Einstimmung und Grundbegriffe

Wolfgang Soergel

16. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einstimmung

1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel

Satz 1.1.1. *Für jede natürliche Zahl* $n \geq 1$ *gilt* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beispiel 1.1.2. Im Fall $n = 5$ behauptet unser Satz etwa $1+2+3+4+5 = 5\times 6/2$ und in diesem Fall stimmt das schon mal: Beide Seiten sind 15. Man bemerke hier, daß wir beim Rechnen mit Symbolen wie etwa $n(n+1)$ die Multiplikationssymbole weggelassen haben, die beim Rechnen mit durch Ziffern dargestellten Zahlen so wesentlich sind.

Beweis. Bei diesem Beweis sollen Sie gleichzeitig das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** lernen. Wir bezeichnen mit $A(n)$ die Aussage, daß die Formel im Satz für ein gegebenes n gilt, und zeigen:

Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist richtig. In der Tat gilt die Formel $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Aus der Aussage $A(n)$ folgt die Aussage $A(n+1)$. In der Tat, unter der Annahme, daß unsere Formel für ein gegebenes n gilt, der sogenannten **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und folgern so, daß die Formel auch für $n+1$ gilt.

Es ist damit klar, daß unsere Aussage $A(n)$ richtig ist alias daß unsere Formel gilt für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. $\square$

1.1.3. Das Zeichen $\square$ deutet in diesem Text das Ende eines Beweises an und ist in der neueren Literatur weit verbreitet. Buchstaben in Formeln werden in der Mathematik üblicherweise kursiv notiert, so wie etwa das n oder auch das A im vorhergehenden Beweis. Nur Buchstaben oder Buchstabenkombinationen, die stets dasselbe bedeuten sollen, schreibt man nicht kursiv, wie etwa $\sin$ für den Sinus oder $\log$ für den Logarithmus.

1.1.4. Der vorhergehende Beweis stützt sich auf unser intuitives Verständnis der natürlichen Zahlen. Man kann das Konzept der natürlichen Zahlen auch formal einführen und so die natürlichen Zahlen in gewisser Weise „besser" verstehen. Das wird in 2.3.39 und ausführlicher in [LA1] 3.2.5 diskutiert. Das Wort „Induktion" meint eigentlich „Hervorrufen", so wie etwa das Betrachten einer Wurst die Ausschüttung von Spucke induziert alias uns den Mund wässrig macht. Im Zusammenhang der vollständigen Induktion ist es dahingehend zu verstehen, daß die Richtigkeit unserer Aussage $A(1)$ die Richtigkeit von $A(2)$ induziert, die Richtigkeit von $A(2)$ hinwiederum die Richtigkeit von $A(3)$, die Richtigkeit von $A(3)$ die Richtigkeit von $A(4)$, und immer so weiter.

1.1.5. Es herrscht keine Einigkeit in der Frage, ob man die Null eine natürliche Zahl nennen soll. In diesem Text ist stets die Null mit gemeint, wenn von natürlichen Zahlen die Rede ist. Wollen wir die Null dennoch ausschließen, so sprechen wir wie oben von einer „natürlichen Zahl $n \geq 1$“.

1.1.6. Ich will kurz begründen, warum es mir natürlich scheint, auch die Null eine natürliche Zahl zu nennen: Hat bildlich gesprochen jedes Kind einer Klasse einen Korb mit Äpfeln vor sich und soll seine Äpfel zählen, so kann es ja durchaus vorkommen, daß in seinem Korb gar kein Apfel liegt, weil es zum Beispiel alle seine Äpfel bereits gegessen hat. In der Begrifflichkeit der Mengenlehre ausgedrückt, die wir in 2.1 einführen werden, muß man die leere Menge endlich nennen, wenn man erreichen will, daß jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Will man dann zusätzlich erreichen, daß die Kardinalität jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl ist, so darf man die Null nicht aus den natürlichen Zahlen herauslassen.

1.1.7. Man kann sich den Satz anschaulich klar machen als eine Formel für die Fläche eines Querschnitts für eine Treppe der Länge n mit Stufenabstand und Stufenhöhe eins. In der Tat bedeckt ein derartiger Querschnitt ja offensichtlich ein halbes Quadrat der Kantenlänge n nebst n halben Quadraten der Kantenlänge Eins. Ein weiterer Beweis geht so:

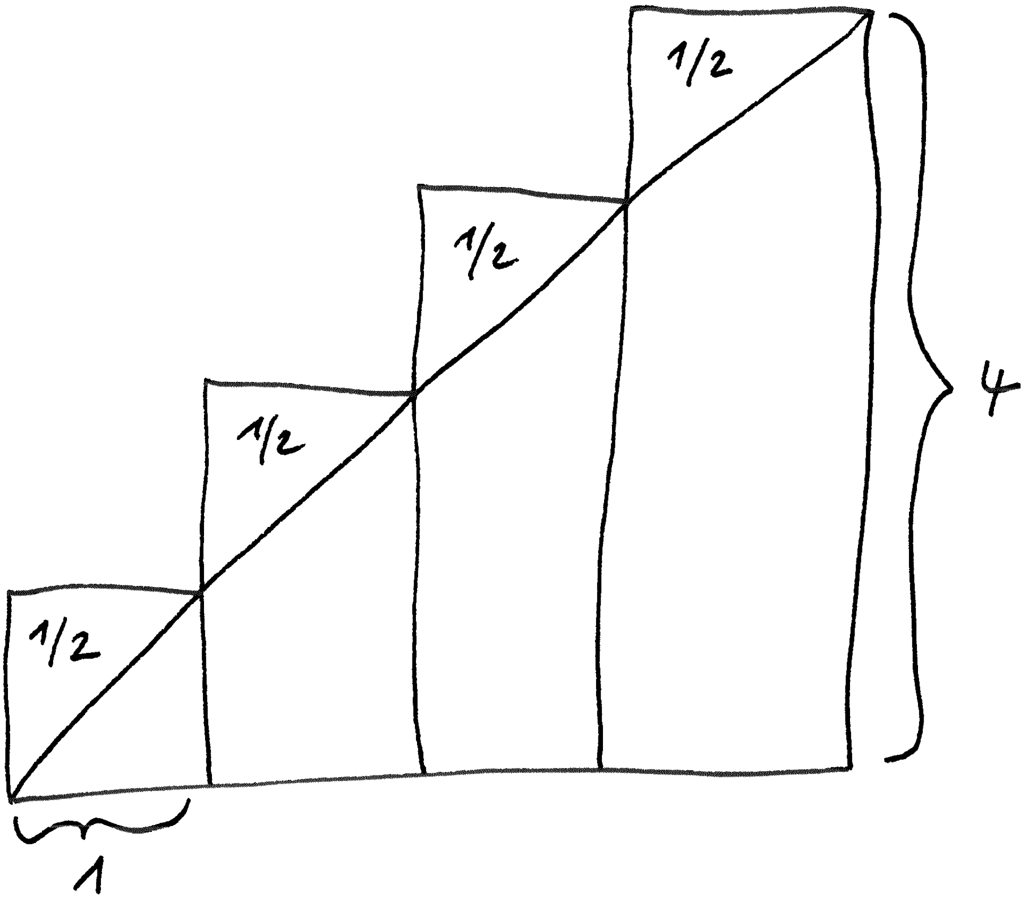
$$\begin{array}{rcccccc} 1+2+\ldots+n & = & 1/2 & + \quad 2/2 & + \ldots & + \, n/2 \\ & & + \, n/2 & +(n-1)/2 & + \ldots & + \, 1/2 \\ & = & \frac{n+1}{2} & + \quad \frac{n+1}{2} & + \ldots & + \, \frac{n+1}{2} \\ & = & n(n+1)/2 & & & \end{array}$$

Ich will diesen Beweis benutzen, um eine neue Notation einzuführen.

Definition 1.1.8. Gegeben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Das Symbol $\sum$ ist ein großes griechisches S und steht für „Summe“. Das Symbol $:=$ deutet an, daß die Bedeutung der Symbole auf der doppelpunktbehafteten Seite des Gleichheitszeichens durch den Ausdruck auf der anderen Seite unseres



Die Gesamtfläche dieses Treppenquerschnitts ist offensichtlich
$4^2/2 + 4/2 = 4 \cdot 5/2$

Gleichheitszeichens definiert ist. Im obigen und ähnlichen Zusammenhängen heißen $a_1, \dots, a_n$ die **Summanden** und i der **Laufindex**, da er eben etwa in unserem Fall von 1 bis n läuft und anzeigt alias „indiziert“, welcher Summand gemeint ist.

1.1.9 (**Zur Sprache in der Mathematik**). Das Wort „Definition“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „Abgrenzung“. In Definitionen versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen. Sie werden merken, daß man in der Mathematik die Angwohnheit hat, in Definitionen Worte der Umgangssprache wie Menge, Gruppe, Körper, Unterkörper, Abbildung etc. „umzuwidmen“ und ihnen ganz spezielle und meist nur noch entfernt mit der umgangssprachlichen Bedeutung verwandte neue Bedeutungen zu geben. In mathematischen Texten sind dann überwiegend diese umgewidmeten Bedeutungen gemeint. In dieser Weise baut die Mathematik also wirklich ihre eigene Sprache auf, bei der jedoch die Grammatik und auch nicht ganz wenige Wörter doch wieder von den uns geläufigen Sprachen übernommen werden. Das muß insbesondere für den Anfänger verwirrend sein, der sich auch bei ganz harmlos daherkommenden Wörtern stets wird fragen müssen, ob sie denn nun umgangssprachlich gemeint sind oder vielmehr bereits durch eine Definition festgelegt wurden. Um hier zu helfen, habe ich mir große Mühe mit dem Index gegeben, den Sie ganz am Schluß dieses Skriptums finden, und in dem alle an verschiedenen Stellen eingeführten oder umgewidmeten und dort fett gedruckten Begriffe verzeichnet sein sollten. Und an dieser Stelle muß ich Sie schon bitten, das Wort „Index“ nicht als Laufindex mißzuverstehen. . .

Beispiel 1.1.10. In der $\sum$-Notation liest sich der in 1.1.7 gegebene Beweis so:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^n i & = & \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} \\
 & & \text{und nach Indexwechsel } i = n+1-k \text{ hinten} \\
 & = & \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{2} \\
 & & \text{dann mache } k \text{ zu } i \text{ in der zweiten Summe} \\
 & = & \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{2} \\
 & & \text{und nach Zusammenfassen beider Summen} \\
 & = & \sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2} \\
 & & \text{ergibt sich offensichtlich} \\
 & = & n(\frac{n+1}{2})
\end{array}$$

Beispiel 1.1.11. Einen anderen Beweis derselben Formel liefert die folgende von der Mitte ausgehend zu entwickelnde Gleichungskette:

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=0}^n 2i + 1 = 2\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 = n + 1 + 2\sum_{i=0}^n i$$

Definition 1.1.12. In einer ähnlichen Bedeutung wie $\sum$ verwendet man auch das Symbol $\prod$, ein großes griechisches P, für „Produkt“ und schreibt

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 a_2 \dots a_n$$

Die $a_1, \dots, a_n$ heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen die **Faktoren** des Produkts.

Definition 1.1.13. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ definieren wir die Zahl $n!$ (sprich: n **Fakultät**) durch die Formel

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung $0! := 1$ und haben also $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ und so weiter.

Ergänzung 1.1.14 (**Leere Summen und Produkte**). Wir werden in Zukunft noch öfter Produkte mit überhaupt keinem Faktor zu betrachten haben und vereinbaren deshalb gleich hier schon, daß Produkten, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 1 zugewiesen werden soll, also etwa $1 = \prod_{i=1}^{0} i = 0!$. Ebenso vereinbaren wir auch, daß Summen, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 0 zugewiesen werden soll, so daß wir in Erweiterung unserer Formel 1.1.1 etwa schreiben könnten $0 = \sum_{i=1}^{0} i$. Der Sinn dieser Erweiterungen zeigt sich darin, daß damit Formeln wie $\sum_{i=k}^{l} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{l} a_i$ auch für $m = k - 1$ richtig bleiben. Man mag sogar noch weiter gehen und die Definition von Summen auf beliebige untere und obere Grenzen so erweitern, daß diese Formeln richtig bleiben. In dieser Allgemeinheit ist die fragliche Notation jedoch nur beim kontinuierlichen Analogon $\int$ des Summenzeichens üblich, wie in [AN1] 4.2.10 ausgeführt werden wird.

Satz 1.1.15 (Bedeutung der Fakultät). *Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

Beispiel 1.1.16. Es gibt genau $3! = 6$ Möglichkeiten, die drei Buchstaben a, b und c in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

In gewisser Weise stimmt unser Satz sogar für $n = 0$: In der Terminologie, die wir in [AN1] 1.3 einführen, gibt es in der Tat genau eine Anordnung der leeren Menge.

Beweis. Hat man n voneinander verschiedene Objekte, so hat man n Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen, dann $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Zweites auszusuchen und so weiter, bis schließlich nur noch eine Möglichkeit bleibt, ein Letztes auszusuchen. Insgesamt haben wir also in der Tat wie behauptet $n!$ mögliche Reihenfolgen. □

Definition 1.1.17. Wir definieren für beliebiges n und jede natürliche Zahl k den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (sprich: n **über** k) durch die Regeln

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{n(n-1)\dots \quad (n-k+1)}{k(k-1)\dots \quad\quad 1} \text{ für } k \geq 1 \text{ und } \binom{n}{0} := 1.$$

Der Sonderfall $k = 0$ wird im Übrigen auch durch unsere allgemeine Formel gedeckt, wenn wir unsere Konvention 1.1.14 beherzigen. Im Lichte des folgenden Satzes schlage ich vor, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ statt „n über k“ inhaltsreicher „k aus n“ zu sprechen.

1.1.18. Die Bezeichnung als Binomialkoeffizienten leitet sich von dem Auftreten dieser Zahlen als Koeffizienten in der „binomischen Formel“ 1.1.23 ab.

Satz 1.1.19 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten). *Gegeben natürliche Zahlen n und k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n voneinander verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.*

Beispiel 1.1.20. Es gibt genau $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ Möglichkeiten, aus den vier Buchstaben a, b, c, d zwei auszuwählen, nämlich

$$\begin{array}{lll} a,b & b,c & c,d \\ a,c & b,d & \\ a,d & & \end{array}$$

Beweis. Wir haben n Möglichkeiten, ein erstes Objekt auszuwählen, dann $n-1$ Möglichkeiten, ein zweites Objekt auszuwählen, und so weiter, also insgesamt $n(n-1)\dots(n-k+1)$ Möglichkeiten, k Objekte *der Reihe nach* auszuwählen. Auf die Reihenfolge, in der wir ausgewählt haben, kommt es uns aber gar nicht an, jeweils genau $k!$ von unseren $n(n-1)\dots(n-k+1)$ Möglichkeiten führen nach 1.1.15 also zur Auswahl derselben k Objekte. Man bemerke, daß unser Satz auch im Extremfall $k = 0$ noch stimmt, wenn wir ihn geeignet interpretieren: In der Terminologie, die wir gleich einführen werden, besitzt in der Tat jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge. □

1.1.21. Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq k$ die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Das folgt einerseits sofort aus der formalen Definition und ist andererseits auch klar nach der oben erklärten Bedeutung der Binomialkoeffizienten: Wenn wir aus n Objekten k Objekte auswählen, so bleiben $n-k$ Objekte übrig. Es gibt demnach gleichviele Möglichkeiten, k Objekte auszuwählen, wie es Möglichkeiten gibt, $n-k$ Objekte auszuwählen. Wir haben weiter $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ sowie $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Definition 1.1.22. Wie in der Schule setzen wir $a^k := \prod_{i=1}^{k} a$. In Worten ist also gemeint „das Produkt von k-mal dem Faktor a“Im Lichte von 1.1.14 verstehen wir insbesondere $a^0 := 1$.

Satz 1.1.23. *Für jede natürliche Zahl n gilt die* **binomische Formel**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.1.24. Man beachte, wie wichtig unsere Konvention $a^0 = 1$ und insbesondere auch $0^0 = 1$ für die Gültigkeit dieser Formel ist.

1.1.25. Die Bezeichung „binomische Formel“ leitet sich ab von der Vorsilbe „bi“ für Zwei, wie etwa in englisch „bicycle“ für „Zweirad“ alias „Fahrrad“, und dem lateinischen Wort „nomen“ für „Namen“. Mit den beiden „Namen“ sind hier a und b gemeint. Mehr dazu wird in [AN1] 2.3.9 erklärt.

Erster Beweis. Beim Ausmultiplizieren erhalten wir so oft $a^k b^{n-k}$, wie es Möglichkeiten gibt, aus unseren n Faktoren $(a+b)$ die k Faktoren auszusuchen, „in denen wir beim Ausmultiplizieren das b nehmen“. Dieses Argument werden wir in 2.2.17 noch besser formulieren. □

Zweiter Beweis. Dieser Beweis ist eine ausgezeichnete Übung im Umgang mit unseren Symbolen und mit der vollständigen Induktion. Er scheint mir jedoch auch in einer für Beweise durch vollständige Induktion typischen Weise wenig durchsichtig. Zunächst prüfen wir für beliebiges n und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

durch explizites Nachrechnen. Dann geben wir unserer Formel im Satz den Namen $A(n)$ und prüfen die Formel $A(0)$ und zur Sicherheit auch noch $A(1)$ durch

Hinsehen. Schließlich gilt es, den Induktionsschritt durchzuführen, als da heißt, $A(n+1)$ aus $A(n)$ zu folgern. Dazu rechnen wir

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^{n+1} & = & (a+b)(a+b)^n \\
& & \text{und mit der Induktionsvoraussetzung} \\
& = & (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
& & \text{und durch Ausmultiplizieren} \\
& = & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
& & \text{und Indexwechsel } k = i-1 \text{ in der ersten Summe} \\
& = & \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
& & \text{dann mit } k \text{ statt } i \text{ und Absondern von Summanden} \\
& = & a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \\
& & \qquad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\, a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
& & \text{und nach Zusammenfassen der mittleren Summen} \\
& = & a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
& & \text{und Einbeziehen der abgesonderten Summanden} \\
& = & \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{array}$$

und folgern so tatsächlich $A(n+1)$ aus $A(n)$. □

1.1.26. Die Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $k \geq 1$ kann man zur effektiven Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascal'schen Dreieck** benutzen: Im Schema

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl in der Mitte berechne sich als die Summe ihrer beiden oberen „Nachbarn". Dann stehen in der $(n+1)$-ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \ldots$, bis $\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$. Wir haben also zum Beispiel

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Übungen

Ergänzende Übung 1.1.27. Man zeige: Ist p eine Primzahl und n nicht durch p teilbar und $e \geq 0$ eine natürliche Zahl, so ist $\binom{p^e n}{p^e}$ auch nicht durch p teilbar. Hinweis: Man möge bei der Lösung dieser Übung bereits die Erkenntnis verwenden, daß eine Primzahl ein Produkt nur teilen kann, wenn sie einen der Faktoren teilt. Ein Beweis dieser Tatsache wird in [LA1] 3.4.15 nachgeholt werden.

Übung 1.1.28. Man finde und beweise eine Formel für $\sum_{i=1}^n i^2$. Hinweis: Man suche zunächst eine Formel für $\sum_{i=1}^n i^3 - (i-1)^3$ und beachte $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$.

Ergänzende Übung 1.1.29. Man zeige, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Formel der Gestalt $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$ gilt mit $a_\kappa \in \mathbb{Q}$.

1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff

1.2.1. Ich beginne mit einigen Beispielen für eine mathematische Struktur, die ihnen im weiteren Verlauf des Studiums „Vektorraum“ geläufig werden wird.

Beispiel 1.2.2. Die **Fibonacci-Folge**

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$$

entsteht, indem man mit $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ beginnt und dann jedes weitere Folgenglied als die Summe seiner beiden Vorgänger bildet. Wir suchen nun für die Glieder f_i dieser Folge eine geschlossene Darstellung. Dazu vereinbaren wir, daß wir Folgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit der Eigenschaft $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ **Folgen vom Fibonacci-Typ** nennen wollen. Kennen wir die beiden ersten Glieder einer Folge vom Fibonacci-Typ, so liegt natürlich bereits die gesamte Folge fest. Nun bemerken wir, daß für jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ und jedes α auch die Folge $\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ ist, und daß für jede weitere Folge $y_0, y_1, y_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ auch die gliedweise Summe $(x_0 + y_0), (x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots$ eine Folge vom Fibonacci-Typ ist. Der Trick ist dann, danach zu fragen, für welche β die Folge $x_i = \beta^i$ vom Fibonacci-Typ ist. Das ist ja offensichtlich genau dann der Fall, wenn gilt $\beta^2 = \beta + 1$, als da heißt für $\beta_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Für beliebige c, d ist mithin die Folge

$$x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$$

vom Fibonacci-Typ, und wenn wir c und d bestimmen mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, so ergibt sich eine explizite Darstellung unserer Fibonacci-Folge. Wir suchen also c und d mit

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c + d \\ 1 & = & c\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + d\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right) \end{array}$$

und folgern leicht $c = -d$ und $1 = c\sqrt{5}$ alias $c = 1/\sqrt{5} = -d$. Damit ergibt sich schließlich für unsere ursprüngliche Fibonacci-Folge die explizite Darstellung

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i$$

Im übrigen ist der zweite Summand hier immer kleiner als $1/2$, so daß wir f_i auch beschreiben können als diejenige ganze Zahl, die am nächstem am ersten Summanden liegt. Es wäre rückblickend natürlich ein Leichtes gewesen, diese Formel einfach zu „raten“ um sie dann mit vollständiger Induktion 1.1.1 zu beweisen. Diese Art mathematischer Zaubertricks halte ich jedoch für unehrenhaft. Ich werde deshalb stets nach Kräften versuchen, das Tricksen zu vermeiden, auch wenn die Beweise dadurch manchmal etwas länger werden sollten. Eine Möglichkeit, auch den letzten verbleibenden Trick aus den vorhergehenden Überlegungen zu eliminieren, zeigt [LA1] 4.6.17. Die bei unserer Lösung auftretende reelle Zahl $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ist im Übrigen auch bekannt als „goldener Schnitt“ aus Gründen, die in nebenstehendem Bild diskutiert werden. In [AN1] 2.6.15 dürfen Sie dann zur Übung zeigen, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also genauer und in Formeln für unsere Fibonacci-Folge $f_0, f_1, f_2, \ldots$ von oben gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Beispiel 1.2.3. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3y + 7z & = & 0 \\ 4x + y + 5z & = & 0 \end{array}$$

Wie man die Menge L aller Lösungen (x, y, z) ermittelt, sollen sie später in dieser Vorlesung lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Sind (x, y, z) und (x', y', z') Lösungen, so ist auch ihre komponentenweise Summe $(x + x', y + y', z + z')$ eine Lösung;

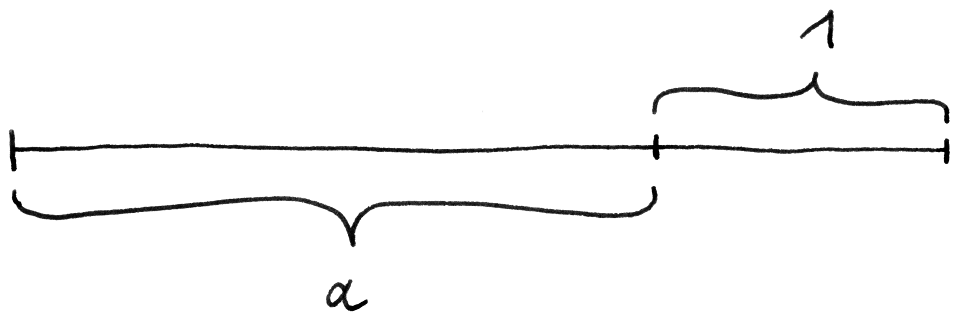
2. Ist (x, y, z) eine Lösung und α eine reelle Zahl, so ist auch das komponentenweise Produkt $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ eine Lösung.

Beispiel 1.2.4. Wir betrachten die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar sind und der Differentialgleichung

$$f'' = -f$$

genügen. Lösungen sind zum Beispiel die Funktionen $\sin, \cos$, die Nullfunktion oder auch die Funktionen $f(x) = \sin(x+a)$ für konstantes a. Wie man die Menge L aller Lösungen beschreiben kann, sollen Sie nicht hier lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Mit f und g ist auch die Funktion $f + g$ eine Lösung;



Der **goldene Schnitt** ist das Verhältnis, in dem eine Strecke geteilt werden muß, damit das Verhältnis vom größeren zum kleineren Stück gleich dem Verhältnis des Ganzen zum größeren Stück ist, also die positive Lösung der Gleichung $a/1 = (1 + a)/a$ alias $a^2 - a - 1 = 0$, also $a = (1 + \sqrt{5})/2$.

2. Ist f eine Lösung und α eine reelle Zahl, so ist auch αf eine Lösung.

Beispiel 1.2.5. Wir betrachten die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafelebene. Graphisch stellen wir solch eine Parallelverschiebung dar durch einen Pfeil von irgendeinem Punkt zu seinem Bild unter der Verschiebung. Im nebenstehenden Bild stellen etwa alle gepunktelten Pfeile dieselbe Parallelverschiebung dar. Was für ein Ding diese Gesamtheit P aller Parallelverschiebungen eigentlich ist, scheint mir recht undurchsichtig, aber einiges ist a priori klar:

1. Sind p und q Parallelverschiebungen, so ist auch ihre „Hintereinanderausführung“ $p \circ q$, sprich „p nach q“, eine Parallelverschiebung.

2. Ist α eine reelle Zahl und p eine Parallelverschiebung, so können wir eine neue Parallelverschiebung αp bilden, das „α-fache von p“. Bei negativen Vielfachen vereinbaren wir hierzu, daß eine entsprechende Verschiebung in die Gegenrichtung gemeint ist.

3. Führen wir eine neue Notation ein und schreiben für die Hintereinanderausführung $p \dotplus q := p \circ q$, so gelten für beliebige Parallelverschiebungen p, q, r der Tafelebene und beliebige reelle Zahlen α, β die Formeln

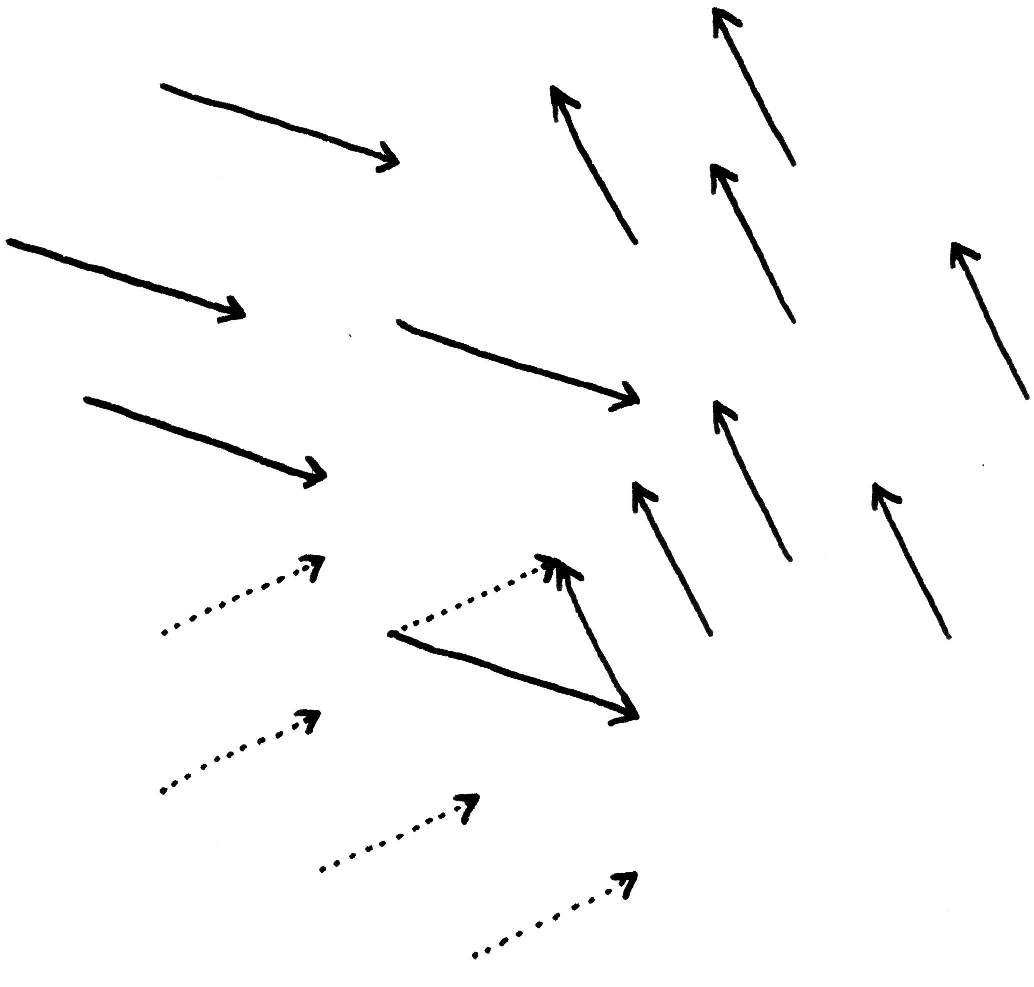
$$\begin{array}{ccc} (p \dotplus q) \dotplus r & = & p \dotplus (q \dotplus r) \\ p \dotplus q & = & q \dotplus p \\ \alpha(\beta p) & = & (\alpha\beta)p \\ (\alpha + \beta)p & = & (\alpha p) \dotplus (\beta p) \\ \alpha(p \dotplus q) & = & (\alpha p) \dotplus (\alpha q) \end{array}$$

Will man sich die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafelebene anschaulich machen, so tut man im Übrigen gut daran, einen Punkt als „Ursprung“ auszuzeichnen und jede Parallelverschiebung mit dem Punkt der Tafelebene zu identifizieren, auf den unsere Parallelverschiebung diesen Ursprung abbildet.

Beispiel 1.2.6. Analoges gilt für die Gesamtheit der Parallelverschiebung des Raums unserer Anschauung und auch für die Gesamtheit aller Verschiebungen einer Geraden und, mit noch mehr Mut, für die Gesamtheit aller Zeitspannen.

1.2.7. Die Formeln unserer kleinen Formelsammlung von 1.2.5.3 gelten ganz genauso auch für die Lösungsmenge unserer Differentialgleichung $f'' = -f$, wenn wir $f \dotplus g := f + g$ verstehen, für die Lösungsmenge unseres linearen Gleichungssystems, wenn wir

$$(x, y, z) \dotplus (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$



Die Hintereinanderausführung der beiden Parallelverschiebungen der Tafel- oder hier vielmehr der Papierebene, die durch die durchgezogenen Pfeile dargestellt werden, wird die durch die gepunktelten Feile dargestellt.

als „komponentenweise Addition“ verstehen, und für die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ, wenn wir ähnlich die Summe $+$ zweier Folgen erklären. Ein wesentliches Ziel der Vorlesungen über lineare Algebra ist es, einen abstrakten Formalismus aufzubauen, dem sich alle diese Beispiele unterordnen. Dadurch soll zweierlei erreicht werden:

1. Unser abstrakter Formalismus soll uns dazu verhelfen, die uns als Augentieren und Nachkommen von Ästehüpfern angeborene räumliche Anschauung nutzbar zu machen zum Verständnis der bis jetzt gegebenen Beispiele und der vielen weiteren Beispiele von Vektorräumen, denen Sie im Verlauf Ihres Studiums noch begegnen werden. So werden sie etwa lernen, daß man sich die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ durchaus als Ebene vorstellen darf und die Menge aller Folgen mit vorgegebenem Folgenglied an einer vorgegebenen Stelle als eine Gerade in dieser Ebene. Suchen wir also alle Folgen vom Fibonacci-Typ mit zwei vorgegebenen Folgengliedern, so werden wir im allgemeinen genau eine derartige Lösung finden, da sich eben zwei Geraden aus einer Ebene im allgemeinen in genau einem Punkt schneiden. In diesem Licht betrachtet soll der abstrakte Formalismus uns also helfen, a priori unanschauliche Fragestellungen der Anschauung zugänglich zu machen. Ich denke, diese Nähe zur Anschauung ist auch der Grund dafür, daß die lineare Algebra meist an den Anfang des Studiums gestellt wird: Von der Schwierigkeit des Formalismus her gesehen gehört sie nämlich keineswegs zu den einfachsten Gebieten der Mathematik, hier würde ich eher an Gruppentheorie oder Graphentheorie oder dergleichen denken.

2. Unser abstrakter Formalismus soll so unmißverständlich sein und seine Spielregeln so klar, daß Sie in die Lage versetzt werden, alles nachzuvollziehen und mir im Prinzip und vermutlich auch in der Realität Fehler nachzuweisen. Schwammige Begriffe wie „Tafelebene“ oder „Parallelverschiebung des Raums“ haben in einem solchen Formalismus keinen Platz mehr. In diesem Licht betrachtet verfolgen wir mit dem Aufbau des abstrakten Formalismus auch das Ziel einer großen Vereinfachung durch die Reduktion auf die Beschreibung einiger weniger Aspekte der uns umgebenden in ihrer Komplexität kaum präzise faßbaren Wirklichkeit.

Die lineare Algebra hat in meinen Augen mindestens drei wesentliche Aspekte: Einen **geometrischen Aspekt**, wie ihn das Beispiel 1.2.5 der Gesamtheit aller Parallelverschiebungen illustriert; einen **algorithmischen Aspekt**, unter den ich das Beispiel 1.2.3 der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems und insbesondere explizite Verfahren zur Bestimmung dieser Lösungsmenge einordnen würde; und einen **abstrakt-algebraischen Aspekt**, zu dem etwa die folgende Definition 1.2.8 gehört, eine Art gedankliches Skelett, das Algorithmik und Geometrie verbindet und Brücken zu vielen weiteren Anwendungen schafft, die man dann auch als das Fleisch auf diesem Gerippe ansehen mag. Ich will im Verlauf meiner

Vorlesungen zur linearen Algebra versuchen, diese drei Aspekte zu einer Einheit zu fügen. Ich hoffe, daß Sie dadurch in die Lage versetzt werden, eine Vielzahl von Problemen mit den verbundenen Kräften Ihrer räumlichen Anschauung, Ihrer algorithmischen Rechenfähigkeiten und Ihres abstrakt-logischen Denkens anzugehen. Als Motivation für den weiteren Fortgang der Vorlesungen über lineare Algebra beschreibe ich nun das „Rückgrat unseres Skeletts“ und formuliere ohne Rücksicht auf noch unbekannte Begriffe und Notationen die abstrakte Definition eines reellen Vektorraums.

Definition 1.2.8. Ein **reeller Vektorraum** ist ein Tripel bestehend aus den folgenden drei Dingen:

1. Einer Menge V;
2. Einer Verknüpfung $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v \dot{+} w$, die die Menge V zu einer abelschen Gruppe macht;
3. Einer Abbildung $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$,

derart, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\beta v) & = & (\alpha\beta)v \\ (\alpha + \beta)v & = & (\alpha v) \dot{+} (\beta v) \\ \alpha(v \dot{+} w) & = & (\alpha v) \dot{+} (\alpha w) \\ 1v & = & v \end{array}$$

Hier ist nun viel zu klären: Was ist eine Menge? Eine Verknüpfung? Eine abelsche Gruppe? Eine Abbildung? Was bedeuten die Symbole $\times$, $\to$, $\mapsto$, $\in$, $\mathbb{R}$? Wir beginnen in der nächsten Vorlesung mit der Klärung dieser Begriffe und Notationen.

1.2.9. Bereits hier will ich jedoch die Symbole α und β erklären: Sie heißen „Alpha“ und „Beta“ und sind die beiden ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, das ja auch nach ihnen benannt ist. Bei der Darstellung von Mathematik hilft es, viele verschiedene Symbole und Symbolfamilien zur Verfügung zu haben. Insbesondere werden die griechischen Buchstaben oft und gerne verwendet. Ich schreibe deshalb hier zum Nachschlagen einmal das griechische Alphabet auf. In der ersten Spalte stehen der Reihe nach die griechischen Kleinbuchstaben, dahinter die zugehörigen Großbuchstaben, dann ihr lateinisches Analogon soweit vorhanden, und schließlich, wie man diesen griechischen Buchstaben auf Deutsch benennt und spricht.

α	A	a	alpha
β	B	b	beta
γ	Γ	g	gamma
δ	Δ	d	delta
ϵ, ε	E	e	epsilon
ζ	Z	z	zeta
η	H	ä	eta
θ, ϑ	Θ	th	theta
ι	I	i	iota
κ	K	k	kappa
λ	Λ	l	lambda
μ	M	m	my, sprich „mü“
ν	N	n	ny, sprich „nü“
ξ	Ξ	x	xi
o	O	o	omikron
π	Π	p	pi
ρ, ϱ	P	r	rho
σ, ς	Σ	s	sigma
τ	T	t	tau
υ	Υ	y	ypsilon
ϕ, φ	Φ	f	phi
χ	X	ch	chi
ψ	Ψ	ps	psi
ω	Ω	oh	omega

Übungen

Übung 1.2.10. Ein Kredit von 10000 Euro wird am Ende jeden Jahres mit einem jährlichen Zinssatz von 5% auf die jeweilige Restschuld verzinst und der Kreditnehmer zahlt zu Beginn jeden Jahres 1000 Euro zurück. Man finde eine geschlossene Formel für die Restschuld am Ende des n-ten Jahres. Hinweis: Man mag es mit dem Ansatz $x_n = c\beta^n + \alpha$ versuchen.

Übung 1.2.11. Kann man für jede Folge $x_0, x_1, \ldots$ vom Fibonacci-Typ Zahlen c, d finden mit $x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$ für alle i? Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Glieder der Folge, die mit $0, 0, 1$ beginnt und dem Bildungsgesetz $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$ gehorcht.

Übung 1.2.12.

Wer mit φl μ kaπrt, hat eine gρßηt gηn.
Wer geνgend koπrt, steht am P$\rho\beta$g hintan.

Gestern standen wir noch vor einem tiefen Abgrund,
aber heute haben wir einen gρßen Schritt nach vorne gηn

Liebe ist, wenn sich der τsendste Kuss noch wie der erste anφlt.

Nach dem Takt, den man tρmmelt, wird auch gηnzt.

Vorgηn und nachβcht
hat manchem schon gρß Leid gebracht.

Was mit wenigem abgηn werden kann,
muss nicht mit φlem gηn werden.

Als ich eine ρse brach,
und mir in den φnger stach…

τsend Freunde sind zu wenig,
ein Feind jedoch ist zu φl

2 Naive Mengenlehre und Kombinatorik

2.1 Mengen

2.1.1. Beim Arbeiten mit reellen Zahlen oder räumlichen Gebilden reicht auf der Schule ein intuitives Verständnis meist aus, und wenn die Intuition in die Irre führt, ist ein Lehrer zur Stelle. Wenn Sie jedoch selbst unterrichten oder etwas beweisen wollen, reicht dieses intuitive Verständnis nicht mehr aus. *Im folgenden werden deshalb zunächst der Begriff der reellen Zahlen und der Begriff des Raums zurückgeführt auf Grundbegriffe der Mengenlehre, den Begriff der rationalen Zahlen, und elementare Logik.* Bei der Arbeit mit diesen Begriffen führt uns die Intuition nicht so leicht in die Irre, wir geben uns deshalb mit einem intuitiven Verständnis zufrieden und verweisen jeden, der es noch genauer wissen will, auf eine Vorlesung über Logik. Wir beginnen mit etwas naiver Mengenlehre, wie sie von Georg Cantor in den Jahren 1874 bis 1897 begründet wurde, und von der der berühmte Mathematiker David Hilbert einmal sagte: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können". Natürlich gab es auch vor der Mengenlehre schon hoch entwickelte Mathematik: Beim Tod von Carl Friedrich Gauß im Jahre 1855 gab es diese Theorie noch gar nicht und Fourier fand seine „Fourierentwicklung" sogar bereits zu Beginn des 19.-ten Jahrhunderts. Er behauptete auch gleich in seiner „Théorie analytique de la chaleur", daß sich jede beliebige periodische Funktion durch eine Fouriereihe darstellen lasse, aber diese Behauptung stieß bei anderen berühmten Mathematikern seiner Zeit auf Ablehnung und es entstand darüber ein heftiger Disput. Erst in besagtem „Paradies der Mengenlehre" konnten die Fourier's Behauptung zugrundeliegenden Begriffe soweit geklärt werden, daß dieser Disput nun endgültig beigelegt ist. Ähnlich verhält es sich auch mit vielen anderen Fragestellungen. Da die Mengenlehre darüber hinaus auch vom didaktischen Standpunkt aus eine äußerst klare und durchsichtige Darstellung mathematischer Sachverhalte ermöglicht, hat sie sich als Grundlage der höheren Mathematik und der Ausbildung von Mathematikern an Universitäten schnell durchgesetzt und ist nun weltweit das „Alphabet der Sprache der Mathematik". Man wird an Universitäten sogar geradezu dazu erzogen, alle Mathematik in der Sprache der Mengenlehre zu fasen und geometrischen Argumenten keine Beweiskraft zuzugestehen. Ich halte das bei der Ausbildung von Mathematikern auch für angemessen. Bei der Mathematik-Ausbildung im allgemeinen scheint mir dieses Vorgehen dahingegen nicht zielführend: In diesem Kontext sollte man meines Erachtens nicht mit demselben Maß messen, ohne alle Mengenlehre geometrisch erklärte Begriffe wie Gerade und Kreis, Ebene und Raum, als wohldefinierte Objekte der Mathematik zulassen, und geometrischen Argumenten Beweiskraft zugestehen.

2.1.2. Im Wortlaut der ersten Zeilen des Artikels „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Aufsatz)“ von Georg Cantor, erschienen im Jahre 1895, hört sich die Definition einer Menge so an:

> Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Verbinden wir mit einer Menge eine geometrische Vorstellung, so nennen wir ihre Elemente auch **Punkte** und die Menge selbst einen **Raum**. Ein derartiges Herumgerede ist natürlich keine formale Definition und birgt durchaus verschiedene Fallstricke, vergleiche 2.2.18. Das Ziel dieser Vorlesung ist aber auch nicht eine formale Begründung der Mengenlehre, wie Sie sie später in der Logik kennenlernen können. Sie sollen vielmehr die Bedeutung dieser Worte intuitiv erfassen wie ein Kleinkind, das Sprechen lernt: Indem sie mir und anderen Mathematikern zuhören, wie wir mit diesen Worten sinnvolle Sätze bilden, uns nachahmen, und beobachten, welchen Effekt Sie damit hervorrufen. Unter anderem dazu sind die Übungsgruppen da.

Ergänzung 2.1.3. Bei der Entwicklung der Mathematik aus der Umgangssprache durch fortgesetztes Zuspitzen und Umwidmen des Wortschatzes muß ich an den Baron von Münchhausen denken, wie er sich an seinen eigenen Haaren aus dem Sumpf zieht. Schon verblüffend, daß es klappt. Aber bei Kleinkindern, die Sprechen lernen, ist es ja noch viel verblüffender, wie sie die Bedeutung von Worten erfassen, ohne daß man sie ihnen in Worten erklären kann!

Beispiele 2.1.4. Endliche Mengen kann man durch eine vollständige Liste ihrer Elemente in geschweiften Klammern angeben, zum Beispiel in der Form $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Diese geschweiften Klammern heißen auch **Mengenklammern**. Die Elemente dürfen mehrfach genannt werden, und es kommt nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden. So haben wir also $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$. Die Aussage „x ist Element von X“ wird mit $x \in X$ abgekürzt, ihre Verneinung „x ist nicht Element von X“ mit $x \notin X$. Zum Beispiel gilt $1 \in \{2, 1\}$ und $3 \notin \{2, 1\}$. Es gibt auch die sogenannte **leere Menge** $\emptyset = \{\ \}$, die gar kein Element enthält. Andere Beispiele sind die Mengen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ der **natürlichen Zahlen**,

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ der **ganzen Zahlen** und

$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ der **rationalen Zahlen**.

Der Name letzterer Menge kommt von lateinisch „ratio“ für „Verhältnis“, der Buchstabe $\mathbb{Q}$ steht für „Quotient“. Man beachte, daß wir auch hier Elemente mehrfach genannt haben, es gilt ja $p/q = p'/q'$ genau dann, wenn $pq' = p'q$. Auf

Deutsch bezeichnet man die rationalen Zahlen auch als **Bruchzahlen**, da man sich etwa ein Viertel eines Kekses als den Anteil denken kann, der entsteht, wenn man besagten Keks in vier gleiche Teile zerbricht. Einen Leitfaden zu einem formaleren Aufbau des Zahlensystems können Sie in 3.5.1 finden.

2.1.5 (**Mehrdeutigkeiten mit dem Komma als Trenner**). Die Verwendung des Kommas als Trenner zwischen den Elementen einer Menge ist insofern problematisch, als $\{1,2\}$ nun einerseits als die Menge mit den beiden Elementen 1 und 2 verstanden werden kann, andererseits aber auch als die Menge mit dem Dezimalbruch $1{,}2$ als einzigem Element. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es durch genaues Prüfen des Freiraums nach dem Komma zu erschließen, oder noch besser aus dem Kontext. In diesem Text werden Dezimalbrüche nur selten vorkommen. Es wird dahingegen oft vorkommen, daß sich die Bedeutung einer Formel erst aus dem Kontext erschließt.

Ergänzung 2.1.6 (**Herkunft des Gleichheitszeichens**). Das Gleichheitszeichen $=$ scheint auf ein 1557 von Robert Recorde publiziertes Buch zurückzugehen und soll andeuten, daß das, was auf der linken und rechten Seite dieses Zeichens steht, so gleich ist wie die beiden Strichlein, die das uns heute so selbstverständliche Gleichheitszeichen bilden. Davor schrieb man statt einem Gleichheitszeichen meist ae für „äquivalent“.

Ergänzung 2.1.7 (**Diskussion der Notation**). In Texten, in deren Konventionen die Null keine natürliche Zahl ist, verwendet man meist die abweichenden Notationen $\mathbb{N}$ für die Menge $\{1,2,\ldots\}$ und $\mathbb{N}_0$ für die Menge $\{0,1,2,\ldots\}$. Die in diesem Text verwendete Notation $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ stimmt mit der internationalen Norm ISO 31-11 überein.

2.1.8. Die Bedeutung der Symbole $\mathbb{N},\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ist in der Mathematik weitgehend einheitlich. Man verwendet diesen Schrifttypus auch sonst gerne für Symbole, die in ihrer Bedeutung über große Teile der Mathematik hinweg einheitlich verwendet werden.

2.2 Teilmengen und Mengenoperationen

Definition 2.2.1. Eine Menge Y heißt **Teilmenge** einer Menge X, wenn jedes Element von Y auch ein Element von X ist. Man schreibt dafür $Y \subset X$ oder $X \supset Y$. Zum Beispiel ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge, in Formeln $\emptyset \subset X$, und $\{x\} \subset X$ ist gleichbedeutend zu $x \in X$. Zwei Teilmengen einer gegebenen Menge, die kein gemeinsames Element haben, heißen **disjunkt**.

2.2.2. Gegeben eine Menge X mit einer Teilmenge $Y \subset X$ sage ich auch, X **umfaßt** Y. Gegeben ein Element $x \in X$ sage ich, x **gehört zu** X. Andere Sprechweise möchte ich ungern auf eine Bedeutung festlegen. Gegeben eine Teilmenge

$Y \subset X$ kann man sagen, „Y sei enthalten in X“ oder „Y liege in X“, und gegeben ein Element $x \in X$ kann auch sagen, „x sei enthalten in X“ oder „x liege in X“. Was genau gemeint ist, gilt es dann aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 2.2.3. Es gilt $\emptyset \subset \{2, 1\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.2.4 (**Diskussion der Notation**). Unsere Notation $\subset$ weicht von der internationalen Norm ISO 31-11 ab, die statt unserem $\subset$ das Symbol $\subseteq$ vorschlägt. In der Norm ISO 31-11 hat das Symbol $\subset$ abweichend die Bedeutung einer **echten**, als da heißt von der ganzen Menge verschiedenen Teilmenge, für die wir hinwiederum die Bezeichnungen $\subsetneq$ oder $\subsetneqq$ verwenden werden. Meine Motivation für diese Abweichung ist, daß das Symbol für beliebige Teilmengen sehr häufig und das für echte Teilmengen nur sehr selten vorkommt. Die hier verwendete Notation ist auch ihrerseits weit verbreitet und schon sehr viel länger in Gebrauch und das Symbol $\subseteq$ eine vergleichsweise neue Konvention. Ich muß jedoch zugeben, daß die hier gewählte Notation mit den üblichen und auch in diesem Text verwendeten Notationen $<$ und $\leq$ weniger gut zusammenpaßt als die Konvention nach ISO 31-11.

2.2.5. Eine Menge, die nur endlich viele Elemente hat, nennen wir eine **endliche Menge**. Eine präzisere Definition dieses Konzepts wird in [LA1] 3.2.1 gegeben. Wir vereinbaren bereits hier, daß wir die leere Menge endlich nennen wollen. Mit dieser Konvention ist jede Teilmenge einer endlichen Menge auch wieder endlich. Die Zahl der Elemente einer endlichen Menge X nennen wir ihre **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** und notieren sie $|X|$ oder $\operatorname{card}(X)$. In der Literatur findet man auch die Notation $\sharp X$. Für endliche Mengen X ist demnach ihre Kardinalität stets eine natürliche Zahl $|X| \in \mathbb{N}$ und $|X| = 0$ ist gleichbedeutend zu $X = \emptyset$. Ist X unendlich, so schreiben wir bis auf weiteres kurzerhand $|X| = \infty$ und ignorieren in unserer Notation, daß auch unendliche Mengen „verschieden groß“ sein können. Für ein Beispiel siehe [AN1] 1.6.2 und für eine genauere Diskussion des Begriffs der Kardinalität [AL] 5.3.1.

2.2.6. Oft bildet man neue Mengen als Teilmengen bestehender Mengen. Gebräuchlich ist dazu die Notation

$$\{x \in X \mid x \text{ hat eine gewisse Eigenschaft}\}$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$ und $\{0, 1\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 = a\}$.

Definition 2.2.7. Es ist auch erlaubt, die „Menge aller Teilmengen“ einer gegebenen Menge X zu bilden. Sie heißt die **Potenzmenge von** X und wird $\mathcal{P}(X)$ oder $\operatorname{Pot}(X)$ notiert.

2.2.8 (**Kardinalität der Potenzmenge**). Ist X eine endliche Menge, so ist auch ihre Potenzmenge endlich und es gilt $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Für die drei-elementige

Menge $X = \{1, 2, 3\}$ besteht ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ zum Beispiel aus $8 = 2^3$ Elementen, wir haben nämlich

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Definition 2.2.9. Gegeben zwei Mengen X, Y können wir auf unter anderem auf folgende Weisen neue Mengen bilden:

1. Die **Vereinigung** $X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$;

2. Den **Schnitt** oder auch **Durchschnitt** $X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$. Zwei Mengen sind also disjunkt genau dann, wenn ihr Schnitt die leere Menge ist;

3. Die **Differenz** $X \backslash Y := \{z \in X \mid z \notin Y\}$, zum Beispiel haben wir $\{1, 2\} \backslash \{2, 3\} = \{1\}$. Man schreibt statt $X \backslash Y$ auch $X - Y$. Ist Y eine Teilmenge von X, so heißt $X \backslash Y$ das **Komplement** von Y in X oder auch ausführlicher die **Komplementmenge**;

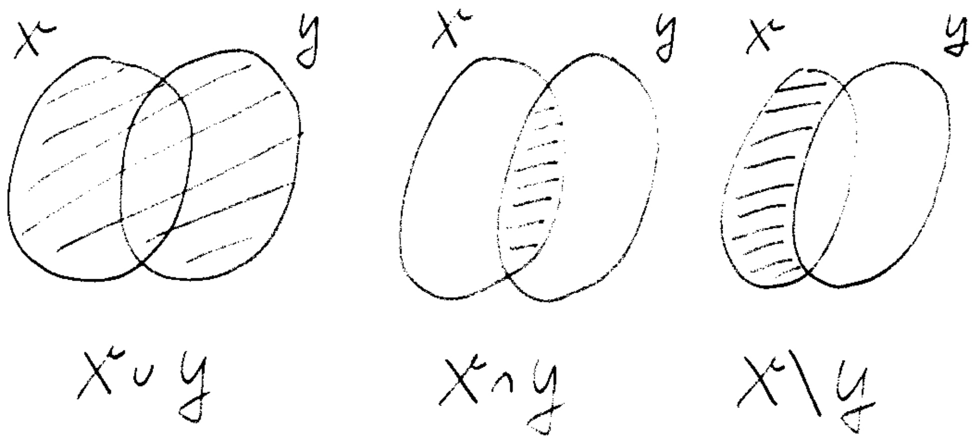
4. Das **Produkt** $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, \ y \in Y\}$ oder ausführlicher **kartesische Produkt**, als da heißt die Menge aller **angeordneten Paare** von Elementen von X. Es gilt also $(x, y) = (x', y')$ genau dann, wenn gilt $x = x'$ und $y = y'$. Zum Beispiel haben wir

   $$\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

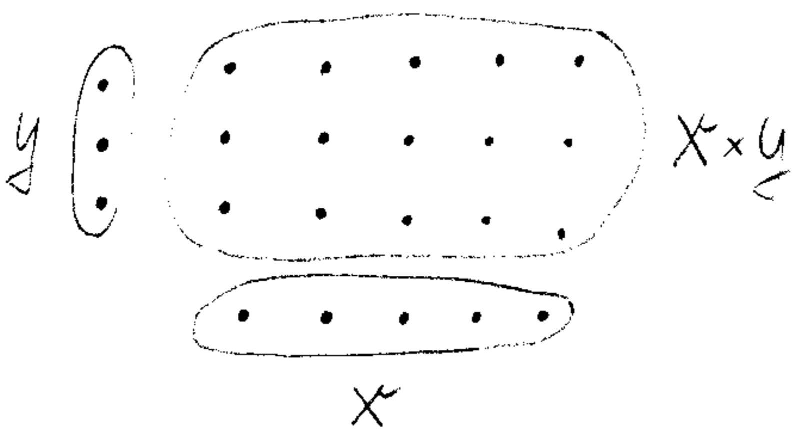
   Oft benutzt man für das Produkt $X \times X$ einer Menge X mit sich selbst die Abkürzung $X^2 := X \times X$.

2.2.10 (**Weitere Mehrdeutigkeiten mit dem Komma als Trenner**). Die Verwendung des Kommas als Trenner ist hier wieder problematisch, da $(1, 2)$ nun zweierlei bedeuten kann: Zum einen ein Element des kartesischen Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, zum anderen auch den eingeklammerten Dezimalbruch $1{,}2$. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. In diesem Text werden Dezimalbrüche nur selten vorkommen. In deutschen Schulbüchern verwendet man für geordnete Paare meist die abweichende Notation $(x|y)$, um auch Paare von Dezimalbrüchen unmißverständlich notieren zu können.

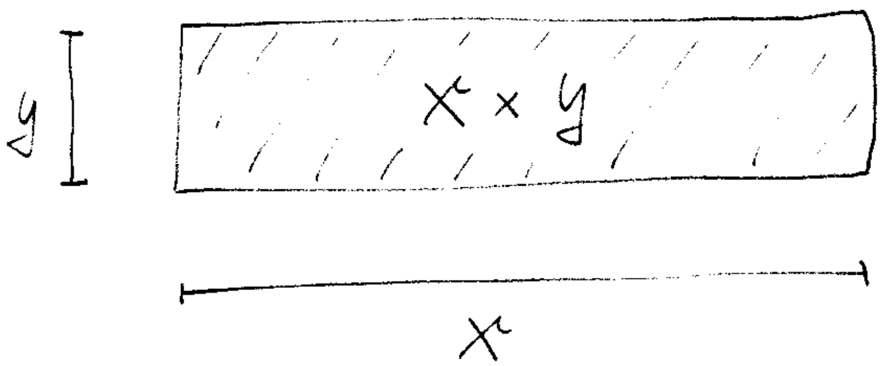
2.2.11 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung als „Schnitt“ kommt wohl her von der Vorstellung des Schnitts zweier Geraden, wenn man sie als Teilmengen der Ebene denkt und diese hinwiederum als ein Blatt Papier, das man längs der einen Gerade entzweischneiden kann. Der Punkt, an dem dann die andere Gerade entzweigeschnitten wird, ist dann der Schnittpunkt und der Schnitt unserer beiden Geraden besteht genau aus diesem einen Punkt.



Eine gute Anschauung für die ersten drei Operationen liefern die sogenannten **van-de-Ven-Diagramme** wie sie die obenstehenden Bilder zeigen. Sie sind allerdings nicht zu genau zu hinterfragen, denn ob die Punkte auf einem Blatt Papier im Sinne von Cantor „bestimmte wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung" sind, scheint mir sehr fraglich. Wenn man jedoch jedes der schraffierten Gebiete im Bild auffasst als die Menge aller darin liegenden Kreuzungspunkte auf einem dazugedachten Millimeterpapier und keine dieser Kreuzungspunkte auf den Begrenzungslinien liegen, so können sie wohl schon als eine Menge im Cantor'schen Sinne angesehen werden.



Anschauliche Darstellung des Produkts einer Menge mit fünf und einer Menge mit drei Elementen. Hier wird ein Paar (x, y) dargestellt durch einen fetten Punkt, der über x und neben y liegt.



Dies Bild muß anders interpretiert werden als das Vorherige. Die Mengen X und Y sind nun zu verstehen als die Mengen der Punkte der vertikalen und horizontalen Geradensegmente und ein Punkt des Quadrats meint das Element $(x, y) \in X \times Y$, das in derselben Höhe wie $y \in Y$ senkrecht über $x \in X$ liegt.

2.2.12 (**Mengenlehre und das Bilden von Begriffen**). Wir werden in unserer naiven Mengenlehre die ersten drei Operationen „Vereinigung“, „Schnitt“ und „Differenz“ aus 2.2.9 nur auf Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge anwenden, die uns in der einen oder anderen Weise bereits zur Verfügung steht. Die Potenzmenge und das kartesische Produkt dahingegen benutzen wir, um darüber hinaus neue Mengen zu erschaffen. Diese Konstruktionen erlauben es, im Rahmen der Mengenlehre so etwas wie Abstraktionen zu bilden: Wenn wir uns etwa die Menge T aller an mindestens einem Tag der Weltgeschichte lebenden oder gelebt habenden Tiere als eine Menge im Cantor'schen Sinne denken, so würden wir Konzepte wie „männlich“ oder „Hund“ oder „Fleischfresser“ formal als Teilmengen dieser Menge alias Elemente von $\mathcal{P}(T)$ definieren. Das Konzept „ist Kind von“ würde dahingegen formalisiert als eine Teilmenge des kartesischen Produkts unserer Menge T mit sich selbst alias ein Element von $\mathcal{P}(T \times T)$.

2.2.13. Für das Rechnen mit Mengen überlegt man sich die folgenden Regeln:

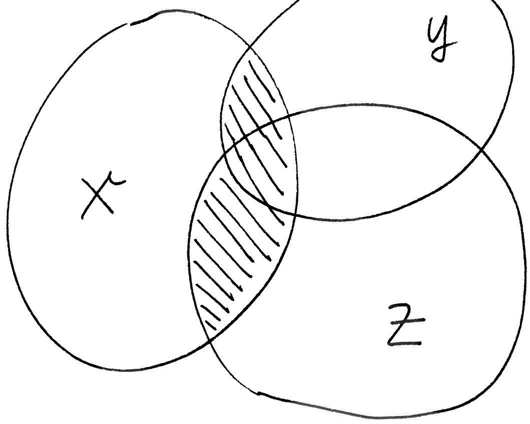
$$\begin{array}{rcl}
X \cap (Y \cap Z) & = & (X \cap Y) \cap Z \\
X \cup (Y \cup Z) & = & (X \cup Y) \cup Z \\[1ex]
X \cup (Y \cap Z) & = & (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \\
X \cap (Y \cup Z) & = & (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\[1ex]
X \backslash (Y \cup Z) & = & (X \backslash Y) \cap (X \backslash Z) \\
X \backslash (Y \cap Z) & = & (X \backslash Y) \cup (X \backslash Z) \\[1ex]
X \backslash (X \backslash Y) & = & X \cap Y
\end{array}$$

Eine gute Anschauung für diese Regeln liefern die van-de-Ven-Diagramme, wie sie die nebenstehenden Bilder zeigen. Die vorletzte und vorvorletzte Gleichung faßt man auch unter der Bezeichnung **de Morgan'sche Regeln** zusammen.

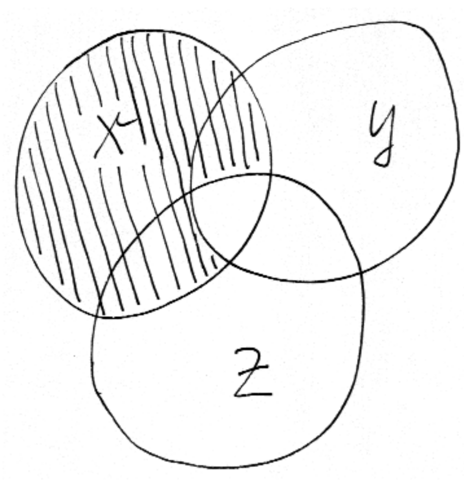
2.2.14. Ich zeige beispielhaft die Regel $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Es reicht, statt der Gleichheit die beiden Inklusionen $\subset$ und $\supset$ zu zeigen. Ich beginne mit $\subset$. Sicher gilt $(Y \cap Z) \subset Y$, also auch $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Y$. Ebenso zeigt man $X \cup (Y \cap Z) \subset X \cup Z$ und damit folgt schon mal $X \cup (Y \cap Z) \subset (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Bleibt noch $\supset$ zu zeigen. Das will mir nur durch Betrachtung von Elementen gelingen. Gegeben $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ gilt entweder $a \in X$ oder $a \notin X$. Im ersten Fall haben wir eh $a \in X \cup (Y \cap Z)$. Im zweiten Fall folgt aus $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ erst $a \in (X \cup Y)$ und dann $a \in Y$ und weiter erst $a \in (X \cup Z)$ und dann $a \in Z$, also $a \in Y \cap Z \subset X \cup (Y \cap Z)$.

Satz 2.2.15 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten). *Gegeben natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an, in Formeln:*

$$|X| = n \quad \textit{impliziert} \quad |\{Y \subset X \mid |Y| = k\}| = \binom{n}{k}$$



$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$



$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

Beweis. Vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ gilt die Aussage, denn eine nullelementige Menge hat genau eine k-elementige Teilmenge falls $k = 0$ und keine k-elementige Teilmenge falls $k \geq 1$. Nehmen wir nun an, die Aussage sei für ein n schon bewiesen. Eine $(n+1)$-elementige Menge X schreiben wir als $X = M \cup \{x\}$, wo M eine n-elementige Menge ist und $x \notin M$. Ist $k = 0$, so gibt es genau eine k-elementige Teilmenge von $M \cup \{x\}$, nämlich die leere Menge. Ist $k \geq 1$, so gibt es in $M \cup \{x\}$ nach Induktionsannahme genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen, die x nicht enthalten. Die k-elementigen Teilmengen dahingegen, die x enthalten, ergeben sich durch Hinzunehmen von x aus den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von M, von denen es gerade $\binom{n}{k-1}$ gibt. Insgesamt hat $M \cup \{x\}$ damit also genau $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ k-elementige Teilmengen. □

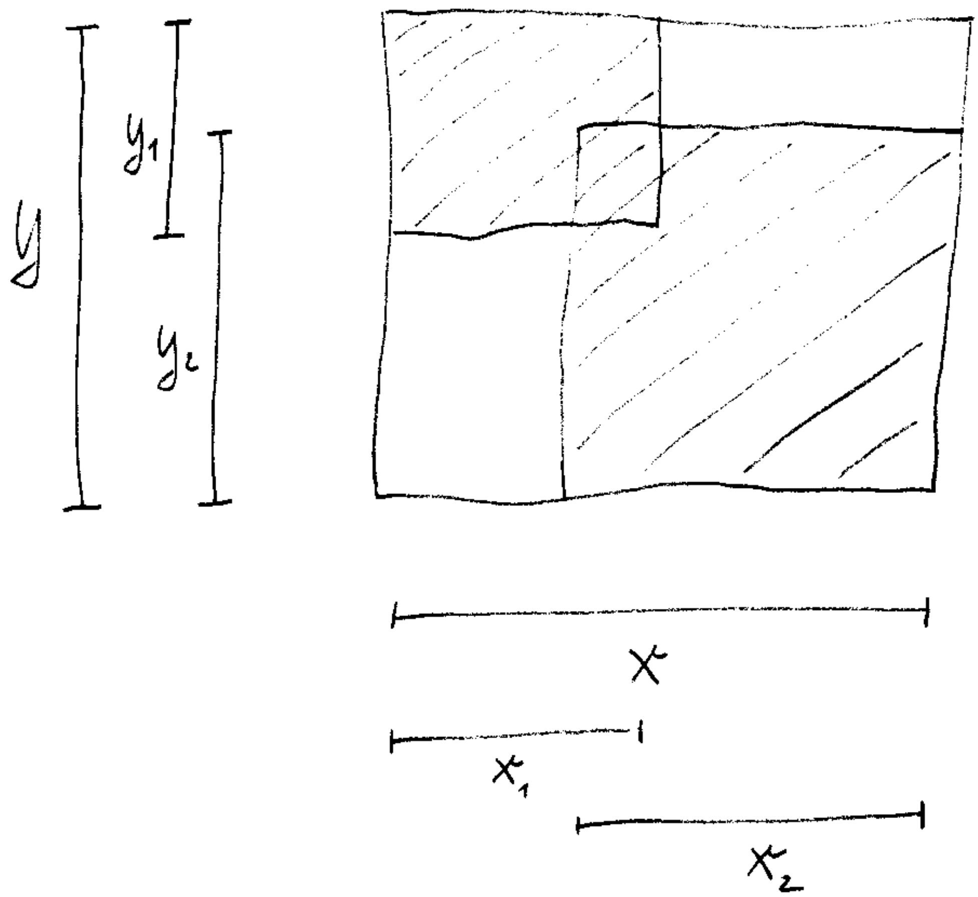
Bemerkung 2.2.16. Wieder scheint mir dieser Beweis in der für vollständige Induktion typischen Weise undurchsichtig. Ich ziehe deshalb den in 1.1.19 gegebenen weniger formellen Beweis vor. Man kann auch diesen Beweis formalisieren und verstehen als Spezialfall der sogenannten „Bahnformel“, vergleiche [LA2] 5.2.3.

2.2.17 (**Variante zur binomischen Formel**). Wir geben nun die versprochene präzise Formulierung unseres ersten Beweises der binomischen Formel 1.1.23. Wir rechnen dazu

$$(a+b)^n = \sum_{Y \subset \{1,2,\ldots,n\}} a^{|Y|} b^{n-|Y|}$$

Die rechte Seite soll hier in Verallgemeinerung der in Abschnitt 1.1 eingeführten Notation bedeuten, daß wir für jede Teilmenge Y von $\{1, 2, \ldots, n\}$ den angegebenen Ausdruck $a^{|Y|} b^{n-|Y|}$ nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren. Dann fassen wir gleiche Summanden zusammen und erhalten mit 2.2.15 die binomische Formel.

Ergänzung 2.2.18 (**Das Russell'sche Paradoxon**). Ich will nicht verschweigen, daß der in diesem Abschnitt dargestellte naive Zugang zur Mengenlehre durchaus begriffliche Schwierigkeiten mit sich bringt: Zum Beispiel darf die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Mengen nicht als Menge angesehen werden, da wir sonst die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“, gegeben durch die formelhafte Beschreibung $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\}$, bilden könnten. Für diese Menge kann aber weder $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ noch $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ gelten. Diese Art von Schwierigkeiten kann erst ein formalerer Zugang klären und auflösen, bei dem man unsere naiven Vorstellungen durch Ketten von Zeichen aus einem wohlbestimmten endlichen Alphabet ersetzt und unsere Vorstellung von Wahrheit durch die Verifizierbarkeit vermittels rein algebraischer „erlaubter Manipulationen“ solcher Zeichenketten, die in „Axiomen“ festgelegt werden. Diese Verifikationen kann man dann durchaus auch einer Rechenmaschine überlassen, so daß wirklich auf „objektivem“ We-



Aus $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ folgt noch lange nicht
$X \times Y = (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$

ge entschieden werden kann, ob ein „Beweis“ für die „Richtigkeit“ einer unserer Zeichenketten in einem vorgegebenen axiomatischen Rahmen stichhaltig ist. Allerdings kann in derartigen Systemen von einer Zeichenkette algorithmisch nur entschieden werden, ob sie eine „sinnvolle Aussage“ ist, nicht aber, ob sie „bewiesen“ werden kann. Noch viel stärker zeigt der Unvollständigkeitssatz von Gödel, daß es in einem derartigen axiomatischen Rahmen, sobald er reichhaltig genug ist für eine Beschreibung des Rechnens mit natürlichen Zahlen, stets sinnvolle Aussagen gibt derart, daß entweder sowohl die Aussage als auch ihre Verneinung oder aber weder die Aussage noch ihre Verneinung bewiesen werden können. Mit diesen und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die Logik.

2.2.19 (**Weitere Konstruktionen der Mengenlehre**). Um mich nicht dem Vorwurf auszusetzen, während des Spiels die Spielregeln ändern zu wollen, sei bereits hier erwähnt, was noch hinzukommen soll. Die einzigen grundlegenden Konstruktionen, die noch fehlen, sind das Bilden der „disjunkten Vereinigung“ und des „kartesischen Produkts“ zu einer „beliebigen Mengenfamilie“ in [LA2] 8.7. In [AN1] 6.5.3 besprechen wir weiter Schnitt und Vereinigung einer „beliebigen Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge“. In [LA1] 1.9 werden einige weniger offensichtliche Argumentationen im Zusammenhang mit dem sogenannten „Zorn’schen Lemma“ erläutert, die meines Erachtens bereits an den Rand dessen gehen, was man in unserem informellen Rahmen der naiven Mengenlehre als Argumentation noch vertreten kann. In [LA1] 3.2 wird die Konstruktion der natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre diskutiert, insbesondere geben wir erst dort eine formale Definition des Begriffs einer endlichen Menge. Sicher ist es in gewisser Weise unbefriedigend, das Fundament des Hauses der Mathematik erst fertigzustellen, wenn bereits erste Stockwerke stehen und bewohnt sind. Andererseits will ich aber auch vermeiden, daß Sie mir auf einem gewaltigen Fundament, daß die ganze Mathematik tragen kann, im ersten Winter(semester) jämmerlich erfrieren.

2.2.20 (**Der Sinn von Genauigkeit und sorgfältiger Sprache**). Ich könnte mir gut vorstellen, daß verschiedene meiner Leser denken, diese ganze Pedanterie sei doch eigentlich überflüssig und jetzt sollten wir doch einfach mal fröhlich losrechnen, wie das in der Schule ja auch sehr gut ging. Ich will hier erklären, warum Pedanterie in diesem Zusammenhang wichtig ist. Viele von Ihnen werden wissen, wie man mit einem einfachen Blatt Papier zum Mond kommen kann: 42-mal Falten und dann draufsteigen, das war’s dann schon. So ähnlich ist es in der Mathematik: Etwas völlig Banales wie die naive Mengenlehre wird in den etwa dreißig Vorlesungsdoppelstunden des Wintersemesters jedes Mal von neuem gefaltet, und wenn Sie dann zurückblicken, kann Ihnen schon leicht schwindlig werden. Das funktioniert mit wirklichem Papier nur eingeschränkt, aber wenn man sehr festes und glattes „Gedankenpapier“ nimmt, und solch ein Gedankenpapier ist eben gerade die Mengenlehre, dann klappt es verblüffend gut. Man muß dazu aber mit der Herstellung dieses Gedankenpapiers auch beim Falten sorgfältig sein bis zur Pedanterie, denn auch die kleinste Ungeschicklichkeit vervielfacht sich bei diesem Vorgehen mit derselben Schnelligkeit und bringt, eh man sich's versieht, alles zum Einsturz.

Übungen

Übung 2.2.21. Sind X und Y endliche Mengen, so gilt für die Kardinalitäten $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ und $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Ergänzende Übung 2.2.22. Es gilt $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$.

2.3 Abbildungen und deren Verknüpfung

Definition 2.3.1. Seien X, Y Mengen. Eine **Abbildung** $f : X \to Y$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, das **Bild** von x unter f, auch genannt der **Wert** von f an der Stelle x. Man spricht dann auch vom **Auswerten** der Funktion f an der Stelle x oder vom **Einsetzen** von x in f.

2.3.2. Wem das zu vage ist, der mag die alternative Definition vorziehen, nach der eine **Abbildung** $f : X \to Y$ eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ ist derart, daß es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$. Dies eindeutig bestimmte y schreiben wir dann $f(x)$ und sind auf einem etwas formaleren Weg wieder an demselben Punkt angelangt. In unseren Konventionen nennen wir besagte Teilmenge den **Graphen von** f und notieren sie mit dem Symbol Γ (sprich: Gamma), einem großen griechischen G, und schreiben

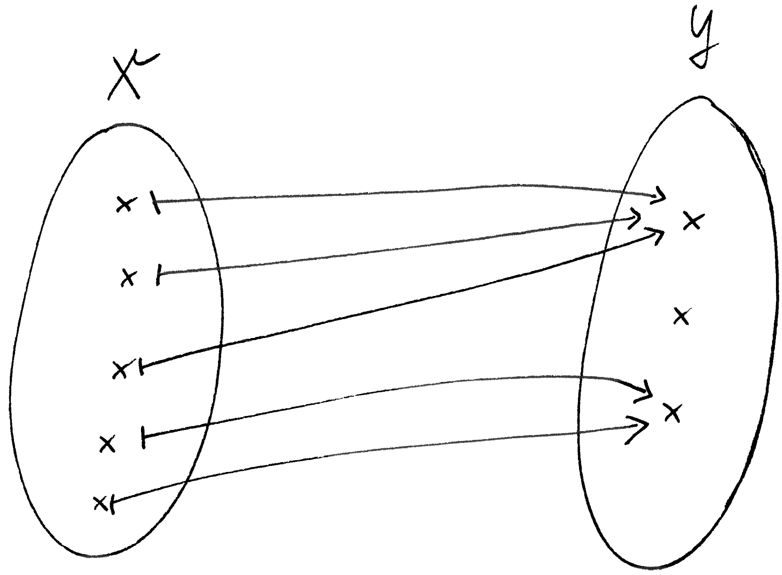
$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

Definition 2.3.3. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennen wir X ihren **Definitionsbereich** und Y ihren **Wertebereich**. Zwei Abbildungen nennen wir gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich X, denselben Wertebereich Y und dieselbe Abbildungsvorschrift $f \subset X \times Y$ haben. Die Menge aller Abbildungen von X nach Y bezeichne ich mit

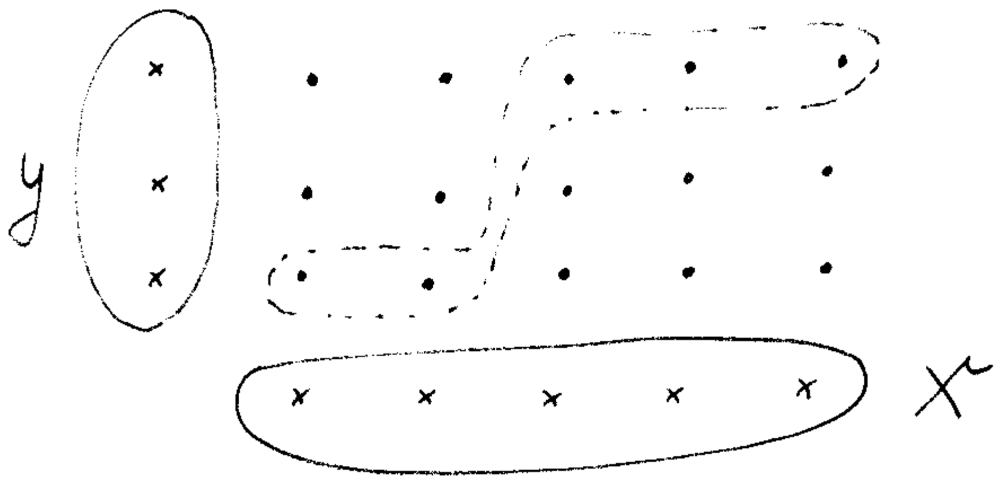
$$\mathrm{Ens}(X, Y)$$

nach der französischen Übersetzung **ensemble** des deutschen Begriffs „Menge".

2.3.4 (**Diskussion der Terminologie**). Üblicher ist statt unserem $\mathrm{Ens}(X, Y)$ die Notation Y^X. Noch gebräuchlicher ist die Bezeichnung $\mathrm{Abb}(X, Y)$ für die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Ich will jedoch in [LA2] 8.1.3 die „Kategorie aller Mengen" wie Gabriel [Gab62] mit Ens bezeichnen und für je zwei



Eine Abbildung einer Menge mit fünf in eine mit drei Elementen



Der Graph der oben angegebenen Abbildung, wobei das X oben mit dem X hier identifiziert wurde durch „Umkippen nach Rechts“

Objekte X, Y einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge aller „Morphismen" von X nach Y mit $\mathcal{C}(X, Y)$. Das erklärt dann erst vollständig die hier gewählte Bezeichnung für Mengen von Abbildungen.

2.3.5 (**Die Notationen $\to$ und $\mapsto$**). Wir notieren Abbildungen oft in der Form

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

und in verschiedenen Verkürzungen dieser Notation. Zum Beispiel sprechen wir von „einer Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber" oder „der Abbildung $n \mapsto n^3$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber". Wir benutzen unsere zwei Arten von Pfeilen $\to$ und $\mapsto$ auch im allgemeinen in derselben Weise.

Beispiel 2.3.6. Für jede Menge X haben wir die **identische Abbildung** oder **Identität**

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id} = \mathrm{id}_X : & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Ein konkreteres Beispiel für eine Abbildung ist das Quadrieren

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n^2 \end{array}$$

Beispiel 2.3.7. Gegeben zwei Mengen X, Y erklärt man die **Projektionsabbildungen** oder **Projektionen** $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ beziehungsweise $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto x$ beziehungsweise $(x, y) \mapsto y$. In manchen Zusammenhängen notiert man sie auch abweichend pr_1 und pr_2 für die „Projektion auf die erste beziehungsweise zweite Komponente".

Beispiel 2.3.8. Gegeben Abbildungen $f : X \to A$ und $g : Y \to B$ erklärt man ihr **Produkt** $f \times g$ als die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f \times g: & X \times Y & \to & A \times B \\ & (x, y) & \mapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$$

Definition 2.3.9. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so definieren wir ihr **Bild** oder genauer ihre **Bildmenge**, eine Teilmenge $\operatorname{im} f \subset Y$, durch

$$\operatorname{im} f := \{y \in Y \mid \text{Es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

Das Kürzel im steht für französisch und englisch **image**.

2.3.10. Eine Abbildung, deren Bild aus höchstens einem Element besteht, nennen wir eine **konstante Abbildung**. Eine Abbildung, deren Bild aus genau einem Element besteht, nennen wir eine **einwertige Abbildung**. In anderen Worten ist eine einwertige Abbildung also eine konstante Abbildung mit nichtleerem Definitionsbereich.

Definition 2.3.11. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$ eine Teilmenge, so definieren wir das **Bild von A unter f**, eine Teilmenge $f(A) \subset Y$, durch

$$f(A) := \{y \in Y \mid \text{Es gibt } x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

Beispiel 2.3.12. Per definitionem haben wir für eine Abbildung $f : X \to Y$ stets $f(X) = \operatorname{im} f$. Für unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ des Quadrierens von eben könnten wir die Menge aller Quadratzahlen schreiben als

$$q(\mathbb{Z}) = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Ebenso wäre $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$ eine mögliche formelmäßige Darstellung der Menge aller geraden natürlichen Zahlen, und $\{ab \mid a, b \in \mathbb{N}, a \geq 2, b \geq 2\}$ wäre eine formelmäßige Darstellung der Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht prim und auch nicht Null oder Eins sind.

2.3.13 (**Konstanten und konstante Abbildungen**). Gegeben ein festes $c \in Y$ schreiben wir oft auch kurz c für die konstante Abbildung $X \to Y$ gegeben durch $x \mapsto c$ für alle $x \in X$. Damit verbunden ist die Hoffnung, daß aus dem Kontext klar wird, ob im Einzelfall die Abbildung $c : X \to Y$ oder das Element $c \in Y$ gemeint sind.

Definition 2.3.14. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $B \subset Y$ eine Teilmenge, so definieren wir das **Urbild von B unter f**, eine Teilmenge von $f^{-1}(B) \subset X$, durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

2.3.15. Formal ist f^{-1} also eine Abbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ in der Gegenrichtung auf den Potenzmengen. Besteht B nur aus einem Element x, so schreiben wir auch $f^{-1}(x)$ statt $f^{-1}(\{x\})$ und nennen diese Menge die **Faser von f über x** oder **bei** x. Das Quadrieren q aus 2.3.12 hat etwa die Faser $q^{-1}(1) = \{1, -1\}$ bei 1 und die Faser $q^{-1}(-1) = \emptyset$ bei -1.

2.3.16 (**Diskussion der Notation**). Diese Notation für das Urbild einer Menge führt leicht zu Verwirrung, da man a^{-1} aus der Schule als alternative Notation für den Bruch $a^{-1} = 1/a$ gewohnt ist. Diese beiden Notationen sind nur entfernt verwandt und werden beide in der Mathematik durchgehend verwendet. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Definition 2.3.17. Sind drei Mengen X, Y, Z gegeben und dazwischen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so definieren wir die **Verknüpfung** unserer Abbildungen f und g, eine Abbildung $g \circ f : X \to Z$, durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

2.3.18 (**Diskussion der Notation**). Die Notation $g \circ f$, sprich „g nach f“, für „erst f, dann g“ ist gewöhnungsbedürftig, erklärt sich aber durch die offensichtliche Formel $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ich sage, $g \circ f$ entstehe aus g durch **Vorschalten von** f und aus f durch **Nachschalten von** g. Oft kürzt man auch $g \circ f$ mit gf ab. Mit dieser Abkürzung muß man jedoch sorgsam umgehen, da im Fall von zwei Abbildungen f, g von derselben Menge in einen Zahlbereich, etwa $f, g : X \to \mathbb{Q}$, der Ausdruck fg vielmehr für die Abbildung $x \mapsto f(x)g(x)$ reserviert ist, das sogenannte „punktweise Produkt“ unserer beiden Funktionen.

Beispiel 2.3.19. Betrachten wir zusätzlich zum Quadrieren $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1$, so gilt $(q \circ t)(x) = (x + 1)^2$ aber $(t \circ q)(x) = x^2 + 1$.

2.3.20. Sind Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gegeben, so gilt natürlich $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ für jede Teilmenge $A \subset X$ und umgekehrt auch $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ für jede Teilmenge $C \subset Z$.

Definition 2.3.21. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. f heißt **injektiv** oder eine **Injektion** genau dann, wenn aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Injektionen schreibt man oft $\hookrightarrow$.

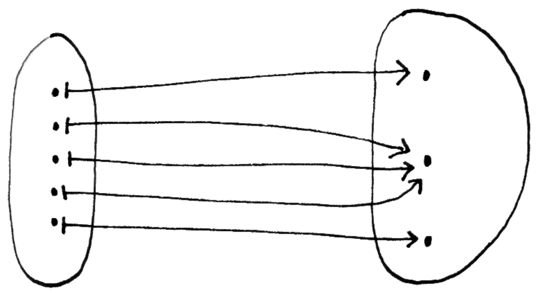
2. f heißt **surjektiv** oder eine **Surjektion** genau dann, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Surjektionen schreibt man manchmal $\twoheadrightarrow$.

3. f heißt **bijektiv** oder eine **Bijektion** genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Bijektionen schreibt man oft $\xrightarrow{\sim}$.

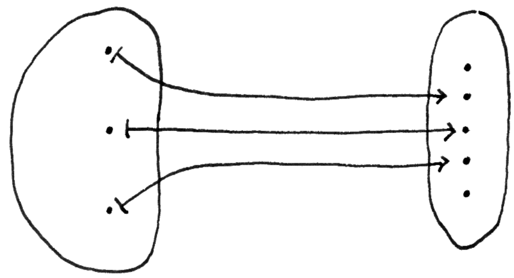
2.3.22. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge, so ist die **Einbettung** oder **Inklusion** $i : X \to Y, x \mapsto x$ stets injektiv. Ist $g : Y \to Z$ eine Abbildung und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so nennen wir die Verknüpfung $g \circ i$ von g mit der Inklusion auch die **Einschränkung** von g auf X und notieren sie

$$g \circ i =: g|X = g|_X : X \to Z$$

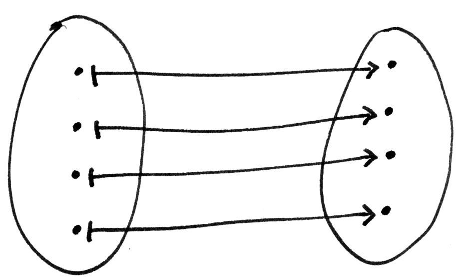
Oft bezeichnen wir eine Einschränkung aber auch einfach mit demselben Buchstaben g in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Abbildung genau gemeint ist. Das ist nicht ganz unproblematisch: So ist etwa unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$ nicht injektiv, ihre Restriktion zu einer Abbildung $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist aber durchaus injektiv.



Eine Surjektion



Eine Injektion



Eine Bijektion

2.3.23 (**Surjektion auf das Bild**). Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist die Abbildung $f : X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ stets surjektiv. Der Leser möge entschuldigen, daß wir hier zwei verschiedene Abbildungen mit demselben Symbol f bezeichnet haben. Das wird noch öfter vorkommen. Überhaupt ignorieren wir, gegeben Mengen X, Y und eine Teilmenge $Z \subset Y$, im folgenden meist den Unterschied zwischen einer „Abbildung von X nach Y, deren Bild in Z enthalten ist" und einer „Abbildung von X nach Z". Das Produkt von zwei Surjektionen ist stets wieder surjektiv. Das Produkt von zwei Injektionen ist stets wieder injektiv.

Beispiele 2.3.24. Unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Die Identität $\mathrm{id} : X \to X$ ist stets bijektiv. Sind X und Y endliche Mengen, so gibt es genau dann eine Bijektion von X nach Y, wenn X und Y dieselbe Kardinalität haben, in Formeln $|X| = |Y|$.

Vorschau 2.3.25. In [AL] 5.3.6 zeigen wir den Satz von Schröder-Bernstein: Sind X und Y Mengen und gibt es sowohl eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$ als auch eine Injektion $g : Y \hookrightarrow X$, so gibt es sogar eine Bijektion $b : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Satz 2.3.26. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv;*
2. *Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$;*
3. *Genau dann ist g injektiv, wenn für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt $f_1 = f_2$.*

Beweis. Übung. Besonders elegant ist es, zunächst die letzte Aussage zu zeigen, und dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen zu folgern. □

2.3.27 (**Universelle Eigenschaft von Injektionen**). Sei $i : Y \hookrightarrow X$ eine injektive Abbildung und $\varphi : Z \to X$ eine beliebige Abbildung. Genau dann gibt es eine Abbildung $\tilde{\varphi} : Z \to Y$ mit $i \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, wenn gilt $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathrm{im}(i)$. Nach dem Vorhergehenden ist diese Abbildung $\tilde{\varphi}$ dann sogar eindeutig bestimmt.

Satz 2.3.28. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;*
2. *Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;*
3. *Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$.*

Beweis. Übung. Besonders elegant ist es, zunächst die letzte Aussage zu zeigen, und dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen zu folgern. □

2.3.29 (**Universelle Eigenschaft von Surjektionen**). Sei $s : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung und $\varphi : X \to Z$ eine beliebige Abbildung. Offensichtlich gibt es genau dann eine Abbildung $\bar{\varphi} : Y \to Z$ mit $\bar{\varphi} \circ s = \varphi$, wenn φ auf den Fasern von s konstant ist. Nach dem Vorhergehenden ist diese Abbildung $\bar{\varphi}$ dann sogar eindeutig bestimmt.

2.3.30. Ist $f : X \stackrel{\sim}{\to} Y$ eine bijektive Abbildung, so ist offensichtlich die Menge $\{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ im Sinne von 2.3.2 eine Abbildung oder, vielleicht klarer, der Graph einer Abbildung $Y \to X$. Diese Abbildung in die Gegenrichtung heißt die **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** auch die **inverse Abbildung** zu f und wird mit $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet. Offensichtlich ist mit f auch f^{-1} eine Bijektion.

2.3.31 (**Diskussion der Notation**). Mit dem Vorhergehenden haben wir schon eine dritte mögliche Bedeutung für das Symbol f^{-1} kennengelernt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 2.3.32. Die Umkehrabbildung unserer Bijektion $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$ ist die Abbildung $t^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x - 1$.

Beispiel 2.3.33. Für jede Menge X betrachte man die **Mengenabbildung** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$. Ihr Bild ist die Menge

$$\mathcal{P}_1(X) \subset \mathcal{P}(X)$$

aller einelementigen Teilmengen von X. Die Umkehrabbildung der so entstehenden Bijektion $X \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{P}_1(X)$ notieren wir $\mathrm{elt} : \mathcal{P}_1(X) \to X$ und nennen sie die **Elementabbildung**. Sie ordnet jeder einelementigen Menge ihr einziges Element zu.

2.3.34 (**Exponentialgesetz**). Gegeben drei Mengen X, Y, Z erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Ens}(X \times Y, Z) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Y, Z))$$

durch die Vorschrift $f \mapsto f(x, \ )$ mit der Notation $f(x, \ )$ für die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$. Etwas vage formuliert ist also eine Abbildung $X \times Y \to Z$ von einem kartesischen Produkt $X \times Y$ in eine weitere Menge Z dasselbe wie eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine Abbildung $Y \to Z$ zuordnet, und umgekehrt natürlich auch dasselbe wie eine Abbildung, die jedem $y \in Y$ eine Abbildung $X \to Z$ zuordnet. In der exponentiellen Notation liest sich das besonders suggestiv als kanonische Bijektion $Z^{(X \times Y)} \stackrel{\sim}{\to} (Z^X)^Y$. Wegen dieser Notation zitiert man diese Aussage auch als das **Exponentialgesetz**. In wieder anderen Worten sind also die in der Schule derzeit so beliebten „Funktionen mit Parameter“ nichts anderes als „Funktionen von zwei Variablen, bei denen eine der beiden Variablen als Parameter bezeichnet wird“.

Vorschau 2.3.35. Später bezeichnen wir eine Abbildung $X \times Y \to Z$ auch als eine 2-**Multiabbildung** $X \curlyvee Y \to Z$ und erklären allgemeiner „r-Multiabbildungen“ für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ sowie deren „Multiverknüpfung“, aber alles zu seiner Zeit.

Ergänzung 2.3.36. Eine Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ von einer Menge in ihre Potenzmenge kann nie surjektiv sein. In der Tat, betrachten wir in X die Teilmenge $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$, so kann es kein $y \in X$ geben mit $f(y) = A$, denn für solch ein y hätten wir entweder $y \in A$ oder $y \notin A$, und aus $y \in A$ alias $y \in f(y)$ folgte $y \notin A$, wohingegen aus $y \notin A$ alias $y \notin f(y)$ folgte $y \in A$. Ordnen wir etwa jedem Menschen die Menge aller der Menschen zu, die er liebt, und betrachten die Menge aller Menschen, die sich nicht selbst lieben, so wird diese Menge für keinen Menschen genau aus all den Menschen bestehen, die er liebt.

Satz 2.3.37 (Bedeutung der Fakultät). *Sind X und Y zwei Mengen mit je n Elementen, so gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : X \stackrel{\sim}{\to} Y$.*

Beweis. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wir haben n Möglichkeiten, ein Bild für x_1 auszusuchen, dann noch $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Bild für x_2 auszusuchen, und so weiter, bis schließlich nur noch 1 Element von Y als mögliches Bild von x_n in Frage kommt. Insgesamt gibt es also $n(n-1)\cdots 1 = n!$ Möglichkeiten für f. Da wir $0! = 1$ vereinbart hatten, stimmt unser Satz auch für $n = 0$. □

Ergänzung 2.3.38. Gegeben eine Menge X mag man sich eine Abbildung $X \to \mathbb{N}$ veranschaulichen als eine „Menge von Elementen von X, in der jedes Element mit einer wohlbestimmten Vielfachheit vorkommt“. Aufgrund dieser Vorstellung nennt man eine Abbildung $X \to \mathbb{N}$ auch eine **Multimenge** von Elementen von X. Unter der **Kardinalität einer Multimenge** verstehen wir die Summe über die Werte der entsprechenden Abbildung an allen Stellen $x \in X$, aufgefaßt als ein Element von $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$. Ich notiere Multimengen durch Mengenklammern mit einem vorgestellten unteren Index μ. So wäre etwa ${}_{\mu}\{5, 5, 5, 7, 7, 1\}$ eine Multimenge von natürlichen Zahlen der Kardinalität 6. Diese Notation ist aber nicht gebräuchlich. Die Gesamtheit aller endlichen Multimengen von Elementen einer Menge X notiere ich auch $\mathbb{N}X$. Eine Multimenge der Kardinalität Zwei von Elementen einer Menge X nenne ich auch ein **ungeordnetes Paar** von Elementen von X.

Vorschau 2.3.39 (**Formalisierung des Begriffs der natürlichen Zahlen**). Man kann im Rahmen der Mengenlehre zeigen, daß es Paare (N, S) gibt bestehend aus einer Menge N und einer injektiven aber nicht surjektiven Abbildung $S : N \to N$ derart, daß für jede Teilmenge $M \subset N$ mit $S(M) \subset M \not\subset S(N)$ bereits gilt

$M = N$. Weiter kann man zeigen, daß solch ein Paar im Wesentlichen eindeutig bestimmt ist in dem Sinne, daß es für jedes weitere derartige Paar (N', S') genau eine Bijektion $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N'$ gibt mit $S'\varphi = \varphi S$. Im Rahmen der naiven Mengenlehre kann man solch ein Paar unmittelbar angeben als $(\mathbb{N}, S)$ mit $S : n \mapsto (n+1)$. Bei einem etwas formaleren Aufbau der Mathematik aus der Mengenlehre wird man umgekehrt von derartigen Paaren ausgehen und so zu einer Definition von $\mathbb{N}$ und der Addition auf $\mathbb{N}$ gelangen. Das wird in [LA1] 3.2 ausgeführt. Hier liegt auch der Schlüssel für eine formale Rechtfertigung des Prinzips der vollständigen Induktion.

Übungen

Übung 2.3.40. Gegeben eine Bijektion $f : X \to Y$ ist $g = f^{-1}$ die einzige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Ebenso ist auch $h = f^{-1}$ die einzige Abbildung $h : Y \to X$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

Ergänzende Übung 2.3.41. Seien X, Y endliche Mengen. So gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y, und unter diesen Abbildungen sind genau $|Y|(|Y| - 1)(|Y| - 2) \ldots (|Y| - |X| + 1)$ Injektionen.

Ergänzende Übung 2.3.42. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien natürliche Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ gegeben mit $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$. Man zeige: Es gibt genau $n!/(\alpha_1! \cdots \alpha_r!)$ Abbildungen $f : X \to \{1, \ldots, r\}$, die jedes i genau α_i-mal als Wert annehmen, in Formeln

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} = \mathrm{card}\{f \mid |f^{-1}(i)| = \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots r\}$$

Ergänzung 2.3.43. Manche Autoren bezeichnen die Zahlen aus der vorherigen Übung 2.3.42 auch als **Multinomialkoeffizienten** und verwenden die Notation

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} =: \binom{n}{\alpha_1; \ldots; \alpha_r}$$

Mich überzeugt diese Notation nicht, da sie im Gegensatz zu unserer Notation für die Binomialkoeffizienten nichts kürzer macht.

Ergänzende Übung 2.3.44. Man zeige die Formel

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$$

Hier ist zu verstehen, daß wir für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$ den angegebenen Ausdruck nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren.

Ergänzende Übung 2.3.45. Eine **zyklische Anordnung** einer endlichen Menge M ist eine Abbildung $z : M \to M$ derart, daß wir durch mehrmaliges Anwenden von z auf ein beliebiges Element $x \in M$ jedes Element $y \in M$ erhalten können. Man zeige, daß es auf einer n-elementigen Menge mit $n \geq 1$ genau $(n-1)!$ zyklische Anordnungen gibt. Die Terminologie „zyklische Anordnung" ist etwas unglücklich, da unsere Struktur nun beim besten Willen keine Anordnung im Sinne von [AN1] 1.3 ist. Andererseits ist aber das Angeben einer Anordnung auf einer endlichen Menge M schon auch etwas Ähnliches.

Ergänzende Übung 2.3.46. Sei X eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen und sei m eine natürliche Zahl. Man zeige, daß es genau $\binom{n+m-1}{n-1}$ Abbildungen $f : X \to \mathbb{N}$ gibt mit $\sum_{x \in X} f(x) = m$. Hinweis: Man denke sich $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ und veranschauliche sich dann f als eine Folge auf $f(1)$ Punkten gefolgt von einem Strich gefolgt von $f(2)$ Punkten gefolgt von einem Strich und so weiter, insgesamt also eine Folge aus $n + m - 1$ Symbolen, davon m Punkten und $n - 1$ Strichen.

Ergänzende Übung 2.3.47. Gegeben eine fest gedachte Menge Y können wir für jede weitere Menge A eine Abbildung $\mathrm{ev}_A : A \to \mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}(A, Y), Y)$, genannt die **Evaluations-** oder **Auswertungsabbildung**, erklären durch die Vorschrift $\mathrm{ev}_A : a \mapsto (f \mapsto f(a))$. Man zeige, daß für jede Menge X die Komposition

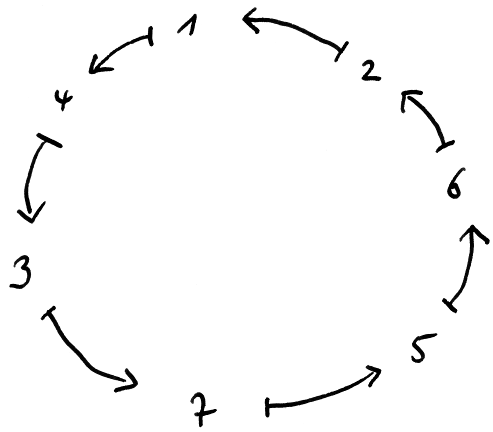
$$\mathrm{Ens}(X, Y) \to \mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}(X, Y), Y), Y) \to \mathrm{Ens}(X, Y)$$

von $\mathrm{ev}_{\mathrm{Ens}(X,Y)}$ mit dem Vorschalten $(\circ\, \mathrm{ev}_X)$ von ev_X die Identität auf $\mathrm{Ens}(X, Y)$ ist. Später werden Sie diese Aussage möglicherweise als die „Dreiecksidentität" im Kontext „adjungierter Funktoren" in [TF] 4.4.9 verstehen lernen.

2.4 Logische Symbole und Konventionen

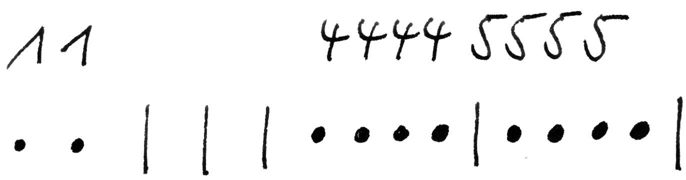
2.4.1. In der mathematischen Fachsprache meint **oder** immer, daß auch beides erlaubt ist. Wir haben diese Konvention schon benutzt bei der Definition der Vereinigung in 2.2.9 durch die Vorschrift $X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$. Zum Beispiel haben wir $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$. In diesem Zusammenhang muß ich die schöne Geschichte erzählen von dem Logiker, der seinem Freund erzählt, er habe ein Kind bekommen. Der Freund fragt: „Ist es ein Junge oder ein Mädchen?" worauf der Logiker antwortet: „Ja!"

Ergänzung 2.4.2 (**Herkunft des Vereinigungssymbols**). In den „Arithmetes principia" von Guiseppe Peano scheint das Symbol $\cup$ zum ersten Mal vorzukommen, allerdings als Symbol für „oder". Peano schreibt: „Signum $\cup$ legitur *vel*" und „vel" heißt „oder" auf lateinisch. Der Kontext legt nahe, daß $\cup$ an den Buchstaben v erinnern soll. Das Symbol $\vee$ hatte Peano schon als Symbol für „verum" verbraucht.



Versuch der graphischen Darstellung einer zyklischen Anordnung auf der Menge $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Die Pfeile $\mapsto$ sollen jeweils den Effekt der Abbildung z veranschaulichen.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	0	0	4	4	0



Eine Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ im Fall $n = 6$ mit Wertesumme $m = 10$ und die Veranschaulichung nach der Vorschrift aus Übung 2.3.46 als Folge bestehend aus m Punkten und $n - 1$ Strichen.

In der Bedeutung der Vereinigung zweier Mengen habe ich das Symbol zuerst bei Bourbaki gesehen.

2.4.3. Sagt man der mathematischen Fachsprache, es gebe ein Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften, so ist stets gemeint, daß es *mindestens ein* derartiges Objekt geben soll. Hätten wir diese Sprachregelung rechtzeitig vereinbart, so hätten wir zum Beispiel das Wörtchen „mindestens" in Teil 2 von 2.3.21 bereits weglassen können. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe einen Bruder, so kann es auch durchaus sein, daß er noch weitere Brüder hat! Will man in der mathematischen Fachsprache Existenz und Eindeutigkeit gleichzeitig ausdrücken, so sagt man, es gebe **genau ein** Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe genau einen Bruder, so können sie sicher sein, daß er nicht noch weitere Brüder hat.

2.4.4. Die folgenden Abkürzungen erweisen sich als bequem und werden häufig verwendet:

$\forall$	für alle (ein umgedrehtes A wie „alle")
$\exists$	es gibt (ein umgedrehtes E wie „existiert")
$\exists!$	es gibt genau ein
$\ldots \Rightarrow \cdots$	aus ... folgt $\cdots$
$\ldots \Leftarrow \cdots$	... folgt aus $\cdots$
$\ldots \Leftrightarrow \cdots$	... ist gleichbedeutend zu $\cdots$

Ist zum Beispiel $f : X \to Y$ eine Abbildung, so können wir unsere Definitionen injektiv, surjektiv, und bijektiv etwas formaler so schreiben:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ injektiv} & \Leftrightarrow & ((f(x) = f(z)) \Rightarrow (x = z)) \\ f \text{ surjektiv} & \Leftrightarrow & \forall y \in Y \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y \\ f \text{ bijektiv} & \Leftrightarrow & \forall y \in Y \exists! x \in X \text{ mit } f(x) = y \end{array}$$

2.4.5. In den Zeiten des Bleisatzes war es nicht einfach, neue Symbole in Druck zu bringen. Irgendwelche Buchstaben verdreht zu setzen, war jedoch unproblematisch. So entstanden die Symbole $\forall$ und $\exists$. Sie heißen **Quantoren**.

2.4.6. Bei den „für alle" und „es gibt" kommt es in der mathematischen Fachsprache, anders als in der weniger präzisen Umgangssprache, entscheidend auf die Reihenfolge an. Man betrachte zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen:

> „Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so daß gilt $m \geq n$"
>
> „Es gibt $m \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $m \geq n$"

Offensichtlich ist die Erste richtig, die Zweite aber falsch. Weiter mache man sich klar, daß die „für alle" und „es gibt" bei Verneinung vertauscht werden. Äquivalent sind zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen

„Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 2$“

„Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nicht $n^2 = 2$“

2.4.7. Wollen wir zeigen, daß aus einer Aussage A eine andere Aussage B folgt, so können wir ebensogut zeigen: Gilt B nicht, so gilt auch A nicht. In formelhafter Schreibweise haben wir also

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{nicht } B) \Rightarrow (\text{nicht } A))$$

Wollen wir zum Beispiel zeigen $(g \circ f \text{ surjektiv}) \Rightarrow (g \text{ surjektiv})$, so reicht es, wenn wir uns überlegen: Ist g nicht surjektiv, so ist $g \circ f$ erst recht nicht surjektiv. Oder ein Beispiel aus dem täglichen Leben: Die Aussage (Wenn ein Mensch ein Kind gebiert, ist er eine Frau) ist gleichbedeutend zur Aussage (Wenn ein Mensch keine Frau ist, gebiert er auch keine Kinder). Nicht folgern kann man dahingegen die Aussage (Wenn ein Mensch kein Kind gebiert, ist er keine Frau).

2.4.8. In der Literatur findet man oft die Abkürzung **oBdA** für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

3 Algebraische Grundbegriffe

Auf der Schule versteht man unter einer „reellen Zahl“ meist einen unendlichen Dezimalbruch, wobei man noch aufpassen muß, daß verschiedene unendliche Dezimalbrüche durchaus dieselbe reelle Zahl darstellen können, zum Beispiel gilt in den reellen Zahlen ja

$$0{,}99999\ldots = 1{,}00000\ldots$$

Diese reellen Zahlen werden dann addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert ohne tiefes Nachdenken darüber, wie man denn zum Beispiel mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Subtraktion umgehen soll, und warum dann Formeln wie $(a+b)-c = a+(b-c)$ wirklich gelten, zum Beispiel für $a = b = c = 0{,}999\ldots$. Dieses tiefe Nachdenken wollen wir im Folgenden vom Rest der Vorlesung abkoppeln und müssen dazu sehr präzise formulieren, welche Eigenschaften für die Addition, Multiplikation und Anordnung in „unseren“ reellen Zahlen gelten sollen. In der Terminologie, die in den folgenden Abschnitten eingeführt wird, werden wir die reellen Zahlen charakterisieren als einen angeordneten Körper, in dem jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke sogar eine größte untere Schranke besitzt. Von dieser Charakterisierung ausgehend erklären wir dann, welche reelle Zahl ein gegebener unendlicher Dezimalbruch darstellt, und errichten das Gebäude der Analysis. In demselben Begriffsgebäude modellieren wir auch den Anschauungsraum, vergleiche 1.2.8 oder besser [LA1] 1.1.9 und [LA2] 6.6.5. Um diese Charakterisierungen und Modellierungen verständlich zu machen, führen wir zunächst einige grundlegende algebraische Konzepte ein, die Ihnen im weiteren Studium der Mathematik noch oft begegnen werden.

3.1 Mengen mit Verknüpfung

Definition 3.1.1. Eine **Verknüpfung** $\top$ **auf einer Menge** X ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & x\top y \end{array}$$

die jedem geordneten Paar (x,y) mit $x,y \in X$ ein Element $(x\top y) \in X$ zuordnet.

3.1.2. Das komische Symbol $\top$ benutze ich, um mich an dieser Stelle noch nicht implizit auf einen der Standardfälle Addition oder Multiplikation festlegen zu müssen. Das Wort „Verknüpfung“ erhält damit eine erweiterte Bedeutung: Statt der Verknüpfung von zwei Abbildungen kann damit auch allgemeiner eine abstrakte Verknüpfung auf einer beliebigen Menge gemeint sein. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

Man kann Verknüpfungen auf endlichen Mengen darstellen durch ihre **Verknüpfungstafel**. Hier habe ich etwa die Verknüpfungstafel der Verknüpfung $\min$ auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ angegeben. Eigentlich muß man sich dazu einigen, ob im Kästchen aus der Spalte m und der Zeile n nun $m \top n$ oder vielmehr $n \top m$ stehen soll, aber bei einer kommutativen Verknüpfung wie $\min$ kommt es darauf zum Glück nicht an.

und	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Falsch
Falsch	Falsch	Falsch

oder	Wahr	Falsch
Wahr	Wahr	Wahr
Falsch	Wahr	Falsch

Die Wahrheitstafeln für „und“ und „oder“. Gemeint ist hier wie stets in der Mathematik das „nichtausschließende oder“. Sagen wir, es gelte A oder B, so ist insbesondere auch erlaubt, daß beides gilt. Bei der Wahrheitstafel für das „ausschließende oder“ müßte oben links als Verknüpfung von „Wahr“ mit „Wahr“ ein „Falsch“ stehen.

Beispiele 3.1.3. 1. Die Addition von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m, n) & \mapsto & m + n \end{array}$$

2. Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m, n) & \mapsto & m \cdot n \end{array}$$

3. Die Zuordnung $\min$, die jedem Paar von natürlichen Zahlen die kleinere zuordnet, wenn sie verschieden sind, und eben diese Zahl $\min(n, n) = n$, wenn sie gleich sind, ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{cccc} \min : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (m, n) & \mapsto & \min(m, n) \end{array}$$

4. Eine Abbildung $Z \to Z$ von einer Menge Z in sich selbst nennen wir auch eine **Selbstabbildung von** Z. Wir kürzen die Menge $\operatorname{Ens}(Z, Z)$ aller Selbstabbildungen von Z auch oft mit $\operatorname{Ens}(Z) := \operatorname{Ens}(Z, Z)$ ab. Die Verknüpfung von Abbildungen liefert eine Verknüpfung auf der Menge $\operatorname{Ens}(Z)$ aller Selbstabbildungen von Z, in Formeln

$$\begin{array}{lcc} \operatorname{Ens}(Z) \times \operatorname{Ens}(Z) & \to & \operatorname{Ens}(Z) \\ (f, g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

5. Die Subtraktion von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (m, n) & \mapsto & m - n \end{array}$$

6. Jede Verknüpfung $\top$ auf einer Menge induziert eine Verknüpfung auf ihrer Potenzmenge vermittels der Vorschrift

$$U \top V := \{u \top v \mid u \in U,\ v \in V\}$$

7. Gegeben Mengen mit Verknüpfung $(X, \top)$ und $(Y, \perp)$ erklären wir die **komponentenweise Verknüpfung** auf ihrem Produkt $X \times Y$ durch die Vorschrift $((x, y), (x', y')) \mapsto ((x \top x'), (y \perp y'))$.

8. Die logischen Operationen „und", „oder", „impliziert" und dergleichen mehr können als Verknüpfungen auf der zweielementigen Menge $\{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ aufgefaßt werden. Die zugehörigen Verknüpfungstabellen heißen **Wahrheitstafeln**. Bei einem formalen Zugang werden diese Tafeln, wie sie für „und" und „oder" auf der vorhergehenden Seite zu finden sind, zur Definition der jeweiligen Begriffe.

3.1.4. Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung**, wenn aus $x, y \in U$ folgt $x \top y \in U$. Natürlich ist in diesem Fall auch $(U, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Man spricht dann von der **auf U induzierten Verknüpfung**. Zum Beispiel ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ abgeschlossen unter der Addition, aber $\mathbb{Z}\backslash\{0\} \subset \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ist nicht abgeschlossen unter der durch die Division gegebenen Verknüpfung $(m, n) \mapsto m/n$.

Definition 3.1.5. Eine Verknüpfung $\top$ auf einer Menge X heißt **assoziativ**, wenn gilt $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z \quad \forall x, y, z \in X$. Sie heißt **kommutativ**, wenn gilt $x \top y = y \top x \quad \forall x, y \in X$.

Beispiele 3.1.6. Von unseren Beispielen sind die ersten drei assoziativ und kommutativ, das vierte ist assoziativ aber nicht kommutativ falls Z mehr als ein Element hat, das fünfte ist weder assoziativ noch kommutativ.

3.1.7. Ist eine Verknüpfung $\top$ auf einer Menge A assoziativ, so liefern auch ungeklammerte Ausdrücke der Form $a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n$ wohlbestimmte Elemente von A: Genauer ist das Resultat unabhängig davon, wie wir die Klammern setzen. Um diese Erkenntnis zu formalisieren, vereinbaren wir für einen ungeklammerten Ausdruck die „von hinten hochgeklammerte“ Interpretation

$$a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n := a_1 \top (a_2 \top (\ldots (a_{n-1} \top a_n) \ldots))$$

und zeigen dann das folgende Lemma.

Lemma 3.1.8 (Assoziativität macht Klammern überflüssig). *Gegeben $(A, \top)$ eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in A$ gilt mit der von hinten hochgeklammerten Interpretation für ungeklammerte Ausdrücke*

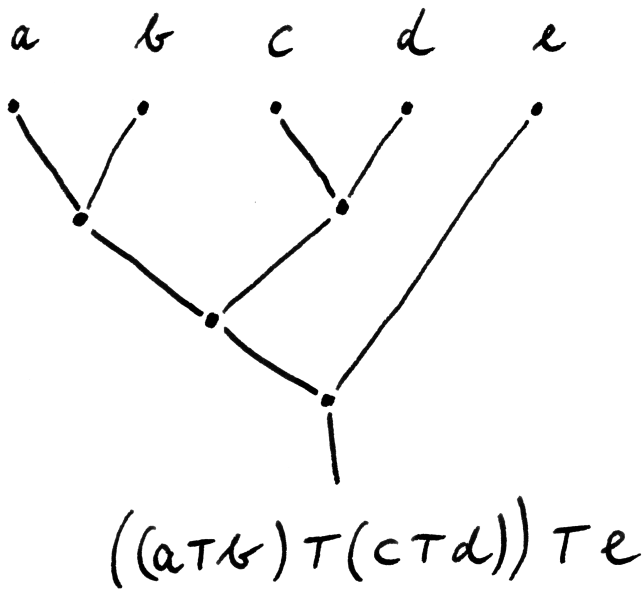
$$(a_1 \top \ldots \top a_n) \top (b_1 \top \ldots \top b_m) = a_1 \top \ldots \top a_n \top b_1 \top \ldots \top b_m$$

Beweis. Wir folgern mit den Definitionen für die erste Gleichheit und dem Assoziativgesetz für die zweite Gleichheit die Identität

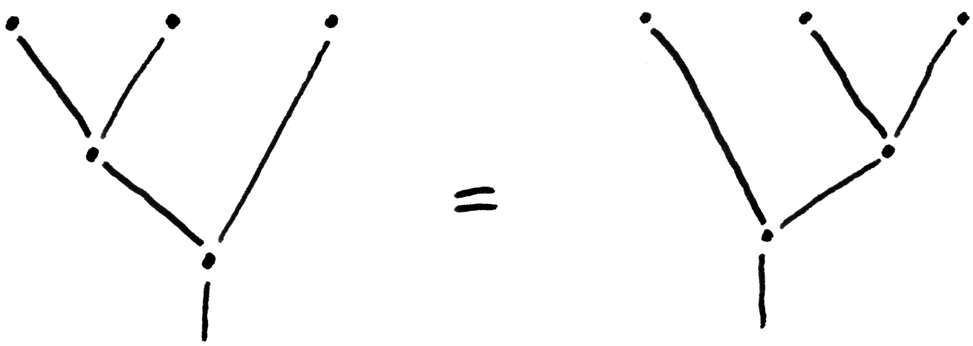
$$\begin{array}{rcl} y(a_1 \top \ldots \top a_n) \top (b_1 \top \ldots \top b_m) & = & (a_1 \top (a_2 \top \ldots \top a_n)) \top (b_1 \top \ldots \top b_m) \\ & = & a_1 \top ((a_2 \top \ldots \top a_n) \top (b_1 \top \ldots \top b_m)) \end{array}$$

und sind fertig mit vollständiger Induktion über n. □

3.1.9. Das Wort „Lemma“, im Plural „Lemmata“, kommt vom griechischen Wort $\lambda\alpha\mu\beta\alpha\nu\epsilon\iota\nu$ für „nehmen“ und bezeichnet in der Mathematik kleinere Resultate oder auch Zwischenschritte von größeren Beweisen, denen der Autor außerhalb ihres engeren Kontexts keine größere Bedeutung zumißt.



Mögliche „Klammerungen“ mag man sich graphisch wie oben angedeutet veranschaulichen. Die Assoziativität bedeutet dann graphisch so etwas wie



Das Gleichheitszeichen meint nur, daß beide Klammerungen stets dasselbe liefern, wenn wir oben drei Elemente unserer Menge mit Verknüpfung einfüllen.

Vorschau 3.1.10. Die Zahl der Möglichkeiten, einen Ausdruck in $n+1$ Faktoren so zu klammern, daß in jedem Schritt nur die Verknüpfung von je zwei Elementen zu berechnen ist, heißt die **n-te Catalan-Zahl** und wird C_n notiert. Die ersten Catalan-Zahlen sind $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$ und $C_3 = 5$: Die fünf möglichen Klammerungen von 4 Elementen sind etwa $(ab)(cd)$, $a(b(cd))$, $a((bc)d)$, $((ab)c)d$ und $(a(bc))d$. Im allgemeinen zeigen wir in [AN1] 5.3.7, daß sich die Catalan-Zahlen durch die Binomial-Koeffizienten 1.1.17 ausdrücken lassen vermittels der amüsanten Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

3.1.11. Gegeben eine Menge mit assoziativer und kommutativer Verknüpfung $(A, \top)$ kommt es beim Verknüpfen noch nicht einmal auf die Reihenfolge an. Sind genauer $a_1, \ldots, a_n$ mit $n \geq 1$ gegeben und ist $\sigma : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung, so gilt

$$a_1 \top \ldots \top a_n = a_{\sigma(1)} \top \ldots \top a_{\sigma(n)}$$

Wir betrachten das als offensichtlich und schreiben keinen Beweis aus.

Definition 3.1.12 (Iterierte Verknüpfungen). Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Ist $n \in \{1, 2, \ldots\}$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl und $x \in X$, so schreiben wir

$$\underbrace{x \top x \top \ldots \top x}_{n\text{-mal}} =: n^{\top} x$$

Ich erinnere daran, daß wir in 3.1.7 für derartige Ausdrücke im Zweifelsfall die Interpretation als „von hinten hochgeklammerte Verknüpfung“ vereinbart hatten.

3.1.13. Wird unsere Verknüpfung $+$ notiert, so schreibt man statt $n^+ x$ meist kurz nx. Wird unsere Verknüpfung mit einem runden Symbol wie etwa $*$ notiert, so schreibt man statt $n^* x$ meist kurz x^n oder etwas ausführlicher x^{*n} oder $x^{(*n)}$.

3.1.14 (**Iterationsregeln**). Sei $(A, \top)$ eine Menge mit assoziativer Verknüpfung. Sind m, n zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen, so erhalten wir mithilfe unseres Lemmas 3.1.8 zur Überflüssigkeit von Klammern bei assoziativen Verknüpfungen die Regeln $(n+m)^{\top} a = (n^{\top} a) \top (m^{\top} a)$ und $(nm)^{\top} a = n^{\top}(m^{\top} a)$. Ist unsere Verknüpfung auch noch kommutativ, so gilt zusätzlich die Regel $n^{\top}(a \top b) = (n^{\top} a) \top (n^{\top} b)$.

Definition 3.1.15. Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Ein Element $e \in X$ heißt **neutrales Element** von $(X, \top)$, wenn gilt

$$e \top x = x \top e = x \quad \forall x \in X$$

3.1.16 (**Eindeutigkeit neutraler Elemente**). In einer Menge mit Verknüpfung $(X, \top)$ kann es höchstens ein neutrales Element e geben, denn für jedes weitere Element e' mit $e' \top x = x \top e' = x \quad \forall x \in X$ haben wir $e' = e' \top e = e$. Wir dürfen also den bestimmten Artikel verwenden und in einer Menge mit Verknüpfung von *dem* neutralen Element reden und es mit e_X bezeichnen.

Definition 3.1.17. Ein **Monoid** ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, in der es ein neutrales Element gibt.

3.1.18. Das Wort „Monoid“ ist wohl von griechisch „$\mu o \nu o \varsigma$“ für „allein“ abgeleitet: Ein Monoid besitzt nur eine einzige Verknüpfung. Für ein kommutatives Monoid schlage ich die abkürzende Bezeichnung **Kmonoid** vor.

3.1.19. Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit dem Symbol $+$, so notiert man das neutrale Element meist 0_M oder abkürzend 0 und nennt es das **Null-Element** oder abkürzend die **Null** und spricht von einem **additiv notierten Monoid**. Nur kommutative Monoide werden additiv notiert. Notiert man in einem Monoid M die Verknüpfung mit einem runden Symbol wie $\cdot$ oder $\circ$ oder auch einfach durch Hintereinanderschreiben, so notiert man das neutrale Element oft 1_M oder abkürzend 1 und nennt es das **Eins-Element** oder abkürzend die **Eins** und spricht von einem **multiplikativ notierten Monoid**.

Beispiele 3.1.20. Die natürlichen Zahlen bilden mit der Addition ein Monoid $(\mathbb{N}, +)$ mit neutralem Element 0. Sie bilden auch mit der Multiplikation ein Monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit neutralem Element 1. Für jede Menge Z ist die Menge $\mathrm{Ens}(Z)$ der Abbildungen von Z in sich selbst mit der Verknüpfung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung ein Monoid mit neutralem Element id_Z. Die leere Menge ist *kein* Monoid, ihr fehlt das neutrale Element. Jede einelementige Menge ist mit der einzig möglichen Verknüpfung ein Monoid.

3.1.21 (**Nullfach iterierte Verknüpfung in Monoiden**). Ist $(M, \top)$ ein Monoid, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ aus 3.1.12 auf alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, indem wir

$$0^\top a := e_M$$

als das neutrale Element e_M von M verstehen, für alle $a \in M$. Damit gelten unsere Iterationsregeln 3.1.14 dann sogar für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

3.1.22 (**Notation für nullfach iterierte Verknüpfung**). Sei ein Monoid M gegeben. Wird seine Verknüpfung $+$ notiert, so schreibt man auch für $n = 0$ statt $n^+ x$ meist kurz nx und meint also mit $0x$ das neutrale Element von M, in Formeln $0x := 0_M$. Wird seine Verknüpfung mit einem runden Symbol wie etwa $*$ notiert, so schreibt man auch für $n = 0$ statt $n^* x$ meist kurz x^n oder etwas ausführlicher x^{*n} oder $x^{(*n)}$ und meint also mit x^0 das neutrale Element von M, in Formeln $x^0 := 1_M$.

3.1.23 (**Summen- und Produktzeichen**). Gegeben eine Abbildung $I \to M$, $i \mapsto a_i$ von einer endlichen Menge in ein kommutatives additiv beziehungsweise multiplikativ notiertes Monoid M vereinbaren wir die Notationen

$$\sum_{i\in I} a_i \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \prod_{i\in I} a_i$$

für die „Verknüpfung aller a_i mit $i \in I$". Ist I die leere Menge, so vereinbaren wir, daß dieser Ausdruck das neutrale Element von M bedeuten möge, also 0 beziehungsweise 1. Wir haben diese Notation bereits verwendet in 2.2.17, und für die konstante Abbildung $I \to \mathbb{N}$, $i \mapsto 1$ hätten wir zum Beispiel

$$\sum_{i\in I} 1 = |I|$$

Unsere Konvention 1.1.14 für mit einem Laufindex notierte Summen beziehungsweise Produkte verwenden wir bei kommutativen Monoiden analog.

Übungen

Übung 3.1.24. Sei Z eine Menge. Das Schneiden von Teilmengen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rccc} \cap : & \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z) & \to & \mathcal{P}(Z) \\ & (A, B) & \mapsto & A \cap B \end{array}$$

auf der Potenzmenge. Dasselbe gilt für die Vereinigung und das Bilden der Differenzmenge. Welche dieser Verknüpfungen sind kommutativ oder assoziativ? Welche besitzen neutrale Elemente?

Ergänzende Übung 3.1.25. Man gebe die Wahrheitstafeln für $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ an. Bezeichne weiter $\neg : \{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\} \to \{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ die „Verneinung". Man zeige, daß die Formel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

beim Einsetzen beliebiger Wahrheitswerte aus $\{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ für A und B stets den Wert Wahr ausgibt, in Übereinstimmung mit unseren eher intuitiven Überlegungen in 2.4.7.

3.2 Gruppen

3.2.1. Ich empfehle, bei der Lektüre dieses Abschnitts die Tabelle auf Seite 56 gleich mitzulesen, die die Bedeutungen der nun folgenden Formalitäten in den zwei gebräuchlichsten Notationssystemen angibt. In diesen Notationssystemen sollten alle Formeln aus der Schulzeit vertraut sein. Ich erinnere daran, daß wir ein Monoid definiert hatten als eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, für die es in unserer Menge ein neutrales Element gibt.

Definition 3.2.2.

1. Ist $(M, \top)$ ein Monoid und $a \in M$ ein Element, so nennen wir ein weiteres Element $\bar{a} \in M$ **invers zu** a, wenn gilt $a \top \bar{a} = e = \bar{a} \top a$ für $e \in M$ das neutrale Element unseres Monoids. Ein Element eines Monoids, das ein Inverses besitzt, heißt **invertierbar**;
2. Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element ein Inverses besitzt;
3. Eine **kommutative Gruppe** oder **abelsche Gruppe** ist eine Gruppe, deren Verknüpfung kommutativ ist.

Beispiele 3.2.3. Von unseren Beispielen 3.1.3 für Mengen mit Verknüpfung oben ist nur $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe, und diese Gruppe ist kommutativ. Ein anderes Beispiel für eine kommutative Gruppe ist die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, ein weiteres die Menge $\mathbb{Q} \backslash \{0\}$ der von Null verschiedenen rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Auch jedes einelementige Monoid ist eine Gruppe.

3.2.4. Der Begriff einer „Gruppe“ wurde von Évariste Galois (1811-1832) in die Mathematik eingeführt. Er verwendet den Begriff „Gruppe von Transformationen“ sowohl in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge“ als auch in der Bedeutung einer „Menge von bijektiven Selbstabbildungen einer gegebenen Menge, die abgeschlossen ist unter Verknüpfung und Inversenbildung“, und die damit in der Tat ein Beispiel für eine Gruppe im Sinne der obigen Definition bildet. Unsere obige Definition 3.2.2 geht auf eine Arbeit von Arthur Cayley aus dem Jahre 1854 mit dem Titel „On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$“ zurück und wurde damit formuliert, bevor Cantor die Sprache der Mengenlehre entwickelte. Die Terminologie „abelsche Gruppe“ wurde zu Ehren des norwegischen Mathematikers Niels Hendrik Abel eingeführt.

Lemma 3.2.5. *Jedes Element eines Monoids besitzt höchstens ein Inverses.*

Beweis. Aus $a \top \bar{a} = e$ und $b \top a = e$ folgt durch Anwenden von $b \top$ auf die erste Gleichung mit dem Assoziativgesetz sofort $\bar{a} = b$. □

3.2.6. Wir dürfen also den bestimmten Artikel benutzen und von nun an von *dem* Inversen eines Elements eines Monoids und insbesondere auch einer Gruppe reden. Gegeben ein invertierbares Element ist offensichtlich auch sein Inverses invertierbar und das Inverse des Inversen ist wieder das ursprüngliche Element, in Formeln $\bar{\bar{a}} = a$.

	123	213	312	321	132	231
123	123	213	312	321	132	231
213	213	123	321	312	231	132
312	312	132	231	213	321	123
321	321	231	132	123	312	213
132	132	312	213	231	123	321
231	231	321	123	132	213	312

Die Verknüpfungstafel der Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Eine solche Permutation σ habe ich dargestellt durch das geordnete Zahlentripel $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)$, und im Kästchen aus der Zeile τ und der Spalte σ steht $\tau \circ \sigma$.

Lemma 3.2.7. *Sind a und b invertierbare Elemente eines Monoids, so ist auch $a\top b$ invertierbar mit Inversem $\overline{(a\top b)} = \bar{b}\top\bar{a}$.*

Beweis. In der Tat rechnen wir schnell $(a\top b)\top(\bar{b}\top\bar{a}) = e = (\bar{b}\top\bar{a})\top(a\top b)$. Diese Formel ist auch aus dem täglichen Leben vertraut: Wenn man sich morgends zuerst die Strümpfe anzieht und dann die Schuhe, so muß man abends zuerst die Schuhe ausziehen und dann die Strümpfe. □

3.2.8. Die invertierbaren Elemente eines Monoids bilden insbesondere stets eine unter der Verknüpfung abgeschlossene Teilmenge. Diese Teilmenge enthält offensichtlich das neutrale Element und ist folglich mit der induzierten Verknüpfung eine Gruppe. Für die Gruppe der invertierbaren Elemente eines multiplikativ notierten Monoids M verwenden wir die Notation $M^\times$. Zum Beispiel haben wir $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. Dieses Kreuz soll nicht als x gelesen werden, es ist vielmehr ein mißbrauchtes Multiplikationssymbol.

Beispiel 3.2.9. Für jede Menge Z ist die Menge aller Bijektionen von Z auf sich selbst eine Gruppe, mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Wir notieren diese Gruppe $\operatorname{Ens}^\times(Z)$ in Übereinstimmung mit unserer Konvention 3.2.8, schließlich handelt es sich um die Gruppe der invertierbaren Elemente des Monoids $\operatorname{Ens}(Z)$. Ihre Elemente heißen die **Permutationen von** Z. Die Gruppe der Permutationen einer Menge Z ist für $|Z| > 2$ nicht kommutativ. Das Inverse einer Bijektion ist ihre Umkehrabbildung.

Definition 3.2.10 (Negativ iterierte Verknüpfung invertierbarer Elemente). Ist $(M, \top)$ ein Monoid und $a \in M$ invertierbar, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ aus 3.1.17 weiter auf alle $n \in \mathbb{Z}$, indem wir für n negativ setzen $n^\top a := (-n)^\top \bar{a}$.

3.2.11 (**Iterationsregeln**). Gegeben ein invertierbares Element a eines Monoids gelten offensichtlich sogar für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ die Regeln $(n+m)^\top a = (n^\top a)\top(m^\top a)$ und $(nm)^\top a = n^\top(m^\top a)$. Sind a, b invertierbare Elemente eines Monoids mit $ab = ba$, so gilt zusätzlich $n^\top(a\top b) = (n^\top a)\top(n^\top b)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

3.2.12. Bei additiv geschriebenen Monoiden bezeichnet man das Inverse von a, sofern es existiert, meist als das **Negative** von a und notiert es $-a$. Bei multiplikativ notierten kommutativen Monoiden verwendet man die Bruchnotation $1/a$ und b/a aus nebenstehender Tabelle, falls a invertierbar ist. Bei nichtkommutativen multiplikativ notierten Monoiden benutzt man für das Inverse von a die von der im folgenden erklärten allgemeinen Notation a^n abgeleitete Notation a^{-1}. Die nebenstehende Tabelle faßt die üblichen Notationen für unsere abstrakten Begriffsbildungen in diesem Kontext zusammen und gibt unsere allgemeinen Resultate und Konventionen in diesen Notationen wieder.

abstrakt	additiv	multiplikativ
$a \top b$	$a + b$	$a \cdot b$, $a \circ b$, ab
e	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\bar{b}$	$-b$	$\hat{1}/b$
$a \top \bar{b}$	$a - b$	a/b
$n^\top a$	na	a^n
$e \top a = a \top e = a$	$\hat{0} + a = a + \hat{0} = a$	$\hat{1} \cdot a = a \cdot \hat{1} = a$
$a \top \bar{a} = e$	$a - a = \hat{0}$	$a/a = \hat{1}$
$\bar{\bar{a}} = a$	$-(-a) = a$	$\hat{1}/(\hat{1}/a) = a$
$(-1)^\top a = \bar{a}$	$(-1)a = -a$	$a^{-1} = \hat{1}/a$
$\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$	$-(a+b) = (-b) + (-a)$	$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $\hat{1}/ab = (\hat{1}/b)(\hat{1}/a)$
$\overline{(a \top \bar{b})} = b \top \bar{a}$	$-(a-b) = b - a$	$\hat{1}/(a/b) = b/a$
$n^\top(m^\top a) = (nm)^\top a$	$n(ma) = (nm)a$	$(a^m)^n = a^{nm}$
$(m+n)^\top a = (m^\top a) \top (n^\top a)$	$(m+n)a = (ma) + (na)$	$a^{(m+n)} = (a^m)(a^n)$
$\overline{n^\top a} = (-n)^\top a$	$-(na) = (-n)a$	$(a^n)^{-1} = a^{-n}$
$0^\top a = e$	$0a = \hat{0}$	$a^0 = \hat{1}$
$n^\top(a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$	$n(a+b) = (na) + (nb)$	$(ab)^n = (a^n)(b^n)$

Tabelle 1: Konventionen und Formeln in verschiedenen Notationssystemen. Bereits diese Tabelle muß mit einigen Hintergedanken gelesen werden, weil die Symbole $+, -$ darin in zweierlei Bedeutung vorkommen: Manchmal meinen sie konkrete Operationen in $\mathbb{Z}$, manchmal stehen sie aber auch für Verknüpfung, Inversenbildung und neutrale Elemente in abstrakten Monoiden. Ich habe den Symbolen $0, 1$ einen Hut aufgesetzt und $\hat{0}, \hat{1}$ geschrieben, wenn sie nicht notwendig ganze Zahlen bedeuten. Das werde ich aber nicht durchhalten.

3.2.13 (**Notation für negativ iterierte Verknüpfung**). Sei ein Monoid M gegeben und sei $x \in M$ invertierbar. Wird unser Monoid additiv notiert, so schreibt man auch für negatives $n \in \mathbb{Z}$ statt $n^+ x$ meist kurz nx und meint also mit nx das Negative von $(-n)x$. Wird unser Monoid multiplikativ notiert, also mit einem runden Symbol wie etwa $*$, so schreibt man auch für negatives $n \in \mathbb{Z}$ statt $n^* x$ meist kurz x^n oder etwas ausführlicher x^{*n} oder $x^{(*n)}$ und meint also mit x^n das Inverse von x^{-n}.

Beispiel 3.2.14. Im Fall einer bijektiven Abbildung $f : Z \xrightarrow{\sim} Z$ ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Z \xrightarrow{\sim} Z$ das Inverse f^{-1} des invertierbaren Elements f des Monoids $\operatorname{Ens}(Z)$. Ebenso ist im Fall einer von Null verschiedenen rationalen Zahl $a \in \mathbb{Q}$ ihr Inverses im multiplikativen Monoid $\mathbb{Q}$ der Kehrbruch $1/a = a^{-1}$. Unsere Konvention verträgt sich also recht gut mit verschiedenen anderen Konventionen, die Sie bereits kennen mögen.

Übungen

Übung 3.2.15. Ein Element a eines Monoids M ist invertierbar genau dann, wenn es $b, c \in M$ gibt mit $b \top a = e = a \top c$ für e das neutrale Element.

Übung 3.2.16 (**Kürzen**). Sind a, b, c Elemente einer Gruppe, so folgt aus $a \top b = a \top c$ bereits $b = c$. Ebenso folgt aus $b \top a = c \top a$ bereits $b = c$. Dasselbe gilt allgemeiner in einem beliebigen Monoid, wenn wir a invertierbar annehmen.

Ergänzende Übung 3.2.17. Sei M ein Monoid und e sein neutrales Element. Man zeige: Unser Monoid ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ gibt mit $\bar{a} \top a = e$, und dies Element $\bar{a}$ ist dann notwendig das Inverse von a in M. Noch Mutigere zeigen: Ist A eine Menge mit assoziativer Verknüpfung und existiert ein $e \in M$ mit $e \top a = a \ \forall a \in M$ sowie für jedes $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ mit $\bar{a} \top a = e$, so ist M eine Gruppe.

Ergänzende Übung 3.2.18. Gegeben eine Menge Z ist ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(Z)$ mit der Verknüpfung $A + B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ eine abelsche Gruppe.

Ergänzende Übung 3.2.19. Gegeben Gruppen G, H können wir das kartesische Produkt $G \times H$ zu einer Gruppe machen, indem wir darauf die komponentenweise Verknüpfung $(g, h)(g', h') := (gg', hh')$ betrachten.

3.3 Homomorphismen

Didaktische Anmerkung 3.3.1. Ich habe diesen Abschnitt einmal erst später im Zusammenhang mit der Diskussion von linearen Abbildungen besprochen und habe es bereut.

Definition 3.3.2. Eine Menge mit einer völlig beliebigen, nicht notwendig assoziativen Verknüpfung heißt ein **Magma**. Gegeben Magmas $(X, \top)$ und $(Y, \perp)$ verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung** oder auch **Homomorphismus von Magmas** eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ derart, daß gilt $\varphi(a \top b) = \varphi(a) \perp \varphi(b)$ für alle $a, b \in X$. Die Menge aller solchen Homomorphismen von Magmas bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Mag}(X, Y)$$

Beispiel 3.3.3. Sei Z eine Menge und $\mathcal{P}(Z)$ ihre Potenzmenge. Wir betrachten auf $\mathcal{P}(Z)$ die Verknüpfung $(A, B) \mapsto A \backslash B$. Ist $Z \hookrightarrow W$ eine Injektion, so ist die auf den Potenzmengen induzierte Abbildung ein Homomorphismus von Magmas

$$(\mathcal{P}(Z), \backslash) \to (\mathcal{P}(W), \backslash)$$

Definition 3.3.4. Sind unsere beiden Mengen mit Verknüpfung Monoide, so verstehen wir unter einem **Monoidhomomorphismus** einen Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung, der das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet. Gegeben Monoide M und N bezeichnen wir die Menge aller Monoidhomomorphismen von M nach N mit

$$\mathrm{Mon}(M, N) := \{\varphi \in \mathrm{Mag}(M, N) \mid \varphi(e_M) = e_N\}$$

Beispiel 3.3.5. Gegeben Monoide M, N kann $\mathrm{Mon}(M, N) \subset \mathrm{Mag}(M, N)$ eine echte Teilmenge sein. Zum Beispiel ist die Abbildung $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$, die jede ganze Zahl auf die Null wirft, ein Homomorphismus von Mengen mit Verknüpfung, aber kein Monoidhomomorphismus.

3.3.6. Gegeben ein Monoid M und eine Gruppe G gilt stets $\mathrm{Mag}(M, G) = \mathrm{Mon}(M, G)$. Jeder Homomorphismus φ von Mengen mit Verknüpfung von einem Monoid in eine Gruppe bildet also das neutrale Element auf das neutrale Element ab. In der Tat folgt das aus $\varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) \cdot \varphi(e)$ durch Kürzen. Einen Homomorphismus zwischen zwei Gruppen, in Formeln eine Abbildung $\varphi : H \to G$ mit $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in H$, nennen wir einen **Gruppenhomomorphismus**. Gegeben Gruppen H und G bezeichnen wir die Menge aller Gruppenhomomorphismen von H nach G mit

$$\mathrm{Grp}(H, G)$$

Die neue Notation hat gegenüber den beiden bereits eingeführten alternativen Notationen $\mathrm{Mag}(H, G)$ und $\mathrm{Mon}(H, G)$ den Vorteil, uns daran zu erinnern, daß wir es mit Gruppen zu tun haben.

Definition 3.3.7. Ein **Isomorphismus** ist ein Homomorphismus ϕ mit der Eigenschaft, daß es einen Homomorphismus ψ in die Gegenrichtung gibt derart, daß beide Kompositionen $\psi \circ \phi$ und $\phi \circ \psi$ die Identität sind. Zwei Gruppen oder Monoide oder Magmas heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.

3.3.8. Die Terminologie kommt von griechisch „$\mu o \rho \varphi \eta$" für „Gestalt, Struktur" und griechisch „$o \mu o \iota \varsigma$" für „gleich, ähnlich". Auf deutsch könnte man statt Homomorphismus auch „strukturerhaltende Abbildung" sagen. Das Wort „Isomorphismus" wird analog gebildet mit griechisch „$\iota \sigma o \varsigma$" für „gleich".

3.3.9. In den Fällen der obigen Definition ist offensichtlich jeder bijektive Homomorphismus bereits ein Isomorphismus. Im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen werden ihnen aber auch Arten von Homomorphismen begegnen, für die das nicht mehr richtig oder nicht einmal eine sinnvolle Aussage ist. Der erste derartige Fall wird Ihnen in diesen Vorlesungen in [LA1] 1.4.8 begegnen: Im Kontext geordneter, noch genauer gesagt, partiell geordneter Mengen muß eine bijektive monoton wachsende Abbildung keineswegs ein „Isomorphismus von geordneten Mengen" sein alias eine monoton wachsende Umkehrabbildung besitzen.

Ergänzung 3.3.10. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man auch im Fall von Mengen ohne Verknüpfung: Unter einem **Homomorphismus von Mengen** versteht man schlicht eine Abbildung, unter einem **Isomorphismus von Mengen** eine Bijektion.

Beispiel 3.3.11 (**Gruppen mit höchstens zwei Elementen**). Je zwei Gruppen mit genau einem Element sind isomorph und es gibt zwischen ihnen genau einen Isomorphismus. Je zwei Gruppen mit genau zwei Elementen sind isomorph und es gibt zwischen ihnen genau einen Isomorphismus, der eben das neutrale Element auf das neutrale Element wirft und das nichtneutrale Element auf das nichtneutrale Element.

Beispiel 3.3.12 (**Dreielementige Gruppen**). Je zwei Gruppen mit genau drei Elementen sind isomorph und es gibt zwischen ihnen genau zwei Isomorphismen. Um das zu sehen, beschreiben wir eine endliche Menge mit Verknüpfung durch ihre Verknüpfungstabelle, die im Fall einer Gruppe auch **Gruppentafel** heißt. Zum Beispiel bilden diejenigen Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$, die nicht genau eines unserer drei Elemente festhalten, unter der Hintereinanderausführung eine Gruppe mit der Gruppentafel

	1	ζ	η
1	1	ζ	η
ζ	ζ	η	1
η	η	1	ζ

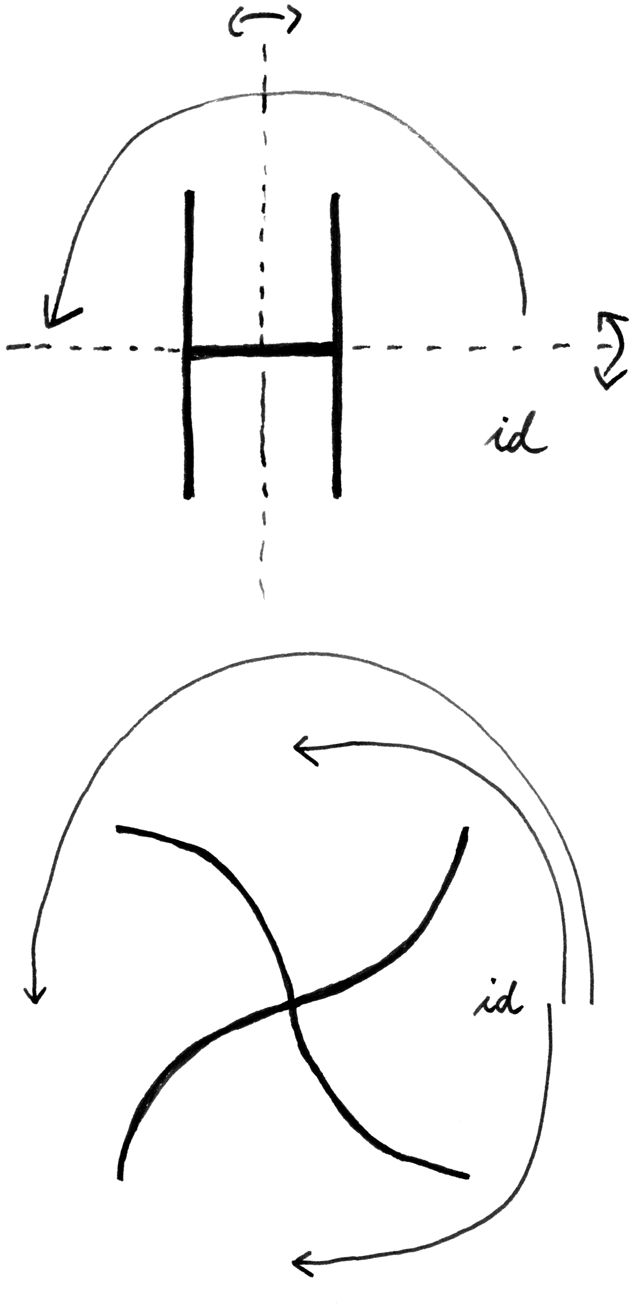
Bei einer Gruppentafel muß nach der Kürzungsregel 3.2.16 in jeder Spalte und in jeder Zeile jedes Element genau einmal vorkommen. Man sieht so recht leicht, daß jede weitere Gruppe G mit genau drei Elementen zu der durch die obige Verknüpfungstafel gegebenen Gruppe isomorph sein muß. Anschaulich denke ich mir diese Gruppe meist als die Gruppe aller Drehungen der Ebene, die ein gleichseitiges Dreieck in sich selbst überführen. Der Nachweis, daß es zwischen je zwei dreielementigen Gruppen genau zwei Isomorphismen gibt, sei dem Leser zur Übung überlassen.

Beispiel 3.3.13 (**Vierelementige Gruppen**). Man sieht durch die Untersuchung von Verknüpfungstafeln recht leicht, daß es bis auf Isomorphismus höchstens zwei vierelementige Magmas mit neutralem Element gibt, in denen die Kürzungsregeln gelten in dem Sinne, daß in jeder Zeile und Spalte der Verknüpfungstafel jedes Element genau einmal vorkommt. Durch Betrachtung der nebenstehenden Bilder oder Interpretation als spezielle Permutationen einer geeigneten endlichen Menge überzeugt man sich auch leicht, daß diese Magmas sogar Gruppen sind, die sich dadurch unterscheiden, ob jedes Element sein eigenes Inverses ist oder nicht. Sie heißen im ersten Fall die **Klein'sche Vierergruppe** und im zweiten Fall die **vierelementige zyklische Gruppe**. Man mag zur Übung zeigen, daß es zwischen je zwei Klein'schen Vierergruppen genau sechs Isomorphismen gibt und zwischen zwei vierelementigen zyklischen Gruppen genau zwei Isomorphismen.

Definition 3.3.14. Eine Teilmenge eines Monoids heißt ein **Untermonoid**, wenn sie abgeschlossen ist unter der Verknüpfung und wenn sie zusätzlich das neutrale Element enthält.

Definition 3.3.15. Eine Teilmenge einer Gruppe heißt eine **Untergruppe**, wenn sie abgeschlossen ist unter der Verknüpfung und der Inversenbildung und wenn sie zusätzlich das neutrale Element enthält. Ist G eine multiplikativ geschriebene Gruppe, so ist eine Teilmenge $U \subset G$ also eine Untergruppe genau dann, wenn in Formeln gilt: $a, b \in U \Rightarrow ab \in U$, $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$ sowie $1 \in U$.

Ergänzung 3.3.16. Nach der reinen Lehre sollte eine Teilmenge eines Monoids ein „Untermonoid" heißen, wenn sie so mit der Struktur eines Monoids versehen werden kann, daß die Einbettung ein Monoidhomomorphismus wird. Nach der reinen Lehre sollte ebenso eine Teilmenge einer Gruppe eine „Untergruppe" heißen, wenn sie so mit der Struktur einer Gruppe versehen werden kann, daß die Einbettung ein Gruppenhomomorphismus wird. Da diese Definitionen jedoch für Anwendungen erst aufgeschlüsselt werden müssen, haben ich gleich die aufgeschlüsselten Fassungen als unsere Definitionen genommen und überlasse den Nachweis der Äquivalenz zu den Definitionen nach der reinen Lehre dem Leser zur Übung.



Die vier Symmetrien des Buchstabens H und des Sonnenrads, das wohl nicht zuletzt auch wegen seiner Symmetriegruppe so unvermittelt an furchtbare Zeiten der deutschen Geschichte erinnert.

Beispiele 3.3.17. In jeder Gruppe ist die einelementige Teilmenge, die nur aus dem neutralen Element besteht, eine Untergruppe. Wir nennen sie die **triviale Untergruppe**. Ebenso ist natürlich die ganze Gruppe stets eine Untergruppe von sich selber. Unsere kleinen Gruppen von eben lassen sich formal gut beschreiben als Untergruppen von Permutationsgruppen. Stellt man eine Permutation σ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ dar, indem man $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ hintereinanderschreibt – bei $n \leq 9$ mag das angehen – so ist unsere dreielementige Gruppe die Untergruppe $\{123, 231, 312\}$ der entsprechenden Permutationsgruppe, oder ganz pedantisch isomorph dazu, unsere Klein'sche Vieregruppe die Untergruppe $\{1234, 2143, 4321, 3412\}$ der entsprechenden Permutationsgruppe und unsere vierelementige zyklische Gruppe die Untergruppe $\{1234, 4123, 3412, 2341\}$.

Ergänzung 3.3.18. Eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung heißt auch eine **Halbgruppe**. Gegeben Halbgruppen A und B schreiben wir $\mathrm{Halb}(A, B)$ statt $\mathrm{Mag}(A, B)$ für die Menge aller mit der Verknüpfung verträglichen Abbildungen von A nach B, als da heißt, aller **Halbgruppenhomomorphismen**. Wieder hat diese Notation den Vorteil, uns daran zu erinnern, daß wir es mit Halbgruppen zu tun haben. Für jede Halbgruppe A liefert dann die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Halb}(\mathbb{N}_{\geq 1}, A) \xrightarrow{\sim} A$$

Hierbei fassen wir $\mathbb{N}_{\geq 1}$ vermittels der Addition als Halbgruppe auf. Ein formaler Beweis muß auf eine formale Definition der natürlichen Zahlen warten und ist in [LA1] 3.2.4 enthalten.

Ergänzung 3.3.19. Betrachten wir die Menge $\mathbb{M}$ „aller möglichen Klammerungen von einem oder mehr Symbolen“ im Sinne von 3.1.10 und darauf die durch „Hintereinanderschreiben“ erklärte Verknüpfung sowie das Element $* \in \mathbb{M}$, das die einzig mögliche Verklammerung von einem einzigen Symbol meint, so liefert für jedes Magma X die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(*)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mag}(\mathbb{M}, X) \xrightarrow{\sim} X$$

Übungen

Übung 3.3.20 (**Injektivität und Kern**). Gegeben ein Gruppenhomomorphismus oder allgemeiner ein Monoidhomomorphismus $\varphi : G \to H$ erklärt man den **Kern von** φ als das Urbild des neutralen Elements, in Formeln

$$\ker \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$$

Man zeige, daß $\ker \varphi$ stets eine Untergruppe beziehungsweise ein Untermonoid von G ist. Man zeige weiter, daß im Gruppenfall φ genau dann injektiv ist, wenn sein Kern nur aus dem neutralen Element besteht.

Übung 3.3.21. Das Bild eines Monoids unter einem Monoidhomomorphismus ist stets ein Untermonoid. Das Urbild eines Untermonoids unter einem Monoidhomomorphismus ist stets eine Untermonoid.

Übung 3.3.22. Das Bild einer Untergruppe unter einem Gruppenhomomorphismus ist stets eine Untergruppe. Das Urbild einer Untergruppe unter einem Gruppenhomomorphismus ist stets eine Untergruppe.

Übung 3.3.23. Gegeben eine Menge Z ist das Bilden des Komplements ein Monoidhomomorphismus $(\mathcal{P}(Z), \cap) \to (\mathcal{P}(Z), \cup)$.

Übung 3.3.24. Die Multiplikation mit 5 ist ein Gruppenhomomorphismus von additiven Gruppen $(5\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Übung 3.3.25 (**Induzierte Verknüpfung**). Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Gegeben eine Injektion $U \hookrightarrow X$ gibt es höchstens eine Verknüpfung auf U derart, daß unsere Injektion ein Homomorphismus ist. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unsere Injektion **an die Verknüpfung angepaßt** und die fragliche Verknüpfung auf U die **auf U induzierte Verknüpfung**. Die Einbettung einer Teilmenge ist genau dann angepaßt, wenn unsere Teilmenge abgeschlossen ist unter der Verknüpfung im Sinne von 3.1.4. Die Eigenschaften der Assoziativität und Kommutativität übertragen sich auf die induzierte Verknüpfung.

Übung 3.3.26 (**Koinduzierte Verknüpfung**). Sei $(X, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Gegeben eine Surjektion $X \twoheadrightarrow Q$ gibt es höchstens eine Verknüpfung auf Q derart, daß unsere Surjektion ein Homomorphismus ist. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unsere Surjektion **an die Verknüpfung angepaßt** und die fragliche Verknüpfung auf Q die **auf Q koinduzierte Verknüpfung**. Zum Beispiel ist die Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$, die jeder Zahl die letzte Ziffer ihrer Dezimaldarstellung zuordnet, angepaßt sowohl an die Addition als auch an die Multiplikation. Mehr dazu in [LA1] 4.2.4.

Übung 3.3.27 (**Eigenschaften einer koinduzierten Verknüpfung**). Die Eigenschaften der Assoziativität und Kommutativität übertragen sich auf die koinduzierte Verknüpfung. Das Bild des Einselements ist ein Einselement für die koinduzierte Verknüpfung, das Bild des Inversen ein Inverses. Jede koinduzierte Verknüpfung zu einer angepaßten Surjektion von einer Gruppe auf eine Menge macht besagte Menge zu einer Gruppe.

Ergänzende Übung 3.3.28 (**Universelle Eigenschaft der natürlichen Zahlen**). Man zeige, daß für jedes Monoid M die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\operatorname{Mon}(\mathbb{N}, M) \xrightarrow{\sim} M$$

liefert. Ein Monoidhomomorphismus vom additiven Monoid der natürlichen Zahlen in ein beliebiges weiteres Monoid ist also in Worten festgelegt und festlegbar durch das Bild des Elements $1 \in \mathbb{N}$. Hinweis: Man erinnere 3.1.20. Wenn man es ganz genau nimmt, muß man für diese Übung die formale Einführung der natürlichen Zahlen [LA1] 3.2.4 abwarten.

Übung 3.3.29 (**Universelle Eigenschaft der ganzen Zahlen**). Man zeige, daß für jede Gruppe G die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

liefert. Ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der ganzen Zahlen in irgendeine weitere Gruppe ist also in Worten festgelegt und festlegbar durch das Bild des Elements $1 \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Man erinnere 3.2.11. Man beachte, daß die 1 nicht das neutrale Element der Gruppe $\mathbb{Z}$ meint, die hier vielmehr als additive Gruppe zu verstehen ist. Man gebe explizit den Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $1 \mapsto 5$ an. Man gebe explizit den Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ mit $1 \mapsto 5$ an. Wenn man es ganz genau nehmen will, muß man für diese Übung die formale Einführung der ganzen Zahlen [LA1] 4.5.10 abwarten.

Übung 3.3.30. Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ vertauscht mit Inversenbildung, in Formeln $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}\ \forall a \in G$.

Ergänzende Übung 3.3.31. Gegeben eine Verknüpfung $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto xy$ auf einer Menge X erklärt man die **opponierte Verknüpfung** durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto yx$. Oft schreibt man auch X^{opp} für die Menge X, versehen mit der opponierten Verknüpfung, und x° für das Element $x \in X$, aufgefaßt als Element von X^{opp}. Das hat den Vorteil, daß man sich das Verknüpfungssymbol sparen kann, die Definition der opponierten Verknüpfung läßt sich schreiben als $y^{\circ}x^{\circ} := (xy)^{\circ}$. Man zeige: Gegeben eine Gruppe G liefert das Bilden des Inversen stets einen Gruppenisomorphismus $G^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} G$, $g^{\circ} \mapsto g^{-1}$ zwischen der **opponierten Gruppe** und der ursprünglichen Gruppe.

Ergänzende Übung 3.3.32. Jede Halbgruppe A kann man zu einem Monoid $\tilde{A}$ erweitern, indem man noch ein Element hinzunimmt und ihm die Rolle des neutralen Elements zuweist. Für jedes weitere Monoid M liefert dann das Vorschalten der Einbettung $A \hookrightarrow \tilde{A}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mon}(\tilde{A}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Halb}(A, M)$$

Übung 3.3.33. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ von Gruppen ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn ihr Graph $\Gamma(\varphi) \subset G \times H$ eine Untergruppe des Produkts ist.

Übung 3.3.34. Jede Verknüpfung von Homomorphismen von Magmas ist wieder ein Homomorphismus von Magmas. Sind also in Formeln $g : U \to V$ und $f : V \to W$ Homomorphismen, so ist auch $f \circ g : U \to W$ ein Homomorphismus.

Übung 3.3.35. Gegeben ein surjektiver Homomorphismus $g : U \twoheadrightarrow V$ von Magmas und eine Abbildung $f : V \to W$ in ein weiteres Magma ist f genau dann ein Homomorphismus, wenn die Verknüpfung $f \circ g : U \to W$ ein Homomorphismus ist. Gegeben ein injektiver Homomorphismus von Magmas $f : V \hookrightarrow W$ und eine Abbildung $g : U \twoheadrightarrow V$ von einem weiteren Magma nach V ist g genau dann ein Homomorphismus, wenn die Verknüpfung $f \circ g : U \to W$ ein Homomorphismus ist.

3.4 Körper im Sinne der Algebra

3.4.1. Die algebraische Struktur eines Körpers wird den Hauptbestandteil unseres Axiomensystems für die reellen Zahlen in [AN1] 1.5 bilden. Gleichzeitig bildet sie die Grundlage für die Modellierung des Raums unserer Anschauung in der linearen Algebra.

Definition 3.4.2. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ (englisch **field**, französisch **corps**) ist eine Menge K mit zwei kommutativen assoziativen Verknüpfungen, genannt die **Addition** $+$ und die **Multiplikation** $\cdot$ des Körpers, derart daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $(K, +)$ ist eine Gruppe, die **additive Gruppe** des Körpers;
2. Die vom neutralen Element der Addition $0_K \in K$ verschiedenen Elemente von K bilden eine unter der Multiplikation abgeschlossene Teilmenge, und diese Teilmenge $K \backslash \{0_K\}$ ist unter der Multiplikation ihrerseits eine Gruppe, die **multiplikative Gruppe** des Körpers;
3. Es gilt das **Distributivgesetz**
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$$

Beispiele 3.4.3. Ein erstes Beispiel ist der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Ein anderes Beispiel ist der zweielementige Körper mit den durch die Axiome erzwungenen Rechenregeln, der fundamental ist in der Informatik. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden keinen Körper, da $(\mathbb{Z} \backslash \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist, da es nämlich in $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ nur für 1 und -1 ein multiplikatives Inverses gibt. Es gibt keinen einelementigen Körper, da das Komplement seines Nullelements die leere Menge sein müßte: Dies Komplement kann dann aber unter der Multiplikation keine Gruppe sein, da es eben kein neutrales Element haben könnte.

Ergänzung 3.4.4 (**Ursprung der Terminologie**). Der Begriff „Körper“ ist in diesem Zusammenhang wohl zu verstehen als „besonders gut unter den verschiedensten Rechenoperationen abgeschlossener Zahlbereich“, in Analogie zu geometrischen Körpern wie Kugeln oder Zylindern, die man entsprechend als „besonders gut in sich geschlossene Bereiche des Raums“ ansehen könnte. Die Bezeichnung als „Distributivgesetz“ rührt daher, daß uns dieses Gesetz erlaubt, beim Multiplizieren eines Elements mit einer Summe den „Faktor auf die Summanden zu verteilen“. Das Wort „distribution“ für Verteilung von Nahrungsmitteln und dergleichen auf Französisch und Englisch kommt von demselben lateinischen Wortstamm, auf die auch unsere Bezeichnung „Distributivgesetz“ zurückgeht.

3.4.5 (**Weglassen von Multiplikationssymbolen**). Wenn wir mit Buchstaben rechnen, werden wir meist $ab := a \cdot b$ abkürzen. Das wäre beim Rechnen mit durch Ziffernfolgen dargestellten Zahlen wenig sinnvoll, da man dann nicht wissen könnte, ob 72 nun als „Zweiundsiebzig“ oder vielmehr als „Sieben mal Zwei“ zu verstehen sein soll. Beim Einsetzen von Zahlen für die Buchstaben müssen also wieder Multiplikationssymbole eingefügt werden.

Ergänzung 3.4.6 (**Weglassen von Additionssymbolen**). In der Schule und außerhalb der Mathematik ist es auch üblich, $1 + \frac{1}{2}$ mit $1\frac{1}{2}$ abzukürzen und „Anderthalb Stunden“ zu sagen oder „Dreieinviertel Pfund“. In diesem Fall wird also ein Additionssymbol weggelassen. Das ist jedoch in der höheren Mathematik nicht üblich. In der gesprochenen Sprache ist es ja noch viel merkwürdiger: Neunzehnhundertvierundachzig versteht jeder, in Symbolen geschrieben sieht 9 10 100 $4 + 80$ dahingegen ziemlich sinnlos aus, und statt der üblichen Interpretation $((9+10)100)+4+80$ wären durchaus auch andere Interpretationen denkbar. In der gesprochenen Sprache scheint eher eine Konvention befolgt zu werden, nach der die Operationen der Reihe nach auszuführen sind wie bei einem Taschenrechner, wobei eine Multiplikation gemeint ist, wenn die zuerst genannte Zahl die Kleinere ist, und eine Addition, wenn sie die Größere ist. Nur die Zahlen von 13 bis 19 scheinen dieser Regel nicht zu gehorchen. Kein Wunder, wenn es Erstklässlern schwer fällt, sich den Zahlenraum zu erschließen, wenn sie zuvor dieses Dickicht von Konventionen durchdringen müssen.

3.4.7 (**Punkt vor Strich**). Wir vereinbaren zur Vermeidung von Klammern die Regel „Punkt vor Strich“, so daß also zum Beispiel unter zusätzlicher Beachtung unserer Konvention des Weglassens von Multiplikationssymbolen, in diesem Fall das Weglassen des Punktes, das Distributivgesetz kürzer in der Form $a(b + c) = ab + ac$ geschrieben werden kann.

3.4.8 (**Multiplikation mit Null**). In jedem Körper K gilt $a0_K = 0_K \quad \forall a \in K$. Man folgert das aus $a0_K + a0_K = a(0_K + 0_K) = a0_K$ durch Hinzuaddieren von $-(a0_K)$ auf beiden Seiten. Für das neutrale Element der multiplikativen Gruppe des Körpers vereinbaren wir die Bezeichnung 1_K. Nach dem Vorhergehenden gilt $1_K b = b$ auch für $b = 0_K$, mithin für alle $b \in K$. Folglich ist $(K, \cdot)$ ein Monoid mit neutralem Element 1_K und der Menge aller von Null verschiedenen Elemente als Gruppe der invertierbaren Elemente, in Formeln $K \backslash \{0_K\} = K^\times$.

3.4.9 (**Binomische Formel**). Für alle a, b in einem Körper K und alle $n \geq 0$ gilt die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

Um das einzusehen prüft man, daß wir bei der Herleitung nach 1.1.23 nur Körperaxiome verwandt haben. Man beachte hierbei unsere Konvention $0_K^0 = 1_K$ aus 3.1.17, angewandt auf das Monoid $(K, \cdot)$ in Verbindung mit der notationellen Konvention auf Seite 56. Die Multiplikation mit den Binomialkoeffizienten in dieser Formel ist zu verstehen als wiederholte Addition im Sinne der Bezeichnungskonvention na auf Seite 56, angewandt auf den Spezialfall der additiven Gruppe unseres Körpers.

Lemma 3.4.10 (Folgerungen aus den Körperaxiomen). *In jedem Körper K gelten die folgenden Aussagen und Formeln:*

1. $ab = 0_K \quad \Rightarrow \quad (a = 0_K$ *oder* $b = 0_K)$*;*
2. $-a = (-1_K)a \quad \forall a \in K$*;*
3. $(-1_K)(-1_K) = 1_K$*;*
4. $(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in K$*;*
5. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$*;*
6. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *für alle* $a \in K$ *und* $b, c \in K^\times$*;*
7. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$*;*
8. $m(ab) = (ma)b$ *für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *und* $a, b \in K$.

Beweis.

1. In der Tat folgt aus ($a \neq 0_K$ und $b \neq 0_K$) schon ($ab \neq 0_K$) nach den Körperaxiomen.
2. In der Tat gilt $a+(-1_K)a = 1_K a+(-1_K)a = (1_K+(-1_K))a = 0_K a = 0_K$, und $-a$ ist ja gerade definiert als das eindeutig bestimmte Element von K mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0_K$.
3. In der Tat gilt nach dem Vorhergehenden $(-1_K)(-1_K) = -(-1_K) = 1_K$.
4. Um das nachzuweisen ersetzen wir einfach $(-a) = (-1_K)a$ und $(-b) = (-1_K)b$ und verwenden $(-1_K)(-1_K) = 1_K$.
5. Das ist klar.
6. Das ist klar.
7. Das wird bewiesen, indem man die Brüche auf einen Hauptnenner bringt und das Distributivgesetz anwendet.
8. Das folgt durch wiederholtes Anwenden des Distributivgesetzes.

□

3.4.11 (**Minus mal Minus gibt Plus**). Die Frage, wie das Produkt zweier negativer Zahlen zu bilden sei, war lange umstritten. Mir scheint der vorhergehende Beweis das überzeugendste Argument für „Minus mal Minus gibt Plus“ : Es sagt salopp gesprochen, daß man diese Regel vereinbaren muß, wenn man beim Rechnen das Ausklammern ohne alle Einschränkungen erlauben will.

3.4.12 (**Ganze Zahlen und allgemeine Körper**). Für jeden Körper K und $n \in \mathbb{Z}$ setzen wir $n_K := n^+ 1_K = n 1_K$ in unserer Notation 3.2.10 beziehungsweise ihrer für additiv notierte Monoide vereinbarten Abkürzung. Nach der ersten Iterationsregel in 3.2.11 gilt stets $(n+m)_K = n_K + m_K$ und aus dem Distributivgesetz folgt leicht $n_K \cdot a = n^+ a$ oder abgekürzt $n_K a = na$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in K$. Mit der zweiten Iterationsregel in 3.2.11 folgt für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ die Identität $n_K m_K = (nm)_K$ über die Gleichungskette

$$n_K \cdot m_K = n^+ m_K = n^+(m^+ 1_K) = (nm)^+ 1_K = (nm)_K$$

Oft schreibt man deshalb kurz n, wenn eigentlich n_K gemeint ist, und insbesondere kürzt man eigentlich immer 0_K ab durch 0 und 1_K durch 1. Man beachte jedoch, daß für verschiedene ganze Zahlen $n \neq m$ durchaus $n_K = m_K$ gelten kann: Ist etwa K ein Körper mit zwei Elementen, so gilt $n_K = 0_K$ für gerades n und $n_K = 1_K$ für ungerades n. Vom höheren Standpunkt wird das alles nocheinmal in [LA1] 4.1.11 diskutiert werden.

Ergänzung 3.4.13. Den Begriff eines Homomorphismus verwendet man bei Mengen mit mehr als einer Verknüpfung analog. Zum Beispiel ist ein **Körperhomomorphismus** φ von einem Körper K in einen Körper L definiert als eine Abbildung $\varphi : K \to L$ derart, daß gilt $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in K$ und $\varphi(1) = 1$. Die Bedingung $\varphi(1) = 1$ ist nur nötig, um den Fall der Nullabbildung auszuschließen. In anderen Worten mag man einen Körperhomomorphismus auch definieren als eine Abbildung, die sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation ein Monoidhomomorphismus ist. Unter einem **Körperisomorphismus** verstehen wir wieder einen Körperhomomorphismus ϕ mit der Eigenschaft, daß es einen Körperhomomorphismus ψ in die Gegenrichtung gibt mit $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Wieder ist jeder bijektive Körperhomomorphismus bereits ein Körperisomorphismus.

Übungen

Übung 3.4.14. Ist K ein Körper derart, daß es kein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$, so kann man die Menge $K \times K = K^2$ zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{rcl} (a,b) + (c,d) & := & (a+c, b+d) \\ (a,b) \cdot (c,d) & := & (ac - bd, ad + bc) \end{array}$$

Die Abbildung $K \to K^2$, $a \mapsto (a, 0)$ ist dann ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $(a, 0)$ mit a ab und setzen $(0,1) = \mathrm{i}$, so gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und $(a,b) = a + b\,\mathrm{i}$ und die Abbildung $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ ist ein Körperisomorphismus $K^2 \xrightarrow{\sim} K^2$.

3.4.15. Auf die in der vorhergehenden Übung 3.4.14 erklärte Weise können wir etwa aus dem Körper $K = \mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“, sobald wir ihn kennengelernt haben, direkt den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** konstruieren. Unser Körperisomorphismus gegeben durch die Vorschrift $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ heißt in diesem Fall die **komplexe Konjugation** und wird auch $z \mapsto \bar{z}$ notiert. Man beachte, wie mühelos das alles in der Sprache der Mengenlehre zu machen ist. Als die komplexen Zahlen erfunden wurden, gab es noch keine Mengenlehre und beim Rechnen beschränkte man sich auf das Rechnen mit „reellen“ Zahlen, ja selbst das Multiplizieren zweier negativer Zahlen wurde als eine fragwürdige Operation angesehen, und das Ziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl als eine rein imaginäre Operation. In gewisser Weise ist es das ja auch geblieben, aber die Mengenlehre liefert eben unserer Imagination eine wunderbar präzise Sprache, in der wir uns auch über imaginierte Dinge unmißverständlich austauschen können. Man kann dieselbe Konstruktion auch allgemeiner durchführen, wenn man statt -1 irgendein anderes Element eines Körpers K betrachtet, das kein Quadrat ist. Noch allgemeinere Konstruktionen zur „Adjunktion höherer Wurzeln“ oder sogar der „Adjunktion von Nullstellen polynomialer Gleichungen“ können Sie in der Algebra kennenlernen, vergleiche etwa [AL] 3.7.7. In [LA1] 3.1 diskutieren wir die komplexen Zahlen ausführlicher.

Ergänzende Übung 3.4.16. Ein Körperhomomorphismus ist stets injektiv.

3.5 Aufbau des Zahlensystems*

3.5.1. Der Aufbau des Zahlensystems

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

erscheint in diesem Text nur in einer Abfolge von Nebenbemerkungen und soll an dieser Stelle zusammenfassend dargestellt werden.

1. Die Konstruktion der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ aus Grundbegriffen der Mengenlehre diskutiere ich in [LA1] 3.2.4. Kurz wurde das auch schon in 2.3.39 angerissen. Eine vollständig überzeugende Diskussion dieser Struktur ist meines Erachtens nur im Rahmen der Logik möglich.

2. Die Konstruktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, ja der einhüllenden Gruppe eines beliebigen kommutativen Monoids wird in [LA1] 4.5.10 erklärt. Nach [AN1] 1.5.6 gibt es dann genau eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}$, die unsere Multiplikation auf $\mathbb{N}$ fortsetzt und $\mathbb{Z}$ zu einem Ring macht.

3. Die Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus dem Integritätsbereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, ja des Quotientenkörpers eines beliebigen kommutativen Integritätsbereichs wird in [LA1] 4.6.2 ausgeführt. Die Anordnung auf $\mathbb{Q}$ dürfen Sie selbst in [LA1] 4.6.18 konstruieren.

4. Die Konstruktion des angeordneten Körpers der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus dem angeordneten Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wird zur Beginn der Analysis in [AN1] 1.5.3 erklärt.

5. Die Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ aus dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wurde in 3.4.14 angerissen und wird in [LA1] 3.1 ausführlicher behandelt.

3.5.2 (**Gewinne und Verluste beim Aufbau des Zahlensystems**). Oft wird der Aufbau des Zahlensystems als eine Geschichte immer neuer Gewinne erzählt: Beim Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ gewinnt man die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $a + x = b$, beim Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $ax = b$ für $a \neq 0$, beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $x^a = b$ für $a, b > 0$, und nach Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ besitzen sogar alle nichtkonstanten Polynome Nullstellen. Hier ist nur anzumerken, daß man die Lösbarkeit aller Gleichungen des Typs $x^a = b$ für $a, b > 0$ auch schon in einem abzählbaren Unterkörper von $\mathbb{R}$ erreichen könnte und daß der eigentliche Grund für den Übergang zu $\mathbb{R}$ analytischer Natur ist: Man gewinnt so den Zwischenwertsatz, den wir in [AN1] 2.2.15 besprechen werden. Man kann den Aufbau des Zahlensystems aber auch als eine Geschichte immer neuer Verluste erzählen: Beim Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ verliert man die Existenz eines kleinsten Elements, beim Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ die Existenz unmittelbarer Nachfolger, beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ die Abzählbarkeit, und beim Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ die Anordnung. Man kann sogar noch weiter gehen zum Schiefkörper der sogenannten Quaternionen $\mathbb{H} \supset \mathbb{C}$ aus [LA1] 4.7.3, dabei verliert man die Kommutativität der Multiplikation, oder sogar zu den sogenannten Oktaven $\mathbb{O} \supset \mathbb{H}$ aus [AL] 3.12.4, bei denen die Multiplikation nicht einmal mehr assoziativ ist.

3.6 Boole'sche Algebren*

Definition 3.6.1. Eine **Boole'sche Algebra** ist ein Tripel $(B, \wedge, \vee)$ bestehend aus einer Menge mit zwei assoziativen kommutativen Verknüpfungen derart, daß gilt:

1. Mit jeder unserer Verknüpfungen wird B ein Monoid. Man notiert 1 das neutrale Element zu $\wedge$ und 0 das neutrale Element zu $\vee$;

2. Jede unserer beiden Verknüpfungen ist „distributiv über der Anderen", in Formeln $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ und $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

3. Zu jedem $a \in B$ existiert $c \in B$ mit $a \wedge c = 0$ und $a \vee c = 1$. Man zeigt mühelos, daß dies Element c durch a eindeutig bestimmt ist, und notiert es $c = \neg a$.

Ein **Homomorphismus von Boole'schen Algebren** ist eine Abbildung, die für beide Monoidstrukturen ein Homomorphismus von Monoiden ist. Gegeben Boole'sche Algebren B, C notieren wir $\mathrm{Boole}(B, C)$ die Menge aller Homomorphismen von B nach C.

3.6.2. Ein typisches Beispiel einer Boole'schen Algebra erhält man, wenn man für eine beliebige Menge X das Tripel $(\mathrm{Pot}(X), \cap, \cup)$ bestehend aus ihrer Potenzmenge mit den Operationen Schnitt und Vereinigung betrachtet. In dieser Situation haben wir $1 = X$ und $0 = \emptyset$ und $\neg A = X \backslash A$ die Komplementmenge.

4 Zur Darstellung von Mathematik*

4.1 Herkunft einiger Symbole

4.1.1. Ich habe versucht, etwas über die Herkunft einiger mathematischer Symbole in Erfahrung zu bringen, die schon aus der Schule selbstverständlich sind.

4.1.2. Das Pluszeichen $+$ ist wohl ein Auschnitt aus dem Symbol &, das hinwiederum enstanden ist durch Zusammenziehen der beiden Buchstaben im Wörtchen „et“, lateinisch für „und“.

4.1.3. Die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahlen kam Mitte des vorigen Jahrtausends aus Indien über die Araber nach Italien. Bis dahin rechnete man in Europa in römischer Notation. Sie müssen nur versuchen, in dieser Notation zwei größere Zahlen zu multiplizieren, um zu ermessen, welchen wissenschaftlichen und auch wirtschaftlichen Fortschritt der Übergang zur Dezimaldarstellung bedeutete. Das Beispiel der Dezimaldarstellung zeigt in meinen Augen auch, wie entscheidend das sorgfältige Einbeziehen trivialer Spezialfälle, manchmal als „Theorie der leeren Menge“ verspottet, für die Eleganz der Darstellung mathematischer Sachverhalte sein kann: Sie wurde ja eben dadurch erst ermöglicht, daß man ein eigenes Symbol für „gar nichts“ erfand! Ich denke, daß der Aufbau eines effizienten Notationssystems, obwohl er natürlich nicht denselben Stellenwert einnehmen kann wie die Entwicklung mathematischer Inhalte, dennoch in der Lehre ein wichtiges Ziel sein muß. In diesem Text habe ich mir die größte Mühe gegeben, unter den gebräuchlichen Notationen diejenigen auszuwählen, die mir am sinnvollsten schienen, und sie soweit wie möglich aufzuschlüsseln. Wo es mir sinnvoll schien, habe ich auch nicht gezögert, neue Notationen einzuführen.

4.1.4. Das Wort von der „Theorie der leeren Menge“ scheint auf Carl Ludwig Siegel zurückzugehen, der einmal gesagt haben soll: „Ich habe Angst, dass die Mathematik vor dem Ende des Jahrhunderts zugrunde geht, wenn dem Trend nach sinnloser Abstraktion – die Theorie der leeren Menge, wie ich es nenne – nicht Einhalt geboten wird“.

4.1.5. Die Herkunft der logischen Symbole $\exists$ und $\forall$ als umgedrehte E und A haben wir bereits in 2.4.4 erwähnt. Sie wurden von Cantor in seiner Mengenlehre zuerst verwendet. Die Symbole $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ wurden früher als fette Buchstaben gedruckt und zunächst nur beim Tafelanschrieb in der hier gegebenen Gestalt wiedergegeben, da man fetten Druck an der Tafel nicht gut darstellen kann.

4.2 Grundsätzliches zur Formulierung

4.2.1 (**Redundanz**). Es scheint mir wichtig, sich beim Schreiben über Mathematik immer vor Augen zu halten, daß die mathematische Terminologie und Formelsprache sehr wenig Redundanz aufweisen. Auch kleinste Fehler oder Ungenauigkeiten können dadurch schon zu den größten Mißverständnissen führen. Ich plädiere deshalb dafür, die Redundanz künstlich zu erhöhen und nach Möglichkeit alles dreimal zu sagen: Einmal in mathematischer Terminologie, einmal in Formeln, und dann noch einmal in weniger formellen Worten und mit Bildern.

4.2.2 (**Versprachlichung**). Ich halte es für ebenso wichtig wie delikat, den mathematischen Inhalten griffige Bezeichnungen zu geben. Wir wollen uns ja auch mit anderen Mathematikern unterhalten können, die nicht dasselbe Buch gelesen haben. Und selbst wenn ich nur mit mir und einem Buch beschäftigt bin und bei einem Beweis, den ich gerade verstehen will, ganz präzise „Theorem 4.2 und Lemma 3.7“ zitiert werden, stört es mich: Ich muß blättern, bin abgelenkt, und es bremst mein Verstehen. Darüber hinaus kann ich mir auch Dinge viel besser merken, die griffige Bezeichnungen haben. Diese Bezeichnungen wirken bei mir wie Garderobenhaken im Kopf, an denen ich meine Inhalte aufhängen und leichter wiederfinden kann. Delikat ist, daß die Wahl einer Bezeichnung oft eine politische Dimension hat. Delikat ist weiter, daß bei vielen üblichen Bezeichnungen verschiedene Varianten für ihre genaue Bedeutung im Umlauf sind. Ich versuche beides nach bestem Wissen und Gewissen offenzulegen.

4.2.3 (**Generalvoraussetzungen**). Ich selber lese keineswegs immer Alles von vorne bis hinten durch und merke mir das bereits Gelesene, sondern suche oft, um nicht zu sagen meist, nur gezielt spezielle Resultate, und lese dazu eher diagonal. Ich habe es deshalb vermieden, Generalvoraussetzungen einzustreuen, von der Art „von nun an bis zum Ende des Abschnitts sind alle unsere topologischen Räume Hausdorff“ und dergleichen. Wenn das einmal bei speziellen Themen zu umständlich werden sollte, will ich strikt die Regel befolgen, daß Generalvoraussetzungen für eine Gliederungsstufe entweder direkt nach der Überschrift besagter Gliederungsstufe stehen müssen, oder aber direkt vor dem Beginn des ersten Abschnitts der nächsttieferen Gliederungsstufe, im Anschluß an die Vorrede, und dann als eigener Abschnitt „Generalvoraussetzungen“.

4.2.4 (**Definition-Aussage-Beweis**). Das Schema Definition-Aussage-Beweis scheint mir für die Darstellung von Mathematik sehr gut geeignet und auch zum Lesen und Lernen äußerst effektiv, wenn es richtig angewendet wird: Wenn nämlich die Aussagen so formuliert werden, daß ihre Aussagen auch für sich genommen schon sinnvoll und verständlich sind, sofern man die entsprechenden Definitionen parat hat. Dann kann man dieses Schema verstehen als eine Anleitung zum diagonalen Lesen. Demselben Ziel dient die Abstufung der Aussagen durch die Bezeichnung als Satz, Korollar, Proposition, Lemma und dergleichen: Sie soll dem Leser zu erlauben, etwa durch Konzentration auf die Sätze eine schnelle Orientierung über die wesentlichen Aussagen und Resultate zu gewinnen. Diese Form ersetzt zu einem gewissen Maße, was man im Deutschunterricht lernt. Ich empfehle, mathematische Texte und Vorträge nicht mit einer Gliederung zu beginnen und auch nicht mit einem Schlußwort zu beenden, da das in Anbetracht der in der Mathematik eh üblichen Strukturierung durch das Schema „Definition-Aussage-Beweis“ leicht dazu führt, daß die strukturellen Elemente im Vergleich zum eigentlichen Inhalt unverhältnismäßig viel Raum einnehmen.

4.2.5 (**Andere nummerierte Passagen**). In diesem Text gibt es auch viele Passagen, die einfach nur nummeriert sind. Hier handelt es sich meist um kleinere Aussagen mit Beweis, die mir für die „große Form“ Definition-Satz-Beweis zu unbedeutend oder zu offensichtlich schienen. Andere Textpassagen sind als *Ergänzung* oder *Ergänzende Übung* ausgewiesen: Damit ist gemeint, daß sie im unmittelbaren Zusammenhang ohne Schaden übersprungen werden können, daß sie jedoch aus dem vorhergehenden heraus verständlich sein sollten. Wieder andere Textpassagen sind als *Vorschau* oder *Weiterführende Übung* ausgewiesen: Damit ist gemeint, daß sie im unmittelbaren Zusammenhang ohne Schaden übersprungen werden können, und daß ihr Verständnis Kenntnisse voraussetzt, bei denen nicht davon ausgehe, daß sie dem Leser an der entsprechenden Stelle bereits zur Verfügung stehen.

4.2.6 (**Satzzeichen in mathematischen Texten**). Satzzeichen wie Punkt und Komma stören aus meiner Sicht die Ästhetik von aus dem Text herausgestellten Formeln. Ich will deshalb die Regel aufstellen und befolgen, daß eine aus dem Text herausgestellte Formel stets mit einem nicht gedruckten Punkt dahinter zu denken ist, wenn der Text mit ihr aufhört oder wenn es darunter mit einem Großbuchstaben weitergeht. Ich werde den Fall vermeiden, daß hinter eine aus dem Text herausgestellte Formel nach den Regeln der Grammatik ein Komma gehört.

4.2.7 (**Eigennamen in mathematischen Texten**). Ich übernehme aus dem Englischen den Apostroph bei Eigennamen und schreibe also zum Beispiel Zorn’sches Lemma. In der deutschen Literatur sind stattdessen Kapitälchen üblich, man schrieb und schreibt etwa ZORNsches Lemma, aber diese Hervorhebung im Schriftbild scheint mir ungebührlich viel Aufmerksamkeit zu binden.

4.3 Sprache und Mathematik

4.3.1. In diesem Abschnitt habe ich gesammelt, was mir beim Erklären von Mathematik und Schreiben über Mathematik besonders schwer fällt.

4.3.2 (**Umgangssprache versus mathematische Fachsprache**). Die mathematische Terminologie widmet freimütig Worte der Umgangssprache um und gibt ihnen präzise mathematische Bedeutungen, die mal mehr und mal weniger zur Ursprungsbedeutung verwandt sind. Man denke zum Beispiel an die Worte Menge, Abbildung, Gruppe, Ring, Körper. Mit dem Adjektiv **schmutzig** betone ich, daß ein Wort umgangssprachlich zu verstehen ist und nicht als ein Begriff der allein auf Mengenlehre basierenden aseptisch steril perfekten Ideenwelt der reinen Mathematik.

4.3.3. Im Gegensatz zu dem, was in der Schule im Deutschunterricht gelernt wird, ist Wortwiederholung beim mathematischen Schreiben und Reden richtig und wichtig.

4.3.4 (**Erweiterung oder Zuspitzung durch Ergänzungen**). Bereits erklärte Begriffe werden in der mathematischen Fachsprache durch Ergänzungen mal spezifiziert, mal abgeschwächt, und manchmal sogar beides zugleich. Der noch wenig informierte Leser kann nur schwer erraten, was im Einzelfall zutrifft. So ist ein Primkörper etwas Spezielleres als ein Körper, ein Schiefkörper etwas Allgemeineres, und ein Erweiterungskörper „etwas mit zusätzlichen Daten". Ein lokal kompakter Raum ist etwas allgemeineres als ein kompakter Raum. Eine universelle Überlagerung ist etwas Spezielleres als eine Überlagerung und eine verzweigte Überlagerung etwas Allgemeineres, das aber nur im Spezialfall von Flächen überhaupt sinnvoll definiert ist. Ein Borelmaß ist etwas Spezielleres als ein Maß und ein signiertes Maß etwas Allgemeineres. Eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist etwas Allgemeineres als eine Mannigfaltigkeit, eine glatte Mannigfaltigkeit dahingegen eine spezielle Art von Mannigfaltigkeit, und ich könnte noch lange so fortfahren.

4.3.5 (**Bestimmte und unbestimmte Artikel**). Problematisch scheint mir in mathematischen Texten die Verwendung bestimmter und unbestimmter Artikel, und ich bin fast neidisch auf die russische Sprache, die diese Unterscheidung nicht kennt. Sind mathematische Strukturen „eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus", wie Gruppen mit zwei Elementen oder Mengen mit einem Element, so fällt mir die Verwendung des bestimmten Artikels leicht. Häufig sind mathematische Strukturen jedoch nur „eindeutig bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus": Etwa Mengen mit fünf Elementen, Gruppen mit drei Elementen, Vektorräume gegebener Dimension über einem vorgegebenen Köper. Soll man dann den bestimmten oder den unbestimmten Artikel verwenden? Hier ist die Terminologie uneinheitlich: Man sagt üblicherweise „ein fünfdimensionaler reeller Vektorraum, eine abzählbar unendliche Menge" aber „die euklidische Ebene, der Zerfällungskörper, der algebraische Abschluß, die universelle Überlagerung", ohne daß ich dafür triftige Gründe ausmachen könnte. Vielleicht wäre es eine gute Idee, für nur bis auf nichteindeutigen Isomorphismus eindeutige mathematische Objekte die bestimmten Artikel mit einer „abschwächenden Schlange" in der Form „dẽr, dĩe, dãs" zu verwenden.

4.3.6 (**Existenz in Definitionen**). Ich plädiere dafür, in mathematischen Texten die Formulierungen „Es existiert" und „Es gibt" ausschließlich in ihrer Bedeutung als Quantoren zu verwenden, da es sonst leicht zu Mißverständnissen kommen kann. Insbesondere plädiere ich sehr dafür, diese Formulierungen zu vermeiden, wenn es in Definitionen um die Vorstellung der „Ausgangsdaten“ geht. Die folgenden Beispiele mögen das illustrieren.

Mißverständlich: Eine Gruppe ist eine Menge, auf der es eine assoziative Verknüpfung gibt derart, daß es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein Inverses.

Klarer: Eine Gruppe ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung derart, daß es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein Inverses.

Pedantisch: Eine Gruppe ist ein Paar bestehend aus einer Menge und einer assoziativen Verknüpfung auf dieser Menge derart, daß es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein Inverses.

In der Tat gibt es ja auf jeder nichtleeren Menge eine assoziative Verknüpfung, die sie zu einer Gruppe macht. Eine Gruppe ist aber keineswegs eine Menge mit gewissen Eigenschaften, sondern eine Menge mit Verknüpfung mit gewissen Eigenschaften. Das Ausgangsdatum bei dieser Definition ist in anderen Worten und ganz pedantisch formuliert ein Paar bestehend aus einer Menge zusammen mit mit einer Verknüpfung auf dieser Menge. Ich gebe zu, daß man auch die „klare“ Definition falsch verstehen könnte, aber an dieser Stelle würde ich dieser Formulierung wegen ihrer Kürze doch der Vorzug gegenüber der „pedantischen“ Formulierung einräumen.

Mißverständlich: Ein Körper heißt angeordnet, wenn es auf ihm eine Anordnung gibt derart, daß...

Klarer: Ein angeordneter Körper ist ein Körper mit einer Anordnung derart, daß...

Pedantisch: Ein angeordneter Körper ist ein Paar bestehend aus einem Körper mit einer Anordnung auf der ihm zugrundeliegenden Menge derart, daß...

Zur Verdeutlichung zum Abschluß noch ein Beispiel, in dem die mißverständliche Formulierung die korrekte Formulierung einer anderen Eigenschaft ist:

Mißverständlich: Eine Mannigfaltigkeit heißt orientiert, wenn es auf ihr eine Orientierung gibt.

Klarer: Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung.

Pedantisch: Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist ein Paar bestehend aus einer Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung auf unserer Mannigfaltigkeit.

Hier ist die erste Formulierung in der Tat bei der üblichen Interpretation von „es gibt“ als Quantor die Definition einer orientierbaren, nicht die einer orientierten Mannigfaltigkeit.

4.3.7 (**Kampf dem Index**). Beim Schreiben von Mathematik in Formeln hat man oft mit der Schwierigkeit zu kämpfen, daß die wesentliche Information sich in Indizes verstecken will und die besonders wesentliche Information in Subindizes. Dem gilt es bewußt entgegenzuarbeiten.

4.4 Terminologisches zur leeren Menge*

Vorschau 4.4.1. Ich finde es oft schwierig, die leere Menge terminologisch korrekt einzubinden. Das ist aber ebenso wichtig wie der Beckenrand beim Schwimmbad, den man ja auch beim Schwimmbadbau nicht wegläßt, obwohl man nachher nur im Wasser schwimmen will. Ich finde auch, daß das Bourbaki, den ich an sich sehr schätze, oft mißlungen ist. Meine Konventionen sind wie folgt:

1. Die leere Menge ist nach [AN1] 1.3.11 ein Intervall. So sind beliebige Schnitte von Intervallen wieder Intervalle;

2. Die leere Menge ist nach [LA1] 1.4.4 konvex. So sind beliebige Schnitte konvexer Mengen wieder konvex;

3. Die leere Menge ist *nicht* zusammenhängend, da die Zusammenhangskomponenten eines Raums seine maximalen zusammenhängenden Teilmengen sein sollten, und die Zahl der Zusammenhangskomponenten einer topologischen Summe die Summe der Zahlen der Zusammenhangskomponenten der Summanden, vergleiche [AN2] 5.5.1, [TM] 1.3.3. Das alles paßt nur zusammen, wenn die leere Menge aus Null Zusammenhangskomponenten besteht. Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nun genau die *nichtleeren* Intervalle und nur jede *nichtleere* konvexe Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums ist zusammenhängend;

4. Die Wirkung einer Gruppe G auf der leeren Menge ist nach [LA2] 5.1.5 *nicht* transitiv. Damit läßt sich jede G-Menge bis auf Reihenfolge und Isomorphismus eindeutig als eine disjunkte Vereinigung von transitiven G-Mengen darstellen;

5. Die leere Menge ist nach [LA1] 1.1.1 *kein* affiner Raum. Sie läßt ja nach der vorhergehenden Konvention auch keine transitive Operation eines Vektorraums zu. Daß damit der Schnitt zweier affiner Teilräume nicht notwendig wieder ein affiner Teilraum ist, nehme ich als kleineres Übel in Kauf;

6. Eine Abbildung von der leeren Menge in eine beliebige weitere Menge ist konstant, aber nicht einwertig, vergleiche 2.3.9;

5 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Markus Junker, Dominic Maier, Dimitri Guefack.

Literatur

[AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie;*.

[AN1] *Skriptum Analysis 1;*.

[AN2] *Skriptum Analysis 2;*.

[Gab62] Peter Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1;*.

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2;*.

[TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie;*.

[TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen;*.

Index