aus der Charakterisierung 4.1.9 der Holomorphie durch das Verschwinden von Randintegralen zu Rechtecken. Was die zweite Aussage angeht, so erhalten wir aus der expliziten Formel für die Ableitung als Wegintegral aus dem Beweis von 4.1.5 schon mal, daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt, auf der die Ableitungen unserer Funktionen gleichmäßig gegen die Ableitung der Grenzfunktion streben. Mit [AN1] ?? besitzt dann jedes Kompaktum eine endliche Überdeckung durch Teilmengen, auf denen die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig ist, und damit ist auch die Konvergenz der Ableitungen gleichmäßig auf Kompakta.  $\square$

*Beispiel 4.2.7.* Für eine in einer Umgebung des Ursprungs durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion  $f(w) = \sum_{\nu \geq 0} a_{\nu} w^{\nu}$  gilt stets  $f^{(n)}(0) = n! a_n$ . In der Tat konvergieren komplexe Potenzreihen wie in 4.2.1 erklärt kompakt auf dem Inneren ihres Konvergenzbereichs, nach 4.2.6 dürfen wir sie also auch im Komplexen gliedweise ableiten, und der konstante Term der durch  $n$ -maliges Ableiten entstehenden Potenzreihe ist offensichtlich  $n! a_n$ .

**Satz 4.2.8 (Entwicklung in eine Potenzreihe).** *Eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene ist holomorph genau dann, wenn sie auf der ganzen offenen Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt im Zentrum besagter Kreisscheibe dargestellt werden kann.*

**Beweis.** Hier ist ein Film über die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen. Warum Potenzreihen im Inneren ihrer Konvergenzkreisscheibe holomorphe Funktionen darstellen, haben wir bereits in 4.2.1 diskutiert. Um umgekehrt zu zeigen, daß jede auf einer offenen Kreisscheibe holomorphe Funktion auch tatsächlich durch eine auf der ganzen offenen Kreisscheibe konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere offene Kreisscheibe, sie heiße etwa  $K$ , ihr Zentrum im Ursprung hat. Nun beachten wir für  $|w| < |z|$  die Entwicklung

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-(w/z)} \right) = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{w}{z} \right)^{\nu}$$

Die Konvergenz der Partialsummen geschieht hier bei festem  $w$  gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Kreisring  $|z| = \rho$  mit  $\rho > |w|$ , da die rechte Reihe für alle  $z$  auf diesem Kreisring majoriert wird durch die konvergente Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} (|w|/\rho)^{\nu}$ . Folglich können wir unsere Summe mit der Integration in der Integralformel von Cauchy vertauschen und erhalten

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{\nu+1}} dz \right) w^{\nu}$$

für jedes  $w \in K$  und jedes  $\rho$  mit  $|w| < \rho < r$  für  $r$  den Radius unserer offenen Kreisscheibe  $K$ . Bei unserem Wegintegral ist dabei der geschlossene Weg gemeint, der im Gegenuhrzeigersinn auf der Kreislinie  $|z| = \rho$  einmal um den Ursprung läuft. Da unser Integral von  $\rho$  gar nicht abhängt, steht damit auch schon eine Entwicklung in eine Potenzreihe da. Deren Koeffizienten müssen wegen dem nach 4.2.6 erlaubten gliedweisen Ableiten gerade die  $f^{(\nu)}(0)/\nu!$  sein, so daß unsere Funktion auf der ganzen offenen Kreisscheibe dargestellt wird durch ihre **Taylorreihe**

$$f(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} w^{\nu} \quad \square$$

**4.2.9 (Konvergenzradius und holomorphe Fortsetzung).** Hat die Taylorreihe einer holomorphen Funktion an einer Stelle einen gegebenen Konvergenzradius, so kann unsere Funktion nicht holomorph auf eine offene Kreisscheibe mit Zentrum in besagter Stelle und echt größerem Radius fortgesetzt werden: Sonst müßte sich nämlich diese Fortsetzung auf der größeren offenen Kreisscheibe nach unserem Korollar auch durch ihre Taylorreihe, notwendig dieselbe, darstellen lassen, im Widerspruch zu unseren Annahmen an den Konvergenzradius.

## Übungen

*Übung 4.2.10.* Man bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe des Arcustangens zum Entwicklungspunkt Eins.

*Übung 4.2.11.* Man zeige, daß für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  der Hauptzweig des Logarithmus von  $1 + z$  auch dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Hinweis: Mit etwas Tricksen hatten wir das in 2.2.17 schon einmal gesehen.

*Übung 4.2.12.* Man zeige, daß eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , für die  $|f(z)|/|z^n|$  für  $|z| > 1$  beschränkt bleibt, ein Polynom vom Grad  $\leq n$  sein muß.

*Übung 4.2.13 (Cauchy-Abschätzung der Koeffizienten einer Potenzreihe).* Für alle komplexen Potenzreihen  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  und alle  $n \geq 0$  und alle nichtnegativen  $R$  unterhalb ihres Konvergenzradius gilt die Abschätzung

$$|a_n| R^n \leq \sup_{|z|=R} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \right|$$

Salopp gesprochen können also komplexe Potenzreihen, die „nur relativ kleine“ Werte annehmen, auch „nur relativ kleine Koeffizienten“ haben. Selbst im Fall von komplexen Polynomen kenne ich keinen anderen Beweis für diese Tatsache, deren reelles Analogon im Übrigen ziemlich falsch ist, man denke nur etwa an die Gauß'sche Glockenkurve. Hinweis: Beweis des Satzes von Goursat 4.1.5.

*Übung 4.2.14 (Abschätzung für Potenzreihen von Operatoren).* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Wir wählen eine Norm auf  $V$  und versehen den Raum  $\text{End } V$  aller Endomorphismen von  $V$  mit der Operatornorm. Gegeben eine komplexe Potenzreihe  $\sum a_{\nu} z^{\nu}$  mit Konvergenzradius  $r \in [0, \infty]$  und ein Endomorphismus  $A \in \text{End } V$  mit  $\|A\| < r$  zeige man, daß  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} A^{\nu}$  absolut summierbar ist und daß für  $\|A\| < R < r$  gilt

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} A^{\nu} \right\| \leq (1 - (\|A\|/R))^{-1} \left( \sup_{|z|=R} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \right| \right)$$

Man notiert die Summe dieser absolut summierbaren Familie  $f(A) \in \text{End } V$ . Unternehmende Leser betrachten allgemeiner den Fall eines Banachraums  $V$ . Hinweis: Cauchy-Abschätzung 4.2.13 und geometrische Reihe.

*Übung 4.2.15 (Binomische Reihe im Komplexen).* Man zeige, daß auch für  $z, \alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  die binomische Reihe [AN1] 6.1.23 gegen  $(1 + z)^{\alpha}$  konvergiert. Hier verwendet man die offensichtliche Erweiterung der Binomialkoeffizienten ins Komplexe und versteht  $(1 + z)^{\alpha} = \exp(\alpha \log(z + 1))$  für  $\log$  den Hauptzweig des Logarithmus, vergleiche [AN1] 5.10.15.

**Übung 4.2.16 (Potenzreihenentwicklung einer Verknüpfung).** Gegeben  $U, V \Subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}, g : V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f(U) \subset V$  und  $p \in U$  erhält man die Taylorreihe von  $g \circ f$  bei  $p$  durch das „Einsetzen der Taylorreihe von  $f$  bei  $p$  in die Taylorreihe von  $g$  bei  $f(p)$ “. Sind genauer  $f(p+z) = \sum a_\nu z^\nu$  und  $g(f(p)+w) = \sum b_\mu w^\mu$  und  $g(f(p+z)) = \sum c_\lambda z^\lambda$  die jeweiligen Taylorreihen, so gilt

$$c_\lambda = \sum_{\nu(1)+\dots+\nu(\mu)=\lambda} b_\mu a_{\nu(1)} \dots a_{\nu(\mu)}$$

mit der Summe über alle  $\mu \geq 0$  und alle Abbildungen  $\nu : \{1, \dots, \mu\} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ , bei denen die Summe der Werte gerade  $\lambda$  ist. Im Fall  $\lambda = 0$  gibt es so eine Abbildung  $\nu$  nur für  $\mu = 0$  und wir erhalten speziell  $c_0 = b_0$ . Der Koeffizient  $a_0$  geht nur insofern ein, als  $g$  eben um  $f(p) = a_0$  entwickelt werden muß.

**Übung 4.2.17 (Exponential und Logarithmus für Matrizen).** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Wir wählen eine Norm auf  $V$  und versehen den Raum  $\text{End } V$  aller Endomorphismen von  $V$  mit der Operatornorm und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \log : B(\text{id}; 1) &\rightarrow \text{End } V \\ (A + \text{id}) &\mapsto A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} \dots \end{aligned}$$

Man zeige die Formel  $\exp(\log X) = X$  für alle  $X$  im offenen Ball um die Identität mit Radius Eins. Hinweis: Schneiden wir unsere Potenzreihen geeignet ab, so erhalten wir durch Verknüpfen eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig auf jedem Kompaktum aus  $B(1; 1)$  gegen die Funktion  $z$  konvergiert. Nun verwende man 4.2.14. Ein schlechter verallgemeinerbares aber elementarer Argument findet man in [AN2] ??.

**Übung 4.2.18 (Kompakte Konvergenz und logarithmische Ableitung).** Gegeben  $U \Subset \mathbb{C}$  und eine Folge  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorpher Funktionen ohne Nullstelle, die kompakt gegen eine holomorphe Funktion  $f$  ohne Nullstelle konvergiert, konvergieren auch die logarithmischen Ableitungen der  $f_n$  kompakt gegen die logarithmische Ableitung von  $f$ .

### 4.3 Nullstellenmengen holomorpher Funktionen (7.6)

**Lemma 4.3.1 (Nullstellenordnung holomorpher Funktionen).** *Hat eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $U \Subset \mathbb{C}$  bei  $p \in U$  eine Nullstelle, verschwindet aber auf keiner Umgebung von  $p$  identisch, so gibt es genau ein  $n \geq 1$  und genau eine holomorphe Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(p) \neq 0$  derart, daß für alle  $z \in U$  gilt*

$$f(z) = (z - p)^n g(z)$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus der Potenzreihenentwicklung 4.2.8. [Hier ist ein erster Film über Nullstellen holomorpher Funktionen.](#)  $\square$

4.3.2. Die fragliche Zahl  $n$  heißt die **Ordnung der Nullstelle** und wir verwenden dafür die Notation  $n = v_p(f)$ . Verschwindet  $f$  identisch in einer Umgebung von  $p$ , so setzen wir  $v_p(f) = \infty$ . Der Buchstabe  $v$  steht hier für „valuation“, zu deutsch „Bewertung“.

4.3.3. Eine Nullstelle einer Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die in einer offenen Teilmenge ihres Definitionsbereichs  $U$  die einzige Nullstelle ist, nennen wir ganz allgemein eine **isolierte Nullstelle** unserer Funktion. Die nicht isolierten Nullstellen einer Funktion nennen wir ihre **nichtisolierten Nullstellen**. Im Fall einer stetigen Funktion ist klar, daß ihre Nullstellen eine abgeschlossene Teilmenge von  $U$  bilden. Ebenso ist aber auch klar, daß ihre nichtisolierten Nullstellen eine abgeschlossene Teilmenge von  $U$  bilden, weil ihr Komplement ja offensichtlich offen sein muß. Im Fall einer holomorphen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $U \subseteq \mathbb{C}$  zeigt unser Lemma 4.3.1 darüber hinaus, daß die nichtisolierten Nullstellen von  $f$  auch eine offene Teilmenge von  $U$  bilden.

**Satz 4.3.4 (Nullstellenmengen holomorpher Funktionen).** *Hat eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich eine nichtisolierte Nullstelle, so ist unsere Funktion die Nullfunktion.*

4.3.5. Insbesondere hat also eine von Null verschiedene holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich nur isolierte Nullstellen. Allerdings können sich diese Nullstellen durchaus „am Rand des Definitionsbereichs häufen“. [Hier ist ein Film zur anschaulichen Bedeutung des Satzes.](#) [Hier ist ein Film zum Beweis.](#)

*Beweis.* Wir verwenden hier den topologischen Zusammenhangsbegriff, der ja nach 1.4.4 in unserer Situation gleichbedeutend ist zum Wegzusammenhang. Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  unsere holomorphe Funktion. Nach 4.3.3 ist die Menge  $N$  der nichtisolierten Nullstellen von  $f$  sowohl offen als auch abgeschlossen in  $U$ . Da  $U$  zusammenhängend ist, gilt entweder  $N = \emptyset$  oder  $N = U$  und unter den Annahmen des Satzes also  $N = U$ .  $\square$

**Korollar 4.3.6 (Identitätssatz).** *Stimmen zwei auf einer zusammenhängenden offenen Menge definierte holomorphe Funktionen überein auf einer Teilmenge mit einem nichtisolierten Punkt, so sind sie gleich.*

*Beweis.* Man wende den vorhergehenden Satz 4.3.4 über Nullstellenmengen holomorpher Funktionen auf die Differenz unserer beiden Funktionen an.  $\square$

*Beispiel 4.3.7.* Die komplexe Exponentialfunktion ist die einzige holomorphe Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf der reellen Achse mit der reellen Exponentialfunktion übereinstimmt.

*Vorschau 4.3.8.* Man kann sich fragen, ob jede holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich eine größte holomorphe Fortsetzung hat. Der komplexe Logarithmus und viele andere Beispiele zeigen schnell, daß das nicht richtig sein kann. Es wird jedoch richtig, wenn man „mehrwertige“ Funktionen erlaubt, vergleiche [TG] 2.2.32. Wir gehen darauf an dieser Stelle nicht weiter ein.

**Korollar 4.3.9 (Maximumsprinzip).** *Eine nicht konstante holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Menge kann nirgends ein Betragsmaximum annehmen.*

*Beweis.* Hier ist ein Film zum Maximumsprinzip. Nach der Mittelwerteigenschaft 4.1.4 gilt für jede holomorphe Funktion und jede abgeschlossene Kreisscheibe in ihrem Definitionsbereich, daß der Funktionswert im Zentrum der Durchschnitt über die Funktionswerte auf dem Rand sein muß. Daß die Werte auf dem Rand betragsmäßig höchstens so groß sind wie der im Zentrum ist offensichtlich nur dann möglich, wenn alle diese Werte gleich sind. In der Tat können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Wert  $f(p)$  im Zentrum zusätzlich reell nicht-negativ annehmen und dann folgt aus

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + \varepsilon e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(p + \varepsilon e^{it})) dt$$

und  $f(p) = |f(p)| \geq |f(p + \varepsilon e^{it})| \geq \operatorname{Re}(f(p + \varepsilon e^{it}))$  für alle  $t$  erst in dieser Gleichungskette Gleichheit für alle  $t$  und dann  $f(p) = f(p + \varepsilon e^{it})$  für alle  $t$ . Nimmt also unsere Funktion irgendwo ihr Betragsmaximum an, so ist sie auf einer Umgebung dieser Stelle konstant und damit nach dem Identitätssatz 4.3.6 global konstant.  $\square$

**Satz 4.3.10 (Schwarz'sches Lemma).** *Für jede holomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe in sich selber, die den Ursprung festhält, gilt:*

1. *Das Bild jedes Punktes liegt mindestens ebenso nah am Ursprung wie besagter Punkt selbst und die Ableitung unserer Abbildung im Ursprung hat höchstens den Betrag Eins;*
2. *Hat für mindestens einen Punkt außerhalb des Ursprungs sein Bild denselben Abstand zum Ursprung wie der besagte Punkt selbst oder hat die Ableitung im Ursprung den Betrag Eins, so ist unsere Abbildung eine Drehung.*

*Beweis.* Hier ist ein Film zum Schwarz'schen Lemma. Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Für eine holomorphe Abbildung  $f : E \rightarrow E$  mit  $f(0) = 0$  behauptet unser Satz in Formeln

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in E \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

Des weiteren behauptet er für die Fälle  $|f(z)| = |z|$  für ein  $z \in E \setminus 0$  oder  $|f'(0)| = 1$ , daß  $f$  eine Drehung sein muß. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es, wenn  $f$  die offene Einheitskreisscheibe in sich selber abbildet, sicher ein  $\delta \in (0, 1)$  mit  $|z| \geq \delta \Rightarrow |f(z)/z| \leq 1 + \varepsilon$ . Dieser Quotient kann also salopp gesprochen „betragsmäßig um so weniger über die Eins hinauskommen, je näher  $z$  am Rand der Einheitskreisscheibe liegt“. Nun erhält man nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 4.2.8 eine holomorphe Funktion durch die Vorschrift  $z \mapsto f(z)/z$  für  $z \neq 0$  beziehungsweise  $z \mapsto f'(0)$  für  $z = 0$ . Da diese Funktion nach 4.3.9 auf einer offenen Kreisscheibe ihr Betragsmaximum nicht annehmen kann, wenn sie nicht konstant ist, folgt  $|f(z)/z| \leq 1$  für alle  $z \in E \setminus 0$  sowie  $|f'(0)| \leq 1$ . Steht hier an einer Stelle eine Gleichheit, so ist  $f(z)/z$  konstant und folglich  $f$  eine Drehung.  $\square$

## Übungen

*Übung 4.3.11.* Man zeige, daß jede holomorphe Bijektion von der Einheitskreisscheibe auf sich selber, die den Ursprung festhält, eine Drehung alias Multiplikation mit einer komplexen Zahl der Norm Eins sein muß. Hinweis: Man wende das Schwarz'sche Lemma auch auf die Umkehrfunktion an.

*Übung 4.3.12.* Man konstruiere eine bijektive holomorphe Abbildung von der offenen Einheitskreisscheibe in die Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil, der sogenannten „oberen Halbebene“. Hinweis: Möbius-Geometrie [EL] 2.5.1. Man zeige, daß die dort eingeführte Operation der speziellen linearen Gruppe  $SL(2; \mathbb{R})$  auf der oberen Halbebene die Restklassengruppe  $PSL(2; \mathbb{R}) := SL(2; \mathbb{R})/\{\pm \text{id}\}$  identifiziert mit der Gruppe aller bijektiven holomorphen Abbildung von der oberen Halbebene auf sich selber. Hinweis: 4.3.11.

*Übung 4.3.13.* Eine stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse besitzt höchstens eine Fortsetzung auf die abgeschlossene obere Halbebene, die sowohl stetig ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene als auch holomorph auf der offenen oberen Halbebene. Man zeige auch, daß nicht jede stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Achse in dieser Weise fortgesetzt werden kann. Hinweis: Spiegelungsprinzip 4.1.14.

*Ergänzende Übung 4.3.14.* Man zeige, daß sich die auf der offenen Einheitskreisscheibe durch die Reihen  $\sum_{k \geq 1} z^k/k^n$  definierten Funktionen holomorph auf das Komplement von  $\mathbb{R}_{\geq 1}$  in der komplexen Zahlenebene fortsetzen lassen. Die

zugehörigen Funktionen heißen **Polylogarithmen** oder präziser  **$n$ -Logarithmen** und werden  $\text{Li}_n(z)$  oder auch  $L_n(z)$  notiert. Insbesondere den **Dilogarithmus**  $\text{Li}_2$  trifft man des öfteren. Für den 1-Logarithmus gilt  $\text{Li}_1(z) = -\log(1 - z)$  nach [AN1] 6.1.19. Man zeige allgemeiner, daß sie sich für jede schleifenfüllende offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{C} \setminus \{1, 0\}$  und jede Zusammenhangskomponente des Schnitts von  $U$  mit der offenen Einheitskreisscheibe eindeutig von diesem Schnitt auf die ganze Menge  $U$  fortsetzen lassen. In der Terminologie aus [TG] 2.2.32 liefert also in der „Riemannschen Fläche unseres Funktionskeims das Urbild des Komplements von  $\{1, 0\}$  eine Überlagerung dieses Komplements“.

**Übung 4.3.15 (Holomorphe Funktionen und formale Potenzreihen).** Die Entwicklung in eine Potenzreihe liefert für jede offene Umgebung  $U \ni 0$  des Ursprungs in der Zahlenebene einen Ringhomomorphismus  $\mathcal{O}^{\text{an}}(U) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$  vom Ring  $\mathcal{O}^{\text{an}}(U)$  der holomorphen Funktionen auf  $U$  in den Ring der formalen Potenzreihen  $\mathbb{C}[[z]]$  aus [LA1] 5.3.42. Ist  $U$  wegzusammenhängend, so erhalten wir auf diese Weise sogar einen injektiven Ringhomomorphismus

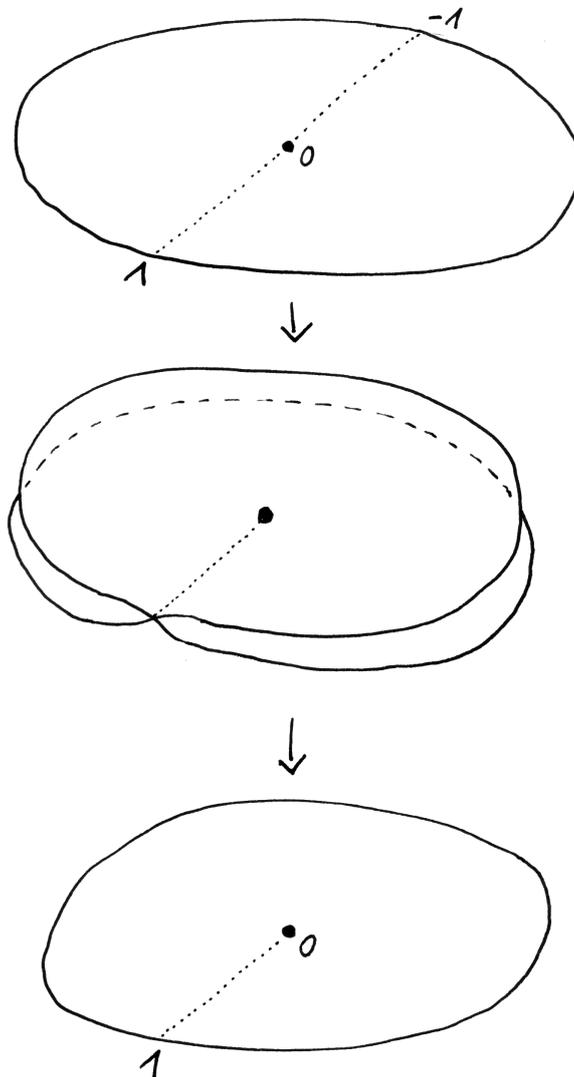
$$\mathcal{O}^{\text{an}}(U) \hookrightarrow \mathbb{C}[[z]]$$

## 4.4 Lokale Struktur holomorpher Funktionen (9.6)

**Lemma 4.4.1 (Lokaler Umkehrsatz für holomorphe Funktionen).** *Ist  $U \ni p$  offen und  $p \in U$  ein Punkt und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f'(p) \neq 0$ , so gibt es eine offene Umgebung  $V \ni p$  von  $p$  derart, daß die Restriktion von  $f$  auf  $V$  eine biholomorphe Einbettung ist.*

*Beweis.* Hier ist ein Film über dies Lemma und seinen Beweis. Nach dem Satz von Goursat 4.1.5 ist die Ableitung von  $f$  stetig. Der Satz über die Umkehrabbildung [AN2] 4.1.2 aus der Analysis sagt uns dann, daß  $f$  eine offene Umgebung von  $p$  bijektiv mit einer offenen Umgebung von  $f(p)$  identifiziert. Proposition 2.2.10 über Umkehrfunktionen holomorpher Funktionen liefert damit den Rest der Behauptung.  $\square$

**4.4.2 (Komplexe Wurzelfunktionen).** Wenden wir dieses Lemma auf die Abbildungen  $z \mapsto z^n$  an, so ergibt sich, daß jeder Punkt  $p \in \mathbb{C}^\times$  eine offene Umgebung  $V$  besitzt, die unter  $z \mapsto z^n$  biholomorph auf eine offene Umgebung  $W$  von  $p^n$  abgebildet wird. Umgekehrt besitzt also jeder Punkt  $q \in \mathbb{C}^\times$  eine offene Umgebung  $W$ , auf der eine holomorphe Funktion  $w : W \rightarrow \mathbb{C}$  existiert mit  $w(z)^n = z$  für alle  $z \in W$ . Es ist auch explizit leicht zu sehen, daß es solche  $n$ -ten Wurzelfunktionen  $w$  sogar auf jeder geschlitzten komplexen Zahlenebene  $W = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $s \in \mathbb{C}^\times$  gibt. Als Übung mögen Sie zeigen, daß es sie sogar auf jeder schleifenfüllenden offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}^\times$  gibt.



Dies Bild soll Anschauung für die Abbildung  $z \mapsto z^2$  der Einheitskreisscheibe auf sich selbst vermitteln. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt  $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$  in  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$  für geeignetes monotonen und in einer Umgebung von Null streng monotonen  $\varepsilon$ , gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das hat den Vorteil, daß im ersten Schritt nur gegenüberliegende Punkte der reellen Achse identifiziert werden, was man sich leicht wegdenken kann, und daß der zweite Schritt eine sehr anschauliche Bedeutung hat, eben die senkrechte Projektion.

**Satz 4.4.3 (Wurzeln holomorpher Funktionen an Nullstellen).** Seien  $U \Subset \mathbb{C}$  offen und  $p \in U$  ein Punkt und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit einer Nullstelle endlicher Ordnung  $n \geq 1$  bei  $p$ . So gibt es eine offene Umgebung  $V \Subset U$  von  $p$  und eine biholomorphe Einbettung  $b : V \hookrightarrow \mathbb{C}$  mit  $b(p) = 0$  derart, daß für alle  $z \in V$  gilt

$$f(z) = b(z)^n$$

*Beweis.* Hier ist ein Film über diesen Satz und seinen Beweis. Im Fall  $n = 1$  gilt es nur zu zeigen, daß  $f$  selbst eine biholomorphe Einbettung auf einer offenen Umgebung von  $p$  induziert, und das ist gerade die Aussage des lokalen Umkehrsatzes für holomorphe Funktionen 4.4.1. Im allgemeinen dürfen wir sicher  $p = 0$  annehmen. Wir entwickeln  $f$  in eine Potenzreihe und erhalten

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} z^{\nu} = z^n g(z)$$

für eine holomorphe Funktion  $g$  mit  $g(0) \neq 0$ . Nun finden wir sicher eine offene Umgebung  $W \Subset U$  des Ursprungs derart, daß  $g(W)$  ganz in einer geschlitzten Ebene liegt, auf der es eine holomorphe  $n$ -te Wurzelfunktion  $w$  gibt, so daß wir auf  $W$  eine holomorphe Funktion  $h(z) := w(g(z))$  finden können mit  $h(z)^n = g(z) \forall z \in W$ . Dann gilt  $f(z) = (zh(z))^n \forall z \in W$  und die Funktion  $b : z \mapsto zh(z)$  ist nach dem lokalen Umkehrsatz 4.4.1 nach Restriktion zu einer gegebenenfalls noch kleineren Umgebung  $V$  des Ursprungs eine biholomorphe Einbettung.  $\square$

**Korollar 4.4.4 (Lokale Struktur holomorpher Funktionen).** Seien  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf  $U \Subset \mathbb{C}$  und  $p \in U$  ein Punkt. So gibt es biholomorphe Einbettungen  $u : E \hookrightarrow U$  und  $v : E \hookrightarrow \mathbb{C}$  der offenen Einheitskreisscheibe in den Definitions- beziehungsweise Wertebereich von  $f$  mit  $u(0) = p$  und  $v(0) = f(p)$  sowie  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \sqcup \{\infty\}$  derart, daß das Diagramm bepunkteter Räume

$$\begin{array}{ccc} z & & (E, 0) \xleftarrow{u} (U, p) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \quad \downarrow f \\ z^n & & (E, 0) \xleftarrow{v} (\mathbb{C}, f(p)) \end{array}$$

kommutiert, mit der Vereinbarung, daß  $z \mapsto z^{\infty}$  die konstante Abbildung Null bedeuten möge. Wir haben dabei  $n = \inf\{\nu \geq 1 \mid f^{(\nu)}(p) \neq 0\}$ .

*Beweis.* Hier ist ein Film über diese Aussage und ein weiterer über ihren Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f(p) = 0$  annehmen. Hat  $f$  eine Nullstelle unendlicher Ordnung bei  $p$ , so ist  $f$  konstant Null in einer Umgebung von  $p$  und  $u$  und  $v$  sind leicht zu finden. Andernfalls können wir unseren Satz 4.4.3

über Wurzeln holomorpher Funktionen bei Nullstellen anwenden und eine offene Umgebung  $V \Subset U$  von  $p$  nebst einer biholomorphen Einbettung  $b : V \hookrightarrow \mathbb{C}$  finden mit  $b(p) = 0$  und  $f(z) = b(z)^n$  für alle  $z \in V$ . Indem wir eine offene Kreisscheibe  $K \Subset b(V)$  mit Zentrum im Ursprung wählen und mit  $\bar{u} : K \hookrightarrow U$  als die Umkehrfunktion von  $b : b^{-1}(K) \xrightarrow{\sim} K$  erklären, finden wir  $f(\bar{u}(z)) = z^n$  für alle  $z \in K$ . Wählen wir nun noch ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , das eine Bijektion  $(\lambda \cdot) : E \xrightarrow{\sim} K$  induziert, und setzen  $u(z) := \bar{u}(\lambda z)$ , so folgt  $f(u(z)) = \lambda^n z^n$  und mit  $v := (\lambda^n \cdot)$  haben wir unser Ziel erreicht. Hier können wir sogar  $\lambda > 0$  reell und positiv wählen.  $\square$

**Korollar 4.4.5 (Gebietstreue).** *Das Bild einer offenen zusammenhängenden Teilmenge der komplexen Zahlenebene unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion ist stets wieder eine offene zusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlenebene.*

4.4.6. Eine zusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene heißt auch ein **Gebiet** und eine zusammenhängende schleifenfüllende offene Teilmenge ein **Elementargebiet**. In dieser Terminologie kann das Korollar dahingehend formuliert werden, daß das Bild eines Gebietes unter einer nicht konstanten holomorphen Funktion wieder ein Gebiet ist. Daher rührt auch sein Name. Der einzige Grund, aus dem wir den Definitionsbereich zusammenhängend annehmen müssen, liegt darin, daß es sonst Funktionen geben könnte, die auf einer Wegzusammenhangskomponente des Definitionsbereichs konstant sind ohne global konstant zu sein.

*Beweis.* Hier ist ein Film über die Gebietstreue. Nach dem Identitätssatz ist unsere Funktion nie in der Umgebung eines Punktes konstant. Das Korollar folgt damit sofort aus Satz 4.4.4 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen.  $\square$

4.4.7 (**Alternativer Beweis des Maximumsprinzips**). Das Maximumsprinzip aus 4.3.9 folgt auch unmittelbar aus dem Satz über die Gebietstreue 4.4.5, das Bild einer nichtkonstanten holomorphen Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der Zahlenebene ist eben offen und besitzt damit offensichtlich keine Punkte von maximalem Betrag. Dieser Beweis ist zwar schnell und elegant, wirkt auf mich aber global gesehen doch eher wie der „Besuch eines Aussichtspunkts beim Abstieg von einem höheren Gipfel“.

**Korollar 4.4.8 (Holomorphie von Umkehrfunktionen).** *Gegeben eine injektive holomorphe Funktion ist ihr Bild offen und ihre Umkehrabbildung holomorph.*

4.4.9. In anderen Worten ist also jede injektive holomorphe Funktion eine biholomorphe Einbettung. In diesem Film versuche ich, eine Anschauung für eine allgemeine holomorphe Funktion zu geben.

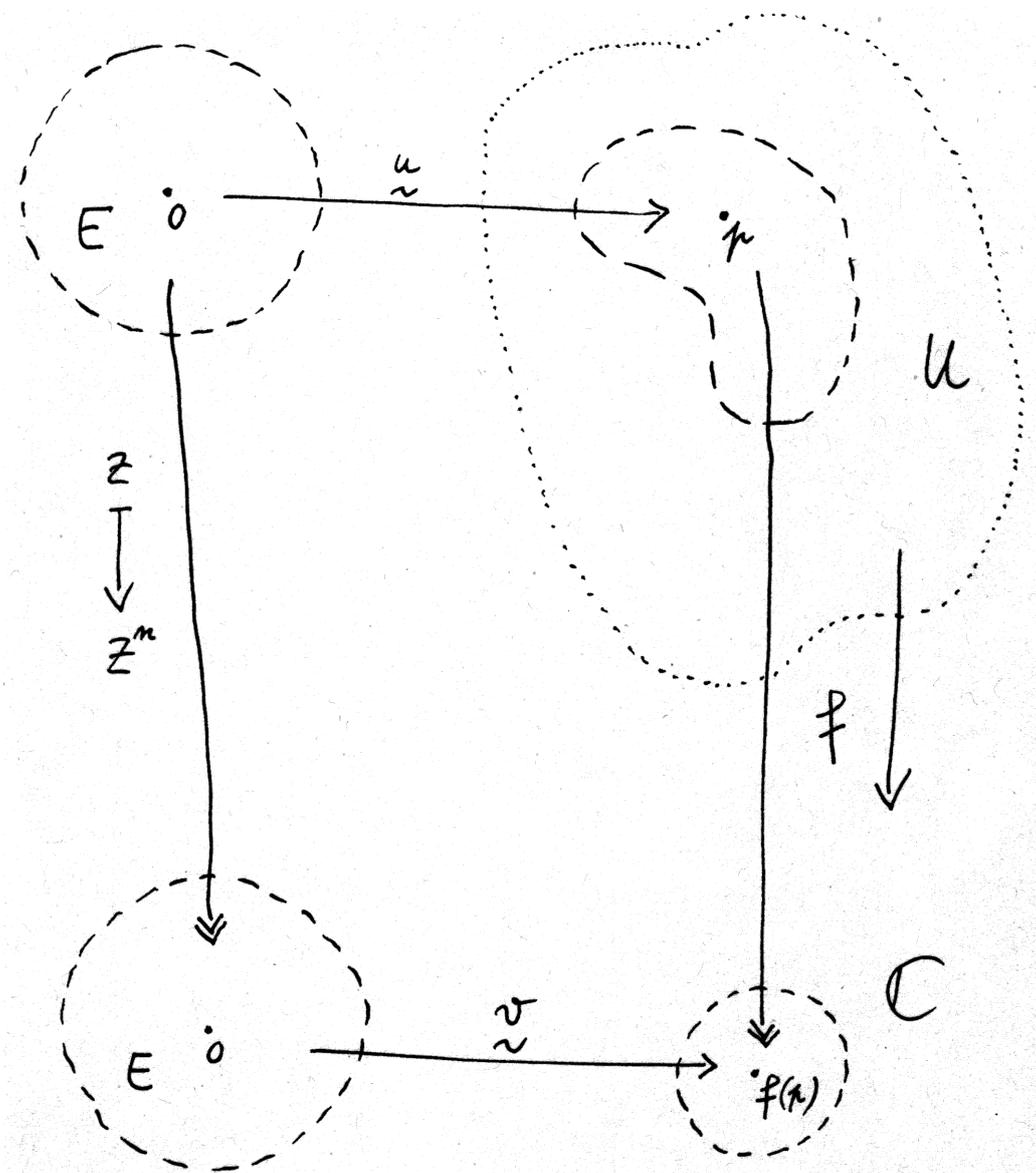


Illustration zum Satz über die lokale Struktur holomorpher Funktionen. Im Bild ist zusätzlich eine Erkenntnis aus dem Beweis angedeutet, nach der man  $u$  und  $v$  sogar so wählen kann, daß  $v$  von der Gestalt  $z \mapsto \mu z + f(p)$  ist mit  $\mu > 0$ . Die durch die Doppelspitzen angedeutete Surjektivität gilt natürlich nur im Fall  $n \neq \infty$  einer Abbildungen  $f$ , die in keiner Umgebung von  $p$  konstant ist.

*Beweis.* Hier ist ein Film über die Holomorphie der Umkehrfunktion. Unsere Funktion hat offenes Bild nach dem Satz über die Gebietstreue 4.4.5 und nirgends verschwindende Ableitung nach dem Satz über die lokale Struktur 4.4.4. Darüber hinaus ist die Ableitung stetig ist nach dem Satz von Goursat 4.1.5. Unter diesen Voraussetzungen aber haben wir die Holomorphie der Umkehrung bereits in 2.2.10 gezeigt.  $\square$

## 5 Singuläre Stellen holomorpher Funktionen

### 5.1 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen (14&16.6)

**Definition 5.1.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Unter einer **holomorphen Funktion mit isolierten Singularitäten auf  $U$**  versteht man eine auf dem Komplement einer Teilmenge  $T \subset U$  ohne Häufungspunkt in  $U$  definierte und dort holomorphe Funktion

$$f : U \setminus T \rightarrow \mathbb{C}$$

Jeder Punkt  $p \in T$  heißt dann eine **isolierte Singularität von  $f$** . Läßt sich  $f$  zu einer holomorphen Funktion auf  $(U \setminus T) \cup \{p\}$  fortsetzen, so heißt  $p$  eine **hebbare Singularität**. Ist eine Singularität  $p \in T$  zwar nicht hebbar, wird aber hebbar nach Multiplikation unserer Funktion  $f$  mit einer geeigneten Potenz  $(z-p)^n$ , so spricht man von einem **Pol** oder ausführlicher von einer **Polstelle** und das kleinstmögliche solche  $n$  heißt die **Polordnung**. Ist die Singularität weder hebbar noch ein Pol, so spricht man von einer **wesentlichen Singularität**. **Hier ist ein Film über die drei Typen von Singularitäten.**

*Beispiel 5.1.2.* Die Funktion  $z \mapsto \exp(z^{-1})$  hat im Ursprung eine wesentliche Singularität.

**Satz 5.1.3 (Riemann'scher Hebbbarkeitssatz).** *Bleibt eine holomorphe Funktion in einer Umgebung einer isolierten Singularität betragsmäßig beschränkt, so ist die Singularität hebbar.*

*Beweis.* Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $p \in U$  ein Punkt und  $f : U \setminus p \rightarrow \mathbb{C}$  unsere holomorphe Funktion. Sicher kann man die Funktion  $z \mapsto (z-p)f(z)$  unter unserer Voraussetzung durch Null stetig auf ganz  $U$  fortsetzen. Dann ist die Fortsetzung durch Null von  $g : z \mapsto (z-p)^2 f(z)$  offensichtlich sogar holomorph auf ganz  $U$  mit  $g(p) = g'(p) = 0$ . Nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 4.3.1 kann  $g$  also geschrieben werden in der Gestalt  $g : z \mapsto (z-p)^2 h(z)$  für  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dies  $h$  ist dann die gesuchte holomorphe Fortsetzung von  $f$ . **Hier ist ein Film zum Riemann'schen Hebbbarkeitssatz.**  $\square$

*Alternative zum Beweis.* Sicher kann man die Funktion  $k : z \mapsto (z-p)f(z)$  unter unserer Voraussetzung durch Null stetig auf ganz  $U$  fortsetzen. Nach Korollar 4.1.11 über Holomorphie durch Stetigkeit ist dann  $k$  bereits holomorph auf ganz  $U$  und nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung 4.3.1 kann  $k$  also geschrieben werden in der Gestalt  $k : z \mapsto (z-p)h(z)$  für  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dies  $h$  ist dann die gesuchte holomorphe Fortsetzung von  $f$ .  $\square$

**5.1.4 (Lokale Struktur von Polstellen).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $p \in U$  ein Punkt. Genau dann hat eine holomorphe Funktion  $f : U \setminus p \rightarrow \mathbb{C}$  mit einer isolierten Singularität bei  $p$  einen Pol  $n$ -ter Ordnung bei  $p$ , wenn  $f$  die Gestalt

$$f(z) = (z - p)^{-n} g(z)$$

hat für  $g$  holomorph auf  $U$  mit  $g(p) \neq 0$ . Um die eine Richtung zu zeigen, gilt es nur zu bemerken, daß die Funktion auf der rechten Seite eine Polstelle der Ordnung  $n$  bei  $p$  hat. Für die andere Implikation bemerken wir, daß es gemäß der Definition ein  $n > 0$  und  $g$  holomorph gibt mit  $f(z) = (z - p)^{-n} g(z)$  außerhalb von  $p$ , und im Fall  $g(p) = 0$  wäre nach 4.3.1 unser  $n$  nicht kleinstmöglich mit  $(z - p)^n f(z)$  holomorph. **Hier ist ein Film über Polstellen.**

**5.1.5.** Wir verwenden von nun an die Notation  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  für die disjunkte Vereinigung der komplexen Zahlenebene mit einem weiteren Element  $\infty$ . Die Herkunft dieser Notation wird in [EL] 1.4.18 erklärt und in [EL] 1.4.19 oder besser [TM] 2.3.2 erklären wir auch die Herkunft der Bezeichnung von  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  als **Riemann'sche Zahlenkugel** und eine natürliche Topologie auf dieser Menge. In [ML] 3.2.13 werden wir sie zusätzlich mit der Struktur einer „Riemann'schen Fläche“ versehen, aber alles zu seiner Zeit.

**Definition 5.1.6.** Eine **meromorphe Funktion** auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene  $U \subseteq \mathbb{C}$  ist eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  mit den Eigenschaften, daß  $f^{-1}(\infty)$  in  $U$  keinen Häufungspunkt hat, daß  $f$  holomorph ist auf  $U \setminus f^{-1}(\infty)$ , und daß für alle  $p \in f^{-1}(\infty)$  die Funktion  $f$  bei  $p$  eine Polstelle hat.

**5.1.7. Hier ist ein Film über meromorphe Funktionen.** In Worten ist also eine meromorphe Funktion eine Funktion, die „holomorph ist bis auf isolierte Polstellen“. Insbesondere darf eine meromorphe Funktion keine wesentlichen Singularitäten haben. Sicher ist jede holomorphe Funktion auch meromorph. Weitere Beispiele liefert das anschließende Lemma. Eine gute Anschauung für meromorphe Funktionen liefert die Interpretation von  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  als Riemann'sche Zahlenkugel. Eine meromorphe Funktion kann in diesem Bild aufgefaßt werden als eine Art „Aufwicklung auf die Kugelschale“ und die Meromorphie ist äquivalent zur Bedingung, daß es um jeden Punkt  $p$  mit  $f(p) = \infty$  eine offene Umgebung gibt, auf der  $z \mapsto f(z)^{-1}$  eine hebbare Singularität bei  $p$  hat. Mehr zu diesem Gesichtspunkt mögen Sie später einmal im Zusammenhang mit den sogenannten „Riemann'schen Flächen“ lernen.

**5.1.8 (Der Körper der meromorphen Funktionen).** Wir definieren die Summe und das Produkt meromorpher Funktionen  $f, g$  auf  $U \subseteq \mathbb{C}$ , indem wir sie erst punktweise addieren beziehungsweise multiplizieren auf dem Komplement  $U \setminus (f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$  der Vereinigung ihrer Polstellenmengen, dann alle hebbaren Singularitäten aus der Vereinigung der Polstellenmengen heben, und schließlich an den nicht hebbaren Singularitäten der Vereinigung der Polstellenmengen

den Wert  $\infty$  vergeben. Die Menge der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  wird so zu einem Körper

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(U)$$

Der Leser mag das zur Übung zeigen. Ich verwende die Bezeichnung  $\mathcal{M}^{\text{an}}$ , um diese „analytischen“ Funktionen zu unterscheiden von ihren algebraischen Analoga, den rationalen Funktionen auf einer irreduziblen algebraischen Varietät  $U$ , die ich in der kommutativen Algebra  $\mathcal{M}(U)$  notiere.

**Satz 5.1.9 (Casorati-Weierstraß).** *Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so ist ihr Bild eine dichte Teilmenge der komplexen Zahlen.*

5.1.10. Natürlich besitzt auch die Einschränkung unserer Funktion auf eine beliebige Umgebung dieser wesentlichen Singularität dort eine wesentliche Singularität, das Bild jeder Umgebung der singulären Stelle ist also dicht in der komplexen Zahlenebene. Der sogenannte „Große Satz von Picard“ sagt sogar stärker, daß jedes dieser Bilder alle komplexen Zahlen bis auf höchstens eine Ausnahme enthalten muß. **Hier ist ein Film zum Satz von Casorati-Weierstraß.**

*Beweis.* Sei  $f : U \setminus p \rightarrow \mathbb{C}$  unsere Funktion und  $p$  die Singularität. Wäre  $f(U \setminus p)$  nicht dicht, so gäbe es eine offene Kreisscheibe  $B(w; \varepsilon)$  außerhalb des Bildes. Dann wäre  $(f(z) - w)^{-1}$  beschränkt und holomorph auf  $U \setminus p$ , ließe sich also nach dem Hebbarkeitssatz 5.1.3 zu einer holomorphen Funktion  $h$  auf  $U$  fortsetzen, und  $h$  hätte keine Nullstelle auf  $U \setminus p$ . Also wäre unsere Funktion  $f(z) = h(z)^{-1} + w$  meromorph auf  $U$ .  $\square$

**Satz 5.1.11 (Laurententwicklung).** *Gegeben ein Kreisring in der komplexen Zahlenebene der Gestalt  $U = \{z \mid r < |z| < R\}$  mit  $0 \leq r < R \leq \infty$  und darauf eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  derart, daß gilt*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$$

*im Sinne der kompakten Konvergenz auf unserem Kreisring der Folge  $P_n$  der Partialsummen über alle  $k$  mit  $|k| \leq n$ . Sogar die positiven und die negativen Terme unserer Reihe bilden in dieser Situation für sich genommen jeweils kompakt konvergente Reihen auf besagtem Kreisring. **Hier ist ein Film zur Laurententwicklung.***

*Beweis.* **Hier ist ein Film zur Herleitung der Laurententwicklung.** Die Koeffizienten sind durch die Funktion eindeutig bestimmt, denn für jeden kreisförmigen

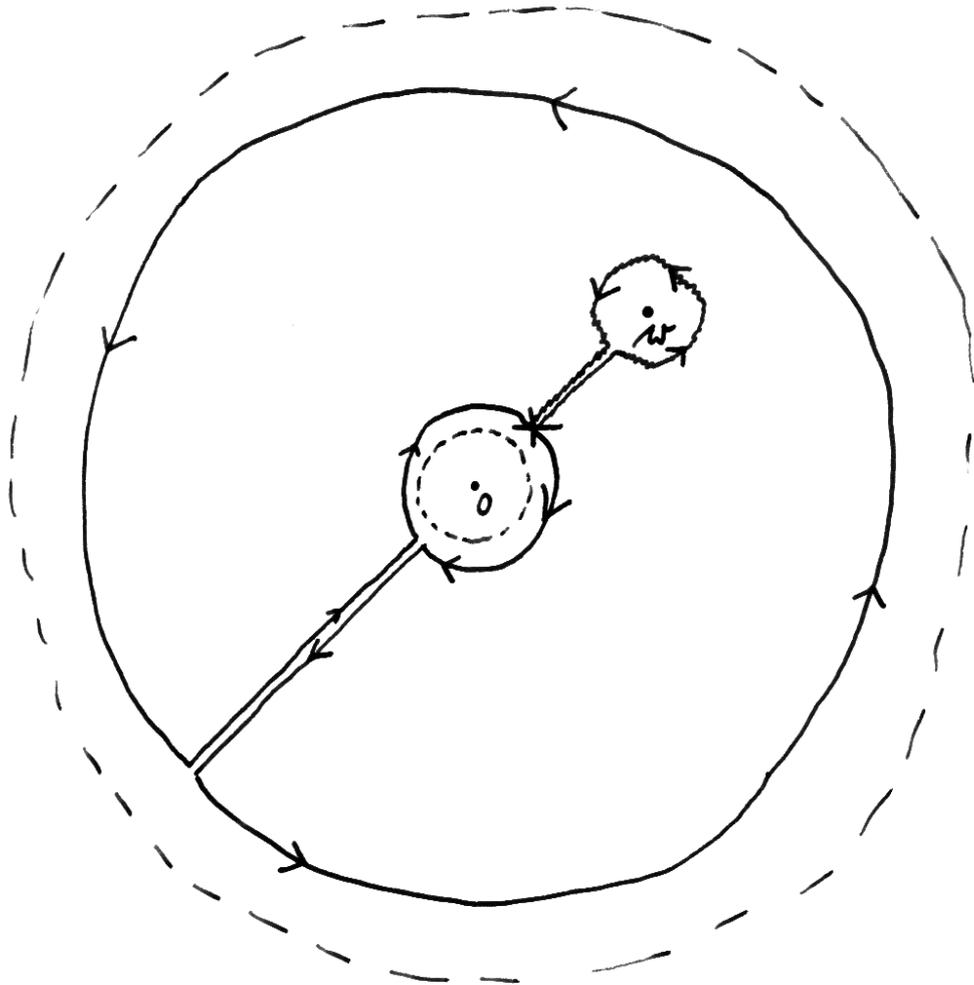


Illustration zum Beweis der Laurententwicklung. Der glatt eingezeichnete Weg ist unser  $\gamma$ .

Weg  $\gamma$ , der in unserem Kreisring einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung läuft, muß gelten

$$\int_{\gamma} f(z) z^n dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{\gamma} z^{k+n} dz = 2\pi i c_{-n-1}$$

Es bleibt also nur die Existenz einer derartigen Entwicklung zu zeigen. Gegeben  $w$  aus unserem Kreisring wählen wir  $a, A$  mit  $r < a < |w| < A < R$  und betrachten einen Integrationsweg  $\gamma$ , der auf demselben Strahl wie  $w$  beginnend erst im Gegenuhrzeigersinn die Kreislinie  $|z| = A$  halb herumläuft, dann auf einem Radius zur Kreislinie  $|z| = a$ , darauf einmal im Uhrzeigersinn herum, wieder auf dem Radius zurück nach aussen, und auf der Kreislinie  $|z| = A$  weiter zum Ausgangspunkt. Dieser Weg ist offensichtlich homotop zu jedem Weg, der vom selben Ausgangspunkt erst ein Stück auf dem Radius in Richtung  $w$  läuft, dann auf einem kleinen Kreisweg im Gegenuhrzeigersinn um  $w$ , um dann wieder auf dem Radius zurück zum Ausgangspunkt. Mit der Integralformel von Cauchy und der Homotopieinvarianz des Wegintegrals folgt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=A} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Die Notation ist an dieser Stelle etwas schlampig, denn selbst wenn sie wüßten, wie man komplexwertige Einsformen über kompakte orientierte 1-Mannigfaltigkeiten wie unsere Kreislinien integriert, fehlt in unserer Notation doch die Orientierung. Ich hoffe aber, daß Sie sich dazudenken, daß mit unserer Notation das komplexe Wegintegral beim einmaligen Durchlaufen unserer Kreislinien im Gegenuhrzeigersinn gemeint ist. Das erste dieser Integrale verwandeln wir wie beim Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 4.2.8 in die Potenzreihe

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{|z|=A} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right) w^k$$

mit Konvergenzradius  $\geq A$ . Das zweite Integral behandeln wir ähnlich, nur schreiben wir nun, da auf dem Integrationsweg ja  $|w| > |z|$  gilt,

$$\frac{-1}{z-w} = \frac{1}{w} \left( \frac{1}{1-(z/w)} \right) = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^k}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz in  $z$  auf dem Kreisring  $|z| = a$  und erhalten

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{|z|=a} f(z) z^k dz \right) w^{-k-1}$$

zunächst im Sinne punktweiser Konvergenz an jeder Stelle  $w$  mit  $a < |w| < A$ . Hier steht nun aber eine Potenzreihe im  $w^{-1}$ , die konvergiert für  $|w^{-1}| < a^{-1}$ . Also ist für  $|w| \geq a + \varepsilon$  bei beliebigem  $\varepsilon > 0$  die Konvergenz gleichmäßig in  $w$ . Das zeigt die Existenz der Entwicklung in eine Laurentreihe.  $\square$

5.1.12. Insbesondere können wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität im Ursprung in eine Laurentreihe entwickeln. Unsere Funktion hat einen Pol im Ursprung genau dann, wenn ihre Laurentreihe mindestens einen und höchstens endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten vor negativen Potenzen von  $z$  stehen hat. Allgemeiner folgt unmittelbar, daß wir jede holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität bei  $p$  in einer Umgebung von  $p$  in eine Reihe der Gestalt

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - p)^k$$

entwickeln können. Diese Darstellung heißt die **Laurententwicklung bei  $p$** . Die Summe  $\sum_{k < 0} c_k (z - p)^k$  heißt dann der **Hauptteil von  $f$  bei  $p$** . Besonders üblich ist dieser Begriff im Zusammenhang mit Polstellen.

5.1.13. Ein auf der ganzen komplexen Zahlenebene definierte holomorphe Funktion nennt man eine **ganze Funktion**. Der sogenannte „Kleine Satz von Picard“ besagt, daß jede nicht konstante ganze Funktion alle Werte mit höchstens einer Ausnahme annimmt. Ein Beispiel für eine ganze Funktion, die nicht alle Werte annimmt, ist die komplexe Exponentialfunktion. Der kleine Picard folgt leicht aus dem großen Picard 5.1.10, da ja nichtkonstante Polynome eh alle Werte annehmen und da jede ganze Funktion, die kein Polynom ist, eine wesentliche Singularität „im Unendlichen“ haben muß, also eine wesentliche Singularität bei Null kriegt beim Vorschalten von  $z \mapsto 1/z$ .

**Satz 5.1.14 (von Mittag-Leffler zu vorgegebenen Hauptteilen).** *Gegeben eine abgeschlossene diskrete Teilmenge  $P \subset \mathbb{C}$  und an jeder Stelle  $p \in P$  eine außerhalb von  $p$  konvergente Laurentreihe  $h_p$  existiert eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus P$ , die an allen Stellen  $p \in P$  denselben Hauptteil hat wie  $h_p$ .*

*Beweis.* Hier ist ein Film zum Satz von Mittag-Leffler. Wir betrachten für  $n \in \mathbb{N}$  die Summen

$$S_n = \sum_{n \leq |p| < n+1} h_p$$

der Hauptteile zu Punkten aus  $P$  aus dem entsprechenden Kreisring oder, im Fall  $n = 0$ , der entsprechenden Kreisscheibe. Sicher ist  $S_n$  holomorph auf der Kreisscheibe  $\{z \mid |z| < n\}$  und durch Entwicklung in eine Potenzreihe um den Ursprung finden wir ein Polynom  $Q_n$  mit  $|S_n(z) - Q_n(z)| \leq 2^{-n}$  für alle  $z$  aus der kleineren Kreisscheibe  $\{z \mid |z| < n - 1\}$ . Es ist dann klar, daß die Reihe

$\sum_{n \in \mathbb{N}} (S_n - Q_n)$  auf  $\mathbb{C} \setminus P$  kompakt konvergiert gegen eine holomorphe Funktion mit den vorgegebenen Hauptteilen an allen Stellen  $p \in P$ .  $\square$

## Übungen

*Übung 5.1.15.* Man folgere den Satz von Liouville 4.1.6, indem man für eine beschränkte holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz die Funktion  $z \mapsto f(1/z)$  über den Punkt  $z = 0$  fortsetzt und dann das Maximumsprinzip 4.3.9 anwendet.

*Ergänzende Übung 5.1.16 (Charakterisierung der rationalen Funktionen).* Jede rationale Funktion  $f \in \mathbb{C}(T)$  im Sinne von [LA1] 5.5.7 liefert eine meromorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , wenn wir ihr an allen Polstellen im Sinne von [LA1] 5.5.7 den Wert  $\infty$  zuweisen. Man zeige, daß das Bild der so erklärten Einbettung  $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{C})$  genau aus allen meromorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  besteht, für die es ein  $N \geq 1$  gibt mit  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)/z^N = 0$ . Hinweis: 5.1.3.

*Übung 5.1.17.* Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so ist sie nicht injektiv. Hinweis: Man kombiniere den Satz von der Gebietstreue 4.4.5 mit Casorati-Weierstraß 5.1.9.

*Übung 5.1.18.* Hat  $T \subset \mathbb{C}$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$ , so hat jede nicht konstante holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus T \rightarrow \mathbb{C}$  dichtes Bild in  $\mathbb{C}$ .

*Ergänzende Übung 5.1.19.* Stärker als in 5.1.17 zeige man: Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so besitzt sie mindestens eine unendliche Faser. Hinweis: Man kombiniere den Satz von der Gebietstreue 4.4.5 mit Casorati-Weierstraß 5.1.9 und dem Baire'schen Kategoriensatz [AN3] 4.2.5 oder besser seinem Korollar [AN3] 4.2.21. Noch stärker zeigen dieselben Methoden, daß die Werte, die unendlich oft angenommen werden, sogar eine dichte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  bilden.

*Übung 5.1.20 (Biholomorphe Automorphismen der Zahlenebene).* Man zeige, daß jede holomorphe injektive Abbildung  $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$  von der Gestalt  $z \mapsto az + b$  ist für  $a \in \mathbb{C}^\times$ ,  $b \in \mathbb{C}$ . Hinweis: Potenzreihenentwicklung und 5.1.17.

*Übung 5.1.21.* Man zeige, daß die meromorphen Funktionen auf jeder zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene einen Körper bilden.

*Übung 5.1.22.* Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $p \in U$  erkläre man die **Bewertung bei  $p$  einer meromorphen Funktion  $f$  auf  $U$**  durch die Vorschrift

$$v_p(f) := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z - p)^{-n} f(z) \text{ ist holomorph bei } p\}$$

In Formeln ist die Bewertung also eine Abbildung  $v_p : \mathcal{M}^{\text{an}}(U) \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ . Unsere Bewertung ist positiv auf Funktionen, die bei  $p$  eine Nullstelle haben, negativ auf Funktionen, die bei  $p$  eine Polstelle haben, und unendlich genau dann,

wenn unsere Funktion in einer Umgebung des Punktes  $p$  identisch verschwindet. Man zeige für alle meromorphen Funktionen  $f, g \in \mathcal{M}^{\text{an}}(U)$  und alle  $p \in U$  die Formeln  $v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$  und  $v_p(f + g) \geq \min(v_p(f), v_p(g))$  sowie im Fall  $v_p(f) \neq v_p(g)$  die Gleichheit  $v_p(f + g) = \min(v_p(f), v_p(g))$ . Ist  $U$  zusammenhängend, so ist  $v_p$  mithin eine diskrete Bewertung im Sinne von [KAG] 8.1.2 auf dem Körper  $\mathcal{M}^{\text{an}}(U)$ .

*Vorschau 5.1.23.* Für jede Primzahl  $p$  erklärt man analog auch eine Bewertung  $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$  durch die Vorschrift, daß gilt  $v_p(0) = \infty$  und  $v_p(p^n a/b) = n$  für  $a, b \in \mathbb{Z}$  teilerfremd zu  $p$ . Diese Bewertung hat analoge Eigenschaften wie unsere Bewertung meromorpher Funktionen aus der vorhergehenden Übung 5.1.22. Die hier aufscheinende formale Analogie zwischen dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen und Körpern von meromorphen Funktionen geht noch sehr viel weiter und hat sich für die Zahlentheorie als äußerst fruchtbar erwiesen.

*Übung 5.1.24.* Bezeichne  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Konjugation und bezeichne derselbe Buchstabe die Fortsetzung dieser Abbildung auf  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  durch  $\infty \mapsto \infty$ . Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  meromorph, so ist auch  $cf : c(U) \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  meromorph und für alle  $q \in U$  gilt  $v_{\bar{q}}(cf) = v_q(f)$ .

*Übung 5.1.25.* Die Entwicklung in eine Laurentreihe liefert für jede zusammenhängende offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{C}$  des Ursprungs in der komplexen Zahlenebene einen Körperhomomorphismus

$$\mathcal{M}^{\text{an}}(U) \rightarrow \mathbb{C}((z))$$

vom Körper der meromorphen Funktionen auf  $U$  in den Ring der formalen Laurentreihen  $\mathbb{C}((z))$  aus [LA1] 5.3.43.

*Übung 5.1.26.* Man gebe eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  an, die  $\mathbb{C}$  surjektiv auf  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  abbildet.

*Übung 5.1.27.* Gegeben eine meromorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit diskreten Nullstellen erklärt man ihre **logarithmische Ableitung** wie in 2.2.20 durch die Vorschrift

$$\frac{d \log f(z)}{dz} := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Man zeige, daß auch im Fall meromorpher Funktionen die logarithmische Ableitung eines Produkts die Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren ist. Gibt es einen Zweig des Logarithmus  $\log : V \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{C}$  mit  $f(U) \subset V$ , so ist wie in 2.2.20 bereits gezeigt die logarithmische Ableitung von  $f$  für jeden solchen Zweig die Ableitung der Verknüpfung  $\log \circ f$ .

## 5.2 Umlaufzahl und Residuensatz (21.6)

**Satz 5.2.1.** *Jeder geschlossene Weg in der punktierten Ebene  $\mathbb{C}^\times$  ist für genau eine ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  frei homotop zu dem geschlossenen Weg, der gegeben wird durch die Vorschrift  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times, t \mapsto e^{2\pi i n t}$ . Diese ganze Zahl  $n$  heißt die **Umlaufzahl** oder auch **Windungszahl** des geschlossenen Weges  $\gamma$  um den Ursprung.*

5.2.2. **Hier ist ein Film zur Definition der Umlaufzahl.** Analog definiert man die Windungszahl eines geschlossenen Weges  $\gamma$  um einen beliebigen Punkt  $w$  der komplexen Zahlenebene, der nicht auf dem Bild des Weges liegt. Wir notieren sie

$$\text{Um}(\gamma, w)$$

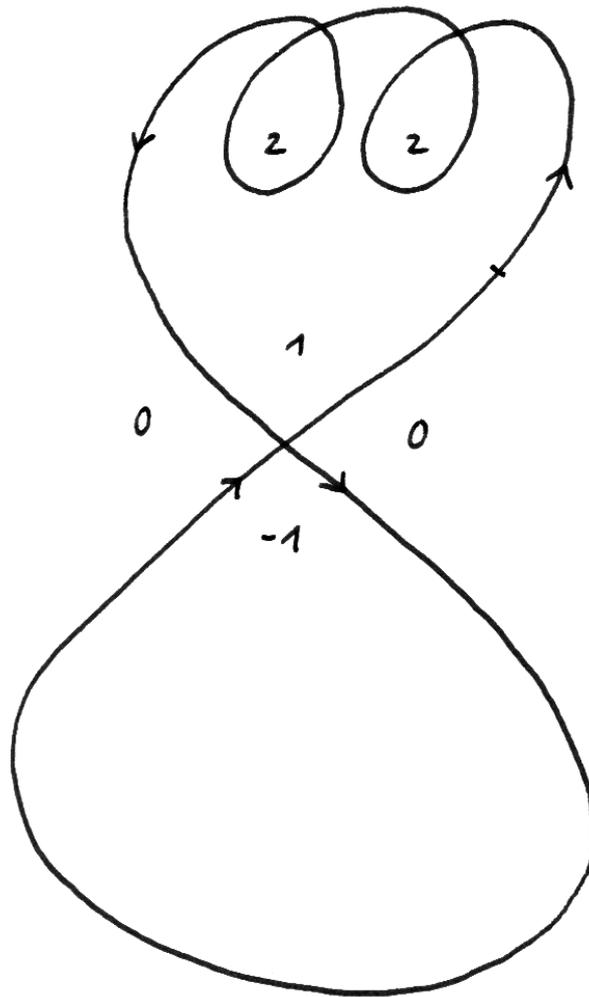
5.2.3. Anschaulich beschreibt für  $n \geq 1$  die Abbildung  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times, t \mapsto e^{2\pi i n t}$  einen Weg, der vom Punkt 1 ausgehend mit konstanter absoluter Geschwindigkeit  $n$ -mal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis umläuft; für  $n \leq -1$  ist es der Weg, der  $(-n)$ -mal im Uhrzeigersinn umläuft; für  $n = 0$  haben wir den konstanten Weg vor uns, der schlicht auf dem Punkt 1 sitzenbleibt.

*Vorschau 5.2.4.* Noch natürlicher wäre es, statt der Umlaufzahl gleich das Element  $2\pi i \text{Um}(\gamma, w)$  von  $\ker(\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times) = 2\pi i \mathbb{Z}$  zu betrachten: Dieses Element ist nämlich auch für einen Körper von „vergeßlichen komplexen Zahlen“ im Sinne von [LA1] 2.7.7 wohldefiniert. So weit will ich aber hier nicht gehen. Man notiert die Gruppe  $\ker(\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times)$  auch  $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(1) := \ker(\exp)$  und nennt sie den **Tate-Twist von  $\mathbb{Z}$** .

*Beweis von Satz 5.2.1.* **Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes über die Umlaufzahl.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  unser geschlossener Weg. Wir zeigen zunächst, daß es einen Weg  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$ , und das sogar zu jedem vorgegebenen Anfangspunkt  $\tilde{\gamma}(a)$  mit  $\exp(\tilde{\gamma}(a)) = \gamma(a)$ . Falls  $\gamma$  ganz in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  verläuft, ist das klar: Wir nehmen einfach

$$\tilde{\gamma}(t) = \log(\gamma(t)) + 2\pi i k$$

mit  $\log$  der Umkehrung von  $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi i, \pi i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  so gewählt, daß unser „hochgehobener Weg“  $\tilde{\gamma}$  beim vorgegebenen Anfangspunkt beginnt. Falls  $\gamma$  ganz in einer andersartig geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} w$  mit  $w \in \mathbb{C}^\times$  verläuft, finden wir unsere Hochhebung analog. Im allgemeinen wählen wir  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$  so, daß  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  jeweils ganz in einer geschlitzten Ebene enthalten ist, wählen induktiv Hochhebungen  $\tilde{\gamma}_i$  der  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  so, daß  $\tilde{\gamma}_i$  dort beginnt, wo  $\tilde{\gamma}_{i-1}$  aufhört, und setzen diese stückweisen Hochhebungen dann zum gesuchten Weg  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  zusammen. Da das Urbild der Eins unter der



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

komplexen Exponentialfunktion nach [AN1] 4.5.22 gerade  $2\pi i\mathbb{Z}$  ist, haben wir natürlich  $\tilde{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}(a) + 2\pi in$  für  $n \in \mathbb{Z}$ . Nach 3.2.5 oder auch kurzem Nachdenken sind je zwei Wege in  $\mathbb{C}$  mit demselben Anfangs- und Endpunkt homotop, folglich muß  $\tilde{\gamma}$  sein homotop zum Weg  $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \tilde{\gamma}(a) + int$ . Dann ist aber nach 3.2.6 auch  $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$  homotop zu  $\exp \circ \beta$ . Dieser Weg ist aber offensichtlich in  $\mathbb{C}^\times$  frei homotop zum Weg  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times, t \mapsto e^{2\pi int}$  und das zeigt im Satz die Existenz. Mit der Homotopieinvarianz des Wegintegrals 3.3.13 erhalten wir für die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges  $\gamma$  um einen beliebigen Punkt  $w$  außerhalb des Bildes von  $\gamma$  die Integraldarstellung

$$n = \text{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz$$

Sie zeigt sofort die Eindeutigkeit der Umlaufzahl. □

*Ergänzung 5.2.5.* Wenden wir unsere Erkenntnis 3.1.19, nach der das Wegintegral mit Verwandtschaft verträglich ist, auf die Situation vom Ende des vorhergehenden Beweises an, so erhalten wir zumindest im Fall eines Integrationsweges  $\gamma$  die Identität

$$\int_{\tilde{\gamma}} dw = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

So ergibt sich ein weiteres Mal  $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) = 2\pi in$  für  $n$  die Umlaufzahl von  $\gamma$  um den Ursprung.

*Vorschau 5.2.6.* Der oben gegebene Beweis für die Eindeutigkeit der Umlaufzahl mithilfe eines Integrals ist zwar im Rahmen der Funktionentheorie bequem, scheint mir für sich allein betrachtet jedoch unangemessen verwickelt. Ich ziehe den Beweis im Rahmen der Topologie vor, der in [TF] 1.7.7 besprochen wird.

*Vorschau 5.2.7.* Der Begriff der Umlaufzahl ermöglicht auch eine noch allgemeinere Fassung des Cauchy'schen Integralsatzes, die sogenannte **Umlaufzahlversion des Integralsatzes**: Ist im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion ein geschlossener Weg gegeben, der keinen Punkt außerhalb des Definitionsbereichs umläuft, so verschwindet das Wegintegral unserer Funktion längs dieses Weges. Wir diskutieren seinen Beweis im Rahmen der singulären Homologietheorie in [TS] 1.6.5.

**Definition 5.2.8.** Der Koeffizient von  $(z - p)^{-1}$  in der Laurententwicklung nach 5.1.12 einer holomorphen Funktion  $f(z)$  mit isolierter Singularität bei  $w$  heißt das **Residuum**

$$\text{Res}(f, p) = \text{Res}_p f$$

von  $f$  bei  $p$ . Ist die Funktion  $f$  durch einen Ausdruck in einer komplexen Variablen gegeben, etwa als Ausdruck in der Variablen  $z$ , so verwenden wir für das Residuum von  $f$  bei  $p$  in Bezug auf  $z$  auch die Notation  $\text{Res}_{z=p} f(z)$ .

5.2.9. Nach dem Satz über die Laurententwicklung 5.1.11 oder genauer seinem Beweis haben wir also

$$\operatorname{Res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=r} f(z) dz$$

für jeden positiven Radius  $r > 0$  derart, daß unsere Funktion  $f$  mit Ausnahme der singulären Stelle  $p$  auf einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\{z \mid |z-p| \leq r\}$  definiert ist und dort keine weiteren Singularitäten hat. Das Integral verstehen wir wie bei unserer Diskussion der Laurentreihen als das komplexe Wegintegral beim einmaligen Durchlaufen der fraglichen Kreislinie im Gegenuhreigersinn. Die Bezeichnung als „Residuum“, lateinisierend für „Überbleibsel“, hat wohl damit zu tun, daß diese Zahl den einzigen Term der Laurentreihe beschreibt, der in diesem Zusammenhang beim Integrieren übrigbleibt.

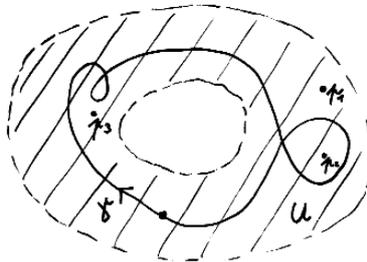
5.2.10. Hat unsere Funktion  $f$  nur einen Pol erster Ordnung bei  $p$ , so läßt sich  $g(z) = (z-p)f(z)$  stetig über  $z=p$  fortsetzen und wir haben offensichtlich  $g(p) = \operatorname{Res}(f, p)$ . Läßt sich allgemeiner für irgendein  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $g(z) = (z-p)^{n+1}f(z)$  stetig über  $z=p$  fortsetzen, so ist diese Fortsetzung holomorph und ihre  $n$ -te Ableitung bei  $p$  liefert das Residuum von  $f$  bei  $p$  mittels der Identität  $g^{(n)}(p) = n! \operatorname{Res}(f, p)$ , die man leicht mithilfe der Laurententwicklung von  $f$  um  $p$  einsehen kann.

**Satz 5.2.11 (Residuensatz).** *Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $P \subset U$  endlich,  $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $U \setminus P$ , der in  $U$  zusammenziehbar ist, so gilt*

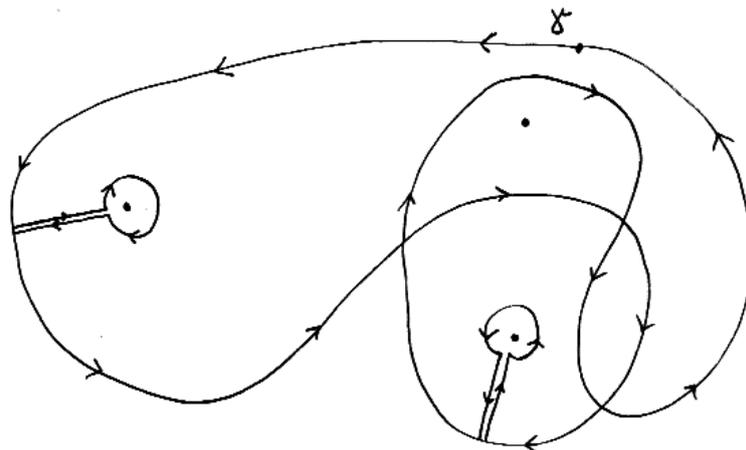
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in P} \operatorname{Um}(\gamma, p) \operatorname{Res}(f, p)$$

5.2.12. **Hier ist ein Film zum Residuensatz.** Integrieren wir also in Worten eine holomorphe Funktion mit endlich vielen isolierten Singularitäten längs eines geschlossenen Weges, der in ihrem Definitionsbereich vereinigt mit den singulären Stellen zusammenziehbar ist, so ist das Wegintegral bis auf den Faktor  $2\pi i$  die Summe der Residuen, jeweils gewichtet mit der Umlaufzahl unseres Weges um die entsprechende singuläre Stelle. Ist unser geschlossener Weg sogar bereits im Komplement  $U \setminus P$  der singulären Stellen zusammenziehbar, so verschwindet das Wegintegral nach den Cauchy'schen Integralsatz, und der Residuensatz liefert auch Null für den Wert der Integrals, da dann bereits alle Umlaufzahlen um Punkte aus  $P$  Null sind. In [TS] 1.6.6 diskutieren wir auch noch eine etwas allgemeinere Version für „in  $U$  nullhomologe Wege“.

*Beweis.* **Hier ist ein Film zum Beweis des Residuensatzes.** Entwickeln wir  $f$  um



Ein geschlossener Weg in einer ringförmigen offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$ , der in  $U$  nicht zusammenziehbar ist. Mit  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  dürfen wir also in diesem Fall den Residuensatz nicht anwenden: Das geht nur, wenn sich unsere Funktion „holomorph auf das fehlende innere Ei fortsetzen läßt“.



Anschaulicher Beweis des Residuensatzes in einem Spezialfall. Ergänzen wir unseren Weg durch die zwei kleinen Extrawege, die von unserem großen Weg auf kleinen Stichwegen zu den fraglichen Punkten hinlaufen, einmal im Kreis darum herum und, auf demselben Stichweg wieder zurück auf unseren großen Weg, so ändert sich das Wegintegral nur um die Integrale der beiden kleinen Kreiswege. Diese sind jedoch mit Hilfe der Laurententwicklung um die besagten singulären Stellen leicht zu berechnen. Der so ergänzte Weg ist dann zusammenziehbar in  $U \setminus P$ , und deshalb verschwindet das Wegintegral über diesen ergänzten Weg nach Cauchy. Um diese meines Erachtens wunderbar anschauliche Argumentation zu einem Beweis des Residuensatzes auszubauen, benötigen wir jedoch die Umlaufzahlversion des Cauchy'schen Integralsatzes 5.2.7, die wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht bewiesen haben.

ein  $p \in P$  in seine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - p)^n$$

und fassen darin alle Terme für  $n \leq -2$  zusammen zur auf der punktierten Ebene kompakt konvergenten Reihe  $h_p(z) := \sum_{n \leq -2} a_n (z - p)^n$ , so ist  $h_p$  eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus p$  und besitzt sogar eine Stammfunktion, gegeben durch die Reihe  $\sum_{n \leq -2} a_n (z - p)^{n+1} / (n + 1)$ . Die Funktion

$$f(z) - \sum_{p \in P} h_p(z) - \sum_{p \in P} \frac{\text{Res}(f, p)}{z - p}$$

hat nun offensichtlich hebbare Singularitäten bei allen  $p \in P$ , mithin verschwindet nach dem Integralsatz von Cauchy 3.3.1 ihr Wegintegral über unseren in  $U$  zusammenziehbaren Weg  $\gamma$ . Da die  $h_p$  Stammfunktionen haben, verschwindet auch ihr Wegintegral über den geschlossenen Weg  $\gamma$ . Mit unserer funktionentheoretischen Beschreibung der Umlaufzahl aus dem Beweis von 5.2.1 ergibt sich damit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{p \in P} \text{Res}(f, p) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p} = 2\pi i \sum_{p \in P} \text{Res}(f, p) \text{Um}(\gamma, p) \quad \square$$

### 5.2.1 Übungen

*Übung 5.2.13.* Man erkläre, inwiefern Cauchy's Integralformel 4.1.1 ein Spezialfall des Residuensatzes ist.

## 5.3 Anwendungen des Residuensatzes (23.6)

**Satz 5.3.1 (Zählen von Null- und Polstellen).** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f \in \mathcal{M}^{\text{an}}(U)$  eine meromorphe Funktion auf  $U$  und  $\gamma$  ein in  $U$  zusammenziehbarer Weg, der keine Nullstelle und keine Polstelle von  $f$  trifft. So gilt

$$\text{Um}(f \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in U} \text{Um}(\gamma, p) v_p(f)$$

*Beweis.* Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes über das Zählen von Null- und Polstellen. Wir zeigen feiner die Gleichungskette

$$\text{Um}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{p \in U} \text{Um}(\gamma, p) v_p(f)$$

Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus dem Residuensatz. Die Zweite folgt aus der Erkenntnis 3.1.19, daß das Wegintegral Verwandtschaft respektiert. Für die Dritte schreiben wir  $f(w) = (w - p)^n g(w)$  mit  $g(w)$  holomorph ohne Nullstelle bei  $p$ . Damit erhalten wir

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{n(w - p)^{n-1}g(w) + (w - p)^n g'(w)}{(w - p)^n g(w)} = \frac{n}{(w - p)} + \frac{g'(w)}{g(w)}$$

und das Residuum ergibt sich zu  $\text{Res}(f'/f, p) = v_p(f) = n$ . Der Satz folgt damit aus dem Residuensatz.  $\square$

**Ergänzung 5.3.2 (Vereinfachung durch den Kalkül von Einsformen).** Diejenigen unter Ihnen, die sich mit Einsformen bereits wohlfühlen, mögen alternativ die komplexwertige Einsform  $d\log f := (f'/f) dz$  integrieren und sich die linke Seite lokal durch irgendeinen Zweig des Logarithmus definiert denken, auf den es dann nach dem Ableiten gar nicht mehr ankommt. Damit folgt dann sofort die Formel  $d\log(fh) = d\log f + d\log h$  und bei  $f(z) = (z - p)^n g(z)$  ergibt sich speziell  $d\log f = n d\log(z - p) + d\log g$ .

**5.3.3 (Anschauung für den Satz zum Zählen von Null- und Polstellen).** Besonders anschaulich scheint mir der Fall  $f(z) = z^n$  mit  $\gamma$  einem Kreisweg um den Ursprung. **Hier ist ein Film zur anschaulichen Bedeutung des Satzes über das Zählen von Null- und Polstellen.** Im Fall einer allgemeinen holomorphen Funktion  $f$  kann man sich überlegen, daß unser Weg  $\gamma$  homotop sein muß zu einer „Verkettung“ von Wegen, die erst von einem festen Punkt zu einer ihrer Nullstellen laufen, dann auf einem kleinen Kreisweg um diese herum, und danach auf demselben Weg wieder zurück. Für Wege dieser Art und dann auch für ihre Verkettungen scheint mir die Aussage anschaulich klar, wenn man den Satz 4.4.4 über die lokale Struktur holomorpher Funktionen beachtet. Die Erweiterung dieser Anschauung auf den meromorphen Fall bleibe dem Leser überlassen.

**Vorschau 5.3.4 (Topologische Variante zum Zählen von Nullstellen).** Der Satz bleibt richtig, wenn wir eine beliebige stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten, bei der die Faser  $f^{-1}(0)$  über dem Ursprung endlich ist. Wir müssen dann nur  $v_p(f)$  interpretieren als die Umlaufzahl  $\text{Um}(f \circ \beta_p, 0)$  um den Ursprung für  $\beta_p$  einen „sehr kleinen“ Kreisweg um  $p$  im Gegenuhrzeigersinn und müssen zeigen, daß das wohldefiniert ist. Diese Summe geht dann über alle Punkte der Faser  $f^{-1}(0)$  über dem Ursprung, und für Punkte dieser Faser ist das so erklärte  $v_p(f)$  ein Spezialfall eines Konzepts, das wir in [TS] 4.3.16 in größerer Allgemeinheit als „lokalen Abbildungsgrad“ einführen. Unsere Formel folgt dann aus Argumenten im Beweis von [TS] 4.3.18. Die Erweiterung dieser Anschauung auf den Fall einer stetigen Abbildung in die Sphäre  $f : U \rightarrow S^2$  bleibe dem Leser überlassen.

**5.3.5 (Im Satz ist die Summe auf der rechten Seite sinnvoll).** Wir erinnern daran, daß die Bewertung  $v_p(f)$  von  $f$  bei  $p$ , wenn  $f$  nicht in einer Umgebung von  $p$  identisch verschwindet, in 5.1.22 definiert wurde als die Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $f(z) = (z - p)^n g(z)$  für  $g$  holomorph um  $p$  ohne Nullstelle bei  $p$ . Wir haben also  $v_p(f) > 0$  bei Nullstellen,  $v_p(f) < 0$  bei Polstellen, und  $v_p(f) = 0$  sonst. Für einen zusammenziehbaren Weg läßt sich nun per definitionem die zugehörige Abbildung vom Einheitskreis stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortsetzen. Außerhalb des kompakten Bildes dieser Fortsetzung kann er dann keinen Punkt umlaufen, und innerhalb dieses Bildes können nur endlich viele Nullstellen und Polstellen liegen. Damit hat die Summe auf der rechten Seite unserer Formel auch wirklich nur endlich viele von Null verschiedene Terme. Sollte  $f$  auf einer Komponente von  $U$  identisch verschwinden, so kann der Weg keinen Punkt dieser Komponente umlaufen und wir interpretieren die Beiträge  $0 \cdot \infty$  zu unserer Summe durch Punkte aus einer derartigen Komponente als Null.

**Korollar 5.3.6 (Satz von Rouché).** *Im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion  $f$  sei eine abgeschlossene Kreisscheibe  $B$  gegeben. Sei weiter  $g$  holomorph mit demselben Definitionsbereich und  $|f(z)| > |g(z)| \forall z \in \partial B$ . So haben  $f$  und  $f + g$  mit Vielfachheiten gezählt gleichviele Nullstellen in  $B$ .*

*Ergänzung 5.3.7.* Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir  $f$  und  $g$  meromorph ohne Pole auf  $\partial B$  nehmen und „Polstellen als Nullstellen negativer Vielfachheit“ werten. Dasselbe gilt mit demselben Beweis auch, wenn wir statt dem Rand einer Kreisscheibe einen beliebigen im Definitionsbereich unserer beiden meromorphen Funktionen zusammenziehbaren Weg nehmen und alle Polstellen und Nullstellen zusätzlich mit der Umlaufzahl gewichten.

*Beweis.* Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes von Rouché. Nach Annahme können auf dem Rand  $\partial B$  unserer Kreisscheibe weder  $f$  noch  $f + g$  Nullstellen haben. Mit unserem Satz 5.3.1 über das Zählen von Null- und Polstellen und  $\gamma$  einem auf  $\partial B$  einmal im Gegenuhrzeigersinn umlaufenden Weg finden wir

$$\text{Um}(f \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in B} v_p(f) \quad \text{und} \quad \text{Um}((f + g) \circ \gamma, 0) = \sum_{p \in B} v_p(f + g).$$

Wegen  $|f(z)| > |g(z)| \forall z \in \partial B$  sind aber  $f(z) + tg(z)$  für  $t \in [0, 1]$  und  $z \in \partial B$  nie Null und diese Formel liefert eine freie Homotopie unserer beiden geschlossenen Wege  $f \circ \gamma$  und  $(f + g) \circ \gamma$  in  $\mathbb{C}^\times$ . Folglich haben beide Wege dieselbe Umlaufzahl um den Ursprung.  $\square$

**Satz 5.3.8 (Weierstraß).** *Gegeben eine abgeschlossene diskrete Teilmenge  $P \subset \mathbb{C}$  und eine Abbildung  $n : P \rightarrow \mathbb{N}$  gibt es eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die an jeder Stelle  $p \in P$  eine Nullstelle der Ordnung  $n(p)$  hat und außerhalb von  $P$  keine Nullstellen.*

**Beweis.** Hier ist ein Film zum Beweis der Existenz holomorpher Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen. Existiert solch eine Funktion  $f$ , so löst ihre logarithmische Ableitung  $f'/f$  offensichtlich die Hauptteilverteilung  $n(p)/(z-p)$  für  $p \in P$ , die Differenz  $(f'/f) - (n(p)/(z-p))$  hat also eine hebbare Singularität bei  $p$ . Ist umgekehrt  $g$  eine Lösung dieser Hauptteilverteilung nach 5.1.14, so gilt für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus P$  nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} g(z) dz \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

Wählen wir einen Ausgangspunkt  $q \in \mathbb{C} \setminus P$  fest und erklären für  $w \in \mathbb{C} \setminus P$  beliebig  $f(w) := \exp \int_{\gamma} g(z) dz$  für irgendeinen Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus P$  von  $q$  nach  $w$ , so hängt  $f(w)$  nicht von der Wahl des Weges ab. Halten wir einen Weg zu einer Stelle  $w_0$  fest und betrachten eine offene Kreisscheibe  $D$  um  $w_0$  in  $\mathbb{C} \setminus P$  und betrachten nur solche Wege nach  $w \in D$ , die erst unser fester Weg nach  $w_0$  sind und danach ganz in  $D$  verlaufen, so ist  $G(w) := \int_{\gamma} g(z) dz$  eine Stammfunktion von  $g$  auf  $D$  und  $f(w) = \exp \circ G$  holomorph auf  $D$  mit  $g$  als logarithmischer Ableitung. Also ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{C} \setminus P$  holomorph ohne Nullstellen mit logarithmischer Ableitung  $f'/f = g$ . Genauer gibt es um jeden Punkt  $p \in P$  eine offene Kreisscheibe  $U$ , die keinen anderen Punkt von  $P$  enthält und in der folglich gilt  $g(z) = h_p(z) + n(p)/(z-p)$  für  $h_p : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Ist  $H_p$  eine Stammfunktion von  $h_p$  auf  $U$ , so finden wir durch explizite Rechnung  $f(w) = c \exp(H_p(w))(w-p)^{n(p)}$  für festes  $c \in \mathbb{C}^{\times}$  und alle  $w \in U \setminus p$ .  $\square$

**Beispiel 5.3.9 (Integrale rationaler Funktionen).** Hier ist ein Film zur Anwendung des Residuensatzes auf rationale Funktionen. Gegeben eine rationale Funktion  $f$  ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } \zeta > 0} \text{Res}(f, \zeta)$$

Nach dem Residuensatz ergibt sich nämlich die rechte Seite, wenn wir für  $r$  größer als der Betrag aller Polstellen das Wegintegral von  $-r$  bis  $r$  entlang der reellen Achse und dann auf einen großen Halbkreis durch die obere Halbebene zurück ausrechnen. Lassen wir hier  $r$  gegen unendlich streben, so strebt die Länge dieses Halbkreises linear gegen unendlich, das Betragsmaximum der Funktion darauf strebt jedoch quadratisch gegen Null. Folglich streben die Wegintegrale über immer größere Halbkreise gegen Null und die Formel folgt. Diese Anwendung war allerdings die Mühe des Residuensatzes nicht wert. Wir hätten auch einfach wie in 2.3.12 erklärt die Funktion  $f$  in einem Partialbruch entwickeln und eine Stammfunktion explizit angeben und zwischen  $-\infty$  und  $\infty$  auswerten können.

Als Übung mögen Sie zeigen, daß dabei dasselbe herausgekommen wäre. Als Beispiel bestimmen wir nochmal das Integral über die ganze reelle Achse von  $f(x) = 1/(1+x^2) = 1/((x+i)(x-i))$ . Diese Funktion hat einfache Pole bei  $\pm i$ . Ihr Residuum bei  $i$  können wir bestimmen, indem wir unsere Funktion mit  $(x-i)$  multiplizieren und dann bei  $x = i$  auswerten. So folgt  $\text{Res}(f, i) = 1/(2i)$  und wir erhalten  $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2) dx = \pi$  in Übereinstimmung mit [AN1] 5.4.14.

**5.3.10 (Summe aller Residuen rationaler Funktionen).** Dasselbe Argument liefert für jede rationale Funktion ohne Pole auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, auch die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } \zeta < 0} \text{Res}(f, \zeta)$$

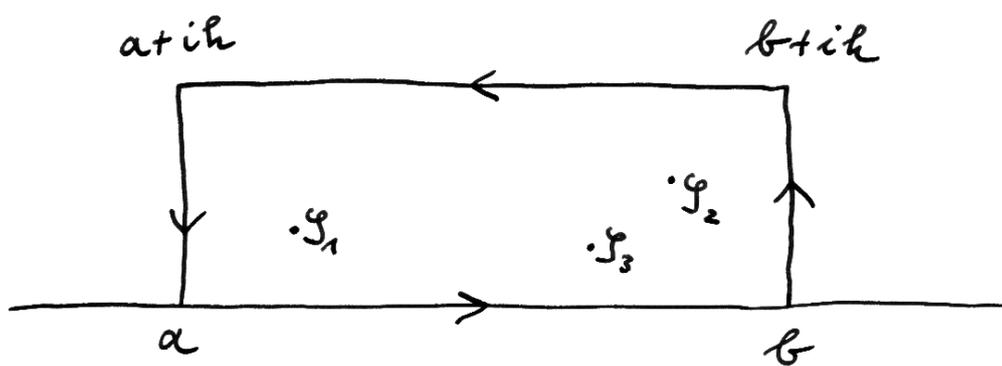
Der geneigte Leser mag sich anhand der Partialbruchzerlegung auch auf algebraischem Wege davon überzeugen, daß sich diese beiden Formeln nicht widersprechen, sondern vielmehr auch über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper die Summe der analog definierten Residuen einer rationalen Funktion Null sein muß, wenn der Grad des Nenners um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers. Von einem höheren Standpunkt betrachtet ist das eine Konsequenz der Erkenntnis, daß für jede rationale Einsform auf der projektiven Gerade die Summe ihrer Residuen verschwindet.

**Beispiel 5.3.11 (Integrale rationaler Funktionen mit Exponentialterm).** Gegeben eine rationale Funktion  $f$  ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners größer ist als der Grad des Zählers, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } \zeta > 0} \text{Res}_{z=\zeta} f(z) e^{iz}$$

in dem Sinne, daß sowohl  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r$  als auch  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0$  existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat. Im Fall, daß der Grad des Nenners sogar um mindestens zwei größer ist als der Grad des Zählers, kann das in 5.3.9 angewandte Argument unverändert übernommen werden. Im allgemeinen betrachten wir ähnlich wie in 3.3.15 Wege einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks mit Ecken  $a, b, a + ih, b + ih$  für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $h > 0$ . Ist unser Rechteck so groß, daß es alle Polstellen von  $f$  in der oberen Halbebene umfaßt, so ist das Wegintegral um seinen Rand nach dem Residuensatz genau die rechte Seite der behaupteten Formel. Die Integrale über die drei Kanten  $\rho, \lambda, \omega$  für „rechts, links und oben“ außerhalb der reellen Achse können wir jedoch abschätzen durch

$$\left| \int_{\rho} f(z) e^{iz} dz \right| \leq \sup_{z \in \rho} |f(z)| \int_0^h e^{-t} dt \leq \sup_{z \in \rho} |f(z)|$$



Der Integrationsweg bei der Berechnung von  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$

und analog auf der linken Kante, auf der oberen Kante dahingegen durch

$$\left| \int_{\omega} f(z) e^{iz} dz \right| \leq (b-a) e^{-h} \sup_{z \in \omega} |f(z)|$$

Halten wir  $a$  fest und nehmen  $b = h$  und lassen  $h$  nach Unendlich streben, so ergibt sich die Existenz des Grenzwerts  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r$ . Die Existenz des anderen Grenzwerts zeigt man analog, und die behauptete Formel folgt, wenn wir  $h = b = -a$  nehmen und das gegen Unendlich streben lassen.

**Ergänzung 5.3.12 (Fouriertransformierte rationaler Funktionen).** Eine rationale Funktion  $f$  ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners um mindestens Zwei größer ist als der Grad des Zählers, ist quadratintegrierbar und ihre stochastisch standardisierte Fouriertransformierte wird nach [AN3] 3.1.3 gegeben durch die Vorschrift

$$f^\wedge(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx$$

Unsere Formel 5.3.9 berechnet also  $f^\wedge(0)$  und 5.3.11 berechnet  $f^\wedge(1)$ . Für allgemeines  $y \neq 0$  liefert uns die Substitution  $u = xy$  alias  $x = u/y$  und  $dx = du/y$  die Identität

$$f^\wedge(y) := \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(u/y) e^{iu} du$$

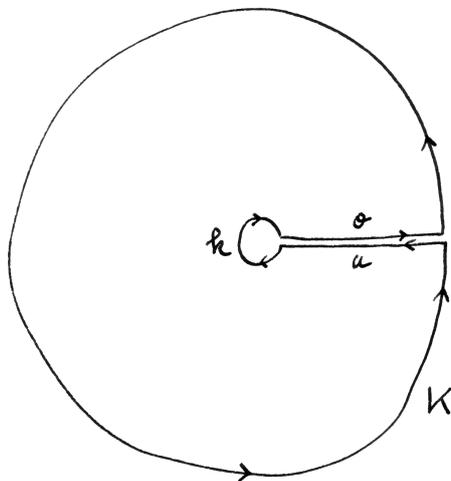
und das können wir wieder mit unserer Formel 5.3.11 ausrechnen und, wenn die Partialbruchzerlegung von  $f$  bekannt ist, sogar ganz explizit bestimmen. Ist der Grad des Nenners nur um Eins größer als der Grad des Zählers, so ist  $f$  immer noch quadratintegrierbar und wir können auf diesem Wege seine Fouriertransformierte im Sinne von [AN3] 3.3.7 finden. Beispielhaft nehmen wir  $f(x) = 1/(x - \alpha)$  für  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und finden bei Beachtung der Tatsache, daß bei unserer Substitution im Fall  $y < 0$  auch die Integrationsgrenzen zu vertauschen sind, unschwer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy} dx}{x - \alpha} = \frac{y}{|y|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu} du}{u - y\alpha} = \begin{cases} 2\pi i (y/|y|) e^{iy\alpha} & \text{Im}(y\alpha) > 0; \\ 0 & \text{Im}(y\alpha) < 0. \end{cases}$$

Gehen wir noch zur physikalisch standardisierten Fouriertransformierten über und substituieren dazu  $y$  durch  $-2\pi y$ , so finden wir für  $f(x) = 1/(x - \alpha)$  mit Hilfe von [AN3] 3.3.14 als Fouriertransformierte

$$f^\wedge(y) = \begin{cases} -2\pi i (y/|y|) e^{-2\pi i y \alpha} & \text{Im}(y\alpha) < 0; \\ 0 & \text{Im}(y\alpha) > 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Inversionsformel [AN3] 3.3.5 und Übung [AN3] 3.1.24 kann man das auch direkt einsehen.



Integrationsweg zu Beispiel 5.3.13 des Integrals  $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$ , von einem Punkt weit außen dicht über der reellen Achse auf einem großen Kreis bis dicht unter die reelle Achse, dann längs der reellen Achse ganz nah zum Ursprung, einmal eng um den Ursprung herum, und dann wieder längs der reellen Achse weit nach außen.

**Beispiel 5.3.13 (Integrale rationaler Funktionen mit allgemeiner Potenz).** Sei  $0 < \alpha < 1$  und sei  $f$  eine rationale Funktion ohne Pole auf der positiven reellen Achse, bei der der Grad des Nenners mindestens um zwei größer ist als der Grad des Zählers und die in Null holomorph ist oder einen Pol erster Ordnung hat. So existiert das Integral

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx$$

nach [AN1] 5.7.5 und wir können seinen Wert wie folgt bestimmen: Wir wählen einen vom Ursprung ausgehenden Strahl  $S_1$  in den dritten Quadranten, der einen so kleinen Winkel zur positiven reellen Achse hat, daß im offenen Winkelsegment zwischen unserem Strahl und der nichtnegativen reellen Achse keine Polstellen von  $f$  liegen. Dann wählen wir einen weiteren Strahl  $S_2$ , der bis auf den Ursprung ganz in diesem offenen Winkelsegment liegt. Nun wählen wir auf der durch diesen Strahl geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus S_2$  denjenigen Zweig des Logarithmus  $\log^+$ , der auf der positiven reellen Achse der übliche reelle Logarithmus ist. Weiter wählen wir auf der durch  $-S_2$  geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus (-S_2)$  denjenigen Zweig des Logarithmus  $\log^-$ , der auf  $S_1 \setminus 0$  mit  $\log^+$  übereinstimmt. Auf der positiven reellen Achse gilt dann  $\log^-(x) = \log^+(x) + 2\pi i$ . Dann setzen wir  $z^{\alpha \pm} := \exp(\alpha \log^{\pm} z)$  und betrachten den in nebenstehendem Bild gezeigten Integrationsweg  $\gamma$ . Die Radien  $r < R$  der Kreise seien so gewählt, daß alle Pole von  $f$  außerhalb des Ursprungs innerhalb des durch unsere Kreise gegebenen offenen Kreisrings liegen. Nun unterteilen wir unseren Integrationsweg längs des ersten Strahls  $S_1$  in zwei Wege  $\gamma^{\pm}$ , die jeweils ganz im Definitionsbereich von  $\log^{\pm}$  verlaufen. Wir finden

$$\int_{\gamma^+} z^{\alpha+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\zeta \neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^{\alpha+} \quad \text{sowie} \quad \int_{\gamma^-} z^{\alpha-} f(z) dz = 0$$

und durch Summation

$$2\pi i \sum_{\zeta \neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^{\alpha+} = (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_r^R x^{\alpha} f(x) dx + \int_{|z| \in \{r, R\}} z^{\alpha \pm} f(z) dz$$

Hier haben wir beim letzten Summanden weder die Durchlaufrichtung spezifiziert noch ausgeführt, wo welche unserer Varianten von  $z^{\alpha}$  zu verwenden ist, da das wegen  $|z^{\alpha \pm}| = |z|^{\alpha}$  eh gegen Null strebt, wenn wir den inneren Radius gegen Null und den äußeren Radius gegen  $\infty$  streben lassen. So folgt dann schließlich

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{\zeta \neq 0} \operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) z^{\alpha}$$

In der in [AN3] 3.1.21 eingeführten Terminologie ist das der Wert  $(\mathcal{M}f)(\alpha + 1)$  der sogenannten „Mellin-Transformation von  $f$ “ an der Stelle  $\alpha + 1$ . Die Mellin-Transformation ist ein naher Verwandter der Fouriertransformation, wie in [AN3] 3.1.21 ausgeführt wird.

## 6 Verschiedene weiterführende Resultate

### 6.1 Harmonische Funktionen (28.6)

**Definition 6.1.1.** Eine auf einer offenen Teilmenge einer euklidischen Ebene definierte stetige reellwertige Funktion heißt **harmonisch**, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe der Funktionswert im Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf dem Rand. **Hier ist ein Film über harmonische Funktionen.**

*Ergänzung 6.1.2.* Analog definiert man die Harmonizität vektorwertiger Funktionen mit Werten, die je nach den Vorkenntnissen des Lesers in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen, in reellen Banachräumen oder gar in beliebigen reellen von-Neumann-Räumen liegen mögen.

*Vorschau 6.1.3 (Harmonische Funktionen in anderen Dimensionen).* Allgemeiner heißt eine auf einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  oder noch allgemeiner auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen euklidischen Raums definierte stetige reellwertige Funktion harmonisch, wenn für jede in unserer Teilmenge enthaltene abgeschlossene Kugel der Funktionswert in ihrem Zentrum der Durchschnitt ist über die Funktionswerte auf ihrer Randsphäre.

6.1.4. In Formeln fordern wir im ebenen Fall also, daß unsere harmonische Funktion  $h$  auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  definiert sein soll und daß für jeden Punkt  $p$  aus dem Definitionsbereich von  $h$  und jedes  $r > 0$  derart, daß der abgeschlossene  $r$ -Ball um  $p$  noch ganz zum Definitionsbereich von  $h$  gehört, unter der üblichen Identifikation von  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  gilt

$$h(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(p + re^{it}) dt$$

Anschaulich mag man sich eine harmonische Funktion als eine stabile Wärmeverteilung denken. Alternativ mag man sich im ebenen Fall eine Ameisendichte vorstellen, die unter der Annahme eines unabhängigen ziellosen Hin- und Herkrabbelns sämtlicher Ameisen zeitlich konstant bleibt. Beide Vorstellungen sind allerdings nur lokal sinnvoll und erweisen sich global als wirklichkeitsfern, da eine nichtkonstante harmonische Funktion auf einem  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 1$  stets alle reellen Zahlen als Werte annimmt, insbesondere also auch beliebig negative Zahlen, die sich ja nicht mehr gut als Ameisendichte oder Temperatur interpretieren lassen.

6.1.5. In der Literatur wird eine harmonische Funktion meist definiert als eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die vom **Laplaceoperator**

$$\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

annulliert wird. Diese Bedingung ist zwar leichter zu prüfen, scheint mir jedoch weniger anschaulich. Wir zeigen die Äquivalenz beider Bedingungen im ebenen Fall in 6.1.9.

**Proposition 6.1.6 (Harmonische Funktionen mit Extrema).** *Nimmt eine harmonische Funktion auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  ihr Maximum oder ihr Minimum an, so ist sie konstant.*

*Beweis.* Die Menge aller Stellen, an denen eine stetige Funktion ihr Maximum oder auch irgendeinen anderen festen Wert annimmt, ist stets abgeschlossen. Ist unsere Funktion harmonisch und nimmt sie ihr Maximum bei  $p$  an, so muß andererseits unsere Funktion auf einer ganzen Kreisscheibe beziehungsweise Kugel  $B(p; \varepsilon(p))$  um  $p$  konstant sein, da sonst der Durchschnitt über die Funktionswerte auf gewissen Kreisringen beziehungsweise Kugelschalen um  $p$  zu klein wäre. Die Menge der Stellen, an denen das Maximum angenommen wird, ist also auch offen. Ist der Definitionsbereich zusammenhängend, so ist diese Menge nach [AN2] 8.5.21 folglich alles oder nichts.  $\square$

**Lemma 6.1.7.** *Je zwei stetige Funktionen auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe, die im Inneren harmonisch sind und auf dem Rand übereinstimmen, stimmen auf der ganzen Kreisscheibe überein.*

6.1.8. Analoges gilt mit demselben Beweis in allen Dimensionen.

*Beweis.* Die Differenz unserer beiden Funktionen ist stetig, verschwindet auf dem Rand unserer Kreisscheibe und ist im Inneren harmonisch. Als stetige Funktion muß sie auf der abgeschlossenen Kreisscheibe ihr Maximum und ihr Minimum annehmen. Wäre eines von diesen nicht Null, so würde es im Innern unserer Kreisscheibe angenommen im Widerspruch zu 6.1.6. Also sind das Maximum und das Minimum beide Null und die Differenz verschwindet auf der ganzen Kreisscheibe.  $\square$

**Satz 6.1.9 (Harmonizität und Laplace-Operator).** *Eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ist harmonisch genau dann, wenn sie zweimal stetig reell differenzierbar ist und vom Laplaceoperator  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  annulliert wird.*

**Satz 6.1.10 (Harmonizität und Holomorphie).** *Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind stets harmonisch. Jede reelle harmonische Funktion mit schleifenfüllendem Definitionsbereich ist umgekehrt der Realteil einer holomorphen Funktion und diese ist bis auf eine additive rein imaginäre Konstante sogar eindeutig bestimmt.*

**Beispiel 6.1.11 (Harmonisch, aber nicht Realteil).** Die Funktion  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto \log|z|$  alias  $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto (1/2) \log(x^2 + y^2)$  ist harmonisch. In der Tat ist sie auf jeder geschlitzten Ebene der Realteil jedes Zweiges des komplexen Logarithmus und diese Zweige sind holomorph als Umkehrfunktionen der geeignet eingeschränkten komplexen Exponentialfunktion. Sie ist aber nicht der Realteil einer holomorphen Funktion auf der ganzen punktierten Ebene  $\mathbb{C}^\times$ , weil so eine holomorphe Funktion sich auf der geschlitzten Zahlenebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  nur um eine Konstante vom Hauptzweig des Logarithmus unterscheiden könnte und damit nicht auf ganz  $\mathbb{C}^\times$  stetig sein könnte. **Hier ist ein Film zu diesem Gegenbeispiel.**

*Beweis beider Sätze.* Wir untersuchen für stetige reelle Funktionen auf offenen Teilmengen der Ebene  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  die Beziehungen zwischen den folgenden drei Eigenschaften: (1) „ist harmonisch“, (2) „ist zweimal stetig differenzierbar und wird vom Laplace-Operator annulliert“ sowie (3) „ist Realteil einer holomorphen Funktion“. **Hier ist ein Film über den Beweis beider Sätze mit Ausnahme der Herleitung irgendwelcher Konsequenzen aus unserer Definition harmonischer Funktionen über die Mittelwerteigenschaft.**

(3)  $\Rightarrow$  (1): Die Harmonizität des Realteils einer holomorphen Funktion  $F$  ergibt sich aus der Integralformel von Cauchy 4.1.1 mittels der Umformungen

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{F(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(a+re^{it})}{re^{it}} i r e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a+re^{it}) dt$$

In der Tat können wir hier überall den Realteil nehmen und im Integral rechts unten stimmt der Realteil des Integrals offensichtlich mit dem Integral des Realteils überein. Das ist gerade die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen 4.1.4.

(3)  $\Rightarrow$  (2): Daß der Realteil jeder holomorphen Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar ist und vom Laplace-Operator annulliert wird, folgt leicht aus dem Satz von Goursat 4.1.5 und den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 2.2.6. Man beachte hier die Identität  $f' = \partial f / \partial x$ , die sich direkt aus den Definitionen ergibt.

(2)  $\Rightarrow$  (3) bei schleifenfüllendem Definitionsbereich: Wir bemerken, daß für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion  $h$  mit  $\Delta h = 0$  die Funktion  $f = \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y}$  holomorph ist nach 2.2.6, da sie eben stetig partiell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt. Sie hat also nach 3.3.11 auf jedem schleifenfüllenden Definitionsbereich eine holomorphe Stammfunktion  $F$ , für die dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} + i \frac{\partial h}{\partial x}$$

Daraus folgern wir, daß der Realteil von  $F$  denselben Gradienten hat wie  $h$ , in Formeln  $\text{grad}(\text{Re } F) = \text{grad } h$ . Ändern wir also  $F$  um eine geeignete additive Konstante ab, so erhalten wir  $\text{Re } F = h$  wie gewünscht. Geometrisch gesprochen bilden wir zu  $h$  das Gradientenfeld, drehen es an jeder Stelle um einen rechten Winkel im Gegenuhrzeigersinn und erhalten wegen der  $\Delta h = 0$  wieder ein wirbelfreies Vektorfeld. Jedes Potential dieses Vektorfeldes ist ein möglicher Imaginärteil, der unsere Funktion  $h$  zu einer holomorphen Funktion ergänzt. In der Tat ist ein solches Vorgehen ja nach der geometrischen Interpretation 2.2.9 der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen auch eine natürliche Methode, um zu einer reellwertigen Funktion einen Imaginärteil zu finden, der sie zu einer holomorphen Funktion ergänzt.

(1)  $\Rightarrow$  (2): Es reicht zu zeigen, daß jede stetige Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, die harmonisch ist auf der offenen Einheitskreisscheibe, auf der offenen Einheitskreisscheibe der Realteil einer holomorphen Funktion ist, denn dann ist unsere Funktion zweimal stetig differenzierbar und sogar beliebig partiell differenzierbar mit  $\Delta = 0$  nach der bereits gezeigten Implikation (3)  $\Rightarrow$  (2). Das und noch viel mehr leistet die „Poisson-Transformation“ nach 6.1.13, die wir im Folgenden als eigenständigen Satz formulieren und beweisen.  $\square$

**6.1.12 (Motivation für die Poisson-Transformation\*).** Ich will zunächst erklären, wie man von der Fourier-Entwicklung in natürlicher Weise zur Poisson-Transformation geführt wird. Wir denken uns dazu eine reellwertige harmonische Funktion auf einer offenen Teilmenge  $U \Subset \mathbb{C}$ , die die abgeschlossene Einheitskreisscheibe  $D$  umfaßt, und suchen eine holomorphe Funktion  $F$  auf der offenen Einheitskreisscheibe  $D^\circ$  mit  $\text{Re } F = h$ . Dazu entwickeln wir zunächst einmal die Restriktion  $h|_{S^1}$  unserer Funktion auf den Einheitskreis in eine Fourierreihe. Nach [AN1] ?? finden wir wohlbestimmte  $c_\nu \in \mathbb{C}$  mit

$$h = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu z^\nu$$

auf  $S^1$  im Sinne der Summierbarkeit nach [AN1] ?? im komplexen Vektorraum  $\mathcal{C}(S^1)$  mit seiner Skalarproduktnorm  $\| \cdot \|_2$  und insbesondere gilt die Abschätzung  $\sum |c_\nu|^2 < \infty$ . Da  $h$  reellwertig ist, haben wir  $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$  und können unsere Darstellung von  $h|_{S^1}$  umschreiben zu

$$h = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + \bar{c}_\nu \bar{z}^\nu$$

Hierbei ist wieder die Summierbarkeit im komplexen Vektorraum  $\mathcal{C}(S^1)$  mit seiner Skalarproduktnorm  $\| \cdot \|_2$  gemeint. Da die  $c_\nu$  beschränkt sind, liefert die Po-

tenzreihe

$$F(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2c_{\nu} z^{\nu}$$

eine holomorphe Funktion auf der offenen Einheitskreisscheibe. Unter der Voraussetzung, daß diese Potenzreihe einen Konvergenzradius  $> 1$  hat, gilt für die Partialsummen  $F_n = c_0 + \sum_{\nu=1}^n 2c_{\nu} z^{\nu}$  sowohl  $F_n \rightarrow F$  gleichmäßig auf  $S^1$  und erst recht  $\operatorname{Re} F_n \rightarrow \operatorname{Re} F$  gleichmäßig auf  $S^1$ , als auch  $\operatorname{Re} F_n \rightarrow h$  im quadratischen Mittel auf  $S^1$ , woraus sofort folgt  $\operatorname{Re} F = h$  erst auf  $S^1$  und dann wegen 6.1.7 auf der ganzen Einheitskreisscheibe  $D$  und wir haben unsere harmonische Funktion wie gewünscht als Realteil einer holomorphen Funktion geschrieben. Das gilt insbesondere für alle  $h$  mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Fourierkoeffizienten, die sogenannten „trigonometrischen Polynome“. **Hier ist ein Film über die Argumentation bis zu dieser Stelle.** Um auch ohne die Voraussetzung, daß unsere Potenzreihe einen Konvergenzradius  $> 1$  hat, die Gleichheit  $\operatorname{Re} F = h$  auf der offenen Einheitskreisscheibe  $D^{\circ}$  zu zeigen, müssen wir feiner argumentieren. Die Fourierkoeffizienten  $c_{\nu}$  sind ja nach [AN1] ?? gegeben als

$$c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) e^{-i\nu t} dt$$

Wir können also unsere Funktion  $F$  für  $|z| < 1$  nach Vertauschen eines gleichmäßigen Grenzwerts mit dem Integral auch schreiben in der Gestalt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \left( 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-i\nu t} z^{\nu} \right) dt$$

Beim Ausdruck in Klammern ziehen wir einen Faktor  $e^{-it} z$  aus der Summe, die dadurch zu einer geometrischen Reihe wird, und erhalten

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-i\nu t} z^{\nu} = 1 + \frac{2 e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} = \frac{1 + e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

So ergibt sich schließlich für die durch unsere Potenzreihe erklärte Funktion die Darstellung

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

Wir zeigen im anschließenden Satz, daß für jede stetige Funktion  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  der Realteil der durch diese Formel gegebenen Funktion  $F(z)$  für  $z \in D^{\circ}$  eine stetige Fortsetzung von  $h$  auf die ganze abgeschlossene Einheitskreisscheibe liefert.

**Satz\* 6.1.13 (Poisson-Transformation).** *Jede stetige reellwertige Funktion auf dem Einheitskreis  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  läßt sich auf genau eine Weise zu einer stetigen Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe  $D$  fortsetzen, die auf der offenen Einheitskreisscheibe  $D^\circ$  harmonisch ist, und diese Fortsetzung wird für alle  $z \in D^\circ$  gegeben durch die Formel*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \operatorname{Re} \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt$$

6.1.14. **Hier ist ein Film über die Poisson-Transformation.** Anschaulich mag man sich die Funktion  $h$  als eine fest vorgegebene Temperaturverteilung auf dem Rand der Einheitskreisscheibe denken, die dann eine unter diesen Randbedingungen stabile Temperaturverteilung auf der ganzen Einheitskreisscheibe erzeugt. Der zweite Faktor unter dem Integral heißt der **Poisson-Kern**. Mit  $e^{it} = w$  wird er dargestellt durch

$$P(w, z) = \operatorname{Re} \left( \frac{w + z}{w - z} \right)$$

für  $w \in S^1$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq w$ . Bei festem  $w$  verschwindet dieser Realteil für alle  $z \in S^1$  mit  $z \neq w$ , denn wir haben dann

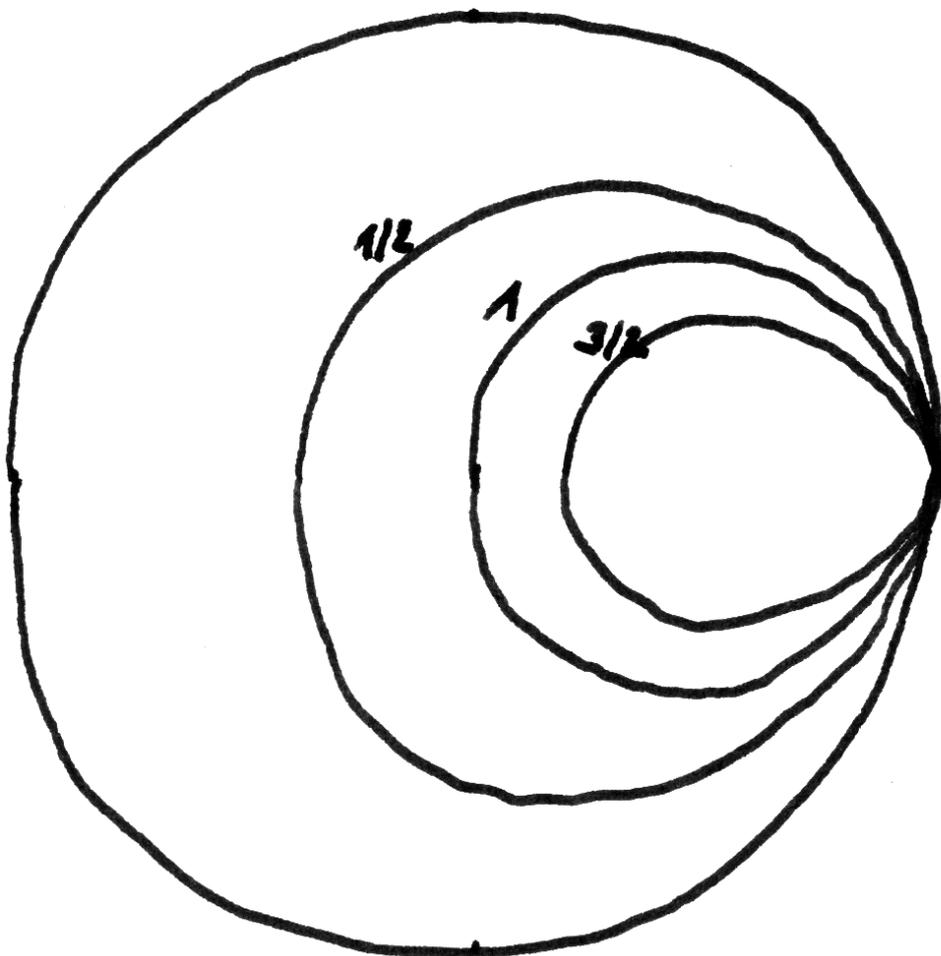
$$\frac{w + z}{w - z} = \frac{z^{-1} + w^{-1}}{z^{-1} - w^{-1}} = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{\bar{z} - \bar{w}}$$

als da heißt, das komplex Konjugierte unseres Bruches ist gerade das Negative unseres Bruches. Lassen wir aber  $z$  aus dem Inneren der Einheitskreisscheibe radial gegen  $w$  laufen, also  $z = \lambda w$  mit  $\lambda \nearrow 1$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so erhalten wir

$$P(w, \lambda w) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \rightarrow \infty$$

Anschaulich mag man für festes  $w \in S^1$  die Funktion  $z \mapsto P(w, z)$  auf der offenen Einheitskreisscheibe verstehen als diejenige geeignet normalisierte Wärmeverteilung, die sich einstellt, wenn man „den Punkt  $w$  sehr heiß macht und den ganzen übrigen Rand  $S^1$  auf Temperatur Null hält“. Die Niveaulinien dieser Funktion sind übrigenfalls Kreise, die den Einheitskreis in  $w$  berühren, wie zum Beispiel aus der in [EL] 2.5.1 diskutierten „Möbius-Geometrie“ folgt.

*Beweis mit Stone-Weierstraß.* **Hier ist ein Film zum Beweis des Satzes über die Poisson-Transformation.** Bezeichne  $\hat{h} : D \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion, die auf dem Einheitskreis  $h$  selbst ist und auf dem Inneren der Einheitskreisscheibe durch die Formel aus unserem Satz gegeben wird. Wir sind fertig, sobald wir zeigen können, daß  $\hat{h}$  auf der ganzen abgeschlossenen Einheitskreisscheibe stetig ist. Wir wissen



Einige Niveaulinien der Poissonverteilung  $z \mapsto P(1, z) = \operatorname{Re}((1+z)/(1-z))$  zu  $w = 1$ . Sie sollten eigentlich Kreislinien sein und sind nur aufgrund meiner zeichnerischen Schwäche etwas eiförmig geraten. Anschaulich mag man für festes  $w \in S^1$  die Funktion  $z \mapsto P(w, z)$  auf der offenen Einheitskreisscheibe verstehen als diejenige geeignet normalisierte Wärmeverteilung, die sich einstellt, wenn man „den Punkt  $w$  sehr heiß macht und den ganzen übrigen Rand  $S^1$  auf Temperatur Null hält“. Die Niveaulinien dieser Funktion sind die hier gezeichneten Kreise, die den Einheitskreis in  $w$  berühren, wie zum Beispiel aus der in [EL] 2.5.1 diskutierten „Möbius-Geometrie“ folgt.

bereits aus dem vorhergehenden, daß das gilt, wenn  $h$  ein trigonometrisches Polynom ist, wenn also in anderen Worten die Fourierreihe von  $h$  nur höchstens endlich viele von Null verschiedene Terme hat. Insbesondere gilt unser Satz für die konstante Funktion  $h = 1$ . Das hinwiederum liefert für beliebiges  $h$  und  $|z| < 1$  sofort die Abschätzung  $\hat{h}(z) \leq \sup(h(S^1))$  und dann auch

$$\|\hat{h}\|_\infty \leq \|h\|_\infty$$

Hier gilt ist die Supremumsnorm links für die nicht notwendig stetige aber doch betragsmäßig beschränkte Funktion  $\hat{h} : D \rightarrow \mathbb{R}$  immer noch sinnvoll definiert und rückblickend gilt natürlich sogar Gleichheit, aber das ist für uns nicht von Belang. Nun können wir ein beliebiges  $h$  mithilfe von [AN1] ?? als gleichmäßigen Grenzwert  $h_n \rightarrow h$  einer Folge von trigonometrischen Polynomen  $h_n$  schreiben. Daraus wird mit unserer Konstruktion ein gleichmäßiger Grenzwert  $\hat{h}_n \rightarrow \hat{h}$  von Funktionen auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, und da alle  $\hat{h}_n$  stetig sind, muß dann auch  $\hat{h}$  stetig sein.  $\square$

## Übungen

*Übung 6.1.15.* Man zeige durch direkte Abschätzungen, daß eine stetige Funktion auf dem Einheitskreis durch ihre Poisson-Transformierte stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortgesetzt wird. Dies Argument hat den Vorteil, daß es sich ohne Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Im Übrigen verallgemeinern sich alle hier für harmonische Funktionen bewiesenen Aussagen ziemlich direkt auf den Fall harmonischer Funktionen auf offenen Teilmengen eines beliebigen  $\mathbb{R}^n$ .

*Übung 6.1.16.* Man zeige, daß für  $U \subseteq \mathbb{C}$  schleifenfüllend eine stetige komplexwertige Funktion  $U \rightarrow \mathbb{C}$  harmonisch ist genau dann, wenn sie als Summe einer holomorphen Funktion mit einer antiholomorphen Funktion dargestellt werden kann.

## 6.2 Reihenentwicklung des Kotangens (30.6)

**Satz 6.2.1 (Summe der  $(z - k)^{-1}$ ).** Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt im Sinne absoluter Konvergenz

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right) = \pi \cot(\pi z)$$

6.2.2. Hier ist ein Film zur Reihenentwicklung des Kotangens. Die Summe der  $(z - k)^{-1}$  über alle ganzen  $k$  konvergiert nicht absolut, aber fassen wir wie angedeutet vor dem Summieren jeweils gegenüberliegende Terme zusammen, so

entsteht eine absolut konvergente Reihe, die auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  kompakt konvergiert. „Verünftiges“ anderes Zusammenzufassen von jeweils einem positiven und einem negativen Term liefert a posteriori dasselbe Ergebnis, der Kotangens ist ja periodisch von der Periode  $\pi$ , aber a priori ist das nicht so klar. Formeln für die Summen der  $(z - k)^{-a}$  bei beliebigem ganzen  $a \geq 1$  gewinnen wir aus unserem Satz leicht durch Ableiten. Allerdings stützt sich der hier gegebene Beweis von 6.2.1 auf Proposition 6.2.5, die den Fall  $a = 2$  beschreibt, so daß wir besagte Proposition auf andere Weise herleiten müssen.

6.2.3. Zu diesem Beweis gibt es eine wunderbare Alternative, den „Herglotz-Trick“. Mir gefällt aber das hier gegebene Argument mindestens ebensogut.

*Beweis.* Leiten wir beide Seiten der behaupteten Gleichung nach  $z$  ab, so ergibt sich die Gleichung 6.2.5, die wir im Anschluß zeigen. Die Differenz beider Seiten ist also eine Konstante. Da beide Seiten ungerade Funktionen von  $z$  sind, ist diese Konstante Null.  $\square$

6.2.4. Unter dem **Hauptteil** einer meromorphen Funktion an einer gegebenen Stelle versteht man wie in 5.1.12 die Summe derjenigen Terme ihrer Laurententwicklung an besagter Stelle, die dort einen Pol haben. Haben zwei meromorphe Funktionen an einer gegebenen Stelle denselben Hauptteil, so ist ihre Differenz dort natürlich holomorph.

**Proposition 6.2.5 (Summe der  $(z - k)^{-2}$ ).** Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt im Sinne absoluter Konvergenz

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - k)^2} = \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2$$

*Vorschau 6.2.6.* Summiert man nur über die nichtpositiven  $k$ , so erhält man die zweite Ableitung des Logarithmus der  $\Gamma$ -Funktion, vergleiche 6.4.9.

*Beweis.* Hier ist ein Film zu diesem Beweis. Die Summe auf der linken Seite konvergiert offenbar unabhängig von der Reihenfolge der Summanden kompakt gegen eine Grenzfunktion, die meromorph ist auf ganz  $\mathbb{C}$  mit Polen an allen ganzen Zahlen  $k \in \mathbb{Z}$  und mit den Hauptteilen  $(z - k)^{-2}$  an diesen Polen. Die rechte Seite hat nun jedoch dieselben Polstellen mit denselben Hauptteilen. Die Differenz beider Seiten ist folglich eine holomorphe Funktion  $\delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\delta(z + 1) = \delta(z) \forall z \in \mathbb{C}$ . Wir lassen nun im Streifen  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$  den Imaginärteil von  $z$  sehr groß oder sehr klein werden und behaupten, daß beide Seiten unserer Gleichung und erst recht ihre Differenz  $\delta$  gegen Null streben, und zwar gleichmäßig im Realteil von  $z$ , in Formeln

$$\lim_{|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty} \delta(z) = 0$$

Damit ist dann ihre Differenz  $\delta$  beschränkt, nach Liouville 4.1.6 also konstant, also Null. Es bleibt damit nur, diese Behauptung zu zeigen. Sie lohnt nur für die linke Seite einen Beweis. Für  $z$  in unserem Streifen mit  $|\operatorname{Im}(z)| \geq n$  schätzen wir dazu die Terme unserer Summe mit  $-n \leq k \leq n+1$  jeweils ab durch  $1/n^2$ , so daß sie alle zusammen höchstens  $(2n+2)/n^2$  beitragen. Die übrigen Terme können jeweils abgeschätzt werden durch  $1/k^2$ , und da die Summe der inversen Quadrate aller natürlichen Zahlen  $\geq 1$  konvergiert, muß die Summe dieser übrigen Terme bei hinreichend großem  $n$  auch beliebig klein werden.  $\square$

**Korollar 6.2.7 (Einige Werte der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion).** *An den positiven geraden ganzzahligen Stellen ist der Wert der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion ein rationales Vielfaches der entsprechenden Potenz der Kreiszahl  $\pi$ . Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt also in Formeln*

$$\sum_{k \geq 1} k^{-2n} \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$$

*Ergänzung 6.2.8.* Für die Summe  $\zeta(u)$  der ungeraden Potenzen  $k^{-u}$  für ungerades natürliches  $u$ , die sogenannten „ungeraden  $\zeta$ -Werte“, ist derzeit (2021) meines Wissens keine Aussage dieser Art bekannt. Vermutet wird, daß die reellen Zahlen  $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$  algebraisch unabhängig sind über  $\mathbb{Q}$ . Apéry hat gezeigt, daß  $\zeta(3)$  irrational ist. Bekannt ist weiter, daß unendlich viele ungerade  $\zeta$ -Werte irrational sind, und daß von den vier ungeraden  $\zeta$ -Werten  $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$  mindestens einer irrational ist.

*Beweis.* **Hier ist ein Film zur diesem Beweis.** Multiplizieren wir die Reihenentwicklung des Kotangens 6.2.1 mit  $z$ , so erhalten wir

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + z \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right)$$

im Sinne der kompakten Konvergenz, erst auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , aber dann sehr leicht auch auf  $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$ . Sicher sind beide Seiten gerade Funktionen von  $z$ . Leiten wir beide Seiten  $2n$ -mal ab und werten bei  $z = 0$  aus, so ergibt sich, da wir ja nach 4.2.6 Grenzwert und Ableitung vertauschen dürfen, für  $n \geq 1$  die Formel

$$\left. \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \right|_{z=0} \pi z \cot(\pi z) = 2n \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{-(2n-1)!}{k^{2n}}$$

Diese Formel drückt den Wert der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion an allen positiven geraden natürlichen Zahlen aus in den Laurentkoeffizienten des Kotangens. Nun ergibt sich die Laurentreihe des Kotangens durch Multiplikation und Inversenbildung aus den Taylorreihen von Sinus und Cosinus und hat nach elementaren Überlegungen insbesondere stets rationale Koeffizienten. Das Korollar folgt.  $\square$

6.2.9. Um die Werte der  $\zeta$ -Funktion an den geraden positiven ganzen Zahlen explizit zu berechnen, beachte man

$$\cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i + \frac{2i e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}$$

Die **Bernoulli-Zahlen**  $B_2, B_4, \dots$  sind nun definiert als die höheren Ableitungen von  $z/(e^z - 1)$  am Ursprung, in Formeln

$$B_{2n} := \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \Big|_{z=0} \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)$$

Sie sind natürlich rational und lassen sich induktiv berechnen, indem man die wohlbekanntere Taylorreihe von  $(e^z - 1)/z$  formal invertiert. Der Kotangens ist ungerade, so daß die höheren Ableitungen ungerader Ordnung bei Null verschwinden. Vermittels dieser Zahlen lassen sich dann die Werte der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion an den positiven geraden ganzen Zahlen nach dem Vorhergehenden und elementarer Rechnung, die dem Leser zur Übung überlassen sei, ausdrücken in der Gestalt

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} B_{2n} \pi^{2n}$$

*Vorschau* 6.2.10. Will man Bernoulli-Zahlen für beliebige Indizes erklären, so setzt man besser

$$B_k := \frac{d^k}{dz^k} \Big|_{z=0} \left( \frac{z}{1 - e^{-z}} \right)$$

Diese Zahlen sind dann Null für ungerades  $k > 1$  und stimmen mit unseren Bernoulli-Zahlen von oben überein für gerades  $k$  und haben den Vorteil, daß die Funktionalgleichung der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion für sie die wunderbare Formel  $B_k = -k\zeta(1 - k)$  liefert, die mit der gebührenden Vorsicht interpretiert sogar für  $k = 0$  gilt.

### 6.2.1 Übungen

*Übung* 6.2.11 (**Alternierende Summe der**  $(z - k)^{-1}$ ). Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Hinweis: Man addiere die alternierende und die nicht alternierende Summe.

Übung 6.2.12. Man zeige für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 0$  die Relation

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (2k+1)^{-2n-1} \in \mathbb{Q} \pi^{2n+1}$$

Hinweis: Den Fall  $n = 0$  hatten wir bereits in [AN1] 5.4.14 behandelt. Für den allgemeinen Fall leite man die Identität 6.2.11 ab und werte bei  $z = 1/2$  aus. Speziell zeige man im Fall  $n = 1$  die Formel

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}$$

### 6.3 Produktentwicklung des Sinus (30.6)

**Satz 6.3.1 (Produktentwicklung des Sinus).** *Der Sinus läßt sich im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte darstellen als das unendliche Produkt*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) \left(1 + \frac{z}{k}\right)$$

*Beweis.* Hier ist ein Film über die Herleitung Produktentwicklung des Sinus, aufbauend auf unseren allgemeinen Erkenntnissen zu Produktentwicklungen 6.3.3 folgende, mit denen man dafür vertraut sein sollte. Nach 6.3.5 konvergieren auf der rechten Seite die Partialprodukte kompakt gegen eine Grenzfunktion und wenn wir den  $k$ -ten Faktor weglassen, hat diese Grenzfunktion immer noch nach 6.3.5 keine Nullstelle bei  $\pm k$ . Als Grenzfunktion unter kompakter Konvergenz einer Folge holomorpher Funktionen ist unsere Grenzfunktion nach 4.2.6 wieder holomorph und hat nach dem vorhergehenden einfache Nullstellen an allen ganzen Zahlen und keinen weiteren Nullstellen. Ihr Quotient nach  $\sin \pi z$  ist nach dem gleich anschließenden Lemma 6.3.6 also von der Gestalt  $\exp(h(z))$  für  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann bilden wir auf beiden Seiten die logarithmische Ableitung im Sinne von 2.2.20. Sie vertauscht auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  mit dem Grenzübergang, weil ja wieder nach 4.2.6 die Ableitungen einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen auch wieder kompakt gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergieren. Wir finden mit unserer Formel 6.2.5 für die Summe der  $(z - k)^{-2}$ , daß  $h$  konstant ist. Teilen wir nun beide Seiten durch  $z$  und setzen  $z = 0$ , so erkennen wir, daß  $h$  sogar identisch verschwinden muß.  $\square$

6.3.2. Setzen wir in der Produktentwicklung des Sinus 6.3.1 speziell  $z = 1/2$ , so ergibt sich die **Wallis'sche Produktformel**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$$

**Satz 6.3.3 (Produktentwicklung).** Seien  $X$  eine Menge und  $f_\nu : X \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen derart, daß die Folge der Partialsummen  $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion konvergiert. So konvergiert auch die Folge der Partialprodukte  $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion  $X \rightarrow \mathbb{C}$ , die wir

$$x \mapsto \prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

notieren und deren Nullstellen genau die Stellen  $x \in X$  sind, an denen einer der Faktoren verschwindet. Darüber hinaus ist dann der Grenzwert der Partialprodukte unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

6.3.4. Sind in der Situation aus 6.3.3 zusätzlich alle unsere Funktionen  $f_\nu$  von Null weg beschränkt, liegt also die Null nicht im Abschluß ihres Wertebereichs, so konvergiert mit  $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$  auch  $\sum_{\nu=1}^n |(f_\nu(x))^{-1} - 1|$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion. In der Tat zeigt man für  $z$  hinreichend nah bei 1 leicht die Abschätzung  $|z^{-1} - 1| \leq 2|z - 1|$ . Sind alle unsere Funktionen  $f_\nu$  von Null weg beschränkt, so können wir unseren Satz mithin auch auf die Funktionen  $f_\nu^{-1}$  anwenden.

6.3.5. Ist  $X$  ein metrischer oder allgemeiner ein topologischer Raum und sind die  $f_\nu$  stetig und konvergiert die Folge der Partialsummen  $\sum_{\nu=1}^n |f_\nu(x) - 1|$  kompakt, so konvergiert auch die Folge der Partialprodukte  $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$  kompakt. Um das zu zeigen, brauchen wir nur 6.3.3 auf die Einschränkungen unserer Funktionen auf Kompakta anzuwenden. Haben in dieser Situation unsere Funktionen  $f_\nu$  keine Nullstellen, so erfüllen auch die  $f_\nu^{-1}$  unsere Bedingungen und auch die Folge der Partialprodukte  $\prod_{\nu=1}^n f_\nu(x)$  konvergiert kompakt. Um das zu zeigen, brauchen wir nur 6.3.4 auf die Einschränkungen unserer Funktionen auf Kompakta anzuwenden.

*Beweis.* Hier ist ein Film über allgemeine Produktentwicklungen. Ableiten liefert für den Hauptzweig des Logarithmus die Formel

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Es gibt also  $d \in (0, 1)$  derart, daß aus  $|z| < d$  folgt  $|\log(1+z)| \leq 3|z|/2$  und daß ebenso aus  $|z-1| < d$  folgt  $|\log(z)| \leq 3|z-1|/2$ . Nun gibt es sicher ein  $N$  mit  $\sum_{\nu=N}^{\infty} |f_\nu(x) - 1| \leq d$  für alle  $x \in X$ . Für  $\nu \geq N$  sind dann alle  $\log(f_\nu(x))$  wohldefiniert und nach unserer Abschätzung und dem Majorantenkriterium muß auch die Folge der Funktionen  $\sum_{\nu=N}^n \log \circ f_\nu$  gleichmäßig konvergieren gegen eine betragsmäßig beschränkte Grenzfunktion  $L : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Wenden wir  $\exp$  an und beachten, daß  $\exp$  auf jedem Kompaktum in  $\mathbb{C}$  gleichmäßig stetig ist, so

folgt die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Produkte  $\prod_{\nu=1}^n f_\nu$  gegen eine beschränkte Funktion  $X \rightarrow \mathbb{C}$  ohne Nullstelle, nämlich gegen  $\exp \circ L$ . Der Satz folgt, da wieder nach unserer Annahme die Faktoren mit  $1 \leq \nu < N$  und damit auch ihr Produkt betragsmäßig beschränkt sind und das Produkt mit ihnen deshalb nicht die gleichmäßige Konvergenz zerstören kann. Die Unabhängigkeit des unendlichen Produkts von der Reihenfolge der Faktoren folgt leicht aus dem Umordnungssatz für Reihen [AN1] 4.1.21.  $\square$

**Lemma 6.3.6 (Logarithmen von Funktionen).** Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  schleifenfüllend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ohne Nullstelle gibt es  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f(z) = \exp h(z)$  für alle  $z \in U$ .

*Beweis.* Hier ist ein Film über Logarithmen von Funktionen ohne Nullstelle mit schleifenfüllendem Definitionsbereich. Wenn  $h$  unsere Funktion ist, so könnten wir ja lokal immer schreiben  $h = \log \circ f$  mit irgendeinem Zweig des Logarithmus und es folgt  $h' = f'/f$ . Ein guter Ansatz ist also  $h = g + c$  für  $g$  eine Stammfunktion von  $f'/f$ . Nach 3.3.11 hat nun die holomorphe Funktion  $f'/f$  in der Tat eine Stammfunktion  $g$  auf  $U$ . Ableiten zeigt nach kurzer Rechnung, daß  $(\exp \circ g)/f$  konstant sein muß. Wir können also in der Tat  $h = c + g$  nehmen für eine geeignete Konstante  $c \in \mathbb{C}$ .  $\square$

*Beweis mit Überlagerungstheorie.* Ich will auch noch einen alternativen Beweis mit den Mitteln der Topologie geben, der mir besser gefällt, der aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengt. Die Exponentialabbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  ist im Sinne von [TF] 3.1.2 eine surjektive Überlagerung. Gegeben ein überlagerungstrivialer topologischer Raum  $U$  und eine stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$  gibt es nach Satz [TF] 3.4.13 über das Liften bei überlagerungstrivialelem Definitionsbereich eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp \circ \tilde{f} = f$ . Ist speziell  $U \subseteq \mathbb{C}$  zusammenhängend und schleifenfüllend, so ist es auch überlagerungstrivial nach [TF] ???. Ist zusätzlich  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$  holomorph, so folgt aus der lokalen Umkehrbarkeit von  $\exp$ , daß auch  $\tilde{f}$  holomorph sein muß.  $\square$

## Übungen

**Übung 6.3.7 (Wurzeln aus holomorphen Funktionen).** Für jede holomorphe Funktion  $f$  ohne Nullstellen mit schleifenfüllendem Definitionsbereich und jedes  $n \geq 1$  gibt es eine holomorphe Funktion  $g$  mit demselben Definitionsbereich und mit der Eigenschaft  $g(z)^n = f(z)$  für alle Punkte  $z$  aus dem Definitionsbereich.

## 6.4 Gammafunktion (5.7)

**Satz 6.4.1.** *Es gibt genau eine meromorphe Funktion  $\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  derart, daß für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 0$  gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Sie heißt die **Gammafunktion** und hat die Werte  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ . Im Körper der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  gilt die **Funktionalgleichung**  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Unsere Gammafunktion ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  holomorph und hat für  $n \in \mathbb{N}$  bei  $z = -n$  jeweils eine einfache Polstelle mit  $(-1)^n/n!$  als Residuum.

6.4.2. Ich will zumindest zwei Gründe dafür angeben, warum diese Funktion von Bedeutung ist: Erstens tritt sie in der Funktionalgleichung der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion 7.1.8 auf, und zweitens führt sie zu Abschätzungen von  $n!$ , die in der Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich sind.

*Beweis.* Hier ist ein Film über diesen Beweis. Die obere Abschätzung des Absolutbetrags des Integranden durch  $t^{a-1}$  für  $\operatorname{Re} z \geq a$  zeigt, daß die Folge der nach 2.3.15 holomorphen Funktion

$$F_n(z) = \int_{1/n}^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$

für  $\operatorname{Re} z > 0$  kompakt konvergiert gegen eine nach 4.2.6 holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. Die Abschätzung  $e^{-t} t^{-a} \geq t^2/(a+2)!$  für  $a \in \mathbb{N}$  und  $t > 0$  liefert  $|e^{-t} t^{z-1}| \leq (a+2)! t^{-2}$  für  $\operatorname{Re} z < a+1$  und zeigt, daß die Folge von holomorphen Funktionen

$$G_n(z) = \int_1^n e^{-t} t^{z-1} dt$$

für  $\operatorname{Re} z > 0$  kompakt konvergiert gegen eine holomorphe Grenzfunktion auf der offenen rechten Halbebene. In diesem Sinne liefert also das Integral aus dem Satz eine holomorphe Funktion auf der offenen rechten Halbebene. Für  $\operatorname{Re} z > 0$  erhalten wir mit partieller Integration 2.3.16 sogar

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Hier habe ich darauf verzichtet, wirklich korrekt erst nach dem partiellen Integrieren den Grenzübergang zu vollziehen. Diese Formel können wir für  $\operatorname{Re}(z) > 1$

auch umschreiben zu  $\Gamma(z-1) = \Gamma(z)/(z-1)$  und sie liefert uns dann eine meromorphe Fortsetzung unserer Gammafunktion erst auf die Halbebene  $\operatorname{Re} z > -1$ , dann auf die Halbebene  $\operatorname{Re} z > -2$  und so nach und nach auf ganz  $\mathbb{C}$ . Offensichtlich gilt  $\Gamma(1) = 1 = 0!$  und Iteration mit der Funktionalgleichung  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  liefert dann sofort  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Iteration der Funktionalgleichung liefert auch sofort  $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\dots z\Gamma(z)$  alias

$$\Gamma(z) = (z+n)^{-1}(z+n-1)^{-1}\dots z^{-1}\Gamma(z+n+1)$$

Das aber ist ein Produkt von  $(z+n)^{-1}$  mit einer Funktion, die bei  $z = -n$  holomorph ist und die dort den Wert  $(-1)^n/n!$  annimmt.  $\square$

**Satz 6.4.3 (Gauss'sche Formel).** *Auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen in der komplexen Zahlenebene gilt im Sinne kompakter Konvergenz*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

**Satz 6.4.4 (Produktentwicklung der Gammafunktion).** *Im Sinne der kompakten Konvergenz der Partialprodukte auf dem Komplement der nichtpositiven ganzen Zahlen gilt mit der Abkürzung  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)$  die Formel*

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}$$

6.4.5. Insbesondere hat die  $\Gamma$ -Funktion keine Nullstellen. Aus den Produktentwicklungen der Gammafunktion 6.4.4 und des Sinus 6.3.1 sowie der Funktionalgleichung  $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$  der Gammafunktion folgt sofort die Gleichheit von meromorphen Funktionen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

und insbesondere die Identität  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Man nennt die erste Identität auch die **Spiegelungsformel**. Das ist die Identität, auf die es uns eigentlich ankommt. Ich erwarte nicht, daß Sie die Gauß'sche Formel oder die Produktentwicklung der Gammafunktion und ihre Beweise auswendig lernen oder in einer Prüfung reproduzieren können.

6.4.6. Um zu sehen, daß der Grenzwert  $\gamma$  existiert, interpretieren wir diese Folge als Eins plus die Differenz zwischen einer geeigneten Untersumme und dem Integral der Funktion  $x \mapsto 1/x$  auf  $[1, n]$ . Diese Differenzen sind dann offensichtlich beschränkt durch Eins. So sehen wir auch  $\gamma > 0$ . Unser  $\gamma$  heißt die **Euler-Konstante** oder auch **Euler-Mascheroni-Konstante**.

*Beweis der beiden Sätze.* (1) Wir prüfen zunächst den ersten Satz im Fall  $\operatorname{Re} z > 1$ . Man geht aus von der Identität

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^n \frac{n! t^{z+n-1} dt}{n^n z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Man prüft sie leicht durch partielle Integration. Es gilt damit nur noch zu zeigen, daß die linke Seite für  $\operatorname{Re} z > 1$  gegen  $\Gamma(z)$  strebt. Man kann das mit elementaren Methoden unschwer sehen, vergleiche zum Beispiel [Con78]. Es folgt aber auch direkt aus dem Satz von Lebesgue über das Vertauschen von Integralen und punktwiser monotoner Konvergenz [AN3] 1.5.12, wenn wir für alle  $t \in [0, n)$  die Abschätzungen

$$\left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

nachweisen. Dazu nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus und müssen zeigen, daß für  $t \in [0, n)$  die Funktion  $x \mapsto x \log(1 - \frac{t}{x})$  monoton wächst auf  $[n, \infty)$ . Ihre Ableitung ergibt sich zu

$$\log\left(1 - \frac{t}{x}\right) + \frac{t}{x} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-1}$$

und es reicht folglich zu zeigen, daß die Funktion  $y \mapsto \log(1 - y) + y(1 - y)^{-1}$  nichtnegativ ist für  $y \in [0, 1)$ . Bei  $y = 0$  nimmt diese Funktion jedoch den Wert Null an und ihre Ableitung

$$\frac{-1}{1-y} + \frac{(1-y) + y}{(1-y)^2} = \frac{y}{(1-y)^2}$$

wird auf  $[0, 1)$  nicht negativ.

(2) Als nächstes prüfen wir, daß das unendliche Produkt aus dem zweiten Satz in den in 6.3.3 vorgegebenen Rahmen fällt, daß also die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left( e^{-z/k} \left( 1 + \frac{z}{k} \right) \right) - 1 \right|$$

kompakt konvergieren. Dazu beachten wir, daß nach der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion gilt

$$1 + t - e^t = t^2 f(t)$$

für eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Wählen wir also ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{C}$ , so finden wir eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  mit

$$|1 + (z/k) - e^{z/k}| \leq C/k^2$$

für alle  $z \in K$  und alle natürlichen Zahlen  $k \geq 1$ , und für das Produkt der linken Seite mit  $|e^{-z/k}|$  gilt offensichtlich eine Abschätzung derselben Gestalt, nur möglicherweise mit größerem  $C$ . Nun zeigt 6.3.3, daß die Formel im Satz eine meromorphe Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert mit einfachen Polstellen an allen nichtpositiven ganzen Zahlen und keinen weiteren Pol- oder Nullstellen.

(3) Als letztes prüfen wir, daß die Partialprodukte  $\Gamma_n$  in unserer Produktentwicklung im zweiten Satz bis auf einen kompakt gegen die konstante Funktion Eins konvergierenden Korrekturterm genau die Glieder unserer Funktionenfolge aus dem ersten Satz sind. Formen wir in der Tat die Partialprodukte etwas um, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Gamma_n(z) &= e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{\nu+z}{\nu}\right)^{-1} e^{z/\nu} \\ &= e^{-\gamma z} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \exp\left(\left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}\right) z\right) \\ &= \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \exp\left(\left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \log(n) - \gamma\right) z\right)\end{aligned}$$

Der letzte Faktor strebt nun für  $n \rightarrow \infty$  kompakt gegen 1, womit beide Sätze bewiesen wären.  $\square$

## Übungen

*Ergänzende Übung 6.4.7.* Für komplexe  $x, y \in \mathbb{C}$  mit positivem Realteil definiert man die **Euler'sche Betafunktion** als das Integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Man zeige die Identität  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ . Hinweis: Per definitionem gilt  $\Gamma(x) = \int_0^\infty a^{x-1} e^{-a} da$ ,  $\Gamma(y) = \int_0^\infty b^{y-1} e^{-b} db$ ,  $\Gamma(x+y) = \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-s} ds$ . Man zeige  $B(x, y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$  mithilfe des Satzes von Fubini und der Substitution  $s = a + b$ ,  $t = a/(a+b)$ .

*Übung 6.4.8.* Man zeige  $\Gamma'(1) = \gamma$  mit der Euler-Konstante  $\gamma$  aus 6.4.4. Hinweis: Man mag von der Gauß'schen Formel 6.4.3 ausgehen.

*Übung 6.4.9.* Man zeige

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$$

für  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  Hinweis: Man mag von der Produktentwicklung 6.4.4 ausgehen.

Übung 6.4.10. Man zeige die **Legendre'sche Verdopplungsformel**

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z + (1/2)) 2^{2z-1}/\sqrt{\pi}$$

Hinweis: Man mag von Übung 6.4.9 ausgehen um zu zeigen, daß die Funktion  $\Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))/\Gamma(2z)$  von  $\frac{d^2}{dz^2} \log$  zu Null gemacht wird, so daß der Logarithmus  $\log(\Gamma(2z)/\Gamma(z)\Gamma(z + (1/2))) = az + b$  ein Polynom vom Grad Eins sein muß. Durch Einsetzen geeigneter Werte bestimmt man dann  $a$  und  $b$ .

## 6.5 Riemann'scher Abbildungssatz (7.7)

**Satz 6.5.1 (Riemann'scher Abbildungssatz).** *Jede zusammenhängende schleifenfüllende echte offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  läßt sich biholomorph mit der offenen Einheitskreisscheibe identifizieren.*

6.5.2. Der Beweis dieses Satzes wird den ganzen Abschnitt füllen. Wir geben ihn nach einigen Vorbereitungen im Anschluß an 6.5.8. Unter einer **biholomorphen Identifikation** von zwei offenen Teilmengen  $U, V$  der komplexen Zahlenebene verstehen wir eine biholomorphe Einbettung  $f : U \hookrightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(U) = V$ . Dann ist auch die Umkehrabbildung eine biholomorphe Identifikation  $f^{-1} : V \xrightarrow{\sim} U$ .

6.5.3. Die Bedingung, eine echte Teilmenge zu sein, schließt den Fall aus, daß unsere offene Teilmenge die ganze komplexe Zahlenebene ist. In der Tat ist diese nicht biholomorph zur offenen Einheitskreisscheibe, denn es gibt darauf keine nichtkonstanten beschränkten holomorphen Funktionen. Der Fall der leeren Menge wird durch die Bedingung ausgeschlossen, daß unsere Teilmenge zusammenhängend sein soll.

**Vorschau 6.5.4 (Der große Riemann'sche Abbildungssatz).** Die tiefere Bedeutung des obigen Satzes wird erst klar im Lichte des sogenannten „großen Riemann'schen Abbildungssatzes“, der besagt, daß es bis auf biholomorphen Isomorphismus genau drei zusammenhängende schleifenfüllende „Riemann'sche Flächen“ gibt: Die Riemann'sche Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  und die offene Einheitskreisscheibe  $E$ . Man findet einen Beweis zum Beispiel in [For77].

6.5.5. Seien  $U \Subset \mathbb{C}$  offen und  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktionenfolge. Wir nennen unsere Folge **betragsmäßig simultan beschränkt**, wenn es ein  $R \in \mathbb{R}$  gibt mit  $|f_n(x)| \leq R$  für alle  $x \in U$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir nennen unsere Folge **lokal betragsmäßig simultan beschränkt**, wenn jeder Punkt von  $U$  eine Umgebung besitzt derart, daß unsere Folge auf besagter Umgebung betragsmäßig simultan beschränkt ist.

**Satz 6.5.6 (Montel).** *Jede lokal betragsmäßig simultan beschränkte Folge von holomorphen Funktionen  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \Subset \mathbb{C}$  besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.*

**Vorschau 6.5.7 (Bezug zum Satz von Arzela-Ascoli).** Man kann diesen Satz verstehen als ein Korollar des Satzes von Arzela-Ascoli [TM] 4.6.4, wenn man beachtet, daß für jede Folge von holomorphen Funktionen mit lokal betragsmäßig simultan beschränktem Wertebereich auch ihre Ableitungen lokal simultan beschränkt sind, etwa nach der ihrer Darstellung durch ein Integral aus dem Beweis von 4.1.5. Wir geben hier jedoch einen eigenständigen Beweis, der im wesentlichen der Beweis von Arzela-Ascoli mit einigen in unserem Spezialfall möglichen Vereinfachungen ist.

**Beweis.** Hier ist ein Film über diesen Beweis. Wir wählen eine dichte Folge  $p_0, p_1, \dots$  in  $U$ . Mit Heine-Borel [AN1] ?? finden wir eine Teilfolge  $f_n^0$ , bei der die Funktionswerte bei  $p_0$  konvergieren. Von dieser finden wir eine Teilfolge  $f_n^1$ , bei der die Funktionswerte auch bei  $p_1$  konvergieren. Von dieser hinwiederum finden wir eine Teilfolge  $f_n^2$ , bei der die Funktionswerte auch bei  $p_2$  konvergieren. So machen wir immer weiter. Die „diagonale“ Folge  $f_n^n$  konvergiert dann punktweise an allen  $p_i$  und ist damit kompakt konvergent nach Lemma 6.5.8, das wir im Anschluß beweisen.  $\square$

**Lemma 6.5.8.** Eine lokal simultan betragsmäßig beschränkte Folge von holomorphen Funktionen, die an allen Punkten einer dichten Teilmenge ihres gemeinsamen Definitionsbereichs punktweise konvergiert, konvergiert bereits kompakt auf dem gesamten Definitionsbereich.

**Beweis.** Hier ist ein Film über diesen Beweis. Es reicht zu zeigen, daß unsere Folge  $f_n$  auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich gleichmäßig konvergiert. Nun kann jede solche abgeschlossene Kreisscheibe vergrößert werden zu einer echt größeren abgeschlossenen Kreisscheibe  $L$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich, und mit der Integralformel für die Ableitung aus dem Beweis von 4.1.5 folgt aus der simultanen Beschränktheit der Funktionen unserer Folge auf dem Rand dieser größeren Kreisscheibe  $L$  die simultane Beschränktheit ihrer Ableitungen auf unserer ursprünglichen Kreisscheibe  $K$ , sagen wir durch eine Konstante  $c > 0$ . Aus dem Mittelwertsatz [AN1] ?? folgt nun  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq c|x - y|$  für alle  $x, y \in K$ . Wählen wir für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E = E_\varepsilon$  unserer dichten Teilmenge derart, daß die Kreisscheiben um  $x \in E$  mit Radius  $\varepsilon/2c$  bereits  $K$  überdecken, so überdecken die Kreisscheiben um  $x \in E \cap K$  mit Radius  $\varepsilon/c$  auch bereits  $K$  und dann folgt aus  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \forall x \in E \cap K$  bereits  $|f_n(y) - f_m(y)| \leq 3\varepsilon \forall y \in K$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es also  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \leq m \leq n \Rightarrow |f_n(y) - f_m(y)| \leq 3\varepsilon \forall y \in K$ .  $\square$

**Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes 6.5.1.** Sei  $G \Subset \mathbb{C}$  eine einfach zusammenhängende echte offene Teilmenge. Wir gehen in drei Schritten vor.

(1) **Hier ist ein Film über diesen Beweisteil.** Wir zeigen zunächst, daß es eine holomorphe Injektion von  $G$  in eine Kreisscheibe von endlichem Radius gibt. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $0 \notin G$ . Nach 6.3.6 gibt es dann auf  $G$  einen Zweig des Logarithmus, in Formeln  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $z = \exp(f(z)) \quad \forall z \in G$  und insbesondere ist  $f$  injektiv. Das Bild von  $f$  ist offen und umfaßt folglich eine offene Kreisscheibe  $D$  vom Radius kleinergleich  $\pi$ . Dann hat es aber notwendig leeren Schnitt mit der um  $2\pi i$  verschobenen Kreisscheibe  $2\pi i + D$ . Durch Nachschalten einer Verschiebung finden wir also  $f_1 : G \hookrightarrow \mathbb{C}$  holomorph derart, daß  $f_1(G)$  eine Kreisscheibe mit Zentrum im Ursprung nicht trifft. Setzen wir dann  $f_2(z) := f_1(z)^{-1}$ , so ist in der Tat  $f_2$  eine Einbettung von  $G$  in eine Kreisscheibe von endlichem Radius mit Zentrum im Ursprung.

(2) **Hier ist ein Film über diesen Beweisteil.** Nach dem ersten Schritt können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser  $G$  den Nullpunkt enthält und in der offenen Einheitskreisscheibe  $E$  enthalten ist. Wir behaupten nun, daß es unter allen holomorphen Injektionen  $f : G \rightarrow E$  mit  $f(0) = 0$  eine gibt, für die  $|f'(0)|$  maximal wird. Das gilt sogar, ohne daß wir  $G$  einfach zusammenhängend annehmen. In der Tat umfaßt  $G$  eine Kreisscheibe  $B(0; \varepsilon)$  für  $\varepsilon > 0$ , woraus folgt, daß für holomorphe Abbildungen  $f : G \rightarrow E$  die Ableitung am Nullpunkt, die ja nach dem Beweis von 4.1.5 durch die Formel

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z^2} dz$$

gegeben wird, betragsmäßig beschränkt ist durch  $\varepsilon^{-1}$ . Also gibt es ein Supremum  $S$  der Menge der möglichen  $|f'(0)|$  und eine Folge von holomorphen Injektionen  $f_n : G \rightarrow E$  derart, daß  $|f'_n(0)|$  gegen dieses Supremum strebt. Nach dem Satz von Montel 6.5.6 dürfen wir sogar annehmen, daß diese Folge kompakt konvergiert. Die Grenzfunktion  $f$  ist dann nach 4.2.6 wieder holomorph mit  $|f'(0)| = S$ . Sie ist auch injektiv nach dem Korollar 6.5.10, das wir im Anschluß beweisen, und landet nicht nur in der abgeschlossenen, sondern sogar in der offenen Einheitskreisscheibe nach dem Satz über die Gebietstreue 4.4.5. Also haben wir eine holomorphe Injektion  $f : G \rightarrow E$  gefunden mit  $f(0) = 0$ , für die die Ableitung  $|f'(0)|$  den unter diesen Einschränkungen größtmöglichen Wert annimmt.

(3) **Hier ist ein Film über diesen Beweisteil.** Jetzt gilt es noch zu zeigen, daß die im vorherigen Schritt konstruierte Abbildung  $f$  surjektiv auf die ganze Einheitskreisscheibe geht. Dazu führen wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch, indem wir zu jeder nicht surjektiven holomorphen Injektion  $f : G \hookrightarrow E$  mit  $f(0) = 0$  eine weitere konstruieren, die auch den Ursprung festhält und deren Ableitung im Ursprung betragsmäßig noch größer ist. Sei also  $p \in E \setminus f(G)$ . Wir erinnern, daß es nach 2.1.16 zu je zwei Punkten der offenen Einheitskreisscheibe  $p, q \in E$  eine holomorphe Bijektion  $h : E \xrightarrow{\sim} E$  gibt mit  $h(p) = q$ . **Hier ist ein**

**Film mit einer anschaulichen Argumentation zu dieser Aussage.** Wir finden also  $h_1 : E \xrightarrow{\sim} E$  biholomorph mit  $h_1(p) = 0$ . Da  $G$  schleifenfüllend ist, gibt es dann nach 6.3.7 eine Wurzel von  $h_1 \circ f$  alias eine Funktion  $w$  mit  $q \circ w = h_1 \circ f$  für  $q : z \mapsto z^2$  das Quadrieren. Auch diese Wurzel ist eine holomorphe Injektion  $w : G \hookrightarrow E$ . Schließlich finden wir dann noch  $h_2 : E \xrightarrow{\sim} E$  biholomorph mit  $h_2(w(0)) = 0$ . Wir behaupten nun, daß  $g := h_2 \circ w$  eine betragsmäßig größere Ableitung im Ursprung hat als  $f$ . Um das zu sehen, beachten wir  $q \circ h_2^{-1} \circ g = h_1 \circ f$  alias  $(h_1^{-1} \circ q \circ h_2^{-1}) \circ g = f$ . Nun ist aber der Ausdruck in Klammern eine holomorphe nicht injektive Abbildung  $E \rightarrow E$ , die den Ursprung festhält. Ihre Ableitung im Ursprung ist nach dem Schwarz'schen Lemma 4.3.10 also betragsmäßig echt kleiner als Eins und mit der Kettenregel folgt  $|g'(0)| > |f'(0)|$ . **Hier ist ein Film, der die Konstruktion der verbesserten Funktion  $g$  zu einer nicht surjektiven Funktion  $f$  in einem Beispiel beschreibt.**  $\square$

**Satz 6.5.9 (Nullstellenanzahl von Grenzfunktionen).** *Sei auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben. Haben alle Funktionen unserer Folge mit Vielfachheiten gerechnet höchstens  $N$  Nullstellen und ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion mit Vielfachheiten gerechnet höchstens  $N$  Nullstellen.*

**Beweis.** **Hier ist ein Film über die Zahl von Nullstellen von Grenzfunktionen.** Seien  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  unsere Funktionen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ihre Grenzfunktion. Sind  $p_1, \dots, p_r$  paarweise verschiedene Nullstellen von  $f$ , so können wir paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben  $K_1, \dots, K_r \subset U$  wählen derart, daß  $p_s$  jeweils die einzige Nullstelle von  $f$  aus  $K_s$  ist. Sicher verschwinden nur endlich viele der  $f_n$  auf dem Rand einer unserer Kreisscheiben. Wegen der kompakten Konvergenz der Ableitungen nach 4.2.6 haben wir also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_s} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_s} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Das aber besagt nach Satz 5.3.1 über das Zählen von Null- und Polstellen, daß für hinreichend großes  $n$  die Funktion  $f_n$  mit Vielfachheiten gerechnet ebensoviele Nullstellen in der Kreisscheibe  $K_s$  hat wie die Grenzfunktion  $f$ .  $\square$

**Korollar 6.5.10.** *Ist  $U \Subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend, so ist die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge injektiver holomorpher Funktionen auf  $U$  entweder injektiv oder konstant.*

**Beweis.** Injektive Funktionen können höchstens eine Nullstelle haben und diese kann dann keine höhere Vielfachheit haben. Also kann nach 6.5.9 auch die Grenzfunktion, wenn sie nicht die Nullfunktion ist, höchstens eine Nullstelle haben, und

diese muß dann eine einfache Nullstelle sein. Das Korollar folgt, wenn man diese Erkenntnis auf die Differenz unserer Funktionen zu festen konstanten Funktionen anwendet.  $\square$

### **Übungen**

*Übung 6.5.11.* Man zeige, daß der Satz über die Nullstellenanzahl von Grenzfunktionen analog auch gilt, wenn wir die Vielfachheiten nicht beachten: Ist auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen gegeben, und haben alle Funktionen unserer Folge höchstens  $N$  Nullstellen, und ist unsere Grenzfunktion nicht die Nullfunktion, so hat auch unsere Grenzfunktion höchstens  $N$  Nullstellen.

## 7 Erste Anwendungen in der Zahlentheorie\*

### 7.1 Verteilung von Primzahlen (12&14.7)

**Satz 7.1.1 (Primzahlsatz).** *Bezeichnet  $\pi(x)$  für jede reelle Zahl  $x$  die Zahl der Primzahlen  $\leq x$ , so gilt*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} = 1$$

7.1.2. Das Symbol  $\log$  ist hier wie immer in diesem Text zu interpretieren als der natürliche Logarithmus alias die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp$ . Anders gesagt strebt der Quotient der Funktionen  $\pi(x)/x$  und  $1/\log(x)$  gegen Eins für  $x \rightarrow \infty$ . Etwas vage gesagt ist also für großes  $x$  also die Wahrscheinlichkeit, daß eine natürliche Zahl  $\leq x$  prim ist, in etwa  $1/\log(x)$ . Die Konvergenz ist jedoch sehr langsam: Bei  $x = 100000$  finden wir für den Quotienten als Wert etwa 1,1 und bei  $x = 10^9$  als Wert etwa 1,05. Der Beweis wird uns diesen ganzen Abschnitt beschäftigen und wird erst ganz am Ende gegeben. Im Grundgedanken zeigen wir den Primzahlsatz, indem wir einen „Taubersatz“ anwenden auf die logarithmische Ableitung der Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion, geteilt durch  $z$  und bereinigt um den Hauptteil dieses Quotienten bei  $z = 1$ .

**Definition 7.1.3.** Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 1$  definieren wir den Wert der **Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion** an der Stelle  $z$  durch die absolut konvergente Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

7.1.4. Mit [AN1] 5.8.23 sieht man leicht, daß die Partialsummen dieser Reihe für jedes  $\alpha > 1$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \geq \alpha$  gleichmäßig konvergieren. Folglich definiert unsere Reihe eine holomorphe Funktion auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1$ .

**Satz 7.1.5 (Produktentwicklung der  $\zeta$ -Funktion).** *Bezeichnet  $P \subset \mathbb{N}$  die Menge aller Primzahlen, so gilt*

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

*im Sinne der kompakten Konvergenz der partiellen Produkte auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1$ , unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.*

7.1.6. **Hier ist ein Film über die Produktentwicklung der  $\zeta$ -Funktion.** Diese Produktentwicklung geht auf Euler zurück. Ihre Faktoren heißen die **Euler-Faktoren**. Diese Terminologie verallgemeinert man dann auf allgemeinere  $\zeta$ -Funktionen und sogenannte „L-Reihen“, die uns später begegnen werden.

*Beweis.* Unsere allgemeinen Überlegungen 6.3.4 zeigen, daß das Produkt auf der rechten Seite auf  $\operatorname{Re}(z) > 1$  kompakt konvergiert. Nun können wir für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  ja die Faktoren in eine geometrische Reihe entwickeln in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots$$

Wählen wir  $E \subset P$  endlich und bezeichnen mit  $\mathbb{N}(E)$  die Menge aller natürlichen Zahlen  $\geq 1$ , deren sämtliche Primfaktoren zu  $E$  gehören, so erhalten wir mit [AN1] 4.2.14 für die Partialprodukte die Darstellung

$$\prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}(E)} \frac{1}{k^z}$$

Betrachten wir auf beiden Seiten jeweils die Menge  $E = E_n$  der ersten  $n$  Primzahlen und lassen  $n$  gegen unendlich streben, so konvergiert die rechte Seite gegen  $\zeta(z)$  nach dem Satz über dominierte Konvergenz [AN3] 1.6.10, der im vorliegenden Spezialfall im wesentlichen auch bereits als Übung [AN1] 4.1.29 behandelt wurde und den wir hier auf Real- und Imaginärteil unserer komplexen Funktion anwenden.  $\square$

**Lemma 7.1.7 (Fortsetzbarkeit der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion).** *Die  $\zeta$ -Funktion läßt sich zu einer meromorphen Funktion auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$  fortsetzen und diese Fortsetzung ist holomorph bis auf eine Singularität bei  $z = 1$ , wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum Eins hat.*

*Vorschau 7.1.8.* Die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion läßt sich sogar zu einer meromorphen Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen und die mit dieser Fortsetzung und der  $\Gamma$ -Funktion aus 6.4.1 erklärte meromorphe Funktion  $\Lambda(z) := \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z)$  erfüllt die **Funktionalgleichung**  $\Lambda(z) = \Lambda(1 - z)$  alias ist punktsymmetrisch um den Punkt  $1/2$ , in Formeln  $\Lambda((1/2) + z) = \Lambda((1/2) - z)$ . Des weiteren hat  $\Lambda$  nur bei 0 und 1 Polstellen. Anders gesagt unter Verwendung der Verdopplungsformel 6.4.10 gilt  $\zeta(1 - z) = (2/(2\pi)^z) \cos(\pi z/2) \Gamma(z) \zeta(z)$ . Das alles zeigen wir hier jedoch nicht.

*Beweis.* Hier ist ein Film über die meromorphe Fortsetzbarkeit der  $\zeta$ -Funktion. Für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  gilt

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^z} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx$$

Die Partialsummen dieser Reihe jedoch bilden eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , da wir die Summanden

für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  abschätzen können durch

$$\left| \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx \right| = \left| z \int_n^{n+1} \left( \int_n^x \frac{du}{u^{z+1}} \right) dx \right| \leq \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re}(z)+1}} \quad \square$$

**Lemma 7.1.9 (Nullstellen der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion).** *Die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion hat keine Nullstellen  $z$  mit Realteil  $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ .*

*Ergänzung 7.1.10.* Die **Riemann'sche Vermutung** besagt sehr viel stärker, daß die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion sogar keine Nullstellen mit Realteil  $> 1/2$  haben sollte. Mit der Funktionalgleichung 7.1.8 und den Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion folgt daraus sofort, daß außer den „trivialen“ Nullstellen bei den negativen geraden ganzen Zahlen alle Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion auf der Gerade  $\operatorname{Re}(z) = 1/2$  liegen müßten. Diese Vermutung ist eine der berühmtesten und wichtigsten offenen Fragen der Mathematik.

7.1.11. Den folgenden Beweis und insbesondere sein Ende verstehe ich leider nur oberflächlich. Ich kann insbesondere kein Prinzip erkennen, das einen auf diese Idee hätte führen sollen. **Hier ist ein Film über die Unmöglichkeit von Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion mit Realteil Eins.**

*Ergänzung 7.1.12.* Der Integrallogarithmus wird definiert durch die Formel

$$\operatorname{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

Er sollte für  $x \rightarrow \infty$  die Primzahlfunktion  $\pi(x)$  noch sehr viel besser approximieren als  $\frac{x}{\log x}$ . Man kann sogar zeigen, daß die Riemann'sche Vermutung äquivalent ist zur Aussage, daß es eine Konstante  $C$  gibt mit

$$|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| \leq C\sqrt{x} \log(x)$$

für hinreichend großes  $x$ , vergleiche etwa [Bru01]. Die Verträglichkeit dieser Vermutung mit dem Primzahlsatz zeigt Übung [AN1] 5.7.6. Wie bereits erwähnt finden wir bei  $x = 100000$  als Wert von  $\pi(x) \log(x)/x$  ungefähr 1,1 und bei  $x = 10^9$  ungefähr 1,05. Die entsprechenden Werte von  $\pi(x)/\operatorname{Li}(x)$  sind dahingegen ungefähr 0,991 und 0,99997.

*Beweis.* Für Realteil  $\operatorname{Re}(z) > 1$  folgt das mit 6.3.4 aus der Produktentwicklung. Um auch Nullstellen mit Realteil Eins auszuschließen, reicht es zu zeigen, daß die logarithmische Ableitung der  $\zeta$ -Funktion außer bei  $z = 1$  keine Polstellen auf der Geraden  $\operatorname{Re}(z) = 1$  hat. Für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  erhalten wir aus der Produktentwicklung für die logarithmische Ableitung der  $\zeta$ -Funktion mit 4.2.18 die Darstellung

$$\frac{d \log \zeta}{dz} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = - \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z - 1}$$

Wir wissen, daß diese Funktion nur einfache Polstellen  $q$  hat mit der jeweiligen Nullstellenordnung  $v_q(\zeta)$  der  $\zeta$ -Funktion als Residuum. Nun unterscheidet sich die rechte Seite von der einfacher handhabbaren Funktion

$$\Phi(z) := \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z}$$

nur um das Vorzeichen und um die Reihe

$$\sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z - 1} - \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z} = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z(p^z - 1)}$$

Diese Reihe konvergiert offensichtlich sogar auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$  kompakt gegen eine holomorphe Funktion. Mit der logarithmischen Ableitung der  $\zeta$ -Funktion hat also auch unsere Funktion  $\Phi$  eine meromorphe Fortsetzung auf die Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ , die nur einfache Polstellen  $q$  hat mit dem jeweiligen Residuum  $\operatorname{Res}_q \Phi = -v_q(\zeta)$ . Nun beachte man für alle  $\alpha > 0$  und  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} (p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2})^4 &= \Phi(1 + \varepsilon + 2i\alpha) + 4\Phi(1 + \varepsilon + i\alpha) \\ &\quad + 6\Phi(1 + \varepsilon) \\ &\quad + 4\Phi(1 + \varepsilon - i\alpha) + \Phi(1 + \varepsilon - 2i\alpha) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit  $\varepsilon > 0$ , lassen  $\varepsilon$  von oben gegen Null streben und beachten  $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$  und insbesondere  $v_q(\zeta) = v_{\bar{q}}(\zeta)$  nach 5.1.24, so erhalten wir

$$0 \leq -6v_1(\zeta) - 8v_{1+i\alpha}(\zeta) - 2v_{1+2i\alpha}(\zeta)$$

Wegen  $v_1(\zeta) = -1$  folgt dann sofort, daß die  $\zeta$ -Funktion keine Nullstellen mit Realteil Eins haben kann.  $\square$

7.1.13. Gegeben eine beschränkte meßbare Funktion  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  erklärt man eine holomorphe Funktion  $F$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , ihre **Laplace-Transformierte**, durch die Vorschrift

$$F(z) := \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

Daß diese Funktion tatsächlich holomorph ist, folgert man aus der Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral [AN3] 1.6.17 im Reellen, die wir im Fall der Fouriertransformation bereits beim Beweis von [AN3] 3.1.5 genauer ausgeführt hatten, unter Verwendung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen.

*Ergänzung 7.1.14.* Die Laplacetransformation wird allgemeiner für gewisse Borelmaße auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  erklärt. Sie ist bei der Lösung von Differentialgleichungen oft hilfreich, da sie diese in algebraische Gleichungen umwandelt. Man kann sie auch für meßbare Funktionen oder Borelmaße auf ganz  $\mathbb{R}$  untersuchen, muß dann aber, insbesondere wenn der Träger von  $f$  keine reelle untere Schranke hat, mehr Sorgfalt bei Konvergenzbetrachtungen walten lassen.

**Satz 7.1.15 (Taubersatz von Newman).** *Ist  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und meßbar und läßt sich die Laplacetransformierte  $F$  von  $f$  holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  fortsetzen, so gilt für den Wert bei Null dieser Fortsetzung die Formel*

$$F(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt$$

7.1.16. Der Trick zum Beweis des Primzahlsatzes 7.1.1 besteht dann darin, den Taubersatz von Newman auf die Funktion

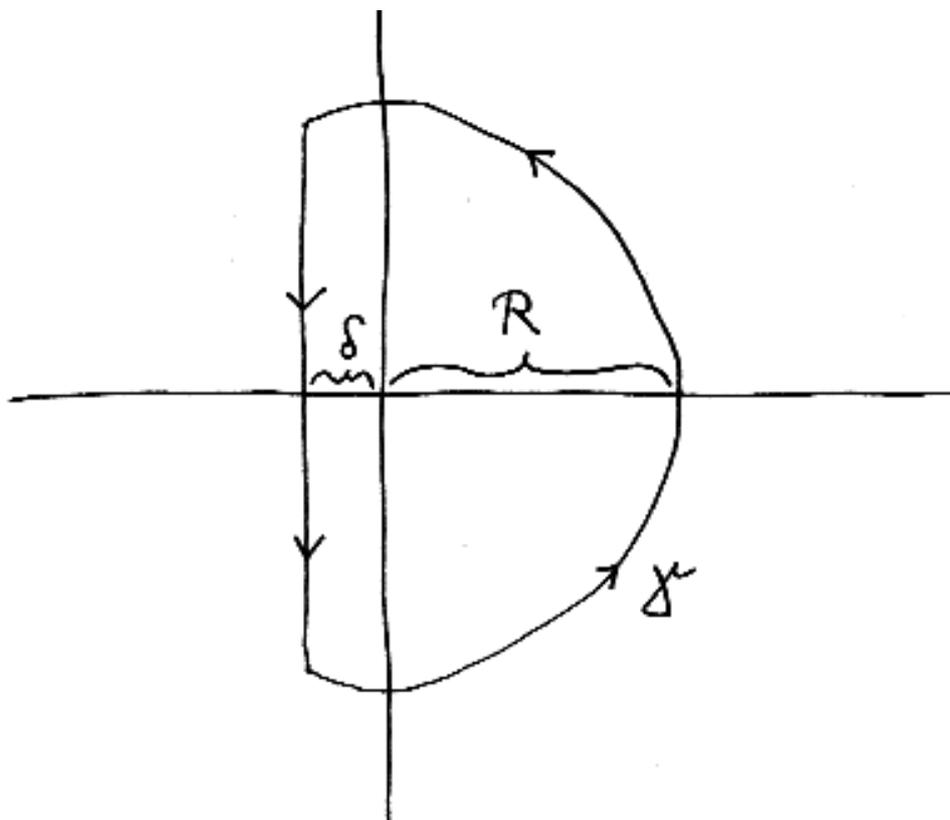
$$F(z) := \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$$

mit unserem  $\Phi$  aus dem Beweis von 7.1.9 anzuwenden. In der Tat wissen wir aus diesem Beweis, daß  $\Phi$  wie die logarithmische Ableitung der  $\zeta$ -Funktion zu einer meromorphen Funktion auf die offene Halbebene aller komplexen Zahlen mit Realteil  $> 1/2$  fortgesetzt werden kann und auf der Gerade  $\operatorname{Re} z = 1$  nur bei  $z = 1$  eine Polstelle hat mit dem Hauptteil  $1/(z-1)$ . Also hat  $F$  eine holomorphe Fortsetzung auf die Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > -1/2$ . Dann müssen wir unsere Funktion  $F$  als Laplace-Transformierte schreiben und die Bedingungen des Taubersatzes prüfen und danach auch noch den Primzahlsatz folgern, aber jetzt konzentrieren wir uns erst einmal auf den Beweis des Taubersatzes.

*Ergänzung 7.1.17.* Statt der Meßbarkeit von  $f$  ist für unsere Anwendung die elementarere Bedingung ausreichend, daß  $f$  stetig sein soll auf dem Komplement des Bildes einer streng monoton wachsenden Folge. Die Bezeichnung als „Taubersatz“ kommt von der vagen Analogie zum ursprünglichen Satz von Tauber her, den wir in [AN1] 6.4.4 diskutieren.

*Beweis.* Hier ist ein Film über den Taubersatz von Newman. Für  $T \in [0, \infty)$  und  $z \in \mathbb{C}$  setzen wir  $F_T(z) = \int_0^T f(t) e^{-zt} dt$ . Diese Funktionen sind sicher holomorph. Betrachten wir nun  $R > 0$  und wählen  $\delta > 0$  so klein, daß  $F$  sich holomorph fortsetzen läßt auf eine offene Menge, die

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R, \operatorname{Re} z \geq -\delta\}$$



Der Integralweg aus dem Beweis des Taubersatzes von Newman

umfaßt. Ist  $\gamma$  der Randweg dieses Gebiets, so liefert der Integralsatz von Cauchy

$$F(0) - F_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (F(z) - F_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}$$

Das Hinzufügen der beiden hinteren Faktoren ist ein Kunstgriff, dessen Herkunft ich nicht verstehe. Wir schätzen nun unser Wegintegral ab. Auf dem offenen Halbkreis  $|z| = R, \operatorname{Re} z > 0$ , ja sogar auch der ganzen offenen Halbebene  $\operatorname{Re} z > 0$ , finden wir unter der Annahme  $|f(t)| \leq B$  die Schranke

$$|F(z) - F_T(z)| = \left| \int_T^{\infty} f(t) e^{-zt} dt \right| \leq B \int_T^{\infty} |e^{-zt}| dt = \frac{B e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{\operatorname{Re} z}$$

Da für  $|w| = 1$  stets gilt  $|1 + w^2| = |w^{-1} + w| = 2|\operatorname{Re} w|$ , erhalten wir auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$  für den Betrag der hinteren Faktoren auf unserem Weg

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = e^{(\operatorname{Re} z)T} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R^2}$$

Das Integral über den Teil unseres Weges mit Realteil größer gleich Null ist also betragsmäßig beschränkt durch  $2\pi B/R$ . Das Integral über den Teil des Weges  $\gamma$  in der Halbebene  $\operatorname{Re} z \leq 0$  schätzen wir für  $F$  und für  $F_T$  separat ab. Da  $F_T$  holomorph ist auf ganz  $\mathbb{C}$ , können wir ebensogut das Integral über den Halbkreis  $|z| = R, \operatorname{Re} z \leq 0$  berechnen. Für  $\operatorname{Re} z < 0$  finden wir

$$|F_T(z)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| \leq B \int_0^T |e^{-zt}| dt \leq \frac{B e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{-\operatorname{Re} z}$$

und mit derselben Abschätzung wie zuvor ist dieser Anteil des Integrals betragsmäßig beschränkt durch  $2\pi B/R$ . Das Integral von

$$F(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}$$

über den Teil unseres Weges  $\gamma$ , der in der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  verläuft, strebt nun aber offensichtlich gegen Null für  $T \rightarrow \infty$ , da die Funktionenfolge  $e^{zn}$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) < 0$  kompakt gegen die Nullfunktion konvergiert und simultan beschränkt ist auf der abgeschlossenen Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ . Damit folgt, daß es für jedes  $R > 0$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $T(R, \varepsilon)$  gibt mit

$$T \geq T(R, \varepsilon) \Rightarrow |F(0) - F_T(0)| \leq \frac{2B}{R} + \varepsilon \quad \square$$

**7.1.18. Hier ist ein Film über die Struktur des Beweises des Primzahlsatzes.** Das folgende Lemma liefert in der uns interessierenden Anwendung des Taubersatzes die Beschränktheit der zu transformierenden Funktion.

**Lemma 7.1.19.** Für die Funktion  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und der Summe wie immer nur über Primzahlen  $p$  gibt es eine Konstante  $C$  mit  $\vartheta(x) \leq Cx \forall x \in [0, \infty)$ .

*Beweis.* Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} \geq \binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p = e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}$$

und damit  $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq 2n(\log 2)$ . Gegeben  $x \geq 0$  finden wir  $n \in \mathbb{N}$  mit  $2n \leq x < 2n + 2$  und folglich  $\vartheta(2n) \leq \vartheta(x) \leq \vartheta(2n) + \log(2n + 1)$  und  $\vartheta(n) = \vartheta(x/2)$ . Daraus folgt aber leicht

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - \vartheta(x/2) &\leq \vartheta(2n) - \vartheta(n) + \log(2n + 1) \\ &\leq 2n(\log 2) + \log(2n + 1) \\ &\leq x(\log 2) + \log(x + 1) \\ &\leq x((\log 2) + 1) \end{aligned}$$

und schließlich durch Aufsummieren  $\vartheta(x) \leq 2x(\log(2) + 1)$ .  $\square$

**Lemma 7.1.20.** Sei  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  wie im vorhergehenden Lemma. So existiert in  $\mathbb{R}$  der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$$

*Beweis.* Für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  können wir die Funktion  $\Phi(z)$  aus dem Beweis von 7.1.9 darstellen in der Form

$$\Phi(z) = \sum_{p \in P} \frac{\log p}{p^z} = z \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} dx = z \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-zt} dt$$

wobei wir uns das mittlere Integral für die zweite Gleichheit als die konvergente Reihe  $\sum_{p \in P} \int_p^\infty \frac{\log p}{x^{z+1}} dx$  geschrieben denken. Wären wir etwas gebildeter und wüßten, daß die Laplacetransformation Konvolutionen in Produkte verwandelt, so könnten wir auch von der offensichtlichen Darstellung von  $\Phi(z)$  als Laplace-Transformierte eines diskreten Maßes und von  $1/z$  als Laplace-Transformierte der konstanten Funktion 1 ausgehen und so die inverse Laplace-Transformierte von  $\Phi(z)/z$  finden. Substituieren wir  $z + 1$  für  $z$ , so ergibt sich für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  die Gleichung

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} = \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-t} e^{-zt} dt$$

und weiter

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty (\vartheta(e^t) e^{-t} - 1) e^{-zt} dt$$

Auf der linken Seite steht aber eine Funktion, die sich nach unseren Erkenntnissen im Beweis von 7.1.9 holomorph auf eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  fortsetzen läßt. Auf der rechten Seite ist  $(\vartheta(e^t) e^{-t} - 1)$  für  $t \in [0, \infty)$  betragsmäßig beschränkt nach 7.1.19. Also existiert nach dem Taubersatz 7.1.15 der Grenzwert  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \vartheta(e^t) e^{-t} - 1 dt$  und ist eine reelle Zahl. Substituieren wir nun wieder  $x = e^t$ , so folgt das Lemma.  $\square$

**Lemma 7.1.21.** Sei  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  wie im vorhergehenden Lemma. So gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x)/x = 1$$

*Beweis.* Gäbe es für  $\lambda > 1$  beliebig große  $x$  mit  $\vartheta(x) \geq \lambda x$ , so hätten wir für alle solchen  $x$  die Abschätzung

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - s}{s^2} ds = C(\lambda) > 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 7.1.20. Gäbe es für  $\lambda < 1$  beliebig große  $x$  mit  $\vartheta(x) \leq \lambda x$ , so fänden wir ähnlich für alle derartigen  $x$  die Abschätzung

$$\int_{\lambda x}^x \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda x}^x \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - s}{s^2} ds = c(\lambda) < 0$$

im Widerspruch zur Konvergenz des fraglichen Integrals nach 7.1.20.  $\square$

*Beweis des Primzahlsatzes 7.1.1.* Sicher haben wir stets

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{\{p \in P | p \leq x\}} \log x = \pi(x) \log(x)$$

Für jedes  $\varepsilon \in (0, 1)$  haben wir aber auch

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\geq \sum_{\{p \in P | x^{1-\varepsilon} < p \leq x\}} \log p \\ &\geq \sum_{\{p \in P | x^{1-\varepsilon} < p \leq x\}} (1 - \varepsilon)(\log x) \\ &\geq (1 - \varepsilon)(\log x)(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) \\ &\geq (1 - \varepsilon)(\log x)(\pi(x) - x^{1-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Teilen wir durch  $x$ , so ergibt sich wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x)/x = 1$  nach 7.1.21 daraus für alle  $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \geq 1 \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon) \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \quad \square$$

7.1.22. Bezeichnet man für reelles  $x$  mit  $\pi_2(x)$  die Zahl der **Primzahlzwillinge** unter  $x$ , also die Zahl derjenigen Primzahlen  $p \leq x$ , für die  $p - 2$  auch prim ist, so besteht die Vermutung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_2(x)(\log(x))^2}{x} = c$$

für eine reelle Konstante  $c > 0$ , die genauer gegeben sein sollte durch das unendliche über alle Primzahlen  $p$  zu verstehende Produkt  $c = 2 \prod_p (1 - (p - 1)^{-2})$ . Bisher (2005) weiß man jedoch noch nicht einmal, ob es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

*Quellen* 7.1.23. Die Darstellung in diesem Abschnitt hält sich eng an einen Artikel von Don Zagier im American Mathematical Monthly [Zag97], wo man auch zusätzliche Quellenangaben und interessante historische Anmerkungen finden kann. Eine stärker auf allgemeinen Methoden der Funktionalanalysis basierende Darstellung findet man zum Beispiel in Rudin's Funktionalanalysis [Rud73] als Anwendung anderer Taubersätze. Ein guter Zugang zu modernen Entwicklungen in der analytischen Zahlentheorie scheint mir [Kow04].

## 7.2 Primzahlen in Restklassen (19.7)

**Satz 7.2.1 (Primzahlen in Restklassen).** Gegeben teilerfremde natürliche Zahlen  $r < m$  gibt es stets unendlich viele Primzahlen  $p$ , die beim Teilen durch  $m$  den Rest  $r$  lassen, in Formeln  $p \in \mathbb{Z}m + r$ .

7.2.2. Hier ist ein Film zur die Aussage des Satzes über Primzahlen in Restklassen. Zum Beispiel gibt es unendlich viele Primzahlen, deren Dezimaldarstellung mit der Ziffer 3 endet. Der Beweis des Satzes wird erst ganz zu Ende dieses Abschnitts gegeben und stützt sich auf den Satz 7.2.7 über die meromorphen Fortsetzungen der sogenannten L-Reihen, die wir gleich einführen werden, sowie auf elementare Charaktertheorie, die wir im Anschluß besprechen. Den Beweis von 7.2.7 holen wir dann im anschließenden Abschnitt 7.3 über Dirichlet-Reihen nach.

7.2.3. Wir erinnern daran, daß man zu jedem Ring  $R$  seine Einheitengruppe  $R^\times$  bilden kann. Für  $m \in \mathbb{Z}$  erinnern wir weiter an den Restklassenring  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Für  $k \in \mathbb{Z}$  bezeichne  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  seine Restklasse.

**Definition 7.2.4.** Gegeben  $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$  und  $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  ein Gruppenhomomorphismus erklärt man eine holomorphe Funktion auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1$  durch die sogenannte **L-Reihe**

$$L(z, \chi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^z}$$

mit der Konvention  $\chi(k) := \chi(\bar{k})$  für  $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  und  $\chi(k) := 0$  sonst. Die Konvergenz der Reihe für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  ist unproblematisch, da unser Gruppenhomomorphismus notwendig in den Einheitswurzeln landet. Das Symbol  $L$  mag auf Dirichlet's Vornamen Lejeune zurückzuführen sein. [Hier ist ein Film über die Definition von L-Reihen.](#)

7.2.5. Wir führen nun die übliche an unsere Definition besonders gut angepaßte Begrifflichkeit ein. Sei  $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$  gegeben. Eine Abbildung  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein **Dirichlet-Charakter modulo  $m$** , wenn es einen Gruppenhomomorphismus  $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  gibt mit  $\chi(k) = \chi(\bar{k})$  für  $k$  teilerfremd zu  $m$  und  $\chi(k) = 0$  sonst. Unter dem **trivialen Dirichlet-Charakter modulo  $m$**  verstehen wir den Dirichletcharakter, der zum konstanten Gruppenhomomorphismus  $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  gehört und für den also gilt  $\chi(k) = 1$  für  $k$  teilerfremd zu  $m$  und  $\chi(k) = 0$  sonst.

**Lemma 7.2.6 (Produktdarstellung von L-Reihen).** *Gegeben  $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$  und  $\chi$  ein Dirichletcharakter modulo  $m$  besitzt die L-Reihe  $L(z, \chi)$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1$  die Darstellung als Produkt*

$$L(z, \chi) = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

*im Sinne der kompakten Konvergenz der Teilprodukte unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Das Produkt ist hier zu bilden über alle Primzahlen, die  $m$  nicht teilen.*

*Beweis.* Man beachte  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$  für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Mit dieser Erkenntnis kann der Beweis ebenso geführt werden wie im Fall der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion in 7.1.5. [Hier ist ein Film über die Produktzerlegung und Fortsetzbarkeit von L-Reihen, wie sie in diesem und im anschließenden Satz formuliert wird.](#)  $\square$

**Satz 7.2.7 (Fortsetzbarkeit von L-Reihen).** *Alle L-Reihen  $L(z, \chi)$  lassen sich meromorph auf die Halbebene  $\operatorname{Re} z > 0$  fortsetzen. Ist  $\chi$  nicht der triviale Charakter, so ist diese Fortsetzung holomorph und hat keine Nullstelle bei  $z = 1$ . Ist  $\chi$  der triviale Charakter, so hat diese Fortsetzung einen einfachen Pol bei Eins, der dann aber auch ihr einziger Pol ist.*

*Beweis.* Im Fall des trivialen Charakters zeigt die Produktentwicklung, daß unsere L-Reihe aus der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion entsteht durch das Wegteilen der Eulerfaktoren zu allen Primteilern von  $m$ . In diesem Fall folgt damit unsere Behauptung aus der entsprechenden Aussage für die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion 7.1.7. Den Beweis im Fall allgemeiner L-Reihen verschieben wir auf das Ende des anschließenden Abschnitts 7.3.  $\square$

*Vorschau 7.2.8.* Unsere L-Reihen lassen sich sogar meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen und erfüllen bemerkenswerte Funktionalgleichungen. Das soll aber hier nicht weiter ausgeführt werden.

7.2.9. Gegeben eine Gruppe  $G$  notieren wir  $\mathfrak{X}(G) := \text{Grp}(G, \mathbb{C}^\times)$  die Menge aller Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $\mathbb{C}^\times$ . Sie heißen die **Charaktere** oder genauer die **multiplikativen komplexen Charaktere** unserer Gruppe  $G$ . Offensichtlich bilden die Charaktere eine Untergruppe  $\mathfrak{X}(G) \subset \text{Ens}(G, \mathbb{C}^\times)$  in der Gruppe aller  $\mathbb{C}^\times$ -wertigen Abbildungen mit punktweiser Multiplikation als Verknüpfung. Wir nennen deshalb  $\mathfrak{X}(G)$  auch die **Charaktergruppe von  $G$** .

*Beispiel 7.2.10 (Charaktergruppen der zyklischen Gruppen).* Die Charaktere der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  für  $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  sind die Abbildungen  $\bar{n} \mapsto e^{2\pi i b n/a}$  für  $b \in \{0, \dots, a-1\}$ . Man überlegt sich leicht, daß für die Charaktergruppen der zyklischen Gruppen sogar gilt  $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ .

**Proposition 7.2.11 (Nichtverschwinden von Fourierkoeffizienten).** *Gegeben eine endliche abelsche Gruppe  $G$  ist die Menge  $\mathfrak{X}(G) \subset \text{Ens}(G, \mathbb{C})$  ihrer Charaktere eine Basis des Raums der komplexwertigen Funktionen auf unserer Gruppe und in der Darstellung*

$$\delta_g = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} a_g^\chi \chi$$

*der charakteristischen Funktion  $\delta_g$  eines beliebigen Gruppenelements  $g \in G$  als Linearkombination von Charakteren kommen stets alle Charaktere mit von Null verschiedenem Koeffizienten vor, in Formeln  $a_g^\chi \neq 0 \forall g \in G, \chi \in \mathfrak{X}(G)$ .*

*Andeutungen zum Beweis.* **Hier ist ein Film über das Nichtverschwinden von Fourierkoeffizienten.** Diese Proposition faßt im folgenden benötigte Aussagen zusammen, deren Beweis eigentlich in einen anderen Kontext gehört. Man mag sie als Konsequenz der in [AN3] 2.7.23 erklärten Aussagen zu Fourierreihen verstehen, wenn man diese auf den Fall diskreter Fouriergruppen spezialisiert. Man mag sie als Konsequenz der in [NAS] 4.3.6 erklärten Aussagen zu Charakteren endlicher Gruppen verstehen, wenn man diese auf den Fall endlicher abelscher Gruppen spezialisiert. Man mag sie explizit für endliche zyklische Gruppen prüfen und dann zeigen, daß unsere Proposition, wenn sie denn für zwei Gruppen gilt, auch für deren Produkt gelten muß. So kommt man auch zum Ziel, wenn man weiß, daß jede endliche abelsche Gruppe isomorph ist zu einem Produkt zyklischer Gruppen. Wie auch immer gehört der Beweis dieser Proposition in einen anderen Kontext und ich will an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen.  $\square$

7.2.12. Jede kurze exakte Sequenz  $K \hookrightarrow G \twoheadrightarrow H$  von endlichen abelschen Gruppen induziert eine kurze exakte Sequenz  $\mathfrak{X}(H) \hookrightarrow \mathfrak{X}(G) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(K)$  auf den Charaktergruppen. Man folgert das leicht aus der Identität  $|G| = |\mathfrak{X}(G)|$ , die ihrerseits unmittelbar aus unserer Proposition 7.2.11 folgt. Insbesondere induziert jede

Injektion von endlichen abelschen Gruppen eine Surjektion auf ihren Charaktergruppen.

*Beweis von 7.2.1.* Wir leiten nun den Satz über Primzahlen in Restklassen aus unserem Satz 7.2.7 über Fortsetzungen von L-Reihen her, dessen Beweis noch aussteht. **Hier ist ein Film über diese Herleitung.** Die logarithmischen Ableitungen unserer L-Reihen werden nach einfacher Rechnung für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  gegeben durch die nach 4.2.18 kompakt konvergenten Reihen

$$\frac{d \log L(z, \chi)}{dz} = - \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z - \chi(p)}$$

Die durch die Reihen auf der rechten Seite auf  $\operatorname{Re}(z) > 1$  definierten holomorphen Funktionen sind nach 7.2.7 beschränkt auf dem reellen Intervall  $(1, 2)$ , wenn  $\chi$  nicht konstant ist, und unbeschränkt auf  $(1, 2)$  für den konstanten Charakter. Dasselbe gilt für die holomorphen Funktionen, die durch die Ausdrücke

$$- \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z}$$

gegeben werden, denn deren Differenz zu den zuvor betrachteten logarithmischen Ableitungen wird gegeben durch die Reihen  $\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)^2 \log(p)}{p^z(p^z - \chi(p))}$ , die sogar auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 1/2$  holomorphe Funktionen definieren. Unsere Erkenntnisse 7.2.11 zum Nichtverschwinden von Fourierkoeffizienten liefern uns von Null verschiedene  $a_{\bar{r}}^\chi \in \mathbb{C}^\times$  derart, daß für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} a_{\bar{r}}^\chi \chi(n) = \begin{cases} 1 & \bar{n} = \bar{r}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  die Identität

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} a_{\bar{r}}^\chi \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p) \log(p)}{p^z} = \sum_{p \equiv r \pmod{m}} \frac{\log p}{p^z}$$

Links steht hier eine auf dem reellen Intervall  $(1, 2)$  unbeschränkte Funktion, da nach 7.2.7 für alle nichtkonstanten Charaktere die L-Reihe holomorph ist ohne Nullstelle bei Eins, für den konstanten Charakter jedoch meromorph mit einem Pol bei Eins, und da der entsprechende Vorfaktor  $a_{\bar{r}}^\chi$  nicht Null ist. Rechts steht folglich auch eine auf dem reellen Intervall  $(1, 2)$  unbeschränkte Funktion und insbesondere eine unendliche Summe.  $\square$

*Ergänzung 7.2.13.* Ein Dirichletcharakter modulo  $m$  liefert einen Dirichletcharakter modulo  $mn$  für jedes  $n \geq 1$  mittels dem vom offensichtlichen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  auf den Einheitengruppen induzierten Gruppenhomomorphismus  $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ . Gegeben ein Dirichletcharakter  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt das kleinste positive  $m$  derart, daß er von einem Gruppenhomomorphismus  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  herkommt, der **Führer von**  $\chi$ . Wir sagen dann auch,  $\chi$  sei ein **primitiver Dirichletcharakter modulo**  $m$ .

### 7.3 Dirichlet-Reihen (21.7)

7.3.1. Gegeben ein Zweig des Logarithmus  $\log$  auf einer Teilmenge  $U$  der komplexen Zahlenebene erklären wir für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto x^\lambda$  durch die Vorschrift  $x^\lambda = \exp(\lambda \log x)$ . Ich verwende vorerst den Buchstaben  $x$  für unsere komplexe Variable, weil ich mir den Buchstaben  $z$  für eine weitere komplexe Variable aufsparen will. Gegeben zwei Folgen  $a_k$  und  $\lambda(k)$  von komplexen Zahlen können wir auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  mithilfe unseres Hauptzweiges des Logarithmus die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda(k)}$$

bilden. Wir zeigen im Folgenden, daß sie sich für monoton wachsende Folgen  $\lambda(0) \leq \lambda(1) \leq \dots$  reeller Zahlen  $\lambda(k) \in \mathbb{R}$  sehr ähnlich verhält wie eine Potenzreihe. Genauer folgt aus der Konvergenz an einer Stelle  $x_0$  die kompakte Konvergenz auf dem Schnitt der offenen Kreisscheibe  $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < |x_0|\}$  mit unserer geschlitzten Ebene. Darüber hinaus ist dieser „Konvergenzradius“ derselbe für jede andersartig geschlitzte Ebene und jeden Zweig des Logarithmus auf einem derartigen Gebiet. Um diese Mehrdeutigkeiten aufzulösen, substituiert man sinnvoll gleich  $x = e^{-z}$  und erhält so eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda(k)z}$$

Reihen dieser Gestalt mit komplexen Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  und einer monoton wachsenden Folge von reellen Zahlen  $\lambda(0) \leq \lambda(1) \leq \lambda(2) \leq \dots$  heißen **Dirichlet-Reihen**. Zum Beispiel wird die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion durch die über  $k \geq 1$  zu summierende Dirichletreihe mit  $a_k = 1$  für alle  $k$  und  $\lambda(k) = \log(k)$  gegeben. Man kann die durch eine Dirichletreihe erklärte Funktion im Standardfall einer streng monotonen Folge  $\lambda(k)$  im Übrigen auch auffassen als die Laplacetransformierte im Sinne von 7.1.13 des diskreten komplexen Maßes, das jedem Punkt  $\lambda(k)$  die Masse  $a_k$  zuweist. Wir formulieren und beweisen die

bisher behaupteten Aussagen nun als eigenständigen Satz. **Hier ist ein Film über allgemeine Eigenschaften von Dirichletreihen.**

**Satz 7.3.2 (Konvergenzbereiche von Dirichletreihen).** *Konvergiert eine Dirichletreihe an einer Stelle  $z_0 \in \mathbb{C}$ , so konvergiert sie auch für alle komplexen Zahlen  $z$  mit größerem Realteil  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$  und die Konvergenz ist für beliebiges  $r \geq 0$  gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Winkelsegment*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \operatorname{Re}(z - z_0)\}$$

7.3.3. Insbesondere ist der Konvergenzbereich einer Dirichletreihe im wesentlichen eine Halbebene und genauer eine Menge der Gestalt  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > c\}$  für  $c \in \mathbb{R}$ , wobei man über die Konvergenz auf der Randgeraden im allgemeinen keine Aussagen machen kann. Im Unterschied zu Potenzreihen kann es durchaus vorkommen, daß eine Dirichletreihe auf einem Teil ihrer Konvergenzhalbebene nicht absolut konvergiert. Genauer sieht man leicht, daß auch der Bereich der absoluten Konvergenz einer Dirichletreihe eine Menge der Gestalt  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > c_{\text{abs}}\}$  für  $c_{\text{abs}} \in \mathbb{R}$ , wobei man über die absolute Konvergenz auf der Randgeraden im allgemeinen wieder keine Aussagen machen kann. Zum Beispiel zeigen wir im folgenden, daß unsere L-Reihen zu nichtkonstantem Charakter für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  konvergieren, aber man sieht sehr leicht, daß diese Konvergenz nur für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  absolut ist.

*Beweis.* Dieser Beweis verallgemeinert den Beweis des abelschen Grenzwertsatzes [AN1] 6.4.2. Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda(k)z}$  unsere Dirichletreihe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $z_0 = 0$  annehmen. Wir kürzen  $e^{-\lambda(k)z} = b_k$  ab und schreiben die Differenzen von Partialsummen unserer Reihe in der Gestalt

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda(k)z} &= \sum_{k=n}^m a_k b_k \\ &= (b_n - b_{n+1}) a_n \\ &\quad + (b_{n+1} - b_{n+2}) (a_n + a_{n+1}) \\ &\quad + (b_{n+2} - b_{n+3}) (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &\quad \quad \quad \dots \quad \dots \\ &\quad + (b_{m-1} - b_m) (a_n + \dots + a_{m-1}) \\ &\quad + b_m (a_n + \dots + a_{m-1} + a_m) \end{aligned}$$

Jetzt beachte man für  $x := \operatorname{Re} z > 0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda(n)z} - e^{-\lambda(n+1)z}| &= \left| z \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-tz} dz \right| \\ &\leq |z| \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-tx} dx \\ &\leq \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda(n)x} - e^{-\lambda(n+1)x}) \end{aligned}$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  finden wir wegen der Konvergenz bei  $z = 0$  sicher ein  $N$  derart, daß für alle  $\nu, \mu$  mit  $N \leq \nu \leq \mu$  gilt  $|a_\nu + \dots + a_\mu| \leq \varepsilon$ . Für alle  $z$  mit  $x = \operatorname{Re}(z) > 0$  folgt dann für alle  $n, m$  mit  $N \leq n \leq m$  die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda(k)z} \right| \leq \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda(n)x} - e^{-\lambda(m)x}) \varepsilon + e^{-\lambda(m)x} \varepsilon$$

Für  $z = 0$  wird derselbe Ausdruck schlicht durch  $\varepsilon$  selbst abgeschätzt und zusammen ergibt sich daraus die behauptete gleichmäßige Konvergenz auf Bereichen  $0 \leq |z| \leq rx$  für jede feste Steigung  $r$  der den Winkel nach oben begrenzenden Geraden.  $\square$

**Proposition 7.3.4 (Hinreichende Bedingung für Konvergenz).** *Sind bei einer Dirichletreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda(k)z}$  die Summen  $\sum_{k=n}^m a_k$  simultan betragsmäßig beschränkt und gilt  $\lambda(k) \rightarrow \infty$ , so konvergiert die Reihe für  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .*

*Beweis.* Ist  $B$  unsere simultane Schranke, so erhalten wir wie im vorhergehenden Beweis für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 0$  dieselbe Abschätzung mit  $B$  statt  $\varepsilon$  und damit folgt aus unserer Annahme  $\lambda(k) \rightarrow \infty$  die Konvergenz.  $\square$

**7.3.5. Hier ist ein Film über die holomorphe Fortsetzbarkeit von L-Reihen zu nichttrivialen Charakteren.** Für nichttriviale Charaktere  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  einer endlichen Gruppe  $G$  folgt aus  $\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(hg) = \chi(h) \sum_{g \in G} \chi(g)$  sofort  $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$ . Aus unserer hinreichenden Bedingung 7.3.4 für die Konvergenz von Dirichletreihen folgt sofort, daß L-Reihen für nichttriviale Dirichletcharaktere  $\chi$  sogar auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > 0$  konvergieren. Das liefert ihre in 7.2.7 behauptete Fortsetzbarkeit zu holomorphen Funktionen auf dieser Halbebene. Die in 7.2.7 behauptete meromorphe Fortsetzbarkeit im Fall des trivialen Dirichletcharakters haben wir bereits direkt im Anschluß an die Formulierung unseres Satzes gezeigt. Der Satz über die Fortsetzungen 7.2.7 ist damit bewiesen bis auf die Behauptung, daß die holomorphen Fortsetzungen im Falle nichttrivialer Dirichletcharaktere bei Eins nicht verschwinden.

**Satz 7.3.6 (Konvergenzbereiche im Fall nichtnegativer Koeffizienten).** *Konvergiert eine Dirichletreihe  $\sum a_k e^{-\lambda(k)z}$  mit nichtnegativen Koeffizienten  $a_k \geq 0$  auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > r$  und läßt sich die so erklärte Funktion holomorph auf eine Umgebung von  $r$  fortsetzen, so konvergiert unsere Reihe sogar auf einer echt größeren Halbebene  $\operatorname{Re}(z) > r - \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$ .*

7.3.7. Dieser Satz ist eine Variante unserer Erkenntnis [AN1] 6.2.9 über den Konvergenzradius einer Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten und auch der Beweis ist im wesentlichen derselbe. In der Sprache der Funktionentheorie kann

man diese Erkenntnis dahingehend formulieren, daß eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten und Konvergenzradius mindestens  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , deren Summe sich holomorph auf eine Umgebung von  $r$  fortsetzen läßt, einen echt größeren Konvergenzradius als  $r$  haben muß.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $r = 0$  und für alle  $k$  gelte  $\lambda(k) \geq 0$ . Nach Annahme finden wir  $\varepsilon > 0$  derart, daß die durch unsere Dirichletreihe definierte Funktion  $f$  sich holomorph auf eine offene Umgebung der Kreisscheibe  $|z - 1| \leq 1 + \varepsilon$  fortsetzen läßt. Die Taylorentwicklung liefert dann

$$f(-\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} (-1 + \varepsilon)^\nu$$

im Sinne absoluter Konvergenz. Die fraglichen Ableitungen hinwiederum ergeben sich zu

$$f^{(\nu)}(1) = \sum a_k (-\lambda(k))^\nu e^{-\lambda(k)}$$

auch im Sinne absoluter Konvergenz, da alle Terme dasselbe Vorzeichen haben. Folglich gilt

$$\sum_{k,\nu} \frac{a_k}{\nu!} (1 + \varepsilon)^\nu (\lambda(k))^\nu e^{-\lambda(k)} < \infty$$

Nach Zusammenfassen der Summen über  $\nu$  in Exponentialreihen ergibt sich

$$\sum_k a_k e^{(1+\varepsilon)\lambda(k)} e^{-\lambda(k)} = \sum_k a_k e^{\lambda(k)\varepsilon} < \infty$$

alias die Konvergenz der Dirichletreihe bei  $z = -\varepsilon$ . □

*Beweis von 7.2.7.* Hier ist ein Film über die Nichtnullstelleneigenschaft von L-Reihen zu nichttrivialen Charakteren bei  $z = 1$ . Daß die L-Reihe zum trivialen Charakter eine meromorphe Fortsetzung hat wie behauptet, ergibt sich wie bereits bemerkt aus der entsprechenden Aussage 7.1.7 für die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion, die ja bis auf endlich viele Faktoren durch dasselbe Eulerprodukt dargestellt wird. Daß die anderen L-Reihen holomorphe Fortsetzungen haben, haben wir schon in 7.3.5 bemerkt. Um schließlich zu zeigen, daß die anderen Reihen keine Nullstellen bei  $z = 1$  haben, reicht es zu zeigen, daß das Produkt

$$\zeta_m(z) = \prod_{\chi} L(z, \chi)$$

einen Pol hat bei  $z = 1$ . Dieses Produkt ist nun für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  das Produkt über alle zu  $m$  teilerfremden Primzahlen  $p \nmid m$  der endlichen Produkte

$$\prod_{\chi} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

Nun beachten wir im Polynomring  $\mathbb{C}[T]$  die Zerlegung

$$(T^g - 1) = \prod_{\xi^g=1} (T - \xi)$$

Bezeichnet  $\varphi = \varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$  die Ordnung unserer Gruppe und  $g(p)$  die Ordnung des Elements  $\bar{p}$  in  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  und  $f(p)$  die Kardinalität der Restklassengruppe nach dem Erzeugnis  $\langle \bar{p} \rangle$  von  $\bar{p}$ , so daß also gilt  $\varphi = f(p)g(p)$ , so finden wir mit der Beschreibung 7.2.10 der Charaktere zyklischer Gruppen und der Fortsetzbarkeit 7.2.12 der Charaktere von Untergruppen zu Charakteren der ganzen Gruppe unschwer

$$\prod_{\chi} (T - \chi(p)) = (T^{g(p)} - 1)^{f(p)}$$

Indem wir auf beiden Seiten  $T^\varphi$  wegteilen und  $T = p^z$  einsetzen ergibt sich

$$\prod_{\chi} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p^{g(p)z}}\right)^{-f(p)}$$

Multiplizieren wir alle diese Produkte für  $p \nmid m$ , so erhalten wir offensichtlich für  $\operatorname{Re}(z) > 1$  eine Darstellung von  $\zeta_m(z)$  durch eine Dirichletreihe der Gestalt

$$\zeta_m(z) = \sum_{k \geq 1} a_k k^{-z}$$

mit  $a_k \in \mathbb{N}$ . Hätte die Funktion  $\zeta_m(z)$  keinen Pol bei  $z = 1$ , so wäre sie holomorph für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  und nach 7.3.6 müßte dann auch ihre Dirichletreihe konvergieren für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Nun ist der  $p$ -Faktor von  $\zeta_m$  jedoch  $(1 + p^{-g(p)z} + p^{-2g(p)z} + \dots)^{f(p)}$  und hat dieselben oder größere Koeffizienten vor den entsprechenden  $p$ -Potenzen wie die Reihe

$$(1 + p^{-\varphi z} + p^{-2\varphi z} + \dots)$$

mit  $\varphi$  wie oben. Die Dirichletreihe von  $\zeta_m(z)$  hat also dieselben oder größere Koeffizienten wie die Reihe

$$\sum_{\langle n, m \rangle = 1} n^{-\varphi z}$$

und diese Reihe divergiert für  $z = \varphi^{-1}$  selbst dann, wenn wir nur über prime  $n$  summieren. Dieser Widerspruch beendet den Beweis.  $\square$

*Quellen* 7.3.8. Die hier gegebene Darstellung lehnt sich an den Cours d'Arithmétique von Serre [Ser70] an.

## 7.4 Summen von drei Quadraten

**Satz 7.4.1.** *Eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist genau dann eine Summe von drei Quadraten  $n = x^2 + y^2 + z^2$  mit  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , wenn sie nicht die Gestalt  $n = 4^r(8s + 7)$  hat für  $r, s \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* In  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  sind 0, 1, 4 die einzigen Quadrate. Mithin ist 7 in  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  keine Summe von drei Quadraten. Damit kann auch  $8s + 7$  in  $\mathbb{Z}$  nie eine Summe von drei Quadraten sein. In  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  sind weiter 0, 1 die einzigen Quadrate. Die einzige Darstellung von 0 in  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  als Summe von drei Quadraten ist folglich  $0 = 0+0+0$ . Ist mithin  $n = x^2 + y^2 + z^2$  durch vier teilbar, so sind auch  $x^2, y^2, z^2$  durch vier teilbar und damit  $x, y, z$  gerade. Genau dann ist also  $4n$  eine Summe von drei Quadraten, wenn  $n$  eine Summe von drei Quadraten ist. Das zeigt sowohl, daß  $n = 4^r(8s + 7)$  nie eine Summe von drei Quadraten sein kann, als auch, daß wir zum Beweis des Satzes nur noch zu prüfen brauchen, daß sich alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ , die nicht von der Gestalt  $n = 8s + 7$  sind, als Summe von drei Quadraten schreiben lassen. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich  $n$  quadratfrei und  $n > 1$  annehmen. Nach [LA2] 4.4.38 kann jede positiv definite symmetrische Bilinearformen auf  $\mathbb{Z}^3$ , deren Fundamentalmatrix Determinante Eins hat, durch einen Basiswechsel in das Standardskalarprodukt überführt werden. Es reicht also zu zeigen, daß es für  $n \in \mathbb{N}$  von der Gestalt  $n = 8s + 7$  eine positiv definite Matrix mit Determinante Eins der Gestalt

$$M := \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 0 \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}$$

gibt. Die fragliche Determinante ergibt sich zu  $\det M = n(ac - b^2) - c$ . Gilt zusätzlich zu  $\det M = 1$  noch  $ac - b^2 > 0$ , so folgt aus  $n > 1$  bereits  $c > 0$  und nach dem Hurwitz-Kriterium ist erst der Block oben links und dann sogar die ganze Matrix positiv definit. Es reicht also, für  $n > 1$  von der Gestalt  $n = 8s + 7$  ganze Zahlen  $a, b, c$  zu finden mit  $1 = n(ac - b^2) - c$  und  $ac - b^2 > 0$ . Nochmal anders gesagt reicht es,  $d > 0$  so zu finden, daß  $-d$  ein quadratischer Rest ist modulo  $nd - 1$ , denn dann können wir  $c := nd - 1$  nehmen und dazu  $a, b$  finden derart, daß die obigen Gleichungen erfüllt sind. Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1:  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Dann finden wir nach dem Satz über Primzahlen in Restklassen 7.2.1 unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $p \equiv n - 1 \pmod{4n}$  und finden insbesondere  $v > 0$  mit  $p = n(4v + 1) - 1$  prim. Wir behaupten, daß dann  $d := 4v + 1$  unser Problem löst. Nun, wir finden  $nd - 1 = p$  und unsere Annahme an  $n$  zeigt  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Die Frage, ob  $-d$  ein Quadrat ist modulo  $p$ , läßt sich mit Legendre-Symbolen und ihren Rechenregeln [AL] 4.5.18, [AL] 4.5.11 lösen

durch die Rechnung

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{4v+1}{p}\right) = \left(\frac{p}{4v+1}\right) = \left(\frac{-1}{4v+1}\right) = 1$$

wegen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und  $p = n(4v+1) - 1$  und der Formel für Jacobi-Symbole mit  $-1$  im Zähler. Also ist  $-d$  ein Quadrat modulo  $nd - 1$ .

Fall 2:  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Dann ist  $(3n-1)/2$  ungerade und teilerfremd zu  $4n$  und wir finden nach dem Satz über Primzahlen in Restklassen 7.2.1 eine Primzahl  $p$  der Gestalt  $p = 4nv + (3n-1)/2$  mit  $v \in \mathbb{N}$ , also mit  $2p = n(8v+3) - 1$ . Wir behaupten, daß dann  $d := 8v+3$  unser Problem löst. Wir müssen also zeigen, daß  $-d$  ein Quadrat ist modulo  $2p = nd - 1$ . Zur Vorbereitung dieser Rechnung bemerken wir

$$\left(\frac{-2}{8v+3}\right) = \left(\frac{-1}{8v+3}\right) = \left(\frac{2}{8v+3}\right) = (-1)(-1) = 1$$

nach unseren Formeln für Jacobi-Symbole und unterteilen dann unseren Fall in zwei Unterfälle.

Fall 2a:  $n \equiv 1 \pmod{8}$ . Dann folgt  $2p \equiv 2 \pmod{8}$  und  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und es reicht zu zeigen, daß  $-(8v+3)$  ein Quadrat ist modulo  $p$ , da ja jede Zahl ein Quadrat ist modulo Zwei. Dazu rechnen wir

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{8v+3}{p}\right) = \left(\frac{p}{8v+3}\right) = \left(\frac{-2p}{8v+3}\right) = \left(\frac{1}{8v+3}\right) = 1$$

wegen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und der Vorbemerkung und in der Tat ist  $-(8v+3)$  ein Quadrat modulo  $p$ .

Fall 2b:  $n \equiv 5 \pmod{8}$ . Dann folgt  $2p \equiv 6 \pmod{8}$  und  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Es reicht wieder zu zeigen, daß  $-d$  ein Quadrat ist modulo  $p$ , da ja jede Zahl ein Quadrat ist modulo Zwei. Dazu rechnen wir

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = -\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{p}{8v+3}\right) = \left(\frac{-2p}{8v+3}\right) = \left(\frac{1}{8v+3}\right) = 1$$

wegen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und der Vorbemerkung und in der Tat ist  $-(8v+3)$  ein Quadrat modulo  $p$ .

Fall 3:  $n \equiv 3 \pmod{8}$ . Dann ist  $(n-1)/2$  ungerade und teilerfremd zu  $4n$  und wir finden nach dem Satz über Primzahlen in Restklassen 7.2.1 eine Primzahl  $p$  der Gestalt  $p = 4nv + (n-1)/2$  für  $v \in \mathbb{N}$  alias  $2p = n(8v+1) - 1$ . Wir finden  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Nun behaupten wir, daß  $d := 8v+1$  unser Problem löst.

Wir müssen also zeigen, daß  $-d$  ein Quadrat ist modulo  $2p = nd - 1$ . Es reicht wieder zu zeigen, daß  $-d$  ein Quadrat ist modulo  $p$ , da ja jede Zahl ein Quadrat ist modulo Zwei. Dazu rechnen wir

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{p}{8v+1}\right) = \left(\frac{-2p}{8v+1}\right) = \left(\frac{1}{8v+1}\right) = 1$$

wegen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und dem Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole und in der Tat ist  $-(8v+1)$  ein Quadrat modulo  $p$ .  $\square$

*Quellen 7.4.2.* In der hier wiedergegebenen Form stammt der Beweis von Mordell [Mor58] mit verschiedenen Überarbeitungen.

## **8 Danksagung**

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Frau Sandrine Gumbel, Herr Christian Rein, Herr Nils Kornacker, . . .

## Literatur

- [AL] **Skriptum Algebra und Zahlentheorie.** Wolfgang Soergel.
- [AN1] **Skriptum Analysis 1.** Wolfgang Soergel.
- [AN2] **Skriptum Analysis 2.** Wolfgang Soergel.
- [AN3] **Skriptum Analysis 3.** Wolfgang Soergel.
- [Bru01] Jan Hendrik Bruinier. Primzahlen, Teilersummen und die Riemannsche Vermutung. *Math. Semesterberichte*, 48:79–92, 2001.
- [Con78] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York-Berlin, 1978, 1978.
- [EIN] **Skriptum Einstimmung.** Wolfgang Soergel.
- [EL] **Skriptum Elementargeometrie.** Wolfgang Soergel.
- [For77] Otto Forster. *Riemannsche Flächen*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Heidelberger Taschenbücher, Band 184.
- [GR] **Skriptum Grundlagen.** Wolfgang Soergel.
- [KAG] **Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie.** Wolfgang Soergel.
- [Kow04] Emmanuel Kowalski. *Un cours de théorie analytique des nombres*, volume 13 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, 2004.
- [LA1] **Skriptum Lineare Algebra 1.** Wolfgang Soergel.
- [LA2] **Skriptum Lineare Algebra 2.** Wolfgang Soergel.
- [ML] **Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen.** Wolfgang Soergel.
- [Mor58] Louis Joel Mordell. On the representation of a number as a sum of three squares. *Revue de mathématiques pures et appliquées*, 1958.
- [NAS] **Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie.** Wolfgang Soergel.
- [Rud73] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.
- [Ser70] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1970. Englische Übersetzung: *A course in arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics 7, Springer, New York NY u. a. 1973,.

- [TF] [Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie](#). Wolfgang Soergel.
- [TG] [Skriptum Garbenkohomologie](#). Wolfgang Soergel.
- [TM] [Skriptum Topologie und kompakte Gruppen](#). Wolfgang Soergel.
- [TS] [Skriptum Singuläre Homologie](#). Wolfgang Soergel.
- [Zag97] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly*, 104(8):705–708, 1997.

## **Indexvorwort**

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das  $\cup$  dem Buchstaben u oder das  $\subset$  dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa  $\zeta$  unter z und  $\omega$  unter o.

## Index

- $\simeq$  homotop, 41
- Ableitung
  - komplexe, 18
  - logarithmische, 28, 90
- achsenparalleles Rechteck, 38
- antiholomorph, 28
- Bernoulli-Zahlen, 115
- Betafunktion, Euler'sche, 122
- Bewertung
  - von meromorpher Funktion, 89
- biholomorph
  - Einbettung, 26
  - Identifikation, 123
- $\mathbb{C}$  komplexe Zahlen, 4
- Cauchy-Abschätzung, 72
- Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, 23
- Charakter
  - multiplikativer komplexer, 139
- Charaktergruppe, 139
- cos Cosinus
  - komplexer, 14
- Dilogarithmus, 77
- Dirichlet
  - Charakter, 138
- Dirichlet-Reihen, 141
- Dirichletcharakter
  - primitiver, 141
- Dreiecksungleichung
  - für komplexen Absolutbetrag, 9
- einfach zusammenhängend
  - in Funktionentheorie, 45
- Elementargebiet, 80
- Euler-Faktor, 128
- Euler-Konstante, 120
- Euler-Mascheroni-Konstante, 120
- frei homotop, 51
- Führer
  - von Dirichletcharakter, 141
- Funktion
  - ganze, 64, 88
  - meromorphe, 84
- Funktionalgleichung
  - der  $\zeta$ -Funktion, 129
  - der Gammafunktion, 119
- $\Gamma$ -Funktion, 119
- Gammafunktion, 119
- ganz
  - Funktion, 64
- ganze Funktion, 88
- Gebiet, 80
- Goursat
  - Satz von, 64
- halboffen
  - in reellem affinen Raum, 21
- harmonisch
  - Funktion auf euklidischer Ebene, 105
- Hauptteil, 88, 113
- Hauptzweig des Logarithmus, 14
- hebbare Singularität, 83
- holomorph
  - Funktion, 18
- holomorphe Funktion
  - mit Singularitäten, 83
- homotop, 41
  - mit festen Endpunkten, 41
  - Wege, 41
- Homotopie
  - von Wegen, 41

$i$  Wurzel aus  $-1$  in  $\mathbb{C}$ , 4  
 Imaginärteil  
     bei komplexen Zahlen, 7  
 Integral  
     stetige vektorwertige Funktion  
     über kompaktes Intervall, 29  
 Integrationsweg  
     Funktionentheorie, 33  
 Inversion, 9  
 isoliert  
     Nullstelle, 74  
 isolierte Singularität, 83  
  
 kompakt  
     konvergent, 70  
 komplex differenzierbar, 18  
 komplexe Exponentialfunktion, 12  
 komplexe Zahlen, 4  
     vergeßliche, 4  
 konjugierte komplexe Zahl, 7  
 Konvergenz  
     normale, 70  
 Konvergenzradius  
     im Komplexen, 69  
 Kovektorfeld  
     vektorwertige, 58  
 Kreis  
     verallgemeinerter, 9  
 Kreisgruppe, 9  
  
 L-Reihe, 137  
 Laplace-Transformierte, 131  
 Laplaceoperator  
     im  $\mathbb{R}^n$ , 105  
 Legendre  
     Verdopplungsformel, 123  
 $\text{Li}_n(z)$   $n$ -Logarithmus, 77  
 Liouville  
     Satz von, 64  
 logarithmische Ableitung, 28, 90  
 Logarithmus  
      $n$ -Logarithmus, 77  
     Hauptzweig des komplexen, 14  
     komplexer, 27  
  
 $\mathcal{M}^{\text{an}}$  meromorphe Funktionen, 85  
 Maximumsprinzip, 75  
     schwache Form, 67  
 meromorph  
     Funktion, 84  
  
 Norm  
     einer komplexen Zahl, 7  
 normal konvergent, 70  
 Nullstelle  
     isolierte, 74  
     nichtisolierte, 74  
  
 $\mathcal{O}^{\text{an}}$  holomorphe Funktionen, 77  
 Ordnung  
     einer Nullstelle, 74  
  
 Poisson-Kern, 110  
 Polordnung  
     in Funktionentheorie, 83  
 Polstelle  
     in Funktionentheorie, 83  
 Polylogarithmus, 77  
 Potenzreihe, 69  
 primitiv  
     Dirichletcharakter, 141  
 Primzahlsatz, 128  
 Primzahlzwillinge, 137  
 Produktentwicklung, 117  
  
 Randintegral, 38  
 Randweg, 38  
 Realteil  
     bei komplexen Zahlen, 7  
 Rechteck, 38  
 Residuum, 93  
 Riemann  
      $\zeta$ -Funktion, 128

- Riemann'sche Vermutung, 130
- Riemannsumme
  - für vektorwertige Funktion, 29
- Rouché, Satz von, 98
- $S^1$  Einheitskreis, 9
- $S^1$  versus  $U(1)$ , 9
- schleifenfüllend, 43
- Schwarz'sches Lemma, 75
- Schwarz'sches Spiegelungsprinzip, 67
- sin Sinus
  - komplexer, 14
- Singularität
  - in Funktionentheorie
    - hebbare, 83
    - isolierte, 83
    - wesentliche, 83
- Spiegelungsformel
  - der  $\Gamma$ -Funktion, 120
- Spiegelungsprinzip
  - Funktionentheorie, 67
- Stammfunktion, 30
- Tate-Twist von  $\mathbb{Z}$ , 91
- Taylorreihe
  - in der Funktionentheorie, 71
- $U(1)$  versus  $S^1$ , 9
- Um für Umlaufzahl, 91
- Umlaufzahl
  - eines Weges
    - in der Zahlenebene, 91
- vektorwertig
  - Kovektorfeld, 58
- vergeßliche komplexe Zahlen, 4
- $v_p$  Bewertung, 89
- Wallis'sche Produktformel, 116
- Weg, 41
  - geschlossener, 43
  - kompakter, 41
  - normierter, 41
  - zusammenziehbarer, 43
- Wegintegral
  - komplexes, längs beliebigem Weg, 48
  - komplexes, längs Integrationsweg, 33
  - vektorwertiges, 60
- Wegzusammenhang, 17
- wesentlich
  - Singularität, 83
- Windungszahl, 91
- Wirtinger-Ableitung, 61
- $\mathfrak{X}(G)$  Charaktere
  - von abstrakter Gruppe, 139
- $\mathbb{Z}(1)$  Tate-Twist von  $\mathbb{Z}$ , 91
- $\zeta$ -Funktion
  - Riemann'sche, 128
- Zahl
  - komplexe, 4
- Zahlenebene, 4
- Zetafunktion
  - Riemann'sche, 128
- zusammenhängend
  - topologischer Raum, 17
- zusammenziehbar
  - geschlossener Weg, 43
- Zweige des Logarithmus, 27