KOMMUTATIVE ALGEBRA UND GEOMETRIE

Wolfgang Soergel

7. Januar 2016

Wichtige Grundlage für dieses Kapitel ist Abschnitt [AL] 2.1 aus der Algebra über Restklassenringe und Teilringe. Nach und nach wird dann immer mehr aus den anderen Abschnitten von [AL] 2 verwendet, insbesondere auch der Satz, daß Polynomringe über faktoriellen Ringen wieder faktoriell sind. Nach und nach wird auch die Begrifflichkeit topologischer Räume immer wichtiger: Zunächst genügen elementarste Kenntnisse, etwa im Umfang von [AN1] 6.5, später verwenden wir auch weitergehende Konstruktionen im Umfang von [ML] 3.6. Grundbegriffe der Kategorientheorie im Umfang von [LA2] 7 sollten vorhanden sein oder im Rahmen dieser Vorlesung mit erlernt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Endliches Erzeugen und Nullstellensatz

1.1 Hilbert'scher Nullstellensatz

1.1.1. Ich erinnere daran, daß bei mir jeder Ring eine Eins hat und daß von jedem Ringhomomorphismus gefordert wird, daß er die Eins auf die Eins wirft. Ein Ideal eines Rings ist nach [AL] 2.1.3 eine Untergruppe seiner additiven Gruppe, die unter der Multiplikation mit beliebigen Elementen unseres Rings von links wie von rechts stabil ist. Einen kommutativen Ring nenne ich auch einen **Kring**. Sei k ein Kring und $k[T_1, \ldots, T_n]$ der Polynomring über k in n Variablen. Das Auswerten liefert eine Abbildung

$$k[T_1, \ldots, T_n] \times k^n \to k$$

Definition 1.1.2. Ist k ein Kring und $I \subset k[T_1 \ldots, T_n]$ eine Teilmenge, so definieren wir die **Nullstellenmenge** oder kurz die **Nullstellen von** I als die Menge derjenigen Punkte des k^n, an denen alle Polynome aus I verschwinden. Wir notieren sie

$$\mathcal{Z}(I) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

mit $\mathcal{Z}$ wie „zeroes". Eine andere gängige Notation ist $V(I)$ mit V wie „Varietät". Im Fall $I = \{f_1, \ldots, f_r\}$ kürzen wir $\mathcal{Z}(\{f_1, \ldots, f_r\})$ ab zu $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$. Eine Teilmenge $Z \subset k^n$ heißt **algebraisch** genau dann, wenn sie die Nullstellenmenge eines Systems von Polynomen ist, wenn es also in Formeln eine Teilmenge $I \subset k[T_1 \ldots, T_n]$ gibt mit $Z = \mathcal{Z}(I)$.

1.1.3. Im ersten Teil dieser Vorlesung geht es um die Untersuchung „geometrischer" Eigenschaften algebraischer Teilmengen von k^n für algebraisch abgeschlossene Körper k und die entsprechenden „algebraischen" Aussagen der Theorie kommutativer Ringe. Den tragenden Pfeiler der Brücke zwischen der „geometrischen" und der „algebraischen" Welt bildet der folgende Satz, dessen Beweis mit den nötigen Vorbereitungen uns bis 1.10.12 beschäftigen wird.

Satz 1.1.4 (Hilbert'scher Nullstellensatz). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal im Polynomring über k in endlich vielen Variablen. Ist $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom, das auf der Nullstellenmenge unseres Ideals verschwindet, so liegt eine Potenz unseres Polynoms bereits selbst in besagtem Ideal. In Formeln gilt also*

$$\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(I) \;\Rightarrow\; f^N \in I \text{ für } N \gg 0$$

1.1.5. Für k nicht algebraisch abgeschlossen ist dieser Satz falsch: Als Beispiel betrachte man für $k = \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}[T]$ das Ideal $I = \langle T^2 + 1 \rangle$. Obwohl das konstante Polynom $f = 1$ auf der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ unseres Ideals verschwindet, liegt keine seiner Potenzen $1^N = 1$ in besagtem Ideal.

1.1.6. Wir werden den Hilbert'schen Nullstellensatz erst im Anschluß an Lemma 1.10.12 zeigen können. Manche Aussagen aus seinem Umfeld sind jedoch sehr einfach zu haben, wie ich im folgenden ausführen will.

Definition 1.1.7. Ist k ein Kring und $X \subset k^n$ eine Teilmenge, so bilden diejenigen Polynome, die an allen Punkten von X verschwinden, offensichtlich ein Ideal des Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$. Es heißt das **Verschwindungsideal von** X. Wir notieren es

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in X\}$$

1.1.8. Sei k ein beliebiger Kring. Offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{J}$ von Teilmengen von $k[T_1, \ldots, T_n]$ die Identität $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}\left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J\right)$ und insbesondere auch

$$I \subset J \ \Rightarrow \ \mathcal{Z}(I) \supset \mathcal{Z}(J)$$

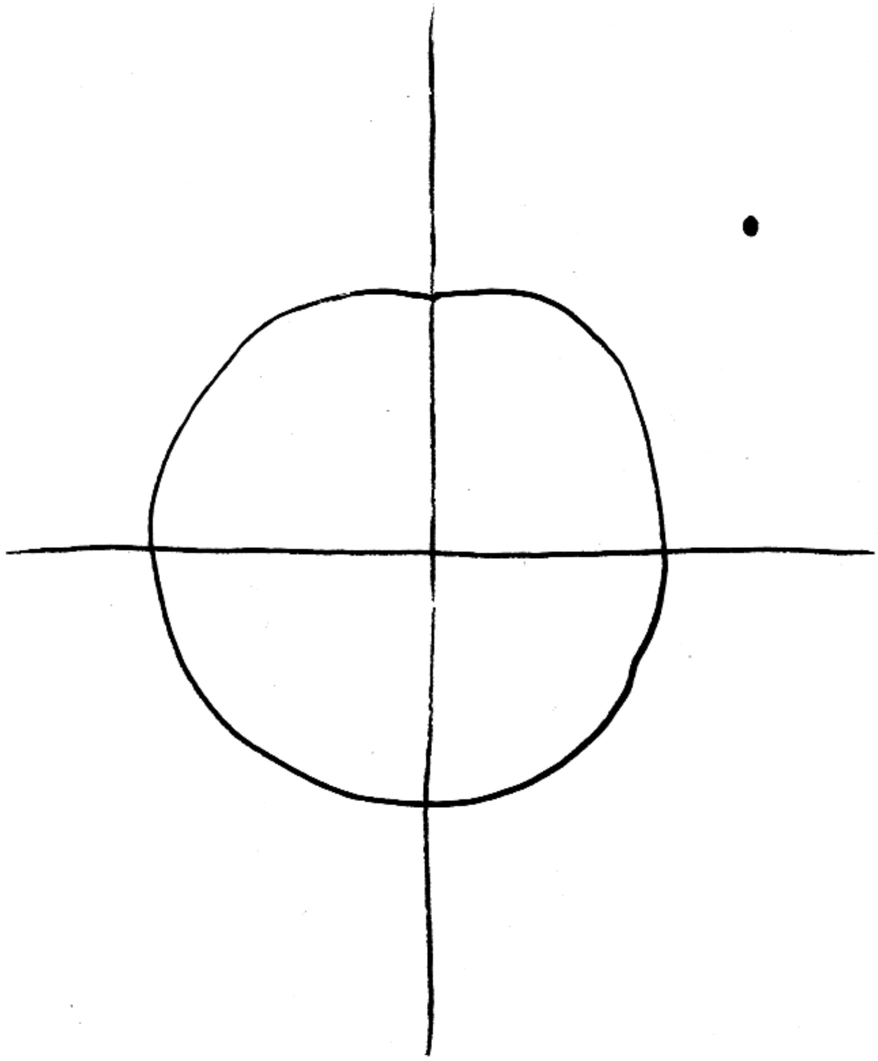
Ebenso offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{X}$ von Teilmengen des k^n die Identität $\mathcal{I}\left(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(X)$ und insbesondere auch

$$Y \subset X \ \Rightarrow \ \mathcal{I}(Y) \supset \mathcal{I}(X)$$

Des weiteren gilt sicher $J \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(J))$ für jede Teilmenge $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ und $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ für jede Teilmenge $X \subset k^n$. Es folgt $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)))$ für jede Teilmenge $X \subset k^n$, indem wir einerseits $\mathcal{I}$ auf $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ anwenden und andererseits $J \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(J))$ auf $J = \mathcal{I}(X)$. Ebenso folgt für jede Teilmenge $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ die Identität $\mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)))$. Insbesondere gilt für jede algebraische Teilmenge $X \subset k^n$ die Identität $X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$, die offensichtlich auch umgekehrt algebraische Teilmengen charakterisiert.

Ergänzung 1.1.9. Allgemeiner versteht man unter einer **Inzidenzstruktur** ein Tripel (A, B, R) bestehend aus zwei Mengen A und B mit einer Teilmenge $R \subset A \times B$ alias einer Relation zwischen A und B im Sinne von [AN1] 1.3.2. Zum Beispiel können wir die Menge $A = k[T_1, \ldots, T_n]$ der Polynome und die Menge $B = k^n$ der Punkte zu betrachten mit der Relation $(f, x) \in R$ genau dann, wenn gilt $f(x) = 0$. Für eine beliebige Inzidenzstruktur können wir in derselben Weise wie in diesem Beispiel Abbildungen $\mathcal{Z} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{I} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ erklären. Auch in dieser Allgemeinheit verwandeln sich Vereinigungen in Schnitte, Inklusionen kehren sich um, und es gilt stets $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ sowie $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)))$ und symmetrisch $J \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(J))$ sowie $\mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)))$.

1.1.10. Um Sie zu ermuntern, sich in Vorbereitung auf spätere Kapitel mit den Grundbegriffen der Topologie auseinanderzusetzen, beginne ich bereits hier mit der Diskussion der sogenannten „Zariski-Topologie“. Ich erinnere zunächst an einige grundlegende Definitionen aus der Begriffwelt der Topologie, wie sie in



Die Kreislinie ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ des Polynoms $X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$. Das ist also eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$. Jeder Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die simultane Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ der Polynome $X - a$ und $Y - b$ aus $\mathbb{R}[X, Y]$. Also ist auch jede einpunktige Menge Zariski-abgeschlossen. Alle Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offensichtlich auch metrisch abgeschlossen, also abgeschlossen in der natürlichen Topologie des $\mathbb{R}^2$ aus [AN1] 6.11.14, aber das Umgekehrte gilt nicht. Man zeige zur Übung, daß eine echte Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ keine nichtleere metrisch offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ umfassen kann.

[AN1] 6.5.5 ausführlicher eingeführt werden. Eine **Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge** X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mit einer Topologie heißt ein **topologischer Raum**. Die Teilmengen aus $\mathcal{T}$ heißen dann die **offenen Teilmengen** unseres topologischen Raums, und statt $U \in \mathcal{T}$ schreibe ich auch $U \Subset X$. Die Komplemente der offenen Teilmengen heißen die **abgeschlossenen Teilmengen** unseres topologischen Raums, und für $A \subset X$ schreiben wir statt $(X \backslash A) \in \mathcal{T}$ auch $A \,\underset{\mathrm{A}}{\subset}\, X$. Das System der abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raums ist stabil unter endlichen Vereinigungen und beliebigen Schnitten, und jedes Mengensystem in einer Menge X mit diesen Eigenschaften ist auch umgekehrt das System der abgeschlossenen Teilmengen einer wohlbestimmten Topologie auf X. Gegeben eine Teilmenge $M \subset X$ eines topologischen Raums wird ihr **Abschluß** $\bar{M}$ erklärt als die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M umfaßt, alias der Schnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die M umfassen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist, oder gleichbedeutend das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen.

1.1.11. Ich erinnere [AN1] 6.6.2: Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y durch die Vorschrift

$$U \Subset Y \Leftrightarrow \exists V \Subset X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von Y offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt von Y mit einer offenen Teilmenge von X ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge Y eines topologischen Raums X auf als topologischen Raum mit der induzierten Topologie.

Lemma 1.1.12. *Ist k ein kommutativer Integritätsbereich, so bilden die algebraischen Teilmengen von k^n die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der* **Zariski-Topologie auf dem** k^n.

Beweis. Daß beliebige Schnitte algebraischer Teilmengen wieder algebraisch sind, folgt sofort aus 1.1.8. Ist k nicht der Nullring, so gilt weiter $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$, und ist k auch noch nullteilerfrei, so gilt zusätzlich $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(IJ)$ mit der Notation $IJ = \{fg \mid f \in I,\ g \in J\}$. Folglich bilden die $\mathcal{Z}(I)$ das System der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem k^n. □

1.1.13. Ist k ein kommutativer Integritätsbereich, so folgt für den Abschluß einer beliebigen Teilmenge $X \subset k^n$ in Bezug auf die eben erklärte Zariskitopologie die Formel

$$\bar{X} = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$$

In der Tat ist die rechte Seite eine algebraische alias abgeschlossene Menge, die X umfaßt, und für jede algebraische alias abgeschlossene Teilmenge $A \supset X$ gilt $A = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(A)) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$.

1.1.14. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ein Element eines faktoriellen Krings heißt **quadratfrei**, wenn es von Null verschieden ist und wenn darin kein Primfaktor mehrfach auftritt. Eine Teilmenge $Z \subset k^n$ für $n \geq 2$ heißt eine

Hyperebene, wenn sie Nullstellenmenge eines linearen Polynoms ist, also eines Polynoms vom Totalgrad 1;

Quadrik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien quadratischen Polynoms ist;

Kubik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien kubischen Polynoms ist;

Quartik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien Polynoms vom Totalgrad 4 ist;

Quintik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien Polynoms vom Totalgrad 5 ist;

Vorschau 1.1.15. $(k = \bar{k})$. Wir zeigen in 4.4.14, daß jedes Polynom $P \in k[T_1, \ldots, T_n]$ auf einer algebraischen Teilmenge $X \not\subset k^n$ als Abbildung $P : X \to k$ aufgefaßt entweder nur endlich viele Werte annimmt oder nur endlich viele Werte nicht annimmt. Ich wüßte gerne, wie man das möglichst einfach einsehen kann.

Ergänzung 1.1.16. Man kann zeigen, daß für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \geq 1$ jede algebraische Teilmenge von k^n bereits als die Nullstellenmenge von n Polynomen beschrieben werden kann, vergleiche etwa [Kun80]. Im Gegensatz dazu kann keineswegs jedes Ideal des Polynomrings von n Polynomen erzeugt werden.

Übungen

Übung 1.1.17. Ist k ein Körper, ja ein beliebiger Kring, und $x \in k^n$ ein Punkt, so ist das Verschwindungsideal dieser einelementigen Menge das Ideal $\mathcal{I}(x) = \langle T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n \rangle \subset k[T_1, \ldots, T_n]$.

Übung 1.1.18. Sei k ein Körper. Man zeige, daß die von ganz k verschiedenen algebraischen Teilmengen von k genau die endlichen Teilmengen sind. Man zeige, daß die algebraischen Teilmengen von k^2 genau die endlichen Teilmengen, die Vereinigungen der Nullstellenmengen einzelner Polynome mit endlichen Teilmengen, sowie ganz k^2 sind. Hinweis: Nach [AL] 2.6.12 haben zwei teilerfremde

Polynome in zwei Veränderlichen höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen.

Übung 1.1.19. Sei k ein Körper. Man zeige für jedes Ideal $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ die Abschätzung $|\mathcal{Z}(I)| \leq \dim_k k[T_1, \ldots, T_n]/I$. Insbesondere kann ein Ideal endlicher Kodimension nur höchstens endlich viele simultane Nullstellen besitzen. Hinweis: Interpolation in mehreren Variablen [AL] 2.3.7.

Übung 1.1.20. Unter einem **Homöomorphismus** versteht man eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, deren Umkehrung auch stetig ist. Man zeige: Ist $\gamma : k \stackrel{\sim}{\to} k$ ein Körperautomorphismus, so induziert γ einen Homöomorphismus $\gamma : k^n \stackrel{\sim}{\to} k^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n))$ von k^n versehen mit der Zariski-Topologie auf sich selbst.

Übung 1.1.21. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **dicht** genau dann, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist. Sei k ein kommutativer Integritätsbereich. Man zeige: Jede unendliche Teilmenge von k ist Zariski-dicht. Sind $A \subset k^m$ und $B \subset k^n$ Zariski-dicht, so gilt dasselbe für $A \times B \subset k^{m+n}$. Jede offene nichtleere Teilmenge von k^n ist Zariski-dicht. Je zwei offene nichtleere Teilmengen von k^n haben nichtleeren Schnitt.

Übung 1.1.22. Man zeige, daß jede unendliche Teilmenge der Kreislinie in der reellen Ebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Zariski-dicht liegt in der Kreislinie mit ihrer Spurtopologie nach 1.1.11. Hinweis: [AL] 2.6.12.

Übung 1.1.23. Man zeige: Verschwindet ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ auf der Kreislinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, so wird es von $X^2 + Y^2 - 1$ geteilt.

Übung 1.1.24. Man folgere aus dem Hilbertschen Nullstellensatz: Haben zwei irreduzible Polynome in $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ dieselben Nullstellen, so ist das eine ein skalares Vielfaches des anderen. Im Fall $n = 1$ ist das klar. In Fall $n = 2$ folgt es bereits aus Korollar [AL] 2.6.12, nach dem zwei teilerfremde Polynome in $\mathbb{C}[X, Y]$ höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen haben.

1.2 Moduln über Ringen

Definition 1.2.1. Sei R ein Ring. Ein R**-Modul** ist Paar bestehend aus einer abelschen Gruppe $(M, +)$ und einer Abbildung

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \to & M \\ (r, m) & \mapsto & rm \end{array}$$

derart, daß für alle $r, s \in R$ und $m, n \in M$ die folgenden Identitäten gelten:

$$\begin{array}{rcl} r(m+n) & = & (rm) + (rn) \\ (r+s)m & = & (rm) + (sm) \\ r(sm) & = & (rs)m \\ 1m & = & m \end{array}$$

Beispiel 1.2.2. Ist R ein Körper, so nennt man einen R-Modul meist einen R-Vektorraum. Der Ring R selbst ist in offensichtlicher Weise ein R-Modul. Dasselbe gilt für R^n, ja gegeben eine beliebige Menge X für $\operatorname{Ens}(X, R)$ und gegeben zusätzlich ein beliebiger R-Modul M auch für die Menge $\operatorname{Ens}(X, M)$ aller Abbildungen von X nach M. Weitere Beispiele kommen später.

1.2.3. Wir vereinbaren auch in diesem Kontext die Regel „Punkt vor Strich“. Wie bei Vektorräumen zeigt man auch bei Moduln M über einem Ring R für alle $m \in M$ die Formel $0m = 0$, genauer $0_R m = 0_M$, und folgert $(-1)m = -m$.

Ergänzung 1.2.4. Arbeitet man mit der alternativen Konvention, nach der Ringe nicht notwendig unitär zu sein brauchen, so ist die dritte Bedingung nicht mehr sinnvoll und wird weggelassen. Unsere Moduln würde man in dieser Konvention als „unitäre Moduln über einem unitären Ring“ bezeichnen.

1.2.5. Gegeben eine abelsche Gruppe M bilden wir wie in [LA1] 6.1.7 den Ring $\operatorname{Ab} M = \operatorname{End} M$ aller Gruppenhomomorphismen $\varphi : M \to M$, den sogenannten **Endomorphismenring von** M. Seine Addition ist die Addition von Abbildungen, $(\varphi + \psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m)$, seine Multiplikation die Verknüpfung von Abbildungen, $\varphi\psi := \varphi \circ \psi$, und sein Einselement die Identität $\mathrm{id} : M \to M$.

1.2.6 (**Abelsche Gruppen als $\mathbb{Z}$-Moduln**). In obigem Sinne ist eine Struktur als R-Modul auf einer abelschen Gruppe M „dasselbe“ wie ein Ringhomomorphismus $R \to \operatorname{Ab} M$. Für jeden Ring E gibt es nun genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to E$. Jede abelsche Gruppe M trägt also genau eine $\mathbb{Z}$-Modulstruktur. Wir können diese Modulstruktur auch explizit beschreiben: Für $a \in \mathbb{N}$ ist notwendig $1m = m$, also $2m = (1 + 1)m = m + m$, induktiv $(a + 1)m = am + m$, und dann auch $(-a)m = (-1)am = -(am)$.

Ergänzung 1.2.7. Sei Ω eine Menge. Unter einem **Ω-Modul** versteht man eine abelsche Gruppe M mitsamt einer Abbildung $\Omega \to \operatorname{Ab}(M)$ unserer Menge Ω in den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M. Das ist nun allerdings nichts anderes als ein Modul in unserem bisherigen Sinne über dem „nichtkommutativen Polynomring über $\mathbb{Z}$ in durch Ω indizierten Variablen“, den wir in der Notation aus [TF] 4.8.4 etwa $\operatorname{Ring}^{\uparrow} \Omega$ notieren könnten. Insofern bringt uns dieses Konzept nichts Neues und alles, was wir im folgenden zu Moduln über allgemeinen Ringen zeigen, gilt a forteriori auch für Moduln über Mengen.

1.2.8. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so wird jeder S-Modul und insbesondere auch S selbst ein R-Modul vermittels der Operation $rm = \varphi(r)m$. Dies Verfahren heißt **Restriktion der Skalare**, und zwar selbst dann, wenn der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ nicht die Inklusion eines Teilrings ist. Zum Beispiel ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ der Quotient $R/\mathfrak{a}$ aus [AL] 2.1.11 ein R-Modul in natürlicher Weise.

Ergänzung 1.2.9. Unter dem **Zentrum** $\mathrm{Z}(R)$ eines Rings R verstehen wir die Menge derjenigen Elemente von R, die mit allen anderen Elementen kommutieren, in Formeln

$$\mathrm{Z}(R) = \{z \in R \mid za = az \quad \forall a \in R\}$$

Das Zentrum ist stets ein kommutativer Teilring von R.

Ergänzung 1.2.10. Für jede Zerlegung $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ eines Rings in eine Summe zweiseitiger Ideale sind die Summanden A_i unter der induzierten Multiplikation selber Ringe mit Eins-Element 1_r für $1 = 1_1 + \ldots + 1_n$ die unserer Zerlegung entsprechende Zerlegung der Eins des Rings A. Des weiteren liefert dann das Aufaddieren auch einen Ringisomorphismus

$$A_1 \times \ldots \times A_n \xrightarrow{\sim} A$$

und die 1_i liegen im Zentrum von A und haben die Eigenschaft $1_i 1_j = \delta_{ij} 1_i$. Haben wir umgekehrt eine Darstellung $1 = 1_1 + \ldots + 1_n$ mit 1_i zentral und $1_i 1_j = \delta_{ij} 1_i$, so zerfällt A in das Produkt der Ideale $A_i = \langle 1_i \rangle$. Wir nennen eine solche Darstellung eine **Zerlegung der Eins in paarweise orthogonale zentrale Idempotente**. Fassen wir in einer derartigen Zerlegung einige Summanden zusammen, so sprechen wir von einer **Vergröberung** unserer Zerlegung. Natürlich haben je zwei derartige Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung, bestehend aus allen Produkten von einem Idempotenten der einen Zerlegung und einem Idempotenten der anderen Zerlegung. Existiert eine feinste Zerlegung mit von Null verschiedenen Summanden, so ist sie demnach eindeutig. Die zugehörige Zerlegung des Rings heißt dann seine **Block-Zerlegung** $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ und die zugehörigen Faktoren A_i heißen die **Blöcke** des Rings A. Rückblickend können wir festhalten, daß bei einem Ring, der eine Zerlegung in eine endliche direkte Summe ihrerseits nicht weiter zerlegbarer zweiseitiger Ideale besitzt, die Summanden wohlbestimmt sind und dann eben die Blöcke unseres Rings heißen.

Übungen

Übung 1.2.11. Gegeben eine abelsche Gruppe M und ein Ring R induziert das Exponentialgesetz $\mathrm{Ens}(R \times M, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(R, \mathrm{Ens}(M, M))$ aus [GR] 2.3.28 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Strukturen als } R\text{-Modul} \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Ringhomomorphismen} \\ R \to \mathrm{Ab}\, M \end{array} \right\}$$

Im Fall eines Körpers war das bereits Übung [LA1] 6.2.29.

Übung 1.2.12 (**$k[X]$-Moduln als k-Vektorräume mit Endomorphismus**). Gegeben eine abelsche Gruppe M und ein Körper k haben wir natürliche Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{Strukturen als } k[X]\text{-Modul}\\ \text{auf der abelschen Gruppe } M\end{array}\right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{Ringhomomorphismen}\\ k[X]\to \operatorname{Ab} M\end{array}\right\}\\
 & & \wr\downarrow\\
\left\{\begin{array}{c}\text{Paare } (\psi, A) \text{ bestehend aus}\\ \text{einer } k\text{-Vektorraumstruktur}\\ \psi : k\times M\to M\\ \text{auf der abelschen Gruppe } M\\ \text{und einem Endomorphismus}\\ A\in \operatorname{End}_k(M)\end{array}\right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{Paare } (\varphi, A) \text{ bestehend aus}\\ \text{einem Ringhomomorphismus}\\ \varphi : k\to \operatorname{Ab} M\\ \text{und einem mit seinem Bild}\\ \text{kommutierenden Element}\\ A\in \operatorname{Ab} M\end{array}\right\}
\end{array}$$

Genauer liefert 1.2.11 die obere horizontale Bijektion und [LA1] 6.3.5 die vertikale Bijektion. In diesem Sinne ist also ein $k[X]$-Modul „dasselbe" wie ein k-Vektorraum mit einem k-linearen Endomorphismus. Für k ein beliebiger Ring gilt Analoges.

Ergänzung 1.2.13. Gegeben Ringe $R_1, \ldots, R_n$ mit Produkt $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ erhalten wir für jede abelsche Gruppe M eine Bijektion

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Strukturen auf } M\\ \text{als } R\text{-Modul}\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{Zerlegungen } M = M_1\oplus\ldots\oplus M_n \text{ mit}\\ \text{jeweils einer } R_i\text{-Modulstruktur auf } M_i\end{array}\right\}$$

indem wir in R die Elemente $\mathrm{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ mit einer 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst betrachten und in M die Untergruppen $M_i := \mathrm{e}_i M$ nehmen und sie mit der hoffentlich offensichtlichen von der R-Modulstruktur auf M induzierten Struktur eines R_i-Moduls versehen.

1.3 Homomorphismen, Untermoduln, Quotienten

Definition 1.3.1. Eine Abbildung $f : M \to N$ von einem R-Modul in einen weiteren heißt **R-linear** oder ein **R-Modulhomomorphismus** genau dann, wenn gilt $f(m + m') = f(m) + f(m')$ und $f(rm) = rf(m) \quad \forall m, m' \in M, r \in R$.

Ergänzung 1.3.2. Die Gesamtheit aller R-Moduln über einem vorgegebenen Ring R bildet mit den R-Modulhomomorphismen als Morphismen eine Kategorie $R\text{-Mod}$, und in der Sprache der Kategorientheorie ist das Vergessen der $\mathbb{Z}$-Modulstruktur ein Isomorphismus von Kategorien

$$\mathbb{Z}\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}$$

zwischen der Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln und der Kategorie der abelschen Gruppen.

Definition 1.3.3. Die Menge aller Homomorphismen von einem R-Modul M in einen R-Modul N schreiben wir auch $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Sie bildet eine Untergruppe und für kommutatives R sogar einen R-Untermodul von $\mathrm{Ens}(M, N)$. Ein bijektiver Homomorphismus heißt ein **Isomorphismus** von R-Moduln. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei R-Moduln M und N, so schreiben wir auch $M \cong M$ und sagen, M und N seien **isomorph**. Ein Homomorphismus von einem Modul zu sich selbst heißt ein **Endomorphismus** unseres Moduls. Die Menge aller Endomorphismen des R-Moduls M notiert man $\mathrm{End}_R(M)$. Sie bildet einen Ring unter der Verknüpfung als Multiplikation.

Ergänzung 1.3.4. Ich will das Symbol Hom ohne Index reservieren für Funktoren, die aus zwei Objekten einer Kategorie ein drittes Objekt derselben Kategorie machen. Nur im Fall von Vektorräumen oder kommutativen Ringen darf man dann, wenn man dieser Konvention folgen will, den Grundring aus der Notation weglassen. Die Morphismenmenge in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ notiere ich $\mathcal{C}(X, Y)$. Wenn sie mit zusätzlicher Struktur verstanden werden soll, benutze ich auch Hom, aber dann mit ergänzenden Indizes.

Lemma 1.3.5 (Modulhomomorphismen vom Grundring zu einem Modul). *Die R-Modulhomomorphismen von einem Ring R, aufgefaßt als R-Modul, zu einem beliebigen weiteren R-Modul werden parametrisiert durch die Elemente des besagten R-Moduls. Für jeden R-Modul M liefert genauer die Abbildungsvorschrift $m \mapsto (r \mapsto rm)$ einen Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\sim}{\to} & \mathrm{Hom}_R(R, M) \\ m & \mapsto & (r \mapsto rm) \end{array}$$

von abelschen Gruppen mit Inversem $\varphi \mapsto \varphi(1)$.

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Definition 1.3.6. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt ein **Untermodul** genau dann, wenn N eine Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $m \in N, r \in R \Rightarrow rm \in N$.

1.3.7. Die Untermoduln eines kommutativen Rings sind genau seine Ideale. Die Untermoduln eines allgemeinen Rings heißen seine **Linksideale**. Jeder Schnitt von Untermoduln ist wieder ein Untermodul. Ist $T \subset M$ eine Teilmenge eines Moduls M, so heißt der kleinste Untermodul von M, der T enthält, auch der **von T erzeugte Untermodul** und wir bezeichnen ihn mit ${}_R\langle T\rangle$ oder wenn die genaue Bedeutung eh aus dem Kontext hervorgeht etwas nachlässig mit $\langle T\rangle_R$ oder auch abkürzend mit $\langle T\rangle$. Man kann den von T erzeugten Untermodul beschreiben als die Menge aller Linearkombinationen

$$\{r_1 t_1 + \ldots r_s t_s \mid s \geq 0,\ r_i \in R,\ t_i \in T\}$$

Hierbei steht die leere Linearkombination mit $s = 0$ für die Null in M. Ein Modul, der von einer endlichen Teilmenge erzeugt wird, heißt **endlich erzeugt**. Ein Modul, der von einem einzigen Element erzeugt wird, heißt **zyklisch**.

1.3.8. Das Bild eines Untermoduls unter einem Modulhomomorphismus ist wieder ein Untermodul. Dasselbe gilt für das Urbild eines Untermoduls. Insbesondere sind Bild und Kern eines Modulhomomorphismus stets Untermoduln.

Proposition 1.3.9 (**Quotientenmoduln**). *Seien R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul.*

1. *Es gibt genau eine Struktur eines R-Moduls auf der Restklassengruppe M/N aus [LA2] 4.2.3 derart, daß die Projektion* $\operatorname{can} : M \twoheadrightarrow M/N$ *ein Homomorphismus von R-Moduln ist;*

2. *Jeder Homomorphismus von R-Moduln $\varphi : M \to M'$ mit $\varphi(N) = 0$ faktorisiert in eindeutiger Weise über M/N, es gibt also zu φ genau einen R-Modulhomomorphismus $\tilde{\varphi} : M/N \to M'$ mit* $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \operatorname{can}$.

Beweis. Sehr ähnlich zum Beweis der entsprechenden Aussagen im Fall von Vektorräumen [LA2] 6.1.1 und dem Leser überlassen. □

Übungen

Übung 1.3.10. Gegeben ein R-Modul M wird M ein Modul über seinem Endomorphismenring $\operatorname{End}_R(M)$ vermittels der Vorschrift $fm = f(m)$ für alle $f \in \operatorname{End}_R(M)$ und $m \in M$.

Übung 1.3.11. Ist R ein Ring und $e \in R$ ein idempotentes Element und M ein R-Modul, so induziert das Auswerten bei e eine Bijektion $\operatorname{Hom}_R(Re, M) \xrightarrow{\sim} eM$.

Ergänzende Übung 1.3.12. In einem endlich erzeugten Modul umfaßt jedes Erzeugendensystem ein endliches Erzeugendensystem.

Übung 1.3.13. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Bezeichne $\mathfrak{a}M \subset M$ den Untermodul, der von allen Elementen am mit $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$ erzeugt wird, und der bei sorgfältigerer Notation eigentlich $\langle \mathfrak{a}M \rangle$ notiert werden müßte. Man zeige, daß die Operation von R auf $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise faktorisiert über $R/\mathfrak{a}$, so daß also $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise ein $R/\mathfrak{a}$-Modul wird.

Übung 1.3.14. Man zeige, daß gegeben ein Ring R und ein R-Modul M für jedes Linksideal $I \subset R$ das Auswerten an der Nebenklasse $1_R + I$ eine Bijektion $\operatorname{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\sim} \{m \in M \mid Im = 0\}$ induziert.

Übung 1.3.15. Gegeben Moduln M_i über Ringen R_i kann man das Produkt M der M_i in offensichtlicher Weise mit der Struktur eines Moduls über dem Produkt R

der R_i versehen. Ergibt sich in derselben Weise ein R-Modul N als das Produkt gewisser R_i-Moduln N_i, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_R(M,N) \stackrel{\sim}{\to} \prod_i \operatorname{Hom}_{R_i}(M_i,N_i)$$

Übung 1.3.16. Ich erinnere an exakte Sequenzen im Sinne von [LA2] 6.2.4. Eine Sequenz von Gruppen $M' \to M \to M''$ heißt **linksexakt** genau dann, wenn die erweiterte Sequenz $1 \to M' \to M \to M''$ exakt ist, wenn sie also in anderen Worten bei M exakt ist und $M' \to M$ injektiv ist. Wir schreiben linksexakte Sequenzen meist $M' \hookrightarrow M \to M''$. Man zeige: Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von Moduln über einem Ring R ist linkssexakt genau dann, wenn für jeden weiteren R-Modul N die induzierte Sequenz

$$\operatorname{Hom}_R(N,M') \to \operatorname{Hom}_R(N,M) \to \operatorname{Hom}_R(N,M'')$$

linksexakt ist.

Übung 1.3.17. Ich erinnere an exakte Sequenzen im Sinne von [LA2] 6.2.4. Eine Sequenz von Gruppen $M' \to M \to M''$ heißt **rechtsexakt** genau dann, wenn die erweiterte Sequenz $M' \to M \to M'' \to 1$ exakt ist, wenn sie also in anderen Worten bei M exakt ist und $M \to M''$ surjektiv ist. Wir schreiben rechtsexakte Sequenzen meist $M' \to M \twoheadrightarrow M''$. Man zeige: Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von Moduln über einem Ring R ist rechtsexakt genau dann, wenn für jeden weiteren R-Modul N die induzierte Sequenz

$$\operatorname{Hom}_R(M'',N) \to \operatorname{Hom}_R(M,N) \to \operatorname{Hom}_R(M',N)$$

linksexakt ist.

1.4 Summen und Produkte von Moduln

1.4.1. Die folgenden Konstruktionen verallgemeinern unsere Konstruktionen im Fall von Vektorräumen aus [LA2] 7.7.

Definition 1.4.2. Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Moduln über einem Ring R bilden wir zwei neue R-Moduln, das **Produkt** $\prod M_\lambda$ und die **direkte Summe** oder kurz **Summe** $\bigoplus M_\lambda$ durch die Regeln

$$\begin{array}{rcl}\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda &=& \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda\} \\ \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda &=& \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda, \text{ nur endlich viele } m_\lambda \text{ sind nicht null}\}\end{array}$$

mit der offensichtlichen komponentenweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren aus R.

1.4.3. Für eine endliche Familie von Moduln $M_1, \ldots, M_s$ stimmen die direkte Summe und das Produkt überein. Wir benutzen dann alternativ die Notationen

$$M_1 \times \ldots \times M_s = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$$

1.4.4. Das Produkt bzw. die Summe sind das Produkt bzw. Koprodukt in der Kategorie der R-Moduln im Sinne unserer allgemeinen Definitionen [LA2] 7.6.1 bzw. [LA2] 7.6.11. Ausformuliert bedeutet das: Die offensichtlichen Einbettungen und Projektionen sind Homomorphismen

$$\mathrm{in}_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \twoheadrightarrow M_\lambda$$

und ist M ein weiterer R-Modul, so induzieren die durch Vorschalten der in_λ bzw. Nachschalten der pr_λ gegebenen Abbildungen Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, M) & \stackrel{\sim}{\to} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M) \\ f & \mapsto & (f \circ \mathrm{in}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) & \stackrel{\sim}{\to} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, M_\lambda) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

1.4.5. Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Untermoduln eines Moduls M bezeichnet man den von ihrer Vereinigung erzeugten Untermodul von M auch als ihre **Summe** und notiert ihn $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Diese Summe kann auch interpretiert werden als das Bild eines natürlichen Homomorphismus $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$ von der direkten Summe nach M. Ist dieser Homomorphismus injektiv, so sagen wir, die „Summe der Untermoduln M_λ sei direkt“ und schreiben statt $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ auch $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Zwei Untermoduln $N_1, N_2 \subset M$ heißen **komplementär** genau dann, wenn ihre Einbettungen einen Isomorphismus $N_1 \oplus N_2 \stackrel{\sim}{\to} M$ induzieren. Ein Untermodul, der ein Komplement besitzt, heißt ein **Summand**.

1.4.6. Auch bei Moduln über Ringen nennt man eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **linear unabhängig** genau dann, wenn nur die triviale (endliche) Linearkombination verschwindet, wenn also für eine Familie $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Elementen unseres Rings mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Mitgliedern gilt

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda m_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{alle } r_\lambda \text{ sind null}$$

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt wie bei Vektorräumen eine **Basis**, und wie dort erklären wir die Begriffsvarianten einer **Basis als Teilmenge**, einer **Basis als Familie**, und einer **angeordneten Basis**. Allerdings besitzen keineswegs alle Moduln eine Basis, wie man das von Vektorräumen gewohnt ist. Die Moduln, die eine Basis besitzen, nennt man **freie Moduln**. Die Moduln, die eine Basis bestehend aus genau einem Element besitzen, nenne ich **frei zyklisch**.

Beispiel 1.4.7. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul, aber durchaus ein freier Modul über dem Ring $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Jede Familie von Elementen eines Moduls über dem Nullring, der notwendig aus genau einem Element besteht, ist eine Basis.

Beispiel 1.4.8. Für jede Menge Λ ist der Modul

$$R\Lambda := \{f : \Lambda \to R \mid f(\lambda) = 0 \text{ für fast alle } \lambda\}$$

frei, denn die Abbildungen, die an einer Stelle den Wert 1 annehmen und sonst den Wert Null, bilden eine Basis. Wir nennen $R\Lambda$ den **freien R-Modul über der Menge** Λ. Nach unseren Definitionen ist umgekehrt eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in einem Modul M eine Basis genau dann, wenn die Abbildung $R\Lambda \to M$ mit $(r_\lambda) \mapsto \sum r_\lambda m_\lambda$ ein Isomorphismus ist.

1.4.9. Für beliebige Ringe R folgt aus $R^n \cong R^m$ im allgemeinen keineswegs $n = m$. Das einfachste Gegenbeispiel ist der Nullring, und das ist nach 1.5.9 auch das einzige kommutative Gegenbeispiel. Unter den nicht kommutativen Ringen gibt es jedoch auch interessantere Gegenbeispiele. Betrachten wir etwa zu einem beliebigen Körper den freien Vektorraum V über der Menge $\mathbb{N}$, so gibt es einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V \oplus V$, und für den Endomorphismenring $R = \operatorname{End} V$ erhalten wir einen Isomorphismus von R-Moduln $R \cong R^2$ als die Verknüpfung $R = \operatorname{End} V \cong \operatorname{Hom}(V \oplus V, V) \cong R \oplus R$.

Ergänzung 1.4.10. Wir erhalten mit 1.4.9 auch ein Paar $A \subsetneq B$ bestehend aus einem Ring mit einem echten Teilring und der Eigenschaft, daß dennoch ein Isomorphismus $A \cong B$ von A-Linksmoduln existiert: Betrachten wir R wie in 1.4.9 und den Teilring $(R \times R) \subset \operatorname{Mat}(2; R)$ der Diagonalmatrizen, haben wir einerseits einen Isomorphismus $(R \times R)^2 \cong \operatorname{Mat}(2; R)$ von $(R \times R)$-Linksmoduln, soviel gilt sogar für jeden Ring R, und andererseits gibt es nach den vorherigen Überlegungen auch einen Isomorphismus $(R \times R) \cong (R \times R)^2$ von $(R \times R)$-Linksmoduln.

Lemma 1.4.11 (Kriterium für die Direktheit einer Summe). *Gegeben eine Familie $(V_i)_{i\in I}$ von Untergruppen einer abelschen Gruppe V ist der natürliche Homomorphismus $\bigoplus_{i\in I} V_i \to V$ eine Injektion genau dann, wenn für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ und jedes $i \in I \backslash J$ gilt*

$$V_i \cap \sum_{j\in J} V_j = 0$$

Beweis. Ist der natürliche Homomorphismus eine Injektion, so folgt aus $i \in I\backslash J$ offensichtlich $V_i \cap \sum_{j\in J} V_j = 0$, und das sogar für beliebiges $J \subset I$. Ist der natürliche Homomorphismus keine Injektion, so liegt ein von Null verschiedenes Element $v = (v_i)_{i\in I}$ der direkten Summe in seinem Kern. Dieses Element hat nur in endlich vielen Summanden eine von Null verschiedene Komponente, die Menge $K := \{i \mid v_i \neq 0\}$ ist also endlich und wegen $v \neq 0$ auch nicht leer. Per definitionem gilt nun $\sum_{k\in K} v_k = 0$. Wählen wir $i \in K$ und nehmen $J = K\backslash i$, so folgt $0 \neq -v_i = \sum_{j\in J} v_j$ und damit $V_i \cap \sum_{j\in J} V_j \neq 0$. □

Ergänzung 1.4.12 (**Die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[X]$ ist ihr eigenes Bidual**). Das Produkt von abzählbar vielen Kopien von $\mathbb{Z}$ heißt die **Baer-Specker-Gruppe**. Es ist in offensichtlicher Weise isomorph zum Modul der Homomorphismen einer direkten Summe von abzählbar vielen Kopien von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$. Wir verwenden im folgenden die Inkarnation beider Gruppen als der Potenzreihenring und der Polynomring. In Formeln ausgedrückt haben wir dann eine bilineare Abbildung

$$\mathbb{Z}[\![X]\!] \times \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$$

gegeben durch $(P, Q) \mapsto$ (der Koeffizient von X^0 in $P\bar{Q}$), wobei $\bar{Q}$ aus Q entstehe durch Substitution von X^{-1} für X. Diese Paarung liefert offensichtlich einen Isomorphismus $\mathbb{Z}[\![X]\!] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z})$. Wir wollen im folgenden die auf den ersten Blick verblüffende Aussage zeigen, daß sie auch einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\![X]\!], \mathbb{Z})$$

induziert. Um das einzusehen, zeigt man zunächst, daß es keinen von Null verschiedenen Gruppenhomomorphismus $f : \mathbb{Z}[\![X]\!]/\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ gibt. Dafür hinwiederum zu zeigen, reicht es zu zeigen, daß jedes derartige f nur gerade Zahlen als Werte annimmt. Gegeben eine Potenzreihe $\sum a_i X^i$ beachten wir dazu, daß $\sum a_i X^i + \sum_{a_i \text{ ungerade}} 3^i X^i$ stets das Doppelte einer anderen Reihe ist, und daß der Wert von f auf dem zweiten Summanden durch beliebige Dreierpotenzen teilbar und damit Null ist. Jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}[\![X]\!] \to \mathbb{Z}$ ist also durch seine Restriktion auf $\mathbb{Z}[X]$ schon eindeutig festgelegt. Es bleibt zu zeigen, daß eine Linearform $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$, die nicht auf fast allen X^i Null ist, nicht auf $\mathbb{Z}[\![X]\!]$ fortgesetzt werden kann. Ist aber f auf unendlich vielen X^i nicht Null, so finden wir eine monoton wachsende Folge $\alpha(0) \leq \alpha(1) \leq \ldots$ von natürlichen Zahlen mit $c_n := |f(X^0)2^{\alpha(0)} + \ldots + f(X^n)2^{\alpha(n)}| \to \infty$ für $n \to \infty$ und $2^{\alpha(n+1)} > 2c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Werten wir dann unsere Linearform auf der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha(i)} X^i$ aus, so muß das Ergebnis im Betrag mindestens c_n sein für alle n, und das ist unmöglich.

Übungen

Übung 1.4.13. Man zeige: Jeder endlich erzeugte Modul über einem Schiefkörper D ist isomorph zu D^n für wohlbestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Man kopiere die Argumentation aus der linearen Algebra.

Übung 1.4.14. Sei k ein von Null verschiedener Ring. Man gebe ein minimales alias unverkürzbares Erzeugendensystem des Rings $R := (k \times k)$ als Linksmodul über sich selber an, das keine Basis ist. Man gebe eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{Z}$ als Linksmodul über sich selber an, die keine Basis ist.

Übung 1.4.15. Sei k ein Ring und $k[\varepsilon] := k[T]/\langle T^2 \rangle$ mit $\varepsilon = \bar{T}$ der Ring der **dualen Zahlen über** k. Man zeige: Ein $k[\varepsilon]$-Modul ist frei genau dann, wenn gilt: $M/\varepsilon M$ ist ein freier k-Modul und die Multiplikation mit ε induziert einen Isomorphismus

$$M/\varepsilon M \xrightarrow{\sim} \varepsilon M$$

Übung 1.4.16. Jeder Modul ist isomorph zu einem Quotient eines freien Moduls.

Übung 1.4.17. Gegeben Moduln $M_1, \ldots, M_m$ und $N_1, \ldots, N_n$ über einem Ring R haben wir eine natürliche Identifikation

$$\operatorname{Hom}_R(M_1 \oplus \ldots \oplus M_m, N_1 \oplus \ldots \oplus N_n) \xrightarrow{\sim} \prod_{i,j} \operatorname{Hom}_R(M_j, N_i)$$

Wir werden die Elemente einer endlichen direkten Summe oft als Spaltenvetoren von Elementen der Summanden auffassen und die Homomorphismen zwischen direkten Summen als Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden. Das erlaubt uns, die Komposition solcher Homomorphismen mit dem Formalismus der Matrixmultiplikation zu berechnen.

Übung 1.4.18. Gegeben eine Familie von Moduln M_{ij} mit $i \in I$, $j \in J$ haben wir stets eine kanonische Injektion $\bigoplus_i (\prod_j M_{ji}) \hookrightarrow \prod_j (\bigoplus_i M_{ji})$, die im allgemeinen aber kein Isomorphismus ist.

Übung 1.4.19. Das folgende ist eine offensichtliche Verallgemeinerung von [LA2] 4.2.20. Sei R ein Ring. Man nennt einen surjektiven Homomorphismus von R-Moduln $M \twoheadrightarrow M''$ **spaltend** genau dann, wenn er ein Rechtsinverses besitzt, und nennt solch ein Rechtsinverses dann eine **Spaltung**. Man zeige: Ist $\varphi : M \twoheadrightarrow M''$ ein surjektiver Homomorphismus, $M' \subset M$ sein Kern und $\psi : M'' \to M$ eine Spaltung von φ, so erhalten wir vermittels der Vorschrift $(a', a'') \mapsto a' + \psi(a'')$ einen Isomorphismus $M' \times M'' \xrightarrow{\sim} M$.

Übung 1.4.20. Sei R ein Ring. Für jeden surjektiven Homomorphismus $f : M \twoheadrightarrow F$ von einem R-Modul M auf einen freien R-Modul F existiert eine Spaltung, als da heißt ein Homomorphismus $s : F \to M$ mit $fs = \mathrm{id}_F$.

1.5 Rechtsmoduln und Matrizenrechnung

Definition 1.5.1. Sei R ein Ring. Ein **R-Rechtsmodul** ist ein Paar bestehend aus einer abelschen Gruppe $(M, +)$ mitsamt einer Abbildung $M \times R \to M$, $(m, r) \mapsto$

mr derart, daß gilt für alle $m, n \in M$ und $r, s \in R$:

$$\begin{array}{rcl} (m+n)r &=& mr+nr \\ m(r+s) &=& mr+ms \\ m(rs) &=& (mr)s \\ m1 &=& m \end{array}$$

1.5.2. Unsere R-Moduln aus Definition 1.2.1 nennt man manchmal auch genauer **Linksmoduln**. Um den Unterschied klar zu machen, definieren wir für jeden Ring $R = (R, +, \cdot)$ den **opponierten Ring** $R^{\text{opp}} = (R, +, \cdot)$ als die abelsche Gruppe R mit der „vertauschten" Multiplikation $r^\circ s^\circ = sr$ für $r, s \in R$. Wir verwenden dabei die Notation [GR] 3.3.27, insbesondere meint r° das Element r aufgefaßt als Element des opponierten Rings. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß ein R-Rechtsmodul dasselbe ist wie ein R^{opp}-Linksmodul, alias eine abelsche Gruppe M mitsamt einem Ringhomomorphimus $R^{\text{opp}} \to \operatorname{End} M$. Insbesondere braucht man bei kommutativen Ringen zwischen Rechtsmoduln und Linksmoduln keinen Unterschied zu machen.

Definition 1.5.3. Sei R ein Ring und M ein R-Rechtsmodul. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt ein Untermodul oder ganz pedantisch **Unterrechtsmodul** genau dann, wenn N eine Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $m \in N, r \in R \Rightarrow mr \in N$.

1.5.4. Die Unterrechtsmoduln eines Rings heißen seine **Rechtsideale**. Jeder Schnitt von Untermoduln ist wieder ein Untermodul. Ist $T \subset M$ eine Teilmenge eines Moduls M, so heißt der kleinste Untermodul von M, der T enthält, auch der **von T erzeugte Untermodul** und wir bezeichnen ihn mit $\langle T\rangle_R$ oder auch abkürzend mit $\langle T\rangle$.

1.5.5. Für R-Rechtsmoduln M, N nennen wir einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $f : M \to N$ mit $f(mr) = f(m)r \ \forall m \in M, r \in R$ auch einen **Homomorphismus von R-Rechtsmoduln** und bezeichnen die Menge aller Homomorphimen von R-Rechtsmoduln mit

$$\operatorname{Hom}_{-R}(M, N)$$

Genau wie bei Körpern haben wir auch bei Ringen R eine natürliche Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{-R}(R^p, R^q) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Mat}(q \times p; R) \\ f & \mapsto & [f] \end{array}$$

wo die Spalten der Matrix $[f] = (a_{ij})$ die Bilder unter f der Vektoren $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p$ der Standardbasis des R^p sind, in Formeln $f(\mathrm{e}_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ für $1 \leq j \leq p$. Die inverse Abbildung ordnet jeder Matrix A die R-rechtslineare Abbildung

$x \mapsto Ax$ zu, wo wir die Elemente $x \in R^p$ bzw. $Ax \in R^q$ als Spaltenmatrizen auffassen. Wie bei Körpern entspricht die Matrixmultiplikation der Verknüpfung von Abbildungen, in Formeln $[f \circ g] = [f] \circ [g]$, und f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn seine Matrix $[f]$ invertierbar ist.

1.5.6. Gegeben R-Rechtsmoduln M, N mit endlichen angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ der Kardinalitäten p, q erhalten wir genau wie bei Körpern auch bei Ringen R eine natürliche Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{-R}(M,N) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Mat}(q \times p; R) \\ f & \mapsto & {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} \end{array}$$

und nennen wieder ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ die **darstellende Matrix der Abbildung f in Bezug auf die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$**. Die Formel ${}_{\mathcal{C}}[g \circ f]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ gilt entsprechend.

1.5.7. Ich erinnere an die Definition der Determinante quadratischer Matrizen mit Einträgen in einem Kring durch die Leibnizformel [LA1] 7.2.1, an die Multiplikationsformel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ aus [LA1] 7.4.1 und daran, daß eine quadratische Matrix nach [LA1] 7.4.9 genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante eine Einheit in fraglichen kommutativen Ring ist.

Ergänzung 1.5.8. Die Leibnizformel ist zwar auch für nichtkommutative Ringe noch sinnvoll, aber die Formel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ist dann nicht mehr richtig, und deshalb sind Determinanten in der Allgemeinheit nichtkommutativer Ringe nicht mehr von Nutzen.

Proposition 1.5.9 (Wohlbestimmtheit des Rangs). *Ist R ein kommutativer Ring und nicht der Nullring, so folgt für $m, n \in \mathbb{N}$ aus der Existenz eines Isomorphismus von Moduln $R^n \cong R^m$ bereits $n = m$.*

1.5.10. Ein alternativer Beweis wird in Übung 1.10.20 skizziert. Ein Gegenbeispiel für nichtkommutative Ringe erklärt 1.4.9.

Beweis. Ein Isomorphismus $R^n \cong R^m$ wird notwendig beschrieben durch Matrizen A und B. Wäre $n \neq m$, so wären unsere Matrizen nicht quadratisch. Hat ohne Beschränkung der Allgemeinheit A mehr Zeilen als Spalten und ergänzen wir unsere Matrizen durch Nullen zu quadratischen Matrizen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$, so gilt immer noch $\tilde{A}\tilde{B} = I$ mit I der Einheitsmatrix, im Widerspruch zu $\det \tilde{A} = 0$. □

1.5.11. Ist M ein endlich erzeugter freier Modul über einem kommutativen Ring $R \neq 0$, so heißt die Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $M \cong R^n$ auch der **Rang** von M. Das Beispiel **??** zeigt, daß man über nichtkommutativen Ringen im allgemeinen nicht mehr sinnvoll vom Rang eines freien Moduls reden kann.

Ergänzung 1.5.12. Es gibt Schiefkörper $K \subset L$ derart, daß L über K endlich erzeugt ist als Linksmodul, nicht aber als Rechtsmodul. Die Frage nach einem solchen Beispiel war lange als **Artin's Problem** bekannt. Eine explizite Konstruktion kann man in [Coh95] finden.

Übungen

Übung 1.5.13. Gegeben ein Ring R liefert die durch Rechtsmultiplikation gegebene Abbildung aus 1.3.5 einen Ringisomorphismus $R^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_R(R)$ und die durch Linksmultiplikation gegebene Abbildung einen Ringisomorphismus $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{-R}(R)$.

Übung 1.5.14. Man zeige: Gegeben ein kommutativer Ring R und $n \in \mathbb{N}$ ist jeder surjektive Homomorphismus $R^n \twoheadrightarrow R^n$ bereits ein Isomorphismus. Hinweis: Man finde ein Halbinverses und rechne mit Matrizen.

Ergänzende Übung 1.5.15. Für jeden Ring R und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ liefert die Zuordnung $M \mapsto M^n$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$R\text{-Mod} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mat}(n; R)\text{-Mod}$$

In anderen Worten ist jeder Modul über $S = \mathrm{Mat}(n; R)$ isomorph zu einem Modul der Gestalt M^n mit $M \in R\text{-Mod}$ und unsere Zuordnung induziert Bijektionen $\mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(M^n, N^n)$. Etwas allgemeiner ist für jeden freien R-Rechtsmodul V mit Endomorphismenring $E = \mathrm{End}_{-R}(V)$ die Zuordnung $M \mapsto V \otimes_R M$ eine Äquivalenz von Kategorien $R\text{-Mod} \xrightarrow{\approx} E\text{-Mod}$. Diese Aussagen sind im übrigen Spezialfälle unserer allgemeinen Überlegungen **??**.

1.6 Ganzzahlige symplektische Formen**

Satz 1.6.1 (Symplektische Formen über $\mathbb{Z}$). *Gegeben eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe Γ mit einer nichtausgearteten alternierenden Bilinearform $\omega : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ existiert stets eine Basis von Γ, bezüglich derer die Matrix unserer Form eine Blockmatrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

ist mit $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_r)$ und $d_i > 0$ und $d_i | d_{i+1}$ für alle i. Die d_i sind dabei durch die Form ω eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir wählen $\lambda, \mu \in \Gamma$ derart, daß $\omega(\lambda, \mu) = d$ die kleinstmögliche positive Zahl ist, die so dargestellt werden kann. Dann behaupten wir $\Gamma = \langle \lambda, \mu \rangle \oplus \langle \lambda, \mu \rangle^{\perp}$. Aus Dimensionsgründen gilt das über $\mathbb{Q}$. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ finden wir also $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ derart, daß $m\gamma$ eine Darstellung

$$m\gamma = a\lambda + b\mu + \kappa$$

besitzt mit $\kappa \in \langle \lambda, \mu \rangle^{\perp}$. Es folgt sofort $m\omega(\gamma, \mu) = da$. Wäre m kein Teiler von a, so wäre d kein Teiler von $\omega(\gamma, \mu)$ und wir könnten $x, y \in \mathbb{Z}$ finden mit

$0 < x\omega(\gamma, \mu) + \gamma\omega(\lambda, \mu) = \omega(x\gamma + \gamma\lambda, \mu) < d$, im Widerspruch zur Wahl von λ, μ. Das kann nicht sein, folglich teilt m unser a und ebenso auch b. Dann aber teilt m auch κ und wir finden wie gewünscht

$$\Gamma = \langle \lambda, \mu \rangle \oplus \langle \lambda, \mu \rangle^{\perp}$$

Vollständige Induktion beendet den Beweis der Existenz von D, wenn auch zunächst noch ohne die Zusatzbedingung $d_i | d_{i+1}$. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß im Fall, daß d_1 nicht d_2 teilt, unser d_1 nicht das Kleinstmögliche gewesen sein kann, und induktiv folgt so auch $d_i | d_{i+1}$. Die Eindeutigkeit der d_i schließlich folgt, indem wir die Eindeutigkeit im Elementarteilersatz [LA2] 4.4.13 auf den Fall der von ω induzierten Abbildung $\Gamma \hookrightarrow \Gamma^*$ anwenden. □

1.7 Noethersche Moduln und Ringe

1.7.1. Dieser Abschnitt betrifft kommutative und nichtkommutative Ringe gleichermaßen.

Definition 1.7.2. Ein Modul über einem Ring heißt **noethersch** genau dann, wenn alle seine Untermoduln endlich erzeugt sind.

1.7.3. Mit gemeint ist dabei die Forderung, daß unser Modul selbst endlich erzeugt sein soll. Die Bezeichnung erinnert an die Mathematikerin Emmy Noether, eine Pionierin der abstrakten Algebra, die in Göttingen arbeitete, bis sie in die Emigration gezwungen wurde.

Definition 1.7.4. Ein Ring heißt **linksnoethersch** bzw. **rechtsnoethersch** genau dann, wenn er noethersch ist als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selbst, und **noethersch** genau dann, wenn er linksnoethersch und rechtsnoethersch ist. In anderen Worten ist also etwa ein Ring linksnoethersch genau dann, wenn alle seine Linksideale endlich erzeugt sind.

Beispiel 1.7.5. Ein Vektorraum über einem Körper k ist noethersch als k-Modul genau dann, wenn er endlichdimensional ist. Jeder Hauptidealring ist noethersch.

Beispiel 1.7.6. Der Polynomring $R = \mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots]$ in abzählbar vielen Variablen ist nicht noethersch, denn das von allen T_i erzeugte Ideal ist nicht endlich erzeugt: In der Tat bilden die $\langle T_1 \rangle \subsetneq \langle T_1, T_2 \rangle \subsetneq \ldots$ eine unendliche echt aufsteigende Folge von Idealen, deren Vereinigung $\langle T_1, T_2, \ldots \rangle$ nicht endlich erzeugt sein kann.

Proposition 1.7.7. *Jeder Quotient und jeder Untermodul eines noetherschen Moduls ist noethersch. Besitzt ein Modul M einen noetherschen Untermodul M' derart, daß auch der Quotient M/M' noethersch ist, so ist M bereits selbst noethersch.*

Ergänzung 1.7.8. Für diejenigen Leser, die mit exakten Sequenzen nach [LA2] 6.2.4 und [LA2] 6.2 vertraut sind, können wir die Proposition auch wie folgt formulieren: Ist $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring, so ist M noethersch genau dann, wenn M' und M'' noethersch sind. Leser, die noch nicht mit dieser Terminologie vertraut sind, werden ermuntert, sich damit vertraut zu machen.

Beweis. Der erste Teil bleibt dem Leser überlassen. Wir müssen im zweiten Teil zeigen, daß jeder Untermodul $U \subset M$ endlich erzeugt ist. Nach Annahme ist aber sein Bild $\bar{U} \subset M/M'$ endlich erzeugt, wir finden also Elemente $u_1, \ldots, u_r \in U$, deren Bilder $\bar{U}$ erzeugen. Ganz genauso ist $U \cap M'$ endlich erzeugt, sagen wir von $v_1, \ldots, v_s \in U$, und dann sieht man leicht, daß die $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ zusammen ganz U erzeugen. □

Satz 1.7.9. *Ein Modul über einem linksnoetherschen Ring ist noethersch genau dann, wenn er endlich erzeugt ist.*

Beweis. Ein noetherscher Modul ist immer endlich erzeugt. Ist umgekehrt M endlich erzeugt, so ist M ein Quotient von R^n, und für R linksnoethersch ist auch R^n noethersch als Modul, wie man induktiv aus 1.7.7 folgert. □

Beispiel 1.7.10. Dieser Satz zeigt insbesondere, daß jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe endlich erzeugt ist. In der Tat ist ja eine abelsche Gruppe dasselbe wie ein $\mathbb{Z}$-Modul, und $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring, also noethersch. Wir hatten in diesem Fall in [LA2] 4.4.1 sogar gesehen, daß man für die Untergruppe nicht mehr Erzeuger benötigt als für die ganze Gruppe. Das folgt mit demselben Argument allgemein für Moduln über Ringen, in denen jedes Linksideal ein Hauptideal ist. Im allgemeinen kann es aber durchaus vorkommen, daß man für einen Untermodul mehr Erzeuger benötigt als für den ursprünglichen Modul. Insbesondere kann es ja vorkommen, daß man für ein Ideal mehr als einen Erzeuger benötigt und damit mehr Erzeuger als für den Ring, der ja als Modul über sich selber stets zyklisch ist.

Satz 1.7.11 (Hilbert'scher Basissatz). *Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist auch der Polynomring $R[T]$ mit Koeffizienten in R ein linksnoetherscher Ring. Dasselbe gilt analog für rechtsnoethersch und noethersch.*

Beweis. Sei $I \subset R[T]$ ein Linksideal. Wir betrachten das Linksideal $\mathfrak{a} \subset R$, das erzeugt wird von den Leitkoeffizienten aller Polynome aus I. Da R noethersch ist, gibt es endlich viele Polynome $f_1, \ldots, f_t \in I$, deren Leitkoeffizienten das Linksideal $\mathfrak{a} \subset R$ erzeugen. Sei m das Maximum der Grade der f_i. Gegeben $h \in I$ mit $\deg h \geq m$ finden wir offensichtlich $p_i \in R[T]$ derart, daß

$$h - (p_1 f_1 + \ldots + p_t f_t)$$

echt kleineren Grad hat als h. Induktiv finden wir dann sogar p_i derart, daß diese Differenz echt kleineren Grad hat als m. Die Polynome aus $R[T]$ vom Grad $< m$ und, wieder da R linksnoethersch ist, dann auch die Polynome aus I vom Grad $< m$ bilden aber einen endlich erzeugten R-Modul. Wählen wir Erzeuger $g_1, \dots, g_r$ dieses R-Moduls, so erzeugen offensichtlich $f_1, \dots, f_t, g_1, \dots, g_r$ unser Linksideal I über $R[T]$. $\square$

1.7.12. Man erkennt induktiv, daß ein Polynomring in endlich vielen Variablen $k[T_1, \dots, T_n]$ mit Koeffizienten in einem Körper k, ja mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Ring ein noetherscher Ring ist. Das zeigt insbesondere, daß jede algebraische Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\!\mathsf{A}\;\, k^n$ bereits durch endlich viele Gleichungen beschrieben werden kann, denn ihr Verschwindungsideal $\mathcal{I}(X) \subset k[T_1, \dots, T_n]$ muß endlich erzeugt sein, und für Erzeuger $f_1, \dots, f_r$ gilt dann sicher $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_r) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) = X$.

Lemma 1.7.13 (Charakterisierungen noetherscher Moduln). *Für einen Modul sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Modul ist noethersch, als da heißt, jeder Untermodul ist endlich erzeugt;*

2. *Jedes nichtleere System von Untermoduln unseres Moduls besitzt ein maximales Element;*

3. *Jede aufsteigende Folge $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ von Untermoduln unseres Moduls wird stationär alias stagniert.*

1.7.14. Ein Ring ist insbesondere linksnoethersch genau dann, wenn jede aufsteigende Folge von Linksidealen stagniert.

1.7.15. Beim Nachweis der Implikationen (2)⇒(3) und (1)⇒(3) kommen wir noch ohne Auswahlaxiom aus. Die Beweise der anderen Implikationen benötigen jedoch, soweit ich sehen kann, das Auswahlaxiom.

Beweis. $(1) \Rightarrow (3)$: Sei M unser Modul. Ist jeder Untermodul von M endlich erzeugt, so auch die Vereinigung $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ über unsere aufsteigende Folge von Untermoduln. Es gibt also ein j derart, daß alle Erzeuger dieser Vereinigung schon in M_j liegen, und dann gilt notwendig $M_j = M_{j+1} = \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Ist ein Untermodul $N \subset M$ nicht endlich erzeugt, so finden wir induktiv eine Folge $m_0, m_1, \dots$ in N derart, daß für jedes $i \geq 0$ das i-te Folgenglied m_i nicht im Erzeugnis der vorhergehenden $m_0, m_1, \dots, m_{i-1}$ liegt. Die $M_i = \langle m_0, m_1, \dots, m_i \rangle$ bilden dann eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M, die nicht stagniert.

$(2) \Leftrightarrow (3)$: Offensichtlich besitzt in einer partiell geordneten Menge jede nichtleere Teilmenge mindestens ein maximales Element genau dann, wenn jede monoton wachsende Folge in unserer Menge stagniert. Diese Erkenntnis gilt es anzuwenden auf das System alias die Menge aller Untermoduln unseres Moduls. $\square$

Ergänzung 1.7.16. Ein Tensorprodukt noetherscher Ringe muß nicht wieder noethersch sein. Ist etwa k ein Körper und $K = \operatorname{Quot} k[X_1, X_2, \ldots]$ der Quotientenkörper des Polynomrings über k in unendlich vielen Variablen, so ist $K \otimes_k K$ nicht noethersch: Die Ideale $\langle (X_1 - Y_1), (X_2 - Y_2), \ldots, (X_n - Y_n) \rangle$ bilden eine unendliche aufsteigende Idealkette, mit den Abkürzungen $X_i = X_i \otimes 1$ und $Y_i = 1 \otimes Y_i$. Um das zu sehen, mag man davon ausgehen, daß $K \otimes_k K$ faktoriell ist als Lokalisierung des faktoriellen Rings $k[X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots]$.

Übungen

Übung 1.7.17. Jeder Quotient eines linksnoetherschen Rings ist linksnoethersch. Jeder Quotient eines rechtsnoetherschen Rings ist rechtsnoethersch. Jeder Quotient eines noetherschen Rings ist noethersch.

Übung 1.7.18. Man zeige: Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist auch der Potenzreihenring $R[\![T]\!]$ mit Koeffizienten in R ein linksnoetherscher Ring. Dasselbe gilt analog für rechtsnoethersch und noethersch. Hinweis: Man argumentiere wie bei Beweis des Basissatzes, aber betrachte diesmal das von den Koeffizienten der „Anfangsterme" erzeugte Linksideal von R. Insbesondere sind nach [LA1] 6.3.38 auch die Potenzreihenringe in mehreren Variablen $R[\![T_1, \ldots, T_s]\!]$ linksnoethersch.

Übung 1.7.19. Sei k ein Körper oder allgemeiner ein noetherscher Integritätsbereich. Gegeben $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ bezeichne $U_f := \{x \in k^n \mid f(x) \neq 0\}$ das Komplement der Nullstellenmenge von f. Man zeige, daß die offenen Teilmengen von k^n genau alle endlichen Vereinigungen solcher U_f sind.

1.8 Moduln über Hauptidealringen*

Satz 1.8.1 (Elementarteilersatz). *Sei f ein Homomorphismus zwischen zwei endlich erzeugten freien Moduln über einem Hauptidealring. So gilt:*

1. *Es gibt angeordnete Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unserer Moduln derart, daß die darstellende Matrix $D := {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ unseres Homomorphismus eine Diagomalmatrix ist, deren vordere Diagonaleinträge jeweils die hinteren teilen, in Formeln $(i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0)$ und $d_{11} | d_{22} | \ldots | d_{rr}$ für r das Minimum der Kardinalitäten beider Basen.*

2. *Die Diagonaleinträge d_{ii} einer derartigen darstellenden Matrix durch die Abbildung f wohlbestimmt bis auf Multiplikation mit Einheiten.*

Beispiele 1.8.2. Den Körperfall kennen wir bereits aus [LA1] 4.3.11 als Smith-Normalform, den Fall des Hauptidealrings $\mathbb{Z}$ aus [LA2] 4.4.13, den Fall eines Polynomrings aus [LA2] 4.4.29 als Smith-Zerlegung.

1.8.3. Nach unserer Definition [AL] 2.4.10 ist ein Hauptidealring ein kommutativer Integritätsbereich, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist. Wir können unseren Satz auch verstehen als die Beschreibung eines Systems von Repräsentanten für die Bahnen der offensichtlichen Wirkung der Gruppe $\mathrm{GL}(n; R) \times \mathrm{GL}(m; R)$ auf der Menge $\mathrm{Mat}(n \times m; R)$ im Fall eines Hauptidealrings R.

Beweis. Wir dürfen $E = R^m$ und $F = R^n$ annehmen. Die Abbildung f wird beschrieben durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; R)$ und es gilt, invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{Mat}(n \times n; R)$ und $Q \in \mathrm{Mat}(m \times m; R)$ zu finden derart, daß $PAQ = D$ diagonal ist von der gewünschten Form. Für eine Matrix A bezeichne $\langle A \rangle \subset R$ das von den Einträgen von A erzeugte Ideal. Sicher gilt $\langle XA \rangle \subset \langle A \rangle$ für jede Matrix X, also $\langle XA \rangle = \langle A \rangle$ für X invertierbar. Ebenso gilt $\langle AY \rangle \subset \langle A \rangle$ für jede Matrix Y und $\langle AY \rangle = \langle A \rangle$ für Y invertierbar. Wir geben im folgenden ein Verfahren an, das im Fall $\langle a_{11} \rangle \neq \langle A \rangle$ invertierbare Matrizen X und Y liefert derart, daß der obere linke Eintrag von XAY ein echt größeres Ideal erzeugt als a_{11}. Da unser Kring noethersch ist, oder auch mit einer elementaren Argumentation wie beim Beweis von [AL] 2.4.13 finden wir dann sogar $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ invertierbar derart, daß der obere linke Eintrag von $\tilde{X}A\tilde{Y}$ das Ideal $\langle \tilde{X}A\tilde{Y} \rangle = \langle A \rangle$ erzeugt, d.h. daß er alle Einträge von $\tilde{X}A\tilde{Y}$ teilt. Da nun Zeilen- und Spaltenoperationen auch durch Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links bzw. rechts gegeben werden, finden wir dann sogar invertierbare Matrizen $\hat{X}, \hat{Y}$ derart, daß $\hat{X}A\hat{Y}$ außer einem Eintrag $a_{11} = d_{11}$ in der oberen linken Ecke nur Nullen in der ersten Zeile und erste Spalte stehen hat und daß zusätzlich gilt $\langle d_{11} \rangle = \langle A \rangle$. Dann können wir aber den Beweis beenden mit einer offensichtlichen Induktion. Es bleibt, das versprochene Verfahren anzugeben. Wir unterscheiden drei Fälle.

(i) Falls a_{11} nicht alle Elemente der ersten Zeile teilt, sagen wir a_{11} teilt nicht a_{12}, so betrachten wir das Ideal $\langle a_{11}, a_{12} \rangle$ und wählen dafür einen Erzeuger d. Wir können nun schreiben $d = xa_{11} + ya_{12}$ sowie zusätzlich $a_{11} = d\lambda, a_{12} = d\mu$ und folgern $1 = x\lambda + y\mu$. Jetzt beachten wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & \multirow{2}{*}{$*$} \\ * & * & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} x & -\mu & \multirow{2}{*}{0} \\ y & \lambda & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} d & * & \multirow{2}{*}{$*$} \\ * & * & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & * \end{array}\right)$$

mit I der Einheitsmatrix und haben schon gewonnen.

(ii) Falls a_{11} nicht alle Elemente der ersten Spalte teilt, gehen wir analog vor.

(iii) Teilt a_{11} alle Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte, so finden wir schon mal invertierbare X, Y derart, daß XAY außer einem Eintrag a_{11} in der oberen linken Ecke nur Nullen in der ersten Zeile und der ersten Spalte stehen hat. Unter der Annahme $\langle a_{11} \rangle \neq \langle A \rangle$ kann aber a_{11} nicht alle Einträge von A teilen. Addieren wir nun eine geeignete Zeile zur ersten Zeile, so landen wir im Fall (i) und haben wieder gewonnen.

Damit haben wir das versprochene Verfahren angegeben und Teil 1 ist gezeigt.

2. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Diagonaleinträge bis auf Einheiten. Dazu betrachten wir für $i \geq 1$ das von allen Determinanten von $(i \times i)$-Untermatrizen von A erzeugte Ideal $J_i(A)$. Ist X eine weitere Matrix, so gilt $J_i(XA) \subset J_i(A)$, denn die Zeilen von XA sind Linearkombinationen von Zeilen von A. Insbesondere gilt also $J_i(XA) = J_i(A)$ für invertierbares X und ebenso $J_i(AY) = J_i(A)$ für invertierbares Y. Es folgt sofort, daß $J_i(A)$ das vom Produkt $d_{11}d_{22} \cdots d_{ii}$ erzeugte Ideal ist, in Formeln $J_i(A) = \langle d_{11}d_{22} \cdots d_{ii} \rangle$. Daraus folgt dann die Eindeutigkeit der d_{ii} bis auf Einheiten. □

1.8.4. Wir geben nun zwei Formen der Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen an. Wenden wir diese Klassifikationen an auf den Hauptidealring $\mathbb{Z}$, so erhalten wir die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen [LA2] 4.4.4 und [LA2] 4.4.5 vom Beginn der Vorlesung. Wenden wir unsere Sätze an auf einen Polynomring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ergibt sich die Jordan'sche Normalform [LA2] 3.4.5, wie als Korollar 1.8.11 ausgeführt wird.

Satz 1.8.5 (**Klassifikation durch Idealketten**). *Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R, so gibt es genau eine aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_s \subset R$ von Idealen von R mit $\mathfrak{a}_s \neq R$ und*

$$M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_s$$

Der Nullmodul wird abgedeckt durch den Fall $s = 0$.

1.8.6. Ist R ein faktorieller Ring, so nennen wir die Potenzen irreduzibler Elemente von R auch die **Primpotenzen** von R. Jede Primpotenz q hat also die Form $q = p^e$ mit p irreduzibel und $e \geq 1$. Wir verwenden diesen Begriff bei der Darstellung einer zweiten Klassifikation derselben Objekte.

Ergänzung 1.8.7. Die Existenz ist mir auch klar für Kringe, in denen jedes Ideal ein Hauptideal ist. Aber wie steht es in dieser Allgemeinheit mit der Eindeutigkeit?

Satz 1.8.8 (Klassifikation durch Multimengen von Primpotenzen). *Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R, so gibt es $r \in \mathbb{N}$ und Primpotenzen $q_1, \ldots, q_t \in R$ derart, daß gilt*

$$M \cong R^r \times R/q_1R \times \ldots \times R/q_tR$$

Hier ist r wohlbestimmt und die q_i sind wohlbestimmt bis auf Einheiten und Reihenfolge. Der Nullmodul wird abgedeckt durch den Fall $r = t = 0$.

1.8.9. Der Beweis beider Sätze ist mutatis mutandis derselbe wie der Beweis ihrer als [LA2] 4.4.4 und [LA2] 4.4.5 diskutierten Spezialisierungen für den Hauptidealring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

1.8.10. Ein Modul heißt **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jedem von Null verchiedenen Ringelement eine injektive Abbildung von unserem Modul in sich selber liefert. Nach dem Satz ist insbesondere jeder endlich erzeugte torsionsfreie Modul über einem Hauptidealring frei.

Beweis von 1.8.5. Gegeben ein Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_n$ von M erklären wir durch die Vorschrift $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1g_1 + \ldots + a_ng_n$ einen surjektiven Modulhomomorphismus

$$R^n \twoheadrightarrow M$$

Dessen Kern ist nach 1.7.9 ein endlich erzeugter R-Modul K, für den wir wieder einen surjektiven Homomorphismus $R^m \twoheadrightarrow K$ finden können. Der Formalismus noetherscher Ringe wird aber an dieser Stelle eigentlich noch nicht gebraucht, man kann ebenso wie in [LA2] 4.4.1 sogar stärker und unabhängig zeigen, daß man für jeden Untermodul eines endlich erzeugten Moduls über einem Hauptidealring höchstens soviele Erzeuger benötigt wie für den großen Modul. Mit der Komposition $R^m \twoheadrightarrow K \hookrightarrow R^n$ als erster Abbildung entsteht so eine im Sinne von [LA2] 6.2.4 exakte Sequenz von R-Moduln

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

Nach 1.5.5 sind die Homomorphismen $R^m \to R^n$ genau die Multiplikationen von links mit $(n \times m)$-Matrizen mit Einträgen in R. Weiter überlegt man sich, daß auch in dieser Situation die Verknüpfung von Homomorphismen der Multiplikation von Matrizen entspricht. Bezeichnet nun A die Matrix unserer Abbildung $R^m \to R^n$ und wählen wir P und Q wie im Elementarteilersatz oder vielmehr dem Beginn seines Beweises, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm von R-Moduln

$$\begin{tikzcd} R^m \arrow[r, "A\circ"] & R^n \arrow[d, "P\circ", "\wr"'] \\ R^m \arrow[u, "Q\circ", "\wr"'] \arrow[r, "D\circ"] & R^n \end{tikzcd}$$

für eine nicht notwendigerweise quadratische Diagonalmatrix D mit Einträgen $d_1|d_2|\ldots|d_r$ für $r = \min(m,n)$. Bilden wir nun andererseits das Produkt der exakten Sequenzen $R \stackrel{d_i}{\to} R \to R/\langle d_i\rangle \to 0$ für $1 \leq i \leq r$ mit $m-r$ Kopien der exakten Sequenzen $R \to 0 \to 0 \to 0$ im Fall $m > n$ bzw. $n-r$ Kopien der exakten Sequenzen $0 \to R \stackrel{\mathrm{id}}{\to} R \to 0$ im Fall $n > m$, so erhalten wir mit [LA2] 6.2.21 die untere Horizontale in einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
R^m \arrow[r, "A\circ"] & R^n \arrow[r] \arrow[d, "P\circ"', "\wr"] & M \arrow[r] & 0 \arrow[d] \\
R^m \arrow[u, "Q\circ", "\wr"'] \arrow[r, "D\circ"] & R^n \arrow[r] & R/\langle d_1\rangle \times \ldots \times R/\langle d_r\rangle \times R^{n-r} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Damit liefert [LA2] **??** oder vielmehr eine offensichtliche Variante dieses Resultats für Moduln einen Isomorphismus $M \stackrel{\sim}{\to} R/\langle d_1\rangle \times \ldots \times R/\langle d_r\rangle \times R^{n-r}$. Lassen wir von unserer Folge $d_1|d_2|\ldots|d_r$ alle Einheiten vorne weg und ergänzen am Ende $(n-r)$ Nullen und drehen die Nummerierung um, so erhalten wir eine Folge $a_s|\ldots|a_1$ derart, daß die von ihren Gliedern erzeugten Ideale eine Kette bilden wie im Satz 1.8.5 gefordert, und die Existenz dort ist gezeigt. Um die Eindeutigkeit zu zeigen bemerken wir, daß für jeden endlich erzeugten R-Modul M und jedes irreduzible Element p und alle $n \geq 1$ der Quotient $p^{n-1}M/p^nM$ nach 1.3.13 ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Restklassenring $R/\langle p\rangle$ ist, der hinwiederum nach [AL] 2.4.30 ein Körper sein muß. Wir notieren seine Dimension

$$D_p^n(M) := \dim_{R/\langle p\rangle}(p^{n-1}M/p^nM)$$

Man folgert unmittelbar $D_p^n(M \times N) = D_p^n(M) + D_p^n(N)$ für je zwei endlich erzeugte R-Moduln M und N. Für zyklische R-Moduln $M \cong R/aR$ behaupten wir nun

$$D_p^n(R/aR) \quad = \quad \begin{cases} 1 & p^n \text{ teilt } a; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat ist das klar für $a = p^m$, für a teilerfremd zu p ist es eh klar, und mit dem chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4 folgt es im allgemeinen. Für eine Zerlegung $M \cong R/\langle d_1\rangle \times \ldots \times R/\langle d_s\rangle$ wie in 1.8.5 finden wir also

$$D_p^n(M) = |\{i \mid p^n \text{ teilt } d_i\}|$$

Die Zahl der Nullen unter unseren d_i wird damit für jedes p gegeben durch die Formel $|\{i \mid d_i = 0\}| = \lim_{n\to\infty} D_p^n(M)$, und welche Potenz von jedem irreduziblen Element p in jedem von Null verschiedenen d_i stecken muß, kann man offensichtlich an den Zahlen $D_p^n(M)$ auch ablesen. Folglich hängen die Ideale $\langle d_i\rangle$ nur von M und nicht von der gewählten Zerlegung ab. $\square$

Beweis. Aus 1.8.5 folgt sofort die Existenzaussage in Satz 1.8.8, indem wir im Fall $\mathfrak{a}_i \neq 0$ einen Erzeuger d_i von $\mathfrak{a}_i$ als Produkt von paarweise teilerfremden Primpotenzen $d_i = q_1 \ldots q_k$ schreiben und mit dem chinesischen Restsatz zerlegen

$$R/\mathfrak{a}_i \cong R/q_1 R \times \ldots \times R/q_k R$$

Für die Eindeutigkeit argumentieren wir wie im vorhergehenden Beweis: Für $M \cong R^r \times R/q_1 R \times \ldots \times R/q_t R$ wie in 1.8.8 finden wir diesmal

$$D_p^n(M) = r + |\{i \mid p^n \text{ teilt } q_i\}|$$

Wenden wir diese Erkenntnis an auf alle irreduziblen Elemente p, so folgt die im Satz behauptete Eindeutigkeit ohne weitere Schwierigkeiten: Die Zahl der Primpotenzen q_i, die bis auf eine Einheit p^n sind, muß nämlich bei jeder Zerlegung gerade $D_p^n(M) - D_p^{n+1}(M)$ sein, und den Rang r des freien Anteils können wir als die auch von allen Wahlen unabhängige Zahl $r = \lim_{n\to\infty} D_p^n(M)$ beschreiben, für jedes irreduzible Element p. □

Korollar 1.8.11 (Jordan'sche Normalform). *Seien k ein algebraisch abgeschlossenen Körper, V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. So gibt es eine Basis von V derart, daß die Matrix von A bezüglich dieser Basis blockdiagonal ist, wobei die Blöcke konstant sind auf der Diagonale, konstant Eins auf der ersten oberen Nebendiagonale, und Null an allen anderen Stellen.*

Bemerkung 1.8.12. Das ist genau unser Satz [LA2] 3.4.5 aus der linearen Algebra, der hier also ein weiteres Mal bewiesen wird.

Beweis. Mithilfe von 1.2.12 fassen wir V als Modul über dem Polynomring $k[X]$ auf und mit 1.8.8 finden wir einen Isomorphismus von $k[X]$-Moduln

$$V \cong k[X]/\langle (X-\lambda_1)^{n_1}\rangle \times \ldots \times k[X]/\langle (X-\lambda_t)^{n_t}\rangle$$

Wählen wir auf der rechten Seite im Summanden $k[X]/\langle (X-\lambda)^n\rangle$ als angeordnete Basis die Nebenklassen von $(X-\lambda)^{n-1}, \ldots, (X-\lambda)$ und 1, so erhält man die Matrix der Multiplikation mit X, indem man zunächst die Matrix der Multiplikation mit $(X-\lambda)$ berechnet und dann die Diagonalmatrix λI addiert. So erkennt man dann leicht, daß die Matrix der Multiplikation mit X die gewünschte Form hat. □

1.8.13. Auf ähnliche Weise erhält man auch Normalformen für die Matrizen von Endomorphismen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern, wie in den folgenden Übungen ausgeführt wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Illustration zu 1.8.14

Übungen

Übung 1.8.14. Jedes normierte Polynom $P \in k[X]$ ist bis auf Vorzeichen das charakteristische Polynom der k-linearen Abbildung $(X\cdot) : k[X]/\langle P\rangle \to k[X]/\langle P\rangle$. Hat unser Polynom die Gestalt $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, so bilden die Nebenklassen von $1, X, \ldots, X^{n-1}$ eine angeordnete Basis des Quotienten, und in Bezug auf diese Basis hat die durch Multiplikation mit X gegebene k-lineare Abbildung die in nebenstehender Abbildung angegebene Matrix. Hinweis: Eine Methode ist die explizite Berechnung mithilfe der Determinante. Alternativ mag man k algebraisch abgeschlossen annehmen und sich mithilfe des chinesischen Restsatzes auf den Fall zurückziehen, daß P eine Potenz eines linearen Polynoms ist.

Übung 1.8.15 (**Charakteristisches Polynom eines $K[X]$-Moduls**). Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper k. Man zeige: Genau dann hat A das charakteristische Polynom P, wenn es eine Faktorisierung $P = Q_1 \ldots Q_r$ gibt derart, daß der (V, A) entsprechende $k[X]$-Modul isomorph ist zu

$$k[X]/\langle Q_1\rangle \times \ldots \times k[X]/\langle Q_r\rangle$$

Man nutze diese Erkenntnis, um einen alternativen Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton [LA1] 7.6.20 zu geben. Hinweis: Man verwende 1.8.14 und 1.8.5 oder 1.8.8. In anderen Worten kann das Aufmultiplizieren einer endlichen Multimenge von Null verschiedener Polynome bis auf eine multiplikative Konstante aus $k^\times$ demnach geschrieben werden als die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc}
{}_{\mu}\{Q_1, \ldots, Q_r\} & \in & \left\{\begin{array}{c}\text{endliche Multimengen}\\ \text{von Polynomen aus } k[X]\backslash 0\end{array}\right\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
k[X]/\langle Q_1\rangle \times \ldots \times k[X]/\langle Q_r\rangle & \in & \left\{\begin{array}{c}\text{endlichdimensionale}\\ k[X]\text{-Moduln}\end{array}\right\} \\
 & & \downarrow \\
(V, A) & \in & \left\{\begin{array}{c}\text{endlichdimensionale}\\ k\text{-Vektorräume } V\\ \text{mit Endomorphismus}\end{array}\right\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\chi_A & \in & k[X]
\end{array}$$

mit unserer Entsprechung $M \mapsto (M, (X\cdot))$ aus 1.2.12 als mittlerem Pfeil.

Ergänzende Übung 1.8.16. Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums über einem Körper k. Man zeige: Genau dann liefert (V, A) einen $k[X]$-Modul, der isomorph ist zu $k[X]/\langle P\rangle$ für ein Polynom $P \in k[X]$, wenn es einen

Vektor $v \in V$ gibt derart, daß die $A^i v$ den Vektorraum V erzeugen. Ein derartiger Vektor heißt auch ein **zyklischer Vektor**.

Ergänzende Übung 1.8.17. Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper k. Man zeige: Kommen im charakteristischen Polynom χ_A von A keine k-irreduziblen Faktoren mehrfach vor, so liefert (V, A) einen $k[X]$-Modul, der isomorph ist zu $k[X]/\langle \chi_A \rangle$.

1.9 Körpertheoretischer Nullstellensatz

Definition 1.9.1. Unter einer **Kringerweiterung** verstehen wir ein Paar $B \supset A$ bestehend aus einem Kring B mit einem Teilring A. Später verstehen wir darunter auch allgemeiner einen beliebigen injektiven Kringhomomorphismus.

Definition 1.9.2. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung.

1. Wir sagen, B sei **von endlichem Typ über** A oder auch **ringendlich über** A genau dann, wenn B als Ring erzeugt werden kann von A zusammen mit endlich vielen weiteren Elementen.

2. Wir sagen, B sei **endlich über** A oder genauer **modulendlich über** A genau dann, wenn B als A-Modul endlich erzeugt ist.

3. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz über** A genau dann, wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in A ist, wenn also eine Gleichung der Gestalt
$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$
gilt mit $n \geq 1$ und $a_i \in A$. Im Fall einer Körpererweiterung $A \subset B$ sagt man stattdessen auch, b sei **algebraisch über** A.

Analog verwenden wir diese Begriffe auch für beliebige Kringhomomorphismen $A \to B$, die nicht notwendig Einbettungen von Teilmengen, ja noch nicht einmal injektiv zu sein brauchen.

1.9.3. Im Fall von Körpererweiterungen reichte in Teil 3 die Forderung, daß wir ein von Null verschiedenes Polynom finden. Im Fall von Kringerweiterungen jedoch ist die Forderung wesentlich, daß das Polynom in Teil 3 normiert sein soll.

Beispiel 1.9.4. Die Kringerweiterung $R[T] \subset R[T, T^{-1}]$ ist nicht ganz, genauer ist T^{-1} nicht ganz über $R[T]$ für jeden von Null verschiedenen Kring R.

1.9.5. Ich verwende im Kommutativen die offensichtlichen Analoga der in [AL] 3.8.5 eingeführten Begriffsbildungen und Notationen: Sei A ein Kring. Unter einem A-**Kring** verstehen wir ein Paar (B, φ) bestehend aus einem Kring B und einem Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$. Ist (B', φ') ein weiterer A-Kring, so verstehen wir unter einem **Homomorphismus von A-Kringen** $B \to B'$ einen Kringhomomorphismus $\psi : B \to B'$ mit $\psi \circ \varphi = \varphi'$. Alternativ sprechen wir auch von einem **Homomorphismus über** A. Die Menge aller solchen Homomorphismen notieren wir

$$\mathrm{Kring}^A(B, B')$$

Einen bijektiven Kringhomomorphismus über A nennen wir auch einen **Isomorphismus von A-Kringen** oder einen **Isomorphismus über** A.

Ergänzung 1.9.6. Unser Kring^A ist ebenso wie seine nichtkommutative Variante Ring^A ein Speziallfall der allgemeinen kategorientheoretischen Konstruktion [TF] 2.2.2 der Kategorie $\mathcal{C}^X$ der „Objekte unter X“ zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem ausgezeichneten Objekt X.

1.9.7. Gegeben ein Kring k verstehe ich wie in [LA2] 7.8.1 unter einer **k-Algebra** einen k-Modul M mitsamt einer k-bilinearen Abbildung $M \times M \to M$. Hier bedeutet „bilinear“ wie im Fall eines Körpers k die Linearität in beiden Einträgen. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Konvention, daß man eine Algebra stets als assoziativ versteht, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht. Ist die bilineare Verknüpfung assoziativ und besitzt M dazu noch ein neutrales Element, so nenne ich M eine **k-Ringalgebra**, und ist sie zusätzlich auch noch kommutativ, eine **k-Kringalgebra**.

1.9.8 (**Diskussion der Terminologie**). In der hier gewählten Terminologie ist für jeden Kring k eine k-Kringalgebra „dasselbe“ wie ein k-Kring: Die Multiplikation eines k-Krings (B, φ) zusammen mit der von φ induzierten k-Modulstruktur macht jeden k-Kring zu einer k-Kringalgebra, und umgekehrt wird jede k-Kringalgebra M zu einem k-Kring durch den Kringhomomorphismus $\varphi : k \to M$, $\lambda \mapsto \lambda 1_M$. Viele Autoren, deren Fokus mehr auf der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra liegt, nennen letztere Struktur kurzerhand eine „k-Algebra“. Ich verwende diese Terminologie nicht, da bei mir auch nicht-kommutative Algebren und nicht-unitäre Algebren eine wichtige Rolle spielen. Allerdings will ich der Konvention folgen, daß eine Algebra als assoziativ angenommen sei, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht.

1.9.9 (**Ringendliche Erweiterungen noetherscher Kringe sind noethersch**). Ist ein Kring B ringendlich über einem noetherschen Kring A, so ist auch B selbst noethersch. Man folgert das mit dem Hilbert'schen Basissatz 1.7.11 zunächst für einen Polynomring in endlich vielen Variablen über A und dann mit 1.7.17 für Quotienten solcher Polynomringe.

Satz 1.9.10 (**Ringendliche Körpererweiterungen**). *Jede ringendliche Körpererweiterung ist modulendlich. In anderen Worten ist also jede Körpererweiterung,* *die endlich erzeugt ist als Ringerweiterung, bereits endlichdimensional über dem Grundkörper.*

1.9.11. Wegen seiner engen Verwandtschaft zum Nullstellensatz heißt dieser Satz in vielen Quellen der **körpertheoretische Nullstellensatz**. Einen alternativen Beweis, der auf dem Noether'schen Normalisierungslemma und Eigenschaften ganzer Ringerweiterungen basiert, diskutieren wir in 4.4.11.

Beweis im Fall eines überabzählbaren Grundkörpers. Sei $k \subset L$ unsere Körpererweiterung. Ist L ein endlich erzeugter k-Ring, so ist L von abzählbarer Dimension über k. Gäbe es nun ein $t \in L \backslash k$, das transzendent ist über k, so hätten wir mit $T \mapsto t$ eine Einbettung $k('T) \hookrightarrow L$. Der Funktionenkörper $k('T)$ hat aber überabzählbare Dimension über k, da die Familie der Brüche $(T-\lambda)^{-1}$ parametrisiert durch $\lambda \in k$ linear unabhängig ist über k, vergleiche [AL] 3.7.17. Widerspruch! □

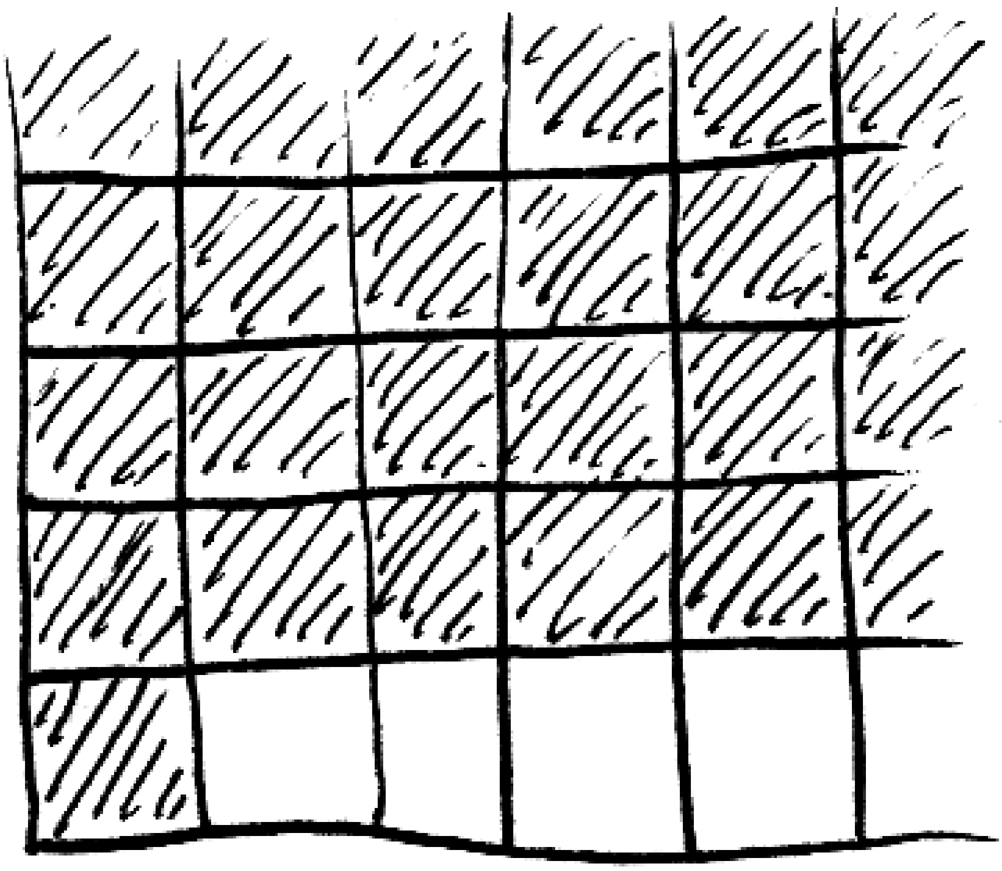
Beweis im Allgemeinen. Sei $k \subset L$ unsere Körpererweiterung. Seien $e_1, \ldots, e_n$ Erzeuger des k-Krings L, in Formeln $L = k[e_1, \ldots, e_n]$. Wir argumentieren mit Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist unproblematisch, der Polynomring in einer Veränderlichen ist eben kein Körper, und jeder Quotient davon nach einem von Null verschiedenen Ideal ist endlichdimensional als k-Vektorraum. Für den Induktionsschritt dürfen wir bereits annehmen, daß L modulendlich ist über $K_1 := k(e_1)$. Ist e_1 algebraisch über k, so sind wir wieder fertig. Also dürfen wir e_1 transzendent über k annehmen, in Formeln $K_1 \cong k('T)$. Betrachten wir nun den Teilring $A \subset K_1$, der über k von e_1 und den Koeffizienten der Minimalpolynome über K_1 von $e_2, \ldots, e_n$ erzeugt wird, so ist A per definitionem ringendlich über k. Wir haben also unseren Funktionenkörper K_1 eingebettet in ein Sandwich von Kringen

$$k \subset A \subset K_1 \subset L$$

mit L modulendlich über A und A ringendlich über k und damit nach 1.9.9 insbesondere A noethersch. Also muß auch K_1 modulendlich sein über A und damit ringendlich über k. Das ist nun der gesuchte Widerspruch, denn ein Funktionenkörper $K_1 \cong k('T)$ kann nie ringendlich über k sein: Es gibt ja nach [AL] 2.4.37 unendlich viele irreduzible Polynome in $k['T]$, und nur endlich viele davon könnten in den Nennern von endlich vielen hypothetischen Erzeugern des k-Krings $k('T)$ vorkommen. □

Übungen

Übung 1.9.12. Seien $A \subset B \subset C$ Kringerweiterungen. Man zeige: Ist C modulendlich über B und B modulendlich über A, so ist C bereits modulendlich über



Sind $A \subset B \subset C$ Kringe und ist C von endlichem Typ über A, so muß B keineswegs von endlichem Typ über A sein. Als Gegenbeispiel betrachte man etwa $\mathbb{C} \subset B \subset \mathbb{C}[X, Y]$ mit B dem Ring aller Polynomfunktionen, deren Einschränkung auf die y-Achse konstant ist. Eine $\mathbb{C}$-Basis von B bildet dann etwa die Eins und alle Monome $X^i Y^j$ mit $i > 0$, und man sieht leicht, daß kein Teilring von B von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ alle XY^j enthalten kann. Dies Bild illustriert, wie ich mir diesen Ring veranschauliche: Jedes ausgemalte Kästchen mit unterer linker Ecke (i, j) steht für einen Basisvektor $X^i Y^j$ von B.

A. Ist C ringendlich über B und B ringendlich über A, so ist C bereits ringendlich über A.

Übung 1.9.13. Man bestimme alle Elemente von $\mathbb{Q}$, die ganz sind über $\mathbb{Z}$. Sei k ein Körper. Man bestimme alle Elemente von $k(T_1, \ldots, T_n)$, die ganz sind über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Übung 1.9.14. Man zeige, daß $\mathbb{C}[X, Y]/\langle Y^2 - X^3 \rangle$ ein Integritätsbereich ist, und daß die über diesem Ring ganzen Elemente seines Quotientenkörpers selbst einen Ring bilden, der isomorph ist zum Polynomring in einer Veränderlichen.

Übung 1.9.15. Wird ein A-Kring B als A-Kring erzeugt von endlich vielen über A ganzen Elementen, haben wir also in Formeln $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ mit x_i ganz über A für $1 \leq i \leq n$, so ist er bereits modulendlich über A. Hinweis: Man beginne mit dem Fall eines einzigen Erzeugers und verwende dann 1.9.12.

1.10 Beweis des Hilbert'schen Nullstellensatzes

Definition 1.10.1. Ein Ideal in einem Ring heißt ein **echtes Ideal** genau dann, wenn es nicht der ganze Ring ist. Ein Ideal in einem Ring heißt ein **maximales echtes Ideal** genau dann, wenn es ein maximales Element der durch Inklusion partiell geordneten Menge aller *echten* Ideale unseres Ringes ist. Die Menge der maximalen echten Ideale eines Ringes A notieren wir

$$\operatorname{Max} A$$

Es ist eine allgemeine Konvention, unsere maximalen echten Ideale abkürzend als **maximale Ideale** zu bezeichnen, obwohl sie natürlich nicht die maximalen Elemente der Menge aller Ideale unseres Ringes sind: Diese Menge hat nämlich nur genau ein maximales Element, den Ring selbst. Ich werde dieser allgemeinen Konvention folgen. Statt $\operatorname{Max} A$ findet man für die Menge der maximalen Ideale von A auch oft Notationen wie $\operatorname{Spec}_{\max} A$ oder $\operatorname{Specm} A$, die im hier verfolgten Aufbau der Theorie erst in 2.6.4 verständlich werden.

Beispiele 1.10.2. Die maximalen Ideale in $\mathbb{Z}$ sind genau die Ideale $p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ für p eine Primzahl. Ist k ein Körper, so ist $\langle X - a \rangle \subset k[X]$ ein maximales Ideal, für alle $a \in k$, und es ist leicht zu sehen, daß wir so im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers bereits alle maximalen Ideale von $k[X]$ erhalten. Der Nullring besitzt überhaupt kein maximales Ideal.

1.10.3. In noetherschen Ringen ist es offensichtlich, daß sich jedes Ideal zu einem maximalen Ideal vergrößern läßt: Sonst könnte man ja, aber eben auch schon mit dem Auswahlaxiom, eine unendliche aufsteigende Folge von Idealen finden, die nicht stagniert. In allgemeinen Ringen folgt das aus dem Zorn'schen Lemma, wie nun gleich gezeigt werden soll.

Satz 1.10.4 (Existenz von maximalen Idealen). *In jedem von Null verschiedenen Ring gibt es mindestens ein maximales Ideal. Allgemeiner läßt sich in einem beliebigen Ring jedes Ideal, das nicht der ganze Ring ist, vergrößern zu einem maximalen Ideal unseres Rings.*

Beweis. Sei R unser Ring und $\mathfrak{a} \neq R$ unser Ideal. Wir betrachten das System aller Ideale von R, die $\mathfrak{a}$ umfassen und nicht ganz R sind oder, gleichbedeutend, nicht die 1 von R enthalten. Dieses System von Teilmengen ist offensichtlich stabil unter aufsteigenden Vereinigungen. Jetzt folgt der Satz aus dem Zorn'schen Lemma in der Gestalt [LA1] 1.9.9. □

Ergänzung 1.10.5. In der Logik wird gezeigt, daß die Annahme, jedes Ideal eines Krings möge sich zu einem maximalen Ideal vergrößern lassen, echt schwächer ist als das Auswahlaxiom. Der Beweis scheint allerdings nicht ganz einfach zu sein.

Proposition 1.10.6 (Quotienten nach maximalen Idealen). *Ein Ideal in einem Kring ist maximal genau dann, wenn der Quotientenring nach besagtem Ideal ein Körper ist.*

Erster Beweis. Sei R unser Kring und $\mathfrak{m} \subset R$ unser Ideal. Ist $R/\mathfrak{m}$ ein Körper, so gilt $\mathfrak{m} \neq R$ und es gibt für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ ein $b \in R$ mit $ab \in 1 + \mathfrak{m}$. Folglich gilt $\langle a, \mathfrak{m} \rangle = R$ für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ und damit ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. Ist umgekehrt $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R, so ist $R/\mathfrak{m}$ nicht der Nullring und für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ gilt $\langle a, \mathfrak{m} \rangle = R$ und folglich gibt es $b \in R$ und $m \in \mathfrak{m}$ mit $ab+m = 1$. Dann aber folgt $\bar{a}\bar{b} = 1$ in $R/\mathfrak{m}$ und dieser Quotient ist ein Körper. □

1.10.7. Wir werden diesem Beweis noch eine andere Form geben, als Konsequenz von Teilaussagen, die auch für sich genommen noch gebraucht werden. Ist $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so erhalten wir eine Bijektion

$$\{\text{Ideale in } R, \text{ die } \ker \varphi \text{ umfassen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Ideale in } S\}$$

vermittels der Abbildungen $I \mapsto \varphi(I)$ für $I \subset R$ bzw. in der Gegenrichtung $J \mapsto \varphi^{-1}(J)$ für $J \subset S$. Insbesondere liefert das Zurückholen mit einem surjektiven Ringhomomorphismus eine Injektion $\operatorname{Max} S \hookrightarrow \operatorname{Max} R$, $\mathfrak{m} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$.

Lemma 1.10.8. *Ein Kring ist ein Körper genau dann, wenn in ihm das Nullideal ein maximales Ideal ist.*

Beweis. In einem Körper ist natürlich das Nullideal maximal. Ist umgekehrt das Nullideal ein maximales Ideal, so gilt $k = \langle 1 \rangle \neq \langle 0 \rangle$ und damit $1 \neq 0$. Weiter gilt $\langle a \rangle = k$ für jedes $a \neq 0$, also gibt es für jedes $a \neq 0$ ein b mit $ab = 1$. □

Zweiter Beweis von 1.10.6. Wenden wir die Erkenntnis 1.10.7 an auf die Surjektion $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ für irgendein Ideal $\mathfrak{m}$ von R, so folgt, daß $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal ist genau dann, wenn $\langle 0 \rangle \subset R/\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. Das Nullideal in einem Kring ist aber nach Lemma 1.10.8 maximal genau dann, wenn besagter Kring ein Körper ist. □

1.10.9. Die nun folgenden Lemmata 1.10.10 und 1.10.12 formulieren einfache Konsequenzen des Nullstellensatzes 1.1.4. Da wir uns jedoch beim Beweis des Nullstellensatzes auf diese Lemmata stützen wollen, dürfen wir sie hier nicht aus dem Nullstellensatz herleiten. Stattdessen folgern wir sie aus dem bereits bewiesenen Satz über ringendliche Körpererweiterungen 1.9.10.

Lemma 1.10.10 (Maximale Ideale in Polynomringen). *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die maximalen Ideale im Polynomring in n Variablen $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau die Verschwindungsideale von Punkten des k^n. In Formeln liefert das Bilden des Verschwindungsideals also eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max} k[T_1, \ldots, T_n] \\ x & \mapsto & \mathcal{I}(x) \end{array}$$

1.10.11. Da jeder Punkt des k^n abgeschlossen ist, können wir die inverse Abbildung beschreiben durch die Abbildungsvorschrift $\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Ist k ein Körper und $x \in k^n$ ein Punkt, so ist ganz offensichtlich $\mathcal{I}(x) = \langle T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n \rangle \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Ideal: In der Tat induziert das Auswerten bei x einen Isomorphismus $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(x) \xrightarrow{\sim} k$. Ist umgekehrt $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Ideal, so betrachten wir den Körper $L := k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$. Wir haben natürlich einen Ringhomomorphismus $\varphi : k \to L$ und die Nebenklassen der T_i erzeugen L als k-Algebra. Mit dem Satz über ringendliche Körpererweiterungen 1.9.10 folgt, daß $\varphi : k \hookrightarrow L$ eine algebraische Körpererweiterung sein muß. Aus unserer Annahme k algebraisch abgeschlossen folgt dann weiter, daß φ eine Bijektion sein muß. Ist $x_i \in k$ das Urbild der Nebenklasse $\bar{T}_i \in L$ von T_i unter dieser Bijektion, so folgt $T_i - x_i \in \mathfrak{m}$. Bezeichnet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ den Punkt mit den Koordinaten x_i, so folgt $\mathcal{I}(x) \subset \mathfrak{m}$ und damit $\mathcal{I}(x) = \mathfrak{m}$. □

Lemma 1.10.12 (Ideale ohne simultane Nullstellen). *Hat ein Ideal in einem Polynomring in endlich vielen Variablen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine Nullstelle, so ist besagtes Ideal schon der ganze Polynomring.*

Beweis. Bezeichnet $k = \bar{k}$ unseren Körper und $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ unser Ideal, so behauptet unser Lemma in Formeln

$$\mathcal{Z}(I) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad I = k[T_1, \ldots, T_n]$$

Das zeigen wir durch Widerspruch: Ist ein Ideal I nicht der ganze Ring, so gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ über I und wir folgern aus $I \subset \mathfrak{m}$ erst $\mathcal{Z}(I) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ und dann mit 1.10.10 weiter $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$. □

1.10.13. Nun erinnern und beweisen wir den bereits in 1.1.4 angekündigten Hilbert'schen Nullstellensatz.

Satz 1.10.14 (Hilbert'scher Nullstellensatz). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Ist $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom, das auf der Nullstellenmenge unseres Ideals verschwindet, so liegt eine Potenz unseres Polynoms bereits selbst in besagtem Ideal, in Formeln*

$$\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(I) \;\Rightarrow\; f^N \in I \text{ für } N \gg 0$$

Beweis. Wir verwenden den sogenannten **Rabinovitch-Trick** und betrachten in dem um eine Variable T vergrößerten Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n, T]$ das von I und $fT - 1$ erzeugte Ideal J. Da wir $\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(I)$ angenommen hatten, besitzt dies Ideal J überhaupt keine simultanen Nullstellen. Anschaulich gesprochen entweicht $\mathcal{Z}(fT - 1)$ bei jeder Nullstelle von f in Richtung der zusätzlichen Koordinate T ins Unendliche und die Nullstellenmenge von I im um eine Variable größeren Polynomring ist das kartesische Produkt von $\mathcal{Z}(I)$ mit der zusätzlichen Koordinatenachse: Der Schnitt dieser beiden Mengen ist dann offensichtlich leer. Nach 1.10.12 gilt also in unserem um eine Variable vergrößerten Polynomring eine Gleichung der Gestalt

$$a_0(fT - 1) + a_1 f_1 + \ldots + a_m f_m = 1$$

mit $f_j \in I$ und a_j Elementen unseres um eine Variable vergrößerten Polynomrings. Nun durften wir sicher von Anfang an $f \neq 0$ annehmen. Setzen wir dann in unserer Gleichung für T das Element f^{-1} des Funktionenkörpers $k(T_1, \ldots, T_n)$ ein, wenden also den Ringhomomorphismus $k[T_1, \ldots, T_n, T] \to k(T_1, \ldots, T_n)$ mit $T \mapsto f^{-1}$ an, so ergibt sich in diesem Funktionenkörper und sogar bereits in seinem Teilring $k[T_1, \ldots, T_n, f^{-1}]$ eine Gleichung der Gestalt

$$b_1 f_1 + \ldots + b_m f_m = 1$$

wo die $b_j \in k[T_1, \ldots, T_n, f^{-1}]$ eben aus den a_j hervorgehen durch Einsetzen von f^{-1} für T. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Potenz f^N von f erhalten wir schließlich eine Gleichung in $k[T_1, \ldots, T_n]$ der Gestalt

$$c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m = f^N$$

mit $c_j = f^N b_j$ Elementen unseres ursprünglichen Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$. Diese Gleichung zeigt dann $f^N \in I$. $\square$

Definition 1.10.15. Gegeben ein Ideal I in einem Ring R definiert man sein **Radikal** $\sqrt{I}$ durch die Vorschrift $\sqrt{I} := \{f \in R \mid f^N \in I$ für $N \gg 0\}$. Ein Ideal heißt ein **Radikalideal** genau dann, wenn es sein eigenes Radikal ist.

1.10.16. In [Lie] 4.4.10 führen wir den Begriff des „Radikals eines Moduls“ ein, und das Radikal eines Ideals im obigen Sinne ist etwas völlig anderes als sein Radikal als Modul. Wenn es nötig sein sollte, werde ich unterscheiden zwischen dem **Modulradikal** und dem **Potenzrradikal** eines Ideals.

1.10.17 (**Abgeschlossene Mengen und Radikalideale**). Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ nach dem Nullstellensatz die Formel $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ und die Vorschriften $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ liefern inverse Bijektionen zwischen der Menge aller Zariski-abgeschlossenen Teilmengen des k^n und der Menge aller Radikalideale in $k[T_1, \ldots, T_n]$, in Formeln

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale} \\ I \subset k[T_1, \ldots, T_n] \end{array} \right\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Algebraische Teilmengen} \\ Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} k^n \end{array} \right\}$$

Übungen

Übung 1.10.18. Ist k algebraisch abgeschlossen und $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, so induziert die Bijektion $k^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} k[T_1, \ldots, T_n]$ aus Lemma 1.10.10 eine Bijektion $\mathcal{Z}(I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(k[T_1, \ldots, T_n]/I)$.

Übung 1.10.19. Warum kann man nicht mit demselben Argument wie in 1.10.4 zeigen, daß jede Gruppe eine maximale echte Untergruppe besitzt? Man zeige auch, daß die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ keine maximale echte Untergruppe besitzt.

Übung 1.10.20. Gegeben ein kommutativer von Null verschiedener Ring R folgt aus $R^n \cong R^m$ schon $n = m$. Hinweis: Man benutze 1.3.13 und wähle mit 1.10.4 ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, so daß $R/\mathfrak{a}$ nach 1.10.6 ein Körper ist. Ein alternativer Beweis, der ohne das Zorn’sche Lemma auskommt, wird in 1.5.9 gegeben. Der hier skizzierte Beweis zeigt jedoch mit [AL] 5.3.4 allgemeiner für beliebige Mengen I, J, daß aus der Isomorphie von freien Moduln $RI \cong RJ$ folgt, daß I und J dieselbe Kardinalität haben.

Übung 1.10.21. Der Schnitt aller maximalen Ideale eines Krings R kann auch beschrieben werden als die Menge aller Elemente unseres Rings mit der Eigenschaft, daß die Summe eines beliebigen Vielfachen unseres Elements mit der Eins stets eine Einheit ist, in Formeln

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R} \mathfrak{m} = \{a \in R \mid (ra + 1) \in R^\times \ \forall r \in R\}$$

Diese Menge heißt das **Jacobson-Radikal** unseres Krings. Im Fall nichtkommutativer Ringe versteht man unter dem Jacobson-Radikal feiner den Schnitt aller maximalen Links- oder gleichbedeutend aller maximalen Rechtsideale.

Übung 1.10.22. $(k = \bar{k})$. In Erweiterung von 1.1.19 zeige man, daß ein Ideal $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ genau dann von endlicher Kodimension ist, wenn es höchstens endlich viele simultane Nullstellen besitzt, in Formeln

$$|\mathcal{Z}(I)| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{codim}_k(I \subset k[T_1, \ldots, T_n]) < \infty$$

Ergänzende Übung 1.10.23. Noch allgemeiner als in 1.10.22 zeige man für einen beliebigen Körper k, daß ein Ideal $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ genau dann von endlicher Kodimension ist, wenn es nur in endlich vielen maximalen Idealen enthalten ist.

Übung 1.10.24. Man zeige, daß für ein Ideal I eines Krings R das Radikal $\sqrt{I}$ wieder ein Ideal von R ist, und daß $\sqrt{I}$ sein eigenes Radikal ist.

Übung 1.10.25. $(k = \bar{k})$. Ist A ein k-Kring von endlichem Typ, so liefert das Bilden des Kerns $\varphi \mapsto \ker \varphi$ eine Bijektion $\operatorname{Kring}^k(A, k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} A$.

Übung 1.10.26. Seien k ein Körper und A eine ringendliche k-Kringalgebra. Man zeige: Ist der Quotient von A nach seinem Nilradikal $A/\sqrt{0}$ endlichdimensional über k, so ist bereits A selbst endlichdimensional über k.

2 Affine Varietäten

2.1 Polynomiale und reguläre Funktionen

Definition 2.1.1. Seien k ein Kring und $X \subset k^n$, $Y \subset k^m$ Teilmengen. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt **polynomial** genau dann, wenn es Polynome $P_1, \ldots, P_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit

$$\varphi(x) = (P_1(x), \ldots, P_m(x)) \quad \forall x \in X$$

2.1.2 (**Die Verknüpfung polynomialer Abbildungen ist polynomial**). Sei k ein Kring und seien $X \subset k^n$, $Y \subset k^m$ und $Z \subset k^l$ Teilmengen. Sind $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ polynomial, so ist auch ihre Verknüpfung $\psi \circ \varphi : X \to Z$ polynomial.

2.1.3. Gegeben Mengen X, Y notiere ich $\operatorname{Ens}(X, Y)$ mit Ens für französisch „ensemble“ die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

2.1.4. Seien k ein Kring und $X \subset k^n$ eine Teilmenge. Die polynomialen Abbildungen $f : X \to k$ heißen **polynomiale Funktionen**. Sie bilden einen Teilring

$$\mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X) \subset \operatorname{Ens}(X, k)$$

im Ring aller k-wertigen Funktionen auf X. Nach dem Isomorphiesatz [LA2] 4.2.10 liefert die Einschränkung von Funktionen einen Isomorphismus von k-Kringen

$$k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X)$$

zwischen dem Restklassenring des Polynomrings nach dem Verschwindungsideal von X und dem Ring der polynomialen Funktionen auf X.

Definition 2.1.5. Sei nun k ein Körper. Gegeben eine Teilmenge $X \subset k^n$ heißt eine Abbildung $f : X \to k$ eine **reguläre Funktion** genau dann, wenn sie sich lokal als Quotient von zwei polynomialen Funktionen schreiben läßt. In Formeln ausgedrückt heißt das: Für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \circledcirc k^n$ von x und Polynome $g, h \in k[T_1, \ldots, T_n]$ mit $h(y) \neq 0 \ \forall y \in U$ derart, daß für alle $y \in U \cap X$ gilt $f(y) = g(y)/h(y)$. Die regulären Funktionen bilden einen Teilring

$$\mathcal{O}(X) \subset \operatorname{Ens}(X, k)$$

2.1.6 (**Notationen für Ringe von polynomialen Funktionen**). Viele Autoren verwenden statt $\mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X)$ auch die alternative Notation $k[X]$ für den k-Kring der polynomialen Funktionen auf X. Ich finde diese alternative Notation wenig glücklich: Die Aussage, daß die polynomialen Funktionen auf $X = k$ durch obigen Isomorphismus mit dem Polynomring in einer Veränderlichen T identifiziert werden, schreibt sich in dieser Notation $k[T] \xrightarrow{\sim} k[k]$ und in unserer Notation $k[T] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(k)$.

Satz 2.1.7 (Reguläre Funktionen auf algebraischen Mengen). $(k = \bar{k})$. *Ist $X \underset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ eine algebraische Teilmenge, so sind die regulären Funktionen auf X genau die polynomialen Funktionen, in Formeln*

$$\mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X) = \mathcal{O}(X)$$

2.1.8. $(k = \bar{k})$. Auf algebraischen Teilmengen $X \underset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ sind insbesondere „lokal polynomiale Funktionen bereits global polynomial“.

Beispiele 2.1.9 (**Polynomialität von Kehrwertfunktionen**). Sei k ein Körper. Gegeben $X \subset k^n$ und eine reguläre Funktion $f : X \to k$ ohne Nullstelle ist auch die Funktion $(1/f) : X \to k$ regulär. Gegeben $X \subset k^n$ und $f : X \to k$ und eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ von X ist des weiteren f genau dann regulär, wenn alle seine Restriktionen $f|_U$ regulär sind. Unter der Annahme $k = \bar{k}$ gilt das nach unserem Satz 2.1.7 dann auch für polynomiale Funtionen auf algebraischen Teilmengen $X \underset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$. Ist insbesondere $f : X \to k$ polynomial ohne Nullstelle, so ist auch $1/f$ polynomial auf X.

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X) \subset \mathcal{O}(X)$. Zu zeigen ist die andere Inklusion. Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ ist per definitionem eine Abbildung $f : X \to k$, die sich lokal als Quotient von Polynomen $f(x) = g_i(x)/h_i(x)$ schreiben läßt für geeignete $g_i, h_i \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Indem wir notfalls die Nenner vergrößern, dürfen wir sogar annehmen, daß für alle i gilt

$$f(x) = g_i(x)/h_i(x) \quad \forall x \in X \text{ mit } h_i(x) \neq 0.$$

Endlich viele Komplemente von Nullstellenmengen solcher h_i überdecken aber X, sagen wir $\mathcal{Z}(h_1) \cap \ldots \cap \mathcal{Z}(h_r) \cap X = \emptyset$. Weiter gilt $\mathcal{Z}(h_i) = \mathcal{Z}(h_i^2)$ und aus dem Nullstellensatz folgt $\langle h_1^2, \ldots, h_r^2, \mathcal{I}(X) \rangle = \langle 1 \rangle$, also eine Relation in $k[T_1, \ldots, T_n]$ der Gestalt

$$c_1 h_1^2 + \ldots + c_r h_r^2 + b = 1$$

mit $b \in \mathcal{I}(X)$. Es reicht nun zu zeigen, daß f und $c_1 h_1 g_1 + \ldots + c_r h_r g_r$ an jedem Punkt $x \in X$ denselben Wert annehmen. Für beliebiges $x \in X$ haben wir mit $S = S(x) = \{i \mid h_i(x) \neq 0\}$ in der Tat

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^r c_i(x) h_i^2(x) f(x) \\ &= \textstyle\sum_{i \in S} c_i(x) h_i^2(x) f(x) \\ &= \textstyle\sum_{i \in S} c_i(x) h_i(x) g_i(x) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^r c_i(x) h_i(x) g_i(x) \end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen. □

Proposition 2.1.10. $(k = \bar{k})$. *Für $n \geq 2$ liefert die Restriktion von regulären Funktionen eine Bijektion zwischen regulären Funktionen auf ganz k^n und regulären Funktionen auf dem Komplement des Ursprungs*

$$\mathcal{O}(k^n) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(k^n \backslash 0)$$

Vorschau 2.1.11. Später wird sich diese Proposition als unmittelbare Konsequenz von 4.8.18 erweisen.

Beweis. Ist $f : k^n \backslash 0 \to k$ eine reguläre Funktion, so ist auch ihre Restriktion auf das Komplement der i-ten Koordinatenhyperebene regulär und wird nach 2.1.12 gegeben durch ein Element der Lokalisierung $k[T_1, \ldots, T_n, T_i^{-1}]$. Die weiteren Restriktionen auf die Komplemente aller Koordinatenhyperebenen stimmen aber überein, folglich liegt f im Schnitt der Bilder dieser Lokalisierungen im Ring $k[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]$ der Laurentpolynome. Da der Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ aber nach [AL] 2.6.11 faktoriell ist, folgt durch das Betrachten einer maximal gekürzten Darstellung bereits $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$. □

Übungen

Übung 2.1.12 (**Reguläre Funktionen auf Nullstellenkomplement**). $(k = \bar{k})$. Ist $X \subset\!\!\!\!\!\!\measuredangle\; k^n$ eine algebraische Teilmenge und $h \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion auf X, so wird der Ring der regulären Funktionen auf $X_h := \{x \in X \mid h(x) \neq 0\}$ als Ring erzeugt von den Restriktionen der regulären Funktionen auf X und der Funktion $1/h$, in Formeln

$$\mathcal{O}(X_h) = \mathcal{O}(X)[h^{-1}]$$

Hinweis: Man wiederholt den obigen Beweis und landet in der Mitte bei der Erkenntnis $\mathcal{Z}(h_1) \cap \ldots \cap \mathcal{Z}(h_r) \cap X \subset \mathcal{Z}(h)$.

Übung 2.1.13 (**Stetigkeit polynomialer Abbildungen**). Ich erinnere, daß nach [AN1] 6.6.8 eine Abbildung zwischen topologischen Räumen stetig heißt genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist. Man zeige: Ist k ein Integritätsbereich, so sind polynomiale Abbildungen stetig für die von der Zariski-Topologie des k^n auf unseren Teilmengen induzierte Topologie.

Übung 2.1.14 (**Verkleben regulärer Funktionen**). $(k = \bar{k})$. Seien disjunkte und Zariski-abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset\!\!\!\!\!\!\measuredangle\; k^n$ gegeben sowie polynomiale Funktionen $f : A \to k$ und $g : B \to k$. Man zeige, daß es eine polynomiale Funktion auf k^n gibt, die auf A mit f übereinstimmt und auf B mit g. Hinweis: Man verwende den vorhergehenden Satz 2.1.7. Alternative: Nach dem Nullstellensatz ist die Summe der Verschwindungsideale der ganze Polynomring. Nun verwende man den abstrakten chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4. Insbesondere kann man eine Vorgabe von endlich vielen Funktionswerten an endlich vielen Punkten stets durch eine reguläre Funktion interpolieren, was wir aber eigentlich in diesem Fall schon aus [AL] 2.3.7 wissen.

Übung 2.1.15 (**Schwierigkeiten beim Verkleben regulärer Funktionen**). Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und algebraische Teilmengen $A, B \underset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ sowie polynomiale Funktionen $f : A \to k$ und $g : B \to k$ mit $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$ muß es anders als bei stetigen Funktionen keineswegs eine polynomiale Funktion $h : A \cup B \to k$ geben mit $h|_A = f$ und $h|_B = g$. Als Beispiel untersuche man den k^2 mit A dem Achsenkreuz und B einer weiteren Ursprungsgeraden.

Übung 2.1.16 (**Zurückholen regulärer Funktionen**). Seien k ein Körper, $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ Teilmengen und $\varphi : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. Man zeige: Gegeben eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(Y)$ ist auch die zurückgeholte Funktion regulär, in Formeln $(f \circ \varphi) \in \mathcal{O}(X)$.

Ergänzung 2.1.17 (**Polynomiale Funktionen auf Produkten**). Gegeben ein Körper k und Teilmengen $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ ist die durch $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ erklärte Abbildung ein Isomorphismus von k-Kringen

$$\mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X) \otimes_k \mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X \times Y)$$

Die Multiplikation auf der linken Seite ist dabei die offensichtliche aus [LA2] 7.6.19. Die Surjektivität folgt leicht aus der offensichtlichen Surjektivität im Fall $X = k^m$, $Y = k^n$. Die Injektivität folgt aus der Injektivität der Abbildung $\mathrm{Ens}(X, k) \otimes_k \mathrm{Ens}(Y, k) \to \mathrm{Ens}(X \times Y, k)$, $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$, die für beliebige Mengen X, Y in [LA2] 6.3.32 diskutiert wird. Im Fall algebraischer Teilmengen und unter der Voraussetzung $k = \bar{k}$ erhalten wir mit 2.1.7 insbesondere einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Übung 2.1.18. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben kommutative nilpotentfreie k-Kringalgebren A, B ist auch ihr Tensorprodukt $A \otimes_k B$ nilpotentfrei. Hinweis: 2.1.17.

Ergänzung 2.1.19. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so ist die Aussage der vorhergehenden Übung im allgemeinen falsch. Ein Gegenbeispiel steht in [AL] 6.1.1. Ist jedoch $\bar{k}/k$ separabel, so stimmt unsere Aussage doch wieder. Allgemeiner ist für jede Galoiserweiterung K/k und jede k-Kringalgebra A ihre Erweiterung $A \otimes_k K$ nilpotentfrei genau dann, wenn A nilpotentfrei ist. In der Tat ist das Nilradikal von $A \otimes_k K$ stabil unter der Galoisgruppe, und wäre es nicht Null, so wäre nach [AL] 6.5.4 auch sein Schnitt mit A nicht Null.

Übung 2.1.20. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß sich für $n \geq 2$ und und $E \subset k^n$ endlich jede reguläre Funktion auf $k^n \backslash E$ zu einer regulären Funktion auf ganz k^n fortsetzen läßt.

Übung 2.1.21. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß für jede offene Teilmenge $X \Subset k^n$ der Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf X ringendlich ist über k.

2.2 Räume als Ringe

Definition 2.2.1. Sei k ein Kring. Jede polynomiale Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen Teilmengen $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ liefert auf den polynomialen Funktionen einen Homomorphismus $\varphi^\sharp : \mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(Y) \to \mathcal{O}^{\mathrm{pol}}(X)$ in die Gegenrichtung, das **Vorschalten von** φ alias **Zurückholen von Funktionen** $f \mapsto f \circ \varphi$. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sind $X \subset\!\!\!\!\!\bigtriangleup\, k^n$ und $Y \subset\!\!\!\!\!\bigtriangleup\, k^m$ algebraische Teilmengen, so stimmen polynomiale und reguläre Funktionen überein und die besagte Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi^\sharp : & \mathcal{O}(Y) & \to & \mathcal{O}(X) \\ & f & \mapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

heißt der **Komorphismus zu** φ. Er ist stets ein Homomorphismus von k-Kringen.

Definition 2.2.2. Ein Ring heißt **nilpotentfrei** oder gleichbedeutend **reduziert** genau dann, wenn er außer der Null keine nilpotenten Elemente hat. Eine nilpotentfreie ringendliche Kringalgebra über einem Körper k heißt ein **affiner** k**-Kring**.

2.2.3. Für die weitere Entwicklung der algebraischen Geometrie verwenden wir die Sprache der Kategorientheorie in dem Umfang, wie sie etwa in [LA2] 7 entwickelt wird, und insbesondere den Begriff einer Äquivalenz von Kategorien [LA2] 7.2.19. Ich erinnere weiter an die Kategorie der k-Kringe nach 1.9.5.

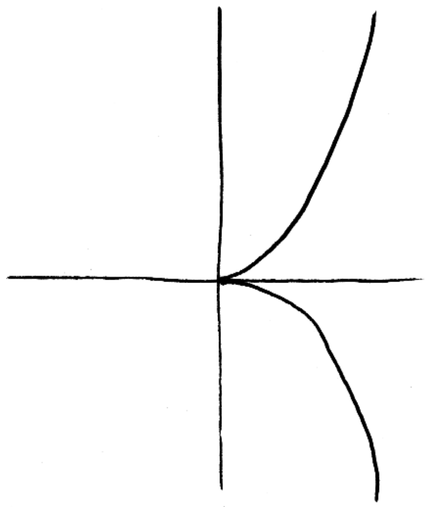
Satz 2.2.4 (Räume als Ringe). $(k = \bar{k})$. *Betrachten wir die algebraischen Mengen in irgendwelchen* k^n *als Objekte einer Kategorie mit polynomialen Abbildungen als Morphismen, so liefert das Bilden des* k*-Krings der regulären alias polynomialen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Algebraische Mengen}\\ \textit{in irgendwelchen } k^n\end{array}\right\} \stackrel{\approx}{\to} \left\{\textit{Affine } k\textit{-Kringe}\right\}^{\mathrm{opp}}$$

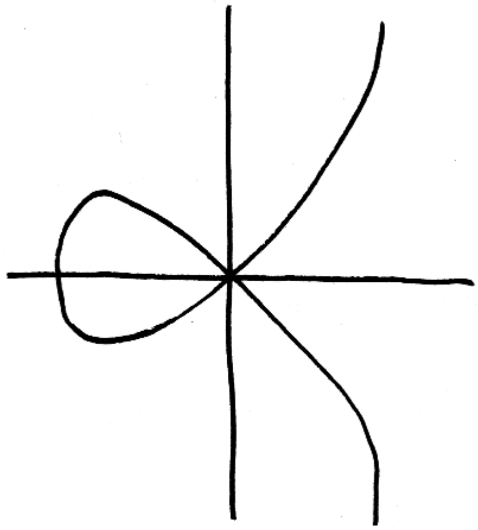
$$\begin{array}{ccc} X & & \mathcal{O}(X) \\ \varphi\downarrow & \mapsto & \varphi^\sharp\uparrow \\ Y & & \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

2.2.5 (**Endlichdimensionale nilpotentfreie** k**-Kringe**). $(k = \bar{k})$. Insbesondere liefert das Bilden des k-Krings aller k-wertigen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Endliche Mengen}\} & \stackrel{\approx}{\to} & \{\text{Endlichdimensionale nilpotentfreie } k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}} \\ X & \mapsto & \mathrm{Ens}(X, k) \end{array}$$



Ein reelles Bild der sogenannten **Neil'schen Parabel**, der Nullstellenmenge von $x^3 = y^2$ in der Ebene.



Ein reelles Bild der sogenannten **nodalen Kubik**, der Nullstellenmenge von $x^3 + x^2 = y^2$ in der Ebene.

In diesem Fall können wir aber auch einfacher argumentieren. Gegeben ein endlichdimensionaler nilpotentfreier k-Kring A liefert ja die Linksmultiplikation eine Einbettung $A \hookrightarrow \operatorname{End} A$, $a \mapsto (a\cdot)$, deren Bild nach 1.5.13 genau aus allen Endomorphismen besteht, die mit allen Rechtsmultiplikationen $(\cdot b)$ für $b \in A$ kommutieren. Aufgrund der Funktorialität der Jordanzerlegung [LA2] 3.3.6 gehört mit $(a\cdot)$ dann auch sein nilpotenter Anteil zum Bild unserer Einbettung, und ist A nilpotentfrei, muß der nilpotente Anteil Null und $(a\cdot)$ diagonalisierbar sein. Dann gibt es aber nach [LA2] 7.7.10 in A eine Basis, bezüglich derer alle $(a\cdot)$ durch Diagonalmatrizen dargestellt werden, und aus Dimensionsgründen liefert dann unsere Einbettung $A \hookrightarrow \operatorname{End} A$ einen Isomorphismus von A mit dem Ring der Diagonalmatrizen, also mit $k \times \ldots \times k$. Das zeigt, daß unser Funktor surjektiv ist auf Isomorphieklassen. Der Rest des Beweises bleibe dem Leser überlassen.

Beispiele 2.2.6. $(k = \bar{k})$. Für $n \geq m$ entspricht der Projektion $k^n \twoheadrightarrow k^m$ durch Weglassen der letzten Koordinaten hier die Einbettung von Polynomringen $k[T_1, \ldots, T_m] \hookrightarrow k[T_1, \ldots, T_m, T_{m+1}, \ldots, T_n]$. Der Einbettung $X \hookrightarrow k^n$ einer algebraischen Teilmenge entspricht in der Gegenrichtung die Surjektion $k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$. Umgekehrt, und jetzt schreiben wir zur Abwechslung und zum Vermeiden von Indizes mal X, Y für Variablen eines Polynomrings, entspricht die Komposition

$$k[X,Y] \twoheadrightarrow k[X,Y]/\langle X^3 - Y^2\rangle \xrightarrow{\sim} \langle 1, T^2, T^3, \ldots\rangle_k = k + \langle T^2\rangle \subset k[T]$$

mit dem mittleren Isomorphismus gegeben durch $X \mapsto T^2$, $Y \mapsto T^3$ der Abbildung, die die Gerade „geknifft“ in die Ebene legt vermittels $k \to k^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. Weiter entspricht die Komposition

$$k[X,Y] \twoheadrightarrow k[X,Y]/\langle X^3 + X^2 - Y^2\rangle \xrightarrow{\sim} 1 + \langle T^2 - 1\rangle \subset k[T]$$

mit dem mittleren Isomorphismus gegeben durch die Vorschrift $X \mapsto (T^2 - 1)$, $Y \mapsto T(T^2 - 1)$ der Abbildung, die die Gerade „mit Selbstüberschneidung“ in die Ebene legt vermittels $k \to k^2$, $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Hier haben alle Fasern höchstens einen Punkt mit Ausnahme der Faser über dem Ursprung, die aus den beiden Punkten $\pm 1 \in k$ besteht und im Fall einer von 2 verschiedenen Charakteristik zwei Punkte hat. Man beachte, daß $1 + \langle T^2 - 1\rangle \subset k[T]$ der Teilring aller Polynome ist, die bei $T = -1$ und $T = 1$ jeweils denselben Wert annehmen. Die mittleren Isomorphismen in den letzten beiden Beispielen sind nicht ganz offensichtlich und sollten vom Leser zur Übung bewiesen werden. Die fraglichen Abbildungen $k \to k^2$ gehen sogar surjektiv auf die Nullstellenmengen der fraglichen Polynome, aber zumindest im letzten Beispiel scheint mir das mit der uns bis jetzt zur Verfügung stehenden Theorie gar nicht so leicht einzusehen: Warum sollte sich denn jede Lösung der Gleichung $x^3 + x^2 = y^2$ in der Form $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ mit $t \in k$ schreiben lassen? Na gut, mit etwas Rechnen geht das dann schon. In 4.2.16 werden Sie es auch ohne weitere Mühen aus dem Going-up-Theorem folgern können.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß es für jeden affinen k-Kring A eine algebraische Teilmenge $X \subset k^n$ gibt mitsamt einem Isomorphismus von k-Kringen $\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} A$. Sind in der Tat $t_1, \ldots, t_n \in A$ Erzeuger unseres k-Krings, so erhalten wir durch die Vorschrift $T_i \mapsto t_i$ eine Surjektion

$$k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow A$$

Bezeichne $\mathfrak{a}$ ihren Kern. Besitzt A außer der Null keine nilpotenten Elemente, so ist $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal, und ist k algebraisch abgeschlossen, so ist ein Radikalideal im Polynomring das Verschwindungsideal seiner Nullstellenmenge, in Formeln $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$. Wir erhalten damit Isomorphismen von k-Kringen

$$\mathcal{O}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) \xleftarrow{\sim} k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} A$$

und haben gezeigt, daß A isomorph ist zum k-Kring der polynomialen Funktionen der algebraischen Menge $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subset k^n$. Jetzt müssen wir noch zeigen, daß unsere Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ Bijektionen zwischen den Morphismenräumen liefert. Wir notieren dazu die Menge der polynomialen Abbildungen zwischen zwei algebraischen Mengen mit $\mathrm{Pol}(X, Y)$. Homomorphismen von k-Kringen notieren wir $\mathrm{Kring}^k(A, B)$. Dann erinnern wir uns an die Formel $Y = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subset k^m$ und bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pol}(X, Y) & \to & \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Pol}(X, k^m) & \to & \mathrm{Kring}^k(k[T_1, \ldots, T_m], \mathcal{O}(X))
\end{array}$$

Darin seien die Horizontalen durch $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ gegeben und die Vertikalen durch $Y \subset k^m$ bzw. $k[T_1, \ldots, T_m] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$. Nun ist die untere Horizontale offensichtlich eine Bijektion, sind doch beide Seiten in natürlicher Bijektion zur Menge $\mathcal{O}(X)^m$ aller m-Tupel $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ von polynomialen Funktionen auf X. Die obere Horizontale ist dann ebenso ein Bijektion, denn dort sind nun beide Seiten in natürlicher Bijektion zu

$$\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{O}(X)^m \mid f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}(Y)\}$$

Hier verwenden wir die Definition des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(Y)$ auf der linken Seite und die universelle Eigenschaft des Quotienten $k[T_1, \ldots, T_m]/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$ auf der rechten Seite. $\square$

2.3 Affine Varietäten

Definition 2.3.1. $(k = \bar{k})$. Eine **naive affine k-Varietät** oder kürzer **affine k-Varietät** ist ein Paar $(X, \mathcal{O}(X))$ bestehend aus einer Menge X und einer k-Unterringalgebra $\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ in der Ringalgebra aller k-wertigen Funktionen auf X derart, daß $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k und daß wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{\sim}{\to} & \mathrm{Ring}^k(\mathcal{O}(X), k) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

von X mit der Menge der k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ erhalten durch die Vorschrift, die jedem Punkt $x \in X$ den durch das Auswerten bei x gegebenen Ringhomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k$, $f \mapsto f(x)$ zuordnet. Ein **Morphismus** von affinen k-Varietäten ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ mit der Eigenschaft $f \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$. Die Elemente von $\mathcal{O}(X)$ heißen die **regulären Funktionen** auf X. Das Vorschalten von φ heißt auch in dieser Allgemeinheit der **Komorphismus von** φ und wird notiert als $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, $f \mapsto f \circ \varphi$. Gegeben affine Varietäten X, Y notieren wir $\mathrm{Var}(X, Y)$ die Menge aller Morphismen von X nach Y.

Vorschau 2.3.2 (**Affine Varietäten als Spezialfall allgemeiner Varietäten**). $(k = \bar{k})$. In 6.2.1 führen wir in voller Allgemeinheit den Begriff einer „Varietät über k“ ein und erklären affine k-Varietäten als spezielle Varietäten. Es wird sich dann erweisen, daß der Funktor, der jeder affinen k-Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ im dortigen Sinne das Paar $(X, \mathcal{O}_X(X))$ zuordnet, das aus der Menge X mit dem Ring der „globalen regulären Funktionen“ besteht, ein Isomorphismus zwischen der dort erklärten Kategorie der „affinen k-Varietäten“ und der hier erklärten Kategorie der naiven affinen k-Varietäten ist. Deshalb ist es unverfänglich, die Spezifikation „naiv“ für gewöhnlich wegzulassen. Wenn ich von einer affinen Varietät rede, meine ich stets eine affine k-Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$.

Beispiele 2.3.3. $(k = \bar{k})$.

1. Jede endliche Menge X wird mit $\mathcal{O}(X) := \mathrm{Ens}(X, k)$ eine affine Varietät.

2. Die Menge $X = k^n$ wird mit $\mathcal{O}(X) := k[T_1, \ldots, T_n]$ eine affine Varietät.

3. Gegeben eine affine Varietät X und $I \subset \mathcal{O}(X)$ wird

   $$Y = \mathcal{Z}(I) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

   mit $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ eine affine Varietät. In der Tat kommt jeder k-lineare Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(Y) \to k$ von einem k-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ her, der durch Auswerten δ_x an einem Punkt $x \in X$ gegeben wird, der dann notwendig bereits zu Y gehört haben muß.

4. Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ wird das Komplement ihrer Nullstellenmenge

$$X_f := X \backslash \mathcal{Z}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

eine affine Varietät mit $\mathcal{O}(X_f) := \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \subset \operatorname{Ens}(X_f, k)$ dem von den Restriktionen der regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ zusammen mit der Funktion $1/f$ erzeugten Teilring. In der Tat liefert dann jeder Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \to k$ einen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$, der von der Auswertung an einem Punkt $x \in X$ herkommt, und von diesem Punkt hinwiederm sieht man leicht ein, daß er bereits zu X_f gehört haben muß.

2.3.4 (**Auflösung der Doppeldeutigkeit der Notation** $\mathcal{O}(X_f)$). Für $X \underset{A}{\subset} k^n$ und $f \in \mathcal{O}(X)$ kann nun $\mathcal{O}(X_f)$ sowohl den eben erklärten von den Restriktionen der Elemente von $\mathcal{O}(X)$ und f^{-1} erzeugten Unterring von $\operatorname{Ens}(X_f, k)$ bedeuten als auch den in 2.1.5 erklärten Ring der regulären, also lokal als Quotienten von polynomialen Funktionen darstellbaren Funktionen auf X_f. Zum Glück stimmen diese beiden Ringe nach 2.1.12 überein.

Beispiel 2.3.5. Alle Definitionen und Sätze vom Beginn dieses Abschnitts bis hierher würden auch für einen beliebigen Grundkörper k funktionieren. Allerdings müßte man dann in Kauf nehmen, daß etwa die reelle Gerade $X = \mathbb{R}$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}[T, (T^2 + 1)^{-1}]$ auch eine naive affine $\mathbb{R}$-Varietät wäre.

Satz 2.3.6 (über affine Varietäten). $(k = \bar{k})$. *Unsere Äquivalenz von Kategorien aus 2.2.4 läßt sich einbetten in ein kommutatives Diagramm von Äquivalenzen von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\textit{Algebraische Mengen}\\ \textit{in irgendwelchen } k^n\end{array}\right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{\textit{Affine } k\textit{-Kringe}\right\}^{\mathrm{opp}} \\
\approx\searrow & & \nearrow\approx \\
& \left\{\textit{Affine } k\textit{-Varietäten}\right\} &
\end{array}$$

Der Funktor $\searrow$ ordnet hier einer algebraische Menge $X \underset{A}{\subset} k^n$ die affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ zu und der Funktor $\nearrow$ einer affinen k-Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ den k-Kring $\mathcal{O}(X)$ ihrer globalen regulären Funktionen.

2.3.7. In meinen Augen ist dieser Satz zentral für das Verständnis sowohl der kommutativen Algebra als auch der algebraischen Geometrie. Er stellt in diesem Kontext die Beziehung zwischen eingebetteter Geometrie, koordinatenfreier Geometrie und abstrakter Algebra her, die das ganze Gebiet prägt.

Beweis. Gegeben $X \subset_{\!A} k^n$ ist $\mathcal{O}(X)$ ringendlich über k und die k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ sind etwa nach 2.2.4 genau die Auswertungsabbildungen an Punkten von X. Unser Funktor $\searrow$ landet also in der Tat in unserer Kategorie von affinen Varietäten. Daß unser funktorielles Diagramm kommutiert, ist offensichtlich. Jede affine Varietät X ist isomorph zu einer affinen Varietät vom Typ $\mathcal{Z}(I) \subset_{\!A} k^n$. In der Tat ist nach Annahme $\mathcal{O}(X)$ ringendlich über k. Bilden etwa die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ ein Erzeugendensystem, so erhalten wir eine Surjektion $k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$ mit $T_i \mapsto f_i$. Die Abbildung $(f_1, \ldots, f_n) : X \to k^n$ induziert dann einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(I)$ für I den Kern obiger Surjektion. Das zeigt, daß $\searrow$ eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert. Nach 2.2.4 induzieren demnach alle drei Funktoren Bijektionen auf Isomorphieklassen von Objekten. Um den Satz zu folgern, müssen wir nur noch zeigen, daß $\nearrow$ Injektionen auf den Morphismenräumen induziert. Das ist aber klar. □

Übungen

Übung 2.3.8. Die regulären Funktionen auf einer affinen k-Varietät X sind genau die Morphismen von Varietäten $X \to k$, in Formeln haben wir also $\mathcal{O}(X) = \mathrm{Var}(X, k)$.

Übung 2.3.9 (**Affine Räume als affine Varietäten**). $(k = \bar{k})$. Jeder endlichdimensionale affine Raum E über k wird eine affine k-Varietät, wenn wir $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{Ens}(E, k)$ erklären als die von allen affinen Abbildungen $E \to k$ erzeugte k-Unterringalgebra. Jede affine Abbildung von endlichdimensionalen affinen Räumen ist in Bezug auf diese Strukturen ein Morphismus von affinen Varietäten.

2.3.10 (**Verschiedene Bedeutungen des Wortes „affin“**). Unglücklich ist in diesem Zusammenhang die Verwendung des Wortes „affin“ in zwei verschiedenen Bedeutungen: Jeder endlichdimensionale affine Raum trägt zwar in dieser Weise eine natürliche Struktur als affine Varietät, aber es gibt durchaus auch noch andere affine Varietäten, ja „die meisten“ affinen Varietäten sind keineswegs isomorph zu affinen Räumen.

Übung 2.3.11 (**Reguläre Funktionen auf Vektorräumen**). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V die offensichtliche Einbettung $V^* \hookrightarrow \mathrm{Ens}(V, k)$ einen Isomorphismus von k-Ringalgebren

$$\mathrm{S}(V^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)$$

induziert von der symmetrischen Algebra nach [AL] 2.2.2 über dem Dualraum V^* mit der Algebra der regulären Funktionen auf V in Bezug auf seine Struktur als k-Varietät nach 2.3.9.

Übung 2.3.12 (**Automorphismen offener Teilmengen der Gerade**). $(k = \bar{k})$. Jeder Isomorphismus von Varietäten $k \xrightarrow{\sim} k$ hat die Gestalt $t \mapsto at + b$ für $a \in k^\times$

und $b \in k$. Jeder Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} k^\times$ hat die Gestalt $t \mapsto at^\varepsilon$ für $a \in k^\times$ und $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Die Varietäten $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen haben nur endlich viele Automorphismen. Hinweis: [LA1] 6.6.19.

Übung 2.3.13 (**Bijektive Morphismen müssen keine Isomorphismen sein**). Es gibt durchaus bijektive Morphismen zwischen affinen Varietäten, deren Umkehrabbildungen nicht polynomial sind. Als Beispiele betrachte man im Fall einer Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$ die Abbildung $k \to k$, $t \mapsto t^p$ und im Fall $\operatorname{char} k$ beliebig die Abbildung $k \to \mathcal{Z}(X^3 - Y^2)$, $t \mapsto (t^2, t^3)$.

2.4 Erweiterung des Nullstellensatzes

2.4.1 (**Räume und Ringe als übergreifendes Thema**). Ein großer Teil der sogenannten „kommutativen Algebra“ besteht aus geometrischen Erkenntnissen, die man unter Zuhilfenahme des vorhergehenden Satzes 2.3.6 in die Sprache der affinen k-Kringe übersetzt und von dort auf möglichst große Klassen von kommutativen Ringen verallgemeinert. Zu jedem topologischen Raum können wir auch den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem Raum bilden, zu jeder $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit den Ring der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen und zu jeder Riemann'schen Fläche den Ring der holomorphen Funktionen. Es zeigt sich, daß diese Ringe wieder die ursprünglichen „strukturierten Räume“ sehr weitgehend kodieren. Für kompakte Hausdorff-Räume ist das die Aussage des Satzes **??** und in den anderen und vielen weiteren Fällen gelten ähnliche Aussagen. Man kann sich deshalb durchaus auf den Standpunkt stellen, daß „Ringe die besseren Räume“ sind. Mein Ziel ist im folgenden, diese geometrische Intuition offenzulegen, die großen Teilen der kommutativen Algebra zugrunde liegt.

Vorschau 2.4.2. Der „Hauptsatz von Zariski“ [AAG] **??** besagt, daß in Charakteristik Null die Umkehrabbildung eines bijektiven Morphismus von einer affinen Varietät in eine „glatte“ affine Varietät stets wieder polynomial ist. In positiver Charakteristik muß man zusätzlich voraussetzen, daß der fragliche bijektive Morphismus auch in jedem Punkt bijektives Differential hat.

2.4.3. Unsere bis jetzt entwickelten Notationen und Resultate lassen sich ohne große Schwierigkeiten von k^n auf beliebige affine Varietäten X verallgemeinern. Das Auswerten liefert für eine beliebige Teilmenge eine Paarung

$$X \times \mathcal{O}(X) \to k$$

und wir bilden für $Y \subset X$ bzw. $J \subset \mathcal{O}(X)$ das Verschwindungsideal bzw. die Nullstellenmenge

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}_X(Y) & := & \{f \in \mathcal{O}(X) & \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in Y\} \\ \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}_X(J) & := & \{x \in X & \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in J\} \end{array}$$

Wieder kehren $\mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{Z}$ die Inklusionen um und die $\mathcal{Z}(J)$ bilden eine Topologie auf X, die wir die **Zariski-Topologie auf** X nennen. Jeder Morphismus ist stetig für die Zariski-Topologie.

2.4.4. Gegeben eine affine Varietät X und wird nach 2.3.3 jede abgeschlossene Teilmenge $Y \subset\!\!\!\!\!\!\circ\;\; X$ mit $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ eine affine Varietät. Wir nennen diese Struktur die **induzierte Struktur** auf Y. Natürlich induziert die Restriktion dann einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$$

2.4.5 (**Universelle Eigenschaft der induzierten Struktur**). Gegeben $Y \subset\!\!\!\!\!\!\circ\;\; X$ eine abgeschlossene Teilmenge einer affinen Varietät mit ihrer induzierten Struktur einer affinen Varietät aus 2.3.3 ist die Einbettung offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist offensichtlich auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten.

Satz 2.4.6 (Nullstellensatz auf affinen Varietäten). *Sei X eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$.*

1. *Ist $I \subset \mathcal{O}(X)$ ein Ideal und verschwindet $f \in \mathcal{O}(X)$ auf der Nullstellenmenge von I, so liegt eine Potenz von f bereits in I. In Formeln ausgedrückt gilt also $\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(I) \;\Rightarrow\; f^N \in I$ für $N \gg 0$;*

2. *Die Zuordnungen $I \mapsto \mathcal{Z}(I)$ und $Y \mapsto \mathcal{I}(Y)$ liefern zueinander inverse Bijektionen zwischen den Radikalidealen von $\mathcal{O}(X)$ und den abgeschlossenen Teilmengen von X;*

3. *Für jede Teilmenge $Y \subset X$ ist die Nullstellenmenge ihres Verschwindungsideals der Abschluß von Y in X, in Formeln $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \bar{Y}$, und für jede Teilmenge $J \subset \mathcal{O}(X)$ ist das Verschwindungsideal ihrer Nullstellenmenge das Radikal des von J erzeugten Ideals, in Formeln $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = \sqrt{\langle J \rangle}$;*

4. *Die Zuordnung $\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ ist eine Bijektion $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} X$. Die Zuordnung $x \mapsto \mathcal{I}(x)$ beschreibt ihre Umkehrabbildung.*

Beweis. Das folgt ohne Schwierigkeiten aus den entsprechenden Aussagen im Fall $X = k^n$, die wir als 1.10.14, 1.10.17 und 1.10.10 bereits besprochen haben. Die Details überlasse ich dem Leser zur Übung. □

2.4.7 (**Das Maximalspektrum**). Ganz allgemein können wir für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und jeden affinen k-Kring A eine Abbildung $A \times \operatorname{Max} A \to k$, $(a, \mathfrak{m}) \mapsto \langle a, \mathfrak{m} \rangle$ erklären durch die Vorschrift, daß unter dem durch die Komposition $k \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ gegebenen Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ gilt $\langle a, \mathfrak{m}\rangle \mapsto a + \mathfrak{m}$. So erhalten wir einen Homomorphismus von k-Kringen

$$\tau_A : A \to \mathrm{Ens}(\operatorname{Max} A, k)$$

Ist speziell X eine affine k-Varietät und $A = \mathcal{O}(X)$, so ist $\tau_{\mathcal{O}(X)}$ die Identität auf $\mathcal{O}(X)$. Erklären wir für einen beliebigen affinen k-Kring A den Ring $\mathcal{O}(\operatorname{Max} A) \subset \mathrm{Ens}(\operatorname{Max} A, k)$ als das Bild von τ_A, so erhalten wir mithin stets eine affine Varietät. Wir nennen sie das **Maximalspektrum von** A. Jeder Homomorphismus von affinen k-Kringen $A \to B$ induziert offensichtlich einen Morphismus $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ von affinen Varietäten in die Gegenrichtung, und wir erhalten so einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der affinen k-Kringe in die Kategorie der affinen Varietäten. Wir zeigen, daß dieser Funktor im Sinne von [LA2] 7.3.21 quasiinvers ist zu unserem Funktor $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ aus 2.3.6. Dazu reicht es zu prüfen, daß für jede affine k-Varietät X die bereits diskutierte Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ für die eben auf $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ konstruierte Struktur als affine Varietät ein Isomorphismus von affinen Varietäten ist. Das ist nicht schwer zu sehen und bleibe dem Leser zur Übung überlassen.

2.4.8 (**Produkt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y wird ihr Produkt $X \times Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \times Y) := [f \boxtimes g \mid f \in \mathcal{O}(X), g \in \mathcal{O}(Y)]$$

Hier ist $f \boxtimes g$ erklärt durch $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ und die eckigen Klammern meinen den von all diesen Funktionen in $\mathrm{Ens}(X \times Y, k)$ erzeugten Teilring. In der Tat ist er sicher ringendlich über k. Nach [LA2] 6.3.32 induziert die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ weiter eine Injektion $\mathrm{Ens}(X, k) \otimes_k \mathrm{Ens}(Y, k) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X \times Y, k)$, und das liefert uns unmittelbar einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Da aber nun nach [LA2] 7.6.19 für zwei beliebige k-Kringalgebren A, B jeder Ringalgebren-Homomorphismus $A \otimes_k B \to k$ die Form $a \otimes b \mapsto \phi(a)\psi(b)$ hat für wohlbestimmte Ringalgebrenhomomorphismen $\phi : A \to k$, $\psi : B \to k$, folgt auch die Zweite unserer Bedingungen an eine affine Varietät. Die beiden Projektionen $\mathrm{pr}_X : X \times Y \twoheadrightarrow X$ und $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \times Y, \mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$ ist ein Produkt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von [LA2] 7.6.1. Die einpunktige Varietät ist ein finales Objekt in dieser Kategorie.

2.4.9. Für einen Morphismus $\varphi : Y \to X$ von affinen Varietäten sind gleichbedeutend:

1. Der Morphismus φ ist injektiv mit abgeschlossenem Bild und induziert einen Isomorphismus $Y \stackrel{\sim}{\to} \varphi(Y)$ auf sein Bild mit der induzierten Struktur;

2. Der Komorphismus ist eine Surjektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$.

Der Nachweis dieser Äquivalenz bleibe dem Leser zur Übung. Einen Morphismus mit diesen Eigenschaften nennen wir auch eine **abgeschlossene Immersion**.

2.4.10. Ich will auch noch den Begriff der regulären Funktionen auf beliebige Teilmengen beliebiger affiner Varietäten verallgemeinern. Gegeben eine Teilmenge $V \subset X$ einer affinen Varietät heiße eine Abbildung $f : V \to k$ eine **reguläre Funktion** genau dann, wenn sie sich lokal als Quotient von zwei globalen regulären Funktionen schreiben läßt. In Formeln ausgedrückt heißt das: Für alle $x \in V$ gibt es eine offene Umgebung $U \Subset X$ und $g, h \in \mathcal{O}(X)$ mit $h(y) \neq 0 \ \forall y \in U$ derart, daß für alle $y \in U \cap V$ gilt $f(y) = g(y)/h(y)$. Die regulären Funktionen bilden auch einen Teilring

$$\mathcal{O}(V) \subset \mathrm{Ens}(V, k)$$

Für gewisse Teilmengen affiner Varietäten X hatten wir schon zuvor erklärt, was reguläre Funktionen darauf sein sollen, nämlich für ganz X, für abgeschlossene Teilmengen von X, und für das Komplement der Nullstellenmenge einer regulären Funktion auf ganz X. In den ersten beiden Fällen zeigt 2.1.7, daß unsere eben Erklärten regulären Funktionen mit den zuvor erklärten übereinstimmen, im Letzten folgt es aus 2.1.12.

2.4.11 (**Zurückholen regulärer Funktionen**). Seien X und Y affine Varietäten und $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus. Gegeben $U \subset X$ und eine reguläre Funktion f auf $\varphi(U)$ ist offensichtlich auch die zurückgeholte Funktion $f \circ \varphi$ eine reguläre Funktion auf U. Das verallgemeinert 2.1.16.

2.4.12 (**Universelle Eigenschaft von $X_f \hookrightarrow X$**). Gegeben X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion ist die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset X_f$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to X_f$ ein Morphismus von affinen Varietäten. In der Tat ist $(f^{-1}) \circ \varphi$ nach 2.4.11 auch eine reguläre Funktion auf Z.

Übungen

Übung 2.4.13. Seien X und Y affine Varietäten. Man zeige, daß ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ dichtes Bild hat genau dann, wenn der zugehörige Komorphismus eine Injektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ induziert. Einen Morphismus mit dichtem Bild von irreduziblen Varietäten nennt man auch einen **dominanten** Morphismus.

Affine k-Varietäten X, Y	Affine k-Kringe A, B	Quelle
Produkt $X \times Y$	Tensorprodukt $A \otimes_k B$	2.4.8
Koprodukt $X \sqcup Y$	Produkt $A \times B$	2.4.17
abgeschlossene Einbettung $X \hookrightarrow Y$	surjektiver Homomorphismus $B \twoheadrightarrow A$	2.4.9
Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ für $f \in \mathcal{O}(X)$ regulär	kanonischer Homomorphismus $A \to A[f^{-1}]$ für ein $f \in A$	2.3.4
Morphismus $\varphi : X \to Y$ mit dichtem Bild	injektiver Homomorphismus $B \hookrightarrow A$	2.4.13
Zusammenhangskomponente	Block	2.4.19
abgeschlossene Teilmenge	Radikalideal	2.4.6
Punkt	maximales Ideal	2.4.6.4
irreduzible Teilmenge	Primideal	2.6.8
irreduzible Komponente	minimales Primideal	2.6.8

Tabelle 1: Diese Übersetzungstabelle faßt einige Entsprechungen zwischen Räumen und Ringen zusammen. Ganz rechts ist jeweils die Quelle angegeben. Das Tensorprodukt zweier Kringalgebren ist dabei im Sinne von [LA2] 7.6.19 zu verstehen.

Übung 2.4.14. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Gegeben eine Teilmenge $I \subset \mathcal{O}(X)$ ist die Nullstellenmenge ihres Urbilds $(\varphi^\sharp)^{-1}(I) \subset \mathcal{O}(Y)$ der Abschluß des Bildes ihrer Nullstellenmenge, in Formeln

$$\overline{\varphi(\mathcal{Z}(I))} = \mathcal{Z}((\varphi^\sharp)^{-1}(I))$$

Übung 2.4.15. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Gegeben eine Teilmenge $J \subset \mathcal{O}(Y)$ ist das Urbild ihrer Nullstellenmenge die Nullstellenmenge ihres Bildes, in Formeln

$$\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(J)) = \mathcal{Z}(\varphi^\sharp(J))$$

Übung 2.4.16. Gegeben ein Morphismus $X \to Y$ von affinen Varietäten zeige man: Ist unter dem Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ der Ring $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über $\mathcal{O}(Y)$, so hat unser Morphismus endliche Fasern. Hinweis: 1.1.19 und 2.4.15.

Übung 2.4.17 (**Koprodukt affiner Varietäten**). Man zeige: Gegeben affine Varietäten X, Y wird ihre disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) := \{f : X \sqcup Y \to k \mid f|_X \in \mathcal{O}(X) \text{ und } f|_Y \in \mathcal{O}(Y)\}$$

Die beiden Einbettungen $\mathrm{in}_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y$ und $\mathrm{in}_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \sqcup Y, \mathrm{in}_X, \mathrm{in}_Y)$ ist ein Koprodukt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von [LA2] 7.6.11. Die leere Varietät ist ein initiales Objekt in dieser Kategorie.

Übung 2.4.18 (**Produkt mit** k^n). $(k = \bar{k})$. Gegeben eine affine Varietät X zeige man, daß wir einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times k^n)$ erhalten, wenn wir den Kringhomomorphismus betrachten, der auf $\mathcal{O}(X)$ durch das Zurückholen gegeben ist und unter dem der Variablen T_i die Projektion auf k^n gefolgt von der Projektion auf den i-ten Eintrag zugeordnet wird. Dieser Morphismus ist so natürlich, daß wir ihn oft in Sprache und Notation als Gleichheit behandeln werden.

Übung 2.4.19. Ein **Block** eines Krings kann charakterisiert werden als ein unzerlegbarer direkter Summand unseres Krings, betrachtet als Modul über sich selber. Mehr zur Blockzerlegung wird in [AL] **??** erklärt. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge der Zusammenhangskomponenten einer affinen Varietät X und der Menge der Blöcke ihres Rings von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$.

2.5 Irreduzible Komponenten

Definition 2.5.1. Ein topologischer Raum heißt **noethersch** genau dann, wenn darin jede absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen stationär wird.

Lemma 2.5.2. *Ist k ein noetherscher Integritätsbereich, so ist k^n mit seiner Zariski-Topologie ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Nach 1.1.13 gilt unter unseren Annahmen für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\!\!\;\text{\scriptsize A}\; k^n$ die Formel $X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$. Ist nun $X_0 \supset X_1 \supset \ldots$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen in k^n, so ist $\mathcal{I}(X_0) \subset \mathcal{I}(X_1) \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Idealen im Polynomring über k. Nach dem Hilbert'schen Basissatz ist aber ein Polynomring in endlich vielen Veränderlichen über einem noetherschen Ring stets noethersch, also wird unsere Folge von Idealen stationär und damit auch die Folge der $X_\nu = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X_\nu))$. □

Definition 2.5.3. Ein topologischer Raum X heißt **irreduzibel** genau dann, wenn er nicht leer ist und sich nicht schreiben läßt als Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen. Ein topologischer Raum, der nicht irreduzibel ist, heißt **reduzibel**.

Bemerkung 2.5.4. Eine Teilmenge eines topologischen Raums nennen wir reduzibel bzw. irreduzibel genau dann, wenn sie diese Eigenschaften hat für die induzierte Topologie. Insbesondere ist eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums irreduzibel genau dann, wenn sie nicht leer ist und sich nicht schreiben läßt als Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen.

Beispiel 2.5.5. In einer Menge mit der diskreten Topologie sind die irreduziblen Teilmengen genau die einpunktigen Teilmengen.

Beispiel 2.5.6. Sei k ein Körper. Das Achsenkreuz $\mathcal{Z}(T_1T_2) \subset k^2$ ist reduzibel in der Zariski-Topologie, denn es läßt sich als die Vereinigung der beiden Achsen schreiben.

Definition 2.5.7. Die maximalen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raums heißen seine **irreduziblen Komponenten**.

Ergänzung 2.5.8. Die maximalen irreduziblen Teilmengen eines topologischen Raums sind stets abgeschlossen, wir könnten mithin das Wort „abgeschlossen" in der vorhergehenden Definition auch weglassen.

Beispiel 2.5.9. Ist k ein unendlicher Körper, so sind die irreduziblen Komponenten des Achsenkreuzes $\mathcal{Z}(T_1T_2) \subset k^2$ genau die beiden Koordinatenachsen. Ähnlich kann man sich die irreduziblen Komponenten von beliebigen Zariski-abgeschlossenen Mengen in k^n vorstellen. Ich rate davon ab, für das Konzept der irreduziblen Komponenten außerhalb der Zariski-Topologie nach Anschauung zu suchen.

Satz 2.5.10 (Zerlegung in irreduzible Komponenten). *Ein noetherscher topologischer Raum besitzt höchstens endlich viele irreduzible Komponenten. Keine seiner Komponenten ist in der Vereinigung der Übrigen enthalten, und alle Komponenten zusammen überdecken den ganzen Raum.*

2.5.11. Wir schicken dem Beweis des Satzes zwei Lemmata voraus, von denen das erste eine einfache Konsequenz unseres Satzes ist. Wir geben jedoch auch für dies Lemma einen eigenständigen Beweis, damit wir uns beim Beweis des Satzes darauf stützen können. Mit dem Zornschen Lemma kann man im übrigen allgemeiner zeigen, daß jeder topologische Raum die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten ist.

Lemma 2.5.12. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums läßt sich schreiben als Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen.*

Beweis. Bezeichne X unseren Raum. Wir argumentieren durch Widerspruch. Nach 2.5.19 gibt es sonst eine minimale abgeschlossene Teilmenge $Y \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\!{\scriptstyle A}} X$, die sich nicht als endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X schreiben läßt. Sicher ist Y weder leer noch irreduzibel, besitzt also eine Darstellung $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit $Y_i \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\!{\scriptstyle A}} Y$ und $Y_i \neq Y$. Aufgrund der Minimalität von Y gilt unsere Aussage notwendig für Y_1 und Y_2 und dann auch für Y, im Widerspruch zur Wahl von Y. □

Lemma 2.5.13. *Sei X ein topologischer Raum und $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ eine Darstellung von X als endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen. Gibt es keine nichttrivialen Inklusionen zwischen unseren Teilmengen, in Formeln $X_i \subset X_j \Rightarrow i = j$, so sind die X_i genau die irreduziblen Komponenten von X.*

Beweis. Ist $Y \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\!{\scriptstyle A}} X$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge, so haben wir

$$Y = (Y \cap X_1) \cup \ldots \cup (Y \cap X_r)$$

und folglich $Y = Y \cap X_i$ alias $Y \subset X_i$ für mindestens ein i. Also ist jede maximale irreduzible Teilmenge von X eines der X_i, und wäre ein X_j keine Komponente von X, so fänden wir ein $i \neq j$ mit $X_j \subset X_i$. □

Beweis von Satz 2.5.10. Nach 2.5.12 können wir X schreiben als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$$

Indem wir überflüssige Teilmengen weglassen, dürfen wir weiter annehmen, daß kein X_i ganz in der Vereinigung der X_j mit $j \neq i$ enthalten ist. Der Satz folgt nun aus 2.5.13. □

2.5.14. Das Beweisprinzip von 2.5.12 heißt **noethersche Induktion**. Abstrakt läßt es sich wie folgt fassen: Sei X ein noetherscher topologischer Raum und P eine Eigenschaft abgeschlossener Teilmengen von X, formal also eine Abbildung

$$P : \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \overset{\circledast}{\subset} X\} \to \{\text{wahr, falsch}\}$$

Können wir für jede abgeschlossene Teilmenge $Y \overset{\circledast}{\subset} X$ aus der Gültigkeit von P für alle echten abgeschlossenen Teilmengen von Y schon auf die Gültigkeit von P für Y schließen, so folgt die Gültigkeit von P für alle abgeschlossenen Teilmengen von X.

Definition 2.5.15. Die **Krull-Dimension** $\operatorname{kdim}(X)$ eines topologischen Raums X ist das Supremum aller Längen l von echt aufsteigenden Ketten

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_l \subset X$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Mögliche Werte sind also natürliche Zahlen, ∞ und $-\infty$. Unsere Notation $\operatorname{kdim}(X)$ ist unüblich, meist schreibt man stattdessen schlicht $\dim(X)$. Etwas allgemeiner erklären wir für jede irreduzible Teilmenge $Y \subset X$ die **relative Krulldimension** $\operatorname{kdim}(Y \subset X)$ **von** Y **in** X als das Supremum aller Längen l von echt aufsteigenden Ketten

$$Y \subset X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_l \subset X$$

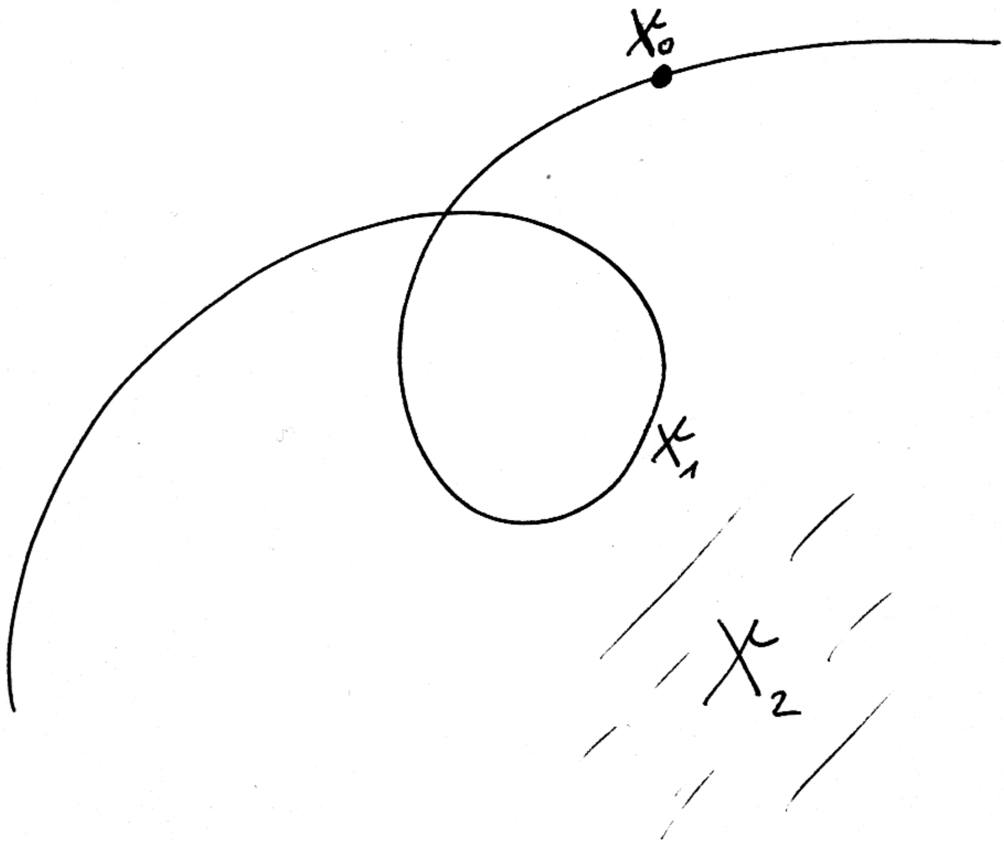
von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Im Spezialfall einer einpunktigen Menge $Y = \{x\}$ kürzen wir $\operatorname{kdim}(\{x\} \subset X) =: \operatorname{kdim}_x X$ ab und sprechen von der **lokalen Krulldimension von** X **bei** x.

2.5.16 (**Diskussion der Notation**). Sicher ist es fragwürdig, das Inklusionssymbol als Trenner in einer Notation zu mißbrauchen. Mir schien aber die Notation $\operatorname{kdim}(Y \subset X)$ so viel suggestiver als etwa $\operatorname{kdim}(Y, X)$, daß ich meine Bedenken hintangestellt habe.

Beispiel 2.5.17. Wir haben $\operatorname{kdim}(\emptyset) = -\infty$ und $\operatorname{kdim}(X) = 0$ für jeden nichtleeren diskreten Raum X. Für einen unendlichen Körper k mit seiner Zariskitopologie gilt sicher $\operatorname{kdim}(k) = 1$. Offensichtlich gilt auch stets

$$\operatorname{kdim}(X) = \sup_{\substack{Y \overset{\circledast}{\subset} X \\ \text{irreduzibel}}} \operatorname{kdim}(Y)$$

Hier ist zu verstehen, daß das Supremum wie angedeutet über alle abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen Y von X gebildet wird.



Die Krull-Dimension der Ebene ist Zwei, eine Kette maximaler Länge von irreduziblen Teilmengen besteht wie angedeutet aus einem Punkt, einer irreduziblen Kurve durch diesen Punkt, und der ganzen Ebene.

Vorschau 2.5.18. Im weiteren Verlauf der Vorlesung soll gezeigt werden, daß gegeben $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen die Krull-Dimension in Bezug auf die Zariski-Topologie einen vernünftigen Dimensionsbegriff für affine Varietäten liefert. Schon allein um in 4.4.4 zu zeigen, daß die Krull-Dimension von k^n eben n ist, müssen wir jedoch tiefer in die kommutative Algebra einsteigen. Offensichtlich ist nur die Abschätzung $\operatorname{kdim}(k^n) \geq n$, wie eine beliebige Folge aus jeweils ineinander enthaltenen affinen Teilräumen wachsender Dimension Punkt, Fläche, ..., Hyperfläche, k^n zeigen wird, sobald wir im nächsten Abschnitt 2.6.2 gezeigt haben werden, daß alle k^l irreduzibel sind. Ein weiteres wesentliches Ziel ist der Nachweis der Formel

$$\operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim}(Y \subset X) = \operatorname{kdim} X$$

für eine beliebige irreduzible affine Varietät X mit einer irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge $Y \subsetneq$. Offensichtlich ist nur die Ungleichung $\leq$. Die andere Ungleichung zeigen wir in 4.6.10.

Übungen

Übung 2.5.19. Ein topologischer Raum ist noethersch genau dann, wenn es in jedem nichtleeren System von abgeschlossenen Teilmengen unseres Raums ein bezüglich Inklusion minimales Element gibt.

Ergänzende Übung 2.5.20. Ein topologischer Raum ist noethersch genau dann, wenn jede seiner offenen Teilmengen kompakt ist.

Übung 2.5.21. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß die irreduziblen algebraischen Teilmengen von k genau die einpunktigen Teilmengen sowie ganz k sind. Man zeige, daß die irreduziblen algebraischen Teilmengen von k^2 genau die einpunktigen Teilmengen, die Nullstellenmengen einzelner irreduzibler Polynome, sowie ganz k^2 sind. Hinweis: 1.1.18 listet alle algebraischen Teilmengen. [LA1] 6.4.4 besagt, daß jedes nichtkonstante Polynom in zwei Veränderlichen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper unendlich viele Nullstellen hat.

Übung 2.5.22. Das Bild eines irreduziblen Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets irreduzibel.

Übung 2.5.23. Für einen topologischen Raum X sind gleichbedeutend: (1) X ist irreduzibel; (2) X ist nicht leer und je zwei nichtleere offene Teilmengen von X haben nichtleeren Schnitt; und (3) X ist nicht leer und jede offene nichtleere Teilmenge von X ist dicht in X.

Übung 2.5.24. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß k die Krulldimension Eins hat und k^2 die Krulldimension Zwei. Hinweis: Die irreduziblen algebraischen Teilmengen wurden in diesen Fällen in 2.5.21 bestimmt.

2.6 Irreduzible algebraische Mengen und Primideale

Satz 2.6.1 (Reguläre Funktionen auf irreduziblen Mengen). $(k = \bar{k})$. *Eine affine k-Varietät X ist irreduzibel genau dann, wenn ihr Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ein Integritätsbereich ist.*

Ergänzung 2.6.2. Allgemeiner zeigt derselbe Beweis, daß gegeben ein beliebiger Körper k eine Teilmenge $X \subset k^n$ irreduzibel ist für die Zariski-Topologie genau dann, wenn der Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ auf unserer Menge ein Integritätsbereich ist. Ist k ein unendlicher Körper, so ist insbesondere k^n irreduzibel in der Zariski-Topologie, denn ein Polynomring über einem Körper ist stets ein Integritätsbereich.

Beweis. Ist $\mathcal{O}(X)$ kein Integritätsbereich, so gilt entweder $\mathcal{O}(X) = 0$ und damit ist $X = \emptyset$ nicht irreduzibel, oder es gibt in $\mathcal{O}(X)$ von Null verschiedene Elemente a, b mit $ab = 0$. Dann sind jedoch $\mathcal{Z}(a)$ und $\mathcal{Z}(b)$ echte abgeschlossene Teilmengen von X mit $\mathcal{Z}(a) \cup \mathcal{Z}(b) = X$ und X ist wieder nicht irreduzibel. Ist umgekehrt X nicht irreduzibel, so ist entweder X leer und $\mathcal{O}(X) = 0$ ist kein Integritätsbereich, oder es gibt Teilmengen $I, J \subset \mathcal{O}(X)$ mit $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = X$ aber $\mathcal{Z}(I) \neq X \neq \mathcal{Z}(J)$. Dann gibt es auch Elemente $a \in I$ und $b \in J$ mit $\mathcal{Z}(a) \neq X \neq \mathcal{Z}(b)$, und für diese gilt erst recht $\mathcal{Z}(a) \cup \mathcal{Z}(b) = X$. Damit gilt insbesondere $a \neq 0 \neq b$ aber $ab = 0$, und $\mathcal{O}(X)$ ist wieder kein Integritätsbereich. □

Beispiel 2.6.3 (**Irreduzibilität der Determinante**). Wir zeigen, daß die Determinante $\det \in k[X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ für alle $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom ist. Ihre Nullstellenmenge ist sicher irreduzibel als Bild von $\mathrm{Mat}(n; k) \times \mathrm{Mat}(n; k) \to \mathrm{Mat}(n; k)$ unter der polynomialen Abbildung $(A, B) \mapsto A \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0) B$. Hätten wir $\det = fg$ mit nichtkonstanten f und g, so müßten demnach f und g dieselbe Nullstellenmenge haben wie $\det$. Wenn wir also einen Punkt D finden mit $\det D = 0$, an dem die partielle Ableitung nach mindestens einer unserer Variablen X_{ij} nicht verschwindet, so sind wir fertig. Das aber ist nun nicht mehr schwierig.

Definition 2.6.4. Ein Ideal I eines Krings R heißt ein **Primideal** genau dann, wenn gilt $I \neq R$ und $a, b \notin I \Rightarrow ab \notin I$. Die Menge aller Primideale eines Krings R heißt das **Spektrum** oder auch **Primspektrum von** R und man notiert diese Menge

$$\operatorname{Spec} R := \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ ist ein Primideal von } R\}$$

2.6.5. Genau dann ist ein Ideal in einem Kring ein Primideal, wenn der Quotientenring nach besagtem Ideal ein Integritätsbereich ist. Insbesondere ist jedes maximale Ideal in einem Kring ein Primideal, denn der Quotient nach einem maximalen Ideal ist nach 1.10.6 stets ein Körper und damit insbesondere auch ein Integritätsbereich.

Vorschau 2.6.6. Man kann den Begriff eines Primideals auf verschiedene Arten auf den Fall nicht notwendig kommutativer Ringe verallgemeinern. Diejenigen Ideale, die die Bedingung der obigen Definition wortwörtlich erfüllen, heißen im nichtkommutativen Kontext **vollprime Ideale**. Unter einem **Primideal** versteht man im nichtkommutativen Kontext ein vom ganzen Ring verschiedenes Ideal P mit der Eigenschaft, daß für beliebige Ideale $I, J \subset R$ aus $IJ \subset P$ folgt $I \subset P$ oder $J \subset P$. Hierbei sind unter Idealen immer beidseitige Ideale zu verstehen.

Beispiele 2.6.7 (**Primideale im Ring der ganzen Zahlen**). Die Primideale im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sind genau das Nullideal und die von Primzahlen erzeugten Hauptideale. Allgemein ist ein Element eines Krings ein **Primelement** im Sinne von [AL] 2.4.15 genau dann, wenn unser Element nicht Null ist und das von besagtem Element erzeugte Hauptideal ein Primideal ist.

Satz 2.6.8 (Primideale und irreduzible Mengen, geometrischer Fall). *Gegeben eine affine Varietät X liefert das Bilden des Verschwindungsideals eine Bijektion zwischen der Menge aller irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X und der Menge aller Primideale von $\mathcal{O}(X)$, in Formeln*

$$\begin{array}{ccc} \{Y \overset{\subset}{\mathcal{A}} X \mid Y \textit{ irreduzibel}\} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \\ Y & \mapsto & \mathcal{I}(Y) \end{array}$$

2.6.9. Natürlich sind alle einpunktigen Teilmengen von X irreduzibel. Sie entsprechen nach 2.4.6 unter unserer Bijektion genau den maximalen Idealen von $\mathcal{O}(X)$. Man mag sich im Licht des Satzes also $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$ vorstellen als die Menge X erweitert um gewisse zusätzliche Punkte, genauer um jeweils einen zusätzlichen Punkt für jede irreduzible Teilmenge, die nicht bereits selbst nur aus einem Punkt besteht.

Beweis. Nach 2.4.6 liefern das Bilden des Verschwindungsideals $\mathcal{I}$ und das Bilden der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den abgeschlossenen Teilmengen von X und den Radikalidealen von $\mathcal{O}(X)$, und nach dem noetherschen Isomorphiesatz liefert für alle $Y \subset X$ die Einschränkung von Funktionen einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$. Nach 2.6.5 und 2.6.1 entsprechen also unter unseren Bijektionen die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen genau den primen Radikalidealen alias den Primidealen. □

2.6.10 (**Urbilder von Primidealen sind Primideale**). Ist $f : R \to S$ ein Kringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subset S$ ein Primideal, so ist auch $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subset R$ ein Primideal.

In der Tat haben wir eine Einbettung $R/f^{-1}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow S/\mathfrak{p}$ und jeder Teilring eines Integritätsbereichs ist selbst ein Integritätsbereich. Jeder Kringhomomorphismus induziert also auf den Spektren der beteiligten Kringe eine Abbildung in der Gegenrichtung

$$\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$$

Vorschau 2.6.11. Für Homomorphismen beliebiger Kringe $A \to B$ induziert die zugehörige Abbildung $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ im allgemeinen keine Abbildung $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ mehr, und man kann auch nicht so einfach jedem Element $a \in A$ eine Abbildung von $\operatorname{Max} A$ oder $\operatorname{Spec} A$ in irgendein festes k zuordnen. Mit etwas mehr technischem Aufwand gelingt es aber dennoch, jedem Kring A ein unser $\operatorname{Max} A$ verallgemeinerndes geometrisches Objekt $\operatorname{Spec} A$ zuzuordnen, das „Spektrum von A“ in der Kategorie der „Schemata“.

2.6.12 (**Primideale über einem Schnitt von Idealen**). Aus 2.6.24 wissen wir bereits: Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ eines Krings R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$, ja sogar schwächer $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s$, gilt notwendig $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i$ für mindestens ein i. Im geometrischen Fall besagt das: Liegt eine irreduzible algebraische Menge in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossenen Mengen, so liegt sie bereits in einer der vereinigten Mengen.

Proposition 2.6.13 (Ideale in einer Vereinigung von Primidealen). *Gegeben Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eines Krings R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ folgt aus der Inklusion $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_s$ bereits $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_j$ für mindestens ein j.*

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, daß für alle j gilt $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_j$. Dann finden wir jeweils ein $g_j \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{p}_j$. Im geometrischen Fall ist das eine Funktion $g_j \in \mathfrak{a}$, die auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ nicht identisch verschwindet. Es gilt, ein Element $g \in \mathfrak{a} \backslash (\mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_s)$ zu konstruieren. Im geometrischen Fall ist das eine reguläre Funktion $g \in \mathfrak{a}$, die auf keinem der $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ identisch verschwindet. Sicher dürfen wir dazu annehmen, daß es zwischen den $\mathfrak{p}_j$ keine Inklusionsrelationen gibt. Im geometrischen Fall bedeutet das, daß es zwischen den $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$ keine Inklusionsrelationen gibt. Dann existieren für $i \neq j$ stets Elemente $f_{ij} \in \mathfrak{p}_i \backslash \mathfrak{p}_j$. Im geometrischen Fall sind das Funktionen, die auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_i)$ verschwinden, aber nicht auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$. Das Produkt $g_j \prod_{i \neq j} f_{ij}$ gehört dann zu $\mathfrak{a}$ und zu allen $\mathfrak{p}_i$ mit $i \neq j$, gehört aber nicht zu $\mathfrak{p}_j$. Im geometrischen Fall ist es eine Funktion aus $\mathfrak{a}$, die auf allen $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_i)$ mit $i \neq j$ identisch verschwindet, aber nicht auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}_j)$. Die Summe dieser Produkte ist dann unser gesuchtes g. □

Definition 2.6.14. Die **Krull-Dimension** $\operatorname{kdim}(R)$ eines Krings R ist definiert als das Supremum aller Längen von echt aufsteigenden Ketten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l \subset R$$

vom Primidealen von R. Wir haben also $\operatorname{kdim}(R) \in \mathbb{N} \sqcup \{\pm\infty\}$.

Vorschau 2.6.15. Es gibt noethersche Kringe von unendlicher Krulldimension. Es gibt auch kommutative noethersche Integritätsbereiche endlicher Krulldimension, in denen sich nicht jede Primidealkette zu einer Primidealkette maximaler Länge verfeinern läßt. Für von Null verschiedene Kringe, die von endlichem Typ sind über einem Körper, werden wir jedoch im folgenden zeigen, daß die Krulldimension endlich ist, und daß sich im nullteilerfreien Fall jede Primidealkette zu einer Primidealkette maximaler Länge verfeinern läßt.

Beispiel 2.6.16. Wir haben $\operatorname{kdim}(0) = -\infty$ und $\operatorname{kdim}(k) = 0$ für jeden Körper k und $\operatorname{kdim}(\mathbb{Z}) = 1$ und $\operatorname{kdim}(k[T]) = 1$ für jeden Körper k.

2.6.17 (**Krulldimension von Kringen und Varietäten**). $(k = \bar{k})$. Ist X eine affine algebraische Varietät, so entsprechen nach 2.6.8 die abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X eineindeutig den Primidealen von $\mathcal{O}(X)$. Die Krull-Dimension des topologischen Raums X nach 2.5.15 stimmt folglich überein mit der Krull-Dimension des Krings $\mathcal{O}(X)$ im Sinne der vorhergehenden Definition 2.6.14, in Formeln

$$\operatorname{kdim}(X) = \operatorname{kdim} \mathcal{O}(X)$$

Um jedoch mit der Krull-Dimension arbeiten zu können, ja allein um zu zeigen, daß für $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen der k^n die Krull-Dimension n hat, müssen wir tiefer in die kommutative Algebra einsteigen: Bis hierher haben wir nur gezeigt, daß gilt $\operatorname{kdim}(k^n) = \operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n]$, aber jetzt müssen wir die rechte Seite bestimmen. Das gelingt in 4.4.3. Zunächst aber bestimmen wir in 3.5.17 die noetherschen Kringe der Krull-Dimension Null und beginnen im folgenden Abschnitt mit den Vorbereitungen.

Vorschau 2.6.18. In 4.5.14 zeigen wir, daß in gewissen Situationen die a priori anschaulichere Krull-Dimension mit dem leichter zu berechnenden „Transzendenzgrad des Körpers der rationalen Funktionen“ übereinstimmt.

Übungen

Übung 2.6.19 (**Irreduzibilität der Gruppe** SL_n). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß $\mathrm{SL}(n; k)$ stets irreduzibel ist. Hinweis: Ähnlich wie in [LA1] 4.2.10 erkennt man, daß es für jedes n ein N gibt derart, daß sich jede $(n \times n)$-Matrix der Determinante Eins darstellen läßt als Produkt von N Faktoren, die jeweils Diagonalmatrizen der Determinante Eins oder Elementarmatrizen der Determinante Eins sind. Man folgere, daß auch $1 - \det$ für $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom ist. Hinweis: 2.6.3.

Übung 2.6.20 (**Irreduzibilität von Produkten**). Seien k ein Körper und $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ irreduzibel für die Zariski-Topologie. Man zeige, daß dann auch $X \times Y \subset k^{n+m}$ irreduzibel ist für die Zariski-Topologie. Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall, daß Y nur aus einem Punkt besteht.

Ergänzung 2.6.21 (**Tensorprodukt von Integritätsbereichen**). Wir zeigen, daß das Tensorprodukt von zwei nullteilerfreien Kringalgebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ stets wieder nullteilerfrei ist. Ist eine unserer Kringalgebren Null, so ist das eh klar. Es reicht also, wenn wir Integritätsbereiche betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir uns auch auf den Fall endlich erzeugter Kringalgebren zurückziehen. Dann sind unsere Kringalgebren aber nach 2.2.4 isomorph zu Algebren polynomialer Funktionen auf Teilmengen gewisser k^n. Sind unsere Kringalgebren Integritätsbereiche, so sind besagte Teilmengen irreduzibel nach 2.6.1, damit ist ihr Produkt irreduzibel nach 2.6.20, dann bilden die polynomialen Funktionen auf dem Produkt einen Integritätsbereich nach 2.6.1, und nach 2.1.17 ist dieser Integritätsbereich gerade das Tensorprodukt unserer ursprünglichen Integritätsbereiche. Die $\mathbb{R}$-Kringalgebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist nicht nullteilerfrei, für Kringalgebren über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper gilt die Aussage also im allgemeinen nicht.

Übung 2.6.22 (**Filtrierung durch Quotienten nach Primidealen**). Jeder noethersche Modul über einem Kring besitzt eine endliche Filtrierung durch Untermoduln derart, daß alle Subquotienten isomorph sind zu Quotienten unseres Krings nach Primidealen. Hinweis: Man zeige zunächst, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Kring noethersch annehmen kann. Weiter wähle man mit 1.7.13 einen maximalen Untermodul, der eine Filtrierung der beschriebenen Art besitzt. Dann zeige man mit 1.7.13, daß im Fall eines von Null verschiedenen Moduls das System der Annullatoren aller seiner von Null verschiedenen Elemente maximale Elemente besitzt, und daß diese maximalen Elemente Primideale sind. Schließlich zeige man, daß unser maximaler Untermodul bereits der ganze Modul gewesen sein muß.

Übung 2.6.23. Ein Primideal eines Krings muß alle nilpotenten Elemente des besagten Krings enthalten.

Übung 2.6.24. Ein echtes Ideal P in einem Kring ist genau dann ein Primideal, wenn für beliebige Ideale $I, J \subset R$ aus $IJ \subset P$ folgt $I \subset P$ oder $J \subset P$.

Übung 2.6.25 (**Urbilder von Primidealen im geometrischen Fall**). Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten und $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ der zugehörige Komorphismus, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max} \mathcal{O}(X) & \subset & \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \\ \varphi \downarrow & & & & \downarrow (\varphi^\sharp)^{-1} \\ Y & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max} \mathcal{O}(Y) & \subset & \operatorname{Spec} \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die Vertikale rechts jedem Primideal sein Urbild unter

$\varphi^\sharp$ zuordnet. Hinweis: 2.4.14. Man zeige allgemeiner, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{Z \underset{\neq}{\subset} X \mid Z \text{ irreduzibel } \} & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \\ \downarrow & & \downarrow (\varphi^\sharp)^{-1} \\ \{W \underset{\neq}{\subset} Y \mid W \text{ irreduzibel } \} & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Spec} \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

kommutiert mit den durch 2.6.8 gegebenen Horizontalen und der Abbildung $Z \mapsto \overline{\varphi(Z)}$ als linker Vertikale.

Übung 2.6.26. Man zeige: Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ eines Krings R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$ folgt bereits $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für mindestens ein i.

Übung 2.6.27. Man zeige: Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ und Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eines Krings R mit $\mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ für alle i, j gibt es stets $f \in R$ mit $f \in \mathfrak{a}_i \ \forall i$ aber $f \notin \mathfrak{p}_j \ \forall j$. Hinweis: Man verwende 2.6.13 und 2.6.12.

Übung 2.6.28. Man zeige für jeden Körper k die Formeln $\operatorname{kdim}(k \times k) = 0$ und $\operatorname{kdim}(k[T]/\langle T^2 \rangle) = 0$.

Übung 2.6.29. Gegeben ein surjektiver Kringhomomorphismus $A \twoheadrightarrow B$ zeige man $\operatorname{kdim}(A) \geq \operatorname{kdim}(B)$.

3 Primideale und Lokalisierung

3.1 Lokalisierung von Kringen

3.1.1. Gegeben ein Monoid $(M, \circ)$ und eine Teilmenge $T \subset M$ notieren wir $|T\rangle = |T, \circ\rangle = \langle T; \mathrm{Mon}\rangle$ wie in [AL] 3.5.1 das von T in M erzeugte Untermonoid.

3.1.2. Gegeben eine Teilmenge S eines Rings R bezeichnen wir mit $|S\rangle = |S, \cdot\rangle$ ihr Monoid-Erzeugnis bezüglich der Multiplikation, d.h. die Menge aller endlichen Produkte von Elementen von S, einschließlich der 1 als dem „leeren Produkt“.

Ergänzung 3.1.3. Man beachte, daß das von S erzeugte multiplikative Monoid $|S\rangle$ etwas sehr anderes ist als das von S erzeugte Ideal $\langle S\rangle$.

3.1.4. Eine Teilmenge T eines Rings R heißt **multiplikativ abgeschlossen** genau dann, wenn die 1 zu T gehört und wenn gilt $s, t \in T \Rightarrow st \in T$. Unser $|S\rangle$ ist in diesem Sinne die kleinste multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, die S umfaßt. Die meisten Quellen gehen bei der Definition der Lokalisierung gleich von einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge aus, aber das schien mir für das folgende ungeschickt.

Definition 3.1.5. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ konstruieren wir einen neuen Kring

$$S^{-1}R$$

Etwas vage gesprochen soll er der Kring der „Brüche mit Elementen von R als Zählern und Produkten von Elementen von S als Nennern“ werden. Üblicherweise heißt er die **Lokalisierung von R nach S** aus geometrischen Gründen, die in 3.1.9 erläutert werden. Die Konstruktion geht wie folgt: Wir betrachten die Menge $R \times |S\rangle$ und definieren darauf eine Relation $\sim$ durch die Vorschrift

$$(a, s) \sim (b, t) \text{ genau dann, wenn es } r \in |S\rangle \text{ gibt mit } atr = bsr.$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $S^{-1}R$ und die Äquivalenzklasse von (a, s) mit $\frac{a}{s}$ oder a/s oder as^{-1}. Dann definieren wir auf $S^{-1}R$ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch die Regeln

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{und} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

und überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Verknüpfungen wohldefiniert sind und $S^{-1}R$ zu einem Kring machen.

Beispiel 3.1.6. Ist unser Kring R ein Integritätsbereich und S die Menge aller seiner von Null verschiedenen Elemente, so erhalten wir genau unseren Quotientenkörper $S^{-1}R = \operatorname{Quot} R$ aus [LA1] 6.6.1.

Satz 3.1.7 (**Universelle Eigenschaft der Lokalisierung**). *Sei R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge.*

1. *Die Abbildung $\operatorname{loc} : R \to S^{-1}R$, $r \mapsto r/1$ ist ein Ringhomomorphismus, unter dem jedes Element von S auf eine Einheit von $S^{-1}R$ abgebildet wird;*

2. *Ist $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus, unter dem jedes Element von S auf eine Einheit abgebildet wird, in Formeln $\varphi(S) \subset A^\times$, so faktorisiert φ eindeutig über $S^{-1}R$, es gibt also in Formeln genau einen Ringhomomorphismus $\tilde{\varphi} : S^{-1}R \to A$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \operatorname{loc}$.*

Beweis. Das Inverse von $s/1$ in $S^{-1}R$ ist $1/s$ und der Rest der ersten Behauptung ist klar. Im zweiten Teil können und müssen wir $\tilde{\varphi}$ definieren durch $\tilde{\varphi}(r/s) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$, wie der Leser selbst prüfen mag. □

3.1.8 (**Spezialfälle beim Lokalisieren**). Sei R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Einige Spezialfälle verdienen beim Lokalisieren besondere Beachtung. Falls S keine Nullteiler enthält, so ist die Abbildung $\operatorname{loc} : R \to S^{-1}R$ injektiv. Ich erinnere hier an unsere Konvention [LA1] 6.2.10, nach der die Null in jedem Ring ein Nullteiler ist. Ist R ein Integritätsbereich und $0 \notin S$, so ist auch $S^{-1}R$ ein Integritätsbereich und die kanonische Einbettung $S^{-1}R \hookrightarrow \operatorname{Quot} R$ identifiziert unsere Lokalisierung mit dem Teilring des Quotientenkörpers aller Elemente, die sich als Bruch mit Nenner aus $|S\rangle$ darstellen lassen.

3.1.9 (**Ursprung der Terminologie**). Im Fall eines unendlichen Körpers k hatten wir bereits in [LA1] 6.6.6 besprochen, wie man die Elemente $f \in k(T)$ als fast überall definierte k-wertige Funktionen auf k auffassen kann. Ist nun $a \in k$ ein Punkt und S die Menge aller Polynome, die bei a nicht verschwinden, so können wir $S^{-1}k[T]$ auffassen als die Menge aller rationalen Funktionen, die bei a keine Polstelle haben. Unsere Konstruktion macht also aus dem Ring $k[T]$ von „global auf ganz k definierten Funktionen“ den Ring $S^{-1}k[T]$ von Funktionen, die nur „lokal um a definiert sind und die an anderen Stellen Pole haben dürfen“. Ähnliches gilt bei mehreren Veränderlichen. Diese Anschauung mag erklären, warum auch ganz allgemein die Ringe $S^{-1}R$ als „Lokalisierungen von R“ bezeichnet werden.

3.1.10 (**Lokalisieren nach einem einzigen Element**). Besteht $S = \{f\}$ nur aus einem einzigen Element, so benutzt man für die Lokalisierung nach S auch die Notationen

$$S^{-1}R =: f^{-1}R =: R_f =: R[f^{-1}]$$

Ist R ein Kring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so benutzt man für die Lokalisierung von R nach dem Komplement $S = R \backslash \mathfrak{p}$ unseres Primideals $\mathfrak{p}$ auch die Notation

$$S^{-1}R =: R_{\mathfrak{p}}$$

und nennt $R_{\mathfrak{p}}$ die **Lokalisierung von R an der Stelle $\mathfrak{p}$**. Diese beiden Notationen passen schlecht zusammen: Bei der Ersten schreibt man als unteren Index, was zu Invertieren ist, bei der Zweiten, was *nicht* zu invertieren ist. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sprachlich unterscheide ich Lokalisierung *an* einem Primideal oder auch *bei* einem Primideal von der Lokalisierung *nach* irgendwelchen Elementen. Die Notation $R[f^{-1}]$ dahingegen ist nicht ganz eindeutig: Es könnte auch gemeint sein, daß wir allgemeiner einen Kringhomomorphismus $R \to A$ gegeben haben und in A ein invertierbares Element f und in A den vom Bild von R und f^{-1} erzeugten Teilring meinen.

3.1.11. Man beachte, daß $\mathbb{Z}_p$ meist keine Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ meint, sondern vielmehr eine Vervollständigung wie in 5.7.9.

3.1.12. Gegeben X ein topologischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und k ein Kring definieren wir die k-Kringalgebra $\mathrm{Ens}(X, k)_x$ der **Keime k-wertiger Funktionen bei x** als die Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) mit $x \in U \circledcirc X$ und $f : U \to k$ unter der Äquivalenzrelation

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \Leftrightarrow \quad \exists W \circledcirc U \cap U' \text{ mit } x \in W \text{ und } f|_W = f'|_W.$$

Beispiel 3.1.13 (**Elemente einer Lokalisierung als Funktionskeime**). Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, X eine affine Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Im Ring der Funktionskeime betrachten wir den Teilring

$$\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathrm{Ens}(X, k)_x$$

aller **regulären Funktionskeime** alias aller Funktionskeime mit mindestens einem im Sinne von 2.1.5 regulären Repräsentanten. Der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ am maximalen Ideal $\mathcal{I}(x)$ herrührende Homomorphismus ist dann sogar ein Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)_{\mathcal{I}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$$

In der Tat ist er per definitionem surjektiv, und liefert ein Bruch f/s die Nullfunktion, so muß f bereits auf einer offenen Umgebung U von x verschwinden, die wir von der Gestalt X_t für $t \in \mathcal{O}(X)$ mit $t(x) \neq 0$ annehmen dürfen. Daraus folgt $f/s = tf/ts = 0$ in unserer Lokalisierung.

3.1.14. Seien X ein topologischer Raum, $Y \overset{\subset}{\mathcal{A}} X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge und k ein Kring. So definieren wir die k-Kringalgebra $\operatorname{Ens}(X,k)_Y$ der **Keime k-wertiger Funktionen längs Y** als die Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (U,f) wobei $U \overset{\circ}{\subset} X$ eine offenen Teilmenge ist mit $U \cap Y \neq \emptyset$ und $f : U \to k$ eine Abbildung, unter der Äquivalenzrelation

$$(U,f) \sim (U',f') \quad \Leftrightarrow \quad \exists W \overset{\circ}{\subset} U \cap U' \text{ mit } W \cap Y \neq \emptyset \text{ und } f|_W = f'|_W.$$

Die Irreduzibilität von Y stellt dabei sicher, daß unsere Relation transitiv ist.

Beispiel 3.1.15 (**Lokalisierung und Funktionskeime, Zugabe**). $(k = \bar{k})$. Seien X eine affine Varietät und $Y \overset{\subset}{\mathcal{A}} X$ irreduzibel mit Verschwindungsideal $\mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}_X(Y)$. Im Ring der Funktionskeime längs Y betrachten wir den Teilring

$$\mathcal{O}_{X,Y} \subset \operatorname{Ens}(X,k)_Y$$

aller **regulären Funktionskeime längs Y** alias aller Funktionskeime längs Y mit mindestens einem regulären Repräsentanten, als da heißt, einem Repräsentanten (U,f) mit $f \in \mathcal{O}(U)$. Der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ am Primideal $\mathcal{I}(Y)$ herkommende Homomorphismus ist dann sogar ein Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)_{\mathcal{I}(Y)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,Y}$$

In der Tat ist er per definitionem surjektiv. Liefert andererseits ein Bruch f/s die Nullfunktion, so muß f bereits auf einer offenen Teilmenge $U \overset{\circ}{\subset} X$ verschwinden, die Y trifft, und die wir nach nochmaliger Verkleinerung von der Gestalt X_t für $t \in \mathcal{O}(X) \backslash \mathcal{I}(Y)$ annehmen dürfen. Daraus folgt aber $f/s = tf/ts = 0$ in unserer Lokalisierung.

3.1.16. $(k = \bar{k})$. Gegeben X eine irreduzible affine Varietät vereinbaren wir die Notation

$$\mathcal{M}(X) := \mathcal{O}_{X,X}$$

für Äquivalenzklassen von auf nichtleeren offenen Teilmengen von X erklärten regulären Funktionen und nennen solche Äquivalenzklassen auch **rationale Funktionen auf** X. Der Buchstabe $\mathcal{M}$ soll dabei an den Begriff der „meromorphen" Funktionen erinnern, einem analogen Konzept aus der Funktionentheorie. Üblich ist stattdessen die Notation $k(X)$, die aber leicht als Notation für den Quotientenkörper eines Polynomrings mißverstanden werden kann. In unserer Notation liefern unsere Erkenntnisse 3.1.15 insbesondere einen Isomorphismus

$$\operatorname{Quot} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$$

und damit eine Interpretation der Elemente des Quotientenkörpers als rationale Funktionen. Im allgemeinen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X)_{\mathcal{I}(Y)} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \operatorname{Quot}\mathcal{O}(Y) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{X,Y} \arrow[r, two heads] & \mathcal{M}(Y) \end{tikzcd}$$

mit den eben erklärten Isomorphismen in den Vertikalen, dem Einschränken in der unteren Horizontalen, und der von der Restklassenabbildung induzierten oberen Horizontalen.

3.1.17 (**Lokalisierung erhält die Eigenschaft noethersch**). Jede Lokalisierung eines noetherschen Krings ist wieder noethersch. Sei in der Tat R ein Kring, $S \subset R$ eine Teilmenge und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Wir notieren

$$S^{-1}\mathfrak{a} := \{a/s \mid a \in \mathfrak{a},\ s \in |S\rangle\} \subset S^{-1}R$$

das vom Bild von $\mathfrak{a}$ im lokalisierten Ring $S^{-1}R$ erzeugte Ideal. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ gilt nun offensichtlich $\mathfrak{b} = S^{-1}(\operatorname{loc}^{-1}(\mathfrak{b}))$. Ist nun R noethersch, so ist das **Zählerideal** $\operatorname{loc}^{-1}(\mathfrak{b})$ von $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt, und die Bilder von Erzeugern des Zählerideals erzeugen dann unser Ideal $\mathfrak{b}$ selber.

Satz 3.1.18 (Lokalisierung nach einem Element im geometrischen Fall). $(k = \bar{k})$. *Seien X eine affine Varietät, $f \in \mathcal{O}(X)$ eine polynomiale Funktion auf X und $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ das Komplement der Nullstellenmenge unserer Funktion f. So ist der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung herkommende Homomorphismus ein Isomorphismus*

$$\mathcal{O}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X_f)$$

zwischen der Lokalisierung des Rings der polynomialen Funktionen auf X an f und dem Ring der regulären Funktionen auf X_f.

3.1.19. Die Injektivität in unserem Satz ist schnell gezeigt und mag zusätzliche Anschauung zum Begriff der Lokalisierung geben. Die Surjektivität ist ihrem Wesen nach eine Aussage zum Zusammenhang zwischen lokalen und globalen Eigenschaften von Funktionen und deutlich subtiler als die restlichen Aussagen dieses Abschnitts. Sie wird erst in 6.2.6 benötigt werden.

Beweis. Die Injektivität ist schnell gezeigt: Geht g/f^n nach Null, so verschwindet g auf X_f und folglich ist gf die Nullfunktion auf ganz X, und wir folgern $g/f^n = gf/f^{n+1} = 0$ in $\mathcal{O}(X)_f$. Die Surjektivität kennen wir bereits aus 2.1.12. $\square$

Proposition* 3.1.20 (Lokale Surjektivität von Komorphismen). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten und $x \in X$ ein Punkt mit Bild $\varphi(x) = y$. Induziert unser Morphismus eine Surjektion $\mathcal{O}_{Y,y} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ auf besagten lokalen Ringen, so gibt es reguläre Funktionen $u \in \mathcal{O}(X)$ und $v \in \mathcal{O}(Y)$ mit $u(x) \neq 0$ und $v(y) \neq 0$ und $\varphi(X_u) \subset Y_v$ und der Eigenschaft, daß φ eine Surjektion $\mathcal{O}(Y_v) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X_u)$ induziert.*

Beweis. Seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ gegeben mit $\mathcal{O}(X) = k[f_1, \ldots, f_n]$. Bezeiche $\bar{f}_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ die Bilder der f_i. Es gibt nach Annahme $\bar{h}_i \in \mathcal{O}_{Y,y}$ mit $\bar{h}_i \mapsto \bar{f}_i$. Dann finden wir $s \in \mathcal{O}(Y)$ mit $s(y) \neq 0$ derart, daß alle $\bar{h}_i$ von geeigneten $h_i \in \mathcal{O}(Y_s)$ herkommen. Dann gibt es $t \in \mathcal{O}(X)$ mit $t(x) \neq 0$ und $\varphi(X_t) \subset Y_s$ derart, daß die $h_i \circ \varphi$ auf X_t mit den Restriktionen der f_i übereinstimmen. Nun gibt es $P \in k[T_1, \ldots, T_n]$ mit $t = P(f_1, \ldots, f_n)$ in $\mathcal{O}(X)$. In $\mathcal{O}(X_t)$ folgt $t = r \circ \varphi$ für $r = P(h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{O}(Y_s)$. Mithin induziert die Restriktion eine Surjektion $\mathcal{O}(Y_{rs}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X_t)$. □

Übungen

Übung 3.1.21. Sei R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Genau dann ist $S^{-1}R$ der Nullring, wenn das Monoid $|S\rangle$ die Null von R enthält. Genau dann ist a/s eine Einheit in $S^{-1}R$, wenn es $b \in R$ und $t \in |S\rangle$ gibt mit $ab = t$.

Übung 3.1.22 (**Überflüssiges Lokalisieren**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Genau dann ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus $R \stackrel{\sim}{\to} S^{-1}R$, wenn S aus Einheiten von R besteht, in Formeln $S \subset R^\times$.

Übung 3.1.23 (**Lokalisierung von Invariantenringen**). Sei A ein Kring und G eine endliche Menge von Ringautomorphismen von A. Sei $S \subset A^G$ eine Teilmenge des Invariantenrings. Man zeige, daß die Einbettung $A^G \hookrightarrow A$ einen Isomorphismus

$$S^{-1}(A^G) \stackrel{\sim}{\to} (S^{-1}A)^G$$

zwischen der Lokalisierung des Invariantenrings und dem Invariantenring der Lokalisierung induziert. Hinweis: Die Exakteit der Lokalisierung 3.3.12 mag hier helfen.

Übung 3.1.24 (**Lokalisierung von Invariantenringen, Variante**). Sei A ein noetherscher Kring und G eine Gruppe von Ringautomorphismen von A. Sei $s \in A^G$ ein Element des Invariantenrings. Man zeige, daß die Einbettung $A^G \hookrightarrow A$ einen Isomorphismus

$$s^{-1}(A^G) \stackrel{\sim}{\to} (s^{-1}A)^G$$

zwischen der Lokalisierung des Invariantenrings und dem Invariantenring der Lokalisierung induziert. Hinweis: Die Exakteit der Lokalisierung 3.3.12 mag hier helfen. Weiter beachte man, daß die Kette der Annullatoren der Potenzen s^n von s stagnieren muß.

Übung 3.1.25 (**Wiederholtes Lokalisieren**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Genau dann ist $\mathrm{loc} : R \to S^{-1}R$ ein Isomorphismus, wenn S aus Einheiten von R besteht, in Formeln $S \subset R^\times$. Ist $T \subset R$ eine zweite Teilmenge, so ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$(\mathrm{loc}\, T)^{-1}(S^{-1}R) \xrightarrow{\sim} (S \cup T)^{-1}R$$

Übung 3.1.26 (**Lokalisierung vertauscht mit Restklassenbildung**). Seien R ein Kring und $S, B \subset R$ zwei Teilmengen. Wir betrachten den Restklassenring nach dem von B erzeugten Ideal $R/\langle B\rangle$ und dessen Lokalisierung nach dem Bild von S unter $\mathrm{can} : R \twoheadrightarrow R/\langle B\rangle$, also den Ring $(\mathrm{can}\, S)^{-1}(R/\langle B\rangle)$. Wir betrachten weiter die Lokalisierung $S^{-1}R$ und deren Restklassenring nach dem vom Bild von B darin erzeugten Ideal $(S^{-1}R)/\langle S^{-1}B\rangle$. Man zeige, daß es einen Isomomorphismus

$$(\mathrm{can}\, S)^{-1}(R/\langle B\rangle) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}R)/\langle S^{-1}B\rangle$$

gibt, der mit der kanonischen Abbildung von R in unsere beiden Ringe verträglich ist, und daß dieser Isomomorphismus und seine Umkehrung jeweils die einzigen Ringhomomorphismen zwischen besagten Ringen sind, die verträglich sind mit der kanonischen Abbildung von R in unsere beiden Ringe. Hinweis: Beide Seiten teilen eine universelle Eigenschaft.

Übung 3.1.27 (**Lokalisierung nilpotentfreier Kringe**). Man zeige, daß jede Lokalisierung eines nilpotentfreien Krings wieder nilpotentfrei ist.

Übung 3.1.28. Gegeben ein Kring A und ein Element $f \in A$ zeige man, daß das Einsetzen von f^{-1} für T einen Ringisomorphismus

$$A[T]/\langle fT - 1\rangle \xrightarrow{\sim} A[f^{-1}]$$

induziert. Insbesondere ist nach 3.1.27 für einen nilpotentfreien Kring A das Ideal $\langle fT - 1\rangle$ stets ein Radikalideal. Hinweis: Man konstruiere eine inverse Abbildung mithilfe der universellen Eigenschaft der Lokalisierung.

Ergänzende Übung 3.1.29. Ist k ein Körper und R eine endlichdimensionale k-Kringalgebra und $f \in R$ beliebig, so induziert die kanonische Abbildung in die Lokalisierung einen Isomorphismus $R/(\bigcup_n \ker(f^n\cdot)) \xrightarrow{\sim} R_f$ zwischen dem Quotient nach dem Hauptraum zum Eigenwert Null der Multiplikation mit f und der Lokalisierung nach f.

Übung 3.1.30. Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, X eine affine Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Man zeige, daß die lokale Krulldimension von X bei x übereinstimmt mit der Krulldimension des lokalen Ringes, in Formeln $\mathrm{kdim}_x\, X = \mathrm{kdim}\, \mathcal{O}_{X,x}$.

Übung 3.1.31. $(k = \bar{k})$. Sei X eine irreduzible affine Varietät. Man zeige, daß jede rationale Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ einen größten Repräsentanten $(U_{\max}, f_{\max})$ hat in dem Sinne, daß für jeden anderen Repräsentanten (U_1, f_1) gilt $U_1 \subset U_{\max}$ und $f_1 = f_{\max}|_U$. Diese Menge $U_{\max} \circledcirc X$ notieren wir auch $D(f)$ und nennen sie den **Definitionsbereich von** f. Statt $f_{\max}$ schreiben wir dann auch kurz f.

Übung 3.1.32. Gegeben ein Integritätsbereich A zeige man in $\operatorname{Quot} A$ die Identität

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} A_{\mathfrak{m}}$$

Hinweis: Gegeben $f \in \operatorname{Quot} A \backslash A$ kann das Ideal $I = \{g \in A \mid gf \in A\}$ nie ganz A sein.

Übung 3.1.33. Ist speziell f die Variable $f = t$ in einem Polynomring $R[t]$ über einem Kring R, so schreibt man kurz $R[t][t^{-1}] = R[t, t^{-1}]$ und nennt diesen Ring den **Ring der Laurentpolynome über** R. Man zeige, daß sich jedes Element von $R[t, t^{-1}]$ eindeutig darstellen läßt als eine endliche Linearkombination $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i$ mit Koeffizienten $a_i \in R$, daß also die t^i eine Basis des R-Moduls $R[t, t^{-1}]$ bilden. Man konstruiere des weiteren einen Isomorphismus $R[\![t]\!][t^{-1}] \xrightarrow{\sim} R(\!(t)\!)$ zwischen der Lokalisierung an der Variablen des Rings der formalen Potenzreihen und dem Ring der formalen Laurentreihen aus [LA1] 6.3.39.

Übung 3.1.34 (**Lokalisierung faktorieller Ringe**). Gegeben ein faktorieller Ring R bezeichne

$$\operatorname{irk}(R)$$

die Menge **Irreduziblenklassen**, also der „Äquivalenzklassen irreduzibler Elemente von R bis auf Multiplikation mit Einheiten". Gegeben ein irreduzibles $r \in R$ bezeichne $[r] \in \operatorname{irk}(R)$ seine Klasse. Man zeige: Lokalisiert man einen faktoriellen Ring R nach einer Teilmenge S, die nicht die Null enthält, so ist auch die Lokalisierung $S^{-1}R$ faktoriell und die Einbettung $R \hookrightarrow S^{-1}R$ induziert eine Bijektion

$$\{[r] \in \operatorname{irk}(R) \mid r \text{ teilt kein } s \in S\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{irk}(S^{-1}R)$$

Zum Beispiel ist also $\mathbb{Z}[d^{-1}]$ für $d \neq 0$ faktoriell und seine Primelemente sind bis auf Einheiten genau die Primzahlen, die d nicht teilen.

Übung 3.1.35. Gegeben ein Morphismus $X \to Y$ von affinen Varietäten und ein Punkt $x \in X$ mit $x \mapsto y$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, der mit dem Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ in der offensichtlichen Weise verträglich ist.

3.2 Lokalisierung und Primideale

Proposition 3.2.1 (Primideale in Lokalisierungen). *Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ liefert das Bilden des Zählerideals eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(S^{-1}R) & \stackrel{\sim}{\to} & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \operatorname{loc}^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}$$

zwischen der Menge der Primideale der Lokalisierung und der Menge derjenigen Primideale des ursprünglichen Rings, die die Teilmenge der zu invertierenden Elemente nicht treffen. Die Inverse dieser Bijektion ist die Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto S^{-1}\mathfrak{q}$ mit der Notation $S^{-1}\mathfrak{q} := \{q/s \mid q \in \mathfrak{q},\ s \in |S\rangle\}$.

Beispiel 3.2.2. Ist $R = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X und besteht S aus einer einzigen Funktion f, so besagt diese Proposition nach 2.6.8 anschaulich, daß das Herunterschneiden eine Bijektion liefert zwischen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X_f und abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X, die nicht in $\mathcal{Z}(f)$ enthalten sind.

Beweis. Da alle Elemente aus S bei der Lokalisierung Einheiten werden, landet das Zurückholen $\operatorname{Spec}(S^{-1}R) \to \operatorname{Spec} R$ in der Menge der Primideale von R, die S nicht treffen. Unsere Abbildung ist also sinnvoll definiert. Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ gilt wie bereits erwähnt $\mathfrak{b} = S^{-1}(\operatorname{loc}^{-1}(\mathfrak{b}))$. Das zeigt die Injektivität unserer Abbildung. Wir müssen nur noch zeigen, daß für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset R$, das S nicht trifft, seine Lokalisierung $S^{-1}\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ ein Primideal ist mit Zählerideal $\operatorname{loc}^{-1}(S^{-1}\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$. Um zu sehen, daß $S^{-1}\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ ein Primideal ist, gehen wir aus von $(a/s)(b/t) = (c/r)$ mit $c \in \mathfrak{q}$. Das impliziert die Existenz von $u \in |S\rangle$ mit $urab = ustc$. Nun gilt sicher $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{q} \cap |S\rangle = \emptyset$, folglich impliziert $urab \in \mathfrak{q}$ bereits $a \in \mathfrak{q}$ oder $b \in \mathfrak{q}$. Um schließlich einzusehen, daß $\mathfrak{q}$ das Zählerideal von $S^{-1}\mathfrak{q}$ ist, beachten wir, daß aus $c/s = a/1$ mit $c \in \mathfrak{q}$ folgt $tc = tsa$ für ein $t \in |S\rangle$. Nun gilt sicher $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{q} \cap |S\rangle = \emptyset$, folglich impliziert $tc = tsa$ bereits $a \in \mathfrak{q}$. □

Definition 3.2.3. Die Menge aller nilpotenten Elemente eines Krings alias das Radikal des Nullideals heißt das **Nilradikal** $\sqrt{0}$ unseres Krings.

Korollar 3.2.4 (Schnitt aller Primideale). *Der Schnitt aller Primideale eines Krings ist sein Nilradikal. Der Schnitt aller Primideale eines Krings, die ein gegebenes Ideal umfassen, ist das Radikal des besagten Ideals.*

Bemerkung 3.2.5. Der Beweis dieser Aussage beruht im Fall nicht noether'scher Kringe auf dem Zorn'schen Lemma.

Beweis. Sicher liegt jedes nilpotente Element in jedem Primideal. Ist umgekehrt R unser Ring und $f \in R$ nicht nilpotent, so ist nach 3.1.21 die Lokalisierung $R[f^{-1}]$ nicht der Nullring und besitzt folglich mindestens ein Primideal, ja sogar mindestens ein maximales Ideal. Das Urbild dieses Ideals in R ist dann das gesuchte Primideal, das f nicht enthält. Ist $I \subset R$ ein beliebiges Ideal, so wende man die bereits bewiesene Aussage auf den Quotientenring R/I an. □

3.2.6. Anders als bei „maximalen Idealen“, worunter man ja stets „maximale vom ganzen Ring verschiedene Ideale“ versteht, versteht man unter einem **minimalen Primideal** schlicht ein Primideal, das eben minimal ist in der durch Inklusion geordneten Menge aller Primideale. Ein kommutativer Integritätsbereich hat insbesondere stets genau ein minimales Primideal, nämlich das Nullideal.

3.2.7 (**Existenz minimaler Primideale**). Jedes Primideal eines Krings umfaßt ein minimales Primideal. In der Tat ist ein Schnitt einer Kette von Primidealen offensichtlich auch selbst prim und unsere Behauptung folgt so aus dem Zorn'schen Lemma.

Korollar 3.2.8 (**Minimale Primideale und Nullteiler**).
1. *In einem beliebigen Kring ist die Vereinigung der minimalen Primideale in der Menge der Nullteiler enthalten, besteht also jedes minimale Primideal aus Nullteilern;*
2. *In einem nilpotentfreien Kring ist die Vereinigung der minimalen Primideale genau die Menge der Nullteiler.*

3.2.9. Im geometrischen Fall ist das auch anschaulich klar: Eine reguläre Funktion auf $X \overset{\text{\tiny A}}{\subset} k^n$ für $k = \bar{k}$ gehört zu einem minimalen Primideal genau dann, wenn sie auf einer irreduziblen Komponente von X identisch verschwindet. Dann finden wir aber auch eine reguläre von Null verschiedene Funktion, die auf allen anderen Komponenten verschwindet, und das Produkt dieser beiden Funktionen ist dann eben Null.

Beweis. Lokalisieren wir unseren Kring R an unserem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ zu $R_{\mathfrak{p}}$, so erhalten wir nach 3.2.1 einen Kring mit genau einem Primideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Wäre ein Element f dieses Primideals $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ kein Nullteiler, so könnten wir weiter nach diesem Element lokalisieren und erhielten nicht den Nullring, in Formeln $R_{\mathfrak{p}}[f^{-1}] \neq 0$. Dann aber gäbe es aber in dieser Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}[f^{-1}]$ ein Primideal, im Widerspruch zur Minimalität unseres Primideals $\mathfrak{p}$. Das zeigt Teil 1. Umgekehrt ist nach 3.2.4 der Schnitt aller Primideale das Nilradikal. Nach 3.2.7 kann jedes Primideal zu einem minimalen Primideal verkleinert werden, folglich ist auch der Schnitt aller minimalen Primideale das Nilradikal. Ist unser Kring R nilpotentfrei, so liefert die Diagonale also eine Einbettung von R in ein Produkt von Integritätsbereichen

$$R \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \text{ minimal}} R/\mathfrak{p}$$

Jeder Nullteiler von R muß dabei auf einen Nullteiler des Produkts abgebildet werden und folglich bereits in einem der minimalen Primideale liegen. $\square$

3.2.10. Gegeben ein Kring R betrachten wir die Teilmenge von $R \times \operatorname{Spec} R$ aller Paare $(r, \mathfrak{p})$ mit $r \in \mathfrak{p}$. Das ist eine Inzidenzstruktur im Sinne von 1.1.9 und liefert so Konstruktionen mit analogen Eigenschaften zu unseren Konstruktionen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ aus 1.1.2, die wir hier $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ notieren und im folgenden ausführlicher diskutieren.

Definition 3.2.11. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $I \subset R$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(I)$ die Menge aller Primideale von R, die I umfassen, in Formeln

$$\mathcal{A}(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supset I\}$$

Man zeigt ohne Schwierigkeiten, daß die Mengen $\mathcal{A}(I)$ für $I \subset R$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem Spektrum von R bilden, deshalb auch der Buchstabe $\mathcal{A}$. Sie heißt die **Zariski-Topologie auf** $\operatorname{Spec} R$.

Definition 3.2.12. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(X)$ den Schnitt aller Primideale aus X, in Formeln

$$\mathcal{S}(X) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$$

3.2.13. Diese Konstruktionen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ erfüllen ähnliche Formeln wie die analogen Konstruktionen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ aus 1.1.2 und 1.1.8, was nun genauer ausgeführt werden soll. Sei R ein beliebiger Kring. Offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{J}$ von Teilmengen von R die Identität $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{A}(J) = \mathcal{A}\left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J\right)$ und insbesondere auch

$$I \subset J \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(I) \supset \mathcal{A}(J)$$

Ebenso offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{X}$ von Teilmengen des $\operatorname{Spec} R$ die Identität $\mathcal{S}\left(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(X)$ und insbesondere auch

$$Y \subset X \;\Rightarrow\; \mathcal{S}(Y) \supset \mathcal{S}(X)$$

Des weiteren gilt sicher $J \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}(J))$ für jede Teilmenge $J \subset R$ und $X \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$. Es folgt $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(\mathcal{A}(\mathcal{S}(X)))$ für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$, indem wir einerseits $\mathcal{S}$ auf $X \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ anwenden und andererseits $J \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}(J))$ auf $J = \mathcal{S}(X)$. Ebenso folgt für jede Teilmenge $J \subset R$ die Identität $\mathcal{A}(J) = \mathcal{A}(\mathcal{S}(\mathcal{A}(J)))$. Insbesondere gilt für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ die Identität $X = \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$, die offensichtlich auch umgekehrt abgeschlossene Teilmengen charakterisiert.

3.2.14 (**Abgeschlossene Mengen und Radikalideale, Variante**). Für jede Teilmenge I eines Krings R ist nach 3.2.4 unser $\mathcal{S}(\mathcal{A}(I))$ das Radikal des von I erzeugten Ideals, in Formeln $\mathcal{S}(\mathcal{A}(I)) = \sqrt{\langle I \rangle}$. Umgekehrt ist nach den Definitionen für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ unser $\mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ der Abschluß von X in der Zariski-Topologie, in Formeln $\mathcal{A}(\mathcal{S}(X)) = \bar{X}$. Insbesondere liefern $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ ähnlich wie in 1.10.17 zueinander inverse Bijektionen

$$\mathcal{A} : \left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale} \\ I \subset R \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} \operatorname{Spec} R \end{array} \right\}$$

3.2.15. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $I \subset R$ liefert das Bilden des Urbilds unter der kanonischen Projektion auf den Restklassenring offensichtlich eine Bijektion

$$\operatorname{Spec}(R/\langle I \rangle) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(I)$$

zwischen der Menge aller Primideale des Quotienten $R/\langle I \rangle$ von R nach dem von I erzeugten Ideal und der Menge aller Primideale von R, die I umfassen.

3.2.16. Ist $R = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X, so hatten wir für $I \subset \mathcal{O}(X)$ in 2.4.3 die Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \subset X$ erklärt. Unter der Komposition

$$X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \subset \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$$

ist nun unser $\mathcal{Z}(I)$ genau das Urbild in X von $\mathcal{A}(I)$, und die Zariski-Topologie auf X wird induziert von unserer Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$.

Proposition 3.2.17 (**Primideale und irreduzible Mengen, Variante**). *Die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen des Spektrums eines Krings entsprechen seinen Primidealen unter der Abbildung, die jedem Primideal die Menge aller es umfassenden Primideale zuordnet. In Formeln ausgedrückt liefert also für jeden Kring R die Abbildung $\mathfrak{p} \mapsto \mathcal{A}(\mathfrak{p})$ eine Bijektion*

$$\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\sim} \{ Y \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} \operatorname{Spec} R \mid Y \textit{ irreduzibel} \}$$

3.2.18. Man kann $\mathcal{A}(\mathfrak{p})$ auch als den Abschluß des Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Zariski-Topologie interpretieren, so daß also unsere Abbildung jedem Punkt seinen Abschluß zuordnet. Gegeben eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} \operatorname{Spec} R$ heißt der Punkt $x \in Y$ mit $\bar{x} = Y$ der **generische Punkt von** Y.

Beweis. Daß der Abschluß eines Punktes irreduzibel sein muß, gilt sogar in einem beliebigen topologischen Raum. Unsere Abbildungsvorschrift ist mithin sinnvoll. Gegeben $Y \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} \operatorname{Spec} R$ gibt es per definitionem eine Teilmenge $I \subset R$ mit $Y = \mathcal{A}(I)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, I sei ein Radikalideal, denn alle Primideale, die I umfassen, umfassen auch das Radikal des von I erzeugten Ideals. Ich zeige nun, daß für Y irreduzibel unser I ein Primideal sein muß. Ist in der Tat I kein Primideal, so gibt es $a, b \notin I$ mit $ab \in I$. Nach 3.2.4 gibt es ein Primideal über I, das a nicht enthält, und ebenso ein Primideal über I, das b nicht enthält. Folglich haben wir $\mathcal{A}(a) \not\supset \mathcal{A}(I)$ und $\mathcal{A}(b) \not\supset \mathcal{A}(I)$. Jedes Primideal, das ab enthält, muß jedoch a oder b enthalten, folglich gilt $\mathcal{A}(a) \cup \mathcal{A}(b) \supset \mathcal{A}(I)$ und $\mathcal{A}(I)$ war nicht irreduzibel. Ist also Y irreduzibel und I ein Radikalideal mit $Y = \mathcal{A}(I)$, so ist I prim. Bezeichnen wir mit x den durch I gegebenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$, so gilt $\bar{x} = \mathcal{A}(I) = Y$. Das zeigt die Surjektivität unserer Abbildung. Zur Injektivität bemerken wir, daß $y \in \bar{x}$ gleichbedeutend ist zur Inklusion $\mathfrak{p}_y \supset \mathfrak{p}_x$ der zugehörigen Primideale. $\square$

3.2.19. Ich will kurz auf die Beziehung dieses Satzes zu seinem geometrischen Analogon 2.6.8 eingehen. Ist ein Kring R ringendlich über einem Körper, so können wir obige Bijektionen ergänzen zu einer Sequenz von Bijektionen

$$\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\sim} \{Y \subset\!\!\!\!\!\triangle \operatorname{Spec} R \mid Y \text{ irreduzibel } \} \xrightarrow{\sim} \{Z \subset\!\!\!\!\!\triangle \operatorname{Max} R \mid Z \text{ irreduzibel } \}$$

wo $\operatorname{Max} R$ die von $\operatorname{Spec} R$ induzierte Topologie erhält und die rechte Abbildung schlicht das Schneiden mit $\operatorname{Max} R$ meint. Ist sogar k ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine affine k-Varietät und beachten wir unsere Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$, so liefert diese Verknüpfung die Inverse der in 2.6.8 diskutierten Bijektion

$$\{Y \subset\!\!\!\!\!\triangle X \mid Y \text{ irreduzibel}\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$$

Korollar 3.2.20 (Minimale Primideale in noether'schen Kringen). *In einem noetherschen Kring gibt es nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Gegeben ein noetherscher Kring ist sein Spektrum ein noetherscher topologischer Raum und ist nach 2.5.10 folglich die Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Komponenten. Die nach 3.2.18 zu diesen Komponenten gehörenden Primideale sind dann die fraglichen minimalen Primideale. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 3.2.21. Für jeden Kringhomomorphismus $R \to S$ ist die induzierte Abbildung $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ stetig für die Zariski-Topologie. Ist unser Kringhomomorphismus injektiv, so hat die induzierte Abbildung dichtes Bild.

Übung 3.2.22. Hinweis: 3.2.20 und 3.2.4. Man zeige: Gegeben ein noetherscher Kring mit einem Ideal I besitzt die Menge aller Primideale von R über I endlich viele minimale Elemente $P_1, \ldots, P_n$, und deren Schnitt ist das Radikal von besagtem Ideal, in Formeln

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_n$$

Übung 3.2.23. Man zeige: Sind in einem Kring endlich viele Primideale gegeben, deren Schnitt aus nilpotenten Elementen besteht, so umfaßt jedes Primideale unseres Krings eines dieser endlich vielen Primideale.

3.3 Lokalisierung von Moduln

Definition 3.3.1 (Lokalisierung von Moduln). Analog wie die Lokalisierung $S^{-1}R$ eines Krings R an einer Teilmenge S nach 3.1.5 erklärt man auch die Lokalisierung eines R-Moduls M zu einem $S^{-1}R$-Modul $S^{-1}M$. Die Konstruktion geht wie folgt: Wir betrachten die Menge $M \times |S\rangle$ und definieren darauf eine Relation $\sim$ durch die Vorschrift

$$(m, s) \sim (n, t) \text{ genau dann, wenn es } r \in |S\rangle \text{ gibt mit } rtm = rsn.$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $S^{-1}R$ und die Äquivalenzklasse von (m, s) mit $\frac{m}{s}$ oder m/s. Dann definieren wir auf $S^{-1}M$ eine Verknüpfung $+$ durch die Regel

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st}$$

und überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Verknüpfung wohldefiniert ist und $S^{-1}R$ zu einer abelschen Gruppe macht. Schließlich definieren wir eine Abbildung $S^{-1}R \times S^{-1}M \to S^{-1}M$ durch die Regel

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{n}{t} = \frac{an}{st}$$

und prüfen, daß sie wohldefiniert ist und die abelsche Gruppe $S^{-1}M$ zu einem Modul über $S^{-1}R$ macht.

3.3.2 (**Auflösung der Doppeldeutigkeit von $S^{-1}\mathfrak{q}$**). Gegeben ein Kring R mit einer Teilmenge S und einem Ideal $\mathfrak{q} \subset R$ kann $S^{-1}\mathfrak{q}$ nach 3.3.1 und 3.2.1 nun zweierlei bedeuten: Einmal den $S^{-1}R$-Modul, den man als die Lokalisierung des R-Moduls $\mathfrak{q}$ erhält, andererseits aber auch eine geeignete Teilmenge $S^{-1}\mathfrak{q}$ des lokalisierten Rings $S^{-1}R$. In diesem Abschnitt soll a priori stets die erstere Bedeutung gemeint sein. In 3.3.12 wird sich dann herausstellen, daß es gar nicht darauf ankommt. Genauer liefert die Einbettung $\mathfrak{q} \hookrightarrow R$ nach 3.3.7 eine Abbildung $S^{-1}\mathfrak{q} \to S^{-1}R$, die aufgrund der Exaktheit der Lokalisierung 3.3.12 eine Injektion sein muß und deren Bild offensichtlich mit unserer Teilmenge $S^{-1}\mathfrak{q}$ des lokalisierten Rings aus 3.2.1 zusammenfällt.

Proposition 3.3.3 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung von Moduln). *Seien R ein Kring, $S \subset R$ eine Teilmenge und M ein R-Modul. So gilt:*

1. *Die Abbildung* $\operatorname{loc} : M \to S^{-1}M$ *gegeben durch* $m \mapsto m/1$ *ist ein Homomorphismus von* R*-Moduln für die durch Restriktion der Skalare erklärte Struktur auf* $S^{-1}M$ *als* R*-Modul;*

2. *Für jeden* $S^{-1}R$*-Modul* N *liefert das Vorschalten dieser Abbildung* loc *eine Bijektion*

$$(\circ \operatorname{loc}) : \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(M, N)$$

3.3.4. Man kann diese Aussage auch dahingehend formulieren, daß jede R-lineare Abbildung von einem R-Modul M in einen $S^{-1}R$-Modul N in eindeutiger Weise über $S^{-1}M$ faktorisiert.

Beweis. An dieser Proposition ist außer ihrer Formulierung nichts schwierig. Als Umkehrabbildung in Teil 2 kann und muß man jedem $\varphi : M \to N$ die Abbildung $\tilde{\varphi} : S^{-1}M \to N$ zuordnen, die durch $\tilde{\varphi}(m/s) = (1/s)\varphi(m)$ wohldefiniert ist. □

3.3.5. Offensichtlich besteht der Kern der kanonischen Abbildung $\operatorname{loc} : M \to S^{-1}M$ genau aus allen $m \in M$, für die es ein $s \in |S\rangle$ gibt mit $sm = 0$.

3.3.6 (**Lokal-global-Prinzip**). Gegeben ein Kring R, ein R-Modul N und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ schreibt man $N_\mathfrak{p}$ wie in 3.1.10 für den $R_\mathfrak{p}$-Modul $(R \backslash \mathfrak{p})^{-1}N$ und nennt $N_\mathfrak{p}$ die **Lokalisierung von** N **an der Stelle** $\mathfrak{p}$. Die offensichtliche Abbildung ist nun stets eine Injektion

$$N \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R} N_\mathfrak{m}$$

In der Tat, ist $x \in N$ nicht Null, so ist sein Annullator nicht ganz R und folglich enthalten in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Dann aber kann das Bild von x in $N_\mathfrak{m}$ nicht Null sein.

3.3.7 (**Die Lokalisierung als Funktor**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Wir ordnen jedem Homomorphismus von R-Moduln $\varphi : M \to N$ den nach 3.3.3 eindeutig bestimmten Homomorphismus $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N$ von $S^{-1}R$-Moduln zu mit $(S^{-1}\varphi) \circ \operatorname{loc} = \operatorname{loc} \circ \varphi : M \to S^{-1}N$, der explizit gegeben wird durch

$$S^{-1}\varphi : \frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$$

So erhalten wir einen Funktor $R\text{-Mod} \to S^{-1}R\text{-Mod}$, wie der Leser leicht einsehen wird.

Satz 3.3.8 (**Lokalisierung ist verträglich mit Koprodukten**). *Seien* R *ein Kring und* $S \subset R$ *eine Teilmenge. So ist der Lokalisierungsfunktor* $R\text{-Mod} \to S^{-1}R\text{-Mod}$ *gegeben durch* $M \mapsto S^{-1}M$ *verträglich mit Koprodukten.*

Ergänzung 3.3.9. Die Aussage des Satzes ebenso wie ihr Beweis spezialisieren ein allgemeines Resultat der Kategorientheorie, nach dem der Linksadjungierte eines beliebigen Funktors stets Koprodukte und sogar beliebige Kolimites erhält.

3.3.10. Gegeben ein Koprodukt (K, in_i) einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R-Moduln im Sinne von [LA2] 7.6.11 ist also ausgeschrieben auch $(S^{-1}K, S^{-1}\,\mathrm{in}_i)$ ein Koprodukt der Familie $(S^{-1}M_i)_{i \in I}$ von $S^{-1}R$-Moduln. In anderen Worten gilt

$$S^{-1}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \stackrel{\sim}{\to} \bigoplus_{i \in I} S^{-1}M_i$$

unter der „offensichtlichen Abbildung“. Man beachte, daß die analoge Aussage für Produkte im allgemeinen nicht richtig ist: Die Lokalisierung ist nicht mit beliebigen Produkten verträglich. Bereits für das Produkt abzählbar unendlich vieler Kopien von $\mathbb{Z}$ und $S = \{2\}$ ist die natürliche Abbildung $S^{-1}\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}\right) \to \prod_{i \in \mathbb{N}} S^{-1}\mathbb{Z}$ kein Isomorphismus, da das Tupel $(2^{-i})_{i \in \mathbb{N}}$ nicht in ihrem Bild liegt. Für endliche Produkte von Moduln wird die natürliche Abbildung aber natürlich ein Isomorphismus sein, endliche Produkte stimmen ja mit direkten Summen alias Koprodukten überein.

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß für jeden $S^{-1}R$-Modul N das Vorschalten aller $S^{-1}\,\mathrm{in}_i$ eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}K, N) \stackrel{\sim}{\to} \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M_i, N)$$

induziert. Vermittels unserer universellen Eigenschaft 3.3.3 läuft das auf den Nachweis der Tatsache hinaus, daß für jeden $S^{-1}R$-Modul N Vorschalten aller in_i eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_R(K, N) \stackrel{\sim}{\to} \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$$

induziert. Das ist jedoch klar, da K ja ein Koprodukt war. □

Beispiel 3.3.11. Die Lokalisierung nach allen von Null verschiedenen ganzen Zahlen macht jede abelsche Gruppe alias jeden $\mathbb{Z}$-Modul zu einem $\mathbb{Q}$-Modul alias $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Gegeben eine endlich erzeugte abelsche Gruppe M ist die Dimension dieses $\mathbb{Q}$-Vektorraums die Zahl, die wir in [LA2] 4.4.5 den Rang von M genannt hatten.

Proposition 3.3.12 (Exaktheit der Lokalisierung). *Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Ist $M' \to M \to M''$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, so ist auch $S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ eine exakte Sequenz von $S^{-1}R$-Moduln.*

3.3.13. Insbesondere können und werden wir für jeden Untermodul $N \subset M$ auch seine Lokalisierung als Untermodul des lokalisierten Moduls auffassen. In Formeln bezeichnen wir mit $S^{-1}N$ also sowohl die Lokalisierung von N als auch ihr Bild $S^{-1}N \subset S^{-1}M$ unter der offensichtlichen Einbettung und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, was genau gemeint ist.

Beweis. Geht m/s auf Null in M'', also $m \mapsto m''$ mit $m''/s = 0$, so gibt es $t \in |S\rangle$ mit $tm'' = 0$. Damit gibt es $n \in M'$ mit $n \mapsto tm$ und $n/ts \mapsto tm/ts = m/s$. □

Lemma* 3.3.14 (Bild des Primspektrums unter Kringhomomorphismen). *Gegeben eine Kringerweiterung $A \subset B$ ist ein Primideal $P \subset A$ der Schnitt mit A eines Primideals $\mathfrak{p} \subset B$ genau dann, wenn gilt $P = A \cap \langle BP \rangle$.*

Beweis. Ist P der Schnitt mit A irgendeines Ideals von B, so gilt offensichtlich $P = A \cap \langle BP \rangle$. Hierzu brauchen wir noch nicht einmal P prim vorauszusetzen. Gilt umgekehrt diese Identität und ist P prim und setzen wir $S = A \backslash P$ und betrachten wir die Ringerweiterung $S^{-1}A \subset S^{-1}B$, so folgt

$$S^{-1}P = (S^{-1}A) \cap (S^{-1}\langle BP \rangle)$$

Das folgt formal etwa aus 3.3.26. Dann ist $S^{-1}\langle BP \rangle$ ein echtes Ideal in $S^{-1}B$, da es $S^{-1}A$ in einem echten Ideal trifft, und läßt sich damit vergrößern zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$. Das Urbild in A dieses maximalen Ideals trifft nicht S und umfaßt P, ist folglich P selbst. Das Urbild in B dieses maximalen Ideals ist mithin unser gesuchtes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{p} \cap A = P$. □

Vorschau 3.3.15. Die offensichtliche Abbildung $M \to S^{-1}M$ induziert vermittels der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts [TS] 4.3.4 eine Abbildung, die man durch Abgleich der universellen Eigenschaften beider Konstruktionen unschwer als Isomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln $S^{-1}R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$ entlarvt.

Ergänzung 3.3.16. Ein Modul M über einem Ring R heißt **endlich präsentierbar** oder kürzer **endlich präsentiert** genau dann, wenn es eine exakte Sequenz $R^n \to R^m \twoheadrightarrow M$ gibt mit $n, m \in \mathbb{N}$. Über einem linksnoetherschen Ring ist ein Modul genau dann endlich präsentiert, wenn er endlich erzeugt ist.

3.3.17 (**Lokalisierung und Homomorphismenräume**). Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und R-Moduln M, N mit M endlich präsentiert ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$S^{-1} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

In der Tat können wir dann eine im Sinne von 1.3.17 rechtsexakte Sequenz $R^n \to R^m \twoheadrightarrow M$ finden, die hinwiederum ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N) \arrow[r, hook] \arrow[d] & S^{-1}\operatorname{Hom}_R(R^m,N) \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}\operatorname{Hom}_R(R^n,N) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M,S^{-1}N) \arrow[r, hook] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^m,S^{-1}N) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^n,S^{-1}N)
\end{tikzcd}$$

liefert. Die beiden rechten Vertikalen darin sind Isomorphismen, da beide Räume jeweils mit $S^{-1}N^m$ und $S^{-1}N^n$ identifiziert werden können, und damit ist auch die linke Vertikale ein Isomorphismus, wie man leicht direkt sieht und formal aus dem Fünferlemma folgern mag.

Beispiel 3.3.18. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und R-Moduln M, N ist die offensichtliche Abbildung

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

im allgemeinen kein Isomorphismus. Im Fall der $\mathbb{Z}$-Moduln $M = N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z}\backslash 0$ etwa haben wir $S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \operatorname{End}_{S^{-1}\mathbb{Z}}(S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = 0$, aber die Identität $\operatorname{id} \in \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ hat nach 3.3.5 ein von Null verschiedenes Bild in $S^{-1}\operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Ergänzung 3.3.19. Ein Modul über einem Kring ist projektiv und endlich erzeugt genau dann, wenn er endlich präsentierbar und **lokal frei** ist, als da heißt, seine Lokalisierung an jedem maximalen Ideal ist frei. Die schwierige Richtung beim Beweis geht so: Gegeben $K \hookrightarrow F \twoheadrightarrow M$ exakt mit F frei von endlichem Rang und K endlich erzeugt und M lokal frei wollen wir $\operatorname{Hom}(M,F) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(M,M)$ zeigen. Da wir aber Surjektivität nach 3.3.24 lokal prüfen dürfen, folgt das aus 3.3.17.

Übungen

Übung 3.3.20 (**Lokal-global-Prinzip, Variante**). Gegeben ein Kring R, ein R-Modul N und $f \in R$ schreibt man N_f wie in 3.1.10 für den R_f-Modul $f^{-1}N$. Gegeben Elemente $f, g, \dots, h \in R$, die als Ideal ganz R erzeugen, zeige man, daß die offensichtliche Abbildung eine Injektion $N \hookrightarrow N_f \times N_g \times \dots \times N_h$ induziert.

Übung 3.3.21 (**Lokalisierung und Restriktion der Skalare**). Sei $\varphi : A \to B$ ein Kringhomomorphismus, $S \subset A$ eine Teilmenge und M ein B-Modul. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus von $S^{-1}B$-Moduln $S^{-1}M \xrightarrow{\sim} \varphi(S)^{-1}M$ zwischen der Lokalisierung nach S des zu einem B-Modul restringierten A-Moduls M und der Restriktion nach $S^{-1}B$ des zum $\varphi(S)^{-1}A$-Modul $\varphi(S)^{-1}M$ lokalisierten A-Moduls M.

Übung 3.3.22 (**Überflüssige Lokalisierung von Moduln**). Seien R ein Kring, $S \subset R$ eine Teilmenge und M ein R-Modul. Ist für alle $s \in S$ die Multiplikation it s ein Isomorphismus $(s\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$, so ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus von abelschen Gruppen $M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$.

Übung 3.3.23. Man zeige: Jede Lokalisierung eines noetherschen Moduls über einem Kring ist ein noetherscher Modul über dem lokalisierten Kring.

Übung 3.3.24. Sei R ein Kring und $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Man zeige, daß φ genau dann surjektiv bzw. injektiv ist, wenn die auf den Lokalisierungen induzierte Abbildung $M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ surjektiv bzw. injektiv ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$. Hinweis: Exaktheit der Lokalisierung 3.3.12 und lokal-global-Prinzip 3.3.6. Allgemeiner zeige man, daß eine Sequenz von Modul exakt ist genau dann, wenn ihre Lokalisierung an jedem maximalen Ideal exakt ist.

Übung 3.3.25 (**Lokal-global-Prinzip, Variante**). Gegeben seien ein Kring R, ein R-Modul N und eine Teilmenge $E \subset R$, die als Ideal ganz R erzeugt. Man zeige die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to N \to \prod_{f \in E} N_f \to \prod_{(f,g) \in E \times E} N_{fg}$$

mit dem Produkt der Differenzen der natürlichen Abbildungen $N_f \to N_{fg}$ und $N_g \to N_{fg}$ in die Lokalisierung nach dem Produkt fg an letzter Stelle. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall zurück, daß E endlich ist.

Übung 3.3.26. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Gegeben ein R-Modul M mit Untermoduln $K, L \subset M$ zeige man die Identität $S^{-1}(K \cap L) = (S^{-1}K) \cap (S^{-1}L)$.

Übung 3.3.27. Sei R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Gegeben Ideale $I, J \subset R$ zeige man die Identität $S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J)$ von Idealen von $S^{-1}R$.

Ergänzende Übung 3.3.28. Gegeben ein endlich präsentierter Modul M über einem von Null verschiedenen Kring R gibt es stets ein von Null verschiedenes Element $f \in R \backslash 0$ mit M_f frei von endlichem Rang über R_f. Hinweis: Man versuche, eine präsentierende Matrix in Smith-Normalform zu bringen.

3.4 Lemma von Nakayama

3.4.1. Gegeben ein Kring R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ und ein R-Modul M vereinbaren wir die abkürzende Bezeichnung $\mathfrak{a}M$ statt $\langle \mathfrak{a}M \rangle$ für den in M von den Elementen am mit $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$ erzeugten Untermodul.

Proposition 3.4.2 (Lemma von Nakayama). *Seien R ein Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und Q ein endlich erzeugter R-Modul. Gilt $Q = \mathfrak{a}Q$, so gibt es $f \in 1 + \mathfrak{a}$ mit $fQ = 0$.*

3.4.3. Die Bedingung, Q sei endlich erzeugt, ist an dieser Stelle wesentlich. Gegeben ein Körper k ist die Folgerung des Lemmas zum Beispiel offensichtlich falsch für den $k[T]$-Modul $Q = k(T)$ und das Ideal $\mathfrak{a} = \langle T \rangle$ in $R = k[T]$.

Korollar 3.4.4 (Lemma von Nakayama, Variante). *Seien R ein Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, und M ein endlich erzeugter R-Modul. Seien Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{a}M$ erzeugen. So gibt es $f \in 1 + \mathfrak{a}$ derart, daß die m_i auch schon $M[f^{-1}]$ über $R[f^{-1}]$ erzeugen.*

3.4.5. Aus unserer Variante 3.4.4 folgt unmittelbar die Aussage der Proposition 3.4.2, indem wir den Fall $r = 0$ betrachten. Wir werden jedoch beim Beweis den umgekehrten Weg gehen. Ich selbst kann mir auch die Variante viel besser merken, da ich mit ihr eine Anschauung verbinden kann, wie im nächsten Punkt ausgeführt werden soll.

3.4.6 (**Anschauung für das Lemma von Nakayama**). Der Anschauung besonders gut zugänglich scheint mir die Variante 3.4.4, in dem $R = \mathcal{O} = \mathcal{O}(X)$ die Algebra der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X ist, $M = \mathcal{O}^n$ ein freier Modul endlichen Ranges, und $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(x)$ das Verschwindungsideal eines Punktes $x \in X$. Unsere $m_i \in M$ verstehen wir dann als Spaltenvektoren $m_j = (m_{1j}, \ldots, m_{nj})$ mit Funktionen $m_{ij} \in \mathcal{O}$ als Einträgen, und unser Lemma besagt: Erzeugen die Spaltenvektoren $m_j(x) := (m_{1j}(x), \ldots, m_{nj}(x))$ für $1 \leq j \leq r$ den k^n, so gibt eine Funktion $f \in \mathcal{O}$, die bei x den Wert Eins annimmt und mit der die m_j bereits $\mathcal{O}[f^{-1}]^n$ erzeugen als $\mathcal{O}[f^{-1}]$-Modul. Daß solch ein f existiert, kann man nun auch ohne viel Theorie leicht einsehen: Wenn wir erst mal etwas allgemeiner nur ein f wie oben finden, das bei x nicht den Wert Null annimmt, multiplizieren wir es mit dem Skalar $f(x)^{-1}$ und sind auch fertig. Erzeugen nun die $m_j(x)$ für $1 \leq j \leq r$ den k^n, so kann man nach Umnummerieren annehmen, daß $m_1(x), \ldots, m_n(x)$ bereits eine Basis des k^n bilden. Dann aber ist die Determinante der Matrix der $A = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ nicht Null bei x. Nehmen wir $f = \det(A)$ als unsere Funktion, so gibt es nach der Cramer'schen Regel [LA1] 7.4.6 eine Matrix $B = f^{-1}A^\sharp$ mit Einträgen in $\mathcal{O}[f^{-1}]$ und $BA = I$ der Einheitsmatrix. Das aber zeigt, daß die m_j bereits $\mathcal{O}[f^{-1}]^n$ als $\mathcal{O}[f^{-1}]$-Modul erzeugen.

Herleitung des Korollars 3.4.4 aus der Proposition 3.4.2. Seien Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{a}M$ erzeugen. Sei $N \subset M$ das Erzeugnis von $m_1, \ldots, m_r$ und $Q = M/N$. Wir betrachten das Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc} N \cap \mathfrak{a}M & \hookrightarrow & \mathfrak{a}M & \twoheadrightarrow & \mathfrak{a}Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N/(N \cap \mathfrak{a}M) & \hookrightarrow & M/\mathfrak{a}M & \twoheadrightarrow & Q/\mathfrak{a}Q \end{array}$$

Seine beiden oberen Zeilen sind exakt, also nach dem Neunerlemma auch die untere Zeile. Aus der Wahl von N folgt nun $Q/\mathfrak{a}Q = 0$, also $Q = \mathfrak{a}Q$, also $fQ = 0$ für ein $f \in 1+\mathfrak{a}$ nach Proposition 3.4.2, also $Q[f^{-1}] = 0$, also $N[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} M[f^{-1}]$ wegen der Exaktheit des Lokalisierens 3.3.12 und wir sind fertig. □

Beweis des Lemmas von Nakayama 3.4.2. Wir müssen aus $Q = \mathfrak{a}Q$ folgern $fQ = 0$ für ein $f \in 1 + \mathfrak{a}$ oder gleichbedeutend $S^{-1}Q = 0$ für die Lokalisierung von Q nach der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S = 1 + \mathfrak{a}$. Aber seien sonst $q_1, \ldots, q_t \in Q$ gewählt mit kleinstmöglichem $t \geq 1$ derart, daß ihre Bilder $S^{-1}Q$ als Modul über $S^{-1}R$ erzeugen. Natürlich haben wir auch $S^{-1}Q = \mathfrak{a}S^{-1}Q$ und können also in $S^{-1}Q$ schreiben $q_1 = b_1q_1 + \ldots + b_tq_t$ mit $b_i \in S^{-1}\mathfrak{a}$. Dann können wir auch in Q schreiben $sq_1 = a_1q_1 + \ldots + a_tq_t$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $s \in S$ und folgern $(s - a_1)q_1 = a_2q_2 + \ldots + a_tq_t$. Da aber gilt $(s - a_1) \in S$ zeigt diese Gleichung, daß auch $q_2, \ldots, q_t$ schon $S^{-1}Q$ erzeugen als Modul über $S^{-1}R$. Widerspruch! □

Zweiter Beweis des Lemmas von Nakayama 3.4.2 ohne Lokalisierung. Seien $q_1, \ldots, q_n$ Erzeuger des R-Moduls Q. Wir finden $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ mit

$$q_i = a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in}q_n$$

was wir umschreiben können zur Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Ziehen wir nun beide Seiten voneinander ab und multiplizieren mit der adjungierten Matrix [LA1] 7.4.6, so erkennen wir, daß für P das charakteristische Polynom der Matrix der (a_{ij}) gilt $P(1)q_1 = \ldots = P(1)q_n = 0$. Dies $P(1)$ ist dann unser gesuchtes $f \in 1 + \mathfrak{a}$. □

Definition 3.4.7. Ein Ring heißt **lokal** genau dann, wenn seine Nichteinheiten ein Ideal bilden. Dies Ideal ist dann natürlich das größte echte Ideal unseres Rings. Der Nullring ist insbesondere nicht lokal, denn die leere Menge ist kein Ideal.

3.4.8. Mit der Sprechweise „Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Kring" ist gemeint, daß A ein lokaler Kring sein soll und $\mathfrak{m}$ sein per definitionem eindeutig bestimmtes maximales Ideal.

Beispiel 3.4.9. Gegeben ein Kring R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ von R an der Stelle $\mathfrak{p}$ nach 3.2.1 stets ein lokaler Kring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Insbesondere sind unsere Ringe von Funktionskeimen $\mathcal{O}_{X,x}$ aus 3.1.13 und allgemeiner unsere Ringe von Funktionskeimen $\mathcal{O}_{X,Y}$ aus 3.1.15 stets lokal.

Korollar 3.4.10 (Lemma von Nakayama für lokale Kringe). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Kring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Sind $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen, so erzeugen die m_i bereits M selbst. Inbesondere gilt*

$$M = \mathfrak{m}M \quad \Rightarrow \quad M = 0$$

Beweis. In unserem lokalen Kring R besteht die Menge $1+\mathfrak{m}$ aus Einheiten, denn für $x \in \mathfrak{m}$ kann das Hauptideal $\langle 1 + x \rangle$ nicht in $\mathfrak{m}$ liegen und folglich muß gelten $\langle 1 + x \rangle = R$. Damit folgt das Korollar sofort aus 3.4.4. □

3.4.11. Für allgemeine Kringe gilt dies Korollar analog, wenn wir für $\mathfrak{m}$ den Schnitt aller maximalen Ideale alias das Jacobson-Radikal 1.10.21 nehmen. Der Beweis bleibt derselbe, wir müssen nur aus 1.10.21 erinnern, daß für jedes Element a des Jacobson-Radikals $1 + a$ eine Einheit ist. Das ist im übrigen auch unmittelbar klar, denn sonst müßte $1 + a$ in einem maximalen Ideal liegen, und a müßte in demselben maximalen Ideal liegen, Widerspruch.

Proposition 3.4.12 (Durchschnittssatz). *Ist R ein noetherscher Kring, $J \subset R$ sein Jacobson-Radikal und M ein noetherscher R-Modul, so gilt*

$$\bigcap_n J^n M = 0$$

3.4.13. Auch hier meint $J^n M$ den von allen diesen Produkten erzeugten Untermodul, der pedantisch eigentlich $\langle J^n M \rangle$ notiert werden müßte. Besonders oft wird die Proposition im Fall lokaler Kringe verwendet, in dem das Jacobson-Radikal mit dem einzigen maximalen Ideal zusammenfällt. Insbesondere ist in einem lokalen noetherschen Kring der Schnitt aller Potenzen des maximalen Ideals das Nullideal.

Beispiel 3.4.14. Ist R der Ring der Keime stetiger reeller Funktionen um den Ursprung der reellen Zahlengeraden im Sinne von 3.1.12, so ist R ein lokaler Ring, aber für sein maximales Ideal J gilt $J^2 = J$. Dies Beispiel zeigt, daß der Durchschnittssatz für nicht noethersche Kringe im allgemeinen nicht mehr gilt.

Ergänzung 3.4.15 (**Durchschnittssatz von Krull**). Ist etwas allgemeiner R ein noetherscher Kring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein beliebiges Ideal, so gilt für jeden noetherschen R-Modul M die Identität

$$\bigcap \mathfrak{a}^n M = \{m \in M \mid \exists a \in \mathfrak{a} \text{ mit } am = m\}$$

In der Tat ist $\supset$ offensichtlich. Im anschließenden Beweis von 3.4.12 zeigen wir aber für unseren Schnitt S die Identität $\mathfrak{a}S = S$. Mit dem Lemma von Nakayama 3.4.2 folgt dann sogar die Existenz von einem $a \in \mathfrak{a}$ mit $(1 + a)S = 0$ alias $am = m \; \forall m \in S$. So folgt dann die andere Inklusion $\subset$.

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{a} \subset R$ ein beliebiges Ideal. Im Polynomring $R[X]$ bilden die Polynome $\sum r_n X^n$ mit $r_n \in \mathfrak{a}^n$ für alle $n \geq 0$ einen Teilring, den sogenannten **Rees-Ring**. Sind $a_1, \ldots, a_r$ Erzeuger von $\mathfrak{a}$, so erhalten wir eine Surjektion des Polynomrings $R[Y_1, \ldots, Y_r]$ auf den Rees-Ring mit $Y_\nu \mapsto a_\nu X$, folglich ist mit R auch der Rees-Ring noethersch. Des weiteren ist im in hoffentlich offensichtlicher Weise erklärten $R[X]$-Modul $M[X]$ die Teilmenge aller $\sum m_n X^n$ mit $m_n \in \mathfrak{a}^n M$ für alle $n \geq 0$ ein Untermodul über dem Rees-Ring, und dieser Untermodul ist offensichtlich endlich erzeugt über dem Rees-Ring, wenn M endlich erzeugt ist über R. Für $S = \bigcap \mathfrak{a}^n M$ ist weiter $S[X]$ ein Untermodul dieses Moduls über dem Rees-Ring und ist folglich endlich erzeugt, also insbesondere erzeugt von einer Teilmenge der Gestalt $S + SX + \ldots + SX^n$. Das hinwiederum zeigt $\mathfrak{a}S = S$. Ist nun $\mathfrak{a} = J$ das Jacobson-Radikal, so folgt mit dem Lemma von Nakayama 3.4.11 sofort $S = 0$. □

3.5 Einfache Moduln und Kompositionsreihen

3.5.1. Dieser Abschnitt betrifft kommutative und nichtkommutative Ringe gleichermaßen.

Definition 3.5.2. Ein Modul heißt **einfach** genau dann, wenn er nicht Null ist, aber außer sich selbst und Null keine Untermoduln hat.

Beispiele 3.5.3. Die einfachen Moduln über einem Körper oder allgemeiner einem Schiefkörper sind genau die eindimensionalen Vektorräume. Jeder Vektorraum ist einfach als Modul über seinem Endomorphismenring.

3.5.4. Die einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln sind genau die zyklischen abelschen Gruppen von Primzahlordnung. Allgemeiner sind alle einfachen Moduln über einem Ring isomorph zu einem Quotienten des besagten Rings nach einem maximalen Linksideal. Ist der Ring kommutativ, so kann man besagtes Linksideal aus dem Modul zurückgewinnen als seinen Annulator. Genauer ist dann der Quotient unseres Rings nach unserem maximalen Ideal bereits ein Körper, vergleiche 1.10.6, und unser einfacher Modul ist ein eindimensionaler Vektorraum über diesem Körper. Bei nichtkommutativen Ringen können die Quotienten nach verschiedenen maximalen Linksidealen jedoch durchaus als Moduln isomorph sein: Man denke etwa an den Matrizenring $\mathrm{Mat}(r; k)$ mit Einträgen in einem Körper k und den einfachen Modul k^r dieses Rings: Hier sind ja die Annullatoren verschiedener von Null verschiedener Elemente im allgemeinen durchaus verschiedene Linksideale.

3.5.5. Der Hilbert'sche Nullstellensatz 1.9.10 besagt, daß alle einfachen Moduln über einem Polynomring in endlich vielen Variablen mit Koeffizienten in einem Körper endlichdimensional sind über besagtem Körper. Ist der Körper algebraisch abgeschlossen, so sind sie sogar eindimensional.

Lemma 3.5.6 (**Homomorphismen von und zu einfachen Moduln**). *Seien R ein Ring, E, E' einfache R-Moduln, und M ein beliebiger R-Modul. So gilt:*

1. *Jeder Homomorphismus $E \to M$ ist injektiv oder Null;*
2. *Jeder Homomorphismus $M \to E'$ ist surjektiv oder Null;*
3. *Jeder Homomorphismus $E \to E'$ ist bijektiv oder Null;*
4. *Der Endomorphismenring $\mathrm{End}_R E$ ist ein Schiefkörper.*

Beweis. $\ker(E \to M)$ und $\mathrm{im}(M \to E')$ sind Untermoduln von E bzw. von E' und sind folglich Null oder ganz E bzw. ganz E'. □

Korollar 3.5.7. *Sei R ein kommutativer Ring, der einen algebraisch abgeschlossenen Körper k als Teilring hat. So ist ein einfacher R-Modul, der endlichdimensional ist als k-Vektorraum, notwendig eindimensional als k-Vektorraum.*

Beweis. Die Multiplikation mit einem beliebigen Element $r \in R$ besitzt notwendig einen Eigenwert, und der zugehörige Eigenraum ist ein von Null verschiedener Untermodul, also der ganze Modul. Also operiert jedes $r \in R$ durch einen Skalar, und dann kann unser Modul nur einfach sein, wenn er eindimensional ist. □

Definition 3.5.8. Gegeben ein Modul M über einem Ring R definieren wir seine **Länge**

$$l_R(M) = l(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

als das Supremum über alle n derart, daß es in M eine echt absteigende Kette von Untermoduln gibt der Gestalt $M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \ldots \supsetneq M_0 = 0$, die also salopp gesprochen in n echten Schritten vom ganzen Modul zum Nullmodul führt. Ein **Ring von endlicher Länge** ist ein Ring, der sowohl als Linksmodul als auch als Rechtsmodul über sich selber von endlicher Länge ist.

Beispiel 3.5.9. Ist k ein Körper, so ist die Länge eines k-Moduls genau die Dimension des fraglichen k-Vektorraums.

3.5.10. Bei einer endlichen echt absteigenden Kette maximal möglicher Länge ist natürlich stets M_i/M_{i-1} einfach für $1 \leq i \leq n$. Offensichtlich hat ein Modul die Länge Null genau dann, wenn er der Nullmodul ist, und die Länge Eins genau dann, wenn er einfach ist.

Definition 3.5.11. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Eine **Kompositionsreihe von** M ist eine endliche Kette von Untermoduln

$$M = M_r \supset M_{r-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$$

derart, daß M_i/M_{i-1} einfach ist für $1 \leq i \leq r$. Der Modul M_i/M_{i-1} heißt dann der i**-te Subquotient** unserer Kompositionsreihe. Gegeben ein Modul M über einem Ring erklären wir seine **Kompositionslänge**

$$\lambda_R(M) = \lambda(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

wie folgt: Besitzt unser Modul eine Kompositionsreihe, so sei $\lambda(M)$ die kleinstmögliche Länge einer Kompositionsreihe von M. Besitzt unser Modul keine Kompositionsreihe, so sagen wir, seine Kompositionslänge sei unendlich und schreiben $\lambda(M) = \infty$.

Satz 3.5.12 (Jordan-Hölder). *Die Länge und die Kompositionslänge stimmen für jeden Modul überein. Weiter haben je zwei Kompositionsreihen eines Moduls dieselbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten.*

3.5.13. In Formeln ausgedrückt besagt der zweite Teil: Sind $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ und $M = N_s \supset \ldots \supset N_0 = 0$ zwei Kompositionsreihen eines Moduls M, so gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $N_i/N_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}$ für alle i. Diese Subquotienten oder genauer ihre Isomorphieklassen heißen die **Kompositionsfaktoren** unseres Moduls endlicher Länge M, und unser Satz sagt auch, daß jeder Kompositionsfaktor mit einer wohlbestimmten Vielfachheit auftritt. Gegeben ein einfacher Modul L notiert man die Vielfachheit von L als Kompositionsfaktor von M meist

$$[M : L]$$

Beweis. Die erste Aussage unseres Satzes behauptet in Formeln $l(M) = \lambda(M)$. Offensichtlich ist a priori nur die Abschätzung $l(M) \geq \lambda(M)$. Als nächstes zeigen wir nun, daß für jeden Modul M endlicher Kompositionslänge und jeden von Null verschiedenen Untermodul $N \subset M$ gilt

$$\lambda(M/N) < \lambda(M)$$

Sei in der Tat $M = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 0$ eine Kompositionsreihe von M und $N \subset M$ ein Untermodul. Wir betrachten den Quotienten $\bar{M} = M/N$ und die Bilder $\bar{M}_i$ der M_i in $\bar{M}$ und erhalten kurze exakte Sequenzen

$$M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \hookrightarrow M_i/M_{i-1} \twoheadrightarrow \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$$

durch explizites Nachdenken: Geht ein Element $m + M_{i-1}$ aus der Mitte rechts nach Null, landet es also in $\bar{M}_{i-1}$, so muß es aus $N + M_{i-1}$ stammen und sich mit $m \in M_i \cap N$ darstellen lassen. Alternativ mag man das Neunerlemma [LA2] 6.2.18 auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
M_{i-1} \cap N & \hookrightarrow & M_i \cap N & \twoheadrightarrow & M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_{i-1} & \hookrightarrow & M_i & \twoheadrightarrow & M_i/M_{i-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{M}_{i-1} & \hookrightarrow & \bar{M}_i & \twoheadrightarrow & \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}
\end{array}$$

anwenden. Gilt $N \neq 0$, so kann nicht $M_i \cap N = M_{i-1} \cap N$ gelten für alle i. Zu jeder Kompositionsreihe von M haben wir also eine echt kürzere Kompositionsreihe von $\bar{M} = M/N$ konstruiert und erkennen damit, daß in der Tat aus $\lambda(M) < \infty$ und $N \neq 0$ folgt $\lambda(M/N) < \lambda(M)$. Man sieht so, daß die Länge einer beliebigen echt absteigenden Kette von Untermoduln eines Moduls endlicher Kompositionslänge M nach oben beschränkt ist durch eben diese Kompositionslänge $\lambda(M)$ und folgert sofort $l(M) \leq \lambda(M)$. Im Fall $\lambda(M) = \infty$ ist das eh klar und so ergibt sich schließlich für jeden Modul M die Gleichheit

$$l(M) = \lambda(M)$$

Daß je zwei Kompositionsreihen dieselbe Länge haben, folgt sofort. Ist weiter N einfach, so gibt es oben genau einen Index j mit

$$M_j \cap N = N \text{ aber } M_{j-1} \cap N = 0$$

Für diesen Index haben wir $M_j/M_{j-1} \cong N$ und $\bar{M}_j/\bar{M}_{j-1} = 0$, wohingegen für die anderen Indizes $i \neq j$ gilt $M_i/M_{i-1} \cong \bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$. Nun folgt der Rest des Satzes mit Induktion. □

Korollar 3.5.14 (Längenformel). *Gegeben $M \supset N$ ein Modul mit einem Untermodul gilt in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Gleichheit $l(M) = l(M/N) + l(N)$.*

Beweis. Für jeden Untermodul $N \subset M$ sind die Ungleichungen

$$\begin{aligned} l(M) &\geq l(M/N) + l(N) \\ \lambda(M) &\leq \lambda(M/N) + \lambda(N) \end{aligned}$$

offensichtlich. Da nach dem Satz 3.5.12 von Jordan-Hölder aber die Länge und die Kompositionslänge übereinstimmen, folgt die Behauptung. □

Korollar 3.5.15. *Sei R ein Ring, der einen Körper k als Teilring hat. Ist R endlichdimensional als Linksmodul über k, so gibt es bis auf Isomorphismus höchstens $\dim_k R$ einfache R-Moduln.*

Beweis. Natürlich ist R von endlicher Länge als R-Modul und es gilt sogar $l(R) \leq \dim_k R$. Jeder einfache R-Modul ist aber ein Quotient von R und taucht folglich in einer und damit in jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf. □

Ergänzung 3.5.16. Eine Variante zum hier gewählten Zugang zum Satz von Jordan-Hölder findet man etwa in [JS06]: Man zeigt, wie dort ausgeführt, ohne große Schwierigkeiten, daß je zwei endliche Filtrierungen eines Moduls durch das Einfügen geeigneter weiterer Untermoduln so verfeinert werden können, daß die Subquotienten der beiden so enstehenden Filtrierungen bis auf Reihenfolge isomorph sind.

Satz 3.5.17 (Noethersche Kringe der Krulldimension Null). *Für einen vom Nullring verschiedenen Kring sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kring ist* **von endlicher Länge**, *als da heißt, von endlicher Länge als Modul über sich selber;*
2. *Unser Kring ist noethersch von der Krulldimension Null.*

Vorschau 3.5.18. Die Äquivalenz dieser beiden Aussagen wird sich als eine wesentliche Zutat beim Beweis des Hauptidealsatzes von Krull 4.8.4 erweisen, einer der zentralen Aussagen der Dimensionstheorie.

Beweis. (2)⇒(1). Ist unser Kring R noethersch, so ist nach 3.2.22 sein Nilradikal der Schnitt seiner endlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$, und ist seine Krull-Dimension Null, so sind das auch seine maximalen Ideale. Es gibt also n mit $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^n = 0$. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist jedoch $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ ein R-Modul endlicher Länge, da er ja endlich erzeugt ist und die R-Operation darauf über den Körper $R/\mathfrak{m}$ faktorisiert. Die Kette von Idealen

$$R \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{m}_1^n \supset \mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2 \supset \ldots \supset (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^n = 0$$

zusammen mit der Längenformel 3.5.14 zeigt dann, daß R endliche Länge hat.

(1)⇒(2). Natürlich ist jeder Modul von endlicher Länge auch noethersch. Weiter kann unser Kring von endlicher Länge bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln haben, also nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$. Für deren Schnitt J gibt es nach 3.4.12 ein $n \geq 1$ mit $J^n = 0$. Dieser Schnitt liegt mithin in jedem Primideal $\mathfrak{p}$ unseres Rings. Umfaßte unser $\mathfrak{p}$ keines der $\mathfrak{m}_i$, so würden wir mit 2.6.24 schnell bei einem Widerspruch landen. Also ist jedes Primideal maximal und die Krulldimension ist Null. □

Definition 3.5.19. Ein Modul heißt **artinsch** nach dem Mathematiker Emil Artin genau dann, wenn jede absteigende Folge von Untermoduln stationär wird. Man sagt dann auch, unser Modul „erfülle die absteigende Kettenbedingung“.

Ergänzung 3.5.20. Auf Englisch spricht man von der **descending chain condition** oder kurz **dcc** oder auch von **artinian modules**. Darin liegt eine gewisse Ironie der Geschichte: Emil Artin war nämlich armenischen Ursprungs und seine Familie hatte ihren Familiennamen Artinian extra zu Artin eingedeutscht.

Ergänzung 3.5.21. Man kann auch zeigen, daß ein Kring genau dann endliche Länge hat, wenn er ein **artinscher Kring** alias artinsch als Modul über sich selber ist. Diese Erkenntnis scheint mir im Gesamtgebäude der Theorie eher nebensächlich und ich selber werde stets von Kringen endlicher Länge reden. Ich gebe dennoch einen Beweis, da die Terminologie eines artinschen Krings oft verwendet wird. Problematisch ist nur der Nachweis, daß jeder artinsche Kring bereits von endlicher Länge ist. Wir zeigen dazu zunächst, daß jedes Primideal eines artinschen Krings maximal ist. In der Tat ist der Restklassenring ein artinscher Integritätsbereich, und solch ein Kring muß ein Körper sein: Wäre sonst x eine von Null verschiedene Nichteinheit, so müste es n geben mit $\langle x^n \rangle = \langle x^{n+1} \rangle$, also $x^n y = x^{n+1}$ für eine Einheit y, und dann folgte $x = y$ im Widerspruch zu unserer Annahme, x sein keine Einheit. Weiter kann ein artinscher Kring nur endlich viele maximale Ideale haben, da wir sonst aus Schnitten von immer größeren endlichen Familien maximaler Ideale eine unendliche absteigende Folge von Idealen bilden könnten. Nach 3.2.4 ist der Schnitt unserer maximalen Ideale das Nilradikal $\mathfrak{n}$ unseres Krings. Wenn wir zeigen können, daß es ein n gibt mit $\mathfrak{n}^n = 0$, so sind wir fertig mit derselben Argumentation wie oben. Sicher wird die Folge der $\mathfrak{n}^n$ stabil, sagen wir $\mathfrak{n}^n = \mathfrak{n}^{n+1} = \ldots = \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a} \neq 0$, so folgt $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \neq 0$, und dann gibt es auch ein minimales Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$. Offensichtlich ist jedes solche minimale $\mathfrak{b}$ ein Hauptideal, also $\mathfrak{b} = \langle x \rangle$ mit $x \neq 0$. Andererseits gilt für jedes solche minimale $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, zusammen also $\mathfrak{a}x = \langle x \rangle$. Dann gibt es aber $y \in \mathfrak{a}$ mit $yx = x$ und damit $y^r x = x$ für alle r. Da aber y nilpotent ist, steht das im Widerspruch zu $x \neq 0$.

Ergänzung 3.5.22. Analoges gilt mit einem umfangreicheren Beweis sogar für beliebige, nicht notwendig kommutative Ringe: Jeder Ring, der als Linksmodul über sich selber artinsch ist, ist als Linksmodul über sich selber bereits von endlicher Länge. Solche Ringe heißen auch **linksartinsch**. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [JS06].

Übungen

Übung 3.5.23. Man zeige: Ist ein Ring einfach als Linksmodul über sich selbst, so ist unser Ring ein Schiefkörper.

Übung 3.5.24. In jedem Ring läßt sich auch jedes echte Links- bzw. Rechtsideal vergrößern zu einem maximalen echten Links- bzw. Rechtsideal. Genau dann ist ein Linksideal maximal, wenn der Quotient danach ein einfacher Modul ist. Jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring besitzt einen einfachen Subquotienten. Insbesondere besitzt jeder von Null verschiedene Ring mindestens einen einfachen Modul. Hinweis: 1.10.4.

Übung 3.5.25. Jeder endlich erzeugte und von Null verschiedene Modul besitzt einen einfachen Quotienten. Hinweis: 3.5.24. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ besitzt als $\mathbb{Z}$-Modul weder einfache Untermoduln noch einfache Quotienten. Als $\mathbb{Q}$-Modul ist $\mathbb{Q}$ dahingegen einfach.

Übung 3.5.26. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist jeder einfache $k[X]$-Modul eindimensional und isomorph zu $k[X]/\langle X - \lambda\rangle$ für genau ein $\lambda \in k$.

Übung 3.5.27. Der Quotient eines Moduls nach einem maximalen echten Untermodul ist stets ein einfacher Modul.

Übung 3.5.28. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper k und eine k-Kringalgebra A von endlichem Typ ist jeder A-Modul von endlicher Länge bereits endlichdimensional, und seine Länge fällt mit seiner Dimension als k-Vektorraum zusammen.

Übung 3.5.29. Der einzige einfache Modul über dem Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraums ist der besagte Vektorraum selber, bis auf Isomorphismus.

Übung 3.5.30. Man zeige: Ein $\mathbb{Z}$-Modul M ist von endlicher Länge genau dann, wenn er endlich ist. Seine Länge ist dann die Zahl der Primfaktoren seiner Kardinalität $|M|$, mit Vielfachheiten gerechnet.

Ergänzende Übung 3.5.31. Man zeige, daß jeder Modul endlicher Länge artinsch ist. Ein Beispiel für einen artinschen $\mathbb{Z}$-Modul unendlicher Länge ist der Quotient $\mathbb{Z}[2^{-1}]/\mathbb{Z}$.

Übung 3.5.32. Sei A ein noetherscher Kring. Man zeige: Ist der Quotient von A nach seinem Nilradikal $A/\sqrt{0}$ von endlicher Länge, so ist bereits A selbst von endlicher Länge.

3.6 Hauptraumzerlegung von Moduln*

Lemma 3.6.1 (Verallgemeinerte Hauptraumzerlegung). *Gegeben ein Modul M über einem Kring R und ein maximales Ideal $\chi \in \operatorname{Max} R$ setze man $M_{(\chi)} := \{m \in M \mid \chi^k m = 0 \text{ für } k \gg 0\}$. Mit dieser Notation liefern die Inklusionen eine Einbettung*

$$\bigoplus_{\chi \in \operatorname{Max} R} M_{(\chi)} \hookrightarrow M$$

Weiter ist das Bild dieser Einbettung die Vereinigung aller Untermoduln endlicher Länge.

3.6.2. Im Spezialfall eines Polynomrings in einer Veränderlichen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist das die Hauptraumzerlegung [LA2] 3.2.7, vergleiche auch [LA2] 3.2.17. Unter der Bijektion $k \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(k[X])$, $\lambda \mapsto \langle X - \lambda \rangle$ entspricht genauer die Hauptraumzerlegung des durch Multiplikation mit X gegebenen Endomorphismus des k-Vektorraums M genau der Zerlegung in der Proposition.

Beweis. Wäre die Summe der $M_{(\chi)}$ nicht direkt, so wäre auch schon eine endliche Teilsumme nicht direkt und wir hätten notwendig eine endliche direkte Teilsumme $M_{(\nu)} \oplus \ldots \oplus M_{(\mu)}$, die von einem weiteren $M_{(\chi)}$ nichttrivial geschnitten wird. Wegen $(M \oplus N)_{(\chi)} = M_{(\chi)} \oplus N_{(\chi)}$ hätten wir dann $\mu \neq \chi$ mit $M_{(\mu)} \cap M_{(\chi)} \neq 0$. Das ist aber absurd, da gilt $R = \chi + \mu$, also $1 = a + b$ mit $a \in \chi$, $b \in \mu$, also für alle n auch $1 = (a + b)^{2n} = c + d$ mit $c \in \chi^n$, $d \in \mu^n$, und damit $1m = 0$ für alle $m \in M_{(\mu)} \cap M_{(\chi)}$. Die Summe ist also direkt und es reicht, wenn wir für M von endlicher Länge $M = \sum M_{(\chi)}$ zeigen. Unter dieser Annahme ist klar, daß wir paarweise verschiedene $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \operatorname{Max} R$ finden können und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(\chi_1 \ldots \chi_r)^n M = 0$$

Der chinesische Restsatz [AL] 2.3.4 liefert dann einen Isomorphismus

$$R/(\chi_1 \ldots \chi_r)^n \xrightarrow{\sim} R/\chi_1^n \times \ldots \times R/\chi_r^n$$

den wir benutzen können, um unser M aufzufassen als einen Modul über dem Produktring. Die Elemente e_i in diesem Produktring mit einem einzigen Eintrag 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst haben als Elemente der rechten Seite die Eigenschaft $\chi_i^n e_i = 0$ und für alle $m \in M$ gehört $m = e_1 m + \ldots + e_r m$ folglich zur Summe der $M_{(\chi)}$. □

Übungen

Übung 3.6.3. Man bestimme die verallgemeinerte Hauptraumzerlegung von $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$.

Übung 3.6.4 (**Hauptraumzerlegung über Kringen endlicher Länge**). Ist R ein Kring und M ein R-Modul, der die Vereinigung seiner Untermoduln endlicher Länge ist, so sind für alle $\chi \in \operatorname{Max} R$ die Kompositionen $M_{(\chi)} \hookrightarrow M \to M_\chi$ Isomorphismen mit der Lokalisierung nach χ und für maximale Ideale $\chi \neq \mu$ ist die Komposition $M_{(\chi)} \hookrightarrow M \to M_\mu$ die Nullabbildung. Insbesondere ist für jeden Modul M über einem Kring endlicher Länge die Abbildung aus 3.3.6 ein Isomorphismus

$$M \xrightarrow{\sim} \prod_{\chi \in \operatorname{Max} R} M_\chi$$

4 Ganze Kringerweiterungen und Dimension

4.1 Ganze Kringerweiterungen

4.1.1. Ich beginne mit einigen Erinnerungen. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung. Ein Element $b \in B$ heißt wie in 1.9.2 ganz über A genau dann, wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in A ist, wenn es also $n \geq 1$ und $a_i \in A$ gibt mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

Definition 4.1.2. Eine Kringerweiterung $A \subset B$ heißt **ganz** genau dann, wenn jedes Element $b \in B$ ganz ist über A. Einen Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ nennen wir **ganz** genau dann, wenn $\varphi(A) \subset B$ eine ganze Kringerweiterung ist.

Beispiel 4.1.3. Wie bereits in 1.9.4 besprochen ist die Kringerweiterung $R[T] \subset R[T, T^{-1}]$ nicht ganz, genauer ist T^{-1} nicht ganz über $R[T]$ für jeden von Null verschiedenen Kring R.

4.1.4 (**Ganz bleibt ganz unter Quotienten und Lokalisierungen**). Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $I \subset B$ ein Ideal, so ist auch $(A/A \cap I) \subset B/I$ eine ganze Kringerweiterung. Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $T \subset A$ eine Teilmenge, so ist auch $T^{-1}A \subset T^{-1}B$ eine ganze Kringerweiterung.

Satz 4.1.5 (Charakterisierung ganzer ringendlicher Kringerweiterungen). *Für eine Kringerweiterung $A \subset B$ sind gleichbedeutend:*

1. *Der Ring B wird als Kringerweiterung von endlich vielen über A ganzen Elementen erzeugt;*

2. *Unsere Kringerweiterung ist ganz und ringendlich;*

3. *Unsere Kringerweiterung ist modulendlich.*

Beweis. 2⇒1 ist offensichtlich und 1⇒3 hatten Sie bereits als Übung 1.9.15 ausgeführt. Wir müssen nur noch 3⇒2 zeigen. Seien dazu $b_1, \ldots, b_n$ Erzeuger des A-Moduls B. Gegeben $b \in B$ finden wir dann $a_{ij} \in A$ mit

$$bb_i = a_{i1}b_1 + \ldots + a_{in}b_n$$

was wir umschreiben können zur Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ziehen wir nun beide Seiten voneinander ab und multiplizieren mit der adjungierten Matrix [LA1] 7.4.6, so erkennen wir, daß für P das charakteristische Polynom der Matrix der (a_{ij}) gilt $P(b)b_1 = \ldots = P(b)b_n = 0$. Das hinwiederum zeigt $P(b) = 0$, denn wir können ja die Eins von B als Linearkombination der b_i schreiben. □

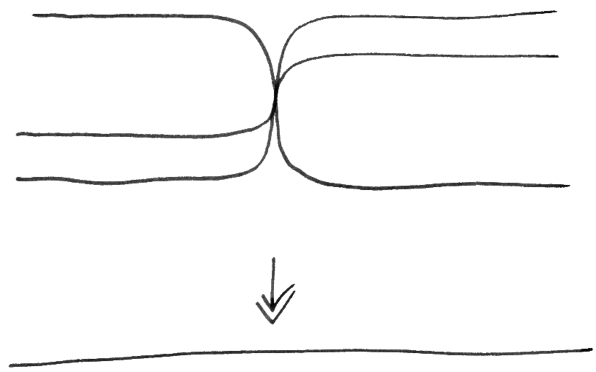
Ergänzung 4.1.6. Ein Modul über einem Ring heißt **treu** genau dann, wenn nur die Multiplikation mit dem Nullelement des Rings darauf die Nullabbildung liefert. Der vorhergehende Beweis zeigt allgemeiner: Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung und gibt es einen treuen B-Modul M, der endlich erzeugt ist als A-Modul, so ist B ganz über A. Ist darüber hinaus $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und gilt $bM \subset \mathfrak{a}M$ für ein $b \in B$, so erfüllt b sogar eine Ganzheitsgleichung der Gestalt $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$. Das Argument bleibt dasselbe.

4.1.7 (**Anschauung für ganze Kringerweiterungen**). Um für den Begriff einer ganzen Kringerweiterung eine Anschauung zu entwickeln, betrachte man den Fall, daß $A = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X ist und daß B nilpotentfrei ist und als A-Ring erzeugt wird von einem einzigen Element b. Ist $f \in \mathcal{O}(X)[T] = \mathcal{O}(X \times k)$ ein normiertes Polynom mit $f(b) = 0$, so ist B der Ring der polynomialen Funktionen auf einer abgeschlossenen Teilmenge des Nullstellengebildes $\mathcal{Z}(f) \subset X \times k$ und unsere Inklusion $A \subset B$ entspricht geometrisch der durch das Weglassen der letzten Koordinate definierten Abbildung. Die Faser über $x \in X$ besteht also aus den Wurzeln des Polynoms $f(x, T) \in k[T]$ und daß unser Polynom f normiert sein soll, bedeutet geometrisch, daß „an keiner Stelle $x \in X$ eine dieser Wurzeln nach Unendlich streben kann“.

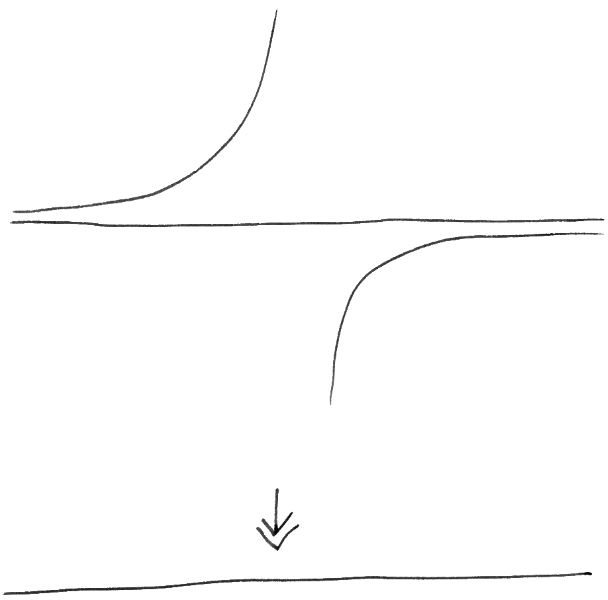
4.1.8. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung. Sind Elemente $x_1, \ldots, x_n \in B$ ganz über A, so ist $A[x_1, \ldots, x_n]$ nach 4.1.5 ganz über A. Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung, so bilden mithin alle über A ganzen Elemente von B einen Teilring von B. Der Kring aller über A ganzen Elemente von B heißt der **ganze Abschluß von** A **in** B.

4.1.9 (**Transitivität der Ganzheit von Kringerweiterungen**). Sind $C \supset B \supset A$ Kringe und ist C ganz über B und B ganz über A, so ist auch C ganz über A. Ist in der Tat $c \in C$ gegeben, so existiert für c eine Ganzheitsgleichung $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \ldots + b_0$ über B. Im Turm $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c] \supset A[b_0, \ldots, b_{n-1}] \supset A$ ist dann jede der beiden Ringerweiterungen modulendlich nach 4.1.5. Damit ist aber nach 1.9.12 auch die gesamte Ringerweiterung modulendlich und nach 4.1.5 ist folglich c ganz über A.

Lemma 4.1.10 (**Sandwich-Lemma**). *Gegeben ein Sandwich $B \supset A \supset k$ von Kringen mit B modulendlich über A und B ringendlich über k und k noethersch ist A ringendlich über k.*



Die Erweiterung $k[X,Y]/\langle Y^3 - X\rangle \supset k[X]$ ist ganz.



Die Erweiterung $k[X,Y]/\langle (XY-1)Y\rangle \supset k[X]$ ist nicht ganz. Formal zeigt das die Surjektion $k[X,Y]/\langle (XY-1)Y\rangle \twoheadrightarrow k[X,Y]/\langle (XY-1)\rangle \xrightarrow{\sim} k[X,X^{-1}]$ zusammen mit Beispiel 4.1.3.

Bemerkung 4.1.11. Ein Spezialfall dieses Lemmas, für das die Theorie ganzer Kringerweiterungen nicht in voller Stärke benötigt wird, bildet das Rückgrat des in 1.9.10 gegebenen Beweises für den Hilbert'schen Nullstellensatz in seiner körpertheoretischen Form. Wir werden das Sandwich-Lemma im weiteren Verlauf insbesondere beim „Verkleben von Punkten“ 4.2.15 benötigen.

Beweis. Wir wählen ein endliches Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_n$ von B als A-Modul, das gleichzeitig B als k-Kring erzeugt. Nach 4.1.5 finden wir für jedes Element dieses Erzeugendensystems eine Ganzheitsgleichung über A. Bezeichnet $K \subset A$ den von allen Koeffizienten dieser Gleichungen über k erzeugten Teilring, so erhalten wir ein Sandwich

$$B \supset A \supset K \supset k$$

mit B modulendlich über K und K ringendlich über k. Nach dem Hilbert'schen Basissatz 1.7.11 ist K also noethersch und damit A modulendlich über K und damit A ringendlich über k. $\square$

Beispiel 4.1.12. Ist k ein Körper und B eine ringendliche k-Kringalgebra, so ist jede Unterringalgebra $A \subset B$ endlicher Kodimension auch ringendlich über k. Zum Beispiel ist $A = \{P \mid P'(0) = 0\} = k + \langle T^2 \rangle \subset k[T]$ der Ring der polynomialen Funktionen auf der Neil'schen Parabel und $A = \{P \mid P(1) = P(-1)\} = k + \langle T^2 - 1 \rangle \subset k[T]$ der Ring der polynomialen Funktionen auf der nodalen Kubik, vergleiche 2.2.6.

Übungen

Übung 4.1.13. Man zeige, daß der ganze Abschluß von $\mathbb{C}[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle$ in seinem Quotientenkörper isomorph ist zum Polynomring $\mathbb{C}[T]$.

Übung 4.1.14. Man berechne die ganzen Abschlüsse von $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jeweils in ihren Quotientenkörpern.

Ergänzende Übung 4.1.15. Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung und B nullteilerfrei und gibt es ein Ideal $I \subset B$ mit $B = A \oplus I$, so ist außer den Elementen von A selbst kein Element von B ganz über A.

4.2 Going-up

Satz 4.2.1 (Ganze Kringerweiterungen und Primideale). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung. So gilt:*

1. *Jedes Primideal von A ist der Schnitt mit A eines Primideals von B. Das Herunterschneiden von Primidealen induziert also in Formeln eine Surjektion* $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$*;*

2. *Für je zwei echt ineinander enthaltene Primideale* $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ *des großen Krings* B *gilt auch für ihre Schnitte mit dem kleinen Kring* $(\mathfrak{q} \cap A) \subsetneq (\mathfrak{p} \cap A)$.

4.2.2. Der zweite Teil des Satzes impliziert insbesondere, daß das Urbild von $\operatorname{Max} A$ unter unserer Surjektion $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ genau $\operatorname{Max} B$ ist. Mit dem Beweis dieser Aussage in 4.2.4 werden wir gleich den Beweis des Satzes beginnen. Ist $A \subset B$ keine ganze Kringerweiterung, so muß das Herunterschneiden keine Surjektion auf den Primspektren liefern. Das einfachste Gegenbeispiel ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ein Gegenbeispiel im geometrischen Fall wäre die Erweiterung

$$k[X] \subset k[X, Y]/\langle XY - 1\rangle$$

die geometrisch der Projektion einer Hyperbel auf die x-Achse entspricht. Hier liegt der Ursprung nicht im Bild. in algebraischer Sprache kann also das Primideal $\langle X \rangle$ nicht durch Herunterschneiden erhalten werden.

Lemma 4.2.3. *Gegeben eine ganze Kringerweiterung zwischen Integritätsbereichen ist der eine Integritätsbereich ein Körper genau dann, wenn der andere ein Körper ist.*

Beweis. Sei $A \subset B$ unsere Kringerweiterung. Ist A ein Körper und $b \in B$ gegeben, so finden wir eine Gleichung

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

mit $n \geq 1$ und $a_i \in A$, und da B ein Integritätsbereich ist, dürfen wir bei $b \neq 0$ sogar annehmen $a_0 \neq 0$. Bringen wir nun a_0 auf die andere Seite, teilen durch $(-a_0)$ und klammern b aus, so erhalten wir das Inverse zu b. Also ist mit A auch B ein Körper. Ist umgekehrt B ein Körper, so besitzt jedes $a \in A$ ein Inverses $b \in B$, und multiplizieren wir eine Gleichung für b wie oben mit a^{n-1}, so folgt $b \in A$. Also ist mit B auch A ein Körper. □

Lemma 4.2.4. *Sei* $A \subset B$ *eine ganze Kringerweiterung und* $\mathfrak{p} \subset B$ *ein Primideal. Genau dann ist* $\mathfrak{p}$ *ein maximales Ideal in* B*, wenn* $A \cap \mathfrak{p}$ *ein maximales Ideal in* A *ist.*

Beweis. Wir betrachten die ganze Erweiterung von Integritätsbereichen

$$(A/A \cap \mathfrak{p}) \subset (B/\mathfrak{p})$$

und müssen nach 1.10.6 zeigen, daß der eine Integritätsbereich ein Körper ist genau dann, wenn der andere ein Körper ist. Das aber sagt gerade das vorhergehende Lemma 4.2.3. □

Bemerkung 4.2.5. Der folgende Beweis für den ersten Teil des Satzes benötigt das Zorn'sche Lemma, um in einer Lokalisierung eines Restklassenrings von B die Existenz eines maximalen Ideals sicherzustellen. Arbeiten wir mit noetherschen Kringen, so könnten wir das auch noch mit einer etwas schächeren Version des Auswahlaxioms zeigen. Im Anschluß zeigen wir noch, wie man die Aussagen des Satzes im Fall einer modulendlichen Kringerweiterung ohne das Zorn'sche Lemma zeigen kann.

Beweis des Satzes 4.2.1 über ganze Kringerweiterungen. 1. Sei $P \subset A$ ein Primideal. Wir lokalisieren am Komplement $S := A \backslash P$ von P in A und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \rightarrow & S^{-1}B \\ \cup & & \cup \\ A & \rightarrow & S^{-1}A \end{array}$$

dessen Vertikalen ganze Ringerweiterungen sind. Nun ist $S^{-1}P$ das einzige maximale Ideal von $S^{-1}A$ und $S^{-1}B$ ist nicht der Nullring. Mithin besitzt $S^{-1}B$ maximale Ideale, und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$ schneidet $S^{-1}A$ nach 4.2.4 im einzigen maximalen Ideal $S^{-1}P$. Das Urbild von $\mathfrak{m}$ in B ist also unser gesuchtes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{p} \cap A = P$.

2. Betrachten wir in A die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S := A \backslash \mathfrak{p}$, so ist $S^{-1}(A \cap \mathfrak{p})$ ein maximales Ideal in $S^{-1}A$. In $S^{-1}B$ haben wir jedoch $S^{-1}\mathfrak{q} \subsetneq S^{-1}\mathfrak{p}$. Folglich ist das Ideal $S^{-1}\mathfrak{q}$ nicht maximal in $S^{-1}B$, folglich ist $S^{-1}\mathfrak{q} \cap S^{-1}A = S^{-1}(\mathfrak{q} \cap A)$ nicht maximal in $S^{-1}A$ nach 4.2.4, folglich gilt $\mathfrak{q} \cap A \neq \mathfrak{p} \cap A$. □

Ergänzung 4.2.6 (*Beweis ohne Zorn im modulendlichen Fall*). Ist ganz allgemein $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein echtes Ideal, so ist auch das Erzeugnis $\langle \mathfrak{a} B \rangle$ von $\mathfrak{a}$ in B ein echtes Ideal. Das kann man aus 4.2.1 folgern, da jedes echte Ideal zu einem maximalen Ideal vergrößert weden kann, aber wir können es auch ohne Zorn zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir unsere Kringerweiterung dabei modulendlich annehmen, denn läßt sich die Eins von B als Linearkombination von Elementen von $\mathfrak{a}$ darstellen, so auch schon die Eins des von den Koeffizienten über A erzeugten Teilrings. Ist $b_1, \ldots, b_n$ ein Erzeugendensystem des A-Moduls B, so folgt aus $\langle \mathfrak{a} B \rangle = B$ die Existenz von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} b_1 & = & a_{11}b_1 & + \ldots + & a_{1n}b_n \\ & \vdots & & & \vdots \\ b_n & = & a_{n1}b_1 & + \ldots + & a_{nn}b_n \end{array}$$

mit $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ oder in Matrixschreibweise $\vec{b} = A\vec{b}$ alias $(A - I)\vec{b} = \vec{0}$. Multiplizieren wir mit der adjungierten Matrix, so folgt erst $\det(A - I) = 0$ und durch Auswerten der Determinante dann $1 \in \mathfrak{a}$ alias $\mathfrak{a} = A$. Um nun auch 4.2.1 im modulendlichen Fall ohne Zorn zu zeigen, bemerken wir, daß das einzige maximale Ideal $\mathfrak{a} = S^{-1}P$ von $S^{-1}A$ nach unserer Vorüberlegung ein echtes Ideal in $S^{-1}B$ erzeugt. Teilen wir diese Ideale weg, so erhalten wir eine modulendliche Kringerweiterung eines Körpers. Darin gibt es offensichtlich ein maximales Ideal, und dessen Urbild ist notwendig ein maximales Ideal in $S^{-1}B$. Nun kann der Beweis so weiterlaufen wie zuvor.

Korollar 4.2.7 (Going-up). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{b}$ des Krings B gibt es für jedes Primideal P von A mit $(\mathfrak{b} \cap A) \subset P$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ von B mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap A = P$, im Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{b} & \subset & \boxed{\mathfrak{p}} & \subset & B \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathfrak{b} \cap A & \subset & P & \subset & A \end{array}$$

Beweis. Wir gehen zur ganzen Kringerweiterung $A/(\mathfrak{b} \cap A) \subset B/\mathfrak{b}$ über und erinnern, daß nach 4.2.1 für jede ganze Kringerweiterung das Herunterschneiden eine Surjektion zwischen den Mengen der Primideale der jeweiligen Ringe induziert. □

Ergänzung 4.2.8. Dieser Satz wurde zuerst von Wolfgang Krull für nullteilerfreie Ringe bewiesen. Irvin Cohen und Abraham Seidenberg verallgemeinerten ihn dann auf den Fall beliebiger Ringe und vereinfachten gleichzeitig den Beweis. Wolfgang Krull begann sein Studium in Freiburg und kam auch zur Promotion wieder nach Freiburg, wo er zwei Jahre lang als außerordentlicher Professor tätig war.

4.2.9 (**Geometrie ganzer Kringerweiterungen**). Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt ganz allgemein **abgeschlossen** genau dann, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Teilmengen wieder abgeschlossen ist. Das Korollar kann geometrisch dahingehend formuliert werden, daß jede ganze Kringerweiterung $A \subset B$ eine abgeschlossene Surjektion $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ zwischen den Spektren der beteiligten Ringe induziert, die wir uns dafür mit ihrer Zariski-Topologie aus 3.2.11 versehen denken.

4.2.10 (**Herkunft der Bezeichnungen „Going-up“ und „Going-down“**). Der Name „Going-up“ bezieht sich darauf, daß man mit diesem Korollar erkennt, daß wir für jede Primidealkette $P_0 \subset P_1 \subset \ldots$ in A oder englisch „a chain of prime ideals going up“ und für jede Wahl eines Primideals $\mathfrak{p}_0$ im großen Kring B mit $\mathfrak{p}_0 \cap A = P_0$ eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots$ in B finden können mit $\mathfrak{p}_i \cap A = P_i$ für alle i. Das analoge „Going-down-Theorem“, bei dem man stattdessen absteigende Primidealketten in A betrachtet, gilt nur unter wesentlich stärkeren Voraussetzungen, vergleiche 4.6.5. Es mag merkwürdig wirken, daß hier die

„kleinen“ Primideale mit großen Buchstaben bezeichnet werden und die „großen“ Primideale mit kleinen Buchstaben. Das gefiel mir nur deshalb besser, weil so die meisten explizit notierten Primideale, wie es sich gehört, durch kleine Buchstaben in Fraktur notiert werden.

Satz 4.2.11 (Ganze Kringerweiterungen und Krulldimension). *Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung, so haben beide beteiligten Kringe dieselbe Krulldimension, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{kdim} B$$

Beweis. Nach 4.2.1.2 liefert jede echt aufsteigende Primidealkette von B durch Herunterschneiden eine echt aufsteigende Primidealkette von A. Nach dem Going-up Theorem 4.2.7 läßt sich umgekehrt jede echt aufsteigende Primidealkette von A induktiv zu einer echt aufsteigenden Primidealkette von B hochheben. □

Satz 4.2.12 (Endlichkeitskriterium für die Fasern eines Morphismus). *Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und B noethersch, so hat $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ endliche Fasern, d.h. das Urbild jedes Elements ist endlich.*

4.2.13. Einen geometrischen Spezialfall haben wir schon in 2.4.16 gesehen. Ein Gegenbeispiel für nicht noethersches B erhält man leicht, indem man etwa für A einen Körper und für B ein unendliches Produkt von Kopien von A nimmt. Ein Gegenbeispiel mit einem Integritätsbereich B erhält man, indem man etwa von $A = \mathbb{C}[X]$ ausgeht und als B den ganzen Abschluß von A in einem algebraischen Abschluß von $\mathbb{C}(X)$ nimmt: Die Fasern sind dann nach 4.6.8 die Galoisbahnen, und man kann sich überlegen, daß in diesem Fall alle Galoisbahnen von maximalen Idealen unendlich sind.

Beweis. Sei $P \in \operatorname{Spec} A$. So ist $\sqrt{\langle PB \rangle} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ nach 3.2.22 der Schnitt der endlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} B$, die $\langle PB \rangle$ enthalten. Sei nun $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = P$. So folgt $\mathfrak{q} \supset \sqrt{\langle PB \rangle}$, also $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}_i$ für ein i, also $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$ für ein i, denn nach Going-up 4.2.7 haben wir

$$\mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}_i \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{q} \cap A \supsetneq \mathfrak{p}_i \cap A \supset P$$ □

Beispiel 4.2.14. Der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Hinweis: Mit $a + b\sqrt{3}$ liegt auch $a - b\sqrt{3}$ im ganzen Abschluß, also $2a$, woraus folgt $2a \in \mathbb{Z}$ und $a^2 - 3b^2 \in \mathbb{Z}$, also $3(2b)^2 \in \mathbb{Z}$, also $2b \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $2a := \alpha$ und $2b := \beta$, so folgt weiter $\alpha^2 - 3\beta^2 \in 4\mathbb{Z}$. Quadrate in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind aber nur 0 und 1, woraus folgt $\alpha^2, \beta^2 \in 4\mathbb{Z}$ und damit $a, b \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.2.15 (Verkleben von Punkten). $(k = \bar{k})$. *Seien X eine affine Varietät und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y,* *bei der alle Fasern endlich und fast alle Fasern einelementig sind. So wird Y mit den regulären Funktionen $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ wieder eine affine Varietät.*

Beweis. Offensichtlich brauchen wir nur den Fall zu betrachten, daß es genau zwei Punkte $p, q \in X$ gibt mit $p \neq q$ aber $\varphi(p) = \varphi(q)$. In $\mathcal{O}(X)$ hat der Teilring $A := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(p) = f(q)\}$ dann endliche Kodimension und ist nach dem Sandwich-Lemma 4.1.10 insbesondere ringendlich über k. Andererseits ist $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über A. Nach unseren allgemeinen Erkenntnissen 4.2.2 über ganze Ringerweiterungen liefert also der Homomorphismus $A \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ eine Surjektion $\pi : \operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \operatorname{Max} A$. Daß hier die Faser über $\pi(p) = \pi(q)$ genau aus den beiden Elementen p und q besteht und daß alle anderen Fasern einelementig sind, scheint mir offensichtlich: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X \backslash \{p, q\}$ gibt es ja eine reguläre Funktion mit $f(x) = 1$ und $f(y) = f(p) = f(q) = 0$. Folglich existiert eine Bijektion $\kappa : \operatorname{Max} A \xrightarrow{\sim} Y$ mit $\kappa \circ \pi = \varphi$. Per definitionem entsprechen unter dieser Bijektion die regulären Funktionen auf der affinen Varietät $\operatorname{Max} A$ genau den Funktionen aus dem eben definierten Teilring $\mathcal{O}(Y) \subset \operatorname{Ens}(Y, k)$. Damit muß dann auch $(Y, \mathcal{O}(Y))$ eine affine Varietät sein. □

Übungen

Übung 4.2.16. Zeigen Sie die letzte Behauptung aus 2.2.6, daß sich für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper jede Lösung der Gleichung $x^3 + x^2 = y^2$ in der Form $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ mit $t \in k$ schreiben läßt.

Ergänzende Übung 4.2.17. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Ist der Komorphismus ganz, so ist φ abgeschlossen.

Übung 4.2.18. Wir erhalten die nodale Kubik, wenn wir zwei verschiedene Punkte der affinen Gerade miteinander verkleben.

4.3 Quotienten nach endlichen Gruppen*

Satz 4.3.1 (Noether). *Ist A ein Kring und operiert eine endliche Gruppe G auf A durch Ringhomomorphismen, so ist A ganz über dem Invariantenring A^G. Ist k ein noetherscher Kring und A ringendlich über k und operiert G durch k-lineare Automorphismen, so ist auch der Invariantenring A^G ringendlich über k.*

4.3.2. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch noch, wenn wir statt der Endlichkeit von G schwächer nur fordern, daß alle Bahnen von G in A endlich sein sollen. Dieser Fall tritt typisch bei der Wirkung von Galoisgruppen auf.

Beweis. Jedes $a \in A$ ist Nullstelle des normierten Polynoms $\prod_{b \in Ga}(X - b)$ aus $A^G[X]$, folglich ist A ganz über A^G. Ist A ringendlich über k, so ist es auch ringendlich über A^G und damit modulendlich über A^G nach 4.1.5. Nach dem Sandwichlemma 4.1.10 ist damit A^G ringendlich über k. □

Satz 4.3.3 (Quotienten affiner Varietäten nach endlichen Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Operiert eine endliche Gruppe G auf einer affinen k-Varietät X, so wird der Bahnenraum X/G mit $\mathcal{O}(X/G) := \{f : X/G \to k \mid f \circ \operatorname{can} \in \mathcal{O}(X)\}$ auch eine affine Varietät.*

4.3.4. Unter den Annahmen des Satzes liefert die kanonische Abbildung insbesondere einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X/G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)^G$$

zwischen den regulären Funktionen auf dem Bahnenraum und den G-invarianten regulären Funktionen auf X.

Beweis. Nach 4.3.1 ist der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^G$ ringendlich über k, und nilpotentfrei ist er eh. Damit entspricht er einer affinen k-Varietät. Der von der Einbettung von k-Ringalgebren $\mathcal{O}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ induzierte Morphismus von affinen Varietäten $\pi : X \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ ist sicher konstant auf G-Bahnen und induziert folglich eine Abbildung

$$X/G \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da bereits $X \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ surjektiv ist nach 4.2.2, angewandt auf die ganze Ringerweiterung $\mathcal{O}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$. Wir zeigen, daß sie auch injektiv und damit bijektiv ist. Nach 2.1.14 gibt für je zwei G-Bahnen eine reguläre Funktion, die auf der einen Bahn verschwindet und auf der anderen konstant den Wert Eins annimmt. Das Produkt über alle G-Verschobenen einer derartigen Funktion ist dann sogar eine invariante Funktion mit besagter Eigenschaft. Die Existenz einer solchen Funktion zeigt, daß unser Morphismus auf den zugrundeliegenden Punktmengen auch injektiv ist. Per definitionem entsprechen unter unserer Bijektion $X/G \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ die regulären Funktionen auf der affinen Varietät $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ genau den Funktionen aus dem eben definierten Teilring $\mathcal{O}(X/G) \subset \operatorname{Ens}(X/G, k)$. Damit muß dann auch $(X/G, \mathcal{O}(X/G))$ eine affine Varietät sein. □

Ergänzung 4.3.5. Operiert die endliche Gruppe G auf der affinen k-Varietät X und ist $p \in X/G$ ein Punkt des Quotienten, so nenne ich den Restklassenring $\mathcal{O}(X)/\langle \mathfrak{m}_p \rangle$ den **Faserring bei** p. In der Tat wird sich sein Spektrum als die „schementheoretische Faser bei p" der Projektionsabbildung erweisen. Mit $\langle \mathfrak{m}_p \rangle$ ist hierbei das von $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}(X/G)$ in $\mathcal{O}(X)$ erzeugte Ideal gemeint.

Übungen

Übung 4.3.6. Man zeige, daß die Quotientenvarietät $\mathbb{C}^2/\{\pm \mathrm{id}\}$ isomorph ist zum Kegel $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$. Idem, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik ersetzt.

Übung 4.3.7. $(k = \bar{k})$. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ operiert auf der Varietät k^n durch Vertauschen der Koordinaten. Man zeige, daß der durch die elementarsymmetrischen Polynome $(s_1, \ldots, s_n) : k^n \to k^n$ gegebene Morphismus einen Isomorphismus

$$k^n/\mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} k^n$$

induziert. Hinweis: Das ist wenig mehr als eine geometrische Formulierung des Hauptsatzes über symmetrische Polynome [AL] 2.8.6.

4.4 Noether-Normalisierung

4.4.1. Ich erinnere [AL] 2.1.18: Gegeben Kringe $A \subset B$ heißt eine Familie $a_1, \ldots, a_n$ von Elementen von B **algebraisch unabhängig über** A genau dann, wenn der Einsetzungshomomorphismus $A[T_1, \ldots, T_n] \to B$ mit $T_i \mapsto a_i$ injektiv ist. Ich schreibe dann für sein Bild auch $A['a_1, \ldots, a_n]$ mit einem Freiheitsstrichlein an der eröffnenden Klammer. Ist besagter Einsetzungshomomorphismus nicht injektiv, so heißt unsere Familie **algebraisch abhängig über** A.

Proposition 4.4.2 (Noether-Normalisierung von Hyperflächen). *Gegeben ein Körper k und ein nichtkonstantes Polynom $f \in k['X_1, \ldots, X_n]\backslash k$ gibt es eine Einbettung von k-Kringen $k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \hookrightarrow k['X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle$, die eine ganze Kringerweiterung ist.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall eines unendlichen Grundkörpers k und haben in Multiindexnotation $f = \sum c_\alpha X^\alpha$. Die homogene Komponente von f von maximalem Grad im Sinne von [AL] 2.8.10 liefert eine Funktion auf dem k^n, die bei einem unendlichen Grundkörper k nicht identisch verschwinden kann und die demnach an einer Stelle $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ nicht Null ist. Diese Stelle kann nicht der Ursprung sein. Machen wir eine lineare Koordinatentransformation und wählen in anderen Worten neue Erzeuger $Y_1, \ldots, Y_n$ als Linearkombinationen der alten, so können wir mithin erreichen, daß die homogene Komponente von maximalem Grad bei $(0, \ldots, 0, 1)$ nicht verschwindet. Das bedeutet jedoch gerade, daß in den neuen Variablen f ein skalares Vielfaches eines normierten Polynoms positiven Grades aus dem Polynomring $(k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}])[Y_n]$ ist, also eines normierten Polynoms positiven Grades aus dem Polynomring mit Koeffizienten in $k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$. Damit ist klar, daß

$$k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \to k['X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle = (k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}])[Y_n]/\langle f \rangle$$

ein injektiver ganzer Kringhomomorphismus ist. Im Fall eines endlichen Grundkörpers gelingt derselbe Trick, wenn man auch nichtlineare Variablentransformationen zuläßt. Sei etwa β maximal in der lexikographischen Ordnung mit $c_\beta \neq 0$. Wählen wir als neue Erzeuger $Y_i = X_i + X_n^{r_i}$ für $i < n$ und $Y_n = X_n$ und suchen uns dafür r_i mit der Eigenschaft, daß gilt $\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \ldots + \beta_{n-1} r_{n-1} + \beta_n > \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_{n-1} r_{n-1} + \alpha_n$ für alle Multiindizes $\alpha \neq \beta$ mit $c_\alpha \neq 0$, so wird wieder f bis auf einen Skalar ein normiertes Polynom in $(k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}])[Y_n]$ sein und wir können den Beweis in derselben Weise beenden. Mögliche r_i mag man finden, indem man sie induktiv von oben so wählt, daß für alle α mit $c_\alpha \neq 0$, die sich erst in der i-ten Stelle von β unterscheiden, gilt $\beta_i r_i + \ldots + \beta_{n-1} r_{n-1} + \beta_n > \alpha_i r_i + \ldots + \alpha_{n-1} r_{n-1} + \alpha_n$. □

Satz 4.4.3 (Krulldimension von Polynomringen). *Gegeben ein Körper k ist die Krulldimension des Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau n, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n] = n$$

4.4.4. Im geometrischen Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ ist insbesondere die Krulldimension des k^n genau n.

Beweis. Sei k ein Körper. Daß die Krulldimension von $k[T_1, \ldots, T_n]$ mindestens n ist, scheint mir offensichtlich. Die andere Abschätzung $\operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n] \leq n$ zeigen wir durch Induktion über n. Ist $\mathfrak{p}$ ein von Null verschiedenes Primideal, so gibt es in $\mathfrak{p}$ ein nichtkonstantes Polynom f und dann erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{kdim}(k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{p}) & \leq & \operatorname{kdim}(k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle) \\ & = & \operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_{n-1}] \\ & = & n-1 \end{array}$$

nach der Normalisierung für Hyperflächen 4.4.2 und Satz 4.2.11 über die Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen. Gegeben eine Kette von Primidealen $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l$ in $k[T_1, \ldots, T_n]$ erhalten wir aber im Quotienten nach $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_1$ eine Primidealkette aus genau l Primidealen und folgern so damit aus dem vorhergehenden $l - 1 \leq n - 1$ alias $l \leq n$. □

Korollar 4.4.5 (Krull'scher Hauptidealsatz für Polynomringe). *Sei k ein Körper. Gegeben nichtkonstantes Polynom $f \in k['T_1, \ldots, T_d] \backslash k$ hat der Restklassenring nach dem von diesem Polynom erzeugten Hauptideal die Krulldimension*

$$\operatorname{kdim} k['T_1, \ldots, T_d]/\langle f \rangle = d - 1$$

4.4.6. Geometrisch gesagt hat also für einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und $f \in k['T_1, \ldots, T_d]$ ein von Null verschiedenes Polynom positiven Grades seine Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(f)$ die Krulldimension $d-1$. Stärkere Aussagen in dieser Richtung wird der Krull'sche Hauptidealsatz 4.8.4 und insbesondere sein Korollar 4.8.8 liefern.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Normalisierung für Hyperflächen 4.4.2 und der Kenntnis der Krulldimension von Polynomringen 4.4.3 und der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen 4.2.11. □

4.4.7. Sei X ein irreduzibler topologischer Raum endlicher Krulldimension. Ist $Y \subsetneq X$ eine irreduzible Teilmenge von X, so nennen wir die Differenz der Dimensionen die **Ko-Krulldimension** oder auch einfacher **Kodimension von Y in X** und notieren sie

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Y =: \operatorname{cokdim}(Y \subset X)$$

Unter einer **Hyperfläche in X**, genauer einer **abgeschlossenen Hyperfläche in X** verstehen wir eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subsetneq X$, deren irreduzible Komponenten in X alle die Kodimension Eins haben. In 4.6.11 werden wir zeigen, daß diese Kodimension im Fall affiner Varietäten mit unserer relativen Krulldimension $\operatorname{kdim}(Y \subset X)$ übereinstimmt.

Satz 4.4.8 (**Noether's Normalisierungslemma**). *Ist k ein Körper und A ein von Null verschiedener ringendlicher k-Kring, so gibt es $x_1, \ldots, x_d \in A$ algebraisch unabhängig über k derart, daß A ganz ist über $k[' x_1, \ldots, x_d]$.*

4.4.9. Nach der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen 4.2.11 muß die Zahl der algebraisch unabhängigen Elemente d in diesem Satz genau die Krulldimension von A sein.

4.4.10 (**Noether-Normalisierung im geometrischen Fall**). Wird ein von Null verschiedener k-Kring A erzeugt von einem k-Untervektorraum V und ist k unendlich, so zeigen wir beim Beweis des Normalisierungslemmas sogar, daß die $x_1, \ldots, x_d$ aus V gewählt werden können. Geometrisch bedeutet das, daß wir im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k für jede Zariski-abgeschlossene Teilmenge $X \subsetneq k^n$ eine lineare Abbildung $k^n \to k^d$ so finden können, daß ihre Restriktion $X \to k^d$ auf den regulären Funktionen einer ganzen Ringerweiterung $\mathcal{O}(k^d) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ entspricht. Hierbei muß natürlich unsere lineare Abbildung notwendig eine Surjektion $k^n \twoheadrightarrow k^d$ sein und im Fall $X \neq k^n$ gilt $d < n$.

Beweis. Induktion über die minimal mögliche Zahl von Erzeugern unserer k-Algebra A. Brauchen wir gar keinen Erzeuger, so folgt aus unserer Annahme $A \neq 0$ bereits $k = A$ und wir sind fertig mit $d = 0$. Sei sonst $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem mit so wenig Elementen wie möglich. Sind sie algebraisch unabhängig über k, so sind wir schon fertig. Sonst finden wir zwischen ihnen eine nichttriviale Relation f und erhalten mit der Normalisierung für Hyperflächen 4.4.2 Homomorphismen von k-Kringen

$$k[' Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \hookrightarrow k[' X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle \twoheadrightarrow A$$

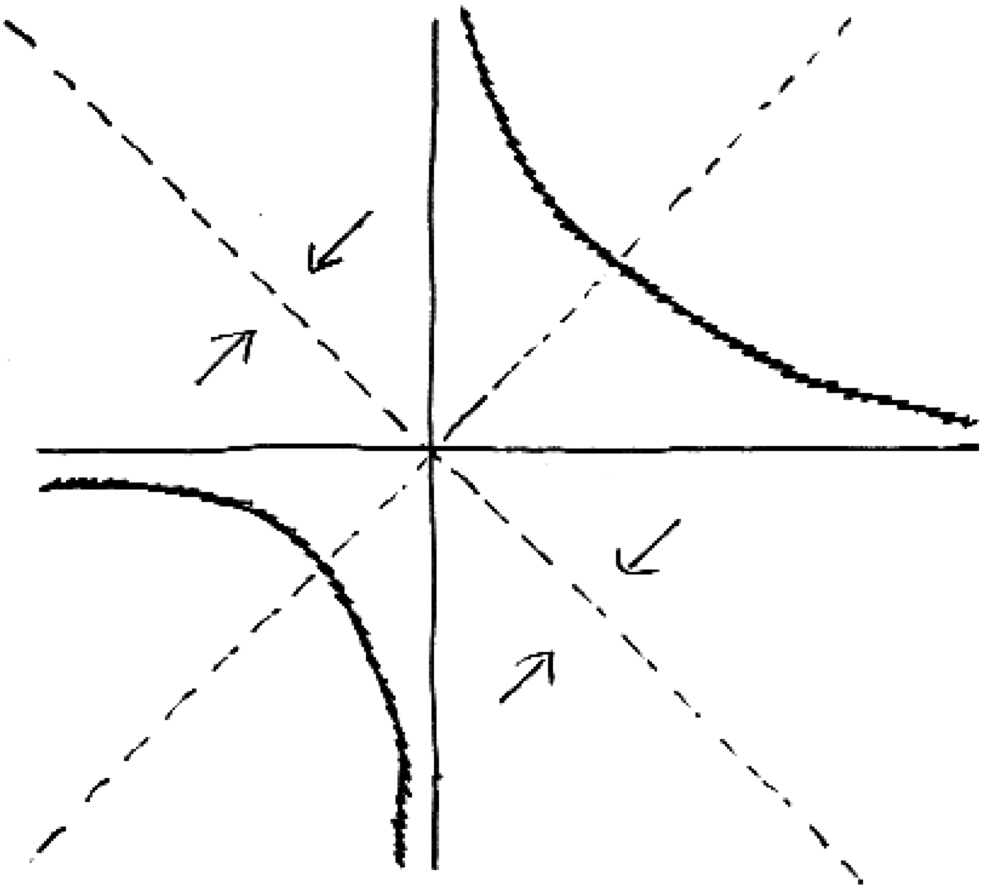


Illustration zum Noether'schen Normalisierungslemma, genauer seiner in 4.4.10 formulierten Verfeinerung im Fall eines unendlichen Grundkörpers. Hier ist $A = k[x, y]/\langle xy \rangle$ die Algebra der regulären Funktionen auf einer Hyperbel. Sie ist weder ganz über $k[x]$ noch ganz über $k[y]$, aber wählen wir eine geeignete Linearkombination dieser Erzeuger, etwa $x_1 := x - y$, so ist A ganz über $k[x_1]$. In der Tat haben wir ja $x^2 - x_1 x = 0$ und $y^2 + x_1 y = 0$. Geometrisch bedeutet das, daß im neu gestrichelt eingezeichneten Koordinatensystem „auf keinem Zweig unserer Kurve die zweite Koordinate, etwa $y_1 := x + y$ oder auch irgendeine andere mögliche zweite Koordinate, ins Unendliche strebt, wenn wir die Koordinate x_1 auf der Nebendiagonalen gegen einen Punkt im Endlichen streben lassen".

derart, daß die erste Inklusion eine ganze Ringerweiterung ist. Das Bild dieser Verknüpfung ist dann ein Teilring $B \subset A$ derart, daß A ganz ist über B und daß B über k bereits von $n-1$ Elementen erzeugt wird. Induktion im Verein mit der Transitivität der Ganzheit 4.1.9 beendet dann den Beweis. □

4.4.11 (**Alternativer Beweis des Nullstellensatzes**). Der Noether'sche Normalisierungssatz 4.4.8 in Verbindung mit Going-up 4.2.7 oder vielmehr dem bei seinem Beweis benötigten Lemma 4.2.4 eröffnet einen alternativen Zugang zum Nullstellensatz, der mir besonders anschaulich scheint. Das einzige Problem dabei ist, daß diese Anschaulichkeit erst über die Brücke 2.2.4 zwischen Ringen und Räumen erreicht wird, die ihrerseits auf dem Nullstellensatz beruht. Aber sei's drum: Es gilt zu zeigen, daß für jedes maximale Ideal eines Polynomrings $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ über einem Körper k, den sich der Leser der besseren Anschaulichkeit halber algebraisch abgeschlossen denken mag, die offensichtliche Abbildung eine algebraische Körpererweiterung

$$k \hookrightarrow k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$$

liefert. Nach dem Normalisierungssatz können wir $x_1, \ldots, x_d \in k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ finden derart, daß $x_1, \ldots, x_d$ algebraisch unabhängig sind über k und daß der Restklassenring $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ ganz ist über $k[x_1, \ldots, x_d]$. Nach 4.2.4 ist dann auch $k[x_1, \ldots, x_d]$ ein Körper. Das zeigt $d = 0$ und damit die Behauptung.

Korollar 4.4.12. *Seien k ein Körper und $A \subset B$ ringendliche Integritätsbereiche über k. So gibt es $t \in A \backslash 0$ und über A algebraisch unabhängige Elemente $z_1, \ldots, z_d \in B$ mit B_t ganz über $A_t['z_1, \ldots, z_d]$.*

4.4.13 (**Faktorisierungssatz**). Im geometrischen Fall $k = \bar{k}$ bedeutet das Korollar unter Verwendung von 2.4.18: Für jeden dominanten Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen affinen Varietäten existiert ein $t \in \mathcal{O}(Y) \backslash 0$ derart, daß $\varphi : \varphi^{-1}(Y_t) \to Y_t$ faktorisiert als

$$\varphi^{-1}(Y_t) \to k^d \times Y_t \to Y_t$$

wobei der erste Morphismus einer ganzen Ringerweiterung entspricht, also insbesondere surjektiv ist, und der zweite die Projektion auf den hinteren Faktor ist. Insbesondere nimmt eine reguläre Funktion auf einer Varietät entweder nur endlich viele Werte an oder aber alle Werte mit höchstens endlich vielen Ausnahmen. Ich muß noch darüber nachdenken, ob es dafür nicht auch einen einfacheren Beweis geben könnte.

Beweis. Zunächst sei $S := A \backslash 0$. Sicher ist $S^{-1}B$ ringendlich über dem Körper $S^{-1}A$. Nach Noether's Normalisierungslemma 4.4.8 finden wir $z_1, \ldots, z_d \in$

$S^{-1}B$ mit $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A['z_1, \ldots, z_d]$. Durch Wegmultiplizieren der Nenner dürfen wir sogar $z_1, \ldots, z_d \in B$ annehmen. Nach Annahme können wir auch ein endliches Erzeugendensystem der k-Ringalgebra B wählen. Jetzt betrachten wir je eine Ganzheitsgleichung über $S^{-1}A['z_1, \ldots, z_d]$ für jeden dieser Erzeuger und nehmen als $t \in S$ einen Hauptnenner für alle diese Ausdrücke. □

Korollar 4.4.14 (über Bilder von Morphismen). *Gegeben ein Morphismus von affinen Varietäten umfaßt das Bild stets eine offene dichte Teilmenge seines Abschlusses.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem Faktorisierungssatz 4.4.13. □

Satz* 4.4.15 (Differentielles Dominanzkriterium für affine Räume). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom und $X := k^n \backslash \mathcal{Z}(f)$ das Komplement seiner Nullstellenmenge und $\varphi : X \to k^m$ ein Morphismus. Induziert für einen Punkt $x \in X$ der Komorphismus eine Injektion $\mathfrak{m}_{\varphi(x)}/\mathfrak{m}^2_{\varphi(x)} \hookrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x$, so umfaßt $\varphi(X)$ eine offene Teilmenge von k^m.*

4.4.16. Dieses Kriterium ist insbesondere in der Theorie der Liealgebren oft hilfreich. Im weiteren Verlauf dieser Vorlesung spielt es dahingegen keine Rolle. In der Sprache der Differentiale aus [AAG] **??** besagt unserer Bedingung, daß das Differential bei x eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_y Y$ sein soll. Eine Variante in dieser Sprache und in größerer Allgemeinheit zeigen wir in [AAG] **??**.

Beweis. Wir setzen $y := \varphi(x)$. Offensichtlich folgt aus unserer Annahme, daß unser Morphismus φ eine Injektion $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_y} \mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{X,x}$ der assozierten graduierten Ringe induziert. Da unsere Filtrierungen ausschöpfend und Hausdorff sind, folgt mit 5.1.15 die Injektivität $\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ des Komorphismus und φ ist dominant. Unser Satz folgt damit aus Korollar 4.4.14 über Bilder von Morphismen. □

Übungen

Übung 4.4.17 (**Irreduzible Hyperflächen in k^n**). $(k = \bar{k})$. Man zeige: Das Bilden der Nullstellenmenge liefert für beliebiges $n \geq 0$ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible Polynome} \\ \text{in } k[T_1, \ldots, T_n], \\ \text{bis auf Einheiten} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene irreduzible} \\ \text{Teilmengen des } k^n \\ \text{der Dimension } n-1 \end{array} \right\} \\ [f] & \mapsto & \mathcal{Z}(f) \end{array}$$

oder in der Notation 3.1.34 mit den im Vorhergehenden erklärten Begriffsbildungen kürzer $\mathrm{irk}(k[T_1, \ldots, T_n]) \stackrel{\sim}{\to} \{\text{Irreduzible Hyperflächen in } k^n\}$. Diese Aussage wird sich später als Spezialfall von 4.8.8 erweisen.

Übung 4.4.18. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und zwei nichtleere algebraische Teilmengen $X \subset_{\mathrm{A}} k^n$ und $Y \subset_{\mathrm{A}} k^m$ zeige man die Formel $\operatorname{kdim}(X \times Y) = \operatorname{kdim} X + \operatorname{kdim} Y$. Hinweis: Noether-Normalisierung 4.4.8.

4.5 Transzendenzgrad

4.5.1. Ich erinnere an den Satz [AL] 3.11.3 über algebraische Körpererweiterungen und insbesondere daran, daß für Körper $M \supset L \supset K$ mit M/L algebraisch und L/K algebraisch auch M/K algebraisch ist.

Definition 4.5.2. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine Teilmenge $E \subset K$ heißt **algebraisch abhängig über** k genau dann, wenn wir paarweise verschiedene $x_1, \ldots, x_n \in E$ und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[X_1, \ldots, X_n] \backslash 0$ finden können mit $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Andernfalls nennen wir unsere Teilmenge E **algebraisch unabhängig über** k.

Definition 4.5.3. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine Teilmenge $E \subset K$ heißt ein **System von Transzendenzerzeugern** genau dann, wenn K algebraisch ist über dem von E erzeugten Teilkörper.

4.5.4. Offensichtlich ist jedes minimale System von Transzendenzerzeugern algebraisch unabhängig und jede maximale algebraisch unabhängige Teilmenge ist ein System von Transzendenzerzeugern. Hierbei sind die Begriffe minimal und maximal in Bezug auf die Inklusionsrelation zu verstehen.

Satz 4.5.5 (Austauschsatz). *Gegeben K/k eine Körpererweiterung, $E \subset K$ ein System von Transzendenzerzeugern und $A \subset K$ eine endliche über k algebraisch unabhängige Teilmenge gibt es eine Injektion $\varphi : A \hookrightarrow E$ derart, daß auch $(E \backslash \varphi(A)) \cup A$ ein System von Transzendenzerzeugern ist.*

4.5.6. Mit dem Zorn'schen Lemma kann man dasselbe auch zeigen, ohne A als endlich vorauszusetzen. Man argumentiert dazu analog wie in [AL] 5.3.5.

Beweis. Das folgt leicht induktiv aus dem Austauschlemma 4.5.7, das wir im Anschluß beweisen. Es erlaubt uns nämlich, die Elemente von A der Reihe nach in E hineinzutauschen. □

Lemma 4.5.7 (Austauschlemma). *Seien K/k eine Körpererweiterung und $E \supset B$ ein System von Transzendenzerzeugern mit einer über k algebraisch unabhängigen Teilmenge. Ist $a \in K \backslash B$ ein Element außerhalb von B derart, daß auch $B \cup \{a\}$ über k algebraisch unabhängig ist, so gibt es $e \in E \backslash B$ derart, daß auch $(E \backslash e) \cup \{a\}$ ein System von Transzendenzerzeugern von K/k ist.*

Beweis. Bezeichne $K' \subset K$ den von E über k erzeugten Teilkörper. Da a algebraisch ist über K', finden wir ein Polynom

$$P(X, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_r)$$

mit Koeffizienten in k sowie $b_1, \ldots, b_n \in B$ und $e_1, \ldots, e_r \in E \backslash B$ derart, daß nach Einsetzen von $b_1, \ldots, b_n, e_1, \ldots, e_r$ für $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_r$ ein von Null verschiedenes Polynom in $K'[X]$ entsteht, das bei $X = a$ eine Nullstelle hat. Wir können hierbei zusätzlich r kleinstmöglich annehmen und haben dennoch $r \geq 1$, da $\{a\} \cup B$ ja nach Annahme über k algebraisch unabhängig ist. Nun fassen wir P als Polynom in Y_1 auf und schreiben

$$P = \sum_{\mu} P_\mu Y_1^\mu$$

mit Polynomen $P_\mu = P_\mu(X, X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_r)$ in den übrigen Variablen als Koeffizienten. Für mindestens ein μ ist $P_\mu(X, b_1, \ldots, b_n, e_2, \ldots, e_r)$ als Polynom von X nicht das Nullpolynom, da ja sonst auch $P(X, b_1, \ldots, b_n, e_1, e_2, \ldots, e_r)$ als Polynom von X das Nullpolynom sein müßte, im Widerspruch zu unseren Annahmen. Für diese P_μ erhalten wir beim Einsetzen notwendig ein von Null verschiedenes Körperelement $P_\mu(a, b_1, \ldots, b_n, e_2, \ldots, e_r) \neq 0$, da wir ja r kleinstmöglich gewählt hatten. Lassen wir also Y_1 als Unbestimmte stehen, setzen ansonsten in alle Variablen ein wie zuvor, und setzen auch a für X ein, so erhalten wir ein Polynom in Y_1, das nicht das Nullpolynom ist, weil ja der Koeffizient von Y_1^μ nicht für alle μ Null ist, das aber nach Einsetzen von e_1 für Y_1 verschwindet. Folglich ist e_1 algebraisch über dem von $(E \backslash e_1) \cup \{a\}$ erzeugten Teilkörper. □

Beispiel 4.5.8. Das folgende Beispiel zeigt, vor welchen Fallen man sich beim Beweis hüten muß. Sei etwa $K = k(S, T)$ und $a = T^2$ und $e_1 = S$ und $e_2 = T$. Das Polynom $P = (X - Y_2^2)(Y_1^2 - 1) = XY_1^2 - X - Y_1^2 Y_2^2 + Y_2^2$ verschwindet zwar beim Einsetzen von $a = X$, $e_1 = Y_1$ und $e_2 = Y_2$, in Formeln $P(a, e_1, e_2) = 0$, aber dennoch liefert es keine algebraische Abhängigkeit von $e_1 = S$ über $k(a, e_2) = k(T)$. Derartigem Ärger haben wir beim obigen Beweis durch die Forderung vorgebeugt, daß r kleinstmöglich sein soll.

Definition 4.5.9. Eine **Transzendenzbasis** einer Körpererweiterung ist ein algebraisch unabhängiges System von Transzendenzerzeugern.

Satz 4.5.10 (Kardinalitäten von Transzendenzbasen). *Jede Körpererweiterung mit einem endlichen System von Transzendenzerzeugern besitzt eine endliche Transzendenzbasis und je zwei ihrer Transzendenzbasen haben gleich viele Elemente.*

Beweis. Genau wie [LA1] 1.7.6. □

4.5.11. Mit dem Zorn'schen Lemma zeigt man analog wie in [AL] 5.3.4 allgemeiner, daß jede Körpererweiterung eine Transzendenzbasis besitzt und daß je zwei ihrer Transzendenzbasen dieselbe Kardinalität haben.

Definition 4.5.12. Die Kardinalität einer und jeder Transzendenzbasis einer Körpererweiterung mit einem endlichen System von Transzendenzerzeugern heißt ihr **Transzendenzgrad** und wird notiert

$$\operatorname{trgr}(K/k) = \operatorname{trgr}_k K$$

Besitzt eine Körpererweiterung kein endliches System von Transzendenzerzeugern, so setzten wir $\operatorname{trgr}(K/k) = \infty$ und ignorieren in unserer Notation im allgemeinen die auch hier durchaus möglichen Unterscheidungen zwischen verschiedenen unendlichen Kardinalitäten.

Korollar 4.5.13. *Sei k ein Körper. Gibt es einen Isomorphismus von k-Kringen $k('X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{\sim} k('Y_1, \ldots, Y_m)$, so gilt $m = n$.*

Korollar 4.5.14 (Transzendenzgrad als Krulldimension). *Gegeben ein ringendlicher Integritätsbereich A über einem Körper k stimmt die Krulldimension des Krings A überein mit dem Transzendenzgrad über k seines Quotientenkörpers, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{trgr}_k \operatorname{Quot}(A)$$

Beweis. Wir wählen mit dem Normalisierungslemma 4.4.8 über k algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_d \in A$ derart, daß A ganz ist über dem Polynomring $k['x_1, \ldots, x_d]$, und finden

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{kdim} k['x_1, \ldots, x_d] = d = \operatorname{trgr}_k k('x_1, \ldots, x_d) = \operatorname{trgr}_k \operatorname{Quot}(A)$$

mit der Invarianz 4.2.11 der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen, der Berechnung 4.4.3 der Krulldimension von Polynomringen, und der Invarianz 4.5.10 des Transzendenzgrades unter algebraischen Körpererweiterungen. □

Ergänzung 4.5.15. Als abstrakter Körper besitzt $\mathbb{C}$ eine Transzendenzbasis B über $\mathbb{Q}$. Wäre B abzählbar, so wäre auch $\mathbb{Q}(_! B)$ abzählbar und damit nach [AL] 5.3.12 auch eine algebraische Erweiterung $\mathbb{C}$. Da dem nicht so ist, muß B überabzählbar und insbesondere unendlich sein, und daraus folgt dann mit [AL] 5.3.12 leicht $|B| = |\mathbb{Q}(_! B)| = |\mathbb{C}|$. Als abstrakter Körper ist $\mathbb{C}$ also isomorph zum algebraischen Abschluß eines Funktionenkörpers über $\mathbb{Q}$ in überabzählbar vielen, genauer in $|\mathbb{C}|$ Veränderlichen. Insbesondere besitzt $\mathbb{C}$ jede Menge Körperautomorphismen, und es gibt auch zahllose nicht surjektive Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Das steht in scharfem Kontrast zum Körper $\mathbb{R}$, nach [AN1] 1.5.18 gibt es nämlich außer der Identität keinen Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 4.5.16. Das **vierzehnte Hilbert'sche Problem** fragt, ob für eine endlich erzeugte Körpererweiterung $k \subset K$ und einen Zwischenkörper $E \subset K$ und einen „Zwischenring“ $R \subset K$, der als Ring über k endlich erzeugt ist, auch $R \cap E$ ein über k endlich erzeugter Ring sein muß. Nagata fand dazu das erste Gegenbeispiel. Inzwischen sind viele weitere Gegenbeispiele bekannt, von Mukai, Winkelmann, Steinberg, Kuroda und anderen.

Ergänzung 4.5.17. Gegeben $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ besagt die **Vermutung von Schanuel**, daß der von den α_i und den Werten der Exponentialfunktion bei α_i erzeugte Unterkörper der komplexen Zahlen

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n))$$

über $\mathbb{Q}$ mindestens den Transzendenzgrad n haben sollte. Im Spezialfall algebraischer α_i spezialisiert er zum Satz von Hermite-Lindemann, den wir in [AN2] **??** erwähnt aber nicht bewiesen haben.

Vorschau 4.5.18. Eindimensionale holomorphe Mannigfaltigkeiten heißen auch „Riemann'sche Flächen“, da sie erstmals von dem Mathematiker Bernhard Riemann betrachtet wurden und als reelle Mannigfaltigkeiten zweidimensional sind. Die Zuordnung, die jeder zusammenhängenden Riemann'schen Fläche X den Körper $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf X zuordnet, liefert eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{kompakte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Riemann'sche Flächen} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{endlich erzeugte} \\ \text{Körpererweiterungen von } \mathbb{C} \\ \text{vom Transzendenzgrad } 1 \end{array} \right\}$$

Genauer meinen wir hier rechts Riemann'sche Flächen bis auf Isomorphie und links Körpererweiterungen bis auf Isomorphie von Körpern über $\mathbb{C}$. Zum Beispiel entspricht die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ unter dieser Bijektion dem Körper der gebrochen rationalen Funktion $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) = \mathbb{C}(t)$. Man kann weiter zeigen, daß gegeben zwei kompakte zusammenhängende Riemann'sche Flächen X, Y das Zurückholen von meromorphen Funktionen eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{nichtkonstante holomorphe} \\ \text{Abbildungen } X \to Y \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Ring}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X))$$

liefert. In diesem Licht wird die Galoistheorie im Fall endlich erzeugter algebraischer Erweiterungen des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(t)$ sehr anschaulich. In der Sprache der Kategorientheorie haben wir eine „Äquivalenz von Kategorien“ vor uns. Eine algebraische Version dieser Äquivalenz werden wir in 6.9.2 herleiten.

Übungen

Übung 4.5.19. Sind $M \supset K \supset k$ Körper, so ist der Transzendenzgrad von M über k die Summe der Transzendenzgrade von M über K und von K über k, in Formeln

$$\operatorname{trgr}(M/k) = \operatorname{trgr}(M/K) + \operatorname{trgr}(K/k)$$

Übung 4.5.20. Seien $k \subset K \subset M$ Körper und sei K algebraisch über k. Man zeige: Sind $x_1, \dots, x_n \in M$ algebraisch unabhängig über k, so sind sie auch algebraisch unabhängig über K. Hinweis: 4.5.19.

Übung 4.5.21. Jeder Zwischenkörper in einer körperendlichen Körpererweiterung ist auch körperendlich über dem kleineren Körper. Hinweis: Man beachte 4.5.19, eventuell [AL] 3.4.18, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & L & \subset & L(x_{s+1}, \dots, x_r) & \subset & M \\ & & \cup & & \cup & & \\ k & \subset & k(x_1, \dots, x_s) & \subset & k(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_r) & & \end{array}$$

Ergänzende Übung 4.5.22. Gegeben zwei Körpererweiterungen eines gegebenen Körpers existiert stets eine weitere Körpererweiterung des gegebenen Körpers, in die sie beide eingebettet werden können. Mutige zeigen noch allgemeiner: Gegeben eine Familie von Körpererweiterungen eines gegebenen Körpers existiert stets eine weitere Körpererweiterung des gegebenen Körpers, in die sie alle eingebettet werden können.

4.6 Going-Down und maximale Primidealketten

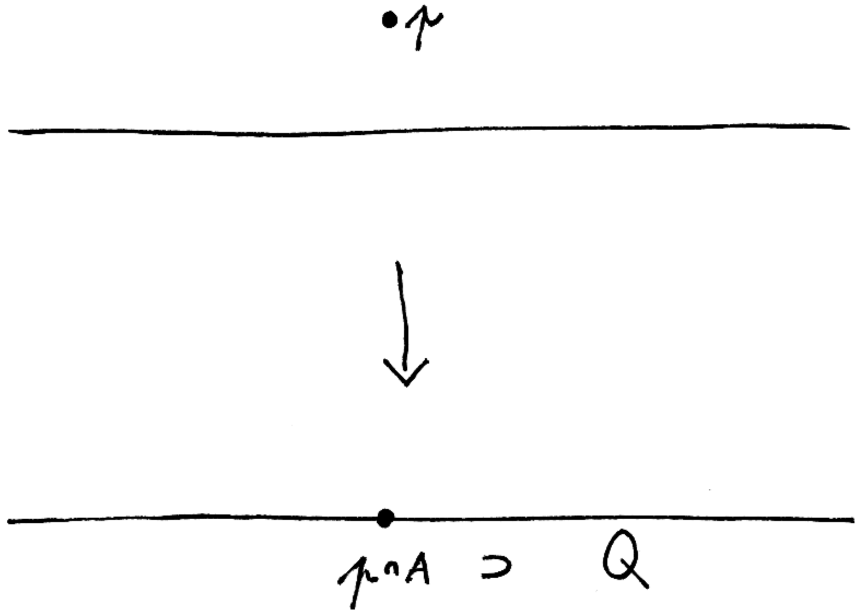
Lemma 4.6.1. *Seien $A \subset B$ Kringe und $C \subset B$ der ganze Abschluß von A in B. So ist für jedes $S \subset A$ auch $S^{-1}C$ der ganze Abschluß von $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei S multiplikativ abgeschlossen. Daß alle Elemente von $S^{-1}C$ ganz sind über $S^{-1}A$ ist klar. Ist umgekehrt b/s mit $b \in B$ und $s \in S$ ganz über $S^{-1}A$, so gilt eine Gleichung der Gestalt

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}} + \ldots + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

mit $s_i \in S$, $a_i \in A$. Setzen wir $t = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ und multiplizieren unsere Gleichung mit $(st)^n$, so zeigt sie, daß bt ganz ist über A. Es folgt $bt \in C$ und $b \in S^{-1}C$. □

Definition 4.6.2. Ein kommutativer Integritätsbereich heißt **ganz abgeschlossen** oder auch **normal** genau dann, wenn er in seinem Quotientenkörper sein eigener ganzer Abschluß ist.



Ein Gegenbeispiel zu Going-Down im Fall, daß B kein Integritätsbereich ist, liefert bereits die diagonale Einbettung $k[T] \subset k[T] \times k$ für einen Körper k. Geometrisch sieht man, daß der mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet Punkt oben, der eigentlich $\mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ darstellt, nicht zu einer irreduziblen Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{q})$ vergrößert werden kann, deren Bild als Abschluß die ganze Gerade $\mathcal{Z}(Q)$ unten hat.

4.6.3. Ein Kring A heißt **normal** genau dann, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist. Da nach 4.6.1 jede Lokalisierung eines ganz abgeschlossenen Integritätsbereichs an einer Teilmenge, die nicht die Null enthält, wieder ein ganz abgeschlossenener Integritätsbereich ist, fallen damit für kommutative Integritätsbereiche die beiden Bedingungen „ganz abgeschlossen" und „normal" zusammen und wir verwickeln uns mit obigen Definitionen nicht in Widersprüche.

Beispiel 4.6.4. Nach [LA1] 6.3.37 ist $\mathbb{Z}$ normal. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für jeden faktoriellen Ring. Insbesondere ist nach [AL] 2.6.11 auch jeder Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit Koeffizienten in einem Körper normal.

Satz 4.6.5 (**Going-down**). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung von Integritätsbereichen und sei A normal. So gibt es für je zwei Primideale $Q \subset P$ von A und jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{p} \cap A = P$ ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = Q$ und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, im Diagramm*

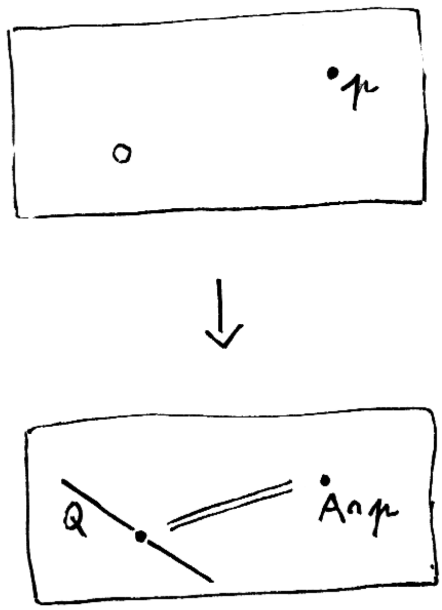
$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\mathfrak{q}} & \subset & \mathfrak{p} & \subset & B \\ \cup & & \cup & & \cup \\ Q & \subset & P & \subset & A \end{array}$$

4.6.6. Die Herkunft der Bezeichnung „Going-down" wurde bereits in 4.2.10 diskutiert. Ich gebe hier einen Beweis, der mir besonders transparent scheint, der aber eine gewisse Vertrautheit mit Galoistheorie voraussetzt. In 4.7 gebe ich einen alternativen Beweis, der versucht, mit einem Minimum an Galoistheorie auszukommen.

Beweis im ringendlichen Fall. Wir beginnen mit dem einfacheren und für unsere Anwendungen ausreichenden Fall, daß B ringendlich ist über A. Dann ist $\operatorname{Quot} B / \operatorname{Quot} A$ eine endliche Körpererweiterung. Wir vereinbaren die Abkürzung $K := \operatorname{Quot} A$. Vergrößern wir unsere Körpererweiterung zu einer endlichen normalen Erweiterung N/K wie in [AL] 3.8.23 und betrachten den von den Bildern der Elemente von B unter der Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(N/K)$ erzeugten Teilring $C \subset N$, so ist auch C ganz über A von endlichem Typ. Da wir P nach Going-up als Schnitt mit B eines Primideals von C erhalten können, reicht es sicher, die Aussage von Going-Down für unsere Kringerweiterung $A \subset C$ zu zeigen. Das folgt jedoch leicht aus dem anschließenden Satz 4.6.7. □

Satz 4.6.7 (**Fasern als Galoisbahnen**). *Seien A ein normaler Integritätsbereich, $N/\operatorname{Quot} A$ eine normale Körpererweiterung mit endlicher Galoisgruppe und $C \subset N$ ein Teilring, der ganz ist über A und stabil unter der Galoisgruppe. So sind die Fasern der Surjektion*

$$\operatorname{Spec} C \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$$



Ein Gegenbeispiel zu Going-Down im Fall von Integritätsbereichen liefert die endliche Kringerweiterung, die durch Verkleben zweier verschiedener Punkte der affinen Ebene im Sinne von 4.2.15 entsteht: Nehmen wir in unserer Ebene eine Gerade durch genau einen unserer Punkte, davon das Bild und dann wieder dessen Urbild, so besteht es aus einer Gerade nebst einem Punkt. Dieser Punkt definiert ein maximales Ideal, das sich nicht so zu einem Primideal verkleinern läßt, daß dessen Schnitt mit dem verklebten Ring gerade das Definitionsideal des Bildes unserer Gerade wäre, oder geometrisch gesagt: Dieser Punkt liegt auf keiner irreduziblen abgeschlossenen echten Teilmenge unserer Ebene, die unsere ursprüngliche Gerade umfaßt. In diesem Fall ist der verklebte Ring unten nicht normal.

genau die Bahnen der Galoisgruppe G in $\operatorname{Spec} C$ und für $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C$ folgt genauer aus $\tau(\mathfrak{q}) \not\subset \mathfrak{p}\ \forall \tau \in G$ bereits $(\mathfrak{q} \cap A) \not\subset (\mathfrak{p} \cap A)$.

Ergänzung 4.6.8. Der Satz gilt allgemeiner auch ohne Endlichkeitsannahmen an die Galoisgruppe. Den Beweis dieser Verallgemeinerung überlassen wir dem Leser als Übung. Hinweis: Hierzu benötigt man die Kompaktheit der Galoisgruppe in der Krull-Topologie und [AN1] 6.12.11.

Ergänzung 4.6.9. Ist unter den Annahmen des Satzes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} C$ ein maximales Ideal, so ist $C/\mathfrak{m}$ eine normale Körpererweiterung von $A/A \cap \mathfrak{m}$. In der Tat hat für $c \in C$ das Minimalpolynome $\operatorname{Irr}(c, \operatorname{Quot} A)$ Nullstellen in C und damit Koeffizienten in $C \cap \operatorname{Quot} A = A$ und kann folglich modulo $A \cap \mathfrak{m}$ reduziert werden.

Beweis. Gilt $\tau(\mathfrak{q}) \not\subset \sigma(\mathfrak{p})$ für alle $\tau, \sigma \in G$, so folgt mit 2.6.27 die Existenz eines $f \in C$ mit $f \in \tau(\mathfrak{q})\ \forall \tau \in G$ und $f \notin \sigma(\mathfrak{p})\ \forall \sigma \in G$. Das Produkt über alle Galoiskonjugierten von f ist dann ein galoisinvariantes Element $g \in C^G$ mit derselben Eigenschaft, also mit $g \in \tau(\mathfrak{q})\ \forall \tau \in G$ und $g \notin \sigma(\mathfrak{p})\ \forall \sigma \in G$. Nun ist N^G/K rein inseparabel nach [AL] 4.1.30 und nach [AL] 3.9.27 liegt folglich eine hinreichend hohe Potenz g^N von g sogar in K. Da aber g^N ganz ist über A, folgt $g^N \in A$. Nach Konstruktion haben wir nun $g^N \in \mathfrak{q} \cap A$ aber $g^N \notin \mathfrak{p} \cap A$. □

Beweis von Going-down im allgemeinen. Ist B nicht ringendlich über A, so funktioniert derselbe Beweis, solange sich $\operatorname{Quot} B$ derart zu einer normalen Körpererweiterung von $K := \operatorname{Quot} A$ vergrößern läßt, daß die zugehörige Galoisgruppe endlich ist. Sonst lassen wir alle Rücksichten fallen und vergrößern $\operatorname{Quot} B$ zu einem algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K, in dem wir dann den ganzen Abschluß $\bar{A} \subset \bar{K}$ von A betrachten. Wieder reicht es, die Behauptung von Going-Down für $A \subset \bar{A}$ zu zeigen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare $(L, \mathfrak{q}_L)$ bestehend aus einem Zwischenkörper L von $\bar{K}/K$ und einem Primideal $\mathfrak{q}_L$ des ganzen Abschlusses $A_L \subset L$ von A in L mit $\mathfrak{q}_L \subset \mathfrak{p} \cap A_L$ und $\mathfrak{q}_L \cap A = Q$. Sie ist offensichtlich induktiv geordnet und hat folglich ein maximales Element $(M, \mathfrak{q}_M)$. Wäre aber dabei $M \neq \bar{K}$, so könnten wir unser Paar noch vergrößern unter Zuhilfenahme des bereits bewiesenen Falles endlicher Galoisgruppen, indem wir M vergrößern zum Zerfällungskörper eines geeigneten Polynoms mit Koeffizienten in M und beachten, daß A_M normal ist. □

Satz 4.6.10 (Geometrisch relevante Ringe sind Kettenringe). *In einem über einem Körper ringendlichen Integritätsbereich hat jede nicht weiter verfeinerbare Primidealkette dieselbe Länge.*

4.6.11. $(k = \bar{k})$. Im geometrischen Fall bedeutet dieser Satz für beliebige irreduzible abgeschlossene Teilmengen $Y \mathrel{\underset{\circ}{\subset}} X \mathrel{\underset{\circ}{\subset}} k^n$ die Identität

$$\operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim}(Y \subset X) = \operatorname{kdim} X$$

Unsere Kodimension $\operatorname{cokdim}(Y \subset X)$, die wir in 4.4.7 für beliebige irreduzible abgeschlossene Teilmengen $Y \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\mathrm{A}} X \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\mathrm{A}} k^n$ eben als die Differenz der Krulldimensionen definiert hatten, stimmt also für affine Varietäten mit der relativen Krulldimension überein.

4.6.12. Die Aussage des Satzes gilt keineswegs in allen noetherschen Integritätsbereichen endlicher Krulldimension. Für ein Gegenbeispiel mag man eine Lokalisierung eines Polynomrings betrachten bei der alle Elemente im Komplement der Vereinigung zweier Primideale invertiert werden. Sie gilt noch nicht einmal in allen allen lokalen noetherschen Integritätsbereichen, hier sind Gegenbeispiele nicht so leicht zu konstruieren. Bei lokalen noetherschen Integritätsbereichen ist aber zumindest die Endlichkeit der Krulldimension nach 5.5.13 noch im allgemeinen gesichert.

4.6.13. Man bezeichnet ganz allgemein Kringe endlicher Krulldimension, in denen jede nicht weiter verfeinerbare Primidealkette dieselbe endliche Länge hat, als **Kettenringe**. Als Übung zeige man, daß jede Lokalisierung eines Kettenrings an einem Primideal und jeder Quotient eines Kettenrings nach einem Primideal auch selbst wieder ein Kettenring ist. Für eine affine Varietät X ist der Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ein Kettenring genau dann, wenn alle irreduziblen Komponenten von X dieselbe Dimension haben, wenn also X äquidimensional ist im Sinne der gleich folgenden Definition 4.6.14.

4.6.14. Ein noetherscher topologischer Raum heißt **äquidimensional** genau dann, wenn alle seine irreduziblen Komponenten dieselbe endliche Dimension haben.

Beweis. Seien k unser Körper und B unser Integritätsbereich. Wir argumentieren mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Wir finden eine Noether-Normalisierung, also einen polynomialen Unterring $A = k[x_1, \ldots, x_n] \subset B$ mit B ganz über besagtem Unterring. Im Fall $\operatorname{kdim} B = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir ein Primideal $\mathfrak{p} \supsetneq 0$ von B und nach Going-up gilt auch $\mathfrak{p} \cap A \supsetneq 0$. Ist $\mathfrak{p}$ minimal unter den von Null verschiedenen Primidealen von B, so ist nach Going-down 4.6.5 auch $\mathfrak{p} \cap A$ minimal unter den von Null verschiedenen Primidealen unseres Polynomrings. Also ist $\mathfrak{p} \cap A$ ein Hauptideal. Damit hat $A/(\mathfrak{p} \cap A)$ nach 4.4.5 eine um Eins kleinere Krulldimension und mit der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen folgt

$$\operatorname{kdim} B/\mathfrak{p} = \operatorname{kdim} A/(\mathfrak{p} \cap A) = \operatorname{kdim} A - 1 = \operatorname{kdim} B - 1$$

Nach Induktionsannahme wissen wir aber bereits, daß jede nicht weiter verfeinerbare Kette von Primidealen in $B/\mathfrak{p}$ die Länge $\operatorname{kdim} B - 1$ hat. Der Satz folgt. □

Übungen

Übung 4.6.15. Man zeige: Operiert eine endliche Gruppe auf einem normalen kommutativen Integritätsbereich, so ist auch der Invariantenring normal.

4.7 Beweis von Going-Down ohne Galois-Theorie**

4.7.1. In diesem Abschnitt gebe ich einen alternativen Beweis von Going-Down, der mit einem Minimum an Galois-Theorie auskommt. Ich kenne diesen Beweis aus [AM69]. Die Begriffsbildungen und Aussagen dieses Abschnitts dienen nur diesem alternativen Beweis und werden im weiteren Verlauf der Vorlesung sonst nicht mehr benötigt.

Definition 4.7.2. Seien $A \subset B$ Kringe und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz über dem Ideal** $\mathfrak{a}$ genau dann, wenn es $n \geq 1$ und $a_i \in \mathfrak{a}$ gibt mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Lemma 4.7.3. *Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung und $C \subset B$ der ganze Abschluß von A in B. So kann der ganze Abschluß von $\mathfrak{a}$ in B beschrieben werden als das Radikal $\sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$ des von $\mathfrak{a}$ in C erzeugten Ideals.*

Beweis. Gegeben $x \in B$ mit $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ für $a_i \in \mathfrak{a}$ gilt sicher $x \in C$ und $x^n \in \langle \mathfrak{a}C \rangle$ und folglich $x \in \sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$. Gegeben $x \in \sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$ gilt umgekehrt $x^n = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $x_i \in C$. Dann ist $M := A[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul und für die Multiplikation mit x^n gilt

$$x^n : M \to \mathfrak{a}M$$

Mit 4.1.6 folgern wir dann, daß x^n ganz ist über $\mathfrak{a}$. □

Lemma 4.7.4. *Seien $A \subset B$ Integritätsbereiche, A ganz abgeschlossen und $x \in B$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. So ist x algebraisch über $K := \operatorname{Quot} A$ und die Koeffizienten seines Minimalpolynoms liegen in $\sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Sei L/K der Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von x. Alle seine Nullstellen gehören zum ganzen Abschluss von $\mathfrak{a}$ in L, und nach 4.7.3 gehören damit auch alle seine Koeffizienten zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in L. Andererseits gehören sie auch zu K und damit zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in K, und da A ganz abgeschlossen ist, sogar zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in A. Dieser ganze Abschluß ist aber nach 4.7.3 genau $\sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Beweis von Going-Down ohne Galois-Theorie. Wir gehen zu $B_\mathfrak{p}$ über und müssen nur $A \cap \langle QB_\mathfrak{p} \rangle = Q$ zeigen, um mit 3.3.14 den Satz folgern zu können. Nun, jedes $x \in \langle QB_\mathfrak{p} \rangle$ hat die Gestalt $x = y/s$ mit $y \in \langle QB \rangle$ und $s \in B \backslash \mathfrak{p}$. Nach 4.7.3 ist y ganz über Q und nach 4.7.4 liegen die Koeffizienten seines Minimalpolynoms über $K := \operatorname{Quot} A$ in Q und unser Minimalpolynom hat die Gestalt

$$y^n + q_{n-1}y^{n-1} + \ldots + q_0$$

mit $q_i \in Q$. Liegt nun $x = y/s$ in A und ist nicht Null, so haben wir $s = yx^{-1}$ und das Minimalpolynom von s über K ist

$$s^n + (q_{n-1}/x)s^{n-1} + \ldots + (q_0/x^n)$$

Für die Koeffizienten v_i dieses Polynoms gilt also $x^{n-i}v_i = q_i \in Q$. Da aber s ganz ist über A folgt $v_i \in A$ wieder mit 4.7.3. Hätten wir nun $x \notin Q$, so hätten wir $v_i \in Q$ für alle i und damit $s^n \in \langle QB \rangle$ im Widerspruch zu $s \notin \mathfrak{p}$. Also gilt $x \in Q$ was zu zeigen war. □

4.8 Hauptidealsatz von Krull

Definition 4.8.1. Gegeben ein Kring R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ definiert man die **Höhe von** $\mathfrak{p}$ (englisch **height**) als die Krulldimension der Lokalisierung an $\mathfrak{p}$, in Formeln

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \operatorname{kdim} R_\mathfrak{p} = \sup\{l \mid \text{Es gibt in } R \text{ eine Primidealkette } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}\}$$

Das Supremum soll also in Worten gebildet werden über die Längen aller zu $\mathfrak{p}$ aufsteigenden Ketten von Primidealen von R.

4.8.2. In einem Kettenring R gilt natürlich für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ die Identität $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \operatorname{kdim}(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{kdim}(R)$. In allgemeineren Ringen kann man nur $\leq$ erwarten: Dort könnte es ja passieren, daß alle Primidealketten maximaler Länge das Primideal $\mathfrak{p}$ vermeiden.

4.8.3 (**Anschauliche Bedeutung der Höhe im geometrischen Fall**). Ist X eine affine Varietät und $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Primideal, so entspricht unser Primideal einer irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \overset{\circ}{\not\subset} X$. Die Höhe von $\mathfrak{p}$ kann dann geometrisch beschrieben werden als relative Krulldimension im Sinne von 2.5.15, in Formeln $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \operatorname{kdim}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \subset X)$. Ist X auch selbst irreduzibel, so ist $\mathcal{O}(X)$ nach 4.6.10 ein Kettenring und nach 4.8.2 gilt für $Y = \mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ zusätzlich die Identität $\operatorname{kdim}(Y \subset X) = \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Y$.

Satz 4.8.4 (Hauptidealsatz von Krull). *Gegeben ein noetherscher Kring R und ein Element $f \in R$ gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$, das f enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung* $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. *Ist f kein Nullteiler, so gilt sogar* $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

4.8.5. Ein unabhängiger Beweis einer Verallgemeinerung wird in 5.5.16 gegeben. Ein Primideal eines Rings R, das ein gegebenes Element f enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, nennen wir ein **über f minimales Primideal**.

4.8.6 (**Bedeutung des Hauptidealsatzes im geometrischen Fall**). Ist X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion, so sind die über f minimalen Primideale genau die Verschwindungsideale der irreduziblen Komponenten der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(f) \subset X$ von f. Unser Satz besagt also, daß für jede irreduzible Komponente Y von $\mathcal{Z}(f)$ gilt

$$\operatorname{kdim}(Y \subset X) \leq 1$$

Des weiteren ist f kein Nullteiler genau dann, wenn es auf keiner irreduziblen Komponente von X verschwindet, und unter dieser Zusatzannahme besagt unser Satz für jede irreduzible Komponente Y von $\mathcal{Z}(f)$ genauer $\operatorname{kdim}(Y \subset X) = 1$. Ist zusätzlich X auch noch äquidimensional, so können wir mit 4.6.13 sogar noch einen Schritt weitergehen und folgern $\operatorname{kdim} Y = \operatorname{kdim} X - 1$.

Beweis. Die Verschärfung für f ein Nichtnullteiler folgt unmittelbar daraus, daß jedes minimale Primideal eines Krings nach 3.2.8 aus Nullteilern besteht. Indem wir sonst zu $R_\mathfrak{p}$ übergehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal von R ist. Es gilt dann, für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset R$ mit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ zu zeigen, daß $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal von R ist. Nach Annahme gilt $f \notin \mathfrak{q}$. Wir betrachten nun die kanonische Abbildung $\lambda : R \to R_\mathfrak{q}$ in die Lokalisierung und setzen $\mathfrak{q}^{(i)} := \lambda^{-1}(\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^i)$. Dann bilden wir in R die Kette von Idealen

$$\mathfrak{q} + \langle f \rangle \supset \mathfrak{q}^{(2)} + \langle f \rangle \supset \mathfrak{q}^{(3)} + \langle f \rangle \supset \dots$$

Da $R/\langle f \rangle$ nach Konstruktion ein noetherscher Kring der Krulldimension Null ist und folglich nach 3.5.17 endliche Länge hat, stabilisiert diese Kette von Idealen, sagen wir bei

$$\mathfrak{q}^{(n)} + \langle f \rangle = \mathfrak{q}^{(n+1)} + \langle f \rangle$$

So kann jedes $a \in \mathfrak{q}^{(n)}$ dargestellt werden als $a = b + rf$ mit $b \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und $r \in R$. Nun impliziert $rf \in \mathfrak{q}^{(n)}$ aber $\lambda(rf) \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n$ und wegen $\lambda(f) \in R_\mathfrak{q}^\times$ weiter $\lambda(r) \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n$ und so $r \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Mithin haben wir sogar

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + f\mathfrak{q}^{(n)}$$

Es folgt $f(\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)}) = (\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)})$, und da f im einzigen maximalen Ideal unseres Rings liegt, liefert das Lemma 3.4.10 von Nakayama $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und damit $\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^{n+1}$. Wieder mit Nakayama zeigt das jedoch $\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n = 0$ und damit ist das maximale Ideal von $R_\mathfrak{q}$ bereits nilpotent, also etwa nach 2.6.23 ein minimales Primideal. $\square$

Satz 4.8.7 (Nullstellenmenge einer polynomialen Funktion). *Ist X eine irreduzible affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine von Null verschiedene reguläre Funktion, so haben alle irreduziblen Komponenten der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(f) \subset X$ die Kodimension Eins in X.*

Beweis. Ist f nicht Null, so gilt nach dem Krull'schen Hauptidealsatz $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ für jedes über f minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}(X)$. Jede irreduzible Komponente Y von $\mathcal{Z}(f)$ ist also maximal unter den echten irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X. Da $\mathcal{O}(X)$ nach 4.6.10 ein Kettenring ist, folgt $\operatorname{kdim} Y = \operatorname{kdim} X - 1$ für jede irreduzible Komponente Y von $\mathcal{Z}(f)$. □

Korollar 4.8.8 (Gleichungen für Hyperflächen). *Sei X eine irreduzible affine Varietät mit einem faktoriellen Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$. So liefert das Bilden der Nullstellenmenge eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Irreduzible Elemente von} \\ \mathcal{O}(X), \textit{ bis auf Einheiten} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene irreduzible Teil-} \\ \textit{-mengen von } X \textit{ der Kodimension } 1 \end{array} \right\} \\ [f] & \mapsto & \mathcal{Z}(f) \end{array}$$

4.8.9. Den Spezialfall $X = k^n$ sollten Sie bereits als Übung 4.4.17 ausgearbeitet haben. Ist $\mathcal{O}(X)$ nicht faktoriell, so ist die Aussage im allgemeinen nicht mehr richtig: In diesem Fall kann die Nullstellenmenge eines irreduziblen Elements mehrere Komponenten haben und es kann umgekehrt passieren, daß für das Verschwindungsideal einer irreduziblen Hyperfläche mehr als ein Erzeuger benötigt wird.

Beweis. Ist $\mathcal{O}(X)$ faktoriell, so ist für f irreduzibel das Hauptideal $\langle f \rangle$ prim und mithin $\mathcal{Z}(f)$ irreduzibel. Nach dem Hauptidealsatz gilt außerdem $\operatorname{kdim} \mathcal{Z}(f) = \operatorname{kdim} X - 1$. Das zeigt, daß unsere Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Die Injektivität unserer Abbildung folgt mit dem Nullstellensatz, aus $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$ folgt für irreduzible f, g bereits $\langle f \rangle = \langle g \rangle$. Ist umgekehrt $Y \mathrel{\mathpalette\subset\sim} X$ irreduzibel von der Kodimension Eins, so haben wir $Y \neq X$ und es gibt folglich $g \neq 0$ mit $Y \subset \mathcal{Z}(g)$. Da jede irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}(g)$ die Kodimension Eins hat, muß Y mit einer dieser Komponenten übereinstimmen. Diese Komponenten sind aber genau die $\mathcal{Z}(f)$ für die irreduziblen Faktoren f von g. □

Korollar 4.8.10 (Nullstellenmengen endlich vieler Funktionen). *Gegeben eine irreduzible affine Varietät X und r reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ haben alle irreduziblen Komponenten der simultanen Nullstellenmenge unserer r Funktionen $\mathcal{Z}_X(f_1, \ldots, f_r)$ eine Kodimension $\leq r$ in X.*

Beweis. Vollständige Induktion unter Zuhilfenahme des vorhergehenden Korollars 4.8.7. □

Korollar 4.8.11 (Darstellung algebraischer Mengen durch Gleichungen). *Sei X eine irreduzible affine Varietät und $Z \not\subset\!\!\!\!\!\triangle\; X$ eine irreduzible Teilmenge der Kodimension c. So gibt es $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}(X)$ derart, daß Z eine irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c) \subset X$ ist.*

Beweis. Im Fall $Z = X$ ist nichts zu zeigen. Sonst gibt es eine von Null verschiedene Funktion $f_1 \in \mathcal{O}(X)$ mit $Z \subset \mathcal{Z}(f_1)$ und nach Krull hat jede irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}(f_1)$ eine um Eins kleinere Dimension als X. Sicher liegt Z in einer dieser irreduziblen Komponenten. Der Beweis kann nun mit Induktion über die Kodimension zu Ende geführt werden. □

Korollar 4.8.12 (Kodimension von Schnittmengen). *Seien X eine irreduzible affine Varietät und $Y, Z \not\subset\!\!\!\!\!\triangle\; X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen von X. So gilt für jede irreduzible Komponente W ihres Schnitts $Y \cap Z$ die Abschätzung* $\operatorname{kdim} W \geq \operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim} Z - \operatorname{kdim} X$ *alias*

$$\operatorname{cokdim}(W \subset X) \leq \operatorname{cokdim}(Y \subset X) + \operatorname{cokdim}(Z \subset X)$$

4.8.13. Das Korollar gilt nicht mehr, wenn wir X nur äquidimensional annehmen. Ist X etwa die Vereinigung zweier zweidimensionaler Untervektorräume, die nur einen Punkt gemeinsam haben, so haben die beiden Komponenten Dimension Zwei, aber jede Komponente ihres Schnitts hat die Dimension Null.

4.8.14. In meinen Augen ist dieses Korollar eine großartige Verallgemeinerung der Abschätzung für die Kodimension des Schnitts affiner Teilräume eines affinen Raums in [LA1] 3.2.20 zum Fall von Teilmengen, die durch kompliziertere, nicht mehr notwendig lineare, sondern eben polynomiale Gleichungen gegeben werden.

4.8.15. Für das Korollar ist es wesentlich, daß wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten: Zwei Sphären im $\mathbb{R}^3$ etwa können sich berühren und so als Schnittmenge nur einen Punkt haben. Im Komplexen aber muß nach unserem Korollar jede Komponente des Schnitts zweier algebraischer Flächen im $\mathbb{C}^3$ entweder eine Kurve oder eine Fläche sein.

Beweis. Sei $c = \operatorname{cokdim}(Z \subset X)$. Nach 4.8.10 finden wir $f_1, \ldots, f_c$ derart, daß Z eine irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$ ist. Jede irreduzible Komponente von $Y \cap Z$ liegt dann in einer irreduziblen Komponente von $\mathcal{Z}_Y(f_1, \ldots, f_c)$. Diese haben jedoch nach 4.8.11 höchstens die Kodimension c in Y und damit höchstens die Kodimension $c + \operatorname{cokdim}(Y \subset X)$ in X. □

Ergänzung 4.8.16. Ein lokaler noetherscher Integritätsbereich, dessen maximales Ideal ein von Null verschiedenes Hauptideal ist, hat als einziges weiteres Primideal das Nullideal. Dieser Spezialfall des Krull'schen Hauptidealsatzes 4.8.4 ist nicht schwer direkt einzusehen: Ist $(A, \langle g \rangle)$ unser lokaler Integritätsbereich und

$\mathfrak{q} \subset A$ ein Primideal mit $g \notin \mathfrak{q}$, so gilt $\mathfrak{q} = g\mathfrak{q}$, denn jedes $a \in \mathfrak{q}$ läßt sich darstellen als $a = gb$ mit $b \in A$ und dann notwendig $b \in \mathfrak{q}$. Dann aber zeigt das Nakayama-Lemma sofort $\mathfrak{q} = 0$.

Satz* 4.8.17 (Definitionslücken rationaler Funktionen). *Jeder normale noethersche Integritätsbereich A ist als Teilmenge seines Quotientenkörpers $\operatorname{Quot} A$ der Schnitt über alle seine Lokalisierungen nach Primidealen der Höhe Eins. In Formeln gilt mithin die Identität*

$$A = \bigcap_{\operatorname{ht}(\mathfrak{q})=1} A_{\mathfrak{q}}$$

4.8.18. Im geometrischen Fall sagt uns das insbesondere: Sei X eine irreduzible affine Varietät, deren Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen normal ist. Sei $U \circledcirc X$ eine offene Teilmenge, deren Komplement mindestens die Kodimension Zwei hat. So ist die Restriktion eine Bijektion

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U)$$

zwischen dem Ring der polynomialen alias regulären Funktionen auf ganz X und dem Ring der regulären Funktionen auf U. In der Tat liegt jede rationale Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit der Eigenschaft, daß das Komplement $X \backslash D(f)$ ihres Definitionsbereichs aus 3.1.31 keine irreduzible Komponente der Kodimension Eins hat, bereits im Schnitt der $\mathcal{O}_{X,Y}$ für $Y \subsetneq X$ irreduzibel von der Kodimension Eins und liegt damit nach 3.1.15 und unserem Satz 4.8.17 in $\mathcal{O}(X)$. Ist X nicht normal, so gilt die Aussage im allgemeinen nicht mehr: Für ein Gegenbeispiel verklebe man zwei Punkte einer affinen Ebene im Sinne von 4.2.15.

Beweis. Für $f \in (\operatorname{Quot} A) \backslash A$ ist das Ideal $I := \{g \in A \mid gf \in A\}$ nicht ganz A. Seien $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die paarweise verschiedenen über I minimalen Primideale nach 3.2.22. Man zeigt leicht $I_{\mathfrak{p}} = \{g \in A_{\mathfrak{p}} \mid gf \in A_{\mathfrak{p}}\}$, die analoge Formel gälte sogar für eine Lokalisierung nach einer beliebigen Teilmenge. Es folgt $f \notin A_{\mathfrak{p}}$. Können wir $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ zeigen, so sind wir fertig. Indem wir sonst zu $A_{\mathfrak{p}}$ übergehen, das nach 4.6.1 auch ganz abgeschlossen ist, dürfen wir gleich $A = A_{\mathfrak{p}}$ annehmen, also A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ und $I \subset A$ ein Ideal mit Radikal $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$. Wir folgern $\mathfrak{p}^n \subset I$ für $n \gg 0$. Aus $If \subset A$ folgt damit insbesondere $\mathfrak{p}^n f \subset A$. Jetzt betrachten wir das kleinstmögliche $l \geq 0$ mit $\mathfrak{p}^l f \subset A$. Sicher gilt $l > 0$, und wählen wir $g \in \mathfrak{p}^{l-1} f \backslash A$, so gilt $g \notin A$ aber $\mathfrak{p}g \subset A$. Nun ist A ganz abgeschlossen, also kann g nicht ganz sein über A. Dann kann aber nach 4.1.6 die Multiplikation mit g auch nicht den endlich erzeugten von Null verschiedenen A-Modul $\mathfrak{p}$ stabilisieren, wir haben also $\mathfrak{p}g \not\subset \mathfrak{p}$. Andererseits wissen wir jedoch bereits, daß gilt $\mathfrak{p}g \subset A$, woraus folgt $\mathfrak{p}g = A$ alias $\mathfrak{p} = g^{-1}A$. Nun liefert aber der Krull'sche Hauptidealsatz 4.8.4 oder sogar einfacher 4.8.16 in der Tat $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. □

Übungen

Übung 4.8.19. Sei X eine äquidimensionale affine Varietät. Sei $Z \mathrel{\subset\!\!\!\!A} X$ eine äquidimensionale abgeschlossene Teilmenge und $c = \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Z$. Stärker als in 4.8.11 formuliert zeige man unter diesen Voraussetzungen: Es gibt $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}(X)$ derart, daß Z eine Vereinigung von irreduziblen Komponenten von $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c) \subset X$ ist und daß darüberhinaus auch $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$ äquidimensional ist.

5 Hilbert-Polynome und reguläre Ringe

5.1 Filtrierungen und Graduierungen von Gruppen

Definition 5.1.1. Eine **aufsteigende Filtrierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Familie von Untergruppen $V^{\leq r}$ für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V^{\leq r} \subset V^{\leq r+1}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

Definition 5.1.2. Eine **absteigende Filtrierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Familie von Untergruppen $V^{\geq r}$ für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V^{\geq r} \supset V^{\geq r+1}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

5.1.3. Aufsteigende und absteigende Filtrierungen unterscheiden sich nur in der Notation. In der Tat bilden offensichtlich die $V^{\leq r}$ eine aufsteigende Filtrierung genau dann, wenn die $V^{\geq r} := V^{\leq -r}$ eine absteigende Filtrierung bilden.

5.1.4.
1. Eine **ausschöpfende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der die Vereinigung der filtrierenden Untergruppen die ganze filtrierte Gruppe ist, in Formeln $\bigcup_r V^{\leq r} = V$.
2. Eine **voll endende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der bereits eine der filtrierenden Untergruppen die ganze filtrierte Gruppe ist, in Formeln: $\exists r$ mit $V^{\leq r} = V$.
3. Eine **Hausdorff'sche** oder auch **separierte Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der der Schnitt der filtrierenden Untergruppen Null ist, in Formeln $\bigcap_r V^{\leq r} = 0$.
4. Eine **von Null kommende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der bereits eine der filtrierenden Untergruppen Null ist, in Formeln: $\exists r$ mit $V^{\leq r} = 0$.

5.1.5 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren fordern auch ganz allgemein von einer Filtrierung noch zusätzlich implizit eine oder mehrere der oben angegebenen Eigenschaften. Ich finde das jedoch ungeschickt. Eine letzte Eigenschaft von Filtrierungen, die oft verwendet wird, ist die **Vollständigkeit**. Diese Bedingung besagt im Fall einer Hausdorff'schen Filtrierung, daß V vollständig ist für die Metrik

$$d(v, w) := \inf(\{1\} \sqcup \{2^r \mid (v - w) \in V^{\leq r}\}$$

und im Fall einer beliebigen Filtrierung, daß der Quotient $V / \bigcap_r V^{\leq r}$ vollständig ist in der beschriebenen Weise. Kennt man die Terminologie uniformer Räume **??** und versieht V mit der durch die Filtrierung gegebenen Struktur als uniformer Raum nach **??**, so ist V vollständig bzw. Hausdorff als topologischer Raum genau dann, wenn unsere Filtrierung vollständig bzw. Hausdorff ist im Sinne der vorhergehenden Definitionen.

5.1.6 (**Induzierte Filtrierungen**). Jede Untergruppe $U \subset V$ und jeder Quotient V/U einer filtrierten abelschen Gruppe V erben in natürlicher Weise eine Filtrierung von V. Genauer setzen wir $U^{\leq r} = V^{\leq r} \cap U$ und nehmen als $(V/U)^{\leq r}$ das Bild von $V^{\leq r}$ unter der kanonischen Projektion.

5.1.7. Gegeben Untergruppen $U \subset V \subset W$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmt die auf den Subquotienten V/U als Untergruppe des Quotienten W/U von W vererbte Filtrierung überein mit der auf den Subquotienten V/U als Quotienten der Untergruppe V von W vererbten Filtrierung.

Ergänzung 5.1.8. Gegeben eine Zerlegung $W = U \oplus V$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmt die auf U als Untermodul induzierte Filtrierung im allgemeinen keineswegs überein mit der auf U als Quotient induzierten Filtrierung.

Definition 5.1.9. Eine **Graduierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Familie von Untergruppen V^r für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^r$. Die Elemente von V^r heißen dann **homogen vom Grad** r. Jedes Element $v \in V$ läßt sich demnach eindeutig darstellen als Summe $v = \sum v_r$ mit $v_r \in V^r$, wobei fast alle v_r verschwinden. Das besagte v_r heißt dann die **homogene Komponente von** v **vom Grad** r.

Ergänzung 5.1.10. Ist etwas allgemeiner Γ eine Menge, so versteht man unter einer **Γ-Graduierung** auf einer abelschen Gruppe V eine Familie von Untergruppen V^γ für $\gamma \in \Gamma$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V^\gamma$. Eine Graduierung im obigen Sinne ist also genauer eine **$\mathbb{Z}$-Graduierung**.

5.1.11. Für eine Untergruppe $U \subset V$ bzw. einen Quotienten V/U einer graduierten abelschen Gruppe V bilden die Schnitte $U^r = V^r \cap U$ bzw. die Bilder der V^r in V/U im allgemeinen keine Graduierung von U bzw. von V/U. Das gilt nur, wenn mit jedem $v \in U$ auch alle homogenen Komponenten von v zu U gehören, wenn also für die $U^r = U \cap V^r$ gilt $U = \bigoplus_r U^r$. Eine Untergruppe einer graduierten abelschen Gruppe mit dieser Eigenschaft nennt man eine **homogene Untergruppe**, und für den Quotienten einer graduierten abelschen Gruppe nach einer homogenen Untergruppe bilden die Bilder der V^r in der Tat auch eine Graduierung des Quotienten V/U und wir haben dann $(V/U)^r = V^r/U^r$.

5.1.12. Eine Graduierung $V = \bigoplus_r V^r$ liefert eine Filtrierung durch die Vorschrift $V^{\leq r} = \bigoplus_{\nu \leq r} V^\nu$. Zu jeder filtrierten abelschen Gruppe können wir umgekehrt die **assoziierte graduierte Gruppe** $\operatorname{gr} V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^{\leq r}/V^{\leq r-1}$ bilden. Wir notieren ihren homogenen Teil vom Grad r auch

$$(\operatorname{gr} V)^r = \operatorname{gr}^r V = V^{\leq r}/V^{\leq r-1}$$

Kommt die Filtrierung auf V schon von einer Graduierung her, so induzieren die Verknüpfungen $V^r \hookrightarrow V^{\leq r} \twoheadrightarrow V^{\leq r}/V^{\leq r-1} = \operatorname{gr}^r V$ einen kanonischen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} V$.

5.1.13. Ein Homomorphismus $\phi : V \to W$ von filtrierten abelschen Gruppen heißt **mit den Filtrierungen verträglich** genau dann, wenn gilt $\phi(V^{\leq r}) \subset W^{\leq r}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$. Er induziert dann natürlich einen Homomorphismus $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ zwischen den assoziierten graduierten Gruppen.

Übungen

Übung 5.1.14. Ist V eine filtrierte abelsche Gruppe und $U \subset V$ eine Untergruppe und betrachten wir auf U und V/U die induzierten Filtrierungen, so erhalten wir mit dem Neunerlemma eine kurze exakte Sequenz

$$\operatorname{gr} U \hookrightarrow \operatorname{gr} V \twoheadrightarrow \operatorname{gr}(V/U)$$

Übung 5.1.15. Sei $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus filtrierter abelscher Gruppen, der mit den Filtrierungen verträglich ist. Man zeige:

1. Ist die Filtrierung auf W bei Null beginnend und ausschöpfend und ist die assoziierte graduierte Abbildung $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ surjektiv, so ist ϕ bereits selbst surjektiv.

2. Ist die Filtrierung auf V Hausdorff und ausschöpfend und ist die assoziierte graduierte Abbildung $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ injektiv, so ist ϕ bereits selbst injektiv.

Übung 5.1.16. Jede bei Null beginnende und ausschöpfende Filtrierung auf einem Vektorraum kommt von einer Graduierung her.

5.2 Filtrierungen und Graduierungen von Ringen

5.2.1. Benutzt man die oben eingeführten Begriffe für Ringe, so wird stets implizit die Verträglichkeit mit der Multiplikation gefordert. Genauer treffen wir folgende Vereinbarungen.

Definition 5.2.2. Eine **aufsteigende Filtrierung** eines Rings A ist eine Filtrierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^{\leq r} A^{\leq s} \subset A^{\leq r+s}$ für alle r, s und zusätzlich $1 \in A^{\leq 0}$. Analog definiert man eine absteigende Filtrierung eines Rings. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir die Verträglichkeit mit der Ringstruktur fordern, reden wir von einer **Ringfiltrierung**.

5.2.3. Die Bedingung $1 \in A^{\leq 0}$ wird benötigt, um sicherzustellen, daß der in 5.2.9 erklärte assoziierte graduierte Ring auch in der Tat wieder ein Ring in unserem Sinne ist, also ein Einselement hat. Sie ist auch natürlich vom kategoriellen Standpunkt aus, dann liefert sie genau, was wir später ein „Monoidobjekt der Tensorkategorie der filtrierten abelschen Gruppen“ nennen werden.

5.2.4. Sicher ist bei einem filtrierten Ring $A^{\leq 0}$ ein Teilring und alle $A^{\leq n}$ sind Ideale von $A^{\leq 0}$. Allgemeiner definiert man in der nun hoffentlich offensichtlichen Weise **filtrierte Moduln** über filtrierten Ringen, und dann sind für jeden filtrierten Modul M alle $M^{\leq n}$ Untermoduln für die Restriktion unseres filtrierten Moduls auf den Teilring $A^{\leq 0}$.

Definition 5.2.5. Eine **Graduierung** eines Rings A ist eine Graduierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^r A^s \subset A^{r+s}$ für alle r, s. Ein **graduierter Modul** über einem graduierten Ring A ist ein A-Modul M mit einer Graduierung $M = \bigoplus M^i$ derart, daß gilt $A^r M^s \subset M^{r+s}$ für alle r, s.

Ergänzung 5.2.6. Etwas allgemeiner erklärt man ähnlich für jedes Monoid Γ den Begriff einer Γ-Graduierung auf einem Ring und eines Γ-graduierten Moduls über einem Γ-graduierten Ring.

5.2.7. Das Eins-Element eines graduierten Rings ist notwendig homogenen vom Grad Null, in Formeln $1 \in A^0$. Um das zu sehen, berechne man das Produkt der homogenen Komponenten von 1 mit beliebigen homogenen Elementen des Rings.

5.2.8. Jeder Quotient A/I eines *filtrierten* Rings A nach einem Ideal I ist für die natürliche Filtrierung wieder ein filtrierter Ring. Jeder Quotient A/I eines *graduierten* Rings A nach einem *homogenen* Ideal I ist mit der natürlichen Graduierung wieder ein graduierter Ring.

5.2.9. Eine Graduierung $A = \bigoplus_r A^r$ eines Rings liefert eine Filtrierung durch $A^{\leq r} = \bigoplus_{\nu \leq r} A^\nu$. Zu jedem filtrierten Ring können wir umgekehrt den **assoziierten graduierten Ring**

$$\operatorname{gr} A = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} A^{\leq r}/A^{\leq r-1}$$

bilden, die Multiplikation auf $\operatorname{gr} A$ wird in der naheliegenden Weise definiert und die Existenz eines Eins-Elements in $\operatorname{gr} A$ folgt aus unserer Bedingung $1 \in A^{\leq 0}$ an einen filtrierten Ring. Kommt die Filtrierung auf dem Ring A schon von einer Graduierung her, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus graduierter Ringe $A \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} A$.

5.2.10. Ein Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$ von einem filtrierten Ring A in einen filtrierten Ring B, der mit den Filtrierungen verträglich ist, induziert natürlich einen Homomorphismus $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} A \to \operatorname{gr} B$ zwischen den assoziierten graduierten Ringen.

5.2.11. Analog definiert man **filtrierte** bzw. **graduierte Vektorräume** und **filtrierte** bzw. **graduierte Algebren**. Bei der Definition einer **filtrierten Ringalgebra** fordert man zusätzlich, daß die Filtrierung auch im Sinne von 5.2.2 mit der zugrundeliegenden Ringstruktur verträglich sein soll, daß also die 1 im Teilraum zu ≤ 0 enthalten ist.

Beispiel 5.2.12. Gegeben ein Körper k oder auch ein beliebiger Ring besitzt der Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau eine Graduierung derart, daß die homogenen Elemente vom Grad r eben die homogenen Polynome vom Grad r aus [AL] 2.8.10 sind. Diese Graduierung nennen wir die **Standardgraduierung** auf unserem Polynomring. Etwas allgemeiner besitzt er auch für beliebige $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$ genau eine Graduierung derart, daß T_i jeweils homogen ist vom Grad d_i.

Ergänzung 5.2.13. Gegeben ein Vektorraum V besitzen die Tensoralgebra $\mathrm{T}V$ nach [LA2] 7.8.6, die Graßmann-Algebra $\bigwedge V$ nach [LA2] 6.6.4 und die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ nach [AL] 2.2.2 jeweils eine natürliche Graduierung durch die Teilräume, die wir im jeweiligen Kontext $\mathrm{T}^r V$, $\bigwedge^r V$ und $\mathrm{S}^r V$ notiert hatten.

Lemma 5.2.14. *Ist A ein Ring mit einer Hausdorff'schen ausschöpfenden Filtrierung, so gilt*

$$(\mathrm{gr}\, A) \textit{ nullteilerfrei} \quad \Rightarrow \quad A \textit{ nullteilerfrei}$$

Beweis. In der Tat, seien $a, b \in A \backslash 0$ gegeben. Sind r, s minimal mit $a \in A^{\leq r}$, $b \in A^{\leq s}$, so sind auch die Bilder $\bar{a} \in A^{\leq r}/A^{\leq r-1}$ und $\bar{b} \in A^{\leq s}/A^{\leq s-1}$ von Null verschieden. Ist $\mathrm{gr}\, A$ nullteilerfrei, so folgt $\bar{a}\bar{b} \neq 0$. Dies Produkt ist aber die Nebenklasse von ab in $A^{\leq r+s}/A^{\leq r+s-1}$, und wenn schon die Nebenklasse von ab nicht verschwindet, so ist erst recht ab selbst von Null verschieden. □

Ergänzung 5.2.15. Gegeben ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ mag es naheliegend scheinen, einen weiteren $\mathbb{Z}$-graduierten Ring einzuführen als die Gruppe A mit der Multiplikation $a * b = (-1)^{|a||b|} ab$ für homogene $a, b \in A$. Das liefert jedoch nichts Neues, genauer gilt für den Gruppenisomorphismus $\varphi : A \xrightarrow{\sim} A$ gegeben durch $\varphi(a) = (-1)^{[|a|/2]} a$ für beliebige homogene $a \in A$ die Relation $\varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b)$, mit der Notation $[|a|/2]$ für die größte ganze Zahl kleinergleich $|a|/2$. Ich kenne für die dieser Erkenntnis zugrundeliegende mit beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ gültige Kongruenz

$$[(\alpha + \beta)/2] \equiv \alpha\beta + [\alpha/2] + [\beta/2] \pmod 2$$

keinen besseren Beweis als den Vergleich der beiden Verknüpfungstabellen für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Ergänzung 5.2.16 (**Tensorprodukt filtrierter Moduln**). Gegeben ein Kring k und zwei filtrierte k-Moduln $\ldots \subset M^{\leq i} \subset M^{\leq i+1} \subset \ldots \subset M$ und $\ldots \subset N^{\leq j} \subset N^{\leq j+1} \subset \ldots \subset N$ erklären wir auf ihrem Tensorprodukt eine Filtrierung durch die Vorschrift

$$(M \otimes_k N)^{\leq n} := \sum_{i+j \leq n} \mathrm{ten}(M^{\leq i} \otimes_k N^{\leq j})$$

wo $\mathrm{ten} : M^{\leq i} \otimes_k M^{\leq j} \to M \otimes_k N$ das Tensorprodukt der Einbettungsabbildungen meint. Gegeben zwei Vektorräume M, N über einem Körper k mit je einer bei Null beginnenden Filtrierung liefert dann die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$(\operatorname{gr} M) \otimes_k (\operatorname{gr} N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}(M \otimes_k N)$$

In der Tat überlegt man sich znächst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Filtrierungen zusätzlich ausschöpfend annehmen dürfen. Nach 5.1.16 dürfen wir in diesem Fall sogar annehmen, daß unsere Filtrierungen bereits von einer Graduierung herkommen. Dann ist die Behauptung jedoch offensichtlich.

Lemma* 5.2.17. *Ist A ein filtrierter Ring und M ein filtrierter A-Modul mit einer bei Null beginnenden und ausschöpfenden Filtrierung, so ist mit $\operatorname{gr} M$ auch M selbst endlich erzeugt und es gilt sogar*

$$(\operatorname{gr} M) \text{ noethersch über } (\operatorname{gr} A) \quad \Rightarrow \quad M \text{ noethersch über } A$$

5.2.18. Es reicht nicht, die Filtrierung auf M Hausdorff anzunehmen, wie das Beispiel des $\mathbb{C}[X]$-Moduls $\mathbb{C}[\![X]\!]$ zeigt, mit der Filtrierung beider Strukturen durch die von den verschiedenen X^r erzeugten Ideale.

Beweis. Ist der assoziierte graduierte Modul $\operatorname{gr} M$ endlich erzeugt, so finden wir dafür auch ein endliches Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Wählen wir Urbilder dieser Elemente in M, so erzeugen sie über A einen Untermodul $N \subset M$ mit $\operatorname{gr} N \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} M$. Mit 5.1.14 folgt daraus hinwiederum $\operatorname{gr}(M/N) = 0$ und mit unseren Voraussetzungen an die Filtrierung dann $M/N = 0$, als da heißt unsere Urbilder erzeugen bereits M. Ist schließlich $\operatorname{gr} M$ noethersch, so ist für jeden Untermodul $N \subset M$ der assoziierte Graduierte $\operatorname{gr} N$ endlich erzeugt als Untermodul von $\operatorname{gr} M$, und dann ist auch N selbst endlich erzeugt nach dem, was wir bereits bewiesen haben. □

Übungen

Übung 5.2.19. Das Radikal eines homogenen Ideals in einem $\mathbb{Z}$-graduierten Kring ist wieder homogen. Hinweis: Man zeige, daß für $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_m$ aus dem Radikal mit x_i homogen vom Grad i auch x_n zu fraglichem Radikal gehört.

Ergänzende Übung 5.2.20. Man zeige, daß es auf jedem Schiefkörper nur eine einzige Graduierung gibt, die ihn zu einem graduierten Ring macht.

Übung 5.2.21. Ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring ist nullteilerfrei genau dann, wenn für je zwei homogene von Null verschiedene Elemente auch ihr Produkt von Null verschieden ist. Ein homogenes Ideal in einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring ist vollprim genau dann, wenn es nicht der ganze Ring ist und für je zwei homogene Elemente außerhalb unseres homogenen Ideals auch ihr Produkt außerhalb unseres homogenen Ideals liegt.

Übung 5.2.22. Man zeige die folgende Variante zu 2.6.22: Jeder graduierte noethersche Modul über einem $\mathbb{Z}$-graduierten Kring besitzt eine endliche Filtrierung durch homogene Untermoduln derart, daß alle Subquotienten isomorph sind zu Quotienten unseres Krings nach homogenen Primidealen. Hinweis: 2.6.22 und 5.2.21.

5.3 Graduierte Variante des Elementarteilersatzes**

Proposition 5.3.1. *Gegeben ein Körper k ist jeder endlich erzeugte graduierte Modul über dem Polynomring $k[t]$ mit seiner Standardgraduierung die direkte Summe von endlich vielen Untermoduln, die jeweils von einem homogenen Element erzeugt werden.*

Beweis. Sei M unser Modul und T der Untermodul seiner Torsionselemente. So ist M/T frei und dann auch graduiert frei und die Surjektion $M \twoheadrightarrow M/T$ besitzt eine graderhaltende Spaltung und liefert einen Isomorphismus von graduierten Moduln $M \cong T \oplus M/T$. Das anschließende Lemma 5.3.3 beendet dann den Beweis. □

5.3.2. Wir erinnern die Notation, nach der für eine $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppe $M = \bigoplus M^n$ mit $M[j]$ die in der Graduierung verschobene Gruppe bezeichnet wird, genauer setzen wir $(M[j])^n = M^{n+j}$.

Lemma 5.3.3. *Gegeben ein Körper k wird jeder endlichdimensionale graduierte und graduiert unzerlegbare $k[t]$-Modul M von einem homogenen Element erzeugt. In Formeln ausgedrückt gibt es also $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ und einen graderhaltenden Isomorphismus*

$$M \cong k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[j]$$

Beweis. Sei M ein von Null verschiedener endlichdimensionaler $\mathbb{Z}$-graduierter $k[t]$-Modul und $m \in M$ ein Vektor mit kleinstmöglichem Annullator, sagen wir $\operatorname{Ann}(m) = \langle t^{i+1}\rangle$. So ist M sogar ein Modul über $k[t]/\langle t^{i+1}\rangle$ und m besitzt auch eine homogene Komponente, die von t^i nicht annulliert wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also m homogen annehmen, etwa vom Grad j. Dann liefert m eine graderhaltende Einbettung

$$k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[-j] \hookrightarrow M$$

Da die linke Seite auch in der Kategorie der endlichdimensionalen $\mathbb{Z}$-graduierten Moduln über $k[t]/\langle t^{i+1}\rangle$ injektiv ist, muß diese Einbettung spalten. War M graduiert unzerlegbar, so ist sie also ein Isomorphismus. □

Korollar 5.3.4 (Graduierte Variante des Elementarteilersatzes). *Seien k ein Körper und M, N endlich erzeugte graduierte graduiert freie $k[t]$-Moduln. So gibt es für jeden graderhaltenden Homomorphismus von $k[t]$-Moduln*

$$f : M \to N$$

Basen von M und N aus homogenen Elementen, bezüglich derer die Matrix unseres Homomorphismus höchstens auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge hat.

Beweis. Das Bild von M ist graduiert frei, folglich spaltet M als $M \cong \ker f \oplus \mathrm{im} f$. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit f injektiv annehmen. Indem wir sonst M durch tM ersetzen, dürfen wir sogar $M \subset tN$ annehmen. Jetzt finden wir nach 5.3.1 homogene Elemente $n_1, \ldots, n_r \in N$ derart, daß die $\bar{n}_i \in N/M$ von Null verschieden sind und N/M die direkte Summe der von den $\bar{n}_i$ erzeugten zyklischen Untermoduln ist. Sind genau die ersten s dieser zyklischen Moduln endlichdimensional von den Dimensionen $d(1), \ldots, d(s)$, so bilden $t^{d(1)+1} n_1, \ldots, t^{d(s)+1} n_s$ die gesuchte Basis von M. □

5.4 Hilbert-Polynome

5.4.1. Ich erinnere an Übung [LA1] 6.3.39, nach der wir für jeden Ring k den Ring $k(\!(t)\!)$ der formalen Laurentreihen mit Koeffizienten in k der Gestalt $\sum_{n \geq -N} a_n t^n$ mit $a_n \in k$ und $N \in \mathbb{N}$ bilden können. Ich erinnere weiter daran, daß von Null verschiedene Reihen, bei denen der Koeffizient der kleinsten mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftauchenden Potenz von X eine Einheit in k ist, ihrerseits Einheiten des Rings der formalen Laurentreihen sind. Unter der offensichtlichen Einbettung $k[t, t^{-1}] \hookrightarrow k(\!(t)\!)$ der formalen Laurent-Polynome in die formalen Laurentreihen wird zum Beispiel $(1-t)$ eine Einheit mit Inversem $1 + t + t^2 + \ldots$

Satz 5.4.2 (Erzeugende Funktionen zu Moduln über Polynomringen). *Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ mit seiner Standardgraduierung. So gibt es genau ein Laurent-Polynom $f_M \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ derart, daß im Ring $\mathbb{Z}(\!(t)\!)$ der formalen Laurentreihen gilt*

$$\sum (\dim_k M^i) t^i = \frac{f_M(t)}{(1-t)^n}$$

5.4.3. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir für k einen Kring endlicher Länge nehmen und statt $\dim_k M^i$ die Länge $l_k(M^i)$ des k-Moduls M^i betrachten. Man überlegt sich, daß auch in diesem Fall jeder endlich erzeugte graduierte

Modul von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird, und da die homogenen Konponenten des Polynomrings $k[x_1, \ldots, x_n]$ mit seiner Standardgraduierung endliche Länge haben, folgt dasselbe für die homogenen Komponenten unseres endlich erzeugten Moduls M.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, nur die Existenz bleibt zu zeigen. Wir notieren die linke Seite $P(M,t)$ und argumentieren mit vollständiger Induktion über die Zahl der Variablen. Der Fall $n = 0$ ist offensichtlich. Sonst betrachten wir die exakte Sequenz $\ker \hookrightarrow M \xrightarrow{x_1 \cdot} M \twoheadrightarrow \operatorname{cok}$ und folgern durch mehrmaliges Anwenden der Dimensionsformel [LA1] 2.2.4 leicht

$$\dim \ker^i - \dim M^i + \dim M^{i+1} - \dim \operatorname{cok}^{i+1} = 0$$

alias $tP(\ker, t) - tP(M,t) + P(M,t) - P(\operatorname{cok}, t) = 0$ alias $(1-t)P(M,t) = P(\operatorname{cok}, t) - tP(\ker, t)$. Nun wirkt x_1 aber auf $\ker$ und cok durch Null. Induktion zeigt dann, daß $P(M,t)$ die gewünschte Form hat. □

Satz 5.4.4 (Hilbert-Polynom). *Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_i M^i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$. So gibt es Polynome $Q_M, P_M \in \mathbb{Q}[t]$ derart, daß für alle hinreichend großen $i \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\dim_k M^i = Q_M(i) \quad \textit{und} \quad \dim_k M^{\leq i} = P_M(i).$$

Beide Polynome sind eindeutig bestimmt. P_M heißt das **Hilbert-Polynom von** M. *Es hat höchstens den Grad n. Ich nenne diesen Grad die* **Hilbert-Dimension** *des graduierten Moduls M und notiere ihn* $\operatorname{hdim}(M) := \operatorname{grad} P_M$.

5.4.5. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir für k einen Kring endlicher Länge nehmen und statt $\dim_k M^i$ die Länge $l_k(M^i)$ des k-Moduls M^i betrachten. Speziell hat der Nullmodul die Hilbertdimension $-\infty$ und Hilbertdimension Null haben genau die graduierten Moduln, die als k-Vektorräume eine endliche positive Dimension bzw. als k-Moduln eine endliche positive Länge haben.

Beweis. Die Binomialreihe [AN1] 5.1.19 oder auch elementare Überlegungen liefern die Entwicklung

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-t)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} t^i$$

in $\mathbb{Q}[\![t]\!]$. Die Binomialkoeffizienten ganz rechts sind offensichtlich die Werte bei i des Polynoms

$$P_n(T) = \binom{n+T-1}{n-1} = \frac{(n+T-1)(n+T-2)\ldots(T+1)}{(n-1)!}$$

So folgt aus dem vorhergehenden Satz 5.4.2 zumindest die Existenz eines Polynoms Q_M vom Grad $\leq n-1$ mit $\dim_k M^i = Q_M(i)$ für $i \gg 0$. Nun mache man $\tilde{M} := \bigoplus_i M^{\leq i}$ zu einem endlich erzeugten graduierten Modul über dem erweiterten Polynomring $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, indem man x_0 als Einbettung $M^{\leq i} \hookrightarrow M^{\leq i+1}$ operieren läßt. Das Polynom $Q_{\tilde{M}}$ für den so konstruierten Modul $\tilde{M}$ ist dann das gesuchte Polynom P_M. □

Proposition 5.4.6 (Multiplizität). *Seien k ein Körper und M ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$. So gilt:*

1. *Hat das Hilbertpolynom die Gestalt $P_M(t) = a_d t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \ldots + a_0$, so ist das Produkt $d!a_d$ eine natürliche Zahl. Für $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq \operatorname{hdim}(M)$ notieren wir diese Zahl $\operatorname{mult}^d(M) := d!a_d$ und nennen sie die d-**Multiplizität von** M. Im Fall $d > \operatorname{hdim}(M)$ haben wir insbesondere $\operatorname{mult}^d(M) = 0$.*

2. *Ist $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten graduierten Moduln über unserem Polynomring, so gilt für die Hilbertdimensionen $\operatorname{hdim}(M) = \max(\operatorname{hdim}(N), \operatorname{hdim}(Q))$, und für $d \geq \operatorname{hdim}(M)$ haben wir*
$$\operatorname{mult}^d(M) = \operatorname{mult}^d(N) + \operatorname{mult}^d(Q)$$

*Für $M \neq 0$ und $d = \operatorname{hdim}(M)$ heißt die Zahl $\operatorname{mult}^d(M)$ die **Multiplizität von** M und wir notieren sie $\operatorname{mult}(M)$. Die Hilbertdimension ebenso wie die Multiplizität bleiben bei Verschiebungen der Graduierung unverändert. Dasselbe gilt im Fall eines beliebigen Krings k endlicher Länge.*

Beweis. Die erste Behauptung ist ein allgemeines Resultat für sogenannte „numerische“ Polynome alias Polynome, die auf hinreichend großen natürlichen Zahlen ganzzahlige Werte annehmen, vergleiche [LA1] 6.4.8. Die Zweite folgt aus der Identität $P_M = P_N + P_Q$ der zugehörigen Hilbertpolynome. □

Ergänzung 5.4.7. Offensichtlich müssen sich Multiplizität und die Hilbertdimension auch direkt an der erzeugenden Funktion aus 5.4.2 ablesen lassen. Ist genauer M nicht Null, so ist der Grad d des Hilbertpolynoms P_M genau die Polordnung der erzeugenden Funktion $P(M,t)$ bei $t = 1$ und der Leitkoeffizient des Hilbertpolynoms P_M ist der tiefste von Null verschiedene Koeffizient in der Laurententwicklung der erzeugenden Funktion $P(M,t)$ nach Potenzen von $(1-t)$, geteilt durch $d!$. Um das zu sehen, kann man wie folgt argumentieren: Unsere rationale Funktion $P(M,t)$ hat keine Polstellen außer bei $t = 0$ und $t = 1$. Ihre Partialbruchzerlegung hat also die Form

$$P(M,t) = \sum_{\nu=-d}^{-1} a_\nu (1-t)^{-\nu} + \sum_{\nu=-m}^{-1} b_\mu t^{-\mu} + R(t)$$

mit einem Polynom $R(t) \in \mathbb{Q}[t]$ und $a_\nu, b_\mu \in \mathbb{Q}$. Rechnen wir uns von hier aus in den Ring $\mathbb{Q}((t))$ der formalen Laurentreihen zurück, so erkennen wir leicht, daß der Grad des Polynoms Q_M aus dem vorhergehenden Beweis eins kleiner ist als die Polordnung von $P(M,t)$ bei $t = 1$ und daß gilt $Q_M = 0$ falls $P(M,t)$ bei $t = 1$ gar keinen Pol hat. Denken wir etwas schärfer nach oder erinnern [LA1] 6.6.24, so sehen wir weiter, daß hier sogar notwendig gilt $a_\nu, b_\mu \in \mathbb{Z}$ für alle ν sowie $R \in \mathbb{Z}[t]$. Zusätzlich erkennen wir, daß im Fall $Q_M \neq 0$ für $d > 0$ größtmöglich mit $a_{-d} \neq 0$ notwendig gilt $a_{-d} \in \mathbb{Z}$ und daß unser Polynom Q_M den Leitkoeffizienten $a_{-d}/(d-1)!$ hat. Nun beachten wir, daß ja offensichtlich gilt $P(\tilde{M},t) = (1-t)^{-1}P(M,t)$ und per definitionem haben wir ja $Q_{\tilde{M}} = P_M$. So folgt dann die Behauptung.

Übungen

Übung 5.4.8 (**Kokerne homogener Selbstinjektionen**). Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_i M^i$ ein endlich erzeugter von Null verschiedener graduierter Modul über dem Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$. Ist $f : M \hookrightarrow M$ ein injektiver Endomorphismus von M und gibt es $r > 0$ mit $f(M^i) \subset M^{i+r}$ für alle i, so hat $\operatorname{cok} f$ im Vergleich zu M eine um Eins kleinere Hilbert-Dimension und die r-fache Multiplizität, in Formeln

$$\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) = \operatorname{hdim}(M) - 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{mult}(\operatorname{cok} f) = r \operatorname{mult}(M).$$

Dasselbe gilt im Fall eines beliebigen Krings k endlicher Länge.

5.5 Dimensionstheorie lokaler noetherscher Kringe

Definition 5.5.1. Gegeben ein Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ bilden seine Potenzen $\mathfrak{a}^n$ eine absteigende Filtrierung des Rings A, mit der Konvention $\mathfrak{a}^n = A$ für $n \leq 0$. Den assoziierten graduierten Ring notieren wir

$$\operatorname{gr}_{\mathfrak{a}} A := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i/\mathfrak{a}^{i+1} = A/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \oplus \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^3 \oplus \ldots$$

5.5.2. Gegeben ein noetherscher Kring A und $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}}$ maximal ist $A/\mathfrak{q}$ von endlicher Länge. In der Tat ist ja dann $A/\mathfrak{q}$ ein Kring der Krulldimension Null und wir können 3.5.17 anwenden, oder auch den hier einzig relevanten Teil des Beweises erinnern und $\mathfrak{m} \subset A/\mathfrak{q}$ das Bild von $\sqrt{\mathfrak{q}}$ nehmen und beachten, daß die Subquotienten der Filtrierung $A/\mathfrak{q} \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{m}^r$ endliche Länge haben und daß gilt $\mathfrak{m}^r = 0$ für $r \gg 0$.

Satz 5.5.3 (Hilbertpolynome im Fall lokaler noetherscher Kringe). *Seien A ein noetherscher lokaler Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}}$ dem maximalen Ideal, und M ein endlich erzeugter A-Modul. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Polynom $P = P_M^{\mathfrak{q}} \in \mathbb{Q}[t]$, das für große i die Länge von $M/\mathfrak{q}^i M$ berechnet, in Formeln $l(M/\mathfrak{q}^i M) = P(i)$ für $i \gg 0$;*

2. *Der Grad $d_{\mathfrak{q}}(M)$ dieses Polynoms ist beschränkt durch die Kardinalität jedes Erzeugendensystems von $\mathfrak{q}$;*

3. *Für $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ das maximale Ideal von A haben $P_M^{\mathfrak{q}}$ und $P_M^{\mathfrak{m}}$ denselben Grad. Wir nennen ihn die* **Hilbert-Dimension von** *M und notieren ihn $\operatorname{hdim} M$.*

Ergänzung 5.5.4. Die Hilbert-Dimension eines endlich erzeugten Moduls M über einem noetherschen lokalen Kring $(A, \mathfrak{m})$ im Sinne des vorhergehenden Satzes und die Hilbert-Dimension eines endlich erzeugten graduierten Moduls über einem Polynomring im Sinne von 5.4.4 sind also verknüpft durch die Beziehung $\operatorname{hdim}(M) = \operatorname{hdim}(\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} M)$.

Beweis. Für $k = A/\mathfrak{q}$ und $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}$ erhalten wir eine Surjektion $k[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow \operatorname{gr}_{\mathfrak{q}} A$. Die ersten beiden Behauptungen folgen damit aus dem Satz über das Hilbertpolynom 5.4.4 oder noch besser seiner Erweiterung 5.4.5. Die dritte Aussage folgt, da es l gibt mit $\mathfrak{m}^l \subset \mathfrak{q}$ und folglich $P_M^{\mathfrak{q}}(i) \geq P_M^{\mathfrak{m}}(i)$ und $P_M^{\mathfrak{m}}(li) \geq P_M^{\mathfrak{q}}(i)$ für $i \gg 0$. □

Satz 5.5.5 (Hilbert-Dimension der Kokerne injektiver Endomorphismen). *Seien A ein noetherscher lokaler Kring und M ein endlich erzeugter von Null verschiedener A-Modul. Ist $f : M \hookrightarrow M$ ein injektiver Endomorphismus, so gilt*

$$\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) < \operatorname{hdim} M$$

5.5.6. Der Beweis dieses zentralen Resultats braucht einige Vorbereitungen und wird erst im Anschluß an den Beweis von 5.5.10 gegeben. Man bemerke den Kontrast in der Schwierigkeit zwischen dieser Aussage und ihrem graduierten Analogon 5.4.8, das sehr viel leichter zu zeigen ist und Ihnen als Übung aufgegeben war.

Definition 5.5.7. Seien A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Eine Filtrierung eines A-Moduls M heißt **$\mathfrak{a}$-stabil** genau dann, wenn sie bei M endet, mit der Filtrierung von A durch die $\mathfrak{a}^n$ verträglich ist, in Formeln $\mathfrak{a}M^{\geq i} \subset M^{\geq i+1}$ für alle i, und wenn es ein d gibt derart, daß für alle $i \geq d$ sogar gilt $\mathfrak{a}M^{\geq i} = M^{\geq i+1}$.

Lemma 5.5.8 (Vergleich stabiler Filtrierungen). *Gegeben ein Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und ein A-Modul M sind je zwei $\mathfrak{a}$-stabile Filtrierungen Ω und Γ auf M in der Weise vergleichbar, daß es c gibt mit $\Gamma^{\geq i+c} M \subset \Omega^{\geq i} M$ für alle i.*

Beweis. Es reicht, das unter der Annahme zu zeigen, daß eine unserer Filtrierungen die offensichtliche Filtrierung durch die $\mathfrak{a}^i M$ ist. Wir können also unsere Notation vereinfachen und die andere Filtrierung $M^{\geq i}$ notieren. Nach Annahme gibt es ein c mit $M = M^{\geq -c}$ und dann haben wir notwendig $\mathfrak{a}^i M \subset M^{\geq -c+i}$ für alle i. Nach Annahme gibt es aber auch ein d mit $M^{\geq i+d} = \mathfrak{a}^i M^{\geq d}$ für alle $i \geq 0$ und somit $M^{\geq i+d} \subset \mathfrak{a}^i M$ für alle i. □

Proposition 5.5.9 (Von stabilen Filtrierungen induzierte Filtrierungen). *Seien A ein noetherscher Kring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein noetherscher A-Modul. So ist die von einer $\mathfrak{a}$-stabilen Filtrierung von M auf einem Untermodul $N \subset M$ induzierte Filtrierung auch selbst wieder $\mathfrak{a}$-stabil.*

Beweis. Wir erinnern aus dem Beweis von 3.4.12 die Konstruktion des Reesrings $\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n$ und den Nachweis, daß dieser Ring im Fall eines Ideals $\mathfrak{a}$ eines noetherschen Krings wieder noethersch ist. Es ist leicht zu sehen, wie $\bigoplus_{n\geq d} M^{\geq n}$ für ein beliebiges d ein Modul über dem Reesring wird, und daß dieser Modul im Fall einer $\mathfrak{a}$-stabilen Filtrierung von M sogar endlich erzeugt alias noethersch sein muß. Dasselbe gilt für den zu seinem Untermodul mit der induzierten Filtrierung $N^{\geq n} := N \cap M^{\geq n}$ gebildeten Modul $\bigoplus_{n\geq d} N^{\geq n}$ über dem Reesring. Daraus, daß dieser Modul für ein d endlich erzeugt ist, folgt dann, daß die induzierte Filtrierung auch $\mathfrak{a}$-stabil ist: Ist genauer g der größte Grad für ein Element eines homogenen Erzeugendensystems von $\bigoplus_{n\geq d} N^{\geq n}$ über dem Reesring, so folgt $\mathfrak{a}N^{\geq i} = N^{\geq i+1}$ für alle $i \geq g$. □

Proposition 5.5.10 (Multiplizitäten im Fall lokaler noetherscher Kringe). *Seien A ein noetherscher lokaler Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}}$ maximal, und M ein endlich erzeugter A-Modul. So gilt:*

1. *Hat das Hilbertpolynom die Gestalt $P_M^{\mathfrak{q}}(t) = a_d t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \ldots + a_0$, so ist das Produkt $d!a_d$ eine natürliche Zahl $\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M)$, im Fall $d > d_{\mathfrak{q}}(M)$ eben die Zahl Null.*

2. *Ist $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln, so gilt $d_{\mathfrak{q}}(M) = \max(d_{\mathfrak{q}}(N), d_{\mathfrak{q}}(Q))$ und für $M \neq 0$ und $d = d_{\mathfrak{q}}(M)$ haben wir*

$$\operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(M) = \operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(N) + \operatorname{mult}_{\mathfrak{q}}^d(Q)$$

Für $M \neq 0$ und $d = \operatorname{hdim}(M)$ heißt die Zahl $\operatorname{mult}_{\mathfrak{m}}^d(M)$ die **Multiplizität von** *M und wir notieren sie $\operatorname{mult}(M)$.*

Beweis. Die erste Behauptung ist ein allgemeines Resultat für sogenannte „numerische“ Polynome alias Polynome, die auf hinreichend großen natürlichen Zahlen ganzzahlige Werte annehmen, vergleiche [LA1] 6.4.8. Für die Zweite betrachten wir das Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc} N\cap\mathfrak{q}^iM & \hookrightarrow & \mathfrak{q}^iM & \twoheadrightarrow & \mathfrak{q}^iQ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N/(N\cap\mathfrak{q}^iM) & \hookrightarrow & M/\mathfrak{q}^iM & \twoheadrightarrow & Q/\mathfrak{q}^iQ \end{array}$$

Seine beiden oberen Zeilen sind exakt, also nach dem Neunerlemma auch die untere Zeile. Sie liefert die Relation

$$l(M/\mathfrak{q}^iM) = l(N/(N\cap\mathfrak{q}^iM)) + l(Q/\mathfrak{q}^iQ)$$

Nun bilden jedoch die $N\cap\mathfrak{q}^iM$ nach 5.5.9 auch eine $\mathfrak{q}$-stabile Filtrierung von N, folglich gibt es ein Polynom $\tilde{P}_N(t)$ mit $l(N/(N\cap\mathfrak{q}^iM)) = \tilde{P}_N(i)$ für $i \gg 0$. Es folgt die Identität von Polynomen

$$P_M(t) = \tilde{P}_N(t) + P_Q(t)$$

Nach 5.5.8 gibt es jedoch c mit $P_N(i+c) \geq \tilde{P}_N(i) \geq P_N(i-c)$ für $i \gg 0$, folglich haben P_N und $\tilde{P}_N$ denselben Grad und, wenn sie nicht Null sind, denselben Leitkoeffizienten. Daraus folgt unsere Behauptung dann unmittelbar. □

Beweis von Satz 5.5.5. Sei A ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter von Null verschiedener A-Modul. Ist $f : M \hookrightarrow M$ ein injektiver Homomorphismus, so behauptet Satz 5.5.5 die strikte Ungleichung $\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) < \operatorname{hdim} M$. Um das zu zeigen, betrachten wir die kurze exakte Sequenz $M \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \operatorname{cok} f$. Für $d = \operatorname{hdim} M$ folgt aus 5.5.10.2 sofort $\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{m}}(\operatorname{cok} f) = 0$ und damit die Behauptung. □

Definition 5.5.11. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring heißt die kleinstmögliche Kardinalität für eine Teilmenge unseres Krings, deren Ideal-Erzeugnis als Radikal das maximale Ideal unseres Krings hat, seine **Einbettungsdimension**.

5.5.12 (**Geometrische Bedeutung der Einbettungsdimension**). Im geometrischen Fall des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ einer affinen Varietät über $k = \bar{k}$ ist die Einbettungsdimension das kleinste n derart, daß es einen Morphismus $X \to k^n$ gibt, für den x ein isolierter Punkt einer Faser ist.

Satz 5.5.13 (Hauptsatz zur Dimension lokaler noetherscher Kringe). *Gegeben ein lokaler noetherscher Kring stimmen überein: Seine Hilbertdimension, seine Krulldimension, und seine Einbettungsdimension.*

5.5.14. Speziell hat jeder lokale noethersche Kring endliche Krulldimension, ja die Zahl der für sein maximales Ideal benötigten Erzeuger ist eine obere Schranke für seine Krulldimension.

Beweis. Sei A unser lokaler noetherscher Kring. Wir notieren $\delta(A)$ die Einbettungsdimension. Zum Beweis zeigen wir $\delta(A) \leq \operatorname{kdim}(A) \leq \operatorname{hdim}(A) \leq \delta(A)$. Die Abschätzung $\operatorname{hdim}(A) \leq \delta(A)$ folgt unmittelbar aus unserem Satz 5.5.3 über Hilbertpolynome lokaler noetherscher Kringe, insbesondere Teil 1 und Teil 3. Die Abschätzung $\operatorname{kdim}(A) \leq \operatorname{hdim}(A)$ zeigen wir durch Induktion über $\operatorname{hdim}(A)$. Im Fall $\operatorname{hdim}(A) = 0$ stagniert die Folge der Ideale $\mathfrak{m}^n$ und nach dem Lemma von Nakayama 3.4.10 stagniert sie bei Null. Folglich hat unser Ring endliche Länge und nach 3.5.17 Krulldimension Null. Für den Induktionsschritt sei

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l$$

eine Primidealkette in A. Im Integritätsbereich $\bar{A} := A/\mathfrak{p}_0$ betrachten wir das Bild $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subset \bar{A}$ von $\mathfrak{p}_1$ und wählen $x \in \bar{\mathfrak{p}}_1 \backslash 0$. Die kurze exakte Sequenz

$$\bar{A} \stackrel{x\cdot}{\hookrightarrow} \bar{A} \twoheadrightarrow \bar{A}/\bar{A}x$$

zeigt mit 5.5.5 sofort $\operatorname{hdim}(\bar{A}/\bar{A}x) < \operatorname{hdim} \bar{A}$, und $\operatorname{hdim} \bar{A} \leq \operatorname{hdim} A$ ist eh klar. Aus der Induktionsannahme folgt so, dass die Primidealkette $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \bar{\mathfrak{p}}_l$ in $\bar{A}/\bar{A}x$ der Bilder der $\mathfrak{p}_i$ in $\bar{A}/\bar{A}x$ höchstens die Länge $l - 1 \leq \operatorname{hdim} A - 1$ haben kann. Es bleibt $\delta(A) \leq \operatorname{kdim} A$ zu zeigen. Wir konstruieren dazu eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ in $\mathfrak{m}$ derart, daß für alle $i \geq 0$ jedes Primideal über $\langle x_1, \ldots, x_i \rangle$ entweder mindestens die Höhe i hat oder aber mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ übereinstimmt. Wenn das gelingt, ist der Beweis erbracht. Sobald unsere Konstruktion beim zweiten Fall ankommt, können wir unsere Folge im übrigen einfach durch Nullen fortsetzen. Wir beginnen mit der leeren Folge. Hat $\mathfrak{m}$ die Höhe Null, so können wir bereits $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ nehmen und sind fertig. Sonst sind die minimalen Primideale von A verschieden von $\mathfrak{m}$. Nach 3.2.20 gibt es davon nur endlich viele und nach 2.6.13 können sie $\mathfrak{m}$ nicht überdecken. Es gibt also ein Element $x_1 \in \mathfrak{m}$, das in keinem minimalen Primideal enthalten ist. Sämtliche Primideale über x_1 haben dann mindestens die Höhe 1. Ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal über x_1, so sind wir wieder fertig. Sonst betrachten wir alle Primideale von A, die minimal über x_1 sind, und wählen $x_2 \in \mathfrak{m}$ außerhalb ihrer Vereinigung. Sämtliche Primideale über $\langle x_1, x_2 \rangle$ haben dann mindestens die Höhe 2. Indem wir immer so weitermachen, finden wir die gesuchte Folge. □

Korollar 5.5.15. *Gegeben ein noetherscher lokaler Kring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ gilt stets* $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq \operatorname{kdim} A$.

Beweis. Jedes Repräsentantensystem eines Erzeugendensystem des $A/\mathfrak{m}$-Vektorraums $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ erzeugt nach Nakayama bereits das Ideal $\mathfrak{m}$ als Ideal von A. Damit erweist sich unsere Behauptung als Spezialfall der Aussage $\delta(A) = \operatorname{kdim} A$ aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 5.5.13. □

Korollar 5.5.16 (Verallgemeinerter Krull'scher Hauptidealsatz). *Gegeben ein noetherscher Kring R gilt für die Höhe jedes Primideals $\mathfrak{p} \subset R$, das vorgegebene Elemente $f_1, \ldots, f_s$ von R enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$.*

Beweis. Im lokalen Kring $R_\mathfrak{p}$ muß $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ das Radikal des von $f_1, \ldots, f_s$ erzeugten Ideals sein. Damit folgt unsere Behauptung aus unserer Erkenntnis $\delta(A) = \operatorname{kdim} A$, die ein Teilaussage des Hauptsatzes der Dimensionstheorie 5.5.13 war. □

Definition 5.5.17. Gegeben ein lokaler noetherscher Ring A versteht man unter einem **Parametersystem von** A eine Familie $x_1, \ldots, x_d$ von $d = \operatorname{kdim} A$ Elementen des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ mit der Eigenschaft, daß das Radikal des von ihnen erzeugten Ideals gerade das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ selbst ist. Die Existenz solcher Parametersysteme folgt aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 5.5.13.

Proposition 5.5.18 (Parametersysteme sind algebraisch unabhängig). *Besitzt ein lokaler noetherscher Kring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ einen Unterkörper $k \subset A$ mit $k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ unter der natürlichen Abbildung, und ist $x_1, \ldots, x_d$ ein Parametersystem von A, so sind die x_i algebraisch unabhängig über k.*

Beweis. Ist $\mathfrak{q}$ das Erzeugnis der x_i, so liefern die offensichtlichen Abbildungen Homomorphismen

$$k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow (A/\mathfrak{q})[X_1, \ldots, X_d] \twoheadrightarrow \operatorname{gr}_\mathfrak{q} A$$

von graduierten Ringen. Wäre die Komposition nicht injektiv, so gäbe es ein von Null verschiedenes homogenes Polynom in ihrem Kern. Dies Element könnte auch in der Mitte kein Nullteiler sein, da die erste Abbildung offensichtlich von Null verschiedene Polynome auf Nichtnullteiler abbildet, und mit Übung 5.4.8 über Kokerne homogener Selbstinjektionen folgte $\operatorname{hdim} A < d$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Also liefert die Komposition eine Injektion $k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow \operatorname{gr}_\mathfrak{q} A$. Mit 5.1.15 folgt, daß die offensichtliche Abbildung bereits eine Injektion $k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow A$ gewesen sein muß. □

Übungen

Übung 5.5.19. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring A und ein Parametersystem $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ zeige man für jedes s mit $0 \leq s \leq d$ die Identität $\operatorname{kdim}(A/\langle x_1, \ldots, x_s \rangle) = d - s$. Hinweis: Für jeden lokalen noetherschen Kring B gilt $\operatorname{kdim} B = \delta(B)$.

5.6 Reguläre Punkte und reguläre Kringe

5.6.1. $(k = \bar{k})$. Eine algebraische Teilmenge $X \underset{\triangle}{\subset} k^n$ heißt **glatt** oder genauer **extrinsisch glatt an der Stelle** $x \in X$ und x heißt ein **regulärer Punkt von** X genau dann, wenn es $f_1, \dots f_r \in k[T_1, \dots, T_n]$ gibt derart, daß (1) eine Umgebung $U \overset{\circ}{\subset} k^n$ von x existiert mit $X \cap U = \mathcal{Z}(f_1, \dots f_r) \cap U$ der simultanten Nullstellenmenge der f_i in U und daß (2) die Gradienten der f_j bei x, als da heißt die Vektoren $(\operatorname{grad} f_j)(x) := ((\partial f_j / \partial T_i)(x)) \in k^n$ für $1 \leq j \leq r$ linear unabhängig sind.

5.6.2 (**Diskussion der Beziehung zum Mannigfaltigkeitsbegriff**). $(k = \bar{k})$. Die Motivation für diese Begiffsbildung kommt von der Beschreibung [AN2] 3.4.10 von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ als Urbilder her. Die verschiedenen äquivalenten Beschreibungen von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ als Bilder [AN2] 3.5.1 oder als „lokal plättbare Teilmengen“ [AN2] 3.4.2 haben in der algebraischen Geometrie kein unmittelbares Analogon, da der Satz über implizite Funktionen keine unmittelbare Entsprechung hat: Bereits in einer Variablen besitzt ja der Satz über die Umkehrabbildung kein unmittelbares Analogon mehr, wie das Beispiel der Abbildung $k \to k$, $x \mapsto x^2$ zeigt. Später mögen Sie lernen, wie es gelingt, diese Schwierigkeiten durch die Einführung der sogenannten „étalen Topologie“, die im übrigen im Sinne unserer Definition [AN1] 6.5.5 gar keine Topologie ist, sozusagen „wegzudefinieren“.

5.6.3 (**Diskussion von Varianten der Definition**). $(k = \bar{k})$. In der Literatur ist es üblich, eine andere Definition des Begriffs einer extrinsisch glatten Stelle zu verwenden: Gegeben $X \underset{\triangle}{\subset} k^n$ heißt danach eine Stelle $x \in X$ glatt genau dann, wenn der von den Gradienten bei x der Funktionen $f \in \mathcal{I}(X)$, als da heißt von den Vektoren $(\operatorname{grad} f)(x) := ((\partial f / \partial T_i)(x)) \in k^n$ aufgespannte Teilraum die Dimension $n - \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x}$ hat. Diese Definition ist aber zu schwach, um die Lösung der Übung 5.6.20 zu ermöglichen, die in meinen Augen eine wichtige Brücke von der Algebra in die Anschauung ist. Die Äquivalenz beider Definitionen zeigen wir in 5.6.11.

5.6.4 (**Intrinsische Natur der Glattheit**). $(k = \bar{k})$. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß unsere Definition glatter Punkte in der Weise „intrinsisch“ ist, daß gegeben ein Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ in der Kategorie 2.2.4 der algebraischen Teilmengen irgendwelcher k^n unser X glatt ist bei $x \in X$ genau dann, wenn Y glatt ist bei $\varphi(x) \in Y$.

Definition 5.6.5. Ein lokaler Kring A heißt **regulär** genau dann, wenn er noethersch ist und wenn für sein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ gilt

$$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \operatorname{kdim} A$$

Eine Familie von Elementen $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$, deren Nebenklassen eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden, heißt dann ein **reguläres Parametersystem von** A.

Beispiel 5.6.6. Für alle Primzahlen p ist die Lokalisierung $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ an dem von p erzeugten Primideal ein regulärer lokaler Kring. Für jeden Körper k und jeden Punkt $x \in k^n$ ist der lokalisierte Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]_{\mathcal{I}(x)}$ regulär.

Satz 5.6.7 (Eigenschaften regulärer lokaler Kringe). *Jeder reguläre lokale Kring ist ein Integritätsbereich und der assoziierte graduierte Ring zu seiner Filtrierung durch die Potenzen des maximalen Ideals ist ein Polynomring.*

Beweis. Für jeden regulären lokalen Kring $(A, \mathfrak{m})$ der Dimension d und jedes reguläre Parametersystem $x_1, \ldots, x_d$ muß die offensichtliche durch $X_i \mapsto \bar{x}_i$ gegebene Surjektion ein Isomorphismus

$$(A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_d] \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$$

sein, denn sonst folgte wie beim Beweis von 5.5.18 aus Übung 5.4.8 zu Kokernen homogener Selbstinjektionen bereits die Abschätzung $\operatorname{hdim} A < d$. Die Filtrierung durch die $\mathfrak{m}^i$ ist jedoch Hausdorff nach dem Durchschnittssatz 3.4.12. Da der assoziierte graduierte Ring nullteilerfrei ist, folgt dasselbe mit 5.2.14 für A selber. □

Satz 5.6.8 (Reguläre Quotienten regulärer lokaler Kringe). *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Kring und $I \subset A$ ein Ideal. So sind gleichbedeutend:*

1. *Der Quotient A/I nach unserem Ideal ist ein regulärer lokaler Kring;*

2. *Unser Ideal I wird von einer Teilmenge eines regulären Parametersystems des regulären lokalen Krings A erzeugt.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Ist A/I lokal, so folgt $A \neq I$ und mithin $I \subset \mathfrak{m}$. Wir vereinbaren die Abkürzungen $A/I =: \bar{A}$ und $\mathfrak{m}/I =: \bar{\mathfrak{m}}$ und betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I \cap \mathfrak{m}^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathfrak{m}^2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \bar{\mathfrak{m}}^2 \arrow[d, hook] \\
I \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{m} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{m}} \arrow[d] \\
I/(I \cap \mathfrak{m}^2) \arrow[r, hook] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r, two heads] & \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten, bei dem die Exaktheit der unteren Zeile aus dem Neunerlemma folgt. Sei d die Krulldimension von A und $\bar{d}$ die Krulldimension von $\bar{A}$ und $s = d - \bar{d}$. Wir finden sicher Elemente $f_1, \ldots, f_s \in I$, deren Bilder den Kern in der unteren Zeile erzeugen. Für den Quotienten $\tilde{A} := A/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ nach dem von ihnen erzeugten Ideal mit seinem maximalen Ideal $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ erhalten wir dann

$$\operatorname{kdim} \tilde{A} \leq \dim_{\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{m}}} \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 = \dim_{\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}} \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2 = \operatorname{kdim} \bar{A} \leq \operatorname{kdim} \tilde{A}$$

mit ersten Abschätzung nach Korollar 5.5.15 des Hauptsatzes der Dimensionstheorie und der letzten aufgrund der Surjektion $\tilde{A} \twoheadrightarrow \bar{A}$. Zusammen folgt, daß auch $\tilde{A}$ regulär ist und mithin nach 5.6.7 ein Integritätsbereich. Wäre der Kern von $\tilde{A} \twoheadrightarrow \bar{A}$ nicht Null, so müßte er ein Primideal ungleich Null sein und unsere Kringe könnten nicht dieselbe Krulldimension haben. Das zeigt $\tilde{A} \xrightarrow{\sim} \bar{A}$ und damit $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.

$2 \Rightarrow 1$. Sei $f_1, \ldots, f_d \in \mathfrak{m}$ ein reguläres Parametersystem. Es gilt zu zeigen, daß für alle s auch $\bar{A} := A/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ ein regulärer lokaler Kring ist. Nun liefert Übung 5.5.19 uns die Identität $\operatorname{kdim}(\bar{A}) = \operatorname{kdim}(A) - s$, und die Identität $\dim_{\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - s$ ist leicht zu sehen. □

Definition 5.6.9. $(k = \bar{k})$. Eine affine algebraische Varietät X heißt **glatt** oder genauer **intrinsisch glatt an der Stelle** $x \in X$ und x heißt ein **regulärer Punkt von** X genau dann, wenn der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der Funktionskeime bei x ein regulärer lokaler Ring ist.

Vorschau 5.6.10. Dieselbe Definition verwenden wir für beliebige Varietäten.

Korollar 5.6.11 (Intrinsisch glatt ist dasselbe wie extrinsisch glatt). $(k = \bar{k})$. *Sei $X \subset\!\!\!\!\!\triangle\; k^n$ eine algebraische Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Genau dann ist X extrinsisch glatt bei x, wenn es dort intrinsisch glatt ist alias wenn der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der regulären Funktionskeime bei x ein regulärer lokaler Ring ist.*

5.6.12. Mit der in der Literatur üblichen Definition glatter Stellen, wie sie in 5.6.3 erklärt wird, ist dieses Korollar fast eine Tautologie. Wie in 5.6.3 ausgeführt macht es diese Definition aber mühsam, die Brücke zur Analysis und damit zur Anschauung zu schlagen.

5.6.13. Gegeben eine glatte Stelle x einer algebraische Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\!\triangle\; k^n$ und ein reguläres Parametersystem $f_1, \ldots, f_d$ ihres lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ werden die Funktionen f_i bereits alle in einer offenen Umgebung $U \circledcirc X$ von x definiert sein und folglich eine Abbildung $U \to k^d$ liefern. Im Gegensatz zur analogen Situation im Fall differenzierbarer Mannigfaltigkeiten wird diese Abbildung jedoch im allgemeinen auf keiner Zariski-offenen Umgebung U von x injektiv sein, und das für jedes System lokaler Parameter. Es ist also im allgemeinen nicht möglich, im algebraischen Fall in der Zariski-Topologie so etwas wie „lokale Koordinatensysteme“ zu finden.

Beweis. Wir wenden den Satz 5.6.8 über reguläre Quotienten regulärer lokaler Kringe an auf die Lokalisierung $A = k[T_1, \ldots, T_n]_x$ des Polynomrings nach allen Polynomen, die bei x nicht verschwinden, und seinen Quotienten $\mathcal{O}_{X,x} = A/I$. Ein reguläres Parametersystem des Rings A ist dasselbe wie ein System von Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in A$ mit $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ derart, daß ihre Gradienten bei x eine Basis des k^n bilden, denn die Abbildung $f \mapsto (\operatorname{grad} f)(x)$ liefert einen Vektorraumisomorphismus $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} k^n$ für $\mathfrak{m} \subset A$ das maximale Ideal. Ist $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär, so kann also I erzeugt werden von Funktionen mit linear unabhängigen Gradienten bei x. Ist umgekehrt X glatt bei x, kann es also beschrieben werden als simultane Nullstellenmenge von Funktionen mit linear unabhängigen Gradienten, so müssen diese Funktionen nach 5.6.8 bereits ein Primideal, also das ganze Verschwindungsideal erzeugen, und wieder nach 5.6.8 ist dann $\mathcal{O}_{X,x}$ ein regulärer lokaler Kring. □

Definition 5.6.14. Eine affine Varietät X heißt **regulär bei einer Stelle** $x \in X$ genau dann, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X an der Stelle x regulär ist im Sinne von 5.6.5.

Korollar 5.6.15 (Lokale Irreduzibilität bei glatten Stellen). $(k = \bar{k})$. *Sei X eine affine Varietät. Ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ an einer Stelle $x \in X$ regulär, so geht durch den Punkt x nicht mehr als eine irreduzible Komponente von X.*

Beweis. Ginge mehr als nur eine irreduzible Komponente von X durch den Punkt x, so hätte der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ mehr als nur ein minimales Primideal. Dann wäre er kein Integritätsbereich, mithin nach 5.6.7 auch nicht regulär. □

Satz 5.6.16. *Jeder reguläre lokale Kring ist normal.*

Vorschau 5.6.17. Man kann sogar zeigen, daß jeder reguläre lokale Kring faktoriell ist. Beweise findet man etwa in [Eisenbud: Commutative Algebra] oder [Shafarevitch: Basic Algebraic Geometry] oder, sagt [Kunz], bei Kaplansky.

Beweis. Sei $(A, \mathfrak{m})$ unser regulärer lokaler Kring. Sei $x \in \operatorname{Quot} A$ ganz über A. Es gilt zu zeigen $x \in A$. Dazu schreiben wir $x = r/s$ mit $r, s \in A$ und $s \neq 0$. Da x ganz ist über A, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A[x] = A + Ax + \ldots + Ax^n$$

Wir folgern $s^n x^m \in A$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $r^m \in s^{m-n}A$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nehmen wir zusätzlich $r \neq 0$ an, so gibt es i maximal mit $r \in \mathfrak{m}^i$ und wir haben $0 \neq \bar{r} \in \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$. Ebenso bilden wir auch den „Leitterm“ $\bar{s} \in \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$ von s und folgern, daß $\bar{s}^{m-n}$ für $m \geq n$ stets ein Teiler von $\bar{r}^m$ ist in $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$. Da dieser

Ring jedoch nach 5.6.7 faktoriell ist, muß sogar $\bar{s}$ ein Teiler von $\bar{r}$ sein. In anderen Worten gibt es $a_0 \in \mathfrak{m}^{i+1}$ mit

$$r = a_0 s + r_0$$

Das gilt dann natürlich auch ohne die Annahme $r \neq 0$. Nun ist aber $x_0 := r_0/s$ wieder ganz über A und wir erhalten in derselben Weise eine Darstellung

$$r_0 = a_1 s + r_1$$

mit $r_1 \in \mathfrak{m}^{i+2}$. Indem wir immer so weitermachen, folgt schließlich

$$r \in \bigcap_{i=0}^{\infty} As + \mathfrak{m}^i$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit war s keine Einheit von A, also $s \in \mathfrak{m}$. Nach dem Durchschnittssatz von Krull 3.4.12, angewandt auf den Restklassenring A/As, folgt daraus aber sofort $r \in As$ alias $x \in A$. $\square$

Übungen

Übung 5.6.18. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die glatten Stellen einer algebraischen Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\; k^n$ stets eine offene Teilmenge bilden.

Vorschau 5.6.19. Was an dieser Stelle fehlt, ist der Nachweis, daß die glatten Stellen sogar eine dichte offene Teilmenge bilden. Das soll in 6.6.10 diskutiert und zumindest im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null bewiesen werden.

Übung 5.6.20 (**Algebraische Teilmengen in $\mathbb{C}^n$ als Mannigfaltigkeiten**). Man zeige, daß die glatten Stellen einer irreduziblen algebraischen Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\; \mathbb{C}^n$ eine orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ der Dimension $d = 2 \operatorname{kdim} X$ von im Sinne von [AN2] 3.4.2 und [AN2] 6.3.9 bilden, genauer sogar eine glatte Untermannigfaltigkeit im Sinne von [ML] 4.2.6. Hinweis: [AN2] 3.4.10.

Übung 5.6.21 (**Erzeugung der Verschwindungsideale glatter Varietäten**). $(k = \bar{k})$. Sei $X \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\; k^n$ glatt in jedem Punkt und seien Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{I}(X)$ gegeben derart, daß für alle $x \in X$ gilt

$$\dim_k \langle (\operatorname{grad} f_1)(x), \ldots, (\operatorname{grad} f_r)(x) \rangle_k + \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x} = n$$

So erzeugen die f_i bereits das Verschwindungsideal von X, in Formeln ausgedrückt gilt also $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \mathcal{I}(X)$.

Übung 5.6.22. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Matrizen $M \in \operatorname{Mat}(3; k)$ vom Rang ≤ 1 eine irreduzible algebraische Teilmenge des k^9 der Dimension 5 bilden und bestimme Erzeuger ihres Verschwindungsideals. Hinweis: 5.6.21.

5.7 Vervollständigung von Ringen*

Definition 5.7.1. Seien $A \supset I$ ein Ring mit einem Ideal. Die **Vervollständigung** $A_I^\wedge$ **von** A **am Ideal** I ist der Teilring $A_I^\wedge \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} A/I^n$ des Produkts von Quotienten bestehend aus allen Tupeln (a_n) mit $a_{n+1} \mapsto a_n$ für alle $n \geq 0$ unter den offensichtlichen Morphismen. Die Abbildung $A \to A_I^\wedge$, die jedem $a \in A$ das Tupel der $(a + I^n)$ zuordnet, ist stets ein Ringhomomorphismus, der **kanonische Homomorphismus in die Vervollständigung**. Er muß nicht injektiv sein. Ist weiter M ein A-Modul, so erklären wir die **Vervollständigung** $M_I^\wedge$ **von** M **am Ideal** I als die Untergruppe $M_I^\wedge \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} M/I^n M$ des Produkts von Quotienten bestehend aus allen Tupeln (v_n) mit $v_{n+1} \mapsto v_n$ für alle $n \geq 0$ unter den offensichtlichen Morphismen und erhalten eine offensichtliche Struktur auf $M_I^\wedge$ als $A_I^\wedge$-Modul.

5.7.2. In der Terminologie der Limites und Kolimites [TS] 6.1.12 kann man unsere Komplettierung auch kurz $M_I^\wedge := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M/I^n M$ schreiben.

Beispiel 5.7.3. Wir erhalten einen Isomorphismus $k[\![X]\!] \xrightarrow{\sim} k[X]^\wedge_{\langle X\rangle}$ zwischen dem Ring der formalen Potenzreihen und der Vervollständigung des Polynomrings an dem von der Variablen erzeugten Ideal, indem wir jeder formalen Potenzreihe die Folge der Nebenklassen ihrer Anfangsstücke zuordnen.

5.7.4 (**Herkunft der Terminologie**). Die Terminologie rührt von einer alternativen Konstruktion her: Man kann auf dem Quotienten A eine Pseudometrik d im Sinne von [AN3] 2.5.7 erklären durch die Vorschrift

$$d(a, b) := \inf\{2^{-n} \mid (a - b) \in I^n\}$$

und kann dann $A_I^\wedge$ unschwer identifizieren mit der Vervollständigung dieses pseudometrischen Raums im Sinne von [AN3] 2.5.7. Insbesondere besitzt $A_I^\wedge$ eine natürliche Topologie.

Ergänzung 5.7.5 (**Vervollständigung als Limes**). In der Sprache der Kategorientheorie kann unsere Vervollständigung auch verstanden werden als der Limes im Sinne von [TS] 6.1.1 des Kosystems der Quotientenringe A/I^n beziehungsweise der Limes des Kosystems der Quotientengruppen $M/I^n M$.

Definition 5.7.6. Eine **topologische Gruppe** ist, wie auch in [ML] 3.9.1 erklärt, eine Gruppe G mit einer Topologie derart, daß die Verknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversenabbildung $G \to G$ stetig sind.

Definition 5.7.7. Ein **topologischer Ring** ist ein Ring k mit einer Topologie derart, daß die Addition und die Multiplikation als Abbildungen $k \times k \to k$ stetig sind.

Definition 5.7.8. Ein **topologischer Modul** über einem topologischen Ring k ist ein k-Modul M mit einer Topologie derart, daß die Addition $M \times M \to M$ und die Multiplikation $k \times M \to M$ stetig sind. Die Kategorie aller topologischen k-Moduln notieren wir Modto_k.

Beispiel 5.7.9. Gegeben eine Primzahl p schreibt man $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}^{\wedge}_{\langle p \rangle}$ und nennt diesen Ring den Ring der **ganzen p-adischen Zahlen**. Seine Elemente lassen sich eindeutig darstellen als formale Potenzreihen $\sum_{n \geq 0} a_n p^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ und der Maßgabe, daß solch eine formale Potenzreihe „die Folge der Nebenklassen ihrer bei $p = p$ ausgewerteten Anfangsstücke" darstellt. Nach 5.7.14 ist der Ring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen kompakt.

5.7.10 (**Funktorialität der Vervollständigung**). Gegeben ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ sowie Ideale $I \subset A$ und $J \subset B$ mit $\varphi(I) \subset J$ erhalten wir in offensichtlicher Weise einen stetigen Ringhomomorphismus $\hat{\varphi} : A^{\wedge}_I \to B^{\wedge}_J$. Sind speziell $I \subset J \subset A$ Ideale ein- und desselben Rings und gibt es n mit $J^n \subset I$, so ist besagter Homomorphismus ein Isomorphismus von topologischen Ringen $A^{\wedge}_I \xrightarrow{\sim} A^{\wedge}_J$.

5.7.11 (**Vervollständigung und Lokalisierung**). Seien $A \supset I$ ein Ring mit einem Ideal. Gegeben ein Element $f \in A$ ist sein Bild in A/I invertierbar genau dann, wenn sein Bild in A/I^2 invertierbar ist. In der Tat folgt aus $fg = 1 + b$ bereits $fg(1 - b) = 1 - b^2$. Induktiv folgt, daß das Bild von f in der Vervollständigung $A^{\wedge}_I$ invertierbar sein muß. Ist speziell A kommutativ und $S \subset A$ eine Teilmenge, die in den Einheiten von A/I landet, so induziert die natürliche Abbildung sogar einen Isomorphismus von topologischen Ringen

$$A^{\wedge}_I \xrightarrow{\sim} (S^{-1}A)^{\wedge}_{S^{-1}I}$$

In der Tat sagt uns Übung 3.3.22 zum überflüssigen Lokalisieren zusammen mit der Exaktheit des Lokalisierens in diesem Fall, daß die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$A/I^n \xrightarrow{\sim} S^{-1}(A/I^n) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}A)/(S^{-1}I^n) = (S^{-1}A)/(S^{-1}I)^n$$

liefern. Insbesondere faktorisiert die kanonische Abbildung in die Vervollständigung unter besagten Voraussetzungen über die Lokalisierung als Sequenz von Ringhomomorphismen $A \to S^{-1}A \to A^{\wedge}_I$. Analoges gilt für Moduln.

Proposition 5.7.12 (**Exaktheit von Vervollständigungen**). *Ist A ein noetherscher Kring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$ eine kurze exakte Sequenz von noetherschen A-Moduln, so ist auch die induzierte Sequenz eine kurze exakte Sequenz*

$$L^{\wedge}_{\mathfrak{a}} \hookrightarrow M^{\wedge}_{\mathfrak{a}} \twoheadrightarrow N^{\wedge}_{\mathfrak{a}}$$

Des weiteren ist in dieser Sequenz die erste Abbildung topologisch initial und die zweite topologisch final.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir $L \subset M$ als Untermodul an. Nach 5.5.9 und 5.5.8 bilden die $L \cap \mathfrak{a}^n M$ eine $\mathfrak{a}$-stabile Filtrierung auf L und mit [TS] 6.1.23 oder auch etwas Nachdenken folgt, daß die Einbettungen einen Isomorphismus

$$\varprojlim L/\mathfrak{a}^n L \xrightarrow{\sim} \varprojlim L/(L \cap \mathfrak{a}^n M)$$

induzieren. Dann folgt die Proposition unmittelbar aus der Exaktheit der Limites surjektiver durch $\mathbb{N}$ indizierter Kosysteme abelscher Gruppen [TS] 6.1.33. $\square$

5.7.13 (**Vervollständigung im geometrischen Fall**). $(k = \bar{k})$. Im geometrischen Fall einer affinen Varietät X mit einem Punkt $x \in X$ verwendet man auch die Abkürzung

$$\mathcal{O}^{\wedge}_{X,x} := (\mathcal{O}_{X,x})^{\wedge}_{\mathfrak{m}}$$

für die Vervollständigung eines lokalen Rings an seinem maximalen Ideal. Unsere Erkenntnisse 5.7.11 über die Verträglichkeit von Vervollständigung und Lokalisierung liefern uns dann einen natürlichen Isomorphismus von topologischen Ringen $\mathcal{O}(X)^{\wedge}_{\mathcal{I}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\wedge}_{X,x}$. Ich denke mir die Elemente des vervollständigten lokalen Rings $\mathcal{O}^{\wedge}_{X,x}$ als „formale Taylorreihen um den Entwicklungspunkt x“. Nach 5.7.15 sind diese Ringe Quotienten von Potenzreihenringen in mehreren Variablen und nach 1.7.18 sind sie damit auch noethersch. Offensichtlich sind sie genau dann isomorph als k-Kring zu einem formalen Potenzreihenring in r Variablen, wenn x ein regulärer Punkt von X der lokalen Krulldimension $r = \operatorname{kdim}_x X$ ist.

Übungen

Übung 5.7.14. Man zeige: Die Multiplikation und Addition auf einem vervollständigten Ring sind stetig für die von der Metrik induzierte Topologie. Die invertierbaren Elemente bilden eine offene Teilmenge, und das Invertieren ist darauf eine stetige Abbildung. Hinweis: [AN3] 4.3.12. Sind alle Quotientenringe A/I^n endlich, so ist die Vervollständigung $A^{\wedge}_I$ kompakt. Hinweis: Satz von Tychonoff [ML] **??** oder seine abzählbare Variante [ML] 3.8.26.

Übung 5.7.15 (**Vervollständigungen von Quotienten**). Sei $A \supset I$ ein Ring mit einem Ideal und $M \twoheadrightarrow N$ ein surjektiver Homomorphismus von A-Moduln. Man zeige, daß dann die induzierte Abbildung $M^{\wedge}_I \to N^{\wedge}_I$ surjektiv und final ist. Ist weiter $A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Homomorphismus von Ringen und $J \subset B$ das Bild von I, so zeige man, daß die natürliche Abbildung ein Isomorphismus von topologischen A-Moduln $B^{\wedge}_I \xrightarrow{\sim} B^{\wedge}_J$ ist.

Übung 5.7.16. Man zeige: Die Vervollständigung eines lokalen Rings im Sinne von 3.4.7 nach seinem maximalen Ideal ist wieder ein lokaler Ring.

Übung 5.7.17. Man zeige: Die Vervollständigung eines lokalen Rings im Sinne von 3.4.7 nach seinem maximalen Ideal ist wieder ein lokaler Ring.

Übung 5.7.18. Ist $A \subset B$ eine modulendliche Kringerweiterung von noetherschen Kringen und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist die induzierte Abbildung auf den Vervollständigungen eine topologisch initiale Injektion $A^{\wedge}_{\mathfrak{a}} \hookrightarrow B^{\wedge}_{\langle B\mathfrak{a}\rangle}$.

Übung 5.7.19 (**Chinesischer Restsatz für Vervollständigungen**). Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ eines Krings R mit $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ für $i \neq j$ wie beim chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4 ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus von topologischen Ringen

$$R^{\wedge}_{\langle \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle} \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad R^{\wedge}_{\mathfrak{a}_1} \times \ldots \times R^{\wedge}_{\mathfrak{a}_s}$$

Übung 5.7.20 (**Vervollständigung und Invarianten**). Seien k ein noetherscher Kring und B eine ringendliche Kringerweiterung von k. Es operiere eine endliche Gruppe W auf dem k-Kring B. Nach 4.3.1 ist dann B^W ringendlich über k und B modulendlich über B^W. Man zeige: Ist die Gruppenordnung $|W|$ invertierbar in B und ist $\mathfrak{a} \subset B^W$ ein Ideal des Invariantenrings, so induziert die Einbettung aus 5.7.18 einen Isomorphismus von topologischen Ringen

$$(B^W)^{\wedge}_{\mathfrak{a}} \stackrel{\sim}{\to} \left(B^{\wedge}_{\langle B\mathfrak{a}\rangle}\right)^W$$

zwischen der Vervollständigung des Invariantenrings und den Invarianten der Vervollständigung. Ich wüßte gerne, ob das auch ohne unsere Bedingung an die Gruppenordnung gilt.

5.7.21 (**Vervollständigung und Invarianten, geometrischer Fall**). $(k = \bar{k})$. Im geometrischen Fall einer affinen Varietät X mit der Operation einer endlichen Gruppe W von einer in k invertierbaren Ordnung und Quotient $\bar{X} := X/W$ und einem Punkt $x \in X$ mit Bild $\bar{x} \in \bar{X}$ spezialisiert 5.7.20 zu einem Isomorphismus von topologischen Ringen

$$\mathcal{O}^{\wedge}_{\bar{X},\bar{x}} \stackrel{\sim}{\to} \left(\mathcal{O}^{\wedge}_{X,x}\right)^{W_x}$$

zwischen dem vervollständigten lokalen Ring der Quotientenvarietät und den Invarianten der Isotropiegruppe W_x von x im vervollständigten lokalen Ring der ursprünglichen Varietät an einem Urbildpunkt. In der Tat gelangen wir mit 5.7.19 erst zu $\left(\prod_{z \in Wx} \mathcal{O}^{\wedge}_{X,z}\right)^W$ und dann ohne Schwierigkeiten weiter zum behaupteten Ausdruck.

5.8 Diskrete Bewertungsringe

Definition 5.8.1. Eine **diskrete Bewertung**, englisch **discrete valuation**, auf einem Körper K ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $v : K^{\times} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß für seine Ausdehnung durch $v(0) := \infty$ zu einer Abbildung $v : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ gilt

$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)) \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

Der zugehörige **Bewertungsring** ist der Teilring aller Elemente unseres Körpers mit nichtnegativer Bewertung.

Ergänzung 5.8.2. Allgemein versteht man unter einer **Anordnung einer abelschen Gruppe** Γ eine Anordnung der zugrundeliegenden Menge mit der Eigenschaft $a \leq b \Rightarrow (a+c) \leq (b+c)$ für alle $a, b, c \in \Gamma$. Dann erklärt man eine **Bewertung** auf einem Körper K als einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $v : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma$ in eine angeordnete abelsche Gruppe mit der Eigenschaft, daß für seine Ausdehnung durch $v(0) := \infty$ zu einer Abbildung $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \sqcup \{\infty\}$ gilt $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ für alle $x, y \in K$.

Beispiel 5.8.3 (**Bewertung von Laurentreihen**). Auf dem Körper der formalen Laurentreihen $k(\!(t)\!)$ über einem beliebigen Körper k erhalten wir eine diskrete Bewertung durch die Vorschrift

$$v\left(\sum a_n t^n\right) = \inf\{n \mid a_n \neq 0\}$$

Beispiel 5.8.4 (**Bewertungen rationaler Funktionen**). Auf dem Körper der rationalen Funktionen $k(T)$ über einem beliebigen Körper k liefert jedes Element $p \in k$ eine diskrete Bewertung v_p vermittels der Vorschrift

$$v_p(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (T-p)^{-n} f \text{ hat bei } p \text{ keine Polstelle}\}$$

Eine positive Bewertung $v_p(f) > 0$ bedeutet in diesem Fall also, daß f bei p eine Nullstelle hat; eine negative Bewertung $v_p(f) < 0$, daß f bei p eine Polstelle hat; und die Bewertung $v_p(f) = \infty$ hat nur die Nullfunktion. Für die durch die Entwicklung in eine Laurentreihe um p gegebene Einbettung $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(t)\!)$ ist diese Bewertung v_p offensichtlich gerade die Einschränkung unserer Bewertung v von oben. Auf dem Körper der rationalen Funktionen $k(T)$ über einem beliebigen Körper k können wir zusätzlich die diskrete Bewertung v_∞ erklären durch die Vorschrift

$$v_\infty(P/Q) = (\operatorname{grad} Q) - (\operatorname{grad} P)$$

für beliebige von Null verschiedene Polynome $P, Q \in k[T]$ und $v_\infty(0) = \infty$. Im Rahmen der algebraischen Geometrie mag man sich $k(T)$ als Funktionen auf der projektiven Gerade denken, und diese Bewertung v_∞ beschreibt dann die Null- bzw. Polstellenordnung am unendlich fernen Punkt.

Ergänzung 5.8.5 (**Bewertungen meromorpher Funktionen**). Typisch ist auch das Beispiel [FT1] 3.1.19 des Körpers $\mathcal{M}^{\text{an}}(X)$ der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge $X \Subset \mathbb{C}$ oder allgemeiner einer zusammenhängenden Riemann'schen Fläche X. In diesem Fall liefert jeder Punkt $p \in X$ eine diskrete Bewertung $v_p : \mathcal{M}^{\text{an}}(X) \to \mathbb{Z}$ durch die Vorschrift

$$v_p(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z-p)^{-n} f \text{ ist holomorph bei } p\}$$

Eine positive Bewertung $v_p(f) > 0$ bedeutet in diesem Fall also, daß f bei p eine Nullstelle hat; eine negative Bewertung $v_p(f) < 0$, daß f bei p eine Polstelle hat; und die Bewertung $v_p(f) = \infty$ hat nur die Nullfunktion. Für die durch die Entwicklung in eine Laurentreihe um p gegebene Einbettung $\mathcal{M}^{\text{an}}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}((t))$ ist diese Bewertung v_p die Einschränkung unserer Bewertung v aus dem vorhergehenden Beispiel 5.8.3. Unter unserem Körperisomorphismus $\mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)$ aus **??** entspricht dann die Bewertung v_∞ links, die die Pol- bzw. Nullstellenordnung einer meromorphen Funktion an der Stelle $\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ angibt, genau der „Grad-Bewertung“ v_∞ aus 5.8.4 auf $\mathbb{C}(T)$. Im übrigen kann man zeigen, daß für jede zusammenhängende kompakte Riemann'sche Fläche X die Zuordnung $p \mapsto v_p$ eine Bijektion zwischen der Menge aller Punkte von X und der Menge aller diskreten Bewertungen des Körpers $\mathcal{M}^{\text{an}}(X)$ liefert, vergleiche etwa **??**.

Beispiel 5.8.6 (**Bewertungen rationaler Zahlen**). Typisch ist schließlich das Beispiel des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. In diesem Fall definiert jede Primzahl p eine diskrete Bewertung v_p auf $\mathbb{Q}$ durch die Vorschrift, daß für $a, b \in \mathbb{Z}\backslash 0$ teilerfremd zu p gilt

$$v_p(p^n a/b) = n$$

In derselben Weise definiert jedes irreduzible Element eines faktoriellen Ringes eine diskrete Bewertung seines Quotientenkörpers. Im Spezialfall des Polynomrings $\mathbb{C}[T]$ über $\mathbb{C}$ erhalten wir so genau die in 5.8.4 betrachteten diskreten Bewertungen auf $\mathbb{C}(T)$.

Übung 5.8.7. Man zeige, daß es auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine diskrete Bewertung gibt. Man zeige, daß es auf einem vollkommenen Körper positiver Charakteristik keine diskrete Bewertung gibt. Man zeige, daß es auf dem Körper der konstruierbaren Zahlen keine diskrete Bewertung gibt.

Definition 5.8.8. Ein **diskreter Bewertungsring** ist ein kommutativer Integritätsbereich mit der Eigenschaft, daß es auf seinem Quotientenkörper eine diskrete Bewertung 5.8.1 gibt, für die unser Integritätsbereich gerade aus allen Elementen mit nichtnegativer Bewertung besteht.

5.8.9. Wir werden gleich sehen, daß die fragliche diskrete Bewertung auf dem Quotientenkörper in Definition 5.8.8 durch besagten Integritätsbereich bereits eindeutig bestimmt ist.

Beispiele 5.8.10. Der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in einem Körper ist ein diskreter Bewertungsring. Der Ring der Potenzreihen mit komplexen oder auch reellen Koeffizienten und positivem Kovergenzradius ist ein diskreter Bewertungsring.

Satz 5.8.11 (Charakterisierungen diskreter Bewertungsringe). *Für einen Kring sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kring ist ein diskreter Bewertungsring;*

2. *Unser Kring ist ein Hauptidealring mit genau einem Primideal ungleich Null;*

3. *Unser Kring ist regulär lokal von der Krulldimension Eins;*

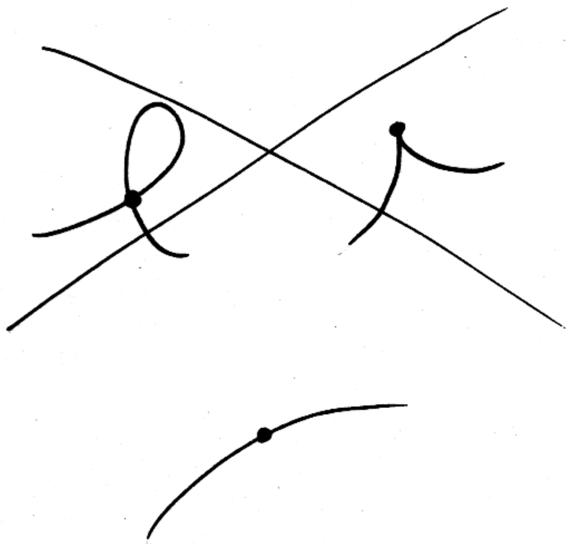
4. *Unser Kring ist normal, noethersch, und lokal von der Krulldimension Eins.*

Beispiel 5.8.12. Der lokale Ring beim verklebten Punkt derjenigen komplexen algebraischen Varietät, die aus $\mathbb{C}$ entsteht durch das Verkleben zweier verschiedener Punkte, ist ein lokaler noetherscher Integritätsbereich der Krulldimension Eins, aber eben nicht normal und mithin auch kein diskreter Bewertungsring. Dasselbe gilt für den lokalen Ring der Neil'schen Parabel an ihrer Spitze.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Sei A unser Bewertungsring und $v : \operatorname{Quot} A \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung mit $A = \{q \in \operatorname{Quot} A \mid v(q) \geq 0\}$. Offensichtlich sind dann die Einheiten genau $A^\times = \{a \in A \mid v(a) = 0\}$ und das Komplement $\mathfrak{m} := A \backslash A^\times = \{a \in A \mid v(a) > 0\}$ ist ein Ideal von A, notwendig das einzige maximale Ideal. Da wir v surjektiv annehmen, gibt es $t \in \mathfrak{m}$ mit $v(t) = 1$, und für jedes solche t folgt sofort $\mathfrak{m} = At$. Jedes derartige Element t heißt im übrigen eine **Uniformisierende** unseres diskreten Bewertungsrings. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ungleich Null sei $a \in \mathfrak{a}$ gegeben mit $i = v(a)$ kleinstmöglich. Es folgt sofort $\mathfrak{a} = At^i = \mathfrak{m}^i$ und A ist in der Tat ein Hauptidealring mit genau einem Primideal ungleich Null. Nebenbei sehen wir auch, daß für $a \in A$ gilt $v(a) = \sup\{i \mid a \in \mathfrak{m}^i\}$ und daß so die Bewertung v schon durch A eindeutig festgelegt wird.

$2 \Rightarrow 1$. Nach [AL] 2.4.13 ist unser Hauptidealring A faktoriell und hat bis auf Einheiten genau ein irreduzibles Element t. Jede Wahl von t liefert also eine Bijektion $A^\times \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} A \backslash 0$, $(u, i) \mapsto ut^i$ und dann auch eine Bijektion $A^\times \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Quot} A)^\times$, gegeben durch dieselben Formel $(u, i) \mapsto ut^i$. Eine mögliche Bewertung wird dann gegeben durch $v(ut^i) = i$ und $v(0) = \infty$.

$2 \Leftrightarrow 3$. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.



Hier der zugegebenermaßen waghalsige Versuch, das Konzept eines diskreten Bewertungsrings in Bilder zu fassen. Im geometrischen Fall ist eben der lokale Ring einer affinen Varietät an einem Punkt genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn nur eine Komponente der Varietät durch besagten Punkt geht, wenn diese Komponente darüber hinaus die Dimension Eins hat, und wenn schließlich unser Punkt sogar eine glatte Stelle besagter Varietät ist.

$2 \Rightarrow 4$. Das folgt, da jeder Hauptidealring faktoriell und damit normal ist.

$4 \Rightarrow 3$. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ das maximale Ideal. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist. Da die Krulldimension Eins ist, kann $\mathfrak{m}$ nicht das Nullideal sein. Sei nun $a \in \mathfrak{m}$ mit $a \neq 0$ gewählt. Nach der Beschreibung 3.2.22 des Radikals eines Ideals als Schnitt der darüberliegenden Primideale und da die Krulldimension Eins ist, gilt $\sqrt{\langle a \rangle} = \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist, folgt $\langle \mathfrak{m}^n \rangle \subset \langle a \rangle$ für $n \gg 0$. Sei $n \geq 1$ minimal mit $\langle \mathfrak{m}^n \rangle \subset \langle a \rangle$ und sei $b \in \langle \mathfrak{m}^{n-1} \rangle \backslash \langle a \rangle$. So haben wir $y = b/a \in (\operatorname{Quot} A) \backslash A$ und folglich $y\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}$, da sonst $A[y]$ und damit y nach 4.1.6 ganz sein müßte über A. Andererseits gilt nach Konstruktion $y\mathfrak{m} \subset A$, also $y\mathfrak{m} = A$ als einziges Ideal von A, das nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten ist, und damit ist $\mathfrak{m}$ das Hauptideal erzeugt von $x := y^{-1}$. Folglich ist A regulär. □

Proposition* 5.8.13 (Definitionslücken durch Polstellen). $(k = \bar{k})$. *Sei X eine irreduzible k-Varietät, $x \in X$ ein Punkt mit normalem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ und $f \in \mathcal{M}(X) \backslash \mathcal{O}_{X,x}$ eine am Punkt x nicht definierte rationale Funktion auf X. So liegt x im Abschluß der Menge aller Punkte, an denen f^{-1} definiert ist und den Wert Null annimmt.*

5.8.14. In gewisser Weise ist also im Fall eines normalen lokalen Rings „die Nicht-Definiertheit einer rationalen Funktion stets durch das Vorliegen einer Polstelle bedingt". Um zu sehen, was im Fall eines nicht normalen lokalen Rings passieren kann, verklebe man zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{C}^\times$. So entsteht eine $\mathbb{C}$-Varietät X, bei der am verklebten Punkt $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ nicht normal ist. Die reguläre Funktion f auf $\mathbb{C}^\times$ gegeben durch $f(z) = z$ liegt dann nicht in $\mathcal{O}_{X,x}$, obwohl f^{-1} außerhalb von x überall definiert ist und keine Nullstelle hat. Dies Beispiel zeigt, daß man im Lemma auf die Normalitätsbedingung nicht verzichten kann. Salopp gesprochen ist in unserem Gegenbeispiel also die Nicht-Definiertheit von f am Verklebepunkt x nicht durch eine „Polstelle" bedingt, sondern nur durch „schlechtes Zusammenpassen".

Beweis. Wir setzen $A := \mathcal{O}_{X,x}$. Nach 4.8.17 gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset A$ der Höhe Eins mit $f \notin A_\mathfrak{q}$. Nach 5.8.11.4 ist $A_\mathfrak{q}$ ein diskreter Bewertungsring. Es folgt unmittelbar $f^{-1} \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}$, also $f^{-1} = g/h$ mit $g \in \mathfrak{q}$ und $h \in A \backslash \mathfrak{q}$. Nun dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X affin ist und daß g und h beide auf ganz X definiert sind. Dann gibt es aber auch ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(X)$ mit $h \in \mathcal{O}(X) \backslash \mathfrak{m}$. Das ist dann das Verschwindungsideal eines Punktes $z \in X$, an dem f^{-1} definiert ist und den Wert Null annimmt. Läge x nicht im Abschluß der Menge aller derartigen Punkte $z \in X$, so könnten wir den fraglichen Abschluß aus X entfernen und die so entstehende Varietät als unser X nehmen und erhielten unmittelbar einen Widerspruch. □

Übungen

Übung 5.8.15 (**Maximalität diskreter Bewertungsringe**). Seien K ein Körper und $A \subset K$ ein diskreter Bewertungsring. Man zeige, daß K nur genau zwei Teilringe besitzt, die A umfassen, nämlich A und K.

Übung 5.8.16. Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Man zeige:

1. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe Eins und jedes $f \in R\backslash 0$ hat der Quotient $R_{\mathfrak{p}}/\langle f \rangle$ der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ endliche Länge.

2. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe Eins gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $v_{\mathfrak{p}} : (\operatorname{Quot} R)^{\times} \to \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß sein Wert auf allen $f \in R\backslash 0$ die Länge des Quotienten $R_{\mathfrak{p}}/\langle f \rangle$ angibt, in Formeln $v_{\mathfrak{p}}(f) = l(R_{\mathfrak{p}}/\langle f \rangle)$.

3. Ist $R_{\mathfrak{p}}$ regulär, so ist dies $v_{\mathfrak{p}}$ gerade die Restriktion der diskreten Bewertung auf $\operatorname{Quot} R$ mit Bewertungsring $R_{\mathfrak{p}}$.

5.9 Dedekind-Ringe

Definition 5.9.1. Ein **Dedekind-Ring** ist ein noetherscher normaler kommutativer Integritätsbereich der Krulldimension Eins.

Beispiele 5.9.2. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Dedekindring. Jeder diskrete Bewertungsring ist ein Dedekindring, ja die diskreten Bewertungsringe sind genau die lokalen Dedekindringe. Jede Lokalisierung eines Dedekindrings an einer Teilmenge, die mindestens ein maximales Ideal nicht trifft, ist wieder ein Dedekindring. Insbesondere ist jede Lokalisierung eines Dedekindrings an einem maximalen Ideal ein diskreter Bewertungsring.

Proposition 5.9.3 (Dedekindringe im geometrischen Fall). $(k = \bar{k})$. *Eine affine Varietät X ist genau dann glatt, irreduzibel und eindimensional, wenn ihr Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen ein Dedekindring ist.*

Beweis. Das folgt daraus, daß nach 5.8.11 ein lokaler noetherscher Kring der Krulldimension Eins genau dann normal ist, wenn er regulär ist. Ist also $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär für alle $x \in X$, so ist es auch normal für alle $x \in X$. Dasselbe folgt für $\mathcal{O}(X) = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$, wobei der Schnitt in $\operatorname{Quot} \mathcal{O}(X)$ zu verstehen ist. Ist umgekehrt $\mathcal{O}(X)$ normal, so nach 4.6.1 auch seine Lokalisierungen $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$. □

Beispiel 5.9.4 (**Ganzheitsringe sind Dedekindringe**). Ein **Zahlkörper** ist ein Körper K der Charakteristik Null, der endlich ist über seinem Primkörper, in Formeln $[K : \mathbb{Q}] < \infty$. Der **Ring der ganzen Zahlen** oder auch **Ganzheitsring**

$\mathfrak{o}_K \subset K$ unseres Zahlkörpers K ist per definitionem der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K. Nach dem Endlichkeitsresultat 5.10.8 für ganze Abschlüsse, das wir im nächsten Abschnitt beweisen, ist $\mathfrak{o}_K$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, und nach der Stabilität der Krulldimension bei ganzen Kringerweiterungen 4.2.11 hat $\mathfrak{o}_K$ wie $\mathbb{Z}$ die Krulldimension Eins. Normal ist $\mathfrak{o}_K$ eh, also muß unser Ganzheitsring $\mathfrak{o}_K$ ein Dedekindring sein.

Satz 5.9.5 (Bewertungen und maximale Ideale). *Gegeben ein Dedekindring B liefert die Vorschrift, die jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ die durch den diskreten Bewertungsring $B_\mathfrak{m}$ gegebene Bewertung auf $\operatorname{Quot} B$ zuweist, eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Max} B & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diskrete Bewertungen auf } \operatorname{Quot} B, \\ \textit{deren Bewertungsring } B \textit{ umfaßt} \end{array} \right\} \\ \mathfrak{m} & \mapsto & v_\mathfrak{m} \end{array}$$

Beweis. Die Injektivität unserer Abbildung ist klar, es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $v : \operatorname{Quot} B \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung mit Bewertungsring $A \supset B$. Der Schnitt des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_A \subset A$ mit B kann nicht das Nullideal sein, da sonst die Bewertung v auf $(\operatorname{Quot} B)^\times$ identisch verschwinden müßte. Also ist der Schnitt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset B$. Natürlich gilt $B_\mathfrak{m} \subset A$ und aus der Maximalität diskreter Bewertungsringe 5.8.15 folgt $B_\mathfrak{m} = A$. □

Übungen

Übung 5.9.6. Gegeben eine algebraische Körpererweiterung $K \subset L$ und eine diskrete Bewertung v auf L gilt $v(K^\times) \neq 0$.

Übung 5.9.7. Sei B ein Dedekindring. Ein von Null verschiedener endlich erzeugter B-Untermodul von $\operatorname{Quot} B$ heißt ein **gebrochenes Ideal** von B. Wir erhalten eine Bijektion

$$\{\text{gebrochene Ideale von } B\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{Z} \operatorname{Max} B$$

mit dem freien $\mathbb{Z}$-Modul über $\operatorname{Max} B$, indem wir jedem gebrochenen Ideal I die Funktion f_I zuordnen mit $f_I(\mathfrak{m}) = \inf\{v_\mathfrak{m}(b) \mid b \in I\}$. Erklären wir das Produkt IJ zweier gebrochener Ideale I, J als das von allen Produkten ab von Elementen $a \in, b \in J$ erzeugte gebrochene Ideal, so wird diese Bijektion sogar ein Gruppenisomorphismus. Natürlich induziert sie auch eine Bijektion

$$\{\text{Ideale von } B\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{N} \operatorname{Max} B$$

mit der Menge aller endlichen Multimengen von maximalen Idealen. Ist speziell $k = \bar{k}$ und X eine irreduzible glatte affine Kurve über k, so entsprechen die gebrochenen Ideale des Rings der regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ eineindeutig formalen endlichen $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Punkten aus X, und zwar entspricht

$\sum n_x x$ gerade der Menge der rationalen Funktionen $f \in \mathcal{M}(X)$, die an allen Stellen x mit $n_x \geq 0$ definiert sind, an allen Stellen x mit $n_x > 0$ eine n_x-fache Nullstelle haben, und an allen Stellen mit $n_x < 0$ entweder definiert sind oder einen Pol der Ordnung höchstens n_x haben. In Formeln ausgedrückt haben wir also

$$\begin{array}{ccc} \{\text{gebrochene Ideale von } \mathcal{O}(X)\} & \stackrel{\sim}{\leftarrow} & \mathbb{Z}X \\ \{f \in \mathcal{M}(X) \mid v_x(f) \geq n_x \ \forall x \in X\} & \leftarrow\!\shortmid & \sum n_x x \end{array}$$

5.10 Norm, Spur, Endlichkeit ganzer Abschlüsse*

Definition 5.10.1. Gegeben eine endliche Körpererweiterung L/K definieren wir zwei Abbildungen $\mathrm{N}, \mathrm{S} : L \to K$, die **Norm** und die **Spur**, indem wir für $a \in L$ die K-lineare Abbildung $(a\cdot) : L \to L$ betrachten und setzen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Norm}(a) & = & \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}_L^K(a) & := & \det_K((a\cdot)|L) \\ \mathrm{Spur}(a) & = & \mathrm{S}(a) & = & \mathrm{S}_L^K(a) & := & \mathrm{tr}_K((a\cdot)|L) \end{array}$$

Für $a \in K$ haben wir offensichtlich $\mathrm{N}_L^K(a) = a^{[L:K]}$ und $\mathrm{S}_L^K(a) = [L : K]a$. Für $\sigma : L \stackrel{\sim}{\to} M$ ein Isomorphismus von endlichen Körpererweiterungen von K gilt offensichtlich $\mathrm{N}_L^K(a) = \mathrm{N}_M^K(\sigma(a))$ und $\mathrm{S}_L^K(a) = \mathrm{S}_M^K(\sigma(a))$.

5.10.2 (**Diskussion der Terminologie**). Unglücklicherweise erhalten wir so im Fall der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ die Abbildung $\mathrm{N}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z\bar{z}$ und damit gerade das Quadrat der Norm einer komplexen Zahl, wie wir sie in [LA1] 5.1.9 erklärt hatten. Was im Einzelfall genau gemeint ist, muß der Leser jeweils aus dem Kontext erschließen. Ist allgemeiner D eine endlichdimensionale assoziative K-Algebra, so findet man auch in dieser Allgemeinheit manchmal die Notation $\mathrm{N}_D^K(a) = \det((a\cdot)|D)$. Im Fall eines Schiefkörpers D wird aber die Notation $\mathrm{N}(a)$ alternativ auch verwendet als Abkürzung für $\mathrm{N}_{K(a)}^K(a)$.

Lemma 5.10.3 (Transitivität von Norm und Spur). *Sind $K \subset L \subset M$ endliche Körpererweiterungen, so gelten die Formeln*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}_M^K & = & \mathrm{N}_L^K \circ \mathrm{N}_M^L \\ \mathrm{S}_M^K & = & \mathrm{S}_L^K \circ \mathrm{S}_M^L \end{array}$$

Beweis. Die zweite Formel folgt daraus, daß sich für eine $(m \times m)$-Matrix von $(n \times n)$-Matrizen die Gesamtspur auch berechnen läßt, indem man zunächst alle $(n \times n)$-Blöcke auf der Diagonalen aufaddiert und dann von dieser Summe die Spur nimmt. Die erste Formel folgt daraus, daß man nach [LA1] 7.4.15 ganz analog auch die Determinante einer Blockmatrix mit paarweise kommutierenden Blöcken berechnen kann als die Determinante der $(n \times n)$-Matrix, die sich als „Blockdeterminante" ergibt. Ist etwas genauer $m_1, \ldots, m_r$ eine L-Basis von M, so wird die Multiplikation mit $b \in M$ gegeben durch eine $(r \times r)$-Matrix $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r; L)$. Ist weiter $l_1, \ldots, l_s$ eine K-Basis von L, so werden die Multiplikationen mit a_{ij} dargestellt durch gewisse $(s \times s)$-Matrizen

$$A_{ij} \in \mathrm{Mat}(s; K)$$

Die Multiplikation mit $b \in M$ wird dann in der K-Basis von M, die aus den $m_i l_\nu$ besteht, durch die Blockmatrix $B = (A_{ij})$ dargestellt. □

Satz 5.10.4 (Norm und Spur über Galoistheorie). *Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung und M eine Vergrößerung von L zu einer normalen Erweiterung von K. So gilt*

$$\mathrm{S}_L^K(a) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Kring}^K(L,M)} \sigma(a) \quad \textit{und} \quad \mathrm{N}_L^K(a) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Kring}^K(L,M)} \sigma(a)$$

5.10.5. Ist also speziell L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ, so gilt $\mathrm{S}(a) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(a)$ und $\mathrm{N}(a) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(a)$.

Beweis. Ist $L' \subset L$ ein Unterkörper, der a enthält, so gilt wegen der Transitivität von Norm und Spur 5.10.3 und unseren Erkenntnissen 5.10.1 für Norm und Spur von Elementen des Grundkörpers offensichtlich $\mathrm{S}_L^K(a) = [L : L']\mathrm{S}_{L'}^K(a)$ und $\mathrm{N}_L^K(a) = (\mathrm{N}_{L'}^K(a))^{[L:L']}$. Die rechten Seiten der behaupteten Formeln verhalten sich nun in genau derselben Weise beim Übergang von L' zu L, so daß wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $L = K(a)$ annehmen dürfen. Dann definiert jedoch $X \mapsto a$ einen Körperisomorphismus

$$K[X]/\langle \mathrm{Irr}(a, K)\rangle \xrightarrow{\sim} L$$

Das charakteristische Polynom der K-linearen Abbildung $(a\cdot) : L \to L$ ist folglich $\det(X\mathrm{id} - (a\cdot)) = \mathrm{Irr}(a, K) = \prod(X - \sigma(a))$. Setzen wir hier $X = 0$, so ergibt sich die Formel für die Norm. Vergleichen wir dahingegen die Koeffizienten der zweithöchsten Potenzen von X auf beiden Seiten, so ergibt sich die Formel für die Spur. □

Korollar 5.10.6 (Spur und Separabilität). *Eine endliche Körpererweiterung ist genau dann separabel, wenn die zugehörige Spurabbildung nicht identisch verschwindet.*

Beweis. Ist unsere Erweiterung separabel, so kann ihre Spurabbildung nicht identisch verschwinden nach ihrer Darstellung aus 5.10.4 und dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren [AL] 3.8.15. Ist unsere Erweiterung nicht separabel, so überlassen wir das Argument dem Leser mit dem Hinweis, sich vom Beweis von 5.10.4 inspirieren zu lassen. □

5.10.7. Für jede endliche Körpererweiterung L/K liefert die Spur eine K-bilineare Paarung, die **Spurform**

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{S}_L^K(xy) \end{array}$$

Sie ist offensichtlich invariant unter der Galoisgruppe. Für L/K endlich separabel ist diese Paarung nach 5.10.6 nicht ausgeartet.

Satz 5.10.8 (Endlichkeit ganzer Abschlüsse normaler Kringe). *Sei A ein normaler noetherscher kommutativer Integritätsbereich und $L/\operatorname{Quot} A$ eine endliche separable Körpererweiterung seines Quotientenkörpers. So ist der ganze Abschluß B von A in L modulendlich über A.*

Beweis. Nach 5.10.6 definiert für jede endliche separable Erweiterung die Spur $\mathrm{S}_L^K : L \to K$ eine symmetrische nichtausgeartete Bilinearform

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{S}_L^K(xy) \end{array}$$

Aus der Beschreibung der Spur als Summe von Galois-Konjugierten 5.10.4 folgt, daß $\mathrm{S}_L^K(b)$ ganz ist über A für alle $b \in B$. Also gilt nach unserer Annahme $\mathrm{S}_L^K(B) \subset A$. Nun finden wir sicher $b_1, \ldots, b_n \in B$, die eine Basis von L über K bilden. Sie spannen in L einen freien A-Modul V vom Rang n auf, und die duale Basis $b_1^*, \ldots, b_n^*$ in Bezug auf unsere Bilinearform spannt in L einen weiteren freien A-Modul V^* vom Rang n auf, der auch beschrieben werden kann durch die Formel

$$V^* = \{x \in L \mid \mathrm{S}_L^K(xy) \in A \quad \forall y \in V\}$$

Insbesondere gilt $B \subset V^*$. Aus A noethersch folgt dann sofort, daß B endlich erzeugt ist als A-Modul. □

Satz 5.10.9 (Endlichkeit ganzer Abschlüsse im geometrischen Fall). *Seien A ein Integritätsbereich, der ringendlich ist über einem Körper k, und $L/\operatorname{Quot} A$ eine endliche Körpererweiterung seines Quotientenkörpers. So ist auch der ganze Abschluß von A in L ringendlich über k und mithin modulendlich über A.*

5.10.10. Insbesondere ist also auch der ganze Abschluß von A in $\operatorname{Quot} A$ ringendlich über k. Im Gegensatz zum vorhergehenden Satz 5.10.8 brauchen wir in diesem „geometrischen“ Fall weder A als normal noch unsere Körpererweiterung als separabel anzunehmen.

Beweis. Noether's Normalisierungslemma 4.4.8 liefert uns einen Teilring

$$k['x_1, \ldots, x_n] \subset A$$

mit A modulendlich über diesem Teilring. Der ganze Abschluß von A in L ist also auch der ganze Abschluß von $k['x_1, \ldots, x_n]$ in L. Ist $L/k('x_1, \ldots, x_n)$ separabel, so sind wir fertig mit dem Satz über die Endlichkeit ganzer Abschlüsse im Fall normaler Ringe 5.10.8, da ja Polynomringe normal sind. Sonst vergrößern wir L mit [AL] 3.8.23 zu einer endlichen normalen Erweiterung $N/k('x_1, \ldots, x_n)$ mit Galoisgruppe G und betrachten die Körperkette

$$k('x_1, \ldots, x_n) \subset N^G \subset N$$

Sie besteht nach [AL] 4.1.30 aus einer rein inseparablen Erweiterung gefolgt von einer separablen Erweiterung. Nach [AL] 3.9.27 gibt es mithin eine p-Potenz q, für $p > 0$ die Charakteristik von k, mit $f^q \in k('x_1, \ldots, x_n)$ für alle $f \in N^G$. Nehmen wir Erzeuger $f_1, \ldots, f_r \in N^G$ der ersten Körpererweiterung und notieren h eine endliche Körpererweiterung von k, die für alle Koeffizienten der Zähler und Nenner der f_i^q jeweils q-te Wurzeln enthält, so erhalten wir eine Einbettung $N^G \subset h(x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q})$ und können N vergrößern zu einer endlichen separablen Erweiterung $h(x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}) \subset M$, so daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} k('x_1, \ldots, x_n) & \subset & N^G & \subset & N \\ & & \cap & & \cap \\ & & h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}) & \subset & M \end{array}$$

die untere rechte Inklusion auch separabel ist. Der ganze Abschluß des Teilrings $k['x_1, \ldots, x_n]$ in $h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q})$ ist aber offensichtlich $h[x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}]$ und damit modulendlich über $k['x_1, \ldots, x_n]$. □

Übungen

Ergänzende Übung 5.10.11. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, V ein endlichdimensionaler L-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. So gilt die Identität $\det_K \varphi = \mathrm{N}_L^K(\det_L \varphi)$. Hinweis: [LA1] 7.4.15. Alternative: Man ziehe sich durch geeignete Körpererweiterung von L auf den Fall zurück, daß für eine Basis von V die Matrix von φ obere Dreiecksgestalt hat, und argumentiere dann mit der Formel für die Determinante block-oberer Dreiecksmatrizen [LA1] 7.2.9.

5.11 Bewertungen und Körpererweiterungen*

Definition 5.11.1. Ein Homomorphismus von diskret bewerteten Körpern heißt **bewertungsverträglich** genau dann, wenn seine Verknüpfung mit der Bewertung des Bildkörpers ein positives Vielfaches der Bewertung auf dem Ausgangskörper ist.

5.11.2. Für einen bewertungsverträglichen Homomorphismus $\varphi : K \to L$ von diskret bewerteten Körpern gibt es demnach per definitionem genau eine positive natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}_{>0}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, two heads, "v_K"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "(d\cdot)"] \\ L \arrow[r, two heads, "v_L"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese natürliche Zahl d heißt der **Verzweigungsgrad** unserer bewertungsverträglichen Körpererweiterung. Auf Englisch sagt man dazu **ramification index**, auf Französisch **indice de ramification**. Ein bewertungsverträglicher Homomorphismus vom Verzweigungsgrad Eins heißt **unverzweigt**. Ein Unterkörper eines diskret bewerteten Körpers besitzt genau dann eine verträgliche Bewertung, wenn die Bewertung des großen Körpers auf dem Unterkörper auch Werte außerhalb von $\{0, \infty\}$ annimmt.

Beispiel 5.11.3. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ induziert durch Vorschalten eine Einbettung in der Gegenrichtung $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$. Gegeben $p \in \mathbb{C}$ mit $p^n = q$ ist das zum Beispiel ein bewertungsverträglicher Körperhomomorphismus $(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}), v_p) \hookrightarrow (\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}), v_q)$ mit Verzweigungsgrad Eins für $p \neq 0 \neq q$ und Verzweigungsgrad n für $p = q = 0$. Ist allgemeiner $f : X \to Y$ ein nichtkonstanter Homomorphismus von zusammenhängenden Riemann'schen Flächen und $p \in X$ ein Punkt mit Bild $f(p) = q \in Y$, so liefert das Zurückholen von meromorphen Funktionen einen Homomorphismus von diskret bewerteten Körpern

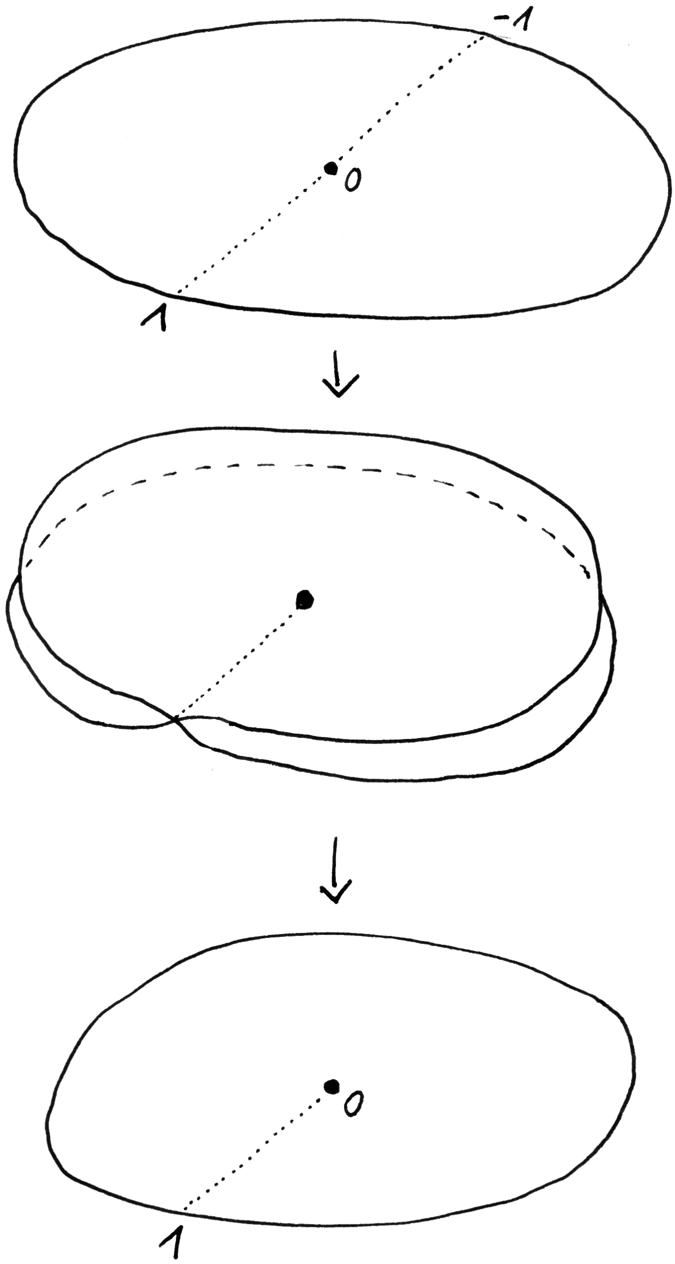
$$(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(Y), v_q) \hookrightarrow (\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X), v_p)$$

und der zugehörige Verzweigungsgrad ist genau der „topologische" Verzweigungsgrad im Sinne von **??**.

Beispiel 5.11.4. Die Einbettung $\mathbb{C}(\!(T)\!) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(Y)\!)$ des Körpers der Laurentreihen über $\mathbb{C}$ in sich selber vermittels $T \mapsto Y^n$ für ein fest vorgegebenes $n > 0$ ist ein bewertungsverträglicher Morphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad n.

Definition 5.11.5. Ein Homomorphismus von lokalen Ringen heißt **lokal** genau dann, wenn das Urbild des größten echten Ideals das größte echte Ideal ist.

Proposition 5.11.6 (Verzweigung bei Körpern und Ringen). *Das Bilden des Teilrings aller Elemente mit nichtnegativer Bewertung liefert eine Äquivalenz von*



Dies Bild erinnert unsere Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der Einheitskreisscheibe auf sich selbst. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotones und in einer Umgebung von Null streng monotones ε, gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das Zurückholen meromorpher Funktionen unter dieser Abbildung induziert für die Bewertungen nach der Nullstellen- bzw. Polordnung am Ursprung einen Homomorphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad Zwei.

Kategorien

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{diskret bewertete Körper,}\\ \textit{bewertungsverträgliche}\\ \textit{Körperhomomorphismen}\end{array}\right\} \stackrel{\approx}{\to} \left\{\begin{array}{c}\textit{diskrete Bewertungsringe,}\\ \textit{lokale Ringhomomorphismen}\end{array}\right\}$$
$$(K, v) \mapsto \mathfrak{o}_K := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$

Die Uniformisierenden des diskreten Bewertungsrings $\mathfrak{o}_K$ sind dabei genau die Elemente unseres diskret bewerteten Körpers mit Bewertung Eins.

5.11.7. Man verwendet diese Entsprechung, um die Begriffe **Verzweigungsgrad** und **unverzweigt** auf den Fall lokaler Ringhomomorphismen diskreter Bewertungsringe zu übertragen. Im Fall eines lokalen Ringhomomorphismus diskreter Bewertungsringe $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ ist der Verzweigungsgrad mithin das $d \geq 1$ mit $B\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^d$.

Beispiel 5.11.8. Sei X eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche und $x \in X$ ein Punkt. Dem diskret bewerteten Körper $\mathcal{M}_x^{\mathrm{an}}$ der „meromorphen Funktionskeime bei x“ entspricht unter unserer Äquivalenz der Ring $\mathcal{O}_x^{\mathrm{an}}$ der „holomorphen Funktionskeime bei x“. Eine Uniformisierende wäre in diesem Fall ein holomorpher Funktionskeim u bei x mit einer einfachen Nullstelle bei x. Per definitionem besitzt x eine zusammenhängende offene Umgebung $U \Subset X$, auf der sich unser Funktionskeim u realisieren läßt und auf der u sogar einen Isomorphismus von bepunkteten Riemann'schen Flächen

$$u : (U, x) \stackrel{\sim}{\to} (W, 0)$$

mit $W = u(U) \Subset \mathbb{C}$ induziert. Man sagt dann auch, die Funktion u liefere eine „Uniformisierung der Riemann'schen Fläche X in einer Umgebung von x“ und daher rührt die Bezeichnung „Uniformisierende“ im Beweis von 5.8.11.

Beweis. Offensichtlich ist $\mathfrak{o}_K \subset K$ ein Teilring und seine Einheitengruppe ist $\mathfrak{o}_K^\times = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$. Die Nichteinheiten von $\mathfrak{o}_K$ bilden also ein Ideal $\mathfrak{m}_K = \{x \in K \mid v(x) \geq 1\}$, das notwendig das einzige maximale Ideal sein muß. Jedes $\pi \in K$ mit $v(\pi) = 1$ liefert einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{o}_K^\times \times \mathbb{Z} & \stackrel{\sim}{\to} & K^\times\\ (u, n) & \mapsto & u\pi^n\end{array}$$

Dieselbe Abbildung induziert auch eine Bijektion $\mathfrak{o}_K^\times \times \mathbb{N} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{o}_K \backslash 0$. Die Hauptideale von $\mathfrak{o}_K$ sind also genau das Nullideal und die Ideale $\langle \pi^n \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt, daß unser Ring $\mathfrak{o}_K$ ein Hauptidealring ist und daß π bis auf Einheiten sein einziges irreduzibles Element ist. Weiter liefert jeder Körperhomomorphismus

$\varphi : K \to L$ von diskret bewerteten Körpern mit $v_L(\varphi(x)) \in \mathbb{N}_{>0} v_K(x) \quad \forall x \in K$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_L$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_L) = \mathfrak{m}_K$. Damit liefert die Vorschrift aus unserem Lemma in der Tat einen Funktor der beschriebenen Art. Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben. □

Satz 5.11.9 (Gradformel). *Sei $A \subset B$ eine modulendliche Erweiterung von Dedekindringen. So gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ die Identität*

$$[\operatorname{Quot} B : \operatorname{Quot} A] = \sum_{\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}} d(B_\mathfrak{n}/A_\mathfrak{m}) \cdot [B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}]$$

Hier ist die Summe zu bilden über alle $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ und $d(B_\mathfrak{n}/A_\mathfrak{m})$ meint den Verzweigungsgrad im Sinne von 5.11.7.

Ergänzung 5.11.10. In der Zahlentheorie schreibt man diese Identität meist mit anderen Symbolen. Ist genauer L/K eine Erweiterung von Zahlkörpern und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}_K$ ein maximales Ideal des Ganzheitsrings von K, so liest sich unsere Formel in der dort üblichen Notation

$$[L : K] = \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{P}} e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$$

5.11.11. Unsere Endlichkeitssätze von eben liefern zwei typische Situationen, in denen dieser Satz anwendbar ist: Einerseits nach 5.10.8 für einen Dedekindring A, eine endliche separable Erweiterung $L/\operatorname{Quot} A$ und B den ganzen Abschluß von A in L. Diese Situation trifft man oft in der Zahlentheorie an. Oder nach 5.10.9 für einen Dedekindring A, der ringendlich ist über einem vorgegebenen Grundkörper, eine beliebige endliche Körpererweiterung $L/\operatorname{Quot} A$ und B den ganzen Abschluß von A in L. Das ist der „geometrische“ Fall einer „verzweigten Überlagerung von algebraischen Kurven“, der für mich insbesondere im Fall des Grundkörpers $\mathbb{C}$ der Anschauung gut zugänglich ist. Allerdings wird man im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers in der Situation des Satzes stets $[B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}] = 1$ finden, weshalb dieser Faktor meiner Anschauung schlechter zugänglich ist. Man sieht ihn aber deutlich im Fall der Erweiterung $\mathbb{R}[T] \subset \mathbb{C}[T]$.

Beweis. Nach 4.2.12 ist unsere Summe endlich. Die Lokalisierung $B_\mathfrak{m}$ von B nach $A \backslash \mathfrak{m}$ ist modulendlich und torsionsfrei über dem Hauptidealring $A_\mathfrak{m}$, also frei vom Rang $[\operatorname{Quot} B : \operatorname{Quot} A]$. Damit ist auch $\bar{B} := B/\mathfrak{m}B$ frei von demselben Rang über dem Körper $\bar{A} := A/\mathfrak{m}$ und nach 3.6.4 liefern die Abbildungen in die Lokalisierungen für unseren Kring endlicher Länge $\bar{B}$ einen Isomorphismus

$$\bar{B} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}} \bar{B}_{\bar{\mathfrak{n}}}$$

mit $\bar{\mathfrak{n}}$ dem Bild von $\mathfrak{n}$ in $\bar{B}$. Da Lokalisierung nach 3.1.26 mit Restklassenbildung vertauscht, ist die natürliche Abbildung ein Isomorphismus $B_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}} \xrightarrow{\sim} \bar{B}_{\bar{\mathfrak{n}}}$. Per definitionem haben wir $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{n}}^d$ für d der zugehörige Verzweigungsgrad, folglich hat $B_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}}$ die Länge alias Dimension d als Modul über $B/\mathfrak{n}$ und dann eine entsprechend vervielfachte Dimension als Vektorraum über $A/\mathfrak{m}$. □

Ergänzung 5.11.12. Eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ vom Grad Zwei heißt ein **quadratischer Zahlkörper**. Offensichtlich hat jeder quadratische Zahlkörper die Gestalt $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$ für genau ein $\delta \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$ ohne mehrfachen Primfaktor. Für den zugehörigen Ganzheitsring $\mathfrak{o}_K$ alias den ganzen Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K findet man dann

$$\mathfrak{o}_K = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{\delta} & \text{falls } \delta \equiv 2, 4 \pmod 4, \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(1 + \sqrt{\delta})/2 & \text{falls } \delta \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Satz 5.11.13 (Galoistheorie für lokale und globale Erweiterungen). *Sei $A \subset B$ eine modulendliche Erweiterung von Dedekindringen, die eine normale Erweiterung der Quotientenkörper induziert. Sei G die Galoisgruppe und $\mathfrak{n} \subset B$ ein maximales Ideal mit Bild $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$. So ist die auf den Restklassenkörpern induzierte Abbildung $\bar{A} \to \bar{B}$ eine normale Körpererweiterung und die offensichtliche Abbildung eine Surjektion*

$$G_{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{B}/\bar{A})$$

der Isotropiegruppe $G_{\mathfrak{n}}$ von $\mathfrak{n}$ in der ursprünglichen Galoisgruppe, der sogenannten **Zerlegungsgruppe von** $\mathfrak{n}$, *auf die Galoisgruppe der Erweiterung der Restklassenkörper.*

5.11.14. Der Kern unseres surjektiven Homomorphismus heißt die **Trägheitsgruppe von** $\mathfrak{n}$. Sind die beteiligten Körpererweiterungen der Quotientenkörper sowie der Restklassenkörper Galois, wie zum Beispiel im Fall von Zahlkörpern, so zeigt die Gradformel zusammen mit dem folgenden Beweis, daß die Kardinalität der Trägheitsgruppe mit dem Verzweigungsindex übereinstimmen muß.

Beweis. Die Normalität ergibt sich als ein Spezialfall von 4.6.9, das Minimalpolynom von $b \in B$ zerfällt mit Nullstellen in B und folglich mit Koeffizienten in A und kann folglich modulo $\mathfrak{m}$ reduziert werden. Betrachten wir nun den Invariantenring der Isotropiegruppe $C := B^{G_{\mathfrak{n}}}$, so bilden nach 4.6.7 die maximalen Ideale in B über $\mathfrak{l} := C \cap \mathfrak{n}$ eine $G_{\mathfrak{n}}$-Bahn, die folglich nur aus dem einzigen Punkt $\mathfrak{n}$ bestehen kann. Ein Vergleich der Gradformeln 5.11.9 für $C \subset B$ und $A \subset B$ zeigt $d(B_{\mathfrak{n}}/A_{\mathfrak{m}}) = d(B_{\mathfrak{n}}/C_{\mathfrak{l}})$ und $[B/\mathfrak{n} : C/\mathfrak{l}] = [B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}]$. Daraus hinwiederum folgt mit der Notation $\bar{C} := C/\mathfrak{l}$, daß die Einbettung einen Isomorphismus $\bar{A} \xrightarrow{\sim} \bar{C}$ liefert. Es reicht also zu zeigen, daß die offensichtliche Abbildung eine Surjektion

$$G_{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{B}/\bar{C})$$

induziert. Nun ist ja nach [AL] 4.1.30 der Fixkörper der Galoisgruppe von $F \subset \bar{B}$ rein inseparabel über $\bar{C}$. Andererseits gibt es nach dem Satz vom primitiven Element ein $\bar{b} \in \bar{B}$ mit $\bar{B} = F[\bar{b}]$. Ist $b \in B$ ein Urbild von $\bar{b}$, so hat das Minimalpolynom von b wie zu Anfang des Beweises besprochen Koeffizienten in C und kann folglich modulo $\mathfrak{l}$ reduziert werden. Die Operation von $G_{\mathfrak{n}}$ auf den Nullstellen des Minimalpolynoms von $\bar{b}$ ist folglich transitiv. Das aber zeigt die behauptete Surjektivität. □

6 Algebraische Varietäten

Ich will die Theorie allgemeiner algebraischer Varietäten durch einen kurzen Dialog motivieren.

A: Kennst Du schon diesen super Satz von Bézout, nach dem zwei Polynome in zwei Veränderlichen genau so viele gemeinsame Nullstellen haben, wie das Produkt ihrer Grade angibt?

B: Ist doch offensichtlich Quatsch. Denk nur an zwei parallele Geraden in der reellen Ebene!

A: Na ja, die schneiden sich halt im Unendlichen.

B: Hättest Du auch gleich dazusagen können, was da noch alles mitzuzählen ist! Dann denk halt an zwei Kreise, Nullstellenmengen von quadratischen Polynomen. Die schneiden sich doch meist gar nicht, bestenfalls in zwei und nie in vier Punkten.

A: Na ja, die anderen Schnittpunkte liegen eben im Komplexen.

B: Wird ja ziemlich komplex. Eine Ausrede nach der anderen. Aber dann denk eben im Komplexen an den Graphen einer nichtkonstanten Polynomfunktion in einer Veränderlichen und den Schnitt dieses Graphen mit der x-Achse. Wenn unser Polynom mehrfache Nullstellen hat ...

A: ... dann müssen die Schnittpunkte seines Graphen mit der x-Achse natürlich auch mit der entsprechenden Vielfachheit gezählt werden.

B: Argh! Natürlich, selbstverständlich. Und was wäre, wenn wir schlicht zweimal dasselbe Polynom in zwei Veränderlichen nähmen?

A: Oups, ich vergaß, teilerfremd müssen meine beiden Polynome schon sein. Aber dann stimmt es auch wirklich!

B: Ich glaub vorerst gar nichts mehr. Jetzt erklär erst mal ganz genau, was Du mit „gemeinsamen Nullstellen im Unendlichen" und der „Vielfachheit einer gemeinsamen Nullstelle" meinst, dann sehen wir weiter.

Nun, dieses „ganz genaue Erklären" wird ein Weilchen dauern, weil ich es auch wieder nicht minimalistisch machen will. Vielmehr erkläre ich zunächst ganz allgemein abstrakte algebraische Varietäten als spezielle k-geringte Räume. Dann wird diskutiert, inwiefern für $k = \bar{k}$ unsere algebraischen Teilmengen von k^n eine natürliche Struktur als algebraische Varietäten tragen, und inwiefern dasselbe auch für die projektiven Räume $\mathbb{P}^n k$ aus [LA2] **??** gilt. In diesem Rahmen schließlich wird das „ganz genaue Erklären“ dann leicht von der Hand gehen, vergleiche 6.5.4.

6.1 Geringte Räume

Definition 6.1.1. Sei k ein Kring. Unter einer **k-Ringalgebra** verstehen wir ein Paar (R, φ) bestehend aus einem Ring R und einem Ringhomomorphismus $\varphi : k \to R$, dessen Bild im Zentrum von R liegt und der meist vom Leser erraten werden muß. Von einer k-Teilringalgebra fordern wir, daß sie das Bild dieses ausgezeichneten Ringhomomorphismus umfassen soll. In [LA2] 7.8.1 hatten wir derartige Strukturen im Fall eines Körpers k bereits kennengelernt.

Definition 6.1.2. Sei k ein Kring. Ein **k-geringter Raum** $X = (X, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum X mitsamt einer Vorschrift $\mathcal{O}$, die jeder offenen Teilmenge $U \circledcirc X$ eine k-Teilringalgebra $\mathcal{O}(U) \subset \operatorname{Ens}(U, k)$ in der k-Ringalgebra aller Abbildungen von U nach k zuordnet, deren Elemente wir **reguläre Funktionen auf U** nennen und von denen wir fordern:

> Ist $\mathcal{U}$ ein System offener Teilmengen von X und $V := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ seine Vereinigung, so ist eine Abbildung $f : V \to k$ regulär genau dann, wenn ihre Restriktionen auf alle $U \in \mathcal{U}$ regulär sind.

6.1.3. Unter anderem impliziert unsere Definition, daß alle konstanten Funktionen regulär sind, daß also für jedes $U \circledcirc X$ die konstanten Abbildungen von U nach k in $\mathcal{O}(U)$ liegen: Eine Teilringalgebra muß nämlich nach unseren Definitionen stets das Einselement der ursprünglichen Ringalgebra enthalten.

Ergänzung 6.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Im Zusammenhang mit „Schemata“ und „Supermannigfaltigkeiten“ wird eine noch allgemeinere Definition des Konzepts eines geringten Raums benötigt. Wenn wir betonen wollen, daß wir den hier erklärten einfacheren Begriff meinen, reden wir genauer von einem **durch Funktionen k-geringten Raum**. In der Sprache der Garbentheorie, die ich hier noch vermeiden will, könnte man unser $\mathcal{O}$ als eine „k-Ringalgebren-Untergarbe der k-Ringalgebren-Garbe aller k-wertigen Funktionen auf X“ charakterisieren.

Beispiel 6.1.5 (**Mannigfaltigkeiten als $\mathbb{R}$-geringte Räume**). Ein typisches Beispiel sind die „Mannigfaltigkeiten“, die wir in [ML] 4.2.3 sogar definiert haben gewisse $\mathbb{R}$-geringten Räume X, bei denen wir als reguläre Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \circledcirc X$ eben alle „glatten“ Funktionen nehmen.

Beispiel 6.1.6 (**Affine Varietäten als k-geringte Räume**). $(k = \bar{k})$. Jede affine k-Varietät im Sinne von 2.3.1 wird ein k-geringter Raum, wenn wir sie mit ihrer Zariski-Topologie versehen und reguläre Funktionen auf offenen Teilmengen erklären wie in 2.1.5.

Definition 6.1.7. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei k-geringte Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt ein **Morphismus von k-geringten Räumen** genau dann, wenn sie stetig ist und wenn das Davorschalten unserer Abbildung reguläre Funktionen zu regulären Funktionen macht, wenn also in Formeln aus $U \circledsubseteq Y$ und $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ folgt $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. Die Menge aller Morphismen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Ger}_k(X, Y)$ oder auch kurz $\mathrm{Ger}(X, Y)$. Ein **Isomorphismus von k-geringten Räumen** ist ein bijektiver Morphismus, dessen Umkehrabbildung auch ein Morphismus ist.

Beispiel 6.1.8. Die Morphismen $\mathbb{R}$-geringter Räume sind im Fall von zwei Mannigfaltigkeiten genau alle glatten Abbildungen.

Beispiel 6.1.9. $(k = \bar{k})$. Die Morphismen k-geringter Räume sind im Fall von zwei affinen k-Varietäten genau alle Morphismen im Sinne von 2.3.1, vergleiche 2.1.16.

6.1.10 (**Schnitt von Strukturen als k-geringter Raum**). Sind auf ein und derselben Menge X mehrere Strukturen als k-geringter Raum gegeben, so bilden wir ihren Schnitt, indem wir diejenigen Mengen offen nennen, die in jeder unserer Strukturen offen sind, und diejenigen Funktion regulär, die in jeder unserer Strukturen regulär sind. Dieser Schnitt ist dann offensichtlich auch eine Struktur als k-geringter Raum auf X.

6.1.11 (**Vergleich von Strukturen als k-geringter Raum**). Gegeben zwei Strukturen als k-geringter Raum auf derselben Menge X nennen wir die eine **größergleich** als die andere genau dann, wenn ihr Schnitt die andere Struktur ist. Salopp gesprochen sind also größere Strukturen solche „mit mehr offenen Mengen oder mehr regulären Funktionen oder beidem“. Auf diese Weise erhalten wir eine partielle Ordnung auf der Menge aller Strukturen als k-geringter Raum auf einer vorgegebenen Menge X.

Definition 6.1.12. Seien X eine Menge, Y_i beliebige k-geringte Räume indiziert durch $i \in I$ und $\varphi_i : Y_i \to X$ Abbildungen. Die größte Struktur eines k-geringten Raums auf X, für die alle φ_i Morphismen werden, heißt die **finale Struktur auf** X in Bezug auf unsere Familie von Abbildungen.

6.1.13 (**Existenz der finalen Struktur**). Wir müssen zeigen, daß solch eine größte Struktur auch tatsächlich existiert. Dazu geben wir sie einfach explizit an: Als Topologie nehmen wir die Finaltopologie, $U \subset X$ ist also offen genau dann, wenn seine Urbilder $\varphi_i^{-1}(U)$ offen sind in Y_i für alle $i \in I$. Als reguläre Funktionen auf $U \circledsubseteq X$ nehmen wir dann alle Funktionen $f : U \to k$ derart, daß $f \circ \varphi_i$ regulär ist auf $\varphi_i^{-1}(U)$ für alle $i \in I$. Es scheint mir nun klar, daß das eine Struktur als k-geringter Raum auf X mit den geforderten Eigenschaften ist, und dann ist es sicher auch die größte derartige Struktur.

6.1.14. Ein Morphismus $f : Y \to X$ von k-geringten Räumen heißt **final** genau dann, wenn X die finale Struktur in Bezug auf die einelementige Familie f trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets final.

Satz 6.1.15 (Universelle Eigenschaft der finalen Struktur). *Sei eine Familie $\varphi_i : Y_i \to X$ von Abbildungen k-geringter Räume Y_i in eine Menge X gegeben. Versehen wir X mit der finalen Struktur, so ist eine Abbildung $\psi : X \to Z$ in einen weiteren k-geringten Raum Z ein Morphismus genau dann, wenn alle $\psi \circ \varphi_i : Y_i \to Z$ Morphismen sind.*

Beweis. Das folgt direkt aus unserer expliziten Beschreibung der finalen Struktur in 6.1.13. □

6.1.16 (**Disjunkte Vereinigung k-geringter Räume**). Gegeben eine Familie k-geringter Räume (Y_i) versehen wir ihre disjunkte Vereinigung $\bigsqcup Y_i$ mit der finalen Struktur bezüglich der Inklusionen, wenn nichts anderes gesagt wird.

Definition 6.1.17. Seien Y eine Menge, X_i beliebige k-geringte Räume indiziert durch $i \in I$ und $\psi_i : Y \to X_i$ Abbildungen. Die kleinste Struktur eines k-geringten Raums auf Y, für die alle unsere ψ_i Morphismen werden, heißt die **initiale Struktur auf Y** in Bezug auf unsere Familie von Abbildungen.

6.1.18 (**Existenz der initialen Struktur**). Der Schnitt aller Strukturen auf Y, für die alle unsere ψ_i Morphismen sind, hat sicher auch diese Eigenschaft und ist folglich die kleinste Struktur mit dieser Eigenschaft. Das zeigt, daß solch eine kleinste Struktur tatsächlich existiert. Wir geben eine explizite Beschreibung im Fall einer einelementigen Familie in 6.1.21.

Satz 6.1.19 (Universelle Eigenschaft der initialen Struktur). *Sei eine Familie $\psi_i : Y \to X_i$ von Abbildungen einer Menge Y in k-geringte Räume X_i gegeben. Versehen wir Y mit der initialen Struktur und ist Z ein k-geringter Raum und $\varphi : Z \to Y$ eine Abbildung, so ist φ ein Morphismus genau dann, wenn alle $\psi_i \circ \varphi : Z \to X_i$ Morphismen sind.*

Beweis. Mit φ sind natürlich auch alle $\psi_i \circ \varphi$ Morphismen. Sind umgekehrt alle $\psi_i \circ \varphi$ Morphismen, so ist die finale Struktur zu φ auch eine Struktur auf Y, für die alle ψ_i Morphismen sind. Folglich umfaßt die finale Struktur zu φ unsere initiale Struktur, und damit ist φ ein Morphismus. □

Ergänzung 6.1.20. Diese Aussagen und ihr Beweis sind ebenso wie die Aussagen zur Transitivität finaler Familien völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen [ML] 3.6.36, [ML] 3.6.35 im Kontext topologischer Räume. Sie wären noch allgemeiner sinnvoll und richtig für eine beliebige Kategorie mit einem treuen Funktor in die Kategorie der Mengen, ja mit etwas mehr Mühe bei der Formulierung sogar für einen beliebigen treuen Funktor.

6.1.21. Ist $Y \subset X$ eine Teilmenge eines k-geringten Raums, so nennen wir die initiale Struktur zur Einbettung die **induzierte Struktur** eines k-geringten Raums auf Y und notieren sie $(Y, \mathcal{O}|_Y)$. Explizit kann man die induzierte Struktur beschreiben wie folgt: Als Topologie auf Y erhält man die von X induzierte Topologie, und eine Funktion g auf $V \circledcirc Y$ ist regulär genau dann, wenn es für alle $y \in V$ eine offene Umgebung $U \circledcirc X$ von y in X gibt und eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $g|_{U \cap V} = f|_{U \cap V}$. Ganz allgemein nennen wir einen Morphismus $f : Y \to X$ **initial** genau dann, wenn Y die initiale Struktur trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets initial.

Definition 6.1.22. Ist $\psi : Y \hookrightarrow X$ ein injektiver Morphismus von k-geringten Räumen und trägt Y die initiale Struktur, so nennen wir ψ eine **Einbettung von k-geringten Räumen**. Besonders oft werden uns **offene Einbettungen** und **abgeschlossene Einbettungen** begegnen, bei denen zusätzlich gefordert wird, daß sie als Abbildungen topologischer Räume offen bzw. abgeschlossen sind, oder gleichbedeutend, daß ihr Bild offen bzw. abgeschlossen ist.

Ergänzung 6.1.23. In der algebraischen Geometrie ist gleichbedeutend zum Begriff der Einbettung auch die Bezeichnung als **Immersion** gebräuchlich, in der Differentialgeometrie versteht man jedoch unter einer Immersion stattdessen meist wie in [ML] 4.3.13 einen nicht notwendig injektiven Morphismus mit injektivem Differential an jedem Punkt.

Übungen

Übung 6.1.24 (**Transitivität finaler Familien**). Seien $g_{ij} : Z_{ij} \to Y_i$ und $f_i : Y_i \to X$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Tragen die Y_i die finalen Strukturen für die g_{ij} und trägt X die finale Struktur für die f_i, so trägt X auch die finale Struktur für die $f_i g_{ij}$. Trägt andererseits X die finale Struktur bezüglich der $f_i g_{ij}$, so trägt X auch die finale Struktur bezüglich der f_i.

6.1.25. Übung 6.1.24 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen stets final ist, und daß die Verknüpfung $f \circ g$ von zwei Morphismen nur dann final sein kann, wenn f final ist. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, d.h. für den es einen Morphismus s gibt mit $f \circ s = \mathrm{id}$.

Übung 6.1.26 (**Transitivität initialer Familien**). Seien $h_i : X \to Y_i$ und $g_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Trägt X die initiale Struktur für die h_i und tragen die Y_i die initialen Strukturen für die g_{ji}, so trägt X auch die initiale Struktur für die $g_{ji} h_i$. Trägt andererseits X die initiale Struktur für die $g_{ji} h_i$, so trägt X auch die initiale Struktur bezüglich der h_i.

6.1.27. Übung 6.1.26 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Morphismen stets initial ist, speziell ist die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung. Weiter besagt sie, daß eine Verknüpfung $g \circ h$ von zwei Morphismen nur dann initial sein kann, wenn h initial ist. Insbesondere ist jeder Morphismus initial, zu dem es einen linksinversen Morphismus gibt.

Übung 6.1.28 (**Finalität offener Überdeckungen**). Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung eines k-geringten Raums X, so trägt X die finale Struktur in Bezug auf die Einbettungen $U_i \hookrightarrow X$. Eine Abbildung $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum ist also genau dann ein Morphismus, wenn ihre Restriktionen auf alle U_i Morphismen sind.

Übung 6.1.29 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von k-geringten Räumen $f : Y \to X$ final, so ist auch für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ die induzierte Abbildung $f^{-1}(U) \to U$ final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt $f : Y \to X$ ein Morphismus von k-geringten Räumen und besitzt X eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ derart, daß $f : f^{-1}(U) \to U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

6.2 Allgemeine Varietäten

Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ stets ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 6.2.1. 1. Eine **affine** k**-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer algebraischen Teilmenge eines k^n im Sinne von 1.1.2, versehen mit der Struktur eines k-geringten Raums aus 6.1.6;

2. Eine k**-Varietät** ist ein k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine endliche Überdeckung besitzt durch offene Teilmengen U derart, daß alle $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ affine k-Varietäten sind;

3. Ein Morphismus von Varietäten ist ein Morphismus von geringten Räumen. Wir erhalten so die **Kategorie der Varietäten über** k.

6.2.2 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur ist für die Struktur, die wir hier eine Varietät genannt haben, die Bezeichnung als **Prävarietät** üblich. Unter einer „Varietät“ versteht man in der Literatur dann meist die Struktur, die wir in 6.8.1 als „separierte Varietät“ einführen. Meine Motivation für diese Abweichung ist, daß man in der allgemeineren Theorie der Schemata ebenso vorgeht. Manche Quellen fordern im übrigen von ihren Varietäten zusätzlich noch, daß sie irreduzibel sein sollen.

6.2.3. Wenn wir im Folgenden von einer Varietät reden, denken wir uns stets einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper fest gewählt, über dem sie definiert ist.

Die Kategorie der Varietäten über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper werden wir erst im Rahmen der allgemeinen Theorie der Schemata kennenlernen. Der Leser sei gewarnt, daß man eine andere und recht nutzlose Kategorie erhält, wenn man im Fall eines nicht algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers die vohergehende Definition 6.2.1 wortwörtlich übernimmt.

6.2.4. Indem wir wie in 6.1.6 jede naive affine Varietät als k-geringten Raum mit ihrer Zariski-Topologie und den in 2.1.5 erklärten regulären Funktionen auf offenen Teilmengen verstehen, erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Naive affine Varietäten} \\ \text{im Sinne von 2.3.1} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Affine Varietäten im Sinne} \\ \text{spezieller } k\text{-geringter Räume} \end{array} \right\} \\ (X, \mathcal{O}(X)) & \mapsto & (X, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Aus diesem Grund ist die mehrfache Verwendung des Begriffs „affine Varietät“ für auf den ersten Blick unterschiedliche Begriffsbildungen unproblematisch.

6.2.5. Wir zeigen in 6.7.13, daß es in der Kategorie der Varietäten alle endlichen Produkte gibt und daß Produkte affiner Varietäten wieder affin sind. Bis dahin betrachten wir nur Produkte affiner Varietäten und verwenden nur deren universelle Eigenschaft in Bezug auf affine Varietäten.

6.2.6 (**Komplement der Nullstellenmenge einer Funktion**). Ist X eine naive affine k-Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion und X_f das Komplement der Nullstellenmenge von f mit seiner Struktur als naive affine Varietät, so ist der zugehörige Morphismus von Varietäten $X_f \hookrightarrow X$ offensichtlich eine offene Einbettung von k-geringten Räumen.

6.2.7 (**Abgeschlossene Teilmengen**). Ist X eine naive affine k-Varietät und $Y \overset{\circ}{\subset}\!\!\!\!\!\!\!\!\mathsf{A}\;\; X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit ihrer Struktur als naive affine Varietät, so ist der zugehörige Morphismus von Varietäten $Y \hookrightarrow X$ offensichtlich eine abgeschlossene Einbettung von k-geringten Räumen.

Lemma 6.2.8. *Jede offene oder abgeschlossene Teilmenge einer Varietät ist mit der induzierten Struktur wieder eine Varietät.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den beiden vorhergehenden Bemerkungen 6.2.6 und 6.2.7. Es gilt nur zu beachten, daß jede offene Teilmenge einer affinen Varietät X bereits eine endliche Überdeckungen durch geeignete X_f besitzt. $\square$

Definition 6.2.9. Eine **quasiaffine k-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer offenen Teilmenge einer affinen k-Varietät.

6.2.10. Eine Teilmenge eines topologischen Raums, die ein Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Menge ist, heißt **lokal abgeschlossen**. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge einer Varietät ist selbst eine Varietät. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge einer quasiaffinen Varietät ist quasiaffin.

6.2.11 (**Eine quasiaffine aber nicht affine Varietät**). Das Komplement $k^2 \backslash 0$ des Ursprungs in der Ebene ist keine affine Varietät: In der Tat liefert nach 2.1.10 die Restriktion eine Bijektion $\mathcal{O}(k^2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k^2 \backslash 0)$, auf affinen Varietäten ist jedoch $\mathcal{O}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Mithin kann ein Morphismus von affinen Varietäten nur dann einen Isomorphismus auf den globalen regulären Funktionen induzieren, wenn er bereits selbst ein Isomorphismus war.

Ergänzung 6.2.12. Es gibt durchaus auch offene affine Teilmengen affiner Varietäten, die nicht das Komplement der Nullstellenmenge einer regulären Funktion sind. Die Konstruktion eines Beispiels braucht jedoch mehr Theorie, als sie uns hier zur Verfügung steht: Man betrachte eine elliptische Kurve ohne ihr neutrales Element. Das ist eine affine Varietät. Jeder Punkt dieser affinen Varietät, der die einzige Nullstelle einer regulären Funktion ist, muß dann von endlicher Ordnung sein. Andererseits ist das Komplement in einer elliptischen Kurve von zwei beliebigen Punkten stets affin.

6.2.13. Offensichtlich ist jede Varietät ein noetherscher topologischer Raum.

Definition 6.2.14. Unter der **Dimension** einer Varietät versteht man die Krull-Dimension des zugrundeliegenden topologischen Raums.

Proposition 6.2.15. *Gegeben eine irreduzible Varietät stimmt die Dimension jeder nichtleeren offenen Teilmenge überein mit der Dimension der ganzen Varietät.*

Beweis. In der Tat, jede echt aufsteigende endliche Kette irreduzibler Mengen enthält einen gemeinsamen Punkt und liefert durch Herunterschneiden auf eine affine offene Umgebung dieses Punktes eine echt aufsteigende Kette irreduzibler Mengen dort. Das zeigt, daß die Krulldimension beschränkt ist durch das Maximum der Krulldimensionen der Mengen jeder offenen affinen Überdeckung. Jede nichtleere offene Teilmenge ist aber auch irreduzibel, und jeder der zu unserer Überdeckung gehörigen affinen k-Kringe ist folglich ein Integritätsbereich und damit ein Kettenring. Da schließlich je zwei nichtleere offene Teilmengen nichtleeren Schnitt haben, folgt die Behauptung. □

Korollar 6.2.16 (**Kodimension von Schnittmengen**). *Sind $Y, Z \underset{\mathcal{A}}{\subset} X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen einer irreduziblen Varietät X, so gilt für jede irreduzible Komponente W ihres Schnitts $Y \cap Z$ die Abschätzung* $\operatorname{kdim} W \geq \operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim} Z - \operatorname{kdim} X$ *alias*

$$\operatorname{codim}(W \subset X) \leq \operatorname{codim}(Y \subset X) + \operatorname{codim}(Z \subset X)$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der entsprechenden Aussage 4.8.12 für affine Varietäten. □

Definition 6.2.17. Gegeben ein k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und ein Punkt $x \in X$ erklären wir den Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der **Keime regulärer k-wertiger Funktionen bei** x, auch genannt der **lokale Ring von** X **bei** x, als die Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) mit $x \in U \Subset X$ und $f \in \mathcal{O}_X(U)$ unter der Äquivalenzrelation

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \Leftrightarrow \quad \exists W \Subset U \cap U' \text{ mit } x \in W \text{ und } f|_W = f'|_W.$$

6.2.18 (**Lokale Ringe affiner Varietäten**). Im Fall einer affinen Varietät X liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus zwischen dem hier definierten Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ aller Keime regulärer Funktionen mit dem in 3.1.13 definierten Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ aller Keime beliebiger Funktionen mit mindestens einem reguären Repräsentanten.

Proposition 6.2.19 (Verkleben von Punkten). *Sei X eine affine k-Varietät und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y. Sind alle Fasern von φ endlich und fast alle Fasern einelementig, so ist Y mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums auch eine affine k-Varietät.*

Beweis. In 4.2.15 hatten wir bereits gezeigt, daß Y mit $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ eine naive affine Varietät wird. Da $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ ganz ist, zeigen unsere allgemeinen Erkenntnisse 4.2.9 über die Geometrie ganzer Ringerweiterungen, daß φ abgeschlossen und insbesondere „topologisch final" ist: Eine Teilmenge von Y ist genau dann offen, wenn ihr Urbild in X es ist. Um zu zeigen, daß φ eine finale Abbildung auf den zugehörigen k-geringten Räumen ist, müssen wir noch für jede offene Teilmenge $U \Subset Y$ zeigen, daß eine Funktion $h : U \to k$ genau dann regulär ist, wenn $h \circ \varphi$ regulär ist. Für globale Funktionen ist das offensichtlich. Für den allgemeinen Fall reicht es, wenn wir unsere Aussage für offene Teilmengen der Gestalt $U = Y_g = \{g \neq 0\}$ zeigen, mit $g \in \mathcal{O}(Y)$. Offensichtlich brauchen wir nur den Fall zu betrachten, daß es genau zwei Punkte $p, q \in X$ gibt mit $p \neq q$ aber $\varphi(p) = \varphi(q)$. Nun betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow k$$

mit rechter Abbildung $f \mapsto f(p) - f(q)$. Lassen wir $g \in \mathcal{O}(Y)$ auf dem k in dieser Sequenz durch Multiplikation mit seinem Wert $g(p) = g(q)$ operieren, so besteht sie aus Homomorphismen von $\mathcal{O}(Y)$-Moduln und bleibt exakt bei Lokalisierung nach g. Das zeigt $\mathcal{O}(Y)_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_g$ im Fall $g(p) = g(q) = 0$ und $\mathcal{O}(Y)_g \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{O}(X)_g \mid f(p) = f(q)\}$ im Fall $g(p) = g(q) \neq 0$. Die Proposition ist bewiesen. $\square$

Ergänzung 6.2.20. Ist X eine k-Varietät und liefern die Auswertungen an Punkten eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ring}^k(\mathcal{O}(X), k)$, so wüßte ich gerne, ob X affin sein muß. Nimmt man zusätzlich an, dass $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k und $X \to \mathrm{Max}\, \mathcal{O}(X)$ ein Homöomorphismus, so kann ich das wohl zeigen.

Ergänzung 6.2.21. Ist der k-Kring der regulären Funktionen auf einer Varietät stets wieder von endlichem Typ über k? Ich selbst weiß das gerade selbst nicht.

Übungen

Übung 6.2.22. Man zeige: Jeder Punkt einer Varietät liegt in einer dichten offenen affinen Teilmenge.

Übung 6.2.23. Gegeben eine Varietät X und $f \in \mathcal{O}(X)$ regulär setzen wir

$$X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

Man zeige, daß es für alle $h \in \mathcal{O}(X_f)$ ein $n \gg 0$ gibt derart, daß die Fortsetzung durch Null von $f^n h$ eine reguläre Funktion auf ganz X ist. Man folgere, daß die Restriktion $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X_f)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X_f)$ zwischen der Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ an f und dem Ring der regulären Funktionen auf X_f induziert.

Übung 6.2.24. Gegeben eine Varietät X, offene affine Teilmengen $U, V \Subset X$ und ein Punkt $x \in U \cap V$ zeige man: Es gibt stets $s \in \mathcal{O}(U)$ und $t \in \mathcal{O}(V)$ mit $U_s = V_t$ und $x \in U_s$ und dann natürlich auch $x \in V_t$. Dann ist natürlich auch $U_s = V_t$ affin. Hinweis: 6.2.23.

Übung 6.2.25. Man zeige, daß für jede affine Varietät Z der von einer Verklebung $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ affiner Varietäten im Sinne von 6.2.19 induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen, ja selbst wieder final ist. Man gebe ein Beispiel an, in dem diese Verklebung kein offener Morphismus ist.

Übung 6.2.26 (**Verkleben von Punkten**). Seien X eine k-Varietät und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y. Sind alle Fasern von φ endlich und fast alle Fasern einelementig, und liegen die Urbilder aller Punkte mit nicht einelementiger Faser in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge von X, so ist Y mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums auch eine k-Varietät. Hinweis: 6.2.19. In 6.8.16 zeigen wir im Übrigen, daß diese Konstruktion auch die Separabilität erhält.

Übung 6.2.27. Eine auf einer offenen Teilmenge einer irreduziblen affinen Varietät definierte reguläre Funktion f, die lokal als Quotient $f = g/h$ geschrieben werden kann, stimmt bereits auf der der Differenz ihres Definitionsbereichs und der Nullstellenmenge von h mit g/h überein.

6.3 Projektive Räume

Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

6.3.1. Ich erinnere [LA2] **??**: Gegeben ein k-Vektorraum W bezeichnen wir die Menge aller Geraden in W durch den Ursprung mit

$$\mathbb{P}W = \mathbb{P}_k W := \{V \subset W \mid V \text{ ist ein eindimensionaler Untervektorraum}\}$$

und nennen diese Menge den **projektiven Raum** zu W. Die **kanonische Projektion** $\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$, $w \mapsto \langle w \rangle$, die jedem von Null verschiedenen Vektor sein Vektorraumerzeugnis zuordnet, ist eine Surjektion, deren Fasern gerade die Bahnen von $k^\times$ sind.

Definition 6.3.2 (Projektive Räume als k-geringte Räume). Wir erklären für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum W die Struktur eines k-geringten Raums auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}W$, indem wir erst auf W die natürliche Struktur aus 2.3.9 oder besser 6.1.6 betrachten, dann auf $W\backslash 0$ die induzierte Struktur, und dann auf $\mathbb{P}W$ die finale Struktur zur kanonischen Projektion

$$\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$$

In Worten ist damit eine Teilmenge $U \subset \mathbb{P}W$ offen genau dann, wenn ihr Urbild unter der kanonischen Projektion in π offen ist, und eine Funktion darauf ist regulär genau dann, wenn die zurückgezogene Funktion auf $\pi^{-1}(U) \subset W\backslash 0$ regulär ist.

6.3.3. Speziell kürzt man $\mathbb{P}k^{n+1} =: \mathbb{P}^n k$ ab und schreibt Elemente darin $\langle (x_0, \ldots, x_n) \rangle =: \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Genau dann ist per definitionem $U \subset \mathbb{P}^n k$ offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset k^{n+1}\backslash 0$ offen ist, und eine Funktion $f : U \to k$ ist regulär genau dann, wenn die zurückgezogene Funktion $f \circ \pi$ auf $\pi^{-1}(U)$ regulär ist, als da heißt, lokal als Quotient von Polynomen geschrieben werden kann.

Lemma 6.3.4 (Projektive Räume sind Varietäten). *Für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum W ist der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}W$ mit seiner eben erklärten Struktur als k-geringter Raum eine Varietät über k.*

6.3.5 (**Projektive Vervollständigung als Varietät**). Insbesondere erhält damit auch für jeden endlichdimensionalen affinen Raum E über k seine projektive Vervollständigung $\mathbb{V}E := E \sqcup \mathbb{P}\vec{E}$ aus [LA2] **??** vermittels unserer Bijektion $\mathbb{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\operatorname{Lin}(E)$ aus [LA2] **??** die Struktur einer Varietät. Der Leser mag zur Übung prüfen, daß dann die Einbettung $E \hookrightarrow \mathbb{V}E$ eine offene Einbettung ist. Die „Separiertheit“ projektiver Varietäten diskutieren wir erst in 6.8.6, in unserer Terminologie wird ja diese Bedingung von einer Varietät nicht automatisch gefordert.

Beweis. Wir zeigen, daß für jede affine Hyperebene $H \subset W$, die den Ursprung vermeidet, die Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ gegeben durch $v \mapsto \langle v \rangle$ eine offene

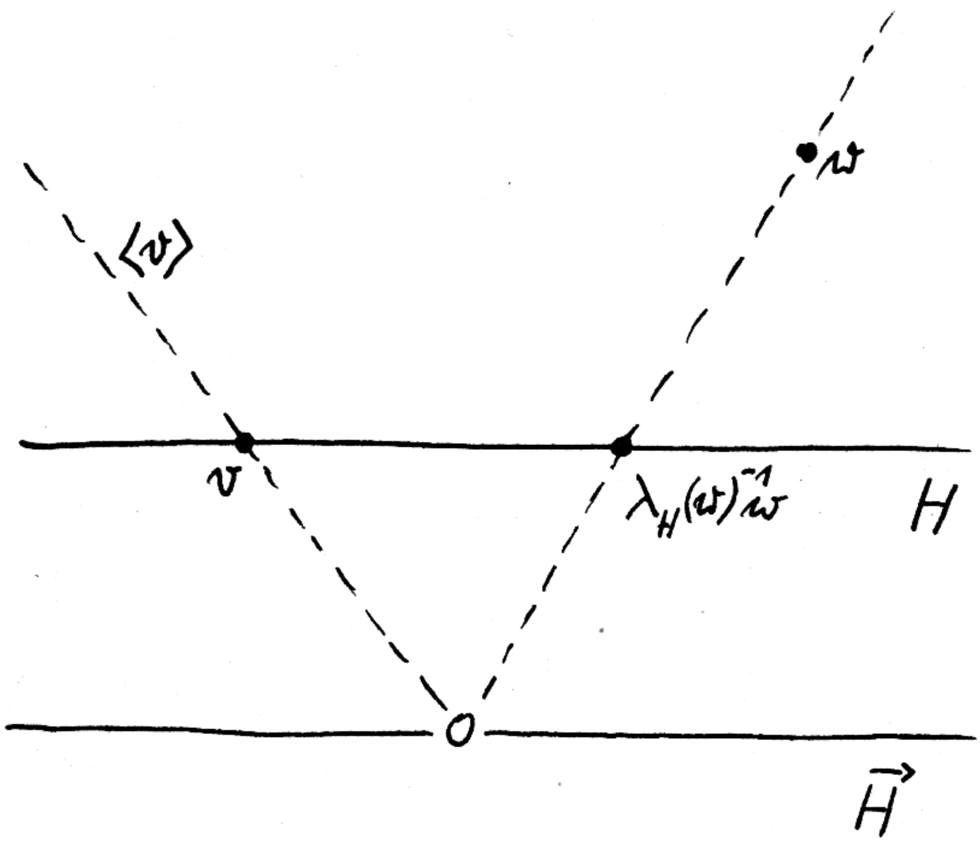


Illustration zum Beweis von 6.3.4

Einbettung ist. Ist in der Tat $\vec{H} \subset W$ der Untervektorraum der Richtungsvektoren unserer affinen Hyperebene H, so ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = W \backslash \vec{H}$ offen in $W \backslash 0$. Mithin hat unsere Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ offenes Bild. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & W \backslash \vec{H} \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi"] & \\ H \arrow[rr] & & i_H(H) \end{tikzcd}$$

Der linke schräge Pfeil ordne jedem Punkt den Schnittpunkt mit H der durch ihn verlaufenden Ursprungsgeraden zu. Er ist ein Morphismus, denn ist in Formeln $\lambda_H : W \to k$ die Linearform, deren Niveaufläche zum Wert Eins gerade H ist, so wird er gegeben durch die Formel $w \mapsto \lambda_H(w)^{-1}w$. Er ist nach 6.1.25 sogar final, da er einen Schnitt besitzt, eben die Einbettung $H \hookrightarrow W \backslash \vec{H}$. Der rechte schräge Pfeil ist final, da diese Eigenschaft nach 6.1.29 lokal ist in der Basis. Zusammen folgt, daß die horizontale Bijektion ein Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} i_H(H)$ von k-geringten Räumen sein muß. Damit ist $\mathbb{P}W$ in der Tat eine Varietät. □

6.3.6 (**Die Standardkarten von** $\mathbb{P}^n k$). Speziell zeigt der vorhergehende Beweis, daß wir eine offene Einbettung $i_0 : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ erhalten durch die Vorschrift $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \langle 1, x_1, \ldots, x_n \rangle$. In derselben Weise erhalten wir offene Einbettungen $i_\nu : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ für $0 \le \nu \le n$, und deren Bilder überdecken ganz $\mathbb{P}^n k$.

Proposition 6.3.7 (Globale Funktionen auf projektiven Räumen). *Die einzigen globalen regulären Funktionen auf unseren projektiven Räumen $\mathbb{P}^n k$ sind die konstanten Funktionen, in Formeln gilt für alle $n \ge 0$ also*

$$\mathcal{O}(\mathbb{P}^n k) = k$$

6.3.8. Wir zeigen gleich im Anschluß den sehr viel stärkeren Sats 6.3.15. Allerdings benötigt dessen Beweis auch sehr viel stärkere Hilfsmittel.

Beweis. Im Fall $n = 0$ ist das eh klar. Für jedes n kann $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n k)$ identifiziert werden mit der Menge aller der regulären Funktionen f auf $k^{n+1} \backslash 0$, die auf allen Ursprungsgeraden konstant sind. Da sich aber nach 2.1.10 unser f für $n \ge 1$ zu einer regulären Funktion auf ganz k^{n+1} fortsetzen läßt, die dann natürlich auch auf allen Ursprungsgeraden konstant ist, muß unsere Funktion f konstant denselben Wert annehmen wie ihre reguläre Fortsetzung auf ganz k^{n+1} am Ursprung. □

Definition 6.3.9. Eine **projektive k-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines $\mathbb{P}^n k$. Eine **quasiprojektive k-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer offenen Teilmenge einer projektiven k-Varietät.

6.3.10 (**Varianten des Begriffs einer projektiven Varietät**). Der Begriff einer projektiven Varietät wird oft auch noch in anderen Bedeutungen verwendet, nämlich als Synonym für „abgeschlossene Teilmenge eines festen $\mathbb{P}^n k$“ oder auch als Synonym für „irreduzible abgeschlossene Teilmenge eines festen $\mathbb{P}^n k$“. Der Unterschied dieser Begriffsbildungen ist erheblich, wie Sie noch zur Genüge feststellen werden: Ein- und derselbe geringte Raum kann nämlich durchaus auf sehr verschiedene Weisen in vorgegebene projektive Räume eingebettet werden.

6.3.11. Da es eine offene Einbettung $k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ gibt, ist jede quasiaffine Varietät auch quasiprojektiv.

6.3.12 (**Kegelkonstruktion**). Um die Topologie des $\mathbb{P}^n k$ explizit zu beschreiben, gehen wir aus von der Projektion $\pi : (k^{n+1} \backslash 0) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n k$. Natürlich erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Teilmengen} \\ \text{von } \mathbb{P}^n k \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} k^\times\text{-stabile Teilmengen von } k^{n+1}, \\ \text{die den Ursprung enthalten} \end{array} \right\} \\ W & \mapsto & C(W) := \pi^{-1}(W) \sqcup \{0\} \end{array}$$

Hier heißt $C(W)$ auch der **Kegel über** W (englisch **cone**). Genau dann ist eine Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ abgeschlossen, wenn ihr Kegel $C(W) \subset k^{n+1}$ eine abgeschlossene Teilmenge von k^{n+1} ist. Insbesondere ist der Kegel über dem Abschluß der Abschluß des Kegels, denn der Abschluß einer $k^\times$-stabilen Teilmenge muß auch selbst wieder unter $k^\times$ stabil sein.

Lemma 6.3.13. *Genau dann ist eine Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ irreduzibel, wenn ihr Kegel $C(W)$ irreduzibel ist und nicht nur aus dem Ursprung besteht.*

Beweis. Um das einzusehen, dürfen wir uns auf abgeschlossene Teilmengen $W \overset{\mathrm{A}}{\subset} \mathbb{P}^n k$ beschränken. Ist $W = Y \cup Z$ eine nichttriviale Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen, so auch $C(W) = C(Y) \cup C(Z)$. Ist also W nicht irreduzibel, so ist auch $C(W)$ nicht irreduzibel. Sei umgekehrt $C(W) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die Abbildung $k^\times \times C(W) \to C(W)$ ist ein Morphismus von Varietäten und die $k^\times \times Y_i$ sind irreduzibel nach 2.6.20. Das zeigt, daß ihre Bilder jeweils ganz in einer irreduziblen Komponente von $C(W)$ landen müssen, und man sieht leicht, daß dafür nur die Komponente Y_i in Frage kommt. Also sind alle Komponenten Y_i von $C(W)$ auch stabil unter $k^\times$ und liefern, falls W nicht leer ist, eine nichttriviale Zerlegung von W. □

Satz 6.3.14 (**Schnitte in projektiven Varietäten**). *Sind Y und Z irreduzible abgeschlossene Teilmengen einer irreduziblen projektiven Varietät X und ist die Summe ihrer Dimensionen mindestens die Dimension von X, so haben unsere Teilmengen nichtleeren Schnitt, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim} Z \geq \operatorname{kdim} X \quad \Rightarrow \quad Y \cap Z \neq \emptyset$$

Beweis. Durch Übergang zu den Kegeln erhalten wir nach Übung 6.3.20 irreduzible abgeschlossene Teilmengen $C(Y), C(Z) \subset C(X)$ von jeweils um Eins größerer Dimension. Da der Ursprung in ihrem Schnitt liegt, gilt $C(Y) \cap C(Z) \neq \emptyset$. Nach 4.8.12 hat jede Komponente des Schnitts dieser Kegel mindestens die Dimension Eins und muß folglich auch Punkte außerhalb des Ursprungs und mithin eine ganze Gerade durch den Ursprung enthalten. Das zeigt hinwiederum $Y \cap Z \neq \emptyset$. □

Satz 6.3.15 (Globale Funktionen auf projektiven Varietäten). *Auf einer irreduziblen projektiven Varietät gibt es außer den Konstanten keine globalen regulären Funktionen.*

6.3.16. Dieselbe Aussage folgt sofort sogar etwas allgemeiner für jede zusammenhängende projektive Varietät.

Beweis. Hat unsere projektive Varietät mindestens die Dimension Zwei und nimmt eine reguläre Funktion darauf zwei verschiedene Werte an, so sind die entsprechenden Niveaumengen nichtleere abgeschlossene Teilmengen, deren sämtliche irreduzible Komponenten die Kodimension Eins haben und die nach 6.3.14 folglich paarweise nichtleeren Schnitt haben müssen, Widerspruch. Hat unsere projektive Varietät $X \not\triangleleft \mathbb{P}^n k$ die Dimension Eins, greifen wir etwas voraus und beachten, daß ihr Produkt mit der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1$ nach 6.7.21 auch eine projektive Varietät sein wird. Damit haben wir dann wieder gewonnen. □

Übungen

Übung 6.3.17. Man zeige, daß es keinen Morphismus von Varietäten $\mathbb{P}^1 k \to \mathbb{P}^1 k$ ohne Fixpunkt gibt. Salopp gesprochen ist es also nicht möglich, „in algebraischer Weise jeder Ursprungsgerade in k^2 ein Komplement zuzuordnen“. In stetiger Weise gelingt das etwa im Komplexen durchaus: Es reicht, ein Skalarprodukt auszuzeichnen und jeder Gerade ihr orthogonales Komplement zuzuordnen.

Ergänzende Übung 6.3.18. Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V und seine d-te symmetrische Potenz $\mathrm{S}^d V$ induziert der Morphismus von Varietäten $V \to \mathrm{S}^d V$, $v \mapsto v^d$ einen Morphismus von Varietäten

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}V & \hookrightarrow & \mathbb{P}(\mathrm{S}^d V) \\ \langle v \rangle & \mapsto & \langle v^d \rangle \end{array}$$

Man zeige, daß dieser Morphismus für $d \geq 1$ eine Einbettung ist. Sie heißt die **d-te Veronese-Einbettung** unseres projektiven Raums $\mathbb{P}V$.

Übung 6.3.19 (**Automorphismen der projektiven Gerade**). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß jeder Isomorphismus $\mathbb{P}^1 k \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 k$ von der Restriktion eines Vektorraumautomorphismus von k^2 auf $k^2 \backslash 0$ induziert wird und daß wir so einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}(2; k)/k^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Var}^\times(\mathbb{P}^1 k)$$

des besagten Quotienten mit der Automorphismengruppe der projektiven Gerade erhalten. Hinweis: Man erinnere zunächst die Automorphismen der Gerade k aus 2.3.12.

Übung 6.3.20. Gegeben eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge $W \subsetneq\!\!\!\!\!\!\bigcirc\, \mathbb{P}^n k$ zeige man $\operatorname{kdim} C(W) = \operatorname{kdim}(W) + 1$.

6.4 Rechnen in projektiven Varietäten

6.4.1. Um die Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n k$ konkret zu beschreiben, erinnere ich an die Begrifflichkeit graduierter Gruppen und Ringe nach 5.1. Gegeben ein Körper k besitzt der Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau eine Graduierung derart, daß die homogenen Elemente vom Grad r eben die homogenen Polynome vom Grad r aus [AL] 2.8.10 sind.

6.4.2. Sei k ein Körper. Gegeben eine Menge $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ von homogenen Polynomen ist ihre Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \subset k^{n+1}$ stets stabil unter $k^\times$.

Lemma 6.4.3. *Ist k ein unendlicher Körper und $C \subset k^{n+1}$ eine $k^\times$-stabile Teilmenge, so ist das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(C) \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Ideal.*

Ergänzung 6.4.4. Im Fall eines endlichen Körpers k ist das nicht mehr richtig. Im Fall $|k| = q < \infty$ verschwindet zum Beispiel das Polynom $X^{q-1} - 1$ auf $k^\times$, nicht aber seine homogene Komponente vom Grad Null. Es wird in diesem Fall auch nicht richtiger, wenn man nur $k^\times$-stabile Teilmengen betrachtet, die den Ursprung enthalten: Das Produkt $(X^{q-1} - 1)(Y^q - Y)$ etwa verschwindet auf beiden Koordinatenachsen, nicht aber seine homogene Komponente Y vom Grad Eins.

Beweis. Wir betrachten für alle $\lambda \in k^\times$ die Multiplikation $\lambda : k^{n+1} \to k^{n+1}$. Sie induziert auf den polynomialen Funktionen eine Abbildung $\lambda^* : k[T_0, \ldots, T_n] \to k[T_0, \ldots, T_n]$ gegeben durch die Vorschrift $T_i \mapsto \lambda T_i$. Wir haben also in Formeln $P(\lambda x) = (\lambda^* P)(x)$ für alle Polynome P und alle Punkte $x \in k^{n+1}$. Das Verschwindungsideal einer $k^\times$-stabilen Teilmenge ist mithin stabil unter allen λ^*. Die Aussage folgt nun aus dem anschließenden Lemma 6.4.5, angewandt auf den $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraum $V = k[T_0, \ldots, T_n]$. $\square$

Lemma 6.4.5 (Graduierungen und $k^\times$-Operationen). *Gegeben ein $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum $V = \bigoplus_i V^i$ über einem Körper k erkläre man für jedes $\lambda \in k^\times$ einen Automorphismus λ^* von V durch die Vorschrift $\lambda^*(v) := \lambda^i v$ für alle $v \in V^i$. Ist k unendlich, so sind die unter allen λ^* stabilen Teilräume von V genau die homogenen Teilräume.*

Beweis. Daß alle homogenen Teilräume unter allen λ^* stabil sind, ist klar. Sei umgekehrt $U \subset V$ ein unter allen λ^* stabiler Teilraum und $v \in U$ ein Vektor. Sicher gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $v \in \bigoplus_{|i| \le r} V^i$. Da k unendlich angenommen war, finden wir $\lambda \in k^\times$ mit $\lambda^r, \lambda^{r-1}, \ldots, \lambda^{-r}$ paarweise verschieden. Da $U \subset V$ unter λ^* stabil ist, muß λ^* nach [LA1] 7.6.19 auch auf U diagonalisierbar sein. Nach [LA2] 7.7.9 zerfällt mithin U in die direkte Summe der Eigenräume von λ^*. Insbesondere zerfällt auch v auf genau eine Weise in eine Summe $v = \sum u_i$ mit $u_i \in U$ und $\lambda^* u_i = \lambda^i u_i$. Das muß aber bereits die Zerlegung von v nach homogenen Komponenten in V sein. Da folglich für jedes $u \in U$ auch seine homogenen Komponenten zu U gehören, muß damit U ein homogener Teilraum sein. □

6.4.6 (**Homogene Ideale und $k^\times$-stabile Teilmengen**). $(k = \bar{k})$. Gegeben eine affine Varietät X betrachten wir $X \times k^n$ mit der $k^\times$-Operation $\lambda(x, v) = (x, \lambda v)$ und den offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times k^n)$ aus 2.4.18 und versehen die linke Seite mit der Standardgraduierung und die rechte Seite mit der induzierten Graduierung. So ist für jedes homogene Ideal $I \subset \mathcal{O}(X \times k^n)$ die Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I)$ stabil unter der Operation von $k^\times$, und umgekehrt ist für jede $k^\times$-stabile Teilmenge $Y \subset X \times k^n$ das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(Y)$ homogen nach 6.4.5.

6.4.7. Wir verwenden im Fall eines unendlichen Grundkörpers k für jede Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ die Notation

$$\mathcal{I}^*(W) := \mathcal{I}(C(W))$$

für das Verschwindungsideal des Kegels über W und nennen $\mathcal{I}^*(W)$ das **homogene Verschwindungsideal von** W. In der Tat ist $\mathcal{I}^*(W)$ im Fall eines unendlichen Grundkörpers nach 6.4.3 stets ein homogenes Ideal, ja sogar ein echtes homogenes Radikalideal. Der Quotient

$$\mathcal{O}^*(W) := k[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{I}^*(W) = \mathcal{O}(C(W))$$

wird manchmal auch der **homogene Koordinatenring von** W genannt.

6.4.8. Umgekehrt verwenden wir sowohl für jede aus homogenen Elementen bestehende Teilmenge als auch für jedes homogene Ideal $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ die Notation

$$\mathcal{Z}^*(I) := \pi(\mathcal{Z}(I) \backslash 0)$$

und nennen $\mathcal{Z}^*(I)$ die **projektive Nullstellenmenge von** I.

6.4.9. Die Abbildungen $\mathcal{I}^*$ und $\mathcal{Z}^*$ kehren wieder Inklusionen um. Wir haben stets $W \subset \mathcal{Z}^*(\mathcal{I}^*(W))$. Wenn wir uns auf homogene Teilmengen bzw. homogene Ideale $I \subset \mathcal{I}(0)$ beschränken, die also keine von Null verschiedenen Konstanten enthalten, so gilt auch $I \subset \mathcal{I}^*(\mathcal{Z}^*(I))$.

Korollar 6.4.10 (Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n_k$ und homogene Ideale). $(k = \bar{k})$. *Ordnen wir jedem homogenen Radikalideal $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ seine projektive Nullstellenmenge zu, so erhalten wir eine Bijektion*

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{array}{c} \textit{Homogene Radikalideale} \\ I \subsetneq k[T_0, \ldots, T_n] \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \subset \mathbb{P}^n k \end{array} \right\}$$

6.4.11. Die inverse Abbildung ist das Bilden des homogenen Verschwindungsideals $Y \mapsto \mathcal{I}^*(Y)$. Nach 6.3.13 induziert unsere Bijektion auch eine Bijektion

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{array}{c} \text{Homogene Primideale} \\ \text{mit } I \subsetneq \mathcal{I}(0) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } Y \subset \mathbb{P}^n k \end{array} \right\}$$

Da wir im k^n bereits nach 4.4.17 wissen, daß die irreduziblen Hyperflächen genau die Nullstellenmengen der irreduziblen Polynome sind, erhalten wir weiter für $n \geq 1$ eine Bijektion

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{array}{c} \text{Homogene irreduzible} \\ \text{Polynome } f \in k[T_0, \ldots, T_n] \end{array} \right\}_{/k^\times} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible} \\ \text{Hyperflächen } Y \subset \mathbb{P}^n k \end{array} \right\}$$

Eine Hyperfläche in einem projektiven Raum heißt ganz allgemein eine **projektive Hyperfläche**. Der Grad des zu einer irreduziblen projektiven Hyperfläche gehörigen irreduziblen homogenen Polynoms heißt der **Grad** unserer irreduziblen projektiven Hyperfläche. Wir notieren ihn

$$\operatorname{grad} H$$

für $H \subset \mathbb{P}^n k$ unsere projektive Hyperfläche. Die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms heißt eine **Hyperebene**, wenn unser Polynom linear ist, also vom Totalgrad 1; eine **Quadrik**, wenn unser Polynom quadratisch ist, also vom Totalgrad 2; eine **Kubik**, wenn unser Polynom kubisch ist, also vom Totalgrad 3; eine **Quartik**, wenn unser Polynom Totalgrad 4 hat; und eine **Quintik**, wenn unser Polynom Totalgrad 5 hat.

Beweis. Wir erinnern die Projektion $\pi : k^{n+1}\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n k$. Das Bilden des Urbilds unter π, das Hinzufügen des Ursprungs, und das Bilden des Verschwindungsideals liefern Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen von } \mathbb{P}^n k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} k^\times\text{-stabile abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen von } k^{n+1}\backslash 0 \end{array} \right\} \\ & & \downarrow \wr \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{homogene Radikalideale} \\ I \subsetneq k[T_0, \ldots, T_n] \end{array} \right\} & \xleftarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} k^\times\text{-stabile abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } X \subset k^{n+1} \text{ mit } 0 \in X \end{array} \right\} \end{array}$$

Die Zusammenfassung der ersten beiden Bijektionen hatten wir bereits in 6.3.12 als Kegelkonstruktion $Y \mapsto C(Y)$ eingeführt. Beim letzten Schritt verwenden wir, daß nach 6.4.3 und 6.4.2 unter unserer Bijektion 1.10.17 zwischen algebraischen Teilmengen von k^{n+1} und Radikalidealen die $k^\times$-invarianten Teilmengen genau den homogenen Radikalidealen entsprechen müssen. □

6.4.12 (**Projektive Vervollständigung ohne Koordinaten**). Für einen koordinatenfreien und dadurch hoffentlich anschaulicheren Zugang mag man wie in [LA2] **??** zu jedem affinen Raum E erst seine Linearisierung $\operatorname{Lin}(E)$ bilden und dann seine projektive Vervollständigung konstruieren als dessen Projektivisierung $\mathbb{V}E := \mathbb{P}\operatorname{Lin}(E)$ nebst der natürlichen Bijektion

$$E \sqcup \mathbb{P}\vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}E$$

Im endlichdimenionalen Fall über einem algebraisch abgeschlossenen Körper tragen alle diese Räume die Struktur algebraischer Varietäten, $E \hookrightarrow \mathbb{V}E$ ist eine offene Einbettung und $\mathbb{P}\vec{E} \hookrightarrow \mathbb{V}E$ eine abgeschlossene Einbettung. Gegeben $X \mathrel{\not\Delta} E$ bedeutet das Bilden seines Abschlusses $\bar{X} \subset \mathbb{V}E$ anschaulich, daß wir „alle Richtungen aus $\mathbb{P}\vec{E}$ mit hinzunehmen, in die X ins Unendliche entweicht“. Bei der Parabel $x^2 = y$ in der Ebene k^2 wäre das etwa die Richtung der y-Achse und bei der Hyperbel $xy = 1$ die Richtungen beider Koordinatenachsen.

Übungen

Übung 6.4.13. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben $W \subset \mathbb{P}^n k$ ist $\mathcal{Z}^*(\mathcal{I}^*(W)) = \bar{W}$ der Abschluß von W in der Zariski-Topologie. Für beliebige Teilmengen $I \subset \mathcal{I}(0)$, die aus homogenen Elementen bestehen, sowie für beliebige homogene Ideale $I \subset \mathcal{I}(0)$ ist $\mathcal{I}^*(\mathcal{Z}^*(I)) = \sqrt{\langle I \rangle}$ das Radikal des von I erzeugten Ideals.

Übung 6.4.14. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben $I \subset k[T_0, \dots, T_n]$ ein homogenes Ideal mit nichtleerer projektiver Nullstellenmenge $\mathcal{Z}^*(I) \neq \emptyset$ alias unendlicher Kodimension ist die Hilbertdimension des Restklassenrings genau um Eins größer als die Krulldimension der projektiven Nullstellenmenge, in Formeln

$$\operatorname{hdim}(k[T_0, \dots, T_n]/I) = \operatorname{kdim} \mathcal{Z}^*(I) + 1$$

Hinweis: Hauptsatz 5.5.13 zur Dimension lokaler noetherscher Kringe.

Übung 6.4.15. Man zeige: Das Komplement einer nichtleeren Hyperfläche im projektiven Raum ist stets eine affine Varietät.

Übung 6.4.16 (**Homogenisierung und Dehomogenisierung**). $(k = \bar{k})$. Wir betrachten die Einbettung $i_0 : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ gegeben durch das Hinzufügen einer ersten Koordinate Eins und den Übergang zur davon erzeugten Geraden $(x_1, \dots, x_n) \mapsto$

$\langle 1, x_1, \ldots, x_n \rangle$. Wir betrachten weiter den Ringhomomorphismus $a_0 : k[T_0, \ldots, T_n] \to k[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben durch $T_0 \mapsto 1$. Man zeige, daß für $W \subset \mathbb{P}^n k$ das Verschwindungsideal seines Schnitts mit $k^n \subset \mathbb{P}^n k$ beschrieben werden kann durch die Formel

$$\mathcal{I}(i_0^{-1}(W)) = a_0(\mathcal{I}^*(W))$$

Sei die **Homogenisierung** $h_0(f) \in k[T_0, \ldots, T_n]$ von $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ erklärt durch die Vorschrift $h_0(0) = 0$ und auf von Null verschiedenen Polynomen durch $h_0(\sum c_\alpha T^\alpha) = \sum c_\alpha T^\alpha T_0^{d-|\alpha|}$ für $d = \sup\{|\alpha| \mid c_\alpha \neq 0\}$ der Totalgrad. Zum Beispiel ist

$$h_z(X^2Y + Y^3 + 4Y^2X^3) = Z^2X^2Y + Z^2Y^3 + 4Y^2X^3$$

wenn wir bei den wenigen Variablen statt (T_0, T_1, T_2) der Übersichtlichkeit halber (Z, Y, X) schreiben und die Homogenisierung statt h_0 lieber h_z notieren, da sie ja „durch die zusätzliche Variable Z“ geschieht und nicht „durch die zusätzliche Variable T_0“. Man zeige, daß für $Y \subset k^n$ das homogene Verschwindungsideal seines Bildes in $\mathbb{P}^n k$ beschrieben werden kann durch die Formel

$$\mathcal{I}^*(i_0(Y)) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Das homogene Ideal mit} \\ \text{den homogenen Elementen} \\ T_0^n h_0(f) \text{ für } n \geq 0,\ f \in \mathcal{I}(Y) \end{array} \right\}$$

Weiter zeige man für $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ eine aus homogenen Polynomen bestehende Teilmenge die Identität

$$\mathcal{Z}(a_0(I)) = i_0^{-1}(\mathcal{Z}^*(I))$$

und für $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ eine beliebige Teilmenge die Identität

$$\mathcal{Z}^*(h_0(J)) = \overline{i_0(\mathcal{Z}(J))}$$

Übung 6.4.17. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Matrizen $M \in \mathrm{Mat}(3; k)$ vom Rang ≤ 1 eine irreduzible algebraische Teilmenge des k^9 der Dimension 5 bilden und bestimme Erzeuger ihres Verschwindungsideals. Hinweis: 5.6.21.

6.5 Satz von Bézout

Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

6.5.1 (**Vielfachheit gemeinsamer Nullstellen zweier Polynome**). Gegeben teilerfremde Polynome $f, g \in k[T_1, T_2]$ mit einer gemeinsamen Nullstelle bei $x \in k^2 =: X$ erklären wir die **Vielfachheit unserer gemeinsamen Nullstelle** als die Dimension

$$i_x(f, g) := \dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/\langle f, g \rangle)$$

Diese Dimension ist stets endlich. Ich gebe dafür zwei Argumente. Da f kein Nullteiler ist, hat jedes Primideal über f nach 3.2.8 mindestens die Höhe Eins, und da g kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}/\langle f\rangle$ ist, hat jedes Primideal über $\mathcal{O}_{X,x}/\langle f,g\rangle$ mindestens die Höhe Zwei. Folglich ist dieser Quotient ein Kring der Krulldimension Null und damit von endlicher Länge, die in diesem Fall mit seiner Dimension als k-Vektorraum übereinstimmen muß. Alternative: $k[T_1,T_2]/\langle f,g\rangle$ ist endlichdimensional als k-Vektorraum nach 1.10.22, da unsere beiden Polynome höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen besitzen nach [AL] 2.9.2. Seine Lokalisierung ist dann auch endlichdimensional als k-Vektorraum nach 3.1.29. Insbesondere ist also unsere Vielfachheit stets endlich. Die Vielfachheit ist nun Eins genau dann, wenn $\bar{f}$ und $\bar{g}$ bereits $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ erzeugen, denn dann erzeugen sie nach Nakayama bereits ganz $\mathfrak{m}_x$. In wieder anderen Worten bedeutet diese Bedingung, daß die Gradienten von f und g bei x linear unabhängig sind.

6.5.2 (**Vielfachheit von Schnittpunkten zweier ebener Kurven**). Gegeben zwei verschiedene irreduzible eindimensionale Untervarietäten $C,D \subsetneq\!\!\!\!\!{\scriptstyle\mathrm{A}}\; k^2 =: X$ und ein Punkt ihres Schnitts $x \in C\cap D$ erklären wir die **Vielfachheit des Schnittpunkts** als die Zahl

$$i_x(C,D) := \dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/(\mathcal{I}(C)_x + \mathcal{I}(D)_x))$$

Im Fall $\mathcal{I}(C) = \langle f\rangle$ und $\mathcal{I}(D) = \langle g\rangle$ finden wir damit $i_x(C,D) = i_x(f,g)$. Im Fall $x \notin C\cap D$ vereinbaren wir $i_x(C,D) = 0$. Dieselbe Definition für die Vielfachheit des Schnittpunkts vereinbaren wir im Fall zweier verschiedener irreduzibler eindimensionale Untervarietäten $C,D \subsetneq\!\!\!\!\!{\scriptstyle\mathrm{A}}\; \mathbb{P}^2 k$ der projektiven Ebene. In diesem Fall ist dann $\mathcal{I}(C)_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ zu verstehen als das Ideal aller Funktionskeime bei x, die einen Repräsentanten (U,f) besitzen, der auf $U\cap C$ verschwindet.

6.5.3 (**Anschauung für Schnittpunkte im Unendlichen**). Zwei ebene Kurven, die „in derselben Richtung nach unendlich gehen“, haben in dieser Richtung einen Schnittpunkt im Unendlichen. Zum Beispiel schneiden sich die Abschlüsse der Kurven $\mathcal{Z}(y-x^2)$ und $\mathcal{Z}(x+1)$ in dem Punkt von $\mathbb{P}^2$, der durch die y-Achse repräsentiert wird.

Satz 6.5.4 (von Bézout über Schnitte ebener Kurven). *Zwei verschiedene irreduzible eindimensionale Untervarietäten $C,D \subsetneq\!\!\!\!\!{\scriptstyle\mathrm{A}}\; \mathbb{P}^2 k$ der projektiven Ebene haben mit Vielfachheiten gerechnet genau soviele Schnittpunkte, wie das Produkt ihrer Grade angibt, in Formeln*

$$\sum_{x\in C\cap D} i_x(C,D) = (\operatorname{grad} C)(\operatorname{grad} D)$$

6.5.5. Mehr zur Motivation und anschaulichen Bedeutung findet man in 6. Ich erinnere nocheinmal daran, daß wir für diesen Abschschnitt den Körper k als algebraisch abgeschlossen vereinbart hatten.

Beweis. Per definitionem sind C, D die projektiven Nullstellenmengen teilerfremder irreduzibler homogener Polynome $f, g \in k[T_0, T_1, T_2]$ der Grade c, d. Da es mir übersichtlicher scheint, schreibe ich von nun an statt $k[T_0, T_1, T_2]$ kürzer $\mathcal{O}(k^3)$. Nun ist f ein Nichtnullteiler in $\mathcal{O}(k^3)$ und g ein Nichtnullteiler in $\mathcal{O}(k^3)/\langle f\rangle$. Mit 5.4.8 folgt erst $\operatorname{hdim} \mathcal{O}(k^3)/\langle f\rangle = 2$ sowie $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\langle f\rangle = c$ und dann $\operatorname{hdim} \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle = 1$ sowie $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle = cd$. Weiter hat unser Quotient $Q := \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle$ nach Übung 5.2.22 eine Filtrierung

$$0 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m = Q$$

durch homogene Ideale, bei der sämtliche Subquotienten Q_a/Q_{a-1} isomorph sind zu Quotienten $\mathcal{O}(k^3)/\mathfrak{p}_a$ nach jeweils einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}_a$. In unserem Fall kommen aus Gründen der Hilbertdimension für die homogenen Primideale $\mathfrak{p}_a$ nur die Verschwindungsideale von Ursprungsgeraden $\mathcal{I}^*(x)$ für $x \in \mathbb{P}^2 k$ sowie das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(0)$ des Ursprungs in Betracht. Nun gilt sicher $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\mathcal{I}^*(x) = \operatorname{mult} \mathcal{O}^*(x) = 1$. Wegen der Additivität der Multiplizität 5.4.6.2 tritt in unserer Filtrierung von Q als Subquotient genau cd mal ein Quotient nach dem Verschwindungsideal einer Ursprungsgeraden auf, in Formeln

$$cd = \operatorname{card}\{a \mid \exists x \in \mathbb{P}^2 k \text{ mit } Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\}$$

Unser Satz folgt, sobald wir für alle $x \in \mathbb{P}^2 k$ die Identität

$$i_x(C, D) = \operatorname{card}\{a \mid Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\}$$

zeigen können. Dazu dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß x im Bild der offenen Einbettung $i_0 : k^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2 k$ gegeben durch $(x_1, x_2) \mapsto \langle 1, x_1, x_2\rangle$ liegt. Wir erklären nun für jeden Modul M über $\mathcal{O}(k^3)$ den $\mathcal{O}(k^2)$-Modul

$$\bar{M} := M/(T_0 - 1)M$$

Ist M ein graduierter $\mathcal{O}(k^3)$-Modul, so ist die Multiplikation mit $(T_0 - 1)$ eine Injektion $(T_0 - 1) : M \hookrightarrow M$, denn für jedes Element ungleich Null im Kern muß auch seine tiefste von Null verschiedene homogene Komponente verschwinden, und das geht ja nicht. Ist $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ eine kurze exakte Sequenz graduierter $\mathcal{O}(k^3)$-Moduln, so zeigt nun das Neunerlemma

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\
N \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Q \arrow[d, two heads] \\
\bar{N} \arrow[r] & \bar{M} \arrow[r] & \bar{Q}
\end{tikzcd}$$

mit der Multiplikation mit $(T_0 - 1)$ als oberer Vertikale, daß auch die Sequenz $\bar{N} \hookrightarrow \bar{M} \twoheadrightarrow \bar{Q}$ exakt ist. Zum Beispiel wird die durch die Zeilenmatrix (f, g) gegebene rechtsexakte Sequenz $\mathcal{O}(k^3)^2 \to \mathcal{O}(k^3) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle$ unter dem Bilden des Kokerns von $(T_0 - 1)$ wieder eine rechtsexakte Sequenz $\mathcal{O}(k^2)^2 \to \mathcal{O}(k^2) \to \mathcal{O}(k^2)/\langle f_0, g_0\rangle$ für $f_0, g_0 \in \mathcal{O}(k^2)$ die Polynome, die aus den homogenen Polynomen f, g durch Einsetzen von $T_0 = 1$ entstehen. Für unser $Q = \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle$ erhalten wir damit $\bar{Q} \cong \mathcal{O}(k^2)/\langle f_0, g_0\rangle$. Unsere Filtrierung von oben liefert weiter eine Filtrierung

$$0 = \bar{Q}_0 \subset \bar{Q}_1 \subset \ldots \subset \bar{Q}_m = \bar{Q}$$

von $\bar{Q} = \mathcal{O}(k^2)/\langle f_0, g_0\rangle$ mit Subquotienten $\bar{Q}_a/\bar{Q}_{a-1} \cong \overline{Q_a/Q_{a-1}}$. Lokalisieren wir jetzt noch an einer Stelle $y \in k^2$, kürzen $M_{\mathcal{I}(y)} =: M_{(y)}$ ab, und erinnern, daß Lokalisieren exakt ist, so erhalten wir für $\bar{Q}_{(y)} \cong \mathcal{O}(k^2)_{(y)}/\langle f_0, g_0\rangle_{(y)}$ eine Filtrierung mit Subquotienten $(\overline{Q_a/Q_{a-1}})_{(y)}$. Diese Subquotienten sind aber eindimensional für $Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(i_0(y))$ und Null sonst. Im Licht unserer Definition der Schnittmultiplizität zeigt das für $x = i_0(y)$ die gewünschte Identität

$$i_x(C, D) = \dim_k \mathcal{O}(k^2)_{(y)}/\langle f_0, g_0\rangle_{(y)} = \operatorname{card}\{a \mid Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\} \qquad \square$$

Übungen

Übung 6.5.6. Man bestimme die Schnittpunkte in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ der konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 2$ und ihre jeweiligen Vielfachheiten.

6.6 Rationale Morphismen und Funktionen

Bezeichne in diesem Abschnitt stets $k = \bar{k}$ einen algebaisch abgeschlossenen Körper.

Definition 6.6.1. Seien X, Y Varietäten über k. Ein **rationaler Morphismus** $f : X \dashrightarrow Y$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U) mit $U \Subset X$ offen dicht und $f_U : U \to Y$ einem Morphimus, unter der Äquivalenzrelation der Übereinstimmung auf einer offenen dichten Teilmenge im Schnitt der Definitionsbereiche. Eine **rationale Funktion** auf einer Varietät X ist ein rationaler Morphismus $X \dashrightarrow k$. Die Menge aller rationalen Funktionen auf X bildet in natürlicher Weise eine k-Kringalgebra, die wir notieren als

$$\mathcal{M}(X)$$

6.6.2 (**Diskussion der Terminologie**). Der Buchstabe $\mathcal{M}$ soll an den Begriff der „meromorphen" Funktionen erinnern, einem analogen Konzept aus der Funktionentheorie.

6.6.3. $(k = \bar{k})$. Sei X eine Varietät über k. Offensichtlich stimmen je zwei Repräsentanten (U, f_U) und (V, f_V) einer rationalen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ bereits auf $U \cap V$ überein. Jede rationale Funktion hat mithin einen eindeutig bestimmten **größten Repräsentanten**, der eben auf der Vereinigung der Definitionsbereiche aller Repräsentanten definiert ist. Der Definitionsbereich des größten Repräsentanten heißt der **Definitionsbereich unserer rationalen Funktion**.

6.6.4. Ist X eine irreduzible Varietät, so ist $\mathcal{M}(X)$ ein Körper, der **Körper der rationalen Funktionen auf** X, und für jede nichtleere offene affine Teilmenge $U \overset{\circ}{\subset} X$ ist die von der universellen Eigenschaft induzierte Abbildung ein Körperisomorphimus $\operatorname{Quot}(\mathcal{O}(U)) \overset{\sim}{\to} \mathcal{M}(X)$. In der Literatur ist in diesem Fall statt $\mathcal{M}(X)$ die Notation $k(X)$ üblich.

6.6.5 (**Transzendenzgrad als Krulldimension**). Gegeben eine irreduzible k-Varietät X stimmt die Krulldimension von X überein mit dem Transzendenzgrad über k des Körpers der rationalen Funktionen auf X, in Formeln

$$\operatorname{kdim} X = \operatorname{trgr}_k \mathcal{M}(X)$$

Das folgt unmittelbar aus dem affinen Fall 4.5.14, wenn wir beachten, daß die Krulldimension von X übereinstimmen muß mit der Krulldimension mindestens einer nichtleeren offenen affinen Teilmenge.

Definition 6.6.6. Zwei irreduzible k-Varietäten, deren Funktionenkörper als Körpererweiterungen von k isomorph sind, heißen **birational äquivalent**.

6.6.7. Gegeben irreduzible k-Varietäten X, Y und ein Körperisomorphismus $\mathcal{M}(X) \overset{\sim}{\to} \mathcal{M}(Y)$ über k gibt es nichtleere offene affine Teilmengen $U \overset{\circ}{\subset} X$ und $V \overset{\circ}{\subset} Y$ sowie einen Isomorphismus von k-Varietäten $V \overset{\sim}{\to} U$ derart, daß die zugehörigen Ringhomomorphismen unseren Körperisomorphismus ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathcal{O}(V) \arrow[d] \\
\mathcal{M}(X) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{M}(Y)
\end{tikzcd}$$

In der Tat dürfen wir X und Y affin annehmen. Bezeichne $A, B \subset \mathcal{M} := \mathcal{M}(Y)$ die Bilder von von $\mathcal{O}(X)$ und $\mathcal{O}(Y)$. Alle Lokalisierungen dieser Integritätsbereiche nach von Null verschiedenen Elementen identifizieren wir stillschweigend mit ihren Bildern in $\mathcal{M}$. Da B ringendlich ist über k, gibt es $f \in A\backslash 0$ mit $A[f^{-1}] \supset B$. Ebenso gibt es $g \in B\backslash 0$ mit $B[g^{-1}] \supset A$. Wir haben also $A[f^{-1}, g^{-1}] = B[f^{-1}, g^{-1}]$ und können $U = (X_f)_g$ und $V = (Y_g)_f$ nehmen.

Proposition 6.6.8. *Jede irreduzible k-Varietät ist birational äquivalent zu einer irreduziblen Hyperfläche, also zur Nullstellenmenge eines einzigen irreduziblen Polynoms in einem k^s.*

Beweis unter der Annahme $\operatorname{char} k = 0$. Sei X unsere Varietät. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei X affin. Wir setzen $\mathcal{O}(X) := A$. Sicher finden wir eine Noether-Normalisierung $k['x_1, \ldots, x_n] \subset A$, so daß also A ganz ist über diesem Polynomring. Gehen wir zu den Quotientenkörpern über, so erhalten wir eine endliche separable Erweiterung, und diese muß nach [AL] 3.10.9 ein primitives Element $r \in \operatorname{Quot} A$ besitzen. Der Ring $B := k[x_1, \ldots, x_n, r] \subset \operatorname{Quot} A$ hat also denselben Quotientenkörper wie A. Andererseits ist B ein Integritätsbereich und ein Quotient des Polynomrings in $n + 1$ Variablen von der Krulldimension n, mithin nach 4.4.17 der Quotient nach dem von einem irreduziblen Polynom erzeugten Hauptideal. □

Beweis im Allgemeinen. Sei X unsere Varietät und $\mathcal{M}(X)$ ihr Funktionenkörper. Da $\mathcal{M}(X)/k$ körperendlich ist und k vollkommen, gibt es nach [AAG] **??** algebraisch unabhängige $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{M}(X)$ derart, daß $\mathcal{M}(X)$ endlich separabel ist über $k(x_1, \ldots, x_n)$. Nun kann der Beweis wie zuvor zu Ende geführt werden. □

Definition 6.6.9. Eine Varietät X heißt **glatt an einer Stelle** $x \in X$ genau dann, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist im Sinne von 5.6.5.

Proposition 6.6.10. *Die glatten Stellen einer algebraischen Teilmenge $X \subset_{\mathcal{A}} k^n$ bilden stets eine offene dichte Teilmenge. Dasselbe gilt für die glatten Stellen einer beliebigen Varietät.*

6.6.11. Der Beweis basiert auf 6.6.8. Das Argument ist deshalb vorerst nur für $\operatorname{char} k = 0$ vollständig und benötigt im allgemeinen [AAG] **??**.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X \subset_{\mathcal{A}} k^n$ irreduzibel. Daß die Teilmenge der glatten Stellen offen ist, wissen wir schon aus Übung 5.6.18. Es bleibt zu zeigen, daß sie nicht leer ist. Nach 6.6.8 dürfen wir auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X die Nullstellenmenge eines einzigen irreduziblen Polynoms ist. Verschwinden alle partiellen Ableitungen unseres Polynoms auf ganz X, so müssen sie alle Null sein. Das ist jedoch unmöglich: In Charakteristik Null, da unser Polynom ja nicht konstant sein kann; In Charakteristik p, da unser Polynom dann, wenn es nicht konstant wäre, eine p-te Potenz eines anderen Polynoms sein müßte und wieder nicht irreduzibel sein könnte. □

6.6.12 (**Komplex-algebraische Mengen als verklebte Mannigfaltigkeiten**). Zusammen mit 5.6.18 liefert 6.6.10 induktiv, daß jede algebraische Teilmenge $X \subset_{\mathcal{A}} \mathbb{C}^n$ eine Folge von Zariski-abgeschlossenen Teilmengen

$$X = X_d \supset X_{d-1} \supset \ldots \supset X_0$$

besitzt derart, daß $X_i \backslash X_{i-1}$ jeweils eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ der reellen Dimension $2i$ im Sinne von [AN2] 3.4.2 ist: Wir können derartige Mengen induktiv finden, indem wir als X_{i-1} die Menge aller nicht regulären Stellen von X_i

vereinigt mit allen irreduziblen Komponenten von X_i einer Krulldimension $< i$ nehmen.

Übungen

Übung 6.6.13. Ist X eine beliebige Varietät, so ist für jede dichte offene affine Teilmenge $U \Subset X$ die von der universellen Eigenschaft induzierte Abbildung ein Ringisomorphimus $S^{-1}\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ für $S \subset \mathcal{O}(U)$ die Menge der Nichtnullteiler.

Übung 6.6.14. Ein Morphismus von Varietäten mit dichtem Bild heißt auch ein **dominanter Morphismus**. Man zeige: Gegeben irreduzible k-Varietäten X, Y und ein Körperhomomorphismus $\mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ über k gibt es nichtleere offene affine Teilmengen $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ sowie einen dominanten Morphismus von k-Varietäten $V \to U$ derart, daß die zugehörigen Ringhomomorphismen unseren Körperhomomorphismus ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(V) \arrow[d] \\
\mathcal{M}(X) \arrow[r] & \mathcal{M}(Y)
\end{tikzcd}$$

Übung 6.6.15 (**Definitionsbereiche und lokale Ringe**). $(k = \bar{k})$. Ist X eine irreduzible Varietät, so haben wir für jeden Punkt $x \in X$ eine natürliche Injektion $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$, die wir von nun an in Notation und Sprache oft als Einbettung einer Teilmenge betrachten werden. Man zeige: Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zum Definitionsbereich einer rationalen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, wenn f im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathcal{M}(X)$ liegt.

6.7 Produkte von Varietäten

Definition 6.7.1. Sei k ein Körper. Ein k-geringter Raum X heißt **gesättigt** genau dann, wenn für $U \Subset X$ offen und $f : U \to k$ regulär auch die Menge $\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ offen ist und $1/f$ darauf eine reguläre Funktion.

6.7.2 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff eines „gesättigten geringten Raums“ ist nicht allgemein gebräuchlich. Kempf [Kem93] bezeichnet solche Strukturen als „spaces with functions“. Der Begriff ist nur sinnvoll, wenn k ein Körper ist.

6.7.3. Nach 6.7.7 und 6.7.4 sind unsere Varietäten stets gesättigte k-geringte Räume.

6.7.4. Offensichtlich ist ein beliebiger Schnitt gesättigter Strukturen wieder gesättigt. Offensichtlich ist die finale Struktur zu irgendwelchen Abbildungen von gesättigten Strukturen in eine vorgegebene Menge auch selbst gesättigt.

Definition 6.7.5. Sei k ein Körper. Seien Y eine Menge, X_i beliebige k-geringte Räume indiziert durch $i \in I$, und $\psi_i : Y \to X_i$ Abbildungen. Die kleinste Struktur eines gesättigten k-geringten Raums auf Y, für die alle unsere ψ_i Morphismen werden, heißt die **gesättigte initiale Struktur auf** Y in Bezug auf unsere Familie von Abbildungen.

6.7.6. Der Schnitt aller gesättigten Strukturen auf Y, für die alle unsere ψ_i Morphismen sind, hat sicher auch diese Eigenschaft und ist folglich die kleinste Struktur mit dieser Eigenschaft. Das zeigt, daß solch eine kleinste Struktur tatsächlich existiert.

6.7.7. Die initiale Struktur zu einer Abbildung von einer Menge in eine gesättigte Struktur ist offensichtlich stets wieder gesättigt. Für die initiale Struktur in Bezug auf eine Familie von mehr als einer Abbildung gilt das jedoch im allgemeinen nicht mehr, wie schon das Beispiel der Produktstruktur auf k^2 bald zeigen wird.

Satz 6.7.8 (**Universelle Eigenschaft der gesättigten initialen Struktur**). *Sei k ein Körper und sei eine Familie $\psi_i : Y \to X_i$ von Abbildungen von einer Menge Y in k-geringte Räume X_i gegeben. Versehen wir Y mit der gesättigten initialen Struktur und ist Z ein gesättigter k-geringter Raum und $\varphi : Z \to Y$ eine Abbildung, so ist g ein Morphismus genau dann, wenn alle $\psi_i \circ \varphi : Z \to X_i$ Morphismen sind.*

Beweis. Mit φ sind natürlich auch alle $\psi_i \circ \varphi$ Morphismen. Sind umgekehrt alle $\psi_i \circ \varphi$ Morphismen, so ist die finale Struktur zu φ nach 6.7.4 auch eine gesättigte Struktur auf Y, für die alle ψ_i Morphismen sind. Folglich umfaßt die finale Struktur zu φ unsere gesättigte initiale Struktur, und damit ist φ ein Morphismus. □

Lemma 6.7.9 (**Produkt gesättigter k-geringter Räume**). *Sei k ein Körper. Gegeben gesättigte k-geringte Räume X und Y erhalten wir ein Produkt in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume, das sogenannte* **gesättigte Produkt** *von X und Y, indem wir auf der Produktmenge $X \times Y$ die gesättigte initiale Struktur zu den Projektionen auf X und Y betrachten.*

Beweis. Das ist mehr oder weniger tautologisch. □

6.7.10 (**Der k^n als gesättigtes Produkt**). Sei k ein Körper. Versehen wir k mit der kleinstmöglichen Struktur $(k, \mathcal{O}_k)$ eines gesättigten k-geringten Raums derart, daß die Identität $k \to k$ eine reguläre Funktion auf k ist, so erhalten wir genau unsere Struktur als k-geringter Raum auf k aus 6.1.6. Versehen wir k^n mit der Struktur eines gesättigten Produkts von einigen Kopien von $(k, \mathcal{O}_k)$, so erhalten wir genau unsere Struktur als k-geringter Raum auf k^n aus 6.1.6. In der Tat erkennt man leicht, daß die in 6.1.6 gegebene Struktur gesättigt ist und daß die Koordinaten in Bezug auf diese Struktur reguläre Funktionen sind. Umgekehrt müssen aber auch in unserer kleinstmöglichen gesättigten Struktur alle Polynomfunktionen regulär sein, dann alle Zariski-offenen Mengen offen und schließlich alle lokalen Quotienten von Polynomfunktionen regulär.

6.7.11 (**Transitivität gesättigter initialer Familien**). Seien k ein Körper und $h_i : X \to Y_i$ sowie $g_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Trägt X die gesättigte initiale Struktur für die h_i und tragen die Y_i die gesättigten initialen Strukturen für die g_{ji}, so trägt X auch die gesättigte initiale Struktur für die $g_{ji}h_i$. Trägt andererseits X die gesättigte initiale Struktur für die $g_{ji}h_i$, so trägt X auch die gesättigte initiale Struktur bezüglich der h_i.

Lemma 6.7.12. *Sei k ein Körper. Jedes gesättigte Produkt von initialen Morphismen gesättigter k-geringter Räume ist wieder initial.*

Beweis. Das folgt aus der Transitivität gesättigter initialer Familien 6.7.11: Seien genauer $\phi : X \to Y$ und $\psi : Z \to W$ unsere initialen Morphismen. Die Definition des Produktmorphismus $\phi \times \psi$ liefert $\mathrm{pr}_Z \circ(\phi \times \psi) = \phi \circ \mathrm{pr}_X$ und $\mathrm{pr}_W \circ(\phi \times \psi) = \psi \circ \mathrm{pr}_Y$. Die Definition des gesättigten Produkts $X \times Y$ liefert, daß die Projektionen pr_X, pr_Y dafür eine gesättigt initiale Familie bilden. Die Transitivität gesättigter initialer Familien 6.7.11 zeigt dann, daß auch $\phi \circ \mathrm{pr}_X$, $\psi \circ \mathrm{pr}_Y$ alias $\mathrm{pr}_Z \circ(\phi \times \psi)$, $\mathrm{pr}_W \circ(\phi \times \psi)$ dafür eine gesättigt initiale Familie bilden. Die zweite Aussage in 6.7.11 impliziert dann weiter, daß auch $\phi \times \psi$ eine gesättigte initiale Familie und mithin nach 6.7.7 initial ist. □

Satz 6.7.13 (Produkte von Varietäten).

1. *Die Kategorie der Varietäten hat endliche Produkte und diese stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume;*

2. *Das in der Kategorie der Varietäten gebildete Produkt von affinen Varietäten ist stets wieder affin.*

Beweis. Das Produkt in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume macht nach 6.7.12 aus je zwei Einbettungen eine Einbettung und macht nach 6.7.16 auch aus je zwei abgeschlossenen Einbettungen eine abgeschlossene Einbettung. Das zeigt, daß unter diesem gesättigten Produkt aus je zwei affinen Varietäten wieder eine affine Varietät wird. Nach 6.7.16 macht das gesättigte Produkt jedoch auch aus je zwei offenen Einbettungen eine offene Einbettung. Das zeigt, daß unter dem gesättigten Produkt aus je zwei Varietäten eine Varietät wird. □

6.7.14 (**Irreduzibilität von Produkten**). Das Produkt von zwei irreduziblen Varietäten ist stets wieder irreduzibel. Sei in der Tat $X \times Y = A \cup B$ Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} X_A & = & \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset A\} \\ X_B & = & \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset B\} \end{array}$$

und folgern $X = X_A \cup X_B$ aus der Irreduzibilität von Y. Da X irreduzibel ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X_A dicht in X annehmen. Für alle $y \in Y$ gilt nun $X_A \times \{y\} \subset A$ und wegen A abgeschlossen auch $X \times \{y\} \subset A$. Das zeigt $A = X \times Y$.

6.7.15 (**Morphismen in affine Varietäten**). Es bezeichne $T_j : k^m \to k$ die j-te Koordinate. Für jede Varietät, ja jeden gesättigten k-geringten Raum $(X, \mathcal{O})$ liefert das Zurückholen von Funktionen aufgrund der universellen Eigenschaft der Produktstruktur auf k^n eine Bijektion $\mathrm{Ger}_k(X, k^m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)^m$, $\varphi \mapsto (T_j \circ \varphi)_{j=1}^m$. Ist allgemeiner Y affin, so liefert der Übergang zu den globalen regulären Funktionen für jeden gesättigten k-geringten Raum X eine Bijektion

$$\mathrm{Ger}_k(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$$

Um das zu sehen, nehme man $Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^m$ an. Dann sind beide Seiten in natürlicher Bijektion zu

$$\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{O}(X)^m \mid f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}(Y)\}$$

wegen der Definition des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(Y)$ und der universellen Eigenschaft der induzierten Struktur und wegen der universellen Eigenschaft des Quotienten $k[T_1, \ldots, T_m]/\mathcal{I}(Y) \cong \mathcal{O}(Y)$.

Übungen

Übung 6.7.16. Seien k ein Körper und X,Y gesättigte k-geringte Räume. Sind $U \overset{\circ}{\subset} X$ sowie $V \overset{\circ}{\subset} Y$ offene Teilmengen, so ist auch $U \times V$ offen in $X \times Y$. Sind weiter $A \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ sowie $B \overset{\mathrm{A}}{\subset} Y$ abgeschlossene Teilmengen, so ist auch $A \times B$ abgeschlossen in $X \times Y$.

Übung 6.7.17 (**Rationale Funktionen auf Produkten**). Gegeben Varietäten X, Y gibt es genau eine Einbettung $\mathcal{M}(X) \otimes \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X \times Y)$, die für beliebige offene dichte affine Teilmengen $U \overset{\circ}{\subset} X$ und $V \overset{\circ}{\subset} Y$ den in 2.1.17 erklärten Isomorphismus $\mathcal{O}(U) \otimes \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U \times V)$ fortsetzt.

Übung 6.7.18 (**Lokale Ringe von Produkten**). Gegeben bepunktete Varietäten (X, x) und (Y, y) gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \to$

$\mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)}$, der für beliebige offene affine Umgebungen U von x und V von y den in 2.1.17 erklärten Isomorphismus $\mathcal{O}(U)\otimes\mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U\times V)$ fortsetzt. Genauer liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $S^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}\otimes\mathcal{O}_{Y,y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)}$ für S das Urbild von $k^\times$ unter $\mathcal{O}_{X,x}\otimes\mathcal{O}_{Y,y} \twoheadrightarrow k\otimes k \xrightarrow{\sim} k$.

Übung 6.7.19. Gegeben bepunktete irreduzible Varietäten (X,x) und (Y,y) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,x}\otimes\mathcal{O}_{Y,y} & \to & \mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(X)\otimes\mathcal{M}(Y) & \to & \mathcal{M}(X\times Y) \end{array}$$

mit den im vorhergehenden erklärten natürlichen Abbildungen.

Übung 6.7.20. Die Projektion von einem Produkt in der Kategorie der gesättigten geringten Räume auf einen der Faktoren ist stets offen.

Übung 6.7.21. Seien $m,n\geq 1$. Man zeige, daß die von der Abbildung $k^n\times k^m\to k^{mn}$ gegeben durch $(x_i,y_j)\mapsto(x_iy_j)$ induzierte Abbildung

$$\mathbb{P}^{n-1}k\times\mathbb{P}^{m-1}k\to\mathbb{P}^{nm-1}k$$

eine abgeschlossene Einbettung ist. Sie heißt die **Segre-Einbettung**. Man folgere, daß das Produkt von zwei projektiven Varietäten wieder eine projektive Varietät ist. Hinweis: Das Bild in k^{mn} ist die Nullstellenmenge der Gleichungen $z_{ij}z_{kl}=z_{il}z_{kj}$. Dann rechne man in Koordinaten 6.3.6. Alternativ mag man auch von 7.2.12 ausgehen.

Ergänzende Übung 6.7.22. Man zeige, daß für beliebige Varietäten X,Y die Abbildung $f\otimes g\mapsto f\boxtimes g$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)\otimes\mathcal{O}(Y)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(X\times Y)$$

induziert. Hinweis: Für affine Varietäten wissen wir das bereits aus 2.1.17. Als nächstes betrachte man den Fall, daß nur eine unserer Varietäten affin ist, und erinnere dazu die Exakheit des Tensorprodukts.

6.8 Separierte Varietäten

Sei in diesem Abschnitt $k=\bar{k}$ stets ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 6.8.1. Eine k-Varietät X heißt **separiert**, wenn die Diagonale im Produkt unserer Varietät mit sich selbst eine abgeschlossene Teilmenge ist, wenn also in Formeln gilt

$$\Delta(X)\not\sqsubset X\times X$$

6.8.2 (**Diskussion der Terminologie**). Bei den meisten Autoren meint der Begriff einer Varietät das, was wir eine *separierte* Varietät nennen. Bei manchen Autoren meint der Begriff der Varietät auch das, was wir eine *irreduzible separierte* Varietät nennen.

Beispiel 6.8.3 (**Eine Varietät, die nicht separiert ist**). Wir betrachten die „Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt" $X := k \sqcup \{\tilde{0}\}$ mit der finalen Struktur zu den beiden Abbildungen $\psi : k \hookrightarrow X$ und $\tilde{\psi} : k \hookrightarrow X$, die gegeben werden durch $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = x$ für $x \neq 0$ aber $\psi(0) = 0$, $\tilde{\psi}(0) = \tilde{0}$. Diese Varietät ist nicht separiert, denn die Punkte $(0, \tilde{0})$ und $(\tilde{0}, 0)$ aus $X \times X$ liegen beide im Abschluß der Diagonale. In der Tat ist das Urbild jeder offenen Umgebung von $(\tilde{0}, 0)$ unter $(\tilde{\psi}, \psi) : k \to X \times X$ eine offene Umgebung von $0 \in k$, folglich trifft jede offene Umgebung von $(\tilde{0}, 0)$ die Diagonale.

6.8.4 (**Implikationen der Separiertheit**). Zwei Morphismen $\phi, \psi : Y \to X$ von einer Varietät in eine separierte Varietät, die auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen, sind gleich. In der Tat, ist die Diagonale in $X \times X$ abgeschlossen, so auch ihr Urbild unter dem Morphismus $(\phi, \psi) : Y \to X \times X$.

6.8.5 (**Affine Varietäten sind separiert**). Da für affines X die globalen regulären Funktionen die Punkte trennen, können wir die Diagonale beschreiben als die simultane Nullstellenmenge der Funktionen $f \boxtimes 1 - 1 \boxtimes f$ für $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Folglich ist die Diagonale abgeschlossen in $X \times X$.

Satz 6.8.6 (Projektive Räume sind separiert). *Für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V ist der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}V$ separiert.*

Beweis. Wir erinnern aus dem Beweis von 6.3.4 für jede affine Hyperebene $H \subset V$, die den Ursprung vermeidet, die zugehörige offene Einbettung $i_H : H \to \mathbb{P}V$, $v \mapsto \langle v \rangle$ und die Linearform $\lambda_H : V \to k$, deren Niveaumenge zum Wert Eins gerade H ist. Gegeben eine weitere affine Hyperebene $E \subset V$, die den Ursprung vermeidet, besteht das Urbild der Diagonale unter dem Produkt $i_H \times i_E : H \times E \hookrightarrow \mathbb{P}V \times \mathbb{P}V$ aus allen (v, w) mit $\lambda_H(w) \neq 0$, $\lambda_H(w)^{-1} w = v$, $\lambda_E(v) \neq 0$ und $\lambda_E(v)^{-1} v = w$. Diese Bedingungen sind jedoch gleichbedeutend zu den beiden Bedingungen $w = \lambda_H(w) v$ und $v = \lambda_E(v) w$, die offensichtlich eine abgeschlossene Teilmenge von $H \times E$ definieren. Das zeigt, daß $\mathbb{P}V$ separiert ist. □

Proposition 6.8.7 (Produkte von separierten Varietäten). *Das Produkt von separierten Varietäten ist separiert.*

Beweis. Das folgt aus unserer Erkenntnis 6.7.16, daß in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume das Produkt abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen ist im Produkt besagter Räume. □

6.8.8. Im folgenden identifizieren wir im Fall einer irreduziblen Varietät Z alle lokalen Ringe und alle Ringe von regulären Funktionen auf nichtleeren offenen Teilmengen mit ihren Bildern in $\mathcal{M}(Z)$.

Lemma 6.8.9 (Lokale Ringe charakterisieren Punkte). *Sind x, y Punkte einer irreduziblen separierten Varietät X, so gilt $\mathcal{O}_{X,y} \subset \mathcal{O}_{X,x} \Rightarrow x = y$.*

Beweis. Wir zeigen das, indem wir die gegenteilige Annahme $x \neq y$ zum Widerspruch führen. In der Tat liefert Übung 6.7.18 unmittelbar $\mathcal{O}_{X\times X,(x,y)} \subset \mathcal{O}_{X\times X,(x,x)}$. Sind $U, V \Subset X$ offene affine Umgebungen von x, y, so trifft $U \times V$ nach Annahme die Diagonale Δ in einer abgeschlossenen Teilmenge und es gibt folglich $f \in \mathcal{O}(U \times V)$ mit $f(x, y) \neq 0$ aber $f(p, p) = 0$ für alle $p \in U \cap V$. Als rationale Funktion auf $X \times X$ ist f bei (x, y) und dann nach 6.6.15 notwendig auch bei (x, x) definiert, da es in den entsprechenden lokalen Ringen liegt, und muß an beiden Stellen denselben Wert annehmen. Nun verschwindet jedoch f auf einer offenen dichten Teilmenge der Diagonale und mithin auf dem Schnitt seines Definitionsbereichs mit der Diagonale. Wir landen so beim Widerspruch $0 \neq f(x, y) = f(x, x) = 0$. □

6.8.10. Seien X, Y Varietäten über k. Ist Y separiert, so stimmen nach 6.8.4 je zwei Repräsentanten (U, f_U) und (V, f_V) eines rationalen Morphismus $f : X \dashrightarrow Y$ bereits auf $U \cap V$ überein. Jeder rationale Morphismus in eine separierte Varietät hat mithin einen eindeutig bestimmten **größten Repräsentanten**, der eben auf der Vereinigung der Definitionsbereiche aller Repräsentanten definiert ist. Der Definitionsbereich des größten Repräsentanten heißt der **Definitionsbereich unseres rationalen Morphismus**.

6.8.11 (**Schnitte affiner offener Teilmengen**). In einer separierten Varietät X ist der Schnitt von je zwei offenen affinen Teilmengen U, V wieder affin. In der Tat ist $U \cap V$ isomorph zu $(U \times V) \cap \Delta_X$ und Δ_X ist abgeschlossen in $X \times X$ nach Annahme. Ist etwas allgemeiner $\varphi : V \to X$ ein Morphismus einer affinen Varietät V in eine separierte Varietät X und ist $U \Subset X$ offen affin, so ist auch $\varphi^{-1}(U)$ affin, denn es ist isomorph zum Urbild der Diagonale Δ_X unter $\varphi \times i : V \times U \to X \times X$ für $i : U \hookrightarrow X$ die Inklusion.

Übungen

Übung 6.8.12 (**Fixpunktmengen in separierten Varietäten**). Gegeben eine separierte Varietät X und ein Morphismus $\varphi : X \to X$ ist die Menge der Fixpunkte $X^\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) = x\}$ abgeschlossen. Die entsprechende Aussage für eine allgemeine Varietät ist falsch: Ist zum Beispiel Y eine nicht separierte Varietät und betrachten wir die Vertauschung der Einträge auf $X = Y \times Y$, so ist die Menge der Fixpunkte nicht abgeschlossen.

Übung 6.8.13. Der Graph eines Morphismus von einer beliebigen Varietät in eine separierte Varietät ist stets abgeschlossen.

Übung 6.8.14. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge einer separierten Varietät ist mit ihrer induzierten Struktur wieder separiert.

Übung 6.8.15. Ein Morphismus von Varietäten $X \to Y$ heißt **stabil abgeschlossen** oder **eigentlich** genau dann, wenn für jede Varietät Z der induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen ist. Man zeige, daß es ausreicht, diese Bedingung für Z affin zu prüfen. Man zeige, daß gegeben ein surjektiver eigentlicher Morphismus $X \twoheadrightarrow Y$ mit X separiert auch Y separiert sein muß.

6.8.16 (**Das Verkleben von Punkten erhält Separiertheit**). Eine Verklebung $X \twoheadrightarrow Y$ im Sinne von 6.2.26 ist eigentlich nach 6.2.25. Ist also X separiert, so ist nach 6.8.15 auch Y separiert.

6.9 Glatte projektive Kurven*

Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

6.9.1. Eine eindimensionale äquidimensionale k-Varietät heißt auch eine **Kurve**. Unter einer **projektiven Kurve** versteht man eine Kurve, für die eine abgeschlossene Einbettung in einen projektiven Raum existiert. Das Hauptziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 6.9.2 (Körper und ihre Kurven). *Das Bilden des Körpers der rationalen Funktionen liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Glatte irreduzible} \\ \textit{projektive Kurven über } k, \\ \textit{nichtkonstante Morphismen} \end{array} \right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Körperendliche} \\ \textit{Körpererweiterungen von } k \\ \textit{vom Transzendenzgrad Eins} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ X & \mapsto & \mathcal{M}(X) \end{array}$$

Ergänzung 6.9.3. Mir gefällt die alternative Formulierung noch besser, bei der links die Kategorie aller glatten irreduziblen separierten „vollständigen“ Kurven steht. Eine Varietät ist per definitionem „vollständig“ genau dann, wenn ihr Projektion auf einen Punkt eigentlich ist im Sinne von 6.8.15. Der Beweis bleibt im wesentlichen derselbe, man muß nur am Ende statt mit 6.9.11 mit [AAG] **??** arumentieren.

Beweis. Wir bezeichnen die Kategorie von Körpererweiterungen rechts mit $\mathcal{T}$. Wir bezeichnen die Kategorie aller glatten irreduziblen projektiven Kurven über k mit $\mathcal{PC}$ und die Kategorie aller glatten eindimensionalen irreduziblen Varietäten über k mit $\mathcal{C}$, jeweils mit nichtkonstanten Morphismen von Varietäten als Morphismen. Der Satz behauptet, daß der Funktor $\mathcal{M} : \mathcal{C} \to \mathcal{T}^{\mathrm{opp}}$ eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{M} : \mathcal{PC} \stackrel{\approx}{\to} \mathcal{T}^{\text{opp}}$ induziert. Um das zu zeigen, konstruieren wir einen quasiinversen Funktor C. Das geschieht in mehreren Schritten.

6.9.4 (**Konstruktion der Möchte-Gern-Kurve $C(K)$ als Menge**). Ich erinnere an den Begriff einer diskreten Bewertung 5.8.1 eines Körpers. Gegeben eine endlich erzeugte Körpererweiterung K/k vom Transzendenzgrad Eins betrachten wir die Menge

$$C = C(K) := \{v : K \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\} \mid v \text{ ist diskrete Bewertung}\}$$

Gegeben ein Homomorphismus $K \hookrightarrow L$ von endlich erzeugten Körpererweiterungn von k vom Transzendenzgrad Eins und eine diskrete Bewertung $v : L \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ gilt $v(K^\times) \neq 0$ nach 5.9.6. Folglich existieren eine wohlbestimmte diskrete Bewertung $w : K \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ und ein wohlbestimmtes $d \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $v|_K = dw$ und die Vorschrift $v \mapsto w$ liefert eine Abbildung $C(L) \to C(K)$. Man erkennt ohne weitere Schwierigkeiten, daß wir so einen Mengenfunktor konstruiert haben.

6.9.5 (**Konstruktion einer Transformation** $\text{can} : \text{Vergiß} \Rightarrow C \circ \mathcal{M}$). Bezeichne $\text{Vergiß} : \mathcal{C} \to \text{Ens}$ den offensichtlichen Funktor, der jeder Varietät die zugrundeliegende Menge zuordnet. Ist X eine irreduzible glatte eindimensionale Varietät über k, so erhalten wir nach 5.8.11 eine kanonische Abbildung $\text{can}_X : X \to C(\mathcal{M}(X))$, indem wir jedem Punkt $x \in X$ die durch die Null- bzw. Polstellenordnung bei x gegebene Bewertung $v_x : \mathcal{M}(X) \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ zuordnen. Es ist leicht zu sehen, daß diese kanonischen Abbildungen eine Transformation von Funktoren bilden.

6.9.6 (**Überdeckung von $C(K)$ durch Maximalspektren**). Wir zeigen, daß für jede Körpererweiterung $K \in \mathcal{T}$ und jede Bewertung $v \in C(K)$ ein Dedekindring $A \subset K$ von endlichem Typ über k mit $\text{Quot}\, A \stackrel{\sim}{\to} K$ existiert derart, daß v im Bild der kanonischen Abbildung $\text{can} : \text{Max}\, A \to C(K)$ liegt. Wir finden sicher $f \in K \backslash k$ mit $v(f) \geq 0$. Nach 5.8.7 gibt es auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine diskrete Bewertung, folglich haben wir $v(k^\times) = 0$. Der Bewertungsring $\mathfrak{o}_v$ unserer Bewertung v muß demnach $k[f]$ und dann auch seinen ganzen Abschluß $A \subset K$ umfassen. Der Quotientenkörper dieses ganzen Abschlusses muß nach 4.6.1 aber der ganze Abschluß des Quotientenkörpers von $k[f]$ sein und folglich mit K zusammenfallen, in Formeln $\text{Quot}\, A \stackrel{\sim}{\to} K$. Nach 5.10.9 ist A eine endlich erzeugte k-Ringalgebra, also noethersch, und nach 4.5.14 gilt $\text{kdim}\, A = \text{trgr}_k \text{Quot}\, A = 1$. Normal ist A nach Konstruktion eh, folglich ist A ein Dedekindring und unsere kanonische Abbildung ist nach 5.9.5 eine Inklusion

$$\text{can} : \text{Max}\, A \hookrightarrow C(K)$$

deren Bild aus allen Bewertungen v mit $v(f) \geq 0$ besteht. Wir folgern, daß es nur endlich viele Bewertungen v mit $v(f) > 0$ geben kann, denn wegen $f \neq 0$ gibt es nur endlich viele maximale Ideale in A über f alias Nullstellen von f auf $\operatorname{Max} A$. Insbesondere ist das Komplement des Bildes unserer Einbettung endlich, besteht es doch aus allen Bewertungen v mit $v(f) < 0$ alias $v(f^{-1}) > 0$.

6.9.7 (**Die Möchte-Gern-Kurve $C(K)$ als topologischer Raum**). Gegeben $K \in \mathcal{T}$ versehen wir $C(K)$ mit der koendlichen Topologie. Abgeschlossen sind also nur ganz $C(K)$ und seine endlichen Teilmengen. Für jedes $X \in \mathcal{C}$ ist dann $\operatorname{can} : X \to C(\mathcal{M}(X))$ stetig, denn diese Abbildung hat endliche Fasern, sie ist ja für X affin sogar eine Injektion nach 5.9.5. Ist weiter $K \hookrightarrow L$ ein Homomorphismus von Körpererweiterungen, so hat die induzierte Abbildung $C(L) \to C(K)$ endliche Fasern und ist mithin stetig: In der Tat gibt es für $v \in C(K)$ nach dem vorhergehenden Punkt einen Dedekindring $A \subset K$ von endlichem Typ über k mit v im Bild von $\operatorname{Max} A \hookrightarrow C(K)$. Der ganze Abschluß B von A in L ist dann nach 5.10.9 auch ein Dedekindring von endlichem Typ über k mit $\operatorname{Quot} B \xrightarrow{\sim} L$, und jede Bewertung von L, die auf A nichtnegativ ist, auch auf B nichtnegativ. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Max} B & \hookrightarrow & C(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Max} A & \hookrightarrow & C(K) \end{array}$$

induziert also die obere Horizontale Bijektionen zwischen der Faser über einem Punkt und der Faser über seinem Bild. Die Fasern links sind aber endlich nach 4.2.12.

6.9.8 (**Die Möchte-Gern-Kurve $C(K)$ als Varietät über k**). Gegeben $K \in \mathcal{T}$ und $v \in C = C(K)$ eine diskrete Bewertung und $K \supset \mathfrak{o}_v \supset \mathfrak{m}_v$ der zugehörige diskrete Bewertungsring mit seinem maximalem Ideal liefert nach 6.9.6 die Einbettung des Grundkörpers einen Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_v/\mathfrak{m}_v$. Gegeben $U \Subset C$ erklären wir nun den Teilring

$$\mathcal{O}_C(U) \subset \operatorname{Ens}(U, k)$$

als die Menge aller Abbildungen $f : U \to k$, für die ein $a \in K$ existiert derart, daß für alle $v \in U$ gilt $v(a) \geq 0$ und $f(v) \mapsto \bar{a}$ unter unserem Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_v/\mathfrak{m}_v$. Gegeben ein Dedekindring $A \subset K$ von endlichem Typ über k mit $\operatorname{Quot} A \xrightarrow{\sim} K$ und $\operatorname{Max} A \xrightarrow{\sim} U$ induziert dann das Zurückholen von Funktionen vermittels der kanonischen Einbettung

$$\operatorname{Max} A \xrightarrow{\sim} U \Subset C$$

einen Isomorphismus $\mathcal{O}_C(U) \xrightarrow{\sim} A$, wie man aus der Beschreibung 6.6.15 von Definitionsbereichen rationaler Funktionen in Termen lokaler Ringe folgern kann. Für $U \neq \emptyset$ kommt also jedes $f \in \mathcal{O}_C(U)$ von genau einem Element $a \in K$

her, und wir sehen so, daß die $O_C(U)$ unser C zu einem k-geringten Raums machen. Weiter sehen wir, daß unsere Einbettungen $\operatorname{Max} A \hookrightarrow C$ sogar offene Einbettungen von k-geringten Räumen sind, so daß C sogar eine Varietät über k ist. Das Diagramm am Ende von 6.9.7 zeigt, daß für jeden Homomorphismus von Körpererweiterungen $K \to L$ die induzierte Abbildung $C(L) \to C(K)$ ein Morphismus von k-geringten Räumen ist, und aus dem affinen Fall leitet man leicht ab, daß auch für alle $X \in \mathcal{C}$ unsere kanonische Abbildung ein Morphismus $\operatorname{can} : X \to C(\mathcal{M}(X))$ von k-geringten Räumen ist. Umgekehrt erhalten wir natürliche Isomorphismen $\mathcal{M}(C(K)) \xrightarrow{\sim} K$, indem wir für $U \circledsubseteq C(K)$ nichtleer jedem $f \in \mathcal{O}_C(U)$ das eindeutig bestimmte $a \in K$ zuordnen, von dem es herkommt.

6.9.9 (**Die Kurve $C(K)$ ist eine projektive k-Varietät**). Wir finden eine offene Überdeckung $C = C(K) = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ durch affine Kurven. Seien $\bar{Y}_i$ deren projektive Abschlüsse. Nach 6.9.11 läßt sich $Y_i \hookrightarrow \bar{Y}_i$ eindeutig zu $\bar{\varphi}_i : C \to \bar{Y}_i$ fortsetzen. Nun betrachte man

$$\bar{\varphi} : C \to \prod_{i=1}^n \bar{Y}_i$$

und setze $Y := \overline{\bar{\varphi}(C)}$. Wenn wir zeigen können, daß unser $\bar{\varphi}$ einen Isomorphismus $C \xrightarrow{\sim} Y$ induziert, sind wir fertig. Sicher ist Y irreduzibel und $\bar{\varphi}$ birational, induziert also einen Isomorphismus $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(C)$. Ich behaupte, daß dieser Isomorphismus für alle $x \in C$ Isomorphismen $\mathcal{O}_{Y,\bar{\varphi}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{C,x}$ induziert. In der Tat liegt x in einem der Y_i, und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "\bar{\varphi}"] & \\
Y_i \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_i"] \\
& \bar{Y}_i &
\end{tikzcd}$$

Da darin das Zurückholen längs aller Pfeile Injektionen auf den lokalen Ringen bei x induziert und das Zurückholen längs $Y_i \hookrightarrow \bar{Y}_i$ eine Bijektion, muß das Zurückholen längs aller Pfeile Bijektionen auf den lokalen Ringen bei x liefern. Jetzt zeigen wir, daß $\bar{\varphi}$ surjektiv ist. Jedes $y \in Y$ hat ja affine Umgebung $U \circledsubseteq Y$. Die Einbettung $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}(U)^{\sim}$ von $\mathcal{O}(U)$ in seinen ganzen Abschluß entspricht einer Surjektion $\operatorname{Max} \mathcal{O}(U)^{\sim} \twoheadrightarrow \operatorname{Max} \mathcal{O}(U)$, unter der unser $y \in Y$ ein Urbild haben muß. Wir sehen mit 5.9.5, daß es eine Bewertung $v \in C$ gibt mit $v(\mathcal{O}_{Y,y}) \subset [0, \infty]$. Wir hätten dann aber nach Konstruktion

$$\mathcal{O}_{Y,\bar{\varphi}(v)} \supset \mathcal{O}_{Y,y}$$

und daraus folgt $y = \bar{\varphi}(v)$: In der Tat folgt ja für je zwei Punkte p, q einer irreduziblen Varietät Y, die in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge liegen, aus $\mathcal{O}_{Y,p} \supset \mathcal{O}_{Y,q}$ bereits $p = q$. Da $\bar{\varphi}$ eh injektiv ist, muß $\bar{\varphi} : C \to Y$ bijektiv sein. Da aber $\bar{\varphi}$ Isomorphismen auf den lokalen Ringen induziert, und da ja stets gilt $\mathcal{O}(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$, muß damit $\bar{\varphi}$ schon ein Isomorphismus sein.

6.9.10 (**Für** $X \in \mathcal{PC}$ **haben wir** $\operatorname{can} : X \overset{\sim}{\to} C(\mathcal{M}(X))$). Es bleibt zu zeigen, daß für jede glatte projektive Kurve X die kanonische Abbildung einen Isomorphismus $X \overset{\sim}{\to} C(\mathcal{M}(X))$ liefert. Wir wissen bereits, daß für jede nichtleere offene affine Teilmenge $V \Subset X$ die kanonische Abbildung eine offene Einbettung $V \overset{\sim}{\to} U \Subset C(\mathcal{M}(X))$ liefert. Deren Inverse $U \overset{\sim}{\to} V$ läßt sich nun aber nach 6.9.11 auf genau eine Weise zu einem Morphismus $C(\mathcal{M}(X)) \to X$ fortsetzen, der dann offensichtlich invers sein muß zu unserer kanonischen Abbildung.

Bis auf die Aussage 6.9.11, deren Beweis gleich nachgeholt wird, beendet das den Beweis von Satz 6.9.2 über Körper und ihre Kurven. □

Satz 6.9.11 (Morphismen glatter Kurven in projektive Räume). *Sei X eine Kurve und $p \in X$ ein regulärer Punkt. So läßt sich jeder Morphismus $\varphi : X \backslash p \to \mathbb{P}^n k$ zu einem Morphismus $\bar{\varphi} : X \to \mathbb{P}^n k$ fortsetzen.*

6.9.12. Das gilt mit demselben Beweis genauso, wenn X eine eindimensionale äquidimensionale Varietät ist mit $\mathcal{O}_{X,p}$ regulär. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt hierbei ohne alle Voraussetzungen aus 6.8.4. Daß die Definitionslücke p ein regulärer Punkt von X ist, ist wesentlich für die Existenz: Sonst könnte man ja eine Kurve $C \subset \mathbb{P}^n k$ nehmen und X konstruieren, indem man zwei Punkte von C wie in 6.2.19 verklebt zu einem Punkt p von X. Dann kann das mit dem Fortsetzen natürlich nicht mehr funktionieren. In [AAG] **??** zeigen wir dieselbe Aussage allgemeiner für X eine „vollständige" Varietät.

Ergänzung 6.9.13. Für höherdimensionales X stimmt die analoge Aussage nicht mehr: Man betrachte etwa die Abbildung $\mathbb{C}^2 \backslash 0 \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ gegeben durch $v \mapsto (v, \langle v \rangle)$. Sie kann nicht über den Ursprung zu einem Morphismus $\mathbb{P}^2\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei X irreduzibel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß das Bild von φ in keiner der Hyperflächen $x_i = 0$ enthalten ist, für $0 \leq i \leq n$, da wir sonst mit Induktion über n argumentieren könnten. Die Funktionen $(x_i/x_j) \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}\{x_j \neq 0\})$ definieren also rationale Funktionen $\varphi_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ auf X. Setzen wir $v_p(\varphi_{i0}) = r_i$, so gilt $v_p(\varphi_{ij}) = r_i - r_j$ für alle i, j. Ist r_0 minimal unter den r_i, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, so gilt $v_p(\varphi_{i0}) \geq 0$ für alle i. Jetzt erklären wir $\bar{\varphi}(p)$ als den Punkt $\bar{\varphi}(p) = \langle \varphi_{00}(p), \ldots, \varphi_{n0}(p) \rangle$. Nach Konstruktion ist klar, daß diese Abbildung $\bar{\varphi} : X \to \mathbb{P}^n k$ ein Morphismus ist. □

Übungen

Übung 6.9.14. Man zeige, daß für jede glatte eindimensionale irreduzible Varietät X über k, in der Notation von eben also jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$, und jede endlich erzeugte Körpererweiterung K/k vom Transzendenzgrad Eins, in der Notation von eben also jedes Objekt $K \in \mathcal{T}$, das Bilden der rationalen Funktionen im Verein mit unserer kanonischen Bijektion $K \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(C(K))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Var}^{\mathrm{nc}}(X, C(K)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k(K, \mathcal{M}(X))$$

zwischen nichtkonstanten Morphismen und Morphismen von Körpererweiterungen induziert. In kategorientheoretischer Sprache ist der Funktor $\mathcal{M} : \mathcal{C} \to \mathcal{T}^{\mathrm{opp}}$ also „linksadjungiert“ zu unserem Funktor $C : \mathcal{T}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$.

Übung 6.9.15. Man zeige, daß für jede glatte eindimensionale irreduzible separierte Varietät X über k die natürliche Abbildung aus 6.9.5 eine offene Einbettung $\mathrm{can}_X : X \hookrightarrow C(\mathcal{M}(X))$ von Varietäten ist. Man nennt $C(\mathcal{M}(X))$ die **Komplettierung** oder **Vervollständigung von** X. Jede glatte eindimensionale irreduzible separierte Varietät X über k entsteht also aus ihrer Vervollständigung durch das Weglassen von endlich vielen Punkten.

7 Invariantentheorie*

7.1 Affinität von Varietäten und Morphismen

Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Proposition 7.1.1 (Affinitätskriterium). *Eine Varietät X ist eine affine Varietät genau dann, wenn es $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ gibt, die als Ideal ganz $\mathcal{O}(X)$ erzeugen und so, daß $\{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}$ jeweils eine affine Varietät ist.*

Beweis. Sei k unser algebraisch abgeschlossener Grundkörper. Ich behaupte zunächst, daß $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k. Seien dazu g_{ij} Erzeuger des k-Krings $\mathcal{O}(\{f_i \neq 0\})$. Für hinreichend großes n lassen sich alle $f_i^n g_{ij}$ nach 6.2.23 durch Null regulär auf X fortsetzen und ich behaupte genauer, daß diese Fortsetzungen zusammen mit den f_i ganz $\mathcal{O}(X)$ als k-Kring erzeugen. Sicher kann für jede Funktion $h \in \mathcal{O}(X)$ ihre Einschränkung auf $\{f_i \neq 0\}$ als Polynom in den g_{ij} dargestellt werden, und für hinreichend großes $m \geq 0$ kann damit auch $f_i^m h$ als Funktion auf ganz X dargestellt werden als Polynom in f_i mitsamt den durch Null fortgesetzten $f_i^n g_{ij}$. Da die f_i^m für beliebiges $m \geq 0$ als Ideal ganz $\mathcal{O}(X)$ erzeugen, folgt die Behauptung. Jetzt betrachten wir den Morphismus $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ nach 6.7.15, der jedem Punkt sein Verschwindungsideal zuordnet. Für alle $f \in \mathcal{O}(X)$ ist dann $X_f := \{f \neq 0\}$ das Urbild der offenen Teilmenge $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)_f)$. Ist speziell X_f affin, so zeigt unsere Identität $\mathcal{O}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X_f)$ aus 6.2.23, daß unser Morphismus $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ einen Isomorphismus $X_f \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Max} \mathcal{O}(X))_f$ induziert. Gibt es also $f_1, \ldots, f_r$ derart, daß die $\{f_i \neq 0\}$ affin sind und X überdecken, so folgt, daß unsere Abbildung bereits selbst ein Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ sein muß. □

Definition 7.1.2. Ein Morphismus von Varietäten heißt **affin** genau dann, wenn das Urbild jeder affinen offenen Teilmenge wieder affin ist.

7.1.3. Unsere Erkenntnis 6.8.11 besagt, in dieser Terminologie ausgedrückt, daß jeder Morphismus von einer affinen Varietät in eine separierte Varietät affin ist. Die Separiertheit ist hier wesentlich: Betrachten wir für die „nichtseparierte Ebene mit verdoppeltem Ursprung“ X die beiden offenen Einbettungen $k^2 \hookrightarrow X$, deren Bilder sie überdecken, so ist das Urbild unter der einen vom Bild der anderen nicht affin.

Übungen

Übung 7.1.4. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Man zeige: Ist Y affin und gibt es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen V_i mit affinen Urbildern $\varphi^{-1}(V_i)$, so ist auch X affin. Hinweis: 7.1.1.

Übung 7.1.5. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Besitzt Y eine Überdeckung durch offene affine Untervarietäten mit affinen Urbildern, so ist φ ein affiner Morphismus. Hinweis: In 7.1.4 haben Sie das für Y affin bereits gezeigt. Für den allgemeinen Fall nehme man 6.2.24 zu Hilfe.

Übung 7.1.6. Jede abgeschlossene Einbettung von Varietäten ist affin. Hinweis: 7.1.5.

7.2 Quotienten nach endlichen Gruppen

Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

7.2.1. Um mit Quotienten bequem arbeiten zu können, schien es mir wünschenswert, einige technische Eigenschaften mitzuführen. Gegeben eine Eigenschaft (E) von Morphismen von k-Varietäten heiße ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ **stabil (E)** oder ausführlicher **produktstabil (E)** genau dann, wenn für jede weitere k-Varietät Z auch der Morphismus $\varphi \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ die Eigenschaft (E) hat. Einen Morphismus nennen wir **offenfinal** genau dann, wenn er offen und final ist. Besonders oft werden wir mit Morphismen zu tun haben, die **stabil offenfinal** sind, also stabil offen und stabil final. Es ist leicht zu sehen, daß es in diesem Fall reicht, unsere Bedingung für Z affin zu prüfen: In der Tat sind die Eigenschaften „offen“ und „final“ nach 6.1.29 beide lokal in der Basis. Mir schien die Terminologie „stabil (E)“ bequem. Sie ist aber unüblich.

Beispiele 7.2.2. Die Projektion eines Produkts von Varietäten auf einen der Faktoren ist stabil offenfinal, wenn der andere Faktor nicht leer ist, vergleiche 6.7.20. Insbesondere ist der konstante Morphismus von einer beliebigen nichtleeren Varietät auf einen Punkt stabil offenfinal.

Definition 7.2.3. Gegeben $G \looparrowright X$ ein k-geringter Raum mit einer Operation einer Gruppe verstehen wir den **Bahnenraum** X/G stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich der kanonischen Abbildung $X \to X/G$.

Satz 7.2.4 (Quotienten nach endlichen Gruppen, affiner Fall). *Operiert eine endliche Gruppe G auf einer affinen Varietät X, so ist der Bahnenraum X/G auch eine affine Varietät und die kanonische Abbildung ist produktstabil offenfinal und eigentlich.*

Beweis. Wir wissen bereits aus 4.3.3, daß der Bahnenraum X/G mit den regulären Funktionen $\mathcal{O}(X/G) := \{f : X/G \to k \mid f \circ \mathrm{can} \in \mathcal{O}(X)\}$ zu einer naiven affinen Varietät wird. Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung zwischen den zugehörigen Varietäten final, ja sogar produktstabil offenfinal ist. Nach unseren Erkenntnissen 4.2.9 über die Geometrie ganzer Kringerweiterungen ist $\pi : X \to \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ abgeschlossen und man folgert leicht, daß $X/G \to \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$

sogar ein Homöomorphismus sein muß. Sicher induziert dieser Homöomorphismus auch einen Isomorphismus zwischen den jeweiligen Ringen von globalen regulären Funktionen. Um den Satz zu zeigen, müssen wir aber noch nachweisen, daß die finale Struktur auf X/G mit der initialen Struktur von $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ übereinstimmt. Nun, es reicht für jede offene Teilmenge $U \circledsubseteq \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ zu zeigen, daß gilt $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to k \mid f \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))\}$. Wir setzen $A := \mathcal{O}(X)$ und dürfen wir uns sicher auf offene Teilmengen der Gestalt $U = \{h \neq 0\}$ beschränken mit $h \in A^G$. Unsere Behauptung verwandelt sich so in die Behauptung, daß die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$(A^G)_h \stackrel{\sim}{\to} (A_h)^G$$

ist. Wir müssen in Worten also zeigen, daß die Invarianten im lokalisierten Ring mit der Lokalisierung des Invariantenrings übereinstimmen. Das war aber gerade Übung 3.1.23. Die Eigenschaft „produktstabil offenfinal“ folgt dann leicht aus dem in [LA2] 6.3.26 erwähnten kanonischen Isomorphismus $B \otimes_k (A^G) \stackrel{\sim}{\to} (B \otimes_k A)^G$ angewandt auf $B = \mathcal{O}(Z)$ für eine weitere affine Varietät Z und $A = \mathcal{O}(X)$. □

Korollar 7.2.5 (Quotienten nach endlichen Gruppen). *Operiert eine endliche Gruppe G auf einer Varietät X und besitzt X eine Überdeckung durch unter G stabile offene affine Untervarietäten, so ist der Bahnenraum X/G auch eine Varietät und die Quotientenabbildung ist produktstabil offenfinal, eigentlich und affin. Ist X separiert, so auch X/G.*

7.2.6. In der Terminologie 7.2.8 existiert unter den Annahmen des Korollars also der geometrische Quotient und ist produktstabil.

7.2.7 (**Quotienten nach endlichen Gruppen, quasiprojektiver Fall**). Für jede quasiprojektive Varietät mit einer Operation einer endlichen Gruppe ist unsere Bedingung aus 7.2.5 erfüllt und der Quotient existiert. In der Tat gibt es für jede endliche Teilmenge eines $\mathbb{P}^n$ mit $n \geq 1$ nach [AL] 3.10.1 eine Hyperebene, die unsere endliche Teilmenge nicht trifft. Wenden wir das auf eine Bahn an, so können wir uns in den Fall einer quasiaffinen Varietät retten. Nach 2.1.14 gibt es weiter für jede endliche Teilmenge einer quasiaffinen Varietät eine offene affine Teilmenge, die sie umfaßt. Insbesondere gilt das für jede Bahn. Nach 6.8.11 ist dann auch der Schnitt dieser offenen affinen Teilmengen affin und das Korollar 7.2.5 darf angewendet werden.

Beweis. Das einzige Problem ist der Beweis der letzten Aussage. Man kann sie aus 6.8.15 folgern. Will man den Begriff der Eigentlichkeit vermeiden, kann man auch bemerken, daß die Verknüpfung

$$X \times X \to X/G \times X \to X/G \times X/G$$

auch selbst stabil offenfinal und insbesondere offen ist, und da das Urbild der Diagonale unter dieser Verknüpfung offensichtlich abgeschlossen ist, muß auch die Diagonale in $X/G \times X/G$ abgeschlossen sein. □

Definition 7.2.8. $(k = \bar{k})$. Gegeben $G \looparrowright X$ eine separierte k-Varietät mit einer Operation einer Gruppe heißt ein Morphismus von Varietäten $X \to Y$ ein **geometrischer Quotient von** X **nach** G genau dann, wenn er die folgenden Eigenschaften hat:

1. Unser Morphismus ist konstant auf G-Bahnen;
2. Y ist eine separierte Varietät;
3. Der induzierte Morphismus ist ein Isomorpismus $X/G \xrightarrow{\sim} Y$ von unserem Bahnenraum mit Y, a priori in der Kategorie der k-geringten Räume, aber a posteriori dann auch in der Kategorie der Varietäten.

Wenn ich besonders betonen will, daß der Morphismus $X \to Y$ und nicht etwa nur die Varietät Y gemeint ist, spreche ich von einem **geometrischen Quotientenmorphismus**.

7.2.9. Ein geometrischer Quotient muß im allgemeinen nicht existieren. Wenn er existiert, ist er eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

7.2.10 (**Diskussion der Terminologie**). Man kann sich auf den Standpunkt stellen, daß der geometrische Quotient in der Kategorie der k-geringten Räume durchaus immer existiert und wir eigentlich nur fragen müßten, inwieweit er auch eine separierte Varietät ist. Ich wollte mich aber nicht so weit von der üblichen Terminologie entfernen.

Beispiele 7.2.11. Das einfachste Beispiel einer Situation, in der der geometrische Quotient nicht existiert, mag die Operation durch Multiplikation von $k^\times$ auf k sein. Seine Existenz ist jedoch bekannt in den folgenden Fällen:

1. Im Fall der Operation einer endlichen Gruppe G einer durch G-stabile offene affine Teilmengen überdeckten separierten Varietät 7.2.5;
2. Im Fall einer fixpunktfreien algebraischen $k^\times$-Operation auf einer affinen Varietät 7.3.3;
3. Im Fall der $k^\times$-Operation auf dem Komplement der Fixpunktmenge einer affinen Varietät mit einer kontrahierenden algebraischen $k^\times$-Operation 7.4.3;
4. Im Fall einer affinen algebraischen Gruppe und der Operation durch Rechtstranslation oder Linkstranslation einer abgeschlossenen Untergruppe [AAG] **??**.

5. Im Rahmen der sogenannten „geometrischen Invariantentheorie“ findet man noch viele weitere Beispiele im Fall der Operation einer „reduktiven affinen algebraischen Gruppe“ unter der zusätzlichen Annahme eines Grundkörpers der Charakteristik Null, vergleiche 7.5.19 und 7.6.1.

In allen diesen Fällen wissen wir sogar zusätzlich, daß für jede weitere separierte Varietät Y auch der Morphismus $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times X/G$ ein geometrischer Quotient ist. Ist diese zusätzliche Eigenschaft erfüllt, so nenne ich den geometrischen Quotienten $X \twoheadrightarrow X/G$ auch **stabil** oder genauer **produktstabil**.

Übungen

Übung 7.2.12. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß die induzierten Morphismen $\varphi^{-1}(V) \to V$ für alle $V \in \mathcal{V}$ stabil offenfinal sind, so ist auch φ selbst stabil offenfinal. Insbesondere ist für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V die Projektion $V \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}V$ stabil offenfinal, da sie ja lokal in der Basis der Projektion eines Produkts mit $k^\times$ auf einen der Faktoren entspricht. Allgemeiner ist für $X \not\subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ \mathbb{P}^n k$ die Projektion $C(X)\backslash 0 \to X$ stabil offenfinal.

Übung 7.2.13 (**Zariski-Topologie des Produkts affiner Varietäten mit $\mathbb{P}^n k$**). $(k = \bar{k})$. Gegeben eine affine Varietät X betrachten wir $X \times \mathbb{P}^n k$. Gegeben ein homogenes Ideal $I \subset \mathcal{O}(X)[T_0, \dots, T_n]$ ist seine Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \not\subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ X \times k^{n+1}$ stabil unter der Operation von $k^\times$ nach 6.4.6. Ihr Schnitt mit $X \times (k^{n+1}\backslash 0)$ ist nach 7.2.12 also das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von $X \times \mathbb{P}^n k$, die wir $\mathcal{Z}^*(I)$ oder ausführlicher $\mathcal{Z}^*_X(I)$ notieren. Man zeige, daß alle abgeschlossenen Teilmengen $Y \not\subset\!\!\!\!\!\!\triangle\ X \times \mathbb{P}^n k$ die Gestalt $Y = \mathcal{Z}^*_X(I)$ haben für ein homogenes Ideal I. Man zeige weiter, daß $\mathcal{Z}^*_X(I) = \emptyset$ genau dann gilt, wenn es ein r gibt derart, daß das homogene Ideal I alle T_i^r enthält.

Übung 7.2.14. $(k = \bar{k})$. Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V ist die durch die Wirkung induzierte Abbildung $\mathrm{GL}(V) \times \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ ein Morphismus von Varietäten. Hinweis: 7.2.12.

Übung 7.2.15. Der Morphismus der leeren Varietät zu einer beliebigen endlichen Varietät ist offenfinal, aber nicht stabil offenfinal. Jeder stabil offenfinale Morphismus ist surjektiv.

7.3 Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen

7.3.1. Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 7.3.2. Eine Operation von $k^\times$ auf einer k-Varietät X heißt **algebraisch** genau dann, wenn die zugehörige Abbildung $k^\times \times X \to X$ ein Morphismus ist.

Proposition 7.3.3 (Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen). *Sei X eine affine k-Varietät mit einer fixpunktfreien algebraischen Operation von $k^\times$. So gilt:*

1. *Der Bahnenraum $X/k^\times$ mit seiner finalen Struktur ist eine affine k-Varietät und die Quotientenabbildung $X \twoheadrightarrow X/k^\times$ ist stabil offenfinal;*

2. *Ist $Y \subset X$ eine abgeschlossene $k^\times$-stabile Teilmenge, so ist $Y/k^\times \hookrightarrow X/k^\times$ eine abgeschlossene Einbettung.*

7.3.4. In der Terminologie 7.2.8 existiert unter den Annahmen der Proposition also der geometrische Quotient und ist produktstabil.

7.3.5. Wenn wir diese Proposition einmal hinnehmen, so folgt sofort, daß der Rückzug vermittels der Projektion die regulären Funktionen auf dem Quotienten mit den $k^\times$-invarianten Funktionen auf X identifizieren muß, in Formeln

$$\mathcal{O}(X/k^\times) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)^{k^\times}$$

Insbesondere sollte also $\mathcal{O}(X)^{k^\times}$ auch ringendlich sein über k. Wir zeigen diese Aussage sogar in noch größerer Allgemeinheit, bevor wir dann im Anschluß an 7.3.10 den eigentlichen Beweis der Proposition führen. Wir beginnen mit einigen Umformulierungen.

Proposition 7.3.6 (Graduierungen und $k^\times$-Operationen). *Wir erhalten für jede affine k-Varietät X eine eineindeutige Entsprechung*

$$\{\textit{algebraische } k^\times\textit{-Operationen auf } X\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbb{Z}\textit{-Graduierungen auf } \mathcal{O}(X)\}$$

dadurch, daß wir der Ringalgebra $\mathcal{O}(X)$ die Graduierung $\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(X)^i$ durch die simultanen Eigenräume der $k^\times$-Operation geben, in Formeln durch die Teilräume $\mathcal{O}(X)^i := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(\mu x) = \mu^i f(x) \quad \forall x \in X, \mu \in k^\times\}$.

Beweis. Gegeben eine affine k-Varietät X und ein Morphismus $k^\times \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ liefert das Zurückholen globaler regulärer Funktionen zusammen mit 2.1.17 einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(k^\times \times X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k^\times) \otimes \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} k[T, T^{-1}] \otimes \mathcal{O}(X)$$

Haben wir $f \mapsto \sum T^i \otimes f_i$, so gilt per definitionem $f(\lambda x) = \sum \lambda^i f_i(x)$. Ist unser Morphismus eine Gruppenwirkung, so zeigt die von der Mitte aus zu entwickelnde Gleichungskette

$$\sum \lambda^i \mu^i f_i(x) = f((\lambda\mu)x) = f(\lambda(\mu x)) = \sum \lambda^i f_i(\mu x)$$

uns, daß bei festem x und μ das Laurentpolynom $\sum(\mu^i f_i(x) - f_i(\mu x))T^i$ unendlich viele Nullstellen hat und folglich alle seine Koeffizienten verschwinden müssen. Mithin gilt $f_i(\mu x) = \mu^i f_i(x)$ für alle μ und x alias $f_i \in \mathcal{O}(X)^i$. Nach Konstruktion gilt andererseits $f = \sum f_i$ und wir sehen, daß unsere $\mathcal{O}(X)^i$ ganz $\mathcal{O}(X)$ als Vektorraum erzeugen. Das Argument, daß die Summe der $\mathcal{O}(X)^i$ direkt ist, kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben. Das Argument, daß wir so die behauptete Bijektion erhalten, desgleichen. □

Lemma 7.3.7. *Ist R ein noetherscher $\mathbb{Z}$-graduierter Kring, so ist auch seine homogene Komponente R^0 vom Grad Null noethersch.*

Beweis. Für jedes Ideal $I \subset R^0$ gilt $I = \langle RI \rangle \cap R^0$. □

Lemma 7.3.8. *Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S^i$ ein nichtnegativ graduierter Kring. Ist S noethersch, so ist S ringendlich über S^0.*

Beweis. Sind x_ν homogene Erzeuger des Ideals $S^{>0} \subset S$, so zeigt eine Induktion über den Grad schnell, daß die x_ν auch S als S^0-Kring erzeugen. □

Übung 7.3.9. Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S^i$ ein nichtnegativ graduierter Kring. Ist S auch noch noethersch, so ist für jedes $d > 0$ auch der Teilring $\bigoplus_{i \geq 0} S^{di}$ ringendlich über S^0.

Lemma 7.3.10. *Sei K ein Körper. Ist $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter ringendlicher K-Kring, so ist auch A^0 ringendlich über K.*

Beweis. Wir wählen homogene Erzeuger $x_1, \dots x_n$ des K-Krings A und realisieren A als Quotienten des Polynomrings $S := K[X_1, \dots, X_n]$. Versehen wir diesen Ring mit der $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-Graduierung, in der die Erzeuger X_ν den Bigrad $(\mathrm{grad}(x_\nu), 1)$ haben, so ist der homogene Teil vom Grad Null in Bezug auf die erste Graduierung $S^{(0,*)}$ alias der $(\{0\} \times \mathbb{Z})$-Anteil unseres bigraduierten Rings noethersch nach 7.3.7. Damit ist er auch ringendlich über K nach 7.3.8. Nun induziert jedoch unsere Surjektion $S \twoheadrightarrow A$ eine Surjektion $S^{(0,*)} \twoheadrightarrow A^0$. So folgt, daß auch A^0 ringendlich ist über K. □

Beweis von Proposition 7.3.3. Um nun Proposition 7.3.3 über Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen zu zeigen, versehen wir $\mathcal{O}(X)$ mit seiner durch die $k^\times$-Operation induzierten Graduierung und wissen aus 7.3.10, daß $\mathcal{O}(X)^0$ ringendlich ist über k. Damit müssen wir im wesentlichen nur noch nachweisen, daß der von der Einbettung $\mathcal{O}(X)^0 \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ induzierte Morphismus $\pi : X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ genau die $k^\times$-Bahnen von X als Fasern hat und offen und final ist. Für den Nachweis, daß π sogar stabil offenfinal ist, dürfen wir dann Z affin annehmen und brauchen nur unsere Erkenntnisse für $\mathcal{O}(Z) \otimes \mathcal{O}(X)$ anzuwenden. Jedes Ideal in $\mathcal{O}(X)^0$ entsteht nun offensichtlich durch Herunterschneiden mit dem von ihm erzeugten Ideal von $\mathcal{O}(X)$. Damit entsteht auch jedes maximale Ideal von $\mathcal{O}(X)^0$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal von $\mathcal{O}(X)$, als da heißt, π ist surjektiv. Offensichtlich ist π auch konstant auf $k^\times$-Bahnen. Für eine $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge $Y \not\subset\!\!\!\!\!\! \bigtriangleup\ X$ ist weiter ihr Verschwindungideal $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{O}(X)$ ein homogenes Radikalideal, das $\mathcal{O}(X)^0$ notwendig in einem Radikalideal $\mathcal{I}(Y)^0$ schneidet. Jedes Ideal in $\mathcal{O}(X)^0$ entsteht nun aber wie gesagt durch Herunterschneiden mit einem Ideal von $\mathcal{O}(X)$, und insbesondere entsteht auch jedes maximale Ideal über $\mathcal{I}(Y)^0$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal über $\mathcal{I}(Y)$, als da heißt, die simultane Nullstellenmenge von $\mathcal{I}(Y)^0$ ist genau $\pi(Y)$. Das zeigt, daß $\pi(Y)$ abgeschlossen ist. Eine Teilmenge von $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ ist mithin genau dann abgeschlossen, wenn ihr Urbild unter π abgeschlossen ist. Folglich trägt $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ die Quotiententopologie, und π ist offen als Projektion auf einen Bahnenraum unter einer Gruppenwirkung. Nun beachten wir, daß nach 4.4.14 alle $k^\times$-Bahnen eine offene Teilmenge ihres Abschlusses umfassen, und da diese Abschlüsse höchstens eindimensional sind und unsere Operation nach Annahme fixpunktfrei ist, müssen alle Bahnen abgeschlossen sein. Gegeben verschiedene Bahnen $Y \neq Z$ gilt also $\mathcal{I}(Y) + \mathcal{I}(Z) = \mathcal{O}(X)$ und damit $\mathcal{I}(Y)^0 + \mathcal{I}(Z)^0 = \mathcal{O}(X)^0$ und folglich $\pi(Y) \neq \pi(Z)$. Die Fasern von π sind also genau die $k^\times$-Bahnen. Es bleibt nur zu zeigen, daß Funktionen auf offenen Teilmengen von $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ regulär sind genau dann, wenn sie unter Zurückholen auf X regulär werden. Für globale Funktionen ist das klar. Für Funktionen auf affinen offenen Mengen folgt es aus $(s^{-1}\mathcal{O}(X))^0 = s^{-1}(\mathcal{O}(X)^0)$ für alle $s \in \mathcal{O}(X)^0$, und damit ist klar, daß unser Morphismus final ist. Schließlich liefert unser Argument von oben für eine $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge $Y \not\subset\!\!\!\!\!\! \bigtriangleup\ X$ die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}(Y)^0 & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X)^0 & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\pi(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I}(Y) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

In diesem Diagramm meinen sind alle Vertikalen schlicht die Einbettungen der homogenen Komponenten vom Grad Null und das zeigt den behaupteten Isomorphismus $Y/k^\times \xrightarrow{\sim} \pi(Y)$. □

7.4 Varietäten zu graduierten Kringalgebren

7.4.1. Sei in diesem Abschnitt $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

7.4.2. Eine algebraische Operation $k^\times \times X \to X$ von $k^\times$ auf einer k-Varietät X nennen wir **kontrahierend** genau dann, wenn sie sich fortsetzen läßt zu einem Morphismus $k \times X \to X$. Das Bild $0X$ von $\{0\} \times X$ ist dann gerade die Fixpunktmenge unserer Operation, denn die Regel $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ für eine Operation muß aus Stetigkeitsgründen dann auch für beliebige $\lambda, \mu \in k$ gelten. Unsere Operation kontrahiert im allgemeinen nur auf eine Untervarietät und nicht notwendig auf einen Punkt.

Satz 7.4.3 (Varietäten zu nichtnegativ graduierten Kringalgebren). *Sei X eine affine k-Varietät mit einer kontrahierenden algebraischen Operation von $k^\times$ und sei $X^\circ \Subset X$ das Komplement der Fixpunktmenge. So gilt:*

1. *Mit seiner finalen Struktur ist $X^\circ/k^\times$ eine separierte k-Varietät;*
2. *Die Projektion $X^\circ \twoheadrightarrow X^\circ/k^\times$ ist stabil offenfinal;*
3. *Ist $Y \hookrightarrow X$ die Einbettung einer $k^\times$-stabilen abgeschlossenen Teilmenge, so ist $Y^\circ/k^\times \hookrightarrow X^\circ/k^\times$ eine abgeschlossene Einbettung.*

7.4.4. In der Terminologie 7.2.8 existiert unter den Annahmen des Satzes also der geometrische Quotient und ist produktstabil. Der Beweis wird mit 7.1.5 auch zeigen, daß die Projektion auf den Quotienten ein affiner Morphismus ist. Umgekehrt muß auch das Bild jeder offenen affinen $k^\times$-stabilen Teilmenge von X° nach 7.3.3 wieder affin sein.

7.4.5. Gegeben ein nichtnegativ $\mathbb{Z}$-graduierter affiner k-Kring A verwenden wir die Abkürzung

$$\mathrm{MProj}(A) := (\mathrm{Max}\, A)^\circ/k^\times$$

Ergänzung 7.4.6. Die Varietät der k-wertigen Punkte des Schemas $\mathrm{Proj}(A)$ von Grothendieck ist im Fall $A = \mathcal{O}(X)$ genau unsere Quotientenvarietät. Man kann mit etwas mehr Aufwand sogar zeigen, daß $X^\circ/k^\times$ im Fall eines einzigen Fixpunkts eine projektive Varietät ist.

Beispiel 7.4.7. Betrachten wir auf der Varietät $X = k^2$ die nichtkontrahierende $k^\times$-Operation durch $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$, so ist der Bahnenraum von $X^\circ = k^2 \backslash 0$ mit seiner finalen Struktur als k-geringter Raum genau unsere nicht-separierte Varietät „Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt“ aus 6.8.3. In unserer Terminologie 7.2.8 existiert der geometrische Quotient in diesem Fall nicht, da die Separiertheit des Quotienten nicht gegeben ist.

Beweis. Sei $A = \mathcal{O}(X)$ mit der nach 7.3.6 durch die $k^\times$-Operation gegebenen $\mathbb{Z}$-Graduierung versehen. Offensichtlich ist die Operation kontrahierend genau dann, wenn gilt $A^i = 0$ für $i < 0$, und wir haben dann $\mathcal{I}(0X) = A^{>0}$. Für jedes homogene $f \in A$ ist nun $X_f = X \backslash \mathcal{Z}(f)$ eine $k^\times$-stabile affine offene Teilmenge mit $A[f^{-1}]$ als Ring von regulären Funktionen, und für f homogen von positivem Grad gilt $X_f \subset X^\circ$. Nach 7.3.3 ist für f homogen von positivem Grad die durch das Herunterschneiden induzierte Abbildung

$$\mathrm{Max}(A[f^{-1}]) \to \mathrm{Max}(A[f^{-1}]^0)$$

stabil offenfinal mit den $k^\times$-Bahnen als Fasern. Die besagten offenen Teilmengen X_f überdecken aber X°. Das zeigt, daß $X^\circ/k^\times$ mit seiner finalen Struktur eine Varietät ist und daß die Projektion stabil offenfinal ist. Ebenso folgt aus 7.3.3 die Behauptung 3 über abgeschlossene Einbettungen. Wir müssen nur noch zeigen, daß unser Quotient separiert ist. Wir finden eine homogene Surjektion $A^0[Z_1, \dots, Z_n] \twoheadrightarrow A$ von einem Polynomring nach A mit den Z_ν homogen von Graden $d(\nu)$ und dürfen nach Teil 3 hinfort annehmen, daß A bereits selbst dieser Polynomring ist. Nun betrachten wir die ganze Ringerweiterung

$$A^0[Z_1, \dots, Z_n] \subset A^0[T_0, \dots, T_n]$$

mit den Z_ν homogen von Graden $d(\nu)$ und den T_ν homogen vom Grad Eins und der rechten Abbildung gegeben durch $Z_\nu \mapsto T_\nu^{d(\nu)}$. Die zugehörige Abbildung auf den Maximalspektra $Y \to X$ ist abgeschlossen und surjektiv mit endlichen Fasern und $k^\times$-äquivariant. Genauer sind die Fasern die Bahnen der Operation einer endlichen Gruppe W von Einheitswurzeln auf Y, die mit der Operation von $k^\times$ kommutiert. Unsere Abbildung induziert abgeschlossene Abbildung $Y \times Y \to X \times X$, und das Urbild von $X^\circ \times X^\circ$ ist offensichtlich $Y^\circ \times Y^\circ$. Nun sind im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y^\circ \times Y^\circ & \to & Y^\circ/k^\times \times Y^\circ/k^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^\circ \times X^\circ & \to & X^\circ/k^\times \times X^\circ/k^\times \end{array}$$

die Vertikalen surjektiv und die Horizontalen stabil offenfinal und insbesondere offen. Es reicht also zu zeigen, daß das Urbild der Diagonale unter der unteren Horizontale abgeschlossen ist. Da wir schon wissen, daß $Y^\circ/k^\times \cong 0X \times \mathbb{P}^n k$ separiert ist, ist das Urbild der Diagonale unter der oberen Horizontale schon mal abgeschlossen. Dasselbe gilt für seine Vereinigung mit allen seinen Bildern unter der W-Operation auf dem ersten Faktor. Dann aber ist das Bild dieser Vereinigung unter der linken Vertikale abgeschlossen, und das ist genau das Urbild der Diagonale unter der unteren Horizontale. □

7.4.8. Im Fall eines Polynomrings $A = k[T_1, \dots, T_n]$, der graduiert ist durch die Vorschrift $\operatorname{grad}(T_i) = w_i$ mit positiven natürlichen Zahlen $w_1, \dots, w_n$, heißt die zugehörige Quotientenvarietät ein **gewichteter projektiver Raum** und wird $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$ notiert.

Beispiel 7.4.9. Man prüft, daß der gewichtete projektive Raum $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ eine offene Überdeckung durch affine Untervarietäten $\mathbb{P}(1, 1, 2) = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ hat mit

$$\begin{aligned} U_0 &= \operatorname{Max} \mathbb{C}[y/x, z/x^2] \cong \mathbb{C}^2, \\ U_1 &= \operatorname{Max} \mathbb{C}[x/y, z/y^2] \cong \mathbb{C}^2, \\ U_2 &= \operatorname{Max} \mathbb{C}[x^2/z, xy/z, y^2/z] \text{ singulär.} \end{aligned}$$

Übungen

Ergänzende Übung 7.4.10. Gegeben über einem Körper K ein Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_r]$ mit Erzeugern der positiven Grade $0 < d_1 \leq \ldots \leq d_r$ gilt für die Dimensionen der homogenen Komponenten R^i im Körper der Laurentreihen $\mathbb{Q}((t))$ die Identität

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\dim_k R^i) t^i = \prod_{\nu=1}^{r} (1 - t^{d_\nu})^{-1}$$

Weiter zeige man, daß sowohl r als auch die Grade $d_1, \ldots, d_r$ der Erzeuger durch diese formale Potenzreihe bereits eindeutig festgelegt werden.

7.5 Invariantenringe und algebraische Quotienten

7.5.1. Bei Operationen allgemeinerer Gruppen liegen die Verhältnisse nicht so einfach wie beim Satz von Noether [KAG] 4.3.1. Grundlegend ist hier der gleich folgende Endlichkeitssatz von Hilbert 7.5.4.

Definition 7.5.2. Eine algebraische Gruppe heißt **linear reduktiv** genau dann, wenn jede rationale Darstellung unserer Gruppe im Sinne von [AAG] **??** vollständig reduzibel ist im Sinne von [NAS] 2.3.2, also die Summe ihrer irreduziblen Unterdarstellungen.

Beispiele 7.5.3. Nach [AAG] **??** sind diagonalisierbare Gruppen stets linear reduktiv, insbesondere also auch Tori. Nach dem Satz von Maschke [NAS] 2.3.1 sind endliche Gruppen einer zur Charakteristik teilerfremden Ordnung auch linear reduktiv, und nach [Lie] 2.7.9 gilt dasselbe in Charakteristik Null für alle reduktiven algebraischen Gruppen, insbesondere also für $\mathrm{GL}(n)$.

Satz 7.5.4 (Hilbert). $(k = \bar{k})$. *Ist A ein ringendlicher k-Kring mit einer rationalen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G, so ist auch der Invariantenring A^G ringendlich über k.*

Ergänzung 7.5.5. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch über einem beliebigen Grundkörper, sobald einmal alle darin auftauchenden Begriffe in dieser Allgemeinheit definiert sind.

Beweis. Die Projektion längs der isotypischen Zerlegung $A \twoheadrightarrow A^G$ ist sicher A^G-linear. Das gleich folgende Lemma 7.5.6 zeigt damit schon mal, daß der Invariantenring noethersch ist. Um zu zeigen, daß A^G sogar ringendlich ist über k, wählen wir einen endlichdimensionalen G-stabilen Teilraum $V \subset A$, der den k-Kring A erzeugt, und realisieren A als Quotienten der symmetrischen Algebra $S = S(V)$ nach einem geeigneten G-stabilen Ideal J. Unser S besitzt dann eine natürliche G-invariante Graduierung, und da S^G nach dem bereits Bewiesenen noethersch sein muß, ist S^G nach 7.3.8 ringendlich über k. Dasselbe gilt dann auch für S^G/J^G. Nun haben wir ja per definitionem $S/J \xrightarrow{\sim} A$. Aus der vollständigen Reduzibilität folgt dann $S^G/J^G \xrightarrow{\sim} (S/J)^G \xrightarrow{\sim} A^G$ und wir sind fertig. □

Lemma 7.5.6. *Ist ein injektiver Ringhomomorphismus $B \subset A$ eine spaltende Einbettung von B-Rechtsmoduln, so gilt für jedes Linksideal $I \subset B$ die Formel $I = B \cap \langle AI \rangle$. Ist insbesondere A linksnoethersch, so auch B.*

7.5.7. Hier und im folgenden meint $\langle\ \rangle$ das Erzeugnis als abelsche Gruppe und AI die Menge der Produkte von einem Element von A mit einem Element von I und $\langle AI \rangle$ folgerichtig die von diesen Produkten erzeugte additive Untergruppe von A.

Beweis. Nach Annahme existiert eine Zerlegung $A = B \oplus C$ von A als B-Rechtsmodul. Sie impliziert unmittelbar eine Zerlegung $\langle AI \rangle = I \oplus \langle CI \rangle$, und diese Zerlegung hinwiederum impliziert unmittelbar das Lemma. □

Definition 7.5.8. $(k = \bar{k})$. Sei $G \looparrowright X$ eine affine k-Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven Gruppe. Nach 7.5.4 können wir eine affine Varietät $X/\!\!/G$ unter X definieren durch $X/\!\!/G := \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ und die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Max}\mathcal{O}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & X/\!\!/G
\end{tikzcd}$$

Man nennt $X/\!\!/G$ den **algebraischen Quotienten** von X nach der Operation von G und den Morphismus $X \to X/\!\!/G$ den **Quotientenmorphismus**.

Satz 7.5.9 (**Geometrie algebraischer Quotienten**). $(k = \bar{k})$. *Sei $G \looparrowright X$ eine affine k-Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe. So gilt:*

1. *Der Morphismus $\pi : X \to X/\!\!/G$ ist konstant auf G-Bahnen, und jeder Morphismus von X in eine weitere Varietät, der konstant ist auf G-Bahnen, faktorisiert in eindeutiger Weise über π;*

2. *Gegeben G-stabile abgeschlossene Teilmengen von X stimmt das Bild in $X/\!\!/G$ ihres Schnittes überein mit dem Schnitt ihrer Bilder;*

3. *Gegeben eine G-stabile abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ ist ihr Bild eine abgeschlossene Teilmenge $\pi(Z) \subset X/\!\!/G$ und die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus $Z/\!\!/G \xrightarrow{\sim} \pi(Z)$;*

4. *Der Quotientenmorphismus ist stabil offenfinal und in jeder seiner Fasern liegt genau eine abgeschlossene G-Bahn;*

5. *Gegeben eine offene Teilmenge $U \Subset X/\!\!/G$ ist U affin genau dann, wenn $\pi^{-1}(U) \Subset X$ affin ist, und dann ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $\pi^{-1}(U)/\!\!/G \xrightarrow{\sim} U$.*

Definition 7.5.10. Gegeben $G \looparrowright X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe bezeichne

$$X/\!\!/G$$

die Menge der Äquivalenzklassen für die von der Relation $y \in \overline{Gx}$ erzeugte Äquivalenzrelation auf X. Ich nenne $X/\!\!/G$ den **Bahnschlußraum**. Ist X ein k-geringter Raum, so denken wir uns den Bahnschlußraum stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich der kanonischen Abbildung $X \to X/\!\!/G$ versehen.

7.5.11. Sei $G \looparrowright X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe. Liegt im Abschluß jeder G-Bahn genau eine abgeschlossene G-Bahn, so liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen der Menge der abgeschlossenen G-Bahnen in X und dem Bahnschlußraum $X/\!\!/G$.

7.5.12 (**Universelle Eigenschaft des Bahnschlußraums**). Ist $G \looparrowright X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe und Y ein topologischer Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, so faktorisiert jede auf G-Bahnen konstante stetige Abbildung $X \to Y$ in eindeutiger Weise über die kanonische Abbildung $X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$ auf den Bahnschlußraum. Dasselbe gilt analog auch für k-geringte Räume und insbesondere für den Fall einer k-Varietät Y.

Definition 7.5.13. $(k = \bar{k})$. Gegeben $G \looparrowright X$ eine separierte k-Varietät mit einer Operation einer Gruppe heißt ein Morphismus von Varietäten $X \to Y$ ein **guter Quotient von X nach G** oder auch ein **guter Quotientenmorphismus** genau dann, wenn er die folgenden Eigenschaften hat:

1. Unser Morphismus ist konstant auf G-Bahnen;

2. Gegeben eine Faser von Y ist von allen G-Bahnen in besagter Faser genau eine abgeschlossen;

3. Y ist eine separierte Varietät;

4. Der induzierte Morphismus ist ein Isomorpismus $X/\!\!/G \xrightarrow{\sim} Y$ von unserem Bahnschlußraum nach Y, a priori in der Kategorie der k-geringten Räume, aber a posteriori dann auch in der Kategorie der Varietäten.

7.5.14. Ein guter Quotient muß im allgemeinen nicht existieren. Wenn er existiert, ist er eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

7.5.15 (**Diskussion der Terminologie**). Insbesondere ist jeder geometrische Quotient auch ein guter Quotient. In manchen Quellen wird von einem guten Quotienten zusätzlich gefordert, daß der fragliche Morphismus $X \twoheadrightarrow Y$ affin sein soll. Ich will mich dieser Terminologie nicht anschließen, weil in ihr nicht so klar wäre, inwieweit geometrische Quotienten auch gute Quotienten zu sein hätten. Stattdessen mache ich diese Bedingung stets explizit und spreche dann von einem **affinen guten Quotientenmorphismus**.

7.5.16. Gegeben $G \looparrowright X$ eine separierte k-Varietät mit einer Operation einer Gruppe und ein guter Quotient $\pi : X \to Y$ ist für $U \Subset Y$ auch $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ ein guter Quotient. Der vorhergehende Satz 7.5.9 besagt unter anderem, daß der algebraische Quotient einer affinen Varietät nach einer linear reduktiven Gruppe ein guter Quotient ist.

Beweis. 3. Für eine G-stabile abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ ist sicher auch ihr Verschwindungideal $\mathcal{I}(Z) \subset \mathcal{O}(X)$ ein G-stabiles Ideal, das den Invariantenring in einem Radikalideal $\mathcal{I}(Z)^G \subset \mathcal{O}(X)^G$ schneidet. Jedes Ideal im Invariantenring entsteht nun aber nach 7.5.6 durch Herunterschneiden mit einem Ideal von $\mathcal{O}(X)$, und insbesondere entsteht auch jedes maximale Ideal über $\mathcal{I}(Z)^G$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal über $\mathcal{I}(Z)$, als da heißt, die simultane Nullstellenmenge von $\mathcal{I}(Z)^G$ ist genau $\pi(Z)$. Das zeigt, daß $\pi(Z)$ abgeschlossen ist, und liefert zusätzlich die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{I}(Z)^G & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X)^G & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\pi(Z)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{I}(Z) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Z)
\end{array}$$

In diesem Diagramm meinen die beiden linken Vertikalen schlicht die Einbettungen der Invarianten, und weil unter unseren Voraussetzungen das Bilden der Invarianten exakt ist, muß auch die letzte Vertikale einen Isomorphismus auf die Invarianten $\mathcal{O}(\pi(Z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Z)^G$ induzieren, also einen Isomorphismus von Varietäten $Z/\!\!/G \xrightarrow{\sim} \pi(Z)$.

2. Es reicht zu zeigen, daß für G-stabile Ideale von $\mathcal{O}(X)$ der Schnitt ihrer Summe mit dem Invariantenring übereinstimmt mit der Summe ihrer Schnitte, in Formeln

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) \cap \mathcal{O}(X)^G = \sum_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda \cap \mathcal{O}(X)^G)$$

Das gilt jedoch ganz allgemein für eine beliebige Familie von Unterdarstellungen einer vollständig reduziblen Darstellung oder noch allgemeiner für Untermoduln eines halbeinfachen Moduls, wenn man das Bilden der Invarianten verallgemeinert zum Bilden irgendeiner isotypischen Komponente.

4. Wenden wir 3 auf $Z = X$ an, so folgt die Surjektivität des Quotientenmorphismus. Weiter ist klar, daß unser Quotientenmorphismus auf Bahnen konstant ist. Ein Urbild ist in anderen Worten stets G-stabil, und eine Menge mit abgeschlossenem Urbild muß nach 3 selbst abgeschlossen sein. Somit trägt $X /\!\!/ G$ die Quotiententopologie. Es bleibt nur zu zeigen, daß Funktionen auf offenen Teilmengen von $X /\!\!/ G$ regulär sind genau dann, wenn sie unter Zurückholen auf X regulär werden. Für globale Funktionen ist das klar, denn für eine Funktion $f : X /\!\!/ G \to k$ mit $f \circ \pi \in \mathcal{O}(X)$ haben wir notwendig $f \circ \pi \in \mathcal{O}(X)^G$ und damit $f \in \mathcal{O}(X /\!\!/ G)$. Für Funktionen auf einer Basis der Topologie von $X /\!\!/ G$ folgt es aus $s^{-1}(\mathcal{O}(X)^G) \xrightarrow{\sim} (s^{-1}\mathcal{O}(X))^G$ für alle $s \in \mathcal{O}(X)^G$, was man aus $\ker(s\cdot) = \ker(s^2\cdot)$ oder auch aus 3.1.24 folgern mag. Damit ist klar, daß unser Morphismus eine Submersion ist. In jeder Faser liegt nun mindestens eine Bahn kleinstmöglicher Dimension, die notwendig abgeschlossen sein muß, da ja ihr Abschluß in derselben Faser enthalten ist und beim Bilden des Abschlusses nur Bahnen echt kleinerer Dimension hinzukommen können. Es kann aber auch nicht mehr als eine abgeschlossene Bahn in einer gegebenen Faser geben, da wir sonst einen Widerspruch zu 2 erhalten würden.

1. Daß unser Morphismus auf Bahnen konstant ist, sieht man leicht und wir haben es auch bereits verwendet. Ist andererseits ein Morphismus $X \to Y$ konstant auf Bahnen, so auch auf Bahnabschlüssen und damit auf den Fasern des Quotientenmorphismus. Da der Quotientenmorphismus aber nach Teil 4 final ist, folgt die Behauptung.

5. Hier bemerken wir zunächst, daß jeder Morphismus von affinen Varietäten affin ist, etwa nach 7.1.3. Also ist das Urbild jeder offenen affinen Untervarietät unter affin. Andererseits muß für jede offene Teilmenge U des Quotienten $\pi : \pi^{-1}(U) \twoheadrightarrow U$ einen Isomorphismus $\pi^{-1}(U) /\!\!/ G \xrightarrow{\sim} U$ des Bahnschlußraums mit U induzieren. Das zeigt, daß mit $\pi^{-1}(U)$ auch U affin ist. □

7.5.17. Sei G linear reduktiv. Jeder G-äquivariante Morphismus von affinen G-Varietäten $X \to Y$ induziert einen Morphismus $X /\!\!/ G \to Y /\!\!/ G$. Eine offene Einbettung muß dabei jedoch keineswegs eine offene Einbettung werden, etwa wenn wir das Komplement einer Ursprungsgerade in die Ebene einbetten und jeweils die Operation der multiplikativen Gruppe durch Streckungen betrachten.

Definition 7.5.18. $(k = \bar{k})$. Sei $G \looparrowright X$ eine affine k-Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe. Die Punkte mit abgeschlossener Bahn und endlicher Isotropiegruppe heißen **affin-stabil** oder auch einfach **stabil**. Die Menge aller stabilen Punkte notieren wir X^{s}.

Satz 7.5.19 (Stabile Punkte und geometrischer Quotient). $(k = \bar{k})$. *Sei $G \looparrowright X$ eine affine k-Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G. So bilden die stabilen Punkte eine offene G-stabile Teilmenge $X^{\mathrm{s}} \circledcirc X$ und der Rückzug des Morphismus $X \twoheadrightarrow X /\!\!/ G$ auf deren Bild ist ein affiner geometrischer Quotientenmorphismus*

$$X^{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{s}}/G$$

Beweis. Im Lichte unserer Erkenntnisse aus 7.5.9 zur Geometrie algebraischer Quotienten müssen wir nur noch zeigen, daß X^{s} offen ist. Nach [AAG] **??** ist die Menge X° aller Punkte mit endlicher Isotropiegruppe stets offen. Ihr Komplement $X \backslash X^{\circ}$ ist also abgeschlossen und hat als G-stabile abgeschlossene Teilmenge nach 7.5.9 auch abgeschlossenes Bild in $X /\!\!/ G$. Das Urbild dieses Bildes aber ist per definitionem genau die Menge aller instabilen Punkte, die damit auch abgeschlossen sein muß. In der Tat hat eine Bahn im Abschluß einer anderen stets kleinere Dimension und folglich höhere Dimension der Isotropiegruppen. □

7.5.20. Ich hätte gerne einen Bachelor-Kandidaten, der mir den vorhergehenden und den folgenden Abschnitt auf den Fall einer geometrisch reduktiven affinen algebraischen Gruppe umschreibt. Nach Haboush haben alle reduktiven algebraischen Gruppen diese Eigenschaft auch in positiver Charakteristik, und Argumente von Nagata zeigen dann die endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings und dergleichen, vergleiche auch die Appendix von Mumford-Fogarty.

7.6 Geometrische Invariantentheorie

7.6.1 (**Die allgemeine Quotientenkonstruktion**). Sei C eine affine Varietät mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G und einer damit kommutierenden kontrahierenden $k^{\times}$-Operation. Wir konstruieren dann von der obersten Zeile beginnend ein kommutatives Diagramm von separierten Varietäten

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & C/\!\!/G \\
C^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & \pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\kappa}"] & (C/\!\!/G)^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, "\beta"] \\
C^\circ/k^\times \arrow[d, equal] & \pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ/k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, equal] & (C/\!\!/G)^\circ/k^\times \arrow[d, equal] \\
X & X^{\mathrm{ss}} \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G \\
& X^{\mathrm{s}} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & X^{\mathrm{s}}/G \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Im folgenden will ich diese Konstruktion diskutieren und gleichzeitig die relevanten Eigenschaften der beteiligten Morphismen herleiten. Der obere Index $\circ$ meint in unserem Diagramm stets das Komplement der Fixpunktmenge einer Wirkung von $k^\times$. Alle Inklusionspfeile in unserem Diagramm sind offene Einbettungen. Üblicherweise geht man von einer Varietät X mit einer G-Operation aus und wählt eine **Linearisierung der G-Varietät X**. Dem entspricht bei uns die Wahl eines möglichen C. Unsere Konstruktion heißt dann der **GIT-Quotient**. Das Ziel ist die Konstruktion eines affinen guten Quotientenmorphismus $\alpha : X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$, der unter Rückzug auf eine geeignete offene Teilmenge sogar ein geometrischer Quotientenmorphismus $\alpha : X^{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{s}}/G$ wird. Jetzt diskutiere ich erst mal den Aufbau unseres Diagramms.

1. Der Morphismus $\tilde{\pi}$ entsteht durch Rückzug vom algebraischen Quotienten π aus 7.5.8. Dieser ist ein guter G-Quotient nach 7.5.16 und $k^\times$-äquivariant. Folglich auch $\tilde{\pi}$ ein guter G-Quotient und $k^\times$-äquivariant.

2. Die Morphismen κ und β sind nach 7.4.3 geometrische $k^\times$-Quotienten, und κ ist nach Konstruktion außerdem G-äquivariant.

3. Der Morphismus $\tilde{\kappa}$ erbt von κ die Eigenschaft, ein G-äquivarianter geometrischer $k^\times$-Quotient zu sein.

4. Der Morphismus α wird nun konstruiert mithilfe der universellen Eigenschaft des geometrischen $k^\times$-Quotienten $\tilde{\kappa}$.

Damit sind die oberen drei Zeilen unseres Diagramms konstruiert. Es gilt noch, die behaupteten Eigenschaften von α zu zeigen und die unterste Zeile zu konstruieren.

Der Morphismus α ist ein guter Quotient. Um das zu einzusehen, bezeichnen wir seinen Definitionsbereich mit X^{ss} und nennen dessen Elemente **semistabile Punkte**. Per Konstruktion ist α konstant auf G-Bahnen. Für $U \circeq X^{\mathrm{ss}}$ offen und G-stabil ist ist $\tilde{\kappa}^{-1}(U)$ offen und $(G \times k^{\times})$-stabil, also $\tilde{\pi}(\tilde{\kappa}^{-1}(U))$ offen und $k^{\times}$-stabil, also $\beta\tilde{\pi}(\tilde{\kappa}^{-1}(U)) = \alpha(U)$ offen. Mithin ist α final als Abbildung von topologischen Räumen. Sei weiter W offen im Wertebereich von α und $f : W \to k$ eine Funktion. Ist $f \circ \alpha$ regulär, so ist $f \circ \alpha\tilde{\kappa} = f \circ \beta\tilde{\pi}$ regulär und $(G \times k^{\times})$-invariant, also ist $f \circ \beta$ regulär und $k^{\times}$-invariant, also ist f regulär. Mithin ist α final als Morphismus k-geringter Räume. Bleibt zu zeigen, daß in jeder Faser von α genau eine in X^{ss} abgeschlossene G-Bahn liegt. Daß mindestens eine abgeschlossene Bahn in jeder Faser liegt, ist nach [AAG] **??** eh klar. Gäbe es zwei abgeschlossene Bahnen, so fänden wir jedoch auch zwei abgeschlossene Bahnen in Fasern von $\tilde{\pi}$ im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß $\tilde{\pi}$ ein guter Quotient ist. Also ist α in der Tat ein guter Quotient.

Der Morphismus α ist affin. Das ist leicht zu sehen: Gegeben W offen affin in seinem Wertebereich ist $\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha^{-1}(W)) = \tilde{\pi}^{-1}(\beta^{-1}(W))$ affin aufgrund der Affinität von π und von β nach 7.4.4, und damit ist $\alpha^{-1}(W)$ affin wieder nach 7.4.4.

Der induzierte geometrische Quotient auf den stabilen Punkten. Schließlich konstruieren und diskutieren wir noch die unterste Zeile unseres Diagramms. Wir erklären wir die Menge $X^{\mathrm{s}} \subset X^{\mathrm{ss}}$ der **stabilen Punkte** als die Teilmenge aller Punkte x mit endlicher Isotropiegruppe G_x, deren G-Bahn in X^{ss} abgeschlossen ist, in Formeln $Gx \not\Subset X^{\mathrm{ss}}$. Diese Menge ist offen als das Bild der Menge der unter $(G \times k^{\times})$ affin-stabilen Punkte unter $\bar{\kappa}$, da die fraglichen affin-stabilen Punkte ja nach 7.5.9 eine offene Teilmenge bilden, die sicher $k^{\times}$-stabil ist. Diese Menge ist natürlich auch G-stabil. Schließlich ist sie auch das Urbild ihres Bildes unter α, in Formeln $X^{\mathrm{s}} = \alpha^{-1}(\alpha(X^{\mathrm{s}}))$, da keine andere Bahn eine Bahn der Dimension $\operatorname{kdim} G$ in ihrem Abschluß haben kann. Damit induziert α in der Tat einen geometrischen Quotienten $\alpha : X^{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{s}}/G$.

Beispiel 7.6.2 (**Die Quotientenkonstruktion zu einer Darstellung**). Ist hier speziell $C = V$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G mit der kontrahierenden Operation von $k^{\times}$ aus der Operation der Skalare auf dem Vektorraum V, so spezialisiert der entsprechende

Teil dieses Diagramms zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] & V \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & V /\!\!/ G \\
V \backslash 0 \arrow[u, hook] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & V \backslash \pi^{-1}(\bar{0}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\kappa}"] & (V /\!\!/ G) \backslash \bar{0} \arrow[u, hook] \arrow[d, "\beta"] \\
\mathbb{P}(V) & (V \backslash \pi^{-1}(\bar{0}))/k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & ((V /\!\!/ G) \backslash \bar{0})/k^\times
\end{tikzcd}$$

Mit $\bar{0}$ ist dabei das Bild des Ursprungs $\bar{0} := \pi(0)$ gemeint. Sein Urbild $\pi^{-1}(\bar{0})$ heißt die **Nullfaser** und besteht aus allen Punkten $v \in V$, deren Bahnabschluß den Ursprung enthält, in Formeln $0 \in \overline{Gv}$.

Beispiel 7.6.3 (**Die Quotientenkonstruktion zu einem Gruppencharakter**). Sei $G \looparrowright X$ eine affine Varietät mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und sei $\theta : G \to k^\times$ ein Homomorphismus algebraischer Gruppen. Wir betrachten nun speziell $C := X \times k$ mit der G-Operation $g(x, \lambda) = (gx, \theta(g)\lambda)$ und der damit kommutierenden kontrahierenden $k^\times$-Operation durch Multiplikation auf dem zweiten Faktor. So haben wir $\mathcal{O}(C) = \mathcal{O}(X) \otimes k[T]$ und

$$\mathcal{O}(C)^G = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(X)^{G, n\theta} \boxtimes T^n$$

für $\mathcal{O}(X)^{G,n\theta} := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(g^{-1}x) = \theta(g)^n f(x)\ \forall x \in X, g \in G\}$. Setzen wir $X^{\theta\text{-ss}} := \{x \in X \mid \exists n > 0, f \in \mathcal{O}(X)^{G,n\theta} \text{ mit } f(x) \neq 0\}$, so spezialisiert der entsprechende Teil dieses Diagramms zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
X \times k \arrow[r, equal] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & C /\!\!/ G \\
X \times k^\times \arrow[u, hook] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & X^{\theta\text{-ss}} \times k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\kappa}"] & (C /\!\!/ G)^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, "\beta"] \\
X & X^{\theta\text{-ss}} \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & X /\!\!/^\theta G
\end{tikzcd}$$

Unten links haben wir dabei eine neue Notation eingeführt, diese Varietät $X /\!\!/^\theta G$ ist sowohl der gute Quotient nach G von $X^{\theta\text{-ss}}$ unter dem horizontalen Morphismus α als auch der geometrische Quotient nach $k^\times$ unter dem vertikalen Morphismus β. Die Menge $X^{\theta\text{-ss}} \Subset X$ heißt die Menge der **θ-semistabilen Punkte**. Gegeben $f \in \mathcal{O}(X)^{G,n\theta}$ mit $n > 0$ ist $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ das Urbild unter α einer offenen Teilmenge. Andererseits ist X_f affin, und der offensichtliche Morphismus ist folglich nach 7.5.16 eine offene Einbettung $X_f /\!\!/ G \hookrightarrow X /\!\!/^\theta G$.

Beispiel 7.6.4 (**Die Quotientenkonstruktion für $k^\times \circlearrowright k^{n+1}$**). Spezialisieren wir das vorhergehende Beispiel zu $X = k^{n+1}$ mit der offensichtlichen Operation von $G = k^\times$ und betrachten den Charakter $\theta : k^\times \to k^\times$, $t \mapsto t^m$, so ergibt sich

$$X/\!\!/^\theta G = \begin{cases} \mathbb{P}^n k & \text{für } m < 0; \\ \text{var} & \text{für } m = 0; \\ \emptyset & \text{für } m > 0. \end{cases}$$

Vorschau 7.6.5 (**Quotienten projektiver Varietäten**). Sei G linear reduktiv, X eine projektive G-Varietät und $L \to X$ ein G-äquivariantes amples Geradenbündel auf X. Man erkläre die Menge X^{ss} der **semistabilen Punkte von X in Bezug auf L** durch die Vorschrift

$$X^{\mathrm{ss}} = X^{\mathrm{ss}}(L) := \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es gibt einen } G\text{-invarianten globalen Schnitt} \\ s \text{ einer Tensorpotenz } L^{\otimes n} \text{ von } L \text{ für } n > 0, \text{ der} \\ \text{bei } x \text{ nicht verschwindet, in Formeln } s(x) \neq 0 \end{array} \right\}$$

So ist X^{ss} eine offene G-stabile Teilmenge von X und ihr Bahnschlußraum $X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ ist eine projektive Varietät und $X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ ist ein affiner Morphsmus und ein guter Quotient. Erklären wir schließlich die Menge $X^{\mathrm{s}} = X^{\mathrm{s}}(L) \subset X^{\mathrm{ss}}(L)$ der **stabilen Punkte** als die Teilmenge aller Punkte $x \in X^{\mathrm{ss}}$ mit endlicher Isotropiegruppe G_x, deren G-Bahn in X^{ss} abgeschlossen ist, so ist X^{s} offen mit $X^{\mathrm{s}} = \alpha^{-1}(\alpha(X^{\mathrm{s}}))$ und unser guter Quotient induziert einen geometrischen Quotienten

$$\alpha : X^{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{s}}/G$$

Das alles ist nur ein Spezialfall unserer Grundkonstruktion 7.6.1, ausgedrückt in einer etwas feineren Sprache. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nach **??** nämlich L sehr ampel annehmen. Der Raum V der globalen Schnitte von L ist dann nach **??** endlichdimensional und wir erhalten eine kanonische abgeschlossene G-äquivariante Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}V$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen also $X \subset\!\!\!\!\!\!\!\!\triangle \mathbb{P}V$ annehmen. Der Kegel über X im Sinne von 6.3.12 ist dann eine abgeschlossene Teilmenge $C = C(X) \subset\!\!\!\!\!\!\!\!\triangle V$ mit einer algebraischen Operation von G und einer damit kommutierenden kontrahierenden Operation von $k^\times$ so daß die offensichliche Abbildung einen G-äquivarianten Isomorphismus $C^\circ/k^\times \xrightarrow{\sim} X$ liefert, für C° das Komplement der Menge der $k^\times$-Fixpunkte. Schließlich besteht $\pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ$ nach Konstruktion genau aus allen Punkten von C, auf denen irgendeine G-invariante Funktion echt positiven Grades nicht verschwindet. Übersetzen wir diese Bedingung zurück in die Situation des Satzes, so ergibt sich die dort für X^{ss} gegebene Beschreibung. Weiter wird in der Situation unseres Satzes C von $k^\times$ sogar auf einen einzigen Punkt kontrahiert und $\mathcal{O}(C)$ ist folglich nichtnegativ graduiert mit nur Skalaren im Grad Null. Dasselbe folgt für $\mathcal{O}(C)^G = \mathcal{O}(C/\!\!/G)$ und zeigt, daß auch $C/\!\!/G$ von $k^\times$ auf einen einzigen Punkt kontrahiert wird. Dann aber ist $(C/\!\!/G)^\circ/k^\times = X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ projektiv nach 7.4.6.

Ergänzung 7.6.6. Verkleben wir bei der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1 k$ mit ihrer offensichtlichen $k^\times$-Operation die beiden Fixpunkte Nord- und Südpol im Sinne von 6.2.26, so erhalten wir nach 6.2.25 oder expliziter Rechnung wieder eine $k^\times$-Varietät Z. Ist V eine rationale Darstellung positiver endlicher Dimension von $k^\times$, so muß jeder $k^\times$-äquivariante Morpismus $Z \to \mathbb{P}V$ konstant sein, denn jede abgeschlossene $k^\times$-invariante Teilmenge $Y \not\subset\!\!\!\!\!\!\!\circ \ \mathbb{P}V$ positiver Dimension besitzt nach [AAG] **??** mindestens zwei $k^\times$-Fixpunkte. Weiter kann auch Z offensichtlich nicht durch offene affine unter $k^\times$ invariante Teilmengen überdeckt werden.

8 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich David Nies, Stefan Matting, Manuel Blickle, . . .

Literatur

[AAG] *Skriptum Affine Algebraische Gruppen; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[AN1] *Skriptum Analysis 1; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[AN2] *Skriptum Analysis 2; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[AN3] *Skriptum Analysis 3; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[Coh95] P. M. Cohn, *Skew fields*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 57, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Theory of general division rings.

[FT1] *Skriptum Funktionentheorie 1; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[GR] *Skriptum Grundlagen; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[JS06] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer, *Algebra*, Springer, 2006.

[KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[Kem93] George R. Kempf, *Algebraic varieties*, LMS Lecture Notes, vol. 172, Cambridge University Press, 1993.

[Kun80] Ernst Kunz, *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1980.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[Lie] *Skriptum Lie-Algebren; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

[TS] *Skriptum Singuläre Homologie; lädt man die pdf-Datei in denselben Ordner, dann sollten auch die externen Querverweise funktionieren. Am besten funktionieren sie aber immer noch in der Gesamtdatei Öffentliche Werkbank.*

Index