HALBEINFACHE LIE-ALGEBREN

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

Die ersten beiden Kapitel dieses Textes setzen ausschließlich Kenntnisse der linearen Algebra voraus, wie sie in den Grundvorlesungen [LA1] und [LA2] entwickelt wurden. Zur Motivation der grundlegenden Definitionen und Fragestellungen ist es jedoch wichtig, auch etwas über Lie-Gruppen zu wissen oder zu lernen, wie es etwa in [ML] dargestellt wird.

1 Allgemeine Theorie von Liealgebren

1.1 Definitionen und Beispiele

1.1.1. Im folgenden stelle ich nur die formalen Grundlagen der Theorie zusammen. Für die Motivation verweise ich auf die Vorlesung über Lie-Theorie [ML] 1.3.

Definition 1.1.2. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper k ist ein k-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mitsamt einer k-bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer**

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

derart, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Antisymmetrie: $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;

Jacobi-Identität: $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

1.1.3. Unsere Bedingung $[x, x] = 0\ \forall x$ impliziert, wie in [LA1] 6.3.2 ausgeführt, bereits die Identität $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y$. Im Fall eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik impliziert umgekehrt $[x, x] = -[x, x]$ auch $[x, x] = 0$.

1.1.4. Eine Liealgebra ist ein spezieller Typ von Algebra, benannt nach dem Mathematiker Sophus Lie (1842–1899). Ganz allgemein bezeichnet man wie in [LA2] 7.9.1 einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$ als eine **k-Algebra** und versteht unter einem **Algebrenhomomorphismus** in eine weitere k-Algebra eine k-lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Gegeben zwei k-Algebren A, B bezeichnen wir mit $\mathrm{Alg}_k(A, B)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von A nach B. Sind A, B Liealgebren, so schreiben wir stattdessen auch $\mathrm{Lalg}_k(A, B)$. Das hat den Vorteil, uns daran zu erinnern, womit wir es zu tun haben. Andere Typen von Algebren werden für uns auch eine wichtige Rolle spielen. Ist die Verknüpfung einer Algebra assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Gibt es für diese Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** und im Fall, daß sie auch noch kommutativ sind, **Kringalgebren** zu nennen. Unter einem **Homomorphismus von Ringalgebren** verstehen wir dann einen Algebrenhomomorphismus, der auch ein Ringhomomorphismus ist. Wir können diese Abbildungen sowohl charakterisieren als Algebrenhomomorphismen, die das Einselement auf das Einselement werfen, als auch als Ringhomomorphismen, die über dem Grundkörper linear sind. Wir vereinbaren für die Menge der Ringalgebrenhomomorphismen von einer k-Ringalgebra A in eine k-Ringalgebra B die Notation $\operatorname{Ralg}_k(A, B)$. Wenn man von einem Algebrenhomomorphismus zwischen zwei Ringalgebren spricht, so meint man fast immer einen Ringalgebrenhomomorphismus und hat nur vergessen, das explizit dazuzusagen.

1.1.5. Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ zwei Liealgebren. Nach dem Vorhergehenden ist insbesondere ein **Liealgebren-Homomorphismus** $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ist eine lineare Abbildung φ mit

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \;\; \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Beispiele 1.1.6. Der Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist eine assoziative, kommutative und unitäre k-Algebra, in unserer Terminologie also eine Kringalgebra. Ist V ein k-Vektorraum, so ist sein Endomorphismenring $A = \operatorname{End} V$ mit der Verknüpfung $(f, g) \mapsto f \circ g$ eine assoziative unitäre k-Algebra, in unserer Terminologie also eine Ringalgebra. Die quadratischen $(n \times n)$-Matrizen mit der Matrix-Multiplikation bilden für jedes $n \geq 0$ eine k-Ringalgebra $\operatorname{Mat}(n; k)$.

Definition 1.1.7. Gegeben Algebren $A_1, \ldots, A_n$ definiert man ihr **Produkt** als die Algebra $A_1 \times \ldots \times A_n$ mit der komponentweisen Verknüpfung. Jedes Produkt von Liealgebren ist wieder eine Liealgebra. Jedes Produkt von Ringalgebren ist wieder eine Ringalgebra.

Beispiele 1.1.8 (**Assoziative Algebren als Liealgebren**). Ist A eine assoziative Algebra unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$, so wird A eine Liealgebra

$$A_{\mathrm{L}}$$

unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto [x, y] := x \cdot y - y \cdot x$, wie man leicht nachrechnet. Man nennt deshalb die Lie-Klammer auch oft den **Kommutator**. Faßt man $\operatorname{End} V$ für einen Vektorraum V beziehungsweise $\operatorname{Mat}(n; k)$ in dieser Weise als Liealgebren auf, so bezeichnet man sie meist mit $\mathfrak{gl}(V)$ beziehungsweise $\mathfrak{gl}(n; k)$ für **general linear Lie algebra**.

Definition 1.1.9. Eine **Unteralgebra** einer Algebra A ist ein Untervektorraum $U \subset A$ derart, daß gilt $x, y \in U \Rightarrow x \cdot y \in U$ für die Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$ unserer Algebra.

1.1.10. Eine Unteralgebra einer Algebra ist mit der induzierten Verknüpfung selbst eine Algebra. Jeder Schnitt von Unteralgebren ist selbst eine Unteralgebra.

1.1.11 (**Unterringalgebren versus Unteralgebren**). Von einer Unterringalgebra einer Ringalgebra fordert man zusätzlich, daß sie die Eins der großen Ringalgebra enthält. Bei einer Ringalgebra ist also im allgemeinen nicht jede Unteralgebra auch eine Unterringalgebra. Zum Beispiel ist $k[X] \subset k[X, Y]$ ist eine Unterringalgebra und $Xk[X] \subset k[X, Y]$ nur eine Unteralgebra.

Beispiel 1.1.12. Gegeben eine quadratische Matrix A bezeichne $\operatorname{tr} A \in k$ ihre Spur [LA1] 2.6.16. Man definiert die **spezielle lineare Liealgebra** als

$$\mathfrak{sl}(n;k) := \{A \in \mathfrak{gl}(n;k) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

Dieser Raum ist in der Tat eine Unteralgebra, genauer eine Unter-Liealgebra von $\mathfrak{gl}(n;k)$, ja die Formel $\operatorname{tr}[x,y] = \operatorname{tr}(xy - yx) = 0$ gilt sogar für alle $x, y \in \mathfrak{gl}(n;k)$. Natürlich ist unser $\mathfrak{sl}(n;k)$ für $n \geq 2$ keine Unteralgebra der assoziativen Algebra $\operatorname{Mat}(n;k)$.

Beispiel 1.1.13. Sind V, W ein Vektorräume und ist $f : V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung, so wird

$$\mathfrak{o}(V,f) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(xu,v) + f(u,xv) = 0 \quad \forall u, v \in V\}$$

eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, wie man leicht nachrechnet.

Beispiel 1.1.14. Ist speziell $V = k^{2n}$ und $f : V \times V \to k$ die Bilinearform, die gegeben wird durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit I der $(n \times n)$-Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V,f)$ mit $\mathfrak{sp}(2n;k)$ und nennt das die **symplektische Liealgebra**. Jede nichtausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum hat in einer geeigneten Basis die obige Matrix, siehe [LA2] 2.5.2.

Beispiel 1.1.15. Ist $V = k^n$ und $f : V \times V \to k$ die Bilinearform gegeben durch die Einheitsmatrix, so bezeichnet man $\mathfrak{o}(V,f)$ mit $\mathfrak{so}(n;k)$ und nennt das die **orthogonale Liealgebra**. Diese Liealgebra besteht also genau aus allen schiefsymmetrischen Matrizen. Über $\mathbb{C}$ oder allgemeiner einem algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik hat jede nichtausgeartete symmetrische Bilinearform in einer geeigneten Basis diese Matrix, siehe [LA2] 2.3.14. Für spätere Rechnungen ist jedoch eine andere Darstellung bequemer, in der die Bilinearform, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, gegeben wird durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.16. Die oberen Dreiecksmatrizen, die echten oberen Dreiecksmatrizen, und die Diagonalmatrizen bilden Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n;k)$.

Beispiel 1.1.17. Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **abelsch**, wenn all ihre Kommutatoren verschwinden, in Formeln $[x,y] = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Jeder Vektorraum $\mathfrak{g}$ wird so eine Liealgebra. Die Diagonalmatrizen bilden eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n;k)$.

Definition 1.1.18. Wir nennen eine Liealgebra **irreduzibel**, wenn sie nicht Null ist und wenn zusätzlich jeder von Null verschiedene Liealgebren-Homomorphismus von besagter Liealgebra in eine weitere Liealgebra injektiv ist. Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **einfach**, wenn sie irreduzibel ist, aber nicht abelsch.

1.1.19 (**Diskussion der Terminologie**). Eine Liealgebra ist in anderen Worten irreduzibel genau dann, wenn sie keinen „echten Quotienten" im Sinne von 1.4.6 besitzt alias wenn das Nullideal ihr einziges „echtes Ideal" ist, und jede irreduzible Liealgebra ist entweder einfach oder aber abelsch und eindimensional. Die Terminologie „einfache Liealgebra" ist allgemein üblich, die Terminologie „irreduzible Liealgebra" jedoch nicht. Ein wichtiges Ziel der Vorlesung ist die gleich folgende Klassifikation der einfachen endlichdimensionalen komplexen Liealgebren.

Satz 1.1.20 (**Killing-Klassifikation**). *Jede einfache endlichdimensionale komplexe Liealgebra ist isomorph zu genau einer der Liealgebren*

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C}) & n \geq 1 \\ \mathfrak{so}(2n+1;\mathbb{C}) & n \geq 2 \\ \mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C}) & n \geq 3 \\ \mathfrak{so}(2n;\mathbb{C}) & n \geq 4 \end{array}$$

oder einer der fünf Ausnahmealgebren $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{g}_2$, die nicht so leicht explizit anzugeben sind. Umgekehrt sind auch alle hier aufgezählten Liealgebren einfach.

1.1.21. Der Beweis wird in 3.4.12 gegeben. Der Satz gilt mit demselben Beweis allgemeiner über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, wie im übrigen auch alle anderen in dieser Vorlesung für komplexe Liealgebren formulierten Sätze.

1.1.22. Es wird erst später klar werden, warum wir die Liealgebren $\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})$ in zwei Serien für gerades und ungerades n aufteilen. Die Liealgebren der ersten vier Serien heißen **klassisch**, die anderen fünf die **Ausnahmealgebren**. Die Einschränkungen an n haben als Grund die sogenannten **Ausnahme-Isomorphismen** $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{so}(2) \cong \mathbb{C}$ ist abelsch, $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ ist auch nicht einfach, und $\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{sl}(4)$.

Ergänzung 1.1.23 (**Beziehung zu kompakten Lie-Gruppen**). Eine endlichdimensionale Liealgebra, die isomorph ist zu einem endlichen Produkt einfacher Liealgebren, heißt „halbeinfach". Das Bilden der komplexifizierten Liealgebra liefert nun eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{zusammenhängende} \\ \text{kompakte Lie-Gruppen} \\ \text{mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\rightarrow} & \left\{ \begin{array}{c} \text{halbeinfache} \\ \text{komplexe Liealgebren} \end{array} \right\} \\ & & \\ K & \mapsto & \operatorname{Lie}_{\mathbb{C}} K \end{array}$$

Diese Aussage ergibt sich aus dem Zusammenspiel von [ML] 4.2.4, wonach kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum eineindeutig kompakten reellen Liealgebren entsprechen, und 3.5.21, wonach die kompakten reellen Liealgebren unter der durch Komplexifizierung gegebenen Abbildung eineindeutig den halbeinfachen komplexen Liealgebren entsprechen. Insbesondere ist die Killing-Klassifikation ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppen. Sie ist im übrigen auch ein wesentlicher Schritt zur Klassifikation der einfachen endlichen Gruppen.

1.1.24. Sei ganz allgemein F die Fundamentalmatrix einer Bilinearform f auf k^n, es gelte also $f(x, y) = x^\top Fy$ wenn wir Elemente von k^n als Spaltenvektoren auffassen. So liegt $M \in \mathfrak{gl}(n; k)$ in $\mathfrak{so}(k^n, f)$ genau dann, wenn gilt $(Mx)^\top Fy = -x^\top F(My)$ für alle x, y in k^n alias $M^\top F = -FM$.

Beispiel 1.1.25. Wir bestimmen die Dimension von $\mathfrak{sp}(2n; k)$. Hier nehmen wir $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in 1.1.24. Eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ liegt folglich in $\mathfrak{sp}(2n; k)$ genau dann, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Das können wir umschreiben zur Bedingung

$$\begin{pmatrix} C^\top & -A^\top \\ D^\top & -B^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$$

Diese Bedingung hinwiederum ist äquivalent zu den Bedingungen $C^\top = C$, $B^\top = B$ und $-A^\top = D$. Die Dimension der symplektischen Liealgebra ist damit $\dim_k \mathfrak{sp}(2n; k) = n(n + 1) + n^2 = 2n^2 + n$.

Ergänzung 1.1.26. Der Ausnahmeisomorphismus $\mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{sp}(2)$ folgt aus der offensichtlichen Relation $\mathfrak{sl}(2) \supset \mathfrak{sp}(2)$ mit Dimensionsargumenten.

Ergänzung 1.1.27. Der Ausnahmeisomorphismus $\mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ ensteht durch explizite Rechnung in Koordinaten oder konzeptueller, wenn wir die adjungierte Darstellung der $\mathfrak{sl}(2)$ mit ihrer Killingform betrachten.

Ergänzung 1.1.28. Einen Isomorphismus $\mathfrak{sl}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ kann man konstruieren wie folgt: Ist V ein vierdimensionaler komplexer Vektorraum, so ist $\bigwedge^2 V$ sechsdimensional und das Dachprodukt gefolgt von einem beliebigen Isomorphismus $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ definiert eine symmetrische nichtausgeartete Paarung $\bigwedge^2 V \times \bigwedge^2 V \to \mathbb{C}$. Die Operation von $\mathrm{SL}(V)$ auf $\bigwedge^2 V$ landet nun offensichtlich in den für die so konstruierte Bilinearform orthogonalen Selbstabbildungen von $\bigwedge^2 V$. Das Differential dieses Homomorphismus $\mathrm{SL}(4; \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(6; \mathbb{C})$ von Lie-Gruppen ist dann der gesuchte Isomorphismus von Liealgebren.

Ergänzung 1.1.29. Um einen Isomorphismus $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ zu erhalten, betrachtet man in der Situation aus 1.1.28 auf unserem vierdimensionalen komplexen Vektorraum V zusätzlich eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform, deren Stabilisator wir als unser $\mathrm{O}(4; \mathbb{C})$ nehmen. Sie induziert Isomorphismen $V \xrightarrow{\sim} V^*$ und damit $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2(V^*)$. Andererseits induziert unsere Paarung von oben zusammen mit der Wahl eines Erzeugers von $\bigwedge^4 V$ auch einen mit der Operation von $\mathrm{SO}(4; \mathbb{C})$ verträglichen Isomorphismus $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^2 V)^*$. Verwenden wir nun noch die kanonische Identifikation $(\bigwedge^2 V)^* \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2(V^*)$ aus [LA2] 6.5.9, so erhalten wir insgesamt einen bis auf einen Skalar eindeutig bestimmten Automorphismus von $\bigwedge^2 V$, der diesen Raum zerlegt in zwei dreidimensionale Teilräume, nämlich seine Eigenräume. Da das alles kanonisch ist, liefert diese Konstruktion einen Homomorphismus $\mathrm{SO}(4; \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(3; \mathbb{C}) \times \mathrm{O}(3; \mathbb{C})$, dessen Differential dann mithilfe von 1.1.27 der gesuchte Isomorphismus ist. Arbeiten wir über $\mathbb{R}$ und wählen eine Orientierung auf V, so können wir eine Identifikation $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ auszeichnen durch die Vorschrift, daß sie das geordnete Dachprodukt einer und jeder positiv orientierten Orthonormalbasis auf 1 werfen soll. In diesem Fall sind die fraglichen Eigenwerte ± 1 und unser Automorphismus ist der Hodge-$*$-Operator aus [AN2] **??**. Zum Beispiel erhält man als Basen der beiden Summanden in $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ die Ausdrücke $e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3$ und $e_1 \wedge e_3 \mp e_2 \wedge e_4$ für jeweils die obere beziehungsweise untere Wahl des Vorzeichens für die beiden Summanden. Hier haben wir auf $\mathbb{C}^4$ die Bilinearform zugrundegelegt mit Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3, e_4, so daß also die Liealgebra schlicht aus allen schiefsymmetrischen Matrizen besteht, und dann kann man die Stabilität unserer beiden Summanden auch sehr explizit überprüfen.

Ergänzung 1.1.30. Um einen Isomorphismus $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$ zu erhalten, betrachtet man in der Situation aus 1.1.28 zusätzlich auf V die nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform, deren Stabilisator eben gerade unser $\mathrm{Sp}(4; \mathbb{C})$ ist. Sie induziert eine Surjektion $\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, deren Kern ein fünfdimensionaler unter $\mathrm{Sp}(4; \mathbb{C})$ stabiler Teilraum ist, auf dem unsere symmetrische Bilinearform nicht ausartet. So erhalten wir einen Homomorphismus $\mathrm{Sp}(4; \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(5; \mathbb{C})$, dessen Differential der gesuchte Isomorphismus ist.

Definition 1.1.31. Sei k ein Körper. Gegeben eine nicht notwendig assoziative k-Algebra $(A, \cdot)$ heißt eine lineare Abbildung $\delta : A \to A$ eine **Derivation**, wenn sie die **Leibniz-Regel** $\delta(a \cdot b) = (\delta a) \cdot b + a \cdot (\delta b)\ \forall a, b \in A$ erfüllt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}_k A \subset \mathrm{End}_k A$ den Untervektorraum der Derivationen von A.

Übungen

Übung 1.1.32. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so erhalten wir einen Homomorphismus von Liealgebren $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ vermittels der Vorschrift $(\mathrm{ad}\, x)(y) := [x, y]$.

Ergänzende Übung 1.1.33. Ein Element x einer endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **regulär**, wenn gilt

$$\dim(\ker \operatorname{ad} x) \leq \dim(\ker \operatorname{ad} y) \quad \forall y \in \mathfrak{g}$$

Man zeige, daß die regulären Elemente einer reellen oder komplexen Liealgebra stets eine offene nichtleere Teilmenge bilden. Leser mit Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie mögen auch zeigen, daß sie stets eine Zariski-offene Teilmenge bilden.

Übung 1.1.34. Man finde für die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ eine Basis e, h, f derart, daß gilt $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$ und $[e,f] = h$. Man zeige, daß die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ einfach ist.

Übung 1.1.35. Man zeige, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unteralgebra der Liealgebra $\mathfrak{gl}(A)$ der Endomorphismen des k-Vektorraums A bilden.

Übung 1.1.36. Seien k ein Körper, $(A,\cdot)$ eine nicht notwendige assoziative k-Algebra, $D : A \to A$ eine Derivation von A, und $A_\lambda := \operatorname{Hau}(D;\lambda)$ der Hauptraum von D zum Eigenwert λ. So gilt $A_\lambda \cdot A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$. Hinweis: Man kann bei [AAG] 3.3.9 spickeln.

Übung 1.1.37. Man zeige, daß es bis auf Isomorphismus genau zwei zweidimensionale komplexe Liealgebren gibt.

Übung 1.1.38. Gegeben ein Körper k und eine assoziative k-Algebra A mit zugehöriger Liealgebra A_{L} gilt stets $\operatorname{Der}_k(A) \subset \operatorname{Der}_k(A_{\mathrm{L}})$.

1.2 Darstellungen von Liealgebren

1.2.1. In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffsbildungen formal eingeführt, die im Zusammenhang mit Matrixliegruppen in [ML] 2.1 ausführlicher motiviert werden.

Definition 1.2.2. Sei k ein Körper. Eine **Darstellung** einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über k ist ein Paar (V,ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Homomorphismus von Liealgebren $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Definition 1.2.3. Sei k ein Körper. Eine **Operation einer Liealgebra** $\mathfrak{g}$ über k auf einem k-Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x,v) \mapsto xv$ mit der Eigenschaft

$$x(yv) - y(xv) = [x,y]v \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und $x(yv)$ mit xyv abkürzen.

1.2.4 (**Darstellungen als Operationen**). Sei k ein Körper und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k und V ein k-Vektorraum. So induziert die Bijektion $\operatorname{Ens}(\mathfrak{g} \times V, V) \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Ens}(\mathfrak{g}, \operatorname{Ens}(V, V))$ aus dem Exponentialgesetz [GR] 1.6.5 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen von } \mathfrak{g} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{Liealgebrenhomomorphismen} \\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \end{array} \right\}$$

Eine Operation ist also im wesentlichen dasselbe wie eine Darstellung. Ich verwende auch gleichbedeutend die Bezeichnung als $\mathfrak{g}$-Modul und verwende die Begriffe Unterdarstellung, Quotient, einfache alias irreduzible Darstellung, halbeinfache Darstellung, isotypische Komponente, Länge und dergleichen, die wir für Moduln über beliebigen Ringen, ja Moduln über beliebigen Mengen in [NAS] 2.2 folgende eingeführt hatten.

Beispiel 1.2.5. Sei V ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht V zu einer Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$, der **Standarddarstellung** von $\mathfrak{gl}(V)$. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist sie im übrigen auch das Differential der offensichtlichen Darstellung der Matrix-Liegruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ durch Automorphismen von V.

Beispiel 1.2.6. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die **triviale Operation** $xv = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ macht jeden Vektorraum V zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$. Den Grundkörper k versehen mit der trivialen Operation nennt man die **Einsdarstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra.

Definition 1.2.7. Für eine Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid xv = 0 \; \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen die Elemente von $V^{\mathfrak{g}}$ die **$\mathfrak{g}$-invarianten Vektoren** von V.

Vorschau 1.2.8. Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellung V einer zusammenhängenden Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ gilt für die Ableitung von V zu einer Darstellung der Liealgebra stets $V^G = V^{\mathfrak{g}}$ für V^G der Raum der Invarianten unter der Gruppenoperation $V^G := \{v \in V \mid gv = v \; \forall g \in G\}$. Daher rührt die Bezeichnung als „Invarianten" im Fall einer allgemeinen Liealgebrendarstellung.

Definition 1.2.9. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen zwei Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt ein **Homomorphismus von Darstellungen**, wenn gilt $\varphi(xv) = x\varphi(v) \; \forall v \in V, \, x \in \mathfrak{g}$. Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen $\operatorname{Mod}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,

$$\operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V, W)$$

Zwei Darstellungen heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

1.2.10. Die Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k bilden damit eine Kategorie. Wir verwenden für diese Kategorie die beiden Notationen

$$\mathfrak{g}\text{-Mod} = \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$$

Stärker bilden die Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sogar eine „Schmelzkategorie", wie in 1.3.3 ausgeführt wird.

Definition 1.2.11. Ein Untervektorraum U einer Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt eine **Unterdarstellung**, wenn gilt $xv \in U \ \forall x \in \mathfrak{g}$, $v \in U$. Wir sagen in diesem Zusammenhang auch, U sei **stabil unter** $\mathfrak{g}$. Eine von ganz V verschiedene Unterdarstellung $U \subsetneq V$ heißt eine **echte Unterdarstellung** von V.

1.2.12. Gegeben eine Darstellung V sind natürlich ganz V und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild einer Unterdarstellung von V eine Unterdarstellung von W und das Urbild einer Unterdarstellung von W eine Unterdarstellung von V. Insbesondere ist $\ker \varphi$ eine Unterdarstellung von V und $\operatorname{im} \varphi$ eine Unterdarstellung von W.

Definition 1.2.13. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder gleichbedeutend **irreduzibel** genau dann, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

Satz 1.2.14 (Einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; k)$). *Sei k ein Körper der Charakteristik Null.*

1. *Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ von besagter Dimension;*

2. *Ist e, h, f eine Basis von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ mit $[h, e] = 2e$ und $[h, f] = -2f$ und $[e, f] = h$, so zerfällt jede einfache Darstellung L der Dimension $m + 1$ unter h in eindimensionale Eigenräume*

$$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \ldots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

zu den ganzzahligen Eigenwerten $m, m-2, \ldots, 2-m, -m$, und zusätzlich folgt aus $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$ bereits $f : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$ sowie $e : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$.

1.2.15. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung k, die Standarddarstellung k^2 und die „adjungierte Darstellung", die wir in 1.1.32 eingeführt haben.

Ergänzung 1.2.16. In positiver Charakteristik können die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ nicht mehr durch ihre Dimension klassifiziert werden.

Ergänzung 1.2.17. In [ML] 2.3.16 wird ein elementarer Beweis skizziert für die Tatsache, daß jede endlichdimensionale Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. In dieser Vorlesung wird das in größerer Allgemeinheit in 2.1.6 gezeigt.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k und überlassen die Verallgemeinerung auf beliebige Grundkörper der Charakteristik Null dem Leser. Wir müssen (1) zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung konstruieren und (2) zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben endlichen Dimension isomorph sind. Wir beginnen mit (2). Die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ hat die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Die Elemente e und f heißen manchmal auch **Erzeugungs-** und **Vernichtungsoperatoren** aus physikalischen Gründen, die hier nicht ausgeführt werden sollen. Sei nun $\rho : \mathfrak{sl}(2; k) \to \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung. Bezeichne $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$ den Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert $\mu \in k$. So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2},$$

denn aus $hv = \mu v$ folgt $hev = ehv + [h, e]v = e\mu v + 2ev = (\mu + 2)ev$ und der zweite Fall folgt ähnlich aus $[h, f] = -2f$. Ist V endlichdimensional und $V \neq 0$, so gibt es sicher $\lambda \in k$ mit $V_\lambda \neq 0$ aber $V_{\lambda+2} = 0$. Für $v \in V_\lambda$ gilt dann $ev = 0$ und $hv = \lambda v$. Man prüft per Induktion, daß folgt

$$\begin{array}{rcll} hf^i v & = & (\lambda - 2i)f^i v & \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v & = & i(\lambda - i + 1)f^{i-1}v & \text{für alle } i \geq 1. \end{array}$$

Insbesondere ist der von den $f^i v$ mit $i \geq 0$ aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist V zusätzlich einfach und $v \neq 0$, so müssen die $f^i v$ demnach ganz V aufspannen. Gilt $f^i v \neq 0$, so sind $v, fv, \ldots, f^i v$ Eigenvektoren von h zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir V endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich $d \geq 1$ mit $f^d v = 0$. Wählen wir d kleinstmöglich, so ist $v, fv, \ldots, f^{d-1}v$ eine Basis von V, also $d = \dim V$. Weiter folgt aus $f^d v = 0$ auch $0 = ef^d v = d(\lambda - d + 1)f^{d-1}v$ und mithin

$\lambda = d - 1$, da wir ja $d \neq 0$ und $f^{d-1}v \neq 0$ vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;k)$ derselben endlichen Dimension d isomorph sind, da nämlich die Matrizen von $\rho(e)$, $\rho(f)$ und $\rho(h)$ in der Basis v, fv, …, $f^{d-1}v$ nur von d abhängen. Um nun (1) die Existenz einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;k)$ in jeder Dimension zu zeigen, brauchen wir nur zu prüfen, daß die im Eindeutigkeitsbeweis hergeleiteten Formeln in der Tat eine Darstellung liefern, daß also für jedes d der Vektorraum mit der Basis $v_0, v_1, \ldots, v_{d-1}$ und der Operation gegeben durch $fv_i = v_{i+1}$ beziehungsweise $fv_{d-1} = 0$, $ev_i = i(d-i)v_{i-1}$ beziehungsweise $ev_0 = 0$ und $hv_i = (d-1-2i)v_i$ eine einfache Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ ist. Diese Rechnung scheint mir jedoch unerfreulich und wenig nahrhaft. Etwas eleganter prüft man mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen leicht, daß die Abbildung $\rho : \mathfrak{sl}(2;k) \to \mathfrak{gl}(k[X,Y])$ gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \rho(e) &=& X\partial_y \\ \rho(f) &=& Y\partial_x \\ \rho(h) &=& X\partial_x - Y\partial_y \end{array}$$

eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ ist. Diese Darstellung ist nicht einfach, die Polynome von festem Totalgrad m bilden vielmehr eine Unterdarstellung $L(m) = k[X,Y]^m$ der Dimension $d = m+1$ mit Basis $w_i = Y^i X^{m-i}$ für $i = 0, \ldots, m$. In dieser Basis wird die Operation von $\mathfrak{sl}(2;k)$ auf $\mathrm{L}(m)$ beschrieben durch die Formeln

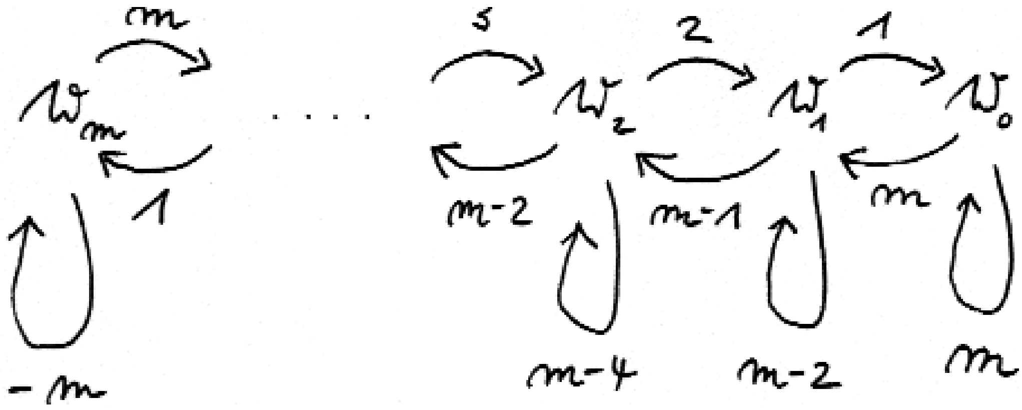
$$\begin{array}{rcl} ew_i &=& iw_{i-1} \\ fw_i &=& (m-i)w_{i+1} \\ hw_i &=& (m-2i)w_i \end{array}$$

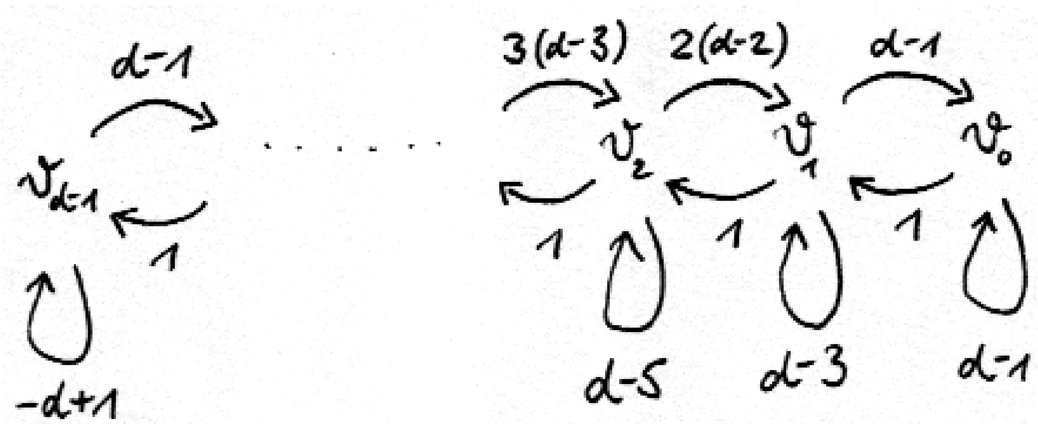
wo wir $w_{-1} = w_{m+1} = 0$ verstehen. Die Darstellungen $\mathrm{L}(m)$ sind einfach, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung $0 \neq U \subset \mathrm{L}(m)$ enthält notwendig einen Eigenvektor zu h, also eines der w_i, und daraus folgt sofort $U = L(m)$. Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Die expliziten Formeln gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von h. Setzen wir genauer $w_i = u_{m-2i}$, so erhalten wir für $\mathrm{L}(m)$ eine Basis bestehend aus $u_m, u_{m-2}, \ldots, u_{-m}$ und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

$$\begin{array}{rcl} eu_j &=& ((m-j)/2)u_{j+2} \\ fu_j &=& ((m+j)/2)u_{j-2} \\ hu_j &=& ju_j \end{array}$$

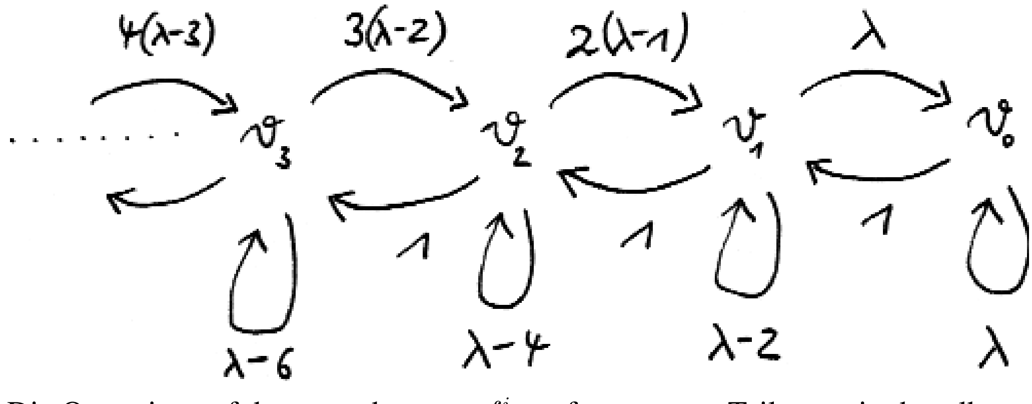
Der Satz folgt. $\square$

1.2.18 (**Endlichdimensionale Darstellungen von Produkten**). Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen des Produkts zweier Liealgebren über einem al-





Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; k)$ in zwei Basen. Die nach rechts weisenden Pfeile stellen jeweils die Operation von e dar, die nach links weisenden Pfeile die Operation von f und die Schlaufen die Operation von h.



Die Operation auf dem von den $v_i = f^i v$ aufgespannten Teilraum, in derselben Weise zu interpretieren wie die obenstehenden Darstellungen.

gebraisch abgeschlossenen Körper sind gerade die Tensorprodukte von einfachen Darstellungen der Faktoren. Man folgert das leicht aus [NAS] 3.4.3, etwa indem man Darstellungen von Liealgebren als spezielle Mengenmoduln auffaßt. So liefern die im vorhergehenden besprochenen Resultate auch eine Klassifikation der endlichdimensionalen Darstellungen der Liealgebren $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})^{\times r}$.

Vorschau 1.2.19 (**Beliebige Darstellungen von Produkten**). Für einfache Darstellungen unendlicher Dimension gilt nichts Vergleichbares mehr. So kann man etwa diejenigen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})^{\times 2}$, die von den Casimiroperatoren zu beiden Faktoren annulliert werden, nach dem Lokalisierungssatz mit sogenannten $\mathcal{D}$-Moduln auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ identifizieren, und für $i : \Delta \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ die diagonale Einbettung entspricht der $\mathcal{D}$-Modul $i_+\mathcal{O}_\Delta$ einer irreduziblen Darstellung, die sich nicht als ein Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen der beiden Faktoren erhalten läßt. Man könnte das einmal im Rahmen einer Bachelorarbeit ausführen lassen.

Übungen

Übung 1.2.20. Ist V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;k)$, so sind alle Eigenwerte von $h := \operatorname{diag}(1,-1)$ auf V ganze Zahlen, und ist weder Null noch Eins ein Eigenwert von h, so folgt bereits $V = 0$.

Übung 1.2.21. Man zeige: Ist $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2;k)$ mit $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ und $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, so gilt $[\tilde{e}, \tilde{f}] = c\tilde{h}$ für einen Skalar $c \neq 0$.

Übung 1.2.22 (**Quotientendarstellung**). Gegeben $U \subset V$ eine Darstellung einer Liealgebra mit einer Unterdarstellung gibt es genau eine Operation besagter Liealgebra auf dem Quotienten V/U derart, daß die kanonische Projektion $V \twoheadrightarrow V/U$ ein Homomorphismus von Darstellungen wird.

Übung 1.2.23. Sei k ein Körper. Man zeige: Für alle $n \geq 1$ bilden die homogenen Polynome vom Grad d eine Darstellung

$$k[X_1, \ldots, X_n]^{(d)}$$

der Liealgebra $\mathfrak{gl}(n;k)$, wenn man die Standardmatrizen E_{ij} als die Differentialoperatoren $-X_j\partial_i$ wirken läßt, und für $\operatorname{char} k > d$ ist diese Darstellung irreduzibel. Im Fall $k = \mathbb{R}$ ist diese Darstellung im übrigen die Ableitung der offensichtlichen Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]^{(d)} \subset \operatorname{Ens}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, wie in [ML] 2.3.19 ausgeführt wird.

Ergänzende Übung 1.2.24. Gegeben eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$, auf der h diagonalisierbar operiert und e, f lokal nilpotent, liegt jeder Vektor in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung. Stimmt das auch ohne die Forderung, daß h diagonalisierbar operiert? Ich habe mir das selbst gar nicht so genau überlegt.

1.3 Verschmelzung von Darstellungen*

1.3.1. Seien V, W zwei Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$. Durch die Vorschrift $x(v \otimes w) := xv \otimes w + v \otimes xw \; \forall x \in \mathfrak{g}$ wird $V \otimes W$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$, der sogenannten **Tensor-Darstellung**. Man prüft das durch stures Nachrechnen.

1.3.2. Die Motivation für obige Definition der Tensordarstellung kommt aus der Darstellungstheorie der Liegruppen. In [ML] 2.1.16 finden wir, daß gegeben zwei endlichdimensionale stetige Darstellungen V, W einer Liegruppe G die abgeleitete Operation zur Tensordarstellung von G auf $V \otimes W$ mit $g(v \otimes w) := gv \otimes gw$ gerade gegeben wird durch die Formel $x(v \otimes w) = xv \otimes w + v \otimes xw$ für alle $x \in \operatorname{Lie} G$, so daß also mit unserer obigen Definition die abgeleitete Darstellung zu einem Tensorprodukt genau das Tensorprodukt der abgeleiteten Darstellungen ist.

1.3.3. Im folgenden besprechen die zur Tensordarstellung gehörigen universellen Eigenschaften. Gegeben $r \geq 0$ und Darstellungen $V_1, \ldots, V_r, W$ einer Lielgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k verstehen wir unter einer **Verschmelzung von Darstellungen** eine multilineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mit

$$f(xv_1, v_2, \ldots, v_r) + \ldots + f(v_1, v_2, \ldots, xv_r) = xf(v_1, v_2, \ldots, v_r) \quad \forall \ldots$$

Im Fall $r = 0$ verstehen wir das speziell als die Forderung $xf(*) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Wir verwenden für die Gesamtheit aller derartigen Abbildungen wie in [LA2] 6.2.2 die beiden Notationen

$$\operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W) = \operatorname{Hom}^{(r)}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \times \ldots \times V_r, W)$$

Unsere Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen [LA2] 6.2.3 induziert eine Multiverknüpfung von Verschmelzungen von Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Unsere universellen multilinearen Abbildungen

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_r \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$$

aus [LA2] 6.1.1 sind Verschmelzungen für diejenige $\mathfrak{g}$-Operation auf dem Tensorprodukt, die für $x \in \mathfrak{g}$ gegeben wird durch

$$x(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) := xv_1 \otimes \ldots \otimes v_r + \ldots + v_1 \otimes \ldots \otimes xv_r$$

im Fall $r \geq 1$ und durch die Nulloperation auf dem leeren Tensorprodukt k im Fall $r = 0$. Es ist dann klar, daß unsere universellen multilinearen Abbildungen auch universelle Verschmelzungen von Darstellungen sind, daß also das Vorschalten von τ für jede weitere Darstellung V eine Bijektion

$$\operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \curlyvee \ldots \curlyvee V_r, W)$$

liefert. Im Fall $r = 0$ ist die fragliche Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(k, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(\curlyvee, W)$$

verträglich mit der Bijektion von beiden Seiten nach $V^{\mathfrak{g}}$ vermittels des Auswertens bei $1 \in k$ beziehungsweise am einzigen Element $*$ des leeren Produkts. Sind U, V, W Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über k und erklären wir eine Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ durch die Vorschrift $(xf)(v) := x(f(v)) - f(xv)$, so induziert die offensichtliche Bijektion $\mathrm{Mod}_k(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_k(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(U \curlyvee V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$$

Vorschau 1.3.4 (**Darstellungen als Schmelzkategorie**). In der in [TSK] 1.1 eingeführten Terminologie kann man die vorhergehenden Bemerkungen dahingehend zusammenfassen, daß die Darstellungen einer Liealgebra zusammen mit unseren Verschmelzungen von Darstellungen und deren Multiverknüpfungen eine Schmelzkategorie $\mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{g}}$ bilden, die stabil universelle Verschmelzungen hat im Sinne von [TSK] 1.3.2 und die im Sinne von [TSK] 1.4.3 internes Hom hat. Zusammen mit obiger Bijektion ist genauer $\mathrm{Hom}_k(V, W) = (V \Rrightarrow W)$ das interne Hom nach [TSK] 1.4.3 der Schmelzkategorie der Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Die definitorische Gleichheit $\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V, W) = \mathrm{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$ von Homomorphismen von Darstellungen und $\mathfrak{g}$-Invarianten in der Darstellung auf dem Raum aller linearen Abbildungen kann man dann auch verstehen als Spezialfall der natürlichen Bijektion $\mathcal{M}(B, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\curlyvee, B \Rrightarrow Z)$ aus [TSK] 1.4.2 für eine beliebige Schmelzkategorie mit Multihom $\mathcal{M}$.

Übungen

Übung 1.3.5. Gegeben eine Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist die Operation $\mathfrak{g} \otimes V \to V$, $x \otimes v \mapsto xv$ ein Homomorphismus von Darstellungen. Weiter ist auch der Liealgebren-Homomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k V$ ein Homomorphismus von Darstellungen, für die adjungierte Operation auf $\mathfrak{g}$ und die durch 1.3.4 erklärte Operation auf $\mathrm{End}_k V$.

Übung 1.3.6. Diejenigen Vektoren einer Darstellung V einer Liealgebra $\mathfrak{a}$, die in einem endlichdimensionalen $\mathfrak{a}$-stabilen Teilraum liegen, heißen auch die **$\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren** von V. Man zeige: Ist V eine Darstellung einer endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so bilden die $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren von V einen $\mathfrak{g}$-stabilen Teilraum $V_{\mathfrak{a}} \subset V$. Statt $\mathfrak{g}$ endlichdimensional brauchen wir sogar schwächer nur annehmen, daß $\mathfrak{g}$ für die adjungierte Darstellung aus $\mathfrak{a}$-endlichen Vektoren besteht.

Übung 1.3.7. Sind U, V, W Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$, so sind die kanonischen Isomorphismen von Vektorräumen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \\ U \otimes (V \otimes W) & \stackrel{\sim}{\to} & (U \otimes V) \otimes W \end{array}$$

Isomorphismen von Darstellungen. Nimmt man im ersten Isomorphismus auf beiden Seiten die $\mathfrak{g}$-Invarianten, so folgen unmittelbar die „Adjunktionsisomorphismen" $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(U \otimes V, W)$. Aus diesen Isomorphismen folgert man die Verträglichkeit der Liealgebrenoperation mit vielen anderen kanonischen Abbildungen. Zum Beispiel sind für U, V, W, X Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ die kanonischen Abbildungen „Verknüpfen von Abbildungen" und „Tensorieren von Abbildungen"

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, W) & \to & \mathrm{Hom}(U, W) \\ \mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(W, X) & \to & \mathrm{Hom}(U \otimes W, V \otimes X) \end{array}$$

stets Homomorphismen von Darstellungen.

Übung 1.3.8 (**Clebsch-Gordan**). Man zeige im Fall der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, daß die Darstellungen $\mathrm{L}(m) \otimes \mathrm{L}(n)$ und $\mathrm{Hom}(\mathrm{L}(m), \mathrm{L}(n))$ isomorph sind zu

$$\mathrm{L}(m+n) \oplus \mathrm{L}(m+n-2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{L}(|m-n|)$$

Hinweis: Man betrachte die Dimensionen der h-Eigenräume.

Beispiel 1.3.9. Man kann $\mathrm{L}(2)$ erhalten, indem man von der Standarddarstellung $E = \mathbb{R}^3$ der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ ausgeht und diese ableitet und komplexifiziert zu einer Darstellung $E_{\mathbb{C}}$ der komplexifizierten Liealgebra $\mathfrak{so}(3; \mathbb{C})$, die ja bekanntlich isomorph ist zu $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$. Die vorherige Übung zusammen mit [ML] 2.2.3 sagt, daß die Räume von $\mathrm{SO}(3)$-Verflechtungsoperatoren $E_{\mathbb{C}} \otimes E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ und $E_{\mathbb{C}} \otimes E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ jeweils eindimensional sind. Daraus folgt leicht, daß auch die Räume von Verflechtungsoperatoren $E \otimes E \to E$ und $E \otimes E \to \mathbb{R}$ jeweils eindimensional sein müssen. In der Tat wissen wir aus [LA2] 1.9.6 und [LA2] 1.6.9, daß das Kreuzprodukt und das Skalarprodukt Erzeuger der jeweiligen Räume von Verflechtungsoperatoren sind.

Übung 1.3.10. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra und $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ein $\mathfrak{g}$-invarianter Tensor, so definiert Ω für beliebige Darstellungen M, N von $\mathfrak{g}$ einen Endomorphismus $\Omega \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes N)$.

Ergänzende Übung 1.3.11. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Auf $\mathrm{End}\, V$ haben wir die Spurform $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$. Der in der vorherigen Übung 1.3.10 erklärte Operator $\Omega_V \in \mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, V$ liefert als Endomorphismus von $V \otimes V$ gerade die Vertauschung der Tensorfaktoren.

Ergänzende Übung 1.3.12. Gegeben eine Darstellung V einer Liealgebra und $r \geq 0$ gibt es genau eine Operation der Liealgebra auf der äußeren Potenz $\bigwedge^r V$ derart, daß die Projektion $V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigwedge^r V$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Gegeben eine Darstellung V einer Liealgebra und $r \geq 0$ gibt es genau eine Operation der Liealgebra auf der symmetrischen Potenz $\mathrm{S}^r V$ derart, daß die Projektion $V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^r V$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist.

Übung 1.3.13. Gegeben $p, q \in \mathbb{N}$ setze man $\mathfrak{so}(p, q) := \mathfrak{o}(\mathbb{R}^{p+q}, J_{p,q})$ für die durch die Diagonalmatrix mit p Einsen und q Minus-Einsen gegebene Bilinearform $J_{p,q}$. Man konstruiere einen Isomorphismus

$$\mathfrak{so}(3, 1) \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$$

von reellen Liealgebren. Hinweis: Man suche nicht nach einem Isomorphismus von reellen Vektorräumen $\mathbb{R}^{3+1} \cong \mathbb{C}^2$, der solch einen Isomorphismus von Liealgebren induzieren könnte, denn die Endomorphismenringe dieser Darstellungen sind verschieden. Stattdessen untersuche man die vierdimensionale reelle Darstellung $\ker\left(\bigwedge^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) \twoheadrightarrow \bigwedge^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)\right)$ von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ und die darauf durch $\wedge$ und eine von Null verschiedene reelle Volumenform gegebene Bilinearform.

1.4 Nilpotente und auflösbare Liealgebren

Satz 1.4.1 (Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen). *Seien V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper k und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Unteralgebra, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. So gilt:*

1. *Ist $V \neq 0$, so gibt es in V einen Vektor $v \neq 0$ mit $\mathfrak{g}v = 0$;*
2. *Es gibt in V eine Fahne $0 = V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^r = V$ von Unterräumen mit $\mathfrak{g}V^i \subset V^{i-1}$ für $i = 1, \ldots, r$;*
3. *Ist V endlichdimensional, so gibt es in V eine Fahne von Unterräumen $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, d$;*
4. *Ist V endlichdimensional, so besitzt V eine Basis, bezüglich derer die Matrizen aller Elemente unserer Liealgebra $\mathfrak{g}$ echte obere Dreiecksmatrizen sind.*

1.4.2. Bei [Rad87] findet man ein sehr elegantes Argument für eine allgemeinere Aussage unter der Annahme $\dim V < \infty$. Ich wüßte gerne, inwieweit sie sich auf den hier behandelten Fall verallgemeinern läßt. Das könnte eine nettes Thema für einen Studenten sein.

Beweis. 1. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Ist $x \in \operatorname{End}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus von V, so ist auch $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(\operatorname{End}(V)) = \operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$ nilpotent. In der Tat ist $(\operatorname{ad} x)^n(y)$ für alle $y \in \mathfrak{gl}(V)$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt $x^i y x^{n-i}$. Aus $x^n = 0$ folgt also $(\operatorname{ad} x)^{2n} = 0$. Wir zeigen nun den ersten Teil durch Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$. Sei $\dim \mathfrak{g} \geq 1$ und sei $L \subsetneq \mathfrak{g}$ maximal unter allen echten Unteralgebren. Unter der adjungierten Operation von L auf $\mathfrak{g}$ ist $L \subset \mathfrak{g}$ eine Unterdarstellung. Wir bilden die Quotientendarstellung $\mathfrak{g}/L$ und erhalten so einen Liealgebren-Homomorphismus $\overline{\operatorname{ad}} : L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/L)$. Nach unserer Vorbemerkung besteht $\overline{\operatorname{ad}} L$ aus nilpotenten Endomorphismen von $\mathfrak{g}/L$, es gibt also nach Induktionsannahme ein $\bar{x} \in \mathfrak{g}/L$, $\bar{x} \neq 0$ mit $(\overline{\operatorname{ad}} L)(\bar{x}) = 0$, oder in anderen Worten ein $x \in \mathfrak{g} \backslash L$ mit $[L, x] \subset L$. Das bedeutet hinwiederum, daß $L + kx$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, die L echt umfaßt. Da L als maximal angenommen war, gilt notwendig $L + kx = \mathfrak{g}$. Nun betrachten wir $W := \{v \in V \mid Lv = 0\}$, benutzen die Induktionsannahme ein zweites Mal und folgern $W \neq 0$. Aus $[L, x] \subset L$ folgt weiter $xW \subset W$, und da x nach Annahme nilpotent ist, gibt es $v \in W$ mit $v \neq 0$ aber $xv = 0$ und damit $\mathfrak{g}v = 0$.

2. Nach dem Beweis des ersten Teils können wir $\mathfrak{g} = L + kx$ schreiben für eine Unterliealgebra $L \subset \mathfrak{g}$ der Kodimension Eins. Mit Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$ sehen wir, daß die Filtrierung durch die Teilräume $V(L, i)$ aller von Produkten der Länge i aus Elementen von L anullierten Vektoren endlich ist, als da heißt, es gibt s mit $V(L, s) = V$. Andererseits stabilisiert x diese Filtrierung und ist nilpotent. Das zeigt, daß wir unsere Filtrierung verfeinern können zu einer Filtrierung mit der gewünschten Eigenschaft.

3. Sei allgemeiner $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung einer beliebigen Liealgebra durch nilpotente Endomorphismen. Wir zeigen durch Induktion über die Dimension von V, daß es eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ von Unterräumen gibt mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, d$. Im Fall $V = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\rho(\mathfrak{g})v = 0$. Wir setzen $V_1 = kv$ und betrachten die Quotientendarstellung $V' = V/V_1$ und die kanonische Projektion $\operatorname{can} : V \twoheadrightarrow V/V_1$. Mit Induktion finden wir dort eine Kette $0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \ldots \subset V'_{d-1} = V'$ wie gewünscht. Dann setzen wir $V_i = \operatorname{can}^{-1}(V'_{i-1})$ für $i \geq 1$ und $V_0 = 0$ und sind fertig.

4. Das ist nur eine Formulierung von Teil 3 in Koordinaten. □

Definition 1.4.3. Seien k ein Körper und A eine k-Algebra unter einer $(x, y) \mapsto x \cdot y$ notierten Verknüpfung. Ein **Ideal von** A ist ein Untervektorraum $I \subset A$ mit $A \cdot I \subset I$ und $I \cdot A \subset I$.

1.4.4. Jedes Ideal ist eine Unteralgebra. Null und A sind stets Ideale von A. Die Summe von Idealen ist ein Ideal. Der Schnitt von Idealen ist ein Ideal. Das von einer Teilmenge $T \subset A$ **erzeugte Ideal** ist definiert als das kleinste Ideal, das T enthält, also als der Schnitt aller Ideale, die T enthalten. Die Ideale in einem Produkt $A_1 \times \ldots \times A_n$ von Algebren sind genau die Produkte $I_1 \times \ldots \times I_n$ von Idealen der Faktoren.

1.4.5. Ein Ideal $I \subset A$ einer Ringalgebra mit $I \neq A$ ist keine Unterringalgebra, da in ihm das neutrale Element der Multiplikation, wenn es überhaupt eines geben sollte, jedenfalls nicht dasselbe ist wie in A.

Lemma 1.4.6 (**Quotienten von Algebren nach einem Ideal**). *1. Ist $I \subset A$ ein Ideal in einer Algebra, so gibt es auf dem Quotientenvektorraum A/I genau eine bilineare Verknüpfung derart, daß die kanonische Projektion $\operatorname{can} : A \to A/I$ ein Homomorphismus von Algebren ist;*

2. Der Kern eines Algebrenhomomorphismus ist stets ein Ideal;

3. Ist $\varphi : A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus und $I \subset A$ ein Ideal mit $\varphi(I) = 0$, so gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : A/I \to B$ mit $\tilde{\varphi} \circ \operatorname{can} = \varphi$.

Beweis. Standard. □

1.4.7. Die Ideale einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sind genau die Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung. Eine Liealgebra ist also irreduzibel genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung irreduzibel ist. Beim Begriff „einfach“ passen die Definitionen leider nicht so gut zusammen.

1.4.8. Der Kern von $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$ und heißt das **Zentrum** von $\mathfrak{g}$. Natürlich ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

Definition 1.4.9. Für zwei Untervektorräume U, V einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezeichne $[U, V] \subset \mathfrak{g}$ den Untervektorraum, der von allen Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$, $y \in V$ aufgespannt wird.

1.4.10 (**Diskussion der Terminologie**). Diese Notation verletzt unsere allgemeinen Konventionen [GR] 2.1.3, nach denen $[U, V]$ eigentlich die Menge aller Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$, $y \in V$ bezeichnen müßte. Für diese Menge brauchen wir jedoch in der Lietheorie keine eigene Notation, weshalb wir die allgemein vereinbarte Schreibweise $\langle [U, V] \rangle_k$ zu $[U, V]$ abkürzen.

1.4.11. Sind I, J Ideale einer Liealgebra, so ist auch $[I, J]$ ein Ideal, wie man nachrechnet unter Verwendung der Jacobi-Identität. Für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist insbesondere $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ stets ein Ideal. Es heißt die **derivierte Liealgebra** und ist das kleinste Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ derart, daß der Quotient $\mathfrak{g}/I$ abelsch ist.

Definition 1.4.12. Man erklärt für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ induktiv zwei Folgen von Idealen wie folgt:

1. die **absteigende Zentralreihe** $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$;

2. die **abgeleitete Reihe** $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$.

Definition 1.4.13. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1. $\mathfrak{g}$ heißt **nilpotent**, wenn gilt $\mathfrak{g}^i = 0$ für $i \gg 0$;

2. $\mathfrak{g}$ heißt **auflösbar**, wenn gilt $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ für $i \gg 0$.

1.4.14. Natürlich gilt $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$, jede nilpotente Liealgebra ist also auflösbar. Jede Unteralgebra und jeder Quotient einer nilpotenten beziehungsweise auflösbaren Liealgebra ist nilpotent beziehungsweise auflösbar. Ist genauer $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von Liealgebren, so erkennt man induktiv $\varphi(\mathfrak{g}^i) = (\varphi(\mathfrak{g}))^i$ und $\varphi(\mathfrak{g}^{(i)}) = (\varphi(\mathfrak{g}))^{(i)}$ für alle i.

1.4.15. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V ist jede Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht, bereits nilpotent als Liealgebra, da sie sich nämlich nach 1.4.1 identifizieren läßt mit einer Unteralgebra der Liealgebra der echten oberen $(d \times d)$-Dreiecksmatrizen für $d = \dim V$.

1.4.16 (**Herkunft der Terminologie**). Der Begriff „auflösbar“ kommt her von einem analogen Begriff für Gruppen, der hinwiederum seinen Ursprung in der Galoistheorie hat, genauer in der Frage nach der Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen durch „Ausdrücke in höheren Wurzeln“.

Definition 1.4.17. Ein Element x einer Liealgebra heißt **ad-nilpotent**, wenn $\operatorname{ad} x$ als Endomorphismus unserer Liealgebra nilpotent ist.

Satz 1.4.18 (von Engel). *Eine endlichdimensionale Liealgebra ist nilpotent genau dann, wenn jedes ihrer Elemente ad-nilpotent ist.*

Beweis. $\Rightarrow$ bleibt dem Leser überlassen. Wir zeigen $\Leftarrow$. Bezeichne $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra. Bemerkung 1.4.15 sagt uns schon mal, daß $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ eine nilpotente Liealgebra ist. Dann folgern wir $0 = (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^i = \operatorname{ad}(\mathfrak{g}^i) \Rightarrow \mathfrak{g}^i \subset \ker(\operatorname{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \Rightarrow \mathfrak{g}^{i+1} = 0$. □

Übungen

Übung 1.4.19. Das Urbild eines Ideals unter einem Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal. Das Bild eines Ideal unter einem surjektiven Algebrenhomomorphismus ist wieder ein Ideal.

Übung 1.4.20. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k. Eine Linearform auf $\mathfrak{g}$, die ein Homomorphismus in die Liealgebra $\mathfrak{gl}(1;k)$ ist, heißt auch ein **Charakter von** $\mathfrak{g}$. Man zeige, daß genau die Linearformen Charaktere sind, die auf der derivierten Liealgebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ verschwinden.

Übung 1.4.21. Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden eine nilpotente Liealgebra, die oberen Dreiecksmatrizen eine auflösbare Liealgebra.

Übung 1.4.22. Seien V eine zweidimensionale Darstellung einer nilpotenten Liealgebra und $U \subset V$ eine eindimensionale Unterdarstellung. Man zeige: Sind U und V/U als Darstellungen nicht isomorph, so ist V isomorph zu $U \oplus V/U$. Hinweis: Man überlege sich, daß eine nilpotente Liealgebra von oberen (2×2)-Dreiecksmatrizen bereits abelsch sein muß.

Übung 1.4.23. Sei A eine assoziative Algebra. Man zeige für alle $x, y \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ die Formel $(\operatorname{ad} x)^n(y) = \sum_i \binom{n}{i}(-1)^{n-i}x^i y x^{n-i}$.

Übung 1.4.24. (1) Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ von Liealgebren ist $\mathfrak{g}$ auflösbar genau dann, wenn $\ker\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$ auflösbar sind. (2) Sind I, J zwei auflösbare Ideale in einer Liealgebra $\mathfrak{g}$, so ist auch ihre Summe $I + J \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal. Man betrachte dazu zum Beispiel die Surjektion $I + J \twoheadrightarrow (I+J)/J$. (3) Ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra, so gibt es in $\mathfrak{g}$ ein größtes auflösbares Ideal, das **Radikal** $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{g}$.

Übung 1.4.25. $(\operatorname{char} k = 0)$. Man zeige, daß die Liealgebra $\mathfrak{sl}(n;k)$ einfach ist. Hinweis: Besteht ein Ideal von $\mathfrak{gl}(n;k)$ nicht aus Diagonalmatrizen, so umfaßt es $\mathfrak{sl}(n;k)$. In der Tat muß es sicher ein E_{ij} mit $i \neq j$ enthalten, wie man erkennt durch Anwenden der $\operatorname{ad}(E_{kk})$. Dann enthält es auch $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$ und dann alle $E_{ik} = [E_{ii} - E_{jj}, E_{ik}]$ für $k \neq i, j$ sowie alle E_{kj} für $k \neq i, j$. Dann enthält es aber in derselben Weise auch alle E_{kl} für $k \neq l$ und alle $E_{kk} - E_{ll}$. Man zeige, daß die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ in Charakteristik 2 dahingegen nicht einfach ist.

Übung 1.4.26. Für jede Liealgebra L und jedes Element $x \in L$ ist $\operatorname{ad} x$ eine Derivation von L und die Menge $\operatorname{ad}(L) \subset \operatorname{Der}_k L$ ist ein Lie-Ideal. Genauer gilt sogar $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x)\ \forall \delta \in \operatorname{Der}_k L, x \in L$.

Übung 1.4.27 (**Satz von Jacobson-Engel**). Gegeben eine assoziative Algebra A mit einer endlichdimensionalen Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset A_{\mathrm{L}}$, die aus nilpotenten Elementen von A besteht, gibt es ein r derart, daß in A alle Produkte von r Faktoren aus $\mathfrak{g}$ verschwinden. Hinweis: Man wende den Satz 1.4.1 über Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen auf $V = A$ an.

1.5 Satz von Lie

Satz 1.5.1 (von Lie, abstrakte Form). *Jede einfache endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Liealgebra ist eindimensional.*

Satz 1.5.2 (von Lie, konkrete Form). *Ist V ein von Null verschiedener endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine auflösbare Unteralgebra, so gibt es einen simultanen Eigenvektor v für alle Endomorphismen aus $\mathfrak{g}$, in Formeln ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $\mathfrak{g}v \subset \mathbb{C}v$.*

1.5.3. Beide Sätze gelten mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null. In von Null verschiedener Charakteristik sind sie jedoch im allgemeinen falsch. Zum Beispiel ist die Liealgebra $\mathfrak{sl}(2)$ in Charakteristik Zwei auflösbar, ja sogar nilpotent, und dennoch ist ihre Standarddarstellung k^2 einfach. Des weiteren ist die Bedingung endlicher Dimension wichtig: So bilden etwa das Ableiten ∂, der Multiplikationsoperator $(X\cdot)$ und die Identität id eine Basis einer auflösbaren Unter-Liealgebra von $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}[X])$ und der Polynomring $\mathbb{C}[X]$ ist eine einfache Darstellung dieser dreidimensionalen auflösbaren Liealgebra. Für eine endlichdimensionale komplexe abelsche Liealgebra dahingegen ist jede einfache Darstellung bereits endlichdimensional und damit eindimensional: Diese Aussage ist eng verwandt zum Hilbert'schen Nullstellensatz und folgt etwa aus [KAG] 1.6.9.

Beweis. Die beiden Sätze sind sicher äquivalent. Wir zeigen hier die konkrete Form und führen den Beweis durch Induktion über $\dim \mathfrak{g}$. Der Fall $\dim \mathfrak{g} = 0$ ist klar. Gilt $\dim \mathfrak{g} > 0$, so gibt es in $\mathfrak{g}$ ein Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ der Kodimension 1: In der Tat ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ eine abelsche Liealgebra, jeder Teilraum darin ist also ein Ideal. Aus $\dim \mathfrak{g} > 0$ und $\mathfrak{g}$ auflösbar folgt aber $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, folglich gibt es in $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ einen Teilraum der Kodimension 1 und das Urbild in $\mathfrak{g}$ eines solchen Teilraums ist dann unser gesuchtes Ideal I. Nach Induktionsnahme finden wir $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $Iv \subset \mathbb{C}v$. Man sieht leicht, daß die Funktion $\lambda : I \to \mathbb{C}$ gegeben durch $xv = \lambda(x)v$ linear sein muß. Wir betrachten den zugehörigen simultanen Eigenraum $V_\lambda = \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \quad \forall x \in I\}$, der v enthält und deshalb von Null verschieden ist. Nach dem anschließenden allgemeinen Lemma 1.5.4 gilt $\mathfrak{g}V_\lambda \subset V_\lambda$. Jetzt wählen wir $y \in \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = I + \mathbb{C}y$. Jeder Eigenvektor v von y in V_λ muß dann simultaner Eigenvektor aller Endomorphismen aus $\mathfrak{g}$ sein. □

Lemma 1.5.4. *($\mathrm{char}\, k = 0$) Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal ist für alle Linearformen $\lambda \in I^*$ der simultane Eigenraum $V_\lambda := \{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \; \forall x \in I\}$ eine Unterdarstellung.*

Ergänzung 1.5.5. Das gilt mit demselben Beweis auch über einem beliebigen Grundkörper k einer Charakteristik $\mathrm{char}\, k > \dim V$. Ein Gegenbeispiel ist die Standarddarstellung k^2 der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; k)$ in Charakteristik Zwei mit dem Ideal der oberen Dreiecksmatrizen.

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß gilt $xyw = \lambda(x)(yw) \quad \forall x \in I, y \in \mathfrak{g}$, $w \in V_\lambda$. Sicher gilt stets

$$\begin{aligned} xyw &= yxw + [x,y]w \\ &= y(\lambda(x)w) + \lambda([x,y])w \\ &= \lambda(x)(yw) + \lambda([x,y])w \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir aus $V_\lambda \neq 0$ folgern können, daß gilt $\lambda([x,y]) = 0 \; \forall x \in I$, $y \in \mathfrak{g}$. Gegeben $y \in \mathfrak{g}$ und $w \in V_\lambda$ nicht Null sei dazu $n \geq 0$ die größte Zahl derart, daß die Vektoren $w, yw, y^2w, \ldots, y^nw$ linear unabhängig sind. Sei W der von $w, yw, \ldots, y^nw$ aufgespannte Teilraum von V. Sicher ist W stabil unter y. Außerdem ist W auch stabil unter I, genauer zeigt man durch Induktion über i aus $xy^iw = y(xy^{i-1}w) + [x,y]y^{i-1}w$ für $x \in I$, daß alle $W_i = \operatorname{span}(w, yw, \ldots, y^iw)$ unter I stabil sind. Dann folgert man aus derselben Formel mit einer nochmaligen Induktion für $x \in I$ sogar

$$xy^iw \in y^ixw + W_{i-1}$$

Für alle $x \in I$ ist also die Matrix von $x : W \to W$ in der Basis der y^iw eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einträgen $\lambda(x)$ auf der Diagonalen und hat folglich die Spur $\operatorname{tr}(x|_W) = (\dim W)\lambda(x)$. Wenden wir diese Erkenntnis an auf $[x,y]$ und erinnern, daß die Spur des Kommutators von zwei linearen Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen Raums wie etwa unseres Raums W stets verschwindet, so folgt $(\dim W)\lambda([x,y]) = \operatorname{tr}([x,y]|_W) = 0$. Da nach unseren Annahmen W nicht der Nullraum ist, folgt $\lambda([x,y]) = 0$ für alle $x \in I$. □

Korollar 1.5.6 (**Darstellungen auflösbarer Liealgebren**). *Sei V eine endlichdimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Liealgebra $\mathfrak{g}$. So gilt:*

1. *Es gibt in V eine Kette $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = V$ von Unterdarstellungen mit $\dim V_i = i$;*

2. *Es gibt eine Basis von V, bezüglich derer die Matrizen von Elementen aus $\mathfrak{g}$ alle obere Dreiecksmatrizen sind.*

Ergänzung 1.5.7. Das gilt mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null.

Beweis. Man argumentiert ausgehend vom Satz von Lie 1.5.2 analog wie für die Aussagen 2 und 3 von Satz 1.4.1 über Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen. □

Korollar 1.5.8. *Die derivierte Liealgebra einer endlichdimensionalen auflösbaren komplexen Liealgebra ist nilpotent.*

Ergänzung 1.5.9. Das gilt allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null, von dem man sich durch Erweiterung der Skalare leicht in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers retten kann, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ unsere auflösbare Liealgebra. Nach dem vorhergehenden Korollar besteht bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ die Unteralgebra $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ aus oberen Dreiecksmatrizen, mithin besteht $[\operatorname{ad}\mathfrak{g}, \operatorname{ad}\mathfrak{g}] = \operatorname{ad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ aus echten oberen Dreiecksmatrizen und ist nilpotent. Da der Kern von $\operatorname{ad} : [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ im Zentrum von $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ liegt, ist damit auch $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ selbst nilpotent. □

Übungen

Übung 1.5.10 (**Darstellungen von nilpotenten Liealgebren**). Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$. Man zeige: Jede endlichdimensionale Darstellung einer nilpotenten Liealgebra über k zerfällt in eine direkte Summe von Unterdarstellungen, die Haupträume für alle von der Operation herkommenden Endomorphismen sind. Hinweis: Man kombiniere das Korollar 1.5.6 zum Satz von Lie und 1.4.22, um durch Umarrangieren einer Kompositionsreihe jeden simultanen Hauptraum als Unterdarstellung zu entlarven und zu zeigen, daß deren Dimensionen sich zur Dimension der ganzen Darstellung aufaddieren. Alternative: Man zeige mit Induktion über n, daß jedes Element y mit $(\operatorname{ad} x)^n(y) = 0$ den Nullhauptraum von x, ja jeden Hauptraum von x stabilisiert. Die fraglichen simultanen Eigenwerte sind dann Linearformen auf unserer Liealgebra und heißen die **Gewichte** unserer Darstellung, die zugehörigen simultanen Eigenräume nennen wir die **Gewichtsräume**, und die zugehörigen simultanen Haupträume die **verallgemeinerten Gewichtsräume**.

Ergänzende Übung 1.5.11. Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **lokal endlich**, wenn jeder Vektor in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung liegt. Man zeige, daß auch jede lokal endliche Darstellung einer nilpotenten Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ in die direkte Summe ihrer verallgemeinerten Gewichtsräume zerfällt.

Übung 1.5.12. Diese Übung dient nur der Auffrischung Ihrer Kenntnisse in linearer Algebra. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und seien $\lambda, \mu, \dots, \nu$ dessen Eigenwerte. Man zeige, daß für jeden Untervektorraum $W \subset V$ mit $f(W) \subset W$ gilt

$$W = (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\lambda)) \oplus (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\mu)) \oplus \dots \oplus (W \cap \operatorname{Hau}(f|V;\nu))$$

Man formuliere auch die Verallgemeinerung auf den Fall eines lokal endlichen Endomorphismus f eines beliebigen Vektorraums V.

1.6 Auflösbarkeitskriterium von Cartan

Satz 1.6.1 (Auflösbarkeitskriterium von Cartan). *Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unteralgebra. Genau dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, wenn gilt* $\operatorname{tr}(xy) = 0 \ \ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$.

1.6.2. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so liegt es nach Korollar 1.5.6 zum Satz von Lie bei geeigneter Basiswahl bereits in den oberen Dreiecksmatrizen. Das zeigt die eine Richtung. Der Beweis der anderen Richtung braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts direkt vor 1.6.7 gegeben.

Ergänzung 1.6.3. Das Auflösbarkeitskriterium gilt allgemeiner auch über jedem Grundkörper der Charakteristik Null: Durch Erweiterung der Skalare rettet man sich in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers der Charakteristik Null, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Lemma 1.6.4. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Ist $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von $x \in \operatorname{End} V$, so ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}) + \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}})$ die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$. In Formeln gilt also*

$$\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}) = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{s}} \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}}) = (\operatorname{ad} x)_{\mathrm{n}}$$

Beweis. Sicher gilt $[\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}, \operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}] = \operatorname{ad}[x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}] = 0$. Außerdem ist $\operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}$ nilpotent nach dem Beginn des Beweises von 1.4.1. Wir müssen damit nur noch zeigen, daß $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$ diagonalisierbar ist. Aber identifizieren wir $\operatorname{End} V$ mit einer Algebra von quadratischen Matrizen vermittels einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren von x_{s}, sagen wir $x_{\mathrm{s}} v_i = \lambda_i v_i$, so werden die Standardmatrizen E_{ij} mit einer Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte Eigenvektoren zu $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$, genauer gilt $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})(E_{ij}) = (\lambda_j - \lambda_i)E_{ij}$. Folglich ist mit x_{s} auch $\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}$ diagonalisierbar. □

Lemma 1.6.5. *Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Seien zwei Teilräume seines Endomorphismenraums $\operatorname{End} V \supset B \supset A$ gegeben und sei $T := \{x \in \operatorname{End} V \mid (\operatorname{ad} x)(B) \subset A\}$. Erfüllt ein $x \in T$ die Bedingung $\operatorname{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in T$, so ist x nilpotent.*

1.6.6. Der Beweis des Auflösbarkeitskriteriums beruht auf diesem technischen Lemma. Ich gebe für dies Lemma zwei Beweise. Der erste ist zwar etwas schneller, hinterläßt aber bei mir einen schalen Nachgeschmack, da er nicht für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k der Charakteristik Null funktioniert. Deshalb die Alternative.

Beweis. Sei $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von x. So ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_{\mathrm{s}} + \operatorname{ad} x_{\mathrm{n}}$ die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} x$ und aus $(\operatorname{ad} x)(B) \subset A$ folgt mit Übung [LA2]

3.3.13 zum Bild des halbeinfachen Anteils die Inklusion $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})B \subset A$. In anderen Worten liegen alle Eigenräume von $(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}) : B \to B$ zu von Null verschiedenen Eigenwerten bereits in A.

Rest des Beweises im komplexen Fall. Wählen wir in V eine Basis aus Eigenvektoren von x_{s} und definieren $z \in \operatorname{End} V$ durch die Bedingung, daß seine Matrix in dieser Basis komplex konjugiert ist zur Matrix von x_{s}, so haben wir $\operatorname{Eig}(\operatorname{ad} z; \lambda) = \operatorname{Eig}(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}; \bar{\lambda})$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und mithin auch $(\operatorname{ad} z)(B) \subset A$. Aus $\operatorname{tr}(xz) = 0$ folgt dann aber sofort $x_{\mathrm{s}} = 0$. □

Rest des Beweises im Allgemeinen. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x_{s}, sagen wir $x_{\mathrm{s}} v_i = \lambda_i v_i$ für geeignete $\lambda_i \in k$. Sei $E \subset k$ der von den λ_i aufgespannte $\mathbb{Q}$-Untervektorraum. Es gilt zu zeigen $E = 0$. Sei sonst $f : E \to \mathbb{Q}$ eine nicht-verschwindende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. Wir betrachten den Endomorphismus z von V, der definiert wird durch $zv_i = f(\lambda_i)v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Zunächst zeigen wir $z \in T$. Natürlich haben wir

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{ad} z)(E_{ij}) & = & (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))E_{ij} \\ & = & f(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \end{array}$$

für alle i und j, also $\operatorname{Eig}(\operatorname{ad} z; \mu) = \bigoplus_{f(\lambda)=\mu} \operatorname{Eig}(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}; \lambda)$ und insbesondere $(\operatorname{ad} z)(B) \subset A$. Nun ist offensichtlich $\operatorname{tr}(xz) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i)$. Aus der Annahme $\operatorname{tr}(xz) = 0$ folgt mithin $f(\operatorname{tr}(xz)) = \sum_{i=0}^n f(\lambda_i)^2 = 0$ und damit $f(\lambda_i) = 0 \quad \forall i$ im Widerspruch zu unserer Annahme $f \neq 0$. □

Beweis des Cartan'schen Auflösbarkeitskriteriums. Wir zeigen nun die schwierige Implikation aus dem Cartan'schen Auflösbarkeitskriterium 1.6.1. Es reicht zu zeigen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Mit 1.4.1 reicht es sogar zu zeigen, daß alle Elemente $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent sind als Endomorphismen von V. Nach Lemma 1.6.5 müssen wir dazu nur zeigen, daß gilt $\operatorname{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in \operatorname{End} V$ mit $[z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Schreiben wir aber $x = \sum [c_i, d_i]$, so ist

$$\operatorname{tr}(xz) = \sum \operatorname{tr}([c_i, d_i]z) = \sum \operatorname{tr}(c_i[d_i, z]) = 0$$

nach Annahme, da ja gilt $c_i \in \mathfrak{g}$ und $[d_i, z] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ für alle i. Hier haben wir verwendet, daß für drei Endomorphismen x, y, z eines endlichdimensionalen Vektorraums stets gilt $\operatorname{tr}(xyz) = \operatorname{tr}(zxy) = \operatorname{tr}(yzx)$, also $\operatorname{tr}([x, y]z) = \operatorname{tr}(x[y, z])$. □

Definition 1.6.7. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper k. Die **Killingform von** $\mathfrak{g}$ ist die Bilinearform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ auf unserer Liealgebra, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\kappa(x, y) := \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$$

1.6.8. Die Killingform ist ein Spezialfall unserer Spurform, wie wir sie in [NAS] 3.6.7 für eine beliebige endlichdimensionale Algebra erklärt hatten.

1.6.9. Sicher ist κ symmetrisch, $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$. Weiter gilt offensichtlich $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$. Letztere Eigenschaft ist so wichtig, daß sie einen eigenen Namen hat.

Definition 1.6.10. Eine Bilinearform $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ auf einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **invariant**, wenn gilt $b([x, y], z) = b(x, [y, z]) \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Ergänzung 1.6.11. Man nennt diese Eigenschaft manchmal auch die „Assoziativität“ von b. Sie hat jedoch nur oberflächlich mit Assoziativität im üblichen Sinne zu tun. Vielmehr werden wir später sehen, daß unsere Eigenschaft bedeutet, daß das Element $b \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^*$ invariant ist unter der natürlichen Operation der Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf diesem Raum.

Korollar 1.6.12 (Auflösbarkeitskriterium). *Eine endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null ist auflösbar genau dann, wenn für die Killing-Form gilt $\mathfrak{g} \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ alias $\kappa(x, [y, z]) = 0 \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Das Cartan-Kriterium 1.6.1 zeigt, daß unsere Bedingung gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$. Die kurze exakte Sequenz $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \operatorname{ad} \mathfrak{g}$ zeigt dann, daß sie auch gleichbedeutend ist zur Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}$. □

Übungen

Übung 1.6.13. Man zeige: Die Killingform einer endlichdimensionalen nilpotenten Liealgebra ist Null.

1.7 Reduktive und halbeinfache Liealgebren

1.7.1. Ich erinnere daran, daß nach 1.1.18 eine Liealgebra irreduzibel heißt, wenn sie genau zwei Ideale besitzt, nämlich sich selber und Null, und einfach, wenn sie außerdem nicht abelsch ist.

Definition 1.7.2. Eine Liealgebra heißt **halbeinfach**, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von endlichdimensionalen einfachen Liealgebren. Eine Liealgebra heißt **reduktiv**, wenn sie isomorph ist zu einem endlichen Produkt von endlichdimensionalen irreduziblen Liealgebren.

1.7.3 (**Diskussion der Terminologie**). In diesem Text wie im überwiegenden Teil der Literatur werden halbeinfache oder reduktive Liealgebren nur über Körpern der Charakteristik Null betrachtet. Wenn Sie diese Bedingung irgendwo vermissen, habe ich vermutlich nur versäumt, sie explizit dazuzuschreiben. Da wir bei einer halbeinfachen Liealgebra zusätzlich fordern, daß sie endlichdimensional sein soll, ist in unserer Terminologie nicht jede einfache Liealgebra halbeinfach. In diesem Licht ist die Terminologie unschön, aber so hat sie sich nun einmal eingebürgert.

Beispiele 1.7.4. Die Liealgebra $\mathfrak{g} = 0$ ist halbeinfach. Eine von Null verschiedene abelsche Liealgebra ist jedoch nicht halbeinfach, sondern nur reduktiv. Erste substanzielle Beispiele liefert 2.1.15.

Definition 1.7.5. Eine Darstellung heißt wie in [NAS] 2.3.1 **halbeinfach**, wenn sie eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen ist, wenn also für besagte Darstellung V in Formeln gilt $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ mit $V_i \subset V$ einfachen Unterdarstellungen. Die Nulldarstellung $V = 0$ ist halbeinfach als die „leere Summe“.

Ergänzung 1.7.6. Ganz genauso wie in [NAS] 2.3 für Moduln über Ringen zeigt man, daß für eine Darstellung V gleichbedeutend sind: (1) V ist halbeinfach, (2) V ist eine nicht notwendig direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen, und (3) jede Unterdarstellung von V besitzt ein Komplement. Ebenso zeigt man auch, daß jede Unterdarstellung und jeder Quotient einer halbeinfachen Darstellung halbeinfach sind. All das wird der Leser im endlichdimensionalen Fall unschwer als Übung selbst zeigen können. Im allgemeinen Fall benötigt man jedoch zusätzliche Ideen und kommt nicht ohne das Zorn'sche Lemma aus.

Beispiel 1.7.7. Die Darstellung $\mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$, $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ der abelschen Liealgebra $\mathbb{C}$ ist nicht halbeinfach. Ganz allgemein ist für einen k-Vektorraum V und $a \in \operatorname{End}(V)$ die Darstellung $k \to \mathfrak{gl}(V)$, $1 \mapsto a$ der abelschen Liealgebra k halbeinfach genau dann, wenn a diagonalisierbar ist über dem algebraischen Abschluß $\bar{k}$, wenn also a halbeinfach ist im Sinne von [LA2] 3.3.4.

1.7.8. Per definitionem ist eine Liealgebra reduktiv genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung halbeinfach ist im Sinne von 1.7.5 alias die Summe ihrer einfachen Unterdarstellungen. Insbesondere ist die Liealgebra einer kompakten Liegruppe stets reduktiv nach [ML] 2.4.12 und [ML] 2.2.5.

Satz 1.7.9 (**Charakterisierung halbeinfacher Liealgebren**). *Für eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Liealgebra besitzt kein von Null verschiedenes abelsches Ideal;*
2. *Unsere Liealgebra besitzt kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal;*
3. *Unsere Liealgebra ist halbeinfach;*
4. *Unsere Liealgebra ist die direkte Summe ihrer einfachen Ideale;*
5. *Unsere Liealgebra hat eine nicht ausgeartete Killingform.*

1.7.10. Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ und Unteralgebren $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ sagen wir, die Liealgebra $\mathfrak{g}$ **zerfalle in das Produkt der** $\mathfrak{g}_i$ und schreiben $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$, wenn die durch die Addition gegebene Abbildung von der rechten Seite in die linke Seite ein Isomorphismus von Liealgebren ist. Gleichbedeutend dazu ist, daß alle $\mathfrak{g}_i$ Ideale von $\mathfrak{g}$ sind und unsere Abbildung von der rechten Seite in die linke Seite ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Bezeichnen etwa $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}(n)$ die oberen Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}(n)$ die echten unteren Dreiecksmatrizen, so hätten wir eine Zerlegung $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}$ als Vektorräume, aber das wäre keine Zerlegung in ein Produkt von Liealgebren. Wir schicken dem Beweis des Satzes eine Ergänzung zur Killingform voraus.

Lemma 1.7.11 (Restriktion der Killingform auf ein Ideal). *Die Killingform eines Ideals einer endlichdimensionalen Liealgebra stimmt stets überein mit der Einschränkung der Killingform der ganzen Liealgebra auf besagtes Ideal.*

1.7.12. Dasselbe gilt für die Spurform jeder endlichdimensionalen Algebra, vergleiche Übung [NAS] 3.6.18. Der Beweis bleibt derselbe.

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und $I \subset \mathfrak{g}$ unser Ideal, so behauptet dies Lemma die Formel

$$\kappa_I = \kappa_{\mathfrak{g}}|_I$$

Sind ganz allgemein $I \subset \mathfrak{g}$ Vektorräume und ist $a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine lineare Abbildung mit $a(\mathfrak{g}) \subset I$, so gilt $\operatorname{tr}(a) = \operatorname{tr}(a|_I)$ für $a|_I$ die Einschränkung $a|_I : I \to I$ von a auf I. Das Lemma ergibt sich mit $a = (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)$ für $x, y \in I$. $\square$

Beweis von 1.7.9. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 1$ bieten keine Schwierigkeiten.

$2 \Rightarrow 5$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Das Radikal der Killingform $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$ bezeichnen wir mit

$$\operatorname{rad} \kappa = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Da κ invariant ist, muß $\operatorname{rad} \kappa \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal sein. Offensichtlich verschwindet κ auf $\operatorname{rad} \kappa$. Mit 1.7.11 folgt, daß die Killingform von $\operatorname{rad} \kappa$ verschwindet, nach dem Auflösbarkeitskriterium 1.6.12 ist damit $\operatorname{rad} \kappa$ auflösbar. Gibt es also kein von Null verschiedenes auflösbares Ideal, so folgt $\operatorname{rad} \kappa = 0$ und die Killingform ist nicht ausgeartet.

$5 \Rightarrow 1$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Gegeben ein abelsches Ideal $I \subset \mathfrak{g}$ gilt $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))^2 = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Folglich ist $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ nilpotent, also $\kappa(x, y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Damit gilt $I \subset \operatorname{rad} \kappa$.

$2 \Rightarrow 4$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra ohne von Null verschiedene auflösbare Ideale. Ist $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so ist auch $I^\perp = \{y \in \mathfrak{g} \mid \kappa(y, I) = 0\}$ ein Ideal, da die Killingform invariant ist. Auf dem Ideal $I \cap I^\perp$ verschwindet nun die Killingform, mithin ist dies Ideal nach dem Auflösbarkeitskriterium 1.6.12 auflösbar. Aus unserer Annahme folgt so $I \cap I^\perp = 0$ und erst recht $[I, I^\perp] = 0$. Mit Dimensionsbetrachtungen folgt dann sogar $I \oplus I^\perp = \mathfrak{g}$. Jedes Ideal von I beziehungsweise $I^\perp$ ist damit ein Ideal von $\mathfrak{g}$, also besitzen auch I und $I^\perp$ keine von Null verschiedenen auflösbaren Ideale. Mit Induktion sehen wir so, daß sich $\mathfrak{g}$ schreiben läßt als $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \ldots \oplus I_r$, wobei die I_ν einfache Ideale von $\mathfrak{g}$ sind. Ist nun $I \subset \mathfrak{g}$ ein weiteres einfaches Ideal, so folgt $I = [I, \mathfrak{g}] = [I, I_1] \oplus \ldots \oplus [I, I_r]$ und damit $I = [I, I_\nu] = I_\nu$ für ein ν. $\square$

Übungen

Übung 1.7.13. Gegeben eine reduktive Liealgebra sind die isotypischen Komponenten im Sinne von [NAS] 2.3.7 ihrer adjungierten Darstellung genau die einfachen Ideale sowie, als isotypische Komponente zur Einsdarstellung, das Zentrum. Jede reduktive Liealgebra zerfällt mithin in die Summe ihrer einfachen Ideale und ihres Zentrums. Des weiteren ist jedes Ideal einer reduktiven Liealgebra die direkte Summe eines Teils der einfachen Ideale mit einem Untervektorraum des Zentrums. Im endlichdimensionalen Fall können diese Aussagen auch ohne Rückgriff auf die allgemeine Theorie leicht bewiesen werden, wie in der folgenden Übung angedeutet wird.

Übung 1.7.14. Gegeben paarweise verschiedene einfache Ideale $I_1, \ldots, I_r$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sowie ein abelsches Ideal $A \subset \mathfrak{g}$ zeige man, daß die Addition eine Injektion $I_1 \oplus \ldots \oplus I_r \oplus A \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induziert. Des weiteren zeige man unter der zusätzlichen Annahme $I_1 \oplus \ldots \oplus I_r \oplus A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, daß jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ die Summe eines Teils der I_ν mit einem Untervektorraum von A ist.

Vorschau 1.7.15. Eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt. Das werden wir in 2.1.13 aus dem Satz von Weyl folgern.

Übung 1.7.16. Jedes Ideal einer halbeinfachen Liealgebra ist eine Summe von einfachen Idealen. Jeder Quotient einer halbeinfachen Liealgebra ist eine halbeinfache Liealgebra.

Übung 1.7.17. Jede halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist ihre eigene derivierte Liealgebra, in Formeln $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Übung 1.7.18. Jede reduktive Liealgebra läßt sich auf genau eine Weise zerlegen in das Produkt einer halbeinfachen Liealgebra und einer abelschen Liealgebra, nämlich als $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z}$ dem Zentrum von $\mathfrak{g}$.

2 Komplexe halbeinfache Liealgebren

2.1 Satz von Weyl

2.1.1. Für zwei Darstellungen V, W einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir den Raum aller Homomorphismen von Darstellungen mit $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ und den Raum aller Endomorphismen der Darstellung V mit $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$.

Lemma 2.1.2 (Lemma von Schur). *Die einzigen Endomorphismen einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung einer komplexen Liealgebra sind die Multiplikationen mit Skalaren. Ist $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und L unsere einfache endlichdimensionale Darstellung, so gilt demnach in Formeln*

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} L = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_L$$

Ergänzung 2.1.3. Das Lemma gilt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{End}\, L$ ein Endomorphismus des Vektorraums L. Da eine einfache Darstellung per definitionem nicht Null ist, hat φ mindestens einen Eigenwert λ. Aus $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} L$ folgt zusätzlich, daß der zugehörige Eigenraum L_λ eine Unterdarstellung von L ist. Falls L einfach ist, folgt sofort $L_\lambda = L$ und damit erhalten wir dann wie gewünscht $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$. □

Ergänzung 2.1.4. Die Folgerung des Lemmas gilt auch, wenn wir statt $\dim L < \infty$ voraussetzen, daß L abzählbare Dimension hat. Um das zu sehen beachte man, daß dann $E = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} L$ ein Schiefkörper abzählbarer Dimension über $\mathbb{C}$ ist. Der einzige derartige Schiefkörper ist aber $\mathbb{C}$ selber, denn gäbe es $\varphi \in E \backslash \mathbb{C}$, so könnte φ nicht algebraisch sein über $\mathbb{C}$, also hätten wir eine Einbettung $\mathbb{C}(X) \hookrightarrow E$, $X \mapsto \varphi$ des Körpers der gebrochen rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$ nach E. Da aber $\mathbb{C}(X)$ überabzählbare Dimension hat über $\mathbb{C}$, die $(X - \lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ sind nämlich linear unabhängig über $\mathbb{C}$, kann das nicht sein. Die Folgerung des Lemmas gilt des weiteren auch, wenn wir unsere Liealgebra endlichdimensional annehmen und mit Koeffizienten in einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten, vergleiche 2.7.1.

2.1.5. Das Lemma gilt nicht, wenn wir $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen. Ein Gegenbeispiel ist die einfache Darstellung von $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ im reellen Vektorraum $L = \mathbb{C}$, bei der $\lambda \in \mathfrak{g}$ auf L operiert als die Multiplikation mit $\lambda\,\mathrm{i}$. Wir haben nämlich in diesem Fall $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} L = \mathbb{C}\,\mathrm{id} \neq \mathbb{R}\,\mathrm{id}$.

Satz 2.1.6 (von Weyl). *Jede endlichdimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Liealgebra ist halbeinfach.*

2.1.7. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Der Spezialfall $\mathfrak{sl}(2;k)$ wurde bereits in [ML] 2.3.16 sozusagen „zu Fuß“ behandelt. Wir zeigen die Aussage allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null, vergleiche 2.1.12.

2.1.8 (**Verallgemeinerte Casimir-Operatoren**). Seien $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra und $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Für jede Darstellung V von $\mathfrak{g}$ erklären wir dann eine lineare Abbildung

$$C_b = C_b^V : V \to V$$

wie folgt: Wir wählen eine Basis $x_1, \ldots, x_\mathrm{n}$ von $\mathfrak{g}$, bezeichnen mit $x^1, \ldots, x^n$ die bezüglich b duale Basis, charakterisiert durch $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$, und setzen

$$C_b(v) := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i v$$

Die Abbildung C_b hängt nicht von der Wahl der Basis unserer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ab, aber das wird im Folgenden nicht verwendet und der Beweis dieser Tatsache bleibt dem Leser überlassen.

Lemma 2.1.9. *Die Abbildung C_b vertauscht mit der Operation von $\mathfrak{g}$, in Formeln gilt also $C_b \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} V$.*

Beweis. Das kann man in Koordinaten nachrechnen wie folgt: Entwickeln wir für $y \in \mathfrak{g}$ die Kommutatoren mit Elementen unserer Basen in der Form $[x_i, y] = \sum a_{ij} x_j$ und $[y, x^j] = \sum b_{ji} x^i$, so folgt aus der Invarianz unserer Bilinearform $b([x_i, y], x^j) = b(x_i, [y, x^j])$ sofort $a_{ij} = b_{ji}$ und damit

$$\begin{array}{rcl} yC_b(v) - C_b(yv) & = & \sum [y, x_i] x^i v + \sum x_i [y, x^i] v \\ & = & \sum -a_{ij} x_j x^i v + \sum b_{ij} x_i x^j v \\ & = & 0 \end{array} \qquad \square$$

Koordinatenfreier Beweis zum Casimir-Operator. Wir können den Casimir-Operator C_b zu einer invarianten nicht ausgearteten Bilinearform b auf unserer Liealgebra auch schreiben als die Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen

$$V \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \otimes V \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes V \to V$$

Die einzelnen Abbildungen sind dabei wie folgt erklärt: Die erste Abbildung wird induziert von $k \to \operatorname{End}_k(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$, $1 \mapsto \mathrm{id} \mapsto \sum x_i \otimes x_i^*$, falls $x_1^*, \ldots, x_n^*$ die duale Basis ist zu einer Basis $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{g}$. Die zweite Abbildung wird induziert von der inversen Abbildung zu $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, $y \mapsto b(\ ,y)$, $x^i \mapsto x_i^*$. Da unsere Bilinearform invariant ist, muß diese Abbildung auch ein Homomorphismus von

Darstellungen sein. Die dritte Abbildung entsteht durch zweimaliges Anwenden der Operation $\mathfrak{g} \otimes V \to V$, $x \otimes v \mapsto xv$. Als Verknüpfung von Homomorphismen von Darstellungen muß dann auch C_b ein Homomorphismus von Darstellungen sein. □

Lemma 2.1.10. *1. Gegeben V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra ist $(x, y) \mapsto \operatorname{tr}(xy)$ eine nichtausgeartete invariante symmetrische Bilinearform $b = b_V$ auf $\mathfrak{g}$;*

2. Für die zugehörige Casimir-Abbildung $C = C_b^V$ gilt $\operatorname{tr} C = \dim \mathfrak{g}$.

Beweis. Sicher ist unsere Bilinarform symmetrisch und invariant, insbesondere ist ihr Radikal ein Ideal. Nach dem Cartan-Kriterium 1.6.1 oder 1.6.3 im Fall eines allgemeinen Grundkörpers der Charakteristik Null ist ihr Radikal sogar ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$, also Null. Teil 2 folgt sofort aus den Definitionen. □

Lemma 2.1.11. *Für jede endlichdimensionale Darstellung V einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ gilt $V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$.*

2.1.12. Mit $\mathfrak{g}V$ meinen wir hier den von allen Xv mit $X \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ erzeugten Teilraum und $V^{\mathfrak{g}}$ bezeichnet wie immer den Raum der $\mathfrak{g}$-Invarianten. Dies Lemma gilt allgemeiner über jedem Grundkörper der Charakteristik Null: Durch Erweiterung der Skalare rettet man sich in den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers, in dem dann wieder der hier gegebene Beweis funktioniert.

Beweis. Durch Induktion über $\dim V$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V \neq V^{\mathfrak{g}}$. Betrachten wir den zu unserer Darstellung gehörigen Liealgebrenhomomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, so ist also $\rho(\mathfrak{g}) \neq 0$. Wir betrachten nun die zur halbeinfachen Unteralgebra $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ gehörige Abbildung $C : V \to V$ wie in Lemma 2.1.10. Natürlich zerfällt V in eine direkte Summe von Haupträumen unter C, und wegen $C \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} V$ sind alle Haupträume von C Unterdarstellungen. Hätte C mehr als einen Eigenwert auf V, so könnten wir V als direkte Summe von zwei Unterdarstellungen echt kleinerer Dimension schreiben und wären fertig mit Induktion. Wir dürfen also annehmen, daß C nur einen Eigenwert hat. Da gilt $\operatorname{tr}(C) = \dim \rho(\mathfrak{g}) \neq 0$ nach Lemma 2.1.10, kann dieser Eigenwert nicht Null sein. Also gilt $V = CV$ und $V^{\mathfrak{g}} = 0$ und a forteriori $V = \mathfrak{g}V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V$. □

Beweis des Satzes von Weyl 2.1.6. Es gilt zu zeigen, daß jede endlichdimensionale Darstellung V einer halbeinfachen Liealgebra halbeinfach ist. Ist $U \subset V$ eine Unterdarstellung, so liefert die Restriktion von Abbildungen eine Surjektion $\operatorname{Hom}(V, U) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(U, U)$ von Darstellungen. Nach Lemma 2.1.11 induziert diese Surjektion eine Surjektion auf den invarianten Vektoren $\operatorname{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow$

$\mathrm{Hom}(U,U)^{\mathfrak{g}}$. Für jedes Urbild $f \in \mathrm{Hom}(V,U)^{\mathfrak{g}}$ von $\mathrm{id}_U \in \mathrm{Hom}(U,U)^{\mathfrak{g}}$ gilt dann $V = U \oplus \ker f$. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis. □

Proposition 2.1.13. *Eine endlichdimensionale komplexe Liealgebra ist reduktiv genau dann, wenn jedes auflösbare Ideal bereits in ihrem Zentrum liegt.*

2.1.14. Mit Erweiterung des Grundkörpers folgt das für jede endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null.

Beweis. Nach 1.7.8 ist unsere Liealgebra $\mathfrak{g}$ genau dann reduktiv, wenn ihre adjungierte Darstellung halbeinfach ist. Daraus folgt einerseits, daß jedes Ideal eine Summe von irreduziblen Idealen ist, und andererseits, daß jedes Ideal ein Vektorraumkomplement besitzt, das auch ein Ideal ist. Folglich liegt jedes eindimensionalen Ideal im Zentrum und jedes auflösbare Ideal ist eine Summe von eindimensionalen Idealen und mithin zentral. Liegt umgekehrt jedes auflösbare Ideal im Zentrum, so ist $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ eine halbeinfache Unteralgebra und nach dem Satz von Weyl 2.1.6 ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Darstellung von $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$, also ist die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ halbeinfach, also ist $\mathfrak{g}$ reduktiv. □

Satz 2.1.15 (Kriterium für Halbeinfachkeit).

1. *Besitzt eine komplexe Liealgebra eine treue einfache endlichdimensionale Darstellung, so ist unsere Liealgebra reduktiv und ihr Zentrum ist höchstens eindimensional;*
2. *Operiert unsere Liealgebra außerdem auf besagter Darstellung nur durch Endomorphismen der Spur Null, so ist unsere Liealgebra halbeinfach.*

2.1.16. Insbesondere ist $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ reduktiv und $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ halbeinfach. Wollen wir nur den zweiten Teil des Satzes zeigen, so können wir im anschließenden Beweis sogar I abelsch annehmen und auf diese Weise ohne den Satz von Lie auskommen. Der Satz gilt mit demselben Beweis über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null.

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung reduktiver Liealgebren aus Übung 2.1.13 und müssen also zeigen, daß jedes auflösbare Ideal bereits im Zentrum liegt. Sei dazu $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und $I \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal und V unsere einfache treue Darstellung. Nach dem Satz von Lie 1.5.2 gibt es $v \in V$, $v \neq 0$ mit $Iv \subset \mathbb{C}v$. Natürlich finden wir $\lambda \in I^*$ mit $Xv = \lambda(X)v \ \forall X \in I$. Nach 1.5.4 ist dann V_λ eine Unterdarstellung von V, und da sie nicht null ist, folgt $V = V_\lambda$. Das Bild eines auflösbaren Ideals $I \subset \mathfrak{g}$ unter einer einfachen Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ in einem endlichdimensionalen Raum V liegt also stets in der Menge aller Vielfachen der Einheitsmatrix. Ist unsere Darstellung auch noch treu, so folgt $\dim I \leq 1$ und $[I,\mathfrak{g}] = 0$ und im Fall $\mathrm{tr}(\rho(I)|V) = 0$ sogar $I = 0$. □

Übungen

Übung 2.1.17. Für V eine Darstellung einer halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ versteht man unter dem **Casimir-Operator** mit einem bestimmten Artikel meist unser $C_\kappa : V \to V$ aus 2.1.8 für κ die Killingform. Man zeige als Übung, daß der Casimir-Operator der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ in einer Basis e, h, f wie in 1.1.34 gegeben wird durch den Ausdruck $(ef+fe)/4 + h^2/8 = fe/2 + h(h+2)/8$. Auf der $(n+1)$-dimensionalen einfachen Darstellung operiert er durch den Skalar $n(n+2)/8$, wie man auf den extremen Gewichtsräumen leicht nachrechnet.

Übung 2.1.18. Der Casimir-Operator einer endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null operiert als die Identität auf der adjungierten Darstellung.

2.2 Jordanzerlegung in halbeinfachen Liealgebren

2.2.1. In diesem Abschnitt wird die Jordanzerlegung in halbeinfachen Liealgebren eingeführt. Gilt es Verwechslungen zu vermeiden, so nennen wir sie die „absolute Jordanzerlegung“ im Gegensatz zur „konkreten Jordanzerlegung“ von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume, wie wir sie in [LA2] 3.3.1 betrachtet hatten. Im folgenden bezeichnet $x = x_\mathrm{s} + x_\mathrm{n}$ stets diese konkrete Jordanzerlegung von $x \in \operatorname{End} V$.

Satz 2.2.2 (**Jordanzerlegung in halbeinfachen Liealgebren**). *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra.*

1. *Jedes $x \in \mathfrak{g}$ besitzt genau eine Zerlegung $x = s + n$ mit $\operatorname{ad}(s)$ diagonalisierbar, $\operatorname{ad}(n)$ nilpotent und $[s, n] = 0$. Diese Zerlegung nennen wir im folgenden die* **absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$***;*

2. *Ist $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung und $x = s + n$ die absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$ die konkrete Jordanzerlegung von $\rho(x)$ in $\operatorname{End} V$. In Formeln gilt mithin $\rho(s) = \rho(x)_\mathrm{s}$ und $\rho(n) = \rho(x)_\mathrm{n}$;*

3. *Ist $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in eine weitere halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}'$ und $x = s + n$ die absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ die absolute Jordanzerlegung von $\phi(x)$ in $\mathfrak{g}'$.*

2.2.3. Teil 2 des vorhergehenden Satzes besagt, daß die absolute und die konkrete Jordanzerlegung in allen Zweifelsfällen übereinstimmen. Sobald der Satz bewiesen ist, dürfen wir es uns also erlauben, ohne weitere Spezifizierung einfach von der **Jordanzerlegung** zu reden. Im folgenden Beweis sind die Begriffe „halbeinfach“ und „nilpotent“ und „halbeinfacher Anteil“ sowie „nilpotenter Anteil“ stets im konkreten Sinne zu verstehen, also im Sinne von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume. Ihre auf Elemente abstrakter Liealgebren übertragene Bedeutung wird erst im Anschluß eingeführt. Dem eigentlichen Beweis des Satzes schicken wir zwei Lemmata voraus.

Lemma 2.2.4. *Jedes halbeinfache Ideal einer endlichdimensionalen komplexen Liealgebra besitzt ein Vektorraumkomplement, das auch ein Ideal ist.*

2.2.5. Unter einem halbeinfachen Ideal einer Liealgebra verstehen wir hierbei ein Ideal, das als Liealgebra halbeinfach ist.

Beweis. Sei D unsere Liealgebra und $\mathfrak{g} \subset D$ unser halbeinfaches Ideal. Wir betrachten bezüglich der Killing-Form κ von D das orthogonale Komplement I von $\mathfrak{g}$, also den Kern der Abbildung $D \to \mathfrak{g}^*, x \mapsto \kappa(x, \ )$. So ist $I \subset D$ ein Ideal und die Killing-Form von D verschwindet identisch auf $\mathfrak{g} \cap I$. Da $\mathfrak{g} \cap I$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, muß es nach 1.7.16 halbeinfach sein und mit 1.7.9 folgt $\mathfrak{g} \cap I = 0$. Dann erhalten wir jedoch mit Dimensionsbetrachtungen sofort $D = \mathfrak{g} \oplus I$. □

Ergänzung 2.2.6 (**Derivationen halbeinfacher Liealgebren**). Jede Derivation einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ ist eine innere Derivation. In der Tat sieht man leicht, daß für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ das Bild der adjungierten Darstellung ein Ideal $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$ ist. Nach 2.2.4 besitzt unter unseren Annahmen $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ein Vektorraumkomplement $I \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$, das sogar ein Ideal ist. Es folgt $\operatorname{ad}(d(X)) = [\operatorname{ad} X, d] = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ und so $d(X) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ alias $I = 0$ und

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$$

Ergänzung 2.2.7 (**Derivationen reduktiver Liealgebren**). Jede Derivation einer reduktiven Liealgebra über einem Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ in ihrer Darstellung $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}$ nach 1.7.18 ist von der Gestalt

$$(\operatorname{ad} X) \times L$$

für $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $L \in \operatorname{End}_k \mathfrak{z}$ beliebig. In der Tat besitzt wie in 2.2.6 das Bild der adjungierten Darstellung $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$ ein Vektorraumkomplement $I \subset \operatorname{Der}_k \mathfrak{g}$, das sogar ein Ideal ist. Es folgt $\operatorname{ad}(d(X)) = [\operatorname{ad} X, d] = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ und so $d(X) \in \mathfrak{z} \ \forall X \in \mathfrak{g}, d \in I$ und damit $d([X, Y]) = 0 \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ergänzung 2.2.8 (**Derivationen von Endomorphismenalgebren**). Gegeben ein Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ und ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathfrak{sl}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\operatorname{End}_k(V))$$

vermittels der Abbildungsvorschrift $X \mapsto \mathrm{ad}(X)$. In der Tat spezialisiert 1.1.38 zur recht banalen Erkenntnis $\mathrm{Der}_k(\mathrm{End}_k(V)) \subset \mathrm{Der}_k(\mathfrak{gl}(V))$ und 2.2.7 liefert unter Verwendung der offensichtlichen Zerlegung $\mathfrak{sl}(V) \times k\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(V)$ einen Isomorphismus $\mathrm{ad} \times \mathrm{mult} : \mathfrak{sl}(V) \times k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(\mathfrak{sl}(V) \times k\mathrm{id})$. Da aber Derivationen der Ringalgebra $\mathrm{End}_k(V)$ auf id verschwinden, folgt die Behauptung. Sie kann auch als infinitesimale Version von [?] **??** verstanden und davon ausgehend bewiesen werden.

Vorschau 2.2.9. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem Körper k sind auch ohne weitere Voraussetzungen alle Derivationen des Endomorphismenrings $\mathrm{End}_k V$ innere Derivationen. Wir geben ein Argument in [TG] 3.3.8. Man kann die Aussage in vielen Fällen auch als Konsequenz der Beschreibung der Automorphismengruppe des Endomorphismenrings nach [NAS] 3.5.12 verstehen. Diesen Zugang finde ich besonders transparent.

Lemma 2.2.10. *Seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Für die halbeinfachen und nilpotenten Anteile der konkreten Jordanzerlegung $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ eines Elements $x \in \mathfrak{g}$ gilt stets $x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}} \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Wir betrachten in $\mathfrak{gl}(V)$ den Teilraum $D := \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Es gilt } [y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} \text{ und für jede } \mathfrak{g}\text{-Unterdarstellung } W \subset V \text{ gilt } yW \subset W \text{ sowie } \mathrm{tr}(y|_W) = 0\}$. Nach Lemma 1.6.4 über die Jordanzerlegung von $\mathrm{ad}\, x$ und der Funktorialität der Jordanzerlegung [LA2] 3.3.8 folgt aus $y \in D$ schon $y_{\mathrm{s}}, y_{\mathrm{n}} \in D$. Es reicht also, $D = \mathfrak{g}$ zu zeigen. Offensichtlich ist D eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Wegen $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und da die Spur eines Kommutators stets verschwindet gilt $\mathfrak{g} \subset D$, und wegen der ersten Bedingung an Elemente von D ist $\mathfrak{g} \subset D$ sogar ein Ideal. Nach 2.2.4 finden wir dann ein Ideal $I \subset D$ mit $D = \mathfrak{g} \oplus I$ und insbesondere $[\mathfrak{g}, I] = 0$. Also operiert $y \in I$ auf jeder $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung $W \subset V$ durch einen $\mathfrak{g}$-Endomorphismus. Für W einfach ist also $y|_W$ ein Skalar, und mit $\mathrm{tr}(y|_W) = 0$ folgt $y|_W = 0$. Da V nach dem Satz von Weyl 2.1.6 direkte Summe einfacher $\mathfrak{g}$-Unterdarstellungen ist, folgt weiter $y = 0$, mithin $I = 0$ und $D = \mathfrak{g}$. □

Beweis von 2.2.2. 1. Man betrachte die konkrete Jordanzerlegung $\mathrm{ad}\, x = (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{s}} + (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{n}}$ von $\mathrm{ad}\, x$ in $\mathrm{End}\, \mathfrak{g}$. Nach Lemma 2.2.10 angewandt auf $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ gibt es $s, n \in \mathfrak{g}$ mit $\mathrm{ad}\, s = (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{s}}$, $\mathrm{ad}\, n = (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{n}}$. Das liefert die Existenz einer absoluten Jordanzerlegung $x = s + n$. Ist andererseits $x = s + n$ eine absolute Jordanzerlegung von x in $\mathfrak{g}$, so ist notwendig $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, s + \mathrm{ad}\, n$ die konkrete Jordanzerlegung von $\mathrm{ad}\, x$ in $\mathrm{End}\mathfrak{g}$. Das zeigt die Eindeutigkeit.

2. Sei $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung. Sicher kommutiert

das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x"] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} \rho(x)"] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}} \rho(x)"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, two heads] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \mathfrak{gl}(V) \end{tikzcd}$$

Nach der Funktorialität der konkreten Jordanzerlegung [LA2] 3.3.7 bleibt dies Diagramm kommutativ, wenn wir von allen Vertikalen den halbeinfachen Anteil nehmen im Sinne der konkreten Jordanzerlegung. Ebenso bleibt es natürlich kommutativ, wenn wir überall statt x unser s aus seiner absoluten Jordanzerlegung $x = s + n$ einsetzen. Die beiden so entstehenden Diagramme haben per definitionem dieselbe linke Vertikale $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x)_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} s$ und damit auch dieselbe mittlere Vertikale. Das liefert die erste Gleichung einer Gleichungskette

$$\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} \rho(s) = (\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} \rho(x))_{\mathrm{s}} = \mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(x)_{\mathrm{s}})$$

Um die zweite Gleichung zu zeigen, bemerken wir für die konkrete Jordanzerlegung die Identitäten $\mathrm{ad}(x_{\mathrm{s}}) = (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{s}}$ und $\mathrm{ad}(x_{\mathrm{n}}) = (\mathrm{ad}\, x)_{\mathrm{n}}$, die für jeden Endomorphismus x eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums aus unseren allgemeinen Überlegungen in 1.6.4 folgen. Wenden wir sie auf $\rho(x) \in \mathfrak{gl}(V)$ an und schränken das Resultat auf $\rho(\mathfrak{g})$ ein, ergibt sich die zweite Gleichung. Da schließlich $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})} : \rho(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\rho(\mathfrak{g}))$ eine Injektion ist, folgt aus unserer Gleichungskette dann wie gewünscht $\rho(s) = \rho(x)_{\mathrm{s}}$.

3. Sei $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von halbeinfachen Liealgebren und sei $x \in \mathfrak{g}$ gegeben mit Jordanzerlegung $x = s + n$. Betrachten wir die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ von $\mathfrak{g}'$, so folgt aus 2 angewandt auf $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} \circ \phi$ schon $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} \phi(s)$ halbeinfach sowie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} \phi(n)$ nilpotent. Die anderen Bedingungen $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ und $[\phi(s), \phi(n)] = 0$ für die Jordanzerlegung sind aber offensichtlich ebenfalls erfüllt. $\square$

Definition 2.2.11. Ein Element x einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **ad-halbeinfach** beziehungsweise **ad-nilpotent**, wenn $\mathrm{ad} x \in \mathrm{End} \mathfrak{g}$ halbeinfach beziehungsweise nilpotent ist. Bei halbeinfachen Liealgebren nennen wir diese Elemente auch oft kürzer nur **halbeinfach** beziehungsweise **nilpotent**. Bei der Jordanzerlegung $x = s + n$ in einer halbeinfachen Liealgebra nennt man s den **halbeinfachen Anteil** und n den **nilpotenten Anteil** von x.

2.2.12. Wie man schon im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ sieht, sind „die meisten“ Elemente einer halbeinfachen Liealgebra halbeinfach. Die nilpotenten Elemente ihrerseits bilden eine abgeschlossene Teilmenge hoher Kodimension, den sogenannten **nilpotenten Kegel**. Wir werden die äußerst interessante Geometrie des nilpotenten Kegels später noch ausführlich studieren.

Übungen

Übung 2.2.13. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra. Gegeben Elemente $x, y \in \mathfrak{g}$ mit $[x, y] = 0$ gilt $(x+y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{s}}$ und $(x+y)_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}} + y_{\mathrm{n}}$.

Übung 2.2.14. Man zeige, daß jede halbeinfache komplexe Liealgebra auch reguläre halbeinfache Elemente besitzt. Hinweis: 1.1.33. Leser mit Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie zeigen das allgemeiner über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

2.3 Wurzelraumzerlegung

2.3.1. Ich erinnere an die simultane Eigenraumzerlegung aus [LA2] 7.8.10. Seien genauer V ein Vektorraum und $T \subset \operatorname{End} V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Abbildungen besteht. So besitzt V unter T eine **simultane Eigenraumzerlegung**

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda$$

in die **simultanen Eigenräume** $V_\lambda := \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \forall x \in T\}$. Diese Aussage gilt offensichtlich analog, wenn wir allgemeiner eine lineare Abbildung $T \to \operatorname{End} V$ betrachten, deren Bild die entsprechenden Eigenschaften hat. Die Menge $\mathrm{P}(V) := \{\lambda \in T^* \mid V_\lambda \neq 0\}$ heißt dann die Menge der **Gewichte von** V und V_λ heißt der **Gewichtsraum zu** λ. Die Wahl des Buchstabens P geht auf französisch **poids** zurück.

Beispiel 2.3.2. Wir betrachten in der Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; k)$ die Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ aller Diagonalmatrizen. So ist das Bild von $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{h} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ und simultane Diagonalisierbarkeit 2.3.1 liefert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{mit } \mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \lambda(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

Für $h = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n)$ in $\mathfrak{h}$ und E_{ij} die Standardmatrix mit einer 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und Nullen sonst haben wir offensichtlich $[h, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij}$. Erklären wir also $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ als diejenige Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so ergibt sich

$$[h, E_{ij}] = \big((\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)\big) E_{ij}$$

und damit $\mathrm{P}(\mathfrak{g}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ als Menge von Gewichten. Wir haben also $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und unter der Annahme $\operatorname{char} k \neq 2$ sind die anderen Gewichtsräume die Geraden kE_{ij} mit $i \neq j$. In Charakteristik Zwei sind dahingegen die anderen Gewichtsräume die zweidimensionalen Unterräume mit Basis E_{ij}, E_{ji} für $i < j$.

Definition 2.3.3. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt eine **Cartan'sche Unteralgebra**, wenn $\mathfrak{h}$ erstens abelsch ist, zweitens nur aus halbeinfachen Elementen von $\mathfrak{g}$ besteht, und wenn es drittens maximal ist bezüglich Inklusion unter allen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, die die beiden ersten Eigenschaften haben.

Beispiel 2.3.4. In der Liealgebra $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ bilden die Diagonalmatrizen eine Cartan'sche Unteralgebra.

Ergänzung 2.3.5. Im Fall einer halbeinfachen komplexen Liealgebra ist eine Cartan'sche Unteralgebra eine „algebraische Version" des Begriffs eines maximalen Torus im Fall einer algebraischen Gruppe, vergleiche 2.6.5, oder einer kompakten Liegruppe, vergleiche [ML] 5.1.10.

Ergänzung 2.3.6. Im allgemeinen versteht man unter einer Cartan'schen Unteralgebra einer beliebigen endlichdimensionalen Liealgebra eine nilpotente Unteralgebra, die ihr eigener „Normalisator" ist. Mehr dazu wird in 2.5 diskutiert. Insbesondere besprechen wir dort, warum diese Bedingung im halbeinfachen Fall zu der hier gegebenen Definition äquivalent ist.

Ergänzung 2.3.7. Eine Liealgebra, die nur aus ad-halbeinfachen Elementen besteht, ist stets abelsch: Sonst gäbe es nämlich x mit $\mathrm{ad}\, x \neq 0$, also gäbe es $y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, x)(y) = \lambda y$, es folgte $(\mathrm{ad}\, y)(x) \neq 0$ aber $(\mathrm{ad}\, y)^2(x) = 0$, und dann könnte y nicht ad-halbeinfach sein. In 2.3.3 war mithin die erste Bedingung überflüssig. Ich habe sie nur aus didaktischen Gründen mit dazugenommen.

Definition 2.3.8 (Wurzelraumzerlegung). Seien $\mathfrak{g}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra. Wir benutzen die in unserer Theorie übliche Notation $\lambda(h) = \langle \lambda, h \rangle$ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$. Nach 2.3.1 gilt $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ mit $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Wir setzen

$$\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0 \text{ und } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\} = \mathrm{P}(\mathfrak{g}) \backslash 0$$

und haben also eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$

Die endliche Teilmenge $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ heißt das **Wurzelsystem** von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$, seine Elemente heißen die **Wurzeln**, und die simultanen Eigenräume $\mathfrak{g}_\alpha$ heißen die **Wurzelräume**.

Ergänzung 2.3.9. Die Terminologie rührt daher, daß die Eigenwerte eines Endomorphismus die Wurzeln seines charakteristischen Polynoms sind. Auf französisch heißt das Wurzelsystem **système de racines**, daher der Buchstabe R.

2.3.10. Insbesondere ist hier $\mathfrak{g}_0$ genau der Zentralisator $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0 \; \forall h \in \mathfrak{h}\}$ unserer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.

Beispiel 2.3.11 (**Das Wurzelsystem im Typ A_n**). Ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Unteralgebra aller Diagonalmatrizen mit Spur Null und bezeichnet weiter $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Linearform, die einer Diagonalmatrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so haben wir $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ und $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C} E_{ij}$ für $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Man beachte jedoch, daß die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nicht linear unabhängig sind in $\mathfrak{h}^*$, denn die Cartan'sche $\mathfrak{h}$ besteht ja nur aus Diagonalmatrizen mit Spur Null und hat mithin die Dimension $\dim \mathfrak{h} = n - 1$. Die Bezeichnung A_n ist die Standardbezeichnung für dieses „Wurzelsystem" in der „Theorie der Wurzelsysteme".

Satz 2.3.12 (über die Wurzelraumzerlegung). *Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ verwenden wir wie zuvor für den zugehörigen Gewichtsraum die Notation $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \; \forall h \in \mathfrak{h}\}$. So gilt:*

1. *Unsere Cartan'sche ist ihr eigener Zentralisator, in Formeln $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$;*
2. *Alle Wurzelräume sind eindimensional und es gibt sogar für jede Wurzel $\alpha \in R$ einen injektiven Homomorphismus $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ von Liealgebren mit*
$$\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{-\alpha} \text{ und } \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h};$$
3. *Das Negative einer Wurzel ist stets eine Wurzel, aber kein anderes Vielfaches einer Wurzel ist wieder eine Wurzel. In Formeln gilt für jede Wurzel $\alpha \in R$ demnach $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$;*
4. *Für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

2.3.13. Wir zeigen die verschiedenen Teile dieses Satzes der Reihe nach, unterbrochen durch einige Lemmata. Teil 4 wird im Beweis von 2.3.19 mit erledigt.

Lemma 2.3.14. 1. *Es gilt $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \; \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$;*

2. *Für die Killing-Form κ von $\mathfrak{g}$ gilt $\kappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0$ falls $\lambda \neq -\mu$;*
3. *Die Einschränkung der Killingform κ auf $\mathfrak{g}_0$ ist nicht ausgeartet;*
4. *Für alle Gewichte $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ induziert die Killingform eine nichtausgeartete Paarung $\kappa : \mathfrak{g}_\lambda \times \mathfrak{g}_{-\lambda} \to \mathbb{C}$;*

Beweis. Aus $[h,x] = \lambda(h)x$ und $[h,y] = \mu(h)y$ folgt mit der Jacobi-Identität $[h,[x,y]] = (\lambda(h)+\mu(h))[x,y]$. Das zeigt Teil 1. Aus $x \in \mathfrak{g}_\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_\mu$ folgt für jedes $\nu \in \mathfrak{h}^*$ nach dem ersten Teil $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))(\mathfrak{g}_\nu) \subset \mathfrak{g}_{\nu+\lambda+\mu}$. Falls $\lambda + \mu \neq 0$ ist also $((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ nilpotent und es folgt $\operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)) = \kappa(x,y) = 0$ und damit Teil 2. Für $z \in \mathfrak{g}_0$ gilt schließlich schon mal $\kappa(z, \mathfrak{g}_\alpha) = 0\ \forall \alpha \in R$ nach Teil 2. Gilt auch noch $\kappa(z, \mathfrak{g}_0) = 0$, so folgt $\kappa(z, \mathfrak{g}) = 0$ und damit $z = 0$, da nach 1.7.9 die Killingform einer halbeinfachen Liealgebra nicht ausgeartet ist. Für $z \in \mathfrak{g}_\lambda$ gilt allgemeiner $\kappa(z, \mathfrak{g}_\mu) = 0\ \forall \mu \neq -\lambda$ nach Teil 2. Gilt auch noch $\kappa(z, \mathfrak{g}_{-\lambda}) = 0$, so folgt $\kappa(z, \mathfrak{g}) = 0$ und damit $z = 0$ nach 1.7.9. □

Beweis von 2.3.12.1. Gegeben $x \in \mathfrak{g}_0$ verschwindet sicher $\operatorname{ad} x$ auf $\mathfrak{h}$. Ist $x = s + n$ seine Jordanzerlegung in $\mathfrak{g}$, so verschinden nach der Funktorialität der Jordanzerlegung [LA2] 3.3.7 auch $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} s = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)_\mathrm{s}$ und $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} n = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)_\mathrm{n}$ auf $\mathfrak{h}$. Folglich enthält $\mathfrak{g}_0$ mit x auch die halbeinfachen und nilpotenten Anteile s und n von x. Aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{h}$ und da die Summe zweier kommutierender halbeinfacher Elemente auch selbst wieder halbeinfach ist, liegt der halbeinfache Anteil s jedes Elements x aus dem Zentralisator $\mathfrak{g}_0$ von $\mathfrak{h}$ sogar schon selbst in $\mathfrak{h}$. Damit ist $\mathfrak{g}_0$ nilpotent, denn für jedes $x \in \mathfrak{g}_0$ ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} n : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ nilpotent auf $\mathfrak{g}_0$ und wir können den Satz von Engel 1.4.18 auf die Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ anwenden. Mit dem Satz von Lie oder genauer seinem Korollar 1.5.6 folgt, daß in einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ alle $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$ für $x \in \mathfrak{g}_0$ durch obere Dreiecksmatrizen gegeben werden. Ist nun $z \in \mathfrak{g}_0$ gegeben mit $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} z$ nilpotent, so muß $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} z$ in dieser Basis sogar eine echte obere Dreiecksmatrix sein. Es folgt $\kappa(z, \mathfrak{g}_0) = 0$ und damit $z = 0$ nach Lemma 2.3.14. Also besteht $\mathfrak{g}_0$ aus $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}$-halbeinfachen Elementen, und wir wissen ja bereits seit dem Anfang des Beweises, daß alle $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}$-halbeinfachen Elemente von $\mathfrak{g}_0$ bereits in $\mathfrak{h}$ liegen. □

Lemma 2.3.15. *Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ und α verschwindet nicht auf der Gerade $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$.*

Beweis. Seien $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $h \in \mathfrak{h}$. So gilt

$$\kappa(h, [x,y]) = \kappa([h,x], y) = \alpha(h)\kappa(x,y)$$

oder anders ausgedrückt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp \supset \ker \alpha$, wo das orthogonale Komplement bezüglich der Restriktion der Killing-Form auf $\mathfrak{h}$ zu verstehen ist. Da diese Restriktion nach 2.3.14 nicht ausgeartet ist, folgt $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1$. Können wir zusätzlich zeigen, daß es $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gibt mit $\alpha([x,y]) \neq 0$, so sind wir fertig. Andernfalls aber würden x, y und $[x,y]$ stets eine nilpotente, mithin auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ aufspannen. In einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ würden nach dem Satz von Lie 1.5.6 also $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$ und $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} y$ durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt, ja sogar durch echte obere Dreiecksmatrizen, da sie nilpotent sind. Es folgte $\kappa(x,y) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ im Widerspruch zu 2.3.14. □

Definition 2.3.16. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Wir erklären für jede Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein Element

$$\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$$

durch die beiden Bedingungen $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.

Vorschau 2.3.17. Wir werden bald lernen, daß das Bild von unserem $\alpha^\vee$ unter dem Bidualitätsisomorphismus $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^{**}$ die Bedingungen erfüllt, die im „abstrakten Wurzelsystem" $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ die „Kowurzel zur Wurzel α" charakterisieren.

Beweis von 2.3.12.2&3. Aus der Definition folgt sofort $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$. Natürlich finden wir stets $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x, y] = \alpha^\vee$, und dann gilt $[\alpha^\vee, x] = 2x$ und $[\alpha^\vee, y] = -2y$, da ja ganz allgemein gilt $[h, x] = \alpha(h)x = \langle \alpha, h \rangle x$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ und ähnlich für y. Somit spannen $x, \alpha^\vee, y$ eine zu $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha$ von $\mathfrak{g}$ auf, ja es gibt einen Isomorphismus von Liealgebren $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha$ mit

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x, \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto y \quad \text{und } \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \alpha^\vee.$$

Vermittels $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ wird $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}^\alpha$. Nach der Definition von $\alpha^\vee$ ist $\mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$ darin eine Unterdarstellung und diese zerfällt nach dem Satz von Weyl 2.1.6 in $\mathfrak{g}^\alpha$ und ein Komplement V. Da $\alpha^\vee$ auf $V \subset \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$ durch eine invertierbare Abbildung operiert, da in anderen Worten der Null-Eigenraum von $\alpha^\vee$ in V verschwindet, folgt mit unserem Satz 1.2.14 über einfache Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ aus $V \neq 0$ schon, daß der Eins-Eigenraum von $\alpha^\vee$ nicht verschwindet, in Formeln $\mathfrak{g}_{\alpha/2} \neq 0$ alias $\alpha/2 \in R$. Für alle Wurzeln α mit der Eigenschaft $\alpha/2 \notin R$ gelten also 2 und 3, und damit gelten sie notwendig für alle Wurzeln. □

2.3.18. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null. Eine Teilmenge $R \subset V$ heißt wie in [SPW] 2.1.2 ein **abstraktes reduziertes Wurzelsystem** oder kurz ein **abstraktes Wurzelsystem**, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Menge R ist endlich, erzeugt V und enthält nicht den Nullvektor;
2. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine lineare Abbildung $s : V \to V$ mit $s(\alpha) = -\alpha$, $s(R) \subset R$ und $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \;\; \forall \beta \in R$;
3. Außer dem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel.

Lassen wir die letzte Bedingung fallen, so sprechen wir von einem **nicht notwendig reduzierten Wurzelsystem**. Die Abbildung s im zweiten Teil ist wohldefiniert, denn ist t eine weitere Möglichkeit, so folgt erst $\mathrm{im}(ts - \mathrm{id}) \subset k\alpha$ und dann

$(ts - \mathrm{id})^2 = 0$ und damit ist ts unipotent. Andererseits aber permutiert ts die Wurzeln und hat folglich endliche Ordnung, und beides zusammen zeigt $ts = \mathrm{id}$ und speziell $s^2 = \mathrm{id}$ und dann $s = t$. Wir schreiben dann $s = s_\alpha$ und nennen s_α die **Wurzelspiegelung zu** α. Das Element $\alpha^\vee \in V^*$ mit $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ heißt die **Kowurzel** zu α. Die Fixpunktmenge einer Wurzelspiegelung s_α alias der Kern der zugehörigen Kowurzel heißt der **Spiegel** unserer Wurzelspiegelung. Die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe $W \subset \mathrm{GL}(V)$ heißt die **Weylgruppe** unseres Wurzelsystems.

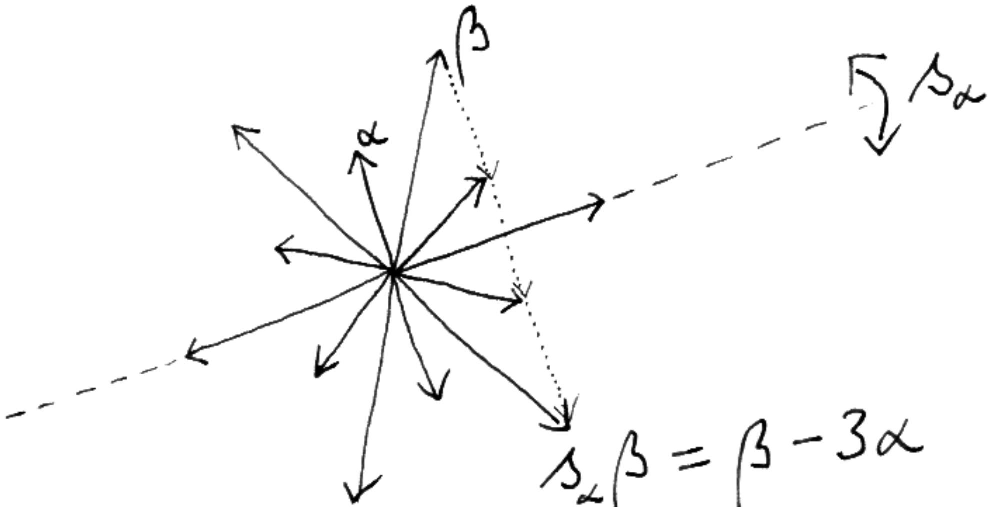
Satz 2.3.19 (Wurzelsystem einer halbeinfachen Liealgebra). *Gegeben $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen ist*

$$\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

ein reduziertes abstraktes Wurzelsystem im Sinne unserer Definition 2.3.18 und für alle Wurzeln α bildet der Bidualitätsisomorphismus $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^{**}$ unser $\alpha^\vee$ aus 2.3.16 auf die Kowurzel zu α im Sinne abstrakter Wurzelsysteme 2.3.18 ab.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ganz $\mathfrak{h}^*$ erzeugt. Dazu reicht es zu zeigen, daß gilt $\bigcap_{\alpha \in R} \ker \alpha = 0$. Sei also $h \in \mathfrak{h}$ gegeben mit $\alpha(h) = 0 \quad \forall \alpha \in R$. So gilt $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ für alle $\alpha \in R$, und da eh gilt $[h, \mathfrak{h}] = 0$, ergibt sich $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und damit $h = 0$, da das Zentrum einer halbeinfachen Liealgebra Null ist. Nun betrachten wir für jede von einer vorgegebenen Wurzel α linear unabhängige Wurzel $\beta \neq \pm\alpha$ den Teilraum $T := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + i\alpha}$ von $\mathfrak{g}$. Er ist eine $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellung von $\mathfrak{g}$, alle Eigenräume $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ von $\alpha^\vee$ sind höchstens eindimensional nach 2.3.12.2, und $\alpha^\vee$ operiert auf $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ durch den Eigenwert $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2i$. Aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}^\alpha$ wissen wir nach 1.2.14 aber schon, daß $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ alias unser $\alpha^\vee$ aus 2.3.16 auf einer endlichdimensionalen Darstellung nur ganzzahlige Eigenwerte haben kann und daß mit n auch $-n$ ein Eigenwert sein muß. Insbesondere ist $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ganzzahlig und der Eigenwert $-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ kommt auch vor, als da heißt, der Wurzelraum $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ mit $i = -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ ist nicht Null. Erklären wir also s_α durch $s_\alpha(\lambda) := \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, so hat s_α alle von einer Wurzelspiegelung geforderten Eigenschaften und wir folgern, daß in der Tat R ein abstraktes Wurzelystem ist und $\alpha^\vee$ unter dem Bidualitätsisomorphismus der Kowurzel zu α entspricht. Daß dies Wurzelsystem reduziert ist, wissen wir bereits aus 2.3.12.3. □

Beweis von 2.3.12.4. Da alle Eigenräume von $\alpha^\vee$ in unserem T aus dem Beweis von eben eindimensional sind und da die Eigenwerte entweder alle gerade oder alle ungerade sind, muß T sogar eine einfache Darstellung von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ sein. Aus unserer expliziten Beschreibung dieser einfachen Darstellungen in 1.2.14 folgt dann $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ falls gilt $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ und damit 2.3.12.4. □



$$s_\alpha \beta = \beta - 3\alpha$$

$$\rightsquigarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 3$$

Die Wurzelspiegelung zu einer Wurzel

2.3.20. Unter einem **Morphismus von Wurzelsystemen** über einem vorgegebenen Körper versteht man eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Vektorräumen, unter der jede Wurzel auf eine Wurzel oder auf Null abgebildet wird.

Satz 2.3.21 (**Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren**). *Ordnen wir jeder komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ zu, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe halbeinfache} \\ \textit{Liealgebren} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe reduzierte} \\ \textit{Wurzelsysteme} \end{array} \right\} \\ \\ \mathfrak{g} & \mapsto & \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \end{array}$$

2.3.22. Der Beweis wird uns eine Weile beschäftigen. Zunächst zeigen wir in 2.4.5, daß die Abbildung im Satz insoweit wohldefiniert ist, als je zwei Cartan'sche zu isomorphen Wurzelsystemen führen. Die Injektivität und Surjektivität werden erst in 3.4.12 als Korollar von 3.4.4 gezeigt werden.

2.3.23. Derselbe Satz gilt mit demselben Beweis, wenn wir statt über den komplexen Zahlen über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null arbeiten.

Vorschau 2.3.24. In [SPW] 2.1.16 zeigen wir, daß für jeden Körper k der Charakteristik Null die Erweiterung der Skalare $k \otimes_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert zwischen der Kategorie de Wurzelsysteme über $\mathbb{Q}$ und der Kategorie de Wurzelsysteme über k.

Übungen

Übung 2.3.25. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Man zeige: Die Kowurzeln $\alpha^\vee$ spannen $\mathfrak{h}$ auf. Bezeichnet $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ den von den Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$, so gilt $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. Bezeichnet $(\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{Q}}$ den von den Wurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}^*$, so gilt $\dim_{\mathbb{Q}} (\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$ und das Einschränken identifiziert $(\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{Q}}$ mit dem Dualraum $(\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}})^*$ von $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, so daß wir ohne Mehrdeutigkeiten fürchten zu müssen schlicht $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ schreiben dürfen. Hinweis: 2.3.28.

Übung 2.3.26 (**Rationalität und Positivität der Killingform**). Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Bezeichne $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ den von allen Kowurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}$. Man zeige, daß für $h, t \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ gilt $\kappa(h, t) \in \mathbb{Q}$ und daß κ positiv definit ist auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, also $\kappa(h, h) \leq 0 \Rightarrow h = 0$. Einen alternativen Beweis der Positivität im Fall der komplexifizierten Liealgebra einer kompakten Liegruppe mit der komplexifizierten Liealgebra eines maximalen Torus als Cartan'scher findet man in [ML] 5.5.19.

Ergänzung 2.3.27. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ eine Wurzel. Für $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ folgt aus dem Beginn des Beweises von 2.3.15 leicht $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee)/2$. Da hier die rechte Seite positiv und rational ist nach 2.3.26, gilt für beliebige $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ immer noch $[x, y] \in \kappa(x, y)\mathbb{Q}_{>0}\alpha^\vee$.

Übung 2.3.28. Seien $k \subset K$ Körper. Sei V ein K-Vektorraum, $R \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem von V und $L \subset V^*$ ein endliches Erzeugendensystem seines Dualraums. Gilt $\langle \lambda, \alpha \rangle \in k$ für alle $\lambda \in L$ und $\alpha \in R$, so haben wir $\dim_k \langle R \rangle_k = \dim_K V = \dim_k \langle L \rangle_k$ für die Erzeugnisse von R beziehungsweise L über k und die Einschränkung identifiziert $\langle L \rangle_k$ mit dem Dualraum von $\langle R \rangle_k$.

Übung 2.3.29. Die bezüglich Inklusion maximalen auflösbaren Unteralgebren einer Liealgebra heißen ihre **Borel'schen Unteralgebren** oder **Borel'schen**. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem. Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Systeme } R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ von} \\ \text{positiven Wurzeln} \end{array} \right\} \overset{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{Borelsche Unteralgebren,} \\ \text{die } \mathfrak{h} \text{ umfassen} \end{array} \right\}$$

erhalten durch die Vorschrift $R^+ \mapsto \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Übung 2.3.30 (**Wurzelketten**). Sei $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem einer komplexen halbeinfachen Liealgebra. Man zeige: Für Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ ist $\{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in $\mathbb{Z}$.

Übung 2.3.31 (**Wurzelsystem vom Typ C_n**). Die Liealgebra $\mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$ besteht nach 1.1.25 aus allen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A^\top = -D$, $B^\top = B$ und $C^\top = C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} + E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B.

Übung 2.3.32 (**Wurzelsystem vom Typ D_n**). Die Liealgebra $\mathfrak{so}(2n; \mathbb{C})$ aus 1.1.15 besteht aus allen Blockmatrizen derselben Gestalt wie in der vorhergehenden Übung mit $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Darin bilden die Diagonalmatrixen $\operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$ eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Bezeichnet $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$

die Abbildung, die einer Matrix ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Erzeuger der Wurzelräume sind die Matrizen mit $A = -D^\top = E_{ij}$ für $i \neq j$ und $B = C = 0$, mit $B = E_{ij} - E_{ji}$ und $C = A = D = 0$ sowie analog mit C statt B. Man zeige, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von der Änderung einer geraden Zahl von Vorzeichen besteht. Mehr zu diesem Wurzelsystem wird in [**?**] **??** und [SPW] 2.2.17 diskutiert.

Übung 2.3.33 (**Wurzelsystem vom Typ** B_n). Die Liealgebra $\mathfrak{so}(2n+1;\mathbb{C})$ aus 1.1.15 besteht aus allen Blockmatrizen

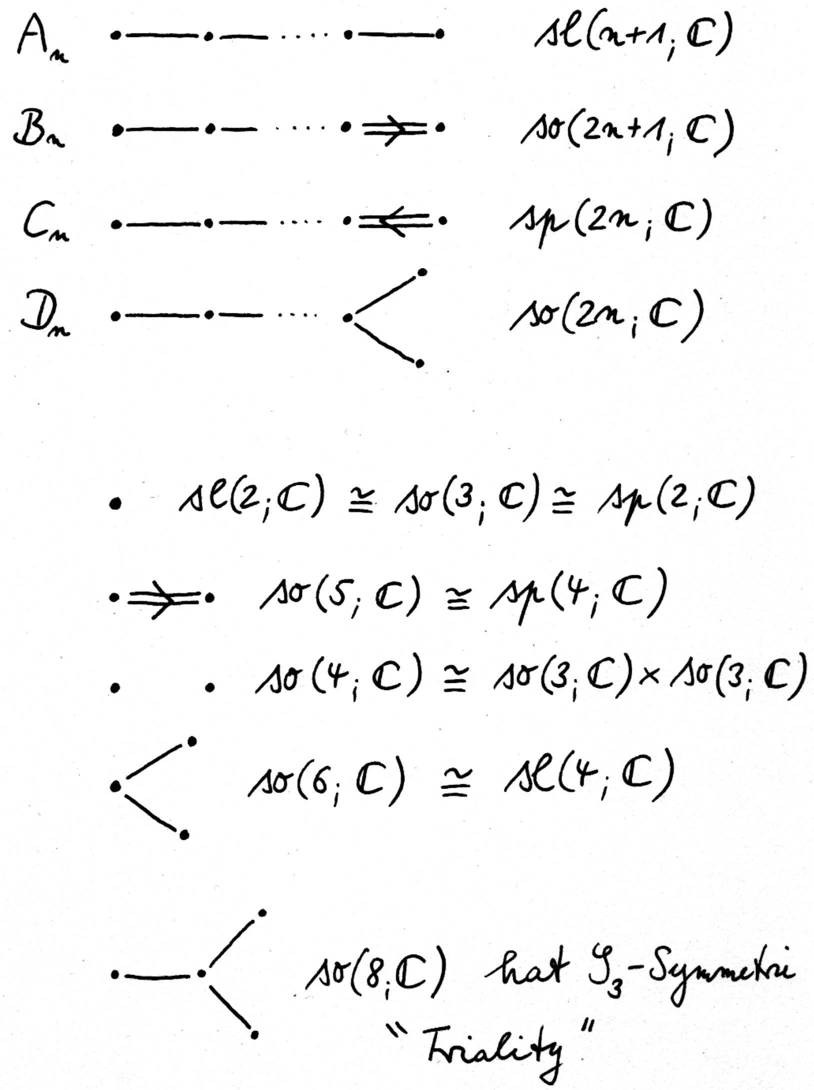
$$\begin{pmatrix} a & u & v \\ w & A & B \\ s & C & D \end{pmatrix}$$

mit $a = 0$, $u^\top = -s$, $v^\top = -w$, $A^\top = -D$, $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}$ bilden die Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(0, h_1, \ldots, h_n, -h_1, \ldots, -h_n)$. Erklären wir Linearformen $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift, daß sie einer Matrix ihren $(i+1)$-ten Diagonaleintrag zuordnen, so bilden die ε_i für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ und wir erhalten als Wurzelsystem

$$R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Man zeige, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von einer beliebigen Änderung der Vorzeichen besteht. Mehr zu diesem Wurzelsystem wird in [**?**] **??** und [SPW] 2.2.17 diskutiert.

Ergänzende Übung 2.3.34 (**Unterliealgebren zu Unterwurzelsystemen**). Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem und $R' \subset R$ eine Teilmenge, die in ihrem Erzeugnis selbst ein Wurzelsystem ist und die Eigenschaft hat, daß die Summe von zwei Wurzeln aus R', wenn sie denn in R liegt, bereits in R' liegen muß. So ist $\mathfrak{g}' := \sum_{\alpha \in R'} (\mathfrak{g}_\alpha + \mathbb{C}\alpha^\vee)$ eine halbeinfache Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit Cartan'scher $\mathfrak{h}' := \sum_{\alpha \in R'} \mathbb{C}\alpha^\vee$ und die Restriktion von Linearformen auf $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ induziert eine Bijektion $R' \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$. Hinweis: Man zerlege R' mit [SPW] 2.2.14 in unzerlegbare Wurzelsysteme und zeige mithilfe der Existenz höchster Wurzeln [SPW] 2.5.6 und von Wurzelwegen dorthin im Sinne von [SPW] 2.3.10, daß unzerlegbare Wurzelsysteme einfache Liealgebren liefern.



Hier wurde jeder halbeinfachen Liealgebra ein Wurzelsystem zugeordnet, wenn auch die Bijektivität auf Isomorphieklassen dieser Zuordnung 2.3.21 noch nicht fertig bewiesen ist. In [SPW] 2.3.7 wird andererseits eine Bijektion auf Isomorphieklassen zwischen Wurzelsystemen und sogenannten Dynkindiagrammen konstruiert. Obiges Bild stellt die Verknüpfung dieser beidem Bijektionen im Spezialfall der klassischen Liealgebren dar und zeigt, wie naheliegend in diesem Rahmen unsere Ausnahme-Isomorphismen sind. Unter „triality“ versteht man eine Operation der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ auf der Liealgebra $\mathfrak{so}(8;\mathbb{C})$. Sie wird erst im Rahmen der Konstruktion der Liealgebra zu einem Wurzelsystem durch Erzeuger und Relationen 3.4.4 offensichtlich werden.

2.4 Konjugiertheit von Cartan'schen

Definition 2.4.1. Ein Endomorphismus δ einer abelschen Gruppe V heißt **lokal nilpotent**, wenn es für jedes $v \in V$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\delta^N v = 0$. Ist V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, so definieren wir für $\delta : V \to V$ linear lokal nilpotent eine lineare Abbildung $\exp \delta : V \to V$ durch die Exponentialreihe

$$(\exp \delta)(v) := \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n v}{n!} = v + \delta v + \frac{\delta^2 v}{2} + \frac{\delta^3 v}{3!} + \dots$$

Lemma 2.4.2 (Exponential lokal nilpotenter Endomorphismen). *Seien Vektorräume V, W über einem Körper der Charakteristik Null gegeben.*

1. *Für $0 \in \operatorname{End} V$ haben wir stets $\exp(0) = \mathrm{id}$. Sind weiter δ und δ' kommutierende lokal nilpotente Endomorphismen von V, so ist auch $\delta + \delta'$ lokal nilpotent und es gilt $\exp(\delta + \delta') = (\exp \delta) \circ (\exp \delta')$. Insbesondere gilt dann $\exp(-\delta) = (\exp \delta)^{-1}$;*

2. *Ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & W \arrow[d, "\delta'"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

   mit lokal nilpotenten Vertikalen bleibt kommutativ, wenn wir auf beide Vertikalen $\exp$ anwenden. Insbesondere haben wir für f invertierbar die Identität $\exp(f \delta f^{-1}) = f (\exp \delta) f^{-1}$;

3. *Ist $\delta : V \to V$ nilpotent, so ist auch die zugehörige transponierte Abbildung $\delta^\top : V^* \to V^*$ nilpotent und es gilt $\exp(\delta^\top) = (\exp \delta)^\top$.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. Man benutze für die erste Aussage die Identität $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$ im Ring der formalen Potenzreihen in zwei Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Man beachte auch, daß die letzte Aussage für nur lokal nilpotentes δ nicht mehr gilt. □

Lemma 2.4.3 (Exponential lokal nilpotenter Derivationen). *Gegeben ein Körper k der Charakteristik Null, eine k-Algebra A und eine lokal nilpotente Derivation $\delta : A \to A$ von A ist $\exp(\delta)$ ein Algebrenautomorphismus von A.*

2.4.4. Gegeben ein ad-nilpotentes Element x einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem Körper der Charakteristik Null ist insbesondere $\exp(\operatorname{ad} x)$ stets ein Liealgebren-Automorphismus.

Beweis mit Tensorprodukt. Bezeichne $m : A \otimes A \to A$ die Multiplikation in unserer Algebra. Ist δ eine Derivation, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ {\scriptstyle \delta\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

Ist δ lokal nilpotent, so auch $\delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \delta$. Unser Diagramm kommutiert dann auch noch, wenn wir $\exp$ auf beide vertikalen Abbildungen anwenden. Da $\delta \otimes \mathrm{id}$ und $\mathrm{id} \otimes \delta$ kommutieren, folgt $\exp(\delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \delta) = \exp(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \exp(\mathrm{id} \otimes \delta) = \exp \delta \otimes \exp \delta$. □

Beweis ohne Tensorprodukt. Aus $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ folgt induktiv wie beim Beweis der binomischen Formel erst $\delta^n(ab) = \sum_i \binom{n}{i} \delta^i(a)\delta^{n-i}(b)$ und dann

$$(\exp \delta)(ab) = \sum_{i,j} \frac{\delta^i(a)}{i!} \frac{\delta^j(b)}{j!} = (\exp \delta)(a)\ (\exp \delta)(b)$$ □

Satz 2.4.5 (Konjugiertheit von Cartan'schen). *Gegeben eine halbeinfache komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit zwei Cartan'schen $\mathfrak{h}, \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ gibt es stets einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$.*

Ergänzung 2.4.6. Der Beweis zeigt sogar, daß je zwei Cartan'sche konjugiert sind unter der Untergruppe $G \subset \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ in der Automorphismengruppe unserer Liealgebra, die von den $\exp(\mathrm{ad}\, x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent erzeugt wird.

2.4.7. Wir geben für diesen Satz zwei Beweise. Der Erste funktioniert über jedem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, setzt aber Kenntnisse in algebraischer Geometrie voraus. Der Zweite funktioniert funktioniert nur über dem Körper der komplexen Zahlen und ist weniger übersichtlich, benötigt aber weniger Vorkenntnisse. Ein noch allgemeinerer Satz über Cartan'schen in beliebigen endlichdimensionalen Liealgebren wird in 2.5.6 bewiesen.

Beweis mit algebraischer Geometrie. Das Komplement der Kerne aller Wurzeln in einer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ heißt der „reguläre Anteil" der besagten Cartan'schen und wird notiert als

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} := \mathfrak{h} \backslash \bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \ker \alpha$$

Sicher ist $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ Zariski-offen in $\mathfrak{h}$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{h} = \ker(\mathrm{ad}\, h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$ für alle $h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_\alpha \times \ldots \times \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, \ldots, y, h) & \mapsto & \exp(\mathrm{ad}\, x) \ldots \exp(\mathrm{ad}\, y) h \end{array}$$

mit dem Produkt über alle Wurzeln in einer beliebigen, aber für die Dauer dieses Beweises fest gewählten Reihenfolge hat nun surjektives, ja bijektives Differential an allen Tupeln der Gestalt $(0, \ldots, 0, h)$. Nach dem differentiellen Dominanzkriterium, das wir in 2.4.8 in der hier benötigten Form zitieren, umfaßt folglich das Bild unserer Abbildung eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Analoges gilt für unsere zweite Cartan'sche $\mathfrak{k}$. Folglich treffen sich die zugehörigen Bilder und wir finden $h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}, k \in \mathfrak{k}_{\mathrm{reg}}$ und $\sigma, \tau \in G$ mit $\sigma(h) = \tau(k)$ alias $\tau^{-1}\sigma : h \mapsto k$. Daraus folgt aber sofort $(\tau^{-1}\sigma)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$. $\square$

Beweis im Komplexen ohne algebraische Geometrie. Sei $\mathfrak{g}$ unsere halbeinfache komplexe Liealgebra und

$$r := \min\{\dim_{\mathbb{C}}(\ker(\operatorname{ad} x)) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

Nach Übung [AN2] 8.5.22 zu Nullstellen polynomialer Funktionen und [LA1] 6.4.13 ist $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim_{\mathbb{C}}(\ker(\operatorname{ad} x)) = r\}$ offen und dicht in $\mathfrak{g}$, diesmal für die analytische Topologie. Wie bei unserem ersten Beweis sehen wir, diesmal mit dem Umkehrsatz [AN2] 4.1.2, daß andererseits für jede Cartan'sche $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Menge $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ offen ist in $\mathfrak{g}$. Mithin trifft $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ eine Konjugierte jeder Cartan'schen und damit dann auch jede Cartan'sche $\mathfrak{h}$. Es folgt sofort $r = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. Nun ist das charakteristische Polynom $\chi(\operatorname{ad} x) \in \mathbb{C}[T]$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ durch T^r teilbar. Die Diskriminante D nach [AL] 2.9.13 des Quotienten $\chi(\operatorname{ad} x)/T^{r-1}$ ist dann eine polynomiale Funktion auf $\mathfrak{g}$, die bei $h \in \mathfrak{h}$ genau dann von Null verschieden ist, wenn die Werte der Wurzeln $\alpha(h)$ für $\alpha \in R$ paarweise verschieden und alle nicht Null sind. Diese Funktion D ist also nicht identisch Null auf $\mathfrak{g}$. Andererseits folgt aus $D(x) \neq 0$ schon $x = x_{\mathrm{s}}$, denn die Eigenräume von x_{s} zu von Null verschiedenen Eigenwerten sind für derartige x eindimensional und aus $x \neq x_{\mathrm{s}}$ folgte $\ker(\operatorname{ad} x) \subsetneq (\ker(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}}))$ im Widerspruch zu $\dim(\ker(\operatorname{ad} x_{\mathrm{s}})) = r$. Das Komplement der Nullstellenmenge von D ist demnach die Vereinigung über alle Cartan'schen $\mathfrak{h}$ der Mengen

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} := \{h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} \mid \text{Die Werte der Wurzeln auf } h \text{ sind paarweise verschieden}\}$$

Derselbe Beweis wie zuvor zeigt nun, daß auch $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}}$ stets offen ist in $\mathfrak{g}$. Gegeben zwei Cartan'sche $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ mit $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} \cap G\mathfrak{k}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} \neq \emptyset$ folgern wir jedoch wie bei unserem ersten Beweis, daß es $\sigma \in G$ gibt mit $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ und daß insbesondere gilt $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}} = G\mathfrak{k}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}}$. Mithin zerfällt $\{x \in \mathfrak{g} \mid D(x) \neq 0\}$ als die disjunkte Vereinigung der offenen Teilmengen $G\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pv}}$, wenn wir $\mathfrak{h}$ über ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von Cartan'schen laufen lassen Da aber das Komplement der Nullstellenmenge von D nach [AN2] 8.5.22 zusammenhängend ist, kann es nur eine derartige Konjugationsklasse geben. $\square$

2.4.8. Sei $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ eine polynomiale Abbildung. Ist das Differential $\mathrm{d}_p \varphi$ an mindestens einer Stelle $p \in \mathbb{C}^n$ surjektiv, so umfaßt das Bild jeder nichtleeren Zariski-offenen Menge in $\mathbb{C}^n$ eine nichtleere Zariski-offene Menge in $\mathbb{C}^m$. Das ist ein Spezialfall des differentiellen Dominanzkriteriums [KAG] 7.4.23 und wird hier nicht bewiesen.

Übungen

Ergänzende Übung 2.4.9 (**Reguläre Elemente in Cartan'schen**). Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik Null, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem. Man zeige, daß die Elemente von $\mathfrak{h}$, die im Sinne von 1.1.33 regulär sind in $\mathfrak{g}$, genau die Elemente von $\mathfrak{h}$ sind, auf denen keine Wurzel verschwindet. Hinweis: 2.2.14. Man zeige weiter, daß die regulären halbeinfachen Elemente eine Zariski-offene Teilmenge von $\mathfrak{g}$ bilden.

2.5 Cartan'sche in allgemeinen Liealgebren**

2.5.1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine Liealgebra mit einer Unteralgebra. Der **Normalisator von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$** ist die Unteralgebra

$$\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

Natürlich ist der Normalisator wieder eine Unteralgebra und per definitionem ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal in $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Genauer ist der Normalisator von $\mathfrak{h}$ die größte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{h}$ als Ideal umfaßt.

Definition 2.5.2. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt eine **Cartan'sche**, wenn sie nilpotent und selbstnormalisierend alias ihr eigener Normalisator ist.

Ergänzung 2.5.3 (**Cartan'sche und Erweiterungen des Grundkörpers**). Beide Eigenschaften nilpotent und selbstnormalisierend gelten genau dann, wenn sie nach einer beliebigen festen Erweiterung des Grundkörpers gelten. Ist also $k \subset K$ eine Körpererweiterung und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum, so ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche genau dann, wenn $\mathfrak{h} \otimes_k K \subset \mathfrak{g} \otimes_k K$ eine Cartan'sche ist.

2.5.4. Sei $\mathfrak{g}$ endlichdimensionale Liealgebra. Wir setzen

$$r = \mathrm{rang}(\mathfrak{g}) := \min\{\dim \ker(\mathrm{ad}\, x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen diese Zahl der **Rang** unserer Liealgebra. Die Elemente $x \in \mathfrak{g}$, an denen das Minimum angenommen wird, heißen seit 1.1.33 **regulär**. Die regulären Elemente bilden stets eine Zariski-offene Teilmenge $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \circledcirc \mathfrak{g}$.

2.5.5. Sei $\mathfrak{g}$ endlichdimensionale Liealgebra. Wir setzen

$$s = s(\mathfrak{g}) := \min\{\dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

Diejenigen Elemente $x \in \mathfrak{g}$, an denen das Minimum angenommen wird, heißen **generisch**. Die generischen Elemente bilden stets eine Zariski-offene Teilmenge $\mathfrak{g}_{\mathrm{gen}} \circledcirc \mathfrak{g}$. Sie bilden sogar das Komplement der Nullstellenmenge einer von Null verschiedenen polynomialen Funktion, nämlich derjenigen Funktion, die jedem $x \in \mathfrak{g}$ den Koeffizienten von T^s des charakteristischen Polynoms von $\operatorname{ad} x$ zuordnet.

Satz 2.5.6 (Existenz und Eindeutigkeit von Cartan'schen). *1. Jede endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null besitzt Cartan'sche Unteralgebren, und diese sind genau die Haupträume zum Eigenwert Null* $\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0)$ *für generische $x \in \mathfrak{g}$;*

2. In einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null sind je zwei Cartan'sche konjugiert unter ihrer Automorphismengruppe, ja unter der von den $\exp(\operatorname{ad} c)$ *für Elemente c mit nilpotentem* $\operatorname{ad} c$ *erzeugten Untergruppe G der Automorphismengruppe.*

Beweis. 1. Wir kürzen $\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; \lambda) =: \mathfrak{g}^x_\lambda$ ab und zeigen zunächst, daß im Fall eines Grundkörpers k der Charakteristik Null der Hauptraum zum Eigenwert Null $\mathfrak{g}^x_0$ für jedes generische Element x eine Cartan'sche ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir uns auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k zurückziehen. Für alle λ, μ gilt nach 1.1.36 sicher $[\mathfrak{g}^x_\lambda, \mathfrak{g}^x_\mu] \subset \mathfrak{g}^x_{\lambda+\mu}$. Also ist unser Hauptraum zum Eigenwert Null eine Unteralgebra. Sein Normalisator muß auch in Haupträume unter $\operatorname{ad} x$ zerfallen und besteht offensichtlich nur aus $\mathfrak{g}^x_0$ selber. Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{g}^x_0$ auch noch eine nilpotente Liealgebra ist. Sei nämlich $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^x_0$ unter allen nilpotenten Unteralgebren, die x enthalten, eine Unteralgebra maximal möglicher Dimension. So verfeinert die simultane Hauptraumzerlegung zu $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$ aus 1.5.10 die Hauptraumzerlegung von $\operatorname{ad} x$. Hätten wir dabei

$$\operatorname{Hau}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}; 0) \subsetneq \mathfrak{g}^x_0$$

und wären $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathfrak{n}^*$ die von Null verschiedenen simultanen Eigenwerte alias Gewichte von $\mathfrak{g}$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{n}$, so fänden wir $y \in \mathfrak{n}$ mit $\lambda_1(y) \neq 0, \ldots, \lambda_r(y) \neq 0$ und es folgte

$$\dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} y; 0) < \dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0)$$

im Widerspruch zu unserer Annahme x generisch. Mithin operiert $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathfrak{g}^x_0/\mathfrak{n}$. Ist dieser Raum nicht Null, so gibt es nach

Satz 1.4.1 über Liealgebren aus nilpotenten Endomorphismen ein Element $z \in \mathfrak{g}_0^x$ mit $z \notin \mathfrak{n}$ aber $[z, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$. Also ist $\mathfrak{m} := kz + \mathfrak{n}$ eine auflösbare Liealgebra. Seien nun $\mu_0, \ldots, \mu_t \in \mathfrak{m}^*$ die Charaktere der einfachen Subquotienten von $\mathfrak{g}$ als Darstellung der auflösbaren Liealgebra $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_0^x$. Wir listen sie nicht mit ihrer Vielfachheit, die μ_j seien also paarweise verschieden. Wegen $[z, z] = 0$ kommt der Nullcharakter vor, wir dürfen also $\mu_0 = 0$ annehmen. Sicher gibt es $y \in \mathfrak{m}$ mit $\mu_1(y) \neq 0, \ldots, \mu_t(y) \neq 0$. Wegen $x \in \mathfrak{m}$ hat $\operatorname{ad} y$ dann keinen Eigenwert Null auf $\mathfrak{g}_\lambda^x$ für $\lambda \neq 0$. Hätte es also einen Eigenwert ungleich Null auf $\mathfrak{g}_0^x$, so gälte $\dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} y; 0) < \dim \operatorname{Hau}(\operatorname{ad} x; 0)$ im Widerspruch zu unserer Annahme x generisch. Mithin ist auch $\mathfrak{m}$ eine nilpotente Liealgebra, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{n}$. Die verbleibende Aussage von Teil 1, daß umgekehrt auch jede Cartan'sche ein Hauptraum der beschriebenen Art ist, wird erst im Anschluß an den Beweis von Teil 2 gezeigt.

2. Sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche. Sicher zerfällt $\mathfrak{g}$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{h}$ in simultane Eigenräume. Seien $\alpha, \ldots, \beta \in \mathfrak{h}^*$ die von Null verschiedenen simultanen Eigenwerte. Wir setzen

$$\mathfrak{h}_{\text{gen}} := \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) \neq 0, \ldots, \beta(h) \neq 0\}$$

Sicher ist das eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{h}$ und für alle $h \in \mathfrak{h}_{\text{gen}}$ gilt $\mathfrak{g}_0^h = \mathfrak{h}$. Jetzt betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_\alpha \times \ldots \times \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{h}_{\text{gen}} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, \ldots, y, h) & \mapsto & \exp(\operatorname{ad} x) \ldots \exp(\operatorname{ad} y) h \end{array}$$

mit dem Produkt über alle von Null verschiedenen Eigenwerte in einer beliebigen, aber für diesen Beweis fest gewählten Reihenfolge. Sie hat surjektives, ja bijektives Differential an allen Tupeln der Gestalt $(0, \ldots, 0, h)$. Nach dem differentiellen Dominanzkriterium [KAG] 7.4.23 umfaßt folglich das Bild unserer Abbildung eine Zariski-offene nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Da die Dimension des $(\operatorname{ad} z)$-Hauptraums zum Eigenwert Null für alle Elemente z dieser Teilmenge dieselbe sein muß, besteht sie notwendig aus generischen Elementen. Insbesondere besteht $\mathfrak{h}_{\text{gen}}$ aus generischen Elementen. Ist $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ eine weitere Cartan'sche, so folgt ebenso, daß $G\mathfrak{k}_{\text{gen}}$ Zariski-offen ist. Folglich haben $G\mathfrak{k}_{\text{gen}}$ und $G\mathfrak{h}_{\text{gen}}$ nichtleeren Schnitt. Mithin gibt es $h \in \mathfrak{h}_{\text{gen}}$ und $\sigma \in G$ mit $gh \in \mathfrak{k}_{\text{gen}}$. Dann folgt aber $\sigma(\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} h; 0)) = (\operatorname{Hau}(\operatorname{ad} \sigma(h); 0))$ alias $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$.

Nun können wir auch den Beweis von Teil 1 zu Ende bringen: Jede Cartan'sche $\mathfrak{h}$ besitzt nämlich generische Elemente x, wie man durch Übergang zu einem algebraischen Abschluß und Herunterschneiden auf die ursprüngliche Cartan'sche nunmehr leicht einsieht. Dann aber gilt notwendig $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^x$. $\square$

2.6 Bezug zu algebraischen Gruppen*

Satz 2.6.1 (Adjungierte Gruppe einer halbeinfachen Liealgebra). *Gegeben eine halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ ist die Einskomponente ihrer Automorphismengruppe*

$$(\mathrm{Alg}_k^\times(\mathfrak{g}))^\circ \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

die eindeutig bestimmte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe mit Liealgebra $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Sie wird erzeugt von den Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit nilpotenten $x \in \mathfrak{g}$.

2.6.2. Gegeben eine halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ heißt die Einskomponente $(\mathrm{Alg}_k^\times(\mathfrak{g}))^\circ$ ihrer Automorphismengruppe auch die **adjungierte Gruppe**. Im Allgemeinen definiert man die „adjungierte Gruppe“ einer Liealgebra als die größte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, deren Liealgebra in $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ enthalten ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar nach [AAG] 3.7.1, da wir ja in Charakteristik Null sind. Nach Übung [AAG] 3.2.35 besteht die Liealgebra der Automorphismengruppe einer endlichdimensionalen Algebra stets aus Derivationen, und da nach 2.2.6 im Falle einer halbeinfachen Liealgebra alle diese Derivationen innere Derivationen sind, gilt weiter $\mathrm{Lie}(\mathrm{Alg}_k^\times(\mathfrak{g})) \subset \mathrm{Der}_k\, \mathfrak{g} = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Andererseits erzeugen die Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit nilpotenten $x \in \mathfrak{g}$ aber nach dem Satz [AAG] 2.2.5 über irreduzibles Erzeugen eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{Alg}_k^\times(\mathfrak{g})$, die nach 2.3.15 und 2.3.25 bereits die richtige Liealgebra haben muß. □

Beispiel 2.6.3. Sei k ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$. Gegeben eine Matrix $x \in \mathfrak{gl}(n; k)$ haben wir $\operatorname{ad} x = (x\cdot) - (\cdot x)$, und da die Linksmultiplikation kommutiert mit der Rechtsmultiplikation, folgt für nilpotentes x und beliebiges y sofort

$$(\exp(\operatorname{ad} x))(y) = (\exp x) y (\exp x)^{-1}$$

Man überlegt sich nun ohne große Schwierigkeiten, daß die $\exp x$ für $x \in \mathfrak{sl}(n; k)$ nilpotent die Gruppe $\mathrm{SL}(n; k) \subset \mathrm{GL}(n; k)$ erzeugen, ja diese Gruppe wird sogar schon erzeugt von allen $\exp(aE_{ij})$ mit $a \in k$ und $i \neq j$. Die adjungierte Gruppe der Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; k)$ ist mithin das Bild des Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}(n; k) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{sl}(n; k))$, der einer Matrix $A \in \mathrm{SL}(n; k)$ die Konjugation mit A zuordnet, als da heißt die Abbildung $\mathrm{Ad}(A) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto AyA^{-1}$.

Ergänzung 2.6.4 (**Halbeinfachkeit von Gruppen und ihren Liealgebren**). Die adjungierte Gruppe einer halbeinfachen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ ist halbeinfach im

Sinne von [AAG] 4.8.2. In der Tat hätte sie sonst einen nichttrivialen zusammenhängenden abelschen Normalteiler und dessen Liealgebra wäre nach [AAG] 3.3.14 ein nichttriviales abelsches Ideal von $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Wir folgern, daß jede affine algebraische Gruppe G mit halbeinfacher Liealgebra $\mathfrak{g}$ bereits selbst halbeinfach sein muß, denn ihre adjungierte Darstellung induziert einen Homomorphismus $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, dessen Differential beim neutralen Element bijektiv ist.

Ergänzung 2.6.5 (**Maximale Tori und Cartan'sche Unteralgebren**). Gegeben eine halbeinfache affine algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null induziert das Bilden der Liealgebra eine Bijektion

$$\{\text{Maximale Tori in } G\} \stackrel{\sim}{\to} \{\text{Cartan'sche in } \operatorname{Lie} G\}$$

In der Tat besteht die Liealgebra eines maximalen Torus sich aus halbeinfachen und paarweise kommutierenden Elementen und ist ihr eigener Zentralisator, also maximal mit diesen Eigenschaften. Unsere Abbildung landet also schon mal, wo sie soll. Da beide Seiten aus einer einzigen G-Bahn bestehen, muß sie surjektiv sein. Da schließlich in Charakteristik Null zusammenhängenden Untergruppen nach [AAG] 3.7.1 bereits durch ihre Liealgebra eindeutig bestimmt werden, folgt auch die Injetivität.

Ergänzung 2.6.6. Gegeben $G \supset T$ eine halbeinfache affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null mit einem maximalen Torus und $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ ihre Liealgebren induziert die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ einen Isomorphismus auf den Weylgruppen $\mathrm{W}(G, T) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{W}(\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$, wie man etwa aus [AAG] 4.11.12 leicht folgert.

Satz 2.6.7 (**Darstellungen reduktiver Gruppen**). $(k = \bar{k})$. *Jede rationale Darstellung einer reduktiven algebraischen Gruppe in Charakteristik Null ist halbeinfach.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall, daß unsere Gruppe zusammenhängend ist. Dann wird sie erzeugt von ihrem Zentrum, einer diagonalisierbaren Gruppe, und ihrer derivierten Gruppe, einer halbeinfachen Gruppe. Unter dem Zentrum zerfällt unsere Darstellung in simultane Eigenräume, die ihrerseits unter der derivierten Gruppe stabil sind. Es reicht also, den Fall einer halbeinfachen Gruppe zu betrachten. Nun sind aber nach [AAG] 4.6.23 die Unterdarstellungen unter der Gruppe dieselben wie die Unterdarstellungen unter ihrer Liealgebra, diese Liealgebra ist halbeinfach nach 2.6.4, und dann sind auch ihre endlichdimensionalen Darstellungen halbeinfach nach dem Satz von Weyl 2.1.6. Ist unsere Gruppe G reduktiv aber nicht zusammenhängend, so finden wir zunächst nach dem bereits behandelten Fall in jeder endlichdimensionalen Darstellung V genau ein unter der Einskomponente $E := G^\circ$ stabiles Komplement des Teilraums V^E der E-Invarianten.

Diese Zerlegung ist notwendig G-stabil, und in V^E finden wir nach dem Satz von Maschke [NAS] 4.1.1 angewandt auf die endliche Gruppe G/E auch ein G-stabiles Komplement des Teilraums V^G der G-Invarianten. Nun können wir argumentieren wie bei der Herleitung des Satzes von Weyl in 2.1.11. □

Korollar 2.6.8 (Peter-Weyl für reduktive Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben eine reduktive algebraische Gruppe G in Charakteristik Null induzieren die Matrixkoeffizientenabbildungen einen Isomorphismus von Darstellungen*

$$\bigoplus_{L \in \operatorname{irr}(G)} L \otimes L^* \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(G)$$

von $G \times G^{\mathrm{opp}}$ mit der über alle irreduziblen rationalen Darstellungen von G bis auf Isomorphie zu bildenden direkten Summe.

Beweis. Gegeben ein beliebiges algebraisches Monoid G und rationale Darstellungen V, W von G liefert das Auswerten einen Homomorphismus

$$V \otimes_k \operatorname{Hom}_k(V, W)^G \to W$$

von Darstellungen, wobei auf dem Tensorprodukt die G-Operation gemeint ist, die nur den ersten Faktor bewegt. Ist $V = L$ irreduzibel, so ist dieser Homomorphismus eine Injektion nach dem Schur'schen Lemma und ihr Bild ist genau die L-isotypische Komponente von W. Nehmen wir speziell $W = \mathcal{O}(G)$ mit der G-Operation durch $(gf)(x) := f(xg)$ für $x \in G$, so ist unser Homomorphismus äquivariant für die Rechtsoperation gegeben durch $(fg)(x) := f(gx)$ auf $\mathcal{O}(G)$ und durch die davon abgeleitete Rechtsoperation auf unserem Tensorprodukt, die nur den zweiten Tensor bewegt. Schließlich beachte man, daß das Nachschalten des Auswertens beim neutralen Element einen mit den G-Rechtsoperationen verträglichen Isomorphismus $L^* \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Hom}_k(L, \mathcal{O}(G))^G$ induziert. □

2.7 Lemma von Schur für Liealgebren*

Satz 2.7.1 (Lemma von Schur). *Der Endomorphismenring einer irreduziblen Darstellung einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besteht nur aus den skalaren Vielfachen der Identität.*

2.7.2. Ist unser Körper überabzählbar, insbesondere also im Fall der komplexen Zahlen, kann man das direkt und einfacher aus [NAS] 3.2.6 folgern. Man erhält dann die Aussage sogar noch allgemeiner für Liealgebren abzählbarer Dimension, vergleiche 2.1.4. Die hier als Satz 2.7.1 formulierte Version wird auch als **Lemma von Quillen** zitiert.

Beweis. Sei $k = \bar{k}$ unser algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{g}$ unsere Liealgebra und V unsere irreduzible Darstellung. Gegeben ein Endomorphismus unserer Darstellung $a \in \operatorname{End}_k^{\mathfrak{g}} V$ gilt es zu zeigen $a \in k \operatorname{id}_V$. Da wir k algebraisch abgeschlossen angenommen hatten, reicht es zu zeigen, daß a algebraisch ist über k. Nun können wir V nach 4.3.7 zu einem Modul über $k[X] \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ machen, indem wir X als a operieren lassen. Gegeben ein von Null verschiedener Vektor $v \in V$ betrachten wir die Filtrierung von V durch die

$$V^{\leq r} := \left(k[X] \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\leq r}\right) v$$

Offensichtlich ist dann der assoziierte graduierte Vektorraum $\operatorname{gr} V$ ein zyklischer graduierter Modul über dem Ring $R := k[X] \otimes_k \mathrm{S}(\mathfrak{g})$, versehen mit der Graduierung, bei der $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ die übliche Graduierung trägt, $k[X]$ aber ganz im Grad Null konzentriert ist. In anderen Worten ist $\operatorname{gr} V$ ein Quotient unseres Rings nach einem geeigneten homogenen Ideal I. Nun wissen wir nach [KAG] 6.6.16, daß der Ring R/I eine endliche Filtrierung durch homogene Ideale besitzt, deren Subquotienten jeweils bis auf Verschieben der Graduierung isomorph sind zu gewissen $R/\mathfrak{p}_i$ für homogene Primideale $\mathfrak{p}_i \subset R$. Gehen wir zu einem geometrischen Bild über, so entsprechen die Primideale $\mathfrak{p}_i \subset R$ irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen

$$Y_i \subset \operatorname{Max} R \xrightarrow{\sim} k \times \mathfrak{g}^*$$

Die Projektion jeder dieser irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen auf die erste Koordinate besteht nun entweder nur aus einem Punkt, oder aber sie ist dicht. Ist $f \in k[X]$ ein von Null verschiedenes Polynom, das an allen Stellen verschwindet, an denen eines unserer Y_i in der Faser enthalten ist, so operiert $k[X, f^{-1}]$ torsionsfrei auf allen Lokalisierungen $(R/\mathfrak{p}_i)_f$. Damit sind unsere $(R/\mathfrak{p}_i)_f$ sogar freie $k[X, f^{-1}]$-Moduln, da ihre homogenen Komponenten jeweils endlich erzeugt sind über dem Hauptidealring $k[X, f^{-1}]$. Dann ist auch $(\operatorname{gr} V)_f = (R/I)_f$ ein freier $k[X, f^{-1}]$-Modul und damit schließlich sogar auf V_f. Würde nun f nicht durch Null auf V operieren, so müßte es auf dieser einfachen Darstellung durch einen Automorphismus operieren und wir hätten $V_f = V$ und das wäre ein von Null verschiedener freier Modul über $k[X, f^{-1}]$ im Widerspruch dazu, daß alle Elemente dieses Rings durch Automorphismen auf der einfachen Darstellung V operieren müssen. Folglich operiert f durch Null auf V, als da heißt, es gilt $f(a) = 0$ und a ist algebraisch über k. □

3 Konstruktion der halbeinfachen Liealgebren

3.1 Freie Liealgebren

3.1.1. Wir notieren die Kategorie der Liealgebren über einem Körper k als Lalg_k.

Definition 3.1.2. Gegeben eine Menge I und ein Körper k definiert man eine **freie k-Liealgebra über** I als ein Paar (L, can) bestehend aus einer k-Liealgebra L und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to L$ derart, daß für jede k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Lalg}_k(L, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, \mathfrak{g})$$

zwischen Homomorphismen von Liealgebren und Abbildungen von Mengen induziert. Diese Bedingung nennt man auch die **universelle Eigenschaft** der freien k-Liealgebra über I.

3.1.3 (**Eindeutigkeit freier Liealgebren**). Sind $\mathrm{can} : I \to L$ und $\mathrm{can}' : I \to L'$ zwei freie Liealgebren über derselben Menge I, so gibt es genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\varphi : L \to L'$ mit $\varphi \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}'$, und der ist ein Isomorphismus, was ich anhand des folgenden Diagramms erklären will.

$$\begin{tikzcd}
& & I \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
L' \arrow[r, "\psi"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{id}=\varphi\psi"'] & L \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{id}=\psi\varphi"'] & & L' \arrow[r, "\psi"] & L
\end{tikzcd}$$

In der Tat gibt es ja nach universellen Eigenschaften von $\mathrm{can}' : I \to L'$ auch genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\psi : L' \to L$ mit $\psi \circ \mathrm{can}' = \mathrm{can}$. Weiter gibt es aus demselben Grund auch genau einen Liealgebren-Homomorphismus $\zeta : L \to L$ mit $\zeta \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}$. Da sowohl $\zeta = \mathrm{id}$ als auch $\zeta = \psi\varphi$ diese Eigenschaft haben, folgt $\mathrm{id} = \psi\varphi$. Analog folgt auch $\mathrm{id} = \varphi\psi$, so daß φ und ψ zueinander invers sein müssen.

Proposition 3.1.4. *Gegeben ein Körper k und eine Menge I existiert stets eine freie k-Liealgebra über I.*

3.1.5. Wir notieren im Sinne unserer allgemeinen Konventionen [TF] 4.8.10 die freie k Liealgebra über einer Menge I als

$$\mathrm{Lalg}_k^{\nwarrow} I$$

3.1.6. Wir geben zwei Beweise für diese Aussage. Der Erste geht „über unnötig viele Pässe, aber auf bekannten Wegen“. Besonders unschön an diesem ersten Beweis ist, daß er den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt benötigt, dessen Beweis ja beim besten Willen kein Selbstläufer war. Der zweite Beweis ist recht direkt, benutzt aber Argumente, die Ihnen weniger vertraut sein mögen und die erst im anschließenden Abschnitt ausgeführt werden.

Erster Beweis. Wir betrachten den „Polynomring über k in durch I indizierten nicht-kommutierenden Variablen X_i für $i \in I$“ wie in [NAS] 3.7.1 oder auch im zweiten Beweis von 4.3.19, in unseren verschiedenen Notationen also die k-Ringalgebra

$$k\lfloor' X_i \mid i \in I\rfloor = k\lfloor'_! I\rfloor = \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I = k\langle \operatorname{Mon}^{\nwarrow} I\rangle$$

Dann betrachten wir darin die von besagten Variablen erzeugte Unter-Liealgebra

$$L \subset (\operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I)_{\mathrm{L}}$$

Um zu sehen, daß sie die geforderte universelle Eigenschaft hat, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ens}(I, \mathfrak{g}) \arrow[r] & \operatorname{Ens}(I, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \\
\operatorname{Lalg}_k(L, \mathfrak{g}) \arrow[u, hook] & \operatorname{Ralg}_k(\operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

Es gilt zu zeigen, daß die linke Vertikale ein Isomorphismus ist. Dazu konstruieren wir eine rechtsinverse Abbildung. Sicher induziert für $\varphi : I \to \mathfrak{g}$ der zugehörige Homomorphismus von Ringalgebren $\tilde{\varphi} : \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ einen Homomorphismus von Liealgebren $\hat{\varphi} : L \to \mathfrak{g}$, denn nach Poincaré-Birkhoff-Witt 4.3.11 ist die kanonische Abbildung eine Injektion $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Die Zuordnung $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist dann offensichtlich die gesuchte Rechtsinverse unserer linken Vertikale. $\square$

Zweiter Beweis. Eine alternative und in meinen Augen natürlichere Konstruktion geht aus von der „freien Algebra $\operatorname{Alg}_k^{\nwarrow} I$ über der Menge I“, wie sie in 3.3.9 konstruiert wird, einer Art „Polynomring über k in nicht-kommutierenden nicht-assoziativen durch $i \in I$ indizierten Variablen ohne Konstanten“. Wir notieren ihre Verknüpfung $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Teilen wir das zweiseitige Ideal R heraus, das von allen Elementen $(a \cdot a)$ und $(a \cdot (b \cdot c)) + (b \cdot (c \cdot a)) + (c \cdot (a \cdot b))$ mit $a, b, a \in A$ erzeugt wird, so ergibt sich offensichtlich eine Liealgebra. Daß das die gesuchte freie Liealgebra über I ist, will ich anhand des folgenden Diagramms erläutern.

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "\mathrm{can}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathrm{Alg}_k^{\nwarrow} I \arrow[rr, dashed, "\hat{\varphi}"] \arrow[dr] & & \mathfrak{g} \\
 & (\mathrm{Alg}_k^{\nwarrow} I/R) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei also $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Zunächst läßt sich jede Abbildung $\varphi : I \to \mathfrak{g}$ auf genau eine Weise zu einem Algebrenhomomorphismus $\hat{\varphi} : \mathrm{Alg}_k^{\nwarrow} I \to \mathfrak{g}$ fortsetzen aufgrund der universellen Eigenschaft der freien Algebra. Für diese Fortsetzung gilt nun $\hat{\varphi}(R) = 0$, da $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra ist. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten faktorisiert sie damit in eindeutiger Weise über den Quotienten nach R und wir erhalten das gesuchte $\tilde{\varphi}$. $\square$

Ergänzung 3.1.7. Gegeben eine angeordnete Menge I versteht man unter einem **Lyndon-Wort im Alphabet I der Länge n** ein n-Tupel von Elementen von I derart, daß für jede Trennung unseres Wortes in zwei Teilwörter der erste Teil lexikographisch echt kleiner ist als der zweite Teil. Man kann zeigen, daß die "von hinten beginnend zusammengeklammerten Lyndonwörter" eine Basis der freien Liealgebra über I bilden.

3.2 Die Hausdorff-Formel*

3.2.1. Seien A eine $\mathbb{Q}$-Ringalgebra und $N_A \subset A$ die Menge ihrer nilpotenten Elemente. So liefern die Exponentialreihe und die Reihe von $\log(1+x)$ zueinander inverse Bijektionen

$$N_A \underset{\log}{\overset{\exp}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\sim}{\longrightarrow}}}} 1 + N_A$$

Ist weiter $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Ringalgebren, so kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
N_A \arrow[r, "\exp", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"'] & 1 + N_A \arrow[r, "\log", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"] & N_A \arrow[d, "\varphi"] \\
N_B \arrow[r, "\exp", "\sim"'] & 1 + N_B \arrow[r, "\log", "\sim"'] & N_B
\end{tikzcd}$$

Sind schließlich Nilpotente $u, v \in N_A$ gegeben mit $uv = vu$, so gelten die Formeln $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$ und $\log((1+u)(1+v)) = \log(1+u)+\log(1+v)$. All das folgt, indem man Identitäten aus der Analysis in Identitäten für formale Potenzreihen übersetzt, vergleiche [AN1] 6.3.10 und [AN2] 3.3.12.

Definition 3.2.2. Sei k ein Körper. Unter einem **Lie-artigen Polynom** in Variablen $X_1, \ldots, X_r$ mit Koeffizienten in k verstehen wir ein Element der in der freien k-Ringalgebra $k\lfloor' X_1, \ldots, X_r \rfloor$ von den Variablen erzeugten Unterliealgebra. Die unfertigen Klammern deuten hier an, daß nicht-kommutierende Variablen gemeint sind.

Ergänzung 3.2.3. Sei k ein Körper. Ein Element der freien k-Liealgebra mit Erzeugern $X_1, \ldots, X_r$ nach 3.1.2 nennen wir auch ein **Lie-Polynom** in den Variablen $X_1, \ldots, X_r$ mit Koeffizienten in k. Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt [**?**] **??** zeigt, daß der offensichtliche Liealgebrenhomomorphismus von der Liealgebra der Lie-Polynome in die Liealgebra der Lie-artigen Polynome ein Isomorphismus ist, vergleiche [**?**] **??**. Dasselbe gilt mit [**?**] **??** sogar über einem beliebigen Kring k. All das ist für uns in diesem Zusammenhang aber unerheblich.

3.2.4. Gegeben ein nichtnegativ graduierter Ring $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ denken wir uns im folgenden die Teilmenge $A^{\leq n} \subset A$ stets mit der Ringstruktur versehen, für die die offensichtliche Surjektion $A \twoheadrightarrow A^{\leq n}$ ein Ringhomomorphismus ist. Ist unser graduierter Ring A sogar eine $\mathbb{Q}$-Ringalgebra, so bezeichne $\exp_{\leq n}$ und $\log_{\leq n}$ unsere zueinander inversen Abbildungen $\exp$ und $\log$ aus 3.2.1 im Spezialfall der $\mathbb{Q}$-Ringalgebra $A^{\leq n}$.

Satz 3.2.5. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der in der $\mathbb{Q}$-Ringalgebra $\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$ berechnete Ausdruck $\log_{\leq n}((\exp_{\leq n} X)(\exp_{\leq n} Y)) \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$ als Element von $\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor$ aufgefaßt ein Lie-artiges Polynom.*

3.2.6. Der homogene Anteil vom Grad n des Lie-artigen Polynoms aus 3.2.5 heißt das n**-te Hausdorff-Polynom** h_n. Zur Übung prüfe man die Formeln

$$\begin{array}{rcl} h_1(X,Y) & = & X + Y \\ h_2(X,Y) & = & [X,Y]/2 \\ h_3(X,Y) & = & [[X,Y],Y]/12 + [[Y,X],X]/12 \end{array}$$

Offensichtlich gilt sogar $h_n \in \mathbb{Z}[(n!)^{-1}]\lfloor X, Y \rfloor$. Andererseits ist nach [**?**] **??** die Einbettung $\operatorname{Lalg}_k^{\nwarrow} I \to \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I$ für $I = \{X, Y\}$ und $k \subset \mathbb{Q}$ ein Teilring spaltend als Einbettung von k-Moduln, und offensichtlich wird sie unter der Erweiterung der Skalare zu $\mathbb{Q}$ zur entsprechenden Einbettung über $\mathbb{Q}$. Zusammen zeigt das $\operatorname{Lalg}_{\mathbb{Q}}^{\nwarrow} I \cap \operatorname{Ralg}_k^{\nwarrow} I = \operatorname{Lalg}_k^{\nwarrow} I$. Mithin kann h_n auch als Liepolynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[(n!)^{-1}]$ geschrieben werden.

Beweis. Wir betrachten den Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Ringalgebren

$$\Delta : \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor \to \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor$$

mit $X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X$ und $Y \mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$. Nach dem Satz von Friedrichs [**?**] **??** ist $a \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor$ genau dann ein Lie-artiges Polynom, wenn gilt

$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Nun ist Δ homogen vom Grad Null. Für den induzierten Homomorphismus

$$\bar{\Delta} : \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n} \to (\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor)^{\leq n}$$

ist also auch $a \in \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$ genau dann ein Lie-artiges Polynom, wenn gilt $\bar{\Delta}(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Es gilt also, für $a := \log_{\leq n}(\exp_{\leq n} X \exp_{\leq n} Y)$ diese Bedingung zu prüfen. Das Queren steht im folgenden für die Restklasse in $(\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor)^{\leq n}$ eines Elements von $\mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\lfloor X, Y \rfloor^{\leq n}$, aber wir schleppen den zusätzlichen Index $\leq n$ bei $\exp$ und $\log$ nicht mit. Jetzt rechnen wir einfach

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\Delta} a & = & \bar{\Delta} \log(\exp X \exp Y) \\
& = & \log(\exp \bar{\Delta}(X) \exp \bar{\Delta}(Y)) \\
& = & \log((\overline{\exp X \otimes \exp X})(\overline{\exp Y \otimes \exp Y})) \\
& = & \overline{\log(\exp X \exp Y \otimes \exp X \exp Y)} \\
& = & \overline{\log((\exp X \exp Y) \otimes 1)} + \overline{\log(1 \otimes (\exp X \exp Y))} \\
& = & (\log(\exp X \exp Y)) \otimes 1 + 1 \otimes (\log(\exp X \exp Y)) \\
& = & a \otimes 1 + 1 \otimes a
\end{array}$$

Damit ist der Beweis fertig. □

3.3 Freie Algebren*

3.3.1. Ich erinnere daran, daß wir nach [GR] 2.3.2 unter einem Magma eine Menge mit einer Verknüpfung verstehen, von der weiter keine zusätzlichen Eigenschaften gefordert werden.

Definition 3.3.2. Gegeben eine Menge I verstehen wir unter einem **freien Magma über** I ein Paar (M, can) bestehend aus einem Magma M und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to M$ derart, dass für jedes weitere Magma N das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Mag}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, N)$$

zwischen Morphismen von Magmas und Abbildungen von Mengen induziert.

Satz 3.3.3. *Über jeder Menge I existiert ein freies Magma* (M, can).

3.3.4. Mit denselben Argumenten wie in 3.1.3 ist eine freies Magma über einer Menge im wesentlichen eindeutig bestimmt, wenn es denn existiert. Wir gönnen ihm deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von dem freien Magma über einer gegebenen Menge. Wir notieren Mag die Kategorie der Magmas und folgerichtig $\mathrm{Mag}^{\upharpoonleft} I$ das freie Magma über einer Menge I.

3.3.5. Das freie Magma über einer Menge mit einm Element hatten wir bereits in [GR] 2.3.19 ansatzweise diskutiert, mit $\mathbb{M}$ bezeichnet, und in Beziehung zu den sogenannten Catalan-Zahlen gesetzt.

Beweis. Wir betrachten die disjunkte Vereinigung $I \sqcup \{ \rangle, \langle \}$ der Menge I mit der Menge bestehend aus zwei weiteren Symbolen $\langle$ und $\rangle$ und bilden über dieser Vereinigung wie in [TF] 2.5.2 das freie Monoid

$$\mathrm{Mon}^{\nwarrow} \big(I \sqcup \{ \rangle, \langle \} \big)$$

alias die Menge aller Wörter einer Länge ≥ 0 in diesen Buchstaben mit dem Hintereinanderschreiben als Verknüpfung. Auf dieser Menge von Wörtern erklären wir eine neue, nun nicht mehr assoziative Verknüpfung durch die Vorschrift

$$(a, b) \mapsto \langle ab \rangle$$

mit der Notation ab für das Hintereinanderschreiben. Schließlich betrachten wir die kleinste unter unserer neuen Verknüpfung abgeschlossene Teilmenge M, die alle nur aus genau einem Buchstaben bestehenden Wörter enthält. Ein Element dieser Teilmenge M wäre etwa das Wort $\langle\langle x \langle yz \rangle\rangle w \rangle$ für beliebige $x, y, z, w \in I$. Als kanonische Abbildung betrachten wir die Abbildung $\mathrm{can} : I \to M$, die jedem Element $x \in I$ das Wort mit dem einzigen Buchstaben x zuordnet. Es ist nun leicht einzusehen, dass $\mathrm{can} : I \to M$ die von einem freien Magma geforderte Eigenschaft besitzt. □

3.3.6. Ich erinnere daran, daß wir für einen Körper k unter einer k-Algebra einen k-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ verstehen, von der weiter keine zusätzlichen Eigenschaften gefordert werden.

Definition 3.3.7. Gegeben eine Menge I und ein Körper k verstehen wir unter einer **freien k-Algebra über** I ein Paar (A, can) bestehend aus einer k-Algebra A und einer Abbildung $\mathrm{can} : I \to A$ derart, daß für jede weitere k-Algebra B das Vorschalten von can eine Bijektion

$$\mathrm{Alg}_k(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(I, B)$$

induziert zwischen Homomorphismen von k-Algebren und Abbildungen von Mengen.

3.3.8. Sei k ein Körper. Mit denselben Argumenten wie in 3.1.3 ist eine freie k-Algebra über einer Menge im wesentlichen eindeutig bestimmt. Wir gönnen ihr deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von der freien k-Algebra über einer gegebenen Menge. Wir notieren Alg_k die Kategorie der k-Algebren und folgerichtig $\mathrm{Alg}_k^{\nwarrow} I$ die freie k-Algebra über einer Menge I.

Satz 3.3.9. *Gegeben eine Menge I und ein Körper k existiert stets eine freie k-Algebra A über I.*

3.3.10. Wir notieren die Kategorie der Algebren über einem Körper k als Alg_k und notieren dann im Sinne unserer allgemeinen Konventionen [TF] 4.8.10 die freie k-Algebra über einer Menge I als

$$\mathrm{Alg}_k^{\upharpoonleft} I$$

3.3.11. Salopp gesprochen kann die freie k-Algebra über einer Menge I beschrieben werden als „der Polynomring über k in nicht-kommutierenden nicht-assoziativen durch $i \in I$ indizierten Variablen, ohne Konstanten“. Bei „nicht-assoziativen Variablen“ soll man sich denken, daß hier in Monomen stets „alle Klammern zu setzen sind“. Da aber derartiges Geschwafel nicht als Definition durchgehen kann, erkläre ich die Konstruktion auch noch auf einem etwas formaleren Weg.

Beweis. Wir konstruieren A als den freien k-Vektorraum über dem freien Magma über I, in Formeln

$$A := k\langle \mathrm{Mag}^{\upharpoonleft} I\rangle = \mathrm{Mod}_k^{\upharpoonleft}(\mathrm{Mag}^{\upharpoonleft} I)$$

Die Verknüpfung auf A erklären wir durch bilineare Fortsetzung der Verknüpfung auf dem freien Magma. Der Nachweis, daß die so konstruierte Algebra die geforderte Eigenschaft besitzt, kann dem Leser überlassen bleiben. □

3.4 Präsentation halbeinfacher Liealgebren

3.4.1. Im folgenden brauchen wir den Begriff der **Basis eines Wurzelsystems**. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ versteht man darunter eine Teilmenge $\Pi \subset R$, die eine Basis von V ist und die zusätzliche Eigenschaft hat, daß jede Wurzel entweder eine Linearkombination mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten oder eine Linearkombination mit nichtpositiven ganzzahligen Koeffizienten von Elementen von Π ist. In [SPW] 2.2.9 zeigen wir, daß jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt und daß je zwei Basen durch ein Element der Weylgruppe unseres Wurzelsystems ineinander überführt werden können.

3.4.2. Gegeben ein Körper k und eine Menge I und eine Teilmenge $T \subset \mathrm{Lalg}_k^{\upharpoonleft} I$ der freien k-Liealgebra über I verstehen wir unter der **Liealgebra mit Erzeugern I und Relationen** T den Quotienten $(\mathrm{Lalg}_k^{\upharpoonleft} I)/\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ der freien Liealgebra über k nach dem von T erzeugten Lie-Ideal, für das ich die Notation $\langle T\rangle_{\mathrm{L}}$ vorschlage.

3.4.3. Gegeben ein Körper k und eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ und eine Teilmenge $I \subset \mathfrak{g}$ sowie eine Teilmenge $T \subset \mathrm{Lalg}_k^{\upharpoonleft} I$ der freien k-Liealgebra über I sagen wir, die **Liealgebra $\mathfrak{g}$ werde präsentiert durch die Erzeuger I mit den Relationen T**, wenn der durch die Einbettung $I \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induzierte Homomorphismus $\mathrm{Lalg}_k^{\wedge} I \to \mathfrak{g}$ über den Quotienten nach dem von T erzeugten Ideal $\langle T \rangle_{\mathrm{L}}$ faktorisiert vermittels eines Isomorphismus

$$(\mathrm{Lalg}_k^{\wedge} I)/\langle T \rangle_{\mathrm{L}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$$

Satz 3.4.4 (Präsentation durch Erzeugende und Relationen). *1. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und $\Pi \subset R := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ eine Basis des zugehörigen Wurzelsystems. Wählen wir für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ einen Erzeuger $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ des Wurzelraums, so gibt es Elemente $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ und diese Elemente mitsamt den $h_\alpha := \alpha^\vee$ erfüllen die Relationen*

$$\begin{array}{rcl}
[x_\alpha, y_\alpha] &=& h_\alpha \quad \forall \alpha; \\
{[x_\alpha, y_\beta]} &=& 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta; \\
{[h_\alpha, h_\beta]} &=& 0 \quad \forall \alpha, \beta; \\
{[h_\alpha, x_\beta]} &=& \langle \beta, \alpha^\vee \rangle x_\beta \quad \forall \alpha, \beta; \\
{[h_\alpha, y_\beta]} &=& -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle y_\beta \quad \forall \alpha, \beta; \\
(\operatorname{ad} x_\alpha)^{1-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}(x_\beta) &=& 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta; \\
(\operatorname{ad} y_\alpha)^{1-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}(y_\beta) &=& 0 \quad \textit{falls } \alpha \neq \beta.
\end{array}$$

Genauer wird die Liealgebra $\mathfrak{g}$ sogar präsentiert durch die so gewählten Erzeuger $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ mit den angegebenen Relationen.

2. *Gegeben $R \supset \Pi$ ein komplexes Wurzelsystem mit einer Basis ist die komplexe Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{R,\Pi}$ erzeugt von den Symbolen $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ mit den obigen Relationen eine halbeinfache Liealgebra. Die Bilder der Erzeuger h_α bilden darin die Basis einer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ und die Vorschrift $\beta \mapsto (h_\alpha \mapsto \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)$ liefert einen Isomorphismus von komplexen Wurzelsystemen $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

Vorschau 3.4.5. In [SPW] 2.1.16 zeigen wir, daß für jeden Körper k der Charakteristik Null die Erweiterung der Skalare $k \otimes_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert zwischen der Kategorie de Wurzelsysteme über $\mathbb{Q}$ und der Kategorie de Wurzelsysteme über k. Salopp gesprochen kommt es also bei Wurzelsystemen nicht auf den Grundkörper an.

3.4.6. Zwei einfache Wurzeln $\alpha, \beta \in \Pi$ stehen stets in einem stumpfen Winkel zueinander, die $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ in unserem Satz sind also stets nichtpositive ganze Zahlen. In der Tat wäre sonst $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine Wurzel, bei deren Darstellung in besagter Basis positive und negtive Koeffizienten vorkommen, und das stünde im Widerspruch zu unserer Definition einer Basis.

3.4.7. Daß wir zu unseren Erzeugern die h_α mit hinzunehmen, hat nur den Grund, daß die Relationen dann übersichtlicher geschrieben werden können. Der Satz geht auf Serre zurück. Die obigen Relationen, insbesondere die letzten beiden, werden oft als **Serre-Relationen** bezeichnet.

3.4.8. Der zweite Teil des Satzes gilt mit demselben Beweis allgemeiner für die über einem beliebigen Körper k der Charakteristik Null von besagten Erzeugern und Relationen erzeugte Liealgebra.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis des ersten Teils. Daß wir zu jedem x_α ein zugehöriges y_α finden können, folgt aus unserer Definition von $\alpha^\vee$ in 2.3.16 als spezieller Erzeuger des nach 2.3.15 eindimensionalen Raums $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Daß für diese Elemente x_α, y_α und $h_\alpha := \alpha^\vee$ alle Relationen aus unserem Satz erfüllt sind, ergibt sich unmittelbar daraus, daß für einfache Wurzeln α, β weder $\alpha - \beta$ noch $s_\alpha(\beta) + \alpha$ Wurzeln sind, wobei letztere Erkenntnis durch Anwenden von s_α aus ersterer Erkenntnis folgt. Mit unserer Notation aus Teil 2 gibt es also schon mal einen Homomorphismus

$$\mathfrak{g}_{R,\Pi} \to \mathfrak{g}$$

Wir müssen nun noch zeigen, daß er ein Isomorphismus ist. Zunächst zeigen wir nur, daß er surjektiv ist, daß also unsere halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ erzeugt wird von den Wurzelräumen zu den einfachen Wurzeln und ihren Negativen. Dazu erinnern wir aus 2.3.12.4, daß für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Weiter erinnern wir aus [SPW] 2.3.10, daß jede positive Wurzel aus einer einfachen Wurzel erreicht werden kann durch eine Folge von Wurzeln, bei der jedes Glied aus dem Vorhergehenden durch die Addition einer einfachen Wurzel hervorgeht. Zusammen zeigt das, daß unsere Abbildung eine Surjektion $\mathfrak{g}_{R,\Pi} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ sein muß. Können wir Teil 2 zeigen, so muß diese Surjektion offensichtlich ein Isomorphismus sein. Also machen wir uns nun an den Beweis von Teil 2. Er ist etwas umständlich und wird in mehrere Teilschritte zerlegt.

1. Gegeben eine Halbgruppe Γ versteht man unter einer Γ-Graduierung einer Algebra A eine Zerlegung als direkte Summe $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ derart, daß die Verknüpfung $A_\gamma \times A_\mu$ nach $A_{\gamma+\mu}$ abbildet. Beide Konstruktionen der freien Liealgebra über einer Menge I zeigen, daß diese eine eindeutig bestimmte Graduierung durch die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\langle I\rangle$ besitzt, für die der Erzeuger x_i jeweils den Grad i hat. Durch Vergröberung dieser Graduierung erhalten wir eine Graduierung der freien Liealgebra in Erzeugern $(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ nach dem Wurzelgitter $\langle R\rangle$ mit x_α homogen vom Grad α, y_α homogen vom Grad $-\alpha$ und h_α homogen vom Grad 0.

2. Wir untersuchen nun zunächst die Liealgebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{R,\Pi}$ mit denselben Erzeugern aber nur den ersten fünf Relationen. Alle unsere Relationen sind homogen für unsere $\langle R\rangle$-Graduierung, folglich induziert sie eine $\langle R\rangle$-Graduierung auf dem Quotienten $\tilde{\mathfrak{g}}_{R,\Pi}$.

3. Wir zeigen nun, daß die Bilder $\{\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ unserer Erzeuger in $\tilde{\mathfrak{g}}$

linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir die freie k-Ringalgebra T mit Erzeugern $(\hat{y}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ alias den „nichtkommutativen Polynomring in diesen Variablen“. Er besitzt eine natürliche $\langle R\rangle$-Graduierung $T = \bigoplus T_\lambda$ mit $\hat{y}_\alpha$ homogen vom Grad $(-\alpha)$. Nun machen wir T zu einer Darstellung von $\tilde{\mathfrak{g}}$ wie folgt:

$\tilde{h}_\alpha$ operiere auf T_λ durch den Skalar $\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle$;

$\tilde{y}_\alpha$ operiere auf T durch Multiplikation von links mit $\hat{y}_\alpha$;

$\tilde{x}_\alpha$ mache die $1 \in T$ zu Null. Seine Operation auf einem beliebigen anderen Monom $\hat{y}_\beta w$ mit einem beliebigen Monom w sei induktiv erklärt durch die Formel $\tilde{x}_\alpha(\hat{y}_\beta w) = \delta_{\alpha\beta}\tilde{h}_\alpha w + \tilde{y}_\beta(\tilde{x}_\alpha w)$. Es ist leicht zu sehen, daß wir so in der Tat eine Darstellung T von $\tilde{\mathfrak{g}}$ erhalten.

Da die $\tilde{h}_\alpha$ durch linear unabhängige Endomorphismen auf T operieren, müssen sie bereits in $\tilde{\mathfrak{g}}$ linear unabhängig gewesen sein. Da die $\tilde{y}_\alpha$ auf T nicht durch Null operieren, müssen sie bereits in $\tilde{\mathfrak{g}}$ von Null verschieden sein. Dasselbe gilt für die $\tilde{x}_\alpha$. Die lineare Unabhängigkeit der Menge $\{\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ folgt dann aus der $\langle R\rangle$-Graduierung.

4. Bezeichnet X, H, Y die von den $\tilde{x}_\alpha$, beziehungsweise den $\tilde{h}_\alpha$, beziehungsweise den $\tilde{y}_\alpha$ in $\tilde{\mathfrak{g}}$ erzeugten Unteralgebren, so gilt

$$\tilde{\mathfrak{g}} = X \oplus H \oplus Y$$

In der Tat ist der Untervektorraum $X + H + Y$ offensichtlich stabil ist unter allen $\operatorname{ad}\tilde{x}_\alpha$, $\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha$ und $\operatorname{ad}\tilde{h}_\alpha$ und ist mithin eine Unteralgebra, die die Erzeuger enthält. Um zu sehen, daß unsere Summe direkt ist, reicht es zu bemerken, daß X nur homogene Komponenten zu Graden aus $|\Pi\rangle\backslash 0$ hat, Y zu Graden aus $|-\Pi\rangle\backslash 0$, und H zum Grad Null. Insbesondere bilden also die $\tilde{h}_\alpha$ für $\alpha \in \Pi$ eine Basis von H.

5. Die Abbildung $\kappa : R \to H^*$ mit $\kappa(\beta)(\tilde{h}_\alpha) := \langle\beta, \alpha^\vee\rangle$ ist eine Injektion und ihr Bild ist ein Wurzelystem $\kappa(R) \subset H^*$, für das die Bilder der $\tilde{h}_\alpha$ unter dem Auswertungsisomorphismus $H \xrightarrow{\sim} H^{**}$ ein System von einfachen Kowurzeln bilden. Weiter besitzt κ genau eine Fortsetzung zu einem Gruppenhomomorphismus $\kappa : \langle R\rangle \to H^*$ und für alle $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_\gamma$ mit $\gamma \in \langle R\rangle$ und $h \in H$ gilt die Identität $[h, x] = (\kappa(\gamma)(h))x$. Unsere von der Graduierung durch das abstrakte Wurzelgitter $\langle R\rangle$ gegebenen homogenen Komponenten $\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma$ fallen also zusammen mit den $\kappa(\gamma)$-Gewichtsräumen $\tilde{\mathfrak{g}}_{\kappa(\gamma)}$ für die adjungierte Operation von H auf $\tilde{\mathfrak{g}}$. Wir fassen im folgenden meist die durch κ gegebene Identifikation als Identität auf und notieren sie nicht mehr explizit.

6. Gegeben $\alpha \neq \beta$ setzen wir nun

$$\begin{array}{rcl}\tilde{x}_{\alpha\beta} & := & (\operatorname{ad}\tilde{x}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}\tilde{x}_\beta \\ \tilde{y}_{\alpha\beta} & := & (\operatorname{ad}\tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}\tilde{y}_\beta\end{array}$$

und behaupten in $\tilde{\mathfrak{g}}$ die Identität $[\tilde{x}_\gamma, \tilde{y}_{\alpha\beta}] = 0$ für alle γ. Hier sind verschiedene Fälle getrennt zu betrachten. Im Fall $\gamma \neq \alpha$ vertauscht $(\operatorname{ad} \tilde{x}_\gamma)$ mit $(\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)$. Ist außerdem $\gamma \neq \beta$, so folgt die Behauptung aus $[\tilde{x}_\gamma, \tilde{y}_\beta] = 0$. Ist $\gamma = \beta$, so rechnen wir

$$[\tilde{x}_\beta, \tilde{x}_{\alpha\beta}] = (\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}[\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta] = (\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)^{-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}(\langle\alpha, \beta^\vee\rangle\tilde{y}_\alpha)$$

und das ist Null im Fall $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 0$ und auch Null im Fall $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \neq 0$, da dann notwendig auch gilt $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \neq 0$. Ist schließlich $\gamma = \alpha$, so rechnen wir

$$[\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_{\beta\alpha}] = (\operatorname{ad} \tilde{x}_\alpha)(\operatorname{ad} \tilde{y}_\alpha)^{1-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}(\tilde{y}_\beta)$$

Nun aber gilt $(\operatorname{ad} \tilde{x}_\alpha)(\tilde{y}_\beta) = 0$ und $(\operatorname{ad} \tilde{h}_\alpha)(\tilde{y}_\beta) = -\langle\beta, \alpha^\vee\rangle\tilde{y}_\beta$ und folglich ist die von $\tilde{y}_\beta$ erzeugte Unterdarstellung unter der adjungierten Darstellung von $\langle\tilde{x}_\alpha, \tilde{h}_\alpha, \tilde{y}_\alpha\rangle \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ auf $\tilde{\mathfrak{g}}$ ein höchster Gewichtsmodul mit höchstem Gewichtsvektor $\tilde{y}_\beta$. Damit folgt unsere Behauptung in diesem Fall aus unserer Kenntnis der Struktur dieser Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, genauer der Formel $ef^iv = i(\lambda - i + 1)f^{i-1}v$ für einen Vektor v einer Darstellung mit $hv = \lambda v$ und $ev = 0$ aus dem Beweis von 1.2.14. Analog folgt $[\tilde{y}_\gamma, \tilde{x}_{\alpha\beta}] = 0$ für alle γ.

7. Sei nun $K \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ das von allen $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ und $\tilde{y}_{\alpha\beta}$ erzeugte Ideal, so daß nach unseren Definitionen gilt $\mathfrak{g}_{R,\Pi} = \tilde{\mathfrak{g}}/K$. Wir behaupten zunächst, daß das von den $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ in der Unteralgebra X erzeugte Ideal $I \subset X$ bereits ein Ideal von $\tilde{\mathfrak{g}}$ ist. In der Tat ist es stabil unter allen $(\operatorname{ad} \tilde{h}_\gamma)$ und nach dem Vorhergehenden auch unter allen $(\operatorname{ad} \tilde{y}_\gamma)$. Ebenso ist das von allen $\tilde{y}_{\alpha\beta}$ in Y erzeugte Ideal $J \subset Y$ bereits ein Ideal von $\tilde{\mathfrak{g}}$. Daraus folgt unmittelbar $K = I + J$ und $\mathfrak{g} = X/I \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus Y/J$ und $H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_0$.

8. Es ist nach dem vorhergehenden klar, daß die Familie $\{\bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ der Bilder unserer Erzeuger in $\mathfrak{g}$ auch linear unabhängig ist. Ebenso ist klar, daß für jede Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha := \langle\bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha\rangle \cong \mathfrak{sl}_2$ jeder unserer Erzeuger $\bar{x}_\beta, \bar{h}_\beta, \bar{y}_\beta$ in einem endlichdimensionalen $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilraum von $\mathfrak{g}$ liegt. Für jede Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha = \langle\bar{x}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \bar{y}_\alpha\rangle \cong \mathfrak{sl}_2$ ist also $\mathfrak{g}$ die Vereinigung seiner endlichdimensionalen $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilräume, denn gegeben endlichdimensionale $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabile Teilräume V, W ist auch $[V, W]$ nach der Jacobi-Identität ein endlichdimensionaler $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabiler Teilraum.

9. Da $\mathfrak{g}$ die Vereinigung seiner endlichdimensionalen $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha)$-stabilen Teilräume ist, muß für alle $\lambda \in \langle R\rangle$ mit $n := \langle\lambda, \alpha^\vee\rangle > 0$ die adjungierte Operation von $\bar{y}_\alpha$ einen Isomorphismus $(\operatorname{ad} \bar{y}_\alpha)^n : \mathfrak{g}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\lambda - n\alpha}$ liefern. Wegen $\lambda - n\alpha = s_\alpha(\lambda)$ folgt $\dim \mathfrak{g}_\lambda = \dim \mathfrak{g}_{w\lambda}$ für jedes $\lambda \in \langle R\rangle$ und jedes Element $w \in W$ der Weylgruppe unseres Wurzelsystems. Insbesondere folgt $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1$ für alle $\gamma \in R$, da für $\alpha \in \Pi$ ja $\mathfrak{g}_\alpha$ das Erzeugnis von $\bar{x}_\alpha$ sein muß.

10. Nun soll gezeigt werden, daß gilt $\mathfrak{g}_\lambda = 0$ für $\lambda \notin R \sqcup \{0\}$. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle. Sei zunächst $\lambda = n\gamma$ ein Vielfaches einer Wurzel $\gamma \in R$

mit $n \geq 2$. Wäre $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$, so hätten wir auch $\mathfrak{g}_{n\alpha} \neq 0$ für eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Die Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ liefert dann aber $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$ im Widerspruch zu dem, was wir bereits wissen. Ist andererseits λ kein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel, so zeigt das folgende Lemma 3.4.9, daß notwendig gilt $\mathfrak{g}_\lambda = 0$. Wir haben also

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\gamma \in R} \mathfrak{g}_\gamma$$

und die $\bar{h}_\alpha$ für einfache Wurzeln $\alpha \in \Pi$ bilden eine Basis von $\mathfrak{g}_0$.

11. Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist. Jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ ist ja stabil unter $(\operatorname{ad} \mathfrak{g}_0)$, also die direkte Summe seiner homogenen Anteile. Jetzt sagt uns die Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$, daß für alle $\alpha \in \Pi$ und $\gamma \in R$ gilt $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_{\gamma+\alpha}$ falls $\gamma + \alpha \in R$ und $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathfrak{g}_{\gamma-\alpha}$ falls $\gamma - \alpha \in R$. Umfaßt ein Ideal einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\gamma$ für $\gamma \in R^+$, so umfaßt es mithin nach [SPW] 2.3.10 auch einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\alpha$ für eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Umfaßt ein Ideal einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_\gamma$ für $\gamma \in R^-$, so zeigen wir analog, daß es auch einen Wurzelraum $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ umfaßt für $\alpha \in \Pi$ eine einfache Wurzel. Umfaßte ein Ideal I keinen Wurzelraum, so läge es in $\mathfrak{g}_0$, und wäre es nicht Null, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha(I) \neq 0$ und folglich umfaßte I doch einen Wurzelraum, nämlich $\mathfrak{g}_\alpha = [I, \mathfrak{g}_\alpha]$. Mithin umfaßt jedes Ideal, das nicht Null ist, für mindestens eine einfache Wurzel α entweder $\mathfrak{g}_\alpha$ oder $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Dann aber umfaßt es offensichtlich auch $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ und kann nicht abelsch sein. Folglich ist unsere Liealgebra $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

12. Es ist nun offensichtlich, daß $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_0$ eine Cartan'sche von $\mathfrak{g}$ ist und daß wir einen Isomorphismus von Wurzelsystemen

$$R \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

erhalten durch die Vorschrift $\alpha \mapsto (\bar{h}_\beta \mapsto \langle \alpha, \beta^\vee \rangle)$. $\square$

Lemma 3.4.9. *Seien $R \subset V$ ein Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein System positiver Wurzeln und W die Weylgruppe. Jedes Element des Wurzelgitters $\lambda \in \langle R \rangle$ mit $W\lambda \subset |R^+\rangle \cup |-R^+\rangle$ ist ein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel.*

Beweis. Ist λ kein ganzzahliges Vielfaches einer Wurzel, so gibt es $h \in \langle R \rangle^*_{\mathbb{Q}}$ mit $\langle \lambda, h \rangle = 0$ aber $\langle \alpha, h \rangle \neq 0$ für jede Wurzel $\alpha \in R$. Dann finden wir sicher $w \in W$ mit $\langle \alpha, wh \rangle > 0$ für alle $\alpha \in R^+$. Aus $\langle w\lambda, wh \rangle = 0$ folgt nun, daß in der Darstellung $w\lambda = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ von $w\lambda$ als Linearkombination einfacher Wurzeln negative und positive Koeffizienten vorkommen müssen. $\square$

Satz 3.4.10 (Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren). *Ordnen wir jeder komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ den Dualraum einer Cartan'schen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$*

zu mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem $\mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$*, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe} \\ \textit{halbeinfache Liealgebren} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe reduzierte} \\ \textit{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$
$$\mathfrak{g} \qquad \mapsto \qquad \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 3.4.4 über die Präsentation halbeinfacher Liealgebren. □

3.4.11. Dasselbe folgt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Die Klassifikation der Wurzelsysteme wird in [SPW] 2.3.9 besprochen.

Satz 3.4.12 (Klassifikation der einfachen Liealgebren). *Ordnen wir jeder komplexen einfachen Liealgebra* $\mathfrak{g}$ *den Dualraum einer Cartan'schen* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *zu mitsamt dem zugehörigen Wurzelsystem* $\mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$*, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe endlichdimensionale} \\ \textit{einfache Liealgebren} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Komplexe reduzierte} \\ \textit{unzerlegbare Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$
$$\mathfrak{g} \qquad \mapsto \qquad \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

3.4.13. Dasselbe folgt mit demselben Beweis über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

3.4.14. Die Killing-Klassifikation 1.1.20 folgt unmittelbar aus dem Zusammenspiel dieses Satzes mit der Klassifikation unzerlegbarer Wurzelsysteme in [SPW] 2.3.7.

Beweis. Hier muß über 3.4.12 hinaus nur noch gezeigt werden, daß eine halbeinfache komplexe Liealgebra genau dann einfach ist, wenn ihr Wurzelsystem unzerlegbar ist. Nun, jede Zerlegung des Wurzelsystems führt offensichtlich zu einer Zerlegung der zugehörigen Liealgebra in eine direkte Summe von Idealen. Umgekehrt führt jede Zerlegung einer halbeinfachen Liealgebra in eine direkte Summe von Idealen offensichtlich zu einer Zerlegung ihres Wurzelsystems. □

Bemerkung 3.4.15. Jede einfache endlichdimensionale komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist auch als reelle Liealgebra einfach. In der Tat, ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein reelles Ideal, so sind $\mathfrak{a} \cap \mathrm{i}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathrm{i}\mathfrak{a}$ komplexe Ideale, sind also jeweils Null oder ganz $\mathfrak{g}$. Aus $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$ folgt damit sofort $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathrm{i}\mathfrak{a}$. Insbesondere wäre $\mathfrak{a}$ eine einfache reelle Liealgebra. Dann aber müßte $\mathfrak{a}$ trivial operieren auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, Widerspruch.

Übungen

Übung 3.4.16 (**Invarianten in einfachen Liealgebren**). Gegeben (R, Π) ein irreduzibles Wurzelsystem mit einer Basis operiert die Gruppe S aller Automorphismen von R, die unsere Basis stabilisieren, offensichtlich auf der einfachen Liealgebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{R,\Pi}$. Im folgenden bezeichnen wir einfache Liealgebren durch das Symbol ihres Wurzelsystems. Man zeige $\mathrm{E}_6^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{F}_4$ und $\mathrm{D}_4^{\mathcal{S}_3} \cong \mathrm{G}_2$ und $\mathrm{D}_n^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{B}_{n-1}$ für $n \geq 4$ und $\mathrm{A}_{2n-1}^{\mathcal{S}_2} \cong \mathrm{C}_n$ für $n \geq 2$. Hinweis: Seien α, β die beiden Wurzeln nach der Verzweigung am Ende in Typ D_n. So liefert $s_\alpha s_\beta$ eine Spiegelung zu einer einfachen Wurzel in $\mathrm{D}_n^{\mathcal{S}_2}$. Hinweis: Man suche eine Wurzelraumzerlegung für die Invarianten in der Cartan'schen.

Übung 3.4.17 (**Deligne's exzeptionelle Serie**). Es gibt Inklusionen von halbeinfachen Liealgebren $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2 \subset \mathrm{G}_2 \subset \mathrm{D}_4 \subset \mathrm{F}_4 \subset \mathrm{E}_6 \subset \mathrm{E}_7 \subset \mathrm{E}_8$. Man könnte zwischen $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{D}_4$ noch $\mathfrak{so}(7)$ alias B_3 einfügen, vergleiche **[?]** **??**. Der Punkt ist aber, daß es so, wie sie dasteht, viele über unsere ganze Serie homogene Formeln gibt.

3.5 Reelle halbeinfache Liealgebren*

Definition 3.5.1. Eine **reelle Form eines komplexen Vektorraums** V ist ein reeller Untervektorraum $V_\mathbb{R} \subset V$ derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V_\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} V$ liefert. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß $V_\mathbb{R}$ ganz V als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt und daß jede über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Teilmenge unseres Untervektorraums $V_\mathbb{R}$ auch über $\mathbb{C}$ linear unabhängig ist in ganz V.

3.5.2 (**Reelle Formen und schieflineare Involutionen**). Gegeben ein komplexer Vektorraum V erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ V_\mathbb{R} \subset V \end{array} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \theta : V \to V \end{array} \right\}$$

wie folgt: Jeder reellen Form $V_\mathbb{R} \subset V$ ordnen wir diejenige schieflineare Involution zu, die durch die Vorschrift $\theta : a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes v \ \forall a \in \mathbb{C}, v \in V_\mathbb{R}$ gegeben ist. Jeder schieflinearen Involution $\theta : V \to V$ ordnen wir umgekehrt ihre Fixpunktmenge $V_\mathbb{R} := V^\theta$ zu.

Definition 3.5.3. Wenn für zwei reelle Formen eines komplexen Vektorraums die zugehörigen schieflinearen Involutionen kommutieren, sagen wir auch kurz, die **Formen kommutieren**.

3.5.4 (**Kommutierende reelle Formen und reelle Involutionen**). Gegeben ein komplexer Vektorraum V mit einer reellen Form $V_\mathbb{R} \subset V$ und zugehöriger schieflinearer Involution $\theta : V \to V$ erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}\text{-lineare Involutionen} \\ \sigma : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \gamma : V \to V \text{ mit } \theta\gamma = \gamma\theta \end{array} \right\}$$

wie folgt: Jedem σ werde die schieflineare Involution $a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes \sigma(v)$ zugeordnet und jedem γ seine Restriktion auf $V^\theta = V_{\mathbb{R}}$.

Definition 3.5.5. Seien $V \supset V_{\mathbb{R}}$ ein komplexer Vektorraum mit einer reellen Form. Ein komplexer Untervektorraum $W \subset V$ heiße **definiert über** $\mathbb{R}$, wenn es einen reellen Untervektorraum $W_{\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$ gibt derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} W$ liefert.

3.5.6. Seien $V \supset V_{\mathbb{R}}$ ein komplexer Vektorraum mit einer reellen Form und sei $\theta : V \to V$ die zugehörige schieflineare Involution. Offensichtlich ist ein komplexer Teilraum $W \subset V$ genau dann definiert über $\mathbb{R}$, wenn er unter θ stabil ist, wenn also in Formeln gilt $\theta(W) \subset W$ oder gleichbedeutend $\theta(W) = W$.

Definition 3.5.7. Eine **reelle Form einer** $\mathbb{C}$**-Algebra** A ist eine reelle Form $A_{\mathbb{R}} \subset A$ des Vektorraums A, die gleichzeitig eine reelle Unteralgebra von A ist. Gegeben eine $\mathbb{C}$-Algebra A liefern die Bijektionen aus 3.5.2 auch zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ A_{\mathbb{R}} \subset A \\ \text{der Algebra } A \end{array} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \theta : A \to A \\ \text{der Algebra } A \end{array} \right\}$$

Hier fordern wir von Involutionen einer Algebra zusätzlich, daß sie mit der Verknüpfung in unserer Algebra verträglich sein sollen.

Definition 3.5.8. Sei $\mathfrak{g}_0$ eine halbeinfache reelle Liealgebra. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ heißt eine **spaltende Cartan'sche**, wenn für alle $H \in \mathfrak{h}_0$ die Abbildung $\mathrm{ad}(H) : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ diagonalisierbar ist. Eine halbeinfache reelle Liealgebra heißt **spaltend**, wenn sie eine spaltende Cartan'sche besitzt.

3.5.9. Eine Cartan'sche $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ einer halbeinfachen reellen Liealgebra ist genau dann spaltend, wenn mit den Notationen $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0$ und $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$ alle Wurzeln des Wurzelsystems $\mathrm{R}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ auf $\mathfrak{h}_0$ reelle Werte annehmen.

3.5.10. Eine reelle Liealgebra heißt **kompakt**, wenn sie endlichdimensional ist mit negativ definiter Killing-Form. Die Herkunft dieser Terminologie wird in [ML] 4.2.4 erklärt: Dort zeigen wir, daß die kompakten Liealgebren genau die Liealgebren kompakter Liegruppen mit endlichem Zentrum sind. Nach 1.7.9 ist jede kompakte reelle Liealgebra halbeinfach, denn ihre Killingform ist per definitionem nicht ausgeartet.

Proposition 3.5.11 (Spezielle reelle Formen halbeinfacher Liealgebren). *Jede halbeinfache komplexe Liealgebra besitzt eine spaltende reelle Form und eine kompakte reelle Form.*

Beweis. Die Existenz spaltender reeller Formen folgt aus der Beschreibung durch Erzeuger und Relationen 3.4.4 und 3.4.8. Um die Existenz kompakter reeller Formen zu zeigen, müssen wir mehr arbeiten. Gegeben ein Wurzelsystem mit Basis $R \supset \Pi$ gibt es, wie die Beschreibung durch Erzeuger und Relationen 3.4.4 zeigt, genau einen Automorphismus der zugehörigen halbeinfachen komplexen Liealgebra

$$\tau : \mathfrak{g}_{R,\Pi} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{g}_{R,\Pi}$$

mit $\tau : h_\alpha \mapsto -h_\alpha$ und $\tau : x_\alpha \mapsto -y_\alpha$ und $\tau : y_\alpha \mapsto -x_\alpha$ in den dortigen Notationen. Er heißt die **Chevalley-Involution** und stabilisiert die reelle Unterliealgebra $\mathfrak{g}_\mathbb{R} \subset \mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{R,\Pi}$, die von den $(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ erzeugt wird. Die Einbettung dieser reellen Unteralgebra induziert nun offensichtlich einen Isomorphismus von komplexen Liealgebren

$$\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\mathbb{R} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{g}$$

Durch Transport von $\theta : a \otimes v \mapsto \bar{a} \otimes v$ erhalten wir eine schieflineare Involution θ auf $\mathfrak{g}$, die mit unserer Chevalley-Involution τ kommutiert. Per definitionem entspricht θ der reellen Form $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$. Dann aber entspricht $\theta\tau = \tau\theta$ auch einer reellen Form $\mathfrak{g}^{\tau\theta} =: \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$. Wir zeigen nun, daß die Killingform von $\mathfrak{k}$ negativ definit ist. Nach 2.3.26 ist sie schon mal negativ definit auf $\mathfrak{h}^{\theta\tau} = \langle \mathrm{i}h_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle_\mathbb{R}$. Da nach 2.3.27 und in der dortigen Notation für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ gilt $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{Q}_{>0}$ und da eh gilt $\kappa(x_\alpha, x_\alpha) = 0 = \kappa(y_\alpha, y_\alpha)$, ist die Killingform auch für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ negativ definit auf $(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})^{\theta\tau} = \langle x_\alpha - y_\alpha, \mathrm{i}x_\alpha + \mathrm{i}y_\alpha \rangle_\mathbb{R}$. Kennen wir bereits die Existenz einer Chevalley-Basis 3.5.12, so können wir dasselbe Argument ebenso für die Wurzelräume zu nicht notwendig einfachen Wurzeln verwenden und sind fertig. Alternativ können wir auch wie folgt argumentieren: Anhand der Wirkung von $\theta\tau$ auf $\mathfrak{h}$ sieht man leicht, daß $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})$ für jede Wurzel γ unter $\theta\tau$ stabil ist. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Killingform für jede Wurzel $\gamma \in R$ negativ definit ist auf $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$. Dazu erinneren wir aus [AN1] **??** die elementare Identität

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie impliziert für die adjungierte Darstellung der Liegruppe $\mathrm{SU}(2)$ die Formel

$$\exp\left(\mathrm{ad}\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da es nun einen Homomorphismus von Liealgebren $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}$ gibt mit $e \mapsto x_\alpha$, $h \mapsto h_\alpha$ und $f \mapsto y_\alpha$, folgern wir für alle einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ unmittelbar

$$\exp(\mathrm{ad}(\tfrac{\pi}{2}(x_\alpha - y_\alpha))) : h_\alpha \mapsto -h_\alpha$$

Offensichtlich ist dieser Automorphismus von $\mathfrak{g}$ auch die Identität auf $\ker \alpha \subset \mathfrak{h}$. Mithin stabilisiert unser Automorphismus die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ und operiert dort wie die Wurzelspiegelung s_α der Weylgruppe. Das zeigt, daß unser Automorphismus $\mathfrak{g}_\gamma$ in $\mathfrak{g}_{s_\alpha\gamma}$ überführt. Andererseits ist $\frac{\pi}{2}(x_\alpha - y_\alpha)$ invariant unter $\theta\tau$ und unser Automorphismus identifiziert folglich $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$ mit $(\mathfrak{g}_{s_\alpha\gamma} \oplus \mathfrak{g}_{-s_\alpha\gamma})^{\theta\tau}$. Da die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen und da die Weylgruppenbahn jeder Wurzel mindestens eine einfache Wurzel enthält, muß die Killingform damit negativ definit sein auf $(\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}_{-\gamma})^{\theta\tau}$ für jede Wurzel $\gamma \in R$ und die Existenz einer kompakten reellen Form ist gezeigt. □

Ergänzung 3.5.12 (**Chevalley-Basis**). Gegeben $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein involutiver Automorphismus mit $\tau(h) = -h$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, zum Beispiel unsere Chevalley-Involution aus dem Beweis von 3.5.11, prüft man leicht, daß man jeder Wurzel $\gamma \in R$ einen Wurzelvektor $x_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ so zuordnen kann, daß für alle Wurzeln gilt $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ und $[x_\gamma, x_{-\gamma}] = \gamma^\vee$. Weiter prüft man leicht, daß diese Wahl durch τ eindeutig bestimmt wird bis auf Vorzeichen: Genauer gibt es für jede weitere Wahl x'_γ eine Abbildung $s : R \to \{1, -1\}$ mit $x'_\gamma = s(\gamma)x_\gamma$ und $s(\gamma) = s(-\gamma)$ für alle $\gamma \in R$. Wir behaupten nun, daß mit so gewählten Wurzelvektoren für beliebige Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$ gilt

$$[x_\alpha, x_\beta] \in \mathbb{Z}x_{\alpha+\beta}$$

Ergänzen wir also unsere Wurzelvektoren durch Kowurzeln zu einer Basis von $\mathfrak{g}$, so sind alle die Koeffizienten ganzzahlig, die wir brauchen, um die Lieklammer zweier Basiselemente als Linearkombination unserer Basiselemente auszudrücken. Um unsere Behauptung zu zeigen, setzen wir $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha,\beta}x_{\alpha+\beta}$ für beliebige Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$. Die Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ liefert

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta}N_{\alpha,\beta} = (q+1)p$$

für p, q definiert durch die Eigenschaft, daß die α-Wurzelkette durch β genau von $\beta - q\alpha$ bis $\beta + p\alpha$ reicht. Man sieht das besonders gut an der Realisierung der einfachen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ durch homogene Polynome in zwei Variablen aus dem Beweis des Klassifikationssatzes 1.2.14. Bis hierher haben wir nur verwendet, daß $(x_\alpha, \alpha^\vee, x_{-\alpha})$ die Relationen der Standarbasis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ erfüllen. In unserer Situation gilt nun weiter die höchst absonderliche Formel

$$\frac{\|\alpha+\beta\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{q+1}{p}$$

für ein beliebiges weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{Q}$-Spann des Wurzelgitters. Ich kenne dafür keinen besseren Beweis als das Durchgehen aller Wurzelsysteme vom Rang zwei mit der Formel $\|\gamma\|^2/\|\beta\|^2 = \langle\gamma, \beta^\vee\rangle/\langle\beta, \gamma^\vee\rangle$ aus [SPW] 2.1.20. Mit der Invarianz $\kappa([x_\alpha, x_\beta], x_{-\alpha-\beta}) = -\kappa(x_\beta, [x_\alpha, x_{-\alpha-\beta}])$ der Killingform und der Identität $\kappa(\gamma^\vee, \gamma^\vee) = 1/\|\gamma\|^2$ für ein geeignetes weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{Q}$-Spann des Wurzelgitters ergibt sich weiter sofort

$$\frac{N_{\alpha,\beta}}{\|\alpha+\beta\|^2} = -\frac{N_{\alpha,-\alpha-\beta}}{\|\beta\|^2}$$

Zusammen liefern die drei letzten herausgehobenen Formeln unschwer die Identität $N_{\alpha,-\alpha-\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta} = -p^2$. Wenden wir nun unsere Annahme $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ an, so folgt leicht $N_{\alpha,-\alpha-\beta} = -N_{-\alpha,\alpha+\beta} = \pm p$ und $N_{\alpha,\beta} = \pm(q+1)$ und das sind ganze Zahlen.

Ergänzung 3.5.13 (**Chevalley-Gruppen**). Sei $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und einer Chevalley-Involution τ mit $\tau(h) = -h\ \forall h \in \mathfrak{h}$ und $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ und $(x_\gamma)_{\gamma\in R}$ Elemente der Wurzelräume mit $\tau(x_\gamma) = -x_{-\gamma}$ und $[x_\gamma, x_{-\gamma}] = \gamma^\vee$. Wir hatten in 3.5.12 gesehen, daß es solche x_γ gibt, daß sie bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt sind, und daß gilt $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(q+1)$ für q definiert durch die Eigenschaft, daß in R die α-Kette durch β bei $\beta - q\alpha$ beginnt. Bezeichne

$$\mathfrak{g}_\mathbb{Z} := \langle x_\gamma, \gamma^\vee \mid \gamma \in R\rangle_\mathbb{Z}$$

den durch $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \tau)$ wohlbestimmten $\mathbb{Z}$-Spann der Kowurzeln und der $\pm x_\gamma$. Er ist offensichtlich stabil unter der Lieklammer. Für jeden Kring A setzen wir $\mathfrak{g}_A := A \otimes_\mathbb{Z} \mathfrak{g}_\mathbb{Z}$. Man prüft, daß auch die Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x_\alpha)$ von $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ die Untergruppe $\mathfrak{g}_\mathbb{Z} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{Q}$ stabilisieren, ja daß für eine zusätzliche Variable t die Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} tx_\alpha)$ von $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}[t]}$ die Untergruppe $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}[t]} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}[t]}$ stabilisieren. Der einzige nichttriviale Fall ist der Nachweis von

$$\exp(\operatorname{ad} tx_\alpha)(x_\beta) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}[t]}$$

im Fall $\alpha \neq \pm\beta$. Beginnt die α-Kette durch β bei $\beta - q\alpha$, so finden wir mit der Konvention $x_\phi = 0$ für $\phi \notin R$ erst $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(q+1)x_{\alpha+\beta}$ und dann induktiv

$$(\operatorname{ad} tx_\alpha)^i(x_\beta) = \pm(q+1)(q+2)\ldots(q+i)t^i x_{i\alpha+\beta}$$

und die Behauptung folgt aus der Erkenntnis, daß $(q+1)(q+2)\ldots(q+i)/i!$ ein Binomialkoeffizient und folglich eine natürliche Zahl ist. Ist nun K ein Körper, so erhalten wir für jedes $\lambda \in K$ einen Automorphismus von $\mathfrak{g}_K$, indem wir den Isomorphismus $\mathfrak{g}_K \xrightarrow{\sim} K \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}[t]}$ mit $\mathbb{Z}[t] \to K$ gegeben durch $t \mapsto \lambda$ beachten. Die von allen diesen Automorphismen erzeugte Untergruppe von $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_K$

heißt die **Chevalley-Gruppe zum Wurzelsystem** R **und Körper** K und wir notieren sie $R(K)$. Ist R ein unzerlegbares Wurzelsystem, so ist $R(K)$ eine einfache Gruppe mit Ausnahme der vier Fälle $\mathrm{A}_1(\mathbb{F}_2), \mathrm{A}_1(\mathbb{F}_3), \mathrm{B}_2(\mathbb{F}_2), \mathrm{G}_2(\mathbb{F}_2)$. Das soll hier allerdings nicht gezeigt werden. Indem wir für K endliche Körper einsetzen, erhalten wir dann eine Vielzahl endlicher einfacher Gruppen.

Definition 3.5.14. Eine Involution ϑ einer reellen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ heißt eine **Cartan-Involution**, wenn die Fixpunktmenge der schieflinearen Involution $\vartheta_c := \vartheta \otimes c : \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ eine kompakte Liealgebra ist.

Beispiel 3.5.15. Unsere Chevalley-Involution aus dem Beweis der Existenz kompakter reeller Formen 3.5.11 ist, wenn wir sie auf die spaltende reelle Form $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ von ebendort einschränken, eine Cartan-Involution der halbeinfachen reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

3.5.16 (**Definitheitskriterium für Cartan-Involutionen**). Man überlegt sich leicht, daß eine Involution ϑ einer reellen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ genau dann eine Cartan-Involution ist, wenn die Bilinearform

$$\kappa_\vartheta(x, y) := \kappa(x, \vartheta y)$$

negativ definit ist. In der Tat ist κ_ϑ symmetrisch und ist genau dann negativ definit, wenn die Sesquilinearform $(x, y) \mapsto \kappa(x, \vartheta_c y)$ negativ definit ist auf $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, und das ist genau dann der Fall, wenn die Killingform negativ definit ist auf der Fixpunktmenge von ϑ_c. Wir verwenden hier die Notation κ sowohl für die Killingform der komplexen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ als auch für die Killingformen ihrer reellen Formen, was aber wegen [LA2] 6.1.43 unproblematisch ist.

Satz 3.5.17 (**Cartan-Involution und andere Involutionen**). *Gegeben eine reelle halbeinfache Liealgebra* $\mathfrak{g}_0$ *mit einer Cartan-Involution* ϑ *und einer weiteren Involution* σ *gibt es ein Element der Einskomponente der Automorphismengruppe* $\varphi \in (\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_0)^\circ$ *derart, daß* $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ *mit* σ *kommutiert.*

Beweis. Man prüft leicht, daß $\sigma\vartheta$ stets selbstadjungiert ist für die Bilinearform κ_ϑ aus 3.5.16. Insbesondere ist $\sigma\vartheta$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten nach dem Spektralsatz [LA2] 1.12.15. Die zugehörige Eigenraumzerlegung muß eine $\mathbb{R}^\times$-Graduierung der Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ sein. Also ist $\rho := (\sigma\vartheta)^2$ ein diagonalisierbarer Automorphismus von $\mathfrak{g}_0$ mit positiven Eigenwerten. Dasselbe folgt für alle ρ^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$, das ja dieselben Eigenräume hat, wobei sich die Eigenwerte nur um den festen Automorphismus $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$ von $\mathbb{R}_{>0}$ unterscheiden. Weiter kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_0 \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "(\sigma\vartheta)^{-1}"'] & \mathfrak{g}_0 \arrow[d, "\sigma\vartheta"] \\
\mathfrak{g}_0 \arrow[r, "\vartheta"] & \mathfrak{g}_0
\end{tikzcd}$$

und insbesondere gilt $\rho\vartheta = \vartheta\rho^{-1}$. Dasselbe folgt wieder für alle ρ^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir behaupten nun für $\alpha = 1/4$ die Identität

$$(\rho^\alpha\vartheta\rho^{-\alpha})\sigma = \sigma(\rho^\alpha\vartheta\rho^{-\alpha})$$

In der Tat gelangen wir durch $\rho^\alpha\vartheta = \vartheta\rho^{-\alpha}$ rasch zur äquivalenten Gleichung

$$\rho^{2\alpha}\vartheta\sigma = \sigma\vartheta\rho^{-2\alpha}$$

Da nun $\sigma\vartheta$ mit ρ und dann auch mit allen Potenzen von ρ kommutiert, gelangen wir weiter zur äquivalenten Gleichung $\rho^{4\alpha}\vartheta\sigma = \sigma\vartheta$, die schließlich ihrerseits sofort aus den Definitionen folgt. □

Satz 3.5.18 (Cartan-Involutionen, Existenz und Eindeutigkeit). *Jede halbeinfache reelle Liealgebra besitzt eine Cartan-Involution und je zwei Cartan-Involutionen sind zueinander konjugiert unter einem Automorphismus aus der Einskomponente der Automorphismengruppe unserer Liealgebra.*

Beweis. Jede halbeinfache komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ besitzt nach 3.5.11 eine schieflineare Involution $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mit einer kompakten Liealgebra von Fixpunkten $\mathfrak{g}^\vartheta$. Dann ist aber ϑ notwendig eine Cartan-Involution der Reellifizierung $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$, wie man an der Formel $\kappa_{\mathfrak{g}^\mathbb{R}} = 2\operatorname{Re}\kappa_\mathfrak{g}$ für die Killingform der Reellifizierung erkennt, die ihrerseits aus [LA1] 2.6.17 folgt. Ist σ eine weitere Involution von $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$, so gibt es nach 3.5.17 angewandt auf $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ einen Automorphismus $\varphi \in (\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^\mathbb{R})^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert. Nun sind $(\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^\mathbb{R})^\circ$ und $(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})^\circ$ beide die eindeutig bestimmte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^\mathbb{R})$ mit Liealgebra $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, folglich stimmen diese beiden Gruppen überein. Also ist $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ auch eine schieflineare Involution von $\mathfrak{g}$ mit einer kompakten Liealgebra von Fixpunkten. Ist nun speziell $\mathfrak{g}_0$ eine halbeinfache reelle Liealgebra und $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ ihre Komplexifizierung und $\sigma = \mathrm{id} \otimes c$ die zugehörige schieflineare Involution, so muß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ eine Cartan-Involution auf der reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{g}^\sigma$ induzieren. Das zeigt die Existenz. Gegeben zwei Cartan-Involutionen auf derselben reellen Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ gibt es wieder nach 3.5.17 ein Element der Einskomponente der Automorphismengruppe $\varphi \in (\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0)^\circ$ derart, daß $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ mit σ kommutiert. Nach dem anschließenden Lemma 3.5.19 sind aber kommutierende Cartan-Involutionen gleich. □

Lemma 3.5.19 (Kommutierende Cartan-Involutionen). *Zwei miteinander kommutierende Cartan-Involutionen auf ein und derselben halbeinfachen reellen Liealgebra sind gleich.*

Beweis. Seien $\vartheta, \theta : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ unsere beiden Cartan-Involutionen. Wir betrachten die simultane Eigenraumzerlegung. Wären unsere Involutionen verschieden, so gäbe es $X \in \mathfrak{g}_0$ mit $X \neq 0$ und $\theta X = -\vartheta X$. Es folgte $\kappa(X, \theta X) = -\kappa(X, \vartheta X)$, und hier könnten nicht beide Seiten negativ sein. Widerspruch! □

Korollar 3.5.20 (**Konjugiertheit kompakter reeller Formen**). *Je zwei kompakte reelle Formen einer halbeinfachen komplexen Liealgebra sind konjugiert unter der adjungierten Gruppe unserer komplexen Liealgebra.*

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra und $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine schieflineare Involution mit kompakter Fixpunktliealgebra $\mathfrak{g}^\vartheta$, so ist wie im Beweis von 3.5.18 ϑ eine Cartan-Involution der Reellifizierung $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ von $\mathfrak{g}$. Wieder nach dem Beweis von 3.5.18 fällt die Einskomponente der Automorphismengruppe unserer komplexen Liealgebra mit der Einskomponente der Automorphismengruppe ihrer Reellifizierung zusammen, und unter dieser Gruppe sind nach 3.5.18 je zwei Cartan-Involution der Reellifizierung und damit auch je zwei kompakte reelle Formen unserer Liealgebra zueinander konjugiert. □

3.5.21 (**Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum**). Zusammenfassend erhalten wir Bijektionen zwischen Isomorphieklassen

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\text{zusammenhängende kompakte}\\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum}\end{array}\right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{\begin{array}{c}\text{kompakte}\\ \text{Liealgebren}\end{array}\right\} \\ & & \downarrow\wr \\ \left\{\begin{array}{c}\text{abstrakte}\\ \text{Wurzelsysteme}\end{array}\right\} & \stackrel{\sim}{\leftarrow} & \left\{\begin{array}{c}\text{halbeinfache}\\ \text{komplexe Liealgebren}\end{array}\right\} \end{array}$$

Hier ist die obere Horizontale das Bilden der Liealgebra [ML] 4.2.4, die rechte Vertikale die Komplexifizierung, die eine nach 3.5.11 surjektive und nach 3.5.20 injektive Abbildung zwischen den durch den vertikalen Pfeil verbundenen Mengen liefert, und die untere Horizontale die Teilaussage 3.4.10 aus dem Beweis der Killing-Klassifikation. Der Weg von kompakten Liealgebren direkt zu Wurzelsystemen ist sogar noch etwas einfacher, weil in kompakten Liealgebren die Cartan'schen genau die maximalen abelschen Unteralgebren sind. Der Leser mag zur Übung prüfen, daß die Verknüpfung unserer Bijektionen beschrieben werden kann als die Zuordnung, die jeder kompakten Liegruppe K mit trivialem Zentrum das durch Wahl eines maximalem Torus T bestimmte und bis auf Isomorphismus dann doch davon unabhängige Wurzelsystem $\mathrm{R}(K,T) \subset \mathfrak{X}(T)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{C}$ aus [ML] 5.5.1 zuordnet, das wir mithilfe des kanonischen Isomorphismus $\mathfrak{X}(T)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{C} \stackrel{\sim}{\to} (\mathrm{Lie}_\mathbb{C}\, T)^*$ auch als Teilmenge des Dualraums der komplexifizierten Liealgebra des maximalen Torus auffassen können.

Ergänzung 3.5.22. Die zusammenhängende kompakte Liegruppe vom Typ G_2 ist die Automorphismengruppe der nicht-assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra der sogenannten Oktaven aus [AL] 3.12.4. Ich habe das allerdings nie selber nachgerechnet.

3.6 Nilpotente Liealgebren

Lemma 3.6.1. *Gegeben eine Zerlegung* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ *einer Liealgebra in die direkte Summe eine Ideals* $\mathfrak{a}$ *und einer Unteralgebra* $\mathfrak{b}$ *wird* $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$ *eine Darstellung* ρ *von* $\mathfrak{g}$*, indem wir für* $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{U}(\mathfrak{b})$ *setzen*

$$\begin{array}{rcll} \rho(a)(u) &=& au & \forall a \in \mathfrak{a} \\ \rho(b)(u) &=& bu - ub & \forall b \in \mathfrak{b} \end{array}$$

Beweis. Die Identität $[\rho(a), \rho(b)] = \rho([a, b])$ ist klar für $a, b \in \mathfrak{a}$ und für $a, b \in \mathfrak{b}$. Es bleibt, sie für $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ zu prüfen, also die Identität

$$a(bu - ub) - (bau - aub) = [a, b]u$$

für alle $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{a})$. Das aber ist offensichtlich. □

Proposition 3.6.2. *Jede endlichdimensionale nilpotente Liealgebra ist isomorph zu einer Unteralgebra einer Liealgebra von echten oberen Dreiecksmatrizen.*

Beweis. Ist unsere Liealgebra $\mathfrak{n}$ abelsch, so ist das offensichtlich. Sonst gibt es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ der Kodimension Eins, das das Zentrum von $\mathfrak{n}$ umfaßt. Mit Induktion finden wir einen endlichdimensionalen Vektorraum V und einen injektiven Liealgebrenhomomorphismus $\rho : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, dessen Bild aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. Seien $\rho : \mathrm{U}(\mathfrak{a}) \to \operatorname{End} V$ der induzierte Ringalgebrenhomomorphismus und $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ sein Kern. Nach 1.4.1 operiert jedes Produkt von $\dim V$ Elementen von $\mathfrak{a}$ durch Null auf V, also gilt für das von allen derartigen Produkten erzeugte zweiseitige Ideal J notwendig $J \subset I$. Wählen wir eine Gerade $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ und machen $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{n}$ wie in 3.6.1, so ist das zweiseitige Ideal $J \subset \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ eine Unterdarstellung. Auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$ operiert dann $\mathfrak{b}$ durch nilpotente Endomorphismen, da es bereits auf $\mathfrak{a}$ durch nilpotente Endomorphismen operiert, und $\mathfrak{a}$ operiert durch nilpotente Endomorphismen nach Konstruktion von J. Nach Übung 3.6.3 operiert dann ganz $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$. Andererseits operiert $\mathfrak{a}$ nach Konstruktion treu $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/I$ und operiert a forteriori treu auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$ und erst recht operiert das das Zentrum von $\mathfrak{n}$ treu auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$. Die Summe von $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/J$ mit der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{n}$ ist mithin eine treue Darstellung von $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums. □

Übungen

Übung 3.6.3. Sei $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ eine Zerlegung einer Liealgebra in ein Ideal $\mathfrak{a}$ und ein Vektorraumkomplement $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$. Operieren auf einer endlichdimensionalen Darstellung (V, ρ) von $\mathfrak{n}$ sowohl $\mathfrak{a}$ als auch $\mathfrak{b}$ durch nilpotente Endomorphismen, so operiert ganz $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen. Hinweis: Man betrachte die zu Null absteigende Filtrierung von V durch die Teilräume

$$\langle \rho(\mathfrak{a})^i V \rangle = \langle \rho(a_1)\rho(a_2)\ldots\rho(a_i)v \mid a_\nu \in \mathfrak{a}, v \in V \rangle$$

4 Einfache endlichdimensionale Darstellungen

4.1 Klassifikation durch das höchste Gewicht

4.1.1. Ich erinnere an Terminologie aus [HL] 2.3.1. Sei $\mathfrak{h}$ eine abelsche Liealgebra. Die Elemente des Dualraums $\mathfrak{h}^*$ heißen **Gewichte**. Für jede Darstellung M von $\mathfrak{h}$ und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ erklärt man den **Gewichtsraum** M_λ **zum Gewicht** λ als den Untervektorraum

$$M_\lambda := \{v \in M \mid Hv = \lambda(H)v \ \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Gilt $M_\lambda \neq 0$, so heißt λ ein **Gewicht von** M. Die Menge aller Gewichte einer Darstellung M einer abelschen Liealgebra $\mathfrak{h}$ notieren wir

$$\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}_\mathfrak{h}(M) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid M_\lambda \neq 0\}$$

Der Buchstabe P steht für die französische Bezeichnung „poids“.

Beispiel 4.1.2. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen Unteralgebra. Fassen wir $\mathfrak{g}$ auf als eine Darstellung von $\mathfrak{h}$ vermittels der adjungierten Operation, so bilden die von Null verschiedenen Gewichte unser Wurzelsystem R aus [HL] 2.3.8, in Formeln

$$R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{P}_\mathfrak{h}(\mathfrak{g}) \backslash 0$$

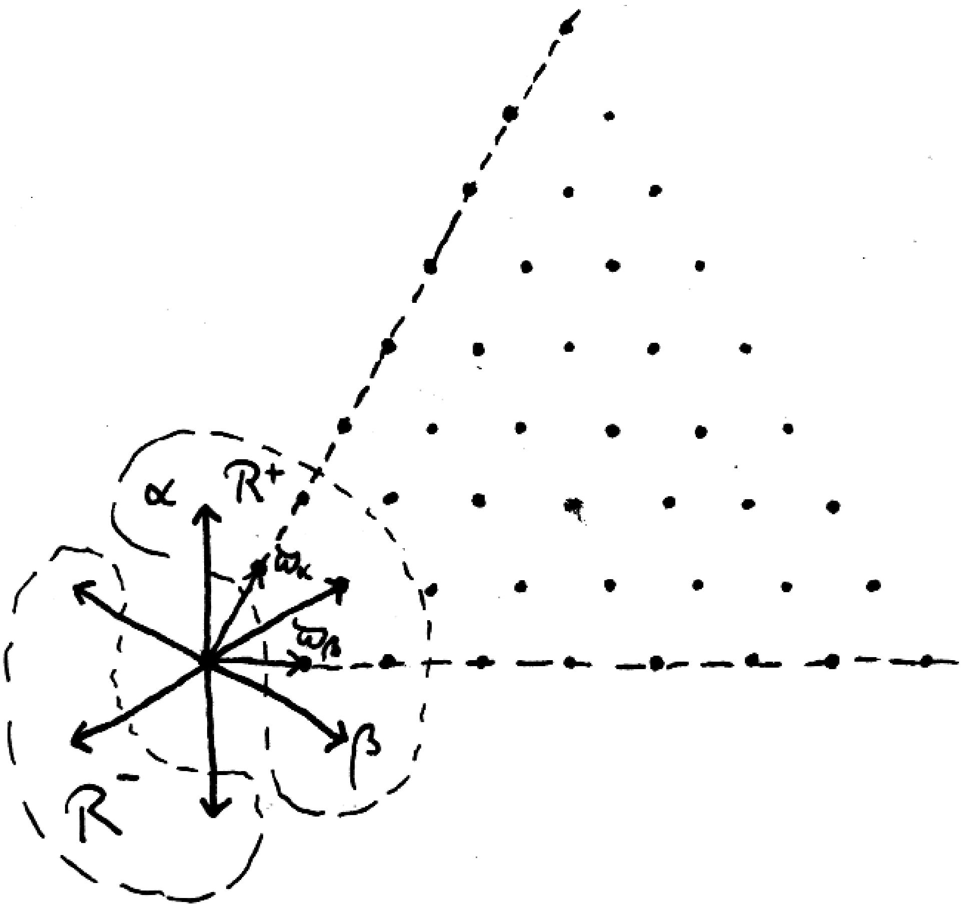
Der zu $\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ gehörige Gewichtsraum ist unser Wurzelraum $\mathfrak{g}_\alpha$. Des weiteren ist die Teilmenge $R \subset \mathfrak{h}^*$ nach [HL] 2.3.19 ein abstraktes reduziertes Wurzelsystem im Sinne unserer Definition [HL] 2.3.18 oder besser [SPW] 2.1.2.

4.1.3. Seien $R \subset V$ ein Wurzelsystem und $V_\mathbb{Q} := \langle R \rangle_\mathbb{Q}$ seine rationale Form. Die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements $V_\mathbb{Q} \backslash \bigcup_{\alpha \in R} \ker \alpha^\vee$ der Vereinigung der Spiegel der Wurzelspiegelungen nennen wir **Weylkammern** oder ausführlicher **rationale Weylkammern**, wenn V bereits ein Vektorraum über einem angeordneten Körper war und der Begriff „Weylkammer“ auch einen Alkoven der endlichen Spiegelungsgruppe W in V selbst bedeuten könnte. Gegeben eine Weylkammer $C \subset V_\mathbb{Q}$ setzen wir

$$R^+(C) := \{\alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \ \ \forall \lambda \in C\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **positiven Wurzeln zu** C. Weiter setzen wir $\bar{C} := \{\lambda \in V_\mathbb{Q} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \ \ \forall \alpha \in R^+(C)\}$ und nennen diese Menge den **Abschluß** unserer Weylkammer C. Schließlich setzen wir

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(R \subset V) := \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \ \ \forall \alpha \in R\}$$



Ein Wurzelsystem R aus sechs Wurzeln mit einer Weylkammer, ihrem System positiver Wurzeln $R^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ und den Elementen der Menge $\mathfrak{X} \cap \bar{C}$ als fetten Punkten. Darüber hinaus eingezeichnet sind die zugehörigen einfachen Wurzeln α, β sowie die beiden fundamentalen dominanten Gewichte $\varpi_\alpha, \varpi_\beta$ nach 4.2.3.

und nennen diese Untergruppe von V das **Gitter der ganzen Gewichte** unseres Wurzelsystems und seine Elemente **ganze Gewichte**. Nach [SPW] 2.1.11 erzeugen die Kowurzeln den Dualraum V^*. Es folgt unschwer $\mathfrak{X} \subset V_{\mathbb{Q}}$, vergleiche [SPW] 2.1.16.

Satz 4.1.4 (Klassifikation durch das höchste Gewicht). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und $C \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ eine Weylkammer. So erhalten wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{irreduzible endlichdimensionale} \\ \textit{Darstellungen von } \mathfrak{g} \textit{ bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{X} \cap \bar{C}$$

durch die Vorschrift, daß wir jeder irreduziblen Darstellung L das eindeutig bestimmte Gewicht λ von L zuordnen mit $\lambda + \alpha \notin \mathrm{P}(L)\ \forall \alpha \in R^+(C)$.

4.1.5. Wir zeigen in 4.1.16, daß jede einfache endlichdimensionale Darstellung genau ein Gewicht mit der behaupteten Eigenschaft hat und daß es in Bezug auf eine geeignete Teilordnung auf $\mathfrak{h}^*$ das größte oder, wie man in diesem Kontext meist sagt, das „höchste“ Gewicht unserer Darstellung ist. Wir zeigen in 4.1.16 weiter, daß je zwei einfache Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht isomorph sind. Wir zeigen zusätzlich in 4.1.21, daß das höchste Gewicht einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung stets in $\mathfrak{X} \cap \bar{C}$ liegt. Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß die im Satz behauptete Bijektion surjektiv ist. Das benötigt stärkere Hilfsmittel und wird sich im weiteren Verlauf als Konsequenz aus 4.4.7 und 4.4.10 ergeben.

4.1.6. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ mit einer ausgezeichneten Weylkammer C setzen wir $\mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}^+(C) := \mathfrak{X} \cap \bar{C}$ und nennen die Elemente dieser Menge die **dominanten Gewichte**.

Ergänzung 4.1.7. Der vorstehende Satz ist eine algebraisierte Fassung der Klassifikation der einfachen Darstellungen zusammenhängender kompakter Liegruppen, die wir in [ML] 5.8.5 besprechen. Diese Klassifikation hinwiederum ergibt sich in natürlicher Weise, wenn man weiß, daß die irreduziblen Charaktere einer kompakten topologischen Gruppe eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Klassenfunktionen bilden müssen. Das wissen wir im Fall endlicher Gruppen aus [NAS] 4.2.10 und im Allgemeinen aus [TM] 4.9.15.

Beispiel 4.1.8. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit $R^+ = \{\alpha\}$ ist $m\alpha/2$ das höchste Gewicht der m-dimensionalen einfachen Darstellung $\mathrm{L}(m)$ aus [HL] 1.2.14 und das Gitter der ganzen Gewichte ist die von $\alpha/2$ erzeugte freie abelsche Gruppe.

Vorschau 4.1.9. Ist $\mathfrak{g}$ eine einfache endlichdimensionale Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln, so besitzt nach 4.1.4 insbesondere die adjungierte Darstellung ein höchstes Gewicht $\beta \in R^+$. Es heißt die **höchste Wurzel** und kann beschrieben werden als die einzige Wurzel $\beta \in R^+$ derart, daß für alle $\alpha \in R^+$ die Summe $\alpha + \beta$ keine Wurzel mehr ist. Im Rahmen der abstrakten Theorie der Wurzelsysteme wird sie in [SPW] 2.5.6 diskutiert.

Ergänzung 4.1.10. In einem Skript von Henning Haahr Andersen kann man eine Argumentation finden, die von da ausgehend zeigt, daß eine halbeinfache Liealgebra schon durch ihr Wurzelsystem eindeutig bestimmt ist.

Lemma 4.1.11 (**Gewichtsverschiebung durch Wurzelräume**). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen. Gegeben eine Darstellung M von $\mathfrak{g}$ gilt*

$$\mathfrak{g}_\alpha M_\lambda \subset M_{\lambda+\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition eines Gewichtsraums und der Formel $HXv = [H, X]v + XHv \quad \forall H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, v \in M$. □

Lemma 4.1.12. *Sei eine Liealgebra $\mathfrak{a}$ als Vektorraum die Summe von zwei Unteralgebren $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$. Seien V eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ und $U \subset V$ eine $\mathfrak{b}$-Unterdarstellung. So ist die von U erzeugte $\mathfrak{c}$-Unterdarstellung von V sogar eine $\mathfrak{a}$-Unterdarstellung.*

Vorschau 4.1.13. Im Rahmen unserer Untersuchung der universellen Einhüllenden werden wir dies Lemma nocheinmal vom höheren Standpunkt verstehen und beweisen können, vergleiche 4.3.35.

Beweis. Bezeichne W die von U erzeugte $\mathfrak{c}$-Unterdarstellung von V. Wir müssen zeigen, daß gilt $XW \subset W$ für alle $X \in \mathfrak{b}$. Wir betrachten dazu für festes $r \in \mathbb{N}$ den Raum

$$W(r) = \langle Y_1 \ldots Y_i v \mid i \leq r,\ Y_\nu \in \mathfrak{c} \rangle$$

Sicher gilt $W = \bigcup W(r)$. Es reicht zu zeigen $XW(r) \subset W(r)$ für alle r und $X \in \mathfrak{b}$. Dazu argumentieren wir mit Induktion über r. Die Induktionsbasis bildet unsere Voraussetzung, daß $W(0) = U$ eine $\mathfrak{b}$-Unterdarstellung ist. Für den Induktionsschritt benutzen wir die Gleichung

$$XY_1 \ldots Y_r v = Y_1 X Y_2 \ldots Y_r v + [X, Y_1] Y_2 \ldots Y_r v$$

Auf den ersten Summanden wenden wir die Induktionsvoraussetzung an. Im zweiten Summanden schreiben wir $[X, Y_1] = \tilde{X} + \tilde{Y}$ mit $\tilde{X} \in \mathfrak{b}$, $\tilde{Y} \in \mathfrak{c}$ und benutzen nochmals die Induktionsvoraussetzung. □

4.1.14 (**Konsequenzen aus der Theorie der Wurzelsysteme**). Bei der Entwicklung der Theorie abstrakter Wurzelsysteme [SPW] 2.2.2 haben wir vereinbart, welche Teilmengen eines Wurzelsystems **Systeme positiver Wurzeln** heißen.

Nach [SPW] 2.2.6 erhalten wir für jedes Wurzelsystem R eine Bijektion zwischen der Menge aller Systeme positiver Wurzeln und der Menge aller Weylkammern durch die Vorschrift

$$R^+ \mapsto C(R^+) := \{\lambda \in \langle R\rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle > 0 \;\; \forall \alpha \in R^+\}$$

Darübrhinaus ist diese Bijektion die Umkehrabbildung unserer Abbildung $C \mapsto R^+(C)$ aus 4.1.3. Die Weylkammer $C(R^+)$ heißt die **dominante Weylkammer** zu unserem System von positiven Wurzeln R^+. Der Buchstabe C steht für „chambre".

4.1.15. Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Für jedes System positiver Wurzeln $R^+ \subset R$ erklären wir eine Teilordnung auf V durch die Vorschrift

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda \in \mu + |R^+\rangle$$

Hier bezeichnet $|R^+\rangle$ getreu unserer allgemeinen Konvention [AL] 3.5.1 das von R^+ in V erzeugte Untermonoid, also die Menge aller endlichen Summen positiver Wurzeln einschließlich der leeren Summe alias der Null.

Proposition 4.1.16. *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Bezeichne $\leq$ die zugehörige Teilordnung auf $\mathfrak{h}^*$. So gilt:*

1. *Ist M eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein Gewicht und $v_\lambda \in M_\lambda$ ein Vektor mit $\mathfrak{g}_\alpha v_\lambda = 0 \; \forall \alpha \in R^+$, so gilt für die von v_λ erzeugte $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung $N \subset M$ stets $N \subset \bigoplus_{\mu \leq \lambda} M_\mu$ und $N_\lambda = \mathbb{C} v_\lambda$;*

2. *Jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ hat ein $\leq$-größtes alias in der in diesem Kontext üblichen Sprechweise* **höchstes Gewicht***;*

3. *Haben zwei irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{g}$ dasselbe höchste Gewicht, so sind sie isomorph.*

4.1.17. Der hier gegebene Beweis ist noch ziemlich „zu Fuß". Mithilfe der universellen Einhüllenden geben wir einen besseren Beweis in 4.4.7.

4.1.18. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen Unteralgebra und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Es gibt durchaus von Null verschiedene unendlichdimensionale Darstellungen von $\mathfrak{g}$, die überhaupt keine $\mathfrak{h}$-Gewichte haben, in Formeln $M \neq 0$ aber $\mathrm{P}_{\mathfrak{h}}(M) = \emptyset$. Ein erstes Beispiel werden wir in Gestalt der „Einhüllenden Algebra" kennenlernen. Es gibt auch durchaus irreduzible Darstellungen mit dieser Eigenschaft. Ebenso kann es auch bei irreduziblen Darstellungen vorkommen, daß $\mathrm{P}_{\mathfrak{h}}(M)$ zwar nicht leer ist, aber kein größtes Element hat. Irreduzible endlichdimensionale Darstellungen haben jedoch stets ein höchstes Gewicht werden sogar durch dieses höchste Gewicht klassifiziert.

Beweis. Wir beginnen mit Teil 1 und betrachten die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}$ mit

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

Offensichtlich sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{n}$ Unteralgebren. Die Unteralgebra $\mathfrak{b}$ wird sich später als eine „Borel'sche Unteralgebra" erweisen und die Unteralgebra $\mathfrak{n}$ ist nilpotent, daher die Bezeichnungen. Unter unseren Annahmen ist $\mathbb{C}v_\lambda$ eine $\mathfrak{b}$-Unterdarstellung. Nach Lemma 4.1.12 ist dann die von v_λ erzeugte $\mathfrak{n}$-Unterdarstellung $N \subset M$ schon eine $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung. Teil 1 folgt so aus Lemma 4.1.11 zur Gewichtsverschiebung durch Wurzelräume. Insbesondere muß jedes maximale Gewicht einer irreduziblen Darstellung L alias jedes in Bezug auf $\leq$ maximale Element von $\mathrm{P}(L)$ bereits ihr höchstes Gewicht sein. Das zeigt Teil 2. Seien schließlich L und L' irreduzible Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht λ. Wir wählen von Null verschiedene Vektoren $v \in L_\lambda$ und $v' \in L'_\lambda$, betrachten in $L \oplus L'$ die von (v, v') erzeugte Unterdarstellung N. Wir zeigen zunächst, daß auch N irreduzibel ist. Nach Teil 1 ist N die direkte Summe seiner Gewichtsräume und der Gewichtsraum N_λ ist die Gerade $N_\lambda = \mathbb{C}(v, v')$. Jede Unterdarstellung von N ist natürlich stabil unter der Cartan'schen und ist damit auch die direkte Summe ihrer Gewichtsräume. Für jede echte Unterdarstellung von $A \subsetneq N$ gilt damit notwendig

$$A \subset \bigoplus_{\mu \neq \lambda} N_\mu$$

Damit folgt $\mathrm{pr}_1(A) \neq L$ und $\mathrm{pr}_2(A) \neq L'$. Da aber L und L' irreduzibel sind, folgt $\mathrm{pr}_1(A) = 0$, $\mathrm{pr}_2(A) = 0$ und damit $A = 0$. Mithin ist N irreduzibel und die von Null verschiedenen Homomorphismen $\mathrm{pr}_1 : N \to L$ und $\mathrm{pr}_2 : N \to L'$ müssen Isomorphismen sein. Daraus folgt schließlich $L \cong N \cong L'$ wie gewünscht. $\square$

4.1.19 (**Die Weylgruppe eines Wurzelsystems**). Gegeben $R \subset V$ ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null im Sinne unserer Definition [HL] 2.3.18 liefert uns [HL] 2.3.19 oder alternativ die Theorie abstrakter Wurzelsysteme [SPW] 2.1.13 zu jeder Wurzel α eine Kowurzel $\alpha^\vee \in V^*$ sowie eine Wurzelspiegelung $s_\alpha : V \to V$ gegeben durch $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$. Die durch diese Spiegelungen s_α erzeugte Gruppe heißt die **Weylgruppe**

$$W = \mathrm{W}(R) = \mathrm{Weyl}(R) \subset \mathrm{GL}(V)$$

Alle Wurzelspiegelungen stabilisieren nach [HL] 2.3.19 unser Wurzelsystem R, und da die Wurzeln wieder nach [HL] 2.3.19 auch V aufspannen, muß die Weylgruppe endlich sein. Sie operiert mithin als endliche Spiegelungsgruppe im Sinne von [SPW] 1.2.5 auf dem $\mathbb{Q}$-Spann $\langle R \rangle_\mathbb{Q}$ der Wurzeln. Die Theorie der Spiegelungsgruppen [SPW] 1.6.1 zeigt, daß die Weylgruppe frei und transitiv auf der Menge der Weylkammern operiert. Offensichtlich stabilisiert die Weylgruppe auch das Gitter $\mathfrak{X}$ der ganzen Gewichte.

Lemma 4.1.20 (Stabilität der Gewichte unter der Weylgruppe). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen. Ist E eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$, so sind alle Gewichte von E in $\mathfrak{h}^*$ ganz und die Menge der Gewichte ist stabil unter der Weylgruppe $W = W(\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$, in Formeln*

$$\mathrm{P}(E) \subset \mathfrak{X} \quad \textit{und} \quad W\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(E)$$

4.1.21. Ist ein Gewicht $\lambda \in \mathrm{P}(E)$ nicht dominant, gibt es also eine positive Wurzel $\alpha \in R^+$ mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < 0$, so liegt auch $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ in $\mathrm{P}(E)$ und erfüllt $s_\alpha(\lambda) > \lambda$. Die maximalen Gewichte einer endlichdimensionalen Darstellung E sind mithin sämtlich dominant. A forteriori gilt das für das höchste Gewicht einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung.

Beweis. Wir erinnern für $\alpha \in R$ die zu $\mathfrak{sl}(2; k)$ isomorphe Unteralgebra $\mathfrak{g}^\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus k\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ von $\mathfrak{g}$. Die Kowurzel $\alpha^\vee$ hat hierbei nach [HL] 2.3.12 und [HL] 2.3.16 die Eigenschaft, daß ein Isomorphismus $\mathfrak{sl}(2; k) \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{g}^\alpha$ mit $h \mapsto \alpha^\vee$ existiert für $h := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Aus der in [HL] 1.2.14 entwickelten Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2; k)$ folgt, daß die Eigenwerte von h auf endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2; k)$ stets ganze Zahlen sind. Damit folgt für alle $\lambda \in \mathrm{P}(E)$ sofort $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$. Ist weiter $0 \neq v \in E_\lambda$, $m = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ und $kx_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$, $ky_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so folgt aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2; k)$ auch $y_\alpha^m v \neq 0$ falls $m \geq 0$ beziehungsweise $x_\alpha^{-m} v \neq 0$ falls $m \leq 0$. Insbesondere gilt in jedem Fall $E_{\lambda - m\alpha} \neq 0$ und damit $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \mathrm{P}(E)$. □

Übungen

Übung 4.1.22. Gegeben eine Darstellung M einer abelschen Liealgebra $\mathfrak{h}$ und ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ liefert das Auswerten bei $1 \in k_\lambda$ stets einen Isomorphismus $\mathrm{Mod}_{k,\mathfrak{h}}(k_\lambda, M) \stackrel{\sim}{\to} M_\lambda$.

4.2 Dominante Gewichte

4.2.1. Bei der Entwicklung der Theorie abstrakter Wurzelsysteme haben wir in [SPW] 2.2.1 vereinbart, welche Teilmengen eines Wurzelsystems **Basen des Wurzelsystems** heißen. Nach [SPW] 2.2.6 und [SPW] 2.3.10 erhalten wir für jedes Wurzelsystem R eine Bijektion zwischen der Menge aller seiner Systeme positiver Wurzeln und der Menge aller seiner Basen durch die Vorschrift

$$R^+ \mapsto \Pi(R^+) := \{\alpha \in R^+ \mid \alpha \neq \beta + \gamma \;\; \forall \beta, \gamma \in R^+\}$$

Die Elemente von $\Pi(R^+)$ heißen die **einfachen Wurzeln** zu unserem System positiver Wurzeln und die Wurzelspiegelungen s_α zu den einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi(R^+)$ heißen die **einfachen Spiegelungen**. Sie sind anschaulich gesprochen genau die Spiegelungen an den „Wänden" der dominanten Kammer $C(R^+)$ und erzeugen nach [SPW] 2.2.12 die Weylgruppe. Die anschauliche geometrische Erkenntnis, daß das Bild einer Kammer unter einer Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch besagte Wand von ihrem Spiegelbild getrennt wird, übersetzt sich in die Erkenntnis [SPW] 2.2.7, daß für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi(R^+)$ gilt

$$s_\alpha(R^+) = (R^+ \backslash \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

Im Rahmen der Theorie der Spiegelungsgruppen [SPW] werden diese Anschauungen formalisiert und ausgearbeitet.

Beispiel 4.2.2. Wir betrachten das Wurzelsystem $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ von $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ in Bezug auf die Cartan'sche $\mathfrak{h}$ der Diagonalmatrizen mit Spur Null mit der Notation $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ für die Linearform, die jeder Diagonalmatrix der Spur Null ihren i-ten Diagonaleintrag zuordnet. Darin ist $R^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\}$ ein System positiver Wurzeln und $\Pi(R^+) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$ das zugehörige System von einfachen Wurzeln. Die Wurzelspiegelung zu $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ vertauscht ε_i mit ε_j und hält alle anderen ε_k fest. Die Weylgruppe stabilisiert die Menge der ε_i und ihre Operation auf dieser Menge induziert einen Isomorphismus $W \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{S}_n$ der Weylgruppe mit der symmetrischen Gruppe.

4.2.3. Ist $R^+ \subset R \subset V$ ein Wurzelsystem mit einem System von positiven Wurzeln und $\Pi = \Pi(R^+) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ die in R^+ enthaltene Basis des Wurzelsystems R, so bilden die Kowurzeln $\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_r^\vee$ eine Basis des Vektorraums V^*. Die Elemente der zur Basis der Kowurzeln dualen Basis von V notiert man

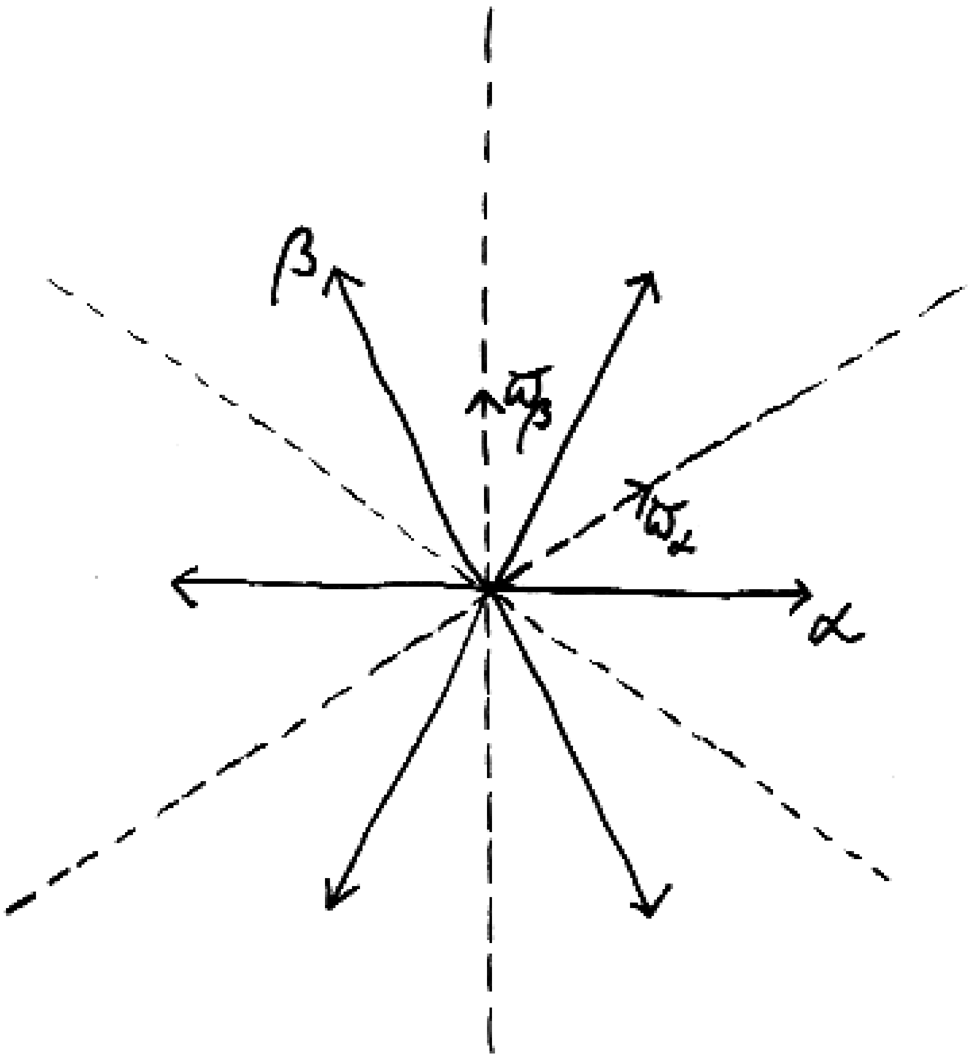
$$\varpi_1, \ldots, \varpi_r$$

mit ϖ dem π der griechischen Schreibschrift. Sie heißen die **fundamentalen dominanten Gewichte** und werden charakterisiert durch $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$. Natürlich bilden die fundamentalen dominanten Gewichte $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ eine $\mathbb{Z}$-Basis für das Gitter $\mathfrak{X}$ der ganzen Gewichte und die Menge der dominanten Gewichte hat die alternative Beschreibung

$$\mathfrak{X}^+ = \mathbb{N}\varpi_1 + \ldots + \mathbb{N}\varpi_r$$

Formeln für die Darstellung der fundamentalen dominanten Gewichte durch die einfachen Wurzeln findet man am Ende von [Bou81].

Lemma 4.2.4 (Geometrie der Weylkammer). *Gegeben $R^+ \subset R \subset V$ ein abstraktes Wurzelsystem mit einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln ist der Abschluß der dominanten Weylkammer enthalten in dem von den positiven Wurzeln erzeugten Kegel $|\mathbb{Q}_{\geq 0} R^+\rangle$.*



Eine Basis eines Wurzelsystems vom Typ A_2 mit den zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichten.

4.2.5. Hier bezeichnet $\mathbb{Q}_{\geq 0}R^+$ die Menge aller Produkte $a\alpha$ mit $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und einer positiven Wurzel $\alpha \in R^+$. Weiter bezeichnet $|\mathbb{Q}_{\geq 0}R^+\rangle$ [AL] 3.5.1 das davon in V erzeugte additive Untermonoid.

Beweis. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die einfachen Wurzeln und $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ die zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichte. Wir schreiben $\varpi_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_r\alpha_r$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ und müssen zeigen $a_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Wählen wir ein unter der Weylgruppe invariantes Skalarprodukt $(\ , \ )$ auf dem rationalen Span $V_\mathbb{Q}$ der Wurzeln, so gilt $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ für $\lambda \in V_\mathbb{Q}$ und folglich $0 < (\varpi_1, \varpi_1) = (\varpi_1, a_1\alpha_1) = a_1(\alpha_1, \alpha_1)/2$ und damit erhalten wir bereits $a_1 > 0$. Bringen wir nun alle Summanden mit $a_i \geq 0$ auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\varpi_1 - \sum_{a_i \geq 0} a_i\alpha_i = \sum_{a_j < 0} a_j\alpha_j$$

und das Skalarprodukt der rechten Seite mit der linken Seite ist ≤ 0, da rechts das α_1 nicht auftreten kann. Also sind beide Seiten Null. $\square$

4.2.6. Gegeben ein Gewicht $\lambda \in \langle R \rangle_\mathbb{Q}$ ist die Menge der Gewichte $\mu \in |\mathbb{Q}_{\geq 0}R^+\rangle$ aus dem von den positiven Wurzeln erzeugten Kegel mit $\mu \leq \lambda$ offensichtlich endlich. Nach Lemma 4.2.4 gilt dasselbe a forteriori für die Menge der Gewichte aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer mit $\mu \leq \lambda$.

4.2.7. Zwei fundamentale dominante Gewichte schließen in Bezug auf ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt stets einen schwach spitzen Winkel ein. In den Notationen des vorhergehenden Beweises unseres Lemmas 4.2.4 zur Geometrie der Weylkammer gilt nämlich

$$(\varpi_2, \varpi_1) = a_2(\varpi_2, \alpha_2) = a_2(\alpha_2, \alpha_2)/2 \geq 0$$

4.2.8 (**Darstellungen mit fundamentalem Höchstgewicht für $\mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$**). Zum Beweis der Klassifikation durch das höchste Gewicht 4.1.4 fehlt uns nun nur noch der Nachweis der Surjektivität, also der Nachweis, daß es zu jedem dominanten Gewicht auch tatsächlich eine endlichdimensionale einfache Darstellung mit diesem höchsten Gewicht gibt. Dafür ist mir im allgemeinen kein Argument eingefallen, das ohne die universelle Einhüllende auskommt. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$ können wir die Surjektivität jedoch auch hier schon zeigen: Dazu beachte man, daß die Darstellung $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ gerade das höchste Gewicht $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ hat, mit zugehörigem höchsten Gewichtsvektor $\mathrm{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{e}_i$. Hier verstehen wir implizit die übliche Cartan'sche und die übliche Basis des Wurzelsystems gegeben durch die $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$. Zu jedem dominanten Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ konstruiert man nun eine Darstellung mit höchstem Gewicht λ, indem man geeignete Tensorprodukte der $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ bildet, und ein geeigneter einfacher Summand des entsprechenden Tensorprodukts muß dann die gesuchte einfache Darstellung mit höchstem Gewicht λ sein.

Übungen

Übung 4.2.9. Im Fall des Wurzelsystems G_2 mit einer ausgeeichneten Basis zeige man, daß das Fundamentalgewicht zur kurzen einfachen Wurzel die höchste kurze Wurzel ist und das Fundamentalgewicht zur langen einfachen Wurzel die höchste Wurzel.

Übung 4.2.10 (**Ganze Gewichte für** D_n). Wir erinnern für $n \geq 2$ aus [HL] 2.3.32 das Wurzelsystem $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ mit der Bezeichnung D_n von $\mathfrak{so}(2n)$. Wir erinnern, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von der Änderung einer geraden Zahl von Vorzeichen besteht. Wir erinnern aus Übung [SPW] 2.2.17 seine Basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ zusammen mit $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. Man zeige für das Gitter der ganzen Gewichte

$$\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle_{\mathbb{Z}} + \mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$$

Man zeige, daß $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ für $1 \leq i < n-1$ die fundamentalen dominanten Gewichte ϖ_i sind, wohingegen gilt $\varpi_{n-1} = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$ und $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)/2$. Aus [ML] 2.5.12 folgt, daß für $1 \leq i < n$ die äußeren Potenzen irreduzible Darstellungen sind, und man erkennt unschwer $\bigwedge^i(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_i)$ für $1 \leq i < n-1$ und $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_{n-1} + \varpi_n)$. Weiter folgt aus [ML] 2.5.12, daß $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n})$ eine Summe von zwei irreduziblen Darstellungen ist, und man zeigt unschwer $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n}) \cong \mathrm{L}(2\varpi_{n-1}) \oplus \mathrm{L}(2\varpi_n)$. Irreduzible Darstellungen zu den höchsten Gewichten ϖ_{n-1} und ϖ_n liefert die sogenannte Clifford-Algebra, vergleiche 4.7.17.

Übung 4.2.11 (**Ganze Gewichte für** B_n). Wir erinnern aus [HL] 2.3.33 das Wurzelsystem $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ mit der Bezeichnung B_n von $\mathfrak{so}(2n+1)$, und daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von einer beliebigen Änderung der Vorzeichen besteht. Wir erinnern aus Übung [SPW] 2.2.17 seine Basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ zusammen mit $\alpha_n = \varepsilon_n$. Man zeige für das Gitter der ganzen Gewichte

$$\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle_{\mathbb{Z}} + \mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$$

Man zeige, daß die fundamentalen dominanten Gewichte gegeben werden durch $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ für $1 \leq i < n$ und $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$. In diesem Fall folgt aus [ML] 2.5.12, daß alle äußeren Potenzen der Standarddarstellung irreduzibel sind, und man prüft leicht $\bigwedge^i \mathbb{C}^{2n+1} = \mathrm{L}(\varpi_i)$ für $1 \leq i < n$ und $\bigwedge^n \mathbb{C}^{2n+1} = \mathrm{L}(2\varpi_n)$. Eine irreduzible Darstellung zum höchsten Gewicht ϖ_n liefert die sogenannte Clifford-Algebra, vergleiche 4.7.17.

Übung 4.2.12. Man erinnere die Daten zu $\mathfrak{so}(2n)$ aus 4.2.10 und zeige, daß wir, wenn wir von einem der beiden letzten Fundamentalgewichte ϖ_{n-1} oder ϖ_n eine positive Wurzel abziehen, aus der abgeschlossenen dominanten Weylkammer herausfallen. Man folgere, daß alle Gewichte von $\mathrm{L}(\varpi_{n-1})$ und $\mathrm{L}(\varpi_n)$ extreme Gewichte sein müssen, also die Punkte der Weylgruppenbahn des höchsten Gewichts. Man zeige, daß diese Weylgruppenbahn genau aus den 2^{n-1} Gewichten $(\pm\varepsilon_1 \ldots \pm \varepsilon_n)/2$ besteht, bei denen die Vorzeichen beide mit einer geraden beziehungsweise ungeraden Vielfachheit auftreten.

Übung 4.2.13. Man erinnere die Daten zu $\mathfrak{so}(2n+1)$ aus 4.2.11 und zeige, daß wir, wenn wir vom letzten Fundamentalgewicht ϖ_n eine positive Wurzel abziehen, aus der abgeschlossenen dominanten Weylkammer herausfallen. Man folgere, daß alle Gewichte von $\mathrm{L}(\varpi_n)$ extreme Gewichte sein müssen, also die Punkte der Weylgruppenbahn des höchsten Gewichts. Man zeige, daß diese Weylgruppenbahn genau aus den 2^n Gewichten $(\pm\varepsilon_1 \ldots \pm \varepsilon_n)/2$ besteht.

4.3 Die universelle einhüllende Algebra

4.3.1. Ich erinnere an unsere Notation A_{L} aus [HL] 1.1.8 für die aus einer assoziativen Algebra A mit dem Kommutator als Verknüpfung entstehende Liealgebra.

Definition 4.3.2. Seien k ein Körper und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k. Eine **universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}$** oder kurz **Einhüllende** ist ein Paar (U, can) bestehend aus einer k-Ringalgebra U und einem Liealgebrenhomomorphismus $\mathrm{can} : \mathfrak{g} \to U_{\mathrm{L}}$ derart, daß für jede k-Ringalgebra A das Vorschalten von can eine Bijektion

$$(\circ\,\mathrm{can}) : \mathrm{Ralg}_k(U, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lalg}_k(\mathfrak{g}, A_{\mathrm{L}})$$

induziert. Gegeben eine k-Ringalgebra A und ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to A_{\mathrm{L}}$ von k-Liealgebren soll es anders ausgedrückt genau einen Homomorphismus von k-Ringalgebren geben $\tilde{\varphi} : U \to A$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \mathrm{can}$, als Diagramm geschrieben

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists!\,\tilde{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

4.3.3 (**Einhüllende als adjungierter Funktor**). In der Sprache der Kategorientheorie ist das Bilden der universellen Einhüllenden, von der wir bald zeigen werden, daß sie immer existiert, der linksadjungierte Funktor zum Funktor $A \mapsto A_{\mathrm{L}}$ von der Kategorie der k-Ringalgebren in die Kategorie der k-Liealgebren.

Beispiele 4.3.4. Ist $\mathfrak{g} = 0$, so ist $U = k$ eine Einhüllende. Ist $\mathfrak{g}$ eine eindimensionale Liealgebra mit Basis $X \in \mathfrak{g}$, so ist der Polynomring in einer Veränderlichen $U = k[X]$ eine Einhüllende, mit can der offensichtlichen Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{can} : & \mathfrak{g} & \to & k[X] \\ & aX & \mapsto & aX \end{array}$$

4.3.5 (**Eindeutigkeit der Einhüllenden**). Ist (U_1, can_1) eine zweite Einhüllende von $\mathfrak{g}$, so muß mit den üblichen Argumenten die Abbildung $\tilde{\mathrm{can}}_1 : U \to U_1$ ein Isomorphismus sein. Eine Liealgebra besitzt also bis auf eindeutigen Isomorphismus höchstens eine Einhüllende. Wir werden aus diesem Grund oft den bestimmten Artikel verwenden und von der Einhüllenden reden.

4.3.6 (**Erzeugung der Einhüllenden als Ringalgebra**). Eine universelle Einhüllende U einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k wird als k-Ringalgebra stets vom Bild von $\mathfrak{g}$ erzeugt. Von der vom Bild von $\mathfrak{g}$ erzeugten Unterringalgebra $k\lfloor\mathfrak{g}\rfloor \subset U$ sieht man nämlich leicht ein, daß sie auch bereits die von einer Einhüllenden geforderte universelle Eigenschaft hat.

Lemma 4.3.7 (Darstellungen als Moduln). *Seien V eine abelsche Gruppe, $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k und* $\mathrm{can} : \mathfrak{g} \to U$ *eine Einhüllende von $\mathfrak{g}$. So gilt:*

1. *Die Einschränkung vermittels* can *zusammen mit der Einschränkung vermittels der Einbettung $k \hookrightarrow U$, $a \mapsto a1$ liefern eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Strukturen auf } V \textit{ als} \\ \textit{Modul über dem Ring } U \end{array} \right\} \overset{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Strukturen auf } V \textit{ als Darstellung} \\ \textit{der } k\textit{-Liealgebra } \mathfrak{g} \end{array} \right\}$$

2. *Diese Konstruktion liefert einen Isomorphismus von Kategorien*

$$U\text{-Mod} \overset{\sim}{\to} \mathfrak{g}\text{-Mod}$$

Beweis. Eine Struktur auf V als U-Modul ist ja per definitionem ein Ringhomomorphismus $\varphi : U \to \mathrm{End}\, V$. Die Einschränkung von φ auf $k \subset U$ macht V zu einem k-Vektorraum, und für diese Struktur induziert φ erst einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\varphi : U \to \mathrm{End}_k V$, dann einen Homomorphismus von Liealgebren $\varphi : U_{\mathrm{L}} \to \mathfrak{gl}(V)$, und schließlich einen Homomorphismus von Liealgebren $\varphi \circ \mathrm{can} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Die Einschränkungen liefern also auf V die Struktur einer Darstellung über k. Um zu zeigen, daß diese Zuordnung bijektiv ist, geben wir die inverse Abbildung an. Eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ über k ist ja per definitionem ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to (\mathrm{End}_k V)_{\mathrm{L}}$ von Liealgebren über k. Diesen Homomorphismus können wir aber nach der Definition der universellen Einhüllenden auf genau eine Weise erweitern zu einem Homomorphismus von k-Ringalgebren $\tilde{\rho} : U \to \mathrm{End}_k V$, und damit haben wir auf V die gesuchte U-Modulstruktur konstruiert. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese beiden Konstruktionen zueinander invers sind. □

4.3.8. Im folgenden bezeichnen wir für ein Element X einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ sein Bild $\mathrm{can}(X)$ in einer Einhüllenden meist kurz auch mit X.

4.3.9. Unter einem **augmentierten Ring** versteht man ganz allgemein einen Ring mitsamt einem ausgezeichneten Ideal, dem **Augmentationsideal**, das manchmal auch nur als einseitiges Ideal angenommen wird. Die Bezeichnung kommt wohl daher, daß hier die Ringstrukur durch ein zusätzliches Datum erweitert wird. Die Abbildung auf den Quotienten nach besagtem Ideal heißt dann die **Augmentation**.

4.3.10. Jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ besitzt die Einsdarstellung k. Diese führt nach dem Vorhergehenden zu einem Homomorphismus von k-Ringalgebren $\epsilon : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to k$ mit $\epsilon(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Den Kern von ϵ bezeichnen wir manchmal mit $\ker \epsilon =: \mathrm{U}^+$ und machen so unsere Einhüllende zu einem augmentierten Ring mit Augmentation ϵ.

Satz 4.3.11 (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Jede Liealgebra besitzt eine universelle Einhüllende. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k und $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $\leq$ eine totale Ordnung auf Λ, so bilden die geordneten Monome, d.h. die Monome $X_{\lambda(1)} \dots X_{\lambda(r)}$ mit $\lambda(1) \leq \lambda(2) \dots \leq \lambda(r)$ eine Basis der Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ über k.*

4.3.12. Der erste Aussage wird in einer präzisierten Form als 4.3.21 bewiesen, die Zweite im Anschluß daran.

4.3.13. Bei der Formulierung haben wir die Konvention benutzt, nach der das „leere“ Monom, als da heißt das Monom mit $r = 0$, die Einheit $1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ darstellt. Ist $X_1, \dots, X_d$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, so bilden nach unserem Satz insbesondere die Monome $X_1^{n_1} \dots X_d^{n_d}$ mit $n_i \geq 0$ eine Basis von $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Ergänzung 4.3.14. Arbeiten wir nicht über einem Körper k, sondern vielmehr über einem Kring, so gilt der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 4.3.11 analog immer noch und mit demselben Beweis. Allerdings kann er nur angewendet werden, wenn unsere Liealgebra auch eine Basis als k-Modul besitzt.

Definition 4.3.15. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k. Eine **freie Ringalgebra über** V ist ein Paar (T, can) bestehend aus einer k-Ringalgebra V und einer linearen Abbildung $c : V \to T$ derart, daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Gegeben eine k-Ringalgebra A und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to A$ gibt es genau einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\tilde{\varphi} : T \to A$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ c$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

4.3.16. Hier noch eine Umformulierung der Definition. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k. Eine **freie Ringalgebra über** V ist ein Paar (T, c) bestehend aus einer k-Ringalgebra T und einer linearen Abbildung $c : V \to T$ derart, daß für jede k-Ringalgebra A das Vorschalten von c eine Bijektion

$$\operatorname{Ralg}_k(T, A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(V, A)$$

zwischen Homomorphismen von Ringalgebren und Homomorphismen von Vektorräumen induziert.

4.3.17. Mit denselben Argumenten wie im Fall der Einhüllenden zeigt man, daß solch eine freie Ringalgebra im wesentlichen eindeutig ist, wenn sie existiert.

Ergänzung 4.3.18. In der Sprache der Kategorientheorie ist das Bilden der freien Ringalgebra, von der wir bald zeigen werden, daß sie immer existiert, der linksadjungierte Funktor zum vergeßlichen Funktor von der Kategorie der k-Ringalgebren in die Kategorie der k-Vektorräume.

Lemma 4.3.19. *Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k existiert stets eine freie Ringalgebra $\mathrm{T}(V) = \mathrm{T}_k V$ über V.*

4.3.20. Ich gebe für diese Behauptung zwei Beweise. Der erste Beweis ist in gewisser Weise sauberer. Er gibt eine explizite Konstruktion, die vom vorgegebenen Vektorraum ausgeht und keine weiteren Wahlen benötigt. Er benötigt jedoch das Tensorprodukt, das erfahrungsgemäß viele Studenten sehr lange als ein sehr abstraktes Konstrukt empfinden. Der zweite Beweis benötigt die Wahl einer Basis, hat aber den Vorteil, eine konkretere Konstruktion zu liefern.

Beweis mit multilinearer Algebra. Ich erinnere an die Konstruktion der Tensoralgebra in [LA2] 7.9.7 und ihre universelle Eigenschaft. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k. Die Tensoralgebra über V ist die k-Ringalgebra

$$\operatorname{Ten}(V) = \mathrm{T}(V) = \mathrm{T}_k V = \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der k-bilinearen Multiplikation, die eindeutig festgelegt wird durch die Vorschrift $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_t) = (v_1 \otimes \dots v_r \otimes w_1 \otimes \dots w_t)$. Die Einbettung „als zweiter Summand“ $c : V \hookrightarrow \mathrm{T}(V)$ hat dann offensichtlich die gesuchte universelle Eigenschaft. □

Beweis mit Polynomen in nichtkommutierenden Variablen. Wir wählen eine Basis $B \subset V$ und das freie Monoid $\operatorname{Mon}^{\upharpoonleft} B$ über B im Sinne von [TF] 2.5.2 alias die „Menge aller Wörter endlicher Länge in Buchstaben B, einschließlich des leeren Wortes, mit dem Hintereinanderschreiben von Wörtern als Verknüpfung“. Dann bilden wir den freien k-Vektorraum $T := k\langle \operatorname{Mon}^{\uparrow} B \rangle$ über dieser Menge oder präziser den Monoidring über diesem Monoid im Sinne von [NAS] 1.2.5 alias den „Polynomring über k in den nichtkommutierenden Variablen B“, vergleiche auch [NAS] 3.7.1. Die offensichtliche Einbettung „als Variablen“ $B \hookrightarrow T$ besitzt genau eine Fortsetzung zu einer linearen Abbildung $c : V \to T$ und ich behaupte, daß wir auf diese Weise auch eine freie Ringalgebra über V erhalten. In der Tat folgt das daraus, daß wir für jede k-Ringalgebra A im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ralg}_k(k\langle \mathrm{Mon}^\uparrow B\rangle, A) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_k(V, A) \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}^\uparrow B, A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ens}(B, A)
\end{tikzcd}$$

mit den durch die offensichtlichen Vorschaltungen gegebenen Abbildungen aus den universellen Eigenschaften des freien Monoids und des Monoidrings bereits wissen, daß die untere Horizontale und die linke Vertikale Bijektionen sind. Ebenso wissen wir aus der linearen Algebra, daß die rechte Vertikale eine Bijektion ist. Damit folgt dasselbe für die obere Horizontale, was zu zeigen war. □

Proposition 4.3.21. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über einem Körper k. Betrachten wir das Ideal $I = I(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{T}(\mathfrak{g})$, das von allen $(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ erzeugt wird, so ist die Ringalgebra $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$ mit der Abbildung $\mathrm{can} : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ eine Einhüllende von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Für diesen Beweis bezeichne $p : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ die Projektion und $c : \mathfrak{g} \to \mathrm{T}(\mathfrak{g})$ die kanonische Abbildung, wir haben also $\mathrm{can} = p \circ c$. Sicher ist can ein Homomorphismus von Liealgebren, denn wir haben

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{can}[x, y] & & (\mathrm{can}\, x)(\mathrm{can}\, y) - (\mathrm{can}\, y)(\mathrm{can}\, x) & = & [\mathrm{can}\, x, \mathrm{can}\, y] \\
\| & & \| & & \\
p[x, y] & = & p(x \otimes y - y \otimes x) & &
\end{array}$$

da nach Konstruktion gilt $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in I = \ker p$. Nach Konstruktion wird $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ als k-Ringalgebra von $\mathfrak{g}$ erzeugt, eine Abbildung von $\mathfrak{g}$ in eine k-Ringalgebra A läßt sich also auf höchstens eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to A$ fortsetzen. Um die folgende Argumentation übersichtlich zu machen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Sei also $\varphi : \mathfrak{g} \to A$ ein Liealgebren-Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in eine k-Ringalgebra A. Selbst wenn φ nur linear ist, erweitert es auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren $\hat{\varphi} : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$. Ist φ zusätzlich ein Homomorphismus von Liealgebren, so folgt sofort $\hat{\varphi}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0$, also

$\hat{\varphi}(I) = 0$. Damit faktorisiert dann $\hat{\varphi}$ wie gewünscht über einen Homomorphismus von k-Ringalgebren $\tilde{\varphi} : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to A$. □

Beweis, daß die geordneten Monome aus 4.3.11 die Einhüllende aufspannen. Wir betrachten in $U = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ den Teilraum U_r, der von allen Monomen der Länge höchstens r aufgespannt wird, also das Bild von $\bigoplus_{0 \leq s \leq r} \mathfrak{g}^{\otimes s}$ in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, und zeigen durch Induktion, daß U_r schon von den geordneten Monomen der Länge $\leq r$ aufgespannt wird. Denn sei $X_{\lambda(1)} \ldots X_{\lambda(r)}$ ein Monom. Wir wissen ja, daß gilt

$$X_{\lambda(i)} X_{\lambda(i+1)} = X_{\lambda(i+1)} X_{\lambda(i)} + [X_{\lambda(i)}, X_{\lambda(i+1)}]$$

Hier können wir den Kommutator entwickeln als (endliche) Linearkombination $\sum a_j X_\kappa$, mithin hängt die Nebenklasse eines Monoms der Länge r in U_r/U_{r-1} nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab. Mit Induktion über r sehen wir so, daß U_r von den geordneten Monomen der Länge $\leq r$ aufgespannt wird. □

4.3.22 (**Poincaré-Birkhoff-Witt für die Liealgebra einer Liegruppe**). Ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra einer Lie-Gruppe, so kann man die lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ der aufsteigenden Monome besonders leicht zeigen: Man wählt dazu in einer offenen Umgebung V des neutralen Elements e von G lokale Koordinaten $x_1, \ldots, x_r$, die bei e verschwinden, und so, daß das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$ am neutralen Element mit X_i übereinstimmt, für $1 \leq i \leq r$. Durch das Anwenden von linksinvarianten Vektorfeldern auf Funktionen wird $\mathcal{C}^\infty(V)$ ein $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-Modul. Lassen wir die aufsteigenden Monome aus $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ operieren auf Monomen in den lokalen Koordinaten und werten das Resultat am neutralen Element aus, so erhalten wir unter Verwendung der üblichen Multiindex-Schreibweise $(X^\alpha x^\alpha)(e) \neq 0$, aber $(X^\alpha x^\beta)(e) = 0$ falls gilt $\alpha \neq \beta$ und $|\alpha| \leq |\beta|$. Daraus folgt dann die lineare Unabhängigkeit der X^α. Im Übrigen kann man die universelle Einhüllende der Liealgebra einer Liegruppe mit dem Raum der Distributionen mit Träger im neutralen Element verstehen, mit der „Konvolution“ als Multiplikation. Dasselbe gilt für die universelle Einhüllende der Liealgebra einer algebraischen Gruppe in Charakteristik Null und algebraische Distributionen im Sinne von [AAG] 3.11.8.

Beweis, daß die geordneten Monome aus 4.3.11 linear unabhängig sind. Wir betrachten den Vektorraum S mit einer Basis indiziert durch alle endlichen monoton wachsenden Folgen aus Λ und versuchen, ihn zu einer Darstellung unserer Liealgebra zu machen, und zwar so, als ob er schon die Einhüllende mit einer Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis wäre. Sei genauer $S = k[\hat{\chi}]_{\chi \in \Lambda}$ der Polynomring in den Variablen $\hat{\chi}$, die ich deshalb nicht wie zuvor $\hat{X}_\chi$ schreibe, damit nicht alles Wesentliche in Indizes verschwindet, und wo ich deshalb χ statt λ schreibe, damit der Akzent besser darüberpaßt. Mit demselben Hintergedanken schreiben wir von nun an auch $\acute{\chi} := X_\chi$ für das durch $\chi \in \Lambda$ indizierte Basiselement von $\mathfrak{g}$. Nun behaupten wir:

Lemma 4.3.23. *Seien k ein Körper, $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k, $(\acute{\chi})_{\chi\in\Lambda}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $\leq$ eine Anordnung von Λ. Sei weiter $S = k[\hat{\chi}]_{\chi\in\Lambda}$ der Polynomring in Variablen $\hat{\chi}$ für $\chi \in \Lambda$. So gibt es gibt eine Operation $\mathfrak{g} \times S \to S$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf dem Vektorraum S mit der Eigenschaft*

$$\acute{\chi}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2 \dots \hat{\chi}_r = \hat{\chi}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2 \dots \hat{\chi}_r \quad \textit{wann immer gilt} \;\; \chi \leq \chi_1 \leq \dots \leq \chi_r.$$

Im Anschluß beweisen wir sogar noch die präzisere Aussage 4.3.25. Um die lineare Unabhängigkeit der geordneten Monome in 4.3.11 abzuleiten, betrachten wir S als Modul über $U = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ wie in 4.3.7. Ist $\acute{\chi}_1 \dots \acute{\chi}_r$ ein aufsteigendes Monom in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, so gilt

$$\acute{\chi}_1 \dots \acute{\chi}_r 1_S = \hat{\chi}_1 \dots \hat{\chi}_r$$

für $1_S \in S$ das neutrale Element. Da nun aber die aufsteigenden Monome linear unabhängig sind in S, müssen sie auch in U linear unabhängig gewesen sein. □

4.3.24. Um schließlich Lemma 4.3.23 zu beweisen, führen wir zusätzliche Notationen ein. Für einen Multiindex $\sigma = (\chi_1, \dots, \chi_r) \in \Lambda^r$ bezeichne $\hat{\sigma}$ das Monom $\hat{\sigma} = \hat{\chi}_1 \dots \hat{\chi}_r$. Für $\chi \in \Lambda$ soll $\chi \leq \sigma = (\chi_1, \dots, \chi_r)$ bedeuten $\chi \leq \chi_i$ für $1 \leq i \leq r$. Wir nennen einen Multiindex **monoton** genau dann, wenn gilt $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_r$. Die Länge r von σ bezeichnen wir mit $|\sigma|$. Nach Konvention gibt es genau einen Multiindex der Länge Null, er ist monoton, größer als jedes $\chi \in \Lambda$, und das zugehörige Monom ist das Eins-Element $1_S \in S$. Die $\hat{\sigma}$ für monotone σ bilden eine Basis von S. Der von den Monomen der Länge r aufgespannte Teilraum heiße S_r, es ist also $S_0 = k$, $S = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S_r$, und $S_r S_s \subset S_{r+s} \quad \forall r, s \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $S_{\leq r} := \bigoplus_{0\leq i\leq r} S_i$ und setzen $S_{\leq r} = 0$ für $r < 0$. Mit diesen Notationen zeigen wir sogar eine genauere Aussage.

Lemma 4.3.25. *Es gibt genau eine durch $r \in \mathbb{Z}$ indizierte Familie von bilinearen Abbildungen $\varphi_r : \mathfrak{g} \times S_{\leq r} \to S_{\leq r+1}$, $(x, p) \mapsto xp$ derart, daß gilt:*

1. *φ_r setzt φ_{r-1} fort;*
2. *$\acute{\chi}\hat{\sigma} = \hat{\chi}\hat{\sigma}$ für $\chi \in \Lambda,\ \sigma \in \Lambda^r$ mit $\chi \leq \sigma$;*
3. *$\acute{\chi}\hat{\sigma} \in \hat{\chi}\hat{\sigma} + S_{\leq r} \quad \forall \chi \in \Lambda,\ \sigma \in \Lambda^r$;*
4. *$\acute{\chi}(\acute{\nu}p) - \acute{\nu}(\acute{\chi}p) = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]p \quad \forall \chi, \nu \in \Lambda,\ p \in S_{\leq r-1}$.*

Beweis. Sicher haben wir solche Abbildungen φ_r für $r < 0$. Es reicht also, wenn wir zeigen: Ist φ_r bereits konstruiert mit den Eigenschaften 1–4, so gibt es genau eine Möglichkeit, φ_r zu einer Abbildung φ_{r+1} mit den Eigenschaften 1–4 auszudehnen. Sei also φ_r gegeben. Es gilt, für alle $\chi \in \Lambda$ und monotones σ der Länge $|\sigma| = r + 1$ das Bild $\varphi_{r+1}(\acute{\chi}, \hat{\sigma}) = \acute{\chi}\hat{\sigma} \in S$ anzugeben. Im Fall $\chi \leq \sigma$ definieren wir $\acute{\chi}\hat{\sigma} = \hat{\chi}\hat{\sigma}$, damit 2 erfüllt ist. Sonst schreiben wir $\sigma = (\nu, \tau)$ mit $\nu \in \Lambda$, $\tau \in \Lambda^r$, und da $\chi \not\leq \sigma$ haben wir $\chi > \nu$. Wenn 1–4 erfüllt sein sollen, so muß gelten

$$\begin{aligned} \acute{\chi}\hat{\sigma} &= \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} && \text{da } \nu \leq \tau, \\ &= \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} && \text{nach 4,} \\ &= \acute{\nu}\hat{\chi}\hat{\tau} + \acute{\nu}q + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} && \text{für } q = \acute{\chi}\hat{\tau} - \hat{\chi}\hat{\tau}, \\ &= \hat{\nu}\hat{\chi}\hat{\tau} + \acute{\nu}q + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} && \text{da } \nu \leq \chi,\ \nu \leq \tau. \end{aligned}$$

Nach Induktion gilt nun $q \in S_{\leq r}$, also sind rechts unten alle Terme schon induktiv definiert, und wir können und werden unsere Gleichung als eine induktive Definition von $\acute{\chi}\hat{\sigma} = \varphi_{r+1}(\acute{\chi}, \hat{\sigma})$ im Fall $\chi \not\leq \sigma$ auffassen. Die von φ_{r+1} geforderten Eigenschaften sind offensichtlich mit Ausnahme von 4. Nach Induktionsannahme gilt es noch zu zeigen

$$\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$$

für alle $\chi, \nu \in \Lambda$ und $\tau \in \Lambda^r$. Wir geben dieser Aussage den Namen (χ, ν, τ). Offensichtlich gilt (χ, ν, τ) für $\chi = \nu$, nach Definitionen von φ_{r+1} gilt (χ, ν, τ) unter der Voraussetzung $\chi > \nu \leq \tau$, und da die Lieklammer schiefsymmetrisch ist, folgt die Gültigkeit von (χ, ν, τ) auch für den Fall $\nu > \chi \leq \tau$. Es bleibt also nur noch, (χ, ν, τ) zu zeigen im Fall $\chi \not\leq \tau$, $\nu \not\leq \tau$. In diesem Fall schreiben wir $\tau = (\mu, \omega)$ mit $\mu \in \Lambda$, $\omega \in \Lambda^{r-1}$ und haben also $\mu < \chi$, $\mu < \nu$ und $\mu \leq \omega$. Jetzt entwickeln wir

$$\begin{aligned} \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} &= \acute{\chi}\acute{\nu}\acute{\mu}\hat{\omega} \\ &= \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\chi}\acute{\mu}\acute{\nu}\hat{\omega} \\ &= \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + [\acute{\chi}, \acute{\mu}]\acute{\nu}\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\omega} \end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Gleichung per Induktion und die dritte aus schon bekannten Fällen, indem wir schreiben $\acute{\nu}\hat{\omega} = \hat{\nu}\hat{\omega} + q$ mit $q \in S_{\leq r-2}$ und beachten, daß gilt $\mu < \nu$ und $\mu \leq \omega$. Dasselbe gilt, wenn wir χ und ν vertauschen, und indem wir auch noch $\hat{\tau} = \acute{\mu}\hat{\omega}$ entwickeln, erhalten wir die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} &= \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\omega} + [\acute{\chi}, \acute{\mu}]\acute{\nu}\hat{\omega} \\ \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} &= \acute{\nu}[\acute{\chi}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\omega} + [\acute{\nu}, \acute{\mu}]\acute{\chi}\hat{\omega} \\ [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} &= [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\acute{\mu}\hat{\omega} \end{aligned}$$

Unser Ziel ist, noch in unserem speziellen Fall die Formel

$$\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$$

zu zeigen. Aber ziehen wir bei unseren drei Gleichungen von eben die beiden unteren von der oberen ab, so ergibt sich für $\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} - [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$ nach kurzer Rechnung mit Hilfe der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} &[\acute{\chi}, [\acute{\nu}, \acute{\mu}]]\hat{\omega} + [[\acute{\chi}, \acute{\mu}], \acute{\nu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}[\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\omega} - [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\acute{\mu}\hat{\omega} = \\ &\qquad = ([[\acute{\chi}, [\acute{\nu}, \acute{\mu}]] + [\acute{\nu}, [\acute{\mu}, \acute{\chi}]] + [\acute{\mu}, [\acute{\chi}, \acute{\nu}]])\hat{\omega} = 0 \qquad \square \end{aligned}$$

Definition 4.3.26. Die **opponierte Algebra** A^{opp} zu einer k-Algebra A wird erklärt dadurch, daß man auf dem Vektorraum A die opponierte Verknüpfung betrachtet, die gegeben wird durch $a^\circ * b^\circ := (b \cdot a)^\circ$.

4.3.27. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so ist auch $\mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$ eine Liealgebra und die Multiplikation mit (-1) ist ein Algebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$.

4.3.28. Ist $\mathfrak{g} \to U$ eine Einhüllende, so auch dieselbe Abbildung $\mathfrak{g}^{\mathrm{opp}} \to U^{\mathrm{opp}}$. Insbesondere setzt sich die Multiplikation mit $(-1) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\mathrm{opp}}$ fort zu einem Isomorphismus assoziativer Algebren $S : U \xrightarrow{\sim} U^{\mathrm{opp}}$, den wir den **prinzipalen Antiautomorphismus** von U nennen und $u \mapsto u^t$ notieren. Ist V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und $u \in U$, so haben wir für die kontragrediente Darstellung V^* die Formel $(uf)(v) = f(u^t v)$ für alle $f \in V^*$, $v \in V$ und $u \in U$.

4.3.29. Im folgenden verwende ich Grundlagen der Theorie der filtrierten und graduierten Ringe, wie sie etwa in [KAG] 7.1 entwickelt werden. Die Tensoralgebra $\mathrm{T}(V)$ über einem Vektorraum V trägt eine offensichtliche Graduierung. Definieren wir wie in [KAG] 3.5.1 die **symmetrische Algebra**

$$\mathrm{Sym}(V) := \mathrm{S}(V) := \mathrm{T}(V)/\langle x \otimes y - y \otimes x \rangle$$

als die Einhüllende der abelschen Liealgebra V, so erbt $\mathrm{S}(V)$ eine Graduierung von $\mathrm{T}(V)$. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so erbt $U = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ zumindest noch die Filtrierung von $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ und wird so eine filtrierte Ringalgebra $0 = U^{\leq -1} \subset U^{\leq 0} \subset U^{\leq 1} \subset U^{\leq 2} \subset \ldots$ mit $U^{\leq 0} = k$, $U^{\leq 1} = k \oplus \mathfrak{g}$.

Satz* 4.3.30 (Poincaré-Birkhoff-Witt ohne Koordinaten). *Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die beiden Surjektionen $\mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ und $\mathrm{T}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\,\mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$ haben denselben Kern und definieren folglich einen Isomorphismus von graduierten k-Ringalgebren*

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$$

Beweis. Das mag der Leser zur Übung selbst aus dem Satz von Poincaré, Birkhoff und Witt 4.3.11 folgern. □

Korollar 4.3.31. *Die Einhüllende einer Liealgebra ist stets ein Integritätsring. Die Einhüllende einer endlichdimensionalen Liealgebra ist stets noethersch.*

Beweis. Das folgt sofort aus den Lemmata [KAG] 7.2.9 und [KAG] 7.2.10, nach denen ein Ring mit einer bei Null beginnenden auschöpfenden Filtrierung ein Integritätsring beziehungsweise noethersch sein muß, wenn das für den assoziierten graduierten Ring gilt. Da nun aber über Körpern Polynomringe Integritätsringe sind und Polynomringe in endlich vielen Variablen noethersch nach dem Hilbert'schen Basissatz, folgt das Korollar. □

Übungen

Übung 4.3.32. Sei e, f, h die übliche Basis von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ mit $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$. Man schreibe f^2he in der Einhüllenden von $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ als Linearkombination geordneter Monome für die Ordnung e, h, f.

Übung 4.3.33. Gegeben eine bilineare Verknüpfung b auf einem Vektorraum $\mathfrak{g}$ über einem Körper k kann man stets in der Tensoralgebra $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ das von allen $x \otimes y - y \otimes x - b(x,y)$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ erzeugte Ideal $I = I(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{T}(\mathfrak{g})$ betrachten und den Quotientenring $U := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$ bilden. Man zeige, daß die Verknüpfung $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U$ genau dann injektiv ist, wenn b antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt.

Übung 4.3.34. Jeder Homomorphismus von Liealgebren läßt sich auf genau eine Weise ausdehnen zu einem Homomorphismus zwischen ihren Einhüllenden.

Übung 4.3.35. Ist eine Liealgebra $\mathfrak{a}$ über einem Körper k als k-Vektorraum die Summe von zwei Unteralgebren $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, so induziert die Multiplikation eine Surjektion

$$\mathrm{U}(\mathfrak{c}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{a})$$

Man leite aus dieser Erkenntnis einen neuen Beweis von Lemma 4.1.12 ab. Diejenigen Leser, die mit allgemeinen Tensorprodukten vertraut sind, mögen gleich zeigen, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{c}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{b})} \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ induziert, und damit bereits eine Verallgemeinerung der anschließenden Übung.

Übung 4.3.36. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$ eine Zerlegung als k-Vektorraum einer Liealgebra über einem Körper k in die direkte Summe von zwei Unteralgebren, so induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\mathrm{U}(\mathfrak{c}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{a})$$

Übung 4.3.37 (**Casimir-Operator in der Einhüllenden**). Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra und $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Wir wählen eine Basis $x_1, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ von $\mathfrak{g}$, bezeichnen mit $x^1, \ldots, x^n$ die bezüglich b duale Basis, charakterisiert durch $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$, und setzen

$$C = C_b := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i$$

So hängt $C_b \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nicht von der Wahl der Basis unserer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ab und liegt im Zentrum der Einhüllenden, in Formeln $uC = Cu \ \forall u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Ergänzende Übung 4.3.38 (**Die Einhüllende als Hopf-Algebra**). Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k mit Einhüllender U läßt sich die Abbildung

$\mathfrak{g} \to U \otimes_k U$ gegeben durch $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$ auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren

$$\Delta : U \to U \otimes_k U$$

fortsetzen, und wir erhalten so eine Hopfalgebra im Sinne von [AAG] **??** mit dem prinzipalen Antiautomorphismus als Antipode.

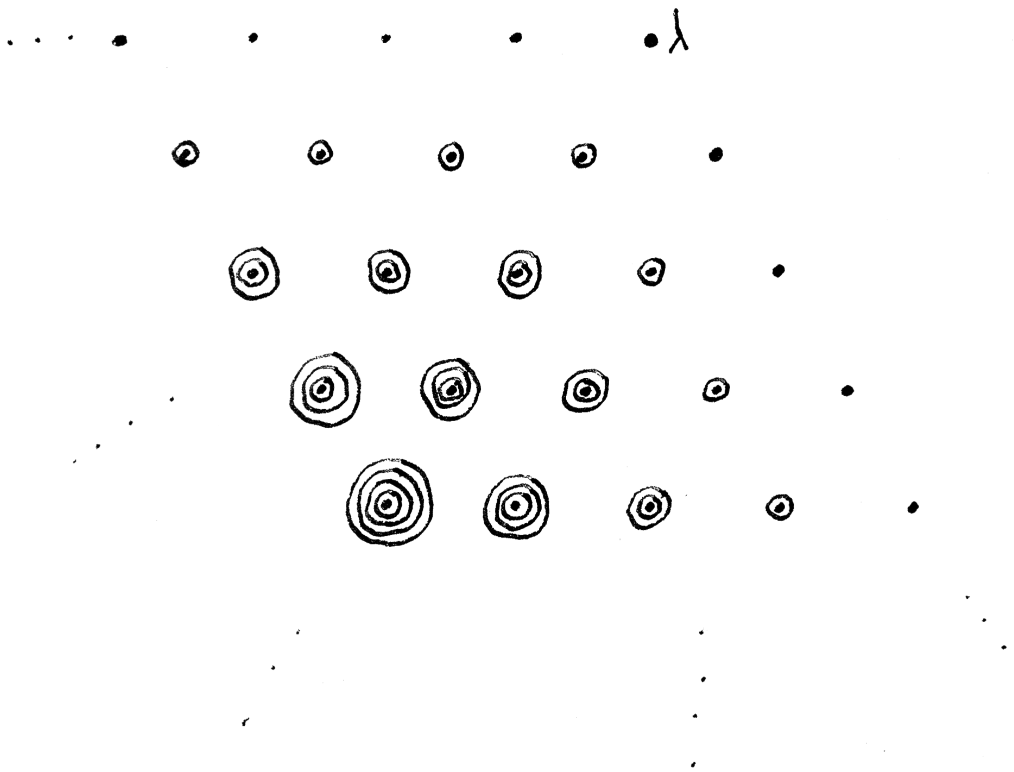
Ergänzende Übung 4.3.39 (**Satz von Friedrichs**). Gegeben eine Liealgebra über einem Körper k der Charakteristik Null sind die primitiven Elemente ihrer Einhüllenden, als da heißt die Elemente a mit $\Delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, genau die Bilder der Elemente der Liealgebra. Hinweis: Die Komultiplikation ist mit der Filtrierung verträglich und die auf der assoziierten Graduierten induzierte Komultiplikation ist die Komultiplikation der symmetrischen Algebra nach [AAG] **??**. Deren primitive Elemente aber kennen wir aus [AAG] 1.2.12.

Ergänzende Übung 4.3.40. Ist V ein Vektorraum über einem Körper einer Charakteristik $p > 0$ und bezeichnet $A^{[p]} \in \operatorname{End} V$ die p-te Potenz eines Endomorphismus $A \in \operatorname{End} V$ und $A^p \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}(V))$ die p-te Potenz von A in $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}(V))$, so gehören die Elemente $A^p - A^{[p]}$ zum Zentrum von $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}(V))$. Hinweis: Man bemerke $A^{(\cdot p)} \cdot X - X \cdot A^{(\cdot p)} = ((A\cdot) - (\cdot A))^p(X)$ für Elemente A, X einer beliebigen assoziativen k-Algebra mit Multiplikation $\cdot$, was hinwiederum aus der binomischen Formel folgt.

Ergänzende Übung 4.3.41. Gegeben ein Körper oder allgemeiner ein Kring k und eine Menge I zeige man, daß die kanonische Abbildung $\operatorname{Lalg}_k^{\curlywedge} I \to \operatorname{Ralg}_k^{\curlywedge} I$ der freien Liealgebra in die freie Ringalgebra die von einer universellen Einhüllenden geforderte universelle Eigenschaft hat. Insbesondere ist sie als Abbildung von k-Moduln nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 4.3.14 eine spaltende Injektion. Hat unser Körper k die Charakteristik Null, so kann insbesondere nach dem Satz von Friedrichs 4.3.39 das Bild dieser Abbildung beschrieben werden als die Menge aller $x \in R := \operatorname{Ralg}_k^{\curlywedge} I$ mit $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ für den Ringalgebrenhomomorphismus $\Delta : R \to R \otimes_k R$ gegeben durch $\Delta(i) = i \otimes 1 + 1 \otimes i$ für alle $i \in I$.

4.4 Konstruktion von Moduln mit höchstem Gewicht

4.4.1. Bei der Untersuchung der einfachen endlichdimensionalen Darstellungen einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ mußten wir die Frage offenlassen, ob jedes dominante Gewicht in der Tat das höchste Gewicht einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung ist. Unter Zuhilfenahme der universellen Einhüllenden können wir diese Frage nun beantworten.



Dieses Bild soll die Struktur des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$ für die Liealgebra $\mathfrak{sl}(3)$ mit höchstem Gewicht λ veranschaulichen. Die Papierebene ist dazu in geeigneter Weise mit dem reell-affinen Teilraum $\lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$ im Dualraum der Cartan'schen zu identifizieren. Die fetten Punkte sind dann die Gewichte der von Null verschiedenen Gewichtsräume, n Kringel deuten an, daß der entsprechende Gewichtsraum die Dimension $n + 1$ hat.

Definition 4.4.2. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ betrachten wir in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ das Linksideal I_λ, das erzeugt wird von allen $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ mit $\alpha \in R^+$ und allen $H - \lambda(H)$ mit $H \in \mathfrak{h}$. Der Quotient

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+) := \mathrm{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda$$

nach diesem Linksideal heißt der **Verma-Modul zum höchsten Gewicht** λ. Die Nebenklasse von $1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ bezeichnen wir mit $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ und nennen sie den **kanonischen Erzeuger des Vermamoduls** $\Delta(\lambda)$.

Proposition 4.4.3 (Struktur von Vermamoduln). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gilt:*

1. *Sind $\alpha, \ldots, \beta \in R^+$ die positiven Wurzeln in einer fest gewählten Reihenfolge und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ Erzeuger der Wurzelräume der negativen Wurzeln, so bilden die Vektoren $y_\alpha^{m(\alpha)} \ldots y_\beta^{m(\beta)} v_\lambda$ mit $m \in \mathrm{Ens}(R^+, \mathbb{N})$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$;*

2. *Der Verma-Modul $\Delta(\lambda)$ besitzt eine Gewichtsraumzerlegung der Gestalt*

$$\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$$

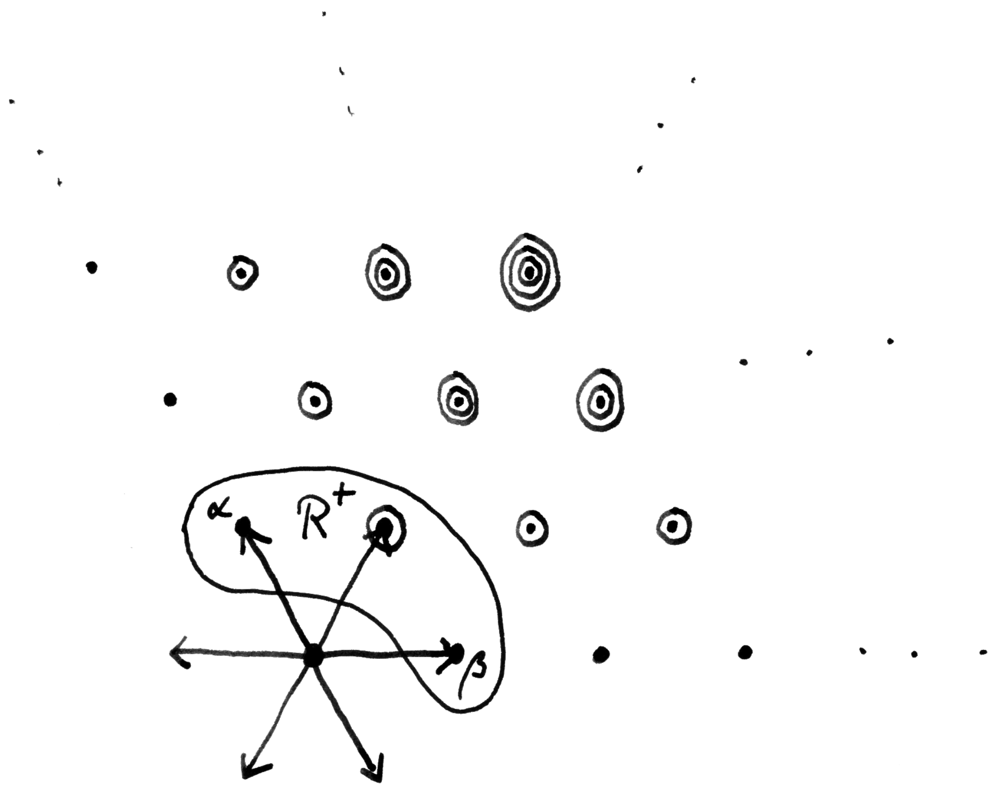
   und sein höchster Gewichtsraum $\Delta(\lambda)_\lambda$ ist eindimensional mit Basis v_λ;

3. *Bezeichnet $\mathcal{P} : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{N}$ die* **Kostant'sche Partitionsfunktion***, die zählt, auf wieviele verschiedene Weisen sich ein Gewicht zerlegen läßt in eine Summe positiver Wurzeln, so erhalten wir für die Dimensionen der Gewichtsräume unserer Vermamoduln feiner die Formel*

$$\dim_k \Delta(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu)$$

Ergänzung 4.4.4. Betrachten wir in $\mathfrak{g}$ die Unteralgebra $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so ist $\Delta(\lambda)$ in anderen Worten ein freier $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Modul vom Rang Eins mit Basis v_λ. In Formeln ausgedrückt liefert also die Multiplikation eine Bijektion $\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\lambda)$, $u \mapsto uv_\lambda$. All das sind Umformulierungen der ersten Aussage der Proposition. In dieser Form aber gelten sie in größerer Allgemeinheit, vergleiche etwa 4.5.5.

4.4.5 (**Kostant'sche Partitionsfunktion**). Bei der Definition der Kostant'schen Partitionsfunktion werden Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, als gleich betrachtet. Im Extremfall $\mu = 0$ vereinbaren wir $\mathcal{P}(0) = 1$,



Dieses Bild zeigt ein Wurzelsystem in der Papierebene, aufgefaßt als Vektorraum mit Ursprung im Ausgangspunkt aller Pfeile. Die drei Wurzeln innerhalb des nierenförmigen Bereichs bilden darin ein System positiver Wurzeln. Die zugehörige Kostant'sche Partitionsfunktion nimmt nur an den fett eingezeichneten Punkten von Null verschiedene Werte an, und zwar den Wert Eins bei einfachen Punkten, den Wert Eins bei einfachen fetten Punkten, den Wert Zwei bei einmal umkringelten fetten Punkten etc. Zum Beispiel hätten wir $\mathcal{P}(2\alpha + 3\beta) = 3$.

in der Tat läßt sich ja die Null auf genau eine Weise als Summe positiver Wurzeln schreiben, indem wir nämlich die Summe von überhaupt keiner positiven Wurzel nehmen. In Formeln können wir die Kostant'sche Partitionsfunktion schreiben als

$$\mathcal{P}(\lambda) := \operatorname{card}\left\{m \in \operatorname{Ens}(R^+, \mathbb{N}) \mid \lambda = \textstyle\sum_{\alpha \in R^+} m(\alpha)\alpha\right\}$$

Beweis. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{C}[H_1, \ldots, H_r]$ in r Veränderlichen. Gegeben Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ sieht man leicht ein, daß die Familie aller Polynome der Gestalt $(H_1 - \lambda_1)^{n(1)} \ldots (H_r - \lambda_r)^{n(r)}$ für Multiindizes $n : \{1, \ldots, r\} \to \mathbb{N}$ eine $\mathbb{C}$-Basis unseres Polynomrings bildet. Bilden speziell $H_1, \ldots, H_r$ eine Basis unserer Cartan'schen $\mathfrak{h}$ und sind $\alpha, \ldots, \beta \in R^+$ unsere positiven Wurzeln in einer fest gewählten Reihenfolge und $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ sowie $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ Basisvektoren, so folgt aus Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 4.3.11 zusammen mit dieser Erkenntnis, daß auch die Produkte

$$y_\alpha^{m(\alpha)} \ldots y_\beta^{m(\beta)} (H_1 - \lambda_1)^{n(1)} \ldots (H_r - \lambda_r)^{n(r)} x_\alpha^{l(\alpha)} \ldots x_\beta^{l(\beta)}$$

für $m, l : R^+ \to \mathbb{N}$ und $n : \{1, \ldots, r\} \to \mathbb{N}$ eine $\mathbb{C}$-Basis der Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ bilden. Bezeichnet $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ die Unteralgebra $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ aus 4.1.16, so gilt Analoges für $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$, wenn wir die Faktoren y_α weglassen. Nun haben wir Homomorphismen $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ von Liealgebren, wo der Erste die Injektion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{b}$ spaltet und alle Wurzelvektoren zu Null macht und der Zweite unsere Linearform λ ist. Sie induzieren einen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \to \mathbb{C}$, dessen Kern genau aus allen nichttrivialen Monomen unserer Basis besteht. Diese bilden folglich ein Ideal in $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$. Multiplizieren wir noch beliebige Elemente unserer Basis von $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ davor, so erhalten wir ein Erzeugendensystem über $\mathbb{C}$ eines Linksideals von $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Damit ist offensichtlich, daß unser Linksideal I_λ beschrieben werden kann, indem wir obige Basis der Einhüllenden $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ bilden mit $\lambda_i := \lambda(H_i)$ und dann darin das Erzeugnis der Basisvektoren mit $n \neq 0$ oder $l \neq 0$ betrachten. Folglich bilden die Nebenklassen der $y_\alpha^{m(\alpha)} \ldots y_\beta^{m(\beta)}$ für $m : R^+ \to \mathbb{N}$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$. Per definitionem gilt $Hv_\lambda = \lambda(H)v_\lambda$ für alle $H \in \mathfrak{h}$. In anderen Worten ist v_λ ein Gewichtsvektor zum Gewicht λ ist. Daraus folgen die beiden anderen Teile der Proposition unmittelbar. □

Lemma 4.4.6 (Universelle Eigenschaft von Verma-Moduln). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So liefert für jede Darstellung M von $\mathfrak{g}$ und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ das Auswerten $\varphi \mapsto \varphi(v_\lambda)$ am kanonischen Erzeuger $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$ eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} \{v \in M_\lambda \mid \mathfrak{g}_\alpha v = 0 \ \forall \alpha \in R^+\}$$

Beweis. Wir erinnern, daß für jeden Modul M über einem Ring R das Auswerten beim neutralen Element 1_R eine Bijektion $\operatorname{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\sim} M$ induziert. Die universelle Eigenschaft von Quotienten [KAG] 1.3.10 zeigt dann, daß für jedes Linksideal $I \subset R$ das Auswerten an $1_R + I$ eine Bijektion

$$\operatorname{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\sim} \{m \in M \mid Im = 0\}$$

induziert. Da in unserer Situation nach Annahme gilt $I_\lambda v = 0$, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 4.4.7 (Klassifikation einfacher Höchstgewichtsmoduln). *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. So gilt:*

1. *Für jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ besitzt der Vermamodul $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+)$ einen größten echten Untermodul* $\operatorname{rad} \Delta(\lambda)$*;*
2. *Der Quotient* $\mathrm{L}(\lambda, R^+) = \mathrm{L}(\lambda) := \Delta(\lambda)/\operatorname{rad} \Delta(\lambda)$ *ist eine einfache Darstellung und wir erhalten so eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Einfache Darstellungen von } \mathfrak{g} \textit{ mit einem} \\ R^+\textit{-höchsten Gewicht, bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \lambda & \mapsto & \mathrm{L}(\lambda) \end{array}$$

3. *Besitzt eine einfache Darstellung ein maximales Gewicht, so ist dies Gewicht bereits ihr höchstes Gewicht.*

4.4.8 (**Terminologisches zu Radikalen**). Gegeben ein Modul M über einem Ring R erklärt man ganz allgemein das **Radikal** $\operatorname{rad} M$ **von** M als den Schnitt aller Homomorphismen von M zu einfachen R-Moduln. Im Fall des Ringes selbst, betrachtet als R-Linksmodul, ist das genau unser Jacobson-Radikal aus [NAS] 3.6.1. Dahingegen versteht man unter dem Radikal eines Ideals im allgemeinen wie in [KAG] 1.6.14 etwas völlig anderes als sein Radikal als Modul. Wenn es nötig sein sollte, werde ich unterscheiden zwischen dem **Modulradikal** und dem **Potenzradikal** eines Ideals in einem Ring.

Beispiel 4.4.9. Im allgemeinen bezeichnet meist ρ die Halbsumme der positiven Wurzeln. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ und $R^+ = \{\alpha\}$ setzen wir dieser Konvention vorgreifend bereits hier $\rho := \alpha/2$. Damit ist also unsere einfache Darstellung $\mathrm{L}(m)$ der Dimension $(m+1)$ aus [HL] 1.2.14 in unserer Notation hier die einfache Darstellung $\mathrm{L}(m\rho)$ mit höchstem Gewicht $m\rho$.

Beweis. Mit $\Delta(\lambda)$ zerfällt nach [LA1] 6.6.19 jeder $\mathfrak{h}$-Untermodul $N \subset \Delta(\lambda)$ auch in Gewichtsräume $N = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} N_\mu$. Ist N ein $\mathfrak{g}$-Untermodul, so folgt aus $N_\lambda \neq 0$ schon $N = \Delta(\lambda)$. Ist N ein echter $\mathfrak{g}$-Untermodul, so gilt mithin $N \subset \bigoplus_{\mu \neq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$. Die Summe von allen echten Untermoduln ist also selbst immer noch ein echter Untermodul. Der Quotient $\mathrm{L}(\lambda) = \Delta(\lambda)/\operatorname{rad}\Delta(\lambda)$ ist natürlich eine einfache Darstellung mit höchstem Gewicht λ. Umgekehrt ist nach der universellen Eigenschaft von Vermamoduln 4.4.6 jede einfache Darstellung mit höchstem Gewicht λ ein Quotient von $\Delta(\lambda)$, und der Kern einer solchen Surjektion muß der größte Untermodul von $\Delta(\lambda)$ sein. Damit ist der Satz bewiesen. □

Proposition 4.4.10. *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sind gleichbedeutend:*

1. *Der einfache Modul $\mathrm{L}(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ ist endlichdimensional, in Formeln $\dim \mathrm{L}(\lambda) < \infty$;*

2. *Das Gewicht λ ist dominant, in Formeln $\lambda \in \mathfrak{X}^+$.*

4.4.11. (1) ⇒ (2) hatten wir schon als 4.1.20 bewiesen. Zum Beweis der anderen Richtung holen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen etwas weiter aus. Wir erinnern an die Halbsumme ρ der positiven Wurzeln und die Formel $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ für α eine einfache positive Wurzel, siehe [SPW] 2.2.16.

Definition 4.4.12. Bezeichne wie üblich ρ die Halbsumme der positiven Wurzeln. Wir definieren die „zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene“ Operation von W auf $\mathfrak{h}^*$, die sogenannte **dot-Operation**, durch die Formel

$$x \cdot \lambda := x(\lambda + \rho) - \rho$$

Lemma 4.4.13. *Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und $R^+ \subset \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein System positiver Wurzeln. Für jede einfache Wurzel α und jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ gibt es eine Injektion von $\mathfrak{g}$-Moduln*

$$\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$$

Ergänzung 4.4.14. Wir werden später zeigen, daß dieselbe Aussage allgemeiner für jede positive Wurzel $\alpha \in R^+$ gilt.

Beweis. Für eine einfache Wurzel α gilt $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ nach [SPW] 2.2.16, folglich ist $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ gleichbedeutend zu $n := \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ und wir haben $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - (n+1)\alpha$. Sei nun zunächst $\alpha \in R^+$ beliebig mit $n = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$. Für $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ behaupten wir dann

$$x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$$

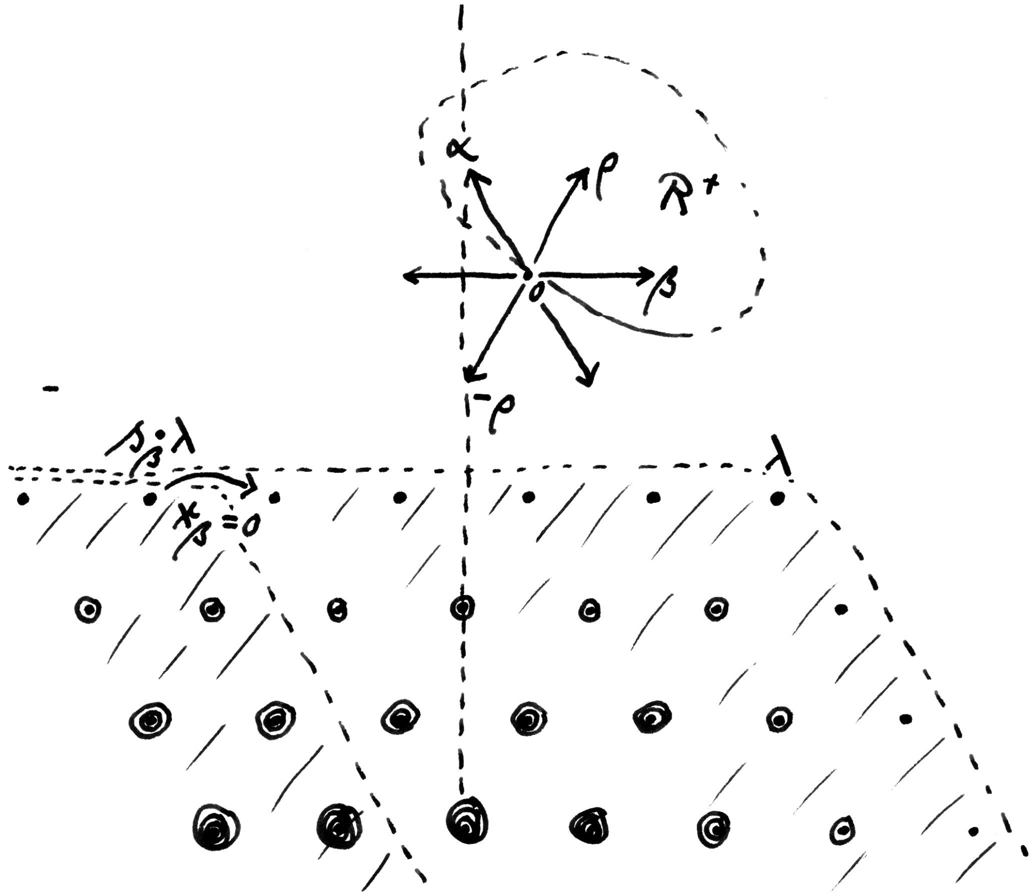


Illustration für Lemma 4.4.13. Sie ist nur insofern unzutreffend, als darin β die Rolle der einfachen Wurzel spielt, die im Lemma α heißt. Der Vermamodul mit höchstem Gewicht $s_\beta \cdot \lambda$ umfaßt nur in der obersten Zeile die vollen Gewichtsräumen zu den fetten Punkten im kleinen gestrichelt umrandeten Bereich.

Im Fall $n = -1$ ist das eh klar. Im Fall $n \in \mathbb{N}$ kann man das entweder durch Rechnung prüfen, indem man unter der Zusatzvoraussetzung $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$ induktiv für alle $i \geq 1$ die Formel $x_\alpha y_\alpha^i v_\lambda = i(n - i + 1) y_\alpha^{i-1} v_\lambda$ herleitet ganz analog dazu, wie wir es aus im Beweis von [HL] 1.2.14 bereits kennen. Man kann sich aber einfacher auch überlegen, daß die $y_\alpha^i v_\lambda$ eine Basis eines Vermamoduls von $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus k\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ mit höchstem Gewichtsvektor v_λ bilden, und operiert $\alpha^\vee$ alias h auf diesem höchsten Gewichtsvektor durch einen nichtnegativen ganzzahligen Eigenwert, so gibt es auch eine einfache $(n + 1)$-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2$ mit diesem höchsten Gewicht, die nach 4.4.7 notwendig ein Quotient unseres $\mathfrak{sl}_2$-Vermamoduls sein muß. Der Kern der Quotientenabbildung ist offensichtlich gerade das Erzeugnis der $y_\alpha^i v_\lambda$ mit $i > n$, folglich bilden diese einen Untermodul, und damit erkennen wir $x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$, ohne die Rechnung aus dem Beweis von [HL] 1.2.14 wiederholen zu müssen. Ist nun zusätzlich α eine einfache Wurzel, so gilt sogar $x_\beta y_\alpha^i v_\lambda = 0$ für alle $\beta \in R^+ \backslash \alpha$ und $i \in \mathbb{N}$, denn $i\alpha - \beta$ ist dann nie eine Summe positiver Wurzeln. Da aber gilt $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - (n+1)\alpha$, folgern wir $0 \neq y_\alpha^{n+1} v_\lambda \in \Delta(\lambda)_{s_\alpha \cdot \lambda}$ und erhalten nach der Definition unserer Verma-Moduln wie im Beweis von 4.4.7.3 aus ihrer universellen Eigenschaft als koinduzierte Darstellungen einen von Null verschiedenen Homomorphismus $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \to \Delta(\lambda)$, der den kanonischen Erzeuger von $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda)$ auf $y_\alpha^{n+1} v_\lambda$ abbildet. Da alle Vermamoduln frei sind vom Rang Eins über dem Integritätsring $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ nach 4.3.31, muß dieser Homomorphismus sogar eine Injektion sein. □

Beweis von (2)⇐(1) in 4.4.10. Das Lemma zeigt, daß für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und $\alpha \in R^+$ einfach mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ ganz und nichtnegativ ein höchster Gewichtsvektor von $\mathrm{L}(\lambda)$ stets eine endlichdimensionale $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellung erzeugt. Nun ist in jeder Darstellung V von $\mathfrak{g}$ die Summe W aller endlichdimensionalen $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellungen für beliebiges festes $\alpha \in R$ eine $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung von V, wie man zum Beispiel aus Übung [HL] 1.3.6 folgert. Gilt nun $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ für jede einfache Wurzel α, so ist also $\mathrm{L}(\lambda)$ für jede einfache Wurzel α die Summe seiner endlichdimensionalen $\mathfrak{g}^\alpha$-Unterdarstellungen. Aus deren expliziter Beschreibung in [HL] 1.2.14 und 4.1.11 folgt dann $s_\alpha \mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda)) = \mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda))$ für jede einfache Spiegelung $s_\alpha \in W$. Dann ist aber notwendig $\mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda))$ stabil unter der Weylgruppe, nach 4.2.6 also endlich, und da auch alle Gewichtsräume von $\mathrm{L}(\lambda)$ endlichdimensional sind, folgt $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{L}(\lambda) < \infty$. □

Übungen

Übung 4.4.15. Man zeige, daß im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ein Vermamodul $\Delta(\lambda)$ genau dann einfach ist, wenn er keinen endlichdimensionalen Quotienten hat, wenn also sein höchstes Gewicht auf der positiven Wurzel als Wert keine natürliche Zahl annimmt, in Formeln $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{N}$ für α die positive Wurzel.

Übung 4.4.16. Gegeben λ dominant ist die Summe über alle einfachen Wurzeln α der Bilder der Inklusionen $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$ nach 4.4.13 der größte echte Untermodul von des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$. Hinweis: Man variiere den Beweis der Rückrichtung von 4.4.10. Man zeige auch die Variante, nach der für λ dominant die Vektoren $y_\alpha^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle+1} v_\lambda$ für $\alpha \in \Pi$ einfache Wurzeln den größten Untermodul des Vermamoduls $\Delta(\lambda)$ erzeugen, ja sogar bereits als $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Untermodul erzeugen.

Übung 4.4.17. Gibt es in einer einfachen Darstellung einer halbeinfachen Liealgebra einen von Null verschiedenen Vektor, der von allen Wurzelvektoren zu einem System positiver Wurzeln aus dem Wurzelsystem zu einer Cartan'schen anulliert wird, so ist der fragliche Vektor bereits ein höchster Gewichtsvektor unserer Darstellung.

Übung 4.4.18. Man zeige: Die Darstellung $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$ von $\mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C})$ ist einfach für $1 \leq i \leq n+1$ und hat das höchste Gewicht $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$.

4.5 Induktion und Koinduktion bei Liealgebren*

4.5.1. Viele Konstruktionen und Resultate des vorhergehenden Abschnitts sind Spezialfälle sehr allgemeiner Konstruktionen und Prinzipien, die in [TS] **??** erläutert werden und eine gewisse Erfahrung im Umgang mit allgemeinen Tensorprodukten und der Sprache der Kategorien voraussetzen. Das soll im folgenden für diejenigen Leser, die mit diesen Konzepten vertraut sind, beleuchtet werden.

Definition 4.5.2. Jeder Liealgebren-Homomorphismus $\mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ induziert einen Ringhomomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ und unsere Kategorien von Darstellungen identifizieren sich mit den Kategorien aller Moduln über diesen Ringen. Der Restriktionsfunktor

$$\mathrm{res}_\mathfrak{g}^\mathfrak{b} : \mathfrak{g}\text{-Mod} \to \mathfrak{b}\text{-Mod}$$

hat nach [TS] **??** folglich einen Rechtsadjungierten $\mathrm{ind}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g}$ und nach [TS] **??** einen Linksadjungierten $\mathrm{prod}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g}$, die **Induktion** und die **Koinduktion** oder **Produktion** von Darstellungen von Liealgebren, die explizit beschrieben werden können durch die Formeln

$$\mathrm{ind}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g} M := \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}), M) \qquad\qquad \mathrm{prod}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g} M := \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} M$$

Bemerkung 4.5.3 (**Diskussion der Terminologie**). Beim Studium der Literatur ist Vorsicht geboten: Bei Darstellungen von Lie-Gruppen und algebraischen Gruppen bezeichnet Induktion in der Literatur stets den Rechtsadjungierten der Restriktion wie hier. Bei Darstellungen von Liealgebren jedoch wird in der Literatur als Induktion meist abweichend der Linksadjungierte der Restriktion bezeichnet, den wir hier Produktion genannt haben. Die Idee dazu kommt aus [Vog81], wo allerdings die Begriffe Induktion und Produktion im Vergleich zu unseren Begriffen hier vertauscht definiert werden.

Ergänzung 4.5.4. Bei Darstellungen endlicher Gruppen bezeichnet man als Induzieren zwar meist die Erweiterung der Skalare, also den Linksadjungierten der Restriktion, aber dieser ist glücklicherweise kanonisch isomorph zum Rechtsadjungierten der Restriktion. Der Begriff der „Produktion“ ist überhaupt nicht gebräuchlich.

4.5.5. Ist $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ sogar eine Unteralgebra, so ist $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nach Poincaré-Birkhoff-Witt frei als Rechtsmodul und als Linksmodul über $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$, so daß die Induktion und Koinduktion nach [KAG] 2.1.4 und [TS] **??** beide exakte Funktoren werden. Ist zusätzlich $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra mit $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ als Vektorräume über unserem Grundkörper k, so liefert nach 4.3.36 die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-$\mathrm{U}(\mathfrak{b})$-Bimoduln und wir erhalten mit [TS] **??** einen kanonischen Isomorphismus von $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Moduln

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \otimes_k M \xrightarrow{\sim} \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$$

Ebenso liefert die Multiplikation auch einen Isomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \otimes_k \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$-$\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Bimoduln und wir erhalten einen kanonischen Isomorphismus von $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$-Moduln

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{U}(\mathfrak{n}), M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$$

Ergänzung 4.5.6. Ist $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ eine Surjektion und bezeichnet $\mathfrak{c}$ ihren Kern, so ist $\mathrm{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = M^{\mathfrak{c}}$ der Teilraum der **$\mathfrak{c}$-Invarianten** aus [HL] 1.2.7 und $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$ heißt der Raum der **$\mathfrak{c}$-Koinvarianten** und wird $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = M_{\mathfrak{c}}$ notiert. Diese beiden Funktoren sind im allgemeinen alles andere als exakt.

4.5.7 (**Vermamoduln als koinduzierte Darstellungen**). Seien nun $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein System von positiven Wurzeln, und $\leq$ die zugehörige Teilordnung auf $\mathfrak{h}^*$. Wir betrachten in $\mathfrak{g}$ die Unteralgebra

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

Dehnen wir unser Gewicht λ aus zu einer Linearform auf $\mathfrak{b}$ durch die Vorschrift $\lambda(\mathfrak{g}_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in R^+$, so erhalten wir offensichtlich einen Charakter $\lambda : \mathfrak{b} \to \mathbb{C}$, d.h. eine eindimensionale Darstellung $\mathbb{C}_\lambda$ der Liealgebra $\mathfrak{b}$. Diese Darstellung können wir auffassen als einen Homomorphismus von Ringalgebren $\tilde{\lambda} : \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \to \mathbb{C}$. Bezeichnen wir seinen Kern mit $J_\lambda := \ker \tilde{\lambda}$, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$J_\lambda \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$$

Per definitionem liegen alle $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ mit $\alpha \in R^+$ und alle $H - \lambda(H)$ mit $H \in \mathfrak{h}$ in J_λ, ja unser Kern ist genau das von diesen Elementen in $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$ erzeugte Linksideal, denn modulo diesem Linksideal ist offensichtlich jedes Element von $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$

kongruent zu einem Skalar aus $\mathbb{C}$. Wir können unsere kurze exakte Sequenz auch lesen als eine kurze exakte Sequenz $J_\lambda \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_\lambda$ von Darstellungen von $\mathfrak{b}$. Anwenden von $\mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})}$ liefert eine rechtsexakte Sequenz

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} J_\lambda \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

Hier ist die linke Abbildung die Multiplikationsabbildung, ihr Bild also das von J_λ in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ erzeugte Linksideal I_λ, und wir erhalten so einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

mit $v_\lambda \mapsto 1 \otimes 1$. Die universelle Eigenschaft 4.4.6 von Verma-Moduln folgt dann aus der universellen Eigenschaft der Koinduktion: Für jede Darstellung L von $\mathfrak{g}$ liefert die Restriktion auf $\mathbb{C}_\lambda$ danach eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), L) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, L)$$

Falls λ maximal ist unter den Gewichten von L, identifiziert das Auswerten bei 1 hier zusätzlich die rechte Seite mit dem Gewichtsraum L_λ.

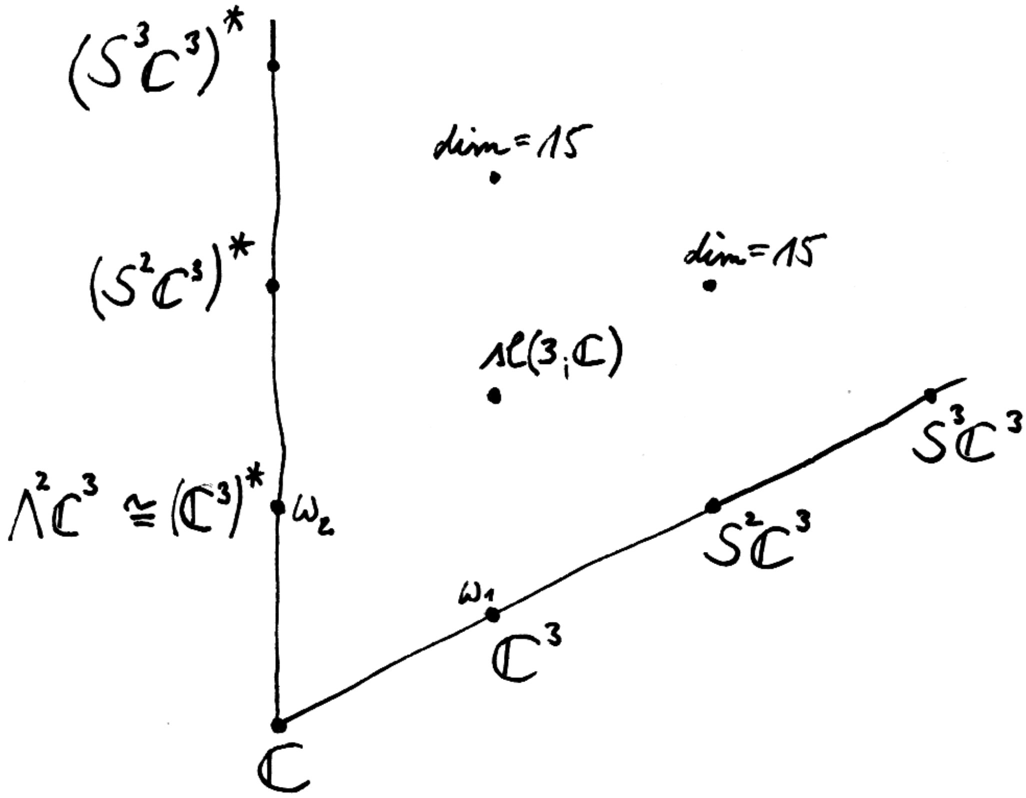
4.6 Charakterformeln

Notation 4.6.1. Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan'sche Unteralgebra, $R = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein System positiver Wurzeln, $\rho \in \mathfrak{h}^*$ die Halbsumme der positiven Wurzeln, $\mathfrak{X}$ das Gitter der ganzen Gewichte und $\mathfrak{X}^+ \subset \mathfrak{X}$ die Menge der in Bezug auf R^+ dominanten Gewichte.

Satz 4.6.2 (Weyl'sche Dimensionsformel). *Für jedes dominante Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ wird die Dimension der einfachen Darstellung $\mathrm{L}(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ gegeben durch die Formel*

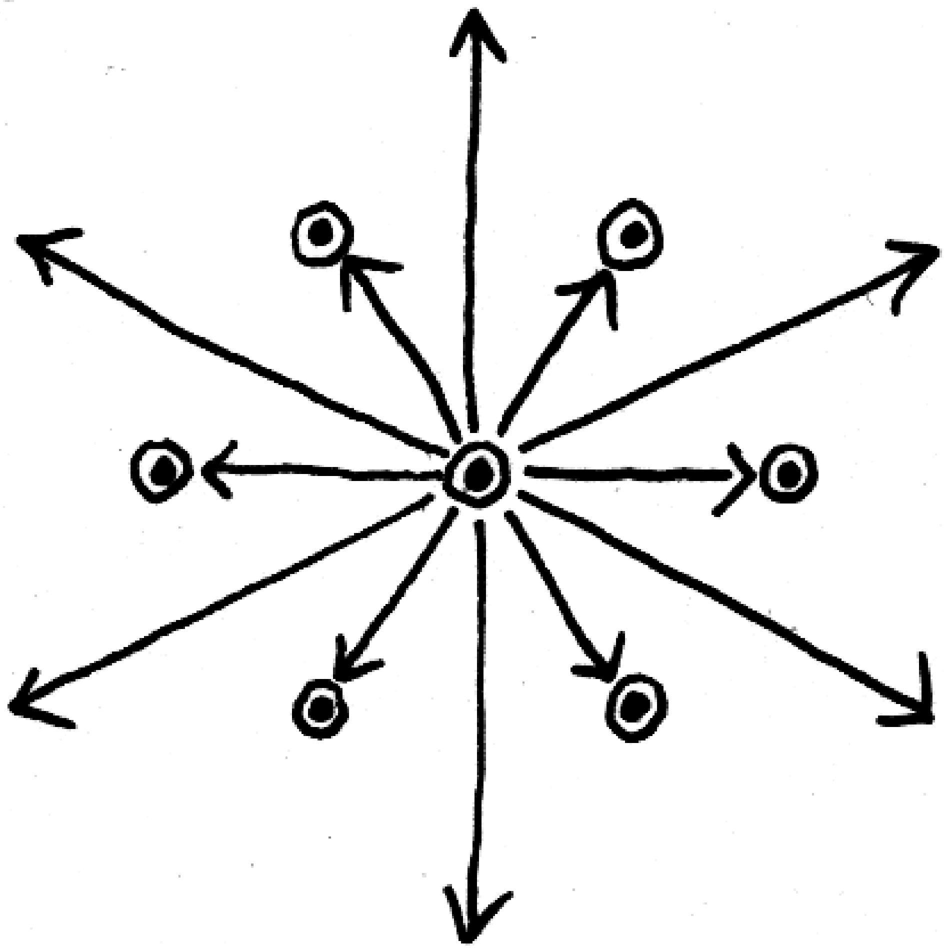
$$\dim \mathrm{L}(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle}$$

4.6.3. Der Beweis wird im Anschluß an 4.6.30 gegeben. Auf dem Weg dahin werden wir sogar Formeln für die Dimensionen $\dim_k \mathrm{L}(\lambda)_\mu$ aller Gewichtsräume von endlichdimensionalen einfachen Darstellungen angeben. Obiger Formel kann ich mit bloßem Auge noch nicht einmal ansehen, warum sie immer natürliche Zahlen liefern sollte. Im Spezialfall $\lambda = n\rho$ ergibt sich $\dim \mathrm{L}(n\rho) = (n+1)^{|R|/2}$.



Einige dominante Gewichte zur $\mathfrak{sl}(3;\mathbb{C})$ mit den zugehörigen irreduziblen Darstellungen oder zumidest deren Dimensionen. Die Kanten werden in [ML] 2.3.19 gerechtfertigt. Sind α_1, α_2 die einfachen Wurzeln, so ist die einzige weitere positive Wurzel $\alpha_1 + \alpha_2$ und in diesem Fall gilt auch $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee$. Sind ϖ_1, ϖ_2 die fundamentalen dominanten Gewichte, so gilt per Definitionem $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ und nach [SPW] 2.2.16 haben wir $\rho = \varpi_1 + \varpi_2$. Der Nenner in der Weyl'schen Dimensionsformel ist also $\langle \varpi_1 + \varpi_2, \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee \rangle = 2$. Setzen wir $\lambda = \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2$, so ergibt sich der Zähler zu $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)$ und wir erhalten

$$\dim \mathrm{L}(\lambda) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)/2$$



Die Gewichte der 7-dimensionalen irreduziblen Darstellung von G_2.

4.6.4. Wir betrachten den Gruppenring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ der additiven Gruppe $\mathfrak{h}^*$. Fassen wir $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ als ein Element dieses Gruppenrings auf, so schreiben wir e^λ statt λ, da sonst $\lambda + \mu$ zweideutig wäre. Die e^λ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ bilden also eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ und es gilt $\mathrm{e}^\lambda \mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^{\lambda+\mu}$.

4.6.5. Der Ring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ ist ein Integritätsring. In der Tat liegen je zwei Elemente stets in einem Teilring der Gestalt $\mathbb{Z}E$ für $E \subset \mathfrak{h}^*$ eine endlich erzeugte Untergruppe, und da E notwendig eine freie abelsche Gruppe ist, muß $\mathbb{Z}E$ isomorph sein zu einem Ring von Laurent-Polynomen in mehreren Veränderlichen.

Definition 4.6.6. Für jede endlichdimensionale Darstellung V von $\mathfrak{g}$ definieren wir ihren **Charakter** $\operatorname{ch} V \in \mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ durch die Vorschrift

$$\operatorname{ch} V = \sum_\mu (\dim V_\mu)\, \mathrm{e}^\mu$$

4.6.7. Der Charakter einer endlichdimensionalen Darstellung ist stabil unter der Weylgruppe. In der Tat folgt aus der Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2;k)$ nach [HL] 1.2.14, daß geeignete Potenzen von Erzeugern von $\mathfrak{g}_\alpha$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ Isomorphismen zwischen den Gewichtsräumen zu λ und $s_\alpha\lambda$ liefern.

Satz 4.6.8 (**Weyl'sche Charakterformel**). *Für jedes dominante Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ gilt in $\operatorname{Quot}(\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*)$ für den Charakter der endlichdimensionalen einfachen Darstellung mit höchstem Gewicht λ die Formel*

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} (-1)^{l(w)}\, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W} (-1)^{l(w)}\, \mathrm{e}^{w\rho}}$$

4.6.9. Der Beweis wird im Anschluß an den Beweis von 4.6.29 gegeben. Die Formel selbst ist insbesondere für theoretische Überlegungen nützlich, für praktische Berechnungen scheint mir 4.6.27 sehr viel besser, und es gibt sogar noch bessere Verfahren. Das Vorzeichen $(-1)^{l(w)}$ ist übrigends gerade die Determinante von w. In [ML] 5.10.6 erklären wir, inwiefern diese Formel die Charaktere der Darstellungen kompakter Liegruppen liefert.

Beispiel 4.6.10. Man prüft sofort, daß sich korrekt $\operatorname{ch} \mathrm{L}(0) = \mathrm{e}^0$ ergibt. Im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2;k)$ haben wir $\rho = \alpha/2$ und $\mathfrak{X}^+ = \mathbb{N}\rho$ und es ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ korrekt

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(n\rho) = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\rho} - \mathrm{e}^{-(n+1)\rho}}{\mathrm{e}^\rho - \mathrm{e}^{-\rho}} = \mathrm{e}^{n\rho} + \mathrm{e}^{(n-2)\rho} + \ldots + \mathrm{e}^{-n\rho}$$

4.6.11. Ist $\mathfrak{g}$ einfach und $\beta \in R^+$ die höchste Wurzel, so ist $\mathrm{L}(\beta)$ die adjungierte Darstellung und die Weyl'sche Charakterformel spezialisiert zu einer bemerkenswerten kombinatorischen Identität, die der Leser selbst ausschreiben mag.

4.6.12. Wir erweitern nun unseren Charakterring so, daß wir auch mit Charakteren von Verma-Moduln rechnen können.

Definition 4.6.13. Ganz allgemein können wir die Menge $\mathrm{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ aller Abbildungen von $\mathfrak{h}^*$ nach $\mathbb{Z}$ betrachten. Wir schreiben solche Abbildungen $f : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$ als unendliche formale Ausdrücke $f = \sum f(\lambda)\,\mathrm{e}^{\lambda}$ und ordnen jeder Darstellung V von $\mathfrak{g}$ oder sogar von $\mathfrak{h}$ mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen ihren **Charakter** $\mathrm{ch}\, V \in \mathrm{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ zu vermittels der Vorschrift

$$\mathrm{ch}\, V = \sum (\dim V_\mu)\,\mathrm{e}^{\mu}$$

4.6.14. Offensichtlich bilden die Charaktere aller Vermamoduln eine linear unabhängige Familie in $\mathrm{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ und dasselbe gilt für die Charaktere aller einfachen höchsten Gewichtsmoduln. Ich wüßte aber nicht, wie man die Multiplikation in $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ sinnvoll auf ganz $\mathrm{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$ ausdehnen könnte. Um dennoch mit Charakteren von Vermamoduln rechnen zu können, arbeiten wir mit einer geeigneten Untergruppe.

Definition 4.6.15 (Erweiterter Charakterring). Bezeichne

$$\mathbb{Z}^{\urcorner}\mathfrak{h}^* \subset \mathrm{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$$

die Menge aller Abbildungen von $\mathfrak{h}^*$ nach $\mathbb{Z}$, deren Träger in einer Vereinigung von endlich vielen Mengen der Form $\lambda - |R^+\rangle$ enthalten ist, in anderen Formeln also Mengen der Form $\{\lambda - \sum n_\alpha \alpha \mid n \in \mathrm{Ens}(R^+, \mathbb{N})\}$.

4.6.16. Wir fassen $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \subset \mathbb{Z}^{\urcorner}\mathfrak{h}^*$ als die Teilmenge aller Funktionen mit endlichem Träger auf und können die Multiplikation in $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ zu einer assoziativen kommutativen Multiplikation auf $\mathbb{Z}^{\urcorner}\mathfrak{h}^*$ fortsetzen durch die Vorschrift $(fg)(\nu) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} f(\lambda)g(\mu)$. Unsere Trägerbedingung stellt dabei sicher, daß in diesen Summen nur endlich viele Terme nicht verschwinden. Man kann sich überlegen, daß dieser **erweiterte Charakterring** auch ein Integritätsring ist, aber wir werden das nicht benötigen. Als Beispiel für die Nützlichkeit unseres erweiterten Charakterrings zeigen wir gleich ein Lemma.

4.6.17. Sind M, N zwei $\mathfrak{h}$-Moduln mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen derart, daß beide die Summe ihrer Gewichtsräume sind und daß ihre Charaktere beide zu $\mathbb{Z}^{\urcorner}\mathfrak{h}^*$ gehören, so gilt $\mathrm{ch}(M \otimes N) = (\mathrm{ch}\, M)(\mathrm{ch}\, N)$.

Lemma 4.6.18. *Der Charakter eines Vermamoduls wird gegeben durch die Formel* $\mathrm{ch}\,\Delta(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda} \prod_{\alpha \in R^+}(1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \mathrm{e}^{-2\alpha} + \ldots)$. *Insbesondere gilt in* $\mathbb{Z}^{\urcorner}\mathfrak{h}^*$ *die Formel*

$$\left(\prod_{\alpha \in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})\right) \mathrm{ch}\,\Delta(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda}$$

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten. Die erste Aussage drückt unsere Erkenntnisse über Vermamoduln aus 4.4.3 in unserem neuen Formalismus aus, da ja offensichtlich gilt $\prod_{\alpha \in R^+}(1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \mathrm{e}^{-2\alpha} + \dots) = \sum_\mu \mathcal{P}(\mu)\,\mathrm{e}^{-\mu}$. $\square$

4.6.19. Wir interessieren uns nun für den Eigenwert des Casimiroperators auf einem Vermamodul. Bezeichne $\bar{\kappa} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ den von der Killingform κ induzierten Isomorphismus, charakterisiert durch $\langle \bar{\kappa}(h), h' \rangle = \kappa(h, h') \quad \forall h, h' \in \mathfrak{h}$. Bezeichne

$$(\, , \,)$$

die Bilinarform auf $\mathfrak{h}^*$, die unter dem Isomorphismus $\bar{\kappa}$ der Killingform auf $\mathfrak{h}$ entspricht. Haben wir $\bar{\kappa} : h \mapsto \lambda$, so folgt für alle $\mu \in \mathfrak{h}^*$ auch $\mu(h) = (\lambda, \mu)$. Nach [HL] 2.3.26 ist unsere Bilinearform positiv definit auf dem von den Wurzeln aufgespannten $\mathbb{Q}$-Untervektorraum $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Nach dem anschließenden Lemma ist unsere Bilinearform invariant unter der Weylgruppe.

Lemma 4.6.20. *Die Restriktion der Killingform einer komplexen halbeinfachen Liealgebra auf eine Cartan'sche ist invariant unter der Weylgruppe.*

Erster Beweis. Für $x, y \in \mathfrak{h}$ und $w \in W$ rechnen wir

$$\begin{array}{lclcl} \kappa(x,y) & = & \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) & = & \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, x \rangle \langle \alpha, y \rangle \\ \kappa(wx, wy) & = & \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, wx \rangle \langle \alpha, wy \rangle & = & \sum_{\alpha \in R} \langle w^{-1}\alpha, x \rangle \langle w^{-1}\alpha, y \rangle \end{array}$$ $\square$

Zweiter Beweis. Natürlich ist die Killingform einer endlichdimensionalen Liealgebra invariant unter jedem Automorphismus τ unserer Liealgebra, in Formeln $\kappa(\tau x, \tau y) = \kappa(x, y)$ für alle x, y. Die Elemente der Weylgruppe operieren aber nach [HL] 2.6.6 auf der Cartan'schen wie die Elemente des Normalisators unserer Cartan'schen in der adjungierten Gruppe, wenn man denn weiß, was alle diese Begriffe bedeuten. $\square$

Lemma 4.6.21. *Jeder Endomorphismus eines Vermamoduls ist die Multiplikation mit einem Skalar.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen $k \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} \Delta(\lambda) \hookrightarrow \operatorname{End}_k(\Delta(\lambda)_\lambda)$. Die Zweite ist injektiv, da $\Delta(\lambda)_\lambda$ nach 4.4.3 schon $\Delta(\lambda)$ erzeugt. Die Verknüpfung ist eine Bijektion, da ja nach 4.4.3 der höchste Gewichtsraum eines Vemamoduls eindimensional ist. Also sind unsere Abbildungen alle drei Bijektionen. $\square$

Lemma 4.6.22 (Eigenwert des Casimir auf Vermamoduln). *Der Casimiroperator $C = C_\kappa$ aus [HL] 2.1.17 operiert auf dem Verma-Modul $\Delta(\lambda)$ durch den Skalar $c_\lambda = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$ in den Notationen aus 4.6.19.*

4.6.23. Dies Lemma gilt unverändert, wenn wir die Killingform ersetzen durch eine beliebige invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf unserer halbeinfachen Liealgebra. Es zeigt im Übrigen in Verbindung mit 4.4.13 auch $(\lambda, \lambda) = (w\lambda, w\lambda)$ zumindest für alle ganzen Gewichte λ und alle $w \in W$.

Beweis. Nach 4.3.37 können wir den Casimiroperator C als Element des Zentrums der universellen Einhüllenden auffassen. Wir müssen nach 4.6.21 nur ausrechnen, durch welchen Skalar er auf dem höchsten Gewichtsraum $\Delta(\lambda)_\lambda$ operiert. Dazu wählen wir für $\alpha \in R^+$ Wurzelvektoren $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$, wählen des weiteren eine Orthonormalbasis $h_1, \ldots, h_n$ von $\mathfrak{h}$ unter der Killing-Form κ und erhalten

$$\begin{array}{rcll} C & = & \sum_{\alpha \in R^+} y_\alpha x_\alpha + x_\alpha y_\alpha & + \sum_{i=1}^n h_i^2 \\ & = & \sum_{\alpha \in R^+} 2y_\alpha x_\alpha + [x_\alpha, y_\alpha] & + \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{array}$$

Dieser Ausdruck operiert auf $\Delta(\lambda)_\lambda$ wegen $x_\alpha \Delta(\lambda)_\lambda = 0$ durch den Skalar

$$c_\lambda = \sum_{\alpha \in R^+} \lambda([x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \lambda(h_i)^2$$

Schreiben wir $\lambda = \bar{\kappa}(h)$, so liest sich unser Skalar als

$$c_\lambda = \sum_{\alpha \in R^+} \kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \kappa(h, h_i)^2$$

Wegen $\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(h)$ ergibt sich schließlich für unseren Skalar die Formel

$$\begin{array}{rcl} c_\lambda & = & 2\rho(h) + \kappa(h, h) \\ & = & (2\rho, \lambda) + (\lambda, \lambda) \\ & = & (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho) \end{array}$$ □

Ergänzung 4.6.24 (**Formel von Freudenthal**). Der Beweis von 4.6.22 liefert bereits eine Formel zur induktiven Berechnung irreduzibler Charaktere. Ist $L = \mathrm{L}(m\rho)$ die $(m+1)$-dimensionale einfache Darstellung von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ und ist e, h, f die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ wie in [HL] 1.2.14, so liefern die Formeln aus dem Beweis dort, daß die Operation von fe auf jedem von Null verschiedenen Gewichtsraum $\mathrm{L}(m\rho)_{m\rho - i\alpha}$ geschieht durch den Skalar $(m - i + 1)i$, den wir mit $\mu := m\rho - i\alpha$ auch schreiben können als

$$(m - i + 1)i = \sum_{j \geq 1} (\dim \mathrm{L}(m\rho)_{\mu + j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle$$

Die rechte Seite wird nun zusätzlich Null für alle Gewichte μ mit $\mathrm{L}(m\rho)_\mu = 0$ und das zeigt, daß für alle endlichdimensionalen Darstellungen V der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ und alle Gewichte μ gilt

$$\mathrm{tr}(fe|V_\mu) = \sum_{j\geq 1}(\dim V_{\mu+j\alpha})\langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee\rangle$$

Gegeben $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x,y] = \alpha^\vee$ folgt aus der Formel $\kappa(h,[x,y]) = \alpha(h)\kappa(x,y)$ vom Beginn des Beweises von [HL] 2.3.15 sofort

$$\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = 2\kappa(x,y)$$

Gegeben $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$ folgt umgekehrt dann auch, daß $x_\alpha, \alpha^\vee$ und $(\kappa(\alpha^\vee,\alpha^\vee)/2)y_\alpha$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (e,h,f) bilden. Für $\lambda \in \langle R\rangle_\mathbb{Q}$ kürzen wir nun $\sqrt{(\lambda,\lambda)} = |\lambda|$ ab. Für die Spur des Casimir auf dem Gewichtsraum $\mathrm{L}(\lambda)_\mu$ ergeben sich mit 4.6.22 und den Formeln aus dem Beweis dieses Lemmas die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}(C|\mathrm{L}(\lambda)_\mu) & = & (\dim \mathrm{L}(\lambda)_\mu)\ (|\lambda+\rho|^2 - |\rho|^2) \\ \mathrm{tr}(C|\mathrm{L}(\lambda)_\mu) & = & \sum_{\alpha\in R^+}(2/\kappa(\alpha^\vee,\alpha^\vee))\sum_{j\geq 1}(\dim \mathrm{L}(\lambda)_{\mu+j\alpha})\ \langle \mu+j\alpha,\alpha^\vee\rangle \\ & & +\ (\dim \mathrm{L}(\lambda)_\mu)\ (|\mu+\rho|^2 - |\rho|^2) \end{array}$$

Aus dem Vergleich dieser beiden Formeln zusammen mit der Erkenntnis $\bar{\kappa}(\alpha^\vee) = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ ergibt sich dann schließlich **Freudenthal's Formel**

$$(\dim \mathrm{L}(\lambda)_\mu)\ (|\lambda+\rho|^2 - |\mu+\rho|^2) = 2\sum_{\alpha\in R^+}\sum_{j\geq 1}(\dim \mathrm{L}(\lambda)_{\mu+j\alpha})\ (\mu+j\alpha,\alpha)$$

Sie erlaubt es, induktiv die Dimension eines Gewichtsraums in einer einfachen Darstellung aus den Dimensionen der Gewichtsräume zu höheren Gewichten zu berechnen.

Lemma 4.6.25 (**Kompositionsreihen von Vermamoduln**)**.** *Jeder Vermamodul $\Delta(\lambda)$ hat endliche Länge und jeder einfache Subquotient von $\Delta(\lambda)$ ist ein einfacher höchster Gewichtsmodul $\mathrm{L}(\mu)$ mit $\mu \leq \lambda$ und $(\mu+\rho,\mu+\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$.*

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus 4.4.7.3 und 4.6.22, da der Casimir-Operator auf jedem Subquotienten von $\Delta(\lambda)$ auch durch den Skalar c_λ operieren muß. Wir folgern daraus zunächst einmal, daß es überhaupt nur endlich viele μ gibt, die als höchste Gewichte einfacher Subquotienten unseres Vermamoduls in Frage kommen. Aus $\mu \leq \lambda$ folgt ja unter anderem $\mu = \lambda + \nu$ mit $\nu \in \langle R\rangle$. Nun gibt es aber nur endlich viele Elemente des Wurzelgitters $\nu \in \langle R\rangle$ mit

$(\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\lambda + \nu + \rho, \lambda + \nu + \rho)$. Für $\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$ ist das leicht zu sehen, denn unsere Bilinearform $(\ , \ )$ ist nach [HL] 2.3.26 positiv definit auf $\langle R \rangle_{\mathbb{R}}$ und jede diskrete kompakte Menge ist endlich. Für λ beliebig mag man bemerken, daß unsere Gleichung gleichbedeutend ist zu $(\nu, \nu) + 2(\lambda + \rho, \nu) = 0$ und daß alle Lösungen damit bereits im Teilraum $A := \{\nu \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid (\lambda, \nu) \in \mathbb{Q}\}$ liegen müssen. Nun finden wir $\lambda' \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ mit $(\lambda', \nu) = (\lambda, \nu)\ \forall \nu \in A$ und indem wir λ durch λ ersetzen, können wir uns auf den bereits behandelten Fall zurückziehen. Das zeigt, daß es überhaupt nur endlich viele μ gibt, die als höchste Gewichte einfacher Subquotienten unseres Vermamoduls in Frage kommen. Weiter hat jeder von Null verschiedene Subquotient S von $\Delta(\lambda)$ selbst einen einfachen Subquotienten, ganz allgemein besitzt ja nach [KAG] 4.7.25 jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring einen einfachen Subquotienten. Damit gibt es also für jeden von Null verschiedenen Subquotienten S von $\Delta(\lambda)$ ein Gewicht μ mit $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ und $S_\mu \neq 0$. Wir können dann die Länge $l(\Delta(\lambda))$ einer in jedem Schritt echt absteigenden Filtrierung der Darstellung $\Delta(\lambda)$ abschätzen durch

$$l(\Delta(\lambda)) \leq \sum \dim_k \Delta(\lambda)_\mu$$

mit der Summe über alle $\mu \leq \lambda$ mit $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$. □

4.6.26. Wir erinnern an die „zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene“ Operation von W auf $\mathfrak{h}^*$, gegeben durch die Formel $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$.

Satz 4.6.27 (Kostant'sche Charakterformel). *Gegeben $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ ein dominantes Gewicht ist der Charakter der einfachen Darstellung mit höchstem Gewicht λ die alternierende Summe über die Charaktere der Vermamoduln mit höchstem Gewicht in der Bahn von λ unter der dot-Operation der Weylgruppe, in Formeln*

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \operatorname{ch} \Delta(w \cdot \lambda)$$

Beispiel 4.6.28. Im Fall der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2)$ liefert die Einbettung von Vermamoduln aus 4.4.13 offensichtlich für alle $m \in \mathbb{N}$ eine kurze exakte Sequenz $\Delta((-m-2)\rho) \hookrightarrow \Delta(m\rho) \twoheadrightarrow \mathrm{L}(m\rho)$, die die obige Formel direkt liefert.

Beweis. Für $\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ kürzen wir $\sqrt{(\lambda, \lambda)} = |\lambda|$ ab. Lemma 4.6.25 sagt uns, daß wir den Charakter von $\Delta(\lambda)$ schreiben können in der Form

$$\operatorname{ch} \Delta(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ |\mu + \rho| = |\lambda + \rho|}} a_\lambda^\mu \operatorname{ch} \mathrm{L}(\mu)$$

für geeignete $a_\lambda^\mu \in \mathbb{N}$ mit $a_\lambda^\lambda = 1$. Da sich eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen stets invertieren läßt, können wir umgekehrt auch den Charakter von $\mathrm{L}(\lambda)$ schreiben in der Form

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ |\mu+\rho|=|\lambda+\rho|}} b_\lambda^\mu \operatorname{ch} \Delta(\mu)$$

für geeignete $b_\lambda^\mu \in \mathbb{Z}$ mit $b_\lambda^\lambda = 1$. Insoweit gilt alles für beliebige $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ und wenn wir die Notation $|\mu|$ vermeiden sogar für beliebige $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Ist λ nun dominant, so hat $\mathrm{L}(\lambda)$ endliche Dimension nach 4.4.10 und $\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda)$ ist nach 4.1.20 invariant unter der Weylgruppe W. Wir multiplizieren dann beide Seiten unserer Gleichung mit

$$\prod_{\alpha \in R^+} (\mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}) = \mathrm{e}^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})$$

und erhalten mit der Abkürzung $d_\nu = b_\lambda^{\nu-\rho}$ und 4.6.18 die Formel

$$\left(\prod_{\alpha \in R^+} \mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2} \right) \operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_\mu b_\lambda^\mu \, \mathrm{e}^{\mu+\rho} = \sum_\nu d_\nu \, \mathrm{e}^\nu$$

mit der zusätzlichen Information $d_{\lambda+\rho} = 1$ und $d_\nu = 0$ falls $|\nu| \neq |\lambda+\rho|$ oder $\nu \not\leq \lambda + \rho$. Nach [SPW] 2.2.7 ändert die linke Seite ihr Vorzeichen, wenn man darauf eine einfache Spiegelung s_β anwendet. Dasselbe muß dann auch für die rechte Seite gelten und wir folgern $d_\nu = (-1)^{l(w)} d_{w\nu}$ für alle $w \in W$. Insbesondere haben wir damit sogar $d_\nu = 0$ falls nicht $|\nu| = |\lambda + \rho|$ und $w\nu \leq \lambda + \rho$ für alle $w \in W$. Mit dem anschließenden Lemma 4.6.29 folgt $d_\nu = 0$ falls nicht gilt $\nu \in W(\lambda + \rho)$, und mit unserer zusätzlichen Information $d_{\lambda+\rho} = 1$ und Zurückparametrisieren folgt die Kostant'sche Charakterformel. □

Lemma 4.6.29. *Sei $\mu \in \mathfrak{X}^+$ ein dominantes Gewicht und $\nu \in \mathfrak{X}$ ein ganzes Gewicht. Aus $|\nu| = |\mu|$ und $w\nu \leq \mu$ für alle $w \in W$ folgt $\nu \in W\mu$.*

Beweis. Jedes ganze Gewicht läßt sich mit W nach $\mathfrak{X}^+$ konjugieren, und sein „Betrag" ändert sich nach 4.6.23 dabei nicht. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\nu \in \mathfrak{X}^+$ annehmen und müssen nur für $\mu, \nu \in \mathfrak{X}^+$ aus $\nu \leq \mu$ und $|\nu| = |\mu|$ folgern $\nu = \mu$. Nun ist ja per definitionem das Skalarprodukt eines Vektors aus der dominanten Weylkammer mit einer positiven Wurzel stets nichtnegativ, als da heißt, unter unseren Voraussetzungen schließen $\mu - \nu$ und ν einen stumpfen Winkel ein. Dann aber muß die Summe mindestens genauso lang sein wie jeder der beiden Summanden, und Gleichheit der Längen ist nur möglich, wenn der entsprechende Summand mit der Summe übereinstimmt. □

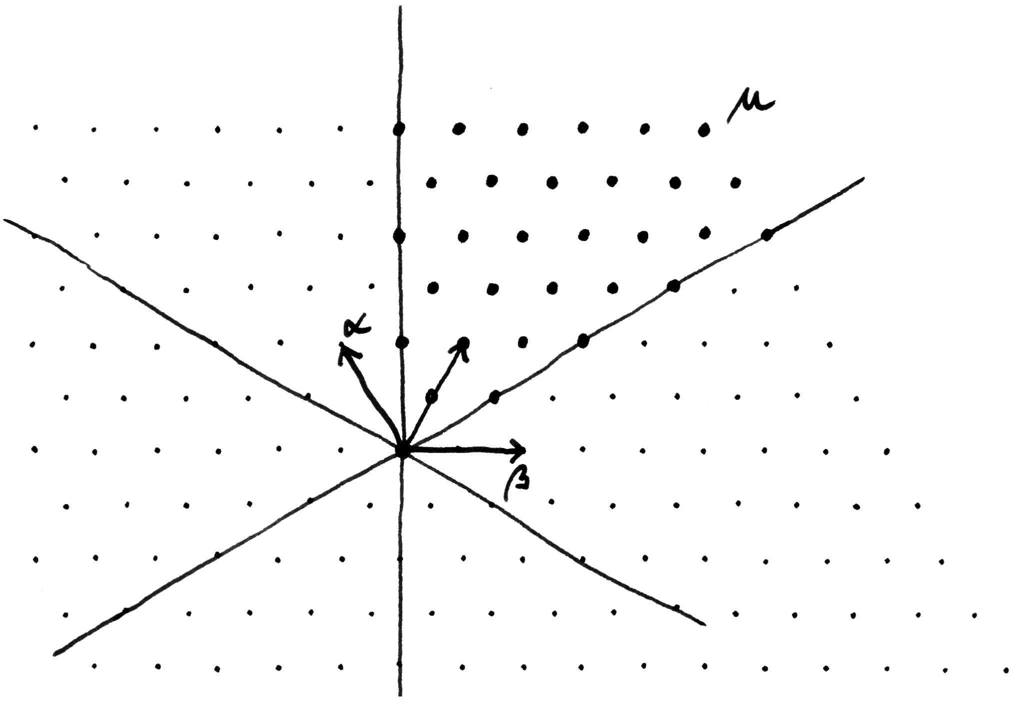


Illustration zu Lemma 4.6.29. Fett eingezeichnet sind alle dominanten Gewichte $\nu \in \mathfrak{X}^+$ mit $\nu \leq \mu$. Als magere Punkte eingezeichnet sind die anderen ganzen Gewichte $\nu \in \mathfrak{X}$ mit $\nu \leq \mu$, soweit sie eben ins Bild passen. Die Grenzen des Bereichs, in dem Gewichte $\leq \mu$ zu finden sind, stehen senkrecht auf den Wänden des dominanten Alkoven. Man erkennt, daß alle von μ verschiedenen fetten Punkte näher am Ursprung liegen.

Beweis der Weyl'schen Charakterformel 4.6.8. Wir teilen die Formel

$$\left(\prod_{\alpha\in R^+} \mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}\right) \operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} \, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}$$

aus dem Beweis der Kostant'schen Charakterformel 4.6.27 durch ihre Spezialisierung an $\lambda = 0$. □

4.6.30. Die Spezialisierung obiger Formel bei $\lambda = 0$ ist auch für sich genommen eine bemerkenswerte kombinatorische Identität, die sogenannte **Weyl'sche Nennerformel**

$$\mathrm{e}^\rho \prod_{\alpha\in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha}) = \prod_{\alpha\in R^+} (\mathrm{e}^{\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\alpha/2}) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} \, \mathrm{e}^{w\rho}$$

Einen direkten Beweis der Weyl'schen Nennerformel geben wir in [ML] 5.10.10.

Beweis der Weyl'schen Dimensionsformel 4.6.2. Es liegt nahe, den Ringhomomorphismus $a : \mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$ zu betrachten mit $a(\mathrm{e}^\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$. Wir bezeichnen ihn mit a, da seine Einschränkung auf $\mathbb{Z}\mathfrak{X}$ entspricht unter dem Isomorphismus $\mathbb{C}\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(T_\mathbb{C})$ unseres Gruppenrings mit dem Ring der regulären Funktionen auf einem geeigneten algebraischen Torus $T_\mathbb{C}$ dem Auswerten am neutralen Element entspricht. Nun gilt natürlich $\dim \mathrm{L}(\lambda) = a(\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda))$, nur führt uns die Weyl'sche Charakterformel zunächst auf die wenig hilfreiche Relation $0 \cdot \dim \mathrm{L}(\lambda) = 0$. Um hier weiterzukommen benutzen wir eine abstrakte Version der Regel von de l'Hospital. Dazu bilden wir in unserem Gruppenring $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$ den Teilring $\mathbb{Z}\mathfrak{X}$ und betrachten für $\alpha \in R^+$ den Gruppenhomomorphismus $\partial_\alpha : \mathbb{Z}\mathfrak{X} \to \mathbb{Z}\mathfrak{X}$ mit $\partial_\alpha(\mathrm{e}^\mu) = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle \, \mathrm{e}^\mu$. Man prüft mühelos, daß ∂_α eine Derivation ist und daß die ∂_α für verschiedene α kommutieren. Unter unserem Isomorphismus $\mathbb{C}\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(T_\mathbb{C})$ entspricht ∂_α im übrigen dem Anwenden des invarianten Vektorfeldes zu $\alpha^\vee \in \operatorname{Lie} T_\mathbb{C}$. Ist $D = \prod_{\alpha\in R^+} \partial_\alpha \in \operatorname{End} \mathbb{Z}\mathfrak{X}$ das Produkt der ∂_α, so gilt offensichtlich $aD\,\mathrm{e}^\mu = \prod_{\alpha\in R^+} \langle \mu, \alpha^\vee \rangle$. Mit [SPW] 2.2.7 folgt daraus $aD\,\mathrm{e}^{w\mu} = (-1)^{l(w)} aD\,\mathrm{e}^\mu$ zuerst für w eine einfache Spiegelung und dann für beliebige $w \in W$. Unter der Übersetzung in $\mathcal{O}(T_\mathbb{C})$ ist diese Formel im übrigen auch ohne weitere Rechnung evident. Betrachten wir nun die aus der Kombination der Weyl'schen Charakterformel und der Weyl'schen Nennerformel entstehende Gleichung

$$\left(\mathrm{e}^\rho \prod_{\alpha\in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})\right) \operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} \, \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}$$

und wenden auf beide Seiten aD an, so ergibt sich

$$aD\left(\mathrm{e}^\rho \prod_{\alpha\in R^+} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha})\right) a(\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda)) = |W| \prod_{\alpha\in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle$$

denn „kriegt einer der Faktoren $1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$ keine Derivation ab, so verschwindet er unter a". Setzen wir hier $a(\operatorname{ch} \mathrm{L}(\lambda)) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{L}(\lambda)$ ein und teilen unsere Gleichung durch ihre Spezialisierung an $\lambda = 0$, so ergibt sich die Weyl'sche Dimensionsformel 4.6.2. $\square$

4.6.31. Die Gewichte maximaler Länge in einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung nennen wir ihre **extremen Gewichte**. Die extremen Gewichte von $\mathrm{L}(\nu)$ sind nach 4.6.29 gerade die Weylgruppenkonjugierten des höchsten Gewichts, als da heißt, die Elemente von $W\nu$.

Satz* 4.6.32 (Formel von Klimyk). *Gegeben $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{X}^+$ dominante Gewichte gelten für die Vielfachheit $[\mathrm{L}(\mu) \otimes \mathrm{L}(\nu) : \mathrm{L}(\lambda)]$ von $\mathrm{L}(\lambda)$ als Summand der Tensordarstellung die Formeln*

$$[\mathrm{L}(\mu) \otimes \mathrm{L}(\nu) : \mathrm{L}(\lambda)] = \textstyle\sum_{y \in W} (-1)^{l(y)} \dim \mathrm{L}(\mu)_{\lambda - y \cdot \nu} \leq \dim \mathrm{L}(\mu)_{\lambda - \nu}$$

4.6.33. Ist μ klein im Vergleich zu ν in dem Sinne, daß für alle einfachen Wurzeln α und alle $z \in W$ gilt $\langle \nu + z\mu, \alpha^\vee \rangle \geq -1$, so haben wir in der obigen Formel sogar ganz rechts Gleichheit für alle λ. Auch im allgemeinen zeigt unsere Formel $[\mathrm{L}(\mu) \otimes \mathrm{L}(\nu) : \mathrm{L}(\lambda)] \neq 0 \Rightarrow |\lambda - \nu| \leq |\mu|$ bezüglich jedes unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$.

Beweis. Ist E irgendeine endlichdimensionale Darstellung und $\mathrm{P}_\mu(E)$ die Multimenge ihrer Gewichte im Sinne von [GR] 1.6.8, wobei jedes Gewicht mit der Dimension des zugehörigen Gewichtsraums gewichtet wird und der „Multimengenanzeiger" μ nicht mit dem Gewicht μ zu verwechseln ist, so liefert die Kostant'sche Charakterformel 4.6.27

$$\operatorname{ch}(E \otimes \mathrm{L}(\nu)) = \sum_{y \in W,\ \tau \in \mathrm{P}_\mu(E)} (-1)^{l(y)} \operatorname{ch} \Delta(y \cdot \nu + \tau)$$

Um die Vielfachheit von $\mathrm{L}(\lambda)$ in $E \otimes \mathrm{L}(\nu)$ zu bestimmen, müssen wir nur auf der rechten Seite die Summanden $\Delta(\lambda)$ zählen und erhalten die Gleichung aus der Formel von Klimyk in der Gestalt

$$[E \otimes \mathrm{L}(\nu) : \mathrm{L}(\lambda)] = \sum_{\substack{y \in W, \tau \in \mathrm{P}_\mu(E) \\ y \cdot \nu + \tau = \lambda}} (-1)^{l(y)} = \sum_{y \in W} (-1)^{l(y)} \dim E_{\lambda - y \cdot \nu}$$

Ebenso finden wir auch $\operatorname{ch}(E \otimes \Delta(\nu)) = \sum_{\tau \in \mathrm{P}_\mu(E)} \operatorname{ch} \Delta(\nu + \tau)$ und damit sofort $[E \otimes \Delta(\nu) : \mathrm{L}(\lambda)] = \dim E_{\lambda - \nu}$. Das liefert dann auch die Ungleichung in obigem Satz. $\square$

4.6.34. Haben wir nun wieder $E = \mathrm{L}(\mu)$, so können wir die Kostant'sche Charakterformel auch mit der Kostant'schen Partitionsfunktion aus 4.4.3 schreiben in der Gestalt

$$\dim \mathrm{L}(\mu)_\eta = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \mathcal{P}(x \cdot \mu - \eta)$$

Setzen wir das in die Formel von Klimyk 4.6.32 ein, so ergibt sich die **Formel von Steinberg**

$$[\mathrm{L}(\mu) \otimes \mathrm{L}(\nu) : \mathrm{L}(\lambda)] = \sum_{x,y \in W} (-1)^{l(xy)} \mathcal{P}(x \cdot \mu + y \cdot \nu - \lambda)$$

4.6.35. Sei $T \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $\varepsilon_i : T \to \mathbb{C}^\times$ die Projektion auf den i-ten Diagonaleintrag. Die Charaktergruppe $\mathfrak{X}(T)$ ist die freie abelsche Gruppe über den ε_i und ihr Gruppenring ist der Ring $\mathbb{Z}[X_i, X_i^{-1}]$ der Laurentpolynome in Veränderlichen $X_1, \ldots, X_n$, wo wir $\mathrm{e}^{\varepsilon_i} = X_i$ abgekürzt haben, d.h. X_i ist ε_i aufgefaßt als Element des Gruppenrings. Der Charakter definiert einen Ringisomorphismus

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Grothendieckgruppe der} \\ \text{endlichdimensionalen polynomialen} \\ \text{Darstellungen von } \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$$

des Darstellungsrings der polynomialen Darstellungen mit dem Ring der symmetrischen Polynome. Die irreduziblen Darstellungen entsprechen hierbei den sogenannten **Schur-Polynomen**. Gegeben natürliche Zahlen $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ gehört genauer zur irreduziblen Darstellung $\mathrm{L}(\lambda)$ mit höchstem Gewicht $\lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ das Schurpolynom S_λ mit der kombinatorischen Definition

$$S_\lambda = \det(X_j^{\lambda_i + n - i}) / \det(X_j^{n-i})$$

In der Tat folgt das aus der Weyl'schen Charakterformel und der Erkenntnis, daß wir eine Identität haben der Gestalt

$$X_1^{n-1} X_2^{n-2} \ldots X_{n-2}^2 X_{n-1}^1 X_n^0 = \mathrm{e}^{\rho + \kappa}$$

mit κ einem Gewicht, das invariant ist unter der Weylgruppe. Etwas Vorsicht ist jedoch geboten, denn weder ρ noch κ gehören zu $\mathfrak{X}(T)$.

Proposition* 4.6.36 (**Konvexität von Gewichtsmengen**). *Die Menge der Gewichte einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung einer komplexen reduktiven Liealgebra ist der Schnitt des um das höchste Gewicht verschobenen Wurzelgitters mit der konvexen Hülle der Bahn des höchsten Gewichts unter der Weylgruppe, in Formeln*

$$\mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda)) = \mathrm{Conv}(W\lambda) \cap (\lambda + \langle R \rangle)$$

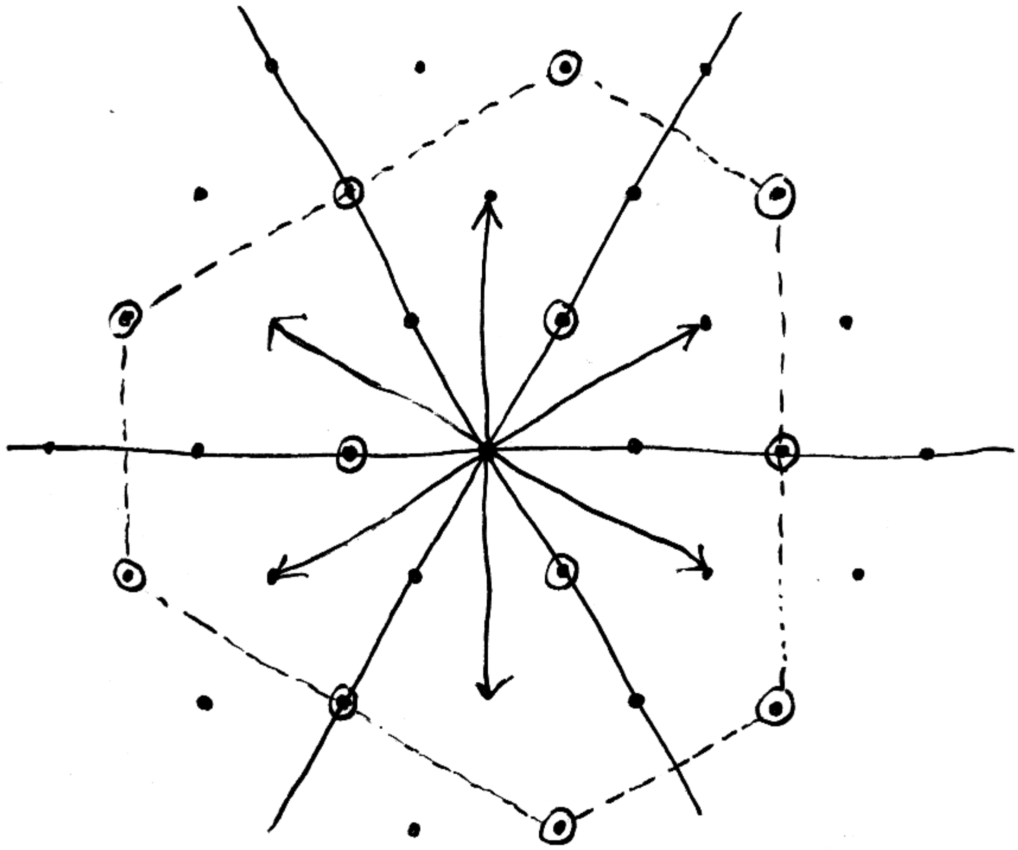


Illustration von Proposition 4.6.36 über die Gewichte einer irreduziblen Darstellung. Im Bild stellen die fetten Punkte ganze Gewichte dar und die eingekreisten fetten Punkte die Gewichte einer speziellen irreduziblen Darstellung. Über die Dimension der zugehörigen Gewichtsräume wird hier keine Aussage gemacht, nur daß das eben genau die Gewichte mit von Null verschiedenen Gewichtsräumen in unserer Darstellung sind.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten mit dem Abschluß $\bar{C}^+$ der dominanten Weylkammer denselben Schnitt haben. Aber sei K^- der von den negativen Wurzeln erzeugte Kegel. Man sieht leicht

$$\operatorname{Conv}(W\lambda) \subset \lambda + K^-$$

und wir behaupten zunächst, daß hier beide Seiten denselben Schnitt mit $\bar{C}^+$ haben. Man kann ja wohl zeigen, daß für zwei endlich erzeugte Kegel, die durch eine Hyperebene getrennt werden in dem Sinne, daß sie abgesehen vom Ursprung ganz im einen beziehungsweise im anderen offenen Halbraum liegen, der Schnitt des Einen mit dem verschobenen Anderen die konvexe Hülle der Menge aller einelementigen Schnitte von Facetten unserer beiden Kegel ist. Unser Schnitt $\bar{C}^+ \cap (\lambda + K^-)$ hat nun als extreme Punkte gerade die Punkte, die man erhält, wenn man λ senkrecht bezüglich eines unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts auf den Träger einer Facette von $\bar{C}^+$ projiziert. Diese Punkte liegen aber auch in $\operatorname{Conv}(W\lambda)$ als die Schwerpunkte der Bahnen $W_F\lambda$ für W_F die Standgruppe der fraglichen Facette. Damit folgt schon mal

$$\operatorname{Conv}(W\lambda) \cap \bar{C}^+ = (\lambda + K^-) \cap \bar{C}^+$$

Schneiden wir aber die rechte Seite mit dem um λ verschobenen Wurzelgitter $\lambda + \langle R \rangle$, so sollte $\mathfrak{sl}_2$-Theorie zeigen, daß wir gerade $\mathrm{P}(\mathrm{L}(\lambda)) \cap \bar{C}^+$ erhalten. □

Ergänzung 4.6.37. Jetzt betrachten wir die Menge

$$D := \left\{ \rho - \sum_{\alpha \in R^+} t_\alpha \alpha \;\middle|\; 0 \leq t_\alpha \leq 1 \right\}$$

Sie kann auch beschrieben werden als die konvexe Hülle $D = \operatorname{Conv}(W\rho)$, denn beide Seiten dieser Gleichung sind invariant unter der Weylgruppe und haben denselben Schnitt mit dem Abschluß der dominanten Weylkammer. Nun zeigen wir für alle Gewichte μ, ν aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer die Inklusion

$$\mu + \operatorname{Conv}(W\nu) \subset \operatorname{Conv}(W(\mu + \nu))$$

Um das zu sehen, brauchen wir ja nur $\mu + W\nu \subset \operatorname{Conv}(W(\mu + \nu))$ zu zeigen. Wir behaupten sogar allgemeiner $W\mu + W\nu \subset \operatorname{Conv}(W(\mu + \nu))$. Das hinwiederum scheint mir klar, da man die Punkte aus $W\nu$ beziehungsweise $W\mu$ alle durch geeignete Spiegelfolgen „immer über eine Wand" kriegen kann und das Ende einer solchen Spiegelfolge für einen Punkt aus $\mu + W\nu$ jeweils in der konvexen Hülle der entsprechenden Spiegelfolge aus $W\mu$ liegen muß. Daraus folgt, wenn wir $\mu = \lambda - m\rho$ und $\nu = m\rho$ nehmen, was mich Steen gefragt hatte: Gegeben λ dominant und m das Minimum der Werte aller positiven Kowurzeln darauf gehören die $\lambda - \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$ für $0 \leq n_\alpha \leq m$ alle zur Menge der Gewichte von $\mathrm{L}(\lambda)$.

Übungen

Übung 4.6.38. Man zeige mithilfe einer Streckung der Nennerformel 4.6.30 für eine beliebige halbeinfache Liealgebra die Formel

$$\operatorname{ch} \mathrm{L}(n\rho) = \mathrm{e}^{n\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \ldots + \mathrm{e}^{-n\alpha})$$

Übung 4.6.39. Man folgere aus der Dimensionsformel, daß die symmetrischen Potenzen $\mathrm{S}^r \mathbb{C}^{n+1}$ stets irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(n+1;\mathbb{C})$ sind. Sie haben im übrigen das höchste Gewicht $r\varpi_1$. Wer Rechenzeit sparen will, sollte sich zumindest den Fall $n = 2$ überlegen. Alternativ und vielleicht einfacher kann man die Irreduzibilität auch wie in [HL] 1.2.23 begründen.

Übung 4.6.40. Ich sollte wohl einmal als Übung die fundamentale Darstellung der Dimension 27 der Liealgebra vom Typ E_6 diskutieren lassen.

Übung 4.6.41. Wir erinnern aus 4.2.9, daß die fundamentalen Gewichte zu G_2 die höchste Wurzel und die höchste kurze Wurzel sind. Die Darstellung zur höchsten Wurzel ist natürlich die adjungierte Darstellung. Man zeige, daß die Darstellungen zur höchsten kurzen Wurzel eine irreduzible Darstellung L der Dimension 7 ist mit den kurzen Wurzeln sowie der Null als Gewichten und eindimensionalen Gewichtsräumen. Gegeben ein Gewicht λ und eine Wurzel α mit $L_\lambda \neq 0 \neq L_{\lambda+\alpha}$ zeige man $x_\alpha : L_\lambda \stackrel{\sim}{\to} L_{\lambda+\alpha}$ für jeden von Null verschiedenen Wurzelvektor x_α. Jede von Null verschiedene invariante Bilinearform auf L ist symmetrisch und liefert so eine Einbettung unserer Liealgebra vom Typ G_2 in die $\mathfrak{so}(7)$.

Übung 4.6.42. Betrachtet man die Abbildung $\chi : \mathbb{Z}[\mathfrak{X}] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$, die jedem e^λ den Ausdruck $\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)}$ zuordnet, so gilt $\chi(BA) = B\chi(A)$ für alle $B \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$ und $A \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$. Das ist recht nahe an der Tensoridentität **??** und der Steinberg'schen Formel, man sieht es auch durch explizite Rechnung.

4.7 Cliffordalgebra und Spingruppe

4.7.1. Sei $n \geq 3$. Nach [ML] 4.4.14 gilt dann $|\pi_1(\mathrm{SO}(n))| = 2$. Nach [TF] 5.2.5 gibt es also ein bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmtes Paar (K, φ) bestehend aus einer einfach zusammenhängenden kompakten Liegruppe K und einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi : K \to \mathrm{SO}(n)$ mit zweielementigem Kern. Wir nennen diese einfach zusammenhängende Überlagerung K der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ die n**-te Spin-Gruppe** und notieren sie

$$\mathrm{Spin}(n)$$

Im folgenden wollen wir eine alternative Konstruktion dieser Gruppe angeben und gleichzeitig diejenigen ihrer irreduziblen Darstellungen konstruieren, die in der in

4.2.10 und 4.2.11 besprochenen allgemeinen Theorie zu fundamentalen höchsten Gewichten gehören und sich nicht als äußere Potenzen der Standarddarstellung beschreiben lassen, also in der dortigen Notation die Darstellung zum höchsten Gewicht ϖ_n und im Fall von geradem n zusätzlich die Darstellung zum höchsten Gewicht ϖ_{n-1}. Das Grundprinzip unserer Konstruktionen ist in der folgenden Bemerkung 4.7.2 enthalten. Wir werden sie auf den Fall der Cliffordalgebra mit ihrer Operation von $\mathrm{SO}(n)$ anwenden und müssen dafür im weiteren Verlauf erst einmal die Cliffordalgebra selbst besprechen.

4.7.2 (**Automorphismen von Endomorphismenringen**). Seien k ein Körper und S ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Nach [NAS] 3.5.12 liefert die Operation durch Konjugation einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{PGL}(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RAlg}_k^\times(\mathrm{End}_k(S))$$

zwischen der projektivisierten linearen Gruppe von S und der Gruppe der Ringalgebrenautomorphismen des Endomorphismenrings von S. Salopp gesprochen liefert also jede Operation einer Gruppe G auf dem Endomorphismenring $\mathrm{End}_k(S)$ eines endlichdimensionalen Vektorraums S durch Ringalgebrenautomorphismen eine „projektive Operation“ derselben Gruppe G auf dem Vektorraum S.

4.7.3. Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum V versteht man unter einer **quadratischen Form auf** V eine Abbildung $q : V \to k$ derart, daß es eine Bilinearform $b : V \times V \to k$ gibt mit $q(v) = b(v, v)$.

Definition 4.7.4. Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum V mit einer quadratischen Form $q : V \to k$ erklärt man die **Clifford-Algebra**

$$\mathrm{Cliff}(V) = \mathrm{Cliff}_q(V)$$

als den Quotienten der Tensoralgebra $\mathrm{T}V$ nach dem Ideal, das von den Relationen $v \otimes v = q(v)$ mit $v \in V$ erzeugt wird. Da dies Ideal homogen ist für die von der offensichtlichen $\mathbb{Z}$-Graduierung abgeleitete $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung der Tensoralgebra, besitzt die Cliffordalgebra eine natürliche $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung

$$\mathrm{Cliff}(V) = \mathrm{Cliff}_{\bar{0}}(V) \oplus \mathrm{Cliff}_{\bar{1}}(V)$$

Wir nennen die homogenen Elemente vom Grad $\bar{0}$ **gerade** und die homogenen Elemente vom Grad $\bar{1}$ **ungerade**.

4.7.5. Gegeben ein Vektorraum V mit einer Bilinearform b vereinbaren wir die Notation $\mathrm{Cliff}_b(V) := \mathrm{Cliff}_q(V)$ für die Clifford-Algebra zur quadratischen Form $q = q_b$ mit $q(v) = b(v, v)$. In der Literatur findet man auch eine andere Konvention, bei der man stattdessen mit $q(v) = -b(v, v)$ arbeitet.

4.7.6 (**Die Cliffordalgebra durch Erzeuger und Relationen**). Gegeben ein Vektorraum V mit einer Bilinearform b und eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V mag man die Cliffordalgebra $\mathrm{Cliff}_b(V)$ auch beschreiben als die Ringalgebra, die von den Symbolen v_i mit den Relationen $v_i^2 = b(v_i, v_i)$ sowie $v_i v_j + v_j v_i = b(v_i, v_j) + b(v_j, v_i)$ für alle $i, j \in I$ erzeugt wird.

4.7.7. Gegeben Vektorräume mit quadratischen Formen (V, q) und (W, p) ist die Abbildung $(v, w) \mapsto q(v)+p(w)$ eine quadratische Form auf $V \oplus W$. Wir notieren sie $q \oplus p$. Die Vorschrift $(v, w) \mapsto v\bar{\otimes}w$ liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{Cliff}_{q\oplus p}(V \oplus W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cliff}_q(V)\bar{\otimes}\,\mathrm{Cliff}_p(W)$$

für $\bar{\otimes}$ das Supertensorprodukt von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten Algebren aus [TSK] 3.1.32, also das übliche Tensorprodukt von Vektorräumen mit einer um das übliche Vorzeichen abgeänderten Multiplikation.

4.7.8 (**Die Cliffordalgebra zur Standardform**). Gegeben ein Körper k heiße die quadratische Form $q : k^n \to k$ gegeben durch $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ die **Standardform** $q = \mathrm{std}$. Die zugehörige Cliffordalgebra kürzen wir ab mit

$$\mathrm{Cliff}_n := \mathrm{Cliff}_{\mathrm{std}}(k^n)$$

Man prüft explizit $\mathrm{Cliff}_1 \cong k[\tau]$ mit $\tau^2 = 1$ und mit der Graduierung, die τ den Grad Eins gibt. Unter der Annahme $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und der Annahme der Existenz einer Wurzel i aus (-1) erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{Cliff}_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(k^{1|1})$ von Superringalgebren im Sinne von [TSK] 3.1.10 und [TSK] 3.1.33 mit der Notation $k^{a|b}$ für Supervektorräume aus [TSK] 2.1.18 durch $\mathrm{e}_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ und $\mathrm{e}_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}0&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&0\end{smallmatrix}\right)$. Wegen der Identität $\mathrm{End}(k^{a|b})\bar{\otimes}\,\mathrm{End}(k^{c|d}) \cong \mathrm{End}(k^{ac+bd|ad+bc})$ aus [TSK] 3.1.33 folgt mit 4.7.7 induktiv die Beschreibung $\mathrm{Cliff}_{2m} \cong \mathrm{End}(k^{2^{m-1}|2^{m-1}})$ der Cliffordalgebra als Superalgebra und nach Vergessen der Graduierung erhalten wir einen Isomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2m} \cong \mathrm{Mat}(2^m; k)$$

Weiter erhalten wir, immer noch unter der Annahme $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und der Annahme der Existenz einer Wurzel i aus (-1), einen Isomorphismen von Superalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2m+1} \cong \mathrm{End}(k^{2^{m-1}|2^{m-1}})\bar{\otimes}k[\tau]$$

für $\tau^2 = 1$. Nun kann jede Superalgebra A als Algebra mit Operation der zweielementigen Gruppe verstanden werden, deren nichttriviales Element durch 1 auf den graden Elementen operiert und durch (-1) auf den ungeraden, und $A\bar{\otimes}k[\tau]$ als der vertwistete Gruppenring, dessen Modulkategorie äquivalent ist zur Kategorie der äquivarianten alias graduierten A-Moduln. Die irreduziblen Cliff_{2m+1}-Moduln entsprechen so den graduiert irreduziblen graduierten Cliff_{2m}-Moduln, und von denen gibt es offensichtlich genau Zwei, nämlich den Modul $k^{2^{m-1}|2^{m-1}}$ und denselben Modul mit der vertauschten Graduierung. Damit besitzt Cliff_{2m+1} bis auf Isomorphismus genau zwei irreduzible Moduln, die beide die Dimension 2^m haben, und mithilfe eines Dimensionsvergleichs liefert die Operation einen Isomorphismus von k-Ringalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2m+1} \cong \mathrm{Mat}(2^m; k) \times \mathrm{Mat}(2^m; k)$$

Insbesondere ist im Fall $\mathrm{char}(k) = 0$ die Cliffordalgebra zu einer nichtausgearteten Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum stets halbeinfach, da sie nämlich unter einer geeigneten Körpererweiterung halbeinfach wird, vergleiche [NAS] 3.6.13.

4.7.9 (**Operation der orthogonalen Gruppe auf der Cliffordalgebra**). Ist V ein Vektorraum über einem Körper k und $q : V \to k$ eine quadratische Form, so operiert die Standgruppe $\mathrm{O}(V, q)$ unserer quadratischen Form offensichtlich durch Ringalgebrenautomorphismen auf der zugehörigen Cliffordalgebra und wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{O}(V, q) \to \mathrm{RAlg}_k^\times(\mathrm{Cliff}_q(V))$$

Genauso offensichtlich läßt sich, wenn wir zur Vereinfachung $\mathrm{char}\, k \neq 2$ annehmen und die eindeutig bestimmte symmetrische Bilinearform b mit $b(v, v) = q(v)$ betrachten, die offensichtliche Operation der Standliealgebra $\mathfrak{o}(V, b)$ unserer Bilinearform zu einer Operation durch Derivationen auf der Cliffordalgebra fortsetzen und wir erhalten einen Liealgebrenhomomorphismus

$$\mathrm{can} : \mathfrak{o}(V, b) \to \mathrm{Der}_k(\mathrm{Cliff}_b(V))$$

4.7.10. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra A haben wir stets einen Homomorphismus von Liealgebren

$$\mathrm{ad} : A_{\mathrm{L}} \to \mathrm{Der}_k(A)$$

Sein Kern ist das Zentrum $\mathrm{Z}(A)$ von A. Ist insbesondere $A = \mathrm{End}(S)$ der Endomorphismenring eines endlichdimensionalen k-Vektorraums S, so besteht das Zentrum aus den skalaren Matrizen und unter der Annahme $\mathrm{char}(k) = 0$ erhalten wir eine Injektion

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}(S) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(\mathrm{End}(S))$$

Ist allgemeiner A eine halbeinfache endlichdimensionale k-Ringalgebra und bezeichnet $A_{\mathrm{L}}^{(1)} \subset A_{\mathrm{L}}$ den von den Kommutatoren erzeugten Untervektorraum, so erhalten wir in derselben Weise eine Injektion

$$\mathrm{ad} : A_{\mathrm{L}}^{(1)} \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(A)$$

In der Tat folgt das leicht für Ringalgebren A, die endliche Produkte von Matrixringen sind. Da beide Seiten verträglich sind mit Körpererweiterungen, folgt es dann mit [NAS] 3.5.6 und [NAS] 3.6.13 sogar für beliebige endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebren über einem Körper der Charakteristik Null.

Ergänzung 4.7.11 (**Derivationen von Endomorphismenringen**). Das folgende ist eine infinitesimale Version von 4.7.2. Seien k ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char} k = 0$ und S ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Nach [HL] 2.2.8 liefert die adjungierte Operation einen Isomorphismus von Liealgebren

$$\operatorname{ad} : \mathfrak{sl}(S) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\operatorname{End}_k(S))$$

Wir ordnen hier $X \in \operatorname{End}_k(S)_{\mathrm{L}}$ die Derivation $(\operatorname{ad} X) : Y \mapsto XY - YX$ der assoziativen Algebra $\operatorname{End}_k(S)$ zu und schränken diese Abbildung auf die Unterliealgebra der spurfreien Endomorphismen ein. Ist also in anderen Worten A eine k-Ringalgebra, die isomorph ist zum Endomorphismenring eines endlichdimensionalen k-Vektorraums, so liefert die adjungierte Operation einen Isomorphismus von Liealgebren

$$\operatorname{ad} : A_{\mathrm{L}}^{(1)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(A)$$

zwischen der derivierten Liealgebra $A_{\mathrm{L}}^{(1)}$ von A_{L} alias dem von den Kommutatoren aufgespannten Teilraum und der Liealgebra der Derivationen von A. In dieser Formulierung gilt es dann offensichtlich auch für Ringalgebren A, die endliche Produkte von Matrixringen sind. Da beide Seiten verträglich sind mit Körpererweiterungen, folgt es dann mit [NAS] 3.5.6 und [NAS] 3.6.13 sogar für beliebige endlichdimensionale halbeinfache Ringalgebren über einem Körper der Charakteristik Null.

4.7.12 (**Die Spindarstellung**). Gegeben (V, b) ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer symmetrischen und nichtausgearteten Bilinearform und $q(v) = b(v, v)$ betrachen wir den Isomorphismus $\varphi : V \otimes V \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(V)$ gegeben durch $(\varphi(v \otimes w))(u) = b(w, u)v$. Außerdem betrachten wir das Aufmultiplizieren $\psi : V \otimes V \to \operatorname{Cliff}_q(V)$ und finden für jeden Tensor $T \in V \otimes V$ und alle $u \in V$ in der Cliffordalgebra mit der Notation $\tau : V \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V$ für die Vertauschung die Identität

$$\psi(T)u - u\psi(T) = \varphi(T - \tau T)(u)$$

Weiter ist $\varphi(T) \in \mathfrak{o}(V, b)$ alias $b(\varphi(T)x, u) + b(x, \varphi(T)u) = 0$ offensichtlich gleichbedeutend zu $\tau T = -T$. Erklären wir also $\alpha : \mathfrak{o}(V, b) \to \operatorname{Cliff}_q(V)$ durch $\alpha(X) := \psi(\varphi^{-1}(X))$, so gilt in der Cliffordalgebra für alle $u \in V$ die Identität $\alpha(X)u - u\alpha(X) = 2X(u)$ und wir haben

$$\operatorname{ad}(\alpha(X)) = \operatorname{can}(2X) \in \operatorname{Der}(\operatorname{Cliff}_q(V))$$

Andererseits gehört $\psi(T - \tau T)$ offensichtlich stets zur derivierten Liealgebra $\mathrm{Cliff}_q(V)^{(1)}_{\mathrm{L}}$ alias dem von den Kommutatoren aufgespannten Teilraum. Nehmen wir also zusätzlich an, daß wir über einem Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(k) = 0$ arbeiten, und setzen $\beta(X) := \alpha(X)/2$, so folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{o}(V, b) \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\ \mathrm{Cliff}_q(V)^{(1)}_{\mathrm{L}} \arrow[r, hook] & \mathrm{Der}_k(\mathrm{Cliff}_q(V)) \end{tikzcd}$$

zusammen mit der Erkenntnis 4.7.8, daß die Cliffordalgebra halbeinfach ist und folglich die untere Horizontale nach 4.7.10 wie im Diagramm bereits angedeutet injektiv sein muß, daß auch β ein Homomorphismus von Liealgebren ist. Jeder Modul über der Cliffordalgebra wird damit eine Darstellung der orthogonalen Liealgebra. Die direkte Summe aller einfachen Moduln bis auf Isomorphismus der Cliffordalgebra heißt die **Spin-Darstellung** der entsprechenden orthogonalen Liealgebra. Im folgenden besprechen wir, welche expliziten Formeln sich hinter dieser allgemeinen Theorie verstecken.

4.7.13. Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Wir erinnern aus [LA2] 6.5.21 für $\lambda \in V^*$ das partielle Auswerten $i_\lambda : \bigwedge^n V \to \bigwedge^{n-1} V$ und die Identitäten $i_\lambda^2 = 0$ sowie im Ring der Endomorphismen der äußeren Algebra die für uns im folgenden besonders bedeutsame Identität

$$\big((v\wedge) + i_\lambda\big)^2 = (v\wedge) \circ i_\lambda + i_\lambda \circ (v\wedge) = (\lambda(v)\cdot)$$

4.7.14 (**Die Spindarstellung zur Evaluationsform**). Seien k ein Körper und P, Q zwei k-Vektorräume. Jede bilineare Abbildung $b : P \times Q \to k$ kann als eine quadratische Form $b : P \oplus Q \to k$ aufgefaßt werden. Wir erhalten in diesem Fall nach 4.7.13 sogar einen Algebrenhomomorphismus

$$j : \mathrm{Cliff}_b(P \oplus Q) \to \mathrm{End}_k(\textstyle\bigwedge P)$$

durch $j(p, q) = (p\wedge) + i_{b(\ ,q)}$. Ist unsere Paarung eine nichtausgeartete Paarung endlichdimensionaler Vektorräume, so können wir gleich von der Evaluationspaarung ev mit dem Dualraum ausgehen. Auf diese Weise wird $\bigwedge P$ offensichtlich sogar ein einfacher Modul über $\mathrm{Cliff}_{\mathrm{ev}}(P \oplus P^*)$. Dieser Modul bleibt einfach bei jeder Erweiterung der Skalare zu einer Körpererweiterung von k und nach dem Satz von Wedderburn [NAS] 3.3.6 induziert die Operation damit einen surjektiven und dann aus Dimensionsgründen sogar bijektiven Ringalgebrenhomomorphismus

$$\mathrm{Cliff}_{\mathrm{ev}}(P \oplus P^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_k\,(\textstyle\bigwedge P)$$

Insbesondere besitzt auch für die Evaluationsform die Cliffordalgebra nur einen einzigen einfachen Modul. Er fällt natürlich mit dem einzigen einfachen Modul aus 4.7.8 zusammen, wenn die Evaluationsform isomorph ist zu einer Standardform und die Voraussetzungen aus 4.7.8 erfüllt sind.

Satz 4.7.15 (Basis der Cliffordalgebra). *Seien k ein Körper und (V, q) ein k-Vektorraum mit einer quadratischen Form und $(v_i)_{i \in I}$ eine k-Basis von V und $\leq$ eine Anordnung von I. So bilden die streng monotonen Monome $v_{i(1)} v_{i(2)} \dots v_{i(r)}$ mit $i(1) < i(2) < \dots < i(r)$ und $r \geq 0$ eine k-Basis der Cliffordalgebra.*

Beweis in speziellen Fällen. Ist unser Raum endlichdimensional und die Charakteristik nicht Zwei, so folgt der Satz unmittelbar aus der vorhergehenden Bemerkung 4.7.7, aus Satz [LA2] 2.3.11 über die Existenz einer Orthogonalbasis und aus der Darstellbarkeit quadratischer Formen durch symmetrische Bilinearformen. □

Beweis im Allgemeinen. Gegeben $v, w \in V$ gilt in der Cliffordalgebra die Identität $(v + w)^2 = v^2 + vw + wv + w^2$ und folglich $vw \in k1 - wv$. Das zeigt schon mal, daß unsere streng monotonen Monome ein Erzeugendensystem bilden. Betrachten wir genauer eine Bilinearform $b : V \times V \to k$ mit $b(v, v) = q(v)\ \forall v \in V$, so finden wir in der Cliffordalgebra

$$vw + wv = b(v, w) + b(w, v)$$

Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, konstruieren wir auf $\bigwedge V$ eine Struktur als Modul über der Cliffordalgebra. Dazu betrachten wir für jeden Vektor $v \in V$ die Linearform $b(v, \ )$ und den Endomorphismus

$$J(v) := (v \wedge \ ) + i_{b(v, \ )}$$

der äußeren Algebra und folgern mit unserer Vorüberlegung 4.7.13 sofort $J(v)^2 = b(v, v)$. Das zeigt, daß die Vorschrift $v \mapsto J(v)$ zu einem Ringalgebrenhomomorphismus

$$J : \operatorname{Cliff}_q(V) \to \operatorname{End}\left(\bigwedge V\right)$$

ausgedehnt werden kann. So wird $\bigwedge V$ ein $\operatorname{Cliff}_q(V)$-Modul. Lassen wir ein Monom $v_1 v_2 \dots v_r$ der Cliffordalgebra auf $1 \in \bigwedge V$ operieren, so erhalten wir einen Vektor in $v_1 \wedge \dots \wedge v_r + \bigwedge^{<r} V$. Die lineare Unabhängigkeit unserer streng monotonen Monome folgt damit aus der Tatsache [LA2] 6.5.6, daß die entsprechenden Monome $v_{i(1)} \wedge \dots \wedge v_{i(r)}$ linear unabhängig sind in der äußeren Algebra. Sie bilden nach [LA2] 6.5.6 sogar eine Basis der äußeren Algebra, mithin induziert das Anwenden auf $1 \in \bigwedge V$ eine Bijektion

$$\operatorname{Cliff}_q(V) \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$$

In anderen Worten ist unser Modul frei vom Rang Eins über der Cliffordalgebra mit Erzeuger $1 \in \bigwedge V$. □

4.7.16 (**Gewichte für D_n**). Wir erinnern für $n \geq 2$ aus [HL] 2.3.32 das Wurzelsystem $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ mit der Bezeichnung D_n von $\mathfrak{so}(2n)$. Wir erinnern, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der ε_i gefolgt von der Änderung einer geraden Zahl von Vorzeichen besteht. Wir erinnern aus Übung [SPW] 2.2.17 seine Basis $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ zusammen mit $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. Wir erinnern aus Übung 4.2.10 die zu dieser Basis gehörigen fundamentalen dominanten Gewichte

$$\begin{array}{lcll} \varpi_i & = & \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i & \text{für } 1 \leq i < n-1, \\ \varpi_{n-1} & = & (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2, & \\ \varpi_n & = & (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)/2. & \end{array}$$

Aus [ML] 2.5.12 folgt, daß für $1 \leq i < n$ die äußeren Potenzen irreduzible Darstellungen sind. Man erkennt unschwer $\bigwedge^i(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_i)$ für $1 \leq i < n-1$ und $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{C}^{2n}) = \mathrm{L}(\varpi_{n-1} + \varpi_n)$. Weiter folgt aus [ML] 2.5.12, daß $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n})$ eine Summe von zwei irreduziblen Darstellungen ist. Man zeigt auch unschwer $\bigwedge^n(\mathbb{C}^{2n}) \cong \mathrm{L}(2\varpi_{n-1}) \oplus \mathrm{L}(2\varpi_n)$. Irreduzible Darstellungen zu den höchsten Gewichten ϖ_{n-1} und ϖ_n liefert die sogenannte Clifford-Algebra, wie wir im Anschluß besprechen.

4.7.17 (**Konstruktion der Spindarstellung im geraden Fall**). Wir betrachten die komplexifizierte Cliffordalgebra Cliff_{2n} des $\mathbb{R}^{2n}$ mit seinem Standardskalarprodukt. Sie trägt eine offensichtliche Operation der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2n)$. Nach 4.7.15 hat diese Cliffordalgebra in unseren Konventionen aus 4.2.10 als Gewichte alle Summen über Teilmengen der $2n$-elementigen Menge

$$\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_n\}$$

Nun besitzt sie nach 4.7.14 bis auf Isomorphismus genau einen einfachen Cliffordmodul S und ist isomorph zur Ringalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ der linearen Endomorphismen dieses Moduls. Halten wir einen solchen einfachen Modul S fest, so erhalten wir erst mit 4.7.2 einen Liegruppenhomomorphismus $\mathrm{SO}(2n) \to \mathrm{PGL}(S)$ und dann mit [ML] 4.4.22 für $n \geq 2$, was wir ab jetzt stets annehmen wollen, einen Liegruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{SL}(S)$$

In anderen Worten kann demnach S so zu einer Darstellung der universellen Überlagerung von $\mathrm{SO}(2n)$ gemacht werden, daß die induzierte Operation auf $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$

von der bereits bekannten Operation von $\mathrm{SO}(2n)$ herkommt. Der prinzipale Automorphismus unseres Wurzelsystems operiert auf dem Charaktergitter als die Identität bei geradem n und als die Vertauschung der beiden letzten fundamentalen Gewichte ϖ_{n-1} und ϖ_n bei ungeradem n. Ist

$$b\varpi_{n-1} + c\varpi_n + \sum_{i\le n-2} a_i\varpi_i$$

Höchstgewicht einer irreduziblen Komponente der $\mathfrak{so}(2n)$-Darstellung S, so ist $c\varpi_{n-1} + b\varpi_n + \sum_{i\le n-2} a_i\varpi_i$ Höchstgewicht einer irreduziblen Komponente von S^* und die Summe dieser beiden Höchstgewichte muß ein Gewicht von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ sein. Wir folgern, daß alle a_i Null sein müssen, da ε_1 in keinem Gewicht von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ mit einem Koeffizienten > 1 auftritt. In derselben Weise folgern wir $b + c \le 1$. Als Höchstgewichte der irreduziblen Komponenten von S kommen also nur ϖ_{n-1}, ϖ_n und 0 in Frage. Es kann aber nicht nur die Null als Höchstgewicht vorkommen. Also ist auch die Null ausgeschlossen, da kein ε_i in einem Gewicht von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ mit einem Koeffizienten außerhalb von $\mathbb{Z}$ auftritt, und als Höchstgewichte kommen nur ϖ_{n-1} und ϖ_n in Frage. Beide müssen dann genauer genau einmal vorkommen, sonst würden uns Gewichte von $\mathrm{End}_k(S)$ fehlen oder hätten eine zu hohe Multiplizität. Für die Darstellung S von $\mathrm{Spin}(2n)$ folgern wir einen Isomorphismus

$$S \cong \mathrm{L}(\varpi_n) \oplus \mathrm{L}(\varpi_{n-1})$$

4.7.18 (**Konstruktion der Spindarstellung im ungeraden Fall**). Jetzt betrachten wir die komplexifizierte Cliffordalgebra Cliff_{2n+1} des $\mathbb{R}^{2n+1}$ mit seinem Standard-Skalarprodukt. Sie trägt eine offensichtliche Operation von $\mathrm{O}(2n+1)$. Nach 4.7.8 besitzt Cliff_{2n+1} bis auf Isomorphismus genau zwei irreduzible Moduln V und W, die beide die Dimension 2^n haben, und die Operation liefert einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Ringalgebren

$$\mathrm{Cliff}_{2n+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$$

Die beiden Faktoren sind eindeutig bestimmt und unsere Operation der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2n+1)$ induziert eine Operation von $\mathrm{SO}(2n+1)$ auf jedem von ihnen. Wie zuvor in 4.7.17 versehen wir dann V und W mit der Struktur einer Darstellung der Spin-Gruppe $\mathrm{Spin}(2n+1)$. Nun sind die Gewichte der Standarddarstellung der $\mathrm{SO}(2n+1)$ nach [HL] 2.3.33 in der dortigen Notation die Null und $\pm\varepsilon_i$ für $1 \le i \le n$. Die Cliffordalgebra hat also $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ als höchstes Gewicht und der zugehörige Gewichtsraum ist zweidimensional. Nach 4.2.11 ist das gerade das Doppelte $2\varpi_n$ des Fundamentalgewichts zur kurzen einfachen Wurzel. Sowohl V als auch W müssen also höchstes Gewicht $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)/2$ haben. Nun hat $\mathrm{L}(\varpi_n)$ offensichtlich 2^n extreme Gewichte $(\pm\varepsilon_1 \pm \ldots \pm \varepsilon_n)/2$. Ein Vergleich der Dimensionen zeigt, daß das auch schon alle Gewichte von $\mathrm{L}(\varpi_n)$ sein müssen und daß gilt $V \cong W \cong \mathrm{L}(\varpi_n)$ als Darstellungen von $\mathrm{Spin}(2n+1)$.

4.7.19. Die Operation der jeweiligen Liealgebren auf den Spindarstellungen kann man nun an den allgemeinen Überlegungen aus 4.7.12 ablesen. Jedem Element der Liealgebra ordnet man dabei einen Kommutator in der Cliffordalgebra zu, und die Multiplikation mit diesem Kommutator ist dann die Operation des jeweiligen Elements. Ich schreibe die Formeln nicht weiter aus.

Ergänzung 4.7.20. Wir prüfen hier durch explizite Rechnung, daß unsere Abbildung β aus 4.7.12 sogar unter der schwächeren Annahme, daß wir über einem Körper einer Charakteristik $\operatorname{char}(k) \neq 2$ arbeiten, ein Homomorphismus von Liealgebren ist. Die von $\operatorname{End} V$ unter φ auf $V \otimes V$ induzierte Lieklammer ist $[w \otimes z, y \otimes x] = w \otimes b(z,y)x - y \otimes b(x,w)z$. Für die antisymmetrischen Ausdrücke finden wir dann wegen $2(w \wedge z) = w \otimes z - z \otimes w$ die Formel

$$\begin{array}{rcl} 4[w \wedge z, y \wedge x] & = & [w \otimes z - z \otimes w, y \otimes x - x \otimes y] \\ & = & w \otimes b(z,y)x - w \otimes b(z,x)y \\ & & -z \otimes b(w,y)x + z \otimes b(w,x)y \\ & & -y \otimes b(x,w)z + y \otimes b(x,z)w \\ & & +x \otimes b(y,w)z - x \otimes b(y,z)w \\ & = & \langle z,y\rangle w \wedge x - \langle z,x\rangle w \wedge y + \langle y,w\rangle x \wedge z - \langle x,w\rangle y \wedge z \end{array}$$

mit $\langle\ ,\ \rangle = 2b$. Andererseits gilt hinwiederum in unserer Cliffordalgebra die Identität $(v+w)^2 = v^2 + vw + wv + w^2$ alias $vw + wv = \langle v, w\rangle$ und wir erhalten durch Umformen in angeordnete Monome für die alphabetische Reihung

$$\begin{array}{rcl} [wz, yx] & = & wzyx - yxwz \\ & = & w\langle y,z\rangle x - wyzx - y\langle x,w\rangle z + ywxz \\ & = & \langle y,z\rangle wx - wy\langle z,x\rangle + wyxz - \langle x,w\rangle yz + \langle y,w\rangle xz - wyxz \\ & = & \langle y,z\rangle wx - \langle z,x\rangle wy + \langle y,x\rangle wz - wxyz \\ & & -\langle x,w\rangle yz + \langle y,w\rangle xz - \langle y,x\rangle wvz + wxyz \\ & = & \langle y,z\rangle wx - \langle z,x\rangle wy - \langle x,w\rangle yz + \langle y,w\rangle xz \end{array}$$

Dann ist $[wz - zw, yx - xy] = [2wz - \langle w,z\rangle, 2yx - \langle y,x\rangle]$ eben das Vierfache und wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} [wz - zw, yx - xy] & = & 2\langle y,z\rangle 2wx - 2\langle z,x\rangle 2wy - 2\langle x,w\rangle 2yz + 2\langle y,w\rangle 2xz \\ & = & 2\langle y,z\rangle(wx - xw) - 2\langle z,x\rangle(wy - yw) \\ & & -2\langle x,w\rangle(yz - zy) + 2\langle y,w\rangle(xz - zx) \end{array}$$

Es folgt, daß die durch $8(y \wedge x) \mapsto yx - xy$ gegebene Abbildung in der Tat mit der Lieklammer verträglich ist.

4.7.21 (**Explizite Konstruktion einer Überlagerung von** $\mathrm{SO}(n)$). Ist V ein reeller Skalarproduktraum, so prüft man leicht für alle $v, w \in V$ mit $\|v\| = 1$ in der Cliffordalgebra die Formel

$$-vwv^{-1} = w - 2\langle v, w\rangle v$$

In Worten stabilisiert also die Konjugation mit v den Teilraum $V \subset \mathrm{Cliff}(V)$ der Cliffordalgebra und ihr Negatives operiert dort als die Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene, so daß die Konjugation mit v selbst als eine Art „Spiegelung an der von v erzeugten Gerade" operiert. Nun setzt sich die Multiplikation mit (-1) auf V offensichtlich fort zu einem wohlbestimmten Automorphismus sgn der Cliffordalgebra, der die Identität ist auf geraden Elementen und (-1) auf ungeraden Elementen. Die Vektoren der Länge Eins von V gehören damit zur Untergruppe $U \subset \mathrm{Cliff}^\times$ derjenigen Einheiten c der Cliffordalgebra mit $\mathrm{sgn}(c)wc^{-1} \in V\ \forall w \in V$ und $w \mapsto \mathrm{sgn}(c)wc^{-1}$ orthogonal. Sind weiter $u, v \in V$ orthogonal von der Länge Eins, so gehören alle $\cos t + (\sin t)uv = ((\cos t)v + (\sin t)u)v$ auch zu dieser Untergruppe U. Unter dem durch $c \mapsto (w \mapsto (\mathrm{sgn}\, c)wc^{-1}))$ gegebenen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : U \to \mathrm{O}(V)$$

wird unser Element operieren durch eine Spiegelung an der von v erzeugten Gerade gefolgt von einer Spiegelung an der von $(\cos t)v + (\sin t)u$ erzeugten Gerade, mithin als eine Drehung um den Winkel $2t$ mit $v \mapsto (\cos 2t)v + (\sin 2t)u$ und $u \mapsto (\cos 2t)u - (\sin 2t)v$ in der Ebene $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ und als Identität auf deren orthogonalem Komplement. Wegen $uv = -vu$ ist andererseits $t \mapsto \cos t + (\sin t)uv$ eine Einparameteruntergruppe von U. Da die orthogonale Gruppe nach [LA2] 1.11.28 durch Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt wird, ist unsere Abbildung eine Surjektion $\varphi : U \twoheadrightarrow \mathrm{O}(V)$. Um ihren Kern auszurechnen, bestimmen wir alle $c \in \mathrm{Cliff}$ mit $\mathrm{sgn}(c)v = vc\ \forall v \in V$. Gegeben eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ und c ein streng monotones Monom in den v_i finden wir nach kurzer Rechnung

$$\mathrm{sgn}(c)v_j - v_j c = \begin{cases} 0 & v_j \text{ kommt in unserem Monom nicht vor;} \\ -2v_j c & v_j \text{ kommt in unserem Monom vor.} \end{cases}$$

Weiter ist im zweiten Fall $v_j c$ bis auf Vorzeichen gerade unser um den Faktor v_j erleichtertes Monom. Das zeigt $\ker \varphi = \mathbb{R}^\times$. Nun besitzt unsere Cliffordalgebra offensichtlich auch genau einen Antiautomorphismus α, der auf V die Identität ist, und dieser Antiautomorphismus kommutiert mit dem Automorphismus sgn. Insbesondere können wir in U die Untergruppe

$$\mathrm{Pin}(V) := \{c \in U \mid \alpha(c)c = 1\}$$

betrachten. Sie umfaßt immer noch V und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\{\pm 1\} \hookrightarrow \mathrm{Pin}(V) \twoheadrightarrow \mathrm{O}(V)$$

Andererseits liegt nach obiger Rechnung (-1) im Fall $\dim V \geq 2$ in der Einskomponente von $\mathrm{Pin}(V)$. Sie heißt auch die **Spin-Guppe** $\mathrm{Spin}(V)$ und φ induziert eine zusammenhängende zweiblättrige Überlagerung

$$\{\pm 1\} \hookrightarrow \mathrm{Spin}(V) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(V)$$

Übungen

Übung 4.7.22 (**Ausreduzieren der äußeren Algebra unter** $\mathfrak{so}(2n+1)$). Bezeichne $S = \mathrm{L}(\varpi_n)$ die Spindarstellung von $\mathfrak{so}(2n+1)$. Man schätze mit der Formel von Klimyk 4.6.32 die Multiplizitäten der irreduziblen Summanden in $S \otimes S$ ab und folgere aus $S \otimes S \cong \bigwedge \mathbb{C}^{2n+1}$ ein weiteres Mal die Irreduzibilität der $\bigwedge^i \mathbb{C}^{2n}$.

Übung 4.7.23 (**Ausreduzieren der äußeren Algebra unter** $\mathfrak{so}(2n)$). Bezeichne $S = \mathrm{L}(\varpi_{n-1}) \oplus \mathrm{L}(\varpi_n)$ die Spindarstellung von $\mathfrak{so}(2n)$. Man schätze mit der Formel von Klimyk 4.6.32 die Multiplizitäten der irreduziblen Summanden in $S \otimes S$ ab und folgere aus $S \otimes S \cong \bigwedge \mathbb{C}^{2n}$ ein weiteres Mal die Irreduzibilität der $\bigwedge^i \mathbb{C}^{2n}$ für $i \neq n$ sowie die Zerlegung $\bigwedge^n \mathbb{C}^{2n} \cong \mathrm{L}(2\varpi_n) \oplus \mathrm{L}(2\varpi_{n-1})$.

5 Danksagung

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten, insbesondere Jannis Ritter. Eine wesentliche Quelle war für mich der Text [Hum70] von Humphreys. Weiter war auch [Kna96] sehr hilfreich sowie ein Skript von Dragan Miličić.

Literatur

[AAG] Skriptum Affine Algebraische Gruppen. Wolfgang Soergel.

[AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.

[AN1] Skriptum Analysis 1. Wolfgang Soergel.

[AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.

[Bou81] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4–6*. Masson, 1981.

[GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.

[HL] Skriptum halbeinfache Lie-Algebren. Wolfgang Soergel.

[Hum70] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *GTM*. Springer, 1970.

[KAG] Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie. Wolfgang Soergel.

[Kna96] Anthony W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*. Birkhäuser, 1996.

[LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.

[LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.

[ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.

[NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.

[Rad87] Heydar Radjavi. The Engel-Jacobson Theorem revisited. *JOURNAL OF ALGEBRA*, 111:427–430, 1987.

[SPW] Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme. Wolfgang Soergel.

[TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.

[TG] Skriptum Garbenkohomologie. Wolfgang Soergel.

[TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.

[TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.

[TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.

[Vog81] David A. Vogan, Jr. *Representations of real reductive Lie groups*, volume 15 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1981.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index