KOMMUTATIVE ALGEBRA UND GEOMETRIE

Wolfgang Soergel

15. Mai 2025

Inhaltsverzeichnis

Wichtige Grundlage für dieses Kapitel ist Abschnitt [AL] 2.1 aus der Algebra über Restklassenringe und Teilringe. Nach und nach wird dann immer mehr aus den anderen Abschnitten von [AL] 2 verwendet, insbesondere der Satz, daß Polynomringe über faktoriellen Ringen wieder faktoriell sind. Nach und nach wird auch die Begrifflichkeit topologischer Räume immer wichtiger: Zunächst genügen elementarste Kenntnisse, etwa im Umfang von [AN1] **??**, später verwenden wir auch weitergehende Konstruktionen im Umfang von [TM] 1.1.6. Grundbegriffe der Kategorientheorie im Umfang von [LA2] 9.1.1 sollten vorhanden sein oder im Rahmen dieser Vorlesung mit erlernt werden.

1 Endliches Erzeugen und Nullstellensatz

1.1 Formulierung des Hilbert'schen Nullstellensatzes

1.1.1. Ich erinnere daran, daß bei uns jeder Ring eine Eins hat und daß von jedem Ringhomomorphismus gefordert wird, daß er die Eins auf die Eins wirft. Ein Ideal eines Rings ist nach [AL] 2.1.9 eine Untergruppe seiner additiven Gruppe, die unter der Multiplikation mit beliebigen Elementen unseres Rings von links wie von rechts stabil ist. Einen kommutativen Ring nenne ich auch einen **Kring**.

1.1.2. Seien k ein Kring und $k[T_1, \ldots, T_n]$ der Polynomring über k in n Variablen. Das Auswerten liefert eine Abbildung

$$k[T_1, \ldots, T_n] \times k^n \to k$$

Definition 1.1.3. Gegeben ein Kring k und eine Teilmenge $E \subset k[T_1 \ldots, T_n]$ des Polynomrings in n Variablen mit Koeffizienten in k erklären wir die **Nullstellenmenge** oder kurz die **Nullstellen von** E als die Menge derjenigen Punkte des k^n, an denen alle Polynome aus E verschwinden. Wir notieren diese Menge

$$\mathcal{Z}(E) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in E\}$$

mit $\mathcal{Z}$ wie „zeroes". Im Fall $E = \{f_1, \ldots, f_r\}$ verwenden wir die abkürzende Notation $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$. Eine Teilmenge $Z \subset k^n$ heißt **algebraisch**, wenn sie die Nullstellenmenge eines Systems von Polynomen ist, wenn es also eine Teilmenge $E \subset k[T_1 \ldots, T_n]$ gibt mit $Z = \mathcal{Z}(E)$.

1.1.4 (**Diskussion der Notationen**). Eine andere in der Literatur gängige Notation für unser $\mathcal{Z}(E)$ ist $\mathrm{V}(E)$ mit V wie „Varietät". Wir verwenden jedoch die Bezeichnung als Varietät nur über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k und verwenden die Notation $\mathrm{V}(E)$ überhaupt nicht.

1.1.5. Im ersten Teil dieser Vorlesung geht es um die Untersuchung „geometrischer" Eigenschaften algebraischer Teilmengen von k^n für algebraisch abgeschlossene Körper k und die entsprechenden „algebraischen" Aussagen aus der Theorie der kommutativen Ringe. Den tragenden Pfeiler der Brücke zwischen der „geometrischen" und der „algebraischen" Welt bildet der folgende Satz, dessen Beweis mit den nötigen Vorbereitungen uns bis 1.7.11 beschäftigen wird.

Satz 1.1.6 (**Hilbert'scher Nullstellensatz**). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom in endlich vielen Variablen, das auf der Nullstellenmenge eines Ideals $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ verschwindet, so liegt eine Potenz unseres Polynoms bereits selbst in besagtem Ideal. In Formeln gilt also*

$$\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \;\Rightarrow\; f^N \in \mathfrak{a} \;\; \textit{für } N \gg 0$$

Beispiel 1.1.7. Die gemeinsame Nullstellenmenge von $x^2, z^3 \in k[x, y, z]$ ist die y-Achse. Das Polynom $f := (x + z)y$ verschwindet auf der y-Achse und wie vom Nullstellensatz vorhergesagt gehört eine Potenz von f zum Ideal $\langle x^2, z^3\rangle$, in unserem Fall etwa die vierte Potenz

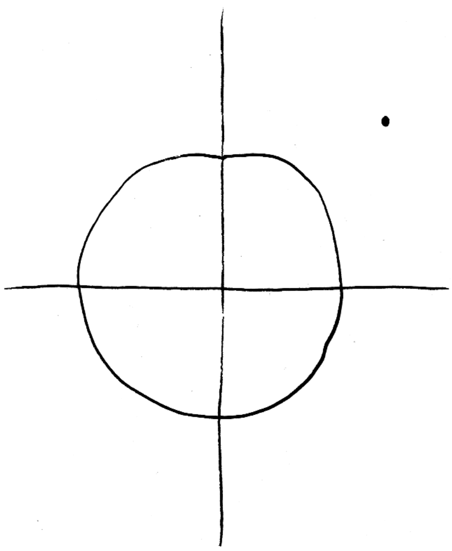
$$f^4 = \left((x^2 + 4xz + 6z^2)y^4\right)x^2 + \left((4x + z)y^4\right)z^3$$

Beispiel 1.1.8. Für k nicht algebraisch abgeschlossen gilt die Aussage dieses Satzes nicht. Als Beispiel betrachte man für $k = \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}[T]$ das Ideal $\mathfrak{a} = \langle T^2 + 1\rangle$. Obwohl das konstante Polynom $f = 1$ auf der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \emptyset$ unseres Ideals verschwindet, liegt keine seiner Potenzen $1^N = 1$ in besagtem Ideal.

1.1.9. Wir werden den Hilbert'schen Nullstellensatz erst im Anschluß an Lemma 1.7.11 zeigen können. Manche Aussagen aus seinem Umfeld sind jedoch sehr leicht zu haben, wie ich im folgenden ausführen will.

Definition 1.1.10. Ist k ein Kring und $X \subset k^n$ eine Teilmenge, so bilden diejenigen Polynome, die an allen Punkten von X verschwinden, offensichtlich ein Ideal des Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$. Es heißt das **Verschwindungsideal von** X und wir notieren es

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in X\}$$



Die Kreislinie ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ des Polynoms $x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}[x, y]$, eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$. Jeder Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die simultane Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ der Polynome $x - a$ und $y - b$ und auch Zariski-abgeschlossen. Alle Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offensichtlich auch abgeschlossen in der natürlichen Topologie des $\mathbb{R}^2$ aus [AN2] 14.1.3.9, aber das Umgekehrte gilt nicht.

1.1.11. Sei k ein Kring. Offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{E}$ von Teilmengen von $k[T_1, \ldots, T_n]$ die Identität $\bigcap_{E\in\mathcal{E}} \mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}\left(\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E\right)$ und insbesondere auch

$$E \subset F \;\Rightarrow\; \mathcal{Z}(E) \supset \mathcal{Z}(F)$$

Ebenso offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{X}$ von Teilmengen des k^n die Identität $\mathcal{I}\left(\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{X}} \mathcal{I}(X)$ und insbesondere auch

$$Y \subset X \;\Rightarrow\; \mathcal{I}(Y) \supset \mathcal{I}(X)$$

Des weiteren gilt sicher $E \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(E))$ für jede Teilmenge $E \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ und $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ für jede Teilmenge $X \subset k^n$. Es folgt $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)))$ für jede Teilmenge $X \subset k^n$, indem wir einerseits $\mathcal{I}$ auf $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ anwenden und andererseits $E \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(E))$ auf $E = \mathcal{I}(X)$. Ebenso folgt für jede Teilmenge $E \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ die Identität $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(E)))$. Insbesondere gilt für jede algebraische Teilmenge $X \subset k^n$ die Identität $X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$, die offensichtlich auch umgekehrt algebraische Teilmengen charakterisiert.

Ergänzung 1.1.12. Allgemeiner versteht man unter einer **Inzidenzstruktur** ein Tripel (A, B, R) bestehend aus zwei Mengen A und B mit einer Teilmenge $R \subset A \times B$ alias einer Relation zwischen A und B im Sinne von [AN1] 12.2.2.5. Zum Beispiel können wir die Menge $A = k[T_1, \ldots, T_n]$ der Polynome und die Menge $B = k^n$ der Punkte zu betrachten mit der Relation $(f, x) \in R$ genau dann, wenn gilt $f(x) = 0$. Für eine beliebige Inzidenzstruktur können wir in derselben Weise wie in diesem Beispiel Abbildungen $\mathcal{Z} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{I} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ erklären. Auch in dieser Allgemeinheit verwandeln sich Vereinigungen in Schnitte, Inklusionen kehren sich um und es gilt stets $X \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$ sowie $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)))$ und symmetrisch $E \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(E))$ sowie $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(E)))$.

1.1.13. Um Sie zu ermuntern, sich in Vorbereitung auf spätere Kapitel mit den Grundbegriffen der Topologie auseinanderzusetzen, beginne ich bereits hier mit der Diskussion der sogenannten „Zariski-Topologie“. Ich erinnere zunächst an einige grundlegende Definitionen aus der Begriffwelt der Topologie, wie sie in [AN2] 14.1.3 ausführlicher eingeführt werden. Eine **Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge** X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mit einer Topologie heißt ein **topologischer Raum**. Die Teilmengen aus $\mathcal{T}$ heißen dann die **offenen Teilmengen** unseres topologischen Raums. Statt $U \in \mathcal{T}$ schreibe ich auch $U \circledcirc X$. Die Komplemente der offenen Teilmengen heißen die **abgeschlossenen Teilmengen** unseres topologischen Raums. Für $A \subset X$ schreiben wir statt $(X \backslash A) \in \mathcal{T}$ auch $A \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\; X$. Das System der abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raums ist stabil unter endlichen Vereinigungen und beliebigen Schnitten. Jedes Mengensystem in einer Menge X mit diesen Eigenschaften ist auch umgekehrt das System der abgeschlossenen Teilmengen einer wohlbestimmten Topologie auf X. Gegeben eine Teilmenge $M \subset X$ eines topologischen Raums wird ihr **Abschluß** $\bar{M}$ erklärt als die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M umfaßt, alias der Schnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die M umfassen. Eine Abbildung $f : X \to Y$

von topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist, oder gleichbedeutend das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen.

1.1.14. Ich erinnere [AN2] 14.1.3.16. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so erklärt man die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y durch die Vorschrift

$$U \circledcirc Y \quad \Leftrightarrow \quad \exists V \circledcirc X \text{ mit } U = V \cap Y$$

In Worten ist also eine Teilmenge von Y offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt mit Y einer offenen Teilmenge von X ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge Y eines topologischen Raums X als topologischen Raum mit der induzierten Topologie auf.

Lemma 1.1.15. *Ist k ein kommutativer Integritätsbereich, so bilden die algebraischen Teilmengen von k^n die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der* **Zariski-Topologie auf dem** k^n.

Beweis. Daß beliebige Schnitte algebraischer Teilmengen wieder algebraisch sind, ist eh klar, formal nach 1.1.11. Ist k nicht der Nullring, so gilt weiter $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$. Ist k sogar ein Integritätsring, so gilt zusätzlich $\mathcal{Z}(E) \cup \mathcal{Z}(F) = \mathcal{Z}(EF)$ mit der Notation $EF = \{ef \mid e \in E,\ f \in F\}$. Folglich bilden die $\mathcal{Z}(E)$ das System der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem k^n. □

1.1.16. Ist k ein kommutativer Integritätsbereich, so folgt für den Abschluß einer beliebigen Teilmenge $X \subset k^n$ in Bezug auf die eben erklärte Zariskitopologie die Formel

$$\bar{X} = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$$

In der Tat ist die rechte Seite eine algebraische alias abgeschlossene Menge, die X umfaßt, und für jede algebraische alias abgeschlossene Teilmenge $Z \supset X$ gilt $Z = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Z)) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$.

1.1.17. Ein Element eines faktoriellen Rings heißt **quadratfrei**, wenn es von Null verschieden ist und darin kein Primfaktor mehrfach auftritt. Sei nun $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine Teilmenge $Z \subset k^n$ heißt eine

Hyperebene, wenn sie Nullstellenmenge eines linearen Polynoms ist, also eines Polynoms vom Totalgrad 1;

Quadrik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien quadratischen Polynoms ist;

Kubik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien kubischen Polynoms ist;

Quartik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien Polynoms vom Totalgrad 4 ist;

Quintik, wenn sie Nullstellenmenge eines quadratfreien Polynoms vom Totalgrad 5 ist;

Vorschau 1.1.18. Wir zeigen in 5.4.12, daß für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper auf einer algebraischen Teilmenge $X \underset{\mathcal{A}}{\subset} k^n$ jedes Polynom $P \in k[T_1, \dots, T_n]$, wenn wir es als Abbildung $P : X \to k$ auffassen, entweder nur endlich viele Werte annimmt oder nur endlich viele Werte nicht annimmt. Unser Beweis dort ist nicht ganz einfach. Ich wüßte gerne, wie man das möglichst leicht einsehen kann.

Ergänzung 1.1.19. Man kann zeigen, daß für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \geq 1$ jede algebraische Teilmenge von k^n bereits als die Nullstellenmenge von n Polynomen beschrieben werden kann, vergleiche etwa [Kun80]. Im Gegensatz dazu kann keineswegs jedes Ideal des Polynomrings in n Variablen von n Polynomen erzeugt werden. Zum Beispiel ist leicht zu sehen, daß das Ideal $\langle x^2, xy, y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.

Übungen

Übung 1.1.20. Man zeige zur Übung, daß eine echte Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ keine nichtleere metrisch offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ umfassen kann.

Übung 1.1.21. Ist k ein Körper, ja ein beliebiger Kring, und $x \in k^n$ ein Punkt, so ist das Verschwindungsideal dieser einelementigen Menge das Ideal $\mathcal{I}(x) = \langle T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n \rangle \subset k[T_1, \dots, T_n]$.

Übung 1.1.22. Sei k ein Körper. Man zeige, daß die von ganz k verschiedenen algebraischen Teilmengen von k genau die endlichen Teilmengen sind. Man zeige, daß die algebraischen Teilmengen von k^2 genau die endlichen Teilmengen, die Vereinigungen der Nullstellenmengen einzelner Polynome mit endlichen Teilmengen, sowie ganz k^2 sind. Hinweis: Nach [AL] 2.7.16 haben zwei teilerfremde Polynome in zwei Veränderlichen höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen.

Übung 1.1.23. Sei k ein Körper. Man zeige für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \dots, T_n]$ die Abschätzung $|\mathcal{Z}(\mathfrak{a})| \leq \dim_k k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a}$. Insbesondere kann ein Ideal endlicher Kodimension nur höchstens endlich viele simultane Nullstellen besitzen. Hinweis: Interpolation in mehreren Variablen [AL] 2.3.8.

Übung 1.1.24. Unter einem **Homöomorphismus** versteht man eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, deren Umkehrung auch stetig ist. Man zeige: Ist $\gamma : k \xrightarrow{\sim} k$ ein Körperautomorphismus, so induziert γ einen

Homöomorphismus $\gamma : k^n \xrightarrow{\sim} k^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n))$ von k^n versehen mit der Zariskitopologie auf sich selbst.

Übung 1.1.25. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist. Sei k ein kommutativer Integritätsbereich. Man zeige: Jede unendliche Teilmenge von k ist Zariski-dicht. Sind $A \subset k^m$ und $B \subset k^n$ Zariski-dicht, so gilt dasselbe für $A \times B \subset k^{m+n}$. Ist zusätzlich k unendlich, so ist jede offene nichtleere Teilmenge von k^n Zariski-dicht und je zwei offene nichtleere Teilmengen von k^n haben nichtleeren Schnitt.

Übung 1.1.26. Gegeben ein Körper k und Matrizen $M, N \in \mathrm{Mat}(n; k)$ haben MN und NM dasselbe charakteristische Polynom. Hinweis: 1.1.25.

Übung 1.1.27. Man zeige, daß jede unendliche Teilmenge der Kreislinie in der reellen Ebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Zariski-dicht liegt in der Kreislinie mit ihrer Spurtopologie nach 1.1.14. Hinweis: [AL] 2.7.16.

Übung 1.1.28. Man zeige: Verschwindet ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x, y]$ auf der Kreislinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, so wird es von $x^2 + y^2 - 1$ geteilt.

Übung 1.1.29. Man folgere aus dem Hilbert'schen Nullstellensatz: Haben zwei irreduzible Polynome in $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ dieselben Nullstellen, so ist das eine ein skalares Vielfaches des anderen. Im Fall $n = 1$ ist das klar. In Fall $n = 2$ folgt es bereits aus Korollar [AL] 2.7.16, nach dem zwei teilerfremde Polynome in $\mathbb{C}[x, y]$ höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen haben.

Übung 1.1.30. Man zeige, daß jede lineare Abbildung $k^m \to k^n$ stetig ist für die Zariskitopologie.

Übung 1.1.31. Gegeben auf $A := k^n$ eine k-bilineare Multiplikation $A \times A \to A$, die A zu einem Ring macht, bilden die Einheiten unseres Rings eine Zariski-offene Teilmenge $A^\times \Subset A$.

1.2 Allgemeines zu Moduln

1.2.1 (**Notation für Mengen von Abbildungen**). Ich notiere Ens die Kategorie der Mengen. Ihre Objekte sind Mengen, ihre Morphismen Abbildungen. Gegeben $M, N \in \mathrm{Ens}$ alias Mengen M, N notiere ich $\mathrm{Ens}(M, N)$ die Menge aller Abbildungen von M nach N und $\mathrm{Ens}(M) := \mathrm{Ens}(M, M)$ die Menge aller Abbildungen von M zu sich selbst.

1.2.2 (**Notation für Mengen von Homomorphismen abelscher Gruppen**). Ich notiere Ab die Kategorie der abelschen Gruppen. Ihre Objekte sind abelsche Gruppen, ihre Morphismen Gruppenhomomorphismen. Gegeben $M, N \in \mathrm{Ab}$ alias abelsche Gruppen M, N notiere ich $\mathrm{Ab}(M, N) \subset \mathrm{Ens}(M, N)$ die Menge der Gruppenhomomorphismen von M nach N und $\mathrm{Ab}(M) \subset \mathrm{Ens}(M)$ die Menge der Gruppenhomomorphismen von M zu sich selbst.

1.2.3 (**Isomorphismen abelscher Gruppen**). Gegeben ein bijektiver Homomorphismus von abelschen Gruppen ist auch seine Umkehrabbildung ein Homomorphismus von abelschen Gruppen. Die Isomorphismen in der Kategorie der abelschen Gruppen sind mithin genau die bijektiven Homomorphismen.

1.2.4 (**Diskussion der Homomorphismengruppen abelscher Gruppen**). Gegeben abelsche Gruppen M, N ist $\mathrm{Ab}(M, N) \subset \mathrm{Ens}(M, N)$ sogar eine Untergruppe der abelschen Gruppe aller Abbildungen von der Menge M in die abelsche Gruppe N. Die Menge $\mathrm{Ab}(M, N)$ mit dieser Struktur als abelsche Gruppe notiere ich

$$\mathrm{Hom}(M, N) = (M \Rrightarrow N) = (M \Rrightarrow_{\mathrm{Ab}} N)$$

und setze $\mathrm{End}(M) := \mathrm{Hom}(M, N)$. Die Verknüpfung von Morphismen abelscher Gruppen $\mathrm{Ab}(L, M) \times \mathrm{Ab}(M, N) \to \mathrm{Ab}(L, N)$ wird für diese Strukturen eine biadditive Abbildung $\mathrm{Hom}(L, M) \times \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(L, N)$, $(\psi, \varphi) \mapsto \varphi \circ \psi$, und

$$\mathrm{End}(M)$$

wird mit dieser Verknüpfung als Multiplikation ein Ring. Den **Endomorphismenring von** M erklären wir als $\mathrm{End}(M)$ mit der dazu opponierten Multiplikation, in Formeln mit der Verknüpfung $\varphi\psi := \varphi \circ \psi$. Sein Einselement ist die Identität $\mathrm{id} : M \to M$.

Definition 1.2.5. Sei Ω eine Menge. Ein **Ω-Mengenmodul** oder kurz **Ω-Modul** ist ein Paar (M, σ) bestehend aus einer abelschen Gruppe M und einer Abbildung $\sigma : \Omega \to \mathrm{End}(M)$ unserer Menge Ω in den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M.

Definition 1.2.6. Sei R ein Ring. Ein **R-Ringmodul** oder kurz **R-Modul** ist ein Paar (M, σ) bestehend aus einer abelschen Gruppe M und einem Ringhomomorphismus $\sigma : R \to \mathrm{End}(M)$ unseres Rings R in den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M.

1.2.7. Natürlich ist jeder Ringmodul auch ein Mengenmodul für die dem fraglichen Ring zugrundeliegenden Menge. Unter dem Exponentialgesetz, also der Bijektion $\mathrm{Ens}(\Omega, \mathrm{Ens}(M, M)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\Omega \times M, M)$ aus [GR] 2.1.6.5, entsprechen unsere Strukturen auf einer abelschen Gruppe $(M, +)$ als Ω-Mengenmodul eineindeutig den Abbildungen $\Omega \times M \to M$, $(\omega, m) \mapsto \omega m$ derart, daß für alle $\omega \in \Omega$ und $m, n \in M$ gilt

$$\omega(m + n) = \omega m + \omega n$$

Weiter entsprechen für einen Ring R unsere Strukturen auf einer abelschen Gruppe $(M, +)$ als R-Ringmodul unter dem Exponentialgesetz eineindeutig den Abbildungen $R \times M \to M$ derart, daß für alle $r, s \in R$ und $m, n \in M$ gilt

$$\begin{array}{rcl} r(m+n) & = & (rm)+(rn) \\ (r+s)m & = & (rm)+(sm) \\ r(sm) & = & (rs)m \\ 1m & = & m \end{array}$$

1.2.8 (**Diskussion alternativer terminologischer Konventionen**). Arbeitet man mit der alternativen Konvention, nach der Ringe nicht notwendig unitär zu sein brauchen, so ist hier die letzte Bedingung $1m = m$ nicht mehr sinnvoll und wird weggelassen. Moduln, wie wir sie in 1.2.6 definiert haben, würde man in dieser alternativen Konvention als „unitäre Moduln über einem unitären Ring“ bezeichnen. Wir nennen eine abelsche Gruppe A mit einer assoziativen biadditiven Verknüpfung eine **assoziative $\mathbb{Z}$-Algebra** und eine abelsche Gruppe M mit einer biadditiven Abbildung $A \times M \to M$ derart, daß gilt $a(bm) = (ab)m \ \forall a, b \in A, m \in M$, einen **$A$-Assoziativmodul**. Bei Assoziativmoduln fordern wir also nichts für die Operation eines Einselements, selbst wenn es ein solches geben sollte.

1.2.9. Wir vereinbaren auch in diesem Kontext die Regel „Punkt vor Strich“. Wie bei Vektorräumen zeigt man auch bei Ringmoduln M über einem Ring R für alle $m \in M$ die Formel $0m = 0$, genauer $0_R m = 0_M$, und folgert $(-1)m = -m$.

1.2.10 (**Vergleich von Ringmoduln und Mengenmoduln**). Moduln über Ringen können als spezielle Moduln über Mengen aufgefaßt werden. Es gibt offensichtlich im allgemeinen weniger Moduln über einem Ring als Mengenmoduln über der zugrundeliegenden Menge und wir können für Moduln über speziellen Ringen entsprechend stärkere Aussagen erwarten. So sind zum Beispiel die Ringmoduln über einem Körper genau unsere Vektorräume aus der linearen Algebra. Umgekehrt können Moduln über einer Menge Ω auch aufgefaßt werden als Ringmoduln über dem „nichtkommutativen Polynomring über $\mathbb{Z}$ in durch Ω indizierten Variablen“ alias dem „freien Ring über Ω“, den wir in der Notation aus [TF] 2.4.8.7 $\mathrm{Ring}^{\nwarrow}\,\Omega$ notieren würden. Insofern sind unsere beiden Begriffsbildungen im Prinzip austauschbar. Ich werde im folgenden allgemeine Aussagen vorzugsweise für Mengenmoduln formulieren, da deren Definition einfacher ist.

Beispiele 1.2.11. Jeder Ring R ist in offensichtlicher Weise ein R-Ringmodul. Dasselbe gilt für R^n, ja gegeben eine beliebige Menge X für $\mathrm{Ens}(X, R)$ und gegeben zusätzlich ein beliebiger R-Ringmodul M auch für die Menge $\mathrm{Ens}(X, M)$ aller Abbildungen von X nach M.

1.2.12 (**Abelsche Gruppen als $\mathbb{Z}$-Ringmoduln**). Jede abelsche Gruppe M trägt genau eine Struktur als $\mathbb{Z}$-Ringmodul, denn für jeden Ring E gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to E$ und das gilt insbesondere auch für $E := \mathrm{End}(M)$.

Wir können diese Modulstruktur auch explizit beschreiben: Für $a \in \mathbb{N}$ ist notwendig $1m = m$, also $2m = (1+1)m = m + m$, induktiv $(a+1)m = am + m$, und dann auch $(-a)m = (-1)am = -(am)$.

1.2.13. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so wird jeder S-Modul und insbesondere auch S selbst ein R-Modul vermittels der Operation $rm = \varphi(r)m$. Dies Verfahren heißt **Restriktion der Skalare**, und zwar selbst dann, wenn der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ nicht die Inklusion eines Teilrings ist. Wir notieren

$$\operatorname{res}_\varphi(M) = \operatorname{res}_S^R M$$

den so aus einem S-Modul konstruierten R-Modul. Zum Beispiel ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ der Quotient $R/\mathfrak{a}$ aus [AL] 2.1.13 ein R-Modul in natürlicher Weise.

1.2.14. Ist X eine Menge und $x \in X$ ein Punkt und k ein Ring, so liefert das Auswerten an der Stelle x einen Ringhomomorphismus $\delta_x : \operatorname{Ens}(X, k) \to k$. Den zugehörigen Modul über den Funktionenring $\operatorname{Ens}(X, k)$ nennen wir den **Auswertungsmodul** und notieren ihn k_x.

Übungen

Übung 1.2.15 (**$k[T]$-Moduln als k-Vektorräume mit Endomorphismus**). Gegeben eine abelsche Gruppe M und ein Körper k geben wir Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{c} \text{Strukturen als } k[T]\text{-Modul} \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Ringhomomorphismen} \\ k[T] \to \operatorname{End}(M) \end{array} \right\} \\
 & & \wr\downarrow \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{Paare } (\psi, A) \text{ bestehend aus} \\ \text{einer } k\text{-Vektorraumstruktur} \\ \psi : k \times M \to M \\ \text{auf der abelschen Gruppe } M \\ \text{und einem Endomorphismus} \\ A \in \operatorname{End}_k(M) \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Paare } (\varphi, A) \text{ bestehend aus} \\ \text{einem Ringhomomorphismus} \\ \varphi : k \to \operatorname{End}(M) \\ \text{und einem mit seinem Bild} \\ \text{kommutierenden Element} \\ A \in \operatorname{End}(M) \end{array} \right\}
\end{array}$$

an. Hier liefert 1.2.7 die obere horizontale Bijektion und [LA1] 5.3.5 die vertikale Bijektion. Die untere horizontale Bijektion ist die offensichtliche. In diesem Sinne ist also ein $k[T]$-Modul „dasselbe“ wie ein k-Vektorraum mit einem k-linearen Endomorphismus. Für einen beliebigen Ring k gilt Analoges.

1.3 Homomorphismen, Untermoduln, Quotienten

1.3.1. In diesem Abschnitt bespreche ich einige sehr allgemeine Begriffsbildungen und Aussagen, die für beliebige Mengenmoduln sinnvoll und richtig sind.

Speziellere Aussagen, die nur für Ringmoduln gelten, besprechen wir im darauffolgenden Abschnitt.

Definition 1.3.2. Sei Ω eine Menge. Eine Abbildung $f : M \to N$ von einem Ω-Modul in einen weiteren Ω-Modul heißt ein **Modulhomomorphismus**, wenn gilt

$$f(m + m') = f(m) + f(m') \text{ und } f(rm) = rf(m) \quad \forall m, m' \in M, r \in \Omega.$$

Die Menge aller Homomorphismen von einem Ω-Modul M in einen Ω-Modul N notieren wir $\mathrm{Mod}_\Omega(M, N)$. Diese Menge bildet eine Untergruppe der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}(M, N)$ und mit dieser Struktur als abelsche Gruppe notieren wir sie

$$\mathrm{Hom}_\Omega(M, N) \subset \mathrm{Hom}(M, N)$$

1.3.3 (**Kategorie der Mengenmoduln**). Die Gesamtheit aller Mengenmoduln über einer vorgegebenen Menge Ω bildet mit den Modulhomomorphismen als Morphismen eine Kategorie

$$\mathrm{Mod}_\Omega = \mathrm{Mod}'_\Omega$$

Das „Freiheitsstrichlein“ schreiben wir dazu, wenn besonders betont werden soll, daß Mengenmoduln gemeint sind.

1.3.4 (**Isomorphismen von Moduln**). Sei Ω eine Menge. Gegeben ein bijektiver Homomorphismus von Ω-Moduln ist auch die Umkehrabbildung ein Homomorphismus von Ω-Moduln. Die bijektiven Homomorphismen sind mithin genau die **Isomorphismen** in der Kategorie der Ω-Moduln.

1.3.5 (**Endomorphismenringe**). Sei Ω eine Menge. Die Menge aller Endomorphismen eines Ω-Moduls M notiert man $\mathrm{End}_\Omega(M)$. Sie ist ein Teilring $\mathrm{End}_\Omega(M) \subset \mathrm{End}(M)$ des Endomorphismenrings der abelschen Gruppe M.

Definition 1.3.6. Sei Ω eine Menge und M ein Ω-Modul. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt ein **Untermodul**, wenn N eine Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $m \in N, r \in \Omega \Rightarrow rm \in N$.

Beispiel 1.3.7. Die Untermoduln eines Krings mit seiner durch Linksmultiplikation gegebenen Struktur als R-Modul sind genau seine Ideale. Die Untermoduln eines allgemeinen Rings heißen seine **Linksideale**.

1.3.8. Sei Ω eine Menge. Jeder Schnitt von Untermoduln eines Ω-Moduls M ist wieder ein Untermodul. Ist $T \subset M$ eine Teilmenge eines Ω-Moduls M, so heißt der kleinste Untermodul von M, der T enthält, der **von T erzeugte Untermodul** und wir bezeichnen ihn mit ${}_\Omega\langle T \rangle$ oder wenn die genaue Bedeutung eh aus dem Kontext hervorgeht etwas nachlässig mit $\langle T\rangle_\Omega$ oder auch abkürzend mit $\langle T\rangle$. Man kann den von T erzeugten Ω-Untermodul beschreiben auch als die von allen $\{r_1\ldots r_s t \mid s\geq 0,\ r_i\in\Omega,\ t\in T\}$ erzeugte Untergruppe. Ein Modul, der von einer endlichen Teilmenge erzeugt wird, heißt **endlich erzeugt**. Ein Modul, der von einem einzigen Element erzeugt wird, heißt **zyklisch**.

1.3.9. Das Bild eines Untermoduls unter einem Modulhomomorphismus ist wieder ein Untermodul. Das Urbild eines Untermoduls unter einem Modulhomomorphismus ist wieder ein Untermodul. Insbesondere sind Bild und Kern eines Modulhomomorphismus stets Untermoduln.

Proposition 1.3.10 (Quotientenmoduln). *Seien Ω eine Menge, M ein Ω-Modul und $L\subset M$ ein Untermodul.*

1. *Es gibt genau eine Struktur eines Ω-Moduls auf der Restklassengruppe M/L aus [LA2] 6.2.10 derart, daß die Projektion* $\mathrm{can}: M\twoheadrightarrow M/L$ *ein Homomorphismus von Ω-Moduln ist;*

2. *Jeder Homomorphismus von Ω-Moduln $\varphi: M\to N$ mit $\varphi(L)=0$ faktorisiert in eindeutiger Weise über M/L, es gibt also zu φ genau einen Ω-Modulhomomorphismus $\tilde\varphi: M/L\to N$ mit $\varphi=\tilde\varphi\circ\mathrm{can}$.*

Beweis. Sehr ähnlich zum Beweis der entsprechenden Aussagen im Fall von Vektorräumen [LA2] 6.6.4 und dem Leser überlassen. □

Definition 1.3.11. Ein **Subquotient** eines Moduls ist ein Quotient eines Untermoduls.

Übungen

Ergänzende Übung 1.3.12. Man zeige, daß in einem endlich erzeugten Modul jedes Erzeugendensystem ein endliches Erzeugendensystem umfaßt.

Übung 1.3.13. Jeder Quotient eines endlich erzeugten Moduls ist endlich erzeugt.

Übung 1.3.14. Ein Untermodul eines endlich erzeugten Moduls muß keineswegs endlich erzeugt sein. Betrachten wir zum Beispiel im Polynomring in abzählbar vielen Variablen $R:=\mathbb{Z}[T_n\mid n\geq 1]$ das von den Variablen erzeugte Ideal $I\subset R$, so ist I nicht endlich erzeugt als R-Modul.

1.4 Ringmoduln

Lemma 1.4.1 (Modulhomomorphismen vom Grundring zu einem Modul). *Gegeben ein Ring R und ein R-Ringmodul M liefert die Abbildungsvorschrift $m\mapsto(r\mapsto rm)$ einen Isomorphismus $M\stackrel{\sim}{\to}\mathrm{Hom}_R(R,M)$ von abelschen Gruppen mit Umkehrabbildung $\varphi\mapsto\varphi(1)$.*

Beweis. Dem Leser überlassen. □

1.4.2. Gegeben ein Ring R und ein R-Ringmodul M kann man den von einer Teilmenge $T \subset M$ erzeugten Untermodul beschreiben als die Menge aller Linearkombinationen $\{r_1 t_1 + \ldots + r_s t_s \mid s \geq 0,\ r_i \in R,\ t_i \in T\}$. Hierbei steht die leere Linearkombination mit $s = 0$ für die Null in M.

1.4.3. Die Gesamtheit aller Ringmoduln über einem vorgegebenen Ring R bildet mit den Modulhomomorphismen als Morphismen eine Kategorie

$$\mathrm{Mod}_R$$

1.4.4. In der Sprache der Kategorientheorie ist das Vergessen der Modulstruktur ein Isomorphismus von Kategorien $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}$ zwischen der Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln und der Kategorie der abelschen Gruppen.

1.4.5. Jeder Quotient eines Ringmoduls über einem Ring R ist wieder ein R-Ringmodul.

1.4.6. Gegeben ein kommutativer Ring R und R-Ringmoduln M, N ist die Untergruppe $\mathrm{Hom}_R(M, N) \subset \mathrm{Hom}(M, N)$ sogar ein R-Untermodul in Bezug auf die durch Nachschalten oder gleichbedeutend durch Vorschalten der Multiplikation mit Elementen $r \in R$ gegebenen Struktur als R-Modul.

Übungen

Übung 1.4.7. Gegeben ein R-Modul M wird M ein Modul über seinem Endomorphismenring $\mathrm{End}_R(M)$ vermittels der Vorschrift $fm = f(m)$ für alle $f \in \mathrm{End}_R(M)$ und $m \in M$.

Übung 1.4.8. Ist R ein Ring und $e \in R$ ein idempotentes Element und M ein R-Modul, so induziert das Auswerten bei e eine Bijektion $\mathrm{Hom}_R(Re, M) \xrightarrow{\sim} eM$.

Übung 1.4.9. Gegeben ein surjektiver Ringhomomorphismus $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ und ein R-Modul M mit $(\ker \varphi)M = 0$ gibt es auf M genau eine Struktur als S-Modul, die unter der Restriktion längs φ die ursprüngliche Struktur als R-Modul liefert. Wir nennen sie die **faktorisierte Operation** von S auf M.

Beispiel 1.4.10. Gegeben R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und N ein R-Modul wird insbesondere $N/\mathfrak{a}N$ stets ein $R/\mathfrak{a}$-Modul mit der faktorisierten Operation. Hier verwenden wir die Abkürzung $\mathfrak{a}N = \langle \mathfrak{a}N \rangle$ für die von allen an mit $a \in \mathfrak{a}$ und $n \in N$ erzeugte Untergruppe.

Übung 1.4.11. Man zeige, daß gegeben ein Ring R und ein R-Modul M für jedes Linksideal $I \subset R$ das Auswerten an der Nebenklasse $1_R + I$ eine Bijektion $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\sim} \{m \in M \mid Im = 0\}$ induziert.

Übung 1.4.12. Gegeben Moduln M_i über Ringen R_i kann man das Produkt M der M_i in offensichtlicher Weise mit der Struktur eines Moduls über dem Produkt R der R_i versehen. Ergibt sich in derselben Weise ein R-Modul N als das Produkt gewisser R_i-Moduln N_i, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \prod_i \operatorname{Hom}_{R_i}(M_i, N_i)$$

Übung 1.4.13. Ich erinnere an exakte Sequenzen im Sinne von [LA2] 6.7.5. Eine Sequenz von Gruppen $M' \to M \to M''$ heißt **linksexakt**, wenn die erweiterte Sequenz $1 \to M' \to M \to M''$ exakt ist, wenn sie also in anderen Worten bei M exakt ist und $M' \to M$ injektiv ist. Wir schreiben linksexakte Sequenzen meist $M' \hookrightarrow M \to M''$. Man zeige: Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von Moduln über einem Ring R ist linkssexakt genau dann, wenn für jeden weiteren R-Modul N die induzierte Sequenz

$$\operatorname{Hom}_R(N, M') \to \operatorname{Hom}_R(N, M) \to \operatorname{Hom}_R(N, M'')$$

linksexakt ist. Analoges gilt für Mengenmoduln. Die Aussage ist etwas delikat vom Standpunkt der Logik, da wir darin über alle Moduln quantifizieren. Um dem auszuweichen, mag man dabei ein unter dem Bilden von Teilmengen stabiles Mengensystem $\mathfrak{U}$ fest wählen und nur solche Moduln betrachten, deren Grundmenge ein Element dieses Mengensystems ist.

Übung 1.4.14. Ich erinnere an exakte Sequenzen im Sinne von [LA2] 6.7.5. Eine Sequenz von Gruppen $M' \to M \to M''$ heißt **rechtsexakt**, wenn die erweiterte Sequenz $M' \to M \to M'' \to 1$ exakt ist, wenn sie also in anderen Worten bei M exakt ist und $M \to M''$ surjektiv ist. Wir schreiben rechtsexakte Sequenzen meist $M' \to M \twoheadrightarrow M''$. Man zeige: Eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von Moduln über einem Ring R ist rechtsexakt genau dann, wenn für jeden weiteren R-Modul N die induzierte Sequenz

$$\operatorname{Hom}_R(M'', N) \to \operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_R(M', N)$$

linksexakt ist. Analoges gilt für Mengenmoduln und auch die Probleme der Logik kann man wie in 1.4.13 ausräumen.

1.5 Noethersche Moduln und Ringe

Definition 1.5.1. Ein Modul heißt **noethersch**, wenn alle seine Untermoduln endlich erzeugt sind.

1.5.2. Mit gemeint ist dabei die Forderung, daß unser Modul selbst endlich erzeugt sein soll. Die Bezeichnung erinnert an die Mathematikerin Emmy Noether, eine Pionierin der abstrakten Algebra jüdischer Herkunft, die in Göttingen arbeitete bis sie in die Emigration gezwungen wurde.

Beispiel 1.5.3. Ein Vektorraum über einem Körper k ist noethersch als k-Modul genau dann, wenn er endlichdimensional ist.

Beispiel 1.5.4. Der Polynomring $R = \mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots]$ in abzählbar vielen Variablen ist kein noetherscher R-Modul, denn das von allen T_i erzeugte Ideal ist nicht endlich erzeugt. In der Tat bilden die $\langle T_1 \rangle \subsetneq \langle T_1, T_2 \rangle \subsetneq \ldots$ eine unendliche echt aufsteigende Folge von Idealen, deren Vereinigung $\langle T_1, T_2, \ldots \rangle$ nicht endlich erzeugt sein kann.

Proposition 1.5.5. *Jeder Quotient und jeder Untermodul eines noetherschen Moduls ist noethersch. Besitzt ein Modul M einen noetherschen Untermodul M' mit noetherschem Quotient M/M', so ist M bereits selbst noethersch.*

Ergänzung 1.5.6. Für diejenigen Leser, die mit exakten Sequenzen nach [LA2] 6.7.5 vertraut sind, können wir die Proposition auch wie folgt formulieren: Ist $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring, so ist M noethersch genau dann, wenn M' und M'' noethersch sind. Leser, die noch nicht mit dieser Terminologie vertraut sind, werden ermuntert, sich damit vertraut zu machen.

Beweis. Der erste Teil bleibt dem Leser überlassen. Wir müssen im zweiten Teil zeigen, daß jeder Untermodul $U \subset M$ endlich erzeugt ist. Nach Annahme ist aber sein Bild $\bar{U} \subset M/M'$ endlich erzeugt, wir finden also Elemente $u_1, \ldots, u_r \in U$, deren Bilder $\bar{U}$ erzeugen. Ganz genauso ist $U \cap M'$ endlich erzeugt, sagen wir von $v_1, \ldots, v_s \in U$. Dann sieht man leicht, daß die $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ zusammen ganz U erzeugen. □

Definition 1.5.7. Ein Ring heißt **linksnoethersch** beziehungsweise **rechtsnoethersch**, wenn er noethersch ist als Links- beziehungsweise Rechtsmodul über sich selbst, und **noethersch**, wenn er linksnoethersch und rechtsnoethersch ist.

Beispiel 1.5.8. Ein Ring ist linksnoethersch genau dann, wenn alle seine Linksideale endlich erzeugt sind. Jeder Hauptidealring ist noethersch.

Satz 1.5.9. *Ein Modul über einem linksnoetherschen Ring ist noethersch genau dann, wenn er endlich erzeugt ist.*

Beweis. Ein noetherscher Modul ist immer endlich erzeugt. Ist umgekehrt M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist M ein Quotient von R^n, und für R linksnoethersch ist auch R^n noethersch als Modul, wie man aus 1.5.5 leicht induktiv folgert. □

Beispiel 1.5.10. Dieser Satz zeigt insbesondere, daß jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe endlich erzeugt ist. In der Tat ist ja eine abelsche

Gruppe dasselbe wie ein $\mathbb{Z}$-Modul und $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring, also noethersch. Wir hatten in diesem Fall in [LA2] 6.5.1 sogar gesehen, daß man für die Untergruppe nicht mehr Erzeuger benötigt als für die ganze Gruppe. Das folgt mit demselben Argument sogar allgemeiner für Moduln über solchen Ringen, in denen jedes Linksideal ein Hauptideal ist. Im allgemeinen kann es aber durchaus vorkommen, daß man für einen Untermodul mehr Erzeuger benötigt als für den ursprünglichen Modul. Insbesondere kann es ja vorkommen, daß man für ein Ideal mehr als einen Erzeuger benötigt und damit mehr Erzeuger als für den Ring, der ja als Modul über sich selber stets zyklisch ist.

Satz 1.5.11 (Hilbert'scher Basissatz). *Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist auch der Polynomring $R[T]$ mit Koeffizienten in R ein linksnoetherscher Ring. Dasselbe gilt analog für rechtsnoethersch und noethersch.*

Beweis. Sei $I \subset R[T]$ ein Linksideal. Wir betrachten das Linksideal $\mathfrak{a} \subset R$, das erzeugt wird von den Leitkoeffizienten aller Polynome aus I. Da R noethersch ist, gibt es endlich viele Polynome $f_1, \ldots, f_t \in I$, deren Leitkoeffizienten das Linksideal $\mathfrak{a} \subset R$ erzeugen. Sei m das Maximum der Grade der f_i. Gegeben $h \in I$ mit $\deg h \geq m$ finden wir offensichtlich $p_i \in R[T]$ derart, daß

$$h - (p_1 f_1 + \ldots + p_t f_t)$$

echt kleineren Grad hat als h. Induktiv finden wir dann sogar p_i derart, daß diese Differenz echt kleineren Grad hat als m. Die Polynome aus $R[T]$ vom Grad $< m$ und, wieder da R linksnoethersch ist, dann auch die Polynome aus I vom Grad $< m$ bilden aber einen endlich erzeugten R-Modul. Wählen wir Erzeuger $g_1, \ldots, g_r$ dieses R-Moduls, so erzeugen offensichtlich $f_1, \ldots, f_t, g_1, \ldots, g_r$ unser Linksideal I über $R[T]$. $\square$

1.5.12. Man erkennt induktiv, daß ein Polynomring in endlich vielen Variablen $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit Koeffizienten in einem Körper k, ja mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Ring ein noetherscher Ring ist. Das zeigt insbesondere, daß jede algebraische Teilmenge $X \subset_{\mathrm{A}} k^n$ bereits durch endlich viele Gleichungen beschrieben werden kann, denn gegeben eine Teilmenge T des Polynomrings mit $X = \mathcal{Z}(T)$ gilt auch $X = \mathcal{Z}(\langle T \rangle)$ für das von T erzeugte Ideal und dann $X = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$ für Erzeuger $f_1, \ldots, f_r$ des von T erzeugten Ideals.

Lemma 1.5.13 (Charakterisierungen noetherscher Moduln). *Für einen Modul sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Modul ist noethersch, als da heißt, jeder Untermodul ist endlich erzeugt;*

2. *Jedes nichtleere System von Untermoduln unseres Moduls besitzt ein maximales Element;*

3. *Jede aufsteigende Folge $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ von Untermoduln unseres Moduls wird stationär alias stagniert.*

1.5.14. Ein Ring ist insbesondere linksnoethersch genau dann, wenn jede aufsteigende Folge von Linksidealen stagniert.

1.5.15. Beim Nachweis der Implikationen (2)⇒(3) und (1)⇒(3) kommen wir noch ohne Auswahlaxiom aus. Die Beweise der anderen Implikationen benötigen jedoch, soweit ich sehen kann, das Auswahlaxiom.

Beweis. $(1) \Rightarrow (3)$: Sei M unser Modul. Ist jeder Untermodul von M endlich erzeugt, so auch die Vereinigung $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ über unsere aufsteigende Folge von Untermoduln. Es gibt also ein j derart, daß alle Erzeuger dieser Vereinigung schon in M_j liegen, und dann gilt notwendig $M_j = M_{j+1} = \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Ist ein Untermodul $N \subset M$ nicht endlich erzeugt, so finden wir induktiv eine Folge $m_0, m_1, \ldots$ in N derart, daß für jedes $i \geq 0$ das i-te Folgenglied m_i nicht im Erzeugnis der vorhergehenden $m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}$ liegt. Die $M_i = \langle m_0, m_1, \ldots, m_i \rangle$ bilden dann eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M, die nicht stagniert.

$(2) \Leftrightarrow (3)$: Offensichtlich und auch nach Übung [LA1] 1.9.22 besitzt in einer teilgeordneten Menge jede nichtleere Teilmenge ein maximales Element genau dann, wenn jede monoton wachsende Folge in unserer Menge stagniert. Diese Erkenntnis gilt es anzuwenden auf das System alias die Menge aller Untermoduln unseres Moduls. □

Ergänzung 1.5.16. Ein Tensorprodukt noetherscher Ringe muß nicht wieder noethersch sein. Ist etwa k ein Körper und $K = \operatorname{Quot} k[X_1, X_2, \ldots]$ der Quotientenkörper des Polynomrings über k in unendlich vielen Variablen, so ist $K \otimes_k K$ nicht noethersch: Die Ideale $\langle (X_1 - Y_1), (X_2 - Y_2), \ldots, (X_n - Y_n) \rangle$ bilden eine unendliche aufsteigende Idealkette, mit den Abkürzungen $X_i = X_i \otimes 1$ und $Y_i = 1 \otimes Y_i$. Um das zu sehen, mag man davon ausgehen, daß $K \otimes_k K$ faktoriell ist als Lokalisierung des faktoriellen Rings $k[X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots]$.

Übungen

Übung 1.5.17. Jeder Quotient eines linksnoetherschen Rings ist linksnoethersch. Jeder Quotient eines rechtsnoetherschen Rings ist rechtsnoethersch. Jeder Quotient eines noetherschen Rings ist noethersch.

Übung 1.5.18. Man zeige: Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist auch der Potenzreihenring $R[\![T]\!]$ mit Koeffizienten in R ein linksnoetherscher Ring. Dasselbe gilt analog für rechtsnoethersch und noethersch. Hinweis: Man argumentiere wie bei Beweis des Basissatzes, aber betrachte diesmal das von den Koeffizienten der „Anfangsterme" erzeugte Linksideal von R. Insbesondere sind auch die Potenzreihenringe in mehreren Variablen $R[\![T_1, \ldots, T_s]\!]$ linksnoethersch, wenn R selbst linksnoethersch ist.

Übung 1.5.19. Sei k ein Körper oder allgemeiner ein noetherscher Integritätsbereich. Gegeben $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ bezeichne $U_f := \{x \in k^n \mid f(x) \neq 0\}$ das Komplement der Nullstellenmenge von f. Man zeige, daß die offenen Teilmengen von k^n genau alle endlichen Vereinigungen solcher U_f sind.

Ergänzende Übung 1.5.20. Jede direkte Summe von injektiven Linksmoduln über einem linksnoetherschen Ring ist injektiv. Hinweis: Man verwende das Injektivitätskriterium über Ideale [TG] 3.2.28.

Übung 1.5.21 (**Jedes Monoidideal von** $(\mathbb{N}^r, +)$ **ist endlich erzeugt**). Sei $T \subset \mathbb{N}^r$ eine Teilmenge, die unter der Addition mit beliebigen Elementen von $\mathbb{N}^r$ stabil ist. Man zeige, daß es endlich viele $t_1, \ldots, t_l \in T$ gibt mit

$$T = \bigcup_{i=1}^{l} (t_i + \mathbb{N}^r)$$

Man nennt eine Teilmenge T in einem Monoid $(M, \top)$ ein **Monoidideal**, wenn aus $t \in T$ und $m \in M$ folgt $t \top m \in T$ und $m \top t \in T$. In dieser Begrifflichkeit besagt unsere Erkenntnis, daß jedes Monoidideal von $(\mathbb{N}^r, +)$ endlich erzeugt ist.

Übung 1.5.22. Man zeige: Jeder surjektive Endomorphismus eines noetherschen Moduls ist ein Isomorphismus.

1.6 Ringendliche Körpererweiterungen

Definition 1.6.1. Unter einer **Kringerweiterung** verstehen wir ein Paar $A \subset B$ bestehend aus einem Kring B mit einem Teilring A. Später verstehen wir darunter auch allgemeiner einen beliebigen injektiven Kringhomomorphismus.

Definition 1.6.2. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung.

1. Wir sagen, B sei **von endlichem Typ über** A oder **ringendlich über** A, wenn B als Ring von A zusammen mit endlich vielen weiteren Elementen erzeugt werden kann.

2. Wir sagen, B sei **endlich über** A oder genauer **modulendlich über** A, wenn B als A-Modul endlich erzeugt ist.

3. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz über** A, wenn es Nullstelle eines *normierten* Polynoms mit Koeffizienten in A ist, wenn also eine Gleichung der Gestalt

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

gilt mit $n \geq 1$ und $a_i \in A$. Im Fall einer Körpererweiterung $A \subset B$ sagt man stattdessen auch, b sei **algebraisch über** A.

Analog verwenden wir diese Begriffe auch für beliebige Kringhomomorphismen $A \to B$, die nicht notwendig Einbettungen von Teilmengen, ja noch nicht einmal injektiv zu sein brauchen.

1.6.3. Im Fall von Körpererweiterungen reicht in Teil 3 die Forderung, daß wir ein von Null verschiedenes Polynom finden. Im Fall von Kringerweiterungen jedoch ist die Forderung wesentlich, daß das Polynom in Teil 3 normiert sein soll.

Beispiel 1.6.4. Gegeben ein von Null verschiedener Kring R und die Kringerweiterung $R[T] \subset R[T, T^{-1}]$ ist T^{-1} nicht ganz über $R[T]$.

1.6.5. Ich erinnere die in [AL] 3.8.4 eingeführten Begriffsbildungen und Notationen. Sei A ein Kring. Unter einem A**-Kring** verstehen wir ein Paar (B, φ) bestehend aus einem Kring B und einem Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$. Ist (C, ψ) ein weiterer A-Kring, so verstehen wir unter einem **Homomorphismus von** A**-Kringen** $B \to C$ einen Kringhomomorphismus $\eta : B \to C$ mit $\eta \circ \varphi = \psi$. Alternativ sprechen wir auch von einem **Homomorphismus über** A. Die Menge aller solchen Homomorphismen notieren wir

$$\mathrm{Kring}^A(B, C)$$

Einen bijektiven Kringhomomorphismus über A nennen wir auch einen **Isomorphismus von** A**-Kringen** oder einen **Isomorphismus über** A.

Ergänzung 1.6.6. Unser Kring^A ist ebenso wie seine nichtkommutative Variante Ring^A ein Spezialfall der allgemeinen kategorientheoretischen Konstruktion [TF] 2.2.2.4 der Kategorie $\mathcal{C}^X$ der „Objekte unter X“ zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem ausgezeichneten Objekt X.

1.6.7. Gegeben ein Kring k verstehe ich wie in [LA2] 9.9.1 unter einer k**-Algebra** einen k-Modul M mitsamt einer k-bilinearen Abbildung $M \times M \to M$. Hier bedeutet „bilinear“ wie im Fall eines Körpers k die Linearität in beiden Einträgen. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Konvention, daß man eine Algebra stets als assoziativ versteht, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht. Ist die bilineare Verknüpfung assoziativ und besitzt M dazu noch ein neutrales Element, so nenne ich M eine k**-Ringalgebra**, und ist sie zusätzlich auch noch kommutativ, eine k**-Kringalgebra**.

1.6.8 (k**-Kringe und** k**-Kringalgebren**). In der hier gewählten Terminologie ist für jeden Kring k eine k-Kringalgebra dasselbe wie ein k-Kring: Die Multiplikation eines k-Krings (B, φ) zusammen mit der von φ induzierten k-Modulstruktur macht jeden k-Kring zu einer k-Kringalgebra, und umgekehrt wird jede k-Kringalgebra M zu einem k-Kring durch den Kringhomomorphismus $\varphi : k \to M$, $\lambda \mapsto \lambda 1_M$. Ich verwende die Bezeichnung als Kringalgebra insbesondere, wenn ich den Grundring k nicht explizit erwähnen will. Viele Autoren, deren Fokus mehr auf der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra liegt, nennen letztere Struktur kurzerhand eine „k-Algebra“. Ich verwende diese Terminologie nicht, da bei mir auch nicht-kommutative Algebren und nicht-unitäre Algebren eine wichtige Rolle spielen. Allerdings will ich der Konvention folgen, daß eine Algebra als assoziativ angenommen sei, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht.

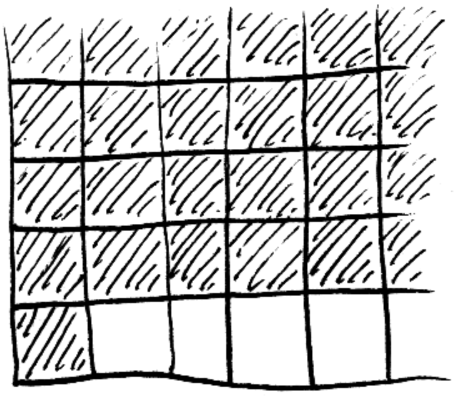
1.6.9 (**Ringendliche Erweiterungen noetherscher Kringe sind noethersch**). Ist ein Kring B ringendlich über einem noetherschen Kring A, so ist auch B selbst noethersch. Man folgert das mit dem Hilbert'schen Basissatz 1.5.11 zunächst für einen Polynomring in endlich vielen Variablen über A und dann mit 1.5.17 für Quotienten solcher Polynomringe.

Satz 1.6.10 (**Ringendliche Körpererweiterungen**). *Jede ringendliche Körpererweiterung ist modulendlich. In anderen Worten ist also jede Körpererweiterung, die endlich erzeugt ist als Ringerweiterung, bereits endlichdimensional über dem Grundkörper.*

1.6.11. Wegen seiner engen Verwandtschaft zum Nullstellensatz heißt dieser Satz in vielen Quellen der **körpertheoretische Nullstellensatz**. Sein Beweis ist, soweit ich sehen kann, unabhängig vom Auswahlaxiom. Einen alternativen Beweis, der auf dem Noether'schen Normalisierungslemma und Eigenschaften ganzer Kringerweiterungen basiert, diskutieren wir in 5.4.9.

Beweis im Fall eines überabzählbaren Grundkörpers. Sei $k \subset L$ unsere Körpererweiterung. Ist L ein endlich erzeugter k-Ring, so ist L von abzählbarer Dimension über k. Gäbe es nun ein $t \in L \backslash k$, das transzendent ist über k, so hätten wir mit $T \mapsto t$ eine Einbettung $k(T) \hookrightarrow L$. Der Funktionenkörper $k(T)$ hat aber überabzählbare Dimension über k, da die Familie der Brüche $(T - \lambda)^{-1}$ parametrisiert durch $\lambda \in k$ linear unabhängig ist über k, vergleiche [AL] 3.7.16. Widerspruch! □

Beweis im Allgemeinen. Sei $k \subset L$ unsere ringendliche Körpererweiterung. Seien $e_1, \ldots, e_n$ Erzeuger des k-Krings L, in Formeln $L = k[e_1, \ldots, e_n]$. Wir argumentieren mit Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist unproblematisch, der Polynomring in einer Veränderlichen ist eben kein Körper und jeder Quotient davon nach



Sind $A \subset B \subset C$ Kringe mit C ringendlich über A, so muß B keineswegs ringendlich über A sein. Als Gegenbeispiel betrachte man etwa $\mathbb{C} \subset B \subset \mathbb{C}[x, y]$ mit B dem Ring aller Polynomfunktionen, deren Einschränkung auf die y-Achse konstant ist. Dies Bild illustriert, wie ich mir diesen Ring veranschauliche: Jedes ausgemalte Kästchen mit unterer linker Ecke (i, j) steht für einen Basisvektor $x^i y^j$ von B.

einem von Null verschiedenen Ideal ist endlichdimensional als k-Vektorraum. Für den Induktionsschritt dürfen wir annehmen, daß wir bereits wissen, daß L modulendlich ist über dem von e_1 und k erzeugten Teilkörper $K := k(e_1) \subset L$. Ist e_1 algebraisch über k, so sind wir wieder fertig. Also dürfen wir e_1 transzendent über k annehmen, in Formeln $K \cong k('T)$. Betrachten wir nun den Teilring $A \subset K$, der von k und e_1 und den Koeffizienten der Minimalpolynome über K von $e_2, \ldots, e_n$ erzeugt wird, so ist A per definitionem ringendlich über k. Wir haben also unseren Funktionenkörper K eingebettet in ein Sandwich von Kringen

$$k \subset A \subset K \subset L$$

mit L modulendlich über A nach Übung 1.6.14 und A ringendlich über k und damit nach 1.6.9 insbesondere A noethersch. Also muß auch K modulendlich sein über A und damit ringendlich über k. Das ist nun der gesuchte Widerspruch, denn ein Funktionenkörper $K \cong k('T)$ kann nie ringendlich über seinem Grundkörper k sein: Es gibt ja nach [AL] 2.4.31 unendlich viele irreduzible Polynome in $k['T]$, und nur endlich viele davon könnten in den Nennern von endlich vielen hypothetischen Erzeugern des k-Krings $k('T)$ vorkommen. □

Vorschau 1.6.12. Einen alternativen Beweis geben wir im Anschluß an 5.5.3.

Übungen

Übung 1.6.13. Seien $A \subset B \subset C$ Kringerweiterungen. Man zeige: Ist C modulendlich über B und B modulendlich über A, so ist C bereits modulendlich über A. Ist C ringendlich über B und B ringendlich über A, so ist C bereits ringendlich über A.

Übung 1.6.14. Wird ein A-Kring B als A-Kring erzeugt von endlich vielen über A ganzen Elementen, haben wir also in Formeln $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ mit x_i ganz über A für $1 \leq i \leq n$, so ist er bereits modulendlich über A. Hinweis: Man beginne mit dem Fall eines einzigen Erzeugers und verwende dann 1.6.13.

Übung 1.6.15. Man bestimme alle Elemente von $\mathbb{Q}$, die ganz sind über $\mathbb{Z}$. Sei k ein Körper. Man bestimme alle Elemente von $k(T_1, \ldots, T_n)$, die ganz sind über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Übung 1.6.16. Man zeige, daß $\mathbb{C}[x, y]/\langle y^2 - x^3 \rangle$ ein Integritätsbereich ist, und daß die über diesem Ring ganzen Elemente seines Quotientenkörpers selbst einen Ring bilden, der isomorph ist zum Polynomring in einer Veränderlichen.

1.7 Beweis des Hilbert'schen Nullstellensatzes

1.7.1. In einem unvoreingenommenen Sprachgebrauch hat jeder Ring genau ein maximales Ideal, nämlich das Ideal, das aus allen Elementen unseres Rings besteht. Ich erinnere jedoch daran, daß wir in [AL] 2.5.4 vereinbart hatten, vielmehr die maximalen *echten* Ideale eines Rings seine „maximalen Ideale" zu nennen.

1.7.2. Die Menge der maximalen Ideale eines Rings A notieren wir

$$\operatorname{Max} A$$

Statt $\operatorname{Max} A$ findet man für die Menge der maximalen Ideale eines Rings A auch oft Notationen wie $\operatorname{Spec}_{\max} A$ oder $\operatorname{Specm} A$, die aber im hier verfolgten Aufbau der Theorie erst in 4.2.4 verständlich werden.

1.7.3. Für noethersche Ringe ist es einigermaßen offensichtlich, daß sich jedes vom ganzen Ring verschiedene Ideal zu einem maximalen Ideal vergrößern läßt: Das System aller echten Ideale ist dann nicht leer und besitzt folglich mindestens ein maximales Element. Man beachte jedoch, daß auch hierbei schon eine schwache Form des Auswahlaxioms eingeht, nämlich beim Beweis der Äquivalenz der verschiedenen Charakterisierungen noetherscher Moduln 1.5.13. In allgemeinen Ringen folgt das aus dem Zorn'schen Lemma, wie nun gleich gezeigt werden soll.

Satz 1.7.4 (Existenz von maximalen Idealen). *In jedem von Null verschiedenen Ring gibt es mindestens ein maximales Ideal. Allgemeiner läßt sich in einem beliebigen Ring jedes Ideal, das nicht der ganze Ring ist, vergrößern zu einem maximalen Ideal unseres Rings.*

Beweis. Sei R unser Ring und $\mathfrak{a} \neq R$ unser Ideal. Wir betrachten das System aller Ideale von R, die $\mathfrak{a}$ umfassen und nicht ganz R sind oder, gleichbedeutend, nicht die 1 von R enthalten. Dieses System von Teilmengen ist offensichtlich stabil unter aufsteigenden Vereinigungen. Jetzt folgt der Satz aus dem Zorn'schen Lemma in der Gestalt [LA1] 1.9.18. □

Ergänzung 1.7.5. In der Logik wird gezeigt, daß die Annahme, jedes Ideal eines Krings möge sich zu einem maximalen Ideal vergrößern lassen, echt schwächer ist als das Auswahlaxiom. Der Beweis scheint allerdings nicht ganz einfach zu sein. Selbst im Fall noetherscher Ringe scheint es mir ganz ohne Varianten des Auswahlaxioms nicht möglich, die Existenz maximaler Ideale zu zeigen.

1.7.6. Ist $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so erhalten wir eine Bijektion

$$\{\text{Ideale in } R, \text{die } \ker\varphi \text{ umfassen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Ideale in } S\}$$

vermittels der Abbildungen $I \mapsto \varphi(I)$ für $I \subset R$ beziehungsweise in der Gegenrichtung $J \mapsto \varphi^{-1}(J)$ für $J \subset S$. Insbesondere liefert das Zurückholen mit einem surjektiven Ringhomomorphismus eine Injektion $\operatorname{Max} S \hookrightarrow \operatorname{Max} R$, $\mathfrak{m} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$.

Lemma 1.7.7. *Ein Kring ist ein Körper genau dann, wenn in ihm das Nullideal ein maximales Ideal ist. Ein Ideal in einem Kring ist ein maximales Ideal genau dann, wenn der Quotientenring nach besagtem Ideal ein Körper ist.*

Beweis. Die zweite Aussage und damit implizit auch die Erste haben wir bereits als [AL] 2.5.6 bewiesen. Hier geben wir noch eine Beweisalternative. In einem Körper ist natürlich das Nullideal maximal. Ist umgekehrt das Nullideal ein maximales Ideal, so gilt $k = \langle 1\rangle \neq \langle 0\rangle$ und damit $1 \neq 0$. Weiter gilt $\langle a\rangle = k$ für jedes $a \neq 0$, also gibt es für jedes $a \neq 0$ ein b mit $ab = 1$. Wenden wir nun die Erkenntnis 1.7.6 an auf die Surjektion $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ für irgendein Ideal $\mathfrak{m}$ von R, so folgt, daß $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal ist genau dann, wenn $\langle 0\rangle \subset R/\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. Das Nullideal in einem Kring ist aber, wie bereits gezeigt, maximal genau dann, wenn besagter Kring ein Körper ist. □

1.7.8. Die nun folgenden Lemmata 1.7.9 und 1.7.11 formulieren einfache Konsequenzen des Nullstellensatzes 1.1.6. Da wir uns jedoch beim Beweis des Nullstellensatzes auf diese Lemmata stützen wollen, dürfen wir sie hier nicht aus dem Nullstellensatz herleiten. Stattdessen folgern wir sie aus dem bereits bewiesenen Satz über ringendliche Körpererweiterungen 1.6.10.

Lemma 1.7.9 (Maximale Ideale in Polynomringen). *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die maximalen Ideale im Polynomring in n Variablen $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau die Verschwindungsideale von Punkten des k^n. In Formeln liefert das Bilden des Verschwindungsideals also eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max} k[T_1, \ldots, T_n] \\ x & \mapsto & \mathcal{I}(x) \end{array}$$

1.7.10. Da jeder Punkt des k^n abgeschlossen ist, können wir die inverse Abbildung beschreiben durch die Abbildungsvorschrift $\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Ist k ein Körper und $x \in k^n$ ein Punkt, so ist ganz offensichtlich $\mathcal{I}(x) = \langle T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n \rangle \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Ideal: In der Tat induziert das Auswerten bei x einen Isomorphismus $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(x) \xrightarrow{\sim} k$. Ist umgekehrt $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Ideal, so betrachten wir den Körper $L := k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$. Wir haben natürlich einen Ringhomomorphismus $\varphi : k \to L$ und die Nebenklassen der T_i erzeugen L als k-Algebra. Mit dem Satz über ringendliche Körpererweiterungen 1.6.10 folgt, daß $\varphi : k \hookrightarrow L$ eine algebraische Körpererweiterung sein muß. Aus unserer Annahme k algebraisch abgeschlossen folgt dann weiter, daß φ eine Bijektion sein muß. Ist $x_i \in k$ das Urbild der Nebenklasse $\bar{T}_i \in L$ von T_i unter dieser Bijektion, so folgt $T_i - x_i \in \mathfrak{m}$. Bezeichnet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ den Punkt mit den Koordinaten x_i, so folgt $\mathcal{I}(x) \subset \mathfrak{m}$ und damit $\mathcal{I}(x) = \mathfrak{m}$. □

Lemma 1.7.11 (Ideale ohne simultane Nullstellen). *Hat ein Ideal in einem Polynomring in endlich vielen Variablen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine Nullstelle, so ist besagtes Ideal schon der ganze Polynomring.*

Beweis. Bezeichnet $k = \bar{k}$ unseren Körper und $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ unser Ideal, so behauptet unser Lemma in Formeln

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a} = k[T_1, \ldots, T_n]$$

Das zeigen wir durch Widerspruch: Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ nicht der ganze Ring, so gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ über $\mathfrak{a}$ und wir folgern aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ erst $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ und dann mit 1.7.9 weiter $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$. □

1.7.12. Nun erinnern und beweisen wir den bereits in 1.1.6 angekündigten Hilbert'schen Nullstellensatz.

Satz 1.7.13 (Hilbert'scher Nullstellensatz). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Ist $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom, das auf der Nullstellenmenge unseres Ideals verschwindet, so liegt eine Potenz unseres Polynoms bereits selbst in besagtem Ideal, in Formeln*

$$\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \;\Rightarrow\; f^N \in \mathfrak{a} \text{ für } N \gg 0$$

Beweis. Wir verwenden den sogenannten **Rabinovitch-Trick** und betrachten in dem um eine Variable T vergrößerten Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n, T]$ das von $\mathfrak{a}$ und $fT - 1$ erzeugte Ideal $\mathfrak{b}$. Da wir $\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ angenommen hatten, besitzt dies Ideal $\mathfrak{b}$ überhaupt keine simultanen Nullstellen. Anschaulich gesprochen entweicht $\mathcal{Z}(fT - 1)$ bei jeder Nullstelle von f in Richtung der zusätzlichen Koordinate T ins Unendliche und die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$ im um eine Variable größeren Polynomring ist das kartesische Produkt von $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ mit der zusätzlichen

Koordinatenachse: Der Schnitt dieser beiden Mengen ist dann offensichtlich leer. Nach 1.7.11 gilt also in unserem um eine Variable vergrößerten Polynomring eine Gleichung der Gestalt

$$r_0(fT - 1) + r_1 f_1 + \ldots + r_m f_m = 1$$

mit $f_j \in \mathfrak{a}$ und r_j Elementen unseres um eine Variable vergrößerten Polynomrings. Nun durften wir sicher von Anfang an $f \neq 0$ annehmen. Setzen wir dann in unserer Gleichung für T das Element f^{-1} des Funktionenkörpers $k(T_1, \ldots, T_n)$ ein, wenden also den Ringhomomorphismus $k[T_1, \ldots, T_n, T] \to k(T_1, \ldots, T_n)$ mit $T \mapsto f^{-1}$ an, so ergibt sich in diesem Funktionenkörper und sogar bereits in seinem Teilring $k[T_1, \ldots, T_n, f^{-1}]$ eine Gleichung der Gestalt

$$s_1 f_1 + \ldots + s_m f_m = 1$$

Dabei gehen die $s_j \in k[T_1, \ldots, T_n, f^{-1}]$ aus den r_j hervor durch Einsetzen von f^{-1} für T. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Potenz f^N von f erhalten wir schließlich eine Gleichung in $k[T_1, \ldots, T_n]$ der Gestalt

$$c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m = f^N$$

mit $c_j = f^N s_j$ Elementen unseres ursprünglichen Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$. Diese Gleichung zeigt dann $f^N \in \mathfrak{a}$. □

Definition 1.7.14. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem Kring R definiert man sein **Radikal** $\sqrt{\mathfrak{a}}$ durch die Vorschrift $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid f^N \in \mathfrak{a} \text{ für } N \gg 0\}$. Ein Ideal heißt ein **Radikalideal**, wenn es sein eigenes Radikal ist.

1.7.15 (**Diskussion der Terminologie**). In [HL] 31.3.4.8 führen wir den Begriff des „Radikals eines Moduls“ ein. Das Radikal eines Ideals im obigen Sinne ist etwas völlig anderes als sein Radikal als Modul. Wenn es nötig sein sollte, werde ich unterscheiden zwischen dem **Potenzradikal** und dem **Modulradikal** eines Ideals.

1.7.16 (**Abgeschlossene Mengen und Radikalideale**). Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ nach dem Nullstellensatz die Formel $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Andererseits wissen wir schon lange um die Formel $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) = \bar{X}$ für Teilmengen $X \subset k^n$. Die Vorschriften $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ liefern also zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge aller Zariski-abgeschlossenen Teilmengen des k^n und der Menge aller Radikalideale in $k[T_1, \ldots, T_n]$, in Formeln

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Radikalideale} \\ \mathfrak{b} \subset k[T_1, \ldots, T_n] \end{matrix} \right\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{Z}}{\underset{\sim}{\rightleftarrows}}} \left\{ \begin{matrix} \text{Algebraische Teilmengen} \\ Z \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^n \end{matrix} \right\}$$

Übungen

Übung 1.7.17. Ist k algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, so induziert die Bijektion $k^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} k[T_1, \ldots, T_n]$ aus Lemma 1.7.9 eine Bijektion $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max}(k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a})$.

Übung 1.7.18. Warum kann man nicht mit demselben Argument wie in 1.7.4 zeigen, daß jede Gruppe eine maximale echte Untergruppe besitzt? Man zeige auch, daß die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ keine maximale echte Untergruppe besitzt.

Übung 1.7.19. Gegeben ein kommutativer von Null verschiedener Ring R folgt aus $R^n \cong R^m$ schon $n = m$. Hinweis: Man benutze 1.4.9 und wähle mit 1.7.4 ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, so daß $R/\mathfrak{a}$ nach 1.7.7 ein Körper ist. Ein alternativer Beweis, der ohne das Zorn'sche Lemma auskommt, wird in 2.3.10 gegeben. Der hier skizzierte Beweis zeigt jedoch mit [AL] 5.3.4 allgemeiner für beliebige Mengen I, J, daß aus der Isomorphie von freien Moduln $RI \cong RJ$ folgt, daß I und J dieselbe Kardinalität haben.

Übung 1.7.20. Der Schnitt aller maximalen Ideale eines Krings R kann auch beschrieben werden als die Menge aller Elemente unseres Rings mit der Eigenschaft, daß die Summe der Eins mit einem beliebigen Vielfachen unseres Elements stets eine Einheit ist, in Formeln

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R} \mathfrak{m} = \{a \in R \mid (ra + 1) \in R^\times \ \forall r \in R\}$$

Diese Menge heißt das **Jacobson-Radikal** unseres Krings. Im Fall nichtkommutativer Ringe versteht man unter dem Jacobson-Radikal feiner den Schnitt aller maximalen Links- oder gleichbedeutend aller maximalen Rechtsideale.

Übung 1.7.21. $(k = \bar{k})$. In Erweiterung von 1.1.23 zeige man, daß ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ genau dann von endlicher Kodimension ist, wenn es höchstens endlich viele simultane Nullstellen besitzt, in Formeln

$$|\mathcal{Z}(\mathfrak{a})| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{codim}_k(\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]) < \infty$$

Ergänzende Übung 1.7.22. Noch allgemeiner als in 1.7.21 zeige man für einen beliebigen Körper k, daß ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ genau dann von endlicher Kodimension ist, wenn es nur in endlich vielen maximalen Idealen enthalten ist.

Übung 1.7.23. Man zeige, daß für ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines Krings R das Radikal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ wieder ein Ideal von R ist und daß $\sqrt{\mathfrak{a}}$ sein eigenes Radikal ist.

Übung 1.7.24. $(k = \bar{k})$. Gegeben ein ringendlicher k-Kring A liefert das Bilden des Kerns $\varphi \mapsto \ker \varphi$ eine Bijektion $\operatorname{Kring}^k(A, k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} A$.

Übung 1.7.25. Seien k ein Körper und A ein ringendlicher k-Kring. Man zeige: Ist der Quotient von A nach seinem Nilradikal $A/\sqrt{0}$ endlichdimensional über k, so ist bereits A selbst endlichdimensional über k.

2 Mehr zu Moduln

Die Resultate dieses Abschnitts werden erst nach und nach gebraucht. Ich schlage vor, ihn hier zu überspringen und dieses eher technische Material erst bei Bedarf nachzuholen.

2.1 Summen und Produkte von Moduln

2.1.1. Die folgenden Konstruktionen verallgemeinern unsere Konstruktionen im Fall von Vektorräumen aus [LA2] 9.8.

Definition 2.1.2. Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Moduln über einem Ring R bilden wir zwei neue R-Moduln, das **Produkt** $\prod M_\lambda$ und die **direkte Summe** oder kurz **Summe** $\bigoplus M_\lambda$ durch die Regeln

$$\begin{array}{rcl} \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda & = & \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda\} \\ \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda & = & \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda, \text{ nur endlich viele } m_\lambda \text{ sind nicht null}\} \end{array}$$

mit der offensichtlichen komponentenweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren aus R.

2.1.3. Für eine endliche Familie von Moduln $M_1, \ldots, M_s$ stimmen die direkte Summe und das Produkt überein. Wir benutzen dann alternativ die Notationen

$$M_1 \times \ldots \times M_s = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$$

2.1.4. Das Produkt beziehungsweise die Summe sind das Produkt beziehungsweise Koprodukt in der Kategorie der R-Moduln im Sinne unserer allgemeinen Definitionen [LA2] 9.7.1 beziehungsweise [LA2] 9.7.16. Ausformuliert bedeutet das: Die offensichtlichen Einbettungen und Projektionen sind Homomorphismen

$$\mathrm{in}_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \twoheadrightarrow M_\lambda$$

und ist M ein weiterer R-Modul, so induzieren die durch Vorschalten der in_λ beziehungsweise Nachschalten der pr_λ gegebenen Abbildungen Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, M) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M) \\ f & \mapsto & (f \circ \mathrm{in}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, M_\lambda) \\ f & \mapsto & (\mathrm{pr}_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

2.1.5. Gegeben eine Familie $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Untermoduln eines Moduls M bezeichnet man den von ihrer Vereinigung erzeugten Untermodul von M auch als ihre **Summe** und notiert ihn $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Diese Summe kann auch interpretiert werden als das Bild eines natürlichen Homomorphismus $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$ von der direkten Summe nach M. Ist dieser Homomorphismus injektiv, so sagen wir, die „Summe der Untermoduln M_λ sei direkt" und schreiben statt $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ auch $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Zwei Untermoduln $N_1, N_2 \subset M$ heißen **komplementär** genau dann, wenn ihre Einbettungen einen Isomorphismus $N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\sim} M$ induzieren. Ein Untermodul, der ein Komplement besitzt, heißt ein **Summand**.

2.1.6. Auch bei Moduln über Ringen nennt man eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **linear unabhängig** genau dann, wenn nur die triviale endliche Linearkombination verschwindet, wenn also für eine Familie $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Elementen unseres Rings mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Mitgliedern gilt

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda m_\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{alle } r_\lambda \text{ sind null}$$

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt wie bei Vektorräumen eine **Basis**, und wie dort erklären wir die Begriffsvarianten einer **Basis als Teilmenge**, einer **Basis als Familie**, und einer **angeordneten Basis**. Allerdings besitzen keineswegs alle Moduln eine Basis, wie man das von Vektorräumen gewohnt ist. Die Moduln, die eine Basis besitzen, nennt man **freie Moduln**. Die Moduln, die eine Basis bestehend aus genau einem Element besitzen, nenne ich **frei zyklisch**.

Beispiel 2.1.7. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul, aber durchaus ein freier Modul über dem Ring $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Jede Familie von Elementen eines Moduls über dem Nullring, der notwendig aus genau einem Element besteht, ist eine Basis.

Beispiel 2.1.8. Für jede Menge Λ ist der Modul

$$R\Lambda := \{f : \Lambda \to R \mid f(\lambda) = 0 \text{ für fast alle } \lambda\}$$

frei, denn die Abbildungen, die an einer Stelle den Wert 1 annehmen und sonst den Wert Null, bilden eine Basis. Wir nennen $R\Lambda$ den **freien R-Modul über der Menge Λ**. Nach unseren Definitionen ist umgekehrt eine Familie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in einem Modul M eine Basis genau dann, wenn die Abbildung $R\Lambda \to M$ mit $(r_\lambda) \mapsto \sum r_\lambda m_\lambda$ ein Isomorphismus ist.

2.1.9 (**Ungewohnte Isomorphismen zwischen freien Moduln**). Für beliebige Ringe R folgt aus $R^n \cong R^m$ im allgemeinen keineswegs $n = m$. Das einfachste Gegenbeispiel ist der Nullring, und das ist nach 2.3.10 auch das einzige kommutative Gegenbeispiel. Unter den nicht kommutativen Ringen gibt es jedoch auch interessantere Gegenbeispiele. Betrachten wir etwa zu einem beliebigen Körper den freien Vektorraum V über der Menge $\mathbb{N}$, so gibt es einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V \oplus V$, und für den Endomorphismenring $R = \operatorname{End} V$ erhalten wir einen Isomorphismus von R-Moduln $R \cong R^2$ als die Verknüpfung $R = \operatorname{End} V \cong \operatorname{Hom}(V \oplus V, V) \cong R \oplus R$.

Ergänzung 2.1.10. Wir erhalten mit 2.1.9 auch ein Paar $A \subsetneq B$ bestehend aus einem Ring mit einem echten Teilring und der Eigenschaft, daß dennoch ein Isomorphismus $A \cong B$ von A-Linksmoduln existiert: Betrachten wir R wie in 2.1.9 und den Teilring $(R \times R) \subset \operatorname{Mat}(2; R)$ der Diagonalmatrizen, haben wir einerseits einen Isomorphismus $(R \times R)^2 \cong \operatorname{Mat}(2; R)$ von $(R \times R)$-Linksmoduln, soviel gilt sogar für jeden Ring R, und andererseits gibt es nach den vorherigen Überlegungen auch einen Isomorphismus $(R \times R) \cong (R \times R)^2$ von $(R \times R)$-Linksmoduln.

Lemma 2.1.11 (Kriterium für die Direktheit einer Summe). *Gegeben eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von Untergruppen einer abelschen Gruppe V ist der natürliche Homomorphismus $\bigoplus_{i \in I} V_i \to V$ eine Injektion genau dann, wenn für jedes $i \in I$ gilt*

$$V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0$$

Beweis. Ist der natürliche Homomorphismus eine Injektion, so offensichtlich $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0$. Ist der natürliche Homomorphismus keine Injektion, so liegt ein von Null verschiedenes Element $v = (v_i)_{i \in I}$ der direkten Summe in seinem Kern. Dieses Element hat eine von Null verschiedene Komponente, die Menge $K := \{i \mid v_i \neq 0\}$ ist also endlich und nicht leer. Per definitionem gilt nun $\sum_{k \in K} v_k = 0$. Wählen wir $i \in K$, so folgt $0 \neq -v_i = \sum_{j \neq i} v_j$ und damit $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j \neq 0$. □

Satz* 2.1.12. *Für jede freie abelsche Gruppe F ist die offensichtliche Abbildung in das Bidual ein Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} F^{**}$.*

Beweis. Wir zeigen das nur für $F = \mathbb{Z}[T]$, der allgemeine Fall geht genauso. Das Dual F^* ist in diesem Fall ein Produkt abzählbar vieler Kopien von $\mathbb{Z}$ und heißt die **Baer-Specker-Gruppe**. Wir verwenden im folgenden die Inkarnation von F^* als der Potenzreihenring. In Formeln ausgedrückt haben wir eine bilineare Abbildung

$$\mathbb{Z}[\![T]\!] \times \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}$$

gegeben durch $(P, Q) \mapsto$ (der Koeffizient von T^0 in $P\bar{Q}$), wobei $\bar{Q}$ aus Q entstehe durch Substitution von T^{-1} für T. Diese Paarung liefert offensichtlich einen Isomorphismus $\mathbb{Z}[\![T]\!] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$. Es gilt zu zeigen, daß sie auch einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[T] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\![T]\!], \mathbb{Z})$$

induziert. Um das einzusehen, zeigt man zunächst

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\![T]\!]/\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}) = 0$$

Jeder Homomorphismus $f : \mathbb{Z}[\![T]\!]/\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}$ macht jede Nebenklasse einer Reihe der Gestalt $\sum b_i 3^i T^i$ zu Null, da seine Werte darauf durch jede Potenz von drei teilbar sein müssen. Auf der Nebenklasse einer beliebigen Reihe $\sum a_i T^i$ kann f also nur gerade Zahlen als Werte annehmen, da $\sum a_i T^i + \sum_{a_i \text{ ungerade}} 3^i T^i$ stets das Doppelte einer anderen Reihe ist. Das zeigt, daß f Null sein muß. Jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}[\![T]\!] \to \mathbb{Z}$ ist also durch seine Restriktion auf $\mathbb{Z}[T]$ bereits eindeutig festgelegt. Es bleibt zu zeigen, daß eine Linearform $f : \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}$, die nicht auf fast allen T^i Null ist, nicht auf $\mathbb{Z}[\![T]\!]$ fortgesetzt werden kann. Ist aber f auf unendlich vielen T^i nicht Null, so finden wir eine monoton wachsende Folge $\alpha(0) \leq \alpha(1) \leq \ldots$ von natürlichen Zahlen mit $c_n := |f(T^0)2^{\alpha(0)} + \ldots + f(T^n)2^{\alpha(n)}| \to \infty$ für $n \to \infty$ und $2^{\alpha(n+1)} > 2c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Werten wir dann unsere Linearform auf der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha(i)} T^i$ aus, so muß das Ergebnis im Betrag mindestens c_n sein für alle n, wie man durch Aufteilen in einen Anfang und einen Schwanz aus $2^{\alpha(n+1)}\mathbb{Z}[\![T]\!]$ sieht, und das ist unmöglich. $\square$

Übungen

Übung 2.1.13. Man zeige: Jeder endlich erzeugte Modul über einem Schiefkörper D ist isomorph zu D^n für wohlbestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Man kopiere die Argumentation aus der linearen Algebra.

Übung 2.1.14. Sei k ein von Null verschiedener Ring. Man gebe ein minimales alias unverkürzbares Erzeugendensystem des Rings $R := (k \times k)$ als Linksmodul über sich selber an, das keine Basis ist. Man gebe eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{Z}$ als Linksmodul über sich selber an, die keine Basis ist.

Übung 2.1.15. Sei k ein Ring und $k[\varepsilon] := k[T]/\langle T^2 \rangle$ mit $\varepsilon = \bar{T}$ der Ring der **dualen Zahlen über** k. Man zeige: Ein $k[\varepsilon]$-Modul ist frei genau dann, wenn gilt: $M/\varepsilon M$ ist ein freier k-Modul und die Multiplikation mit ε induziert einen Isomorphismus

$$M/\varepsilon M \xrightarrow{\sim} \varepsilon M$$

Übung 2.1.16. Jeder Modul ist isomorph zu einem Quotient eines freien Moduls.

Übung 2.1.17. Gegeben Moduln $M_1, \ldots, M_m$ und $N_1, \ldots, N_n$ über einem Ring R haben wir eine natürliche Identifikation

$$\operatorname{Hom}_R(M_1 \oplus \ldots \oplus M_m, N_1 \oplus \ldots \oplus N_n) \xrightarrow{\sim} \prod_{i,j} \operatorname{Hom}_R(M_j, N_i)$$

Wir werden die Elemente einer endlichen direkten Summe oft als Spaltenvetoren von Elementen der Summanden auffassen und die Homomorphismen zwischen direkten Summen als Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden. Das erlaubt uns, die Komposition solcher Homomorphismen mit dem Formalismus der Matrixmultiplikation zu berechnen.

Übung 2.1.18. Gegeben eine Familie von Moduln M_{ij} mit $i \in I$, $j \in J$ haben wir stets eine kanonische Injektion $\bigoplus_i(\prod_j M_{ji}) \hookrightarrow \prod_j(\bigoplus_i M_{ji})$, die im allgemeinen aber kein Isomorphismus ist.

Übung 2.1.19. Das folgende verallgemeinert [LA2] 6.2.24. Sei R ein Ring. Man nennt einen Homomorphismus von R-Moduln $M \twoheadrightarrow M''$ **linksspaltend**, wenn er ein Rechtsinverses besitzt, und nennt solch ein Rechtsinverses dann eine **Spaltung**. Man zeige: Ist $\varphi : M \twoheadrightarrow M''$ ein Homomorphismus, $M' \subset M$ sein Kern und $\psi : M'' \to M$ ein Rechtsinverses von φ, so erhalten wir vermittels der Vorschrift $(a', a'') \mapsto a' + \psi(a'')$ einen Isomorphismus $M' \times M'' \xrightarrow{\sim} M$. Man nennt einen Modulhomomorphismus $M' \hookrightarrow M$ **rechtsspaltend**, wenn er ein Linksinverses besitzt, und nennt solch ein Linksinverses ψ auch eine **Spaltung**. Für $s : M \twoheadrightarrow M''$ die Surjektion auf den Kokern eines rechtsspaltenden Morphismus zeige man, daß (ψ, s) einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} M' \times M''$ liefern.

2.1.20. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von Moduln $A \overset{r}{\hookrightarrow} B \overset{s}{\twoheadrightarrow} C$ sind gleichbedeutend: (1) r besitzt ein Linksinverses, (2) s besitzt ein Rechtsinverses und (3) es gibt einen Isomorphismus der Gestalt $(\mathrm{id}_A, f, \mathrm{id}_C)$ von unserer Sequenz mit der Sequenz

$$A \overset{\mathrm{in}_1}{\hookrightarrow} A \oplus C \overset{\mathrm{pr}_2}{\twoheadrightarrow} C$$

Das ist eine Umformulierung der Übungen **??** und **??**. Eine kurze exakte Sequenzen mit diesen Eigenschaften heißt eine **spaltende** kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Die kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation mit Zwei als erster Abbildung spaltet nicht. Das ist eine offensichtliche Verallgemeinerung der entsprechenden Aussagen für abelsche Gruppen [LA2] 6.7.10.

Übung 2.1.21. Sei R ein Ring. Für jeden surjektiven Homomorphismus $f : M \twoheadrightarrow F$ von einem R-Modul M auf einen freien R-Modul F existiert eine Spaltung, als da heißt ein Homomorphismus $s : F \to M$ mit $fs = \mathrm{id}_F$.

2.2 Endliche Produkte von Ringen

2.2.1. Unter dem **Zentrum** $\mathrm{Z}(R)$ eines Rings R verstehen wir die Menge derjenigen Elemente von R, die mit allen anderen Elementen kommutieren, in Formeln

$$\mathrm{Z}(R) = \{z \in R \mid za = az \ \ \forall a \in R\}$$

Das Zentrum ist stets ein kommutativer Teilring von R.

2.2.2. Gegeben eine Familie von Ringen $(A_i)_{i \in I}$ können wir den Produktring $A := \prod_{i \in I} A_i$ bilden. Die Elemente e_i mit einer 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst liegen im Zentrum des Produktrings und die von den e_i erzeugten zweiseitigen Ideale $A\mathrm{e}_iA$ werden unter den Projektionen $\mathrm{pr}_j : A \to A_j$ bijektiv auf A_i

abgebildet im Fall $i = j$ und auf Null sonst. Des weiteren gilt $\mathrm{e}_i \mathrm{e}_j = 0$ für $i \neq j$ und $\mathrm{e}_i^2 = \mathrm{e}_i$. Ist unsere Familie endlich, so gilt zusätzlich $1 = \sum_{i \in I} \mathrm{e}_i$.

2.2.3. Seien umgekehrt ein Ring A gegeben und darin eine endliche Familie von zentralen Idempotenten $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ mit $\mathrm{e}_i \mathrm{e}_j = 0$ falls $i \neq j$ und

$$1 = \mathrm{e}_1 + \ldots + \mathrm{e}_n$$

Wir nennen eine solche Darstellung eine **Zerlegung der Eins in paarweise orthogonale zentrale Idempotente**. Sie liefert eine Zerlegung

$$A = A\mathrm{e}_1 \oplus \ldots \oplus A\mathrm{e}_n$$

in eine direkte Summe von Idealen, die jeweils selbst Ringe sind mit Einselement e_i, und sogar einen Ringisomorphismus

$$A\mathrm{e}_1 \times \ldots \times A\mathrm{e}_n \xrightarrow{\sim} A$$

Fassen wir in einer derartigen Zerlegung der Eins einige Summanden zusammen, so sprechen wir von einer **Vergröberung** unserer Zerlegung. Natürlich haben je zwei derartige Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung, bestehend aus allen Produkten von einem Idempotenten der einen Zerlegung und einem Idempotenten der anderen Zerlegung. Existiert eine feinste Zerlegung mit von Null verschiedenen Summanden, so ist sie demnach eindeutig. Die zugehörige Zerlegung des Rings in eine direkte Summe von Idealen, die ihrerseits mit der induzierten Multiplikation Ringe werden, heißt dann seine **Block-Zerlegung** $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ und die zugehörigen Ideale A_i heißen die **Blöcke** des Rings A.

Ergänzung 2.2.4. Gegeben Ringe $R_1, \ldots, R_n$ mit Produkt $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ erhalten wir für jede abelsche Gruppe M eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Strukturen auf } M \\ \text{als } R\text{-Modul} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Zerlegungen } M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \text{ mit} \\ \text{jeweils einer } R_i\text{-Modulstruktur auf } M_i \end{array} \right\}$$

indem wir in R die Elemente $\mathrm{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ mit einer 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst betrachten und in M die Untergruppen $M_i := \mathrm{e}_i M$ nehmen und sie mit der hoffentlich offensichtlichen von der R-Modulstruktur auf M induzierten Struktur eines R_i-Moduls versehen.

Übung 2.2.5. Gegeben ein Modul M über einem Ring R und ein Element $m \in M$ heißt die Teilmenge

$$\operatorname{Ann}_R(m) := \{r \in R \mid rm = 0\}$$

der **Annullator von** m. Man zeige, daß der Annullator jedes Elements ein Linksideal ist. Weiter heißt die Teilmenge

$$\operatorname{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0 \;\forall m \in M\}$$

der Annullator des Moduls M. Man zeige, daß der Annullator eines Moduls stets ein zweiseitiges Ideal ist.

2.3 Rechtsmoduln und Matrizenrechnung

Definition 2.3.1. Sei R ein Ring. Ein R**-Rechtsmodul** ist ein Paar bestehend aus einer abelschen Gruppe $(M, +)$ mitsamt einer Abbildung $M \times R \to M$, $(m, r) \mapsto mr$ derart, daß gilt für alle $m, n \in M$ und $r, s \in R$:

$$\begin{array}{rcl} (m+n)r & = & mr + nr \\ m(r+s) & = & mr + ms \\ m(rs) & = & (mr)s \\ m1 & = & m \end{array}$$

2.3.2. Unsere R-Moduln aus Definition 1.2.6 nennt man manchmal auch genauer **Linksmoduln**. Um den Unterschied klar zu machen, definieren wir für jeden Ring $R = (R, +, \cdot)$ den **opponierten Ring** $R^{\mathrm{opp}} = (R, +, \cdot)$ als die abelsche Gruppe R mit der „vertauschten“ Multiplikation $r^\circ s^\circ = sr$ für $r, s \in R$. Wir verwenden dabei die Notation [GR] 2.2.3.33, insbesondere meint r° das Element r aufgefaßt als Element des opponierten Rings. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß ein R-Rechtsmodul dasselbe ist wie ein R^{opp}-Linksmodul, alias eine abelsche Gruppe M mitsamt einem Ringhomomorphimus $R^{\mathrm{opp}} \to \operatorname{End} M$. Insbesondere braucht man bei kommutativen Ringen zwischen Rechtsmoduln und Linksmoduln keinen Unterschied zu machen.

Definition 2.3.3. Sei R ein Ring und M ein R-Rechtsmodul. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt ein Untermodul oder ganz pedantisch **Unterrechtsmodul** genau dann, wenn N eine Untergruppe ist und wenn zusätzlich gilt $m \in N$, $r \in R \Rightarrow mr \in N$.

2.3.4. Die Unterrechtsmoduln eines Rings heißen seine **Rechtsideale**. Jeder Schnitt von Untermoduln ist wieder ein Untermodul. Ist $T \subset M$ eine Teilmenge eines Moduls M, so heißt der kleinste Untermodul von M, der T enthält, auch der **von T erzeugte Untermodul** und wir bezeichnen ihn mit $\langle T \rangle_R$ oder auch abkürzend mit $\langle T \rangle$.

2.3.5. Für R-Rechtsmoduln M, N nennen wir einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $f : M \to N$ mit $f(mr) = f(m)r \; \forall m \in M, r \in R$ auch einen **Homomorphismus von R-Rechtsmoduln** und bezeichnen die Menge aller Homomorphimen von R-Rechtsmoduln mit

$$\operatorname{Hom}_{-R}(M, N)$$

Genau wie bei Körpern haben wir auch bei Ringen R eine natürliche Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{-R}(R^p, R^q) & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Mat}(q \times p; R) \\ f & \mapsto & [f] \end{array}$$

wo die Spalten der Matrix $[f] = (a_{ij})$ die Bilder unter f der Vektoren $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p$ der Standardbasis des R^p sind, in Formeln $f(\mathrm{e}_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ für $1 \leq j \leq p$. Die inverse Abbildung ordnet jeder Matrix A die R-rechtslineare Abbildung $x \mapsto Ax$ zu, wo wir die Elemente $x \in R^p$ beziehungsweise $Ax \in R^q$ als Spaltenmatrizen auffassen. Wie bei Körpern entspricht die Matrixmultiplikation der Verknüpfung von Abbildungen, in Formeln $[f \circ g] = [f] \circ [g]$, und f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn seine Matrix $[f]$ invertierbar ist.

2.3.6. Für die Kategorie der Rechtsmoduln über einem Ring R verwenden wir die beiden Notationen

$$\mathrm{Mod}\text{-}\,R = \mathrm{Mod}_{-R}$$

2.3.7. Gegeben R-Rechtsmoduln M, N mit endlichen angeordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ der Kardinalitäten p, q erhalten wir genau wie bei Körpern auch bei Ringen R eine natürliche Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{-R}(M, N) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathrm{Mat}(q \times p; R) \\ f & \mapsto & {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} \end{array}$$

und nennen wieder ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ die **darstellende Matrix der Abbildung f in Bezug auf die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$**. Die Formel ${}_{\mathcal{C}}[g \circ f]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ gilt entsprechend.

2.3.8. Ich erinnere an die Definition der Determinante quadratischer Matrizen mit Einträgen in einem Kring durch die Leibnizformel [LA1] 6.2.1, an die Multiplikationsformel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ aus [LA1] 6.4.1 und daran, daß eine quadratische Matrix nach [LA1] 6.4.9 genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante eine Einheit in fraglichen kommutativen Ring ist.

Ergänzung 2.3.9. Die Leibnizformel ist zwar auch für nichtkommutative Ringe noch sinnvoll, aber die Formel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ist dann nicht mehr richtig, und deshalb sind Determinanten in der Allgemeinheit nichtkommutativer Ringe nicht mehr von Nutzen.

Proposition 2.3.10 (Wohlbestimmtheit des Rangs). *Ist R ein kommutativer Ring und nicht der Nullring, so folgt für $m, n \in \mathbb{N}$ aus der Existenz eines Isomorphismus von Moduln $R^n \cong R^m$ bereits $n = m$.*

2.3.11. Ein alternativer Beweis wird in Übung 1.7.19 skizziert. Ein Gegenbeispiel für nichtkommutative Ringe erklärt 2.1.9.

Beweis. Ein Isomorphismus $R^n \cong R^m$ wird notwendig beschrieben durch Matrizen A und B. Wäre hier $n \neq m$, so wären unsere Matrizen nicht quadratisch. Hat ohne Beschränkung der Allgemeinheit A mehr Zeilen als Spalten und ergänzen wir unsere Matrizen durch Nullen zu quadratischen Matrizen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$, so gilt immer noch $\tilde{A}\tilde{B} = I$ mit I der Einheitsmatrix, im Widerspruch zu $\det \tilde{A} = 0$. $\square$

2.3.12. Ist M ein endlich erzeugter freier Modul über einem kommutativen und vom Nullring verschiedenen Ring R, so heißt die Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $M \cong R^n$ der **Rang** von M. Wir nennen diese Zahl etwas unüblich wie im Körperfall die **Dimension** unseres Moduls und verwenden dafür die Notation

$$n = \dim_R M = \dim M$$

Das Beispiel 2.1.9 zeigt, daß man über nichtkommutativen Ringen im allgemeinen nicht mehr sinnvoll vom Rang eines freien Moduls reden kann.

Ergänzung 2.3.13. Es gibt Schiefkörper $K \subset L$ derart, daß L über K endlich erzeugt ist als Linksmodul, nicht aber als Rechtsmodul. Die Frage nach einem solchen Beispiel war lange als **Artin's Problem** bekannt. Eine explizite Konstruktion kann man in [Coh95] finden.

Übungen

Übung 2.3.14. Gegeben ein Ring R liefert die durch Rechtsmultiplikation gegebene Abbildung aus 1.4.1 einen Ringisomorphismus $R^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_R(R)$ und die durch Linksmultiplikation gegebene Abbildung einen Ringisomorphismus $R \xrightarrow{\sim} \text{End}_{-R}(R)$. Hier ist es wichtig zu erinnern, daß in unseren Konventionen Ringe stets ein Einselement haben.

Übung 2.3.15. Ein Element eines Rings $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn sowohl die Rechtsmultiplikation als auch die Linksmultiplikation mit r eine Bijektion von R mit sich selbst liefert.

Übung 2.3.16. Man zeige: Gegeben ein Kring R und $n \in \mathbb{N}$ ist jeder surjektive Homomorphismus $R^n \twoheadrightarrow R^n$ bereits ein Isomorphismus. Hinweis: Man finde ein Halbinverses und rechne mit Matrizen. Weiter zeige man: Ist $S \subset R$ ein Teilring und der R-Modul M sowohl über R als auch über S frei vom Rang n, so gilt $S = R$.

Ergänzende Übung 2.3.17. Für jeden Ring R und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ liefert die Zuordnung $M \mapsto M^n$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$R\text{-Mod} \stackrel{\approx}{\to} \text{Mat}(n; R)\text{-Mod}$$

In anderen Worten ist jeder Modul über $S := \text{Mat}(n; R)$ isomorph zu einem Modul der Gestalt M^n mit $M \in R\text{-Mod}$ und unsere Zuordnung induziert Bijektionen $\text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(M^n, N^n)$. Diese Aussagen sind im übrigen Spezialfälle unserer allgemeinen Überlegungen [TS] **??** zur Tensor-Hom-Adjunktion und erste Beispiele der sogenannten **Morita-Äquivalenz**.

Übung 2.3.18. Man zeige, daß jeder endlich erzeugte freie Modul über eine endliche Basis besitzt.

2.4 Moduln über Hauptidealringen

Satz 2.4.1 (Elementarteilersatz). *Sei f ein Homomorphismus zwischen zwei endlich erzeugten freien Moduln über einem Hauptidealring. So gilt:*

1. *Es gibt angeordnete Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unserer Moduln derart, daß die darstellende Matrix $D := {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ unseres Homomorphismus eine Diagomalmatrix ist, deren vordere Diagonaleinträge jeweils die hinteren teilen, in Formeln $(i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0)$ und $d_{11}|d_{22}| \dots |d_{rr}$ für r das Minimum der Kardinalitäten beider Basen;*

2. *Die Diagonaleinträge d_{ii} einer derartigen darstellenden Matrix durch die Abbildung f wohlbestimmt bis auf Multiplikation mit Einheiten.*

Beispiele 2.4.2. Die analoge Aussage im Fall eines Körpers kennen wir bereits aus [LA1] 2.6.11 als Smith-Normalform, den Fall des Hauptidealrings $\mathbb{Z}$ aus [LA2] 6.5.14, den Fall eines Polynomrings aus [LA2] 6.5.29 als Smith-Zerlegung.

2.4.3. Nach unserer Definition [AL] 2.4.9 ist ein Hauptidealring ein kommutativer Integritätsbereich, der kein Körper ist und in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist. Wir können unseren Satz auch verstehen als die Beschreibung eines Systems von Repräsentanten für die Bahnen der offensichtlichen Wirkung der Gruppe $\mathrm{GL}(n; R) \times \mathrm{GL}(m; R)$ auf der Menge $\mathrm{Mat}(n \times m; R)$ im Fall eines Hauptidealrings R.

Beweis. Wir dürfen $E = R^m$ und $F = R^n$ annehmen. Die Abbildung f wird beschrieben durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; R)$ und es gilt, invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{Mat}(n \times n; R)$ und $Q \in \mathrm{Mat}(m \times m; R)$ zu finden derart, daß $PAQ = D$ diagonal ist von der gewünschten Form. Für eine Matrix A bezeichne $\langle A \rangle \subset R$ das von den Einträgen von A erzeugte Ideal. Sicher gilt $\langle XA \rangle \subset \langle A \rangle$ für jede Matrix X, also $\langle XA \rangle = \langle A \rangle$ für X invertierbar. Ebenso gilt $\langle AY \rangle \subset \langle A \rangle$ für jede Matrix Y und $\langle AY \rangle = \langle A \rangle$ für Y invertierbar. Wir geben im folgenden ein Verfahren an, das im Fall $\langle a_{11} \rangle \neq \langle A \rangle$ invertierbare Matrizen X und Y liefert derart, daß der obere linke Eintrag von XAY ein echt größeres Ideal erzeugt als a_{11}. Da unser Kring noethersch ist, oder auch mit einer elementaren Argumentation wie beim Beweis von [AL] 2.4.11 finden wir dann sogar $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ invertierbar derart, daß der obere linke Eintrag von $\tilde{X}A\tilde{Y}$ das Ideal $\langle \tilde{X}A\tilde{Y} \rangle = \langle A \rangle$ erzeugt, als da heißt, daß er alle Einträge von $\tilde{X}A\tilde{Y}$ teilt. Da nun Zeilen- und Spaltenoperationen auch durch Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links beziehungsweise rechts gegeben werden, finden wir dann sogar invertierbare Matrizen $\hat{X}, \hat{Y}$ derart, daß $\hat{X}A\hat{Y}$ außer einem Eintrag $a_{11} = d_{11}$ in der oberen linken Ecke nur Nullen in der ersten Zeile und erste Spalte stehen hat und daß zusätzlich gilt $\langle d_{11} \rangle = \langle A \rangle$. Dann können wir aber den Beweis beenden mit einer offensichtlichen Induktion. Es bleibt, das versprochene Verfahren anzugeben. Wir unterscheiden drei Fälle.

(i) Falls a_{11} nicht alle Elemente der ersten Zeile teilt, sagen wir a_{11} teilt nicht a_{12}, so betrachten wir das Ideal $\langle a_{11}, a_{12}\rangle$ und wählen dafür einen Erzeuger d. Wir können nun schreiben $d = xa_{11} + ya_{12}$ sowie zusätzlich $a_{11} = d\lambda, a_{12} = d\mu$ und folgern $1 = x\lambda + y\mu$. Jetzt beachten wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & \multirow{2}{*}{$*$} \\ * & * & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & * \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} x & -\mu & \multirow{2}{*}{0} \\ y & \lambda & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} d & * & \multirow{2}{*}{$*$} \\ * & * & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & * \end{array}\right)$$

mit I der Einheitsmatrix und haben schon gewonnen.

(ii) Falls a_{11} nicht alle Elemente der ersten Spalte teilt, gehen wir analog vor.

(iii) Teilt a_{11} alle Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte, so finden wir schon mal invertierbare X, Y derart, daß XAY außer einem Eintrag a_{11} in der oberen linken Ecke nur Nullen in der ersten Zeile und der ersten Spalte stehen hat. Unter der Annahme $\langle a_{11}\rangle \neq \langle A\rangle$ kann aber a_{11} nicht alle Einträge von A teilen. Addieren wir nun eine geeignete Zeile zur ersten Zeile, so landen wir im Fall (i) und haben wieder gewonnen.

Damit haben wir das versprochene Verfahren angegeben und Teil 1 ist gezeigt.

2. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Diagonaleinträge bis auf Einheiten. Dazu betrachten wir für $i \geq 1$ das von allen Determinanten von $(i \times i)$-Untermatrizen von A erzeugte Ideal $J_i(A)$. Ist X eine weitere Matrix, so gilt $J_i(XA) \subset J_i(A)$, denn die Zeilen von XA sind Linearkombinationen von Zeilen von A. Insbesondere gilt also $J_i(XA) = J_i(A)$ für invertierbares X und ebenso $J_i(AY) = J_i(A)$ für invertierbares Y. Es folgt sofort, daß $J_i(A)$ das vom Produkt $d_{11}d_{22}\cdots d_{ii}$ erzeugte Ideal ist, in Formeln $J_i(A) = \langle d_{11}d_{22}\cdots d_{ii}\rangle$. Daraus folgt dann die Eindeutigkeit der d_{ii} bis auf Einheiten. □

2.4.4. Wir geben nun zwei Formen der Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen an. Wenden wir diese Klassifikationen an auf den Hauptidealring $\mathbb{Z}$, so erhalten wir die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen [LA2] 6.5.4 und [LA2] 6.5.5 vom Beginn der Vorlesung. Wenden wir unsere Sätze an auf einen Polynomring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ergibt sich die Jordan'sche Normalform [LA2] 5.4.5, wie als Korollar 2.4.11 ausgeführt wird.

Satz 2.4.5 (**Klassifikation durch Idealketten**). *Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R, so gibt es genau eine aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_s \subset R$ von Idealen von R mit $\mathfrak{a}_s \neq R$ und*

$$M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_s$$

Der Nullmodul wird abgedeckt durch den Fall $s = 0$.

2.4.6. Ist R ein faktorieller Ring, so nennen wir die Potenzen irreduzibler Elemente von R auch die **Primpotenzen** von R und die von Eins verschiedenen Potenzen die **echten Primpotenzen** von R. Jede echte Primpotenz q hat also die Form $q = p^e$ mit p irreduzibel und $e \geq 1$.

Ergänzung 2.4.7. Die Existenz ist mir auch klar für Kringe, in denen jedes Ideal ein Hauptideal ist. Wie steht es in dieser Allgemeinheit mit der Eindeutigkeit?

Satz 2.4.8 (**Klassifikation durch Multimengen von Primpotenzen**). *Gegeen ein endlich erzeugter Modul M über einem Hauptidealring R gibt es $r \in \mathbb{N}$ und echte Primpotenzen $q_1, \ldots, q_t \in R$ derart, daß gilt*

$$M \cong R^r \times R/q_1R \times \ldots \times R/q_tR$$

Hier ist r wohlbestimmt und die q_i sind wohlbestimmt bis auf Einheiten und Reihenfolge. Der Nullmodul wird abgedeckt durch den Fall $r = t = 0$.

2.4.9. Der Beweis beider Sätze ist mutatis mutandis derselbe wie der Beweis ihrer als [LA2] 6.5.4 und [LA2] 6.5.5 diskutierten Spezialisierungen für den Hauptidealring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

2.4.10. Ein Modul heißt **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jedem von Null verchiedenen Ringelement eine injektive Abbildung von unserem Modul in sich selber liefert. Nach dem Satz ist insbesondere jeder endlich erzeugte torsionsfreie Modul über einem Hauptidealring frei.

Beweis von 2.4.5. Gegeben ein Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_n$ von M erklären wir durch die Vorschrift $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1g_1 + \ldots + a_ng_n$ einen surjektiven Modulhomomorphismus

$$R^n \twoheadrightarrow M$$

Dessen Kern ist nach 1.5.9 ein endlich erzeugter R-Modul K, für den wir wieder einen surjektiven Homomorphismus $R^m \twoheadrightarrow K$ finden können. Der Formalismus noetherscher Ringe kann an dieser Stelle noch vermieden werden, man kann ebenso wie in [LA2] 6.5.1 sogar stärker und unabhängig zeigen, daß man für jeden Untermodul eines endlich erzeugten Moduls über einem Hauptidealring höchstens soviele Erzeuger benötigt wie für den großen Modul. Mit der Komposition $R^m \twoheadrightarrow K \hookrightarrow R^n$ als erster Abbildung entsteht so eine im Sinne von [LA2] 6.7.5 exakte Sequenz von R-Moduln

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

Nach 2.3.5 sind die Homomorphismen $R^m \to R^n$ genau die Multiplikationen von links mit $(n \times m)$-Matrizen mit Einträgen in R. Weiter überlegt man sich, daß auch in dieser Situation die Verknüpfung von Homomorphismen der Multiplikation von

Matrizen entspricht. Bezeichnet nun A die Matrix unserer Abbildung $R^m \to R^n$ und wählen wir P und Q wie im Elementarteilersatz oder vielmehr dem Beginn seines Beweises, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm von R-Moduln

$$\begin{array}{ccc} R^m & \xrightarrow{A\circ} & R^n \\ {\scriptstyle Q\circ}\uparrow\wr & & \downarrow\wr{\scriptstyle P\circ} \\ R^m & \xrightarrow{D\circ} & R^n \end{array}$$

für eine nicht notwendigerweise quadratische Diagonalmatrix D mit Einträgen $d_1|d_2|\ldots|d_r$ für $r = \min(m,n)$. Bilden wir nun andererseits das Produkt der exakten Sequenzen $R \xrightarrow{d_i} R \to R/\langle d_i\rangle \to 0$ für $1 \leq i \leq r$ mit $m-r$ Kopien der exakten Sequenzen $R \to 0 \to 0 \to 0$ im Fall $m > n$ beziehungsweise $n-r$ Kopien der exakten Sequenzen $0 \to R \xrightarrow{\mathrm{id}} R \to 0$ im Fall $n > m$, so erhalten wir mit [LA2] 6.7.13 die untere Horizontale in einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} R^m & \xrightarrow{A\circ} & R^n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle Q\circ}\uparrow\wr & & \downarrow\wr{\scriptstyle P\circ} & & & & \downarrow \\ R^m & \xrightarrow{D\circ} & R^n & \longrightarrow & R/\langle d_1\rangle \times \ldots \times R/\langle d_r\rangle \times R^{n-r} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Damit liefert [LA2] 6.2.4 oder vielmehr eine offensichtliche Variante dieses Resultats für Moduln einen Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} R/\langle d_1\rangle \times \ldots \times R/\langle d_r\rangle \times R^{n-r}$. Lassen wir von unserer Folge $d_1|d_2|\ldots|d_r$ alle Einheiten vorne weg und ergänzen am Ende $(n-r)$ Nullen und drehen die Nummerierung um, so erhalten wir eine Folge $a_s|\ldots|a_1$ derart, daß die von ihren Gliedern erzeugten Ideale eine Kette bilden wie im Satz 2.4.5 gefordert, und die Existenz dort ist gezeigt. Um die Eindeutigkeit zu zeigen bemerken wir, daß für jeden endlich erzeugten R-Modul M und jedes irreduzible Element p und alle $n \geq 1$ der Quotient $p^{n-1}M/p^nM$ nach 1.4.9 ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Restklassenring $R/\langle p\rangle$ ist, der hinwiederum nach [AL] 2.4.23 ein Körper sein muß. Wir notieren seine Dimension

$$D_p^n(M) := \dim_{R/\langle p\rangle}(p^{n-1}M/p^nM)$$

Man folgert unmittelbar $D_p^n(M \times N) = D_p^n(M) + D_p^n(N)$ für je zwei endlich erzeugte R-Moduln M und N. Für zyklische R-Moduln $M \cong R/aR$ behaupten wir nun

$$D_p^n(R/aR) \quad = \quad \begin{cases} 1 & p^n \text{ teilt } a; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat ist das klar für $a = p^m$, für a teilerfremd zu p ist es eh klar, und mit dem chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4 folgt es im allgemeinen. Für eine Zerlegung

$M \cong R/\langle d_1 \rangle \times \ldots \times R/\langle d_s \rangle$ wie in 2.4.5 finden wir also

$$D_p^n(M) = |\{i \mid p^n \text{ teilt } d_i\}|$$

Die Zahl der Nullen unter unseren d_i wird damit für jedes p gegeben durch die Formel $|\{i \mid d_i = 0\}| = \lim_{n\to\infty} D_p^n(M)$, und welche Potenz von jedem irreduziblen Element p in jedem von Null verschiedenen d_i stecken muß, kann man an den Zahlen $D_p^n(M)$ auch ablesen. Folglich hängen die Ideale $\langle d_i \rangle$ nur von M und nicht von der gewählten Zerlegung ab. □

Beweis von 2.4.8. Aus 2.4.5 folgt sofort die Existenzaussage in Satz 2.4.8, indem wir im Fall $\mathfrak{a}_i \neq 0$ einen Erzeuger d_i von $\mathfrak{a}_i$ als Produkt von paarweise teilerfremden Primpotenzen $d_i = q_1 \ldots q_k$ schreiben und mit dem chinesischen Restsatz zerlegen

$$R/\mathfrak{a}_i \cong R/q_1R \times \ldots \times R/q_kR$$

Für die Eindeutigkeit argumentieren wir wie im vorhergehenden Beweis: Für $M \cong R^r \times R/q_1R \times \ldots \times R/q_tR$ wie in 2.4.8 finden wir diesmal

$$D_p^n(M) = r + |\{i \mid p^n \text{ teilt } q_i\}|$$

Wenden wir diese Erkenntnis an auf alle irreduziblen Elemente p, so folgt die im Satz behauptete Eindeutigkeit ohne weitere Schwierigkeiten: Die Zahl der Primpotenzen q_i, die bis auf eine Einheit p^n sind, muß nämlich bei jeder Zerlegung gerade $D_p^n(M) - D_p^{n+1}(M)$ sein, und den Rang r des freien Anteils können wir als die auch von allen Wahlen unabhängige Zahl $r = \lim_{n\to\infty} D_p^n(M)$ beschreiben, für jedes irreduzible Element p. □

Korollar 2.4.11 (Jordan'sche Normalform). *Seien k ein algebraisch abgeschlossenen Körper, V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. So gibt es eine Basis von V derart, daß die Matrix von A bezüglich dieser Basis blockdiagonal ist, wobei die Blöcke konstant sind auf der Diagonale, konstant Eins auf der ersten oberen Nebendiagonale, und Null an allen anderen Stellen.*

2.4.12. Das ist genau unser Satz [LA2] 5.4.5 aus der linearen Algebra, der hier also ein weiteres Mal bewiesen wird.

Beweis. Mithilfe von 1.2.15 fassen wir V als Modul über dem Polynomring $k[T]$ auf und mit 2.4.8 finden wir einen Isomorphismus von $k[T]$-Moduln

$$V \cong k[T]/\langle (T-\lambda_1)^{n_1} \rangle \times \ldots \times k[T]/\langle (T-\lambda_t)^{n_t} \rangle$$

Wählen wir auf der rechten Seite im Summanden $k[T]/\langle (T-\lambda)^n \rangle$ als angeordnete Basis die Nebenklassen von $(T-\lambda)^{n-1}, \ldots, (T-\lambda)$ und 1, so erhält man die

Matrix der Multiplikation mit T, indem man zunächst die Matrix der Multiplikation mit $(T - \lambda)$ berechnet und dann die Diagonalmatrix λI addiert. So erkennt man dann leicht, daß die Matrix der Multiplikation mit T die gewünschte Form hat. □

2.4.13. Auf ähnliche Weise erhält man auch Normalformen für die Matrizen von Endomorphismen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern, wie in den folgenden Übungen ausgeführt wird.

Übungen

Übung 2.4.14. Jedes normierte Polynom $P \in k[T]$ ist bis auf Vorzeichen das charakteristische Polynom der k-linearen Abbildung

$$(T\cdot) : k[T]/\langle P\rangle \to k[T]/\langle P\rangle$$

Hat unser Polynom die Gestalt $P = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0$, so bilden die Nebenklassen von $1, T, \ldots, T^{n-1}$ eine angeordnete Basis des Quotienten, und in Bezug auf diese Basis hat die durch Multiplikation mit T gegebene k-lineare Abbildung die in nebenstehender Abbildung angegebene Matrix. Hinweis: Eine Methode ist die explizite Berechnung mithilfe der Determinante. Alternativ mag man k algebraisch abgeschlossen annehmen und sich mithilfe des chinesischen Restsatzes auf den Fall zurückziehen, daß P eine Potenz eines linearen Polynoms ist.

Übung 2.4.15 (**Charakteristisches Polynom eines $k[T]$-Moduls**). Sei ein Endomorphismus $A : V \to V$ eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper k gegeben. Man zeige: Genau dann hat A das charakteristische Polynom P, wenn es eine Faktorisierung $P = Q_1 \ldots Q_r$ gibt derart, daß der (V, A) entsprechende $k[T]$-Modul isomorph ist zu

$$k[T]/\langle Q_1\rangle \times \ldots \times k[T]/\langle Q_r\rangle$$

Man nutze diese Erkenntnis, um einen alternativen Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton [LA1] 6.6.20 zu geben. Hinweis: Man verwende 2.4.14 und 2.4.5 oder 2.4.8. In anderen Worten kann das Aufmultiplizieren einer endlichen Multimenge

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Illustration zu 2.4.14

von normierten Polynomen demnach geschrieben werden als die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc}
{}_{\mu}\{Q_1,\ldots,Q_r\} & \in & \left\{\begin{array}{c}\text{endliche Multimengen}\\ \text{von Polynomen aus } k[T]\backslash 0\end{array}\right\}\\
\downarrow & & \downarrow\\
k[T]/\langle Q_1\rangle\times\ldots\times k[T]/\langle Q_r\rangle & \in & \left\{\begin{array}{c}\text{endlichdimensionale}\\ k[T]\text{-Moduln}\end{array}\right\}\\
 & & \downarrow\\
(V,A) & \in & \left\{\begin{array}{c}\text{endlichdimensionale}\\ k\text{-Vektorräume } V\\ \text{mit Endomorphismus}\end{array}\right\}\\
\downarrow & & \downarrow\\
(-1)^{\dim V}\chi_A & \in & k[T]
\end{array}$$

mit unserer Entsprechung $M \mapsto (M,(T\cdot))$ aus 1.2.15 als mittlerem Pfeil.

Ergänzende Übung 2.4.16. Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums über einem Körper k. Man zeige: Genau dann liefert (V,A) einen $k[T]$-Modul, der isomorph ist zu $k[T]/\langle P\rangle$ für ein Polynom $P \in k[T]$, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt derart, daß die $A^i v$ den Vektorraum V erzeugen. Ein derartiger Vektor heißt auch ein **zyklischer Vektor**.

Ergänzende Übung 2.4.17. Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper k. Man zeige: Kommen im charakteristischen Polynom χ_A von A keine k-irreduziblen Faktoren mehrfach vor, so liefert (V,A) einen $k[T]$-Modul, der isomorph ist zu $k[T]/\langle\chi_A\rangle$.

Übung 2.4.18 (**Mit dem Elementarteilersatz zur Jordan'schen Normalform**). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n\times n;k)$ eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in einem Ring. So liefert die offensichtliche Einbettung $k^n \hookrightarrow k[T]^n$ gefolgt von der Projektion auf den Kokern einen Isomorphismus von k-Rechtsmoduln

$$k^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{cok}\big((A - T\mathrm{I}) : k[T]^n \to k[T]^n\big)$$

und der durch Multiplikation von rechts mit T gegebene k-lineare Endomorphismus des Kokerns entspricht unter diesem Isomorphismus dem Morphismus $(A\cdot) : k^n \to k^n$ links. Ist speziell k ein Körper, so liefern die Elementarteiler der Matrix von Polynomen $(A - T\mathrm{I})$ eine Beschreibung des $k[T]$-Moduls k^n, der durch Einsetzen von A für T entsteht. Die Bestimmung der Elementarteiler ist algorithmisch gut machbar, zum Erreichen der Jordan'schen Normalform oder verwandter Normalformen wäre jedoch zusätzlich die Zerlegung der Elementarteiler in irreduzible Faktoren zu leisten, die im allgemeinen algorithmisch schwierig ist.

Übung 2.4.19. Gegeben $F \supset U$ ein endlich erzeugter freier Modul über einem Hauptidealring R mit einem Untermodul gibt es stets eine Basis $f_1,\ldots,f_n$ von

F und $0 \leq r \leq n$ und $d_1|d_2|\ldots|d_r$ in R derart, daß die $d_i f_i$ eine Basis von U bilden. In Worten gibt es also insbesondere eine Basis von F derart, daß geeignete Vielfache der Basisvektoren unseren Untermodul erzeugen. Ist F nicht endlich erzeugt, so ist das nicht mehr richtig. Zwar ist jeder Untermodul von F frei nach [TS] 3.5.5.11, aber wenn wir eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen $U \hookrightarrow F \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$ betrachten mit F und dann auch U frei, so ist klar, daß F keine derartige Basis haben kann.

2.5 Tensorprodukte über Kringen

2.5.1. So wie wir es bei Vektorräumen alias Moduln über Körpern in [LA2] 8.1.2 im zweiten Beweis gesehen hatten, erklärt man auch für Moduln $M_1, \ldots, M_r$ über einem Kring K multilineare Abbildungen und universelle multilineare Abbildungen und zeigt, daß sie im wesentlichen eindeutig sind und existieren. Man verwendet dafür die Notation

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \ldots \times M_r & \to & M_1 \otimes \ldots \otimes M_r \\ (m_1, \ldots, m_r) & \mapsto & m_1 \otimes \ldots \otimes m_r \end{array}$$

beziehungsweise im Fall $r = 0$ üblicherweise $\mathrm{ens} \to K$, $* \mapsto 1$. Wenn man den Grundring präzisieren will, schreibt man $\otimes_K$. Wie in [LA2] 8.1.19 konstruiert man auch einen ausgezeichneten Isomorphismus von K-Moduln

$$\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M \otimes N, L)$$

In der Tat sind auch hier beide Seiten sind in offensichtlicher Weise in Bijektion zur Menge $\mathrm{Hom}^{(2)}(M \times N, L)$ aller K-bilinearen Abbildungen $M \times N \to L$.

Beispiel 2.5.2. Es gilt $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, denn wir haben für jeden Tensor $a \otimes q = a \otimes 5(q/5) = 5a \otimes (q/5) = 0 \otimes (q/5) = 0$.

2.5.3. Um präzise zu formulieren, was man salopp die „Asoziativität, Kommutativität und Unitarität des Tensorprodukts über einem Kring“ nennen man, erinnere ich an die Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen, wie wir sie in [LA2] 8.2 im Fall von Körpern formuliert hatten. Die präzise Aussage ist dann, daß jede Multiverknüpfung universeller multilinearer Abbildungen auch selbst wieder universell ist. Das hinwiederum folgt leicht, wenn man nachweist, daß das entsprechende Vorschalten stets eine Bijektion

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_K^{(1+s)}((M_1 \otimes \ldots \otimes M_r) \times N_1 \times \ldots \times N_s, L) \\ \downarrow \wr \\ \mathrm{Hom}_K^{(r+s)}(M_1 \times \ldots \times M_r \times N_1 \times \ldots \times N_s, L) \end{array}$$

induziert. Das aber sehen wir unschwer, indem wir beide Seiten ähnlich wie zuvor mit $\mathrm{Hom}_K^{(r)}(M_1 \times \ldots \times M_r, \mathrm{Hom}_K^{(s)}(N_1 \times \ldots \times N_s, L))$ identifizieren. Zum Beispiel entsteht durch Multiverknüpfung der universellen bilinearen Abbildung $M \times N \to M \otimes N$ mit der universellen bilinearen Abbildung $(M \otimes N) \times L \to (M \otimes N) \otimes L$ die trilineare Abbildung $M \times N \times L \to (M \otimes N) \otimes L$ mit $(m, n, l) \mapsto (m \otimes n) \otimes l$, die nach unseren Erkenntnissen auch wieder universell sein muß, so daß wir einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$M \otimes N \otimes L \xrightarrow{\sim} (M \otimes N) \otimes L$$

erhalten mit der Eigenschaft $m \otimes n \otimes l \mapsto (m \otimes n) \otimes l$. Oder als zweites Beispiel entsteht durch Multiverknüpfung der universellen bilinearen Abbildung $M \times K \to M \otimes K$ mit der universellen nulllinearen Abbildung $\mathrm{ens} \to K$ gegeben durch $* \mapsto 1$ die lineare Abbildung $M \to M \otimes K$ mit $m \mapsto m \otimes 1$. Sie ist folglich auch universell alias ein Isomorphismus

$$M \xrightarrow{\sim} M \otimes K$$

In derselben Weise folgt bei einem etwas sorgfältigeren Ausformulieren des Konzepts einer Multiverknüpfung wie in [LA2] 8.2.3 oder auch direkt, daß es genau einen Morphismus $M \otimes N \to N \otimes M$ gibt mit $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ für alle $m \in M, n \in N$ und daß wir so einen Isomorphismus

$$M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$$

erhalten. Er heißt der **Vertauschungsisomorphismus**.

2.5.4 (**Funktorialität des Tensorprodukts**). Sei K ein Kring. Aufgrund der universellen Eigenschaft definieren je zwei K-lineare Abbildungen $f : M \to M'$ und $g : N \to N'$ eine K-lineare $f \otimes g : M \otimes_K N \to M' \otimes_K N', m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$, und wir erhalten so einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_K \times \mathrm{Mod}_K & \to & \mathrm{Mod}_K \\ (M \quad , \quad N) & \mapsto & M \otimes_K N \end{array}$$

Lemma 2.5.5 (Tensorprodukte vertauschen mit Summen). *Gegeben ein Kring K liefert die offensichtliche Abbildung für jeden K-Modul M und eine beliebige Familie von K-Moduln (N_i) einen Isomorphismus*

$$M \otimes_K \left(\bigoplus N_i \right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus (M \otimes_K N_i)$$

Beweis. In der Tat haben wir sowohl für die linke als auch für die rechte Seite S offensichtliche bilineare Abbildungen $\mathrm{can}_i : M \times N_i \to S$ und diese sind universell: Ist irgendeine abelsche Gruppe A gegeben und eine Familie von bilinearen Abbildungen $b_i : M \times N_i \to A$, so gibt es jeweils genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{b} : S \to A$ mit $b_i = \tilde{b} \circ \mathrm{can}_i$. $\square$

Beispiel 2.5.6. Wir haben $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}^7 \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^7$.

Definition 2.5.7. Eine Sequenz $A' \to A \to A''$ von abelschen Gruppen heißt **rechtsexakt**, wenn sie exakt ist bei A und wenn zusätzlich $A \to A''$ eine Surjektion ist. Wir schreiben rechtsexakte Sequenzen meist $A' \to A \twoheadrightarrow A''$.

Lemma 2.5.8 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts). *Ist K ein Kring, M ein K-Modul und $N' \to N \twoheadrightarrow N''$ eine rechtsexakte Sequenz von K-Moduln, so entsteht durch Darantensorieren von M eine rechtsexakte Sequenz von K-Moduln $M \otimes_K N' \to M \otimes_K N \twoheadrightarrow M \otimes_K N''$.*

Beweis. Daß hier die Surjektivität erhalten bleibt und daß die Verknüpfung auch nach dem Tensorieren verschwindet, ist offensichtlich. Wir kürzen für den weiteren Beweis $\otimes_K = \otimes$ ab und haben also eine Surjektion

$$\operatorname{cok}(M \otimes N' \to M \otimes N) \twoheadrightarrow M \otimes N''$$

Wir müssen zeigen, daß sie eine Injektion ist. Nun gibt es aber offensichtlich eine wohldefinierte K-bilineare Abbildung $M \times N'' \to \operatorname{cok}$ mit $(m, \bar{n}) \mapsto \overline{m \otimes n}$ für alle $n \in N$. Sie induziert folglich eine Abbildung $M \otimes N'' \to \operatorname{cok}$. Man sieht, daß wir so eine inverse Abbildung zu unserer Surjektion $\operatorname{cok} \twoheadrightarrow M \otimes N''$ erhalten. □

Zweiter Beweis. Aufgrund der Tensor-Hom-Adjunktion 2.6.17 ist $M \otimes_K$ linksadjungiert zu einem Funktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Mod}_K$. Mit 1.4.14 folgt die Rechtsexaktheit. □

Beispiel 2.5.9. Wir erhalten $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, indem wir die Sequenz $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation $(2\cdot)$ als erster Abbildung tensorieren mit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und die Rechtsexaktheit des Tensorprodukts ausnutzen.

Beispiel 2.5.10. Das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht linksexakt: Wendet man auf die Multiplikation $(2\cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ den Funktor $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an, so erhält man die Nullabbildung $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.5.11. Tensorprodukte mit freien Moduln sind sogar exakt, machen also kurze exakte Sequenzen zu kurzen exakten Sequenzen. Das folgt leicht aus dem Vertauschen mir direkten Summen 2.5.5 und den Erkenntnissen zum Tensorieren mit dem Grundring 2.5.3.

2.5.12. Ein Modul über einem Kring heißt **flach**, wenn das Tensorieren mit besagtem Modul über besagtem Kring ein exakter Funktor ist, und **treuflach**, wenn darüberhinaus das Darantensorieren von besagtem Modul keinen von Null verschiedenen Modul zu Null macht. Jeder freie Modul ist flach und jeder von Null verschiedene freie Modul ist treuflach.

Ergänzung 2.5.13. Diese Definition ist ungewöhnlich, weil „alle Moduln" gar keine Menge zu bilden brauchen. Da jedoch das Tensorprodukt mit filtierenden Kolimites vertauscht, kann man gleichbedeutend fordern, daß für jeden Untermodul eines endlich erzeugten Moduls die Einbettung unter dem Darantensorieren eine Injektion bleibt. Für diese Bedingung reicht es dann offensichtlich aus, sie auf einer Menge von Paaren aus Modul und Untermodul zu prüfen.

2.5.14 (**Tensorprodukt und Restklassenbildung**). Ist K ein Kring, M ein K-Modul, $\mathfrak{m} \subset K$ ein Ideal alias ein Untermodul des K-Moduls K, und betrachten wir in M den Untermodul $\mathfrak{m}M := \{\sum a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{m}, m_i \in M\}$, so induziert die Multiplikation einen Isomorphismus

$$(K/\mathfrak{m}) \otimes_K M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{m}M$$

In der Tat folgt das sofort, wenn wir auf die exakte Sequenz $\mathfrak{m} \hookrightarrow K \twoheadrightarrow K/\mathfrak{m}$ den Funktor $\otimes_K M$ anwenden.

Definition 2.5.15. Eine abelsche Gruppe heißt **torsionsfrei**, wenn die Multiplikation mit jeder von Null verschiedenen ganzen Zahl auf unserer Gruppe eine Injektion induziert. Allgemeiner heißt ein Modul über einem Ring **torsionsfrei**, wenn die Multiplikation mit jedem von Null verschiedenen Ringelement auf unserem Modul eine Injektion induziert.

Lemma 2.5.16. *Aus einer Injektion $N' \hookrightarrow N$ von abelschen Gruppen entsteht durch Darantensorieren einer torsionsfreien abelschen Gruppe M eine Injektion $M \otimes_{\mathbb{Z}} N' \hookrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} N$.*

2.5.17. Einen flachen $\mathbb{Z}$-Modul nenne ich auch eine **flache abelsche Gruppe**. Jede torsionsfreie abelsche Gruppe ist nach Lemma 2.5.16 also flach. Eine abelsche Gruppe ist sogar genau dann torsionsfrei, wenn sie flach ist. Ist in der Tat eine abelsche Gruppe M nicht torsionsfrei, gibt es also $m \in M\backslash 0$ und $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \neq 0$ aber $tm = 0$, so ist $(t\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv aber $(\mathrm{id}_M \otimes (t\cdot)) : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ nicht injektiv und folglich ist M nicht flach.

Beweis. Ist M endlich erzeugt, so ist M frei nach [LA2] 6.5.12 und das Lemma folgt aus 2.5.5. Wir führen nun den allgemeinen Fall darauf zurück. Jedes Element $t \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ ist ja Bild eines $t_1 \in M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe $M_1 \subset M$. Geht t nach Null in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, so auch in $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N$ für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe $M_2 \subset M$ mit $M_1 \subset M_2$. Nach dem bereits behandelten Fall verschwindet damit t_1 schon in $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ und erst recht in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ und es folgt $t = 0$. □

Vorschau 2.5.18. In einer Sprache, die wir später einführen werden, hört sich dieser Beweis so an: Für endlich erzeugte torsionsfreie Gruppen gilt das Lemma, da sie frei sind. Eine beliebige torsionsfreie Gruppe ist der filtrierende Kolimes ihrer endlich erzeugten Untergruppen, das Tensorprodukt kommutiert nach [TS] 3.7.1.40 mit Kolimites, und filtrierende Kolimites exakter Sequenzen sind exakt nach [TS] 3.7.1.18.

2.5.19. Gegeben drei Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mit additiver Struktur nennt man einen Funktor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ **biadditiv**, wenn er bilineare Abbildungen

$$\mathcal{A}(A, A') \times \mathcal{B}(B, B') \to \mathcal{C}(F(A, B), F(A', B'))$$

induziert. Unser Tensorfunktor ist ein typisches Beispiel.

2.5.20. Sind S, R Ringe, so versteht man unter einem S-R-**Bimodul** eine abelsche Gruppe M mit einer Struktur als S-Linksmodul und einer Struktur als R-Rechtsmodul derart, daß gilt

$$(sm)r = s(mr) \quad \forall s \in S, m \in M, r \in R$$

Wir notieren die Kategorie aller S-R-Bimoduln als $S\text{-Mod-}R$. Aufgrund seiner Funktorialität und Biadditivität ist das Tensorprodukt automatisch auch ein Funktor

$$(S\text{-Mod-}R) \times (R\text{-Mod-}T) \to (S\text{-Mod-}T)$$

für beliebige Ringe S, R, T. Die Operation von S beziehungsweise von T geschieht dabei durch $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$, $(m \otimes n)t = m \otimes (nt)$. Ist speziell R ein kommutativer Ring, so fallen die beiden R-Operationen auf dem Tensorprodukt, die von den Operationen von R auf den beiden Tensorfaktoren herkommen, zusammen und das Tensorprodukt von zwei R-Moduln ist in natürlicher Weise wieder ein R-Modul. Diesen Fall lernt man oft zuerst kennen, wir haben ihn auch bereits in 2.5.1 besprochen.

2.6 Allgemeine Tensorprodukte*

Definition 2.6.1. Seien Ω eine Menge und M, N Mengenmoduln über Ω und L eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $b : M \times N \to L$ heiße **Ω-balanciert**, wenn sie biadditiv ist und wenn gilt

$$b(\omega m, n) = b(m, \omega n) \quad \forall m \in M, n \in N, \omega \in \Omega$$

Für die Menge aller biadditiven Ω-balancierten Abbildungen $M \times N \to L$ verwenden wir die Notation $\mathrm{Bab}_\Omega(M \times N, L)$.

Satz 2.6.2. *1. Gegeben eine Menge Ω und Ω-Moduln M, N existiert ein Paar (T, τ) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einer biadditiven Ω-balancierten Abbildung $\tau : M \times N \to T$ derart, daß für jede weitere* *abelsche Gruppe L das Vorschalten von τ eine Bijektion*

$$\mathrm{Ab}(T, L) \overset{\circ\tau}{\overset{\sim}{\to}} \mathrm{Bab}_\Omega(M \times N, L)$$

zwischen der Menge aller Gruppenhomomorphismen $T \to L$ und der Menge aller biadditiven Ω-balancierten Abbildungen $M \times N \to L$ induziert. Wir nennen τ eine **universelle biadditive Ω-balancierte Abbildung***;*

2. *Gegeben zwei universelle biadditive Ω-balancierte Abbildungen $\tau : M \times N \to T$ und $\sigma : M \times N \to S$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $c : T \to S$ mit $c \circ \tau = \sigma$ und genau ein Gruppenhomomorphismus $d : S \to T$ mit $d \circ \sigma = \tau$. Des weiteren sind diese Homomorphismen c und d zueinander inverse Isomorphismen zwischen T und S.*

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit des Homomorphismus c in Teil 2 folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von (T, τ), in der Notation von eben hätten wir genauer $c = \hat{\sigma}$, und die Existenz und Eindeutigkeit von d folgt ebenso aus der universellen Eigenschaft von (S, σ). Schließlich gilt $(d \circ c) \circ \tau = \tau = \mathrm{id}_T \circ \tau$ und damit folgt $d \circ c = \mathrm{id}_T$ wieder nach der universellen Eigenschaft von τ. Die Identität $c \circ d = \mathrm{id}_S$ zeigt man genauso. Um die Existenz universeller balancierter Abbildungen zu zeigen, gehen wir von der universellen biadditiven Abbildung $M \times N \to M \otimes_\mathbb{Z} N$ aus, die wir bereits aus 2.5.1 kennen, und erklären $M \otimes_\Omega N$ als den Quotienten dieser abelschen Gruppe nach der von allen $\omega m \otimes n - m \otimes \omega n$ erzeugten Untergruppe. □

2.6.3. Unsere Paare sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder der reellen Zahlen. Solch eine universelle biadditive Ω-balancierte Abbildung $\tau : M \times N \to T$ verdient damit den bestimmten Artikel. Man nennt T das **Tensorprodukt von M und N über Ω** und notiert es

$$T = M \otimes_\Omega N$$

Die universelle biadditive balancierte Abbildung notieren wir $\tau : (m, n) \mapsto m \otimes n$. Aufgrund der universellen Eigenschaft erhalten wir auf diese Weise sogar einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_\Omega \times \mathrm{Mod}_\Omega & \to & \mathrm{Ab} \\ (M \quad , \quad N) & \mapsto & M \otimes_\Omega N \end{array}$$

2.6.4 (**Tensor-Hom-Adjunktion**). Gegeben Ω-Mengenmoduln M, N und eine abelsche Gruppe L erhalten wir offensichtliche Bijektionen

$$\mathrm{Ab}(M \otimes_\Omega N, L) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Bab}_\Omega(M \times N, L) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathrm{Hom}_\Omega(M, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(N, L))$$

mit der Maßgabe, daß die Operation von Ω auf der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)$ die von der Operation auf N induzierte sein soll. Die durch die Verknüpfung unserer Bijektionen gegebenen Bijektionen bilden eine Adjunktion

$$(\otimes_\Omega N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \ ))$$

von Funktoren zwischen Mod_Ω und Ab.

2.6.5. Als Linksadjungierter vertauscht $\otimes_\Omega N$ mit Koprodukten und ist rechtsexakt, ja vertauscht mit beliebigen Kolimites. Insbesondere ist er ein additiver Funktor nach [TG] 2.5.16. Man kann Beweise für diese Behauptungen in diesem Fall aber auch leicht elementar ausschreiben wie in 2.5.5 und 2.5.8.

2.6.6. Jede spaltende kurze exakte Sequenz von Ω-Moduln $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ induziert, da $\otimes_\Omega N$ ein additiver Funktor ist, eine spaltende kurze exakte Sequenz $M' \otimes_\Omega N \hookrightarrow M \otimes_\Omega N \twoheadrightarrow M'' \otimes_\Omega N$. Ist speziell e ein idempotenter Endomorphismus des Ω-Moduls M, so induziert die offensichtliche Abbildung $(eM) \otimes_\Omega N \to M \otimes_\Omega N$ einen Isomorphismus

$$(eM) \otimes_\Omega N \xrightarrow{\sim} e(M \otimes_\Omega N)$$

Beispiel 2.6.7 (**Tensorieren eines Moduls mit seinem Ring**). Ist R ein Ring und $M \in R\text{-Mod}$ ein R-Modul, so ist die Multiplikation $\mathrm{mult} : R \times M \to M$ eine universelle R-balancierte Abbildung für die Operation von R auf sich selbst durch Multiplikation von rechts. Ist in der Tat $\varphi : R \times M \to A$ irgendeine R-balancierte Abbildung, so faktorisiert sie als $\varphi = \hat{\varphi} \circ \mathrm{mult}$ mit $\hat{\varphi}(m) = \psi(1, m)$ und das ist auch offensichtlich die einzig mögliche derartige Faktorisierung. Die Abbildung $m \mapsto 1 \otimes m$ induziert also einen Isomorphismus

$$M \xrightarrow{\sim} R \otimes_R M$$

Beispiel 2.6.8 (**Tensorieren bei vielen Idempotenten**). Seien R eine $\mathbb{Z}$-Algebra und $J \subset R$ eine Menge von paarweise kommutierenden Idempotenten derart, daß es für jedes $r \in R$ ein $e \in J$ gibt mit $er = r$ und für je zwei $e, f \in J$ ein $g \in J$ gibt mit $e = eg$ und $f = fg$. Ist nun M ein R-Assoziativmodul und gibt es für alle $m \in M$ ein $e \in J$ mit $em = m$, so ist die Multiplikation eine universelle balancierte Abbildung $\mathrm{mult} : R \times M \to M$ in Bezug auf die Rechtsoperation von R auf sich selber und induziert mithin einen Isomorphismus

$$R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M$$

Ist in der Tat $\varphi : R \times M \to A$ eine balancierte Abbildung in eine abelsche Gruppe und ist $m \in M$ gegeben, so folgt für je zwei $e, f \in J$ mit $em = m$ und $fm = m$

durch Wahl eines $g \in J$ mit $eg = e$ und $fg = f$ wegen $m = em = egm = gem = gm$ und analog für f bereits

$$\varphi(e,m) = \varphi(g,m) = \varphi(f,m)$$

Diesen gemeinsamen Wert nehmen wir als $\hat{\varphi}(m)$ und erhalten so $\hat{\varphi} : M \to A$. Gegeben $r \in R$ und $m \in M$ finden wir $e \in J$ mit $er = r$ und folgern

$$\varphi(r,m) = \varphi(er,m) = \varphi(e,rm) = \hat{\varphi}(rm)$$

wegen $erm = rm$. Es gilt also $\hat{\varphi} \circ \mathrm{mult} = \varphi$. Daß es kein anderes $\hat{\varphi}$ mit dieser Eigenschaft geben kann, ist eh klar. Mithin ist die Multiplikation $R \times M \to M$ in die abelsche Gruppe M unter den getroffenen Annahmen in der Tat eine universelle balancierte Abbildung. Nach 2.6.6 liefert dann die Multiplikation auch für jedes idempotente Element $h \in R$ einen Isomorphismus

$$(hR) \otimes_R M \xrightarrow{\sim} hM$$

Ist R ein Ring, so ist offensichlich $J = \{1\}$ eine Menge von Idempotenten mit den fraglichen Eigenschaften in Bezug auf jeden Modul und wir erhalten das Tensorieren eines Moduls mit seinem Ring 2.6.7 als Spezialfall.

Übungen

Übung 2.6.9. Genau dann besteht eine abelsche Gruppe M nur aus Elementen endlicher Ordnung, wenn gilt $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. Im Rahmen der kommutativen Algebra erweist sich das im Lichte der Beschreibung 4.3.58 der Lokalisierung eines Moduls als Tensorprodukt mit dem lokalisierten Kring als ein Spezialfall der Beschreibung des Kerns 4.3.9 der Abbildung eines Moduls in seine Lokalisierung.

Übung 2.6.10. Sei $\varphi : A \to B$ ein Kringhomomorphismus und seien B-Moduln M, N gegeben. Wird B als Ring erzeugt vom Bild $\varphi(A)$ von A mitsamt den Inversen der Elemente aus $\varphi(A) \cap B^\times$, so ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \otimes_B N$$

Übung 2.6.11. In der Kategorie der Kringe ist

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A \otimes_C B \end{tikzcd}$$

für beliebige Kringhomomorphismen $C \to A$ und $C \to B$ und die offensichtlichen weiteren Kringhomomorphismen stets ein Pushout. Ist die linke Vertikale flach, so ist auch die rechte Vertikale in den Pushout.

Übung 2.6.12. Ist $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ eine spaltende kurze exakte Sequenz von Ω-Moduln, so bleibt die Sequenz exakt unter $M \otimes_\Omega$. Insbesondere ist also das Tensorieren über einem Körper stets exakt.

Ergänzende Übung 2.6.13. Seien $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $e \in \mathrm{Z}(R)$ ein Element des Zentrums von R mit $\varphi(e) = 1$. So liefern für jeden R-Modul M die Einbettung $eM \hookrightarrow M$ und die Multiplikation $(e\cdot) : M \twoheadrightarrow eM$ zueinander inverse Isomorphismen $S \otimes_R eM \xrightarrow{\sim} S \otimes_R M \xrightarrow{\sim} S \otimes_R eM$.

Übung 2.6.14 (**Ringwechsel unter Tensorprodukten**). Gegeben Ringe A, B und $M \in \text{Mod-}A$ und $X \in A\text{-Mod-}B$ und $N \in B\text{-Mod}$ Moduln beziehungsweise Bimoduln. So liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$M \otimes_A (X \otimes_B N) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A X) \otimes_B N$$

Ist insbesondere $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A B) \otimes_B N$ alias

$$M \otimes_A \operatorname{res}_B^A N \xrightarrow{\sim} \operatorname{prod}_A^B M \otimes_B N$$

in den Notationen aus 2.8.5 und 2.8.7. Ist etwa $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und N ein $(A/\mathfrak{a})$-Modul, so liefert nach 2.5.14 die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} (M/M\mathfrak{a}) \otimes_{A/\mathfrak{a}} N$. Wird zusätzlich B als Ring erzeugt vom Bild $\varphi(A)$ von A mitsamt den Inversen der Elemente aus $\varphi(A) \cap B^\times$, so ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \operatorname{prod}_A^B M$ und der offensichtliche Morphismus ist in vereinfachter Notation ein Isomorphismus

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \otimes_B N$$

Speziell liefert für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und $M \in \text{Mod-}A/\mathfrak{a}$ sowie $N \in A/\mathfrak{a}\text{-Mod}$ die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{A/\mathfrak{a}} N$ und für je zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume M, N liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus $M \otimes_\mathbb{Z} N \xrightarrow{\sim} M \otimes_\mathbb{Q} N$.

Übung 2.6.15. Sei $S \to R$ ein Ringhomomorphismus. Ist M ein S-Modul und $(m_i)_{i \in I}$ eine Basis von M, so bilden die $1 \otimes m_i$ eine Basis des R-Moduls $R \otimes_S M$.

Übung 2.6.16 (**Variante zur Rechtsexaktheit des Tensorprodukts**). Gegeben $M' \to M \twoheadrightarrow M''$ und $N' \to N \twoheadrightarrow N''$ rechtsexakte Sequenzen von Rechtsbeziehungsweise Linksmoduln über einem Ring R, so ist auch die Sequenz

$$(M' \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \to M \otimes_R N \twoheadrightarrow M'' \otimes_R N''$$

wie durch die Notation bereits angedeutet eine rechtsexakte Sequenz.

Übung 2.6.17 (**Rechtsadjungierter eines Tensorprodukts**). Gegeben ein Ring und ein R-Rechtsmodul M erhalten wir aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts ein adjungiertes Paar von Funktoren $(M\otimes_R, \mathrm{Ab}(M,\ ))$ zwischen den Kategorien $R\text{-Mod}$ und Ab. In größerer Allgemeinheit wird das in 2.8.1 diskutiert.

Ergänzende Übung 2.6.18. Gegeben ein Ring R und $M \in \text{Mod-}R$ und $N \in R\text{-Mod}$ gibt es genau einen Isomorphismus von abelschen Gruppen $M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} N \otimes_{R^{\text{opp}}} M$ mit $m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Ergänzende Übung 2.6.19. Man zeige: Gegeben ein Ring A und ein Idempotentes $e \in A$ liefert die Multiplikation einen Isomorphismus $eA \otimes_A M \xrightarrow{\sim} eM$.

Ergänzende Übung 2.6.20. In dieser Übung meint $\otimes$ ohne unteren Index stets $\otimes_{\mathbb{Z}}$. Gegeben Ringe R und S wird das Tensorprodukt $R \otimes S$ ein Ring mit der Multiplikation $(r\otimes s)(a\otimes b) := ra\otimes sb$. Für den Ringhomomorphismus $R \to R\otimes S$ mit $r \mapsto r \otimes 1$ und einen R-Rechtsmodul M haben wir $\mathrm{prod}_R^{R\otimes S} M \xrightarrow{\sim} M \otimes S$ unter der offensichtlichen Abbildung. Speziell liefert 2.6.14 für jeden $(R \otimes S)$-Modul N einen Isomorphismus

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} (M \otimes S) \otimes_{R\otimes S} N$$

Ist insbesondere N flach als $(R \otimes S)$-Modul und S flach als $\mathbb{Z}$-Modul, so ist N auch flach als R-Modul.

Übung 2.6.21. Ein Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ heißt **flach**, wenn darunter B ein flacher A-Modul wird. Man zeige, daß die Verknüpfung zweier flacher Kringhomomorphismen auch wieder flach ist.

Übung 2.6.22. Gegeben ein noetherscher Ring R ist jedes Produkt von Kopien von R ein flacher R-Modul. Hinweis: Man zeige zunächst, daß für jeden endlich präsentierten R-Modul M die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $(\prod_I R) \otimes_R M \xrightarrow{\sim} \prod_I M$ ist. Allgemeiner reicht es, statt „R noethersch“ anzunehmen, daß jedes endlich erzeugte Ideal von R ein endlich präsentierter R-Modul ist.

Übung 2.6.23. Gegeben ein Ring R und ein endlich präsentierter R-Modul M und eine Menge I ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $(\prod_I R) \otimes_R M \xrightarrow{\sim} \prod_I M$.

2.7 Merkwürdigkeiten bei Tensorprodukten*

Ergänzendes Beispiel 2.7.1. Ist R ein linksnoetherscher Ring, so ist für je zwei Mengen X, Y die offensichtliche Abbildung eine Injektion

$$\mathrm{Ens}(X, R) \otimes_R \mathrm{Ens}(Y, R) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X \times Y, R)$$

In der Tat gehe $a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_n \otimes b_n$ nach Null. Die Menge aller $(r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ mit $r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n = 0$ in $\mathrm{Ens}(Y, R)$ ist ein Untermodul von R^n. Ist R linksnoethersch, so ist dieser Untermodul endlich erzeugt, etwa von $c_1, \ldots, c_k \in R^n$. Für alle $x \in X$ gibt es also $r_1(x), \ldots, r_k(x) \in R$ derart, daß für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $a_i(x) = r_1(x) c_{1i} + \ldots + r_k(x) c_{ki}$. Es folgt

$$a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_n \otimes b_n = \sum_{i,j} r_j c_{ji} \otimes b_i = \sum_{i,j} r_j \otimes c_{ji} b_i = 0$$

Ergänzung 2.7.2 (**Tensorprodukte von Funktionenräumen**). Heike Mildenberger und Martin Ziegler haben mir ein Beispiel konstruiert, das zeigt, daß die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \otimes_R \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, R)$$

nicht für jeden Ring R injektiv ist. Der Ring R ist dabei der Polynomring in abzählbar vielen Variablen $x_0, x_1, x_2, \ldots, y_0, y_1, y_2, \ldots$ modulo der quadratischen Relationen $x_i y_j = 0 \ \forall i, j$ und $x_i x_j = y_i y_j = 0$ falls $|i - j| \neq 1$. Man betrachte nun die Elemente $a : i \mapsto x_i$ und $b : j \mapsto y_j$ von $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$. Natürlich hat $a \otimes b$ in $\mathrm{Ens}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, R)$ das Bild Null. Es reicht zu zeigen, daß $a \otimes b$ nicht bereits selbst Null ist. Dazu betrachte man das Ideal $I \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$ aller Abbildungen mit endlichem Träger und setze $R^* := \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)/I$. Die Komposition

$$R \hookrightarrow \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \twoheadrightarrow R^*$$

mit der Einbettung als konstante Funktionen links ist ein Ringhomomorphismus. Seien $a^*, b^* \in R^*$ die Bilder von $a, b \in \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$. Man zeigt nun, daß R^* einen R-linearen Ringautomorphismus f besitzt mit der Eigenschaft $f(a^*) b^* \neq 0$. Wir betrachten dazu die involutiven Automorphismen $f_{2n} = f_{2n+1} : R \xrightarrow{\sim} R$ des Rings R mit $f_{2n}(x_{2n}) = y_{2n+1}$ und $f_{2n}(y_{2n}) = x_{2n+1}$. Jedes Element von R wird nur von endlich vielen dieser Automorphismen überhaupt bewegt. Zusammen liefern die f_i einen Ringautomorphismus $f : \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{N}, R)$ gegeben durch $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (f_i(u_i))_{i \in \mathbb{N}}$. Dieser Automorphismus ist nicht R-linear, hält jedoch das Ideal I fest und der davon induzierte Automorphismus $f : R^* \xrightarrow{\sim} R^*$ des Quotienten ist sogar R-linear, da eben jedes Element von R nur von endlich vielen unserer Automorphismen f_i überhaupt bewegt wird und folglich jede konstante Folge nur an endlich vielen Stellen verändert wird. Damit ist $f(a^*) b^*$ das Bild der Folge $(y_2 y_1, y_1 y_2, y_4 y_3, y_3 y_4, \ldots)$ in R^*, und das ist nicht Null.

2.7.3. Gibt es einen Kring R und R-Moduln M, N und linear unabhängige $K \subset M$ und $L \subset N$ derart, daß die $k \otimes l$ mit $k \in K$ und $l \in L$ in $M \otimes_R N$ nicht linear unabhängig sind über R? Ich denke schon, kenne aber kein Gegenbeispiel.

2.8 Induktion und Koinduktion für Ringe*

2.8.1 (**Tensor-Hom-Adjunktion**). In diesem Abschnitt fasse ich einige Allgemeinheiten über Tensorprodukte zusammen. Für den Fortgang der Vorlesung werden sie erst viel später benötigt werden. Wir setzen neben der Kenntnis allgemeiner Tensorprodukte im Umfang von 2.6 die Begrifflichkeit adjungierter Funktoren im Umfang von [TF] 2.4.3 voraus. Seien Ω, Θ Mengen und X ein Ω-Θ-**Modul**, als da heißt eine abelsche Gruppe mit einer Operation von Ω und einer Operation von Θ, die kommutieren. Ich notiere im folgenden die Operation von Ω durch davorschreiben und die Operation von Θ durch dahinterschreiben, so daß die Bedingung des Kommutierens ausgeschrieben werden kann zu $(\omega x)\theta = \omega(x\theta)\ \forall \omega, x, \theta$. Wir erhalten Funktoren

$$\begin{array}{rcl} X\otimes_\Theta : \Theta\text{-Mod} & \to & \Omega\text{-Mod} \\ \operatorname{Hom}_\Omega(X,\ ) : \Omega\text{-Mod} & \to & \Theta\text{-Mod} \end{array}$$

Die Adjunktionsisomorphismen $\operatorname{Ab}(X \otimes_\Theta M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Theta(M, \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(X, N))$ aus 2.6.4 induzieren Isomorphismen

$$\operatorname{Hom}_\Omega(X \otimes_\Theta M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Theta(M, \operatorname{Hom}_\Omega(X, N))$$

Diese hinwiederum bilden eine Adjunktion zwischen unseren Funktoren.

Ergänzung 2.8.2. Gegeben Ringe A, B versteht man unter einem A-B-**Bimodul** X eine abelsche Gruppe mit einer Struktur als A-Modul und einer Struktur als B-Rechtsmodul derart, daß gilt $(ax)b = a(xb)\ \forall a, x, b$. Dann ist $X^* := \operatorname{Hom}_A(X, A)$ stets ein B-A-Bimodul vermittels der Rechtsoperation von $a \in A$ durch Nachschalten der Rechtsmultiplikation, $fa := (\cdot a) \circ f$ für jeden Homomorphismus f. Wir erhalten dann natürliche Homomorphismen $X^* \otimes_A N \to \operatorname{Hom}_A(X, N)$. Unter der zusätzlichen Annahme, daß X als A-Modul ein Summand von A^n ist für $n < \infty$ alias endlich erzeugt und projektiv, sind das sogar Isomorphismen

$$X^* \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(X, N)$$

Beispiel 2.8.3 (**Eine Morita-Äquivalenz**). Ist R ein Ring und $X = R^n$ für $n \geq 1$ mit der natürlichen Linksoperation von $A = \operatorname{Mat}(n; R)$ und Rechtsoperation von $B = R$, so liefert unser adjungiertes Paar eine Äquivalenz von Kategorien

$$R\text{-Mod} \ \stackrel{\approx}{\to}\ \operatorname{Mat}(n; R)\text{-Mod}$$

Beispiel 2.8.4 (**Eine weitere Morita-Äquivalenz**). Seien $M_1, \ldots, M_n$ Moduln über einem Ring und $r_1, \ldots, r_n$ positive natürliche Zahlen. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} A & := & \operatorname{End}(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n) \\ B & := & \operatorname{End}(M_1^{\oplus r_1} \oplus \ldots \oplus M_n^{\oplus r_n}) \\ X & := & \operatorname{Hom}(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n, M_1^{\oplus r_1} \oplus \ldots \oplus M_n^{\oplus r_n}) \end{array}$$

So liefert unser adjungiertes Paar eine Äquivalenz von Kategorien

$$A\text{-Mod} \stackrel{\approx}{\to} B\text{-Mod}$$

Statt Moduln über einem Ring hätten wir dabei auch Objekte einer beliebigen additiven Kategorie nehmen können. Das alles ist ein Spezialfall der sogenannten **Morita-Äquivalenz**.

2.8.5. Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so können wir speziell B vermittels φ auffassen als einen A-B-Bimodul. Dann wird der erste Funktor nach 2.5.3 die **Restriktion der Skalare** $\mathrm{res}_\varphi = \mathrm{res}_B^A : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$ und der zweite Funktor die sogenannte **Induktion**

$$\mathrm{ind}_\varphi = \mathrm{ind}_A^B := \mathrm{Hom}_A(B,\ ) : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$$

und wir erhalten eine Adjunktion $(\mathrm{res}_B^A, \mathrm{ind}_A^B)$.

2.8.6 (**Diskussion der Notation**). Viele Autoren schreiben statt unserem res_B^A auch res_A^B. Ich vermute, daß dem die Vorstellung zugrundeliegt, daß Induktion aus Objekten niederer Komplexität solche höherer Komplexität macht und Restriktion umgekehrt aus Objekten höherer Komplexität solche niederer Komplexität. Das ist in den üblichen Anwendungen sicher richtig, aber in der hier vorgeschlagenen Allgemeinheit gilt es nicht mehr. Ich verfolge stattdessen die Konvention, die „Ausgangskategorie“ durch einen unteren Index anzudeuten und die „Zielkategorie“ durch einen oberen Index.

2.8.7. Umgekehrt können wir natürlich vermittels unseres Ringhomomorphismus B auch auffassen als einen B-A-Bimodul. Dann wird der zweite Funktor die Restriktion der Skalare und der erste Funktor die sogenannte **Erweiterung der Skalare** oder **Koinduktion**. Wir nennen ihn der Symmetrie der Begrifflichkeit halber manchmal auch die **Produktion** und notieren ihn

$$\mathrm{prod}_A^B := B\otimes_A : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$$

Damit erhalten wir eine Adjunktion $(\mathrm{prod}_A^B, \mathrm{res}_B^A)$. Für jeden A-Modul M und jeden B-Modul N liefert insbesondere das Vorschalten von $m \mapsto 1 \otimes m$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

2.8.8. Die Adjunktionen $(\mathrm{res}, \mathrm{ind})$ und $(\mathrm{prod}, \mathrm{res})$ werden üblicherweise als **Frobenius-Reziprozitäten** bezeichnet. Gegeben des weiteren Ringhomomorphismen $A \to B \to C$ liefert die Gleichheit $\mathrm{res}_B^A \circ \mathrm{res}_C^B = \mathrm{res}_C^A$ vermittels dieser Adjunktionen nach [TF] 2.4.8.22 Isotransformationen

$$\mathrm{ind}_B^C \circ \mathrm{ind}_A^B \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{ind}_A^C \qquad \text{und} \qquad \mathrm{prod}_B^C \circ \mathrm{prod}_A^B \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{prod}_A^C .$$

Sie sind gemeint, wenn von der **Transitivität** der Induktion beziehungsweise Koinduktion die Rede ist.

Beispiel 2.8.9. Für die in [LA2] 8.1.42 besprochene Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}}$ eines reellen Vektorraums V induziert die dort erklärte kanonische Einbettung $V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}$ einen Isomorphismus von komplexen Vektorräumen $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{C}}$.

Ergänzung 2.8.10 (**Hom-Hom-Adjunktion**). Gegeben Ringe A, B und ein A-B-Bimodul X liefern die offensichtlichen Identifikationen aus dem Exponentialgesetz [GR] 2.1.6.5 Identifikationen

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Bil}_{A-\mathbb{Z}-B}(M \times N, X) & \\ \swarrow\wr & & \wr\searrow \\ \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{-B}(N, X)) & & \mathrm{Hom}_{-B}(N, \mathrm{Hom}_A(M, X)) \end{array}$$

Hier bezeichnet in der Mitte $\mathrm{Bil}_{A-\mathbb{Z}-B}(M \times N, X)$ die Menge aller $\mathbb{Z}$-bilinearen Abbildungen $\varphi \colon M \times N \to X$ mit $\varphi(am, n) = a\varphi(m, n)$ und $\varphi(m, nb) = \varphi(m, n)b$ für alle $m \in M$, $n \in N$, $a \in A$, $b \in B$. Wir können diese Identifikationen auch als die Adjunktionen eines adjungierten Paars von Funktoren

$$A\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{opp}} \underset{\mathrm{Hom}_{-B}(\;,X)}{\overset{\mathrm{Hom}_A(\;,X)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}\text{-}B$$

auffassen. Der obere Funktor ist dabei rechtsadjungiert zum unteren Funktor.

Ergänzung 2.8.11 (**Tensorprodukte mit allgemeineren Objekten**). Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und B ein Ring und $B^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}(X)$ ein Homomorphismus in den Endomorphismenring von X, so erhalten wir in derselben Weise auch einen Funktor

$$\mathcal{A}(X, \;) : \mathcal{A} \to B\text{-}\mathrm{Mod}$$

Er besitzt im allgemeinen keinen Linksadjungierten, aber natürlich wie jeder Funktor einen partiellen Linksadjungierten, der eben auf den Objekten $M \in B\text{-}\mathrm{Mod}$ erklärt ist, für die $N \mapsto \mathrm{Hom}_B(M, \mathcal{A}(X, N))$ ein darstellbarer Funktor ist. Wir notieren das darstellende Objekt dann wieder

$$X \otimes_B M$$

Zur Übung mag der Leser zeigen, daß für jeden endlich präsentierten B-Modul alias jeden B-Modul M, der in eine rechtsexakte Sequenz $B^n \to B^m \twoheadrightarrow M$ von B-Moduln paßt mit $n, m \in \mathbb{N}$, solch ein darstellendes Objekt $X \otimes_B M \in \mathcal{A}$ tatsächlich existiert und beschrieben werden kann als der Kokern des hoffentlich offensichtlichen Morphismus $X^n \to X^m$. Unser $X \otimes_B M$ ist im übrigen auch funktoriell in X in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

Ergänzung 2.8.12 (**Hom-Funktoren in allgemeinere Objekte**). Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt und B ein Ring und $B^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}(X)$ ein Homomorphismus in seinen Endomorphismenring, so hat in derselben Weise wie in 2.8.11 der Funktor

$$\mathcal{A}(\ ,X) : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Mod}\text{-}\,B$$

zumindest einen partiellen Rechtsadjungierten. Ist dieser auf $N \in \mathrm{Mod}\text{-}\,B$ definiert, so notieren wir sein Bild wieder

$$\mathrm{Hom}_{-B}(N, X)$$

und erhalten damit ein Objekt von $\mathcal{A}$. Ist hier unser N endlich präsentierbar, etwa durch $B^n \to B^m \to N$, so erhalten wir ein mögliches solches Objekt als Kern eines Morphismus $X^m \to X^n$, dessen genaue Definition dem Leser überlassen bleiben möge. Unser $\mathrm{Hom}_{-B}(N, X)$ ist sogar auch noch funktoriell in X, aber das soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden.

Übungen

Übung 2.8.13. Gegeben ein Kring k und k-Moduln M, N konstruiere man natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_k(M, \mathrm{Hom}_k(N, k)) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathrm{Hom}_k(M \otimes_k N, k) \overset{\sim}{\rightarrow} \mathrm{Hom}_k(N, \mathrm{Hom}_k(M, k))$$

Im Rahmen unserer Diskussion von „Schmelzkategorien“ werden wir diese Isomorphismen in einem allgemeineren Kontext wiedersehen.

2.9 Ganzzahlige symplektische Formen*

Satz 2.9.1 (Symplektische Formen über $\mathbb{Z}$). *Gegeben eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe Γ mit einer nichtausgearteten alternierenden Bilinearform $\omega : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ existiert stets eine Basis von Γ, bezüglich derer die Matrix unserer Form eine Blockmatrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

ist mit $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_r)$ und $d_i > 0$ und $d_i | d_{i+1}$ für alle i. Die d_i sind dabei durch die Form ω eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir wählen $\lambda, \mu \in \Gamma$ derart, daß $\omega(\lambda, \mu) = d$ die kleinstmögliche positive Zahl ist, die so dargestellt werden kann. Dann behaupten wir $\Gamma = \langle \lambda, \mu \rangle \oplus$

$\langle \lambda, \mu \rangle^\perp$. Aus Dimensionsgründen gilt das über $\mathbb{Q}$. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ finden wir also $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ derart, daß $m\gamma$ eine Darstellung

$$m\gamma = a\lambda + b\mu + \kappa$$

besitzt mit $\kappa \in \langle \lambda, \mu \rangle^\perp$. Es folgt sofort $m\omega(\gamma, \mu) = da$. Wäre m kein Teiler von a, so wäre d kein Teiler von $\omega(\gamma, \mu)$ und wir könnten $x, y \in \mathbb{Z}$ finden mit $0 < x\omega(\gamma, \mu) + \gamma\omega(\lambda, \mu) = \omega(x\gamma + \gamma\lambda, \mu) < d$, im Widerspruch zur Wahl von λ, μ. Das kann nicht sein, folglich teilt m unser a und ebenso auch b. Dann aber teilt m auch κ und wir finden wie gewünscht

$$\Gamma = \langle \lambda, \mu \rangle \oplus \langle \lambda, \mu \rangle^\perp$$

Vollständige Induktion beendet den Beweis der Existenz von D, wenn auch zunächst noch ohne die Zusatzbedingung $d_i | d_{i+1}$. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß im Fall, daß d_1 nicht d_2 teilt, unser d_1 nicht das Kleinstmögliche gewesen sein kann, und induktiv folgt so auch $d_i | d_{i+1}$. Die Eindeutigkeit der d_i schließlich folgt, indem wir die Eindeutigkeit im Elementarteilersatz [LA2] 6.5.14 auf den Fall der von ω induzierten Abbildung $\Gamma \hookrightarrow \Gamma^*$ anwenden. $\square$

3 Affine Varietäten

3.1 Polynomiale Funktionen

Definition 3.1.1. Seien k ein Körper und $X \subset k^n$ eine Teilmenge. Eine k-wertige Funktion $f : X \to k$ auf X heißt eine **polynomiale Funktion**, wenn es ein Polynom $P \in k[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit $f(x) = P(x)\ \forall x \in X$.

3.1.2. Sei k ein Körper. Im Fall einer algebraischen Teilmenge $X \subset_{\mathrm{A}} k^n$ notieren wir den Ring der polynomialen Funktionen auf X als

$$\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$$

mit unserer allgemeinen Notation $\mathrm{Ens}(X, k)$ für die Menge aller Abbildung einer Menge X in eine Menge k. Nach dem Isomorphiesatz für Ringe [AL] 2.2.6 liefert die Einschränkung von Funktionen einen Isomorphismus von k-Kringen

$$k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(X) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(X)$$

zwischen dem Restklassenring des Polynomrings nach dem Verschwindungsideal von X und dem Ring der polynomialen Funktionen auf X. Das gilt sogar für beliebige Teilmengen $X \subset k^n$, nur wollen wir in diesen allgemeineren Fällen die Notation $\mathcal{O}(X)$ für andere Ringe von Funktionen reservieren.

3.1.3 (**Notationen für Ringe von polynomialen Funktionen**). Viele Autoren verwenden statt $\mathcal{O}(X)$ die alternative Notation $k[X]$ für den k-Kring der polynomialen Funktionen auf X. Die Aussage, daß für einen unendlichen Kring k die polynomialen Funktionen auf $X = k$ durch obigen Isomorphismus mit dem Polynomring in einer Veränderlichen T identifiziert werden, schreibt sich in dieser Notation $k[T] \stackrel{\sim}{\to} k[k]$ und in unserer Notation $k[T] \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(k)$.

3.1.4 (**Polynomiale Funktionen auf Produkten**). Gegeben ein Körper k und algebraische Teilmengen $X \subset_{\mathrm{A}} k^n$ und $Y \subset_{\mathrm{A}} k^m$ ist die durch $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ mit der Regel $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ erklärte Abbildung ein Isomorphismus von k-Kringen

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Die Multiplikation auf der linken Seite ist dabei $(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$ wie in [LA2] 9.9.9. Die Surjektivität folgt leicht aus der offensichtlichen Surjektivität im Fall $X = k^m$, $Y = k^n$. Die Injektivität folgt aus der Injektivität der Abbildung $\mathrm{Ens}(X, k) \otimes_k \mathrm{Ens}(Y, k) \to \mathrm{Ens}(X \times Y, k)$, $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$, die für beliebige Mengen X, Y in [LA2] 8.1.47 diskutiert wird. Unseren Isomorphismus gibt es sogar genauso für nicht notwendig algebraische Teilmengen, für diese haben wir jedoch keine Notation für Ringe polynomialer Funktionen bereitgestellt.

Übungen

Übung 3.1.5. Man zeige: Gegeben nilpotentfreie k-Kringe A, B über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist auch ihr Tensorprodukt $A \otimes_k B$ nilpotentfrei. Hinweis: Realisierung durch polynomiale Funktionen 3.1.4.

Ergänzung 3.1.6. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so ist die Aussage der vorhergehenden Übung im allgemeinen falsch. Ein Gegenbeispiel steht in [AL] 6.1.1, das Tensorprodukt $K(T) \otimes_{K(T^p)} K(T)$ für einen Körper K positiver Charakteristik $p > 0$ hat nilpotente Elemente. Ist jedoch $\bar{k}/k$ separabel, so stimmt unsere Aussage doch wieder. Allgemeiner ist für jede Galoiserweiterung K/k und jeden k-Kring A seine Erweiterung $A \otimes_k K$ nilpotentfrei genau dann, wenn A nilpotentfrei ist. In der Tat ist das Nilradikal von $A \otimes_k K$ stabil unter der Galoisgruppe, und wäre es nicht Null, so wäre nach [AL] 6.4.4 auch sein Schnitt mit A nicht Null.

Übung 3.1.7 (**Disjunktes Verkleben polynomialer Funktionen**). $(k = \bar{k})$. Seien disjunkte und Zariski-abgeschlossene Teilmengen $X, Y \mathrel{\mathpalette\subset\relax}\!\!\!\!\!\!{\scriptstyle A}\ k^n$ gegeben, in Formeln $X \cap Y = \emptyset$, sowie polynomiale Funktionen $f : X \to k$ und $g : Y \to k$. Man zeige, daß die Abbildung

$$h : X \cup Y \to k$$

mit $h|_X = f$ und $h|_Y = g$ dann auch polynomial ist. Hinweis: Nach dem Nullstellensatz ist die Summe der Verschwindungsideale der ganze Polynomring. Nun verwende man den abstrakten chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4. Insbesondere kann man eine Vorgabe von endlich vielen Funktionswerten an endlich vielen Punkten stets durch eine polynomiale Funktion interpolieren, was wir aber eigentlich in diesem Fall schon aus [AL] 2.3.8 wissen.

Übung 3.1.8 (**Kein abgeschlossenes Verkleben polynomialer Funktionen**). Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und algebraische Teilmengen $X, Y \subset_A k^n$ sowie polynomiale Funktionen $f : X \to k$ und $g : Y \to k$ mit $f|_{X \cap Y} = g|_{X \cap Y}$ muß die Abbildung

$$h : X \cup Y \to k$$

mit $h|_X = f$ und $h|_Y = g$ keineswegs polynomial sein. Als Beispiel untersuche man den k^2 mit X dem Achsenkreuz und Y einer weiteren Ursprungsgeraden. Mutige zeigen, daß das Verkleben im allgemeinen genau dann gelingt, wenn $\mathcal{I}(X) + \mathcal{I}(Y)$ ein Radikalideal ist.

3.2 Räume als Ringe

3.2.1. Seien k ein Körper und $X \subset_A k^n$ sowie $Y \subset_A k^m$ algebraische Teilmengen. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt **polynomial**, wenn es Polynome $P_1, \ldots, P_m \in$

$k[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit

$$\varphi(x) = (P_1(x), \ldots, P_m(x)) \quad \forall x \in X$$

Ist zusätzlich eine algebraische Teilmenge $Z \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^l$ gegeben sowie polynomiale Abbildungen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$, so ist offensichtlich auch deren Verknüpfung $\psi \circ \varphi : X \to Z$ polynomial.

Definition 3.2.2. Sei k ein Körper. Jede polynomiale Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen algebraischen Teilmengen $X \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ und $Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^m$ liefert auf den polynomialen Funktionen einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

in die Gegenrichtung, das **Vorschalten von** φ alias **Zurückholen von Funktionen** $f \mapsto f \circ \varphi$. Wir nennen $\varphi^\sharp$ den zu φ gehörigen **Komorphismus**.

3.2.3. Das bleibt sinnvoll für einen beliebigen Kring k und beliebige Teilmengen $X \subset k^m$ und $Y \subset k^n$, nur erlauben wir uns dann nicht die Notation $\mathcal{O}(X)$.

Definition 3.2.4. Ein Ring heißt **nilpotentfrei** oder gleichbedeutend **reduziert**, wenn er außer der Null keine nilpotenten Elemente hat.

3.2.5. Für die weitere Entwicklung der algebraischen Geometrie verwenden wir die Sprache der Kategorientheorie in dem Umfang, wie sie etwa in [LA2] 9.1.1 folgende entwickelt wird, und insbesondere den Begriff einer Äquivalenz von Kategorien [LA2] 9.2.19. In dieser Sprache ausgedrückt haben wir in 1.6.5 die Kategorie der k-Kringe eingeführt.

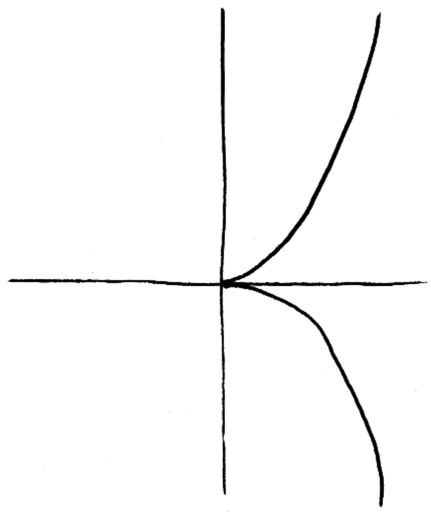
Satz 3.2.6 (Räume als Ringe). $(k = \bar{k})$. *Betrachten wir die algebraischen Mengen in irgendwelchen k^n als die Objekte einer Kategorie mit den polynomialen Abbildungen als Morphismen, so liefert das Bilden des k-Krings der polynomialen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\textit{Algebraische Mengen}\\ \textit{in irgendwelchen } k^n\end{array}\right\} & \overset{\approx}{\to} & \left\{\begin{array}{c}\textit{Nilpotentfreie}\\ \textit{ringendliche } k\textit{-Kringe}\end{array}\right\}^{\mathrm{opp}} \\[2ex]
X & & \mathcal{O}(X) \\
\varphi\downarrow & \mapsto & \varphi^\sharp\uparrow \\
Y & & \mathcal{O}(Y)
\end{array}$$

3.2.7 (**Endlichdimensionale nilpotentfreie k-Kringe**). $(k = \bar{k})$. Insbesondere liefert das Bilden des k-Krings aller k-wertigen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{Endliche Mengen}\} & \overset{\approx}{\to} & \{\text{Nilpotentfreie } k\text{-Kringe } A \text{ mit } \dim_k A < \infty\}^{\mathrm{opp}} \\
X & \mapsto & \mathrm{Ens}(X, k)
\end{array}$$

In diesem Fall können wir aber auch einfacher argumentieren. Gegeben ein endlichdimensionaler nilpotentfreier k-Kring A liefert ja die Linksmultiplikation eine Einbettung $A \hookrightarrow \operatorname{End} A$, $a \mapsto (a\cdot)$, deren Bild nach 2.3.14 genau aus allen Endomorphismen besteht, die mit allen Rechtsmultiplikationen $(\cdot b)$ für $b \in A$ kommutieren. Aufgrund der Funktorialität der Jordanzerlegung [LA2] 5.3.7 gehört mit $(a\cdot)$ dann auch sein nilpotenter Anteil zum Bild unserer Einbettung, und ist A nilpotentfrei, muß der nilpotente Anteil Null und $(a\cdot)$ diagonalisierbar sein. Dann gibt es aber nach [LA2] 9.8.10 in A eine Basis, bezüglich derer alle $(a\cdot)$ durch Diagonalmatrizen dargestellt werden, und aus Dimensionsgründen liefert dann unsere Einbettung $A \hookrightarrow \operatorname{End} A$ einen Isomorphismus von A mit dem Ring der Diagonalmatrizen, also mit $k \times \ldots \times k$. Das zeigt, daß unser Funktor surjektiv ist auf Isomorphieklassen. Der Rest des Beweises bleibe dem Leser überlassen.



Ein reelles Bild der sogenannten **Neil'schen Parabel**, der Nullstellenmenge von $x^3 = y^2$ in der Ebene.

Beispiele 3.2.8 (**Neil'sche Parabel und nodale Kubik**). $(k = \bar{k})$. Für $n \geq m$ entspricht der Projektion $k^n \twoheadrightarrow k^m$ durch Weglassen der letzten Koordinaten of den polynomialen Funktionen die Einbettung von Polynomringen durch Hinzufügen von Variablen $k[T_1, \ldots, T_m] \hookrightarrow k[T_1, \ldots, T_m, T_{m+1}, \ldots, T_n]$. Der Einbettung $X \hookrightarrow k^n$ einer algebraischen Teilmenge entspricht in der Gegenrichtung die Surjektion

$$k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$$

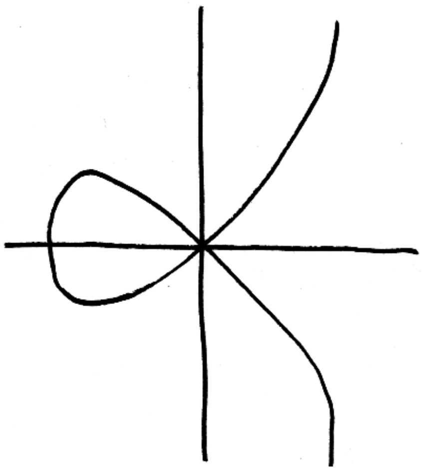
Umgekehrt, und jetzt schreiben wir zur Abwechslung und zum Vermeiden von Indizes mal X, Y für die Variablen eines Polynomrings, entspricht die Komposition

$$k[X, Y] \twoheadrightarrow k[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle \xrightarrow{\sim} \langle 1, T^2, T^3, \ldots \rangle_k = k + \langle T^2 \rangle \subset k[T]$$

mit dem mittleren Isomorphismus gegeben durch $X \mapsto T^2$, $Y \mapsto T^3$ der Abbildung, die die Gerade „geknifft" in die Ebene legt vermittels $k \to k^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. Weiter entspricht die Komposition

$$k[X,Y] \twoheadrightarrow k[X,Y]/\langle X^3 + X^2 - Y^2\rangle \xrightarrow{\sim} 1 + \langle T^2 - 1\rangle \subset k[T]$$

mit dem mittleren Isomorphismus gegeben durch die Vorschrift $X \mapsto (T^2 - 1)$, $Y \mapsto T(T^2 - 1)$ der Abbildung, die die Gerade „mit Selbstüberschneidung" in die Ebene legt vermittels $k \to k^2$, $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Hier haben alle Fasern höchstens einen Punkt mit Ausnahme der Faser über dem Ursprung, die aus den beiden Punkten $\pm 1 \in k$ besteht und im Fall einer von 2 verschiedenen Charakteristik zwei Punkte hat. Man beachte, daß $1 + \langle T^2 - 1\rangle \subset k[T]$ der Teilring aller Polynome ist, die bei $T = -1$ und $T = 1$ jeweils denselben Wert annehmen. Die mittleren Isomorphismen in den letzten beiden Beispielen sind nicht ganz offensichtlich und sollten vom Leser zur Übung bewiesen werden. Die fraglichen Abbildungen $k \to k^2$ gehen sogar surjektiv auf die Nullstellenmengen der fraglichen Polynome, aber zumindest im letzten Beispiel scheint mir das mit der uns bis jetzt zur Verfügung stehenden Theorie gar nicht so leicht einzusehen: Warum sollte sich denn jede Lösung der Gleichung $x^3 + x^2 = y^2$ in der Form $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ mit $t \in k$ schreiben lassen? Na gut, mit etwas Rechnen geht das dann schon. In 5.2.17 werden Sie es auch ohne weitere Mühen aus dem Going-up-Theorem folgern können. Mehr dazu diskutieren wir in 3.3.14.



Ein reelles Bild der sogenannten **nodalen Kubik**, der Nullstellenmenge von $x^3 + x^2 = y^2$ in der Ebene.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß es für jeden nilpotentfreien ringendlichen k-Kring A eine algebraische Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\raisebox{-0.5ex}{\tiny A}\; k^n$ gibt mitsamt einem Isomorphismus von k-Kringen $\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} A$. Sind in der Tat $t_1, \ldots, t_n \in A$ Erzeuger unseres k-Krings, so erhalten wir durch die Vorschrift $T_i \mapsto t_i$ eine Surjektion

$$k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow A$$

Bezeichne $\mathfrak{a}$ ihren Kern. Besitzt A außer der Null keine nilpotenten Elemente, so ist $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal, und ist k algebraisch abgeschlossen, so ist ein Radikalideal im Polynomring das Verschwindungsideal seiner Nullstellenmenge, in Formeln $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$. Wir erhalten damit Isomorphismen von k-Kringen

$$\mathcal{O}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) \overset{\sim}{\leftarrow} k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \overset{\sim}{\to} A$$

und haben gezeigt, daß A isomorph ist zum k-Kring der polynomialen Funktionen der algebraischen Menge $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subset k^n$. Unser Funktor ist also essentiell surjektiv. Jetzt müssen wir noch zeigen, daß er auch volltreu ist, daß also unsere Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ Bijektionen zwischen den Morphismenräumen liefert. Das gilt sogar ohne die Annahme $k = \bar{k}$. Wir notieren dazu die Menge der polynomialen Abbildungen zwischen zwei algebraischen Mengen mit $\operatorname{Pol}(X, Y)$. Homomorphismen von k-Kringen notieren wir $\operatorname{Kring}^k(A, B)$. Dann erinnern wir uns an die Formel $Y = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subset k^m$ und bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Pol}(X, Y) & & \to & & \operatorname{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\operatorname{Pol}(X, k^m) & \overset{\sim}{\to} & \mathcal{O}(X)^m & \overset{\sim}{\to} & \operatorname{Kring}^k(k[T_1, \ldots, T_m], \mathcal{O}(X))
\end{array}$$

Darin seien die Horizontalen durch $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ gegeben und die Vertikalen durch $Y \subset k^m$ beziehungsweise $k[T_1, \ldots, T_m] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$ und die beiden einzelnen Abbildungen in der unteren Horizontale durch das Nachschalten der Projektionen auf die Koordinaten und das Einsetzen von polynomialen Funktionen für die Variablen. Diese beiden Abbildungen sind sicher Bijektionen, folglich ist auch die untere Horizontale insgesamt eine Bijektion. Die obere Horizontale ist dann ebenso eine Bijektion, denn dort sind nun beide Seiten in natürlicher Bijektion zu

$$\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{O}(X)^m \mid f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}(Y)\}$$

Um das zu sehen, verwenden wir die universelle Eigenschaft der Quotientenabbildung $k[T_1, \ldots, T_m]/\mathcal{I}(Y) \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}(Y)$ auf der rechten Seite und die Definition des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(Y)$ auf der linken Seite. $\square$

Übungen

Übung 3.2.9 (**Stetigkeit polynomialer Abbildungen**). Ich erinnere daran, daß eine Abbildung zwischen topologischen Räumen stetig heißt, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist. Man zeige: Gegeben ein Körper k sind polynomiale Abbildungen $X \to Y$ mit $X \subset_{\mathrm{A}} k^n$ und $Y \subset_{\mathrm{A}} k^m$ stetig für die von der Zariskitopologie auf unseren Teilmengen induzierte Topologie.

3.3 Naive affine Varietäten

Definition 3.3.1. Gegeben ein Körper k verstehen wir unter einer **k-geringten Menge** ein Paar

$$(X, \mathcal{O}(X))$$

bestehend aus einer Menge X und einem k-Unterring $\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ im k-Ring aller k-wertigen Funktionen auf X. Die Elemente von $\mathcal{O}(X)$ nennen wir die **strukturierenden Funktionen** unserer k-geringten Menge X. Ein **Morphismus** von $(X, \mathcal{O}(X))$ in eine weitere k-geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$ ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ derart, daß gilt $f \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$. Mit diesen Morphismen bilden die k-geringten Mengen eine Kategorie

$$\mathrm{Ensr}_k$$

Den durch Vorschalten von φ erklärten Homomorphismus von k-Kringen nennen wir den **Komorphismus zu** φ und notieren ihn $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Definition 3.3.2. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine **naive affine k-Varietät** oder **affine k-Varietät** ist eine k-geringte Menge $(X, \mathcal{O}(X))$ derart, daß ihr Ring von strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k und daß wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcc} X & \stackrel{\sim}{\to} & \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(X), k) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

von X mit der Menge der k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ erhalten, wenn wir jedem Punkt $x \in X$ den durch das Auswerten bei x gegebenen Ringhomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k$, $f \mapsto f(x)$ zuordnen. Die strukturierenden Funktionen einer affinen Varietät nennen wir auch ihre **regulären Funktionen**.

3.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Es wird sich bald erweisen, daß unsere naiven affinen Varietäten bis auf Isomorphismus genau unsere k-geringten Mengen $(X, \mathcal{O}(X))$ zu algebraischen Teilmengen $X \subset\!\!\!\!\!{\scriptstyle\mathrm{A}}\ k^n$ sind. Das Adjektiv „affin“ dient dazu, in der Terminologie Platz zu lassen für allgemeinere Varietäten, wie wir sie in 6.4.2 kennenlernen. Das Adjektiv „naiv“ bringt zum Ausdruck, daß wir unsere naiven affinen Varietäten als spezielle k-geringte Mengen betrachten und noch nicht, wie im Fall allgemeiner Varietäten, als spezielle „k-geringte Räume“. Dieser Unterschied wird sich jedoch als unwesentlich erweisen, weshalb wir auf das Adjektiv „naiv“ im folgenden meist verzichten.

3.3.4. Unter einem **Morphismus** von affinen k-Varietäten verstehen wir einen Morphismus von k-geringten Mengen. Die affinen k-Varietäten bilden damit eine volle Unterkategorie

$$\mathrm{Varaff}_k \subset \mathrm{Ensr}_k$$

in der Kategorie aller k-geringten Mengen. Gegeben affine Varietäten X, Y notieren wir die Menge aller Morphismen von X nach Y statt $\mathrm{Varaff}_k(X, Y)$ meist kürzer $\mathrm{Var}_k(X, Y)$ und greifen damit der volltreuen Einbettung $\mathrm{Varaff}_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{Var}_k$ in die Kategorie aller k-Varietäten vor, die wir zusammen mit der Definition allgemeiner Varietäten in 6.4.2 kennenlernen werden. Wenn wir hoffen, daß der Grundkörper aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir auch kurz Var.

3.3.5. Ich verwende das Wort **Varietät** nur für k-Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern $k = \bar{k}$. Wenn das Wort „Varietät" fällt, ist also implizit zu verstehen, daß der zugehörige Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. Ich werde das nicht immer extra erwähnen.

Beispiele 3.3.6. $(k = \bar{k})$.

1. Jede endliche Menge X wird mit $\mathcal{O}(X) := \mathrm{Ens}(X, k)$ eine affine Varietät.

2. Die Menge $X = k^n$ wird mit $\mathcal{O}(X) \cong k[T_1, \ldots, T_n]$ den polynomialen Funktionen eine affine Varietät.

3. (**Nullstellenmengen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine Teilmenge $E \subset \mathcal{O}(X)$ des Rings der regulären Funktionen wird die Menge der gemeinsamen Nullstellen

$$Y = \mathcal{Z}(E) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in E\}$$

mit den Einschränkungen $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ regulärer Funktionen von X als den regulären Funktionen von Y eine affine Varietät. In der Tat kommt jeder k-lineare Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(Y) \to k$ von einem k-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ her, der durch Auswerten δ_x an einem Punkt $x \in X$ gegeben wird, der dann notwendig bereits zu Y gehört haben muß.

4. (**Nichtnullstellenmengen einzelner Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ wird ihre Nichtnullstellenmenge

$$X_f := X \backslash \mathcal{Z}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

eine affine Varietät mit $\mathcal{O}(X_f) := \overline{\mathcal{O}(X)}[\bar{f}^{-1}] \subset \mathrm{Ens}(X_f, k)$ dem von den Restriktionen der regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ zusammen mit der Funktion $1/\bar{f}$ für $\bar{f}$ die Restriktion von f erzeugten Teilring. In der Tat liefern die Homomorphismen von k-Kringen $\mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{O}(X)} \hookrightarrow \mathcal{O}(X_f)$ Injektionen

$$\mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(X), k) \hookleftarrow \mathrm{Kring}^k(\overline{\mathcal{O}(X)}, k) \hookleftarrow \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(X_f), k)$$

und das Bild der Komposition kann nur solche Homomorphismen enthalten, die f auf eine Einheit abbilden, die also eine Auswertung δ_x an einer Stelle $x \in X_f$ sind. Da umgekehrt alle diese Auswertungen auch im Bild liegen, ist $(X_f, \mathcal{O}(X_f))$ in der Tat eine affine Varietät.

3.3.7 (**Gegenbeispiele**). Die Menge $X := \mathbb{C}^\times$ geringt durch $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}[T]$ den Ring der polynomialen Funktionen ist keine affine Varietät, da es für den Ringalgebrenhomomorphismus $\mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}$ „nimm den konstanten Term" keinen Punkt $x \in X$ gibt, für den er der Auswertungshomomorphismus wäre. Die Zahlenebene $X := \mathbb{C} \sqcup \{\tilde{0}\}$ „mit verdoppeltem Nullpunkt" geringt durch erweiterte polynomiale Funktionen $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}[T]$ mit der Maßgabe $P(\tilde{0}) = P(0)\ \forall P \in \mathbb{C}[T]$ ist auch keine affine Varietät, da hier die beiden Punkte $0 \neq \tilde{0}$ denselben Auswertungshomomorphismus $\delta_0 = \delta_{\tilde{0}}$ liefern. Die Kreislinie $X := S^1$ geringt durch alle stetigen komplexwertigen Funktionen $\mathcal{O}(X) := \mathcal{C}(X)$ ist keine affine Varietät, da $\mathcal{C}(X)$ nicht ringendlich ist über $\mathbb{C}$. Man kann das etwa daran sehen, daß $\mathcal{C}(X)$ nicht noethersch ist, denn es gibt in der Kreislinie eine absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen, die nicht stagniert, und deren Verschwindungsideale bilden dann eine aufsteigende Folge von Idealen von $\mathcal{C}(X)$, die ebenfalls nicht stagniert. Man beachte in diesem letzten Beispiel, daß unsere Bedingung $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Kring}^{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(X), \mathbb{C})$ durchaus erfüllt ist, da ja allgemein für jeden kompakten Hausdorffraum X die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \delta_x$ eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Kring}^{\mathbb{C}}(\mathcal{C}(X), \mathbb{C})$ liefert, vergleiche [TM] 1.3.4.11.

Vorschau 3.3.8. Seien X eine affine Varietät und $f, g \in \mathcal{O}(X)$. In 3.3.17 zeigen wir, daß unter der Annahme $X_f \subset X_g$ die Einbettung $X_f \hookrightarrow X_g$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist. Insbesondere haben wir $X_f = X_g \Rightarrow \mathcal{O}(X_f) = \mathcal{O}(X_g)$.

Beispiel 3.3.9 (**Affine Räume als affine Varietäten**). Jeder endlichdimensionale affine Raum A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k wird eine affine k-Varietät, wenn wir $\mathcal{O}(A) \subset \operatorname{Ens}(A, k)$ erklären als die von allen affinen Abbildungen $A \to k$ erzeugte k-Unterringalgebra. Jede affine Abbildung von endlichdimensionalen affinen Räumen ist in Bezug auf diese Strukturen ein Morphismus von affinen Varietäten und im Fall $A = k^n$ erhalten wir wieder unsere aus 3.3.6 bekannte affine Varietät mit $\mathcal{O}(k^n) \cong k[T_1, \ldots, T_n]$ zurück.

3.3.10 (**Verschiedene Bedeutungen von „affin"**). Unglücklich ist in diesem Zusammenhang die Verwendung des Wortes „affin" in zwei verschiedenen Bedeutungen: Jeder endlichdimensionale affine Raum trägt zwar in dieser Weise eine natürliche Struktur als affine Varietät, aber es gibt durchaus auch noch andere affine Varietäten, ja „die meisten" affinen Varietäten sind keineswegs isomorph zu affinen Räumen.

Beispiel 3.3.11. Alle Definitionen und Sätze vom Beginn dieses Abschnitts bis hierher würden auch für einen beliebigen unendlichen Grundkörper k funktionieren, mit etwas mehr Vorsicht sogar für einen beliebigen Grundkörper k. Allerdings müßte man dann in Kauf nehmen, daß etwa die reelle Gerade $X = \mathbb{R}$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}[T, (T^2+1)^{-1}]$ auch eine naive affine $\mathbb{R}$-Varietät wäre, und das stünde im Widerspruch zur allgemein üblichen Terminologie. Dies Beispiel zeigt auch, daß die in unserer Vorschau 3.3.8 aufgestellten Behauptungen dieser Allgemeinheit nicht mehr richtig wären.

Satz 3.3.12 (über affine Varietäten). $(k = \bar{k})$. *Unsere Äquivalenz von Kategorien aus 3.2.6 läßt sich einbetten in ein kommutatives Diagramm von Äquivalenzen*

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] \left\{\begin{array}{c}\textit{Algebraische Mengen}\\ \textit{in irgendwelchen } k^n\end{array}\right\} \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\approx"'] & & \left\{\begin{array}{c}\textit{Nilpotentfreie ring-}\\ \textit{-endliche } k\textit{-Kringe}\end{array}\right\}^{\mathrm{opp}} \\ & \left\{\textit{Affine } k\textit{-Varietäten}\right\} \arrow[ur, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

Der Funktor $\searrow$ ordnet dabei jeder algebraische Menge $X \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} k^n$ die affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ zu und der Funktor $\nearrow$ jeder affinen k-Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ den k-Kring $\mathcal{O}(X)$ ihrer regulären Funktionen.

3.3.13. In meinen Augen ist dieser Satz zentral für das Verständnis sowohl der kommutativen Algebra als auch der algebraischen Geometrie. Er stellt in einem besonders einfachen Kontext die Beziehung zwischen eingebetteter Geometrie, koordinatenfreier Geometrie und abstrakter Algebra her, die das Gebiet prägt. Motiviert durch diesen Satz heißen ringendliche nilpotentfreie k-Kringe über algebraisch abgeschlossenen Körpern auch **affine k-Kringe**.

Vorschau 3.3.14 (**Verkleben von Punkten in affinen Varietäten**). In 5.2.15 werden wir lernen, daß gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine surjektive Abbildung $\varphi : X \to Y$ auf eine Menge Y mit endlichen Fasern und höchstens endlich vielen Fasern mit mehr als einem Punkt unsere Menge Y mit dem Funktionenring $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ zu einer affinen Varietät wird. Weiter werden wir in 5.2.19 sehen, daß man die nodale Kubik in dieser Weise durch das Verkleben von zwei verschiedenen Punkten einer Gerade erhalten kann, und werden in 5.2.22 auch sehen, inwiefern man beim Verkleben von zwei „infinitesimal benachbarten Punkten" die Neil'sche Parabel erhält.

Beweis. Gegeben $X \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} k^n$ ist $\mathcal{O}(X)$ ringendlich über k und die k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ sind etwa nach 3.2.6 genau die Auswertungsabbildungen an Punkten von X. Unser Funktor $\searrow$ landet also in der Tat in unserer Kategorie von affinen Varietäten. Daß unser funktorielles Diagramm kommutiert, ist offensichtlich. Jede affine Varietät X ist isomorph zu einer affinen Varietät vom Typ $\mathcal{Z}(I) \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} k^n$. In der Tat ist nach Annahme $\mathcal{O}(X)$ ringendlich über k. Bilden etwa die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ ein Erzeugendensystem, so erhalten wir eine Surjektion $k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$ mit $T_i \mapsto f_i$. Die Abbildung $(f_1, \ldots, f_n) : X \to k^n$

induziert dann einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(I)$ für I den Kern obiger Surjektion. Das zeigt, daß $\searrow$ eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert. Nach 3.2.6 induzieren demnach alle drei Funktoren Bijektionen auf Isomorphieklassen von Objekten. Um den Satz zu folgern, müssen wir nur noch zeigen, daß $\nearrow$ Injektionen auf den Morphismenräumen induziert. Das ist aber klar. □

3.3.15 (**Universelle Eigenschaft von Nullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $E \subset \mathcal{O}(X)$ eine Menge regulärer Funktionen und $Y := \mathcal{Z}(E)$ deren simultane Nullstellenmenge ist die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ offensichtlich ein Morphismus von affinen Varietäten.

3.3.16 (**Regularität der Kehrwerte nullstellenfreier regulärer Funktionen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ ohne Nullstelle ist auch $1/f$ regulär. Das zeigen wir, indem wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führen. Ist genauer $f \in \mathcal{O}(X)$ keine Einheit, so ist das von f erzeugte Ideal nicht der ganze Ring und kann mithin zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ vergrößert werden. Jetzt sagt der Hilbert'sche Nullstellensatz in seiner körpertheoretischen Form 1.6.10, daß die Komposition $k \to \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung sein muß, also wegen $k = \bar{k}$ ein Isomorphismus. So erhalten wir dann einen Homomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ von k-Kringen mit $f \mapsto 0$. Das aber bedeutet im Lichte unserer Definition 3.3.2 einer affinen Varietät, daß f ein Nullstelle auf X gehabt haben muß.

3.3.17 (**Universelle Eigenschaft von Nichtnullstelleneinbettungen**). Gegeben X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion ist die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset X_f$, so ist auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to X_f$ ein Morphismus von affinen Varietäten. In der Tat ist $(1/f) \circ \varphi = 1/\varphi^\sharp(f)$ nach 3.3.16 auch eine reguläre Funktion auf Z. Insbesondere folgt für $f, g \in \mathcal{O}(X)$ mit $X_g \subset X_f$ sofort $\operatorname{res}(\mathcal{O}(X_f)) \subset \mathcal{O}(X_g)$. Insbesondere folgt aus $X_f = X_g$ auch $\mathcal{O}(X_g) = \mathcal{O}(X_f)$.

Übungen

Übung 3.3.18. Die regulären Funktionen einer affinen k-Varietät X sind genau die Morphismen von Varietäten $X \to k$, in Formeln $\mathcal{O}(X) = \operatorname{Var}(X, k)$.

Übung 3.3.19 (**Automorphismen offener Teilmengen der Gerade**). Jeder Isomorphismus von Varietäten $k \xrightarrow{\sim} k$ hat die Gestalt $t \mapsto at + b$ für $a \in k^\times$ und $b \in k$. Jeder Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} k^\times$ hat die Gestalt $t \mapsto at^\varepsilon$ für $a \in k^\times$ und $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Die Varietäten $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen haben nur endlich viele Automorphismen. Hinweis: [AL] 3.9.31.

Übung 3.3.20 (**Bijektive Morphismen müssen keine Isomorphismen sein**). Es gibt durchaus bijektive Morphismen zwischen affinen Varietäten, die keine Isomorphismen von Varietäten sind. Als Beispiele betrachte man im Fall einer Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$ die Abbildung $k \to k$, $t \mapsto t^p$ und im Fall $\operatorname{char} k$ beliebig die Abbildung $k \to \mathcal{Z}(X^3 - Y^2)$, $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Übung 3.3.21 (**Frobenius-Twist**). Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k positiver Charakteristik $p > 0$ erhalten wir eine weitere affine k-Varietät $X^{[1]} = (X^{[1]}, \mathcal{O}(X^{[1]}))$ durch die Vorschrift $X^{[1]} := X$ und $\mathcal{O}(X^{[1]}) := \{f^p \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$. Die Identität auf den zugrundeliegenden Mengen ist dann stets ein Morphismus von Varietäten, der **Frobenius-Morphismus**

$$X \to X^{[1]}$$

Er ist im allgemeinen kein Isomorphismus, ja die Varietäten X und $X^{[1]}$ sind im allgemeinen nicht isomorph. Die Varietät $X^{[1]}$ heißt der **Frobenius-Twist von** X. Jeder Morphismus $X \to Y$ ist auch ein Morphismus $X^{[1]} \to Y^{[1]}$. Der Morphismus $F : k^n \to k^n$ gegeben durch $F : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^p, \ldots, x_n^p)$ induziert einen Isomorphismus $(k^n)^{[1]} \xrightarrow{\sim} k^n$ und induziert für jede abgeschlossene Untervarietät $X \subset\!\!\!\!\triangle\ k^n$ einen Isomorphismus $X^{[1]} \xrightarrow{\sim} F(X)$. Definierende Gleichungen in $k[T_1, \ldots, T_n]$ für $F(X)$ kann man erhalten, indem man in definierenden Gleichungen für X alle Koeffizienten zur p-ten Potenz erhebt. In der Sprache der affinen k-Kringe entspricht $X \to X^{[1]}$ dem Frobeniushomomorphismus $A \to A$ aus [LA1] 5.2.39, den wir als einen Homomorphismus von k-Kringen $A^{[1]} \to A$ lesen, indem wir als Ringe $A^{[1]} = A$ setzen, aber den strukturellen Homomorphismus $k \to A^{[1]}$ definieren als die Komposition $k \to k \to A$ des strukturellen Homomorphismus $k \to A$ mit dem Inversen des Frobenius $k \xrightarrow{\sim} k$. Schließlich zeige man, daß der Funktor $X \mapsto X^{[1]}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Vielleicht noch natürlicher wird diese Konstruktion in der Sprache der Schemata, vergleiche 14.4.2.

3.4 Nullstellensatz für affine Varietäten

3.4.1 (**Räume und Ringe als übergreifendes Thema**). Ein großer Teil der sogenannten „kommutativen Algebra“ besteht aus geometrischen Erkenntnissen, die man unter Zuhilfenahme des vorhergehenden Satzes 3.3.12 in die Sprache der affinen k-Kringe übersetzt und von dort auf möglichst große Klassen von kommutativen Ringen verallgemeinert. Zu jedem topologischen Raum können wir auch den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem Raum bilden, zu jeder $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit den Ring der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen und zu jeder Riemann’schen Fläche den Ring der holomorphen Funktionen. Es zeigt sich, daß diese Ringe wieder die ursprünglichen „strukturierten Räume“ sehr weitgehend kodieren. Für kompakte Hausdorff-Räume ist das die Aussage des Satzes [TM] 1.3.4.6 und in den anderen und vielen weiteren Fällen gelten ähnliche Aussagen. Man kann sich deshalb durchaus auf den Standpunkt stellen, daß „Ringe die besseren Räume“ sind. Mein Ziel ist im folgenden, diese geometrische Intuition offenzulegen, die großen Teilen der kommutativen Algebra zugrunde liegt.

Vorschau 3.4.2. Der „Hauptsatz von Zariski“ [AAG] 2.4.17 besagt, daß in Charakteristik Null die Umkehrabbildung eines bijektiven Morphismus von einer affinen Varietät in eine „glatte“ affine Varietät stets wieder ein Morphismus ist. In positiver Charakteristik muß man zusätzlich voraussetzen, daß der fragliche bijektive Morphismus auch in jedem Punkt bijektives „Differential“ hat.

3.4.3 (**Nullstellenmengen und Verschwindungsideale für affine Varietäten**). Unsere bis jetzt entwickelten Notationen und Resultate lassen sich ohne große Schwierigkeiten von k^n auf beliebige affine Varietäten X verallgemeinern. Das Auswerten liefert wieder eine Paarung

$$X \times \mathcal{O}(X) \to k$$

und wir können für $Y \subset X$ beziehungsweise $E \subset \mathcal{O}(X)$ das Verschwindungsideal beziehungsweise die Nullstellenmenge

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}_X(Y) & := & \{f \in \mathcal{O}(X) & \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in Y\} \\ \mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}_X(E) & := & \{x \in X & \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in E\} \end{array}$$

bilden. Wieder kehren $\mathcal{I}$ beziehungsweise $\mathcal{Z}$ die Inklusionen um und die $\mathcal{Z}(E)$ bilden eine Topologie auf X, die **Zariski-Topologie**.

3.4.4. Gegeben eine affine Varietät X wird nach 3.3.6 jede abgeschlossene Teilmenge $Y \subset\!\!\!\!\!\!\!\!\circ\;\, X$ mit $\mathcal{O}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$ selbst eine affine Varietät. Wir nennen diese Struktur die **induzierte Struktur** auf Y. Natürlich induziert die Restriktion dann einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$$

Weiter ist die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ ein Morphismus und ist $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist offensichtlich auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten.

3.4.5. Für einen Morphismus $\varphi : Y \to X$ von affinen Varietäten sind gleichbedeutend:

1. Der Morphismus φ ist injektiv mit abgeschlossenem Bild und induziert einen Isomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} \varphi(Y)$ auf sein Bild mit der induzierten Struktur;

2. Der Komorphismus ist eine Surjektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$.

Der Nachweis dieser Äquivalenz bleibe dem Leser zur Übung. Einen Morphismus mit diesen Eigenschaften nennen wir eine **abgeschlossene Einbettung**.

Satz 3.4.6 (Nullstellensatz für affine Varietäten). *Für jede affine Varietät X gilt:*

1. *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Ideal und verschwindet $f \in \mathcal{O}(X)$ auf der Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$, so liegt eine Potenz von f bereits in $\mathfrak{a}$. In Formeln ausgedrückt gilt also $\mathcal{Z}(f) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \Rightarrow f^N \in \mathfrak{a}$ für $N \gg 0$;*

2. *Die Zuordnungen $\mathfrak{b} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{b})$ und $Z \mapsto \mathcal{I}(Z)$ liefern zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge aller Radikalideale von $\mathcal{O}(X)$ und der Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von X;*

3. *Für jede Teilmenge $Y \subset X$ ist die Nullstellenmenge ihres Verschwindungsideals der Abschluß von Y in X, in Formeln $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \bar{Y}$;*

4. *Für jede Teilmenge $E \subset \mathcal{O}(X)$ ist das Verschwindungsideal ihrer Nullstellenmenge das Radikal des von E erzeugten Ideals, in Formeln gilt also $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(E)) = \sqrt{\langle E \rangle}$;*

5. *Die Zuordnung $\mathfrak{m} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ ist eine Bijektion $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} X$. Die Zuordnung $x \mapsto \mathcal{I}(x)$ beschreibt ihre Umkehrabbildung.*

Beweis. Das folgt ohne Schwierigkeiten aus den entsprechenden Aussagen im Fall $X = k^n$, die wir als 1.7.13, 1.7.16 und 1.7.9 bereits besprochen haben. Die Details überlasse ich dem Leser zur Übung. □

3.4.7 (**Das Maximalspektrum**). Sei $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen. Wir notieren $\mathrm{Kring}_{\mathrm{re}}^{k}$ die Kategorie der ringendlichen k-Kringe und $\mathrm{Kringo}_{k}^{\mathrm{re}}$ ihre opponierte Kategorie. Wir konstruieren einen Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_{k}^{\mathrm{re}} \to \mathrm{Ensr}_{k}$$

in die Kategorie der k-geringten Mengen durch die Vorschrift, daß wir einem Kring A die Menge $\mathrm{Max}(A)$ der maximalen Ideale von A zuordnen und als Ring der strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(\mathrm{Max}(A)) \subset \mathrm{Ens}(\mathrm{Max}\, A, k)$ das Bild des Homomorphismus von k-Kringen $\tau = \tau_A : A \to \mathrm{Ens}(\mathrm{Max}\, A, k)$, der dadurch gegeben wird, daß $(\tau(a))(\mathfrak{m})$ und a dasselbe Bild in $A/\mathfrak{m}$ haben. Diese Definition ist sinnvoll, da unter unseren Endlichkeitsannahmen die Komposition $k \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist. Wir nennen $\mathrm{Max}(A)$ das **Maximalspektrum von** A. Ist $\mathfrak{n} \subset A$ ein aus nilpotenten Elementen bestehendes Ideal, so induziert die Surjektion $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{n}$ offensichtlich einen Isomorphismus

$$\mathrm{Max}(A/\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(A)$$

Insbesondere ist für $A \in \mathrm{Kring}^k_{\mathrm{re}}$ nicht nur der Schnitt aller Primideale, sondern auch der Schnitt aller maximalen Ideale das Nilradikal.

3.4.8. Sei $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen. Ist $(X, \mathcal{O}(X))$ eine affine k-Varietät, so ist unsere Bijektion $\eta_X : \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)) \xrightarrow{\sim} X$ aus dem Nullstellensatz für Varietäten 3.4.6 offensichtlich sogar ein Isomorphismus von k-geringten Mengen für die in 3.4.7 auf $\mathrm{Max}(\mathcal{O}(X))$ erklärte Struktur als k-geringte Menge. Da jeder affine k-Kring A isomorph ist zum Ring der regulären Funktionen einer affinen k-Varietät und da jeder ringendliche k-Kring ein affiner k-Kring wird, wenn wir darin das Ideal aller nilpotenten Elemente herausteilen, ist unser Maximalspektrum sogar ein Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}^{\mathrm{re}}_k \to \mathrm{Varaff}_k$$

Satz 3.4.9. $(k = \bar{k})$. *Die Einschränkung unseres Funktors* Max *auf die volle Unterkategorie der affinen alias ringendlichen nilpotentfreien k-Kringe* $\mathrm{Kring}^k_{\mathrm{renf}}$ *und genauer ihre opponierte Kategorie ist eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}^{\mathrm{renf}}_k \xrightarrow{\approx} \mathrm{Varaff}_k$$

Ergänzung 3.4.10. In der Sprache der Kategorientheorie ist Max zusammen mit weiteren Daten ein „quasiinverser Funktor“ zu unserer Äquivalenz $\mathcal{O}$ aus 3.3.12. Das wird in der weiterführenden Übung 3.4.23 ausgeführt, in der wir eine Adjunktion $(\mathcal{O}, \mathrm{Max})$ angeben. Salopp gesprochen ist „Max“ der Name eines Geistes, den man anrufen mag, um von der Algebra in die Geometrie versetzt zu werden. Ein noch stärkerer solcher Geist hört auf den Namen „Spec“, wir lernen ihn später kennen.

Beweis. In der Tat zeigen unsere Isomorphismen $\eta_X : \mathrm{Max}\,\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} X$, daß jede affine Varietät isomorph ist zu einem Objekt im Bild unseres Funktors. Man sieht weiter leicht ein, daß für jeden Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Max}\,\mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\sim} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{Max}(\varphi^\sharp)}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow \\ \mathrm{Max}\,\mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

mit diesen Isomorphismen in den Horizontalen kommutiert. Mithin ist für beliebige affine Varietäten X, Y die Verknüpfung

$$\mathrm{Var}(X, Y) \to \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)) \to \mathrm{Var}(\mathrm{Max}\,\mathcal{O}(X), \mathrm{Max}\,\mathcal{O}(Y))$$

eine Bijektion. Da wir aber bereits wissen, daß auch die erste Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ dieser Verknüpfung bijektiv ist, muß auch die zweite Abbildung $\psi \mapsto \mathrm{Max}\,\psi$ bijektiv sein. Dann aber muß auch $\mathrm{Max} : \mathrm{Kring}^k(B, A) \to \mathrm{Var}(\mathrm{Max}\,A, \mathrm{Max}\,B)$ bijektiv sein für alle $A, B \in \mathrm{Kring}^k_{\mathrm{renf}}$ und wir sind fertig. □

3.4.11. Das Argument des vorherigen Beweises gehört eigentlich zur Kategorientheorie. Ist genauer $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Funktor und sind Isomorphismen $\eta_X : GFX \xrightarrow{\sim} X$ für alle $X \in \mathcal{A}$ gegeben derart, daß für alle $\varphi : X \to Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} GFX & \xrightarrow{\sim} & X \\ {\scriptstyle GF\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow \\ GFY & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

mit η_X und η_Y in den Horizontalen kommutiert, so ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien. Meist liegt einer derartigen Situation eine „Adjunktion" zugrunde, so auch in unserem speziellen Fall, vergleiche 3.4.23.

3.4.12 (**Produkt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y wird ihr Produkt $X \times Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \times Y) := [f \boxtimes g \mid f \in \mathcal{O}(X), g \in \mathcal{O}(Y)]$$

Hier ist $f \boxtimes g$ erklärt durch $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ und die eckigen Klammern meinen den von all diesen Funktionen in $\mathrm{Ens}(X \times Y, k)$ erzeugten Teilring. In der Tat ist er sicher ringendlich über k. Nach [LA2] 8.1.47 induziert die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ weiter eine Injektion $\mathrm{Ens}(X, k) \otimes_k \mathrm{Ens}(Y, k) \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X \times Y, k)$, und das liefert uns unmittelbar einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Da aber nun nach [LA2] 9.9.9 für zwei beliebige k-Kringe A, B jeder Homomorphismus von k-Kringen $A \otimes_k B \to k$ die Form $a \otimes b \mapsto \phi(a)\psi(b)$ hat für wohlbestimmte Homomorphismen $\phi : A \to k$, $\psi : B \to k$, folgt auch die Zweite unserer Bedingungen an eine affine Varietät. Die beiden Projektionen $\mathrm{pr}_X : X \times Y \twoheadrightarrow X$ und $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \times Y, \mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$ ist ein Produkt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von [LA2] 9.7.1. Die einpunktige Varietät ist ein finales Objekt in dieser Kategorie.

Satz 3.4.13 (Offenes Verkleben von regulären Funktionen). *Seien X eine affine Varietät und $H \subset \mathcal{O}(X)$ eine Menge regulärer Funktionen, deren Nichtnullstellenmengen unsere Varietät überdecken, in Formeln $X = \bigcup_{h \in H} X_h$. Gegeben eine Funktion $f : X \to k$ gilt dann*

$$f \in \mathcal{O}(X) \quad \Leftrightarrow \quad f|X_h \in \mathcal{O}(X_h)\ \forall h \in H$$

Beweis. Daß die Einbettung $X_h \hookrightarrow X$ für alle $h \in \mathcal{O}(X)$ ein Morphismus ist, daß also reguläre Funktionen zu regulären Funktionen auf Nichtnullstellenmengen einschränken, das ist Teil unserer Definition in 3.3.6 des Rings der regulären

Affine k-Varietäten X, Y	Affine k-Kringe A, B	Quelle
Produkt $X \times Y$	Tensorprodukt $A \otimes_k B$	3.4.12
Koprodukt $X \sqcup Y$	Produkt $A \times B$	3.4.19
abgeschlossene Einbettung $X \hookrightarrow Y$	surjektiver Homomorphismus $B \twoheadrightarrow A$	3.4.5
Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ für $f \in \mathcal{O}(X)$ regulär	kanonischer Homomorphismus $A \to A[f^{-1}]$ für $f \in A$	4.4.13
Morphismus $X \to Y$ mit dichtem Bild	injektiver Homomorphismus $B \hookrightarrow A$	3.4.15
Zusammenhangskomponente	Block	3.4.22
abgeschlossene Teilmenge	Radikalideal	3.4.6
Punkt	maximales Ideal	3.4.6.5
irreduzible Teilmenge	Primideal	4.2.8
irreduzible Komponente	minimales Primideal	4.2.8

Diese Tabelle faßt einige Entsprechungen zwischen Räumen und Ringen zusammen. Ganz rechts ist jeweils die Quelle angegeben und einige Entsprechungen sind noch Zukunftsmusik. Das Tensorprodukt ist im Sinne von [LA2] 9.9.9 zu verstehen.

Funktionen auf Nichtnullstellenmengen. Wenn umgekehrt die Nichtnullstellenmengen X_h für $h \in H$ unser X überdecken, so gilt $\mathcal{Z}(H) = \emptyset$ und aus dem Nullstellensatz für affine Varietäten 3.4.6 folgt $\langle H \rangle_{\mathcal{O}(X)} = \mathcal{O}(X)$ und wir finden $a_i \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$a_1 h_1 + \ldots + a_r h_r = 1$$

Es folgt, daß bereits gilt $\mathcal{Z}(h_1) \cap \ldots \cap \mathcal{Z}(h_r) = \emptyset$. Nach Annahme gibt es nun $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{O}(X)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = g_i(x)/h_i(x)^n \ \forall x \in X \backslash \mathcal{Z}(h_i)$. Indem wir die h_i durch ihre n-ten Potenzen ersetzen, dürfen wir $n = 1$ annehmen. Wir finden, nun für diese neuen h_i, auch mit demselben Argument wir zuvor Funktionen $c_i \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$c_1 h_1^2 + \ldots + c_r h_r^2 = 1$$

Es reicht nun zu zeigen, daß f und $c_1 h_1 g_1 + \ldots + c_r h_r g_r$ an jedem Punkt $x \in X$ denselben Wert annehmen. Für beliebiges $x \in X$ haben wir mit $S = S(x) = \{i \mid h_i(x) \neq 0\}$ in der Tat

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sum_{i=1}^r c_i(x) h_i^2(x) f(x) \\ & = & \sum_{i \in S} c_i(x) h_i^2(x) f(x) \\ & = & \sum_{i \in S} c_i(x) h_i(x) g_i(x) \\ & = & \sum_{i=1}^r c_i(x) h_i(x) g_i(x) \end{array}$$

□

Übungen

Übung 3.4.14. Jeder Morphismus von affinen Varietäten ist stetig für die Zariskitopologie.

Übung 3.4.15. Seien X und Y affine Varietäten. Man zeige, daß ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ dichtes Bild hat genau dann, wenn der zugehörige Komorphismus eine Injektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ induziert.

Übung 3.4.16. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Gegeben eine Teilmenge $H \subset \mathcal{O}(X)$ ist die Nullstellenmenge ihres Urbilds $(\varphi^\sharp)^{-1}(H) \subset \mathcal{O}(Y)$ der Abschluß des Bildes ihrer Nullstellenmenge, in Formeln

$$\overline{\varphi(\mathcal{Z}(H))} = \mathcal{Z}\big((\varphi^\sharp)^{-1}(H)\big)$$

Übung 3.4.17. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Gegeben eine Teilmenge $J \subset \mathcal{O}(Y)$ ist das Urbild ihrer Nullstellenmenge die Nullstellenmenge ihres Bildes, in Formeln

$$\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(J)) = \mathcal{Z}\big(\varphi^\sharp(J)\big)$$

Übung 3.4.18. Gegeben ein Morphismus $X \to Y$ von affinen Varietäten zeige man: Ist unter dem Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ der Ring $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über $\mathcal{O}(Y)$, so hat unser Morphismus endliche Fasern. Hinweis: 1.1.23 und 3.4.17.

Übung 3.4.19 (**Koprodukt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y wird ihre disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) := \{f : X \sqcup Y \to k \mid f|_X \in \mathcal{O}(X) \text{ und } f|_Y \in \mathcal{O}(Y)\}$$

Die beiden Einbettungen $\mathrm{in}_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y$ und $\mathrm{in}_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \sqcup Y, \mathrm{in}_X, \mathrm{in}_Y)$ ist ein Koprodukt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von [LA2] 9.7.16. Die leere Varietät ist ein initiales Objekt in dieser Kategorie.

Übung 3.4.20 (**Faserprodukt affiner Varietäten**). Gegeben affine Varietäten X, Y, T mit Morphismen $a : X \to T$ und $b : Y \to T$ ist auch

$$X \times_T Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid a(x) = b(y)\}$$

eine affine Varietät mit der als abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ induzierten Struktur. Wir erhalten so ein Faserprodukt im Sinne der Kategorientheorie von affinen Varietäten. Die offensichtliche Abbilddung

$$\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(T)} \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X \times_T Y)$$

ist eine Surjektion mit dem Nilradikal des Ausgangsrings als Kern.

Übung 3.4.21 (**Produkt mit k^n**). Gegeben eine affine Varietät X zeige man, daß wir einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times k^n)$ erhalten, wenn wir den Kringhomomorphismus betrachten, der auf $\mathcal{O}(X)$ durch das Zurückholen gegeben ist und unter dem der Variablen T_i die Projektion auf k^n gefolgt von der Projektion auf den i-ten Eintrag zugeordnet wird. Dieser Morphismus ist so natürlich, daß wir ihn oft in Sprache und Notation als Gleichheit behandeln werden.

Übung 3.4.22. Ein **Block** eines Krings kann charakterisiert werden als ein unzerlegbarer direkter Summand unseres Krings, betrachtet als Modul über sich selber. Mehr zur Blockzerlegung wird in 2.2.3 erklärt. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge der Zusammenhangskomponenten einer affinen Varietät X und der Menge der Blöcke ihres Rings von strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(X)$.

Übung 3.4.23 (**Adjunktion von Maximalspektrum und Funktionenring**). Wir notieren $\mathrm{Kringo} := \mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ die opponierte Kategorie zur Kategorie der Kringe und $\mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}}$ die opponierte Kategorie zur Kategorie zur Kategorie der ringendlichen k-Kringe. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ erinnern wir aus 3.4.7 den Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}_k^{\mathrm{re}} \to \mathrm{Varaff}_k$$

von der Opponierten der Kategorie der ringendlichen k-Kringe zur Kategorie der affinen k-Varietäten. Gegeben ein ringendlicher k-Kring A und eine affine k-Varietät X betrachten wir nun die Menge $\mathrm{AH} = \mathrm{AH}(A, X)$ aller Abbildungen $A \times X \to k$, die für jedes feste $a \in A$ eine reguläre Funktion $X \to k$ liefern und für jedes feste $x \in X$ einen Homomorphismus von k-Kringen $A \to k$. Das Kürzel meint „Adjunktionshelfer". Das Exponentialgesetz für Mengen induziert dann Bijektionen

$$\mathrm{Varaff}_k(X, \mathrm{Max}\, A) \xleftarrow{\sim} \mathrm{AH} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k_{\mathrm{re}}(A, \mathcal{O}(X)) = \mathrm{Kringo}^{\mathrm{re}}_k(\mathcal{O}(X), A)$$

Genauer betrachten wir $\mathrm{AH} \hookrightarrow \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Kring}^k(A, k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Max}\, A)$ mit der ersten Abbildung nach dem Exponentialgesetz und der zweiten durch Nachschalten der Bijektion $\mathrm{Kring}^k(A, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}\, A$ und prüfen, daß sie die behauptete Bijektion induziert. So erhalten wir eine Adjunktion

$$(\mathcal{O}, \mathrm{Max})$$

Insbesondere ist Max verträglich mit endlichen Produkten, ja mit beliebigen Limites soweit sie existieren, und macht Gruppenobjekte zu Gruppenobjekten sowie abelsche Gruppenobjekte zu abelschen Gruppenobjekten.

Weiterführende Übung 3.4.24. Gegeben eine affine Varietät X liefert das Bilden des Maximalspektrums einen Funktor

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}^{\mathcal{O}(X)}_{\mathrm{re}} \to \mathrm{Varaff}_X$$

von opponierten ringendlichen $\mathcal{O}(X)$-Kringen zu affinen Varietäten über X mit Linksadjungiertem $\mathcal{O}$. Insbesondere ist Max verträglich mit endlichen Produkten und macht Gruppenobjekte zu Gruppenobjekten sowie abelsche Gruppenobjekte zu abelschen Gruppenobjekten. Die Einschränkung auf affine Kringalgebren ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Max} : \mathrm{Kringo}^{\mathcal{O}(X)}_{\mathrm{renf}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Varaff}_X$$

3.5 Die symmetrische Algebra*

Definition 3.5.1. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k erklärt man die **symmetrische Algebra über** V als den Quotienten

$$\mathrm{S}_k V = \mathrm{Sym}_k V := \mathrm{T}_k V / \langle v \otimes w - w \otimes v \rangle$$

der Tensoralgebra aus [LA2] 9.9.7 nach dem von allen $v \otimes w - w \otimes v$ mit $v, w \in V$ erzeugten Ideal. Wenn sich der Grundkörper von selbst versteht, schreiben wir auch kürzer $\mathrm{S}V$.

3.5.2. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k hat die offensichtliche k-lineare Abbildung $\mathrm{can} : V \hookrightarrow \mathrm{S}_k V$ die zur universellen Eigenschaft [LA2] 9.9.7 der Tensoralgebra analoge **universelle Eigenschaft** für Kringalgebrenhomomorphismen. Ist genauer A ein k-Kring und $\varphi : V \to A$ eine k-lineare Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus von k-Kringen $\hat{\varphi} : \mathrm{S}_k V \to A$ mit $\varphi = \hat{\varphi} \circ \mathrm{can}$, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{S}_k V \arrow[d, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Wieder anders gesagt liefert das Vorschalten von can für jeden k-Kring A eine Bijektion $(\circ\,\mathrm{can}) : \mathrm{Kring}^k(\mathrm{S}V, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, A)$. Ist $B \subset V$ eine Basis von V, so erhalten wir mithin durch sukzessives Einschränken Bijektionen

$$\mathrm{Kring}^k(\mathrm{S}V, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(B, A)$$

Daraus folgt mit dem Yoneda-Lemma, daß die Einbettung $B \hookrightarrow \mathrm{S}V$ einen Isomorphismus von k-Kringen $k[{}^{\prime}_{!}B] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}V$ zwischen dem Polynomring in der Variablenmenge B und unserer symmetrischen Algebra induziert. Ist insbesondere $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so erhalten wir einen Isomorphismus von Kringalgebren

$$k[{}^{\prime}T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_k V$$

durch die Vorschrift $T_i \mapsto v_i$.

3.5.3 (**Reguläre Funktionen auf Vektorräumen**). Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum V liefert die universelle Eigenschaft einen Homomorphismus von Kringalgebren $\mathrm{S}_k V \to \mathrm{Ens}(V^*, k)$ in die Kringalgebra aller k-wertigen Funktionen auf dem Dualraum von V. Ist k ein unendlicher Körper, so ist dieser Homomorphismus injektiv und induziert einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{S}_k V$ und derjenigen Unterringalgebra von $\mathrm{Ens}(V^*, k)$, die von allen Auswertungen an Vektoren $v \in V$ erzeugt wird. Ist zusätzlich V endlichdimensional, so erhalten wir auf diese Weise einen Isomorphismus von $\mathrm{S}_k(V^*)$ mit der von allen Linearformen erzeugten Unterringalgebra von $\mathrm{Ens}(V, k)$. Arbeiten wir über einem algebraisch abgeschossenen Körper $k = \bar{k}$, so induziert mithin für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V die Einbettung $V^* \hookrightarrow \mathrm{Ens}(V, k)$ einen Ringalgebrenisomorphismus

$$\mathrm{S}(V^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)$$

zwischen der symmetrischen Algebra über dem Dualraum V^* und der Algebra der regulären Funktionen auf V in Bezug auf seine Struktur als k-Varietät nach 3.3.9.

Proposition 3.5.4 (Symmetrische Tensoren und symmetrische Algebra). *Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k der Charakteristik* $\mathrm{char}\, k = 0$

induziert die Komposition $(V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \hookrightarrow V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^r V$ von Inklusion und Projektion einen Isomorphismus

$$(V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^r V$$

3.5.5. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_r$ operiert durch Vertauschung der Tensorfaktoren auf $V^{\otimes r}$. Die Invarianten unter dieser Operation, also die Elemente von $(V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r}$, heißen die **symmetrischen Tensoren der Stufe** r. Das erklärt die allgemein übliche Bezeichnung von $\mathrm{S}V$ als „symmetrische Algebra“. Ich halte sie nicht für besonders glücklich und würde dazu lieber die „universelle Kringalgebra über V“ sagen.

Beweis. Wir führen wir den **Symmetrisator**

$$\mathrm{sym} : V^{\otimes r} \to (V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r}$$

ein durch die Abbildungsvorschrift $\mathrm{sym} : t \mapsto \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} t^\sigma$. Ausgeschrieben wird er gegeben durch $v_1 \ldots v_r \mapsto \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}$. Damit ergänzen wir das Diagramm aus der Proposition zu einem Diagramm

$$\begin{tikzcd} (V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \arrow[r, hook, shift left, "\mathrm{inkl}"] & V^{\otimes r} \arrow[l, shift left, "\mathrm{sym}"] \arrow[r, two heads, "\mathrm{proj}"] & \mathrm{S}^r V \end{tikzcd}$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{sym} \circ \mathrm{inkl} = \mathrm{id}$ und sym ist insbesondere surjektiv. Es reicht also, wenn wir zeigen $\ker(\mathrm{sym}) = \ker(\mathrm{proj})$. Die Inklusion $\ker(\mathrm{proj}) \subset \ker(\mathrm{sym})$ folgt daraus, daß sym auf $\ker(\mathrm{proj}) = \langle v \otimes w - w \otimes v\rangle \cap V^{\otimes r}$ verschwindet. Andererseits gilt auch $\mathrm{proj} = \mathrm{proj} \circ \mathrm{inkl} \circ \mathrm{sym}$ und damit umgekehrt $\ker(\mathrm{sym}) \subset \ker(\mathrm{proj})$. □

Ergänzung 3.5.6. Über Körpern positiver Charakteristik sind die beiden Funktoren $V \mapsto \mathrm{S}^r V$ und $V \mapsto (V^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r}$ im allgemeinen nicht mehr isomorph. Man nennt sie die r-te **symmetrische Potenz** und die r-te **dividierte Potenz**. Im endlichdimensionalen Fall ist der eine dieser Funktoren konjugiert zum anderen unter dem Dualraumfunktor, wie wir gleich in 3.5.7 sehen werden. Die Situation ist im Fall symmetrischer Algebren also delikater als bei den äußeren Potenzen, die im endlichdimensionalen Fall schlicht mit dem Dualraumfunktor kommutieren.

Ergänzung 3.5.7 (**Symmetrische Multilinearformen**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k und $r \geq 0$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Symu}^r V := \{s : V \times \ldots \times V \to k \mid s \text{ ist multilinear und symmetrisch}\}$$

den k-Vektorraum aller symmetrischen r-Multilinearformen, als da heißt aller Multilinearformen, die ihren Wert nicht ändern, wenn man die Einträge permutiert. Wir konstruieren nun die Abbildungen eines Diagramms

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Symu}^r V \arrow[d, "\wr"] & \\ (\mathrm{S}^r V)^* \arrow[r, "\sim"] & \left((V^{\otimes r})^*\right)^{\mathcal{S}_r} & \left((V^*)^{\otimes r}\right)^{\mathcal{S}_r} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß im Fall $\dim V < \infty$ auch die rechte Inklusion ein Isomorphismus ist. Zunächst ist die offensichtliche Einbettung $(V^*)^{\otimes r} \hookrightarrow (V^{\otimes r})^*$ verträglich mit der Operation der symmetrischen Gruppe und ein Isomorphismus im endlichdimensionalen Fall und das liefert die rechte Einbettung. Die übliche Identifikation des Raums aller r-Multilinearformen mit $(V^{\otimes r})^*$ ist verträglich mit der Operation der symmetrischen Gruppe induziert den vertikalen Isomorphismus. Die Projektion $V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathrm{S}^r V$ schließlich induziert eine Injektion $(\mathrm{S}^r V)^* \hookrightarrow (V^{\otimes r})^*$ und diese den linken Isomorphismus.

Übungen

Ergänzende Übung 3.5.8. Man zeige: Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k induziert der durch unsere Konstruktion der äußeren Algebra in [LA2] 8.5.4 gegebene Ringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{T}_k V \twoheadrightarrow \bigwedge V$ von der Tensoralgebra aus [LA2] 9.9.7 auf die äußere Algebra einen Isomorphismus

$$\mathrm{T}_k V / \langle v \otimes v \mid v \in V \rangle \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$$

zwischen der äußeren Algebra und dem Quotienten der Tensoralgebra nach dem von allen $v \otimes v$ mit $v \in V$ erzeugten Ideal.

Ergänzende Übung 3.5.9. Bezeichnet $\mathrm{S}^r V \subset \mathrm{S}V$ das Bild von $V^{\otimes r} \subset \mathrm{T}V$, so haben wir eine Zerlegung

$$\mathrm{S}V = \bigoplus_{r \geq 0} \mathrm{S}^r V$$

und das Produkt eines Elements von $\mathrm{S}^r V$ mit einem Element von $\mathrm{S}^p V$ liegt in $\mathrm{S}^{r+p} V$. Hier heißt $\mathrm{S}^r V$ die **homogene Komponente vom Grad** r der symmetrischen Algebra $\mathrm{S}V$.

Übung 3.5.10. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k erhalten wir eine Bijektion der zweiten symmetrischen Potenz seines Dualraums $\mathrm{S}^2(V^*)$ mit dem Raum der quadratischen Formen auf V nach [LA2] 4.2.1, indem wir der Nebenklasse des Tensors $f_1 \otimes g_1 + \ldots + f_n \otimes g_n$ die quadratische Form $v \mapsto f_1(v)g_1(v) + \ldots + f_n(v)g_n(v)$ zuordnen.

4 Primideale und Lokalisierung

4.1 Irreduzible Komponenten

Definition 4.1.1. Ein topologischer Raum heißt **noethersch**, wenn darin jede absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen stationär wird.

4.1.2. Offensichtlich und formal nach Übung [LA1] 1.9.22 besitzt in einer partiell geordneten Menge jede nichtleere Teilmenge ein minimales Element genau dann, wenn jede monoton fallende Folge in unserer Menge stagniert. Ein topologischer Raum ist insbesondere noethersch genau dann, wenn es in jedem nichtleeren System von abgeschlossenen Teilmengen unseres Raums ein bezüglich Inklusion minimales Element gibt.

Lemma 4.1.3. *Für jeden Körper k ist der k^n mit seiner Zariskitopologie ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Nach 1.1.16 gilt unter unseren Annahmen für jede abgeschlossene Teilmenge $X \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ die Formel $X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$. Ist nun $X_0 \supset X_1 \supset \ldots$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen in k^n, so ist $\mathcal{I}(X_0) \subset \mathcal{I}(X_1) \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Idealen im Polynomring über k. Nach dem Hilbert'schen Basissatz ist aber ein Polynomring in endlich vielen Veränderlichen über einem Körper stets noethersch, also wird unsere Folge von Idealen stationär und damit auch die Folge der $X_\nu = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X_\nu))$. □

Definition 4.1.4. Ein topologischer Raum X heißt **irreduzibel**, wenn er nicht leer ist und sich nicht schreiben läßt als eine Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen. Ein topologischer Raum heißt **reduzibel**, wenn er nicht irreduzibel ist. Insbesondere ist der leere Raum in unserer Terminologie reduzibel.

4.1.5. Eine Teilmenge eines topologischen Raums nennen wir reduzibel beziehungsweise irreduzibel, wenn sie diese Eigenschaft für die Spurtopologie hat.

Beispiel 4.1.6. In einer Menge mit der diskreten Topologie sind die irreduziblen Teilmengen genau die einpunktigen Teilmengen.

Beispiel 4.1.7. Sei k ein Körper. Das Achsenkreuz $\mathcal{Z}(T_1T_2) \subset k^2$ ist reduzibel in der Zariskitopologie, denn es läßt sich als die Vereinigung der beiden Achsen schreiben, die beide echte abgeschlossene Teilmengen sind.

Beispiel 4.1.8. Gegeben ein unendlicher Körper k ist für alle $n \geq 0$ der k^n irreduzibel in der Zariskitopologie. Nach 1.1.25 haben darin nämlich je zwei nichtleere offene Teilmengen nichtleeren Schnitt.

Definition 4.1.9. Die maximalen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raums heißen seine **irreduziblen Komponenten**.

Ergänzung 4.1.10. Die maximalen irreduziblen Teilmengen eines topologischen Raums sind nach Übung 4.1.28 stets abgeschlossen, wir könnten mithin das Wort „abgeschlossen“ in der vorhergehenden Definition auch weglassen.

Beispiel 4.1.11. Ist k ein unendlicher Körper, so sind die irreduziblen Komponenten des Achsenkreuzes $\mathcal{Z}(T_1T_2) \subset k^2$ genau die beiden Koordinatenachsen. Ähnlich kann man sich die irreduziblen Komponenten von beliebigen zariskiabgeschlossenen Mengen in k^n vorstellen. Ich rate davon ab, für das Konzept der irreduziblen Komponenten außerhalb der Zariskitopologie nach Anschauung zu suchen.

Satz 4.1.12 (Zerlegung in irreduzible Komponenten). *Ein noetherscher topologischer Raum besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten. Keine seiner Komponenten ist in der Vereinigung der übrigen enthalten und alle Komponenten zusammen überdecken den ganzen Raum.*

4.1.13. Wir schicken dem Beweis des Satzes zwei Lemmata voraus, von denen das erste eine einfache Konsequenz unseres Satzes ist. Wir geben jedoch für beide einen eigenständigen Beweis, damit wir uns beim Beweis des Satzes darauf stützen können. Mit dem Zorn'schen Lemma kann man im übrigen allgemeiner zeigen, daß überhaupt jeder beliebige topologische Raum die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten ist.

Lemma 4.1.14. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums läßt sich schreiben als Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen.*

Beweis. Bezeichne X unseren Raum und $\mathcal{A} \subset \operatorname{Pot}(X)$ das System aller abgeschlossenen Teilmengen und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ das System aller abgeschlossenen Teilmengen $Y \overset{\circ}{\subset} X$, die sich nicht als endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen schreiben lassen. Wäre das Lemma falsch, so wäre $\mathcal{F}$ nicht leer und hätte nach 4.1.2 ein minimales Element $Y \in \mathcal{F}$. Dies minimale Element Y wäre weder leer noch irreduzibel, besäße also eine Darstellung $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit $Y_i \overset{\circ}{\subset} Y$ und $Y_i \neq Y$. Aufgrund der Minimalität von Y hätten wir aber $Y_1, Y_2 \notin \mathcal{F}$ und damit $Y \notin \mathcal{F}$ im Widerspruch zur Wahl von Y. □

Lemma 4.1.15. *Sei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ eine Darstellung eines topologischen Raums als endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen X_i. Gibt es keine nichttrivialen Inklusionen zwischen unseren Teilmengen, in Formeln $X_i \subset X_j \Rightarrow i = j$, so sind die X_i genau die irreduziblen Komponenten von X.*

Beweis. Ist $Y \overset{\circ}{\subset} X$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge, so haben wir

$$Y = (Y \cap X_1) \cup \ldots \cup (Y \cap X_r)$$

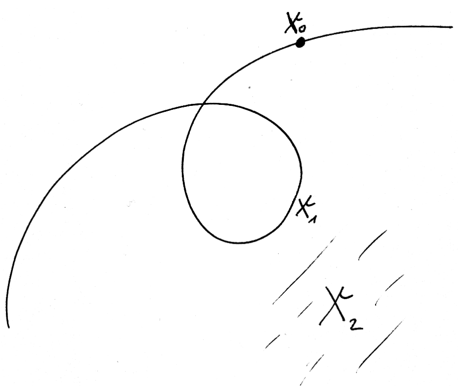
und folglich $Y = Y \cap X_i$ alias $Y \subset X_i$ für mindestens ein i. Also ist jede Komponente von X eines der X_i, und wäre ein X_j keine Komponente von X, so fänden wir ein $i \neq j$ mit $X_j \subset X_i$. □

Beweis von Satz 4.1.12. Nach 4.1.14 können wir X schreiben als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$$

Indem wir überflüssige Teilmengen weglassen, dürfen wir weiter annehmen, daß kein X_i ganz in der Vereinigung der X_j mit $j \neq i$ enthalten ist. Der Satz folgt nun aus 4.1.15. □

4.1.16. Das Beweisprinzip von 4.1.14 heißt **noethersche Induktion**. Um es abstrakt zu fassen, sei $\mathcal{A}$ eine teilgeordnete Menge, in der jede absteigende Folge stagniert alias jede nichtleere Teilmenge mindestens ein minimales Element hat. Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$ derart, daß jedes Element von $\mathcal{A}$, für das alle echt kleineren Elemente zu $\mathcal{Z}$ gehören, bereits selbst zu $\mathcal{Z}$ gehört, muß dann bereits mit $\mathcal{A}$ zusammenfallen. In der Tat, wäre $\mathcal{F} := \mathcal{A} \backslash \mathcal{Z}$ nicht leer, so hätte es ein minimales Element, das nach Annahme aber doch zu $\mathcal{Z}$ gehören müßte.



Die Krulldimension der Ebene ist Zwei. Jede Kette maximaler Länge von irreduziblen Teilmengen besteht wie angedeutet aus einem Punkt, einer irreduziblen Kurve im Sinne von 4.1.21 durch diesen Punkt, und der ganzen Ebene.

Definition 4.1.17. Die **Krulldimension** $\operatorname{kdim}(X)$ eines topologischen Raums X ist das Supremum über alle Längen l von echt aufsteigenden Ketten

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_l \subset X$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Mögliche Werte sind natürliche Zahlen, ∞ und $-\infty$. Die hier verwendete Notation $\operatorname{kdim}(X)$ ist unüblich, meist schreibt man stattdessen schlicht $\dim(X)$. Etwas allgemeiner erklären wir für jede Teilmenge $Y \subset X$ die **Krullkodimension** $\operatorname{kdim}(Y \subset X)$ **von** Y **in** X als das Supremum über alle Längen l von echt aufsteigenden Ketten

$$Y \subset X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_l \subset X$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Im Spezialfall einer einpunktigen Menge $Y = \{x\}$ schreiben wir $\operatorname{kdim}_x X := \operatorname{kdim}(\{x\} \subset X)$ und nennen das die **lokale Krulldimension von** X **bei** x. Die Krullkodimension verwenden wir nur, wenn Y in X irreduziblen Abschluß hat.

4.1.18 (**Diskussion der Notation**). Sicher ist es fragwürdig, das Inklusionssymbol als Trenner in einer Notation zu mißbrauchen. Mir schien aber die Notation $\operatorname{kdim}(Y \subset X)$ so viel suggestiver als etwa $\operatorname{kdim}(Y, X)$, daß ich diese Bedenken hintangestellt habe.

Beispiel 4.1.19. Wir haben $\operatorname{kdim}(\emptyset) = -\infty$ und $\operatorname{kdim}(X) = 0$ für jeden nichtleeren diskreten Raum X. Für einen unendlichen Körper k mit seiner Zariskitopologie gilt sicher $\operatorname{kdim}(k) = 1$. Offensichtlich gilt auch stets

$$\operatorname{kdim}(X) = \sup_{\substack{Y \subset\!\!\!\!\triangle X \\ \text{irreduzibel}}} \operatorname{kdim}(Y)$$

Hier ist zu verstehen, daß das Supremum wie angedeutet über alle abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen Y von X gebildet wird.

Vorschau 4.1.20. Im weiteren Verlauf der Vorlesung soll gezeigt werden, daß die Krulldimension in Bezug auf die Zariskitopologie einen vernünftigen Dimensionsbegriff für affine Varietäten liefert. Schon allein um in 5.4.5 zu zeigen, daß die Krulldimension von k^n eben n ist, müssen wir tiefer in die kommutative Algebra einsteigen. Offensichtlich ist nur die Abschätzung $\operatorname{kdim}(k^n) \geq n$, wie eine beliebige Folge aus jeweils ineinander enthaltenen affinen Teilräumen wachsender Dimension

$$\text{Punkt} \subsetneq \text{Gerade} \subsetneq \text{Ebene} \subsetneq \ldots \subsetneq \text{Hyperebene} \subsetneq k^n$$

zeigt, da nach 4.1.8 alle k^l irreduzibel sind. Ein weiteres wesentliches Ziel ist der Nachweis der Formel

$$\operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim}(Y \subset X) = \operatorname{kdim} X$$

für eine beliebige irreduzible affine Varietät X mit einer irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge $Y \subset\!\!\!\!\triangle\, X$. Offensichtlich ist nur die Ungleichung $\leq$. Die andere Ungleichung zeigen wir in 5.7.14.

4.1.21. Ein noetherscher topologischer Raum heißt **äquidimensional**, wenn alle seine irreduziblen Komponenten dieselbe endliche Dimension haben. Er heißt **äqui-d-dimensional**, wenn alle seine irreduziblen Komponenten Dimension d haben. Der leere Raum ist mithin äqui-d-dimensional von jeder Dimension d und ein äqui-d-dimensionaler Raum für $d < 0$ muß der leere Raum sein. Eine äquieindimensionale affine Varietät heißt eine **affine Kurve**. Eine äquizweidimensionale affine Varietät heißt eine **affine Fläche**.

Übungen

Übung 4.1.22. Ein noetherscher topologischer Raum kann nie isomorph sein zu einer echten Teilmenge von sich selbst.

Ergänzende Übung 4.1.23. Ein topologischer Raum ist noethersch genau dann, wenn jede seiner offenen Teilmengen kompakt ist.

Übung 4.1.24. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß die irreduziblen algebraischen Teilmengen von k genau die einpunktigen Teilmengen sowie ganz k sind. Man zeige, daß die irreduziblen algebraischen Teilmengen von k^2 genau die einpunktigen Teilmengen, die Nullstellenmengen einzelner irreduzibler Polynome, sowie ganz k^2 sind. Hinweis: 1.1.22 listet alle algebraischen Teilmengen. [LA1] 5.4.4 besagt, daß jedes nichtkonstante Polynom in zwei Veränderlichen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper unendlich viele Nullstellen hat.

Übung 4.1.25. Das Bild eines irreduziblen Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets irreduzibel.

Übung 4.1.26. Für einen topologischen Raum X sind gleichbedeutend: (1) X ist irreduzibel; (2) X ist nicht leer und je zwei nichtleere offene Teilmengen von X haben nichtleeren Schnitt; und (3) X ist nicht leer und jede offene nichtleere Teilmenge von X ist dicht in X.

Übung 4.1.27. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß k die Krulldimension Eins hat und k^2 die Krulldimension Zwei. Hinweis: Die irreduziblen algebraischen Teilmengen wurden in diesen Fällen in 4.1.24 bestimmt.

Übung 4.1.28. Eine Teilmenge eines topologischen Raums ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluß irreduzibel ist.

4.2 Irreduzible algebraische Mengen und Primideale

Satz 4.2.1 (Reguläre Funktionen auf irreduziblen affinen Varietäten). *Eine affine Varietät X ist irreduzibel genau dann, wenn ihr Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ ein Integritätsring ist.*

4.2.2. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist insbesondere k^n irreduzibel, denn jeder Polynomring über einem Körper ist ein Integritätsring. Daß k^n irreduzibel ist, wissen wir nach 4.1.8 sogar allgemeiner für jeden unendlichen Körper k.

Beweis. Eine affine Varietät ist leer genau dann, wenn ihr Ring von regulären Funktionen der Nullring ist. Es reicht also zu zeigen, daß eine nichtleere Varietät genau dann irreduzibel ist, wenn in ihrem Ring von regulären Funktionen gilt $ab =$

$0 \Rightarrow (a = 0$ oder $b = 0)$. Gibt es nun in $\mathcal{O}(X)$ von Null verschiedene Elemente $a \neq 0 \neq b$ mit $ab = 0$, so sind $\mathcal{Z}(a)$ und $\mathcal{Z}(b)$ echte abgeschlossene Teilmengen von X mit $\mathcal{Z}(a) \cup \mathcal{Z}(b) = X$ und X ist nicht irreduzibel. Ist umgekehrt X nicht leer und nicht irreduzibel, so gibt es Teilmengen $I, J \subset \mathcal{O}(X)$ mit $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = X$ aber $\mathcal{Z}(I) \neq X \neq \mathcal{Z}(J)$. Dann gibt es auch Elemente $a \in I$ und $b \in J$ mit $\mathcal{Z}(a) \neq X \neq \mathcal{Z}(b)$, und für diese gilt erst recht $\mathcal{Z}(a) \cup \mathcal{Z}(b) = X$. Damit gilt insbesondere $a \neq 0 \neq b$ aber $ab = 0$. □

Beispiel 4.2.3 (**Irreduzibilität der Determinante**). Wir zeigen, daß die Determinante $\det \in k[X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ für alle $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom ist. Ihre Nullstellenmenge ist irreduzibel als das Bild der durch die Abbildungsvorschrift $(A, B) \mapsto A \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0) B$ gegebenen polynomialen Abbildung

$$\mathrm{Mat}(n; k) \times \mathrm{Mat}(n; k) \to \mathrm{Mat}(n; k)$$

Hätten wir $\det = fg$ mit nichtkonstanten f und g, so müßten demnach f und g dieselbe Nullstellenmenge haben wie $\det$. Wenn wir also einen Punkt D finden mit $\det(D) = 0$, an dem die partielle Ableitung nach mindestens einer unserer Variablen X_{ij} nicht verschwindet, so sind wir fertig. Das ist nun nicht mehr schwer.

Definition 4.2.4. Ein Ideal I eines Krings R heißt ein **Primideal**, wenn gilt $I \neq R$ und $a, b \notin I \Rightarrow ab \notin I$. Die Menge aller Primideale eines Krings R heißt das **Spektrum** oder ausführlicher das **Primspektrum von** R und man notiert diese Menge

$$\mathrm{Spec} R := \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ ist ein Primideal von } R\}$$

4.2.5 (**Primideale und Integritätsbereiche**). Genau dann ist ein Ideal in einem Kring ein Primideal, wenn der Quotientenring nach besagtem Ideal ein Integritätsbereich ist. Insbesondere ist jedes maximale Ideal in einem Kring ein Primideal, denn der Quotient nach einem maximalen Ideal ist nach 1.7.7 ein Körper und jeder Körper ist ein Integritätsbereich.

Vorschau 4.2.6. Man kann den Begriff eines Primideals auf verschiedene Arten auf den Fall nicht notwendig kommutativer Ringe verallgemeinern. Diejenigen Ideale, die die Bedingung der obigen Definition wortwörtlich erfüllen, heißen im nichtkommutativen Kontext **vollprime Ideale**. Unter einem **Primideal** versteht man im nichtkommutativen Kontext dahingegen ein vom ganzen Ring verschiedenes Ideal P mit der Eigenschaft, daß für beliebige Ideale $I, J \subset R$ aus $IJ \subset P$ folgt $I \subset P$ oder $J \subset P$. Unter Idealen sind im nichtkommutativen Kontext immer beidseitige Ideale zu verstehen, andernfalls spricht man von Links- beziehungsweise Rechtsidealen.

Beispiele 4.2.7 (**Primideale im Ring der ganzen Zahlen**). Die Primideale im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sind genau das Nullideal und die von Primzahlen erzeugten Hauptideale. Allgemein ist ein Element eines Krings ein **Primelement** im Sinne von [AL] 2.5.1 genau dann, wenn unser Element nicht Null ist und das von besagtem Element erzeugte Hauptideal ein Primideal ist.

Satz 4.2.8 (Primideale und irreduzible Mengen im geometrischen Fall). *Gegeben eine affine Varietät X liefert das Bilden des Verschwindungsideals eine Bijektion zwischen der Menge aller irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X und der Menge aller Primideale im Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen*

$$\begin{array}{ccc} \{Y \overset{\subset}{\scriptstyle A} X \mid Y \text{ irreduzibel }\} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \\ Y & \mapsto & \mathcal{I}(Y) \end{array}$$

4.2.9. Natürlich sind alle einpunktigen Teilmengen einer affinen Varietät X irreduzibel. Sie entsprechen nach 3.4.6 unter unserer Bijektion genau den maximalen Idealen von $\mathcal{O}(X)$. Man mag sich im Licht des Satzes $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$ vorstellen als die Menge X erweitert um jeweils einen zusätzlichen Punkt für jede irreduzible Teilmenge, die nicht bereits selbst nur aus einem Punkt besteht.

Beweis. Nach 3.4.6 liefern das Bilden des Verschwindungsideals $\mathcal{I}$ und das Bilden der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den abgeschlossenen Teilmengen von X und den Radikalidealen von $\mathcal{O}(X)$, und nach dem noetherschen Isomorphiesatz liefert für alle $Y \subset X$ die Einschränkung von Funktionen einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$. Nun ist nach 4.2.1 der Ring $\mathcal{O}(Y)$ genau dann ein Integritätsbereich, wenn Y irreduzibel ist, und das gilt nach 4.2.5 genau dann, wenn $\mathcal{I}(Y)$ ein Primideal ist. Unter unseren Bijektionen entsprechen also die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen genau den primen Radikalidealen alias den Primidealen. □

4.2.10 (**Urbilder von Primidealen sind Primideale**). Ist $f : R \to S$ ein Kringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subset S$ ein Primideal, so ist auch $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subset R$ ein Primideal. In der Tat haben wir eine Einbettung $R/f^{-1}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow S/\mathfrak{p}$ und jeder Teilring eines Integritätsbereichs ist selbst ein Integritätsbereich. Jeder Kringhomomorphismus induziert also auf den Spektren der beteiligten Kringe eine Abbildung in der Gegenrichtung

$$\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$$

Vorschau 4.2.11. Für Homomorphismen beliebiger Kringe $A \to B$ induziert die zugehörige Abbildung $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ im allgemeinen keine Abbildung $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ und man kann auch nicht so einfach jedem Element $a \in A$ eine Abbildung von $\operatorname{Max} A$ oder $\operatorname{Spec} A$ in irgendein festes k zuordnen. Mit etwas mehr technischem Aufwand gelingt es aber dennoch, jedem Kring A ein unser $\operatorname{Max} A$ verallgemeinerndes geometrisches Objekt $\operatorname{Spec} A$ zuzuordnen, das „Spektrum von A“ in der Kategorie der „Schemata“.

Lemma 4.2.12 (Produkt von zwei Idealen in einem Primideal). *In einem Kring R ist ein echtes Ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ genau dann ein Primideal, wenn für beliebige Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subsetneq R$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{p}$ kein Primideal, so gibt es $a, b \in R \backslash \mathfrak{p}$ mit $ab \in \mathfrak{p}$ und damit $\langle a \rangle \not\subset \mathfrak{p}$ sowie $\langle b \rangle \not\subset \mathfrak{p}$ aber $\langle a \rangle \langle b \rangle \subset \mathfrak{p}$. Gibt es Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ aber $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$, so gibt es $a \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{p}$ und $b \in \mathfrak{b} \backslash \mathfrak{p}$ und für diese gilt nach Annahme $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und deshalb kann $\mathfrak{p}$ dann kein Primideal sein. □

4.2.13 (**Schnitt von Idealen in einem Primideal**). Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ eines Krings R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ mit $\mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{p}$, ja sogar schwächer mit $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{p}$, gilt insbesondere $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ für mindestens ein i. Liegt also geometrisch gesprochen eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge einer affinen Varietät in einer endlichen Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen, so liegt sie bereits in einer der vereinigten Teilmengen. Ist insbesondere $\mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s = \mathfrak{p}$ prim, so folgt $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$ für mindestens ein i.

Proposition 4.2.14 (Ideale in einer Vereinigung von Primidealen). *Gegeben Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eines Krings R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ folgt aus der Inklusion $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_s$ bereits $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_j$ für mindestens ein j.*

4.2.15. Im geometrischen Fall entsprechen die Primideale $\mathfrak{p}_i$ irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $Y_i = \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_i)$ einer affinen Varietät X und ihre Vereinigung besteht aus allen regulären Funktionen, die auf mindestens einem Y_i verschwinden. Logisch umgestellt bedeutet unsere Proposition dann: Enthält ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}(X)$ für jedes i eine Funktion g_i, die nicht auf Y_i verschwindet, so enthält es auch eine Funktion, die auf keinem der Y_i verschwindet. Wir zeigen das nun für zwei abgeschlossene Teilmengen. Wir dürfen annehmen, daß von ihnen keine in der anderen enthalten ist. Dann gibt es $f_{12} \in \mathcal{O}(X)$ mit $f_{12}|Y_1 = 0$ aber $f_{12}|Y_2 \neq 0$. Also gilt $g_2 f_{12}|Y_1 = 0$ und wegen Y_2 irreduzibel auch $g_2 f_{12}|Y_2 \neq 0$. Genauso machen wir es mit vertauschten Indizes und $g_2 f_{12} + g_1 f_{21}$ liegt dann in $\mathfrak{a}$ und verschwindet weder auf Y_1 noch auf Y_2.

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, daß für alle j gilt $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_j$. Dann finden wir jeweils ein $g_j \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{p}_j$. Es gilt, ein Element $g \in \mathfrak{a} \backslash (\mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_s)$ zu konstruieren. Sicher dürfen wir dazu annehmen, daß es zwischen den $\mathfrak{p}_j$ keine Inklusionsrelationen gibt. Dann existieren für $i \neq j$ stets Elemente $f_{ij} \in \mathfrak{p}_i \backslash \mathfrak{p}_j$. Das Produkt $g_j \prod_{i \neq j} f_{ij}$ gehört dann zu $\mathfrak{a}$ und zu allen $\mathfrak{p}_i$ mit $i \neq j$, gehört aber nicht zu $\mathfrak{p}_j$. Die Summe dieser Produkte ist dann unser gesuchtes g. □

Definition 4.2.16. Die **Krulldimension** $\operatorname{kdim}(R)$ eines Krings R wird erklärt als das Supremum aller Längen von echt aufsteigenden Ketten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l \subset R$$

vom Primidealen von R. Wir haben also $\operatorname{kdim}(R) \in \mathbb{N} \sqcup \{\pm\infty\}$.

Vorschau 4.2.17. Es gibt noethersche Kringe von unendlicher Krulldimension. Es gibt auch kommutative noethersche Integritätsbereiche endlicher Krulldimension, in denen sich nicht jede Primidealkette zu einer Primidealkette maximaler Länge verfeinern läßt. Für von Null verschiedene Kringe, die ringendlich sind über einem Körper, werden wir jedoch im folgenden zeigen, daß die Krulldimension endlich ist, und daß sich im Fall eines über einem Körper ringendlichen Integritätsrings sogar jede Primidealkette zu einer Primidealkette maximaler Länge verfeinern läßt.

Beispiel 4.2.18. Wir haben $\operatorname{kdim}(0) = -\infty$. Wir haben $\operatorname{kdim}(k) = 0$ für jeden Körper k. Wir haben $\operatorname{kdim}(\mathbb{Z}) = 1$. Wir haben $\operatorname{kdim}(k[T]) = 1$ für jeden Körper k.

4.2.19 (**Krulldimension von Kringen und Varietäten**). Ist X eine affine algebraische Varietät, so entsprechen nach 4.2.8 die abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X eineindeutig den Primidealen von $\mathcal{O}(X)$. Die Krulldimension des topologischen Raums X nach 4.1.17 stimmt folglich überein mit der Krulldimension des Krings $\mathcal{O}(X)$ im Sinne der vorhergehenden Definition 4.2.16, in Formeln

$$\operatorname{kdim}(X) = \operatorname{kdim} \mathcal{O}(X)$$

Um mit der Krulldimension arbeiten zu können, ja allein um zu zeigen, daß für $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen der k^n die Krulldimension n hat, müssen wir tiefer in die kommutative Algebra einsteigen. Bis hierher haben wir nur gezeigt, daß gilt $\operatorname{kdim}(k^n) = \operatorname{kdim} k[T_1, \ldots, T_n]$, aber jetzt müssen wir die rechte Seite bestimmen. Das gelingt in 5.4.4. Zunächst aber bestimmen wir in 5.9.5 die noetherschen Kringe der Krulldimension Null und beginnen im folgenden Abschnitt mit den Vorbereitungen.

Vorschau 4.2.20. In 5.6.13 zeigen wir, daß in gewissen Situationen die a priori anschaulichere Krulldimension mit dem leichter zu berechnenden „Transzendenzgrad des Körpers der rationalen Funktionen“ übereinstimmt.

4.2.21. Sei X ein topologischer Raum. Unter einer **Hyperfläche in** X verstehen wir eine Teilmenge $Y \subset X$ derart, daß jede ihrer irreduziblen Komponenten Z die Krullkodimension $\operatorname{kdim}(Z \subset X) = 1$ hat. Insbesondere ist damit für uns auch die leere Menge in jedem topologischen Raum stets eine Hyperfläche.

Proposition 4.2.22 (Gleichungen für Hyperflächen). *Gegeben eine affine Varietät X mit einem faktoriellen Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen liefert das Bilden der Nullstellenmenge eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Irreduzible Elemente von} \\ \mathcal{O}(X), \textit{ bis auf Einheiten} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene irreduzible} \\ \textit{Hyperflächen in } X \end{array} \right\} \\ [f] & \mapsto & \mathcal{Z}(f) \end{array}$$

Beweis. Ist $\mathcal{O}(X)$ faktoriell, so ist für f irreduzibel das Hauptideal $\langle f \rangle$ prim und offensichtlich sind die minimalen Elemente der durch Inklusion angeordneten Menge aller von Null verschiedenen Primideale genau diese Hauptideale. $\square$

4.2.23. Ebenso erhalten wir für eine affine Varietät X mit einem faktoriellen Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Quadratfreie Elemente von} \\ \mathcal{O}(X), \text{ bis auf Einheiten} \end{array} \right\} & \stackrel{\sim}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene} \\ \text{Hyperflächen in } X \end{array} \right\} \\ [f] & \mapsto & \mathcal{Z}(f) \end{array}$$

zwischen quadratfreien Elementen von $\mathcal{O}(X)$, bis auf Einheiten, und Hyperflächen in X. Ist $\mathcal{O}(X)$ nicht faktoriell, so ist die Aussage im allgemeinen nicht mehr richtig: In diesem Fall kann die Nullstellenmenge eines irreduziblen Elements mehrere Komponenten haben und es kann umgekehrt passieren, daß für das Verschwindungsideal einer irreduziblen Hyperfläche mehr als ein Erzeuger benötigt wird.

Vorschau 4.2.24. Was wir an dieser Stelle noch nicht zeigen können und worauf wir hinarbeiten ist die Erkenntnis 5.7.15, daß jede nichtleere Hyperfläche Z in einer irreduziblen affinen Varietät X eine um Eins kleinere Dimension hat, ja daß sogar für $Z \subsetneq X$ eine beliebige irreduzible abgeschlossene Teilmenge einer irreduziblen affinen Varietät X gilt

$$\operatorname{kdim} Z + \operatorname{kdim}(Z \subset X) = \operatorname{kdim} X$$

Klar ist bis jetzt nur $\leq$. Was wir an dieser Stelle auch noch nicht zeigen können und worauf wir hinarbeiten ist der Krull'sche Hauptidealsatz 5.9.10, nach dem insbesondere die Nullstellenmenge einer beliebigen von Null verschiedenen regulären Funktion in einer beliebigen irreduziblen affinen Varietät eine Hyperfläche ist. Erst mal müssen wir bescheidener sein. In 5.4.5 zeigen wir $\operatorname{kdim} k^n = n$ und $\operatorname{kdim} \mathcal{Z}(f) = n-1$ für jedes nichtkonstante Polynom in n Variablen, das ist schon mal ein Anfang.

Übungen

Übung 4.2.25 (**Irreduzibilität der Gruppe** SL_n). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$ stets irreduzibel ist. Hinweis: Ähnlich wie in [LA1] 2.5.10 erkennt man, daß es für jedes n ein N gibt derart, daß sich jede $(n \times n)$-Matrix der Determinante Eins darstellen läßt als Produkt von N Faktoren, die jeweils Diagonalmatrizen der Determinante Eins oder Elementarmatrizen der Determinante Eins sind. Man folgere, daß auch $1 - \det$ für $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom ist. Hinweis: Man argumentiere wie in 4.2.3.

Übung 4.2.26 (**Irreduzibilität von Produkten**). Seien k ein Körper und $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ irreduzibel für die Zariskitopologie. Man zeige, daß dann auch $X \times Y \subset k^{n+m}$ irreduzibel ist für die Zariskitopologie. Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall, daß Y nur aus einem Punkt besteht.

Ergänzung 4.2.27 (**Tensorprodukte von Integritätskringen**). Wir zeigen, daß das Tensorprodukt von zwei Integritätskringen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ stets wieder ein Integritätskring ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir uns auch auf den Fall ringendlicher Integritätskringe über k zurückziehen. Dann sind unsere Integritätskringe aber nach 3.2.6 isomorph zu Ringen polynomialer Funktionen auf Teilmengen gewisser k^n, und besagte Teilmengen sind irreduzibel nach 4.2.1. Damit ist auch ihr Produkt irreduzibel nach 4.2.26, dann bilden die polynomialen Funktionen auf dem Produkt einen Integritätsring nach 4.2.1, und nach 3.1.4 ist dieser Integritätsring gerade das Tensorprodukt über k unserer ursprünglichen Integritätsringe. Die $\mathbb{R}$-Kringalgebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist kein Integritätsring, für Kringalgebren über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper gilt die Aussage also im allgemeinen nicht.

Übung 4.2.28 (**Filtrierung durch Quotienten nach Primidealen**). Jeder endlich erzeugte Modul über einem noetherschen Kring besitzt eine endliche Filtrierung durch Untermoduln derart, daß alle Subquotienten isomorph sind zu Quotienten unseres Krings nach Primidealen. Hinweis: Man wähle mit 1.5.13 einen maximalen Untermodul, der eine Filtrierung der beschriebenen Art besitzt. Dann zeige man mit 1.5.13, daß im Fall eines von Null verschiedenen Moduls das System der Annullatoren aller seiner von Null verschiedenen Elemente maximale Elemente besitzt und daß diese maximalen Elemente Primideale sind. Schließlich zeige man, daß unser maximaler Untermodul bereits der ganze Modul gewesen sein muß.

Übung 4.2.29. Ein Primideal eines Krings muß alle nilpotenten Elemente des besagten Krings enthalten.

Übung 4.2.30 (**Urbilder von Primidealen im geometrischen Fall**). Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten und $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ der zugehörige Komorphismus, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max}\mathcal{O}(X) & \subset & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(X) \\ \varphi\downarrow & & & & \downarrow(\varphi^\sharp)^{-1} \\ Y & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Max}\mathcal{O}(Y) & \subset & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(Y) \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die Vertikale rechts jedem Primideal sein Urbild unter $\varphi^\sharp$ zuordnet. Hinweis: 3.4.16. Man zeige allgemeiner, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{Z \overset{\circ}{\subset} X \mid Z \text{ irreduzibel}\} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(X) \\ \downarrow & & \downarrow(\varphi^\sharp)^{-1} \\ \{W \overset{\circ}{\subset} Y \mid W \text{ irreduzibel}\} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec}\mathcal{O}(Y) \end{array}$$

kommutiert mit den durch 4.2.8 gegebenen Horizontalen und der Abbildung $Z \mapsto \overline{\varphi(Z)}$ als linker Vertikale.

Übung 4.2.31. Man zeige: Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ und Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eines Krings R mit $\mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ für alle i, j gibt es stets $f \in R$ mit $f \in \mathfrak{a}_i \ \forall i$ aber $f \notin \mathfrak{p}_j \ \forall j$. Hinweis: Man verwende 4.2.14 und 4.2.13.

Übung 4.2.32. Man zeige für jeden Körper k die Formeln $\operatorname{kdim}(k \times k) = 0$ und $\operatorname{kdim}(k[T]/\langle T^2 \rangle) = 0$.

Übung 4.2.33. Gegeben ein surjektiver Kringhomomorphismus $A \twoheadrightarrow B$ zeige man $\operatorname{kdim}(A) \geq \operatorname{kdim}(B)$.

4.3 Lokalisierung

Definition 4.3.1. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Ein R-Modul M heißt **S-lokal**, wenn für alle $s \in S$ die Multiplikation mit s einen Isomorphismus $(s\cdot) : M \xrightarrow{\sim} M$ liefert.

Definition 4.3.2. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge und M ein R-Modul. Eine **Lokalisierung von M an S** ist ein Paar (L, lok) bestehend aus einem S-lokalen R-Modul L und einem Homomorphismus von R-Moduln $\operatorname{lok} : M \to L$ derart, daß jeder Homomorphismus von M in einen S-lokalen R-Modul eindeutig über lok faktorisiert.

4.3.3. In Formeln fordern wir also, daß für jeden weiteren S-lokalen R-Modul N das Vorschalten von lok eine Bijektion

$$(\circ \operatorname{lok}) : \operatorname{Hom}_R(L, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(M, N)$$

liefert. Diese Eigenschaft heißt die **universelle Eigenschaft der Lokalisierung**. Die üblichen Argumente zeigen, daß eine Lokalisierung eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, wenn sie denn existiert. Daß eine Lokalisierung stets existiert, werden wir gleich in voller Allgemeinheit zeigen. Sie verdient deshalb eine Notation und einen bestimmten Artikel. Wir notieren die Lokalisierung eines Moduls M meist

$$(S^{-1}M, \operatorname{lok})$$

Ist unser Modul M bereits S-lokal, so ist (M, id) eine Lokalisierung.

4.3.4 (**Diskussion der Terminologie**). Die Herkunft der Bezeichnung wird hoffentlich im nächsten Abschnitt deutlich, in dem wir zeigen, inwiefern Ringe von regulären Funktionskeimen auf affinen Varietäten als Lokalisierungen des Rings aller regulären Funktionen beschrieben werden können.

4.3.5. Gegeben ein Monoid $(M, \circ)$ und eine Teilmenge $T \subset M$ notieren wir ganz allgemein $|T\rangle = |T, \circ\rangle = \langle T; \mathrm{Mon}\rangle$ wie in [AL] 3.5.1 das von T in M erzeugte Untermonoid. Man beachte, daß das von einer Teilmenge S eines Rings erzeugte multiplikative Monoid $|S\rangle$ etwas sehr anderes ist als das von S erzeugte Ideal $\langle S\rangle$.

4.3.6. Eine Teilmenge T eines Rings R heißt **multiplikativ abgeschlossen**, wenn die 1 zu T gehört und wenn gilt $s, t \in T \Rightarrow st \in T$. Unser $|S\rangle$ ist die kleinste multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, die S umfaßt. Die meisten Quellen gehen bei der Definition der Lokalisierung gleich von einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge aus, aber das schien mir ungeschickt.

Satz 4.3.7 (Existenz der Lokalisierung). *Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und ein R-Modul M existiert stets eine Lokalisierung*

$$\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$$

Beweis. Wir betrachten das von S erzeugte multiplikative Untermonoid $|S\rangle \subset R$ und bilden die Menge $M \times |S\rangle$ und definieren darauf eine Relation $\sim$ durch die Vorschrift

$$(m, s) \sim (n, t) \text{ genau dann, wenn es } r \in |S\rangle \text{ gibt mit } rtm = rsn.$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, wie man unschwer einsieht. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $S^{-1}M$ und die Äquivalenzklasse von (m, s) mit $\frac{m}{s}$ oder m/s. Dann definieren wir auf $S^{-1}M$ eine Verknüpfung $+$ durch die Regel

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{tm + sn}{st}$$

und überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Verknüpfung wohldefiniert ist und $S^{-1}M$ zu einer abelschen Gruppe macht. Schließlich definieren wir eine Abbildung $R \times S^{-1}M \to S^{-1}M$ durch die Regel

$$a \cdot \frac{n}{t} = \frac{an}{t}$$

und prüfen, daß sie wohldefiniert ist und die abelsche Gruppe $S^{-1}M$ zu einem S-lokalen R-Modul macht. Als Umkehrabbildung beim Nachweis der universellen Eigenschaft kann und muß man jedem Homomorphismus $\varphi : M \to N$ in einen S-lokalen R-Modul N die Abbildung $\tilde{\varphi} : S^{-1}M \to N$ zuordnen, die durch $\tilde{\varphi}(m/s) = s^{-1}\varphi(m)$ wohldefiniert ist. □

Beispiel 4.3.8. Die Lokalisierung eines kommutativen Integritätsbereichs R nach allen von Null verschiedenen Elementen ist sein Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ aus [LA1] 5.5.2. An dieser Stelle können wir nur einen Isomorphismus als R-Modul behaupten, aber die Konstruktion der Ringstruktur wird nicht lange auf sich warten lassen.

4.3.9 (**Kern der kanonischen Abbildung in die Lokalisierung**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge und M ein R-Modul. Nach Konstruktion besteht der Kern der kanonischen Abbildung $\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$ genau aus allen $m \in M$, für die es ein $r \in |S\rangle$ gibt mit $rm = 0$.

4.3.10 (**Die Lokalisierung als Funktor**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Wir ordnen jedem Homomorphismus von R-Moduln $\varphi : M \to N$ den nach 4.3.3 eindeutig bestimmten Homomorphismus $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N$ mit $(S^{-1}\varphi) \circ \mathrm{lok} = \mathrm{lok} \circ \varphi : M \to S^{-1}N$ zu, der explizit gegeben wird durch

$$S^{-1}\varphi : \frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$$

So erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der R-Moduln in sich selber und sogar in die volle Unterkategorie der S-lokalen R-Moduln.

Proposition 4.3.11 (Exaktheit der Lokalisierung). *Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Ist $M' \to M \to M''$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, so ist auch $S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ eine exakte Sequenz.*

4.3.12. Insbesondere können und werden wir für jeden Untermodul $N \subset M$ auch seine Lokalisierung als Untermodul des lokalisierten Moduls auffassen. In Formeln bezeichnen wir mit $S^{-1}N$ also sowohl die Lokalisierung von N als auch ihr Bild $S^{-1}N \subset S^{-1}M$ unter der offensichtlichen Einbettung. Es wird jedoch auf diesen Unterschied nie ankommen.

Beweis. Geht m/s auf Null in M'', also $m \mapsto m''$ mit $m''/s = 0$, so gibt es $t \in |S\rangle$ mit $tm'' = 0$. Damit gibt es $n \in M'$ mit $n \mapsto tm$ und $n/ts \mapsto tm/ts = m/s$. □

4.3.13 (**Lokalisierung und Restriktion der Skalare**). Ist $\varphi : A \to B$ ein Kringhomomorphismus und $S \subset A$ eine Teilmenge und M ein B-Modul, so ist der durch die universelle Eigenschaft gegebene Morphismus ein Isomorphismus

$$S^{-1}(\mathrm{res}_\varphi M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{res}_\varphi(\varphi(S)^{-1}M)$$

In der Tat liefert die Funktorialität der Lokalisierung eine Struktur als B-Modul auf der linken Seite, und dieser ist offensichtlich $\varphi(S)$-lokal. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert damit einen Homomorphismus von B-Moduln $\varphi(S)^{-1}M \to S^{-1}(\mathrm{res}_\varphi M)$ in die Gegenrichtung und man prüft leicht, daß diese Abbildung invers ist zu unserem behaupteten Isomorphismus.

4.3.14 (**Lokalisierung und multilineare Abbildungen**). Gegeben $R \supset S$ ein Kring mit einer Teilmenge und R-Moduln M, N und eine R-bilineare Abbildung $\varphi : M \times N \to L$ in einen S-lokalen R-Modul L gibt es genau eine R-bilineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : S^{-1}M \times S^{-1}N \to L$$

mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ (\mathrm{lok} \times \mathrm{lok})$. Das folgt unmittelbar aus der Konstruktion im Beweis der Existenz 4.3.7. Alternativ mag man bilineare Abbildungen mit linearen Abbildungen in den Hom-Raum identifizieren und bemerken, daß mit L auch $\mathrm{Hom}_R(N, L)$ ein S-lokaler R-Modul ist. Analoges gilt für multilineare Abbildungen.

Vorschau 4.3.15. In der in [TSK] 4.1.6.1 eingeführten Terminologie ist die Lokalisierung ein Schmelzfunktor und ist sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen, aber so weit will ich hier nicht gehen.

4.3.16 (**Lokalisierung von Kringen**). Ist R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge, so induziert die R-bilineare Abbildung der Multiplikation $R \times R \to R$ eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}R \times S^{-1}R \to S^{-1}R$$

Man sieht unmittelbar, daß damit $S^{-1}R$ auch wieder ein Kring ist. Ist weiter M ein R-Modul, so induziert die R-bilineare Abbildung $R \times M \to M$ der Operation eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}R \times S^{-1}M \to S^{-1}M$$

Man sieht unmittelbar, daß so $S^{-1}M$ zu einem $S^{-1}R$-Modul wird.

4.3.17 (**Lokalisierung bei Integritätsbereichen als Teil des Quotientenkörpes**). Ist R ein Integritätsbereich und $S \subset R$ eine Teilmenge mit $0 \notin S$, so ist auch $S^{-1}R$ ein Integritätsbereich und die kanonische Einbettung

$$S^{-1}R \hookrightarrow \operatorname{Quot} R$$

identifiziert unsere Lokalisierung mit dem Teilring des Quotientenkörpers derjenigen Elemente, die sich als Bruch mit Nenner aus $|S\rangle$ darstellen lassen und für den wir bereits in [LA1] 5.5.6 die Notation $S^{-1}R$ eingeführt hatten. Ist unser Kring R ein Integritätsbereich und S die Menge aller seiner von Null verschiedenen Elemente, so erhalten wir insbesondere genau unseren Quotientenkörper $S^{-1}R = \operatorname{Quot} R$ aus [LA1] 5.5.2.

Ergänzung 4.3.18 (**Lokalisierung von Ringalgebren**). Ist R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge und A eine R-Algebra, so induziert die R-bilineare Abbildung der Multiplikation $A \times A \to A$ eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A$$

Man sieht unmittelbar, daß die Assoziativität, Kommutativität und Unitarität sich von A auf $S^{-1}A$ übertragen. Ist weiter A eine Ringalgebra und M ein A-Modul, so induziert die R-bilineare Abbildung $A \times M \to M$ der Operation eine R-bilineare Abbildung

$$S^{-1}A \times S^{-1}M \to S^{-1}M$$

Man sieht unmittelbar, daß so $S^{-1}M$ zu einem $S^{-1}A$-Modul wird.

4.3.19 (**Universelle Eigenschaft der Lokalisierung von Kringen**). Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Offensichtlich ist dann $\mathrm{lok} : R \to S^{-1}R$ ein Ringhomomorphismus und unter diesem Ringhomomorphismus wird jedes Element von S auf eine Einheit abgebildet. Gegeben andererseits ein Kringhomomorphismus $\varphi : R \to A$ mit $\varphi(S) \subset A^\times$ ist der universelle R-Modulhomomorphismus $S^{-1}R \to A$ sogar ein Ringhomomorphismus. In anderen Worten faktorisiert jeder Kringhomomorphismus $R \to A$, unter dem alle Elemente von S auf Einheiten abgebildet werden, eindeutig über die Lokalisierung $\mathrm{lok} : R \to S^{-1}R$.

4.3.20 (**Lokale Moduln als Moduln über dem lokalisierten Kring**). Gegeben R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge ist die Restriktion der Skalare unter dem Kringhomomorphismus $\mathrm{lok} : R \to S^{-1}R$ eine offensichtlich Äquivalenz, ja ein Isomorphismus von Kategorien

$$(S^{-1}R)\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \{M \in R\text{-Mod} \mid M \text{ ist } S\text{-lokal}\}$$

Vorschau 4.3.21 (**Lokalisierung als Skalarerweiterung**). Für die mit allgemeinen Tensorprodukten und Erweiterung der Skalare 2.8.5 vertrauten Leser sei angefügt, daß gegeben R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge die Abbildung $M \to (S^{-1}R) \otimes_R M, m \mapsto 1 \otimes m$ stets eine Lokalisierung von M ist. In anderen Worten ist die Lokalisierung eines Moduls nichts anderes als die Erweiterung der Skalare zur entsprechenden Lokalisierung unseres Krings und damit ein Spezialfall der allgemeinen Skalarerweiterung und wir haben in Formeln

$$S^{-1}M \xrightarrow{\sim} (S^{-1}R) \otimes_R M$$

Allerdings haben die bei der Lokalisierung auftretenden Skalarerweiterungen sehr spezielle Eigenschaften, insbesondere die Exaktheit, die man mithilfe der hier gegebenen Konstruktion der Lokalisierung eines Moduls besser einsehen kann.

4.3.22 (**Lokalisieren nach einem einzigen Element**). Besteht $S = \{f\}$ nur aus einem einzigen Element, so benutzt man für die Lokalisierung nach S auch die Notationen

$$S^{-1}M = f^{-1}M = M_f = M[f^{-1}]$$

4.3.23 (**Lokalisieren an einem Primideal**). Ist R ein Kring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so benutzt man für die Lokalisierung eines R-Moduls M nach dem Komplement $S := R \backslash \mathfrak{p}$ unseres Primideals $\mathfrak{p}$ auch die Notation

$$S^{-1}M =: M_\mathfrak{p}$$

und nennt $M_\mathfrak{p}$ die **Lokalisierung von** M **an der Stelle** $\mathfrak{p}$. Man beachte, daß $S = R \backslash \mathfrak{p}$ in diesem Fall bereits multiplikativ abgeschlossen ist.

4.3.24 (**Diskussion der Notation**). Die beiden im vorhergehenden eingeführten Notationen für die Lokalisierung nach einem Element und die Lokalisierung an einem Primideal passen schlecht zusammen: Bei der Ersten schreibt man als unteren Index, was zu Invertieren ist, bei der Zweiten, was nicht zu invertieren ist. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sprachlich unterscheide ich Lokalisierung an einem Primideal oder auch bei einem Primideal von der Lokalisierung nach irgendwelchen Elementen. Die Notation $R[f^{-1}]$ ist nicht ganz eindeutig: Es könnte auch gemeint sein, daß wir allgemeiner einen injektiven Kringhomomorphismus $R \hookrightarrow A$ gegeben haben und für ein invertierbares Element $f \in A^\times$, das nicht im Bild von R liegt, den vom Bild von R und f^{-1} erzeugten Teilring meinen.

4.3.25 (**Diskussion der Notation**). Man nehme sich beim Studium der Literatur in acht, daß $\mathbb{Z}_p$ meist nicht eine Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ meint, sondern vielmehr eine Vervollständigung wie in 13.1.10.

4.3.26 (**Lokal-global-Prinzip**). Gegeben ein Kring R und ein R-Modul M ist die offensichtliche Abbildung stets eine Injektion

$$M \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R} M_{\mathfrak{m}}$$

in das Produkt der Lokalisierungen von M an allen maximalen Idealen von R. In der Tat, ist $x \in M$ nicht Null, so ist sein Annullator nicht ganz R und folglich enthalten in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Dann aber kann das Bild von x in $M_{\mathfrak{m}}$ nicht Null sein. Insbesondere ist ein Modul genau dann Null, wenn seine Lokalisierungen an allen maximalen Idealen Null sind. Aus der Exaktheit der Lokalisierung 4.3.11 folgt damit, daß eine Sequenz $M' \to M \to M''$ von Moduln exakt ist genau dann, wenn sie für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ eine exakte Sequenz $M'_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}} \to M''_{\mathfrak{m}}$ induziert. Es folgt weiter, daß sie exakt ist genau dann, wenn die lokalisierte Sequenz $M'_f \to M_f \to M''_f$ exakt ist für alle Elemente f eines festen Erzeugendensystems des Einsideals.

Satz 4.3.27 (**Lokalisierung ist verträglich mit Koprodukten**). *Gegeben R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge ist der durch $M \mapsto S^{-1}M$ erklärte Lokalisierungsfunktor $R\text{-Mod} \to S^{-1}R\text{-Mod}$ verträglich mit Koprodukten.*

Ergänzung 4.3.28. Die Aussage des Satzes ebenso wie ihr Beweis spezialisieren ein allgemeines Resultat der Kategorientheorie, nach dem jeder Linksadjungierte Koprodukte und sogar beliebige Kolimites erhält.

4.3.29. Gegeben ein Koprodukt (K, in_i) einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R-Moduln im Sinne von [LA2] 9.7.16 ist also ausgeschrieben auch $(S^{-1}K, S^{-1}\operatorname{in}_i)$ ein Koprodukt der Familie $(S^{-1}M_i)_{i\in I}$ von $S^{-1}R$-Moduln. In anderen Worten gilt

$$S^{-1}\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} S^{-1}M_i$$

unter der „offensichtlichen Abbildung“. Man beachte, daß die analoge Aussage für Produkte im allgemeinen nicht richtig ist: Die Lokalisierung ist nicht mit beliebigen Produkten verträglich. Bereits für das Produkt abzählbar unendlich vieler Kopien von $\mathbb{Z}$ und $S = \{2\}$ ist die natürliche Abbildung $S^{-1}\left(\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}\right) \to \prod_{i\in\mathbb{N}} S^{-1}\mathbb{Z}$ kein Isomorphismus, da das Tupel $(2^{-i})_{i\in\mathbb{N}}$ nicht in ihrem Bild liegt. Für endliche Produkte von Moduln wird die natürliche Abbildung aber natürlich ein Isomorphismus sein, endliche Produkte stimmen ja mit direkten Summen alias Koprodukten überein.

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß für jeden $S^{-1}R$-Modul N das Vorschalten aller $S^{-1}\,\mathrm{in}_i$ eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}K, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M_i, N)$$

induziert. Vermittels unserer universellen Eigenschaft 4.3.3 läuft das auf den Nachweis der Tatsache hinaus, daß für jeden $S^{-1}R$-Modul N Vorschalten aller in_i eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_R(K, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$$

induziert. Das ist jedoch klar, da K ja ein Koprodukt war. □

Beispiel 4.3.30. Die Lokalisierung nach allen von Null verschiedenen ganzen Zahlen macht jede abelsche Gruppe alias jeden $\mathbb{Z}$-Modul zu einem $\mathbb{Q}$-Modul alias $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Gegeben eine endlich erzeugte abelsche Gruppe M ist die Dimension dieses $\mathbb{Q}$-Vektorraums die Zahl, die wir in [LA2] 6.5.5 den Rang von M genannt hatten.

4.3.31 (**Lokalisierung erhält die Eigenschaft noethersch**). Jede Lokalisierung eines noetherschen Moduls ist wieder noethersch. Seien in der Tat R ein Kring, $S \subset R$ eine Teilmenge, M ein R-Modul und $\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$ die Abbildung in die Lokalisierung. Ist $U \subset S^{-1}M$ ein Untermodul und $E \subset \mathrm{lok}^{-1}(U)$ ein Erzeugendensystem seines Urbilds, so ist $\mathrm{lok}(T)$ ein Erzeugendensystem des $S^{-1}R$-Moduls U. Hat also jeder R-Untermodul von M ein endliches Erzeugendensystem, so auch jeder $S^{-1}R$-Untermodul von $S^{-1}M$. A forteriori ist jede Lokalisierung eines noetherschen Krings wieder noethersch.

Lemma* 4.3.32 (Bild des Primspektrums unter Kringhomomorphismen). *Gegeben eine Kringerweiterung $A \subset B$ ist ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ der Schnitt mit A eines Primideals $\mathfrak{q} \subset B$ genau dann, wenn gilt $\mathfrak{p} = A \cap \langle B\mathfrak{p}\rangle$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ der Schnitt mit A irgendeines Ideals von B, so gilt offensichtlich $\mathfrak{p} = A \cap \langle B\mathfrak{p}\rangle$. Hierzu brauchen wir noch nicht einmal $\mathfrak{p}$ prim vorauszusetzen. Gilt umgekehrt diese Identität und ist $\mathfrak{p}$ prim und setzen wir $S = A \backslash \mathfrak{p}$ und betrachten wir die Ringerweiterung $S^{-1}A \subset S^{-1}B$, so folgt

$$S^{-1}\mathfrak{p} = (S^{-1}A) \cap (S^{-1}\langle B\mathfrak{p}\rangle)$$

Das folgt formal etwa aus 4.3.42 mit der Interpretation der Lokalisierung als Lokalisierung von A-Moduln. Nun ist $S^{-1}\langle B\mathfrak{p}\rangle$ ein echtes Ideal in $S^{-1}B$, da es $S^{-1}A$ in einem echten Ideal trifft, und läßt sich damit vergrößern zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$. Das Urbild in A dieses maximalen Ideals trifft nicht S und umfaßt $\mathfrak{p}$, ist folglich $\mathfrak{p}$ selbst. Das Urbild in B dieses maximalen Ideals ist mithin unser gesuchtes Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. □

Ergänzung 4.3.33. Ein Modul M über einem Ring A heißt **endlich präsentierbar** oder kürzer **endlich präsentiert**, wenn es eine exakte Sequenz $A^n \to A^m \twoheadrightarrow M$ gibt mit $n, m \in \mathbb{N}$. Über einem linksnoetherschen Ring ist ein Modul genau dann endlich präsentiert, wenn er endlich erzeugt ist.

4.3.34 (**Lokalisierung und Homomorphismenräume**). Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und eine R-Ringalgebra A und A-Moduln M, N mit M endlich präsentiert ist mit der Lokalisierung von Ringalgbren und ihren Moduln nach 4.3.18 die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

In der Tat können wir dann eine im Sinne von 1.4.14 rechtsexakte Sequenz $A^n \to A^m \twoheadrightarrow M$ finden, die hinwiederum ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M, N) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \arrow[d, hook] \\
S^{-1} \operatorname{Hom}_A(A^m, N) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A^m, S^{-1}N) \arrow[d] \\
S^{-1} \operatorname{Hom}_A(A^n, N) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A^n, S^{-1}N)
\end{tikzcd}$$

liefert. Die beiden unteren Horizontalen darin sind Isomorphismen, da beide Räume jeweils mit $S^{-1}N^m$ und $S^{-1}N^n$ identifiziert werden können, und damit ist auch die obere Horizontale ein Isomorphismus, wie man leicht direkt sieht und formal aus dem Fünferlemma folgern mag.

Beispiel 4.3.35. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und R-Moduln M, N ist die offensichtliche Abbildung

$$S^{-1} \operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

im allgemeinen kein Isomorphismus. Im Fall der $\mathbb{Z}$-Moduln $M = N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \backslash 0$ etwa haben wir $\operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathbb{Z}}(S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = 0$ und sogar $S^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, aber die Identität $\mathrm{id} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ hat nach 4.3.9 ein von Null verschiedenes Bild in $S^{-1} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Geometrischer kann man auch $R = k[X]$ betrachten für einen Körper k und $M = N = k[X, X^{-1}]/k[X]$ und $S = \{X\}$ und wieder verschwinden die lokalisierten Moduln, nicht aber der lokalisierte Homomorphismenraum.

4.3.36 (**Projektivitätskriterium**). Ein Modul über einem Kring ist projektiv und endlich erzeugt genau dann, wenn er endlich präsentierbar und **lokal frei** ist, als da heißt, wenn seine Lokalisierung an jedem maximalen Ideal frei ist. Die schwierige Richtung beim Beweis geht so: Gegeben $K \hookrightarrow F \twoheadrightarrow M$ exakt mit F frei von endlichem Rang und K endlich erzeugt und M lokal frei wollen wir $\operatorname{Hom}(M, F) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(M, M)$ zeigen. Da wir aber Surjektivität nach 4.3.26 lokal prüfen dürfen, folgt das aus 4.3.34.

Übungen

Übung 4.3.37. Seien R ein Kring und M ein R-Modul und $a, b \in R$. Operiert ab als Isomorphismus auf M, so auch a und b. Ist $S \subset R$ eine Teilmenge und T die Menge der Faktoren von Elementen von S, so ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $S^{-1}M \xrightarrow{\sim} T^{-1}M$.

Übung 4.3.38 (**Wiederholtes Lokalisieren**). Seien R ein Kring und $S, T \subset R$ Teilmengen und M ein R-Modul. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$T^{-1}(S^{-1}M) \xrightarrow{\sim} (S \cup T)^{-1}M$$

Übung 4.3.39 (**Lokalisierung bei kleinem Träger**). Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und ein R-Modul M betrachten wir die Teilmenge

$$M_{(S)} := \{m \in M \mid \operatorname{Ann}(m) + Rf = R \ \ \forall f \in S\}$$

Man zeige, daß sie ein Untermodul $M_{(S)} \subset M$ ist und sich nicht ändert, wenn wir S durch sein multiplikatives Erzeugnis $|S\rangle$ ersetzen. Man zeige, daß die Komposition $M_{(S)} \hookrightarrow M \to S^{-1}M$ Isomorphismen

$$M_{(S)} \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M_{(S)}) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}M)_{(S)}$$

induziert, wobei wir ganz rechts auch nur die R-Modulstruktur verwenden. Gegeben R-Moduln M, N mit $M = M_{(S)}$ liefert, da ein Homomorphismus $M \to N$ stets $M_{(S)}$ nach $N_{(S)}$ abbilden muß, folglich die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

Übung 4.3.40 (**Lokalität der Flachheit**). Ein Modul M über einem Kring R ist flach genau dann, wenn für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ der lokalisierte Modul $M_\mathfrak{m}$ flach ist über R oder gleichbedeutend über $R_\mathfrak{m}$. Hinweis: Lokal-global-Prinzip 4.3.26.

Übung 4.3.41 (**Lokal-global-Prinzip, Variante**). Gegeben ein Kring R, ein R-Modul N und eine Teilmenge $E \subset R$, die als Ideal ganz R erzeugt, zeige man die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to N \to \prod_{f \in E} N_f \to \prod_{(f,g) \in E \times E} N_{fg}$$

mit dem Produkt der Differenzen der natürlichen Abbildungen $N_f \to N_{fg}$ und $N_g \to N_{fg}$ in die Lokalisierung nach dem Produkt fg an letzter Stelle. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall zurück, daß E endlich ist, und erinnere das lokal-global-Prinzip und seine Varianten 4.3.26, insbesondere die letzte.

Übung 4.3.42. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Gegeben ein R-Modul M mit Untermoduln $K, L \subset M$ zeige man die Identität $S^{-1}(K \cap L) = (S^{-1}K) \cap (S^{-1}L)$.

Übung 4.3.43. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Gegeben Ideale $I, J \subset R$ zeige man die Identität $S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J)$ von Idealen von $S^{-1}R$.

Ergänzende Übung 4.3.44. Gegeben ein endlich präsentierter Modul M über einem von Null verschiedenen Kring R gibt es stets ein von Null verschiedenes Element $f \in R \backslash 0$ mit M_f frei von endlichem Rang über R_f. Hinweis: Man versuche, eine präsentierende Matrix in Smith-Normalform zu bringen.

Übung 4.3.45. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge und M ein R-Modul. Ist S endlich und f das Produkt aller Elemente von S ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $M_f \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$.

Übung 4.3.46 (**Lokalisierung von Invariantenringen**). Seien A ein Kring und $G \subset \mathrm{Kring}^\times(A)$ eine endliche Menge von Ringautomorphismen von A und $S \subset A$ eine G-stabile multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Man zeige, daß die Einbettung $A^G \hookrightarrow A$ einen Isomorphismus

$$(S^G)^{-1}(A^G) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}A)^G$$

zwischen der Lokalisierung des Invariantenrings und dem Invariantenring der Lokalisierung induziert. Hinweis: Die Exakteit der Lokalisierung 4.3.11 mag hier helfen.

Übung 4.3.47 (**Lokalisierung von Invariantenringen, Variante**). Seien A ein noetherscher Kring und $G \subset \mathrm{Kring}^\times(A)$ eine Menge von Ringautomorphismen von A und $s \in A^G$ ein Element des Invariantenrings. Man zeige, daß die Einbettung $A^G \hookrightarrow A$ einen Isomorphismus

$$s^{-1}(A^G) \xrightarrow{\sim} (s^{-1}A)^G$$

zwischen der Lokalisierung des Invariantenrings und dem Invariantenring der Lokalisierung induziert. Hinweis: Die Exakteit der Lokalisierung 4.3.11 mag hier helfen. Weiter beachte man, daß die Kette der Annullatoren der Potenzen s^n von s stagnieren muß.

Übung 4.3.48. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Genau dann ist $S^{-1}R$ der Nullring, wenn das Monoid $|S\rangle$ die Null von R enthält. Genau dann ist a/s eine Einheit in $S^{-1}R$, wenn es $b \in R$ und $t \in |S\rangle$ gibt mit $ab = t$.

Übung 4.3.49. Gegeben ein Integritätsbereich A zeige man in $\mathrm{Quot} A$ die Identität

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} A_{\mathfrak{m}}$$

Hinweis: Gegeben $f \in \mathrm{Quot} A \backslash A$ kann das Ideal $I = \{g \in A \mid gf \in A\}$ nie ganz A sein.

Übung 4.3.50. Ein Element eines Moduls heißt ein **Torsionselement**, wenn es von einem von Null verschiedenen Element des operierenden Rings annulliert wird. Ein Torsionselement einer abelschen Gruppe nach [LA2] 6.4.1 ist also ein Torsionselement im hier erklärten Sinne des zugehörigen $\mathbb{Z}$-Moduls. Man zeige, daß gegeben ein Modul M über einem Integritätskring A der Kern der natürlichen Abbildung $M \to M \otimes_A \mathrm{Quot}\, A$ genau aus allen Torsionselementen von M besteht.

Übung 4.3.51. Ist speziell f die Variable $f = t$ in einem Polynomring $R[t]$ über einem Kring R, so schreibt man kurz $R[t][t^{-1}] = R[t, t^{-1}]$ und nennt diesen Ring den **Ring der Laurentpolynome über** R. Man zeige, daß sich jedes Element von $R[t, t^{-1}]$ eindeutig darstellen läßt als eine endliche Linearkombination $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i$ mit Koeffizienten $a_i \in R$, daß also die t^i eine Basis des R-Moduls $R[t, t^{-1}]$ bilden. Man konstruiere des weiteren einen Isomorphismus $R[\![t]\!][t^{-1}] \xrightarrow{\sim} R(\!(t)\!)$ zwischen der Lokalisierung an der Variablen des Rings der formalen Potenzreihen und dem Ring der formalen Laurentreihen aus [LA1] 5.3.46.

Übung 4.3.52 (**Lokalisierung faktorieller Ringe**). Gegeben ein faktorieller Ring R bezeichne

$$\operatorname{irk}(R)$$

die Menge **Irreduziblenklassen**, als da heißt der Bahnen irreduzibler Elemente von R unter der Einheitengruppe $R^\times$. Gegeben ein irreduzibles $r \in R$ bezeichne $[r] \in \operatorname{irk}(R)$ seine Klasse. Man zeige: Lokalisiert man einen faktoriellen Ring R nach einer Teilmenge S, die nicht die Null enthält, so ist auch die Lokalisierung $S^{-1}R$ faktoriell und die Einbettung $R \hookrightarrow S^{-1}R$ induziert eine Bijektion

$$\{[r] \in \operatorname{irk}(R) \mid r \text{ teilt kein } s \in S\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{irk}(S^{-1}R)$$

Zum Beispiel ist also $\mathbb{Z}[d^{-1}]$ für $d \neq 0$ faktoriell und seine Primelemente sind bis auf Einheiten genau die Primzahlen, die d nicht teilen.

Übung 4.3.53 (**Lokalisierung nilpotentfreier Kringe**). Man zeige, daß jede Lokalisierung eines nilpotentfreien Krings wieder nilpotentfrei ist.

Übung 4.3.54 (**Lokalisierung und Radikal**). Man zeige, daß jede Lokalisierung des Radikals eines Ideals mit dem Radikal des lokalisierten Ideals übereinstimmt.

Übung 4.3.55. Gegeben ein Kring A und ein Element $f \in A$ zeige man, daß das Einsetzen von f^{-1} für T einen Ringisomorphismus

$$A[T]/\langle fT - 1\rangle \xrightarrow{\sim} A[f^{-1}]$$

induziert. Insbesondere ist nach 4.3.53 für einen nilpotentfreien Kring A das Ideal $\langle fT-1\rangle$ stets ein Radikalideal. Hinweis: Man konstruiere eine inverse Abbildung mithilfe der universellen Eigenschaft der Lokalisierung.

Übung 4.3.56 (**Lokalisierung endlichdimensionaler Kringalgebren**). Gegeben k ein Körper und R eine endlichdimensionale k-Kringalgebra und $f \in R$ beliebig induziert die kanonische Abbildung in die Lokalisierung einen Isomorphismus $R/\operatorname{Hau}((f\cdot)|R;0) \xrightarrow{\sim} R_f$ zwischen dem Quotient nach dem Hauptraum zum Eigenwert Null der Multiplikation mit f und der Lokalisierung nach f.

Übung 4.3.57 (**Lokalisierung vertauscht mit Restklassenbildung**). Gegeben ein Kring R und ein Ideal $I \subset R$ und eine Teilmenge $S \subset R$ ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$S^{-1}R/S^{-1}I \xrightarrow{\sim} \bar{S}^{-1}(R/I)$$

für $\bar{S} \subset R/I$ das Bild von S unter der Quotientenabbildung. Hinweis: Exaktheit der Lokalisierung und Verträglichkeit mit der Restriktion der Skalare 4.3.13.

Ergänzende Übung 4.3.58 (**Tensorprodukt und Lokalisierung**). Gegeben ein Kring A, eine Teilmenge $S \subset A$ und ein A-Modul M zeige man, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$$

liefert. Hinweis: Man mag die inverse Abbildung explizit angeben, oder auch mithilfe von 2.8.7 die universellen Eigenschaften vergleichen. Ist zusätzlich N ein $S^{-1}A$-Modul, so ist nach 2.6.14 die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} N$.

4.4 Lokalisierung im geometrischen Kontext

4.4.1. Gegeben (X, x) ein bepunkteter topologischer Raum und k ein Kring erklären wir die k-Kringalgebra

$$\operatorname{Ens}(X, k)_x$$

der **Keime k-wertiger Funktionen bei** x als die Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) mit $x \in U \circledcirc X$ und $f : U \to k$ unter der Äquivalenzrelation

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \Leftrightarrow \quad \exists W \circledcirc U \cap U' \text{ mit } x \in W \text{ und } f|_W = f'|_W.$$

Quasi per definitionem induziert für jede offene Teilmenge $V \circledcirc X$ mit $x \in V$ die Restriktion von Funktionen einen Isomorphismus $\operatorname{Ens}(X, k)_x \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(V, k)_x$ zwischen den jeweiligen Räumen von Funktionskeinem.

4.4.2. Ich erinnere daran, daß wir für eine affine Varietät X und eine reguläre Funktion $h \in \mathcal{O}(X)$ in 3.3.6 die Notation $X_h := \{x \in X \mid h(x) \neq 0\}$ für die Nichtnullstellenmenge von h in X eingeführt hatten.

Beispiel 4.4.3 (**Lokalisierung und Funktionskeime**). Seien (X, x) eine bepunktete affine Varietät. Im Ring der Funktionskeime betrachten wir den Teilring

$$\mathcal{O}_{X,x} \subset \operatorname{Ens}(X, k)_x$$

aller **regulären Funktionskeime** alias aller Funktionskeime mit einem Repräsentanten der Gestalt (X_h, f) für $h \in \mathcal{O}(X)$ mit $x \in X_h$ und $f \in \mathcal{O}(X_h)$. Der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ am maximalen Ideal $\mathcal{I}(x)$ herrührende Homomorphismus ist dann sogar ein Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)_{\mathcal{I}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$$

In der Tat ist er per definitionem surjektiv, und liefert ein Bruch f/s die Nullfunktion, so muß f bereits auf einer offenen Umgebung U von x verschwinden, die wir von der Gestalt X_h für $h \in \mathcal{O}(X)$ mit $h(x) \neq 0$ annehmen dürfen. Daraus folgt jedoch $f/s = hf/th = 0$ in unserer Lokalisierung.

4.4.4 (**Reguläre Funktionen auf offenen Teilmengen**). Gegeben eine affine Varietät X und eine offene Teilmenge $U \circledsubset X$ nennen wir eine Funktion $f : U \to k$ **lokal regulär** und demnächst **regulär**, wenn sie an jeder Stelle $x \in U$ einen regulären Funktionskeim alias ein Element von $\mathcal{O}_{X,x}$ repräsentiert. Die Menge aller lokal regulären Funktionen $U \to k$ notieren wir

$$\mathcal{O}_X(U)$$

4.4.5 (**Lokal reguläre Funktionen sind regulär**). Sei X eine affine Varietät. Unsere Erkenntnisse 3.4.13 zum offenen Verkleben regulärer Funktionen zeigen unmittelbar $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}(X)$. Ist andererseits $h \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion und $x \in X_h$ ein Punkt ihrer Nichtnullstellenmenge, so induziert quasi per definitionem die Restriktion einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_h,x}$ auf den regulären Funktionskeimen und wir folgern die erste Gleichung der Gleichungskette

$$\mathcal{O}_X(X_h) = \mathcal{O}_{X_h}(X_h) = \mathcal{O}(X_h)$$

mit der zweiten Gleichung durch Anwenden der Erkenntnis $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}(X)$ auf die affine Varietät X_h. Da wir mithin keine Mehrdeutigkeiten zu befürchten haben, verwenden wir im folgenden auch oft die abkürzende Notation

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U)$$

und nennen unsere lokal regulären Funktionen auf U von nun an einfacher die **regulären Funktionen** auf U.

4.4.6. Gegeben X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ eine Teilmenge und k ein Kring erklären wir die k-Kringalgebra

$$\mathrm{Ens}(X, k)_Y$$

der **Keime k-wertiger Funktionen längs** Y als die Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) bestehend aus einer offenen Teilmenge $U \circledsubset X$ mit $\overline{U \cap Y} = Y$ und einer Abbildung $f : U \to k$ unter der Äquivalenzrelation

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \Leftrightarrow \quad \exists W \circledsubset U \cap U' \text{ mit } \overline{W \cap Y} = Y \text{ und } f|_W = f'|_W.$$

Übung [TM] 1.1.2.21, nach der in jedem topologischen Raum der Schnitt je zweier dichter offener Teilmengen wieder dicht ist, stellt dabei sicher, daß unsere Relation transitiv ist. Ich skizziere kurz ihre Lösung. Sind in der Tat $A, B \circledsubset Y$ offen und dicht und ist $y \in Y$ ein Punkt und U eine offene Umgebung von Y, so gilt $\emptyset \neq A \cap U \circledsubset Y$ und da $A \cap U$ eine Umgebung eines jeden seiner Punkte ist, folgt $B \cap A \cap U \neq \emptyset$.

Beispiel 4.4.7 (**Lokalisierung und Funktionskeime, Variante**). Seien X eine affine Varietät und $Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} X$ abgeschlossen. Im Ring der Funktionskeime längs Y betrachten wir den Teilring

$$\mathcal{O}_{X,Y} \subset \operatorname{Ens}(X,k)_Y$$

aller **regulären Funktionskeime längs** Y alias aller Funktionskeime längs Y mit mindestens einem Repräsentanten aus $\mathcal{O}(X_h)$ für $h \in \mathcal{O}(X)$ mit $\overline{X_h \cap Y} = Y$ oder nach 4.4.5 gleichbedeutend mindestens einem Repräsentanten aus $\mathcal{O}(U)$ für $U \overset{\circ}{\subset} X$ und $\overline{U \cap Y} = Y$. Seien $Y_1, \ldots, Y_r$ die irreduziblen Komponenten von Y und

$$S := \mathcal{O}(X) \backslash (\mathcal{I}(Y_1) \cup \ldots \cup \mathcal{I}(Y_r))$$

Der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ herkommende Homomorphismus ist dann sogar ein Isomorphismus

$$S^{-1}\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,Y}$$

In der Tat ist er per definitionem surjektiv. Liefert andererseits ein Bruch f/s die Nullfunktion, so muß f bereits auf einer offenen Teilmenge $U \overset{\circ}{\subset} X$ verschwinden, die Y dicht trifft, und die wir nach nochmaliger Verkleinerung von der Gestalt X_h für $h \in S$ annehmen dürfen. Daraus folgt aber $f/s = hf/hs = 0$ in unserer Lokalisierung. Ist Y irreduzibel, so erhalten wir speziell einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)_{\mathcal{I}(Y)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,Y}$$

4.4.8. Gegeben eine affine Varietät X vereinbaren wir die Notation

$$\mathcal{M}(X) := \mathcal{O}_{X,X}$$

für den Ring der regulären Funktionskeime längs X und nennen solche Äquivalenzklassen **rationale Funktionen auf** X. Unsere Erkenntnisse 4.4.7 liefern im Fall einer irreduziblen affinen Varietät X insbesondere einen Isomorphismus

$$\operatorname{Quot} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$$

und damit eine Interpretation der Elemente des Quotientenkörpers als rationale Funktionen.

4.4.9 (**Diskussion der Notation**). Der Buchstabe $\mathcal{M}$ soll dabei an den Begriff der „meromorphen“ Funktionen erinnern, einem analogen Konzept aus der Funktionentheorie. Üblich ist stattdessen die Notation $k(X)$ mit k dem Grundkörper, die aber leicht als Notation für den Quotientenkörper eines Polynomrings mißverstanden werden kann.

4.4.10 (**Definitionsbereich einer rationalen Funktion**). Gegeben eine affine Varietät X hat jede rationale Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ offensichtlich einen größten regulären Repräsentanten $(U, f_{\max})$ mit $U \circledcirc X$ offen dicht und $f_{\max} \in \mathcal{O}(U)$ in dem Sinne, daß für jeden weiteren regulären Repräsentanten (U_1, f_1) gilt $U_1 \subset U$ und $f_1 = f_{\max}|_U$. Diese Menge $U \circledcirc X$ notieren wir auch $\mathrm{D}(f)$ und nennen sie den **Definitionsbereich von** f. Statt $f_{\max}$ schreiben wir dann auch kurz f.

Beispiel 4.4.11 (**Nennernullstellen als Definitionslücken**). Sei X eine affine Varietät X mit $\mathcal{O}(X)$ faktoriell. Schreiben wir $f \in \mathcal{M}(X)^\times$ als maximal gekürzten Bruch $f = p/q$ mit $p, q \in \mathcal{O}(X)$ und $p, q \neq 0$, so ist der Definitionsbereich von f gegeben durch

$$\mathrm{D}(f) = X \backslash \mathcal{Z}(q)$$

4.4.12. Gegeben $Z \underset{\mathrm{A}}{\subset} Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} X$ ein noetherscher topologischer Raum mit abgeschlossenen Teilmengen derart, daß Z jede irreduzible Komponente von Y trifft, liefert das Einschränken von Repräsentanten einen Ringhomomorphismus, das **Generisieren**

$$\mathrm{Ens}(X, k)_Z \to \mathrm{Ens}(X, k)_Y$$

Für eine affine Varietät induziert er einen Ringhomomorphismus auf den regulären Funktionskeimen, von dem Sie zur Übung zeigen mögen, daß er stets eine Injektion $\mathcal{O}_{X,Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$ ist. Zum Beispiel liefert das Generisieren für jede bepunktete irreduzible affine Varietät (X, x) eine natürliche Einbettung

$$\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

und in diesem Fall kann der Definitionsbereich von $f \in \mathcal{M}(X)$ auch beschrieben werden als $\mathrm{D}(f) = \{x \in X \mid f \in \mathcal{O}_{X,x}\}$.

Satz 4.4.13 (**Lokalisierung nach einem Element im geometrischen Fall**). *Seien X eine affine Varietät, $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion auf X und X_f die Nichtnullstellenmenge von f. So ist der von der universellen Eigenschaft der Lokalisierung herkommende Homomorphismus ein Isomorphismus*

$$\mathcal{O}(X)_f \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(X_f)$$

zwischen der Lokalisierung des Rings der regulären Funktionen auf X an f und dem Ring der regulären Funktionen auf X_f.

Beweis. Die Injektivität ist schnell gezeigt: Geht g/f^n nach Null, so verschwindet g auf X_f, folglich ist gf die Nullfunktion auf ganz X und wir folgern $g/f^n = gf/f^{n+1} = 0$ in $\mathcal{O}(X)_f$. Die Surjektivität ist eh klar. $\square$

Proposition* 4.4.14 (Lokale Surjektivität von Komorphismen). *Sei ein Morphismus von affinen Varietäten $\varphi : X \to Y$ gegeben und sei $x \in X$ ein Punkt mit Bild $\varphi(x) = y$. Induziert unser Morphismus eine Surjektion $\mathcal{O}_{Y,y} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ auf den jeweiligen lokalen Ringen, so gibt es reguläre Funktionen $u \in \mathcal{O}(X)$ und $v \in \mathcal{O}(Y)$ mit $u(x) \neq 0$ und $v(y) \neq 0$ und $\varphi(X_u) \subset Y_v$ und der Eigenschaft, daß φ eine Surjektion $\mathcal{O}(Y_v) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X_u)$ induziert.*

Beweis. Seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ gegeben mit $\mathcal{O}(X) = k[f_1, \ldots, f_n]$. Bezeiche $\bar{f}_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ die Bilder der f_i. Es gibt nach Annahme $\bar{h}_i \in \mathcal{O}_{Y,y}$ mit $\bar{h}_i \mapsto \bar{f}_i$. Dann finden wir $s \in \mathcal{O}(Y)$ mit $s(y) \neq 0$ derart, daß alle $\bar{h}_i$ von geeigneten $h_i \in \mathcal{O}(Y_s)$ herkommen. Dann gibt es $t \in \mathcal{O}(X)$ mit $t(x) \neq 0$ und $\varphi(X_t) \subset Y_s$ derart, daß die $h_i \circ \varphi$ auf X_t mit den Restriktionen der f_i übereinstimmen. Nun gibt es $P \in k[T_1, \ldots, T_n]$ mit $t = P(f_1, \ldots, f_n)$ in $\mathcal{O}(X)$. In $\mathcal{O}(X_t)$ folgt $t = r \circ \varphi$ für $r = P(h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{O}(Y_s)$. Mithin induziert die Restriktion eine Surjektion $\mathcal{O}(Y_{rs}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X_t)$. □

Übungen

Übung 4.4.15. Gegeben ein Morphismus $X \to Y$ von affinen Varietäten und ein Punkt $x \in X$ mit $x \mapsto y$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, der mit dem Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ und den üblichen Abbildungen in die jeweilige Lokalisierung ein kommutatives Diagramm bildet.

4.5 Lokalisierung und Primideale

4.5.1. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ nennen wir sein Urbild $\operatorname{lok}^{-1}(\mathfrak{b}) \subset R$ das **Zählerideal** von $\mathfrak{b}$. Dies Zählerideal ist dann ein Ideal von R.

Proposition 4.5.2 (Primideale in Lokalisierungen). *Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $S \subset R$ liefert der Übergang zum Zählerideal eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(S^{-1}R) & \xrightarrow{\sim} & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \operatorname{lok}^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}$$

zwischen der Menge der Primideale der Lokalisierung und der Menge derjenigen Primideale des ursprünglichen Rings, die die Teilmenge S der zu invertierenden Elemente nicht treffen. Die Umkehrabbildung ist die Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto S^{-1}\mathfrak{q}$.

Beispiel 4.5.3. Ist $R = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X und besteht S aus einer einzigen Funktion f, so besagt diese Proposition nach 4.2.8 anschaulich, daß das Herunterschneiden eine Bijektion liefert zwischen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X_f und abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X, die nicht in $\mathcal{Z}(f)$ enthalten sind.

Beweis. Da alle Elemente aus S bei der Lokalisierung Einheiten werden, landet das Zurückholen $\operatorname{Spec}(S^{-1}R) \to \operatorname{Spec} R$ in der Menge der Primideale von R, die S nicht treffen. Unsere Abbildung ist also sinnvoll definiert. Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ gilt wie bereits erwähnt $\mathfrak{b} = S^{-1}(\operatorname{lok}^{-1}(\mathfrak{b}))$. Wir müssen nur noch zeigen, daß für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset R$, das S nicht trifft, seine Lokalisierung $S^{-1}\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ ein Primideal ist mit Zählerideal $\operatorname{lok}^{-1}(S^{-1}\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$. Um zu sehen, daß $S^{-1}\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ ein Primideal ist, gehen wir aus von $(a/s)(b/t) = (c/r)$ mit $c \in \mathfrak{q}$. Das impliziert die Existenz von $u \in |S\rangle$ mit $urab = ustc$. Nun gilt sicher $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{q} \cap |S\rangle = \emptyset$, folglich impliziert $urab \in \mathfrak{q}$ bereits $a \in \mathfrak{q}$ oder $b \in \mathfrak{q}$ und $S^{-1}\mathfrak{q}$ ist in der Tat ein Primideal. Um schließlich einzusehen, daß $\mathfrak{q}$ das Zählerideal von $S^{-1}\mathfrak{q}$ ist, beachten wir, daß aus $c/s = a/1$ mit $c \in \mathfrak{q}$ folgt $tc = tsa$ für ein $t \in |S\rangle$ und wegen $ts \notin \mathfrak{q}$ folgt $a \in \mathfrak{q}$. □

4.5.4 (**Primideale in Quotientenringen**). Sei R ein Kring und $I \subset R$ eine Teilmenge und $\operatorname{quot} : R \twoheadrightarrow R/\langle I\rangle$ die Abbildung auf den Quotienten. So liefert quot^{-1} eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(R/\langle I\rangle) & \xrightarrow{\sim} & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supset I\} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \operatorname{quot}^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}$$

zwischen der Menge der Primideale des Restklassenrings und der Menge derjenigen Primideale des ursprünglichen Rings, die die Teilmenge der herausgeteilten Elemente umfassen. Die Inverse dieser Bijektion ist die Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto \operatorname{quot}(\mathfrak{q})$. In der Tat induzieren diese Abbildungen sogar Bijektionen zwischen den entsprechenden Mengen beliebiger Ideale und wegen $(R/\langle I\rangle)/\mathfrak{p} \cong R/\operatorname{quot}^{-1}(\mathfrak{p})$ entsprechen sich darunter Ideale mit einem Integritätsbereich als Quotientenring alias Primideale.

Definition 4.5.5. Die Menge aller nilpotenten Elemente eines Krings alias das Radikal des Nullideals heißt das **Nilradikal** $\sqrt{0}$ unseres Krings.

Korollar 4.5.6 (Schnitt aller Primideale). *Der Schnitt aller Primideale eines Krings ist sein Nilradikal. Der Schnitt aller Primideale eines Krings, die ein gegebenes Ideal umfassen, ist das Radikal des besagten Ideals.*

4.5.7. Der Beweis dieser Aussagen beruht im Fall nicht noetherscher Kringe auf dem Zorn'schen Lemma.

Beweis. Sicher liegt jedes nilpotente Element in jedem Primideal. Ist umgekehrt R unser Ring und $f \in R$ nicht nilpotent, so ist nach 4.3.48 die Lokalisierung $R[f^{-1}]$ nicht der Nullring und besitzt folglich mindestens ein Primideal, ja sogar mindestens ein maximales Ideal. Das Urbild dieses Ideals in R ist dann das gesuchte Primideal, das f nicht enthält. Ist $I \subset R$ ein beliebiges Ideal, so wende man die bereits bewiesene Aussage auf den Quotientenring R/I an und beachte 4.5.4. □

4.5.8. Anders als bei „maximalen Idealen“, worunter man ja stets „maximale Elemente in der Menge aller vom ganzen Ring verschiedenen Ideal“ versteht, versteht man unter einem **minimalen Primideal** schlicht ein Primideal, das eben minimal ist in der durch Inklusion teilgeordneten Menge aller Primideale. Ein kommutativer Integritätsbereich hat insbesondere stets genau ein minimales Primideal, nämlich das Nullideal.

Beispiel 4.5.9. Gegeben eine affine Varietät X sind die minimalen Primideale von $\mathcal{O}(X)$ gerade die Verschwindungsideale der irreduziblen Komponenten von X.

4.5.10 (**Existenz minimaler Primideale**). Jedes Primideal eines Krings umfaßt ein minimales Primideal. In der Tat ist ein Schnitt einer Kette von Primidealen offensichtlich auch selbst prim, denn läge ein Produkt ab in allen geschnittenen Primidealen und läge a nicht in jedem von ihnen, so müßte b in jedem von ihnen liegen. Unsere Behauptung folgt so aus dem Zorn'schen Lemma. Mit 4.5.6 folgt weiter, daß auch der Schnitt aller minimalen Primideale eines Krings stets das Nilradikal sein muß.

Korollar 4.5.11 (Minimale Primideale und nichtkürzbare Elemente). *1. In einem beliebigen Kring besteht jedes minimale Primideal aus nichtkürzbaren Elementen;*

2. In einem nilpotentfreien Kring ist die Vereinigung der minimalen Primideale die Menge der nichtkürzbaren Elemente.

4.5.12. Wir diskutieren kurz den geometrischen Fall. Ist X eine affine Varietät, so gehört offensichtlich eine reguläre Funktion zu einem minimalen Primideal von $\mathcal{O}(X)$ genau dann, wenn sie auf einer irreduziblen Komponente von X identisch verschwindet, und genau dann ist sie andererseits auch nicht kürzbar.

Beweis. Lokalisieren wir unseren Kring R an unserem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ zu $R_\mathfrak{p}$, so erhalten wir nach 4.5.4 einen Kring mit genau einem Primideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Gegeben $f \in R$ kürzbar mit $f \in \mathfrak{p}$ wäre sein Bild $(f/1) \in R_\mathfrak{p}$ nach 4.3.11 auch kürzbar mit $(f/1) \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Aus $R_\mathfrak{p} \neq 0$ folgte $R_\mathfrak{p}[(f/1)^{-1}] \neq 0$. Dann aber gäbe es aber in $R_\mathfrak{p}[(f/1)^{-1}]$ ein Primideal und in $R_\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primideal im Widerspruch zu unseren Annahmen. Das zeigt Teil 1. Umgekehrt ist nach 4.5.10 der Schnitt aller minimalen Primideale das Nilradikal. Ist unser Kring R nilpotentfrei, so liefert die Diagonale mithin eine Einbettung von R in ein Produkt von Integritätsbereichen

$$R \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \text{ minimal}} R/\mathfrak{p}$$

Jedes nichtkürzbare Element von R muß dabei auf ein nichtkürzbares Element des Produkts abgebildet werden und folglich bereits in einem der minimalen Primideale liegen. $\square$

4.5.13. Gegeben ein Kring R betrachten wir die Teilmenge von $R \times \operatorname{Spec} R$ aller Paare $(r, \mathfrak{p})$ mit $r \in \mathfrak{p}$. Das ist eine Inzidenzstruktur im Sinne von 1.1.12 und liefert so Konstruktionen mit analogen Eigenschaften zu unseren Konstruktionen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ aus 1.1.15, die wir hier $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ notieren und im folgenden ausführlicher diskutieren.

Definition 4.5.14. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $I \subset R$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(I)$ die Menge aller Primideale von R, die I umfassen, in Formeln

$$\mathcal{A}(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supset I\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid r \in \mathfrak{p}\ \forall r \in I\}$$

Definition 4.5.15. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(X)$ den Schnitt aller Primideale aus X, in Formeln

$$\mathcal{S}(X) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} = \{r \in R \mid r \in \mathfrak{p}\ \forall \mathfrak{p} \in X\}$$

4.5.16. Diese Konstruktionen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ erfüllen ähnliche Formeln wie die analogen Konstruktionen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{I}$ aus 1.1.15 und 1.1.11, was nun genauer ausgeführt werden soll. Sei R ein beliebiger Kring. Offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{J}$ von Teilmengen von R die Identität $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{A}(J) = \mathcal{A}\left(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J\right)$ und insbesondere auch

$$I \subset J \ \Rightarrow\ \mathcal{A}(I) \supset \mathcal{A}(J)$$

Ebenso offensichtlich gilt für ein beliebiges System $\mathcal{X}$ von Teilmengen des $\operatorname{Spec} R$ die Identität $\mathcal{S}\left(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(X)$ und insbesondere auch

$$Y \subset X \ \Rightarrow\ \mathcal{S}(Y) \supset \mathcal{S}(X)$$

Des weiteren gilt sicher $J \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}(J))$ für jede Teilmenge $J \subset R$ und $X \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$. Es folgt $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(\mathcal{A}(\mathcal{S}(X)))$ für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$, indem wir einerseits $\mathcal{S}$ auf $X \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ anwenden und andererseits $J \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}(J))$ auf $J = \mathcal{S}(X)$. Ebenso folgt für jede Teilmenge $J \subset R$ die Identität $\mathcal{A}(J) = \mathcal{A}(\mathcal{S}(\mathcal{A}(J)))$.

4.5.17. Man zeigt ohne Schwierigkeiten, daß die Mengen $\mathcal{A}(I)$ für $I \subset R$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem Spektrum von R bilden. Sie heißt die **Zariskitopologie auf** $\operatorname{Spec} R$. Insbesondere gilt für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ die Identität $X = \mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$, die offensichtlich auch umgekehrt abgeschlossene Teilmengen charakterisiert.

4.5.18 (**Abgeschlossene Mengen und Radikalideale, Variante**). Für jede Teilmenge I eines Krings R ist nach 4.5.6 unser $\mathcal{S}(\mathcal{A}(I))$ das Radikal des von I erzeugten Ideals, in Formeln $\mathcal{S}(\mathcal{A}(I)) = \sqrt{\langle I \rangle}$. Umgekehrt ist nach den Definitionen für jede Teilmenge $X \subset \operatorname{Spec} R$ unser $\mathcal{A}(\mathcal{S}(X))$ der Abschluß von X in der Zariskitopologie, in Formeln $\mathcal{A}(\mathcal{S}(X)) = \bar{X}$. Insbesondere liefern $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ ähnlich wie in 1.7.16 zueinander inverse Bijektionen

$$\mathcal{A} : \left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale} \\ I \subset R \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} \operatorname{Spec} R \end{array} \right\}$$

4.5.19. Gegeben ein Kring R und eine Teilmenge $I \subset R$ liefert das Bilden des Urbilds unter der kanonischen Projektion auf den Restklassenring nach 4.5.4 eine Bijektion

$$\operatorname{Spec}(R/\langle I \rangle) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{A}(I)$$

zwischen der Menge aller Primideale des Quotienten $R/\langle I \rangle$ von R nach dem von I erzeugten Ideal und der Menge aller Primideale von R, die I umfassen.

4.5.20. Ist $R = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X, so hatten wir für $I \subset \mathcal{O}(X)$ in 3.4.3 die Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \subset X$ erklärt. Unter der Komposition

$$X \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \subset \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$$

ist nun unser $\mathcal{Z}(I)$ genau das Urbild in X von $\mathcal{A}(I)$ und die Zariskitopologie auf X wird induziert von unserer Zariskitopologie auf $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$.

Proposition 4.5.21 (Primideale und irreduzible Mengen, Variante). *Die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen des Spektrums eines Krings entsprechen seinen Primidealen unter der Abbildung, die jedem Primideal die Menge aller es umfassenden Primideale zuordnet. In Formeln ausgedrückt liefert also für jeden Kring R die Abbildung $\mathfrak{p} \mapsto \mathcal{A}(\mathfrak{p})$ eine Bijektion*

$$\operatorname{Spec} R \stackrel{\sim}{\to} \{ Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} \operatorname{Spec} R \mid Y \textit{ irreduzibel} \}$$

4.5.22. Man kann $\mathcal{A}(\mathfrak{p})$ auch als den Abschluß des Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Zariskitopologie interpretieren, so daß also unsere Abbildung jedem Punkt seinen Abschluß zuordnet. Das Spektrum eines Krings ist also ein topologischer Raum X mit der Eigenschaft, daß $x \mapsto \bar{x}$ eine Bijektion

$$X \stackrel{\sim}{\to} \{ Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} X \mid Y \text{ irreduzibel} \}$$

induziert. Gegeben umgekehrt eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} \operatorname{Spec} R$ heißt der Punkt $x \in Y$ mit $\bar{x} = Y$ der **generische Punkt von** Y.

Beweis. Daß der Abschluß eines Punktes irreduzibel sein muß, gilt sogar in einem beliebigen topologischen Raum. Unsere Abbildungsvorschrift ist mithin sinnvoll. Gegeben $Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} \operatorname{Spec} R$ gibt es per definitionem eine Teilmenge $I \subset R$ mit $Y = \mathcal{A}(I)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, I sei ein Radikalideal, denn alle Primideale, die I umfassen, umfassen auch das Radikal des von I erzeugten Ideals. Ich zeige nun, daß für Y irreduzibel unser I ein Primideal sein muß. Ist in der Tat I kein Primideal, so gibt es $a, b \notin I$ mit $ab \in I$. Nach 4.5.6 gibt es ein Primideal über I, das a nicht enthält, und ebenso ein Primideal über I, das b nicht enthält. Folglich haben wir $\mathcal{A}(a) \not\supset \mathcal{A}(I)$ und $\mathcal{A}(b) \not\supset \mathcal{A}(I)$. Jedes Primideal, das ab enthält, muß jedoch a oder b enthalten, folglich gilt $\mathcal{A}(a) \cup \mathcal{A}(b) \supset \mathcal{A}(I)$ und $\mathcal{A}(I)$ war nicht irreduzibel. Ist also Y irreduzibel und I das Radikalideal mit $Y = \mathcal{A}(I)$, so ist I prim und wir schreiben hinfort $I = \mathfrak{p}$. Bezeichnen wir mit x den durch $\mathfrak{p}$ gegebenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$, so gilt $\bar{x} = \mathcal{A}(\mathfrak{p}) = Y$. Das zeigt die Surjektivität unserer Abbildung. Zur Injektivität bemerken wir, daß $y \in \bar{x}$ gleichbedeutend ist zur Inklusion $\mathfrak{p}_y \supset \mathfrak{p}_x$ der zugehörigen Primideale, wir können also $\mathfrak{p}$ aus Y zurückgewinnen als den Schnitt aller Primideale $\mathfrak{p}_y$ mit $y \in Y$. □

4.5.23. Ich will kurz auf die Beziehung dieses Satzes zu seinem geometrischen Analogon 4.2.8 eingehen. Ist ein Kring R ringendlich über einem Körper, so können wir obige Bijektionen ergänzen zu einer Sequenz von Bijektionen

$$\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\sim} \{Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} \operatorname{Spec} R \mid Y \text{ irreduzibel}\} \xrightarrow{\sim} \{Z \overset{\mathrm{A}}{\subset} \operatorname{Max} R \mid Z \text{ irreduzibel}\}$$

wo $\operatorname{Max} R$ die von $\operatorname{Spec} R$ induzierte Topologie erhält und die rechte Abbildung schlicht das Schneiden mit $\operatorname{Max} R$ meint. Ist sogar k ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine affine k-Varietät und beachten wir unsere Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$, so liefert diese Verknüpfung die Inverse der in 4.2.8 diskutierten Bijektion

$$\{Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} X \mid Y \text{ irreduzibel}\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$$

Korollar 4.5.24 (Minimale Primideale in noetherschen Kringen). *In einem noetherschen Kring gibt es nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Gegeben ein noetherscher Kring ist sein Spektrum ein noetherscher topologischer Raum und ist nach 4.1.12 folglich die Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Komponenten. Die nach 4.5.22 zu diesen Komponenten gehörenden Primideale sind dann die fraglichen minimalen Primideale. □

Korollar 4.5.25 (Endliche Produkte von Integritätsbereichen). *Genau dann ist ein Kring ein endliches Produkt von Integritätsbereichen, wenn seine Lokalisierung nach jedem maximalen Ideal ein Integritätsbereich ist und er nur endlich viele minimale Primideale hat.*

Beweis. Daß ein endliches Produkt von Integritätsbereichen diese Eigenschaften hat, ist klar. Für die andere Implikation bemerken wir zunächst, daß nach dem lokal-global-Prinzip 4.3.26 unser Kring keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente haben kann. Der Schnitt der minimalen Primideale ist also Null nach 4.5.10. Damit reicht es nach dem chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4 zu zeigen, daß für je zwei minimale Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ gilt $1 \in \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$. Andernfalls gäbe es aber ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ und die Lokalisierung unseres Krings an $\mathfrak{m}$ hätte zwei verschiedene minimale Primideale und könnte kein Integritätsbereich sein. □

Übungen

Übung 4.5.26. Seien X eine affine Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Man zeige, daß die lokale Krulldimension von X bei x übereinstimmt mit der Krulldimension des lokalen Ringes, in Formeln $\operatorname{kdim}_x X = \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x}$.

Übung 4.5.27. Gegeben ein Kring R bilden die Teilmengen $\mathrm{U}(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ für $f \in R$ eine Basis der Zariskitopologie auf $\operatorname{Spec} R$. Wir nennen sie die **Standardbasis**.

Ergänzende Übung 4.5.28. Für jeden Kringhomomorphismus $R \to S$ ist die induzierte Abbildung $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ stetig für die Zariskitopologie. Ist unser Kringhomomorphismus injektiv, so hat die induzierte Abbildung dichtes Bild.

Übung 4.5.29. Hinweis: 4.5.24 und 4.5.6. Gegeben ein noetherscher Kring mit einem Ideal I besitzt die Menge aller Primideale von R über I endlich viele minimale Elemente $P_1, \ldots, P_n$ und deren Schnitt ist das Radikal von besagtem Ideal, in Formeln

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_n$$

Übung 4.5.30. Sind in einem Kring endlich viele Primideale gegeben, deren Schnitt aus nilpotenten Elementen besteht, so umfaßt jedes Primideale unseres Krings eines dieser endlich vielen Primideale.

Übung 4.5.31. Gegeben ein Modul M über einem Kring R und ein Element $m \in M$ setzen wir $\operatorname{supp}(m) := \mathcal{A}(\operatorname{Ann}_R(m))$ und nennen diese abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ den **Träger von** m. Die Vereinigung

$$\operatorname{supp}(M) := \bigcup_{m \in M} \operatorname{supp}(m)$$

heißt der **Träger von** M und braucht nicht abgeschlossen zu sein. Man zeige, daß der $\mathbb{C}[X]$-Modul $M := \mathbb{C}[X, X^{-1}]/\mathbb{C}[X]$ einpunktigen Träger hat, bestehend aus dem einzigen Primideal $\langle X \rangle$, wohingegen sein Annullator das Nullideal ist. Ist aber M endlich erzeugt, sagen wir von $m_1, \ldots, m_r$, so gilt

$$\operatorname{supp}(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{supp}(m_i) = \mathcal{A}(\operatorname{Ann} M)$$

Übung 4.5.32 (**Träger und Lokalisierung**). Gegeben ein Modul M über einem Kring R und ein Element $m \in M$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ zeige man, daß das Bild von m in der Lokalisierung $M_\mathfrak{p}$ genau dann verschwindet, wenn gilt $\mathfrak{p} \not\supset \operatorname{Ann}_R(m)$ alias $\mathfrak{p} \notin \operatorname{supp}(m)$ in der Notation aus 4.5.31.

4.6 Lemma von Nakayama

4.6.1. Gegeben ein Kring R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ und ein R-Modul M vereinbaren wir die abkürzende Bezeichnung $\mathfrak{a}M$ statt $\langle \mathfrak{a}M \rangle$ für den in M von den Elementen am mit $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$ erzeugten Untermodul.

Proposition 4.6.2 (**Lemma von Nakayama**). *Seien R ein Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und Q ein endlich erzeugter R-Modul. Gilt $Q = \mathfrak{a}Q$, so gibt es $f \in 1 + \mathfrak{a}$ mit $fQ = 0$.*

Vorschau 4.6.3. Eine Variante für nicht notwendig kommutative Ringe zeigen wir in [NAS]. Sie ist schwächer und ihr Beweis benötigt das Zorn'sche Lemma. Für beliebige nicht notwendig kommutative Ringe R erklärt man das **Jacobson-Radikal** $\mathrm{J}(R)$ als den Schnitt aller maximalen Linksideale. In dieser Situation besagt das **nichtkommutative Nakayamalemma** [NAS] 3.6.3, daß für jeden endlich erzeugten R-Modul M gilt

$$\mathrm{J}(R)M = M \ \Rightarrow \ M = 0$$

Es folgt, daß gegeben ein endlich erzeugter R-Modul M und ein endliches Erzeugendensystem von $M/\,\mathrm{J}(R)M$ eine beliebige Wahl von Urbildern bereits ein Erzeugendensystem vom M ist. Wenn wir betonen wollen, daß wir obige Variante 4.6.2 meinen, reden wir vom **kommutativen Nakayamalemma**, das im übrigen auf Matsumura zurückzugehen scheint.

4.6.4. Die Bedingung, Q sei endlich erzeugt, ist an dieser Stelle wesentlich. Gegeben ein Körper k ist die Folgerung zum Beispiel offensichtlich falsch für den $k[T]$-Modul $Q := k(T)$ und das Ideal $\mathfrak{a} := \langle T \rangle$ in $R := k[T]$.

4.6.5 (**Anschauung zum Lemma von Nakayama**). In geometrischer Sprache besagt das kommutative Nakayamalemma, daß $\mathfrak{a}M = M$ für einen endlich erzeugten R-Modul M gleichbedeutend ist zu $\mathcal{A}(\operatorname{Ann} M) \cap \mathcal{A}(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

Beweis. Wir müssen aus $Q = \mathfrak{a}Q$ folgern $fQ = 0$ für ein $f \in 1 + \mathfrak{a}$ oder gleichbedeutend $S^{-1}Q = 0$ für die Lokalisierung von Q nach der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S := 1 + \mathfrak{a}$. Aber seien sonst $q_1, \ldots, q_t \in Q$ gewählt mit kleinstmöglichem $t \geq 1$ derart, daß ihre Bilder $S^{-1}Q$ als Modul über $S^{-1}R$ erzeugen. Natürlich haben wir auch $S^{-1}Q = S^{-1}\mathfrak{a}Q$ und können also in $S^{-1}Q$ schreiben $q_1 = b_1 q_1 + \ldots + b_t q_t$ mit $b_i \in S^{-1}\mathfrak{a}$. Dann können wir auch in Q

schreiben $sq_1 = a_1q_1 + \ldots + a_tq_t$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $s \in S$ und folgern $(s - a_1)q_1 = a_2q_2 + \ldots + a_tq_t$. Wegen $(s - a_1) \in S$ zeigt diese Gleichung aber, daß auch $q_2, \ldots, q_t$ schon $S^{-1}Q$ erzeugen als Modul über $S^{-1}R$. Widerspruch! □

Beweis ohne Lokalisierung. Seien $q_1, \ldots, q_n$ Erzeuger des R-Moduls Q. Wir finden $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ mit

$$q_i = a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in}q_n$$

Das können wir umschreiben zur Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Ziehen wir nun beide Seiten voneinander ab und multiplizieren mit der adjungierten Matrix [LA1] 6.4.6, so erkennen wir, daß für P das charakteristische Polynom der Matrix der (a_{ij}) gilt $P(1)q_1 = \ldots = P(1)q_n = 0$. Dies $P(1)$ ist dann unser gesuchtes $f \in 1 + \mathfrak{a}$. □

Korollar 4.6.6 (Lemma von Nakayama, Variante). *Seien R ein Kring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Seien Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{a}M$ erzeugen. So gibt es $f \in 1 + \mathfrak{a}$ derart, daß die m_i auch schon $M[f^{-1}]$ über $R[f^{-1}]$ erzeugen.*

4.6.7. Aus unserer Variante 4.6.6 folgt unmittelbar Proposition 4.6.2, indem wir den Fall $r = 0$ betrachten. Wir gehen jedoch beim Beweis den umgekehrten Weg. Ich selbst kann mir die Variante viel besser merken, da ich mir darunter mehr vorstellen kann. Das soll im nächsten Punkt ausgeführt werden.

4.6.8 (**Anschauung für das Lemma von Nakayama**). Der Anschauung besonders gut zugänglich scheint mir die Variante 4.6.6 des Lemmas von Nakayama, und zwar besonders in dem Fall, daß $R = \mathcal{O} = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X ist, $M = \mathcal{O}^n$ ein freier Modul endlichen Ranges, und $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(x)$ das Verschwindungsideal eines Punktes $x \in X$. Unsere $m_i \in M$ verstehen wir dann als Spaltenvektoren $m_j = (m_{1j}, \ldots, m_{nj})$ mit Funktionen $m_{ij} \in \mathcal{O}$ als Einträgen, und unser Lemma besagt: Erzeugen die Spaltenvektoren $m_j(x) := (m_{1j}(x), \ldots, m_{nj}(x))$ für $1 \leq j \leq r$ den k^n, so gibt eine Funktion $f \in \mathcal{O}$, die bei x den Wert Eins annimmt und mit der die m_j bereits $\mathcal{O}[f^{-1}]^n$ erzeugen als $\mathcal{O}[f^{-1}]$-Modul. Daß solch ein f existiert, kann man nun auch ohne viel Theorie leicht einsehen: Wenn wir erst mal etwas allgemeiner nur ein f wie oben finden, das bei x nicht den Wert Null annimmt, multiplizieren wir es mit dem Skalar $f(x)^{-1}$ und sind auch fertig. Erzeugen nun die $m_j(x)$ für $1 \leq j \leq r$ den k^n, so kann man nach Umnummerieren annehmen, daß $m_1(x), \ldots, m_n(x)$ bereits eine

Basis des k^n bilden. Dann aber ist die Determinante der Matrix der $A = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ nicht Null bei x. Nehmen wir $f = \det(A)$ als unsere Funktion, so gibt es nach der Cramer'schen Regel [LA1] 6.4.6 eine Matrix $B = f^{-1}A^\sharp$ mit Einträgen in $\mathcal{O}[f^{-1}]$ und $BA = I$ der Einheitsmatrix. Das aber zeigt, daß die m_j bereits $\mathcal{O}[f^{-1}]^n$ als $\mathcal{O}[f^{-1}]$-Modul erzeugen.

Herleitung des Korollars 4.6.6 aus der Proposition 4.6.2. Seien Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{a}M$ erzeugen. Sei $N \subset M$ das Erzeugnis von $m_1, \ldots, m_r$ und $Q = M/N$. Wir betrachten das Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc}
N \cap \mathfrak{a}M & \hookrightarrow & \mathfrak{a}M & \twoheadrightarrow & \mathfrak{a}Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N/(N \cap \mathfrak{a}M) & \hookrightarrow & M/\mathfrak{a}M & \twoheadrightarrow & Q/\mathfrak{a}Q
\end{array}$$

Seine beiden oberen Zeilen sind exakt, also nach dem Neunerlemma auch die untere Zeile. Aus der Wahl von N folgt nun $Q/\mathfrak{a}Q = 0$, also $Q = \mathfrak{a}Q$, also $fQ = 0$ für ein $f \in 1+\mathfrak{a}$ nach Proposition 4.6.2, also $Q[f^{-1}] = 0$, also $N[f^{-1}] \stackrel{\sim}{\rightarrow} M[f^{-1}]$ wegen der Exaktheit des Lokalisierens 4.3.11 und wir sind fertig. □

4.6.9. Ein Ring heißt **lokal**, wenn seine Nichteinheiten ein Ideal bilden. Dies Ideal ist dann natürlich das größte echte Ideal unseres Rings. Der Nullring ist insbesondere nicht lokal, denn die leere Menge ist kein Ideal. In einem lokalen Ring ist die Summe aus einer Nichteinheit und einer Einheit offensichtlich stets eine Einheit.

4.6.10. Mit der Sprechweise „Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Kring“ ist gemeint, daß A ein lokaler Kring sein soll und $\mathfrak{m}$ sein per definitionem eindeutig bestimmtes maximales Ideal.

Beispiel 4.6.11. Gegeben ein Kring R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ist die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ von R an der Stelle $\mathfrak{p}$ nach 4.5.4 stets ein lokaler Kring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Insbesondere sind unsere Ringe von Funktionskeimen $\mathcal{O}_{X,x}$ aus 4.4.3 und allgemeiner unsere Ringe von Funktionskeimen $\mathcal{O}_{X,Y}$ aus 4.4.7 stets lokal.

4.6.12 (**Lemma von Nakayama für lokale Kringe**). Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Kring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Sind $m_1, \ldots, m_r \in M$ gegeben derart, daß ihre Nebenklassen den Quotienten $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen, so erzeugen die m_i bereits M selbst. Das folgt sofort aus der Variante 4.6.6 des kommuntativen Nakayamalemmas, denn die Menge $1 + \mathfrak{m}$ besteht aus Einheiten von A. Obwohl wir im Rückblick ein endliches Erzeugendensystem von M angeben, gilt die Aussage nicht, wenn wir nicht M von Anfang an als endlich erzeugt annehmen.

Satz 4.6.13 (Durchschnittssatz von Krull). *Gegeben $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal in einem noetherschen Kring und M ein noetherscher R-Modul gilt*

$$\bigcap \mathfrak{a}^n M = \{m \in M \mid \exists a \in \mathfrak{a} \textit{ mit } am = m\}$$

Beweis. Sei zunächst R ein Kring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein beliebiges Ideal. Im Polynomring $R[X]$ bilden die Polynome $\sum r_n X^n$ mit $r_n \in \mathfrak{a}^n$ für alle $n \geq 0$ einen Teilring, den sogenannten **Rees-Ring** $R_\mathfrak{a}[X]$. Sind $a_1, \ldots, a_r$ Erzeuger von $\mathfrak{a}$, so finden wir eine Surjektion $R[Y_1, \ldots, Y_r] \twoheadrightarrow R_\mathfrak{a}[X]$ des Polynomrings auf den Reesring mit $Y_\nu \mapsto a_\nu X$. Folglich ist mit R auch der Reesring noethersch. Des weiteren ist im in offensichtlicher Weise erklärten $R[X]$-Modul $M[X]$ die Teilmenge $M_\mathfrak{a}[X]$ aller $\sum m_n X^n$ mit $m_n \in \mathfrak{a}^n M$ für alle $n \geq 0$ ein Untermodul über dem Reesring. Dieser Untermodul $M_\mathfrak{a}[X]$ ist offensichtlich endlich erzeugt über dem Reesring, wenn M endlich erzeugt ist über R. Für $S := \bigcap \mathfrak{a}^n M$ ist weiter $S[X] \subset M_\mathfrak{a}[X]$ ein Untermodul dieses Moduls über dem Reesring und ist folglich auch endlich erzeugt, also insbesondere erzeugt von einer Teilmenge der Gestalt $S + SX + \ldots + SX^n$. Das hinwiederum zeigt $\mathfrak{a}S = S$ und mit dem Lemma von Nakayama 4.6.2 folgt sogar die Existenz von einem $a \in \mathfrak{a}$ mit $(1 + a)S = 0$ alias $am = m \ \forall m \in S$. Das zeigt im Satz die Inklusion $\subset$. Die andere Inklusion ist offensichtlich. □

Korollar 4.6.14. *Gegeben ein noetherscher Kring R mit Jacobsonradikal $J \subset R$ und ein noetherscher R-Modul M gilt*

$$\bigcap_n J^n M = 0$$

4.6.15. Besonders oft wird diese Aussage im Fall lokaler noetherscher Kringe verwendet, in dem das Jacobsonradikal mit dem einzigen maximalen Ideal zusammenfällt, so daß also der Schnitt aller Potenzen des maximalen Ideals das Nullideal sein muß.

Beweis. Wenden wir den Durchschnittssatz 4.6.13 auf das Jacobsonradikal $\mathfrak{a} = J$ an, so folgt für unseren Schnitt S erst $JS = S$ und dann mit dem Lemma von Nakayama 4.6.2 sofort $S = 0$. □

Beispiel 4.6.16. Um zu sehen, daß Durchschnittssatz für nicht noethersche Kringe im allgemeinen nicht mehr gilt, mag man den Ring R der Keime stetiger reeller Funktionen um den Ursprung der reellen Zahlengeraden im Sinne von 4.4.1 betrachten. Dieser Ring R ist lokal und sein maximales Ideal J ist nicht Null, aber dennoch gilt $J^2 = J$.

Übungen

Übung 4.6.17. Gegeben ein endlich erzeugter freier Modul M über einem lokalen Kring $(A, \mathfrak{m})$ bilden Elemente $v_1, \ldots, v_r \in M$ eine A-Basis von M genau dann, wenn ihre Bilder $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r \in M/\mathfrak{m}M$ eine Basis des Quotienten über $A/\mathfrak{m}$ bilden.

Übung 4.6.18. Sei $A \subset B$ eine modulendliche Kringerweiterung. Ist A lokal und B ein freier A-Modul, so spaltet die Einbettung $A \hookrightarrow B$ als Homomorphismus von A-Moduln. Hinweis: 4.6.17.

Übung 4.6.19. Seien X eine affine Varietät und M ein $\mathcal{O}(X)$-Modul. Gegeben $x \in X$ heißt $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} k_x$ der **geometrische Halm** von M an der Stelle x. Man zeige: Ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(X)$-Modul M ist genau dann projektiv, wenn die Dimensionen seiner geometrischen Halme eine lokal konstante Funktion bilden. Hinweis: Man finde für jeden Punkt $x \in X$ eine Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $f(x) \neq 0$ und M_f frei über $\mathcal{O}(X)_f$. Man erinnere aus 4.3.36, daß unter gewissen Endlichkeitsbedingungen projektiv äquivalent ist zu lokal frei.

5 Ganze Kringerweiterungen und Dimension

5.1 Ganze Kringerweiterungen

5.1.1. Ich beginne mit einigen Erinnerungen. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung. Ein Element $b \in B$ heißt wie in 1.6.2 **ganz über** A, wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in A ist, wenn es also $n \geq 1$ und $a_i \in A$ gibt mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

Definition 5.1.2. Eine Kringerweiterung $A \subset B$ heißt **ganz**, wenn jedes Element $b \in B$ ganz ist über A. Einen Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ nennen wir **ganz**, wenn $\varphi(A) \subset B$ eine ganze Kringerweiterung ist.

Beispiel 5.1.3. Die Kringerweiterung $R[T] \subset R[T, T^{-1}]$ ist, wie bereits in 1.6.4 besprochen, nicht ganz für jeden von Null verschiedenen Kring R.

5.1.4 (**Ganz bleibt ganz unter Quotienten und Lokalisierungen**). Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $I \subset B$ ein Ideal, so ist auch $(A/A \cap I) \subset B/I$ eine ganze Kringerweiterung. Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $T \subset A$ eine Teilmenge, so ist auch $T^{-1}A \subset T^{-1}B$ eine ganze Kringerweiterung.

Satz 5.1.5 (Charakterisierung ganzer ringendlicher Kringerweiterungen). *Für eine Kringerweiterung $A \subset B$ sind gleichbedeutend:*

1. *Der Ring B wird als Kringerweiterung von endlich vielen über A ganzen Elementen erzeugt;*
2. *Unsere Kringerweiterung ist ganz und ringendlich;*
3. *Unsere Kringerweiterung ist modulendlich.*

Beweis. 2⇒1 ist offensichtlich und 1⇒3 hatten Sie bereits als Übung 1.6.14 ausgeführt. Wir müssen nur noch 3⇒2 zeigen. Seien dazu $b_1, \ldots, b_n$ Erzeuger des A-Moduls B. Gegeben $b \in B$ finden wir dann $a_{ij} \in A$ mit

$$bb_i = a_{i1}b_1 + \ldots + a_{in}b_n$$

was wir umschreiben können zur Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ziehen wir nun beide Seiten voneinander ab und multiplizieren mit der adjungierten Matrix [LA1] 6.4.6, so erkennen wir, daß für P das charakteristische Polynom der Matrix der (a_{ij}) gilt $P(b)b_1 = \ldots = P(b)b_n = 0$. Das hinwiederum zeigt $P(b) = 0$, denn wir können ja die Eins von B als Linearkombination der b_i schreiben. □

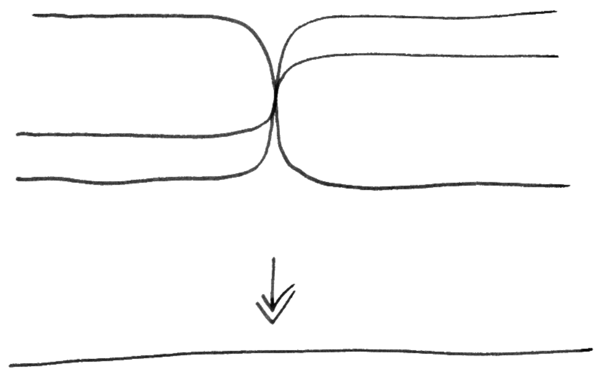
Ergänzung 5.1.6. Ein Modul über einem Ring heißt **treu**, wenn nur die Multiplikation mit dem Nullelement des Rings darauf die Nullabbildung liefert. Der vorhergehende Beweis zeigt allgemeiner: Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung und gibt es einen treuen B-Modul M, der endlich erzeugt ist als A-Modul, so ist B ganz über A. Ist darüber hinaus $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und gilt $bM \subset \mathfrak{a}M$ für ein $b \in B$, so erfüllt b sogar eine Ganzheitsgleichung der Gestalt $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$. Das Argument bleibt dasselbe.

5.1.7 (**Anschauung für ganze Kringerweiterungen**). Um für den Begriff einer ganzen Kringerweiterung eine Anschauung zu entwickeln, betrachte man den Fall, daß $A = \mathcal{O}(X)$ der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X ist und daß B nilpotentfrei ist und als A-Ring erzeugt wird von einem einzigen Element b. Ist $f \in \mathcal{O}(X)[T] = \mathcal{O}(X \times k)$ ein normiertes Polynom mit $f(b) = 0$, so ist B der Ring der polynomialen Funktionen auf einer abgeschlossenen Teilmenge des Nullstellengebildes $\mathcal{Z}(f) \subset X \times k$ und unsere Inklusion $A \subset B$ entspricht geometrisch der durch das Weglassen der letzten Koordinate definierten Abbildung. Die Faser über $x \in X$ besteht also aus den Wurzeln des Polynoms $f(x, T) \in k[T]$ und daß unser Polynom f normiert sein soll, bedeutet geometrisch, daß „an keiner Stelle $x \in X$ eine dieser Wurzeln nach Unendlich streben kann“.

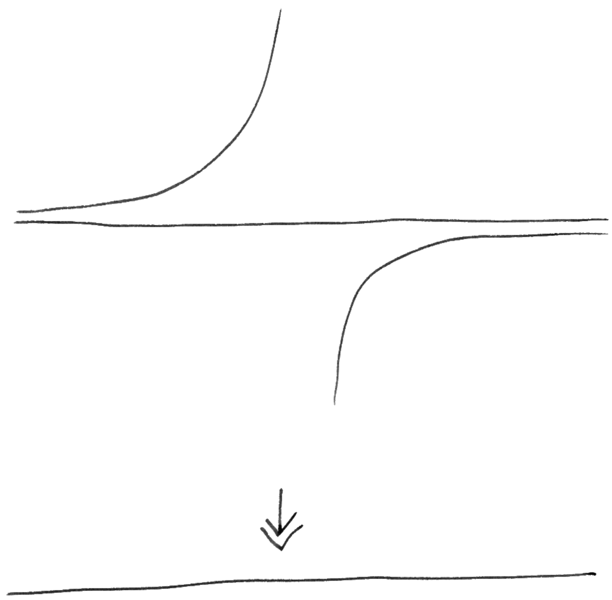
5.1.8. Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung. Sind Elemente $x_1, \ldots, x_n \in B$ ganz über A, so ist $A[x_1, \ldots, x_n]$ nach 5.1.5 ganz über A. Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung, so bilden mithin alle über A ganzen Elemente von B einen Teilring von B. Der Kring aller über A ganzen Elemente von B heißt der **ganze Abschluß von** A **in** B.

Beispiel 5.1.9. Nach [LA1] 5.3.44 ist $\mathbb{Z}$ sein eigener ganzer Abschluß in $\mathbb{Q}$.

5.1.10 (**Transitivität der Ganzheit von Kringerweiterungen**). Sind $C \supset B \supset A$ Kringe und ist C ganz über B und B ganz über A, so ist auch C ganz über A. Ist in der Tat $c \in C$ gegeben, so existiert für c eine Ganzheitsgleichung $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \ldots + b_0$ über B. Im Turm $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c] \supset A[b_0, \ldots, b_{n-1}] \supset A$ ist dann jede der beiden Ringerweiterungen modulendlich nach 5.1.5. Damit ist aber nach 1.6.13 auch die gesamte Ringerweiterung modulendlich und nach 5.1.5 ist folglich c ganz über A.



Die Erweiterung $k[X,Y]/\langle Y^3 - X\rangle \supset k[X]$ ist ganz.



Die Erweiterung $k[X,Y]/\langle (XY-1)Y\rangle \supset k[X]$ ist nicht ganz. Formal zeigt das die Surjektion $k[X,Y]/\langle (XY-1)Y\rangle \twoheadrightarrow k[X,Y]/\langle (XY-1)\rangle \xrightarrow{\sim} k[X,X^{-1}]$ zusammen mit Beispiel 5.1.3.

Lemma 5.1.11 (Sandwich-Lemma). *Gegeben ein Sandwich $B \supset A \supset k$ von Kringen mit B modulendlich über A und B ringendlich über k und k noethersch ist A ringendlich über k.*

Bemerkung 5.1.12. Ein Spezialfall dieses Lemmas, für das die Theorie ganzer Kringerweiterungen nicht in voller Stärke benötigt wird, bildet das Rückgrat des in 1.6.10 gegebenen Beweises für den Hilbert'schen Nullstellensatz in seiner körpertheoretischen Form. Wir werden das Sandwich-Lemma im weiteren Verlauf insbesondere beim „Verkleben von Punkten" 5.2.15 benötigen.

Beweis. Wir wählen ein endliches Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_n$ von B als A-Modul, das gleichzeitig B als k-Kring erzeugt. Nach 5.1.5 finden wir für jedes Element dieses Erzeugendensystems eine Ganzheitsgleichung über A. Bezeichnet $K \subset A$ den von allen Koeffizienten dieser Gleichungen über k erzeugten Teilring, so erhalten wir ein erweitertes Sandwich

$$B \supset A \supset K \supset k$$

mit B modulendlich über K und K ringendlich über k. Nach dem Hilbert'schen Basissatz 1.5.11 ist K also noethersch und damit A modulendlich über K und damit A ringendlich über k. □

Beispiel 5.1.13. Ist k ein Körper und B eine ringendliche k-Kringalgebra, so ist jede Unterringalgebra $A \subset B$ endlicher Kodimension auch ringendlich über k. Zum Beispiel ist $A = \{P \mid P'(0) = 0\} = k + \langle T^2 \rangle \subset k[T]$ der Ring der polynomialen Funktionen auf der Neil'schen Parabel und $A = \{P \mid P(1) = P(-1)\} = k + \langle T^2 - 1 \rangle \subset k[T]$ der Ring der polynomialen Funktionen auf der nodalen Kubik, vergleiche 3.2.8.

Übungen

Übung 5.1.14. Man zeige, daß der ganze Abschluß von $\mathbb{C}[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle$ in seinem Quotientenkörper isomorph ist zum Polynomring $\mathbb{C}[T]$.

Übung 5.1.15. Man berechne die ganzen Abschlüsse von $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jeweils in ihren Quotientenkörpern.

Ergänzende Übung 5.1.16. Ist $A \subset B$ eine Kringerweiterung und B ein Integritätsring und gibt es ein Ideal $I \subset B$ mit $B = A \oplus I$, so ist außer den Elementen von A selbst kein Element von B ganz über A.

5.2 Going-up

Satz 5.2.1 (Ganze Kringerweiterungen und Primideale). *Gegeben eine ganze Kringerweiterung $A \subset B$ gilt:*

1. *Jedes Primideal von A ist der Schnitt mit A eines Primideals von B. Das Herunterschneiden von Primidealen induziert also in Formeln eine Surjektion $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$;*

2. *Für je zwei echt ineinander enthaltene Primideale $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ des großen Krings B gilt auch für ihre Schnitte mit dem kleinen Kring $(\mathfrak{q} \cap A) \subsetneq (\mathfrak{p} \cap A)$.*

5.2.2. Der Satz impliziert insbesondere, daß das Urbild von $\operatorname{Max} A$ unter unserer Surjektion $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ genau $\operatorname{Max} B$ ist. Mit einem ersten vorbereitenden Lemma und dem Beweis dieser Aussage in 5.2.4 werden wir den Beweis des Satzes vorbereiten, der dann im Anschluß an den Beweis von 5.2.4 gegeben wird. Ist $A \subset B$ keine ganze Kringerweiterung, so muß das Herunterschneiden keine Surjektion auf den Primspektren liefern. Das einfachste Gegenbeispiel ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ein Gegenbeispiel im geometrischen Fall wäre die Erweiterung

$$k[X] \subset k[X, Y]/\langle XY - 1\rangle$$

Geometrisch entspricht sie der Projektion einer Hyperbel auf die x-Achse. Hier liegt der Ursprung nicht im Bild. In algebraischer Sprache kann also das Primideal $\langle X\rangle$ nicht durch Herunterschneiden erhalten werden.

Lemma 5.2.3. *Gegeben eine ganze Kringerweiterung zwischen Integritätsringen ist der eine Integritätsring ein Körper genau dann, wenn der andere ein Körper ist.*

Beweis. Sei $A \subset B$ unsere Kringerweiterung. Ist A ein Körper und $b \in B$ gegeben, so finden wir eine Gleichung

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

mit $n \geq 1$ und $a_i \in A$. Da B ein Integritätsring ist, dürfen wir im Fall $b \neq 0$ sogar $a_0 \neq 0$ annehmen. Bringen wir nun a_0 auf die andere Seite, teilen durch $(-a_0)$ und klammern b aus, so erhalten wir das Inverse zu b. Also ist mit A auch B ein Körper. Ist umgekehrt B ein Körper, so besitzt jedes $a \in A\backslash 0$ ein Inverses $b \in B$, und multiplizieren wir eine Gleichung für b wie oben mit a^{n-1}, so folgt $b \in A$. Also ist mit B auch A ein Körper. □

Lemma 5.2.4. *Seien $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $\mathfrak{p} \subset B$ ein Primideal. Genau dann ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in B, wenn $A \cap \mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in A ist.*

Beweis. Wir betrachten die ganze Erweiterung von Integritätsringen

$$(A/A \cap \mathfrak{p}) \subset (B/\mathfrak{p})$$

und müssen nach 1.7.7 zeigen, daß der eine Integritätsring ein Körper ist genau dann, wenn der andere ein Körper ist. Das aber sagt gerade das vorhergehende Lemma 5.2.3. □

Bemerkung 5.2.5. Der folgende Beweis für den ersten Teil von 5.2.1 benötigt das Zorn'sche Lemma, um in einer Lokalisierung eines Restklassenrings von B die Existenz eines maximalen Ideals sicherzustellen. Arbeiten wir mit noetherschen Kringen, so könnten wir das auch noch mit einer etwas schwächeren Version des Auswahlaxioms zeigen. Im Anschluß zeigen wir noch, wie man die Aussagen des Satzes im Fall einer modulendlichen Kringerweiterung auch ohne das Zorn'sche Lemma zeigen kann.

Beweis des Satzes 5.2.1 über ganze Kringerweiterungen. 1. Sei $P \subset A$ ein Primideal. Wir lokalisieren am Komplement $S := A \backslash P$ von P in A und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \to & S^{-1}B \\ \cup & & \cup \\ A & \to & S^{-1}A \end{array}$$

Seine Vertikalen sind ganze Ringerweiterungen. Nun ist $S^{-1}P$ das einzige maximale Ideal von $S^{-1}A$ und $S^{-1}B$ ist nicht der Nullring. Mithin besitzt $S^{-1}B$ maximale Ideale, und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$ schneidet $S^{-1}A$ nach 5.2.4 im einzigen maximalen Ideal $S^{-1}P$. Das Urbild von $\mathfrak{m}$ in B ist also unser gesuchtes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{p} \cap A = P$.

2. Betrachten wir in A die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S := A \backslash \mathfrak{p}$, so ist $S^{-1}(A \cap \mathfrak{p})$ ein maximales Ideal in $S^{-1}A$. In $S^{-1}B$ haben wir nach 4.5.4 jedoch $S^{-1}\mathfrak{q} \subsetneq S^{-1}\mathfrak{p}$. Folglich ist das Ideal $S^{-1}\mathfrak{q}$ nicht maximal in $S^{-1}B$, folglich ist $S^{-1}\mathfrak{q} \cap S^{-1}A = S^{-1}(\mathfrak{q} \cap A)$ nicht maximal in $S^{-1}A$ nach 5.2.4, folglich gilt $\mathfrak{q} \cap A \neq \mathfrak{p} \cap A$. □

Ergänzung 5.2.6 (*Beweis ohne Zorn im modulendlichen Fall*). Ist ganz allgemein $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein echtes Ideal, so ist auch das Erzeugnis $\langle \mathfrak{a}B \rangle$ von $\mathfrak{a}$ in B ein echtes Ideal. Das kann man aus 5.2.1 folgern, da jedes echte Ideal zu einem maximalen Ideal vergrößert weden kann, aber wir können es auch ohne Zorn zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir unsere Kringerweiterung dabei modulendlich annehmen, denn läßt sich die Eins von B als Linearkombination von Elementen von $\mathfrak{a}$ darstellen, so auch schon die Eins des von den Koeffizienten über A erzeugten Teilrings. Ist $b_1, \ldots, b_n$ ein

Erzeugendensystem des A-Moduls B, so folgt aus $\langle \mathfrak{a}B\rangle = B$ die Existenz von Gleichungen

$$\begin{array}{rcll} b_1 & = & a_{11}b_1 & +\ldots+ & a_{1n}b_n \\ & \vdots & & & \vdots \\ b_n & = & a_{n1}b_1 & +\ldots+ & a_{nn}b_n \end{array}$$

mit $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ oder in Matrixschreibweise $\vec{b} = A\vec{b}$ alias $(A - I)\vec{b} = \vec{0}$. Multiplizieren wir mit der adjungierten Matrix, so folgt erst $\det(A-I) = 0$ und durch Auswerten der Determinante dann $1 \in \mathfrak{a}$ alias $\mathfrak{a} = A$. Um nun auch 5.2.1 im modulendlichen Fall ohne Zorn zu zeigen, bemerken wir, daß das einzige maximale Ideal $\mathfrak{a} = S^{-1}P$ von $S^{-1}A$ nach unserer Vorüberlegung ein echtes Ideal in $S^{-1}B$ erzeugt. Teilen wir diese Ideale weg, so erhalten wir eine modulendliche Kringerweiterung eines Körpers. Darin gibt es offensichtlich ein maximales Ideal, und dessen Urbild ist notwendig ein maximales Ideal in $S^{-1}B$. Nun kann der Beweis so weiterlaufen wie zuvor.

Korollar 5.2.7 (Going-up). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{b}$ des Krings B gibt es für jedes Primideal P von A mit $(\mathfrak{b} \cap A) \subset P$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ von B mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap A = P$.*

5.2.8. Im Diagramm mit einer ganzen Kringerweiterung in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{b} & \subset & \boxed{\mathfrak{p}} & \subset & B \\ \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \cup \\ \mathfrak{b} \cap A & \subset & P & \subset & A \end{array}$$

sind also das Ideal $\mathfrak{b}$ und das Primideal P mit den dargestellten Inklusionsrelationen vorgegeben und die Existenz des eingekastelten Primideals $\mathfrak{p}$ wird behauptet. Sind in einem Diagramm mit unserer ganzen Kringerweiterung in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathfrak{p}_0 & \subset & \boxed{\mathfrak{p}_1} & \subset & \boxed{\boxed{\mathfrak{p}_2}} & \subset & \ldots & \subset & \boxed{\boxed{\boxed{\mathfrak{p}_r}}} & \subset & B \\ \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \cup \\ P_0 & \subset & P_1 & \subset & P_2 & \subset & \ldots & \subset & P_r & \subset & A \end{array}$$

die nicht eingekastelten Primideale mit vorgegeben, so können wir also induktiv der Reihe nach die mehr und mehr eingekastelten Primideale finden. Daher rührt die Bezeichnung als „Going-Up“. Das analoge „Going-down-Theorem“, bei dem man stattdessen absteigende Primidealketten in A betrachtet, gilt nur unter wesentlich stärkeren Voraussetzungen, vergleiche 5.7.6. Es mag merkwürdig wirken, daß hier die „kleinen“ Primideale mit großen Buchstaben bezeichnet werden und die „großen“ Primideale mit kleinen Buchstaben. Das gefiel mir nur deshalb besser, weil so die meisten explizit notierten Primideale, wie es sich gehört, durch kleine Buchstaben in Fraktur notiert werden.

Beweis. Wir gehen zur ganzen Kringerweiterung $A/(\mathfrak{b} \cap A) \subset B/\mathfrak{b}$ über und erinnern, daß nach 5.2.1 für jede ganze Kringerweiterung das Herunterschneiden eine Surjektion zwischen den Mengen der Primideale der jeweiligen Ringe induziert. □

Ergänzung 5.2.9. Dieser Satz wurde zuerst von Wolfgang Krull für Integritätskringe bewiesen. Irvin Cohen und Abraham Seidenberg verallgemeinerten ihn dann auf den Fall beliebiger Kringe und vereinfachten gleichzeitig den Beweis. Wolfgang Krull begann sein Studium in Freiburg und kam auch zur Promotion wieder nach Freiburg, wo er zwei Jahre als außerordentlicher Professor tätig war.

5.2.10 (**Geometrie ganzer Kringerweiterungen**). Eine Abbildung von topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Teilmengen wieder abgeschlossen ist. Unser Going-up 5.2.7 kann geometrisch dahingehend formuliert werden, daß jede ganze Kringerweiterung $A \subset B$ eine abgeschlossene Surjektion $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ zwischen den Spektren der beteiligten Ringe induziert, die wir uns dafür mit ihrer Zariskitopologie aus 4.5.17 versehen denken.

Satz 5.2.11 (Ganze Kringerweiterungen und Krulldimension). *Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung, so haben beide Kringe dieselbe Krulldimension, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{kdim} B$$

Beweis. Nach 5.2.1.2 liefert jede echt aufsteigende Primidealkette von B durch Herunterschneiden eine echt aufsteigende Primidealkette von A. Nach Going-up 5.2.7 läßt sich umgekehrt jede echt aufsteigende Primidealkette von A induktiv zu einer echt aufsteigenden Primidealkette von B hochheben. □

Satz 5.2.12 (Endlichkeitskriterium für die Fasern eines Morphismus). *Ist $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung und B noethersch, so hat $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ endliche Fasern, als da heißt, das Urbild jedes Elements ist endlich.*

5.2.13. Einen geometrischen Spezialfall haben wir schon in 3.4.18 gesehen. Ein Gegenbeispiel für nicht noethersches B erhält man, indem man für A einen Körper und für B ein unendliches Produkt von Kopien von A nimmt. Ein Gegenbeispiel mit einem Integritätsring B erhält man, indem man von $A = \mathbb{C}[X]$ ausgeht und als B den ganzen Abschluß von A in einem algebraischen Abschluß von $\mathbb{C}(X)$ nimmt: Die Fasern sind dann nach 5.7.9 die Galoisbahnen, und man kann sich überlegen, daß in diesem Fall alle Galoisbahnen von maximalen Idealen unendlich sind.

Beweis. Gegeben $P \in \operatorname{Spec} A$ ist $\sqrt{\langle PB \rangle} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ nach 4.5.29 der Schnitt der endlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} B$, die $\langle PB \rangle$ enthalten. Sei nun

$\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = P$. So folgt $\mathfrak{q} \supset \sqrt{\langle PB \rangle}$, also $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}_i$ für ein i, also $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$ für ein i, denn nach Going-up 5.2.7 haben wir

$$\mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}_i \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{q} \cap A \supsetneq \mathfrak{p}_i \cap A \supset P \qquad \square$$

Beispiel 5.2.14. Der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Hinweis: Mit $a + b\sqrt{3}$ liegt auch $a - b\sqrt{3}$ im ganzen Abschluß, also $2a$, woraus folgt $2a \in \mathbb{Z}$ und $a^2 - 3b^2 \in \mathbb{Z}$, also $3(2b)^2 \in \mathbb{Z}$, also $2b \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $2a := \alpha$ und $2b := \beta$, so folgt weiter $\alpha^2 - 3\beta^2 \in 4\mathbb{Z}$. Quadrate in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind aber nur 0 und 1, woraus folgt $\alpha^2, \beta^2 \in 4\mathbb{Z}$ und damit $a, b \in \mathbb{Z}$.

Proposition 5.2.15 (Verkleben von Punkten in affinen Varietäten). *Seien X eine affine k-Varietät über $k = \bar{k}$ und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y, bei der alle Fasern endlich und fast alle Fasern einelementig sind. So ist Y mit $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ als regulären Funktionen auch eine affine Varietät.*

Beweis. Offensichtlich brauchen wir nur den Fall zu betrachten, daß es genau zwei Punkte $p, q \in X$ gibt mit $p \neq q$ aber $\varphi(p) = \varphi(q)$. In $\mathcal{O}(X)$ hat der Teilring $\{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(p) = f(q)\}$ dann endliche Kodimension, folglich ist $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über $\mathcal{O}(Y)$. Damit ist einerseits nach dem Sandwich-Lemma 5.1.11 unser $\mathcal{O}(Y)$ ringendlich über k und andererseits ist $\mathcal{O}(X)$ ganz über $\mathcal{O}(Y)$. Nach unseren allgemeinen Erkenntnissen 5.2.2 über ganze Kringerweiterungen liefert also der Homomorphismus $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ eine Surjektion $\pi : \operatorname{Max} \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \operatorname{Max} \mathcal{O}(Y)$. Daß hier die Faser über $\pi(p) = \pi(q)$ genau aus den beiden Elementen p und q besteht und daß alle anderen Fasern einelementig sind, ist leicht zu sehen: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X \backslash \{p, q\}$ gibt es ja eine reguläre Funktion mit $f(x) = 1$ und $f(y) = f(p) = f(q) = 0$. Folglich erhalten wir eine Bijektion $Y \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(Y)$ durch $y \mapsto \ker \delta_y$ und die geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$ ist in der Tat eine affine Varietät. $\square$

Beispiel 5.2.16. Verkleben wir drei Geraden in einem Punkt, so erhalten wir eine affine Varietät. Sie ist isomorph zur affinen Varietät der drei Koordinatenachsen im Raum und besitzt einen bijektiven Morphismus zur Vereinigung von drei paarweise verschiedenen Ursprungsgeraden in der Ebene, der hinwiederum jedoch kein Isomorphismus ist.

Übungen

Übung 5.2.17. Zeigen Sie die letzte Behauptung aus 3.2.8, daß sich für $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper jede Lösung der Gleichung $x^3 + x^2 = y^2$ in der Form $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ mit $t \in k$ schreiben läßt.

Übung 5.2.18 (**Eigenschaften von Morphismen mit ganzen Komorphismen**). Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Ist der Komorphismus ganz, so ist φ abgeschlossen mit endlichen Fasern und für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \underset{\mathrm{A}}{\subset} X$ gilt

$$\operatorname{kdim} Z = \operatorname{kdim} \varphi(Z)$$

Übung 5.2.19 (**Nodale Kubik als Verklebung**). Wir erhalten die nodale Kubik, wenn wir zwei verschiedene Punkte der affinen Gerade miteinander verkleben.

Übung 5.2.20. Seien $A \subset B \subset C$ kommutative Integritätsringe und sei C ein freier A-Modul von endlichem Rang r. Ist auch $\operatorname{Quot} C$ eine Körpererweiterung von $\operatorname{Quot} B$ vom Rang r, so gilt $A = B$.

Übung 5.2.21 (**Verklebungen eines Punktes mit sich selber**). Gegeben eine bepunktete affine k-Varietät (X, x) und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}(X)$ mit Radikal $\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathcal{I}(x)$ ist der Teilring $A := k + \mathfrak{b} \subset \mathcal{O}(X)$ auch affin und der der Inklusion $A \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ entsprechende Morphismus von affinen Varietäten $X \to Y := \operatorname{Max} A$ ist bijektiv und ein Homöomorphismus und induziert Isomorphismen von Varietäten von jeder Nichtnullstellenmenge, die den Punkt x vermeidet, auf ihr Bild.

Beispiel 5.2.22 (**Neil'sche Parabel als Verklebung**). Ist etwa $X = k^n$ und $\mathfrak{b}$ ein Ideal der Kodimension zwei, so mag man es sich als Ideal der Funktionen denken, die bei x verschwinden und bei denen auch die Richtungsableitung längs einer vorgegebenen Gerade durch x bei x verschwindet. Unsere Konstruktion mag man dann anschaulich verstehen als das „Verkleben von x mit einem in Richtung unserer Gerade infinitesimal nahen benachbarten Punktes“. Verklebt man in dieser Weise einen Punkt der Gerade mit einem infinitesimal nahen benachbarten Punkt, so erhält man die Neil'sche Parabel.

5.3 Quotienten nach endlichen Gruppen*

Satz 5.3.1 (**Noether**). *Ist A ein Kring und operiert eine endliche Gruppe W auf A durch Ringautomorphismen, so ist A ganz über dem Invariantenring A^W. Ist A ringendlich über einem noetherschen Kring k und operiert W durch k-lineare Automorphismen, so ist A modulendlich über A^W und A^W ringendlich über k.*

5.3.2. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch noch, wenn wir statt der Endlichkeit von W schwächer nur fordern, daß alle Bahnen von W in A endlich sein sollen. Dieser Fall tritt typisch bei der Wirkung von Galoisgruppen auf.

Beweis. Jedes $a \in A$ ist Nullstelle des normierten Polynoms $\prod_{b \in Wa}(X - b)$ aus $A^W[X]$, folglich ist A ganz über A^W. Ist A ringendlich über k, so ist es auch ringendlich über A^W und damit modulendlich über A^W nach 5.1.5. Nach dem Sandwichlemma 5.1.11 ist damit A^W ringendlich über k. □

Satz 5.3.3 (Quotienten affiner Varietäten nach endlichen Gruppen). *Operiert eine endliche Gruppe W auf einer affinen k-Varietät X, so wird auch der Bahnenraum X/W mit $\mathcal{O}(X/W) := \{f : X/W \to k \mid f \circ \mathrm{can} \in \mathcal{O}(X)\}$ eine affine Varietät.*

5.3.4. Unter den Annahmen des Satzes liefert die kanonische Abbildung insbesondere einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X/W) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(X)^W$$

zwischen den regulären Funktionen auf dem Bahnenraum und den W-invarianten regulären Funktionen auf X.

Beweis. Nach 5.3.1 ist der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^W$ ringendlich über k, und nilpotentfrei ist er eh. Damit entspricht er einer affinen k-Varietät. Der von der Einbettung von k-Ringalgebren $\mathcal{O}(X)^W \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ induzierte Morphismus von affinen Varietäten $\pi : X \to \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ ist sicher konstant auf W-Bahnen und induziert folglich eine Abbildung

$$\kappa : X/W \to \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da bereits $X \to \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ surjektiv ist nach 5.2.2, angewandt auf die ganze Ringerweiterung $\mathcal{O}(X)^W \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$. Wir zeigen, daß sie auch injektiv und damit bijektiv ist. Nach 3.1.7 gibt für je zwei verschiedene W-Bahnen eine reguläre Funktion, die auf der einen Bahn verschwindet und auf der anderen konstant den Wert Eins annimmt. Das Produkt über alle W-Verschobenen einer derartigen Funktion ist dann sogar eine invariante Funktion mit besagter Eigenschaft. Die Existenz einer solchen Funktion zeigt, daß unser Morphismus κ auf den zugrundeliegenden Punktmengen auch injektiv ist. Per definitionem entsprechen unter unserer Bijektion $\kappa : X/W \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ die regulären Funktionen auf der affinen Varietät $\mathrm{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ genau den Funktionen aus dem eben definierten Teilring $\mathcal{O}(X/W) \subset \mathrm{Ens}(X/W, k)$. Damit muß dann auch $(X/W, \mathcal{O}(X/W))$ eine affine Varietät sein. $\square$

Ergänzung 5.3.5. Operiert die endliche Gruppe W auf der affinen k-Varietät X und ist $p \in X/W$ ein Punkt des Quotienten, so nenne ich den Restklassenring $\mathcal{O}(X)/\langle \mathcal{O}(X)\mathfrak{m}_p \rangle$ den **Faserring bei** p. In der Tat wird sich sein Spektrum als die „schementheoretische Faser bei p“ der Projektionsabbildung erweisen. Mit $\langle \mathcal{O}(X)\mathfrak{m}_p \rangle$ ist hierbei das von $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}(X/W)$ in $\mathcal{O}(X)$ erzeugte Ideal gemeint.

Übungen

Übung 5.3.6. Man zeige, daß die Quotientenvarietät $\mathbb{C}^2/\{\pm \mathrm{id}\}$ isomorph ist zum Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$. Idem, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik ersetzt.

Übung 5.3.7. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ operiert auf der Varietät k^n durch Vertauschen der Koordinaten. Man zeige, daß der durch die elementarsymmetrischen Polynome $(s_1, \ldots, s_n) : k^n \to k^n$ gegebene Morphismus einen Isomorphismus

$$k^n/\mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} k^n$$

induziert. Hinweis: Das ist wenig mehr als eine geometrische Formulierung des Hauptsatzes über symmetrische Polynome [AL] 2.9.7.

5.4 Noether-Normalisierung

5.4.1. Ich erinnere aus der Algebra [AL] 2.2.5 den Begriff der algebraischen Unabhängigkeit. Gegeben Kringe $A \subset B$ heißt eine Familie $b_1, \ldots, b_n$ von Elementen von B **algebraisch unabhängig über** A, wenn der Einsetzungshomomorphismus $A[T_1, \ldots, T_n] \to B$ mit $T_i \mapsto b_i$ injektiv ist. Ich schreibe dann für sein Bild auch $A['b_1, \ldots, b_n]$ mit einem Freiheitsstrichlein an der eröffnenden Klammer. Ist besagter Einsetzungshomomorphismus nicht injektiv, so heißt unsere Familie **algebraisch abhängig über** A.

Proposition 5.4.2 (Noether-Normalisierung von Hyperflächen). *Gegeben ein Körper k und ein nichtkonstantes Polynom $f \in k['X_1, \ldots, X_n]\backslash k$ gibt es eine Einbettung von k-Kringen $k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \hookrightarrow k['X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle$, die eine ganze Kringerweiterung ist.*

5.4.3. Die Bezeichnung, die wir für diese Proposition gewählt haben, bezieht sich auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$. Die Aussage zeigen wir jedoch für einen beliebigen Körper k.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall eines unendlichen Grundkörpers k und haben in Multiindexnotation $f = \sum c_\alpha X^\alpha$. Die homogene Komponente von f von maximalem Grad im Sinne von [AL] 2.9.10 liefert eine Funktion auf dem k^n, die im Fall eines unendlichen Grundkörpers k nicht identisch verschwinden kann und die demnach an mindestens einer Stelle $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ nicht Null ist. Diese Stelle kann nicht der Ursprung sein. Machen wir eine lineare Koordinatentransformation und wählen in anderen Worten neue Erzeuger $Y_1, \ldots, Y_n$ als Linearkombinationen der alten, so können wir mithin erreichen, daß die homogene Komponente von maximalem Grad bei $(0, \ldots, 0, 1)$ nicht verschwindet. Das bedeutet jedoch gerade, daß in den neuen Variablen f ein skalares Vielfaches eines normierten Polynoms positiven Grades aus dem Polynomring $(k['Y_1, \dots, Y_{n-1}])[Y_n]$ ist, also eines normierten Polynoms positiven Grades aus dem Polynomring mit Koeffizienten in $k['Y_1, \dots, Y_{n-1}]$. Damit ist klar, daß

$$k['Y_1, \dots, Y_{n-1}] \to k['X_1, \dots, X_n]/\langle f \rangle = (k['Y_1, \dots, Y_{n-1}])[Y_n]/\langle f \rangle$$

ein injektiver ganzer Kringhomomorphismus ist. Im Fall eines endlichen Grundkörpers gelingt derselbe Trick, wenn man auch nichtlineare Variablentransformationen zuläßt. Sei etwa β maximal in der lexikographischen Ordnung mit $c_\beta \neq 0$. Wählen wir als neue Erzeuger $Y_i = X_i + X_n^{r_i}$ für $i < n$ und $Y_n = X_n$ und suchen uns dafür r_i mit der Eigenschaft, daß gilt $\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \ldots + \beta_{n-1} r_{n-1} + \beta_n > \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_{n-1} r_{n-1} + \alpha_n$ für alle Multiindizes $\alpha \neq \beta$ mit $c_\alpha \neq 0$, so wird wieder f bis auf einen Skalar ein normiertes Polynom in $(k['Y_1, \dots, Y_{n-1}])[Y_n]$ sein und wir können den Beweis in derselben Weise beenden. Mögliche r_i mag man finden, indem man sie induktiv von oben alias mit r_{n-1} beginnend so wählt, daß für alle α mit $c_\alpha \neq 0$, die sich erst in der i-ten Stelle von β unterscheiden und für die wir folglich $\beta_i > \alpha_i \geq 0$ haben, gilt $\beta_i r_i + \ldots + \beta_{n-1} r_{n-1} + \beta_n > \alpha_i r_i + \ldots + \alpha_{n-1} r_{n-1} + \alpha_n$. □

Satz 5.4.4 (Krulldimension von Polynomringen). *Gegeben ein Körper k ist die Krulldimension des Polynomrings in n Variablen genau*

$$\operatorname{kdim} k[T_1, \dots, T_n] = n$$

und für jedes nichtkonstante Polynom $f \in \operatorname{kdim} k[T_1, \dots, T_n] \backslash k$ ist die Krulldimension des Quotienten genau

$$\operatorname{kdim} k[T_1, \dots, T_n]/\langle f \rangle = n - 1$$

5.4.5. Im geometrischen Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ ist insbesondere die Krulldimension des k^n genau n.

Beweis. Daß die Krulldimension von $k[T_1, \dots, T_n]$ mindestens n ist, scheint mir offensichtlich. Die andere Abschätzung $\operatorname{kdim} k[T_1, \dots, T_n] \leq n$ zeigen wir durch Induktion über n. Ist $\mathfrak{p}$ minimal unter allen von Null verschiedenen Primidealen, so ist es ein Hauptideal $\mathfrak{p} = \langle f \rangle$ erzeugt von einem irreduziblen Polynom f und dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{kdim}(k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{p}) &= \operatorname{kdim}(k[T_1, \dots, T_n]/\langle f \rangle) \\ &= \operatorname{kdim} k[T_1, \dots, T_{n-1}] \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

nach der Normalisierung für Hyperflächen 5.4.2 und Satz 5.2.11 über die Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen. Die Behauptung folgt. □

Satz 5.4.6 (**Noether's Normalisierungslemma**). *Gegeben ein Körper k und ein von Null verschiedener ringendlicher k-Kring A gibt es $x_1, \ldots, x_d \in A$ algebraisch unabhängig über k derart, daß A ganz ist über $k['x_1, \ldots, x_d]$.*

5.4.7. Nach der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen 5.2.11 muß die Zahl der algebraisch unabhängigen Elemente d in diesem Satz genau die Krulldimension von A sein.

5.4.8 (**Noether-Normalisierung im geometrischen Fall**). Wird ein von Null verschiedener k-Kring A erzeugt von einem k-Untervektorraum V und ist k unendlich, so zeigen wir beim Beweis des Normalisierungslemmas sogar, daß die $x_1, \ldots, x_d$ aus V gewählt werden können. Geometrisch bedeutet das, daß wir im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k für jede Zariski-abgeschlossene Teilmenge $X \mathrel{\subset\!\!\!\!\!A} k^n$ eine lineare Abbildung $k^n \to k^d$ finden können derart, daß ihre Restriktion $X \to k^d$ auf den regulären Funktionen einer ganzen Ringerweiterung $\mathcal{O}(k^d) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ entspricht. Hierbei muß natürlich unsere lineare Abbildung notwendig eine Surjektion $k^n \twoheadrightarrow k^d$ sein und im Fall $X \neq k^n$ gilt $d < n$.

Beweis. Induktion über die minimal mögliche Zahl von Erzeugern unserer k-Algebra A. Brauchen wir gar keinen Erzeuger, so folgt aus unserer Annahme $A \neq 0$ bereits $k = A$ und wir sind fertig mit $d = 0$. Sei sonst $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem mit so wenig Elementen wie möglich. Sind sie algebraisch unabhängig über k, so sind wir schon fertig. Sonst finden wir zwischen ihnen eine nichttriviale Relation f und erhalten mit der Normalisierung für Hyperflächen 5.4.2 Homomorphismen von k-Kringen

$$k['Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \hookrightarrow k['X_1, \ldots, X_n]/\langle f \rangle \twoheadrightarrow A$$

derart, daß die erste Inklusion eine ganze Ringerweiterung ist. Das Bild dieser Verknüpfung ist dann ein Teilring $B \subset A$ derart, daß A ganz ist über B und daß B über k bereits von $n - 1$ Elementen erzeugt wird. Induktion im Verein mit der Transitivität der Ganzheit 5.1.10 beendet dann den Beweis. □

5.4.9 (**Alternativer Beweis des Nullstellensatzes**). Der Noether'sche Normalisierungssatz 5.4.6 in Verbindung mit Going-up 5.2.7 oder vielmehr dem bei seinem Beweis benötigten Lemma 5.2.4 eröffnet einen alternativen Zugang zum Nullstellensatz, der mir besonders anschaulich scheint. Das einzige Problem dabei ist, daß diese Anschaulichkeit erst über die Brücke 3.2.6 zwischen Ringen und Räumen erreicht wird, die ihrerseits auf dem Nullstellensatz beruht. Aber sei's drum: Es gilt zu zeigen, daß für jedes maximale Ideal eines Polynomrings $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ über einem Körper k, den sich der Leser der besseren Anschaulichkeit halber algebraisch abgeschlossen denken mag, die offensichtliche

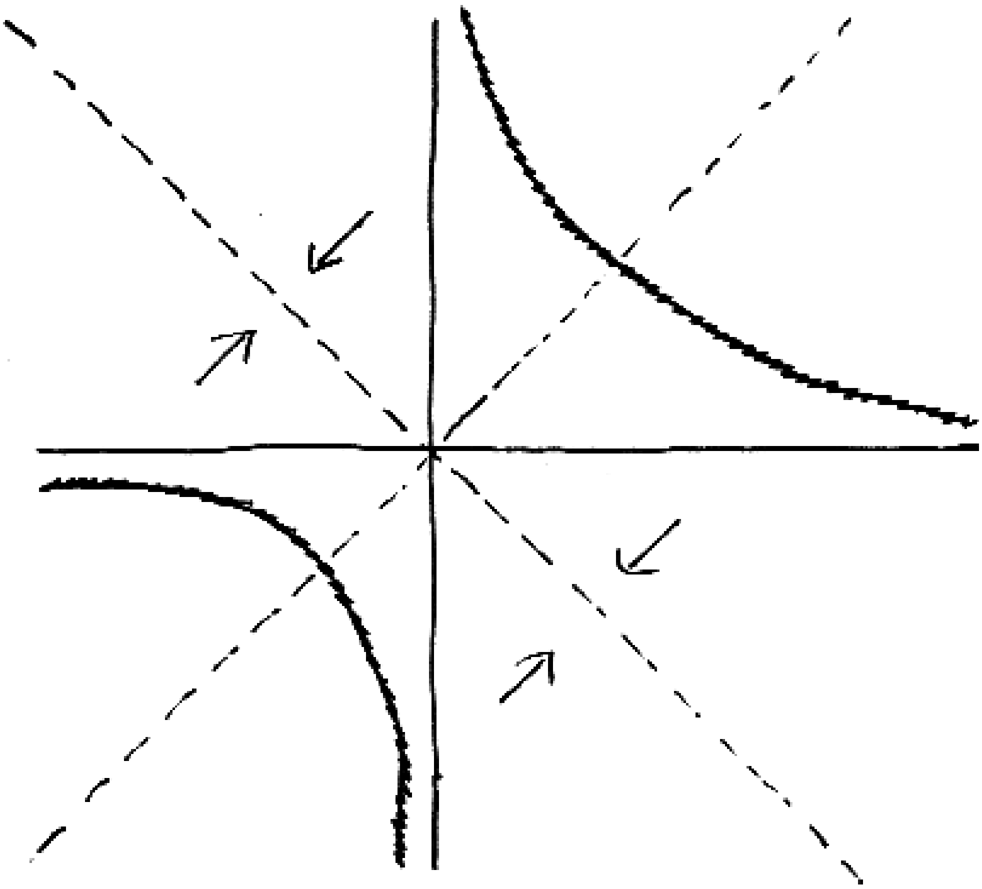


Illustration zum Noether'schen Normalisierungslemma, genauer seiner in 5.4.8 formulierten Verfeinerung im Fall eines unendlichen Grundkörpers. Hier ist $A = k[x, y]/\langle xy\rangle$ die Algebra der regulären Funktionen auf einer Hyperbel. Sie ist weder ganz über $k[x]$ noch ganz über $k[y]$, aber wählen wir eine geeignete Linearkombination dieser Erzeuger, etwa $x_1 := x - y$, so ist A ganz über $k[x_1]$. In der Tat haben wir ja $x^2 - x_1x = 0$ und $y^2 + x_1y = 0$. Geometrisch bedeutet das, daß im neu gestrichelt eingezeichneten Koordinatensystem „auf keinem Zweig unserer affinen Kurve die zweite Koordinate, etwa $y_1 := x + y$ oder auch irgendeine andere mögliche zweite Koordinate, ins Unendliche strebt, wenn wir die Koordinate x_1 auf der Nebendiagonalen gegen einen Punkt im Endlichen streben lassen".

Abbildung eine algebraische Körpererweiterung

$$k \hookrightarrow k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$$

liefert. Nach dem Normalisierungssatz können wir $x_1, \ldots, x_d \in k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ finden derart, daß $x_1, \ldots, x_d$ algebraisch unabhängig sind über k und daß der Restklassenring $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ ganz ist über $k[x_1, \ldots, x_d]$. Nach 5.2.4 ist dann auch $k[x_1, \ldots, x_d]$ ein Körper. Das zeigt $d = 0$ und damit die Behauptung.

Korollar 5.4.10. *Seien k ein Körper und $A \subset B$ ringendliche kommutative Integritätsringe über k. So gibt es ein Element $t \in A\backslash 0$ und über A algebraisch unabhängige Elemente $z_1, \ldots, z_d \in B$ mit B_t ganz über $A_t['z_1, \ldots, z_d]$.*

Beweis. Zunächst sei $S := A\backslash 0$. Sicher ist $S^{-1}B$ ringendlich über dem Körper $S^{-1}A$. Nach Noether's Normalisierungslemma 5.4.6 finden wir $z_1, \ldots, z_d \in S^{-1}B$ mit $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A['z_1, \ldots, z_d]$. Durch Wegmultiplizieren der Nenner dürfen wir sogar $z_1, \ldots, z_d \in B$ annehmen. Nach Annahme können wir auch ein endliches Erzeugendensystem der k-Ringalgebra B wählen. Jetzt betrachten wir je eine Ganzheitsgleichung über $S^{-1}A['z_1, \ldots, z_d]$ für jeden dieser Erzeuger und nehmen als $t \in S$ einen Hauptnenner für alle diese Ausdrücke. □

5.4.11 (**Faktorisierungssatz**). Im geometrischen Fall bedeutet das Korollar unter Verwendung von 3.4.21, daß für jeden dominanten Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen affinen Varietäten ein $t \in \mathcal{O}(Y)\backslash 0$ existiert derart, daß sich $\varphi : \varphi^{-1}(Y_t) \to Y_t$ faktorisieren läßt als eine Komposition

$$\varphi^{-1}(Y_t) \to k^d \times Y_t \to Y_t$$

mit einem ersten Morphismus, der einer ganzen Ringerweiterung entspricht und insbesondere surjektiv ist mit endlichen Fasern, und der Projektion auf den hinteren Faktor als zweitem Morphismus. Insbesondere nimmt eine reguläre Funktion auf einer affinen Varietät entweder nur endlich viele Werte an oder aber alle Werte mit höchstens endlich vielen Ausnahmen. Ich würde dafür gerne einen noch einfacheren Beweis geben können.

Korollar 5.4.12 (Bilder von Morphismen von Varietäten). *Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten umfaßt sein Bild stets eine offene dichte Teilmenge vom Abschluß des Bildes, in Formeln*

$$\exists U \subset \varphi(X) \text{ mit } U \circledcirc \overline{\varphi(X)} \text{ und } \bar{U} = \overline{\varphi(X)}.$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß unser Morphismus dichtes Bild hat. Dann zerlegen wir Y in irreduzible Komponenten und jede irreduzible Komponente von X

wird in eine von ihnen abgebildet. Dann gibt es sogar für jede irreduzible Komponente $Y_\nu \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\!\mathsf{A}} Y$ eine irreduzible Komponente von $X_\mu \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\!\mathsf{A}} X$ derart, daß das Bild von X_μ in Y_ν enthalten ist und dicht liegt. Nach dem Faktorisierungssatz 5.4.11 umfaßt das Bild von X_μ dann sogar eine offene nichtleere Teilmenge von Y_ν. Das Korollar folgt. □

Ergänzung 5.4.13 (**Satz von Chevalley**). Diejenigen Teilmengen eines topologischen Raums, die in der von den offenen Teilmengen erzeugten Mengenalgebra liegen, heißen die **konstruktiblen Teilmengen** unseres topologischen Raums. In anderen Worten sind die konstruktiblen Teilmengen eines topologischen Raums genau alle endlichen Vereinigungen von lokal abgeschlossenen Teilmengen oder mit [AN3] 15.1.2.33 auch alle endlichen disjunkten Vereinigungen von lokal abgeschlossenen Teilmengen. Der Satz von Chevalley besagt nun, daß das Bild einer konstruktiblen Teilmenge einer Varietät unter einem Morphismus von Varietäten stets konstruktibel ist. Man folgert das unschwer durch Induktion über die Dimension der Varietät, von der unser Morphismus ausgeht. Sicher reicht es, wenn wir im Induktionsschritt im Fall eines dominanten Morphismus irreduzibler Varietäten zeigen können, daß sein Bild konstruktibel ist. Dann ist aber nach 5.4.12 das Bild mindestens einer offenen dichten Teilmenge offen, mithin konstruktibel, und das Bild ihres Komplements ist nach Induktionsannahme auch konstruktibel. Umgekehrt zeigt man leicht, daß jede konstruktible Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums eine dichte offene Teilmenge ihres Abschlusses umfaßt. So folgt umgekehrt 5.4.12 aus dem Satz von Chevalley.

5.4.14. Unter dem Separabilitätsgrad $[L : K]_{\mathrm{s}}$ einer algebraischen Körpererweiterung verstehen wir wie in [AL] 3.9.45 den Grad über K der maximalen separablen Teilerweiterung.

Satz 5.4.15 (Fasern von Morphismen zu endlichen Körpererweiterungen). *Seix $\varphi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten derselben Dimension. So gibt es eine dichte offene Teilmenge $V \overset{\circ}{\subset} Y$ derart, daß die Kardinalität der Faser über jedem Punkt von V so groß ist wie der Separabilitätsgrad der zugehörigen Körpererweiterung, in Formeln*

$$|\varphi^{-1}(y)| = [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_{\mathrm{s}} \quad \forall y \in V$$

Vorschau 5.4.16. Mit dem Satz über generische Freiheit 5.5.3 können wir zusätzlich erreichen, daß V und $\varphi^{-1}(V)$ Nichtnullstellenmengen regulärer Funktionen sind und daß $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ frei ist als Modul über $\mathcal{O}(V)$, der dann natürlich frei sei muß vom Rang

$$\dim_{\mathcal{O}(V)} \mathcal{O}(\varphi^{-1}(V)) = [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]$$

In [AAG] 2.4.14 verallgemeinern wir die Ausage des Satzes auf beliebige, nicht notwendig affine Varietäten.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß unser Satz für die Verknüpfung $X \to Y \to Z$ von zwei Morphismen folgt, wenn er für die beiden einzelnen Morphismen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ gilt. Dazu finden wir zunächst eine dichte offene Teilmenge $V \Subset Y$ wie im Satz für den ersten Morphismus und beachten, daß $\psi(Y \backslash V)$ aus Dimensionsgründen nicht in Z dicht liegen kann. Dann finden wir eine dichte offene Teilmenge $W \Subset Z$ wie im Satz, die außerdem $\psi(Y \backslash V)$ nicht trifft, und diese ist dann aufgrund der Multiplikativität des Separabilitätsgrades [AL] 3.9.45 auch geeignet für die Verknüpfung. Nach dem Faktorisierungssatz 5.4.11 dürfen wir annehmen, daß $\mathcal{O}(X)$ ganz ist über $\mathcal{O}(Y)$. Aus Lemma 5.2.3 folgt dann, daß die Lokalisierung von $\mathcal{O}(X)$ nach $S := \mathcal{O}(Y)\backslash 0$ bereits ein Körper ist. Insbesondere dürfen wir $\mathcal{M}(X) = S^{-1}\mathcal{O}(X)$ annehmen. Sicher finden wir andererseits auch einen Körperturm

$$\mathcal{M}(Y) = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = \mathcal{M}(X)$$

derart, daß jeder Schritt entweder durch Adjunktion eines über K_{i-1} separablen Elements $f_i \in K_i$ entsteht oder im Fall positiver Charakteristik $p > 0$ durch Adjunktion eines Elements $f_i \in K_i$ mit $f_i^p \in K_{i-1}$. Indem wir alle f_i als Brüche in $S^{-1}\mathcal{O}(X)$ schreiben und Y verkleinern zur Nichtnullstellenmenge des Produkts der beteiligten Nenner, dürfen wir annehmen, daß alle diese Elemente bereits zu $\mathcal{O}(X)$ gehören. Indem wir notfalls unsere Kette noch verlängern, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß unsere Kette durch Lokalisieren nach S aus einer Kette von Zwischenringen

$$\mathcal{O}(Y) = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_r = \mathcal{O}(X)$$

entsteht mit $R_i = R_{i-1}[f_i]$. Insgesamt können wir uns so auf die beiden Spezialfälle zurückziehen, daß gilt $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[f]$ mit $f^p \in \mathcal{M}(Y)$ oder f separabel über $\mathcal{M}(Y)$. Indem wir Y weiter verkleinern zur Nichtnullstellenmenge des Produkts der Nenner des Minimalpolynoms P von f können wir zusätzlich $P \in \mathcal{O}(Y)[T]$ und

$$\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[T]/\langle P \rangle$$

annehmen. Unser Morphismus kann dann identifiziert werden mit der Projektion auf den ersten Faktor

$$X := \{(y, \lambda) \in Y \times k \mid P(y, \lambda) = 0\} \;\to\; Y$$

Im ersten Fall $f^p \in \mathcal{M}(Y)$ ist dann bereits klar, daß diese Projektion eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} Y$ sein muß und die Körpererweiterung rein inseparabel und die Aussage des Satzes gilt. Im zweiten Fall eines separablen Polynomes ist die Diskriminante [AL] 2.9.16 unseres Polynoms P nicht Null in $\mathcal{M}(Y)$, also nicht Null in $\mathcal{O}(Y)$, und über allen Nichtnullstellen der Diskriminante in Y liegen genau so viele Punkte von X, wie der Grad von P angibt. Folglich gilt die Aussage des Satzes auch in diesem Fall. $\square$

Übungen

Übung 5.4.17. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und zwei nichtleere algebraische Teilmengen $X \underset{\mathcal{A}}{\subset} k^n$ und $Y \underset{\mathcal{A}}{\subset} k^m$ zeige man die Formel $\mathrm{kdim}(X \times Y) = \mathrm{kdim}X + \mathrm{kdim}Y$. Hinweis: Noether-Normalisierung 5.4.6.

Übung 5.4.18 (**Dimension von Bildern und Fasern**). Gegeben ein Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ mit X irreduzibel zeige man, daß es eine offene dichte Teilmenge $V \circledcirc \overline{\varphi(X)}$ gibt derart, daß für alle $y \in V$ gilt

$$\mathrm{kdim}(X) = \mathrm{kdim}(\overline{\varphi(X)}) + \mathrm{kdim}(\varphi^{-1}(y))$$

Hinweis: Faktorisierungssatz und Eigenschaften von Morphismen mit ganzen Komorphismen 5.2.18. Mehr über Bilder und Fasern von Morphismen wird im Zusammenhang mit dem Krull'schen Hauptidealsatz in 5.9.18 und 5.10.5 erklärt.

Übung 5.4.19 (**Überdeckung einer Varietät durch Untervarietäten**). Eine irreduzible affine Varietät über einem überabzählbaren algebraisch abgeschlossenen Körper k kann nicht durch abzählbar viele echte abgeschlossene Teilmengen überdeckt werden. Hinweis: Mit dem Normalisierungssatz ziehe man sich auf den Fall zurück, daß unsere Varietät der k^n ist. Dann findet man eine Hyperebene, die in keiner unserer Teilmengen enthalten ist, und argumentiert mit Induktion.

5.5 Flache Morphismen

Definition 5.5.1. Ein Morphismus von affinen Varietäten $\varphi : X \to Y$ heißt **flach**, wenn sein Komorphismus $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ flach ist.

Beispiel 5.5.2. Offensichtlich ist die Verknüpfung von flachen Morphismen flach. Aufgrund der Exaktheit der Lokalisierung ist für jede reguläre Funktionen $f \in \mathcal{O}(X)$ auf einer affinen Varietät X die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ der Nichtnullstellenmenge flach.

Satz 5.5.3 (Generische Freiheit ringendlicher Kringerweiterungen). *Gegeben $\varphi : A \to B$ ein Kringhomomorphismus mit A einem Integritätsbereich und B ringendlich über A gibt es $a \in A \backslash 0$ derart, daß die Lokalisierung B_a ein freier A_a-Modul ist.*

5.5.4. Einen Kringhomomorphisms $A \to B$ nenne ich **modulfrei**, wenn darunter B ein freier A-Modul wird. Weiter nenne ich eine Kringerweiterung $A \to B$ **modulspaltend**, wenn sie injektiv ist und als Homomorphismus von A-Moduln spaltet. Im Beweis zeigen wir, daß wir $a \in A\backslash 0$ sogar so wählen können, daß entweder gilt $B_a = 0$ oder daß $A_a \hookrightarrow B_a$ eine modulfreie und modulspaltende Kringerweiterung ist.

Beweis. Wir wählen $b_1, \ldots, b_r \in B$ mit $B = \varphi(A)[b_1, \ldots, b_r]$. Auf der Menge $\mathbb{N}^r$ der Multiindizes erklären wir eine Anordung $\leq$ durch $\nu \leq \mu$ falls $|\nu| < |\mu|$ oder $|\nu| = |\mu|$ und ν lexikographisch kleinergleich μ. Dann setzen wir $B_{<\nu} := \sum_{\mu<\nu} Ab^\mu$ und $B_{\leq\nu} := \sum_{\mu\leq\nu} Ab^\mu$ und finden kurze exakte Sequenzen von A-Moduln

$$B_{<\nu} \hookrightarrow B_{\leq\nu} \twoheadrightarrow A/I(\nu)$$

mit $I(\nu) = \{a \in A \mid ab^\nu \in B_{<\nu}\}$. Offensichtlich gilt $\mu \leq \nu \Rightarrow \mu + \lambda \leq \nu + \lambda$ und daraus folgt $I(\nu) \subset I(\nu + \lambda)$ für alle λ. Die Menge $T := \{\nu \mid I(\nu) \neq 0\}$ ist also ein Monoidideal von $\mathbb{N}^r$ im Sinne von 1.5.21 und ist folglich endlich erzeugt, sagen wir

$$T = \bigcup_{\eta \in E} (\eta + \mathbb{N}^r)$$

für eine endliche Teilmenge $E \subset T$. Dann finden wir Elemente $a_\eta \in I(\eta)\backslash 0$ für $\eta \in E$ und für deren Produkt $a \in A\backslash 0$ gilt $I(\nu) \neq 0 \Rightarrow a \in I(\nu)$. Für dieses $a \in A\backslash 0$ bilden schließlich die b^ν mit $I(\nu) = 0$ eine A_a-Basis von B_a. □

Alternativer Beweis des körpertheoretischen Nullstellensatzes 1.6.10. Sei $L \supset k$ eine ringendliche Körpererweiterung. Es gilt zu zeigen, daß L algebraisch ist über k. Andernfalls gäbe es $x \in L$ mit x transzendent über k. Nach 5.5.3 gibt es also $f \in k[x]$ mit L frei als $k[x]_f$-Modul. Nach [AL] 2.4.31 gibt es aber in $k[X]_f$ ein Element g, das weder Null ist noch eine Einheit, und das steht nunmehr im Widerspruch zu $(g\cdot) : L \stackrel{\sim}{\to} L$. □

Beispiel 5.5.5 (**Generische Flachheit**). Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten gibt es eine Funktion $s \in \mathcal{O}(Y)$ mit dichter Nichtnullstellenmenge Y_s derart, daß $\mathcal{O}(X)_{s\circ\varphi} = \mathcal{O}(X_{s\circ\varphi})$ flach ist über $\mathcal{O}(Y)_s = \mathcal{O}(Y_s)$. Ist Y irreduzibel, so zeigt 5.5.3 sogar, daß wir erreichen können, daß $\mathcal{O}(X)_{s\circ\varphi}$ ein freier Modul über $\mathcal{O}(Y)_s$ ist. Sonst können wir zunächst t so finden, daß Y_t in Y dicht liegt und die disjunkte Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten ist, und können dann für jede irreduzible Komponente separat das vorherige Argument anwenden.

Satz 5.5.6 (Flach impliziert offenes Bild). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist $\varphi : A \to B$ ein Homomorpismus von über k ringendlichen k-Kringen und ist B flach als A-Modul, so ist die induzierte Abbildung $\bar{\varphi} : \operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ offen.*

5.5.7. Dieser Satz ist eine besonders einfache Variante einer ganzen Vielfalt von Aussagen, die für Kringhomomorphismen Kriterien dafür angeben, wann die induzierte Abbildung auf den Spektren offen ist.

Beweis. Jede offene Teilmenge von $\operatorname{Max} B$ ist eine Vereinigung von Bildern von $\operatorname{Max} B_g$ für $g \in B$. Da $B \to B_g$ flach ist, müssen wir nur zeigen, daß das Bild von $\operatorname{Max} B$ offen ist. Wir argumentieren mit Induktion über die Krulldimension von A. Ist sie Null oder ist A der Nullring, so trägt $\operatorname{Max} A$ die diskrete Topologie und es bleibt nichts zu zeigen. Ist $A \to D$ irgendein Kringhomomorphismus, so ist auch $D \otimes_A B$ flach als D-Modul. Wenden wir diese Erkenntnis an auf $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$ für die minimalen Primideale $\mathfrak{p} \subset A$, von denen es nach 4.5.24 nur höchstens endlich viele gibt, so können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß A ein Integritätsbereich der kleinsten Krulldimension ist, für die wir unsere Behauptung noch nicht gezeigt haben. Ist nun das Bild $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ nicht dicht, so gibt es $f \in A \backslash 0$ mit $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B) \subset \mathcal{A}(f)$ in unserer Notation aus 4.5.14. In anderen Worten liegt $\varphi(f)$ in jedem maximalen Ideal von B und damit nach 3.4.7 im Nilradikal von B. Aufgrund der Flachheit muß andererseits die Injektion $(f \cdot) : A \hookrightarrow A$ eine Injektion $(\varphi(f) \cdot) : B \hookrightarrow B$ induzieren und wir sehen so, daß aus $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ nicht dicht bereits folgt $B = 0$. Da die leere Menge eh offen ist, dürfen wir annehmen, daß $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ dicht ist in $\operatorname{Max} A$, und müssen zeigen, daß es dann auch offen ist. Zuächst einmal umfaßt $\bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ nach 5.4.12 eine offene dichte Teilmenge $U \overset{\circ}{\subset} \operatorname{Max} A$. Deren Komplement ist eine abgeschlossene Teilmenge $Y \overset{\mathrm{A}}{\subsetneq} \operatorname{Max} A$ echt kleinerer Krulldimension und per Induktion wissen wir bereits, daß das Bild von $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(Y) \otimes_A B) \to Y$ alias $Y \cap \bar{\varphi}(\operatorname{Max} B)$ offen ist in Y. Die Behauptung folgt. $\square$

5.5.8. Wir nennen einen Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen k-Varietäten **scheinflach**, wenn es ein kommutatives Diagramm von ringendlichen k-Kringalgebren

$$\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

gibt derart, daß die Horizontalen Surjektionen sind mit den jeweiligen Nilradikalen als Kern und daß $A \to B$ ein flacher Kringhomomorphismus ist. Ich erwarte nicht, daß jede Verknüpfung scheinflacher Morphismen wieder scheinflach ist. Dieser Begriff ist nur im Kontext vom Varietäten nützlich und kommt in der Literatur sonst noch nicht vor. Jeder flache Morphismus ist auch scheinflach.

Korollar 5.5.9 (**Eigenschaften scheinflacher Morphismen**). *1. Jeder scheinflache Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten induziert eine offene Abbildung der zugrundeliegenden topologischen Räume;*

2. *Ist $\varphi : X \to Y$ ein scheinflacher Morphismus von affinen Varietäten und $T \to Y$ ein beliebiger Morphismus von affinen Varietäten, so ist auch der induzierte Morphismus $X \times_Y T \to T$ scheinflach.*

Vorschau 5.5.10. Zusätzliche Eigenschaften, die insbesondere die Dimensionen von Fasern betreffen, diskutieren wir in 5.10.5.

5.5.11. Zum Beispiel folgt, daß gegeben ein flacher oder auch nur scheinflacher Morphismus $\varphi : X \to Y$ und $Z \underset{\mathcal{A}}{\subset} Y$ abgeschlossen auch $\varphi : \varphi^{-1}(Z) \to Z$ scheinflach und insbesondere offen ist.

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus Satz 5.5.6. Teil 2 folgt sofort aus den Definitionen und der Beschreibung des Faserprodukts 3.4.20. □

5.6 Transzendenzgrad

5.6.1. Ich erinnere an den Satz [AL] 3.11.3 über algebraische Körpererweiterungen und insbesondere daran, daß für Körper $M \supset L \supset K$ mit M/L algebraisch und L/K algebraisch auch M/K algebraisch ist.

Definition 5.6.2. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine Teilmenge $B \subset K$ heißt **algebraisch abhängig über** k, wenn es paarweise verschiedene $x_1, \ldots, x_n \in B$ und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[X_1, \ldots, X_n]\backslash 0$ gibt derart, daß gilt $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Andernfalls nennen wir unsere Teilmenge B **algebraisch unabhängig über** k.

Definition 5.6.3. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine Teilmenge $E \subset K$ heißt ein **System von Transzendenzerzeugern**, wenn K algebraisch ist über dem von E erzeugten Teilkörper. Ein algebraisch unabhängiges System von Transzendenzerzeugern heißt eine **Transzendenzbasis** unserer Körpererweiterung.

Satz 5.6.4 (Extremalcharakterisierungen von Transzendenzbasen). *Sei K/k eine Körpererweiterung.*

1. *Ist $A \subset K$ eine über k algebraisch unabhängige Teilmenge und ist E minimal unter allen Systemen von Transzendenzerzeugern unserer Körpererweiterung mit $A \subset E$, so ist E eine Transzendenzbasis;*

2. *Ist $E \subset K$ ein Systemen von Transzendenzerzeugern und A maximal unter allen über k algebraisch unabhängigen Teilmengen von K mit $A \subset E$, so ist A eine Transzendenzbasis.*

5.6.5. Hier sind die Begriffe minimal und maximal in Bezug auf die Teilordnung durch Inklusion zu verstehen.

Beweis. 1. Gegeben ein algebraisch abhängiges System $E \supset A$ finden wir ein von Null verschiedenes Polynom kleinstmöglichen Totalgrades, das auf einem Tupel von paarweise verschiedenen Elementen aus E verschwindet. Da A algebraisch unabhängig ist, muß die Variable zu mindestens einem Element von $E \backslash A$ in unserem Polynom auch wirklich mit positivem Exponenten in einem Monom mit von Null verschiedenem Koeffizienten vorkommen. Fassen wir unseren Ausdruck dann als Polynom in dieser Variable auf, so sind die Koeffizienten mit Ausnahme des konstanten Terms alle von kleinerem Totalgrad und unser Polynom wird folglich nicht das Nullpolynom, wenn wir in die anderen Variablen die jeweiligen Elemente einsetzen. Also ist das in diese Variable einzusetzende Element algebraisch über den anderen und E war kein minimales System von Transzendenzerzeugern über A.

2. Wäre unsere algebraisch unabhängige Teilmenge A kein System von Transzendenzerzeugern, so fänden wir ein Element $e \in E$, daß über dem von unserer Teilmenge erzeugten Teilkörper nicht algebraisch wäre. Das könnten wir zu unserer algebraisch unabhängigen Teilmenge hinzunehmen und das Resultat wäre immer noch algebraisch unabhängig. Also wäre unsere algebraisch unabhängige Teilmenge nicht maximal gewesen. □

5.6.6 (**Existenz einer Transzendenzbasis**). Wir finden für jede Körpererweiterung mit dem Zorn'schen Lemma eine Transzendenzbasis als ein maximales algebraisch unabhängiges System, ja gegeben $A \subset E$ eine algebraisch unabhängige Teilmenge in einem System von Transzendenzerzeugern können wir stets eine Transzendenzbasis B finden mit $A \subset B \subset E$.

Satz 5.6.7 (Austauschsatz). *Gegeben K/k eine Körpererweiterung, $E \subset K$ ein System von Transzendenzerzeugern und $A \subset K$ eine über k algebraisch unabhängige Teilmenge gibt es eine Injektion $\varphi : A \hookrightarrow E$ derart, daß auch $(E \backslash \varphi(A)) \cup A$ ein System von Transzendenzerzeugern ist.*

Beweis. Das folgt leicht induktiv aus dem Austauschlemma 5.6.8, das wir im Anschluß beweisen. Es erlaubt uns nämlich, die Elemente von A der Reihe nach in E hineinzutauschen. Ist A unendlich, so verwendet man transfinite Induktion oder argumentiert analog wie in [AL] 5.3.5 mit dem Zorn'schen Lemma. □

Lemma 5.6.8 (Austauschlemma). *Sei K/k eine Körpererweiterung. Seien weiter $E \supset B$ ein System von Transzendenzerzeugern mit einer über k algebraisch unabhängigen Teilmenge. Ist $a \in K \backslash B$ ein Element außerhalb von B derart, daß auch $B \cup \{a\}$ über k algebraisch unabhängig ist, so gibt es $e \in E \backslash B$ derart, daß auch $(E \backslash e) \cup \{a\}$ ein System von Transzendenzerzeugern von K/k ist.*

Beweis. Wir finden eine endliche Teilmenge $F \subset E$ mit $\{a\} \cup B \cup F$ algebraisch abhängig. Wir wählen eine derartige Teilmenge F der kleinstmöglichen Kardinalität, so daß a forteriori gilt $F \cap B = \emptyset$, und finden darin $F_0 \subset F$ maximal mit $\{a\} \cup B \cup F_0$ algebraisch unabhängig. Dann gilt $F_0 \subsetneq F$ und jedes Element $e \in F \backslash F_0$ hat die geforderte Eigenschaft. □

5.6.9 (**Hauptabschätzung**). Gegeben eine Körpererweiterung K/k und $E \subset K$ ein System von Transzendenzerzeugern und $A \subset K$ eine algebraisch unabhängige Teilmenge gibt es nach dem Austauschsatz 5.6.7 stets eine Injektion $A \hookrightarrow E$ und es gilt mithin

$$|A| \leq |E|$$

5.6.10 (**Kardinalitäten von Transzendenzbasen**). Jede Körpererweiterung mit einem endlichen System von Transzendenzerzeugern besitzt insbesondere eine endliche Transzendenzbasis und je zwei ihrer Transzendenzbasen haben gleich viele Elemente. Allgemeiner haben nach 5.6.9 und Schröder-Bernstein überhaupt je zwei Transzendenzbasen einer Körpererweiterung dieselbe Kardinalität.

Definition 5.6.11. Die Kardinalität einer und jeder Transzendenzbasis einer Körpererweiterung mit einem endlichen System von Transzendenzerzeugern heißt ihr **Transzendenzgrad** und wird

$$\operatorname{trgr}(K/k) = \operatorname{trgr}_k K$$

notiert. Besitzt eine Körpererweiterung kein endliches System von Transzendenzerzeugern, so setzten wir $\operatorname{trgr}(K/k) = \infty$ und ignorieren in unserer Notation im allgemeinen die auch hier durchaus möglichen Unterscheidungen zwischen verschiedenen unendlichen Kardinalitäten.

Korollar 5.6.12. *Sei k ein Körper. Gibt es einen Isomorphismus von k-Kringen $k('X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{\sim} k('Y_1, \ldots, Y_m)$, so gilt $m = n$.*

Beweis. Die Variablen bilden eine Transzendenzbasis für den Quotientenkörper eines Polynomrings und wir haben folglich $\operatorname{trgr}_k k('X_1, \ldots, X_n) = n$. □

Satz 5.6.13 (Transzendenzgrad als Krulldimension). *Gegeben ein ringendlicher Integritätsring A über einem Körper k stimmt die Krulldimension des Krings A überein mit dem Transzendenzgrad über k seines Quotientenkörpers, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{trgr}_k \operatorname{Quot}(A)$$

Beweis. Wir wählen mit dem Normalisierungslemma 5.4.6 über k algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_d \in A$ derart, daß A ganz ist über dem Polynomring $k['x_1, \ldots, x_d]$, und finden

$$\operatorname{kdim} A = \operatorname{kdim} k['x_1, \ldots, x_d] = d = \operatorname{trgr}_k k('x_1, \ldots, x_d) = \operatorname{trgr}_k \operatorname{Quot}(A)$$

mit der Invarianz 5.2.11 der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen, der Berechnung 5.4.4 der Krulldimension von Polynomringen, und der Invarianz 5.6.10 des Transzendenzgrades unter algebraischen Körpererweiterungen. □

Korollar 5.6.14. *Gegeben eine Erweiterung $A \hookrightarrow B$ von ringendlichen k-Kringen über einem vorgegebenen Körper k haben wir stets*

$$\operatorname{kdim} A \leq \operatorname{kdim} B$$

Beweis. Sowohl A als auch B haben nach 4.5.24 nur endlich viele minimale Primideale und deren Schnitt ist jeweils das Nilradikal. Jedes minimale Primideal von A ist mithin der Schnitt mit A eines minimalen Primideals von B. Indem wir ein Primideal von A auswählen, mit dem eine längstmögliche Primidealkette beginnt, und zu den Quotienten übergehen, dürfen wir A und B als Integritätsringe annehmen. Der Faktorisierungssatz oder genauer seine algebraische Fassung 5.4.10 zeigt dann $\operatorname{trgr}(\operatorname{Quot} A)/k \leq \operatorname{trgr}(\operatorname{Quot} B)/k$ und die Behauptung folgt aus der Interpretation 5.6.13 der Krulldimension als Transzendenzgrad. □

Beweis in geometrischer Sprache. Ist der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen, so können wir dieselbe Argumentation auch geometrisch fassen, wie nun ausgeführt werden soll. Zunächst man man die Nilradikale wegteilen, so daß unsere Kringerweiterung einem Morphismus $\varphi : X \to Y$ von affinen Varietäten mit dichtem Bild entspricht. Wählen wir in Y eine irreduzible Komponente maximaler Dimension aus, so muß die der Abschluß des Bildes einer irreduziblen Komponente von X sein. Wir dürfen also X und Y irreduzibel und φ dominant annehmen. Damit induziert φ eine Körpererweiterung $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ und die Interpretation 5.6.13 der Krulldimension als Transzendenzgrad zeigt die Behauptung. Alternativ könnten wir auch Übung 5.4.18 anwenden. □

Ergänzung 5.6.15. Als abstrakter Körper besitzt $\mathbb{C}$ eine Transzendenzbasis B über $\mathbb{Q}$. Wäre B abzählbar, so wäre auch $\mathbb{Q}(_! B)$ abzählbar und damit nach [AL] 5.3.13 auch eine algebraische Erweiterung $\mathbb{C}$. Da dem nicht so ist, muß B überabzählbar und insbesondere unendlich sein, und daraus folgt dann mit [AL] 5.3.13 leicht $|B| = |\mathbb{Q}(_! B)| = |\mathbb{C}|$. Als abstrakter Körper ist $\mathbb{C}$ also isomorph zum algebraischen Abschluß eines Funktionenkörpers über $\mathbb{Q}$ in überabzählbar vielen, genauer in $|\mathbb{C}|$ Veränderlichen. Insbesondere besitzt $\mathbb{C}$ jede Menge Körperautomorphismen, und es gibt auch zahllose nicht surjektive Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Das steht in scharfem Kontrast zum Körper $\mathbb{R}$, nach [AN1] 12.2.4.21 gibt es nämlich außer der Identität keinen Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 5.6.16. Das **vierzehnte Hilbert'sche Problem** fragt, ob für eine endlich erzeugte Körpererweiterung $k \subset K$ und einen Zwischenkörper $M \subset K$ und einen „Zwischenring“ $R \subset K$, der als Ring über k endlich erzeugt ist, auch $R \cap M$ ein über k endlich erzeugter Ring sein muß. Nagata fand dazu das erste Gegenbeispiel. Inzwischen sind viele weitere Gegenbeispiele bekannt, von Mukai, Winkelmann, Steinberg, Kuroda und anderen.

Ergänzung 5.6.17. Gegeben $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ besagt die **Vermutung von Schanuel**, daß der von den α_i und den Werten der Exponentialfunktion bei α_i erzeugte Unterkörper der komplexen Zahlen

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n))$$

über $\mathbb{Q}$ mindestens den Transzendenzgrad n haben sollte. Im Spezialfall algebraischer α_i spezialisiert er zum Satz von Hermite-Lindemann, den wir in [AN1] 12.4.5.24 erwähnt aber nicht bewiesen haben.

Vorschau 5.6.18. Eindimensionale holomorphe Mannigfaltigkeiten heißen auch „Riemann'sche Flächen", da sie erstmals von dem Mathematiker Bernhard Riemann betrachtet wurden und als reelle Mannigfaltigkeiten zweidimensional sind. Die Zuordnung, die jeder zusammenhängenden Riemann'schen Fläche X den Körper $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf X zuordnet, liefert eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{kompakte} \\ \text{zusammenhängende} \\ \text{Riemann'sche Flächen} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{endlich erzeugte} \\ \text{Körpererweiterungen von } \mathbb{C} \\ \text{vom Transzendenzgrad Eins} \end{array} \right\}$$

Genauer meinen wir hier rechts Riemann'sche Flächen bis auf Isomorphie und links Körpererweiterungen bis auf Isomorphie von Körpern über $\mathbb{C}$. Zum Beispiel entspricht die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ unter dieser Bijektion dem Körper der gebrochen rationalen Funktion $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) = \mathbb{C}(t)$. Man kann weiter zeigen, daß gegeben zwei kompakte zusammenhängende Riemann'sche Flächen X, Y das Zurückholen von meromorphen Funktionen eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{nichtkonstante holomorphe} \\ \text{Abbildungen } X \to Y \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Ring}^{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X))$$

liefert. In diesem Licht wird die Galoistheorie im Fall endlich erzeugter algebraischer Erweiterungen des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(t)$ sehr anschaulich. In der Sprache der Kategorientheorie haben wir eine „Äquivalenz von Kategorien" vor uns. Eine algebraische Version dieser Äquivalenz werden wir in 8.6.2 herleiten.

5.6.19 (**Endomorphismen von Funktionenkörpern**). Unser Monoidhomomorphismus $K(X) \to \operatorname{Ens}(K \sqcup \{\infty\})$ aus [LA1] 5.5.27 verwandelt sich unter der üblichen Identifikation $K \sqcup \{\infty\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{P}^1 K$ in einen Monoidhomomorphismus $K(X) \to \operatorname{Ens}(\mathbb{P}^1 K)$, der in Formeln beschrieben werden kann durch die Vorschrift $f : \langle 1, x\rangle \mapsto \langle Q(x), P(x)\rangle$ für $f = P/Q$ eine Darstellung mit P und Q ohne gemeinsame Nullstelle in K oder besser, wenn man den Wert bei $\langle 0, 1\rangle$ auch korrekt erhalten will, durch $f : \langle y, x\rangle \mapsto \langle \tilde{Q}(y, x), \tilde{P}(y, x)\rangle$ für $\tilde{Q}, \tilde{P} \in K[Y, X]$ diejenigen homogenen Polynome vom gleichen Grad in zwei Variablen, die beim Einsetzen von $Y = 1$ unsere ursprünglichen Polynome liefern und bei denen der gemeinsame Grad unter diesen Bedingungen kleinstmöglich ist. Für $P(X) = X^2 + 1$ und $Q(X) = X^5 + X$ hätten wir etwa $\tilde{P}(Y, X) = X^2Y^3 + Y^5$ und $\tilde{Q}(Y, X) = X^5 + XY^4$. Die offensichtliche Operation von $\mathrm{GL}(2; K)$ auf $\mathbb{P}^1 K$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \langle y, x\rangle \mapsto \langle ay + bx, cy + dx\rangle$$

kommt dann offensichtlich her von einer Operation auf $K(X)$ durch Einsetzen von $(c+dX)/(a+bX)$ für X. Man kann sich auch überlegen, daß man so alle K-linearen Körperautomorphismen von $K(X)$ erhält, daß also das Einsetzen anderer nichtkonstanter rationaler Funktionen keinen Körperautomorphismus liefert: Ist K algebraisch abgeschlossen, so folgt das daraus, daß unter $K(X) \to \mathrm{Ens}(\mathbb{P}^1 K)$ andere Elemente keine Injektion liefern. Im allgemeinen gilt es, zu einem algebraischen Abschluß überzugehen.

Übungen

Übung 5.6.20. Gegeben eine Körpererweiterung K/k von endlichem Transzendenzgrad t und ebensoviele Elemente $x_1, \ldots, x_t \in K$, die entweder algebraisch unabhängig sind über k oder aber ein System von Transzendenzerzeugern sind über k, bilden unsere Elemente bereits eine Transzendenzbasis.

Übung 5.6.21. Sind $M \supset K \supset k$ Körper, so ist der Transzendenzgrad von M über k die Summe der Transzendenzgrade von M über K und von K über k, in Formeln

$$\mathrm{trgr}(M/k) = \mathrm{trgr}(M/K) + \mathrm{trgr}(K/k)$$

Übung 5.6.22. Seien $k \subset K \subset M$ Körper und sei K algebraisch über k. Man zeige: Sind $x_1, \ldots, x_n \in M$ algebraisch unabhängig über k, so sind sie auch algebraisch unabhängig über K. Hinweis: 5.6.21.

Übung 5.6.23. Jeder Zwischenkörper in einer körperendlichen Körpererweiterung ist auch körperendlich über dem kleineren Körper. Hinweis: Man beachte 5.6.21 sowie [AL] 3.4.18 und das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & L & \subset & L(x_{s+1}, \ldots, x_r) & \subset & M \\ & & \cup & & \cup & & \\ k & \subset & k(x_1, \ldots, x_s) & \subset & k(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_r) & & \end{array}$$

Ergänzende Übung 5.6.24. Gegeben zwei Körpererweiterungen eines gegebenen Körpers existiert stets eine weitere Körpererweiterung des gegebenen Körpers, in die sie beide eingebettet werden können. Mutige zeigen noch allgemeiner: Gegeben eine Familie von Körpererweiterungen eines gegebenen Körpers existiert stets eine weitere Körpererweiterung des gegebenen Körpers, in die sie alle eingebettet werden können.

5.7 Going-Down und maximale Primidealketten

Lemma 5.7.1. *Seien $A \subset B$ Kringe und $C \subset B$ der ganze Abschluß von A in B. So ist für jedes $S \subset A$ auch $S^{-1}C$ der ganze Abschluß von $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei S multiplikativ abgeschlossen. Daß alle Elemente von $S^{-1}C$ ganz sind über $S^{-1}A$ ist klar. Ist umgekehrt b/s mit $b \in B$ und $s \in S$ ganz über $S^{-1}A$, so gilt in $S^{-1}B$ eine Gleichung der Gestalt

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}} + \ldots + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

mit $s_i \in S$, $a_i \in A$. Setzen wir $t = s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$ und multiplizieren unsere Gleichung mit $(st)^n$, so zeigt sie, daß $bt/1$ ganz ist über $\operatorname{lok}(A) \subset S^{-1}A$ und es folgt, daß btu ganz ist über A für ein $u \in |S\rangle$. Es folgt $btu \in C$ und $b \in S^{-1}C$. $\square$

Definition 5.7.2. Ein Integritätsring heißt **ganz abgeschlossen**, wenn er kommutativ ist und sein eigener ganzer Abschluß in seinem Quotientenkörper.

5.7.3. Ein Kring A heißt **normal**, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsring ist. Nach 4.3.49 und 5.7.1 ist ein kommutativer Integritätsring genau dann normal, wenn er ganz abgeschlossen ist. Die Bedeutung der Normalitätsbedingung für beliebige Kringe diskutieren wir in den Übungen.

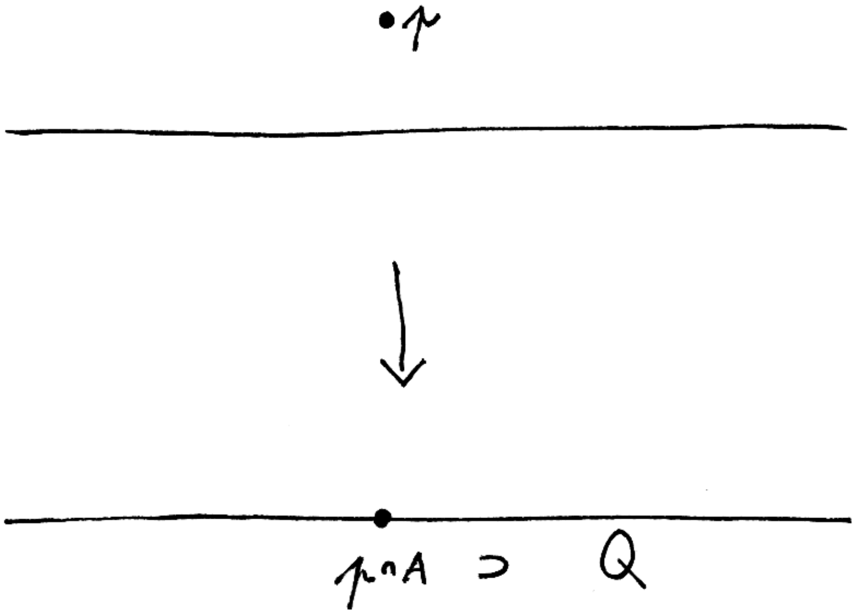
Beispiel 5.7.4. Nach [LA1] 5.3.44 ist $\mathbb{Z}$ ganz abgeschlossen. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für jeden faktoriellen Ring. Insbesondere ist nach [AL] 2.7.15 auch jeder Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit Koeffizienten in einem Körper ganz abgeschlossen.

Satz 5.7.5 (Going-down). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung von Integritätsringen und sei A ganz abgeschlossen. So gibt es für je zwei Primideale $Q \subset P$ von A und jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{p} \cap A = P$ ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = Q$ und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.*

5.7.6. Im Diagramm mit einer ganzen Kringerweiterung von Integritätsringen und A ganz abgeschlossen in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\mathfrak{q}} & \subset & \mathfrak{p} & \subset & B \\ \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \cup \\ Q & \subset & P & \subset & A \end{array}$$

sind also das Primideal $\mathfrak{p}$ und das Primideal Q mit den dargestellten Inklusionsrelationen vorgegeben und die Existenz des eingekastelten Primideals $\mathfrak{q}$ wird be-



Ein Gegenbeispiel zu Going-Down im Fall, daß B kein Integritätsring ist, liefert bereits die diagonale Einbettung $k[T] \subset k[T] \times k$ für einen Körper k. Geometrisch sieht man, daß der mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet Punkt oben, der eigentlich $\mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ darstellt, nicht zu einer irreduziblen Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{q})$ vergrößert werden kann, deren Bild als Abschluß die ganze Gerade $\mathcal{Z}(Q)$ unten hat.

hauptet. Sind in einem Diagramm mit unserer ganzen Kringerweiterung von Integritätsringen mit A ganz abgeschlossen in der rechten Vertikalen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{\boxed{\boxed{\mathfrak{p}_0}}} & \subset & \dots & \subset & \boxed{\boxed{\mathfrak{p}_{r-2}}} & \subset & \boxed{\mathfrak{p}_{r-1}} & \subset & \mathfrak{p}_r & \subset & B \\
\downarrow{\scriptstyle \cap A} & & & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \downarrow{\scriptstyle \cap A} & & \cup \\
P_0 & \subset & \dots & \subset & P_{r-2} & \subset & P_{r-1} & \subset & P_r & \subset & A
\end{array}$$

die nicht eingekastelten Primideale mit vorgegeben, so können wir also induktiv der Reihe nach die mehr und mehr eingekastelten Primideale finden. Daher rührt die Bezeichnung als „Going-Down“ im Gegensatz zum Going-Up aus 5.2.8.

5.7.7. Ich gebe hier einen Beweis, der mir besonders transparent scheint, der aber eine gewisse Vertrautheit mit Galoistheorie voraussetzt. In 5.8 gebe ich einen alternativen Beweis, der versucht, mit einem Minimum an Galoistheorie auszukommen.

Beweis im ringendlichen Fall. Wir beginnen mit dem einfacheren und für unsere Anwendungen ausreichenden Fall, daß B ringendlich ist über A. Dann ist $\operatorname{Quot} B / \operatorname{Quot} A$ eine modulendliche Körpererweiterung. Wir vereinbaren die Abkürzung $K := \operatorname{Quot} A$. Vergrößern wir unsere Körpererweiterung zu einer modulendlichen normalen Erweiterung N/K wie in [AL] 3.8.25 und betrachten den von den Bildern der Elemente von B unter der Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(N/K)$ erzeugten Teilring $C \subset N$, so ist auch C ganz und ringendlich über A. Da wir P nach Going-up als Schnitt mit B eines Primideals von C erhalten können, reicht es sicher, die Aussage von Going-down für unsere Kringerweiterung $A \subset C$ zu zeigen. Das folgt jedoch leicht aus dem anschließenden Satz 5.7.8. $\square$

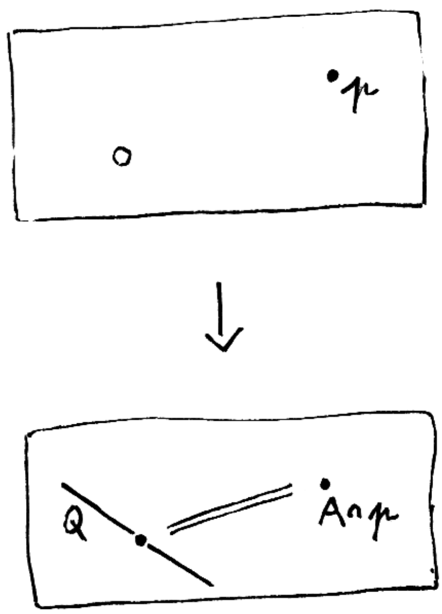
Satz 5.7.8 (Fasern als Galoisbahnen). *Seien A ein ganz abgeschlossener Integritätsring, $N/\operatorname{Quot} A$ eine normale Körpererweiterung mit endlicher Galoisgruppe und $C \subset N$ ein Teilring, der ganz ist über A und stabil unter der Galoisgruppe. So sind die Fasern der Surjektion*

$$\operatorname{Spec} C \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$$

genau die Bahnen der Galoisgruppe Γ in $\operatorname{Spec} C$ und für $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C$ gilt genauer

$$(\mathfrak{q} \cap A) \subset (\mathfrak{p} \cap A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tau \in \Gamma \text{ mit } \tau(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$$

Ergänzung 5.7.9. Der Satz gilt allgemeiner auch ohne Endlichkeitsannahmen an die Galoisgruppe. Den Beweis dieser Verallgemeinerung überlassen wir dem Leser als Übung. Man benötigt hierzu die Kompaktheit der Galoisgruppe in der Krull-Topologie und wendet [AN2] 14.5.1.13 an auf die Teilmengen der Galoisgruppe, die in endlichen normalen Teilerweiterungen die Schnitte von zwei Elementen einer Faser mit dieser Teilerweiterung ineinander überführen.



Ein Gegenbeispiel zu Going-Down liefert die endliche Kringerweiterung, die durch Verkleben zweier verschiedener Punkte der affinen Ebene im Sinne von 5.2.15 entsteht: Nehmen wir in unserer Ebene eine Gerade durch genau einen unserer Punkte, davon das Bild und dann wieder dessen Urbild, so besteht es aus einer Gerade nebst einem Punkt. Dieser Punkt definiert ein maximales Ideal, das sich nicht so zu einem Primideal verkleinern läßt, daß dessen Schnitt mit dem verklebten Ring gerade das Definitionsideal des Bildes unserer Gerade wäre, oder geometrisch gesagt: Dieser Punkt liegt auf keiner irreduziblen abgeschlossenen echten Teilmenge unserer Ebene, die unsere ursprüngliche Gerade umfaßt. In diesem Fall ist der verklebte Ring unten nicht ganz abgeschlossen.

Ergänzung 5.7.10. Ist unter den Annahmen des Satzes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} C$ ein maximales Ideal, so ist $C/\mathfrak{m}$ eine normale Körpererweiterung von $A/A \cap \mathfrak{m}$. In der Tat hat für $c \in C$ das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(c, \operatorname{Quot} A)$ Nullstellen in C und damit Koeffizienten in $C \cap \operatorname{Quot} A = A$ und kann folglich modulo $A \cap \mathfrak{m}$ reduziert werden.

Beweis. Es reicht für $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C$ zu zeigen, daß aus $\tau(\mathfrak{q}) \not\subset \mathfrak{p} \; \forall \tau \in \Gamma$ bereits folgt $(\mathfrak{q} \cap A) \not\subset (\mathfrak{p} \cap A)$. Sicher folgt jedoch $\tau(\mathfrak{q}) \not\subset \sigma(\mathfrak{p})$ für alle $\tau, \sigma \in \Gamma$ und so mit 4.2.31 die Existenz eines $f \in C$ mit $f \in \tau(\mathfrak{q}) \; \forall \tau \in \Gamma$ und $f \notin \sigma(\mathfrak{p}) \; \forall \sigma \in \Gamma$. Das Produkt über alle Galoiskonjugierten von f ist dann ein galoisinvariantes Element $g \in C^\Gamma$ mit derselben Eigenschaft, also mit $g \in \tau(\mathfrak{q}) \; \forall \tau \in \Gamma$ und $g \notin \sigma(\mathfrak{p}) \; \forall \sigma \in \Gamma$. Nun ist $N^\Gamma / \operatorname{Quot}(A)$ rein inseparabel nach [AL] 4.1.30 und nach [AL] 3.9.41 liegt folglich eine hinreichend hohe Potenz g^N von g sogar in $\operatorname{Quot}(A)$. Da aber g^N ganz ist über A, folgt $g^N \in A$. Nach Konstruktion haben wir nun $g^N \in \mathfrak{q} \cap A$ aber $g^N \notin \mathfrak{p} \cap A$. □

Beweis von Going-down im allgemeinen. Ist B nicht ringendlich über A, so funktioniert derselbe Beweis, solange sich $\operatorname{Quot} B$ derart zu einer normalen Körpererweiterung von $K := \operatorname{Quot} A$ vergrößern läßt, daß die zugehörige Galoisgruppe endlich ist. Sonst lassen wir alle Rücksichten fallen und vergrößern $\operatorname{Quot} B$ zu einem algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K, in dem wir dann den ganzen Abschluß $\bar{A} \subset \bar{K}$ von A betrachten. Wieder reicht es, die Behauptung von Going-Down für $A \subset \bar{A}$ zu zeigen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare $(L, \mathfrak{q}_L)$ bestehend aus einem Zwischenkörper L von $\bar{K}/K$ und einem Primideal $\mathfrak{q}_L$ des ganzen Abschlusses $A_L \subset L$ von A in L mit $\mathfrak{q}_L \subset \mathfrak{p} \cap A_L$ und $\mathfrak{q}_L \cap A = Q$. Sie ist offensichtlich induktiv teilgeordnet und hat folglich ein maximales Element $(M, \mathfrak{q}_M)$. Wäre aber dabei $M \neq \bar{K}$, so könnten wir unser Paar noch vergrößern unter Zuhilfenahme des bereits bewiesenen Falles endlicher Galoisgruppen, indem wir M vergrößern zum Zerfällungskörper eines geeigneten Polynoms mit Koeffizienten in M und beachten, daß A_M ganz abgeschlossen ist. □

Satz 5.7.11 (Topologisches Going-down). *Sei $A \subset B$ eine ganze Kringerweiterung von Integritätsringen und sei A ganz abgeschlossen. So induziert unsere Kringeinbettung auf den Spektren eine offene Surjektion*

$$\pi : \operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$$

Beweis. Wie zuvor ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß $\operatorname{Quot} B / \operatorname{Quot} A$ eine normale Körpererweiterung ist und $B \subset \operatorname{Quot} B$ stabil unter der Galoisgruppe Γ. Dann folgt aus 5.7.8 die Identität

$$(\operatorname{Spec} A) \backslash \pi(U) = \pi((\operatorname{Spec} B) \backslash \Gamma U)$$

für ΓU die Vereinigung aller Galoiskonjugierten von U. Ist nun U offen, so ist ΓU offen und $(\operatorname{Spec} B)\backslash\Gamma U$ abgeschlossen und damit ist nach Going-up 5.2.7, 5.2.10 auch $(\operatorname{Spec} A)\backslash\pi(U)$ abgeschlossen und $\pi(U)$ offen. □

Definition 5.7.12. Ein **Kettenlängenring** ist ein Kring, in dem es eine obere Schranke für die möglichen Längen von Primidealketten gibt und in dem je zwei maximale Primidealketten dieselbe Länge haben. In unserer Terminologie ist insbesondere auch der Nullring ein Kettenlängenring.

5.7.13. Die Maximalität ist hier in Bezug auf die offensichtliche Teilordnung auf der Menge aller Primidealketten zu verstehen. Die Bezeichnung als Kettenlängenring ist in der Literatur nicht gebräuchlich. In der üblichen Terminologie würde man solch einen Ring einen „äquidimensionalen und äquikodimensionalen Kettenring endlicher Krulldimension“ nennen.

Satz 5.7.14 (Geometrisch relevante Ringe sind Kettenlängenringe). *Jeder Integritätskring, der ringendlich ist über einem Körper, ist ein Kettenlängenring.*

5.7.15 (**Krulldimension und Krullkodimension**). Im geometrischen Fall bedeutet dieser Satz für $Y \underset{\text{\AE}}{\subset} X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge einer irreduziblen oder allgemeiner einer äquidimensionalen affinen Varietät die Identität

$$\operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim}(Y \subset X) = \operatorname{kdim} X$$

5.7.16. Es gibt noethersche Integritätskringe endlicher Krulldimension, die keine Kettenlängenringe sind. Für ein Gegenbeispiel mag man eine Lokalisierung eines Polynomrings betrachten, bei der alle Elemente im Komplement der Vereinigung zweier Primideale invertiert werden. Es gibt sogar noethersche lokale Integritätskringe endlicher Krulldimension, die keine Kettenlängenringe sind. Hier sind Gegenbeispiele jedoch nicht so leicht zu konstruieren. Bei lokalen noetherschen Integritätskringen ist aber zumindest die Endlichkeit der Krulldimension nach 7.3.19 noch im allgemeinen gesichert.

Beweis. Sei k unser Körper und B unser Integritätskring. Wir argumentieren mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Wir finden eine Noether-Normalisierung, also einen polynomialen Unterring $A = k[x_1, \ldots, x_n] \subset B$ mit B ganz über besagtem Unterring. Im Fall $\operatorname{kdim} B = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir ein Primideal $\mathfrak{p} \supsetneq 0$ von B und nach Going-up gilt auch $\mathfrak{p} \cap A \supsetneq 0$. Ist $\mathfrak{p}$ minimal unter den von Null verschiedenen Primidealen von B, so ist nach Going-down 5.7.5 auch $\mathfrak{p} \cap A$ minimal unter den von Null verschiedenen Primidealen unseres Polynomrings. Also ist $\mathfrak{p} \cap A = \langle f \rangle$ ein Hauptideal erzeugt von einem irreduziblen Polynom. Damit hat $A/(\mathfrak{p} \cap A)$ nach 5.4.4 eine um Eins kleinere Krulldimension und mit der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen folgt

$$\operatorname{kdim} B/\mathfrak{p} = \operatorname{kdim} A/(\mathfrak{p} \cap A) = \operatorname{kdim} A - 1 = \operatorname{kdim} B - 1$$

Nach Induktionsannahme wissen wir aber bereits, daß jede nicht weiter verfeinerbare Kette von Primidealen in $B/\mathfrak{p}$ die Länge $\mathrm{kdim} B - 1$ hat. Der Satz folgt. □

Übungen

Übung 5.7.17. Operiert eine endliche Gruppe auf einem ganz abgeschlossenen kommutativen Integritätsring, so ist auch der Invariantenring ganz abgeschlossen.

Übung 5.7.18. Sei $K \subset L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ und $A \subset K$ ein ganz abgeschlossener Teilring und $B \subset L$ sein ganzer Abschluß in L ist B stabil unter Γ und für den Invariantenring gilt

$$A = B^\Gamma$$

Übung 5.7.19. Man zeige, daß jede Lokalisierung eines Kettenlängenrings an einem Primideal und jeder Quotient eines Kettenlängenrings nach einem Primideal auch selbst wieder ein Kettenlängenring ist.

Übung 5.7.20. Sei A ein Kring und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $S^{-1}A \subset B$ eine Kringerweiterung. Ist $b \in B$ ganz über $S^{-1}A$, so gibt es $s \in S$ mit sb ganz über A.

Übung 5.7.21. Man zeige, daß der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät genau dann ein Kettenlängenring ist, wenn unsere Varietät äquidimensional ist.

Übung 5.7.22 (**Normalität über maximale Ideale**). Ein Kring A ist bereits normal, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ die Lokalisierung $A_\mathfrak{m}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsring ist.

Übung 5.7.23 (**Normalität über Komponenten**). Ein Kring A mit endlich vielen minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ ist genau dann normal, wenn die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$A \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{p}_1 \times \ldots \times A/\mathfrak{p}_r$$

liefert und alle $A/\mathfrak{p}_i$ ganz abgeschlossen sind. Hinweis: 4.5.25.

5.7.24. Eine affine Varietät X heißt **normal**, wenn ihr Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ normal ist. Nach 5.7.23 ist das gleichbedeutend dazu, daß unsere affine Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten ist und daß diese jeweils einen ganz abgeschlossenen Ring von regulären Funktionen haben.

5.8 Beweis von Going-Down ohne Galois-Theorie**

5.8.1. In diesem Abschnitt gebe ich einen alternativen Beweis von Going-Down, der mit einem Minimum an Galois-Theorie auskommt. Ich kenne diesen Beweis aus [AM69]. Die Begriffsbildungen und Aussagen dieses Abschnitts dienen nur diesem alternativen Beweis und werden davon abgesehen im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht benötigt.

Definition 5.8.2. Seien $A \subset B$ Kringe und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz über dem Ideal** $\mathfrak{a}$, wenn es $n \geq 1$ und $a_i \in \mathfrak{a}$ gibt mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Lemma 5.8.3. *Sei $A \subset B$ eine Kringerweiterung und $C \subset B$ der ganze Abschluß von A in B. So kann der ganze Abschluß von $\mathfrak{a}$ in B beschrieben werden als das Radikal $\sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$ des von $\mathfrak{a}$ in C erzeugten Ideals.*

Beweis. Gegeben $x \in B$ mit $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ für $a_i \in \mathfrak{a}$ gilt sicher $x \in C$ und $x^n \in \langle \mathfrak{a}C \rangle$ und folglich $x \in \sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$. Gegeben $x \in \sqrt{\langle \mathfrak{a}C \rangle}$ gilt umgekehrt $x^n = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $x_i \in C$. Dann ist $M := A[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul und für die Multiplikation mit x^n gilt

$$x^n : M \to \mathfrak{a}M$$

Mit 5.1.6 folgern wir dann, daß x^n ganz ist über $\mathfrak{a}$. □

Lemma 5.8.4. *Seien $A \subset B$ Integritätsringe, A ganz abgeschlossen und $x \in B$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. So ist x algebraisch über $K := \operatorname{Quot} A$ und die Koeffizienten seines Minimalpolynoms liegen in $\sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Sei L/K der Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von x. Alle seine Nullstellen gehören zum ganzen Abschluss von $\mathfrak{a}$ in L, und nach 5.8.3 gehören damit auch alle seine Koeffizienten zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in L. Andererseits gehören sie auch zu K und damit zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in K, und da A ganz abgeschlossen ist, sogar zum ganzen Abschluß von $\mathfrak{a}$ in A. Dieser ganze Abschluß ist aber nach 5.8.3 genau $\sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Beweis von Going-Down ohne Galois-Theorie. Wir gehen zu $B_{\mathfrak{p}}$ über und müssen nur $A \cap \langle QB_{\mathfrak{p}} \rangle = Q$ zeigen, um mit 4.3.32 den Satz folgern zu können. Nun, jedes $x \in \langle QB_{\mathfrak{p}} \rangle$ hat die Gestalt $x = y/s$ mit $y \in \langle QB \rangle$ und $s \in B \backslash \mathfrak{p}$. Nach 5.8.3 ist y ganz über Q und nach 5.8.4 liegen die Koeffizienten seines Minimalpolynoms über $K := \operatorname{Quot} A$ in Q und unser Minimalpolynom hat die Gestalt

$$y^n + q_{n-1}y^{n-1} + \ldots + q_0$$

mit $q_i \in Q$. Liegt nun $x = y/s$ in A und ist nicht Null, so haben wir $s = yx^{-1}$ und das Minimalpolynom von s über K ist

$$s^n + (q_{n-1}/x)s^{n-1} + \ldots + (q_0/x^n)$$

Für die Koeffizienten v_i dieses Polynoms gilt also $x^{n-i}v_i = q_i \in Q$. Da aber s ganz ist über A folgt $v_i \in A$ wieder mit 5.8.3. Hätten wir nun $x \notin Q$, so hätten wir $v_i \in Q$ für alle i und damit $s^n \in \langle QB \rangle$ im Widerspruch zu $s \notin \mathfrak{p}$. Also gilt $x \in Q$ was zu zeigen war. □

5.9 Hauptidealsatz von Krull

5.9.1. Für das folgende benötigen wir Resultate aus [NAS] 2.2, deren Beweis hier nicht wiederholt werden soll. Gegeben ein Modul M über einer Menge Ω definieren wir seine **Länge**

$$\text{Länge}_\Omega(M) = \text{Länge}(M) = \mathrm{l}_\Omega(M) = \mathrm{l}(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

als das Supremum über alle n derart, daß es in M eine echt absteigende Kette von Untermoduln gibt der Gestalt $M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \ldots \supsetneq M_0 = 0$, die also salopp gesprochen in n Schritten vom ganzen Modul zum Nullmodul führt.

5.9.2. Gegeben eine Menge Ω und eine kurze exakte Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ von Ω-Moduln gilt die **Längenformel** $l(M) = l(M') + l(M'')$. Das wird in [NAS] 2.2.19 bewiesen, hier nehmen wir es ohne Beweis hin.

5.9.3. Ein Modul heißt **einfach**, wenn er nicht Null ist, aber außer Null und sich selber keine weiteren Untermoduln hat. In anderen Worten sind die einfachen Moduln genau die Moduln der Länge Eins.

5.9.4. Man sagt, ein Kring R sei **von endlicher Länge**, wenn er von endlicher Länge ist als Modul über sich selber, in Formeln $l_R(R) < \infty$.

Satz 5.9.5 (Noethersche Kringe der Krulldimension Null). *Für einen Kring sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kring ist von endlicher Länge;*
2. *Unser Kring ist noethersch von der Krulldimension Null oder der Nullring;*
3. *Unser Kring ist isomorph zu einem endlichen Produkt von noetherschen Kringen mit genau einem Primideal, das dann notwendig sowohl maximal als auch nilpotent sein muß.*

Vorschau 5.9.6. Die Äquivalenz dieser Aussagen wird sich als eine wesentliche Zutat beim Beweis des Hauptidealsatzes von Krull 5.9.10 erweisen, einer der zentralen Aussagen der Dimensionstheorie.

Beweis. (2)⇒(3). Ist unser Kring R noethersch, so ist nach 4.5.29 sein Nilradikal der Schnitt seiner endlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$. Ist zusätzlich seine Krulldimension Null, so sind das auch seine maximalen Ideale. Es gibt also n mit $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^n = 0$ und der abstrakte chinesische Restsatz liefert einen Isomorphismus

$$R \xrightarrow{\sim} R/\mathfrak{m}_1^n \times \ldots \times R/\mathfrak{m}_r^n$$

(3)⇒(1). Jedes $\mathfrak{m}_i^t/\mathfrak{m}_i^{t+1}$ ist ein endlich erzeugter Vektorraum über dem Körper $R/\mathfrak{m}_i$ und folglich von endlicher Länge als R-Modul. Zusammen mit der Längenformel 5.9.2 zeigt das, daß R endliche Länge hat.

(1)⇒(2). Natürlich ist jeder Modul endlicher Länge auch noethersch. Weiter kann unser Kring von endlicher Länge bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache Moduln haben, also nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$. Offensichtlich gilt $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^l = 0$ für l die Länge unseres Krings. Dies Produkt liegt mithin in jedem Primideal $\mathfrak{p}$ unseres Rings. Umfaßte unser $\mathfrak{p}$ keines der $\mathfrak{m}_i$, so würden wir mit 4.2.12 schnell bei einem Widerspruch landen. Also ist jedes Primideal maximal und die Krulldimension ist Null. □

Definition 5.9.7. Gegeben ein Kring R und ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ erklärt man die **Höhe von** $\mathfrak{p}$ als die Krulldimension der Lokalisierung an $\mathfrak{p}$, in Formeln

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \operatorname{kdim} R_{\mathfrak{p}} = \sup\{l \mid \text{Es gibt in } R \text{ eine Primidealkette } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}\}$$

Das Supremum soll also in Worten gebildet werden über die Längen aller zu $\mathfrak{p}$ aufsteigenden Ketten von Primidealen von R. Die Notation erinnert an französisch „hauteur“ und englisch „height“.

5.9.8. In einem Kettenlängenring R gilt offensichtlich für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ die Identität

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \operatorname{kdim}(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{kdim}(R)$$

In allgemeineren Ringen kann man nur $\leq$ erwarten, weil es ja passieren könnte, daß alle Primidealketten maximaler Länge das Primideal $\mathfrak{p}$ vermeiden. Der Hauptsatz der Dimensionstheorie lokaler noetherscher Kringe 7.3.19 wird zumindest zeigen, daß die Höhe eines Primideals in einem noetherschen Kring stets endlich ist.

5.9.9 (**Anschauliche Bedeutung der Höhe im geometrischen Fall**). Ist X eine affine Varietät und $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Primideal, so ist seine Nullstellemenge eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \,\underset{\mathrm{A}}{\subset}\, X$. Die Höhe von $\mathfrak{p}$ kann dann geometrisch beschrieben werden als Krullkodimension durch die Identität

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \operatorname{kdim}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \subset X)$$

Ist X selbst irreduzibel oder auch nur äquidimensional, so ist $\mathcal{O}(X)$ nach 5.7.14 beziehungsweise 5.7.15 ein Kettenlängenring und nach 5.9.8 gilt zusätzlich die Identität $\mathrm{kdim}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \subset X) = \mathrm{kdim} X - \mathrm{kdim} \mathcal{Z}(\mathfrak{p})$.

Satz 5.9.10 (Hauptidealsatz von Krull). *Gegeben ein noetherscher Kring R und ein Element $f \in R$ gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$, das f enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. *Ist f kürzbar, so gilt sogar* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

Vorschau 5.9.11. Ein unabhängiger Beweis wird in 7.3.22 gegeben. Dort zeigen wir sogar allgemeiner für Elemente $f_1, \ldots, f_s$ eines noetherschen Krings und jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$, das $f_1, \ldots, f_s$ enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$.

Beweis. Die Verschärfung für f kürzbar folgt unmittelbar daraus, daß jedes minimale Primideal eines Krings nach 4.5.11 aus nichtkürzbaren Elementen besteht. Indem wir zu $R_\mathfrak{p}$ übergehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal von R ist. Es gilt dann, für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset R$ mit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ zu zeigen, daß $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal von R ist. Nach Annahme gilt $f \notin \mathfrak{q}$. Wir betrachten nun die kanonische Abbildung $\lambda : R \to R_\mathfrak{q}$ in die Lokalisierung und setzen $\mathfrak{q}^{(i)} := \lambda^{-1}(\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^i)$. Dann bilden wir in R die Kette von Idealen

$$\mathfrak{q} + \langle f \rangle \ \supset\ \mathfrak{q}^{(2)} + \langle f \rangle \ \supset\ \mathfrak{q}^{(3)} + \langle f \rangle \ \supset \ldots$$

Da $R/\langle f \rangle$ nach Konstruktion ein noetherscher Kring der Krulldimension Null ist und folglich nach 5.9.5 endliche Länge hat, wird diese Kette von Idealen stationär, sagen wir bei

$$\mathfrak{q}^{(n)} + \langle f \rangle = \mathfrak{q}^{(n+1)} + \langle f \rangle$$

So kann jedes $a \in \mathfrak{q}^{(n)}$ dargestellt werden als $a = b + rf$ mit $b \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und $r \in R$. Nun impliziert $rf \in \mathfrak{q}^{(n)}$ aber $\lambda(rf) \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n$ und wegen $\lambda(f) \in R_\mathfrak{q}^\times$ weiter $\lambda(r) \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n$ und so $r \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Mithin haben wir sogar

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + f\mathfrak{q}^{(n)}$$

Es folgt $f(\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)}) = (\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)})$. Da f im einzigen maximalen Ideal unseres Rings liegt, liefert das Lemma 4.6.12 von Nakayama dann $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und damit $\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}_\mathfrak{q}^{n+1}$. Wieder mit Nakayama zeigt das jedoch $\mathfrak{q}_\mathfrak{q}^n = 0$ und damit ist das maximale Ideal von $R_\mathfrak{q}$ bereits nilpotent, also etwa nach 4.2.29 ein minimales Primideal von $R_\mathfrak{q}$. Es folgt sofort, daß $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal von R ist. □

5.9.12. Ein Primideal eines Rings R, das ein gegebenes Element f enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, nennen wir ein **über f minimales Primideal**. Wenn ich stattdessen aus Versehen einmal „minimales Primideal über f" schreiben sollte, bitte ich um Nachsicht.

5.9.13 (**Bedeutung des Hauptidealsatzes im geometrischen Fall**). Ist X eine affine Varietät und $f \in \mathcal{O}(X)$ eine reguläre Funktion, so sind die über f minimalen Primideale genau die Verschwindungsideale der irreduziblen Komponenten der Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(f) \subset X$ von f. Der Hauptidealsatz von Krull 5.9.10 besagt in diesem Fall also, daß für jede irreduzible Komponente Z von $\mathcal{Z}(f)$ gilt

$$\operatorname{kdim}(Z \subset X) \leq 1$$

Des weiteren ist f kürzbar genau dann, wenn es auf keiner irreduziblen Komponente von X verschwindet. Ist f kürzbar, so besagt der Hauptidealsatz 5.9.10 für jede irreduzible Komponente Z von $\mathcal{Z}(f)$ genauer $\operatorname{kdim}(Z \subset X) = 1$. In unserer Terminologie 4.2.21 ist dann also $\mathcal{Z}(f)$ eine Hyperfläche in X. Ist zusätzlich X auch noch irreduzibel oder auch nur äquidimensional, so können wir mit der Beziehung 5.7.15 zwischen Krulldimension und Krullkodimension noch einen Schritt weitergehen und für jede irreduzible Komponente Z von $\mathcal{Z}(f)$ folgern

$$\operatorname{kdim} Z = \operatorname{kdim} X - 1$$

5.9.14 (**Alternativer Beweis des Hauptidealsatzes im geometrischen Fall**). Im Fall des Rings $R = \mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät skizziere ich noch einen alternativen Zugang, der den Beweis der Kettenlängenringeigenschaft 5.7.14 verfeinert. Man zieht sich dabei zunächst auf den Fall zurück, daß X affin und irreduzibel ist und daß $f \in \mathcal{O}(X) \backslash 0$ eine irreduzible Nullstellenmenge hat und zeigt direkt

$$\operatorname{kdim}(\mathcal{Z}(f)) = \operatorname{kdim} X - 1$$

Dazu wählt man eine Noethernormalisierung $X \twoheadrightarrow k^d$ und betrachtet die normale Hülle N zur Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(k^n)$ und die Galoisgruppe $\Gamma := \operatorname{Gal}(N/\mathcal{M}(k^n))$. Weil $N^\Gamma/\mathcal{M}(k^n)$ eine endliche rein inseparable Körpererweiterung ist, gibt es für alle $h \in N^\Gamma$ ein $b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $h^b \in \mathcal{M}(k^n)$. Betrachten wir auch noch das Ringerzeugnis $A \subset N$ der Galoiskonjugierten von $\mathcal{O}(X)$, so erhalten wir einen Turm ganzer Ringerweiterungen

$$\mathcal{O}(k^n) \subset \mathcal{O}(X) \subset A$$

Nehmen wir nun für h das Produkt der Galoiskonjugierten von f, so gilt sogar $h^b \in \mathcal{O}(k^n)$, da nämlich $\mathcal{O}(k^n)$ ganz abgeschlossen ist. Unter den minimalen

Primidealen von A über h^b gibt es sicher ein Primideal $\mathfrak{q}$, das f enthält. Dann ist es auch minimal über f und Going-up liefert, daß $\mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(X)$ minimal ist über f, also mit $\mathfrak{p}$ zusammenfällt, und daß $\mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(k^n)$ minimal ist über h^b. Zusammen sehen wir, daß $\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}(k^n)$ minimal ist über h^b. Aus der Noether-Normalisierung von Hyperflächen 5.4.2 folgt $\operatorname{kdim} \mathcal{Z}(\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}(k^n)) = n - 1$. Aus Going-up folgt dann $\operatorname{kdim} \mathcal{Z}(\mathfrak{p}) = n - 1$ wie gewünscht. Daraus folgt auch direkt, daß jede maximale echte irreduzible abgeschlossene Teilmenge Z einer ireduziblen affinen Varietät X eine um Eins kleinere Krulldimension hat und wir erhalten die Kettenlängenringeigenschaft 5.7.14 als Korollar, aus der man dann hinwiederum den Krull'schen Hauptidealsatz in seiner Höhenform in diesem Fall folgern kann.

Korollar 5.9.15 (Nullstellenmengen endlich vieler Funktionen). *Gegeben eine irreduzible affine Varietät X und r reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ haben alle irreduziblen Komponenten Z der simultanen Nullstellenmenge unserer r Funktionen $\mathcal{Z}_X(f_1, \ldots, f_r)$ eine Dimension*

$$\operatorname{kdim} Z \geq \operatorname{kdim} X - r$$

Beweis. Vollständige Induktion durch wiederholte Anwendung der Aussage im Fall $r = 1$, in dem sie aus 5.9.13 bereits bekannt ist. Der Fall einer echten Ungleichung tritt im Fall $r = 1$ nur für die Nullfunktion aus, aber im Verlauf der Induktion kann ja auch nicht ausgeschlossen werden, daß die r-te Funktion auf einer irreduziblen Komponente der gemeinsamen Nullstellenmenge der ersten $r-1$ Funktionen verschwindet. □

Korollar 5.9.16 (Darstellung algebraischer Mengen durch Gleichungen). *Seien $Z \subsetneq X$ nichtleere äquidimensionale affine Varietäten mit der Dimensionsdifferenz $c := \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Z$. So gibt es Elemente $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}(X)$ mit $f_i|Z = 0$ und $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$ äquidimensional von derselben Dimension wie Z.*

5.9.17. Insbesondere ist dann also Z eine Vereinigung von irreduziblen Komponenten von $\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$.

Beweis. Im Fall $c = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir ein kürzbares Element $f_1 \in \mathcal{O}(X)$ mit $Z \subset \mathcal{Z}(f_1)$, etwa indem wir auf jeder irreduziblen Komponente von X einen Punkt wählen, der nicht zu Z gehört, und eine Funktion f_1, die an allen diesen Punkten den Wert Eins annimmt und auf Z verschwindet. Nach Krull hat jede irreduzible Komponente von $\mathcal{Z}(f_1)$ eine um Eins kleinere Dimension als X. Der Beweis kann nun mit Induktion über c zu Ende geführt werden. □

Korollar 5.9.18 (Mindestdimension der Fasern von Morphismen). *Gegeben $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten und eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \subsetneq Y$ gilt für jede irreduzible Komponente K von $\varphi^{-1}(Z)$ mit $\overline{\varphi(K)} = Z$ die Abschätzung*

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} K \leq \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$$

5.9.19. Insbesondere hat jede irreduzible Komponente jeder Faser von φ mindestens die Dimension $\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Y$.

Vorschau 5.9.20. Dasselbe folgt für irreduzible, aber nicht notwendig affine Varietäten, wie wir sie im weiteren Verlauf dieser Vorlesung einführen. Für φ flach zeigen wir sehr viel stärkere Aussagen in 5.10.5.

Beweis. Für $c := \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$ finden wir Funktionen $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}(Y)$ mit $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_c)$ äquidimensional und Z einer irreduziblen Komponente von $\mathcal{Z}$ nach 5.9.16. Nach 5.9.15 hat jede irreduzible Komponente W von

$$\varphi^{-1}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}(f_1 \circ \varphi, \ldots, f_c \circ \varphi)$$

mindestens die Dimension $\operatorname{kdim} W \geq \operatorname{kdim} X - c$. Jede irreduzible Komponente V von $\varphi^{-1}(Z)$ mit $\overline{\varphi(V)} = Z$ ist aber notwendig auch eine irreduzible Komponente von $\varphi^{-1}(\mathcal{Z})$. $\square$

5.9.21. Die Proposition zeigt zum Beispiel, daß es Morphismen $X \to Y$ zwischen irreduziblen affinen Varietäten mit mindestens einer endlichen aber nicht leeren Faser nur dann geben kann, wenn gilt $\operatorname{kdim} X \leq \operatorname{kdim} Y$.

Korollar 5.9.22 (Kodimension von Schnittmengen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben irreduzible abgeschlossene Teilmengen $X, Y \subset\!\!\!\!\circ\; k^n$ gilt für jede irreduzible Komponente Z ihres Schnitts $X \cap Y$ die Abschätzung*

$$(n - \operatorname{kdim} Z) \leq (n - \operatorname{kdim} X) + (n - \operatorname{kdim} Y)$$

Beweis. Die Diagonale $\Delta = \{(v, v) \in k^n \times k^n\}$ kann als Nullstellenmenge von n regulären Funktionen beschrieben werden. Der Schnitt mit $\Delta \cap (X \times Y)$ ist isomorph zu $X \cap Y$ und kann andererseits als Nullstellenmenge von n regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X \times Y)$ beschrieben werden. Nach 5.9.15 hat also jede irreduzible Komponente des Schnitts mindestens die behauptete Dimension. $\square$

5.9.23. Ich hätte gleichbedeutend auch $\operatorname{kdim} Z \geq \operatorname{kdim} X + \operatorname{kdim} Y - n$ schreiben können, aber in der im Korollar gegebenen Form kann ich mir die Aussage besser merken. Die Aussage des Korollars gilt analog auch für Schnitte in beliebigen „glatten“ äquidimensionalen Varietäten mit im wesentlichen demselben Beweis, vergleiche 7.4.21. Für Schnitte in allgemeinen irreduziblen Varietäten gilt sie nicht mehr. Zum Beispiel ist $Q := \mathcal{Z}(T_1 T_2 - T_3 T_4) \subset\!\!\!\!\circ\; k^4$ eine irreduzible Hyperfläche, also dreidimensional, und darin liegen die beiden zweidimensionalen Untervarietäten $\mathcal{Z}(T_1, T_3)$ und $\mathcal{Z}(T_2, T_4)$ scheiden sich nur in einem einzigen Punkt, dem Ursprung des Koordinatensystems.

5.9.24. In meinen Augen ist dieses Korollar eine großartige Verallgemeinerung der Abschätzung für die Kodimension des Schnitts affiner Teilräume eines affinen Raums in [LA1] 3.2.21 zum Fall von Teilmengen, die durch kompliziertere, nicht mehr notwendig lineare, sondern eben polynomiale Gleichungen gegeben werden.

5.9.25. Für das Korollar ist es wesentlich, daß wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten: Zwei Sphären im $\mathbb{R}^3$ etwa können sich berühren und so eine einpunktige Schnittmenge haben. Im Komplexen aber muß nach unserem Korollar jede irreduzible Komponente des Schnitts zweier algebraischer Flächen im $\mathbb{C}^3$ entweder eine Kurve oder eine Fläche sein. Gegeben komplexe Polynome f, g in drei Variablen kann also ihre gemeinsame Nullstellenmenge keine isolierten Punkte haben. Genauer muß sogar der Schnitt zweier verschiedener irreduzibler algebraischer Flächen in $\mathbb{C}^3$ stets eine Kurve alias äqui-eindimensional sein, wie Sie sich in Übung 5.9.33 selbst überlegen dürfen.

Satz* 5.9.26 (Definitionslücken rationaler Funktionen). *Jeder ganz abgeschlossene noethersche Integritätskring A ist in seinem Quotientenkörper der Schnitt über alle seine Lokalisierungen nach Primidealen der Höhe Eins. In Formeln gilt mithin in $\operatorname{Quot} A$ die Identität*

$$A = \bigcap_{\operatorname{ht}(\mathfrak{q})=1} A_{\mathfrak{q}}$$

5.9.27. Wir diskutieren eine Konsequenz dieses Satzes im geometrischen Fall. Sei X eine irreduzible affine Varietät, deren Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen ganz abgeschlossen ist. Sei $U \overset{\circ}{\subset} X$ eine offene Teilmenge, deren Komplement eine Kodimension größergleich Zwei hat. So ist die Restriktion eine Bijektion

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U)$$

zwischen dem Ring der regulären Funktionen auf ganz X und dem Ring der regulären Funktionen auf U. In der Tat liegt jede rationale Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit der Eigenschaft, daß das Komplement $X \backslash D(f)$ ihres Definitionsbereichs aus 4.4.10 keine irreduzible Komponente der Kodimension Eins hat, bereits im Schnitt der $\mathcal{O}_{X,Y}$ für $Y \overset{\mathrm{A}}{\subsetneq} X$ irreduzibel von der Kodimension Eins und liegt damit nach 4.4.7 und unserem Satz 5.9.26 in $\mathcal{O}(X)$. Ist $\mathcal{O}(X)$ faktoriell, so können wir das auch ohne den vorstehenden Satz leicht einsehen, denn dann ist der Definitionsbereich nach 4.4.11 genau das Komplement der Nullstellenmenge des Nenners in einer maximal gekürzten Darstellung unserer rationalen Funktion und ist nach dem Hauptidealsatz 5.9.13 folglich eine Hyperfläche. Ist $\mathcal{O}(X)$ nicht ganz abgeschlossen, so gilt die Aussage im allgemeinen nicht mehr. Für ein Gegenbeispiel verklebe man zwei Punkte einer affinen Ebene im Sinne von 5.2.15 und betrachte eine reguläre Funktion auf unserer Ebene, die an diesen beiden Punkten verschiedene Werte annimmt. Dann ist der Definitionsbereich der entsprechenden rationlen Funktion auf der verklebten Varietät das Komplement des verklebten Punktes und sein Komplement hat die Kodimension Zwei.

Beispiel 5.9.28. Nach 5.9.27 und sogar nach dem sehr viel einfacheren Beweis im Fall faktorieller Ringe liefert für $n \geq 2$ und $k = \bar{k}$ die Restriktion von regulären Funktionen von regulären Funktionen auf ganz k^n zu regulären Funktionen auf dem Komplement des Ursprungs eine Bijektion

$$\mathcal{O}(k^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k^n \backslash 0)$$

Beweis. Für $f \in (\operatorname{Quot} A) \backslash A$ ist das Ideal $I := \{g \in A \mid gf \in A\}$ nicht ganz A. Seien $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die paarweise verschiedenen über I minimalen Primideale von A nach 4.5.29. Man zeigt leicht $I_{\mathfrak{p}} = \{g \in A_{\mathfrak{p}} \mid gf \in A_{\mathfrak{p}}\}$. Die analoge Formel gälte sogar für eine Lokalisierung nach einer beliebigen Teilmenge. Es folgt $f \notin A_{\mathfrak{p}}$. Können wir $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ zeigen, so sind wir fertig. Indem wir sonst zu $A_{\mathfrak{p}}$ übergehen, das nach 5.7.1 auch ganz abgeschlossen ist, dürfen wir gleich $A = A_{\mathfrak{p}}$ annehmen, also A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ und $I \subset A$ ein Ideal mit Radikal $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$. Wir folgern $\mathfrak{p}^n \subset I$ für $n \gg 0$. Aus $If \subset A$ folgt damit insbesondere $\mathfrak{p}^n f \subset A$. Jetzt betrachten wir das kleinstmögliche $l \geq 0$ mit $\mathfrak{p}^l f \subset A$. Sicher gilt $l > 0$, und wählen wir $g \in \mathfrak{p}^{l-1} f \backslash A$, so gilt $g \notin A$ aber $\mathfrak{p} g \subset A$. Nun ist A ganz abgeschlossen, also kann g nicht ganz sein über A. Dann kann aber nach 5.1.6 die Multiplikation mit g auch nicht den endlich erzeugten von Null verschiedenen A-Modul $\mathfrak{p}$ stabilisieren, wir haben also $\mathfrak{p} g \not\subset \mathfrak{p}$. Andererseits wissen wir jedoch bereits, daß gilt $\mathfrak{p} g \subset A$, woraus folgt $\mathfrak{p} g = A$ alias $\mathfrak{p} = g^{-1} A$. Nun liefert der Krull'sche Hauptidealsatz 5.9.10 oder sogar einfacher 5.9.29 in der Tat $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. □

Ergänzung 5.9.29. Ein lokaler noetherscher Integritätsring, dessen maximales Ideal ein von Null verschiedenes Hauptideal ist, hat als einziges weiteres Primideal das Nullideal. Dieser Spezialfall des Krull'schen Hauptidealsatzes 5.9.10 ist nicht schwer direkt einzusehen: Ist $(A, \langle g \rangle)$ unser lokaler Integritätsring und $\mathfrak{q} \subset A$ ein Primideal mit $g \notin \mathfrak{q}$, so gilt $\mathfrak{q} = g\mathfrak{q}$, denn jedes $a \in \mathfrak{q}$ läßt sich darstellen als $a = gb$ mit $b \in A$ und dann notwendig $b \in \mathfrak{q}$. Dann aber zeigt das Nakayama-Lemma sofort $\mathfrak{q} = 0$.

Übungen

Übung 5.9.30. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß für jede offene Teilmenge $U \circledcirc k^n$ der Ring $\mathcal{O}_{k^n}(U)$ der regulären Funktionen auf U ringendlich ist über k. Hinweis:

Man erinnere, daß der Polynomring faktoriell ist, und überlege sich, daß eine reguläre Funktion global durch ihre maximal gekürzte Darstellung gegeben sein muß.

Übung 5.9.31. Sei A ein noetherscher Kring. Man zeige: Ist der Quotient von A nach seinem Nilradikal $A/\sqrt{0}$ von endlicher Länge, so ist bereits A selbst von endlicher Länge.

Übung 5.9.32. Gegeben ein noetherscher faktorieller Ring R induziert das Bilden des Hauptideals irreduzibler Elemente eine Bijektion

$$\operatorname{irk} R \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$$

zwischen der Menge der Irreduziblenklassen von R und der Menge aller Primideale der Höhe Eins. Hinweis: Man kopiere den Beweis von 4.2.22.

Übung 5.9.33. Seien X eine affine Varietät mit einem faktoriellen Ring von regulären Funktionen, $Y \underset{\scriptscriptstyle A}{\subset} X$ eine Hyperfläche und $Z \underset{\scriptscriptstyle A}{\subset} X$ eine irreduzible Teilmenge. Ist Z nicht in Y enthalten, so ist $Y \cap Z$ eine Hyperfläche in Z. Hinweis: 5.9.13, 4.2.22.

Übung 5.9.34. Gegeben ein von Null verschiedener noetherscher Kettenlängenring R und darin ein kürzbares Element f ist auch $R/\langle f\rangle$ ein Kettenlängenring und es gilt

$$\operatorname{kdim} R/\langle f\rangle = \operatorname{kdim} R - 1$$

5.10 Flachheit und Faserdimension

Satz 5.10.1 (Höhenvergleich in flachen Kringerweiterungen). *Gegeben ein flacher Kringhomomorpismus $\varphi : A \to B$ von noetherschen Kettenlängenringen haben für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die über $\varphi(\mathfrak{p})$ minimalen Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ dieselbe Höhe wie $\mathfrak{p}$ und es gilt für sie zusätzlich*

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$$

5.10.2. Als Gegenbeispiel für den Fall, daß A kein Kettenlängenring ist, mag man den durch Auswerten bei $T = 0$ gegebenen Homomorphismus $k[T] \times k \to k \times k$ betrachten.

5.10.3. Der Satz und sein Beweis bleiben richtig, wenn wir von unseren beiden Ringen nur fordern, daß sie noethersch sind und daß je zwei Primidealketten, die zu einem fest vorgegebenen Primideal aufsteigen und nicht weiter verfeinerbar sind, dieselbe endliche Länge haben. In 7.3.22 werden wir zeigen, daß in einem noetherschen Kring jedes Primideal eine endliche Höhe hat. Insbesondere gibt es dann zumindest mindestens eine endliche nicht verfeinerbare Primidealkette, die zu einem gegebenen Primideal aufsteigt.

5.10.4. Gegeben ein flacher Kringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ und ein beliebiger Kringhomomorphismus $A \to C$ ist der induzierte Homomorphismus $C \to B \otimes_A C$ stets wieder flach. Weiter ist für jedes kürzbare Element $f \in A$ auch sein Bild $\varphi(f)$ kürzbar in B. Ist insbesondere A ein Integritätsbereich und B nicht der Nullring, so muß jeder flache Kringhomomorphismus eine Injektion $\varphi : A \hookrightarrow B$ sein.

Beweis. Wir zeigen das, indem wir mit Spezialfällen beginnen und in mehreren Schritten zum allgemeinen Fall übergehen.

Fall 1: Der Ring A ist ein Integritätsring und $\mathfrak{p} = 0$. Im Fall $B = 0$ ist nichts zu zeigen, andernfalls dürfen wir $A \subset B$ annehmen nach 5.10.4. Die über $\mathfrak{p}$ minimalen Primideale von B sind dann genau die minimalen Primideale von B und haben auch die Höhe Null. Weiter schneiden sie den Integritätsbereich A in Null, denn schneidet ein Ideal $\mathfrak{q} \subset B$ den Teilring A nicht im Nullideal, so enthält es kürzbare Elemente von A und diese sind nach 5.10.4 wegen der Flachheit auch kürzbar in B und nach 4.5.11 kann unser $\mathfrak{q}$ dann kein minimales Primideal in B sein.

Fall 2: Das Primideal $\mathfrak{p}$ ist ein minimales Primideal von A. Das Darantensorieren $\otimes_A A/\mathfrak{p}$ zeigt mit 5.10.4, daß auch $\bar{\varphi} : A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{p}B$ flach ist mit der abkürzenden Notation $\mathfrak{p}B$ für das von $\varphi(\mathfrak{p})$ in B erzeugte Ideal. Die über $\varphi(\mathfrak{p})$ minimalen Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ sind nun genau die Urbilder unter der Projektion $\pi_B : B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{p}B$ der minimalen Primideale $\bar{\mathfrak{q}}$ von $B/\mathfrak{p}B$. Nach dem bereits behandelten Fall gilt $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\mathfrak{q}}) = 0$ und dann auch

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\pi_B^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})) = \pi_A^{-1}(\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})) = \pi_A^{-1}(0) = \mathfrak{p}$$

Es bleibt zu zeigen, daß die über $\varphi(\mathfrak{p})$ minimalen Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ auch als Primideale von B minimal sind. Andernfalls gäbe es aber in B ein Primideal $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}$ und wir hätten notwendig auch $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{p}B$ und $\bar{\mathfrak{q}}_1 \subsetneq \bar{\mathfrak{q}}$ wäre ein echt kleineres Primideal von $B/\mathfrak{p}B$ im Widerspruch dazu, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ dort ein minimales Primideal war.

Fall 3: Der allgemeine Fall. Wir argumentieren durch Induktion über die Höhe von $\mathfrak{p}$. Die Basis der Induktion bildet Fall 2, bei dessen Behandlung wir sogar ohne die Bedingung ausgekommen sind, daß unsere Ringe noethersche Kettenlängenringe sein sollen. Im allgemeinen ziehen wir uns zunächst einmal auf den Fall zurück, daß A nilpotentfrei ist, indem wir sonst A und B durch das Nilradikal $\mathfrak{n} \subset A$ beziehungsweise das von $\varphi(\mathfrak{n})$ in B erzeugte Ideal $\mathfrak{n}B$ teilen. Da diese Ideale beide aus nilpotenten Elementen bestehen, liegen sie jeweils in allen Primidealen. Des weiteren ist der induzierte Ringhomomorphismus $A/\mathfrak{n} \to B/\mathfrak{n}B$ nach 5.10.4 auch flach, so daß sich an unserer Aussage nichts ändert. Sei also von nun an A nilpotentfrei. Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal positiver Höhe $c \geq 1$, so enthält $\mathfrak{p}$ ein kürzbares Element f von A, da es nach 4.2.14 nicht in einer endlichen Vereinigung minimaler Primideale enthalten sein kann, da es aber nach 4.5.24 in unserem noetherschen Ring A nur endlich viele minimalen Primideale gibt und da deren Vereinigung nach 4.5.11 in unserem nilpotentfreien Ring genau die Menge der nichtkürzbaren Elemente ist. Dann ist nach 5.10.4 aufgrund der Flachheit f auch kürzbar in B und der Kringhomomorphismus $\bar{\varphi} : A/fA \to B/fB$ ist flach und nach dem Krull'schen Hauptidealsatz 5.9.10, für den wir wieder die Bedingung noethersch brauchen, sind A/fA sowie B/fB Kettenlängenringe. Da wir A als Kettenlängenring angenommen hatten, hat $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/fA$ die Höhe $\operatorname{ht} \bar{\mathfrak{p}} = c - 1$ in A/fA. Mit Induktion folgt für jedes Primideal $\bar{\mathfrak{q}} \subset B/fB$, das minimal ist über $\bar{\varphi}(\bar{\mathfrak{p}})$, daß gilt $\operatorname{ht} \bar{\mathfrak{q}} = c - 1$ und $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\mathfrak{q}}) = \bar{\mathfrak{p}}$. Da wir B als Kettenlängenring angenommen hatten, zeigt der Krull'sche Hauptidealsatz weiter, daß das Zurückholen Bijektionen

$$\operatorname{Spec}_{\operatorname{ht}=c-1}(B/fB) \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}_{\operatorname{ht}=c} B \mid f \in \mathfrak{q}\}$$

induziert. Dann folgt aber auch für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, das minimal ist über $\varphi(\mathfrak{p})$, daß gilt $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = c$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. □

Korollar 5.10.5 (Scheinflache Morphismen äquidimensionaler Varietäten). *Gegeben ein scheinflacher Morphismus $\varphi : X \to Y$ von einer nichtleeren äqui-n-dimensionalen affinen Varietät zu einer äqui-m-dimensionalen affinen Varietät gilt $n \geq m$ und gegeben eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \overset{\circ}{\subset}\!\!\!\!\!\!\!\mathsf{A}\ Y$ gilt für jede irreduzible Komponente K ihres Urbilds $\varphi^{-1}(Z)$ sowohl $\overline{\varphi(K)} = Z$ als auch*

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} K = \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$$

5.10.6. Das mag im Kontrast zum Fall 5.9.18 eines dominanten Morphismus irreduzibler affiner Varietäten gesehen werden, in dem wir selbst unter der zusätzlichen Annahme $\overline{\varphi(K)} = Z$ nur die Abschätzung $\leq$ zeigen konnten und insbesondere nur eine untere Abschätzung für die Dimension der Fasern. Im Fall eines scheinflachen Morphismus finden wir viel stärker, daß alle Komponenten aller Fasern die zu erwartende Dimension haben.

Beweis. Wir zeigen das nur im flachen Fall. Im scheinflachen Fall geht es genauso, man muß nur mehr Notation einführen. Genau dann hat eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge $W \overset{\circ}{\subset}\!\!\!\!\!\!\!\mathsf{A}\ X$ die Eigenschaft $\varphi(W) \subset Z$, wenn für die zugehörigen Primideale gilt $\varphi^\sharp(\mathcal{I}_Y(Z)) \subset \mathcal{I}_X(W)$. Die irreduziblen Komponenten von $\varphi^{-1}(Z)$ entsprechen also den kleinstmöglichen Primidealen $\mathfrak{q} \subset \mathcal{O}(X)$, die $\varphi^\sharp(\mathcal{I}_Y(Z))$ umfassen. Nach 5.10.1 haben alle diese Primideale $\mathfrak{q}$ dieselbe Höhe wie $\mathcal{I}_Y(Z)$. Folglich gilt für alle irreduziblen Komponenten W von $\varphi^{-1}(Z)$ die Identität

$$\operatorname{kdim}(W \subset X) = \operatorname{kdim}(Z \subset Y)$$

Die obige Dimensionsidentität folgt damit aus unserer Beziehung 5.7.15 zwischen Krulldimension und Krullkodimension in äquidimensionalen Varietäten. Die Gleichheit $\overline{\varphi(K)} = Z$ dahingegen folgt aus der Gleichheit $(\varphi^\sharp)^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathcal{I}_Y(Z)$ aus 5.10.1. □

Satz 5.10.7 (Halbstetigkeit der Faserdimension). *Gegeben ein Morphismus von affinen Varietäten $\varphi : X \to Y$ ist die Funktion $\mathrm{f} : X \to \mathbb{N}$ der lokalen Faserdimension*

$$\mathrm{f}(x) := \operatorname{kdim}_x \varphi^{-1}(\varphi(x))$$

halbstetig auf X in dem Sinne, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X \mid \mathrm{f}(x) \geq n\}$ abgeschlossen ist.

5.10.8. Hier verwenden wir unsere Notation $\operatorname{kdim}_z Z$ aus 4.1.17 für das Maximum der Dimensionen irreduzibler Komponenten von Z, die den Punkt z enthalten. Für das folgende vereinbaren wir die Notation

$$X^{\geq n} := \{x \in X \mid \mathrm{f}(x) \geq n\}$$

Vorschau 5.10.9. Sobald wir allgemeine, nicht notwendig affine Varietäten und ihre Morphismen kennenlernen, wird klar sein, daß der Satz für sie genauso gilt.

Beweis. Wir zeigen das durch Induktion über die Dimension von Y. Wissen wir es bei festem Y für X irreduzibel, so folgt es leicht für X beliebig. Im Fall $\operatorname{kdim} Y = 0$ ist die Behauptung klar für X irreduzibel und folgt dann für X beliebig. Für den Induktionsschritt dürfen wir wieder X irreduzibel annehmen und, indem wir Y durch $\overline{\varphi(Y)}$ ersetzen, auch noch Y irreduzibel. Setzen wir nun $c := \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Y$, so folgt aus unseren Erkenntnissen 5.9.18 zur Mindestdimension von Fasern bereits $X = X^{\geq c}$. Aufgrund der generischen Flachheit 5.5.5 und der Dimensionseigenschaften flacher Morphismen 5.10.5 besitzt weiter Y eine offene dichte Teilmenge $V \circledcirc Y$ derart, daß unsere Funktion f auf $\varphi^{-1}(V)$ konstant den Wert c annimmt. Setzen wir $Z := Y \backslash V$, so hat $Z \not\subset Y$ echt kleinere Dimension als Y und wir dürfen auf $\varphi : \varphi^{-1}(Z) \to Z$ die Induktionsvorausetzung anwenden und haben gewonnen. □

5.11 Hauptraumzerlegung von Moduln*

Lemma 5.11.1 (Verallgemeinerte Hauptraumzerlegung). *Gegeben ein Modul M über einem Kring R und ein maximales Ideal $\chi \in \operatorname{Max} R$ setze man $M_{(\chi)} := \{m \in M \mid \chi^k m = 0$ für $k \gg 0\}$. Mit dieser Notation liefern die Inklusionen eine Einbettung*

$$\bigoplus_{\chi \in \operatorname{Max} R} M_{(\chi)} \hookrightarrow M$$

und das Bild dieser Einbettung die Vereinigung aller Untermoduln endlicher Länge.

5.11.2. Im Spezialfall eines Polynomrings in einer Veränderlichen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist das die Hauptraumzerlegung [LA2] 5.2.7, vergleiche auch [LA2] 5.2.16. Unter der Bijektion $k \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Max}(k[X]), \lambda \mapsto \langle X-\lambda \rangle$ entspricht genauer die Hauptraumzerlegung des durch Multiplikation mit X gegebenen Endomorphismus des k-Vektorraums M genau der Zerlegung in der Proposition.

Beweis. Wäre die Summe der $M_{(\chi)}$ nicht direkt, so wäre auch schon eine endliche Teilsumme nicht direkt und wir hätten notwendig eine endliche direkte Teilsumme $M_{(\nu)} \oplus \ldots \oplus M_{(\mu)}$, die von einem weiteren $M_{(\chi)}$ nichttrivial geschnitten wird. Wegen $(M \oplus N)_{(\chi)} = M_{(\chi)} \oplus N_{(\chi)}$ hätten wir dann $\mu \neq \chi$ mit $M_{(\mu)} \cap M_{(\chi)} \neq 0$. Das ist aber absurd, da gilt $R = \chi + \mu$, also $1 = a + b$ mit $a \in \chi$, $b \in \mu$, also für alle n auch $1 = (a + b)^{2n} = c + d$ mit $c \in \chi^n$, $d \in \mu^n$, und damit $1m = 0$ für alle $m \in M_{(\mu)} \cap M_{(\chi)}$. Die Summe ist also direkt und es reicht, wenn wir für M von endlicher Länge $M = \sum M_{(\chi)}$ zeigen. Unter dieser Annahme ist klar, daß wir paarweise verschiedene $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \operatorname{Max} R$ finden können und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(\chi_1 \ldots \chi_r)^n M = 0$$

Der chinesische Restsatz [AL] 2.3.4 liefert dann einen Isomorphismus

$$R/(\chi_1 \ldots \chi_r)^n \stackrel{\sim}{\to} R/\chi_1^n \times \ldots \times R/\chi_r^n$$

den wir benutzen können, um unser M aufzufassen als einen Modul über dem Produktring. Die Elemente e_i in diesem Produktring mit einem einzigen Eintrag 1 an der i-ten Stelle und Nullen sonst haben als Elemente der rechten Seite die Eigenschaft $\chi_i^n e_i = 0$ und für alle $m \in M$ gehört $m = e_1 m + \ldots + e_r m$ folglich zur Summe der $M_{(\chi)}$. □

Übungen

Übung 5.11.3. Man bestimme die verallgemeinerte Hauptraumzerlegung des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$.

Übung 5.11.4 (**Hauptraumzerlegung über Kringen endlicher Länge**). Ist R ein Kring und M ein R-Modul, der die Vereinigung seiner Untermoduln endlicher Länge ist, so sind für alle $\chi \in \operatorname{Max} R$ die Kompositionen $M_{(\chi)} \hookrightarrow M \to M_\chi$ Isomorphismen mit der Lokalisierung nach χ und für maximale Ideale $\chi \neq \mu$ ist die Komposition $M_{(\chi)} \hookrightarrow M \to M_\mu$ die Nullabbildung. Insbesondere ist für jeden Modul M über einem Kring endlicher Länge die Abbildung aus 4.3.26 ein Isomorphismus

$$M \stackrel{\sim}{\to} \prod_{\chi \in \operatorname{Max} R} M_\chi$$

6 Algebraische Varietäten

6.1 Einführung

6.1.1 (**Streitgespräch**). Ich will die Theorie allgemeiner algebraischer Varietäten durch einen kurzen Dialog motivieren.

A: Kennst Du schon diesen super Satz von Bézout, nach dem zwei Polynome in zwei Veränderlichen genau so viele gemeinsame Nullstellen haben, wie das Produkt ihrer Grade angibt?

B: Ist doch offensichtlich Quatsch. Denk nur an zwei parallele Geraden in der Ebene!

A: Na ja, die schneiden sich halt im Unendlichen.

B: Hättest Du auch gleich dazusagen können, was da noch alles mitzuzählen ist! Dann denk halt an zwei Kreise, Nullstellenmengen von quadratischen Polynomen. Die schneiden sich doch meist gar nicht, bestenfalls in zwei und nie in vier Punkten.

A: Na ja, die anderen Schnittpunkte liegen eben im Komplexen.

B: Wird ja ziemlich komplex. Eine Ausrede nach der anderen. Dann denk eben an den Schnitt der Standardparabel mit der x-Achse.

A: Der muß natürlich doppelt gezählt werden!

B: Argh! Natürlich, selbstverständlich. Und was wäre, wenn wir schlicht zweimal dasselbe Polynom in zwei Veränderlichen nehmen?

A: Oups, ich vergaß, teilerfremd müssen die beiden Polynome schon sein. Aber dann stimmt es auch wirklich!

B: Ich glaub vorerst gar nichts mehr. Jetzt erklär mir erst mal ganz genau, was Du mit „gemeinsamen Nullstellen im Unendlichen“ meinst und mit welcher „Vielfachheit“ eine vorgegebene gemeinsame Nullstelle denn nun gezählt werden soll, dann sehen wir weiter.

6.1.2. Nun, dieses „ganz genaue Erklären“ wird ein Weilchen dauern, weil ich es auch wieder nicht minimalistisch machen will. Vielmehr erkläre ich zunächst ganz allgemein abstrakte algebraische Varietäten als spezielle k-geringte Räume. Dann wird diskutiert, inwiefern für $k = \bar{k}$ unsere algebraischen Teilmengen von k^n oder auch unsere naiven affinen Varietäten in diesem Sinne eine natürliche Struktur als algebraische Varietäten tragen, und inwiefern dasselbe auch für die projektiven

Räume $\mathbb{P}^n k$ aus [EL] 1.4.18 gilt. In diesem Rahmen schließlich wird das „ganz genaue Erklären“ dann leicht von der Hand gehen, vergleiche 6.10.6.

6.2 Geringte Räume

Definition 6.2.1. Sei k ein Kring. Unter einer **k-Ringalgebra** verstehen wir ein Paar (R, φ) bestehend aus einem Ring R und einem Ringhomomorphismus $\varphi : k \to R$, dessen Bild im Zentrum von R liegt und der meist vom Leser erraten werden muß. Von einer k-Teilringalgebra fordern wir, daß sie das Bild dieses ausgezeichneten Ringhomomorphismus umfassen soll. In [LA2] 9.9.1 hatten wir derartige Strukturen im Fall eines Körpers k bereits kennengelernt.

Definition 6.2.2. Sei k ein Kring. Ein **k-geringter Raum** $X = (X, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum X mitsamt einer Vorschrift $\mathcal{O}$, die jeder offenen Teilmenge $U \circeq X$ eine k-Teilringalgebra $\mathcal{O}(U) \subset \operatorname{Ens}(U, k)$ in der k-Ringalgebra aller Abbildungen von U nach k zuordnet, deren Elemente wir die **strukturierenden Funktionen auf** U nennen und von denen wir fordern:

> Ist $\mathcal{U}$ ein System offener Teilmengen von X und $V := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ seine Vereinigung, so ist eine Funktion $f : V \to k$ strukturierend genau dann, wenn ihre Restriktionen auf alle $U \in \mathcal{U}$ strukturierend sind.

6.2.3. Unter anderem impliziert unsere Definition, daß alle konstanten Funktionen strukturierend sind, daß also für jedes $U \circeq X$ die konstanten Abbildungen von U nach k in $\mathcal{O}(U)$ liegen: Eine Teilringalgebra muß nämlich nach unseren Definitionen stets das Einselement der ursprünglichen Ringalgebra enthalten.

Ergänzung 6.2.4 (**Diskussion der Terminologie**). Im Zusammenhang mit der Definition von „Schemata“ und „Supermannigfaltigkeiten“ wird eine noch allgemeinere Definition des Konzepts eines geringten Raums benötigt. Wenn wir betonen wollen, daß wir den hier erklärten einfacheren Begriff meinen, reden wir genauer von einem **durch Funktionen k-geringten Raum**. In der Sprache der Garbentheorie, die ich hier noch vermeiden will, ist $\mathcal{O}$ eine „k-Ringalgebren-Untergarbe der k-Ringalgebren-Garbe aller k-wertigen Funktionen auf X“.

Beispiel 6.2.5 (**Mannigfaltigkeiten als $\mathbb{R}$-geringte Räume**). Ein typisches Beispiel sind die „Mannigfaltigkeiten“, die wir in [ML] 28.3.2.4 definiert haben als gewisse $\mathbb{R}$-geringte Räume X, bei denen wir als strukturierende Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \circeq X$ alle „glatten“ Funktionen nehmen.

Beispiel 6.2.6 (**Affine Varietäten als k-geringte Räume**). Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und eine naive affine k-Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ erhalten wir einen k-geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, indem wir X mit seiner Zariskitopologie versehen und für $U \circeq X$ unsere regulären Funktionen aus 4.4.4 als strukturierende Funktionen $U \to k$ nehmen. Die Menge dieser Funktionen hatten wir bereits in 4.4.4 mit $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U)$ bezeichnet. Die so aus naiven affinen Varietäten entstehenden k-geringten Räume nennen wir **affine Varietäten**.

Definition 6.2.7. Seien k ein Kring und $(X, \mathcal{O}_X)$ sowie $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei k-geringte Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt ein **Morphismus von k-geringten Räumen**, wenn sie stetig ist und wenn das Davorschalten unserer Abbildung strukturierende Funktionen zu strukturierenden Funktionen macht, wenn also in Formeln aus $U \Subset Y$ und $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ folgt $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. Die Kategorie der k-geringten, genauer der durch Funktionen k-geringten Räume notieren wir

$$\mathrm{Gerf}_k$$

Beispiel 6.2.8. Die Morphismen $\mathbb{R}$-geringter Räume im Fall von Mannigfaltigkeiten sind genau alle glatten Abbildungen.

Beispiel 6.2.9. Die Morphismen k-geringter Räume im Fall von affinen k-Varietäten sind genau alle Morphismen von naiven affinen Varietäten im Sinne von 3.3.2. Es ist deshalb im weiteren nicht so wichtig, zwischen naiven affinen Varietäten im Sinne von speziellen k-geringten Mengen und affinen Varietäten im Sinne von speziellen k-geringten Räumen zur Zariskitopologie zu unterscheiden.

6.2.10 (**Schnitt von Strukturen als k-geringter Raum**). Sind auf ein und derselben Menge X mehrere Strukturen als k-geringter Raum gegeben, so bilden wir ihren Schnitt, indem wir diejenigen Mengen offen nennen, die in jeder unserer Strukturen offen sind, und diejenigen Funktion strukturierend, die in jeder unserer Strukturen strukturierend sind. Dieser Schnitt ist dann offensichtlich auch eine Struktur als k-geringter Raum auf X.

6.2.11 (**Vergleich von Strukturen als k-geringter Raum**). Gegeben zwei Strukturen als k-geringter Raum auf derselben Menge X nennen wir die eine **größergleich** als die andere genau dann, wenn ihr Schnitt die andere Struktur ist. Salopp gesprochen sind also größere Strukturen solche „mit mehr offenen Mengen oder mehr strukturierenden Funktionen oder beidem“. Auf diese Weise erhalten wir eine Teilordnung auf der Menge aller Strukturen als k-geringter Raum auf einer vorgegebenen Menge X.

Definition 6.2.12. Eine Familie $(\varphi_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räume heißt **gesamthaft final**, wenn für jeden weiteren k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : Y \to W$ gilt

$$(\psi\varphi_i \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

Lemma 6.2.13. *Gegeben k-geringte Räume $(X_i)_{i \in I}$, eine Menge Y und Abbildungen $\varphi_i : X_i \to Y$ gibt es genau eine Struktur als k-geringter Raum auf Y derart, daß unsere Familie gesamthaft final wird. Sie heißt die* **finale Struktur** *zu unserer Familie.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind $(\mathcal{T}_1, \mathcal{O}_1)$ und $(\mathcal{S}_2, \mathcal{O}_2)$ zwei derartige Strukturen auf Y, jeweils bestehend aus einer Topologie und einer Vorgabe strukturierender Funktionen, für die unsere Familie gesamthaft final wird, so ist $\mathrm{id} : (Y, \mathcal{T}_i, \mathcal{O}_i) \to (Y, \mathcal{T}_j, \mathcal{O}_j)$ für beliebige $i, j \in \{1, 2\}$ ein Morphisms. Das zeigt die Eindeutigkeit. Nun zeigen wir noch, daß für die größte Struktur auf Y, für die alle die φ_i Morphismen werden, die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt ist. Diese größte Struktur kann ja explizit dadurch beschrieben werden, daß ihre Topologie die Finaltopologie $\mathcal{T} = \{V \subset Y \mid \varphi_i^{-1}(V) \circledcirc X_i \ \forall i\}$ ist und die strukturierenden Funktionen gegeben werden durch

$$\mathcal{O}(V) = \{f : V \to k \mid f \circ \varphi_i \in \mathcal{O}(\varphi_i^{-1}(V)) \ \forall i\}$$

Damit ist klar, daß diese Struktur die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt. □

6.2.14 (**Transitivität gesamthaft finaler Familien**). Seien $e_{ij} : W_{ij} \to X_i$ und $f_i : X_i \to Y$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Ist die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final, so auch die Familie der f_i. Ist die Familie der e_{ij} gesamthaft final für alle i und die Familie der f_i gesamthaft final, so ist auch die Familie der $f_i e_{ij}$ gesamthaft final. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

6.2.15. Ein Morphismus $f : X \to Y$ von k-geringten Räumen heißt **final**, wenn Y die finale Struktur in Bezug auf die einelementige Familie f trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets final.

6.2.16 (**Disjunkte Vereinigung k-geringter Räume**). Gegeben eine Familie k-geringter Räume (X_i) versehen wir ihre disjunkte Vereinigung $\bigsqcup X_i$ mit der finalen Struktur bezüglich der Inklusionen, wenn nichts anderes gesagt wird. Wir erhalten so ein Koprodukt in der Kategorie Ger_k.

Definition 6.2.17. Eine Familie $(\varphi_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räume heißt **gesamthaft initial**, wenn für jeden weiteren k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : W \to X$ gilt

$$(\varphi_i \psi \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

6.2.18. Ganz allgemein nennen wir einen Morphismus $f : X \to Y$ **initial**, wenn er als einelementige Familie gesamthaft initial ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem k-geringten Raum stets initial. Ist $\psi : X \hookrightarrow Y$ ein injektiver Morphismus von k-geringten Räumen und trägt X die initiale Struktur, so nennen wir ψ eine **Einbettung** von k-geringten Räumen.

6.2.19 (**Diskussion der Terminologie**). In der algebraischen Geometrie ist für unsere Einbettungen auch die Bezeichnung **Immersion** gebräuchlich. In der Differentialgeometrie versteht man jedoch unter einer Immersion stattdessen meist wie in **??** einen nicht notwendig injektiven Morphismus mit injektivem Differential an jedem Punkt.

Ergänzung 6.2.20. Ich will den Begriff der Einbettung nur verwenden in dem allgemeinen in [TM] 1.1.4.2 erklärten Kontext. Den Begriff einer **Immersion** will ich weiter fassen als Morphismus in einer Kategorie, der unter einem natürlichen Mengenfunktor zu einer Injektion wird. Insbesondere will ich, anders als in der Differentialgeometrie üblich, differentialinjektive Abbildungen glatter Mannigfaltigkeiten nur dann Immersionen nennen, wenn sie zusätzlich auch noch injektiv sind.

6.2.21. Besonders oft werden uns **offene Einbettungen** und **abgeschlossene Einbettungen** begegnen, bei denen zusätzlich gefordert wird, daß sie als Abbildungen topologischer Räume offen beziehungsweise abgeschlossen sind, oder gleichbedeutend, daß ihr Bild offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

Lemma 6.2.22. *Gegeben k-geringte Räume $(Y_i)_{i\in I}$, eine Menge X und Abbildungen $\varphi_i : X \to Y_i$ gibt es genau eine Struktur als k-geringter Raum auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft initial wird. Sie heißt die* **initiale Struktur** *zu unserer Familie.*

Beweis. Die Eindeutigkeit zeigt man wie im Fall gesamthaft finaler Strukturen in 6.2.13. Für den Nachweis der die Existenz zeigen wir genauer, daß die kleinste Struktur $\mathcal{I}$ eines k-geringten Raums auf X, für die alle unsere φ_i Morphismen werden, die geforderte universelle Eigenschaft hat. Ist in der Tat $\psi : W \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß alle $\varphi_i\psi$ Morphismen sind, so muß ja die finale Struktur $\mathcal{T}$ auf X in Bezug auf ψ größergleich unserer kleinsten Struktur $\mathcal{I}$ sein. Das zeigt, daß ψ auch in Bezug auf $\mathcal{I}$ ein Morphismus ist. □

6.2.23. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge eines k-geringten Raums, so nennen wir die initiale Struktur zur Inklusion die **induzierte Struktur** eines k-geringten Raums auf X und notieren sie $(X, \mathcal{O}_Y|_X)$. Explizit kann man die induzierte Struktur beschreiben wie folgt: Als Topologie auf X erhält man die von Y induzierte Topologie, und eine Funktion g auf $U \circledcirc X$ ist strukturierend genau dann, wenn es für alle $x \in U$ eine offene Umgebung $V \circledcirc Y$ von x in Y gibt und eine Funktion $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ mit $g|_{U\cap V} = f|_{U\cap V}$.

6.2.24 (**Transitivität gesamthaft initialer Familien**). Seien $\varphi_i : X \to Y_i$ und $\psi_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Sind die φ_i gesamthaft initial und sind für jedes i die ψ_{ji} gesamthaft initial, so ist auch die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft initial. Ist andererseits die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft initial, so auch die Familie der φ_i. All das folgt direkt aus den Definitionen.

6.2.25. Bemerkung 6.2.24 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Morphismen stets initial ist, und daß Verknüpfung $\psi\varphi$ von zwei Morphismen nur dann initial sein kann, wenn φ initial ist. Insbesondere ist jeder Morphismus initial, zu dem es einen linksinversen Morphismus gibt. Weiter ist die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung.

Ergänzung 6.2.26. Diese Aussagen und ihr Beweis sind ebenso wie die Aussagen zur Transitivität finaler Familien völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen [TM] 1.1.6.14, [TM] 1.1.7.5 im Kontext topologischer Räume. Sie sind noch allgemeiner sinnvoll und richtig für einen beliebigen treuen Funktor, vergleiche [TM] 1.1.6.16.

Übungen

Übung 6.2.27. Für $m \leq n$ ist die Projektion auf die ersten Koordinaten $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ final in Bezug auf die in **??** erklärten $\mathcal{C}^1$-Strukturen $\mathbb{R}$-geringter Räume.

Übung 6.2.28. Man folgere aus 6.2.14: Die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen ist stets final. Ist die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei Morphismen final, so ist φ final. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, für den es also einen Morphismus s gibt mit $fs = \mathrm{id}$.

Übung 6.2.29 (**Finalität offener Überdeckungen**). Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung eines k-geringten Raums X, so trägt X die finale Struktur in Bezug auf die Einbettungen $U_i \hookrightarrow X$. Eine Abbildung $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum ist also genau dann ein Morphismus, wenn ihre Restriktionen auf alle U_i Morphismen sind.

Übung 6.2.30 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von k-geringten Räumen $f : Y \to X$ final, so ist auch für jede offene Teilmenge $U \circledcirc X$ die induzierte Abbildung $f^{-1}(U) \to U$ final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt $f : Y \to X$ ein Morphismus von k-geringten Räumen und besitzt X eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ derart, daß $f : f^{-1}(U) \to U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

6.3 Gesättigte geringte Räume

6.3.1. Für das Studium von Varietäten sind besonders diejenigen k-geringten Räume relevant, die wir im folgenden als „gesättigte k-geringte Räume" einführen.

Definition 6.3.2. Sei k ein Körper. Ein k-geringter Raum X heiße **gesättigt**, wenn für $U \circledcirc X$ offen und $f : U \to k$ regulär auch die Menge $\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ offen ist und $1/f$ darauf eine reguläre Funktion.

6.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff eines „gesättigten geringten Raums“ ist nicht gebräuchlich. Kempf [Kem93] bezeichnet solche Strukturen als „spaces with functions“. Der Begriff ist nur sinnvoll, wenn k ein Körper ist.

6.3.4. Offensichtlich ist ein beliebiger Schnitt gesättigter Strukturen wieder gesättigt. Offensichtlich ist die finale Struktur zu irgendwelchen Abbildungen von gesättigten Strukturen in eine vorgegebene Menge auch selbst gesättigt.

Definition 6.3.5. Eine Familie $(\varphi_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ von Morphismen k-geringter Räuma heißt **gesamthaft gesättigt initial**, wenn X gesättigt ist und wenn für jeden weiteren gesättigten k-geringten Raum W und jede Abbildung $\psi : W \to X$ gilt

$$(\varphi_i \psi \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

Lemma 6.3.6. *Gegeben eine Familie $(\varphi_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ von Abbildungen einer Menge k-geringter Räume gibt es stets genau eine Struktur als k-geringter Raum auf X derart, daß unsere Familie gesamthaft gesättigt initial wird. Wir nennen sie die* **gesättigte initiale Struktur auf** X.

Beweis. Die Eindeutigkeit zeigt man wie in 6.2.13. Um die Existenz zu zeigen, weisen wir nach, daß die kleinste Struktur als gesättigter k-geringter Raum auf X, für die alle φ_i Morphismen werden, die behauptete universelle Eigenschaft hat. Das hinwiederum folgt daraus, daß die finale Struktur zu $\psi : W \to X$ gesättigt ist und größergleich dieser kleinsten Struktur sein muß. □

Beispiel 6.3.7 (**Sättigung einer geringten Menge**). Sei k ein Körper. Jede k-geringte Menge $(X, \mathcal{O}(X))$ ist für die Klumpentopologie ein k-geringter Raum. Die gesättigte initiale Struktur für $\mathrm{id} : X \to X$ alias die kleinste gesättigte Struktur $(X, \mathcal{O}_X)$, die diese Struktur umfaßt, nennen wir die **Sättigung** unserer k-geringten Menge. Sie kann explizit beschrieben werden wie folgt:

1. Abgeschlossen sind alle simultanen Nullstellenmengen $\mathcal{Z}(E)$ für Mengen von Funktionen $E \subset \mathcal{O}(X)$;

2. Die strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}_X(U)$ für $U \circledcirc X$ offen in Bezug auf die im ersten Teil erklärte Topologie sind alle Funktionen $f : U \to k$ mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $V \circledcirc U$ gibt und Funktionen $g, h \in \mathcal{O}(X)$ mit $h(y) \neq 0$ und $f(y) = g(y)/h(y)$ für alle $y \in V$.

In der Tat müssen offensichtlich in jeder gesättigten Struktur, die die gegebene Struktur umfaßt, alle $\mathcal{Z}(E)$ abgeschlossen sein und alle lokal durch Quotienten von Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ darstellbaren Funktionen auf offenen Teilmengen strukturierend. Andererseits erkennt man auch leicht, daß X mit der in Teil 1 angegebenen Topologie und den in Teil zwei angegebenen strukturierenden Funktionen auf offenen Teilmengen ein gesättigter geringter Raum ist.

Beispiel 6.3.8 (**Affine Varietät als Sättigung**). Gegeben eine naive affine Varietät X ist die Topologie auf ihrer Sättigung 6.3.7 unsere Zariski-Topologie aus 3.4.3 und die Struktur als k-geringter Raum die in 6.2.6 beschriebene und die Identität ist folglich ein gesättigt initialer Morphismus

$$(X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}(X))$$

6.3.9. Die initiale Struktur zu einer Abbildung von einer Menge in eine gesättigte Struktur ist offensichtlich stets wieder gesättigt. Für die initiale Struktur in Bezug auf eine Familie von mehr als einer Abbildung gilt das jedoch im allgemeinen nicht mehr, wie schon das Beispiel der Produktstruktur auf k^2 bald zeigen wird.

6.3.10 (**Transitivität gesamthaft gesättigt initialer Familien**). Seien $\varphi_i : X \to Y_i$ und $\psi_{ji} : Y_i \to Z_{ji}$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Sind die φ_i gesamthaft gesättigt initial und sind für jedes i die ψ_{ji} gesamthaft initial oder gesamthaft gesättigt initial, so ist auch die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft gesättigt initial. Ist andererseits die Familie der $\psi_{ji}\varphi_i$ gesamthaft gesättigt initial, so auch die Familie der φ_i. All das folgt direkt aus den Definitionen.

6.3.11 (**Vergleich induzierter Strukturen auf abgeschlossenen Teilmengen**). Gegeben $i : Y \hookrightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge in eine naive affine Varietät ist die Verknüpfung $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O}(Y)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ eines gesättigt initialen Morphismus mit einem initialen Morphismus wieder gesättigt initial. Aufgrund der universellen Eigenschaft der Sättigung faktorisiert sie über $(X, \mathcal{O}_X)$, folglich ist die Inklusion ein initialer Morphismus

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

Insbesondere ist ein k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ genau dann eine affine k-Varietät, wenn er für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Einbettung nach $(k^n, \mathcal{O}_{k^n})$ besitzt.

6.3.12 (**Vergleich induzierter Strukturen auf Nichtnullstellenmengen**). Gegeben in einer naiven affinen Varietät X die Nichtnullstellenmenge U einer regulären Funktion betrachten wir die Verknüpfung $(U, \mathcal{O}_U) \to (U, \mathcal{O}(U)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ und prüfen explizit, daß sie gesättigt initial ist. Sie faktorisiert andererseits aufgrund der universellen Eigenschaft der Sättigung als $(U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}(X))$, folglich ist die Inklusion ein initialer Morphismus

$$(U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

Proposition 6.3.13 (Verkleben von Punkten). *Seien X eine affine k-Varietät und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y. Sind alle Fasern von φ endlich und fast alle Fasern einelementig, so ist Y mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums auch eine affine k-Varietät.*

Beweis. In 5.2.15 hatten wir bereits gezeigt, daß Y mit $\mathcal{O}(Y) := \{f : Y \to k \mid f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)\}$ eine naive affine Varietät wird. Da $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ ganz ist, zeigen unsere allgemeinen Erkenntnisse 5.2.10 über die Geometrie ganzer Ringerweiterungen, daß φ abgeschlossen und insbesondere „topologisch final“ ist: Eine Teilmenge von Y ist genau dann offen, wenn ihr Urbild in X es ist. Um zu zeigen, daß φ eine finale Abbildung auf den zugehörigen k-geringten Räumen ist, müssen wir noch für jede offene Teilmenge $U \circledcirc Y$ zeigen, daß eine Funktion $h : U \to k$ genau dann regulär ist, wenn $h \circ \varphi$ regulär ist. Für globale Funktionen ist das offensichtlich. Für den allgemeinen Fall reicht es, wenn wir unsere Aussage für offene Teilmengen der Gestalt $U = Y_g = \{g \neq 0\}$ zeigen, mit $g \in \mathcal{O}(Y)$. Offensichtlich brauchen wir nur den Fall zu betrachten, daß es genau zwei Punkte $p, q \in X$ gibt mit $p \neq q$ aber $\varphi(p) = \varphi(q)$. Nun betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow k$$

mit rechter Abbildung $f \mapsto f(p) - f(q)$. Lassen wir $g \in \mathcal{O}(Y)$ auf dem k in dieser Sequenz durch Multiplikation mit seinem Wert $g(p) = g(q)$ operieren, so besteht sie aus Homomorphismen von $\mathcal{O}(Y)$-Moduln und bleibt exakt bei Lokalisierung nach g. Das zeigt $\mathcal{O}(Y)_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_g$ im Fall $g(p) = g(q) = 0$ und $\mathcal{O}(Y)_g \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{O}(X)_g \mid f(p) = f(q)\}$ im Fall $g(p) = g(q) \neq 0$. Die Proposition ist bewiesen. □

6.3.14 (**Produkt gesättigter k-geringter Räume**). Gegeben ein Körper k und gesättigte k-geringte Räume X und Y erhalten wir offensichtlich ein Produkt in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume, das **gesättigte Produkt** von X und Y, indem wir auf der Produktmenge $X \times Y$ die gesättigte initiale Struktur zu den Projektionen auf X und Y betrachten.

6.3.15 (**Der k^n als gesättigtes Produkt**). Versehen wir einen Körper k mit der kleinstmöglichen Struktur $(k, \mathcal{O}_k)$ eines k-geringten Raums derart, daß die Identität $k \to k$ eine strukturierende Funktion auf k ist, so erhalten wir offensichtlich Klumpentopologie mit den polynomialen Funktionen als strukturierenden Funktionen. Nehmen wir $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen an, so ist die kleinste gesättigte Struktur $(k, \mathcal{O}_k)$ als k-geringter Raum auf k derart, daß die Identität $k \to k$ eine strukturierende Funktion ist, offensichtlich genau unsere Struktur als affine Varietät auf k, die durch Sättigung aus unserer Struktur als naive affine Varietät 3.3.6 hervorgeht. Versehen wir schließlich k^n mit der Struktur eines gesättigten Produkts von einigen Kopien von $(k, \mathcal{O}_k)$, so erhalten wir offensichtlich genau unsere Struktur $(k^n, \mathcal{O}_{k^n})$ als affine Varietät auf k^n, die durch Sättigung aus unserer Struktur als naive affine Varietät 3.3.6 hervorgeht.

Proposition 6.3.16. *Sei k ein Körper. Jedes gesättigte Produkt von initialen Morphismen gesättigter k-geringter Räume ist wieder initial. Das gesättigte Produkt von zwei offenen Einbettungen ist wieder eine offene Einbettung. Das gesättigte Produkt von zwei abgeschlossenen Einbettungen ist wieder eine abgeschlossene Einbettung.*

Beweis. Das folgt aus der Transitivität gesättigter initialer Familien 6.3.10. Seien genauer $\phi : X \to Y$ und $\psi : Z \to W$ unsere initialen Morphismen. Die Definition des Produktmorphismus $\phi \times \psi$ liefert $\mathrm{pr}_Z \circ(\phi \times \psi) = \phi \circ \mathrm{pr}_X$ und $\mathrm{pr}_W \circ(\phi \times \psi) = \psi \circ \mathrm{pr}_Y$. Die Definition des gesättigten Produkts $X \times Y$ liefert, daß die Projektionen $\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y$ dafür eine gesättigt initiale Familie bilden. Die Transitivität gesättigter initialer Familien 6.3.10 zeigt dann, daß auch $\phi \circ \mathrm{pr}_X$, $\psi \circ \mathrm{pr}_Y$ alias $\mathrm{pr}_Z \circ(\phi\times\psi)$, $\mathrm{pr}_W \circ(\phi\times\psi)$ dafür eine gesättigt initiale Familie bilden. Die zweite Aussage in 6.3.10 impliziert dann weiter, daß auch $\phi \times \psi$ eine gesättigte initiale Familie und mithin nach 6.3.9 initial ist. Daß das Produkt offener beziehungsweise abeschlossener Teilmengen wieder offen beziehungsweise abgeschlossen ist, gilt bereits für die Produkttopologie. $\square$

Korollar 6.3.17. *Das in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume gebildete Produkt von affinen Varietäten ist stets wieder eine affine Varietät.*

Beweis. Das Produkt in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume macht nach 6.3.16 aus je zwei ageschlossenen Einbettungen eine abgeschlossene Einbettung und macht nach 6.3.15 aus k^n und k^m den k^{n+m}. Da nach 6.3.11 affine Varietäten gerade solche k-geringten Räume sind, die eine abgeschlossene Einbettung in einen k^n besitzen, folgt das Korollar. $\square$

Satz 6.3.18 (Morphismen in affine Varietäten). *Gegeben eine affine k-Varietät Y liefert der Übergang zu den globalen regulären Funktionen für jeden gesättigten k-geringten Raum X eine Bijektion*

$$\mathrm{Gerf}_k(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kring}^k(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $Y = k^n$. Es bezeichne $T_j : k^n \to k$ die j-te Koordinate. Für jeden gesättigten k-geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ liefert das Zurückholen von Funktionen aufgrund der universellen Eigenschaft der Produktstruktur auf k^n eine Bijektion $\mathrm{Gerf}_k(X, k^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X)^n$, $\varphi \mapsto (T_j \circ \varphi)_{j=1}^n$. Ist allgemeiner Y affin, so dürfen wir $Y \not\subset\!\!\!\!\!\triangle\; k^n$ annehmen. Dann sind beide Seiten in natürlicher Bijektion zu

$$\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n \mid f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}(Y)\}$$

wegen der Definition des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(Y)$ und der universellen Eigenschaft der induzierten Struktur und wegen der universellen Eigenschaft des Quotienten $k[T_1, \dots, T_n]/\mathcal{I}(Y) \cong \mathcal{O}_Y(Y)$. □

6.4 Algebraische Varietäten

6.4.1. $(k = \bar{k})$. Ich erinnere daran, daß wir eine affine k-Varietät erklärt hatten als einen k-geringten Raum, der eine abgeschlossene Einbettung in einen k^n besitzt. Eine Einbettung von k-geringten Räumen hatten wir erklärt als eine initiale Injektion. Eine abgeschlossene Einbettung hatten wir erklärt als eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild. Den k^n verstehen wir dabei mit der üblichen Struktur als k-geringter Raum, die wir am einfachsten als die von den Polynomfunktionen erzeugte Struktur als gesättigter k-geringter Raum beschreiben können.

Definition 6.4.2. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Eine **k-Prävarietät** ist ein gesättigter k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine endliche Überdeckung besitzt durch offene Teilmengen U derart, daß alle $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ affine k-Varietäten sind. Die Elemente von $\mathcal{O}_X(V)$ für $V \circledcirc X$ nennen wir in diesem Kontext die **regulären Funktionen auf** V;

2. Eine **k-Varietät** ist eine k-Prävarietät X mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß für das Produkt $X \times X$ in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume die Diagonale eine abgeschlossene Teilmenge $\Delta(X) \subset X \times X$ ist;

3. Ein Morphismus von Prävarietäten oder Varietäten ist ein Morphismus von geringten Räumen. Wir erhalten so die Kategorien

$$\mathrm{Var}_k \subset \mathrm{pVar}_k$$

der Varietäten beziehungsweise Prävarietäten über k.

6.4.3 (**Rückwärtskompatibilität der Terminologie**). Jede affine Varietät ist offensichtlich eine Varietät im Sinne der obigen Definition.

6.4.4 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Quellen fordern von ihren Varietäten zusätzlich noch, daß sie irreduzibel sein sollen. Ich schließe mich dieser Konvention nicht an.

Beispiel 6.4.5 (**Eine Prävarietät, die keine Varietät ist**). Wir betrachten die „Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt“ $X := k \sqcup \{\tilde{0}\}$ mit der finalen Struktur zu den beiden Abbildungen $\psi : k \hookrightarrow X$ und $\tilde{\psi} : k \hookrightarrow X$, die gegeben werden durch $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = x$ für $x \neq 0$ aber $\psi(0) = 0$, $\tilde{\psi}(0) = \tilde{0}$. Diese Varietät ist nicht separiert, denn die Punkte $(0, \tilde{0})$ und $(\tilde{0}, 0)$ aus $X \times X$ liegen beide im Abschluß der Diagonale. In der Tat ist das Urbild jeder offenen Umgebung von $(\tilde{0}, 0)$ unter $(\tilde{\psi}, \psi) : k \to X \times X$ eine offene Umgebung von $0 \in k$, folglich trifft jede offene Umgebung von $(\tilde{0}, 0)$ die Diagonale.

6.4.6 (**Folgerungen aus der Separiertheit**). Zwei Morphismen $\phi, \psi : Y \to X$ von einer Prävarietät in eine Varietät, die auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen, sind gleich. In der Tat, ist die Diagonale in $X \times X$ abgeschlossen, so auch ihr Urbild unter dem Morphismus $(\phi, \psi) : Y \to X \times X$.

6.4.7 (**Schnitte affiner offener Teilmengen**). In einer Varietät X ist der Schnitt von je zwei offenen affinen Teilmengen U, V wieder affin. In der Tat ist $U \cap V$ isomorph zu $(U \times V) \cap \Delta_X$ und Δ_X ist abgeschlossen in $X \times X$ nach Annahme. Ist etwas allgemeiner $\varphi : V \to X$ ein Morphismus einer affinen Varietät V in eine Varietät X und ist $U \circledsubseteq X$ offen affin, so ist auch $\varphi^{-1}(U)$ affin, denn es ist isomorph zum Urbild der Diagonale Δ_X unter $\varphi \times i : V \times U \to X \times X$ für $i : U \hookrightarrow X$ die Inklusion.

6.4.8. Das meiste, was wir im folgenden über Varietäten aussagen, gilt allgemeiner auch für Prävarietäten. Der Unterschied wird erst später relevant werden.

6.4.9 (**Varietäten über allgemeineren Körpern**). Wenn wir im Folgenden wie im Vorhergehenden von einer Varietät reden, so denken wir uns stets einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper $k = \bar{k}$ fest gewählt, über dem sie definiert ist. Analoga über nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern werden wir erst im Rahmen der allgemeinen Theorie der Schemata behandeln und nicht als Varietäten ansprechen. Der Leser sei gewarnt, daß man eine andere und recht nutzlose Kategorie erhält, wenn man im Fall eines nicht algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers die vohergehende Definition 6.4.2 wortwörtlich übernimmt.

6.4.10. Nach 6.3.4 ist ein k-geringter Raum, der eine Überdeckung durch offene Teilmengen besitzt, auf denen die induzierte Struktur gesättigt ist, auch selbst bereits gesättigt. Diese Forderung im ersten Teil unserer Definition war also überflüssig. Ich habe sie dennoch dazugeschrieben, um die Definition einer Varietät nicht durch Zwischenüberlegungen zu stören.

6.4.11 (**Produkte von Varietäten**). Das in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume gebildete Produkt von zwei Prävarietäten ist wieder eine Prävarietät. Das folgt unmittelbar daraus, daß nach 6.3.17 das in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume gebildete Produkt affiner Varietäten wieder eine affine Varietät ist und daß nach 6.3.16 ebendort das Produkt offener Einbettungen wieder eine offene Einbettung ist. Es folgt leicht, daß das in der Kategorie der gesättigten k-geringten Räume gebildete Produkt von zwei Varietäten wieder eine Varietät ist.

6.4.12 (**Irreduzibilität von Produkten**). Das Produkt von zwei irreduziblen Varietäten oder Prävarietäten ist stets wieder irreduzibel. Sei in der Tat $X \times Y =$

$A \cup B$ Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} X_A & := & \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset A\} \\ X_B & := & \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset B\} \end{array}$$

und folgern $X = X_A \cup X_B$ aus der Irreduzibilität von Y. Da X irreduzibel ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X_A dicht in X annehmen. Für alle $y \in Y$ gilt nun $X_A \times \{y\} \subset A$ und wegen A abgeschlossen auch $X \times \{y\} \subset A$. Das zeigt $A = X \times Y$.

Lemma 6.4.13. *Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge einer Varietät ist mit der induzierten Struktur wieder eine Varietät. Analoges gilt für Prävarietäten.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den Erkenntnissen 6.3.11 und 6.3.12, daß in einer affinen Varietät jede abgeschlossene Teilmenge und jede Nichtnullstellenmenge einer regulären Funktion wieder eine affine Varietät ist. Es gilt nur zu beachten, daß jede offene Teilmenge einer affinen Varietät X bereits eine endliche Überdeckungen durch Nichtnullstellenmengen X_f besitzt. □

Definition 6.4.14. Eine **quasiaffine k-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer offenen Teilmenge einer affinen k-Varietät.

6.4.15. Eine Teilmenge eines topologischen Raums, die ein Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Menge ist, heißt **lokal abgeschlossen**. Jede lokal abgeschlossene Teilmenge einer Varietät ist mit ihrer induzierten Struktur eines k-geringten Raums selbst wieder eine Varietät. Wir nennen die lokal abgeschlossenen Teilmengen einer Varietät auch ihre **Untervarietäten** und denken sie uns dabei stets mit der induzierten Struktur versehen. Jede Untervarietät einer quasiaffinen Varietät ist quasiaffin.

6.4.16 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere Untervarietäten sind kategorische Unterobjekte in der Kategorie der Varietäten, aber die meisten Varietäten besitzen durchaus noch weitere, nicht zu Untervarietäten isomorphe kategorische Unterobjekte. Beispiele liefern unsere bijektiven Morphismen von Varietäten aus 3.3.20 oder 3.3.21, die keine Isomorphismen sind.

6.4.17 (**Eine quasiaffine aber nicht affine Varietät**). Das Komplement $k^2 \backslash 0$ des Ursprungs in der Ebene ist keine affine Varietät: In der Tat liefert nach 5.9.28 die Restriktion eine Bijektion $\mathcal{O}(k^2) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(k^2 \backslash 0)$, auf affinen Varietäten ist jedoch $\mathcal{O}$ volltreu. Mithin kann ein Morphismus von affinen Varietäten nur dann einen Isomorphismus auf den globalen regulären Funktionen induzieren, wenn er bereits selbst ein Isomorphismus war.

Vorschau 6.4.18. Es gibt durchaus auch offene affine Teilmengen affiner Varietäten, die nicht das Komplement der Nullstellenmenge einer regulären Funktion sind. Die Konstruktion eines Beispiels braucht jedoch mehr Theorie, als sie uns hier zur Verfügung steht: Man betrachte eine elliptische Kurve ohne ihr neutrales Element. Das ist eine affine Varietät. Jeder Punkt dieser affinen Varietät, der die einzige Nullstelle einer regulären Funktion ist, muß dann von endlicher Ordnung sein. Andererseits ist das Komplement in einer elliptischen Kurve von zwei beliebigen Punkten stets affin.

6.4.19. Offensichtlich ist jede Varietät ein noetherscher topologischer Raum.

Definition 6.4.20. Unter der **Dimension** einer Varietät versteht man die Krull-Dimension des zugrundeliegenden topologischen Raums.

Proposition 6.4.21. *Gegeben eine irreduzible Varietät stimmt die Dimension jeder nichtleeren offenen Teilmenge überein mit der Dimension der ganzen Varietät.*

Beweis. In der Tat, jede echt aufsteigende endliche Kette irreduzibler Mengen enthält einen gemeinsamen Punkt und liefert durch Herunterschneiden auf eine affine offene Umgebung dieses Punktes eine echt aufsteigende Kette irreduzibler Mengen dort. Das zeigt, daß die Krulldimension beschränkt ist durch das Maximum der Krulldimensionen der Mengen jeder offenen affinen Überdeckung. Jede nichtleere offene Teilmenge ist aber auch irreduzibel, und jeder der zu unserer Überdeckung gehörigen affinen k-Kringe ist folglich ein Integritätsbereich und damit ein Kettenring. Da schließlich je zwei nichtleere offene Teilmengen nichtleeren Schnitt haben, folgt die Behauptung. □

6.4.22. Eine äqui-eindimensionale Varietät heißt eine **Kurve** oder genauer eine **algebraische Kurve**.

Definition 6.4.23. Gegeben ein k-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und ein Punkt $x \in X$ erklären wir den **lokalen Ring**

$$\mathcal{O}_{X,x}$$

von X **bei** x als die Menge aller Funktionskeime in $\operatorname{Ens}(X, k)_x$, die von einer strukturierenden Funktion repräsentiert werden.

6.4.24 (**Lokale Ringe im Fall affiner Varietäten**). Im Fall einer affinen Varietät X stimmt der hier definierte Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ offensichtlich überein mit dem in 4.4.3 definierten Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ aller Funktionskeime, die einen Repräsentanten der Gestalt (X_g, f) für $g \in \mathcal{O}(X)$ mit $x \in X_g$ und $f \in \mathcal{O}(X_g)$ haben.

Ergänzung 6.4.25. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Varietät und liefern die Auswertungen an Punkten eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ring}^k(\mathcal{O}_X(X), k)$, so wüßte ich gerne, ob X affin sein muß. Nimmt man zusätzlich an, daß $\mathcal{O}_X(X)$ ringendlich ist über k und $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}_X(X)$ ein Homöomorphismus, so kann ich das wohl zeigen.

Ergänzung 6.4.26. Ist der k-Kring der regulären Funktionen auf einer Varietät stets wieder ringendlich über k? Ich denke schon, kenne aber kein ganz einfaches Argument.

Übungen

Übung 6.4.27. Jeder Punkt einer Varietät oder Pävarietät liegt in einer dichten offenen affinen Teilmenge.

Übung 6.4.28. Gegeben eine Varietät oder Prävarietät X und $f \in \mathcal{O}_X(X)$ regulär setzen wir

$$X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

Man zeige, daß es für alle $h \in \mathcal{O}_X(X_f)$ ein $n \gg 0$ gibt derart, daß die Fortsetzung durch Null von $f^n h$ eine reguläre Funktion auf ganz X ist. Man folgere, daß die Restriktion $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X_f)$ zwischen der Lokalisierung von $\mathcal{O}_X(X)$ an f und dem Ring der regulären Funktionen auf X_f induziert.

Übung 6.4.29 (**Affine offene Teilmengen affiner Varietäten**). Gegeben eine Varietät X, offene affine Teilmengen $U, V \Subset X$ und ein Punkt $x \in U \cap V$ zeige man: Es gibt stets $s \in \mathcal{O}(U)$ und $t \in \mathcal{O}(V)$ mit $x \in U_s$ und $U_s = V_t$. In dieser Situation ist natürlich auch $U_s = V_t$ affin. Hinweis: 6.4.28.

Übung 6.4.30. Man zeige, daß für jede affine Varietät Z der von einer Verklebung $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ affiner Varietäten im Sinne von 6.3.13 induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen, ja selbst wieder final ist. Man gebe ein Beispiel an, in dem diese Verklebung kein offener Morphismus ist.

Übung 6.4.31. Die Projektion von einem Produkt in der Kategorie der gesättigten geringten Räume auf einen der Faktoren ist stets offen.

Ergänzende Übung 6.4.32. Man zeige, daß für beliebige Prävarietäten X, Y die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

induziert. Hinweis: Für affine Varietäten wissen wir das bereits aus 3.1.4. Als nächstes betrachte man den Fall, daß nur eine unserer Prävarietäten eine affine Varietät ist, und erinnere dazu die Exaktheit des Tensorprodukts.

Übung 6.4.33. Eine auf einer offenen Teilmenge einer irreduziblen affinen Varietät definierte reguläre Funktion f, die lokal als Quotient $f = g/h$ geschrieben werden kann, stimmt bereits auf der der Differenz ihres Definitionsbereichs und der Nullstellenmenge von h mit g/h überein.

Übung 6.4.34 (**Fixpunktmengen**). Gegeben eine Varietät X und ein Morphismus $\varphi : X \to X$ ist die Menge der Fixpunkte $X^\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) = x\}$ abgeschlossen. Die entsprechende Aussage für eine Prävarietät ist falsch: Ist zum Beispiel Y eine Prävarietät und betrachten wir die Vertauschung der Einträge auf $X = Y \times Y$, so ist die Menge der Fixpunkte nicht abgeschlossen.

Übung 6.4.35. Der Graph eines Morphismus von einer Prävarietät in eine Varietät ist stets abgeschlossen.

Übung 6.4.36 (**Frobenius-Twist**). Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper positiver Charakteristik. $\operatorname{char} k = p > 0$ und sei $X = (X, \mathcal{O})$ eine Varietät über k. So ist auch $X^{[1]} := (X, \mathcal{O}^{[1]})$ mit

$$\mathcal{O}^{[1]}(U) := \{f^p \mid f \in \mathcal{O}(U)\} \quad \forall U \circledcirc X$$

eine Varietät über k. Sie heißt der **Frobenius-Twist** unserer ursprünglichen Varietät. Weiter ist die Identität auf X ein Morphismus $X \to X^{[1]}$ von Varietäten über k, der **Frobenius-Morphismus**, und jeder Morphismus $X \to Y$ induziert einen Morphismus $X^{[1]} \to Y^{[1]}$. Schließlich zeige man, daß der Funktor $X \mapsto X^{[1]}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Dasselbe gilt für Prävarietäten. Hinweis: 3.3.21. Vielleicht noch natürlicher wird diese Konstruktion in der Sprache der Schemata, vergleiche 14.4.2.

Vorschau 6.4.37. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von positiver Charakteristik. Eine k-Varietät X heißt **Frobenius-spaltend**, wenn $\mathcal{O}^{[1]}$ ein direkter Summand des $\mathcal{O}^{[1]}$-Moduls $\mathcal{O}$ ist.

Übung 6.4.38 (**Normale Varietäten**). Eine Varietät oder Prävarietät heißt **normal**, wenn für jeden Punkt $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist. Man zeige, daß eine affine Varietät genau dann normal ist, wenn ihr Ring von regulären Funktionen normal ist. Man zeige, daß jede normale Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten ist.

Übung 6.4.39 (**Reguläre Funktionskeime längs abgeschlossener Teilmengen**). Gegeben ein noetherscher k-geringter Raum X mit einer abgeschlossenen Teilmenge $Y \subset X$ erklären wir den Ring

$$\mathcal{O}_{X,Y} \subset \operatorname{Ens}(X, k)_Y$$

aller **strukturierenden Funktionskeime längs** Y als den Ring aller Funktionskeime nach 4.4.6 mit mindestens einer strukturierenden Funktion unter seinen Repräsentanten. Im Fall einer einpunktigen Teilmenge ist das unser lokaler Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ aus 6.4.23. Ist $U \circledcirc X$ offen mit $U \cap Y$ dicht in Y, so induziert die Restriktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U,Y\cap U}$$

Gegeben $Z \subset Y \subset X$ abgeschlossene Teilmengen derart, daß Z jede irreduzible Komponente von Y trifft, induziert weiter das Generisieren 4.4.12 einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,Z} \to \mathcal{O}_{X,Y}$$

auf den regulären Funktionskeimen. Ist X eine affine Varietät, so spezialisiert das zu den bereits in 4.4.7 erklärten regulären Funktionskeimen. Für eine beliebige Prävarietät X übernehmen wir diese Terminologie und nennen die Elemente von $\mathcal{O}_{X,Y}$ **reguläre Funktionskeime längs** Y und setzen $\mathcal{M}(X) := \mathcal{O}_{X,X}$ und nennen diese „dicht definierten regulären Funktionen" die **rationalen Funktionen auf** X. In der Literatur ist in diesem Fall statt $\mathcal{M}(X)$ die Notation $k(X)$ üblich. Ist X eine irreduzible k-Prävarietät, so bilden die rationalen Funktionen auf X einen Körper vom Transzendenzgrad

$$\operatorname{trgr}_k \mathcal{M}(X) = \operatorname{kdim} X$$

Übung 6.4.40. Sei X eine Prävarietät. Offensichtlich stimmen je zwei Repräsentanten (U, f_U) und (V, f_V) einer rationalen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ bereits auf $U \cap V$ überein. Jede rationale Funktion hat mithin einen eindeutig bestimmten **größten Repräsentanten**, der eben auf der Vereinigung der Definitionsbereiche aller Repräsentanten definiert ist. Der Definitionsbereich des größten Repräsentanten heißt der **Definitionsbereich unserer rationalen Funktion**.

Übung 6.4.41 (**Definitionsbereiche und lokale Ringe**). Ist X eine irreduzible Prävarietät, so liefert das Generisieren 4.4.12 für jeden Punkt $x \in X$ eine natürliche Injektion $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$, die wir von nun an in Notation und Sprache oft als Einbettung einer Teilmenge betrachten werden. Man zeige: Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zum Definitionsbereich einer rationalen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, wenn f im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathcal{M}(X)$ liegt.

6.4.42. Gegeben eine Eigenschaft (E) von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten heiße ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ **produktfest** (E) oder ausführlicher **produktfest** (E) **in** $\mathcal{C}$, wenn für jedes weitere Objekt Z auch der Morphismus $\varphi \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ die Eigenschaft (E) hat. Mir schien diese Terminologie bequem, sie ist aber unüblich.

Übung 6.4.43. Ein Morphismus von Prävarietäten $X \to Y$ heißt **eigentlich**, wenn er produktfest abgeschlossen ist. Man zeige, daß es dafür ausreicht zu zeigen, daß für jede affine Varietät Z der induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen ist. Man zeige, daß gegeben ein surjektiver eigentlicher Morphismus $X \twoheadrightarrow Y$ von einer Varietät X zu einer Prävarietät Y auch Y eine Varietät sein muß.

Vorschau 6.4.44. Die vorstehende Definition eines „eigentlichen" Morphismus kann nicht wortwörtlich auf „Schemata" übertragen werden. Um in dieser Allgemeinheit einen nützlichen Begriff zu erhalten, muß man eigentliche Morphismen als „basisfest" abgeschlossene Morphismen erklären.

Übung 6.4.45 (**Verkleben von Punkten in allgemeinen Varietäten**). Seien X eine k-Prävarietät und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von X auf eine Menge Y. Sind alle Fasern von φ endlich und fast alle Fasern einelementig, und liegen die Urbilder aller Punkte mit nicht einelementiger Faser in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge von X, so ist Y mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums auch eine k-Prävarietät und φ ist eigentlich. Hinweis: 6.3.13 und 6.4.30. Ist hier X eine Varietät, so auch Y. Hinweis: 6.4.43.

6.4.46. Seien X, Y Prävarietäten über k. Ein **rationaler Morphismus** $f : X \dashrightarrow Y$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U) mit $U \Subset X$ offen dicht und $f_U : U \to Y$ einem Morphimus, unter der Äquivalenzrelation der Übereinstimmung auf einer offenen dichten Teilmenge im Schnitt der Definitionsbereiche. Ist Y eine Varietät, so stimmen nach 6.4.6 je zwei Repräsentanten (U, f_U) und (V, f_V) eines rationalen Morphismus $f : X \dashrightarrow Y$ bereits auf $U \cap V$ überein. Jeder rationale Morphismus in eine Varietät hat mithin einen eindeutig bestimmten **größten Repräsentanten**, der eben auf der Vereinigung der Definitionsbereiche aller Repräsentanten definiert ist. Der Definitionsbereich des größten Repräsentanten heißt der **Definitionsbereich unseres rationalen Morphismus**.

Übung 6.4.47 (**Rationale Funktionen auf Produkten**). Gegeben Prävarietäten X, Y gibt es genau eine Einbettung $\mathcal{M}(X) \otimes \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X \times Y)$, die für beliebige offene dichte affine Teilmengen $U \Subset X$ und $V \Subset Y$ den in 3.1.4 erklärten Isomorphismus $\mathcal{O}(U) \otimes \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U \times V)$ fortsetzt.

Übung 6.4.48 (**Lokale Ringe von Produkten**). Gegeben bepunktete Prävarietäten (X, x) und (Y, y) gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X \times Y,(x,y)}$, der für beliebige offene affine Umgebungen U von x und V von y den in 3.1.4 erklärten Isomorphismus $\mathcal{O}(U) \otimes \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U \times V)$ fortsetzt. Genauer liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$S^{-1}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{Y,y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X \times Y,(x,y)}$$

für S das Urbild von $k^\times$ unter $\mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \twoheadrightarrow k \otimes k \xrightarrow{\sim} k$.

Übung 6.4.49. Gegeben bepunktete irreduzible Prävarietäten (X, x) und (Y, y) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} & \to & \mathcal{O}_{X \times Y,(x,y)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(X) \otimes \mathcal{M}(Y) & \to & \mathcal{M}(X \times Y) \end{array}$$

mit den im vorhergehenden erklärten natürlichen Abbildungen.

6.4.50. Im folgenden identifizieren wir im Fall einer irreduziblen Varietät Z alle lokalen Ringe und alle Ringe von regulären Funktionen auf nichtleeren offenen Teilmengen mit ihren Bildern in $\mathcal{M}(Z)$.

Lemma* 6.4.51 (**Lokale Ringe charakterisieren Punkte**). *Sind x, y Punkte einer irreduziblen Varietät X und gilt $\mathcal{O}_{X,y} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ in Körper der rationalen Funktionen $\mathcal{M}(X)$, so folgt $x = y$.*

Beweis. Wir zeigen das, indem wir die gegenteilige Annahme $x \neq y$ zum Widerspruch führen. In der Tat liefert Übung 6.4.48 sofort $\mathcal{O}_{X\times X,(x,y)} \subset \mathcal{O}_{X\times X,(x,x)}$. Sind $U, V \Subset X$ offene affine Umgebungen von x, y, so trifft $U \times V$ nach Annahme die Diagonale Δ in einer abgeschlossenen Teilmenge und es gibt folglich $f \in \mathcal{O}(U \times V)$ mit $f(x, y) \neq 0$ aber $f(p, p) = 0$ für alle $p \in U \cap V$. Als rationale Funktion auf $X \times X$ ist f bei (x, y) und dann nach 6.4.41 notwendig auch bei (x, x) definiert, da es in den entsprechenden lokalen Ringen liegt, und muß an beiden Stellen denselben Wert annehmen. Nun verschwindet jedoch f auf einer offenen dichten Teilmenge der Diagonale und mithin auf dem Schnitt seines Definitionsbereichs mit der Diagonale. Wir landen so beim Widerspruch $0 \neq f(x, y) = f(x, x) = 0$. □

6.5 Projektive Räume

6.5.1. Ich erinnere aus [EL] 1.4.1, daß wir gegeben ein k-Vektorraum W die Menge aller Geraden in W durch den Ursprung mit

$$\mathbb{P}W = \mathbb{P}_k W := \{V \subset W \mid V \text{ ist ein eindimensionaler Untervektorraum}\}$$

bezeichnen und diese Menge den **projektiven Raum zu** W nennen. Die **kanonische Projektion** $\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$, $w \mapsto \langle w \rangle$, die jedem von Null verschiedenen Vektor sein Vektorraumerzeugnis zuordnet, ist eine Surjektion, deren Fasern gerade die Bahnen von $k^\times$ sind.

6.5.2 (**Projektive Räume als k-geringte Räume**). $(k = \bar{k})$. Wir erklären für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum W auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}W$ die Struktur eines k-geringten Raums, indem wir von der natürlichen Struktur 3.3.9 auf W als naive affine Varietät ausgehen, sie wie in 6.2.6 zu einer affinen Varietät im Sinne spezieller k-geringter Räume machen, darin das Ursprungskomplement $W\backslash 0$ mit der induzierten Struktur versehen und schließlich $\mathbb{P}W$ mit der finalen Struktur zur kanonischen Projektion

$$\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$$

Damit ist eine Teilmenge $U \subset \mathbb{P}W$ per definitionem genau dann offen, wenn ihr Urbild unter der kanonischen Projektion offen ist, und eine Funktion auf $U \Subset \mathbb{P}W$ ist regulär genau dann, wenn die zurückgezogene Funktion auf $\pi^{-1}(U) \Subset W\backslash 0$ regulär ist.

6.5.3. $(k = \bar{k})$. Speziell schreibt man $\mathbb{P}^n k := \mathbb{P}(k^{n+1})$. Elemente darin notieren wir abkürzend $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle := \langle (x_0, \ldots, x_n) \rangle$. Genau dann ist per definitionem $U \subset \mathbb{P}^n k$ offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset k^{n+1}\backslash 0$ offen ist, und eine Funktion $f : U \to k$ ist regulär genau dann, wenn die zurückgezogene Funktion $f \circ \pi$ auf $\pi^{-1}(U)$

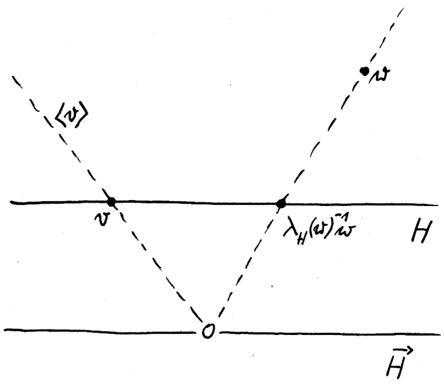


Illustration zum Beweis von 6.5.4

regulär ist, als da heißt, lokal als Quotient von Polynomfunktionen geschrieben werden kann.

Satz 6.5.4 (Projektive Räume sind Varietäten). $(k = \bar{k})$. *Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum W ist der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}W$ mit seiner finalen Struktur als k-geringter Raum in Bezug auf $\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$ eine k-Varietät.*

6.5.5 (**Lokale Trivialität der Projektion**). Bezeichne $\pi : W\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}W$ die Projektion. Im anschließenden Beweis zeigen wir sogar, daß jeder Punkt von $\mathbb{P}W$ eine offene Umgebung $U \circledcirc \mathbb{P}W$ besitzt, für die die Projektion $\pi^{-1}(U) \to U$ einen Schnitt $\sigma : U \to \pi^{-1}(U)$ besitzt derart, daß die Abbildung $(\lambda, x) \mapsto \lambda\sigma(x)$ ein Isomorphismus $k^\times \times U \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U)$ ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß für jede affine Hyperebene $H \subset W$, die den Ursprung vermeidet, die Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ gegeben durch $v \mapsto \langle v \rangle$ eine offene Einbettung ist. Ist in der Tat $\vec{H} \subset W$ der Untervektorraum der Richtungsvektoren unserer affinen Hyperebene H, so ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = W\backslash\vec{H}$ offen in $W\backslash 0$. Mithin hat unsere Injektion $i_H : H \hookrightarrow \mathbb{P}W$ offenes Bild. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & W\backslash\vec{H} \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & \\ H \arrow[rr] & & i_H(H) \end{tikzcd}$$

Der linke schräge Pfeil ordne jedem Punkt den Schnittpunkt mit H der durch ihn verlaufenden Ursprungsgeraden zu. Er ist ein Morphismus, denn ist in Formeln $\lambda_H : W \to k$ die Linearform, deren Niveaufläche zum Wert Eins gerade H ist, so wird er gegeben durch die Formel $w \mapsto \lambda_H(w)^{-1}w$. Er ist nach 6.2.14 sogar final, da er einen Schnitt besitzt, eben die Einbettung $H \hookrightarrow W \backslash \vec{H}$. Der rechte schräge Pfeil ist final, da diese Eigenschaft nach 6.2.30 lokal ist in der Basis. Zusammen folgt, daß die horizontale Bijektion ein Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} i_H(H)$ von k-geringten Räumen sein muß. Damit ist $\mathbb{P}W$ schon mal eine Prävarietät. Gegeben eine weitere affine Hyperebene $E \subset W$, die den Ursprung vermeidet, besteht das Urbild der Diagonale unter dem Produkt $i_H \times i_E : H \times E \hookrightarrow \mathbb{P}W \times \mathbb{P}W$ aus allen (v, w) mit $\lambda_H(w) \neq 0$, $\lambda_H(w)^{-1}w = v$, $\lambda_E(v) \neq 0$ und $\lambda_E(v)^{-1}v = w$. Diese Bedingungen sind jedoch gleichbedeutend zu den beiden Bedingungen $w = \lambda_H(w)v$ und $v = \lambda_E(v)w$, die offensichtlich eine abgeschlossene Teilmenge von $H \times E$ definieren. Das zeigt, daß $\mathbb{P}W$ eine Varietät ist. □

6.5.6 (**Die Standardkarten von** $\mathbb{P}^n k$). $(k = \bar{k})$. Speziell zeigt der vorhergehende Beweis, daß wir eine offene Einbettung $i_0 : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ erhalten durch die Vorschrift $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \langle 1, x_1, \ldots, x_n \rangle$. In derselben Weise erhalten wir offene Einbettungen $i_\nu : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ für $0 \leq \nu \leq n$, deren Bilder $\mathbb{P}^n k$ überdecken.

6.5.7 (**Projektive Vervollständigungen als Varietäten**). Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum E über einem Körper k erinnern wir seine projektive Vervollständigung $\mathbb{V}E := E \sqcup \mathbb{P}\vec{E}$ aus [EL] 1.4.3. Weiter erinnern wir, wie wir für jede Einbettung $E \hookrightarrow V$ als den Ursprung vermeidende Hyperebene in einen Vektorraum eine Bijektion $\mathbb{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}V$ konstruiert hatten. Jede dieser Bijektionen versieht $\mathbb{V}E$ im Fall $k = \bar{k}$ mit der Struktur einer Varietät. Der Leser mag zur Übung prüfen, daß diese Struktur nicht von der gewählten Einbettung als Hyperebene abhängt und daß $E \hookrightarrow \mathbb{V}E$ eine offene Einbettung von Varietäten alias k-geringten Räumen ist sowie $\mathbb{P}\vec{E} \hookrightarrow \mathbb{V}E$ eine abgeschlossene Einbettung.

Proposition 6.5.8 (Globale Funktionen auf projektiven Räumen). $(k = \bar{k})$. *Die einzigen globalen regulären Funktionen auf unseren projektiven Räumen* $\mathbb{P}^n k$ *sind die konstanten Funktionen, in Formeln gilt für alle* $n \geq 0$ *also*

$$\mathcal{O}(\mathbb{P}^n k) = k$$

Beweis. Im Fall $n = 0$ ist das eh klar. Für jedes n kann $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n k)$ identifiziert werden mit der Menge aller der regulären Funktionen f auf $k^{n+1} \backslash 0$, die auf allen Ursprungsgeraden konstant sind. Da sich aber nach 5.9.28 unser f für $n \geq 1$ zu einer regulären Funktion auf ganz k^{n+1} fortsetzen läßt, die dann natürlich auch auf allen Ursprungsgeraden konstant ist, muß unsere Funktion f konstant denselben Wert annehmen wie ihre reguläre Fortsetzung auf ganz k^{n+1} am Ursprung. □

6.5.9 (**Explizites Prüfen im eindimensionalen Fall**). Für $\mathbb{P}^1 k = k \sqcup \{\infty\}$ kann man das auch einsehen, indem man ihn als Verklebung von zwei Kopien von k längs $k^\times$ mit der Verklebungsidentifikation $z \mapsto z^{-1}$ versteht. Genauer haben wir in diesem Fall $i_0(k) \cap i_1(k) = i_0(k^\times) = i_1(k^\times)$ und $i_0(z) = i_1(z^{-1})$ für alle $z \in k^\times$. Eine reguläre Funktion $f : \mathbb{P}^1 k \to k$ schränkt unter i_0 ein zu einem Polynom $f \circ i_0 \in \mathcal{O}(k)$ mit der Eigenschaft, daß die Funktion $f \circ i_0 \circ \mathrm{inv} : k^\times \to k$ für $\mathrm{inv} : k^\times \to k$, $z \mapsto z^{-1}$ auch die Restriktion eines Polynoms ist, eben des Polynoms $f \circ i_1$. So folgt leicht, daß f konstant sein muß.

Definition 6.5.10. Eine **abstrakte projektive k-Varietät** oder kurz **projektive Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines $\mathbb{P}^n k$. Eine **quasiprojektive k-Varietät** ist ein k-geringter Raum, der isomorph ist zu einer offenen Teilmenge einer projektiven k-Varietät.

6.5.11. Da es eine offene Einbettung $k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ gibt, ist jede quasiaffine Varietät auch quasiprojektiv.

6.5.12. Unter einer **in $\mathbb{P}^n k$ eingebetteten projektiven k-Varietät** oder kurz einer **eingebetteten projektiven Varietät** verstehen wir eine abgeschlossene Teilmenge eines $\mathbb{P}^n k$.

6.5.13 (**Diskussion des Begriffs einer projektiven Varietät**). Ich meine in diesem Text mit einer projektiven Varietät stets eine abstrakte projektive Varietät. In der Literatur werden jedoch sowohl abstrakte wie eingebettete projektive Varietäten oft abkürzend als projektive Varietäten bezeichnet. Der Unterschied zwischen diesen beiden Begriffsbildungen ist jedoch erheblich, wie Sie noch zur Genüge feststellen werden: Ein- und dieselbe abstrakte projektive Varietät kann nämlich durchaus auf sehr verschiedene Weisen in vorgegebene projektive Räume eingebettet werden.

6.5.14. Unter einer **projektiven Kurve** verstehen wir eine äqui-eindimensionale projektive Varietät. Unter einer **ebenen projektiven Kurve** verstehen wir eine projektive Kurve, die in eine projektive Ebene eingebettet ist. Unter einer **projektiven Ebene** verstehen wir den $\mathbb{P}^2 k$ oder die dazu isomorphen Varietäten $\mathbb{V}(k^2)$ oder koordinatenfrei $\mathbb{V}E$ für einen zweidimensionalen affinen Raum E.

6.5.15 (**Kegelkonstruktion**). Sei k ein Körper. Um die Topologie des $\mathbb{P}^n k$ zu untersuchen, gehen wir aus von der Projektion $\pi : (k^{n+1} \backslash 0) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n k$. Natürlich liefert die Abbildungsvorschrift $W \mapsto \mathrm{C}(W) := \pi^{-1}(W) \sqcup \{0\}$ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Teilmengen} \\ \text{von } \mathbb{P}^n k \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \left\{ \begin{array}{c} k^\times\text{-stabile Teilmengen von } k^{n+1}, \\ \text{die den Ursprung enthalten} \end{array} \right\}$$

Hier heißt $\mathrm{C}(W)$ auch der **Kegel über** W mit dem Buchstaben C für englisch **cone**. Genau dann ist eine Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ abgeschlossen, wenn ihr Kegel $\mathrm{C}(W) \subset k^{n+1}$ eine abgeschlossene Teilmenge von k^{n+1} ist. Insbesondere ist der Kegel über dem Abschluß der Abschluß des Kegels $\mathrm{C}(\bar{W}) = \overline{\mathrm{C}(W)}$, denn der Abschluß einer $k^\times$-stabilen Teilmenge muß auch selbst wieder $k^\times$-stabil sein, und damit ist die kleinste $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge über $\mathrm{C}(W)$ auch die kleinste abgeschlossene Teilmenge über $\mathrm{C}(W)$.

Lemma 6.5.16. *Sei k ein unendlicher Körper. Genau dann ist eine Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ irreduzibel, wenn ihr Kegel $\mathrm{C}(W)$ irreduzibel ist und nicht nur aus dem Ursprung besteht.*

Beweis. Um das einzusehen, dürfen wir uns auf abgeschlossene Teilmengen $W \underset{\mathrm{A}}{\subset} \mathbb{P}^n k$ beschränken. Ist $W = Y \cup Z$ eine Zerlegung in echte abgeschlossene Teilmengen, so auch $\mathrm{C}(W) = \mathrm{C}(Y) \cup \mathrm{C}(Z)$. Ist W leer, so besteht $\mathrm{C}(W)$ nur aus dem Ursprung. Ist also W nicht irreduzibel, so ist auch $\mathrm{C}(W)$ nicht irreduzibel oder besteht nur aus dem Urspung. Sei umgekehrt $\mathrm{C}(W) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die Abbildung $k^\times \times \mathrm{C}(W) \to \mathrm{C}(W)$ ist ein Morphismus von Varietäten und die $k^\times \times Y_i$ sind irreduzibel nach 4.2.26. Das zeigt, daß ihre Bilder jeweils ganz in einer irreduziblen Komponente von $\mathrm{C}(W)$ landen müssen, und man sieht leicht, daß dafür nur die Komponente Y_i in Frage kommt. Also sind alle Komponenten Y_i von $\mathrm{C}(W)$ auch $k^\times$-stabil. Besteht also $\mathrm{C}(W)$ nur aus dem Urspung oder ist nicht irreduzibel, so ist W auch nicht irreduzibel. □

Satz 6.5.17 (Erzwungene Schnitte in projektiven Räumen). $(k = \bar{k})$. *Sind $X, Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} \mathbb{P}^n k$ nichtleere abgeschlossene Teilmengen und ist die Summe ihrer Dimensionen mindestens n, so haben sie nichtleeren Schnitt, in Formeln*

$$\operatorname{kdim} X + \operatorname{kdim} Y \geq n \quad \Rightarrow \quad X \cap Y \neq \emptyset$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir X und Y irreduzibel annehmen. Durch Übergang zu den Kegeln erhalten wir nach Übung 6.5.22 irreduzible abgeschlossene Teilmengen $\mathrm{C}(X), \mathrm{C}(Y) \subset k^{n+1}$ von jeweils um Eins größerer Dimension. Da der Ursprung in ihrem Schnitt liegt, gilt $\mathrm{C}(X) \cap \mathrm{C}(Y) \neq \emptyset$. Nach 5.9.22 hat aber nun jede Komponente des Schnitts dieser Kegel mindestens die Dimension Eins und muß folglich auch Punkte außerhalb des Ursprungs und mithin eine ganze Gerade durch den Ursprung enthalten. Das zeigt hinwiederum $X \cap Y \neq \emptyset$. □

Satz 6.5.18 (Kodimension von Schnittmengen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben irreduzible abgeschlossene Teilmengen $X, Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} \mathbb{P}^n k$ gilt für jede irreduzible Komponente Z ihres Schnitts $X \cap Y$ die Abschätzung*

$$(n - \operatorname{kdim} Z) \leq (n - \operatorname{kdim} X) + (n - \operatorname{kdim} Y)$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der entsprechenden Aussage 5.9.22 für affine Varietäten. □

Übungen

Übung 6.5.19. Man zeige, daß es keinen Morphismus von Varietäten $\mathbb{P}^1 k \to \mathbb{P}^1 k$ ohne Fixpunkt gibt. Salopp gesprochen ist es also nicht möglich, „in algebraischer Weise jeder Ursprungsgerade in k^2 ein Komplement zuzuordnen". In stetiger Weise gelingt das etwa im Komplexen durchaus: Es reicht, ein Skalarprodukt auszuzeichnen und jeder Gerade ihr orthogonales Komplement zuzuordnen.

Ergänzende Übung 6.5.20. Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V und seine d-te symmetrische Potenz $\mathrm{S}^d V$ induziert der Morphismus von Varietäten $V \to \mathrm{S}^d V$, $v \mapsto v^d$ einen Morphismus von Varietäten

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}V & \hookrightarrow & \mathbb{P}(\mathrm{S}^d V) \\ \langle v \rangle & \mapsto & \langle v^d \rangle \end{array}$$

Man zeige, daß dieser Morphismus für $d \geq 1$ eine Einbettung ist. Sie heißt die **d-te Veronese-Einbettung** unseres projektiven Raums $\mathbb{P}V$.

Übung 6.5.21 (**Automorphismen der projektiven Gerade**). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß jeder Isomorphismus $\mathbb{P}^1 k \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 k$ von der Restriktion eines Vektorraumautomorphismus von k^2 auf $k^2 \backslash 0$ induziert wird und daß wir so einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}(2; k)/k^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Var}^\times(\mathbb{P}^1 k)$$

des besagten Quotienten mit der Automorphismengruppe der projektiven Gerade erhalten. Hinweis: Man erinnere zunächst die Automorphismen der Gerade k aus 3.3.19.

Übung 6.5.22. Gegeben eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge $W \overset{\circ}{\subset} \mathbb{P}^n k$ zeige man für die Dimension ihres Kegels die Formel $\operatorname{kdim} \mathrm{C}(W) = \operatorname{kdim} W + 1$. Hinweis: Lokale Trivialität der Projektion 6.5.5.

Übung 6.5.23. Seien $m, n \geq 1$. Man zeige, daß die von der Abbildung $k^n \times k^m \to k^{mn}$ gegeben durch $(x_i, y_j) \mapsto (x_i y_j)$ induzierte Abbildung

$$\mathbb{P}^{n-1} k \times \mathbb{P}^{m-1} k \to \mathbb{P}^{nm-1} k$$

eine abgeschlossene Einbettung ist. Sie heißt die **Segre-Einbettung**. Man folgere, daß das Produkt von zwei projektiven Varietäten wieder eine projektive Varietät ist. Hinweis: Das Bild in k^{mn} ist die Nullstellenmenge der Gleichungen $z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj}$. Dann rechne man in Koordinaten 6.5.6. Alternativ mag man auch von 9.2.12 ausgehen.

6.6 Graduierte Gruppen und Ringe

Definition 6.6.1. Eine **Graduierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Familie von Untergruppen V^r für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^r$. Die Elemente von V^r heißen dann **homogen vom Grad** r. Jedes Element $v \in V$ läßt sich demnach eindeutig darstellen als Summe $v = \sum v_r$ mit $v_r \in V^r$, wobei fast alle v_r verschwinden. Das besagte v_r heißt dann die **homogene Komponente von v vom Grad** r.

Ergänzung 6.6.2. Ist etwas allgemeiner Γ eine Menge, so versteht man unter einer **Γ-Graduierung** auf einer abelschen Gruppe V eine Familie von Untergruppen V^γ für $\gamma \in \Gamma$ derart, daß gilt $V = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} V^\gamma$. Eine Graduierung im obigen Sinne ist also genauer eine **$\mathbb{Z}$-Graduierung**.

6.6.3. Eine multilineare Abbildung $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to V$ von graduierten abelschen Gruppen heißt **graduierungsverträglich**, wenn gilt

$$\varphi\big(V_1^{a(1)} \times \ldots \times V_r^{a(r)}\big) \subset V^{a(1)+\ldots+a(r)}$$

für alle $a(1), \ldots, a(r) \in \mathbb{Z}$. Die nulllinearen Abbildung nach V sind speziell Abbildungen $\varphi : \{*\} \to V$ der einelementigen Menge nach V mit $\varphi(*) \in V^0$ und können durch $\varphi \mapsto \varphi(*)$ mit den Elementen von V^0 identifiziert werden. Allgemeiner bleibt der Begriff graduierungsverträglicher multilinearer Abbildungen sinnvoll für abelsche Gruppen mit einer Graduierung durch eine beliebiges abelsches Monoid Γ. Im Fall eines nichtabelschen Monoids wird dieser Begriff abhängig von der Reihenfolge der Eingänge in unserer multilinearen Abbildung und wir verfolgen das hier nicht weiter.

Definition 6.6.4. Eine **Graduierung** eines Rings A ist eine Graduierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^r A^s \subset A^{r+s}$ für alle r, s und $1 \in A^0$. Ein **graduierter Modul** über einem graduierten Ring A ist ein A-Modul M mit einer Graduierung $M = \bigoplus M^i$ derart, daß gilt $A^r M^s \subset M^{r+s}$ für alle r, s.

Ergänzung 6.6.5. Etwas allgemeiner erklärt man ähnlich für jedes abelsche Monoid Γ den Begriff einer Γ-Graduierung auf einem Ring und eines Γ-graduierten Moduls über einem Γ-graduierten Ring. Etwas formaler ist die Forderung im Fall eines Rings, daß die Multiplikation $A \times A \to A$ eine graduierungsverträgliche bilineare Abbildung ist und das Einselement einer graduierungsverträglichen nulllinearen Abbildung entspricht.

6.6.6 (**Diskussion der Homogenität des Einselements**). Im Fall eines $\mathbb{Z}$-graduierten Rings kann man aus den anderen Eigenschaften bereits herleiten, daß das Eins-Element homogenen sein muß vom Grad Null, in Formeln $1 \in A^0$. Um das zu sehen, berechne man das Produkt der homogenen Komponenten von 1 mit beliebigen homogenen Elementen des Rings. Im Fall allgemeinerer Γ-graduierter Ringe kann man jedoch nicht mehr aus den anderen Eigenschaften herleiten, daß das Eins-Element homogenen sein muß vom Grad Null. Es ist dehalb unnatürlich, diese Bedingung im Fall $\mathbb{Z}$-graduierter Ringe aus der Definition wegzulassen.

6.6.7. Für eine Untergruppe $U \subset V$ beziehungsweise einen Quotienten V/U einer graduierten abelschen Gruppe V bilden die Schnitte $U^r = V^r \cap U$ beziehungsweise die Bilder der V^r in V/U im allgemeinen keine Graduierung von U beziehungsweise von V/U. Das gilt nur, wenn mit jedem $v \in U$ auch alle homogenen Komponenten von v zu U gehören, wenn also für die $U^r = U \cap V^r$ gilt

$U = \bigoplus_r U^r$. Eine Untergruppe einer graduierten abelschen Gruppe mit dieser Eigenschaft nennt man eine **homogene Untergruppe**, und für den Quotienten einer graduierten abelschen Gruppe nach einer homogenen Untergruppe bilden die Bilder der V^r in der Tat auch eine Graduierung des Quotienten V/U und wir haben dann $(V/U)^r = V^r/U^r$.

6.6.8. Jeder Quotient A/I eines graduierten Rings A nach einem homogenen Ideal I ist mit der natürlichen Graduierung wieder ein graduierter Ring.

6.6.9. Analog definiert man **graduierte Vektorräume** und **graduierte Algebren**.

Beispiel 6.6.10. Gegeben ein Körper k oder auch ein beliebiger Ring besitzt der Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau eine Graduierung derart, daß die homogenen Elemente vom Grad r eben die homogenen Polynome vom Grad r aus [AL] 2.9.10 sind. Diese Graduierung nennen wir die **Standardgraduierung** auf unserem Polynomring. Etwas allgemeiner besitzt er auch für beliebige $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$ genau eine Graduierung derart, daß T_i jeweils homogen ist vom Grad d_i.

Ergänzung 6.6.11. Gegeben ein Vektorraum V besitzen die Tensoralgebra $\mathrm{T}V$ nach [LA2] 9.9.7, die Graßmann-Algebra $\bigwedge V$ nach [LA2] 8.5.4 und die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ nach 3.5.1 jeweils eine natürliche Graduierung durch die Teilräume, die wir im jeweiligen Kontext $\mathrm{T}^r V$, $\bigwedge^r V$ und $\mathrm{S}^r V$ notiert hatten.

Ergänzung 6.6.12. Gegeben ein graduierter Ring $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ mag es naheliegend scheinen, einen weiteren graduierten Ring einzuführen als die Gruppe A mit der Multiplikation $a * b = (-1)^{|a||b|} ab$ für homogene $a, b \in A$. Das liefert jedoch nichts Neues, genauer gilt mit der Notation $[|a|/2]$ für die größte ganze Zahl kleinergleich $|a|/2$ für den Gruppenisomorphismus $\varphi : A \xrightarrow{\sim} A$ gegeben durch $\varphi(a) = (-1)^{[|a|/2]} a$ für beliebige homogene $a \in A$ die Relation $\varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b)$. Ich kenne für die dieser Erkenntnis zugrundeliegende mit beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ gültige Kongruenz

$$[(\alpha + \beta)/2] \equiv \alpha\beta + [\alpha/2] + [\beta/2] \pmod 2$$

keinen besseren Beweis als den Vergleich der beiden Verknüpfungstabellen für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Übungen

Übung 6.6.13 (**Radikale homogener Ideale**). Gegeben ein homogenes Ideal in einem graduierten Kring ist auch sein Radikal wieder homogen. Hinweis: Man zeige, daß für $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_m$ aus dem Radikal mit x_i homogen vom Grad i auch x_n zu fraglichem Radikal gehört.

Ergänzende Übung 6.6.14. Man zeige, daß es auf jedem Schiefkörper nur eine einzige Graduierung gibt, die ihn zu einem graduierten Ring macht.

Übung 6.6.15 (**Charakterisierung homogener Integritätsringe**). Ein graduierter Ring ist ein Integritätsring genau dann, wenn er nicht Null ist und wenn für je zwei homogene von Null verschiedene Elemente auch ihr Produkt von Null verschieden ist. Ein homogenes Ideal in einem graduierten Ring ist vollprim genau dann, wenn es nicht der ganze Ring ist und für je zwei homogene Elemente außerhalb unseres homogenen Ideals auch ihr Produkt außerhalb unseres homogenen Ideals liegt.

Übung 6.6.16. Jeder graduierte noethersche Modul über einem graduierten Kring besitzt eine endliche Filtrierung durch homogene Untermoduln derart, daß alle Subquotienten isomorph sind zu Quotienten unseres Krings nach homogenen Primidealen. Hinweis: 4.2.28 und 6.6.15.

Übung 6.6.17 (**Graduierung und Lokalisierung**). Gegeben ein graduierter Kring A und eine Teilmenge $S \subset A$, die aus homogenen Elementen besteht, sowie ein graduierter A-Modul M gibt es genau eine Graduierung auf dem A-Modul $S^{-1}M$ derart, daß $\mathrm{lok} : M \to S^{-1}M$ die Graduierung erhält. Die von einer graduierungsverträglichen multilinearen Abbildung auf den Lokalisierungen induzierte multilineare Abbildung ist auch wieder graduierungsverträglich. Insbesondere wird $S^{-1}A$ ein graduierter Kring und $S^{-1}M$ ein graduierter A-Modul.

Übung 6.6.18 (**Moduln als graduierte Moduln**). Seien A ein Ring und $A[T, T^{-1}]$ der Ring der Laurentpolynome mit Koeffizienten in A und der durch $\mathrm{grad}(T) = 1$ gegebenen $\mathbb{Z}$-Graduierung. Man zeige, daß der Funktor $M \mapsto M^0$ eine Äquivalenz

$$A[T, T^{-1}]\text{-Mod}^{\mathbb{Z}} \overset{\approx}{\to} A\text{-Mod}$$

ist zwischen der Kategorie aller $\mathbb{Z}$-graduierten $A[T, T^{-1}]$-Moduln und der Kategorie aller A-Moduln und daß die Einbettung einen Isomorphismus

$$M^0 \overset{\sim}{\to} M/(T-1)M$$

induziert. Man zeige auch: Im Fall eines kommutativen Rings liefert für jede Teilmenge $S \subset A$ und jeden graduierten $A[T, T^{-1}]$-Modul M der durch die universelle Eigenschaft gegebene Morphismus einen Isomorphismus

$$S^{-1}(M^0) \overset{\sim}{\to} (S^{-1}M)^0$$

Vorschau 6.6.19. In einer geometrischen Sprache, die wir später entwickeln, besagt die vorhergehende Übung anschaulich insbesondere, daß wir für jede affine k-Varietät X eine Äquivalenz von Kategorien erhalten zwischen $k^\times$-äquivarianten quasikohärenten Modulgarben auf $k^\times \times X$ und quasikohärenten Modulgarben auf X. Eine analoge Aussage für ein beliebiges affines Schema X ist dann sogar gleichbedeutend zur Hauptaussage unserer Übung im Fall eines beliebigen kommutativen Rings A.

6.7 Graduierte Variante des Elementarteilersatzes**

Proposition 6.7.1. *Gegeben ein Körper k ist jeder endlich erzeugte graduierte Modul über dem Polynomring $k[t]$ mit seiner Standardgraduierung die direkte Summe von endlich vielen Untermoduln, die jeweils von einem homogenen Element erzeugt werden.*

Beweis. Sei M unser Modul und T der Untermodul seiner Torsionselemente. So ist M/T frei und dann auch graduiert frei und die Surjektion $M \twoheadrightarrow M/T$ besitzt eine graderhaltende Spaltung und liefert einen Isomorphismus von graduierten Moduln $M \cong T \oplus M/T$. Das anschließende Lemma 6.7.3 beendet dann den Beweis. □

6.7.2. Wir erinnern die Notation, nach der für eine $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppe $M = \bigoplus M^n$ mit $M[j]$ die in der Graduierung verschobene Gruppe bezeichnet wird. Genauer setzen wir $(M[j])^n = M^{n+j}$.

Lemma 6.7.3. *Gegeben ein Körper k wird jeder endlichdimensionale graduierte und graduiert unzerlegbare $k[t]$-Modul M von einem homogenen Element erzeugt. In Formeln ausgedrückt gibt es also $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ und einen graderhaltenden Isomorphismus*

$$M \cong k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[j]$$

Beweis. Sei M ein von Null verschiedener endlichdimensionaler $\mathbb{Z}$-graduierter $k[t]$-Modul und $m \in M$ ein Vektor mit kleinstmöglichem Annullator, sagen wir $\operatorname{Ann}(m) = \langle t^{i+1}\rangle$. So ist M sogar ein Modul über $k[t]/\langle t^{i+1}\rangle$ und m besitzt auch eine homogene Komponente, die von t^i nicht annulliert wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also m homogen annehmen, etwa vom Grad j. Dann liefert m eine graderhaltende Einbettung

$$k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[-j] \hookrightarrow M$$

Nehmen wir auf beiden Seiten den k-dualen $k[t]$-Modul, so wir sie zu einer graderhaltenden Surjektion $M^* \twoheadrightarrow k[t]/\langle t^{i+1}\rangle[l]$ für geeignetes l und muß spalten als Surjektion auf einen freien Modul. Folglich spaltete auch schon unsere Einbettung. War M graduiert unzerlegbar, so muß sie folglich ein Isomorphismus gewesen sein. □

Korollar 6.7.4 (Graduierte Variante des Elementarteilersatzes). *Seien k ein Körper und M, N endlich erzeugte graduierte graduiert freie $k[t]$-Moduln. So gibt es für jeden graderhaltenden Homomorphismus von $k[t]$-Moduln*

$$f : M \to N$$

Basen von M und N aus homogenen Elementen, bezüglich derer die Matrix unseres Homomorphismus höchstens auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge hat.

Beweis. Das Bild von M ist graduiert frei, folglich spaltet M als $M \cong \ker f \oplus \operatorname{im} f$. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit f injektiv annehmen. Indem wir sonst M durch tM ersetzen, dürfen wir sogar $M \subset tN$ annehmen. Jetzt finden wir nach 6.7.1 homogene Elemente $n_1, \ldots, n_r \in N$ derart, daß die $\bar{n}_i \in N/M$ von Null verschieden sind und N/M die direkte Summe der von den $\bar{n}_i$ erzeugten zyklischen Untermoduln ist. Sind genau die ersten s dieser zyklischen Moduln endlichdimensional von den Dimensionen $d(1), \ldots, d(s)$, so bilden $t^{d(1)+1}n_1, \ldots, t^{d(s)+1}n_s$ die gesuchte Basis von M. $\square$

6.8 Rechnen in projektiven Varietäten

6.8.1. Um die Zariskitopologie auf $\mathbb{P}^n k$ konkret zu beschreiben, erinnere ich an die Begrifflichkeit graduierter Gruppen und Ringe. Gegeben ein Körper k besitzt der Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ genau eine Graduierung derart, daß die homogenen Elemente vom Grad r eben die homogenen Polynome vom Grad r aus [AL] 2.9.10 sind.

6.8.2. Sei k ein Körper. Gegeben eine Menge $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ von homogenen Polynomen ist ihre Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \subset k^{n+1}$ stets stabil unter $k^\times$.

Lemma 6.8.3. *Gegeben k ein unendlicher Körper und $C \subset k^{n+1}$ eine $k^\times$-stabile Teilmenge ist das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(C) \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ homogen.*

Ergänzung 6.8.4. Im Fall eines endlichen Körpers k ist das nicht mehr richtig. Im Fall $|k| = q < \infty$ verschwindet zum Beispiel das Polynom $X^{q-1} - 1$ auf $k^\times$, nicht aber seine homogene Komponente vom Grad Null. Es wird in diesem Fall auch nicht richtiger, wenn man nur $k^\times$-stabile Teilmengen betrachtet, die den Ursprung enthalten: Das Produkt $(X^{q-1} - 1)(Y^q - Y)$ etwa verschwindet auf beiden Koordinatenachsen, nicht aber seine homogene Komponente Y vom Grad Eins.

Beweis. Wir betrachten für alle $\lambda \in k^\times$ die Multiplikation $\lambda : k^{n+1} \to k^{n+1}$. Sie induziert auf den polynomialen Funktionen eine Abbildung $\lambda^* : k[T_0, \ldots, T_n] \to k[T_0, \ldots, T_n]$ gegeben durch die Vorschrift $T_i \mapsto \lambda T_i$. Wir haben also in Formeln $P(\lambda x) = (\lambda^* P)(x)$ für alle Polynome P und alle Punkte $x \in k^{n+1}$. Das Verschwindungsideal einer $k^\times$-stabilen Teilmenge ist mithin stabil unter allen λ^*. Die Aussage folgt nun aus dem anschließenden Lemma 6.8.5, angewandt auf den $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraum $V = k[T_0, \ldots, T_n]$. $\square$

Lemma 6.8.5 (Graduierungen und $k^\times$-Operationen). *Gegeben ein $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum $V = \bigoplus_i V^i$ über einem Körper k erkläre man für jedes $\lambda \in k^\times$ einen Automorphismus λ^* von V durch die Vorschrift $\lambda^*(v) := \lambda^i v$ für alle $v \in V^i$. Ist k unendlich, so sind die unter allen λ^* stabilen Teilräume von V genau die homogenen Teilräume.*

Vorschau 6.8.6. $(k = \bar{k})$. In 9.4.5 werden wir zeigen, daß die „algebraischen" Operationen der multiplikativen Gruppe $k^\times$ auf einer affinen k-Varietät X unter der durch das Lemma gegebenen Konstruktion eineindeutig den $\mathbb{Z}$-Graduierungen auf ihrem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ entsprechen.

Beweis. Daß alle homogenen Teilräume unter allen λ^* stabil sind, ist klar. Sei umgekehrt $U \subset V$ ein unter allen λ^* stabiler Teilraum und $v \in U$ ein Vektor. Sicher gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $v \in \bigoplus_{|i| \leq r} V^i$. Da k unendlich angenommen war, finden wir $\lambda \in k^\times$ mit $\lambda^r, \lambda^{r-1}, \ldots, \lambda^{-r}$ paarweise verschieden. Da $U \subset V$ unter λ^* stabil ist, muß λ^* nach [LA1] 6.6.19 auch auf U diagonalisierbar sein. Nach [LA2] 9.8.9 zerfällt mithin U in die direkte Summe der Eigenräume von λ^*. Insbesondere zerfällt auch v auf genau eine Weise in eine Summe $v = \sum u_i$ mit $u_i \in U$ und $\lambda^* u_i = \lambda^i u_i$. Das muß aber bereits die Zerlegung von v nach homogenen Komponenten in V sein. Da folglich für jedes $u \in U$ auch seine homogenen Komponenten zu U gehören, muß damit U ein homogener Teilraum sein. $\square$

6.8.7 (**Homogene Ideale und $k^\times$-stabile Teilmengen**). Gegeben eine affine Varietät X betrachten wir $X \times k^n$ mit der $k^\times$-Operation $\lambda(x, v) = (x, \lambda v)$ und den offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times k^n)$ aus 3.4.21 und versehen die linke Seite mit der Standardgraduierung und die rechte Seite mit der induzierten Graduierung. So ist für jedes homogene Ideal $I \subset \mathcal{O}(X \times k^n)$ die Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I)$ stabil unter der Operation von $k^\times$, und umgekehrt ist für jede $k^\times$-stabile Teilmenge $Y \subset X \times k^n$ das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(Y)$ homogen nach 6.8.5.

6.8.8. Wir verwenden im Fall eines unendlichen Grundkörpers k für jede Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n k$ die Notation

$$\mathcal{I}^*(W) := \mathcal{I}(\mathrm{C}(W))$$

für das Verschwindungsideal des Kegels über W und nennen $\mathcal{I}^*(W)$ das **homogene Verschwindungsideal von** W. In der Tat ist $\mathcal{I}^*(W)$ im Fall eines unendlichen Grundkörpers nach 6.8.3 stets ein homogenes Ideal, ja sogar ein echtes homogenes Radikalideal. Der Quotient

$$\mathcal{O}^*(W) := k[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{I}^*(W) = \mathcal{O}(\mathrm{C}(W))$$

heißt der **homogene Koordinatenring von** W. In unseren Konventionen haben wir insbesondere $\mathcal{O}^*(\emptyset) = k$ für die leere Teilmenge $\emptyset \subset \mathbb{P}^n k$.

6.8.9. Umgekehrt verwenden wir sowohl für jede aus homogenen Elementen bestehende Teilmenge als auch für jedes homogene Ideal $I \subset k[T_0, \dots, T_n]$ die Notation

$$\mathcal{Z}^*(I) := \pi(\mathcal{Z}(I) \backslash 0)$$

und nennen $\mathcal{Z}^*(I)$ die **projektive Nullstellenmenge von** I.

6.8.10. Die Abbildungen $\mathcal{I}^*$ und $\mathcal{Z}^*$ kehren wieder Inklusionen um. Wir haben stets $W \subset \mathcal{Z}^*(\mathcal{I}^*(W))$. Wenn wir uns auf homogene Teilmengen $I \subset \mathcal{I}(0)$ beziehungsweise homogene Ideale $I \subsetneq k[T_0, \dots, T_n]$ beschränken, die also keine von Null verschiedenen Konstanten enthalten, so gilt auch $I \subset \mathcal{I}^*(\mathcal{Z}^*(I))$.

Korollar 6.8.11 (Zariskitopologie auf $\mathbb{P}_k^n$ und homogene Ideale). $(k = \bar{k})$. *Ordnen wir jedem homogenen Radikalideal $I \subset k[T_0, \dots, T_n]$ seine projektive Nullstellenmenge zu, so erhalten wir eine Bijektion*

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{array}{c} \textit{Homogene Radikalideale} \\ I \subsetneq k[T_0, \dots, T_n] \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \overset{\circ}{\not\subset} \mathbb{P}^n k \end{array} \right\}$$

mit Umkehrabbildung $Y \mapsto \mathcal{I}^*(Y)$.

Beweis. Wir erinnern die Projektion $\pi : k^{n+1} \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n k$. Das Bilden des Urbilds unter π, das Hinzufügen des Ursprungs und das Bilden des Verschwindungsideals liefern Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen von } \mathbb{P}^n k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} k^\times\text{-stabile abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen von } k^{n+1} \backslash 0 \end{array} \right\} \\ & & \downarrow \wr \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{homogene Radikalideale} \\ I \subsetneq k[T_0, \dots, T_n] \end{array} \right\} & \xleftarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} k^\times\text{-stabile abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } X \overset{\circ}{\not\subset} k^{n+1} \text{ mit } 0 \in X \end{array} \right\} \end{array}$$

Die Zusammenfassung der ersten beiden Bijektionen hatten wir bereits in 6.5.15 als Kegelkonstruktion $Y \mapsto \mathrm{C}(Y)$ eingeführt. Beim letzten Schritt verwenden wir, daß nach 6.8.3 und 6.8.2 unter unserer Bijektion 1.7.16 zwischen algebraischen Teilmengen von k^{n+1} und Radikalidealen die $k^\times$-invarianten Teilmengen genau den homogenen Radikalidealen entsprechen müssen. □

6.8.12. Nach 6.5.16 induziert unsere Bijektion auch eine Bijektion

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{array}{c} \text{Homogene Primideale} \\ \text{mit } I \subsetneq \mathcal{I}(0) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } Y \overset{\circ}{\not\subset} \mathbb{P}^n k \end{array} \right\}$$

Da wir im k^n bereits nach 4.2.23 wissen, daß die irreduziblen Hyperflächen genau die Nullstellenmengen der irreduziblen Polynome sind, erhalten wir weiter für $n \geq 1$ Bijektionen

$$\mathcal{Z}^* : \left\{ \begin{array}{c} \text{Homogene irreduzible} \\ \text{Polynome } f \in k[T_0, \dots, T_n] \end{array} \right\}_{/k^\times} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible} \\ \text{Hyperflächen } Y \overset{\circ}{\not\subset} \mathbb{P}^n k \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{Z}^* : \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Homogene quadratfreie} \\ \text{Polynome } f \in k[T_0, \ldots, T_n] \end{array} \right\}_{/k^\times} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Beliebige} \\ \text{Hyperflächen } Y \subset\!\!\!\!_{\mathcal{A}}\; \mathbb{P}^n k \end{array} \right\}$$

Eine Hyperfläche in einem projektiven Raum heißt ganz allgemein eine **projektive Hyperfläche**. Der Grad eines und jedes zu einer projektiven Hyperfläche gehörigen quadratfreien homogenen Polynoms heißt der **Grad** unserer projektiven Hyperfläche. Den Grad einer projektiven Hyperfläche $H \subset\!\!\!\!_{\mathcal{A}}\; \mathbb{P}^n k$ notieren wir

$$\operatorname{grad} H$$

Grad Null hat nur die leere Hyperfläche. Hyperflächen der Grade Eins, Zwei, Drei, Vier und Fünf und Sechs heißen **Hyperebene**, **Quadrik**, **Kubik**, **Quartik**, **Quintik** und **Sextik**.

6.8.13. Vereinigen wir zwei projektive Hyperflächen ohne gemeinsame irreduzible Komponente in demselben projektiven Raum, so addieren sich ihre Grade. So ist zum Beispiel die Vereinigung zweier verschiedener Hyperebenen stets eine Quadrik.

6.8.14 (**Projektive Vervollständigung ohne Koordinaten**). Für einen koordinatenfreien und dadurch hoffentlich anschaulicheren Zugang mag man wie in 6.5.7 jedem endlichdimenionalen affinen Raum E seine projektive Vervollständigung $\mathbb{V}E = E \sqcup \mathbb{P}\vec{E}$ zuordnen. Gegeben $X \subset\!\!\!\!_{\mathcal{A}}\; E$ bedeutet das Bilden seines Abschlusses $\bar{X} \subset \mathbb{V}E$ anschaulich, daß wir „alle Richtungen aus $\mathbb{P}\vec{E}$ mit hinzunehmen, in die X ins Unendliche entweicht“. Bei der Parabel $x^2 = y$ in der Ebene k^2 wäre das etwa die Richtung der y-Achse und bei der Hyperbel $xy = 1$ die Richtungen beider Koordinatenachsen.

Proposition* 6.8.15 (Darstellung algebraischer Mengen durch Gleichungen). $(k = \bar{k})$. *Seien $Z \subset\!\!\!\!_{\mathcal{A}}\; X \subset\!\!\!\!_{\mathcal{A}}\; \mathbb{P}^n k$ nichtleere äquidimensionale projektive Varietäten und sei $c = \operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} Z$. So gibt es Elemente $f_1, \ldots, f_c \in \mathcal{O}^*(X)$ mit $\mathcal{Z}^*(f_1, \ldots, f_c) \supset Z$ äquidimensional von derselben Dimension wie Z.*

Beweis. Analog zu 5.9.16. Im Fall $c = 0$ ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir ein homogenes kürzbares Element $f_1 \in \mathcal{O}^*(X)$ mit $Z \subset \mathcal{Z}^*(f_1)$. In der Tat finden wir homogene Funktionen, die auf $\mathrm{C}(Z)$ und endlich vielen vorgegebenen Ursprungsgeraden verschwinden, auf einer weiteren Ursprungsgerade außerhalb von $\mathrm{C}(Z)$ aber nicht verschwinden. Indem wir solche Funktionen potenzieren und dann die Summe bilden, finden wir homogene Funktionen, die auf $\mathrm{C}(Z)$ verschwinden, aber auf endlich vielen vorgegebenen Ursprungsgeraden außerhalb von $\mathrm{C}(Z)$ nicht verschwinden. Der Beweis kann nun mit Induktion über c zu Ende geführt werden. □

Übungen

Übung 6.8.16. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben $W \subset \mathbb{P}^n k$ ist $\mathcal{Z}^*(\mathcal{I}^*(W)) = \bar{W}$ der Abschluß von W in der Zariskitopologie. Für beliebige Teilmengen $I \subset \mathcal{I}(0)$, die aus homogenen Elementen bestehen, sowie für beliebige homogene Ideale $I \subset \mathcal{I}(0)$ ist $\mathcal{I}^*(\mathcal{Z}^*(I)) = \sqrt{\langle I \rangle}$ das Radikal des von I erzeugten Ideals.

Übung 6.8.17. Das Komplement einer nichtleeren Hyperfläche im projektiven Raum ist stets eine affine Varietät.

Übung 6.8.18 (**Homogenisierung und Dehomogenisierung**). $(k = \bar{k})$. Wir betrachten für $n \geq 1$ die Einbettung $i_0 : k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n k$ gegeben durch das Hinzufügen einer ersten Koordinate Eins und den Übergang zur davon erzeugten Geraden

$$i_0 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \langle 1, x_1, \ldots, x_n \rangle$$

Das Komplement $H_0 := \mathbb{P}^n k \backslash i_0(k^n)$ ihres Bildes ist eine projektive Hyperebene im Sinne von [EL] 1.4.8 und damit isomorph zu $\mathbb{P}^{n-1}k$. Wir erhalten eine offensichtliche Bijektion

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Abgeschlossene Teilmengen}\\ Y \subset k^n\end{array}\right\} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{Abgeschlossene Teilmengen}\\ A \subset \mathbb{P}^n k \text{ mit } H_0 \subset A\end{array}\right\}$$

durch $Y \mapsto i_0(Y) \cup H_0$ und $A \mapsto i_0^{-1}(A)$. Wir folgern eine weitere Bijektion

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Echte abgeschlossene}\\ \text{Teilmengen } Y \subsetneq k^n\end{array}\right\} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{Echte abgeschlossene Teilmengen}\\ B \subsetneq \mathbb{P}^n k \text{ ohne Komponente in } H_0\end{array}\right\}$$

durch $Y \mapsto \overline{i_0(Y)}$ und $B \mapsto i_0^{-1}(B)$. Ist $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ eine Menge von homogenen Polynomen oder ein homogenes Ideal und $B \subset \mathbb{P}^n k$ eine beliebige Teilmenge, so gelten die Identitäten

$$i_0^{-1}\mathcal{Z}^*(I) = \mathcal{Z}(a_0(I)) \qquad (1)$$
$$a_0(\mathcal{I}^*(B)) = \mathcal{I}(i_0^{-1}B) \qquad (2)$$

für $a_0 : k[T_0, \ldots, T_n] \to k[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben durch $T_0 \mapsto 1$. Sei umgekehrt die **Homogenisierung** $h_0(f) \in k[T_0, \ldots, T_n]$ von $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ erklärt durch die Vorschrift $h_0(a) = aT_0$ für $a \in k$ und auf nichtkonstanten Polynomen durch $h_0(\sum c_\alpha T^\alpha) = \sum c_\alpha T^\alpha T_0^{d-|\alpha|}$ für $d = \sup\{|\alpha| \mid c_\alpha \neq 0\}$ der Totalgrad. Zum Beispiel haben wir

$$h_z(X^2Y + Y^3 + 4Y^2X^3) = Z^2X^2Y + Z^2Y^3 + 4Y^2X^3$$

mit der Konvention, daß wir bei den wenigen Variablen statt (T_0, T_1, T_2) der Übersichtlichkeit halber (Z, Y, X) schreiben und die Homogenisierung statt h_0 in diesem Kontext h_z notieren, da sie ja „durch die zusätzliche Variable Z“ geschieht und nicht „durch die zusätzliche Variable T_0“. Mit dieser Notation finden wir für eine beliebige Teilmenge $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ und eine beliebige Teilmenge $Y \subset k^n$ die Identitäten

$$\begin{aligned} i_0\mathcal{Z}(J) \cup H_0 &= \mathcal{Z}^*(h_0(J) \cup \{T_0\}) \\ \langle h_0(\mathcal{I}(Y)), T_0 \rangle &= \mathcal{I}^*(i_0(Y) \cup H_0) \end{aligned}$$

Ist schließlich $J \subsetneq k[T_1, \ldots, T_n]$ ein echtes Ideal und $Y \subset k^n$ eine Teilmenge, so gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \overline{i_0\mathcal{Z}(J)} &= \mathcal{Z}^*(h_0(J)) \\ \langle h_0(\mathcal{I}(Y)) \rangle &= \mathcal{I}^*(\overline{i_0(Y)}) \end{aligned}$$

Ist $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ beliebig, so haben wir $\mathcal{Z}^*(h_0(J)) = \overline{i_0\mathcal{Z}(J)} \cup R$ mit einem Rest $R \not\subset\!\!\!\!\!\!\!\triangle\, H_0$, über den wir a priori wenig wissen.

6.9 Hilbertpolynome

6.9.1. Ich erinnere an Übung [LA1] 5.3.46, nach der wir für jeden Ring k den Ring $k(\!(u)\!)$ der formalen Laurentreihen mit Koeffizienten in k der Gestalt $\sum_{n \geq N} a_n u^n$ mit $a_n \in k$ und $N \in \mathbb{Z}$ bilden können. Ich erinnere weiter daran, daß formale Laurentreihen $\sum_{n \geq N} a_n u^n$ mit $a_N \in k^\times$ einer Einheit des Grundrings k selbst Einheiten des Rings der formalen Laurentreihen sind. Unter der offensichtlichen Einbettung $k[u, u^{-1}] \hookrightarrow k(\!(u)\!)$ der formalen Laurent-Polynome in die formalen Laurentreihen, ja bereits unter der offensichtlichen Einbettung $k[u] \hookrightarrow k[\![u]\!]$ des Polynomrings in den Ring der formalen Potenzreihen wird zum Beispiel $(1 - u)$ eine Einheit mit Inversem $1 + u + u^2 + \ldots$

Satz 6.9.2 (**Erzeugende Funktionen zu Moduln über Polynomringen**). *Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit seiner Standardgraduierung. So gibt es genau ein Laurent-Polynom $f_M \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ derart, daß im Ring $\mathbb{Z}(\!(u)\!)$ der formalen Laurentreihen gilt*

$$\sum (\dim_k M^i) u^i = \frac{f_M(u)}{(1 - u)^n}$$

6.9.3. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir für k einen Kring endlicher Länge nehmen und statt $\dim_k M^i$ die Länge $l_k(M^i)$ des k-Moduls M^i betrachten. Man überlegt sich, daß auch in diesem Fall jeder endlich erzeugte graduierte Modul von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird, und da die homogenen Komponenten des Polynomrings $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit seiner Standardgraduierung endliche Länge haben, folgt dasselbe für die homogenen Komponenten unseres endlich erzeugten Moduls M.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, nur die Existenz bleibt zu zeigen. Wir notieren die linke Seite $\mathrm{E}(M, u)$ und argumentieren mit vollständiger Induktion über die Zahl der Variablen. Der Fall $n = 0$ ist offensichtlich. Sonst betrachten wir die exakte Sequenz $\ker \hookrightarrow M \xrightarrow{T_1 \cdot} M \twoheadrightarrow \operatorname{cok}$ und folgern durch mehrmaliges Anwenden der Dimensionsformel [LA1] 2.2.5 leicht

$$\dim \ker^i - \dim M^i + \dim M^{i+1} - \dim \operatorname{cok}^{i+1} = 0$$

alias $u\mathrm{E}(\ker, u) - u\mathrm{E}(M, u) + \mathrm{E}(M, u) - \mathrm{E}(\operatorname{cok}, u) = 0$ alias $(1-u)\mathrm{E}(M, u) = \mathrm{E}(\operatorname{cok}, u) - u\mathrm{E}(\ker, u)$. Nun wirkt T_1 aber auf $\ker$ und cok durch Null. Induktion zeigt dann, daß $\mathrm{E}(M, u)$ die gewünschte Form hat. □

Satz 6.9.4 (Hilbertpolynom). *Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_i M^i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$. So gibt es Polynome $\mathrm{Q}_M, \mathrm{P}_M \in \mathbb{Q}[t]$ derart, daß für alle hinreichend großen $i \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\dim_k M^i = \mathrm{Q}_M(i) \quad \textit{und} \quad \dim_k M^{\leq i} = \mathrm{P}_M(i).$$

Beide Polynome sind eindeutig bestimmt. P_M heißt das **Hilbert-Polynom von** M. *Es hat höchstens den Grad n. Ich nenne diesen Grad die* **Hilbert-Dimension** *des graduierten Moduls M und notiere ihn*

$$\operatorname{hdim}(M) := \operatorname{grad} \mathrm{P}_M$$

6.9.5. Dasselbe gilt mit demselben Beweis, wenn wir für k einen Kring endlicher Länge nehmen und statt $\dim_k M^i$ die Länge $l_k(M^i)$ des k-Moduls M^i betrachten.

6.9.6. Nur der Nullmodul hat die Hilbertdimension $-\infty$. Hilbertdimension Null haben genau die graduierten Moduln, die als k-Vektorräume eine endliche positive Dimension beziehungsweise als k-Moduln eine endliche positive Länge haben.

Beweis. Die Binomialreihe [AN1] 12.6.1.23 oder auch elementare Überlegungen liefern die Entwicklung

$$\frac{1}{(1-u)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-u)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} u^i$$

in $\mathbb{Q}[\![u]\!]$. Die Binomialkoeffizienten ganz rechts sind offensichtlich die Werte bei i des Polynoms

$$Q_n(t) := \binom{n+t-1}{n-1} = \frac{(n+t-1)(n+t-2)\ldots(t+1)}{(n-1)!}$$

So folgt aus dem vorhergehenden Satz 6.9.2 schon mal die Existenz eines Polynoms Q_M vom Grad $\leq n-1$ mit $\dim_k M^i = \mathrm{Q}_M(i)$ für $i \gg 0$. Nun mache man

$N := \bigoplus_i M^{\leq i}$ zu einem graduierten Modul über dem erweiterten Polynomring $k[T_0, T_1, \ldots, T_n]$, indem man T_0 als Einbettung $M^{\leq i} \hookrightarrow M^{\leq i+1}$ operieren läßt und die anderen T_ν als die Multiplikationsabbildungen $(T_\nu \cdot) : M^{\leq i} \to M^{\leq i+1}$. Man sieht leicht, daß mit M auch N endlich erzeugt ist. Das Polynom Q_N für den so konstruierten Modul N ist dann das gesuchte Polynom P_M. □

6.9.7 (**Multiplizitäten**). Gegeben ein Körper k und ein endlich erzeugter graduierter Modul M über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ und $d \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\operatorname{mult}^d(M) := \lim_{i \to \infty} d! \dim_k M^{\leq i} / i^d$$

und behaupten, daß dieser Grenzwert stets in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ existiert. In der Tat wissen wir aus [LA1] 5.4.9, daß Polynome $P \in \mathbb{Q}[t]$, die auf allen hinreichend großen natürlichen Zahlen positive ganzzahlige Werte annehmen, stets die Gestalt $P(t) = a_h t^h + a_{h-1} t^{h-1} + \ldots + a_0$ haben mit $h \geq 0$ und $h! a_h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Diese Erkenntnis gilt es dann auf das Hilbertpolynom $\mathrm{P}_M(t)$ anzuwenden. Für $M \neq 0$ von der Hilbertdimension $h = \operatorname{hdim} M$ finden wir

$$\operatorname{mult}^d(M) = \begin{cases} 0 & d > h; \\ h! a_h & d = h; \\ \infty & d < h. \end{cases}$$

mit a_h dem Leitkoeffizient des Hilbertpolynoms P_M von M. Wir nennen unser $\operatorname{mult}^d(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die **d-Multiplizität von** M. Für $M \neq 0$ und $h = \operatorname{hdim}(M)$ heißt die Zahl $\operatorname{mult}^h(M) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die **Multiplizität von** M und wir notieren sie $\operatorname{mult}(M)$. Im Fall des Nullmoduls sind alle d-Multiplizitäten Null. All das gilt analog für einen beliebigen Kring k endlicher Länge.

6.9.8 (**Additivität der Multiplizitäten**). Gegeben ein Körper k und eine kurze exakte Sequenz $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ von endlich erzeugten graduierten Moduln über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ gilt für die Hilbertdimensionen $\operatorname{hdim}(M) = \max(\operatorname{hdim}(N), \operatorname{hdim}(Q))$ und für $d \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\operatorname{mult}^d(M) = \operatorname{mult}^d(N) + \operatorname{mult}^d(Q)$$

Weiter bleiben die Hilbertdimension ebenso wie die Multiplizitäten bei Verschiebungen der Graduierung unverändert. Dasselbe gilt offensichtlich analog im Fall eines beliebigen Krings k endlicher Länge.

Ergänzung 6.9.9 (**Multiplizität und Hilbertdimension, Variante**). Sei $M \neq 0$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über einem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$ mit Koeffizienten in einem Körper k. Offensichtlich müssen sich die Multiplizitäten und die Hilbertdimension auch direkt an der erzeugenden Funktion $\mathrm{E}(M, u)$ aus 6.9.2 ablesen lassen. Ich behaupte, daß der Grad d des Hilbertpolynoms P_M

dann genau die Polordnung der erzeugenden Funktion bei $u = 1$ ist und $\operatorname{mult}(M)$ ist der tiefste von Null verschiedene Koeffizient in der Laurententwicklung der erzeugenden Funktion $\mathrm{E}(M, u)$ nach Potenzen von $(1 - u)$. Sei dazu allgemein $E(u) \in \mathbb{Z}(\!(u)\!)$ eine von Null verschiedene formale Potenzreihe aus dem Bild der offensichtlichen Einbettung

$$\mathbb{Z}[u, u^{-1}, (1-u)^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{Z}(\!(u)\!)$$

Zunächst einmal zeigt man wie zuvor, daß es Polynome $Q, P \in \mathbb{Q}[t]$ gibt mit

$$E(u) \in \sum_{i \geq 0} Q(i) u^i + \mathbb{Z}[u, u^{-1}] \quad \text{und} \quad E(u)(1-u)^{-1} \in \sum_{i \geq 0} P(i) u^i + \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$$

Die Partialbruchzerlegung von E hat notwendig die Gestalt

$$E(u) = \sum_{\nu=-d}^{-1} a_\nu (1-u)^{-\nu} + \sum_{\mu=-m}^{-1} b_\mu u^{-\mu} + R(u)$$

mit einem Polynom $R(u) \in \mathbb{Q}[u]$ und $a_\nu, b_\mu \in \mathbb{Q}$. Rechnen wir uns von hier aus in den Ring $\mathbb{Q}(\!(u)\!)$ der formalen Laurentreihen zurück, so erkennen wir leicht, daß der Grad des Polynoms Q aus dem vorhergehenden Beweis Eins kleiner ist als die Polordnung von E bei $u = 1$ und daß gilt $Q = 0$ falls E bei $u = 1$ gar keinen Pol hat. Denken wir etwas schärfer nach oder erinnern [LA1] 5.5.25, so sehen wir weiter, daß hier sogar notwendig gilt $a_\nu, b_\mu \in \mathbb{Z}$ für alle ν sowie $R \in \mathbb{Z}[u]$. Zusätzlich erkennen wir, daß im Fall $Q \neq 0$ für $d > 0$ größtmöglich mit $a_{-d} \neq 0$ unser Polynom Q den Leitkoeffizienten $a_{-d}/(d-1)!$ hat. Mehr war nicht zu zeigen.

Übungen

Übung 6.9.10 (**Kokerne homogener Selbstinjektionen**). Seien k ein Körper und $M = \bigoplus_i M^i$ ein endlich erzeugter von Null verschiedener graduierter Modul über dem Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]$. Ist $f : M \hookrightarrow M$ ein injektiver Endomorphismus von M und gibt es $r > 0$ mit $f(M^i) \subset M^{i+r}$ für alle i, so hat $\operatorname{cok} f$ im Vergleich zu M eine um Eins kleinere Hilbertdimension und die r-fache Multiplizität, in Formeln

$$\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) = \operatorname{hdim}(M) - 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{mult}(\operatorname{cok} f) = r \operatorname{mult}(M).$$

Ist f zwar nicht notwendig injektiv, aber kennen wir für $d := \operatorname{hdim}(M)$ dennoch die Abschätzung $\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) < d$, so folgt $\operatorname{hdim}(\ker f) < d$ und

$$\operatorname{mult}^{d-1}(\operatorname{cok} f) - \operatorname{mult}^{d-1}(\ker f) = r \operatorname{mult}^d(M)$$

Dasselbe gilt im Fall eines beliebigen Krings k endlicher Länge.

Übung 6.9.11. Für den Polynomring $M = k[T_1, \ldots, T_n]$ über einem Körper als graduierter Modul über sich selbst haben wir $\dim_k(M^{\leq m}) = \binom{n+m}{n}$ etwa nach [GR] 2.1.5.23 und folglich $\mathrm{P}_M(t) = \binom{n+t}{n}$ und $\operatorname{hdim} M = n$ und $\operatorname{mult} M = 1$. Ist k ein von Null verschiedener Kring endlicher Länge l, so haben wir allgemeiner $\mathrm{P}_M(t) = l\binom{n+t}{n}$ und $\operatorname{hdim} M = n$ sowie $\operatorname{mult} M = l$.

6.10 Satz von Bézout

6.10.1. Sei (X, x) eine bepunktete Varietät. Gegeben eine abgeschlossene Teilmenge $C \overset{\mathcal{A}}{\subset} X$ erklären wir ihr **lokales Verschwindungsideal** $\mathcal{I}_x(C) \subset \mathcal{O}_{X,x}$ als die Menge aller Funktionskeime, die einen Repräsentanten (U, f) besitzen mit $x \in U \overset{\circ}{\subset} X$ und $f \in \mathcal{O}_X(U)$ und $f|_{U \cap C} = 0$. Im Fall $x \notin C$ ist insbesondere das lokale Verschwindungsideal der ganze lokal Ring.

6.10.2. Gegeben eine bepunktete Varietät (X, x) und abgeschlossene Teilmengen $C, D \overset{\mathcal{A}}{\subset} X$ erklären wir die **Vielfachheit von** x **als Schnittpunkt von** C **und** D oder kurz die **Schnittmultiplizität** als

$$\mathrm{s}_x(C, D) := \dim_k \mathcal{O}_{X,x}/(\mathcal{I}_x(C) + \mathcal{I}_x(D)) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

6.10.3. Unsere Definition ist eigentlich nur für einen „glatten Punkt $x \in X$“ gemeint, aber diesen Begriff lernen wir erst später kennen. Weiter ist unsere Definition nur für den Fall $\operatorname{kdim}_x(C) + \operatorname{kdim}_x(D) = \operatorname{kdim}_x(X)$ gemeint, in anderen Fällen ist sie in der Allgemeinheit unserer Definition nur formal sinnvoll.

6.10.4 (**Anschauung für Schnittpunkte im Unendlichen**). Zwei ebene Kurven, die „in derselben Richtung nach Unendlich gehen“, haben in dieser Richtung einen Schnittpunkt im Unendlichen. Zum Beispiel schneiden sich die Abschlüsse der Kurven $\mathcal{Z}(y - x^2)$ und $\mathcal{Z}(x + 1)$ in dem Punkt von $\mathbb{P}^2 k = \mathbb{V}(k^2)$, der durch die y-Achse repräsentiert wird.

Beispiel 6.10.5. Im Spezialfall $X = k^2$ und von Kurven $C, D \overset{\mathcal{A}}{\subset} k^2$ gibt es nach 4.2.23 quadratfreie Polynome f, g mit $\mathcal{I}(C) = f$ und $\mathcal{I}(D) = g$. Genauer zeigen wir das in 4.2.23 für Hyperflächen in k^2, also abgeschlossene Teilmengen, deren irreduzible Komponenten alle die Krullkodimension Eins haben, und daß diese wirklich genau unsere Kurven sind, also die äqui-eindimensionalen abgeschlossenen Teilmengen, folgt dann aus 5.4.4. Sind unsere Polynome teilerfremd, so ist der Quotient $k[T, S]/\langle f, g\rangle$ endlichdimensional als k-Vektorraum nach 1.7.21, da unsere beiden Polynome höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen besitzen nach [AL] 2.10.2 oder auch, da jede abgeschlossene echte Teilmenge einer irreduziblen eindimensionalen Varietät eine nulldimensionale Varietät und folglich endlich sein muß und wir diese Erkenntnis auf alle irreduziblen Komponenten unserer Kurven anwenden können. Die Lokalisierung unseres Quotienten ist dann auch endlichdimensional als k-Vektorraum nach 4.3.56. Insbesondere ist unsere Vielfachheit $\mathrm{s}_x(C, D)$ also endlich, wenn die Komponenten der Kurve C, die durch x laufen, paarweise verschieden sind von den Komponenten der Kurve D, die durch x laufen. Im folgenden listen wir noch einige genauere Aussagen für die Schnittmultiplizität $\mathrm{s}_x(C, D)$ unserer Kurven $C, D \not\subset\!\!\!\!\!\triangle\ k^2$ auf und nehmen dabei an, daß sie keine gemeinsamen Komponenten haben, die durch x gehen, und daß sie die Nullstellenmengen der quadratfreien Polynome f, g sind.

1. Die Schnittmultiplizität ist Null $\mathrm{s}_x(C, D) = 0$ genau dann, wenn eine unserer Kurven nicht durch x geht, denn genau dann ist f oder g im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ eine Einheit und andernfalls gehören sie beide zum maximalen Ideal;

2. Die Schnittmultiplizität ist Eins $\mathrm{s}_x(C, D) = 1$ genau dann, wenn $\bar{f}$ und $\bar{g}$ bereits $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ erzeugen, denn genau dann erzeugen sie nach Nakayama bereits ganz $\mathfrak{m}_x$. In anderen Worten und vielleicht anschaulicher gesagt bedeutet diese Bedingung, daß die Gradienten von f und g bei x linear unabhängig sind;

3. Im Fall $g(S, T) = T$, wenn also die zweite unserer Kurven eine Koordinatenachse ist, finden wir als Schnittmultiplizität
$$\mathrm{s}_{(0,0)}(C, D) = \inf\{n \mid S^n \text{ teilt } f(S, 0)\}$$
den kleinstmöglichen Grad eines Monoms in S, das mit von Null verschiedenem Koeffizienten in $f(S, 0)$ auftaucht. Das ist leicht einzusehen. In anderen Worten ist das der Grad der Nullstelle am Ursprung der Einschränkung von f auf unsere Koordinatenachse. Analog bestimmt man die Schnittmultiplizitäten von beliebigen Kurven mit beliebigen affinen Geraden in k^2;

4. Sind $\tilde{f}, \tilde{g}$ die von Null verschiedenen homogenen Komponenten kleinstmöglichen Grades von f, g und r, s deren Grade, so gilt $\mathrm{s}_{(0,0)}(C, D) \geq rs$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auch ihrerseits teilerfremd sind. Das verallgemeinert die Aussage über transversalen Schnitt, ist aber nicht ganz so leicht einzusehen. Wir zeigen die Aussage in 7.4.38.

5. Ist $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, so gilt $s_x(C, D) = s_x(C_1, D) + \ldots + s_x(C_n, D)$. Der Nachweis bleibe dem Leser zur Übung überlassen.

Satz 6.10.6 (von Bézout über Schnitte ebener Kurven). $(k = \bar{k})$. *Zwei ebene projektive Kurven $C, D \not\subset\!\!\!\!\!\triangle\ \mathbb{P}^2 k$ ohne gemeinsame irreduzible Komponente haben* *mit Vielfachheiten gerechnet genau so viele Schnittpunkte, wie das Produkt ihrer Grade angibt, in Formeln*

$$\sum_{x \in C \cap D} \mathrm{s}_x(C, D) = (\operatorname{grad} C)(\operatorname{grad} D)$$

6.10.7. Mehr zur Motivation und anschaulichen Bedeutung findet man in 6.1.1.

Beweis. Nach 6.8.12 sind C, D die projektiven Nullstellenmengen teilerfremder quadratfreier homogener Polynome $f, g \in k[T_0, T_1, T_2]$ der Grade $c = \operatorname{grad} C$ und $d = \operatorname{grad} D$. Da es mir übersichtlicher scheint, schreibe ich von nun an statt $k[T_0, T_1, T_2]$ kürzer $\mathcal{O}(k^3)$. Nach unseren Annahmen ist f kürzbar in $\mathcal{O}(k^3)$ und g kürzbar in $\mathcal{O}(k^3)/\langle f \rangle$. Mit unseren Erkenntnissen zur Hilbertdimension in 6.9.10 folgt erst $\operatorname{hdim} \mathcal{O}(k^3)/\langle f \rangle = 2$ sowie $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\langle f \rangle = c$ und dann $\operatorname{hdim} \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g \rangle = 1$ sowie $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g \rangle = cd$. Weiter hat unser Quotient $Q := \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g \rangle$ nach Übung 6.6.16 eine Filtrierung

$$0 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m = Q$$

durch homogene Ideale, bei der sämtliche Subquotienten Q_a/Q_{a-1} isomorph sind zu Quotienten $\mathcal{O}(k^3)/\mathfrak{p}_a$ nach jeweils einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}_a$. In unserem Fall kommen aus Dimensionsgründen für die homogenen Primideale $\mathfrak{p}_a$ nur die Verschwindungsideale von Ursprungsgeraden $\mathcal{I}^*(x)$ für $x \in \mathbb{P}^2 k$ sowie das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(0)$ des Ursprungs in Betracht. Nun gilt sicher $\operatorname{mult} \mathcal{O}(k^3)/\mathcal{I}^*(x) = \operatorname{mult} \mathcal{O}^*(x) = 1$. Wegen der Additivität der Multiplizität 6.9.8 tritt in unserer Filtrierung von Q also als Subquotient genau cd mal ein Quotient nach dem Verschwindungsideal einer Ursprungsgeraden auf, in Formeln

$$cd = \operatorname{card}\{a \mid \exists x \in \mathbb{P}^2 k \text{ mit } Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\}$$

Unser Satz folgt, sobald wir für alle $x \in \mathbb{P}^2 k$ die Identität

$$\mathrm{s}_x(C, D) = \operatorname{card}\{a \mid Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\}$$

zeigen können. Dazu dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß x im Bild der offenen Einbettung $i_0 : k^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2 k$ gegeben durch $(x_1, x_2) \mapsto \langle 1, x_1, x_2 \rangle$ liegt. Wir erklären nun für jeden Modul M über $\mathcal{O}(k^3)$ den $\mathcal{O}(k^2)$-Modul

$$\bar{M} := M/(T_0 - 1)M$$

Wir werden später lernen, inwiefern er aus M durch „Restriktion unter der Einbettung $i_0 : k^2 \hookrightarrow k^3$ der Ebene als affine Ebene im Raum“ entsteht, aber bisher wissen wie noch nicht, was ein „Modul auf einer Varietät“ sein sollte und wie wir so einen Modul auf eine abgeschlossene Untervarietät einzuschränken hätten. Ist

M ein graduierter $\mathcal{O}(k^3)$-Modul, so ist die Multiplikation mit $(T_0 - 1)$ eine Injektion $(T_0 - 1) : M \hookrightarrow M$, denn für jedes Element ungleich Null im Kern muß seine tiefste von Null verschiedene homogene Komponente verschwinden und das geht eben nicht. Ist nun $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ eine kurze exakte Sequenz graduierter $\mathcal{O}(k^3)$-Moduln, so zeigt das Neunerlemma

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\ N \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Q \arrow[d, two heads] \\ \bar{N} \arrow[r] & \bar{M} \arrow[r] & \bar{Q} \end{tikzcd}$$

mit der Multiplikation mit $(T_0 - 1)$ als oberer Vertikale, daß auch die Sequenz $\bar{N} \hookrightarrow \bar{M} \twoheadrightarrow \bar{Q}$ exakt ist. Insbesondere wird die durch die Zeilenmatrix (f, g) gegebene rechtsexakte Sequenz $\mathcal{O}(k^3)^2 \to \mathcal{O}(k^3) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle$ unter dem Bilden des Kokerns von $(T_0 - 1)$ wieder eine rechtsexakte Sequenz $\mathcal{O}(k^2)^2 \to \mathcal{O}(k^2) \to \mathcal{O}(k^2)/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$ für $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{O}(k^2)$ die Polynome, die aus den homogenen Polynomen f, g durch Einsetzen von $T_0 = 1$ entstehen. Für unser $Q = \mathcal{O}(k^3)/\langle f, g\rangle$ erhalten wir damit $\bar{Q} \cong \mathcal{O}(k^2)/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$. Unsere Filtrierung von oben liefert weiter eine Filtrierung

$$0 = \bar{Q}_0 \subset \bar{Q}_1 \subset \ldots \subset \bar{Q}_m = \bar{Q}$$

von $\bar{Q} = \mathcal{O}(k^2)/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$ mit Subquotienten $\bar{Q}_a/\bar{Q}_{a-1} \cong \overline{Q_a/Q_{a-1}}$. Lokalisieren wir jetzt noch an einer Stelle $y \in k^2$, kürzen $M_{\mathcal{I}(y)} =: M_{(y)}$ ab und erinnern, daß Lokalisieren exakt ist, so erhalten wir für $\bar{Q}_{(y)} \cong \mathcal{O}(k^2)_{(y)}/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle_{(y)}$ eine Filtrierung mit Subquotienten $(\overline{Q_a/Q_{a-1}})_{(y)}$. Diese Subquotienten sind aber eindimensional für $Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(i_0(y))$ und Null sonst. Im Licht unserer Definition der Schnittmultiplizität zeigt das dann für $x = i_0(y)$ die gewünschte Identität

$$\mathrm{s}_x(C, D) = \dim_k \mathcal{O}(k^2)_{(y)}/\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle_{(y)} = \operatorname{card}\{a \mid Q_a/Q_{a-1} \cong \mathcal{O}^*(x)\} \qquad \square$$

Übungen

Übung 6.10.8. Man bestimme die Schnittpunkte in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ der konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 2$ sowie ihre jeweiligen Vielfachheiten.

7 Hilbertpolynome und reguläre Ringe

7.1 Filtrierungen von Gruppen

Definition 7.1.1. Eine **Filtrierung** auf einer abelschen Gruppe V ist eine Familie von Untergruppen $V^{\leq r}$ für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V^{\leq r} \subset V^{\leq r+1}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

7.1.2. Manchmal notieren wir eine Filtrierung auf einer abelschen Gruppe V auch als eine Familie von Untergruppen $V^{\geq r}$ für $r \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt $V^{\geq r} \supset V^{\geq r+1}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

7.1.3.

1. Eine **ausschöpfende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der die Vereinigung der filtrierenden Untergruppen die ganze Gruppe ist, in Formeln $\bigcup_r V^{\leq r} = V$.
2. Eine **voll endende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der bereits eine der filtrierenden Untergruppen die ganze Gruppe ist, bei der also in Formeln ein r existiert mit $V^{\leq r} = V$.
3. Eine **Hausdorff'sche** oder auch **separierte Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der der Schnitt über alle filtrierenden Untergruppen Null ist, in Formeln $\bigcap_r V^{\leq r} = 0$.
4. Eine **von Null kommende Filtrierung** ist eine Filtrierung, bei der bereits eine der filtrierenden Untergruppen Null ist, bei der also in Formeln ein r existiert mit $V^{\leq r} = 0$.
5. Eine **endliche Filtrierung** ist eine von Null kommende und voll endende Filtrierung.

7.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Autoren fordern auch ganz allgemein von einer Filtrierung noch zusätzlich implizit eine oder mehrere der oben angegebenen Eigenschaften. Außerdem mag man statt durch $\mathbb{Z}$ indizierte Filtrierungen auch noch allgemeinere Filtrierungen betrachten. Unsere Filtrierungen hier nennen wir dann präziser **$\mathbb{Z}$-Filtrierungen**.

7.1.5. Eine letzte Eigenschaft von Filtrierungen, die oft verwendet wird, ist die **Vollständigkeit**. Diese Bedingung besagt im Fall einer Hausdorff'schen Filtrierung, daß V vollständig ist für die Metrik

$$d(v, w) := \inf \big(\{1\} \sqcup \{2^r \mid (v - w) \in V^{\leq r}\}\big)$$

Im Fall einer beliebigen Filtrierung erklärt man sie dadurch, daß der Quotient $V / \bigcap_r V^{\leq r}$ vollständig ist in der zuvor beschriebenen Weise.

7.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Kennt man die Terminologie uniformer Räume [TM] 1.4.1.3 und versieht V mit der durch die Filtrierung gegebenen Struktur als uniformer Raum nach [TM] 1.4.1.7, so ist V vollständig beziehungsweise Hausdorff als topologischer Raum genau dann, wenn unsere Filtrierung vollständig beziehungsweise Hausdorff ist im Sinne der vorhergehenden Definitionen.

7.1.7. Ein Homomorphismus $\phi : V \to W$ von filtrierten abelschen Gruppen heißt **mit den Filtrierungen verträglich**, wenn gilt $\phi(V^{\leq r}) \subset W^{\leq r}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$. Die filtrierten abelschen Gruppen werden mit den filtrierungsverträglichen Homomorphismen als Morphismen zu einer Kategorie filAb.

7.1.8 (**Finale Filtrierung**). Gegeben ein Homomorphismus von abelschen Gruppen $\varphi : V \to W$ und eine Filtrierung auf V erklären wir die zugehörige **finale Filtrierung** auf W durch $W^{\leq r} := \varphi(V^{\leq r})$. Im Fall eines Quotienten nennen wir sie auch die **Quotientenfiltrierung**.

7.1.9 (**Initiale Filtrierung**). Gegeben ein Homomorphismus von abelschen Gruppen $\varphi : V \to W$ und eine Filtrierung auf W erklären wir die zugehörige **initiale Filtrierung** auf V durch $V^{\leq r} := \varphi^{-1}(W^{\leq r})$. Im Fall der Einbettung einer Untergruppe nennen wir sie auch die **Untergruppenfiltrierung**.

7.1.10. Gegeben Untergruppen $U \subset V \subset W$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmt auf dem Subquotienten V/U die Untergruppenfiltrierung zur Quotientenfiltrierung auf W/U überein mit der Quotientenfiltrierung zur Untergruppenfiltrierung auf V. In [TF] 2.2.3.7 besprechen wir die dieser Erkenntnis zugrundeliegenden Tatsachen, den „Basiswechsel für Untergruppen“, in einem größeren Rahmen.

7.1.11. Gegeben eine Zerlegung $W = U \oplus V$ einer filtrierten abelschen Gruppe W stimmt die Untergruppenfiltrierung auf U für die offensichtliche Einbettung im allgemeinen keineswegs überein mit der Quotientenfiltrierung auf U für die offensichtliche Projektion.

Vorschau 7.1.12. Wir erklären eine r-**Verschmelzung** von filtrierten abelschen Gruppen als eine multilineare Abbildung $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ mit

$$\varphi\left(V_1^{\leq n_1} \times \ldots \times V_r^{\leq n_r}\right) \subset W^{\leq (n_1 + \ldots + n_r)}$$

und insbesondere eine 0-Verschmelzung nach W als ein Element von $W^{\leq 0}$. Mit der offensichtlichen Multiverknüpfung von Verschmelzungen werden die filtrierten abelschen Gruppen dann zu einer Schmelzkategorie im Sinne von [TS] **??**. In unserer Schmelzkategorie erhalten wir stark universelle Verschmelzungen, indem wir das Tensorprodukt mit der **Tensorfiltrierung** versehen, die im Fall von zwei Faktoren gegeben wird durch die Vorschrift

$$(M \otimes N)^{\leq n} := \langle \mathrm{ten}(M^{\leq i} \times N^{\leq j}) \mid i + j \leq n \rangle_{\mathbb{Z}}$$

für $\mathrm{ten} : M \times N \to M \otimes N$ die universelle bilineare Abbildung.

7.1.13. Eine Graduierung $V = \bigoplus_r V^r$ auf einer abelschen Gruppe liefert eine Filtrierung durch die Vorschrift $V^{\leq r} := \bigoplus_{\nu \leq r} V^\nu$. Zu jeder filtrierten abelschen Gruppe können wir umgekehrt die **assoziierte graduierte Gruppe**

$$\operatorname{gr} V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V^{\leq r}/V^{\leq r-1}$$

bilden. Wir notieren ihren homogenen Teil vom Grad r auch $(\operatorname{gr} V)^r = \operatorname{gr}^r V = V^{\leq r}/V^{\leq r-1}$ Kommt die Filtrierung auf V schon von einer Graduierung her, so induzieren die Verknüpfungen $V^r \hookrightarrow V^{\leq r} \twoheadrightarrow V^{\leq r}/V^{\leq r-1} = \operatorname{gr}^r V$ einen kanonischen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} V$.

7.1.14. Jeder filtrierungsverträgliche Homomorphismus $V \to W$ von filtrierten abelschen Gruppen induziert einen Homomorphismus $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ zwischen den assoziierten graduierten Gruppen. Analoges gilt für multilineare Abbildungen. Der Übergang zum assoziierten Graduierten ist in der Terminolgie aus [TS] **??** genauer ein Schmelzfunktor, und in der analogen Situation von Vektorräumen über einem Körper k ist er sogar verträglich mit universellen Verschmelzungen, die offensichtlichen Abbildungen sind also etwa im Fall von zwei zu verschmelzenden Objekten Isomorphismen

$$(\operatorname{gr} M) \otimes_k (\operatorname{gr} N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}(M \otimes_k N)$$

In der Tat finden wir in dieser Situation an unsere Filtrierungen angepaßte Basen, mit denen wir diese Behauptung leicht explizit prüfen können.

Übungen

Übung 7.1.15. Ist V eine filtrierte abelsche Gruppe und $U \subset V$ eine Untergruppe und betrachten wir auf U und V/U die induzierten Filtrierungen, so erhalten wir mit dem Neunerlemma eine kurze exakte Sequenz

$$\operatorname{gr} U \hookrightarrow \operatorname{gr} V \twoheadrightarrow \operatorname{gr}(V/U)$$

Übung 7.1.16. Sei $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus filtrierter abelscher Gruppen, der mit den Filtrierungen verträglich ist. Man zeige:

1. Ist die Filtrierung auf W bei Null beginnend und ausschöpfend und ist die assoziierte graduierte Abbildung $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ surjektiv, so ist ϕ bereits selbst surjektiv.

2. Ist die Filtrierung auf V Hausdorff und ausschöpfend und ist die assoziierte graduierte Abbildung $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} V \to \operatorname{gr} W$ injektiv, so ist ϕ bereits selbst injektiv.

Übung 7.1.17. Jede von Null kommende und ausschöpfende Filtrierung auf einem Vektorraum kommt von einer Graduierung her.

7.2 Filtrierungen von Ringen

7.2.1. Benutzt man die oben eingeführten Begriffe für Ringe, so wird stets implizit die Verträglichkeit mit der Multiplikation gefordert. Genauer treffen wir folgende Vereinbarungen.

Definition 7.2.2. Eine **Filtrierung** eines Rings A ist eine Filtrierung der additiven Gruppe A derart, daß gilt $A^{\leq r}A^{\leq s} \subset A^{\leq r+s}$ für alle r, s und zusätzlich $1 \in A^{\leq 0}$. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir die Verträglichkeit mit der Ringstruktur fordern, reden wir von einer **Ringfiltrierung**.

7.2.3. Die Bedingung $1 \in A^{\leq 0}$ wird benötigt, um sicherzustellen, daß der in 7.2.6 erklärte assoziierte graduierte Ring auch in der Tat wieder ein Ring in unserem Sinne ist, also ein Einselement hat. Vom kategoriellen Standpunkt aus liefert sie, was wir in [TS] **??** ein „Ringobjekt der Schmelzkategorie der filtrierten abelschen Gruppen" nennen werden.

7.2.4. Sicher ist bei einem filtrierten Ring $A^{\leq 0}$ ein Teilring und alle $A^{\leq n}$ für $n \leq 0$ sind Ideale von $A^{\leq 0}$. Allgemeiner definiert man **filtrierte Moduln** über filtrierten Ringen als Moduln M mit Filtrierung derart, daß gilt $A^{\leq r}M^{\leq s} \subset M^{\leq r+s}$ für alle r, s. Dann sind für jeden filtrierten Modul M alle $M^{\leq n}$ Untermoduln für die Restriktion unseres filtrierten Moduls auf den Teilring $A^{\leq 0}$.

7.2.5. Jeder Quotient eines filtrierten Rings ist für die Quotientenfiltrierung wieder ein filtrierter Ring. Jeder Teilring eines filtrierten Rings ist für die induzierte Filtrierung wieder ein filtrierter Ring.

7.2.6. Eine Graduierung $A = \bigoplus_r A^r$ eines Rings liefert eine Filtrierung durch $A^{\leq r} = \bigoplus_{\nu \leq r} A^\nu$. Zu jedem filtrierten Ring können wir umgekehrt den **assoziierten graduierten Ring**

$$\operatorname{gr} A = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} A^{\leq r}/A^{\leq r-1}$$

bilden, die Multiplikation auf $\operatorname{gr} A$ wird in der naheliegenden Weise definiert und die Existenz eines Eins-Elements in $\operatorname{gr} A$ folgt aus unserer Bedingung $1 \in A^{\leq 0}$ an einen filtrierten Ring. Kommt die Filtrierung auf dem Ring A schon von einer Graduierung her, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus graduierter Ringe $A \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} A$.

7.2.7. Ein Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$ von einem filtrierten Ring A in einen filtrierten Ring B, der mit den Filtrierungen verträglich ist, induziert natürlich einen Homomorphismus $\operatorname{gr} \phi : \operatorname{gr} A \to \operatorname{gr} B$ zwischen den assoziierten graduierten Ringen.

7.2.8. Analog definiert man **filtrierte Vektorräume** und **filtrierte Algebren**. Bei der Definition einer **filtrierten Ringalgebra** fordert man zusätzlich, daß die Filtrierung auch im Sinne von 7.2.2 mit der zugrundeliegenden Ringstruktur verträglich sein soll, daß also die 1 im Teilraum zu ≤ 0 enthalten ist.

Lemma 7.2.9. *Ist A ein Ring mit einer Hausdorff'schen ausschöpfenden Filtrierung, so gilt*

$$(\mathrm{gr} A) \text{ ist Integritätsring} \quad \Rightarrow \quad A \text{ ist Integritätsring}$$

Beweis. In der Tat, seien $a, b \in A \backslash 0$ gegeben. Sind r, s minimal mit $a \in A^{\leq r}$, $b \in A^{\leq s}$, so sind auch die Bilder $\bar{a} \in A^{\leq r}/A^{\leq r-1}$ und $\bar{b} \in A^{\leq s}/A^{\leq s-1}$ von Null verschieden. Ist $\mathrm{gr}\, A$ ein Integritätsring, so folgt $\bar{a}\bar{b} \neq 0$. Dies Produkt ist aber die Nebenklasse von ab in $A^{\leq r+s}/A^{\leq r+s-1}$, und wenn schon die Nebenklasse von ab nicht verschwindet, so ist erst recht ab selbst von Null verschieden. □

Proposition* 7.2.10. *Ist A ein filtrierter Ring und M ein filtrierter A-Modul mit einer von Null kommenden und ausschöpfenden Filtrierung, so ist mit $\mathrm{gr} M$ auch M selbst endlich erzeugt und es gilt sogar*

$$(\mathrm{gr} M) \text{ noethersch über } (\mathrm{gr} A) \quad \Rightarrow \quad M \text{ noethersch über } A$$

7.2.11. Es reicht nicht, die Filtrierung auf M Hausdorff anzunehmen, wie das Beispiel des $\mathbb{C}[X]$-Moduls $\mathbb{C}[\![X]\!]$ zeigt, mit der Filtrierung beider Strukturen durch die von den verschiedenen X^r erzeugten Ideale.

Beweis. Ist der assoziierte graduierte Modul $\mathrm{gr} M$ endlich erzeugt, so finden wir dafür auch ein endliches Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Wählen wir Urbilder dieser Elemente in M, so erzeugen sie über A einen Untermodul $N \subset M$ mit $\mathrm{gr} N \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr} M$. Mit 7.1.15 folgt daraus hinwiederum $\mathrm{gr}(M/N) = 0$ und mit unseren Voraussetzungen an die Filtrierung dann $M/N = 0$, als da heißt unsere Urbilder erzeugen bereits M. Ist schließlich $\mathrm{gr} M$ noethersch, so ist für jeden Untermodul $N \subset M$ mit der induzierten Filtrierung der assoziierte Graduierte $\mathrm{gr} N$ endlich erzeugt als Untermodul von $\mathrm{gr} M$, und dann ist auch N selbst endlich erzeugt nach dem, was wir bereits bewiesen haben. □

Korollar* 7.2.12. *Ist A ein filtrierter Ring mit einer von Null kommenden und ausschöpfenden Filtrierung und ist $\mathrm{gr} A$ noethersch, so ist A noethersch.*

Beweis. Noethersch bedeutet ja für Ringe noethersch als Linksmodul und als Rechtsmodul über sich selbst. Das Korollar folgt damit offensichtlich aus der vorhergehenden Proposition 7.2.10. □

7.3 Dimensionstheorie lokaler noetherscher Kringe

Definition 7.3.1. Gegeben ein Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ bilden seine Potenzen $\mathfrak{a}^n$ eine absteigende Filtrierung des Rings A, mit der Konvention $\mathfrak{a}^n = A$ für $n \leq 0$. Den assoziierten graduierten Ring notieren wir

$$\operatorname{gr}_{\mathfrak{a}} A := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i / \mathfrak{a}^{i+1} = A/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \oplus \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^3 \oplus \ldots$$

7.3.2. Gegeben ein noetherscher Kring A und $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}}$ maximal ist $A/\mathfrak{q}$ von endlicher Länge. In der Tat ist ja dann $A/\mathfrak{q}$ ein Kring der Krulldimension Null und wir können 5.9.5 anwenden, oder auch den hier einzig relevanten Teil des Beweises erinnern und das Bild von $\sqrt{\mathfrak{q}}$ mit $\mathfrak{m} \subset A/\mathfrak{q}$ notieren und beachten, daß die Subquotienten der Filtrierung $A/\mathfrak{q} \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{m}^r$ endliche Länge haben und daß gilt $\mathfrak{m}^r = 0$ für $r \gg 0$.

Satz 7.3.3 (Hilbertpolynome im Fall lokaler noetherscher Kringe). *Seien A ein noetherscher lokaler Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}}$ dem maximalen Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Polynom $P = \mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}} \in \mathbb{Q}[t]$, das für große i die Länge von $M/\mathfrak{q}^i M$ berechnet, in Formeln $\mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) = P(i)$ für $i \gg 0$;*

2. *Der Grad $\mathrm{d}_{\mathfrak{q}}(M)$ dieses Polynoms ist beschränkt durch die Kardinalität jedes Erzeugendensystems von $\mathfrak{q}$;*

3. *Für $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ das maximale Ideal von A haben $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}}$ und $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{m}}$ denselben Grad. Wir nennen ihn die* **Hilbert-Dimension von** *M und notieren ihn*

$$\operatorname{hdim}_A M = \operatorname{hdim} M$$

Ergänzung 7.3.4. Die Hilbertdimension eines endlich erzeugten Moduls M über einem lokalen noetherschen Kring $(A, \mathfrak{m})$ im Sinne des vorhergehenden Satzes und die Hilbertdimension eines endlich erzeugten graduierten Moduls über einem Polynomring im Sinne von 6.9.4 sind mithin verknüpft durch die Beziehung $\operatorname{hdim}(M) = \operatorname{hdim}(\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} M)$. Hilbertdimension $-\infty$ hat nur der Nullmodul, in Formeln

$$\operatorname{hdim}(M) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad M = 0$$

Hilbertdimension Null haben genau alle von Null verschiedenen A-Moduln endlicher Länge.

Beweis. Für $k := A/\mathfrak{q}$ und $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}$ erhalten wir durch $X_i \to \bar{x}_i$ eine Surjektion $k[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow \operatorname{gr}_{\mathfrak{q}} A$. Die ersten beiden

Behauptungen folgen damit aus dem Satz über das Hilbertpolynom 6.9.4 oder eigentlich und genauer seiner Erweiterung 6.9.5. Die dritte Aussage folgt, da es l gibt mit $\mathfrak{m}^l \subset \mathfrak{q}$ und da folglich gilt $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}}(i) \geq \mathrm{P}_M^{\mathfrak{m}}(i)$ sowie $\mathrm{P}_M^{\mathfrak{m}}(li) \geq \mathrm{P}_M^{\mathfrak{q}}(i)$ für $i \gg 0$. □

Satz 7.3.5 (Hilbertdimension der Kokerne injektiver Endomorphismen). *Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter von Null verschiedener A-Modul. Ist $f : M \hookrightarrow M$ ein injektiver Endomorphismus, so gilt*

$$\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) < \operatorname{hdim} M$$

7.3.6. Der Beweis dieses zentralen Resultats braucht einige Vorbereitungen und wird erst im Anschluß an den Beweis von 7.3.11 gegeben. Man bemerke den Kontrast in der Schwierigkeit zwischen dieser Aussage und ihrem graduierten Analogon 6.9.10, das Ihnen als Übung aufgegeben war.

Definition 7.3.7. Seien A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Eine Filtrierung eines A-Moduls M heißt **$\mathfrak{a}$-stabil**, wenn sie (1) bei M endet, wenn sie (2) mit der Filtrierung von A durch die $\mathfrak{a}^n$ verträglich ist, in Formeln $\mathfrak{a}M^{\geq i} \subset M^{\geq i+1}$ für alle i, und wenn es (3) ein d gibt derart, daß für alle $i \geq d$ sogar gilt $\mathfrak{a}M^{\geq i} = M^{\geq i+1}$.

Lemma 7.3.8 (Vergleich stabiler Filtrierungen). *Gegeben ein Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und ein A-Modul M sind je zwei $\mathfrak{a}$-stabile Filtrierungen Ω und Γ auf M in der Weise vergleichbar, daß es c gibt mit $\Gamma^{\geq i+c}M \subset \Omega^{\geq i}M$ für alle i.*

Beweis. Es reicht, das unter der Annahme zu zeigen, daß eine unserer Filtrierungen die offensichtliche Filtrierung durch die $\mathfrak{a}^i M$ ist. Wir können also unsere Notation vereinfachen und die andere Filtrierung $M^{\geq i}$ notieren. Nach Annahme gibt es ein c mit $M = M^{\geq -c}$ und dann haben wir notwendig $\mathfrak{a}^i M \subset M^{\geq -c+i}$ für alle i. Nach Annahme gibt es aber auch ein d mit $M^{\geq i+d} = \mathfrak{a}^i M^{\geq d}$ für alle $i \geq 0$ und somit $M^{\geq i+d} \subset \mathfrak{a}^i M$ für alle i. □

Proposition 7.3.9 (Von stabilen Filtrierungen induzierte Filtrierungen). *Seien A ein noetherscher Kring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. So ist die von einer $\mathfrak{a}$-stabilen Filtrierung von M auf einem Untermodul $N \subset M$ induzierte Filtrierung auch selbst wieder $\mathfrak{a}$-stabil.*

Ergänzung 7.3.10. Dasselbe gilt mit demselben Beweis für nicht notwendig kommutative Ringe A, wenn wir zusätzlich annehmen, daß der Reesring $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n$ noethersch ist. Insbesondere gilt es für $A := \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ die Einhüllende einer endlichdimensionalen Liealgebra über einem Körper k und $\mathfrak{a} := \ker \tilde{\chi}$ der Kern des von einem Charakter $\chi : \mathfrak{n} \to k$ induzierten Ringalgebrenhomomorphismus $\tilde{\chi} : \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \to k$.

Beweis. Wir erinnern aus dem Beweis von 4.6.13 die Konstruktion des Reesrings $\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n$ und den Nachweis, daß dieser Ring im Fall eines Ideals $\mathfrak{a}$ eines noetherschen Krings wieder noethersch ist. Es ist leicht zu sehen, wie $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^{\geq n}$ im Fall einer mit der Filtrierung von A durch die $\mathfrak{a}^i$ verträglichen Filtrierung von M ein Modul über dem Reesring wird, und daß dieser Modul im Fall einer $\mathfrak{a}$-stabilen Filtrierung von M sogar endlich erzeugt alias noethersch sein muß. Dasselbe folgt für den zu seinem Untermodul mit der induzierten Filtrierung $N^{\geq n} := N \cap M^{\geq n}$ gebildeten Modul $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N^{\geq n}$ über dem Reesring. Daraus, daß dieser Modul endlich erzeugt ist, folgt dann, daß die induzierte Filtrierung auch $\mathfrak{a}$-stabil ist: Ist genauer g der größte Grad für ein Element eines homogenen Erzeugendensystems von $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N^{\geq n}$ über dem Reesring, so folgt $\mathfrak{a}N^{\geq i} = N^{\geq i+1}$ für alle $i \geq g$. □

7.3.11 (**Multiplizitäten im Fall lokaler noetherscher Kringe**). Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ und M ein endlich erzeugter A-Modul. Für alle $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\}$ erklären wir im folgenden einen Wert $\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$. Für $d \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q},A}(M) = \operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(M) := \lim_{i\to\infty} \mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) d!/i^d$$

und folgern aus der Existenz der Hilbertpolynoms wie im graduierten Fall 6.9.7, daß dieser Grenzwert stets in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ existiert. Für $d = -\infty$ vereinbaren wir ergänzend $\operatorname{mult}^{-\infty}_{\mathfrak{q}}(M) = 0$ falls $M = 0$ und $\operatorname{mult}^{-\infty}_{\mathfrak{q}}(M) = \infty$ sonst. Für M von der Hilbertdimension $h = \operatorname{hdim} M$ mit a_h dem Leitkoeffizienten des Hilbertpolynoms $\mathrm{P}^{\mathfrak{q}}_M$ von M finden wir dann

$$\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(M) = \begin{cases} 0 & d > h; \\ h! a_h & d = h \geq 0; \\ 0 & d = h = -\infty; \\ \infty & d < h. \end{cases}$$

Wir nennen unser $\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(M) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die **d-$\mathfrak{q}$-Multiplizität von M**. Mit diesen Konventionen haben wir stets

$$\operatorname{mult}^0_{\mathfrak{q}}(M) = \operatorname{Länge}(M)$$

Lassen wir in unserer Notation $\mathfrak{q}$ weg, so meinen wir $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$. Lassen wir den oberen Index d weg, so meinen wir $d = \operatorname{hdim}(M)$. Die **Multiplizität von** M erklären wir insbesondere als

$$\operatorname{mult}(M) := \operatorname{mult}^d_{\mathfrak{m}}(M)$$

für $d = \operatorname{hdim}(M)$. Die Multiplizität eines lokalen noetherschen Krings A als A-Modul heißt die **Multiplizität von** A. Ist speziell (X, x) eine bepunktete Varietät, so setzen wir

$$\operatorname{mult}_x(X) := \operatorname{mult} \mathcal{O}_{X,x}$$

und nennen diese Zahl die **Multiplizität von X an der Stelle** x.

7.3.12 (**Permanenzen von Multiplizität und Hilbertdimension**). Ist A ein lokaler noetherscher Kring und B ein von Null verschiedener Quotient von A und M ein B-Modul, so stimmen die Multiplizitäten von M als B-Modul und die Hilbertdimension offensichtlich überein mit den Multiplizitäten und der Hilbertdimension von M als A-Modul, in Bezug auf die maximalen Ideale ebenso wie in Bezug auf ein allgemeines Ideal in B mit maximalem Radikal und dessen Urbild, in Formeln $\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q},A}(M) = \operatorname{mult}^d_{\bar{\mathfrak{q}},B}(M)$ und $\operatorname{hdim}_A(M) = \operatorname{hdim}_B(M)$.

Proposition 7.3.13 (Additivität der Multiplizitäten im Fall lokaler Kringe). *Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring, $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ maximal und $N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Q$ eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln. So gilt $\operatorname{hdim}(M) = \max(\operatorname{hdim}(N), \operatorname{hdim}(Q))$ für die Hilbertdimensionen und für alle $d \in \mathbb{N} \sqcup \{-\infty\}$ haben wir*

$$\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(M) = \operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(N) + \operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(Q)$$

Beweis. Wir betrachten das Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc} N \cap \mathfrak{q}^i M & \hookrightarrow & \mathfrak{q}^i M & \twoheadrightarrow & \mathfrak{q}^i Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N/(N \cap \mathfrak{q}^i M) & \hookrightarrow & M/\mathfrak{q}^i M & \twoheadrightarrow & Q/\mathfrak{q}^i Q \end{array}$$

Seine beiden oberen Zeilen sind exakt, also nach dem Neunerlemma auch die untere Zeile. Sie liefert die Relation

$$\mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) = \mathrm{l}(N/(N \cap \mathfrak{q}^i M)) + \mathrm{l}(Q/\mathfrak{q}^i Q)$$

Nun bilden jedoch die $N \cap \mathfrak{q}^i M$ nach 7.3.9 auch eine $\mathfrak{q}$-stabile Filtrierung von N, folglich gibt es ein Polynom $\tilde{\mathrm{P}}_N(t)$ mit $\mathrm{l}(N/(N \cap \mathfrak{q}^i M)) = \tilde{\mathrm{P}}_N(i)$ für $i \gg 0$. Hier und im folgenden lassen wir der Übersichtlichkeit halber das $\mathfrak{q}$ aus der Notation weg. Es folgt die Identität von Polynomen

$$\mathrm{P}_M(t) = \tilde{\mathrm{P}}_N(t) + \mathrm{P}_Q(t)$$

Nach 7.3.8 gibt es jedoch c mit $\mathrm{P}_N(i + c) \geq \tilde{\mathrm{P}}_N(i) \geq \mathrm{P}_N(i - c)$ für $i \gg 0$, folglich haben P_N und $\tilde{\mathrm{P}}_N$ denselben Grad und, wenn sie nicht Null sind, denselben Leitkoeffizienten. Daraus folgt unsere Behauptung dann unmittelbar. □

Beweis von Satz 7.3.5. Seien A ein lokaler noetherscher Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter von Null verschiedener A-Modul. Gegeben ein injektiver Homomorphismus $f : M \hookrightarrow M$ behauptet unser Satz 7.3.5 die strikte Ungleichung

$\operatorname{hdim}(\operatorname{cok} f) < \operatorname{hdim} M$. Um sie zu zeigen, betrachten wir die kurze exakte Sequenz $M \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \operatorname{cok} f$. Wegen $M \neq 0$ haben wir $d = \operatorname{hdim} M \geq 0$. So folgt aus 7.3.13 sofort $\operatorname{mult}^d_{\mathfrak{m}}(\operatorname{cok} f) = 0$ und damit die Behauptung. □

Satz* 7.3.14 (Multiplizitäten der Kokerne von Multiplikationen). *Seien ein lokaler noetherscher Kring* $(A, \mathfrak{m})$ *und ein endlich erzeugter* A*-Modul* M *gegeben. Für* $d \geq 1$ *und* $\mathfrak{q} \subset A$ *ein Ideal mit* $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ *und* $x \in \mathfrak{q}^r$ *gilt dann*

$$\operatorname{mult}^{d-1}_{\mathfrak{q}}(M/xM) \geq r \operatorname{mult}^d_{\mathfrak{q}}(M)$$

7.3.15. Wir verwenden hier unsere allgemeine Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

7.3.16. Unser Satz liefert insbesondere für alle $x \in \mathfrak{m}$ und M von positiver Hilbertdimension die Abschätzung $\operatorname{hdim}(M/xM) \geq \operatorname{hdim}(M) - 1$. Wissen wir zusätzlich, daß die Multiplikation mit x eine Injektion $(x\cdot) : M \hookrightarrow M$ induziert, so erhalten wir zusammen mit der umgekehrten Abschätzung 7.3.5 sogar die Identität

$$\operatorname{hdim}(M/xM) = \operatorname{hdim}(M) - 1$$

Beweis. Für den Untermodul $N := xM$ finden wir $\mathfrak{q}^i xM \subset xM \cap \mathfrak{q}^{i+r}M$ und folglich die zweite Unleichung der Kette

$$\mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^i M) \geq \mathrm{l}(xM/\mathfrak{q}^i xM) \geq \mathrm{l}(xM/(xM \cap \mathfrak{q}^{i+r}M))$$

Die erste dieser Ungleichungen ist klar, weil die Multiplikation mit x eine Surjektion des ersten Quotienten auf den zweiten induziert. In den Notationen des Beweises von 7.3.13 haben wir für $i \geq 0$ also $\mathrm{P}_M(i) \geq \tilde{\mathrm{P}}_{xM}(i + r)$ und aus unserer Identität von Polynomen $\mathrm{P}_M(t) = \tilde{\mathrm{P}}_{xM}(t) + \mathrm{P}_{M/xM}(t)$ folgt

$$\mathrm{P}_{M/xM}(i) = \mathrm{P}_M(i) - \tilde{\mathrm{P}}_{xM}(i) \geq \mathrm{P}_M(i) - \mathrm{P}_M(i - r)$$

für $i \geq r$. Jetzt unterscheiden wir den Fall $M = 0$, in dem unsere Behauptung eh klar ist, und den Fall $M \neq 0$, was wir hinfort annehmen. Ist dann $a_d t^d$ der Leitterm von $\mathrm{P}_M(t)$, so ergibt sich der Leitterm von $\mathrm{P}_M(t) - \mathrm{P}_M(t - r)$ zu $r d a_d t^{d-1}$ und unsere Behauptung folgt leicht im Fall $r \neq 0$. Der Fall $r = 0$ ist aber in unseren Konventionen eh unproblematisch, da alle unsere Multiplizitäten ≥ 0 sind. □

Definition 7.3.17. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring heißt die kleinstmögliche Anzahl von Elementen unseres Krings, deren Idealerzeugnis das maximale Ideal unseres Krings zum Radikal hat, seine **Einbettungsdimension**.

7.3.18 (**Geometrische Bedeutung der Einbettungsdimension**). Im geometrischen Fall des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ einer affinen k-Varietät ist die Einbettungsdimension das kleinste n derart, daß es eine offene Umgebung U von x und einen Morphismus $U \to k^n$ gibt, für den x ein isolierter Punkt seiner Faser ist.

Satz 7.3.19 (Hauptsatz zur Dimension lokaler noetherscher Kringe). *Gegeben ein lokaler noetherscher Kring stimmen seine Hilbertdimension, seine Krulldimension und seine Einbettungsdimension überein.*

7.3.20. Speziell hat jeder lokale noethersche Kring endliche Krulldimension, ja die Zahl der für sein maximales Ideal benötigten Erzeuger ist eine obere Schranke für seine Krulldimension.

Beweis. Sei A unser lokaler noetherscher Kring. Wir notieren $\delta(A)$ die Einbettungsdimension. Zum Beweis zeigen wir $\delta(A) \leq \operatorname{kdim}(A) \leq \operatorname{hdim}(A) \leq \delta(A)$. Die Abschätzung $\operatorname{hdim}(A) \leq \delta(A)$ folgt unmittelbar aus unserem Satz 7.3.3 über Hilbertpolynome lokaler noetherscher Kringe. Die Abschätzung $\operatorname{kdim}(A) \leq \operatorname{hdim}(A)$ zeigen wir durch Induktion über $\operatorname{hdim}(A)$. Im Fall $\operatorname{hdim}(A) = 0$ stagniert die Folge der Ideale $\mathfrak{m}^n$ und nach dem Lemma von Nakayama 4.6.12 stagniert sie bei Null. Folglich umfaßt jedes Primideal unser $\mathfrak{m}$ und damit ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal und die Krulldimension ist Null. Für den Induktionsschritt sei

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l$$

eine Primidealkette in A. Im Integritätsbereich $\bar{A} := A/\mathfrak{p}_0$ betrachten wir das Bild $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subset \bar{A}$ von $\mathfrak{p}_1$ und wählen $x \in \bar{\mathfrak{p}}_1 \backslash 0$. Die kurze exakte Sequenz

$$\bar{A} \overset{x\cdot}{\hookrightarrow} \bar{A} \twoheadrightarrow \bar{A}/\bar{A}x$$

zeigt mit 7.3.5 sofort $\operatorname{hdim}(\bar{A}/\bar{A}x) < \operatorname{hdim} \bar{A}$, und $\operatorname{hdim} \bar{A} \leq \operatorname{hdim} A$ ist eh klar. Aus der Induktionsannahme folgt so, dass die Primidealkette $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \bar{\mathfrak{p}}_l$ in $\bar{A}/\bar{A}x$ der Bilder der $\mathfrak{p}_i$ in $\bar{A}/\bar{A}x$ höchstens die Länge $l - 1 \leq \operatorname{hdim} A - 1$ haben kann. Es bleibt $\delta(A) \leq \operatorname{kdim} A$ zu zeigen. Wir argumentieren mit Induktion über $\delta(A)$. Im Fall $\delta(A) = 0$ ist $\mathfrak{m} = \sqrt{0}$ das Nilradikal und wir finden $\operatorname{kdim} A = 0$. Gilt sonst $\delta(A) > 0$, so ist $\mathfrak{m}$ kein minimales Primideal von A und nach 4.5.24 gibt es nur endlich viele minimale Primideale in A und nach 4.2.14 können sie $\mathfrak{m}$ nicht überdecken. Es gibt also ein Element $x \in \mathfrak{m}$, das in keinem minimalen Primideal enthalten ist. Wir setzen $\bar{A} := A/Ax$ und finden $\delta(\bar{A}) = \delta(A) - 1$ und, da nach 4.5.10 jedes Primideal stets ein minimales Primideal umfaßt, auch $\operatorname{kdim} \bar{A} \leq \operatorname{kdim} A - 1$. Die Behauptung folgt mit vollständiger Induktion. □

Korollar 7.3.21 (Abschätzung für die Krulldimension lokaler Kringe). *Gegeben ein lokaler noetherscher Kring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ gilt stets*

$$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq \operatorname{kdim} A$$

Beweis. Jedes Repräsentantensystem eines Erzeugendensystem des $A/\mathfrak{m}$-Vektorraums $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ erzeugt nach Nakayama bereits das Ideal $\mathfrak{m}$ als Ideal von A. Damit erweist sich unsere Behauptung als Konsequenz der Aussage $\delta(A) = \operatorname{kdim} A$ aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 7.3.19. □

Korollar 7.3.22 (Verallgemeinerter Krull'scher Hauptidealsatz). *Gegeben ein noetherscher Kring R gilt für die Höhe jedes Primideals $\mathfrak{p} \subset R$, das vorgegebene Elemente $f_1, \ldots, f_s$ von R enthält und minimal ist unter allen Primidealen mit dieser Eigenschaft, die Abschätzung $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$.*

Beweis. Im lokalen Kring $R_\mathfrak{p}$ muß $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ das Radikal des von $f_1, \ldots, f_s$ erzeugten Ideals sein. Damit erweist sich unsere Behauptung als Konsequenz der Aussage $\delta(A) = \operatorname{kdim} A$ aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 7.3.19. □

Definition 7.3.23. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring $(A, \mathfrak{m})$ versteht man unter einem **Parametersystem von** A eine Familie $x_1, \ldots, x_d$ von $d = \operatorname{kdim} A$ Elementen des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ mit der Eigenschaft, daß das Radikal des von ihnen erzeugten Ideals gerade das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ selbst ist. Die Existenz solcher Parametersysteme folgt aus dem Hauptsatz der Dimensionstheorie 7.3.19.

Proposition 7.3.24 (Parametersysteme sind algebraisch unabhängig). *Besitzt ein lokaler noetherscher Kring $(A, \mathfrak{m})$ einen Unterkörper $k \subset A$ mit $k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ unter der natürlichen Abbildung und ist $x_1, \ldots, x_d$ ein Parametersystem von A, so sind die x_i algebraisch unabhängig über k.*

Beweis. Ist $\mathfrak{q}$ das Erzeugnis der x_i, so liefern die offensichtlichen Abbildungen Homomorphismen

$$k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow (A/\mathfrak{q})[X_1, \ldots, X_d] \twoheadrightarrow \operatorname{gr}_\mathfrak{q} A$$

von graduierten Ringen. Wäre die Komposition nicht injektiv, so gäbe es ein von Null verschiedenes homogenes Polynom in ihrem Kern. Dies Element müßte auch in der Mitte kürzbar sein, da die erste Abbildung offensichtlich von Null verschiedene Polynome auf kürzbare Elemente abbildet, und mit Übung 6.9.10 über Kokerne homogener Selbstinjektionen folgte $\operatorname{hdim} A < d$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Also liefert die Komposition eine Injektion $k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow \operatorname{gr}_\mathfrak{q} A$. Mit Übung 7.1.16 folgt, daß die offensichtliche Abbildung bereits eine Injektion $k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow A$ gewesen sein muß. □

Übungen

Übung 7.3.25. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben $I \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Ideal mit nichtleerer projektiver Nullstellenmenge $\mathcal{Z}^*(I) \neq \emptyset$ alias unendlicher Kodimension ist die Hilbertdimension des Restklassenrings genau um Eins größer als die Krulldimension der projektiven Nullstellenmenge, in Formeln

$$\operatorname{hdim}(k[T_0, \ldots, T_n]/I) = \operatorname{kdim} \mathcal{Z}^*(I) + 1$$

Hinweis: Hauptsatz 7.3.19 zur Dimension lokaler noetherscher Kringe.

Übung 7.3.26. Gegeben $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Kring der Dimension d und Elemente $f_1, \ldots, f_d \in A$ mit $f_i \in \mathfrak{m}^{r(i)}$ gilt die Abschätzung

$$\mathrm{l}(A/\langle f_1, \ldots, f_d \rangle) \geq r(1) \ldots r(d) \operatorname{mult}(A)$$

Hinweis: 7.3.14 und vollständige Induktion und Interpretation der Länge als Multiplizität.

Übung 7.3.27. Gegeben ein lokaler noetherscher Kring A und ein Parametersystem $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ zeige man für jedes s mit $0 \leq s \leq d$ für die Krulldimension des Quotienten nach einem Teil der Parameter die Identität

$$\operatorname{kdim}(A/\langle x_1, \ldots, x_s \rangle) = d - s$$

Hinweis: Für jeden lokalen noetherschen Kring B gilt $\operatorname{kdim} B = \delta(B)$.

7.4 Glattheit und Regularität

Definition 7.4.1. $(k = \bar{k})$. Eine algebraische Teilmenge $X \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ heißt **glatt an der Stelle** $x \in X$, wenn es $f_1, \ldots f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ und eine Umgebung $U \overset{\circ}{\subset} k^n$ von x gibt derart, daß $X \cap U = \mathcal{Z}(f_1, \ldots f_r) \cap U$ die simultane Nullstellenmenge der f_i in U ist und daß die Gradienten der f_i bei x linear unabhängig sind.

7.4.2. Mit **Gradienten** meinen wir hier wie in der Analysis die Vektoren

$$(\operatorname{grad} f)(x) := ((\partial f / \partial T_\nu)(x)) \in k^n$$

Es wird erst später klar werden, daß die obige Bedingung nur von der bepunkteten affinen Varietät (X, x) und nicht von ihrer Einbettung in einen k^n abhängt. Wenn ich im Verlauf der folgenden Argumentation besonders betonen will, daß die Bedingung wie oben in Bezug auf eine explizit vorgegebene Einbettung verstanden werden soll, nenne ich X **extrinsisch glatt an der Stelle** x. Es ist klar und die Aussage von Übung 7.4.27, daß die extrinsisch glatten Punkte von $X \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ eine offene Teilmenge von X bilden.

Vorschau 7.4.3 (**Jede Varietät ist generisch glatt**). Was an dieser Stelle fehlt, ist der Nachweis, daß die glatten Stellen sogar eine dichte offene Teilmenge bilden. Das wird erst in 7.5.5 bewiesen, wobei wir im Fall eines Grundkörpers positiver Charakteristik zusätzlich Resultate aus [AAG] benötigen.

7.4.4 (**Generische Glattheit von Hyperflächen**). $(k = \bar{k})$. Für ebene Kurven $C \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^2$ können wir auch hier schon einsehen, daß ihre glatten Punkte eine offene dichte Teilmenge bilden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir sie ja irreduzibel annehmen, also $C = \mathcal{Z}(f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \in k[X, Y]$.

Für so ein Polynom können auch in positiver Charakteristik $p > 0$ die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ nicht beide identisch verschwinden, sonst gäbe es ein Polynom g mit $f(X,Y) = g(X^p, Y^p)$ und mit Ziehen der p-ten Wurzeln aus den Koeffizienten von g auch ein h mit $h^p = f$ im Widerspruch zur Irreduzibilität. Gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\partial_x f \neq 0$, so sind f und $\partial_x f$ teilerfremd und haben folglich höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen. In derselben Weise zeigt man, daß in jeder Hyperfläche $X \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\; k^n$ die glatten Punkte dicht liegen.

7.4.5 (**Beziehung zum Begriff einer Mannigfaltigkeit**). $(k = \bar{k})$. Die Motivation für die Begiffsbildung „glatter" algebraischer Teilmengen kommt von der Beschreibung [AN2] 14.4.2.21 von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ als Urbilder her. Die verschiedenen äquivalenten Beschreibungen von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ als Bilder [AN2] 14.4.4.1 sowie als „lokal plättbare Teilmengen" [AN2] 14.4.2.6 haben in der algebraischen Geometrie keine unmittelbaren Analoga, da der Satz über implizite Funktionen [AN2] 14.4.3.1 im Fall der Zariskitopologie für Morphismen von Varietäten nicht mehr gilt. Bereits in einer Variablen gilt ja der Satz über die Umkehrabbildung in dieser Situation nicht mehr, wie das Beispiel der Abbildung $k \to k$, $x \mapsto x^2$ zeigt. Später mögen Sie lernen, wie es gelingt, diese Schwierigkeiten durch die Einführung der sogenannten „étalen Topologie", die allerdings im engeren Sinne unserer Definition gar keine Topologie ist, sozusagen „wegzudefinieren".

7.4.6 (**Diskussion von Varianten der Definition**). $(k = \bar{k})$. In der Literatur ist auch eine andere Definition des Begriffs einer extrinsisch glatten Stelle gebräuchlich. Gegeben $X \subset\!\!\!\!\!\!\mathbb{A}\; k^n$ heißt danach eine Stelle $x \in X$ glatt, wenn der von den Gradienten bei x der Funktionen $f \in \mathcal{I}(X)$, als da heißt von den Vektoren $(\operatorname{grad} f)(x) := ((\partial f/\partial T_i)(x)) \in k^n$ für $f \in \mathcal{I}(X)$ aufgespannte Teilraum die Dimension $n - \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x}$ hat. Die Äquivalenz zu unserer Definition 7.4.1 zeigen wir in 7.4.14. Ich ziehe unsere Definition 7.4.1 vor, weil ich sie anschaulicher finde. Insbesondere zeigt unsere Definition unmittelbar, daß die glatten Punkte einer äqui-d-dimensionalen algebraischen Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ eine glatte reell $2d$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n$ bilden.

7.4.7 (**Intrinsische Natur der Glattheit**). $(k = \bar{k})$. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß unsere Definition glatter Punkte in der Weise „intrinsisch" ist, daß gegeben ein Isomorphismus $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ in der Kategorie 3.2.6 der algebraischen Teilmengen irgendwelcher k^n die algebraische Teilmenge X glatt ist bei $x \in X$ genau dann, wenn die algebraische Teilmenge Y glatt ist bei $\varphi(x) \in Y$.

Definition 7.4.8. Ein lokaler Kring A heißt **regulär**, wenn er noethersch ist und wenn für sein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ gilt

$$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \operatorname{kdim} A$$

Eine Familie von Elementen $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$, deren Nebenklassen eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden, heißt dann ein **reguläres Parametersystem von** A.

Beispiel 7.4.9. Für alle Primzahlen p ist die Lokalisierung $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ an dem von p erzeugten Primideal ein regulärer lokaler Kring. Für jeden Körper k und jeden Punkt $x \in k^n$ ist der lokalisierte Polynomring $k[T_1, \ldots, T_n]_{\mathcal{I}(x)}$ regulär.

Satz 7.4.10 (Eigenschaften regulärer lokaler Kringe). *Jeder reguläre lokale Kring ist ein Integritätsring und der assoziierte graduierte Ring zu seiner Filtrierung durch die Potenzen des maximalen Ideals ist ein Polynomring.*

Beweis. Für jeden regulären lokalen Kring $(A, \mathfrak{m})$ der Dimension d und jedes reguläre Parametersystem $x_1, \ldots, x_d$ muß die offensichtliche durch $X_i \mapsto \bar{x}_i$ gegebene Surjektion ein Isomorphismus

$$(A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_d] \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$$

sein, denn sonst folgte wie beim Beweis von 7.3.24 aus Übung 6.9.10 zu Kokernen homogener Selbstinjektionen bereits die Abschätzung $\operatorname{hdim} A < d$. Die Filtrierung durch die $\mathfrak{m}^i$ ist jedoch Hausdorff nach dem Durchschnittssatz 4.6.14. Da der assoziierte graduierte Ring ein Integritätsring ist, folgt dasselbe mit 7.2.9 für A selber. □

Satz 7.4.11 (Reguläre Quotienten regulärer lokaler Kringe). *Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Kring und $I \subset A$ ein Ideal. So sind gleichbedeutend:*

1. *Der Quotient A/I nach unserem Ideal ist ein regulärer lokaler Kring;*

2. *Unser Ideal I wird von einer Teilmenge eines regulären Parametersystems des regulären lokalen Krings A erzeugt.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Ist A/I lokal, so folgt $A \neq I$ und mithin $I \subset \mathfrak{m}$. Wir vereinbaren die Abkürzungen $\bar{A} := A/I$ und $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/I$ und betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I \cap \mathfrak{m}^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathfrak{m}^2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \bar{\mathfrak{m}}^2 \arrow[d, hook] \\
I \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{m} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \bar{\mathfrak{m}} \arrow[d, two heads] \\
I/(I \cap \mathfrak{m}^2) \arrow[r, hook] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r, two heads] & \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten, bei dem die Exaktheit der unteren Zeile aus dem Neunerlemma folgt. Sei d die Krulldimension von A und $\bar{d}$ die Krulldimension von $\bar{A}$ und $s = d - \bar{d}$. Wir finden sicher Elemente $f_1, \dots, f_s \in I$, deren Bilder den Kern in der unteren Zeile erzeugen. Für den Quotienten $\tilde{A} := A/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ nach dem von ihnen erzeugten Ideal mit seinem maximalen Ideal $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ erhalten wir dann $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \twoheadrightarrow \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 \twoheadrightarrow \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2$ und nach Wahl der f_i ist die Zweite dieser Abbildungen ein Isomorphismus und wir erhalten

$$\operatorname{kdim} \tilde{A} \leq \dim_{\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{m}}} \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 = \dim_{\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}} \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2 = \operatorname{kdim} \bar{A} \leq \operatorname{kdim} \tilde{A}$$

mit ersten Abschätzung nach Korollar 7.3.21 des Hauptsatzes der Dimensionstheorie und der letzten aufgrund der Surjektion $\tilde{A} \twoheadrightarrow \bar{A}$. Zusammen folgt, daß auch $\tilde{A}$ regulär ist und mithin nach 7.4.10 ein Integritätsbereich. Wäre der Kern von $\tilde{A} \twoheadrightarrow \bar{A}$ nicht Null, so müßte er ein Primideal ungleich Null sein und unsere Kringe könnten nicht dieselbe Krulldimension haben. Das zeigt $\tilde{A} \xrightarrow{\sim} \bar{A}$ und damit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

$2 \Rightarrow 1$. Sei $f_1, \dots, f_d \in \mathfrak{m}$ ein reguläres Parametersystem. Es gilt zu zeigen, daß für alle s auch $\bar{A} := A/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ein regulärer lokaler Kring ist. Nun liefert Übung 7.3.27 uns die Identität $\operatorname{kdim}(\bar{A}) = \operatorname{kdim}(A) - s$ und die Identität $\dim_{\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - s$ ist leicht zu sehen. □

Definition 7.4.12. Ein Punkt x einer algebraischen Varietät X heißt ein **regulärer Punkt von** X oder gleichbedeutend ein **glatter Punkt von** X, wenn der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der Funktionskeime bei x ein regulärer lokaler Kring ist. Ein Punkt, der nicht regulär ist, heißt **singulär**.

7.4.13. Ich erinnere daran, daß in unserer Terminologie Varietäten stets über einem algebraisch abgeschlossenen Körper definiert sind. Verallgemeinert man die Definitionen auf den Fall beliebiger Grundkörper, so ist das Analogon der extrinsischen Glattheit stärker als die lokale Regulärität, vergleiche 7.4.26.

Korollar 7.4.14 (Regularität und Glattheit). $(k = \bar{k})$. *Eine algebraische Teilmenge $X \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\; k^n$ ist genau dann extrinsisch glatt an einer Stelle $p \in X$, wenn der lokale Kring $\mathcal{O}_{X,p}$ regulär ist.*

7.4.15. Mit der in der Literatur üblichen Definition glatter Stellen, wie sie in 7.4.6 erklärt wird, ist dieses Korollar fast eine Tautologie. Wie in 7.4.6 ausgeführt wird, macht es die in der Literatur übliche Definition aber mühsam, die Brücke zur Analysis und damit zur Anschauung zu schlagen.

Beweis. Wir wenden Satz 7.4.11 über reguläre Quotienten regulärer lokaler Kringe an auf die Lokalisierung $A = \mathcal{O}_{k^n,p} = \mathcal{O}(k^n)_{\mathcal{I}(p)}$ des Polynomrings nach allen bei p nicht verschwindenden Polynomen und seinen Quotienten $\mathcal{O}_{X,p}$ nach der Lokalisierung $I := \mathcal{I}(X)_{\mathcal{I}(p)}$ des Verschwindungsideals von X. Das maximale

Ideal von $\mathcal{O}_{k^n,p}$ notieren wir $\mathfrak{m} \subset A = \mathcal{O}_{k^n,p}$. Das Auswerten $f \mapsto (\operatorname{grad} f)(p)$ des Gradienten an der Stelle p liefert einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} k^n$$

Ein reguläres Parametersystem von $\mathcal{O}_{k^n,p}$ ist folglich dasselbe wie ein System von Funktionskeimen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{k^n,p}$ mit $f_1(p) = \ldots = f_n(p) = 0$ derart, daß ihre Gradienten bei p eine Basis des k^n bilden. Ist $\mathcal{O}_{X,p} = A/I$ regulär, so kann I nach 7.4.11 erzeugt werden von einem Teil eines regulären Parametersystems, also von bei p verschwindenden Funktionskeimen mit linear unabhängigen Gradienten bei p. Beliebig gewählte Repräsentanten dieser Funktionskeime erzeugen dann auch $\mathcal{I}(X)_g$ für eine geeignet dazu gewählte Funktion $g \in k[T_1, \ldots, T_n]$ mit $g(p) \neq 0$. Damit ist X extrinsisch glatt bei p. Ist umgekehrt X extrinsisch glatt bei p, so gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}(k^n)$ mit bei p linear unabhängigen Gradienten und eine weitere reguläre Funktion $g \in \mathcal{O}(k^n)$ mit $g(p) \neq 0$ und

$$X \cap \{g \neq 0\} \quad = \quad \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_s) \cap \{g \neq 0\}$$

Die f_i müssen im lokalen Ring A bei p ein Primideal erzeugen, da der Quotient $A/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ nach 7.4.11 ein regulärer lokaler Ring und folglich nach 7.4.10 ein Integritätsring ist. Andererseits folgt aus unseren Annahmen $\mathcal{I}(X)_g = \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_g}$ in der Lokalisierung $\mathcal{O}(k^n)_g$. Da das Bilden des Radikals nach Übung 4.3.54 mit Lokalisierung vertauscht und da jedes Primideal sein eigenes Radikal ist, folgt

$$I = \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_s \rangle} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$$

Der Quotient von A/I ist nun isomorph zum lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ und damit ist dieser lokale Ring nach 7.4.11 regulär. □

Definition 7.4.16. Eine Varietät heißt **glatt**, wenn sie an jeder Stelle glatt ist.

Korollar 7.4.17 (Lokale Irreduzibilität bei glatten Stellen). *Ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ einer bepunkteten affinen Varietät (X, x) regulär, so geht durch den Punkt x nur genau eine irreduzible Komponente von X.*

7.4.18. Insbesondere ist jede glatte Varietät die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten.

Beweis. Ginge mehr als nur eine irreduzible Komponente von X durch den Punkt x, so hätte der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ mehr als nur ein minimales Primideal. Dann wäre er aber kein Integritätsbereich und mithin nach 7.4.10 auch nicht regulär. □

7.4.19 (**Schwierigkeiten mit lokalen Koordinaten**). Gegeben eine glatte Stelle x einer affinen k-Varietät X und ein reguläres Parametersystem $f_1, \ldots, f_d$ ihres lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ werden die Funktionen f_i bereits alle in einer offenen Umgebung $U \overset{\circ}{\subset} X$ von x definiert sein und folglich einen Morphismus $\varphi : U \to k^d$ liefern. Im Gegensatz zur analogen Situation im Fall differenzierbarer Mannigfaltigkeiten wird diese Abbildung jedoch im allgemeinen auf keiner Zariski-offenen Umgebung U von x injektiv sein, und das für jedes System lokaler Parameter. Es ist also im allgemeinen nicht möglich, im algebraischen Fall in der Zariskitopologie so etwas wie „lokale Koordinatensysteme“ zu finden.

7.4.20. Gegeben eine Varietät verstehen wir unter einem **System von Pseudokoordinaten** eine Familie von regulären Funktionen $f_1, \ldots, f_d$ mit der Eigenschaft, daß an jeder Stelle $x \in X$ die Funktionen $f_i - f_i(x)$ ein reguläres Parametersystem bilden. Mit den bis hierher erzielten äquivalenten extrinsischen und intrinsischen Beschreibungen glatter Punkte sieht man leicht ein, daß jedes reguläre Parametersystem an einem Punkt durch Restriktion von einem System von Pseudokoordinaten auf einer irreduziblen offenen affinen Umgebung von besagtem Punkt herkommt. Weiter ist klar, daß gegeben ein System von Pseudokoordinaten die Nullstellenmenge einer beliebigen Auswahl von d unserer Pseudokoordinaten stets glatt ist und jede irreduzible Komponente eine um d kleinere Dimension hat.

Satz 7.4.21 (Kodimension von Schnittmengen). *Gegeben irreduzible abgeschlossene Teilmengen $X, Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} W$ einer glatten äquidimensionalen Varietät W gilt für jede irreduzible Komponente Z ihres Schnitts $X \cap Y$ die Abschätzung*

$$\operatorname{kdim}(Z \subset W) \leq \operatorname{kdim}(X \subset W) + \operatorname{kdim}(Y \subset W)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß W irreduzibel und affin ist und daß es darauf ein System $f_1, \ldots, f_n$ von Pseudokoordinaten gibt. Offensichtlich bilden dann die Funktionen $f_i \boxtimes 1 - 1 \boxtimes f_i$ und $f_i \boxtimes 1$ ein System von Pseudokoordinaten auf $W \times W$. Betrachten wir den durch unsere Pseudokoordinaten gegebenen Morphismus $\varphi : W \to k^n$, so ist das Urbild der Diagonale unter $\varphi \times \varphi : W \times W \to k^n \times k^n$ glatt und äqui-n-dimensional als Nullstellenmenge der ersten n unserer Pseudokoordinaten. Mithin ist das Urbild der Diagonale die disjunkte Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten und die Diagonale $\Delta_W \overset{\mathrm{A}}{\subset} W \times W$ ist notwendig eine dieser Komponenten. Nun ist aber $X \cap Y$ isomorph zu $(X \times Y) \cap \Delta_W$ und damit isomorph zu einer irreduziblen Komponente der Nullstellenmenge der n Funktionen $f_i \boxtimes 1 - 1 \boxtimes f_i$ auf $X \times Y$. Damit folgt die Behauptung aus unserer Abschätzung 5.9.15. □

Satz 7.4.22. *Jeder reguläre lokale Kring ist ganz abgeschlossen.*

Vorschau 7.4.23. Man kann sogar zeigen, daß jeder reguläre lokale Kring faktoriell ist. Beweise findet man etwa in [Eis95], [dJ12]. Für die lokalen Ringe von Varietäten schreibe ich in 7.6.14 einen Beweis aus.

Beweis. Sei $(A, \mathfrak{m})$ unser regulärer lokaler Kring. Sei $x \in \mathrm{Quot} A$ ganz über A. Es gilt zu zeigen $x \in A$. Dazu schreiben wir $x = r/s$ mit $r, s \in A$ und $s \neq 0$. Da x ganz ist über A, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A[x] = A + Ax + \ldots + Ax^n$$

Wir folgern $s^n x^m \in A$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $r^m \in s^{m-n} A$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nehmen wir zusätzlich $r \neq 0$ an, so gibt es i maximal mit $r \in \mathfrak{m}^i$ und wir haben $0 \neq \bar{r} \in \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$. Ebenso gibt es j maximal mit $s \in \mathfrak{m}^j$ und wir haben $0 \neq \bar{s} \in \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$ und folgern, daß $\bar{s}^{m-n}$ für $m \geq n$ stets ein Teiler von $\bar{r}^m$ ist in $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$. Da dieser Ring jedoch nach 7.4.10 faktoriell ist, muß sogar $\bar{s}$ ein Teiler von $\bar{r}$ sein. Wir haben also $i \geq j$ und es gibt $a_1 \in \mathfrak{m}^{i-j} \subset A$ und $r_1 \in \mathfrak{m}^{i+1}$ mit

$$r = a_1 s + r_1$$

und das gilt sogar ohne die Annahme $r \neq 0$. Dann ist aber r_1/s auch wieder ganz über A und wir finden genauso $r_1 = a_2 s + r_2$ mit $a_2 \in A$ und $r_2 \in \mathfrak{m}^{i+2}$ und induktiv folgt

$$r \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} (As + \mathfrak{m}^{i+\nu})$$

Nach dem Durchschnittssatz von Krull 4.6.14, angewandt auf den Restklassenring A/As, folgt daraus aber sofort $r \in As$ alias $x \in A$. □

Satz* 7.4.24 (Differentielles Dominanzkriterium für affine Räume). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom und $X := k^n \backslash \mathcal{Z}(f)$ das Komplement seiner Nullstellenmenge und $\varphi : X \to k^m$ ein Morphismus. Induziert für einen Punkt $x \in X$ der Komorphismus eine Injektion $\mathfrak{m}_{\varphi(x)}/\mathfrak{m}^2_{\varphi(x)} \hookrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x$, so umfaßt $\varphi(X)$ eine offene Teilmenge von k^m.*

Vorschau 7.4.25. Dieses Kriterium ist insbesondere in der Theorie der Liealgebren hilfreich. Im weiteren Verlauf dieser Vorlesung spielt es dahingegen keine Rolle. In der Sprache der Differentiale aus [AAG] 3.1.1 besagt unserer Bedingung, daß das Differential bei x eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_y Y$ sein soll. Eine Variante in dieser Sprache und in größerer Allgemeinheit zeigen wir in [AAG] 3.1.31.

Beweis. Wir setzen $y := \varphi(x)$. Offensichtlich folgt aus unserer Annahme, daß unser Morphismus φ eine Injektion $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_y} \mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{X,x}$ der assozierten graduierten Ringe induziert. Da unsere Filtrierungen ausschöpfend und Hausdorff sind, folgt mit 7.1.16 die Injektivität $\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ des Komorphismus und unser Morphismus φ ist dominant. Unser Satz folgt damit aus Korollar 5.4.12 über Bilder von Morphismen. □

Vorschau 7.4.26 (**Regularität und Glattheit in größerer Allgemeinheit**). Arbeitet man nicht mehr über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ist das Analogon von Glattheit stärker als Regularität. Sei genauer k ein Kring. Ein Kringhomomorphismus $k \to A$ heißt **standardglatt**, wenn natürliche Zahlen $n \geq r \geq 0$ und Polynome $f_1, \dots f_r \in k[T_1, \dots, T_n]$ und ein Isomorphismus von k-Kringen

$$k[T_1, \dots, T_n]/\langle f_1, \dots f_r \rangle \xrightarrow{\sim} A$$

existieren derart, daß das Bild von $\det((\partial_j f_i)_{i,j=1}^r)$ in A eine Einheit ist. Ein Kringhomomorphismus $k \to A$ heißt **glatt**, wenn es Erzeuger $s, \dots, t$ des Einsideals von A gibt derart, daß die Lokalisierungen $A_s, \dots, A_t$ jeweils standardglatt sind über k. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \underset{\text{A}}{\subset} k^n$ eine abgeschlossene Teilmenge, so sind nach unserem Korollar 7.4.14 über Regularität und Glattheit gleichbedeutend:

1. Unsere Teilmenge $X \underset{\text{A}}{\subset} k^n$ ist extrinsisch glatt an jeder Stelle $x \in X$;
2. Alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ von X sind regulär;
3. Der Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf X ist ein glatter k-Kring.

Arbeiten wir über nicht vollkommenen Körpern k, so ist jedoch lokale Regularität schwächer als Glattheit. Ist etwa L/k eine endliche inseparable Körpererweiterung, so ist L ein regulärer lokaler k-Kring, aber der Ringhomomorphismus $k \hookrightarrow L$ ist nicht glatt.

Übungen

Übung 7.4.27. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die glatten Stellen einer algebraischen Teilmenge $X \underset{\text{A}}{\subset} k^n$ stets eine offene Teilmenge bilden.

Übung 7.4.28. $(k = \bar{k})$. Gegeben $p \in X \underset{\text{A}}{\subset} k^n$ eine glatte Stelle einer algebraischen Teilmenge zeige man, daß für jedes System $x_1, \dots, x_d$ von lokalen Parametern um p der Ringhomomorphismus $k[T_1, \dots, T_d] \to \mathcal{O}_{X,p}$ zum lokalen Ring bei p gegeben durch $T_i \mapsto x_i$ einen Isomorphismus

$$k[\![T_1, \dots, T_d]\!] \to \mathcal{O}_{X,p}^{\wedge}$$

zwischen dem Ring der formalen Potenzreihen und der Vervollständung des lokalen Rings von X bei p an seinem maximalen Ideal induziert.

Übung 7.4.29 (**Algebraische Teilmengen in $\mathbb{C}^n$ als Mannigfaltigkeiten**). Man zeige, daß die glatten Stellen einer irreduziblen algebraischen Teilmenge $X \underset{\text{A}}{\subset} \mathbb{C}^n$ eine orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ der Dimension $d = 2 \operatorname{kdim} X$ von im Sinne von [AN2] 14.4.2.6 und [AN2] 14.10.3.6 bilden, genauer sogar eine glatte Untermannigfaltigkeit im Sinne von [ML] 28.3.2.7. Hinweis: [AN2] 14.4.2.21.

Übung 7.4.30 (**Verschwindungsideale glatter Varietäten**). $(k = \bar{k})$. Sei $X \subset\!\!\!\!\!\!\!\triangle\, k^n$ glatt in jedem Punkt und seien Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{I}(X)$ gegeben derart, daß für alle $x \in X$ gilt

$$\dim_k \langle (\operatorname{grad} f_1)(x), \ldots, (\operatorname{grad} f_r)(x) \rangle_k + \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x} = n$$

So erzeugen die f_i bereits das Verschwindungsideal von X, in Formeln ausgedrückt gilt also $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \mathcal{I}(X)$.

Übung 7.4.31. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Matrizen $M \in \operatorname{Mat}(3; k)$ vom Rang ≤ 1 eine irreduzible algebraische Teilmenge des k^9 der Dimension 5 bilden. Man bestimme Erzeuger ihres Verschwindungsideals. Hinweis: 7.4.30.

Übung 7.4.32 (**Lokale Multiplizitäten**). Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Kring einer Krulldimension $d \geq 1$. Gegeben $f \in A \backslash 0$ und r maximal mit $f \in \mathfrak{m}^r$ zeige man $\operatorname{hdim}(A/Af) < d$ und

$$r = \operatorname{mult}_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A/Af)$$

und damit auch $f \in \mathfrak{m} \Rightarrow \operatorname{hdim}(A/Af) = d - 1$. Man schreibt dann abkürzend $r = \operatorname{mult}(f)$ und im Fall einer affinen Varietät X mit $A := \mathcal{O}_{X,x}$ dem lokalen Ring an einer regulären Stelle $x \in X$ alternativ $r = \operatorname{mult}_x(f)$. Da der assoziierte graduierte Ring ein Polynomring über einem Körper ist, gilt

$$\operatorname{mult}(fg) = \operatorname{mult}(f) + \operatorname{mult}(g)$$

Hinweis: Man gehe den Beweis von 7.3.13 nocheinmal durch und erkenne in diesem Fall $\tilde{\mathrm{P}}_{Af}(t) = t^r \mathrm{P}_A(t)$. Die nun folgende Rechnung finde ich in der Variante 6.9.9 besonders transparent: Die rationale Funktion $1/(1-u)^d - u^r/(1-u)^d$ hat um $u = 1$ eine Laurent-Entwicklung, die mit dem Term $r/(1-u)^{d-1}$ beginnt.

Übung 7.4.33 (**Glattheit und lokale Multiplizität**). Gegeben $y \in Y \subset\!\!\!\!\!\!\!\triangle\, X$ eine bepunktete abgeschlossene Hyperfläche in einer glatten irreduziblen affinen Varietät zeige man, daß Y genau dann glatt ist bei y, wenn gilt $\operatorname{mult}_y Y = 1$. Hinweis: 7.4.11 und 7.4.32.

Ergänzung 7.4.34. In [Bou06], exercice 25 zu §7 wird ein Argument dafür skizziert, daß aus $\operatorname{mult}_x(X) = 1$ schon folgt, daß $x \in X$ ein glatter Punkt der Varietät X sein muß. In [Bou06], exercice 24 zu §7 wird ein Argument dafür skizziert, daß ein lokaler noetherscher Kring A genau dann regulär ist, wenn er die Multiplizität Eins hat und seine Vervollständigung $\hat{A}$ ein Integritätsbereich ist. In der entsprechenden Arbeit [Nag55] von Nagata findet man auch ein Beispiel dafür, daß in diesem Zusammenhang die zusätzliche Bedingung an $\hat{A}$ notwendig ist.

Übung 7.4.35 (**Schnittmultiplizität an singulären Stellen**). Seien X eine glatte Varietät der Dimension $\operatorname{kdim} X = 2$ und $C, D \not\subset\!\!\!\!\bigtriangleup\, X$ Kurven mit Schnittpunkt $x \in C \cap D$. Sind C oder D nicht glatt bei x, so gilt für die Schnittmultiplizität

$$\mathrm{s}_x(C, D) \geq 2$$

Übung 7.4.36 (**Maximalzahl singulärer Stellen ebener Kurven**). $(k = \bar{k})$. Eine Kurve $C = \mathcal{Z}(f) \not\subset\!\!\!\!\bigtriangleup\, k^2$ für ein quadratfreies Polynom $f \in k[X, Y]$ hat höchstens $d(d-1)/2$ singuläre Punkte für $d = \operatorname{grad}(f)$. Hinweis: Man überlege sich zunächst, daß es eine Richtung $v \in k^2 \backslash 0$ gibt derart, daß die Richtungsableitung $\mathrm{D}_v f$ nur höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen mit f hat. Dann verwende man 7.4.35.

Übung 7.4.37 (**Vorbereitung feinerer Aussagen zur Schnittmultiplizität**). Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Kring der Krulldimension Zwei. Gegeben $f \in \mathfrak{m}^r$ und $g \in \mathfrak{m}^s$ liefert 7.3.26 die Abschätzung

$$\mathrm{l}(A/\langle f, g\rangle) \geq rs$$

Bezeichne nun $\bar{f} \in \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ und $\bar{g} \in \mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$ die Nebenklassen. Sind $\bar{f}$ und $\bar{g}$ teilerfremd in $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$, so folgere man $\mathfrak{m}^{r+s} \subset \langle f, g\rangle$ aus dem Nakayama-Lemma und Übung [AL] 2.9.28, nach der sich jedes homogene Polynom $\bar{h}$ vom Grad $r+s-1$ schreiben läßt als $\bar{h} = \bar{a}\bar{f} + \bar{b}\bar{g}$ mit $\bar{a}$ homogen vom Grad $s-1$ und $\bar{b}$ homogen vom Grad $r-1$. Dann folgere man aus Übung [AL] 2.9.28, daß wir kurze exakte Sequenzen $A/\mathfrak{m}^s \oplus A/\mathfrak{m}^r \hookrightarrow A/\mathfrak{m}^{r+s} \twoheadrightarrow A/\langle f, g\rangle$ erhalten mit $(a, b) \mapsto af + bg$ als erster Abbildung und daraus, immer unter der Annahme $\bar{f}, \bar{g}$ teilerfremd, daß sogar gilt

$$\mathrm{l}(A/\langle f, g\rangle) = rs$$

Sind dahingegen $\bar{f}, \bar{g}$ nicht teilerfremd, so ist die erste Abbildung unserer Sequenz nicht injektiv und es folgt sogar $\mathrm{l}(A/(\langle f, g\rangle + \mathfrak{m}^{r+s})) > rs$ und a forteriori $\mathrm{l}(A/\langle f, g\rangle) > rs$.

Beispiel 7.4.38 (**Feinere Aussagen zur Schnittmultiplizität**). $(k = \bar{k})$. Ist speziell $X = k^2$ die Ebene und $x = 0$ der Ursprung und sind $f, g \in k[T, S]\backslash 0$ teilerfremde Polynome und $\bar{f}, \bar{g}$ deren von Null verschiedene homogene Komponenten kleinstmöglichen Grades und r sowie s deren Grade, so gilt $\dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/\langle f, g\rangle) \geq rs$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\bar{f}$ und $\bar{g}$ auch ihrerseits teilerfremd sind.

7.5 Birationale Äquivalenz

Definition 7.5.1. Zwei irreduzible k-Varietäten, deren Funktionenkörper als Körpererweiterungen von k isomorph sind, heißen **birational äquivalent**.

Definition 7.5.2. Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen k-Varietäten heißt **birational**, wenn er dominant ist und einen Isomorphismus $\mathcal{M}(Y) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{M}(X)$ induziert.

7.5.3. Gegeben irreduzible k-Varietäten X, Y und zwischen ihren Funktionenkörpern ein Körperisomorphismus $\mathcal{M}(X) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{M}(Y)$ über k gibt es nichtleere offene affine Teilmengen $U \circledcirc X$ und $V \circledcirc Y$ sowie einen Isomorphismus von k-Varietäten $V \stackrel{\sim}{\to} U$ derart, daß die zugehörigen Ringhomomorphismen unseren Körperisomorphismus ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathcal{O}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{M}(X) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{M}(Y) \end{tikzcd}$$

In der Tat dürfen wir X und Y affin annehmen. Bezeichne $A, B \subset \mathcal{M} := \mathcal{M}(Y)$ die Bilder von von $\mathcal{O}(X)$ und $\mathcal{O}(Y)$. Alle Lokalisierungen dieser Integritätsbereiche nach von Null verschiedenen Elementen identifizieren wir stillschweigend mit ihren Bildern in $\mathcal{M}$. Da B ringendlich ist über k, gibt es $f \in A \backslash 0$ mit $A[f^{-1}] \supset B$. Ebenso gibt es $g \in B \backslash 0$ mit $B[g^{-1}] \supset A$. Wir haben also $A[f^{-1}, g^{-1}] = B[f^{-1}, g^{-1}]$ und können $U = (X_f)_g$ und $V = (Y_g)_f$ nehmen.

Proposition 7.5.4. *Jede irreduzible k-Varietät ist birational äquivalent zu einer irreduziblen Hyperfläche, also zur Nullstellenmenge eines einzigen irreduziblen Polynoms in einem k^s.*

Beweis unter der Annahme $\operatorname{char} k = 0$. Sei X unsere Varietät. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei X affin. Wir setzen $\mathcal{O}(X) := A$. Sicher finden wir eine Noether-Normalisierung $k['x_1, \ldots, x_n] \subset A$, so daß also A ganz ist über diesem Polynomring. Gehen wir zu den Quotientenkörpern über, so erhalten wir eine modulendliche Körpererweiterung, und diese muß nach [AL] 3.10.8 und wegen unserer Annahme der Charakteristik Null ein primitives Element $r \in \operatorname{Quot} A$ besitzen. Der Ring $B := k[x_1, \ldots, x_n, r] \subset \operatorname{Quot} A$ hat also denselben Quotientenkörper wie A. Andererseits ist B ein Integritätsbereich und ein Quotient des Polynomrings in $n+1$ Variablen von der Krulldimension n, mithin nach 4.2.23 der Quotient nach dem von einem irreduziblen Polynom erzeugten Hauptideal. □

Beweis im Allgemeinen. Sei X unsere Varietät. Sei $\mathcal{M}(X)$ ihr Funktionenkörper. Da $\mathcal{M}(X)/k$ körperendlich ist und k vollkommen, gibt es nach [AAG] 3.5.8 algebraisch unabhängige $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{M}(X)$ derart, daß $\mathcal{M}(X)$ separabel ist über $k(x_1, \ldots, x_n)$. Nun kann der Beweis wie zuvor zu Ende geführt werden. □

Proposition 7.5.5. *Die glatten Stellen einer algebraischen Teilmenge $X \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ bilden stets eine offene dichte Teilmenge. Dasselbe gilt für die glatten Stellen einer beliebigen Varietät.*

7.5.6. Der Beweis basiert auf 7.5.4. Das Argument ist deshalb vorerst nur für $\operatorname{char} k = 0$ vollständig und benötigt im allgemeinen [AAG] 3.5.8.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X \overset{\mathrm{A}}{\subset} k^n$ irreduzibel. Daß die Teilmenge der glatten Stellen offen ist, wissen wir schon aus Übung 7.4.27. Es bleibt zu zeigen, daß sie nicht leer ist. Nach 7.5.4 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X die Nullstellenmenge eines einzigen irreduziblen Polynoms P ist. Verschwindet eine partielle Ableitung $\partial_i P$ unseres Polynoms auf ganz X, so muß von P geteilt werden und folglich das Nullpolynom sein. Es ist jedoch unmöglich, daß alle partiellen $\partial_i P$ Ableitungen Null sind: In Charakteristik Null, da unser Polynom ja nicht konstant sein kann; In Charakteristik p, da unser Polynom dann, wenn es nicht konstant wäre, eine p-te Potenz eines anderen Polynoms sein müßte und wieder nicht irreduzibel sein könnte. □

7.5.7 (**Komplex-algebraische Mengen als verklebte Mannigfaltigkeiten**). Zusammen mit 7.4.27 liefert 7.5.5 induktiv, daß jede algebraische Teilmenge $X \overset{\mathrm{A}}{\subset} \mathbb{C}^n$ eine Folge von Zariski-abgeschlossenen Teilmengen

$$X = X_d \supset X_{d-1} \supset \ldots \supset X_0$$

besitzt derart, daß $X_i \backslash X_{i-1}$ jeweils eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ der reellen Dimension $2i$ im Sinne von [AN2] 14.4.2.6 ist. Genauer können wir derartige Mengen induktiv finden, indem wir als X_{i-1} die Menge aller nicht regulären Stellen von X_i vereinigt mit allen irreduziblen Komponenten von X_i einer Krulldimension $< i$ nehmen.

Übungen

Übung 7.5.8. Ist X eine beliebige Varietät, so ist für jede dichte offene affine Teilmenge $U \overset{\circ}{\subset} X$ die von der universellen Eigenschaft induzierte Abbildung ein Ringisomorphimus $S^{-1}\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ für $S \subset \mathcal{O}(U)$ die Menge der kürzbaren Elemente.

Übung 7.5.9. Ein Morphismus von Varietäten mit dichtem Bild heißt ein **dominanter Morphismus**. Man zeige: Gegeben irreduzible k-Varietäten X, Y und ein Körperhomomorphismus $\mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ über k gibt es nichtleere offene affine Teilmengen $U \overset{\circ}{\subset} X$ und $V \overset{\circ}{\subset} Y$ sowie einen dominanten Morphismus von

k-Varietäten $U \to V$ derart, daß die zugehörigen Ringhomomorphismen unseren Körperhomomorphismus ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{M}(X) \end{array}$$

Gibt es für eine irreduzible k-Varietät X der Dimension n einen Körperisomorphismus $\mathcal{M}(X) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{M}(k^n)$ über k, so heißt X eine **rationale Varietät**. Gibt es für eine irreduzible k-Varietät X der Dimension n eine endliche Körpererweiterung $\mathcal{M}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(k^n)$ über k, so heißt X eine **unirationale Varietät**.

7.6 Beispiele für faktorielle lokale Ringe*

7.6.1. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist Korollar 7.6.14, nach dem die lokalen Ringe affiner Varietäten an glatten Punkten stets faktoriell sind. Nach 5.9.32 bedeutet das geometrisch, daß in einer irreduziblen affinen Varietät die irreduziblen Untervarietäten der Kodimension Eins, die durch einen festen glatten Punkt laufen, in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes stets als die Nullstellenmenge einer einzigen regulären Funktion geschrieben werden können. Sehr viel allgemeiner besagt der Satz von Alexander-Buchsbaum, daß reguläre lokale Kringe stets faktoriell sind.

7.6.2. Ein lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ heiße **Hausdorff**, wenn die Filtrierung durch die Potenzen seines maximalen Ideals Hausdorff ist, wenn also gilt $\bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^r = 0$. Nach dem Krull'schen Durchschnittssatz 4.6.14 ist jeder noethersche lokale Kring Hausdorff.

7.6.3. Ein lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ heiße **vollständig**, wenn die Filtrierung durch die Potenzen seines maximalen Ideals vollständig ist, wenn also anders gesagt die natürliche Abbildung eine Surjektion $A \twoheadrightarrow \lim_r A/\mathfrak{m}^r$ ist.

Lemma 7.6.4 (Teilen mit Rest bei Potenzreihen). *Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring und $n \in \mathbb{N}$ und $P, Q \in R[\![X]\!]$ formale Potenzreihen mit $Q \in X^n + \mathfrak{m}[\![X]\!]$. So gibt es eindeutig bestimmte $A \in R[\![X]\!]$ und $B \in R[X]$ mit $P = AQ + B$ und $\operatorname{grad} B < n$.*

7.6.5. Dieselbe Aussage folgt, wenn wir nur $Q \in R[\![X]\!]^\times X^n + \mathfrak{m}[\![X]\!]$ fordern. Das ist gleichbedeutend zu $\bar{Q} \in \bar{R}[\![X]\!]^\times X^n$ für $\bar{R} := R/\mathfrak{m}$ den Restklassenring und $\bar{Q}$ das Bild von Q unter der Quotientenabbildung. Formale Potenzreihen über einem lokalen Kring R mit dieser Eigenschaft heißen **regulär vom Grad** n. Explizit sind das Potenzreihen, bei denen der Koeffizient von X^n eine Einheit von R ist und alle Koeffizienten von kleineren Potenzen keine Einheiten von R. Ist ein Produkt von zwei Potenzreihen regulär, so offensichtlich auch die Faktoren.

7.6.6. Ist R selber ein Ring von formalen Potenzreihen in mehreren Variablen über einem Körper, so erhält man ein formales Analogon des sogenannten Weierstraß'schen Teilersatzes.

Beweis. Für die Eindeutigkeit reicht es, den Fall $P = 0$ zu betrachten. Wegen der Hausdorffeigenschaft reicht weiter zu zeigen, daß dann das Bild von A in $(R/\mathfrak{m}^s)[\![X]\!]$ verschwindet für alle s. Das schließlich folgert man leicht mit vollständiger Induktion über s. Die Existenz zeigt man mit einer Induktion derselben Art, diesmal unter Verwendung der Vollständigkeit. □

Lemma 7.6.7. *Gegeben $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring und $n \in \mathbb{N}$ induziert die Multiplikation eine Bijektion*

$$R[\![X]\!]^\times \times (X^n + \mathfrak{m}[X]^{<n}) \xrightarrow{\sim} R[\![X]\!]^\times X^n + \mathfrak{m}[\![X]\!]$$

mit der Notation $\mathfrak{m}[X]^{<n}$ für die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathfrak{m}$ von einem Grad, der echt kleiner ist als n.

7.6.8. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Ein Element von $X^n + \mathfrak{m}[X]^{<n}$ nennen wir ein **Weierstraß-Polynom vom Grad** n. Gegeben ein vollständiger Hausdorff'scher lokaler Kring läßt sich also jede reguläre Potenzreihe vom Grad n mit Koeffizienten in unserem Kring eindeutig schreiben als Produkt eines Weierstraßpolynoms vom Grad n mit einer Einheit des Potenzreihenrings.

Beweis. Gegeben ein Element Q der rechten Seite alias eine reguläre Potenzreihe suchen wir zunächst ein Element A des Potenzreihenrings mit $AQ = X^n - B$ für $B \in \mathfrak{m}[X]^{<n}$. Diese Gleichung können wir umschreiben zu $X^n = AQ + B$. Das Teilen mit Rest von X^n durch Q im Sinne von 7.6.4 besitzt nun genau eine Lösung und das zeigt bereits die Injektivität unserer Abbildung. Unsere Annahmen an Q zeigen dann, daß für diese Lösung gilt $B \in \mathfrak{m}[X]^{<n}$ und $A \in R[\![X]\!]^\times$ und das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 7.6.9. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring und seien $A, B, C \in R[\![X]\!]$ gegeben mit $AB = C$. Sind A und C Weierstraßpolynome, so ist auch B ein Weierstraßpolynom.*

Beweis. Sicher ist B regulär, also besitzt es nach 7.6.7 eine eindeutige Darstellung $B = DU$ als Produkt eines Weierstraßpolynoms D mit einer Einheit U des Potenzreihenrings. Es folgt $ADU = C$ und AD ist offensichtlich seinerseits ein Weierstraßpolynom. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung der regulären Potenzreihe C als Produkt eines Weierstraßpolynoms mit einer Einheit des Potenzreihenrings 7.6.7 folgt dann $U = 1$ wie gewünscht. □

Lemma 7.6.10. *Gegeben ein Körper k gibt es für jedes von Null verschiedene Element $P \in k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ einen Automorphismus φ unseres Potenzreihenrings derart, daß in $\varphi(P)$ eines der Monome $(X_n)^a$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten auftritt.*

Beweis. Wir schreiben in Multiindexschreibweise $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha$. Sei β der lexikographisch kleinste Multiindex mit $c_\beta \neq 0$. Wir betrachten nun Automorphismen φ der Gestalt $X_i \mapsto X_i + X_n^{r(i)}$ für $1 \leq i < n$ und $X_n \mapsto X_n$. Dann kommt in $\varphi(X^\beta)$ unser X_n zur Potenz $\beta_1 r(1) + \ldots + \beta_{n-1} r(n-1) + \beta_n$ vor. Wir müssen nun unsere $r(i)$ nur noch so wählen, daß für jeden lexikographisch größeren Multiindex α unser X_n in $\varphi(X^\alpha)$ zu einer echt höheren Potenz vorkommt, daß also gilt

$$\beta_1 r(1) + \ldots + (\beta_i + 1) r(i) > \beta_1 r(1) + \ldots + \beta_{n-1} r(n-1) + \beta_n$$

für $1 \leq i < n$ alias $r(i) > \beta_{i+1} r(i+1) + \ldots + \beta_{n-1} r(n-1) + \beta_n$. Das können wir aber leicht erreichen, indem wir zuerst $r(n-1)$ wählen, dann $r(n-2)$ und so weiter. □

Satz 7.6.11. *Potenzreihenringe in endlich vielen Variablen über einem Körper sind stets faktoriell.*

Beweis. Nach 1.5.18 sind unsere Ringe noethersch, also besitzt mit demselben Argument, wie wir es in [AL] 2.4.11 im Fall von Hauptidealringen gegeben haben, jedes Element eine Darstellung als Produkt irreduzibler Elemente. Sei nun k unser Grundkörper. Mit Induktion dürfen wir annehmen, daß wir bereits wissen, daß der Potenzreihenring R über k in allen Variablen außer der letzten faktoriell ist. Es bleibt zu zeigen, daß jede irreduzible Potenzreihe $P \in R[\![X]\!]$ ein Primelement ist. Teile also P ein Produkt AB, sagen wir $PQ = AB$. Es gilt zu zeigen, daß P einen der Faktoren teilt. Wir dürfen $AB \neq 0$ annehmen und nach 7.6.10 dürfen wir auch annehmen, daß AB regulär ist. Dann sind nach 7.6.5 notwendig P, Q, A, B alle regulär. Indem wir unsere Potenzreihen um Einheiten abändern, dürfen wir mit 7.6.7 annehmen, daß A, B und P Weierstraßpolynome sind. Dann ist aber nach 7.6.9 auch Q ein Weierstraßpolynom und wir finden $PQ = AB$ mit $P, Q, A, B \in R[X]$. Mit R ist aber nach [AL] 2.7.11 auch der Polynomring $R[X]$ faktoriell, folglich teilt P entweder A oder B. □

Proposition 7.6.12. *Seien $A \subset \hat{A}$ noethersche lokale Kringe. Für die maximalen Ideale $\mathfrak{m}, \hat{\mathfrak{m}}$ gelte $\langle \mathfrak{m}\hat{A} \rangle = \hat{\mathfrak{m}}$ sowie $\hat{\mathfrak{m}}^n \cap A = \mathfrak{m}^n$ und $\hat{\mathfrak{m}}^n + A = \hat{A}$ jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist unter diesen Annahmen $\hat{A}$ faktoriell, so auch A.*

7.6.13. Hier und im folgenden meint $\langle\ \rangle$ stets das Erzeugnis als additive Untergruppe und Verknüpfungssymbole zwischen Teilmengen einer Menge mit Verknüpfung meinen die auf der Potenzmenge induzierte Verknüpfung. Nur bei Potenzen von Idealen erlauben wir uns die abkürzende Schreibweise $\mathfrak{b}^n$ für das Ideal, das wir nach obigen Konventionen eigentlich $\langle \mathfrak{b}^n \rangle$ notieren müßten. Produkte von Idealen schreiben wir dahingegen aus als die von allen Produkten ab mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ erzeugte additive Untergruppe $\langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \rangle$.

Beweis. Aus unseren Annahmen folgt insbesondere $A/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n$. Als erstes zeigen wir nun für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ die Identität

$$\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \cap A = \mathfrak{a}$$

Nur die Inklusion $\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \cap A \subset \mathfrak{a}$ ist nicht a priori klar. Aus unseren Annahmen folgt erst $\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \subset \mathfrak{a} + \hat{\mathfrak{m}}^n$ für alle n und dann $\langle \mathfrak{a}\hat{A} \rangle \cap A \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$ für alle n. Mit dem Krull'schen Durchschnittssatz oder vielmehr seinem Korollar 4.6.14 folgt dann auch die a priori nicht offensichtliche Inklusion. Insbesondere folgt aus $a = \gamma b$ mit $a, b \in A\backslash 0$ und $\gamma \in \hat{A}$ bereits $\gamma \in A$. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß je zwei in A teilerfremde Elemente $a, b \in A\backslash 0$ auch in $\hat{A}$ teilerfremd bleiben. Daraus zusammen mit der Faktorialität von $\hat{A}$ können wir nämlich unschwer ableiten, daß ein irreduzibles Element von A nur dann ein Produkt teilen kann, wenn es einen der Faktoren teilt. Wir führen dazu die umgekehrte Annahme zum Widerspruch, es gebe $\alpha, \beta, \gamma \in \hat{A}$ mit $a = \alpha\gamma$ und $b = \beta\gamma$ und $\gamma \notin \hat{A}^\times$ und α, β teilerfremd. Zunächst einmal haben wir $\alpha \notin \hat{A}^\times$, sonst hätten wir ja $a|b$ in $\hat{A}$ und damit auch in A. Nach dem dem Krull'schen Durchschnittssatz oder vielmehr seinem Korollar 4.6.14 finden wir nun $n \geq 1$ mit $\alpha \in \hat{\mathfrak{m}}^{n-1}\backslash\hat{\mathfrak{m}}^n$. Jetzt finden wir $x, y \in A$ und $\varepsilon, \eta \in \hat{\mathfrak{m}}^n$ mit $\alpha = x + \varepsilon$ und $\beta = y + \eta$. Die Identität $a\beta = b\alpha$ liefert $a(y + \eta) = b(x + \varepsilon)$ und damit für $\mathfrak{a} := \langle a, b \rangle_A$ das von a und b in A erzeugte Ideal

$$ay - bx \in \langle \mathfrak{a}\,\hat{\mathfrak{m}}^n \rangle \cap A = \langle \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{m}^n \rangle \hat{A} \rangle \cap A = \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{m}^n \rangle$$

Wir finden mithin $s, t \in \mathfrak{m}^n$ mit $ay - bx = bt - as$ alias $a(y + s) = b(x + t)$ und damit auch $\alpha(y + s) = \beta(x + t)$. Da wir α, β teilfremd angenommen hatten, gibt es $\lambda \in \hat{A}$ mit $\lambda\alpha = (x + t)$. Wir wissen aber aus unseren Konstruktionen, daß α und $(x + t)$ zu $\hat{\mathfrak{m}}^{n-1}\backslash\hat{\mathfrak{m}}^n$ gehören. Es folgt $\lambda \notin \hat{\mathfrak{m}}$ alias $\lambda \in \hat{A}^\times$. Damit aber können wir unsere Ausgangsgleichung umschreiben zu $a = (\alpha\lambda)(\lambda^{-1}\gamma)$ mit $\alpha\lambda = (x + t) \in A$ und folglich $\lambda^{-1}\gamma \in A$. Dann aber ist $\lambda^{-1}\gamma$ ein gemeinsamer Teiler von a und b in A im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Korollar 7.6.14. *Der lokale Ring einer affinen Varietät an einem glatten Punkt ist stets faktoriell.*

Beweis. Nach 7.4.14 sind unsere lokalen Ringe regulär. Aus 7.4.10 und folgt und Übung **??** besagt, daß ihre Vervollständigungen Ringe von Potenzreihen in endlich vielen Variablen sind und daß die Einbettungen unserer lokalen Ringe in ihre Vervollständigungen die Annahmen in unserer Proposition 7.6.12 erfüllen. Nach 7.6.11 sind diese Potenzreihenringe faktoriell und nach 7.6.12 erben unsere lokalen Ringe diese Eigenschaft von den Potenzreihenringen. □

Übungen

Ergänzende Übung 7.6.15. Gegeben $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger Hausdorffscher lokaler Kring bleibt ein Weierstraßpolynom, das in $R[X]$ irreduzibel ist, irreduzibel in $R[\![X]\!]$.

Ergänzende Übung 7.6.16. Gegeben $(R, \mathfrak{m})$ ein kommutativer lokaler Integritätsbereich ist jedes Weierstraßpolynom ein Produkt von irreduziblen Weierstraßpolynomen.

8 Krulldimension Eins

8.1 Diskrete Bewertungsringe

8.1.1. Ich erinnere daran, daß wir noethersche Kringe der Krulldimension Null bereits in 5.9.5 untersucht hatten und insbesondere wissen, daß nilpotentfreie derartige Ring endliche Produkte von Körpern sind und daß alle Varietäten der Krulldimension Null endliche Mengen sind mit der diskreten Topologie und allen Funktionen als regulären Funktionen. Der Fall noetherschen Kringen der Krulldimension Eins und von Varietäten der Krulldimension Eins ist schon sehr viel reichhaltiger, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Wir beginnen mit regulären lokalen Ringen der Krulldimension Eins. Satz 8.1.11 wird uns, daß sie genau die diskreten Bewertungsringe sind, die in 8.1.8 eingeführt werden. Aber davor führen wir erst einmal die diskreten Bewertungen selber ein.

Definition 8.1.2. Eine **diskrete Bewertung**, englisch **discrete valuation**, auf einem Körper K ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $v : K^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß für seine Ausdehnung durch $v(0) := \infty$ zu einer Abbildung $v : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ gilt

$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)) \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

Ein **diskret bewerteter Körper** (K, v) ist ein Körper mit einer ausgezeichneten diskreten Bewertung.

Ergänzung 8.1.3 (**Indiskrete Bewertungen**). Allgemein versteht man unter einer **Anordnung einer abelschen Gruppe** Γ eine Anordnung der zugrundeliegenden Menge mit der Eigenschaft $a \leq b \Rightarrow (a+c) \leq (b+c)$ für alle $a, b, c \in \Gamma$. Dann erklärt man eine **Bewertung** auf einem Körper K als einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $v : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma$ in eine angeordnete abelsche Gruppe mit der Eigenschaft, daß für seine Ausdehnung durch $v(0) := \infty$ zu einer Abbildung $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \sqcup \{\infty\}$ gilt $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ für alle $x, y \in K$.

Beispiel 8.1.4 (**Bewertung von Laurentreihen**). Auf dem Körper der formalen Laurentreihen $k((t))$ über einem beliebigen Körper k erhalten wir eine diskrete Bewertung durch die Vorschrift

$$v\left(\sum a_n t^n\right) = \inf\{n \mid a_n \neq 0\}$$

Beispiel 8.1.5 (**Bewertungen rationaler Funktionen**). Auf dem Körper der rationalen Funktionen $k(T)$ über einem beliebigen Körper k liefert jedes Element $p \in k$ eine diskrete Bewertung v_p vermittels der Vorschrift

$$v_p(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (T-p)^{-n} f \text{ hat bei } p \text{ keine Polstelle}\}$$

Eine positive Bewertung $v_p(f) > 0$ bedeutet in diesem Fall also, daß f bei p eine Nullstelle hat; eine negative Bewertung $v_p(f) < 0$, daß f bei p eine Polstelle hat; und die Bewertung $v_p(f) = \infty$ hat nur die Nullfunktion. Für die durch die Entwicklung in eine Laurentreihe um p gegebene Einbettung $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(t)\!)$ ist diese Bewertung v_p offensichtlich gerade die Einschränkung unserer Bewertung v von oben. Auf dem Körper der rationalen Funktionen $k(T)$ über einem beliebigen Körper k können wir zusätzlich die diskrete Bewertung v_∞ erklären durch die Vorschrift

$$v_\infty(P/Q) = (\operatorname{grad} Q) - (\operatorname{grad} P)$$

für beliebige von Null verschiedene Polynome $P, Q \in k[T]$ und $v_\infty(0) = \infty$. Im Rahmen der algebraischen Geometrie mag man sich $k(T)$ als Funktionen auf der projektiven Gerade denken, und diese Bewertung v_∞ beschreibt dann die Null- beziehungsweise Polstellenordnung am unendlich fernen Punkt.

Ergänzung 8.1.6 (**Bewertungen meromorpher Funktionen**). Typisch ist auch das Beispiel [FT1] 16.4.1.22 des Körpers $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X)$ der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge $X \mathrel{\circledcirc}\subseteq \mathbb{C}$ oder allgemeiner einer zusammenhängenden Riemann'schen Fläche X. In diesem Fall liefert jeder Punkt $p \in X$ eine diskrete Bewertung $v_p : \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X) \to \mathbb{Z}$ durch die Vorschrift

$$v_p(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z-p)^{-n} f \text{ ist holomorph bei } p\}$$

Eine positive Bewertung $v_p(f) > 0$ bedeutet in diesem Fall also, daß f bei p eine Nullstelle hat; eine negative Bewertung $v_p(f) < 0$, daß f bei p eine Polstelle hat; und die Bewertung $v_p(f) = \infty$ hat nur die Nullfunktion. Für die durch die Entwicklung in eine Laurentreihe um p gegebene Einbettung $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(\!(t)\!)$ ist diese Bewertung v_p die Einschränkung unserer Bewertung v aus dem vorhergehenden Beispiel 8.1.4. Unter unserem Körperisomorphismus $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)$ aus **??** entspricht dann die Bewertung v_∞ links, die die Pol- beziehungsweise Nullstellenordnung einer meromorphen Funktion an der Stelle $\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ angibt, genau der „Grad-Bewertung" v_∞ aus 8.1.5 auf $\mathbb{C}(T)$. Im übrigen kann man zeigen, daß für jede zusammenhängende kompakte Riemann'sche Fläche X die Zuordnung $p \mapsto v_p$ eine Bijektion zwischen der Menge aller Punkte von X und der Menge aller diskreten Bewertungen des Körpers $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X)$ liefert, vergleiche etwa **??**.

Beispiel 8.1.7 (**Bewertungen rationaler Zahlen**). Typisch ist schließlich das Beispiel des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. In diesem Fall definiert jede Primzahl p eine diskrete Bewertung v_p auf $\mathbb{Q}$ durch die Vorschrift, daß für $a, b \in \mathbb{Z}\backslash 0$ teilerfremd zu p gilt

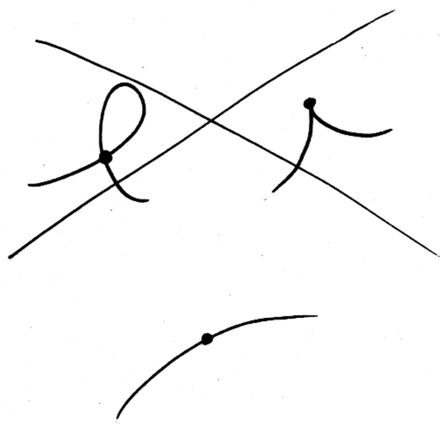
$$v_p(p^n a/b) = n$$

In derselben Weise definiert jedes irreduzible Element eines faktoriellen Ringes eine diskrete Bewertung seines Quotientenkörpers. Im Spezialfall des Polynomrings $\mathbb{C}[T]$ über $\mathbb{C}$ erhalten wir so genau die in 8.1.5 betrachteten diskreten Bewertungen auf $\mathbb{C}(T)$.

Definition 8.1.8. Ein **diskreter Bewertungsring** ist ein kommutativer Integritätsring mit der Eigenschaft, daß es auf seinem Quotientenkörper eine diskrete Bewertung 8.1.2 gibt, für die unser Integritätsring gerade aus allen Elementen mit nichtnegativer Bewertung besteht.

8.1.9. Wir werden gleich sehen, daß die fragliche diskrete Bewertung auf dem Quotientenkörper in Definition 8.1.8 durch den besagten Integritätsring bereits eindeutig bestimmt ist.

Beispiele 8.1.10. Der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in einem Körper ist ein diskreter Bewertungsring. Der Ring der Potenzreihen mit komplexen oder auch reellen Koeffizienten und positivem Kovergenzradius ist ein diskreter Bewertungsring.



Der lokale Ring einer affinen Varietät an einem Punkt ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn durch ihn nur eine Komponente der Varietät geht, wenn diese Komponente darüber hinaus die Dimension Eins hat und wenn schließlich unser Punkt darin eine glatte Stelle ist.

Satz 8.1.11 (Charakterisierungen diskreter Bewertungsringe). *Gegeben ein Kring sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kring ist ein diskreter Bewertungsring;*
2. *Unser Kring ist ein Hauptidealring mit genau zwei Primidealen;*
3. *Unser Kring ist ein regulärer lokaler Ring der Krulldimension Eins;*
4. *Unser Kring ist ein ganz abgeschlossener noetherscher lokaler Integritätsring der Krulldimension Eins.*

Beispiel 8.1.12. Der lokale Ring beim verklebten Punkt derjenigen komplexen algebraischen Varietät, die aus $\mathbb{C}$ entsteht durch das Verkleben zweier verschiedener Punkte, ist ein lokaler noetherscher kommutativer Integritätsbereich der Krulldimension Eins, aber eben nicht ganz abgeschlossen und mithin auch kein diskreter Bewertungsring. Dasselbe gilt für den lokalen Ring der Neil'schen Parabel an ihrer Spitze.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Sei A unser Bewertungsring und $v : \mathrm{Quot} A \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung mit $A = \{q \in \mathrm{Quot} A \mid v(q) \geq 0\}$. Offensichtlich sind dann die Einheiten $A^\times = \{a \in A \mid v(a) = 0\}$ genau die Elemente mit der Bewertung Null und das Komplement $\mathfrak{m} := A \backslash A^\times = \{a \in A \mid v(a) > 0\}$ ist ein Ideal von A, notwendig das einzige maximale Ideal. Da wir v surjektiv annehmen, gibt es $t \in \mathfrak{m}$ mit $v(t) = 1$. Für jedes solche t folgt sofort $\mathfrak{m} = At$. Jedes derartige Element t heißt im übrigen eine **Uniformisierende** unseres diskreten Bewertungsrings. Gegeben ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ungleich Null sei $a \in \mathfrak{a}$ gegeben mit $i = v(a)$ kleinstmöglich. Es folgt sofort $\mathfrak{a} = At^i = \mathfrak{m}^i$ und A ist in der Tat ein Hauptidealring mit genau einem Primideal ungleich Null. Nebenbei sehen wir auch, daß für $a \in A$ gilt $v(a) = \sup\{i \mid a \in \mathfrak{m}^i\}$ und daß so die Bewertung v schon durch den Teilring $A \subset \mathrm{Quot}\, A$ eindeutig festgelegt wird.

$2 \Rightarrow 1$. Nach [AL] 2.4.11 ist unser Hauptidealring A faktoriell und hat bis auf Einheiten genau ein irreduzibles Element t. Jede Wahl von t liefert also eine Bijektion $A^\times \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} A \backslash 0$, $(u, i) \mapsto ut^i$ und dann auch eine Bijektion $A^\times \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Quot} A)^\times$, gegeben durch dieselben Formel $(u, i) \mapsto ut^i$. Eine mögliche Bewertung wird dann gegeben durch $v(ut^i) = i$ und $v(0) = \infty$.

$2 \Rightarrow 3$. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.

$3 \Rightarrow 2$. Gegeben ein regulärer lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ der Krulldimension Eins wissen wir um die Existenz einer Fortsetzung der Identität auf $A/\mathfrak{m}$ zu einem Isomorphismus von graduierten Ringen

$$(A/\mathfrak{m})[X] \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$$

Insbesondere sind die Subquotienten $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ für alle $i \geq 0$ einfach und es folgt, daß jeder echte Untermodul von $\mathfrak{m}^i$ bereits in $\mathfrak{m}^{i+1}$ enthalten sein muß. Nach dem Krull'schen Durchschnittssatz sind also die $\mathfrak{m}^i$ alle von Null verschiedenen Ideale und mit Nakayama sieht mal leicht $\mathfrak{m}^i = \langle t^i \rangle$ für jeden Erzeuger t von $\mathfrak{m}$.

$2 \Rightarrow 4$. Das folgt, da jeder Hauptidealring faktoriell und damit ganz abgeschlossen ist.

$4 \Rightarrow 3$. Es gilt zu zeigen, daß das das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ein Hauptideal ist. Da die Krulldimension Eins ist, kann $\mathfrak{m}$ nicht das Nullideal sein. Sei nun $a \in \mathfrak{m}$ mit $a \neq 0$ gewählt. Nach der Beschreibung 4.5.29 des Radikals eines Ideals als Schnitt der darüberliegenden Primideale und da die Krulldimension Eins ist, gilt $\sqrt{\langle a\rangle} = \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist, folgt $\mathfrak{m}^n \subset \langle a\rangle$ für $n \gg 0$. Sei $n \geq 1$ minimal mit $\mathfrak{m}^n \subset \langle a\rangle$ und sei $b \in \mathfrak{m}^{n-1}\backslash\langle a\rangle$. So haben wir $y = b/a \in (\mathrm{Quot}A)\backslash A$ und folglich $y\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}$, da sonst $A[y]$ und damit y nach 5.1.6 angewandt auf den treuen $A[y]$-Modul $\mathfrak{m}$ ganz sein müßte über A. Andererseits gilt nach Konstruktion $b\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^n \subset \langle a\rangle$ und mithin $y\mathfrak{m} \subset A$, also $y\mathfrak{m} = A$ als einziges Ideal von A, das nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Damit ist $\mathfrak{m}$ das Hauptideal erzeugt von $x := y^{-1}$. □

Korollar 8.1.13 (Bewertungen zu glatten Stellen von Kurven). *Gegeben X eine Kurve über $k = \bar{k}$ und ein glatter Punkt $x \in X$ ist der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der regulären Funktionskeime ein diskreter Bewertungsring und für die zugehörige Bewertung $v = v_x$ gilt*

$$v_x(f) = \dim_k \mathcal{O}_{X,x}/\langle f\rangle \quad \forall f \in \mathcal{O}_{X,x}$$

8.1.14. Gegeben $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ nennen wir $v_x(f)$ die **Nullstellenordnung von f an der Stelle** x. Ist X irreduzibel, so nennen wir für $f \in \mathcal{M}(X)\backslash\mathcal{O}_{X,x}$ das Negative $-v_x(f)$ seiner Bewertung die **Polstellenordnung von f an der Stelle** x. Es ist klar, daß im Fall der Gerade $X = k$ die in [LA1] 5.3.24 beziehungsweise [LA1] 5.5.7 erklärte Nullstellenordnung beziehungsweise Polstellenordnung mit den hier erklärten Begriffen zusammenfällt.

Beweis. Das folgt sofort aus unserer Charakterisierung 8.1.11 diskreter Bewertungsringe und der Beziehung 7.4.14 von Glattheit und Regularität. □

Proposition* 8.1.15 (Definitionslücken durch Polstellen). *Sei X eine irreduzible k-Varietät, $x \in X$ ein Punkt mit ganz abgeschlossenem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ und $f \in \mathcal{M}(X)\backslash\mathcal{O}_{X,x}$ eine am Punkt x nicht definierte rationale Funktion auf X. So liegt x im Abschluß der Menge aller Punkte, an denen f^{-1} definiert ist und den Wert Null annimmt.*

8.1.16. In gewisser Weise ist also im Fall eines ganz abgeschlossenen lokalen Rings „die Nicht-Definiertheit einer rationalen Funktion stets durch das Vorliegen einer Polstelle bedingt“. Um zu sehen, was im Fall eines nicht ganz abgeschlossenen lokalen Rings passieren kann, verklebe man zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{C}^\times$. So entsteht eine $\mathbb{C}$-Varietät X, bei der am verklebten Punkt $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ nicht ganz abgeschlossen ist. Die reguläre Funktion f auf $\mathbb{C}^\times$ gegeben durch $f(z) = z$ liegt dann nicht in $\mathcal{O}_{X,x}$, obwohl f^{-1} außerhalb von x überall definiert ist und keine Nullstelle hat. Dies Beispiel zeigt, daß man im Lemma auf die Bedingung „ganz abgeschlossen“ nicht verzichten kann. Salopp gesprochen ist in unserem Gegenbeispiel die Nicht-Definiertheit von f am Verklebepunkt x nicht durch eine „Polstelle“ bedingt, sondern durch „schlechtes Zusammenpassen“.

Beweis. Wir setzen $A := \mathcal{O}_{X,x}$. Nach 5.9.26 gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset A$ der Höhe Eins mit $f \not\in A_\mathfrak{q}$. Nach 8.1.11.4 ist $A_\mathfrak{q}$ ein diskreter Bewertungsring. Es folgt unmittelbar $f^{-1} \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q}$, also $f^{-1} = g/h$ mit $g \in \mathfrak{q}$ und $h \in A \backslash \mathfrak{q}$. Nun dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X affin ist und daß g und h beide auf ganz X definiert sind. Dann gibt es aber auch ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}(X)$ mit $h \in \mathcal{O}(X)\backslash\mathfrak{m}$. Das ist dann das Verschwindungsideal eines Punktes $z \in X$, an dem f^{-1} definiert ist und den Wert Null annimmt. Läge x nicht im Abschluß der Menge aller derartigen Punkte $z \in X$, so könnten wir den fraglichen Abschluß aus X entfernen und die so entstehende Varietät als unser X nehmen und erhielten unmittelbar einen Widerspruch. □

Übungen

Übung 8.1.17. Gegeben eine algebraische Körpererweiterung $K \subset L$ und eine diskrete Bewertung v auf L gilt $v(K^\times) \neq 0$.

Übung 8.1.18. Man zeige, daß es auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine diskrete Bewertung geben kann. Man zeige, daß es auf einem vollkommenen Körper positiver Charakteristik keine diskrete Bewertung geben kann. Man zeige, daß es auf dem Körper der konstruierbaren Zahlen keine diskrete Bewertung gibt.

Übung 8.1.19 (**Maximalität diskreter Bewertungsringe**). Seien K ein Körper und $A \subset K$ ein diskreter Bewertungsring. Man zeige, daß K nur genau zwei Teilringe besitzt, die A umfassen, nämlich A und K.

Übung 8.1.20. Sei R ein noetherscher kommutativer Integritätsbereich. Man zeige:

1. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe Eins und jedes $f \in R\backslash 0$ hat der Quotient $R_\mathfrak{p}/\langle f \rangle$ der Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ endliche Länge.

2. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe Eins gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $v_\mathfrak{p} : (\mathrm{Quot} R)^\times \to \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß sein Wert auf allen $f \in R\backslash 0$ die Länge des Quotienten $R_\mathfrak{p}/\langle f \rangle$ angibt, in Formeln $v_\mathfrak{p}(f) = l(R_\mathfrak{p}/\langle f \rangle)$.

3. Ist $R_\mathfrak{p}$ regulär, so ist dies $v_\mathfrak{p}$ gerade die Restriktion der diskreten Bewertung auf $\mathrm{Quot} R$ mit Bewertungsring $R_\mathfrak{p}$.

Übung 8.1.21 (**Bewertung als lokale Multiplizität**). Gegeben ein diskreter Bewertungsring R mit seiner Bewertung v und ein Element $f \in R$ haben wir $v(f) = \mathrm{mult}(f)$ für die in 7.4.32 erklärte Multiplizität.

Übung 8.1.22. Sei $A \subset B$ eine modulendliche Kringerweiterung. Ist A ein diskreter Bewertungsring und B ein Integritätsbereich, so spaltet die Einbettung $A \hookrightarrow B$ als Homomorphismus von A-Moduln. Hinweis: 4.6.18.

8.2 Dedekindringe

Definition 8.2.1. Ein **Dedekind-Ring** ist ein noetherscher ganz abgeschlossener kommutativer Integritätsbereich der Krulldimension Eins.

8.2.2 (**Diskussion der Terminologie**). Manche Quellen fordern statt der letzten Bedingung von Dedekindringen nur Krulldimension kleinergleich Eins. Damit werden zusätzlich auch alle Körper als Dedekindringe zugelassen und viele der im folgenden getroffenen Aussagen müssen in komplizierterer Weise formuliert werden.

Proposition 8.2.3 (**Dedekindringe im geometrischen Fall**). *Eine affine Varietät X ist genau dann glatt, irreduzibel und eindimensional, wenn ihr Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen ein Dedekindring ist.*

Beweis. Das folgt daraus, daß nach 8.1.11 ein lokaler noetherscher Kring der Krulldimension Eins genau dann ganz abgeschlossen ist, wenn er regulär ist. Ist also $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär für alle $x \in X$, so ist es auch ganz abgeschlossen für alle $x \in X$. Dasselbe folgt für den Schnitt $\mathcal{O}(X) = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$ in $\operatorname{Quot}\mathcal{O}(X)$. Ist umgekehrt $\mathcal{O}(X)$ ganz abgeschlossen, so nach 5.7.1 auch seine Lokalisierungen $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$. □

Beispiele 8.2.4. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Dedekindring. Jeder diskrete Bewertungsring ist ein Dedekindring, ja die diskreten Bewertungsringe sind nach 8.1.11 genau die lokalen Dedekindringe. Jede Lokalisierung eines Dedekindrings an einer Teilmenge, die mindestens ein maximales Ideal nicht trifft, ist wieder ein Dedekindring. Insbesondere ist jede Lokalisierung eines Dedekindrings an einem maximalen Ideal ein diskreter Bewertungsring.

Proposition 8.2.5. *Ein noetherscher kommutativer Integritätsbereich ist genau dann ein Dedekindring, wenn seine lokalen Ringe an maximalen Idealen sämtlich diskrete Bewertungsringe sind.*

Beweis. Dieser Beweis ist vollständig analog zu unserer Diskussion von Dedekindringen im geometrischen Fall. Ist A ein Dedekindring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so ist $A_\mathfrak{m}$ normal, noethersch und von der Krulldimension Eins und nach 8.1.11 folglich ein diskreter Bewertungsring. Sind umgekehrt die lokalen Ringe an maximalen Idealen $\mathfrak{m} \subset A$ sämtlich diskrete Bewertungsringe, so haben nach 8.1.11 alle $A_\mathfrak{m}$ und damit auch A die Krulldimension Eins. Weiter sind nach 8.1.11 auch alle $A_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen und damit nach 4.3.49 auch $A = \bigcap A_\mathfrak{m}$. □

Vorschau 8.2.6 (**Ganzheitsringe sind Dedekindringe**). Ein **Zahlkörper** ist ein Körper K der Charakteristik Null, der endlich ist über seinem Primkörper, in Formeln $[K : \mathbb{Q}] < \infty$. Der **Ring der ganzen Zahlen** oder auch **Ganzheitsring**

$\mathfrak{o}_K \subset K$ unseres Zahlkörpers K ist per definitionem der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K. Nach dem Endlichkeitsresultat 8.3.10 für ganze Abschlüsse, das wir im nächsten Abschnitt beweisen, ist $\mathfrak{o}_K$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, und nach der Stabilität der Krulldimension bei ganzen Kringerweiterungen 5.2.11 hat $\mathfrak{o}_K$ wie $\mathbb{Z}$ die Krulldimension Eins. Ganz abgeschlossen ist $\mathfrak{o}_K$ als ganzer Abschluß eh, also muß unser Ganzheitsring $\mathfrak{o}_K$ ein Dedekindring sein.

Satz 8.2.7 (Bewertungen und maximale Ideale). *Gegeben ein Dedekindring B liefert die Vorschrift, die jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ die durch den diskreten Bewertungsring $B_{\mathfrak{m}}$ nach 8.2.4 gegebene Bewertung auf $\operatorname{Quot} B$ zuweist, eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Max} B & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diskrete Bewertungen auf } \operatorname{Quot} B, \\ \textit{deren Bewertungsring } B \textit{ umfaßt} \end{array} \right\} \\ \mathfrak{m} & \mapsto & v_{\mathfrak{m}} \end{array}$$

Beweis. Die Injektivität unserer Abbildung ist klar, es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $v : \operatorname{Quot} B \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung mit Bewertungsring $A \supset B$. Der Schnitt des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_A \subset A$ mit B kann nicht das Nullideal sein, da sonst die Bewertung v auf $(\operatorname{Quot} B)^\times$ identisch verschwinden müßte. Also ist der Schnitt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset B$. Natürlich gilt $B_{\mathfrak{m}} \subset A$ und aus der Maximalität diskreter Bewertungsringe 8.1.19 folgt $B_{\mathfrak{m}} = A$. □

8.2.8. Wir bestimmen nun die Ganzheitsringe der Kreisteilungskörper und beginnen mit einer allgemeinen Vorüberlegung. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ Ideale eines Krings R. Gilt $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ für $i \neq j$, so ist mit einer zweifachen Anwendung des chinesischen Restsatzes [AL] 2.3.4 die offensichtliche Abbildung für alle $n \geq 1$ ein Isomorphismus

$$\langle \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle / \langle (\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s)^n \rangle \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_1 / \langle \mathfrak{a}_1^n \rangle \times \ldots \times \mathfrak{a}_s / \langle \mathfrak{a}_s^n \rangle$$

Wird die linke Seite von einem einzigen Element erzeugt, so auch jeder der Faktoren auf der rechten Seite. Im Fall $R = \mathbb{Z}[X]/\langle P \rangle$ für ein normiertes Polynom P gilt für $a \in \mathbb{Z}$ stets $P(a) \in \langle \bar{X} - a \rangle \subset R$. Haben wir speziell $P(a) \neq 0$ und ist $P(a) = q_1 \ldots q_r$ eine Zerlegung in ein Produkt paarweise teilerfremder Faktoren, so folgern wir in R die Darstellung als Produktideal

$$\langle \bar{X} - a \rangle = \langle \bar{X} - a, q_1 \rangle \ldots \langle \bar{X} - a, q_r \rangle$$

Hier gilt $\subset$, weil das Produkt nach [AL] 2.3.4 mit dem Schnitt zusammenfällt, und $\supset$ wegen $q_1 \ldots q_r \in \langle \bar{X} - a \rangle$. So sehen wir, daß für $\mathfrak{a}_i := \langle \bar{X} - a, q_i \rangle$ die Quotienten $\mathfrak{a}_i / \mathfrak{a}_i^2$ jeweils von einem Element erzeugt werden.

Proposition 8.2.9 (Ganzheitsringe von Kreisteilungskörpern). *Für jede Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{Z}[\zeta]$ ein Dedekindring und damit der Ganzheitsring des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta)$.*

Beweis. Nach 5.1.5 ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ eine ganze und modulendliche Ringerweiterung. Nach 5.2.11 haben damit beide Ringe dieselbe Krulldimension und es folgt $\operatorname{kdim} \mathbb{Z}[\zeta] = 1$. Es bleibt also nur zu zeigen, daß für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ der Quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von einem einzigen Element erzeugt wird. Wir behandeln zunächst den Fall einer primitiven p^r-ten Einheitswurzel für p prim. Wir kennen das zugehörige Kreisteilungspolynom $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$ aus [AL] 2.8.6 und folgern insbesondere $\Phi_{p^r}(1) = p$. Für den Ring $R := \mathbb{Z}[X]/\langle \Phi_{p^r}(X)\rangle$ bedeutet das die Beziehung $p \in \langle \bar{X} - 1\rangle$. Das liefert die linke Vertikale eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
R/pR \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{F}_p[X]/\langle \bar{\Phi}_{p^r}(X)\rangle \arrow[r, equal] & \mathbb{F}_p[X]/\langle (X-1)^{(p-1)p^{r-1}}\rangle \arrow[d, two heads] & \\
R/\langle \bar{X} - 1\rangle \arrow[rr, "\sim"] & & \mathbb{F}_p[X]/\langle X - 1\rangle \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{F}_p
\end{tikzcd}$$

Über pR liegt also genau ein maximales Ideal von R, und das wird von einem einzigen Element erzeugt, nämlich dem Element $\bar{X} - 1$. Ist andererseits l eine von p verschiedene Primzahl, so ist für $n \geq 1$ teilerfremd zu l das Polynom $X^n - 1$ separabel in $\mathbb{F}_l[X]$ und folglich zerfällt auch das Bild $\bar{\Phi}_n$ von Φ_n in $\mathbb{F}_l[X]$ in ein Produkt von paarweise teilerfremden irreduziblen Faktoren $\bar{\Phi}_n = Q_1 \ldots Q_s$. Für $R := \mathbb{Z}[X]/\langle \Phi_n(X)\rangle$ gilt demnach

$$R/lR \cong \mathbb{F}_l[X]/\langle \bar{\Phi}_n(X)\rangle \cong R/\mathfrak{m}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{m}_s$$

für die paarweise verschiedenen maximalen Ideale $\mathfrak{m}_i \subset R$, die l enthalten. Es folgt $lR = \langle \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_s\rangle$ und nach 8.2.8 werden dann auch alle $\mathfrak{m}_i/\langle \mathfrak{m}_i^2\rangle$ vom jeweiligen Bild von l erzeugt. Das erledigt den Fall einer primitiven p^r-ten Einheitswurzel. Es bleibt zu zeigen, daß auch für $m \geq 1$ teilfremd zu p und eine primitive mp^r-te Einheitswurzel ζ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von $\mathbb{Z}[\zeta]$, die p enthalten, der Quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von einem einzigen Element erzeugt wird. Da wir bereits wissen, daß $\mathbb{Z}[\zeta^m]$ ganz abgeschlossen ist, muß das Minimalpolynom P von ζ über $\mathbb{Q}(\zeta^m)$ Koeffizienten in $R := \mathbb{Z}[\zeta^m]$ haben und wir finden

$$R[Y]/\langle P(Y)\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\zeta]$$

Als Teiler von $Y^m - \zeta$ bleibt nun P separabel bei Reduktion modulo dem maximalen Ideal $\langle \zeta^m - 1\rangle$ von R über p, denn darunter wird es ein Teiler des Polynoms $Y^m - 1 \in \mathbb{F}_p[Y]$. Dasselbe Argument wie zuvor zeigt nun, daß für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von $\mathbb{Z}[\zeta]$ über p oder gleichbedeutend über $\langle \zeta^m - 1\rangle$ der Quotient $\mathfrak{m}/\langle \mathfrak{m}^2\rangle$ von $\zeta^m - 1$ erzeugt wird. □

Übungen

Übung 8.2.10 (**Ganzheitsringe quadratischer Zahlkörper**). Eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ vom Grad Zwei heißt ein **quadratischer Zahlkörper**. Offensichtlich hat jeder quadratische Zahlkörper die Gestalt $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für genau ein $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ ohne mehrfachen Primfaktor. Gegeben solch ein d kann der Ring der ganzen Zahlen in der quadratischen Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ beschrieben werden als

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} & d \notin 1 + 4\mathbb{Z}, \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\big((1+\sqrt{d})/2\big) & d \in 1 + 4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Es ist damit klar, daß $A := \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 - 5\rangle$ nicht an allen maximalen Idealen einen regulären lokalen Ring haben kann. Man zeige speziell, daß für das maximale Ideal $\mathfrak{m} := \langle 2, X-1\rangle$ gilt $\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$.

Übung 8.2.11. Sei B ein Dedekindring. Ein von Null verschiedener endlich erzeugter B-Untermodul von $\operatorname{Quot} B$ heißt ein **gebrochenes Ideal von** B. Wir erhalten eine Bijektion

$$\{\text{gebrochene Ideale von } B\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{Z}\operatorname{Max} B$$

mit dem freien $\mathbb{Z}$-Modul über $\operatorname{Max} B$, indem wir jedem gebrochenen Ideal I die Funktion f_I zuordnen mit $f_I(\mathfrak{m}) = \inf\{v_{\mathfrak{m}}(b) \mid b \in I\}$ für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} B$. Erklären wir das Produkt IJ zweier gebrochener Ideale I, J als das von allen Produkten ab von Elementen $a \in I$, $b \in J$ erzeugte gebrochene Ideal, so wird diese Bijektion sogar ein Gruppenisomorphismus. Natürlich induziert sie auch eine Bijektion

$$\{\text{Ideale von } B\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{N}\operatorname{Max} B$$

mit der Menge aller endlichen Multimengen von maximalen Idealen. Ist speziell $k = \bar{k}$ und X eine irreduzible glatte affine Kurve über k, so entsprechen die gebrochenen Ideale des Rings der regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ eineindeutig formalen endlichen $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Punkten aus X, und zwar entspricht $\sum n_x x$ gerade der Menge der rationalen Funktionen $f \in \mathcal{M}(X)$, die an allen Stellen x mit $n_x \geq 0$ definiert sind, an allen Stellen x mit $n_x > 0$ eine n_x-fache Nullstelle haben, und an allen Stellen mit $n_x < 0$ entweder definiert sind oder einen Pol der Ordnung höchstens n_x haben. In Formeln ausgedrückt haben wir also

$$\begin{array}{ccc} \{\text{gebrochene Ideale von } \mathcal{O}(X)\} & \stackrel{\sim}{\leftarrow} & \mathbb{Z}X \\ \{f \in \mathcal{M}(X) \mid v_x(f) \geq n_x \ \forall x \in X\} & \leftarrow\!\shortmid & \sum n_x x \end{array}$$

Übung 8.2.12 (**Moduln über Dedekindringen**). Jeder endlich erzeugte Modul über einem Dedekindring ist isomorph zur direkten Summe eines projektiven Moduls mit einem Torsionsmodul. Hinweis: 4.3.39 und die Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen.

Übung 8.2.13. Sei $A \subset B$ eine modulendliche Kringerweiterung. Ist A ein Dedekindring und B ein Integritätsbereich, so induziert unsere Einbettung für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ eine Einbettung $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow B/\mathfrak{a}B$. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall eines lokalen Dekekindrings A zurück und verwende 8.1.22.

8.3 Norm, Spur, Endlichkeit ganzer Abschlüsse*

Definition 8.3.1. Gegeben eine endliche Körpererweiterung L/K erklären wir zwei Abbildungen $\mathrm{N}, \mathrm{S} : L \to K$, die **Norm** und die **Spur**, indem wir für $a \in L$ die K-lineare Abbildung $(a\cdot) : L \to L$ betrachten und setzen

$$\begin{array}{rcccccl} \mathrm{Norm}(a) & = & \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}_L^K(a) & := & \det_K((a\cdot)|L) \\ \mathrm{Spur}(a) & = & \mathrm{S}(a) & = & \mathrm{S}_L^K(a) & := & \mathrm{tr}_K((a\cdot)|L) \end{array}$$

8.3.2. Für $a \in K$ haben wir offensichtlich $\mathrm{N}_L^K(a) = a^{[L:K]}$ und $\mathrm{S}_L^K(a) = [L : K]a$. Für $\sigma : L \xrightarrow{\sim} M$ ein Isomorphismus von endlichen Körpererweiterungen von K gilt offensichtlich $\mathrm{N}_L^K(a) = \mathrm{N}_M^K(\sigma(a))$ und $\mathrm{S}_L^K(a) = \mathrm{S}_M^K(\sigma(a))$.

8.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). Im Fall der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ erhalten wir so die Abbildung $\mathrm{N}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z\bar{z}$ und damit gerade das Quadrat der Norm einer komplexen Zahl, wie wir sie in [LA1] 2.7.9 erklärt hatten. Mit dieser terminologischen Kollision müssen wir nun weiterleben. Was im Einzelfall genau gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

8.3.4 (**Verallgemeinerungen aus Schiefkörper**). Ist allgemeiner D eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper K, so findet man auch in dieser Allgemeinheit manchmal die Notation $\mathrm{N}_D^K(a) = \det((a\cdot)|D)$. Im Fall eines Schiefkörpers D wird aber die Notation $\mathrm{N}(a)$ alternativ auch verwendet als Abkürzung für $\mathrm{N}_{K(a)}^K(a)$.

Lemma 8.3.5 (Transitivität von Norm und Spur). *Gegeben $K \subset L \subset M$ endliche Körpererweiterungen gelten die Formeln*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{N}_M^K & = & \mathrm{N}_L^K \circ \mathrm{N}_M^L \\ \mathrm{S}_M^K & = & \mathrm{S}_L^K \circ \mathrm{S}_M^L \end{array}$$

Beweis. Die zweite Formel folgt daraus, daß sich für eine $(m \times m)$-Matrix von $(n \times n)$-Matrizen die Gesamtspur auch berechnen läßt, indem man zunächst alle $(n \times n)$-Blöcke auf der Diagonalen aufaddiert und dann von dieser Summe die Spur nimmt. Die erste Formel folgt daraus, daß man nach [LA1] 6.4.15 ganz analog auch die Determinante einer Blockmatrix mit paarweise kommutierenden Blöcken berechnen kann als die Determinante der $(n \times n)$-Matrix, die sich als „Blockdeterminante" ergibt. Ist etwas genauer $m_1, \ldots, m_r$ eine L-Basis von

M, so wird die Multiplikation mit $b \in M$ gegeben durch eine $(r \times r)$-Matrix $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r; L)$. Ist weiter $l_1, \ldots, l_s$ eine K-Basis von L, so werden die Multiplikationen mit a_{ij} dargestellt durch gewisse $(s \times s)$-Matrizen

$$A_{ij} \in \mathrm{Mat}(s; K)$$

Die Multiplikation mit $b \in M$ wird dann in der K-Basis von M, die aus den $m_i l_\nu$ besteht, durch die Blockmatrix $B = (A_{ij})$ dargestellt. □

Satz 8.3.6 (Norm und Spur über Galoistheorie). *Gegeben L/K eine endliche separable Körpererweiterung und M eine Vergrößerung von L zu einer normalen Erweiterung von K gilt*

$$\mathrm{S}_L^K(a) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Kring}^K(L,M)} \sigma(a) \quad \textit{und} \quad \mathrm{N}_L^K(a) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Kring}^K(L,M)} \sigma(a)$$

8.3.7. Ist also speziell L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ, so gilt $\mathrm{S}(a) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(a)$ und $\mathrm{N}(a) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(a)$.

Beweis. Ist $L' \subset L$ ein Unterkörper, der a enthält, so gilt wegen der Transitivität von Norm und Spur 8.3.5 und unseren Erkenntnissen 8.3.1 für Norm und Spur von Elementen des Grundkörpers offensichtlich $\mathrm{S}_L^K(a) = [L : L']\mathrm{S}_{L'}^K(a)$ und $\mathrm{N}_L^K(a) = (\mathrm{N}_{L'}^K(a))^{[L:L']}$. Die rechten Seiten der behaupteten Formeln verhalten sich nun in derselben Weise beim Übergang von L' zu L, so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $L = K(a)$ annehmen dürfen. Dann definiert jedoch $X \mapsto a$ einen Körperisomorphismus

$$K[X]/\langle \mathrm{Irr}(a, K) \rangle \xrightarrow{\sim} L$$

Das charakteristische Polynom der K-linearen Abbildung $(a\cdot) : L \to L$ ist mit [AL] 2.1.26 folglich $\det(X\mathrm{id} - (a\cdot)) = \mathrm{Irr}(a, K) = \prod(X - \sigma(a))$. Setzen wir hier $X = 0$, so ergibt sich die Formel für die Norm. Vergleichen wir dahingegen die Koeffizienten der zweithöchsten Potenzen von X auf beiden Seiten, so ergibt sich die Formel für die Spur. □

Korollar 8.3.8 (Spur und Separabilität). *Eine endliche Körpererweiterung ist genau dann separabel, wenn die zugehörige Spurabbildung nicht identisch verschwindet.*

Beweis. Ist unsere Erweiterung separabel, so kann ihre Spurabbildung nicht identisch verschwinden nach ihrer Darstellung als Summe von Galoiskonjugierten aus 8.3.6 und dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren [AL] 3.8.15. Ist unsere Erweiterung nicht separabel, so überlassen wir das Argument dem Leser mit dem Hinweis, sich vom Beweis von 8.3.6 inspirieren zu lassen. □

8.3.9. Für jede endliche Körpererweiterung L/K liefert die Spur eine K-bilineare Paarung, die **Spurform**

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{S}_L^K(xy) \end{array}$$

Sie ist offensichtlich invariant unter der Galoisgruppe. Für L/K endlich separabel ist diese Paarung nach 8.3.8 nicht ausgeartet.

Satz 8.3.10 (Endlichkeit ganzer Abschlüsse). *Seien A ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätsring und $L/\mathrm{Quot}A$ eine endliche separable Körpererweiterung seines Quotientenkörpers. So ist der ganze Abschluß B von A in L modulendlich über A.*

Beweis. Nach 8.3.8 liefert für jede endliche separable Erweiterung die Spur $\mathrm{S}_L^K : L \to K$ eine symmetrische nichtausgeartete Bilinearform

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{S}_L^K(xy) \end{array}$$

Aus der Beschreibung der Spur als Summe von Galoiskonjugierten 8.3.6 folgt, daß $\mathrm{S}_L^K(b)$ ganz ist über A für alle $b \in B$. Also gilt nach unserer Annahme $\mathrm{S}_L^K(B) \subset A$. Nun finden wir nach 5.7.20 sicher $b_1, \ldots, b_n \in B$, die eine Basis von L über K bilden. Sie spannen in L einen freien A-Modul V vom Rang n auf. Die duale Basis $b_1^*, \ldots, b_n^*$ in Bezug auf unsere Bilinearform spannt dann in L einen weiteren freien A-Modul V^* vom Rang n auf, der auch beschrieben werden kann durch die Formel

$$V^* = \{x \in L \mid \mathrm{S}_L^K(xy) \in A \quad \forall y \in V\}$$

Insbesondere gilt $B \subset V^*$. Aus A noethersch folgt dann sofort, daß B endlich erzeugt ist als A-Modul. □

Satz 8.3.11 (Endlichkeit ganzer Abschlüsse im geometrischen Fall). *Seien A ein über einem Körper k ringendlicher Integritätskring und $L/\mathrm{Quot}A$ eine endliche Körpererweiterung seines Quotientenkörpers. So ist auch der ganze Abschluß von A in L ringendlich über k und a forteriori modulendlich über A.*

8.3.12. Insbesondere ist auch der ganze Abschluß von A in $\mathrm{Quot}A$ ringendlich über k. Im Gegensatz zum vorhergehenden Satz 8.3.10 brauchen wir in diesem „geometrischen" Fall weder A ganz abgeschlossen noch unsere Körpererweiterung separabel anzunehmen.

Beweis. Noether's Normalisierungslemma 5.4.6 liefert uns einen Teilring

$$k['x_1, \ldots, x_n] \subset A$$

mit A modulendlich über diesem Teilring. Der ganze Abschluß von A in L ist also auch der ganze Abschluß von $k['x_1, \ldots, x_n]$ in L. Ist $L/k('x_1, \ldots, x_n)$ separabel, so sind wir fertig mit dem Satz über die Endlichkeit ganzer Abschlüsse im Fall ganz abgeschlossener Ringe 8.3.10, da ja Polynomringe ganz abgeschlossen sind. Sonst vergrößern wir L mit [AL] 3.8.25 zu einer endlichen normalen Erweiterung $N/k('x_1, \ldots, x_n)$ mit Galoisgruppe G und betrachten die Körperkette

$$k('x_1, \ldots, x_n) \subset N^G \subset N$$

Sie besteht nach [AL] 4.1.30 aus einer rein inseparablen Erweiterung gefolgt von einer separablen Erweiterung. Nach [AL] 3.9.41 gibt es mithin eine p-Potenz q, für $p > 0$ die Charakteristik von k, mit $f^q \in k('x_1, \ldots, x_n)$ für alle $f \in N^G$. Nehmen wir Erzeuger $f_1, \ldots, f_r \in N^G$ der ersten Körpererweiterung und notieren h eine endliche Körpererweiterung von k, die für alle Koeffizienten der Zähler und Nenner der f_i^q jeweils q-te Wurzeln enthält, so erhalten wir eine Einbettung $N^G \subset h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q})$ und können N vergrößern zu einer endlichen separablen Erweiterung $h(x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}) \subset M$, so daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} k('x_1, \ldots, x_n) & \subset & N^G & \subset & N \\ & & \cap & & \cap \\ & & h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}) & \subset & M \end{array}$$

die untere rechte Inklusion auch separabel ist. Der ganze Abschluß des Teilrings $k['x_1, \ldots, x_n]$ in $h('x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q})$ ist aber offensichtlich $h[x_1^{1/q}, \ldots, x_n^{1/q}]$ und damit modulendlich über $k['x_1, \ldots, x_n]$. Der ganze Abschluß in M ist dann modulendlich nach 8.3.10. □

Übungen

Ergänzende Übung 8.3.13. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, V ein endlichdimensionaler L-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. So gilt die Identität $\det_K \varphi = \mathrm{N}_L^K(\det_L \varphi)$. Hinweis: [LA1] 6.4.15. Alternative: Man ziehe sich durch geeignete Körpererweiterung von L auf den Fall zurück, daß für eine Basis von V die Matrix von φ obere Dreiecksgestalt hat, und argumentiere dann mit der Formel für die Determinante block-oberer Dreiecksmatrizen [LA1] 6.2.9.

8.4 Bewertungen und Körpererweiterungen*

Definition 8.4.1. Ein Homomorphismus von diskret bewerteten Körpern heißt **bewertungsverträglich**, wenn seine Verknüpfung mit der Bewertung des Bildkörpers ein positives Vielfaches der Bewertung auf dem Ausgangskörper ist.

8.4.2. Für einen bewertungsverträglichen Homomorphismus $\varphi : K \to L$ von diskret bewerteten Körpern gibt es demnach per definitionem genau eine positive natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}_{>0}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, two heads, "v_K"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "(d\cdot)"] \\ L \arrow[r, two heads, "v_L"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese natürliche Zahl d heißt der **Verzweigungsgrad** unserer bewertungsverträglichen Körpererweiterung. Auf Englisch sagt man dazu **ramification index**, auf Französisch **indice de ramification**. Ein bewertungsverträglicher Homomorphismus vom Verzweigungsgrad Eins heißt **unverzweigt**. Ein Unterkörper eines diskret bewerteten Körpers besitzt genau dann eine verträgliche Bewertung, wenn die Bewertung des großen Körpers auf dem Unterkörper auch Werte außerhalb von $\{0, \infty\}$ annimmt.

Beispiel 8.4.3. Dieses Beispiel ist für Leser mit Grundkenntnissen in Funktionentheorie gedacht. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ induziert durch Vorschalten eine Einbettung in der Gegenrichtung auf dem Körper der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$. Gegeben $p \in \mathbb{C}$ mit $p^n = q$ ist das zum Beispiel ein bewertungsverträglicher Körperhomomorphismus $(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}), v_p) \hookrightarrow (\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}), v_q)$ mit Verzweigungsgrad Eins für $p \neq 0 \neq q$ und Verzweigungsgrad n für $p = q = 0$. Ist allgemeiner $f : X \to Y$ ein nichtkonstanter Homomorphismus von zusammenhängenden Riemann'schen Flächen und $p \in X$ ein Punkt mit Bild $f(p) = q \in Y$, so liefert das Zurückholen von meromorphen Funktionen einen Homomorphismus von diskret bewerteten Körpern

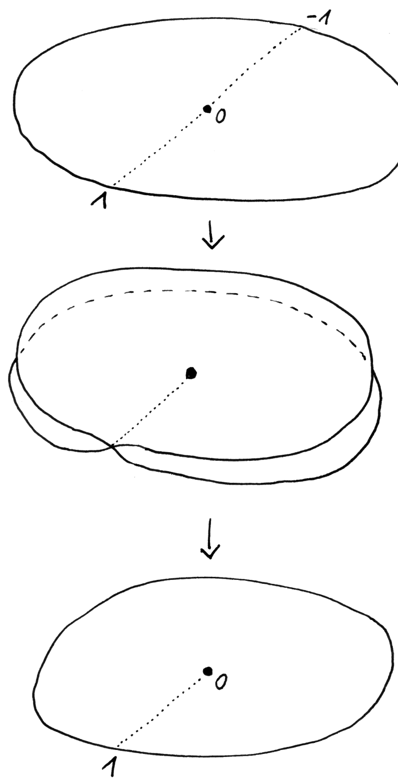
$$(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(Y), v_q) \hookrightarrow (\mathcal{M}^{\mathrm{an}}(X), v_p)$$

und der zugehörige Verzweigungsgrad ist genau der „topologische" Verzweigungsgrad im Sinne von **??**.

Beispiel 8.4.4. Die Einbettung $\mathbb{C}((T)) \hookrightarrow \mathbb{C}((Y))$ des Körpers der Laurentreihen über $\mathbb{C}$ in sich selber vermittels $T \mapsto Y^n$ für ein fest vorgegebenes $n > 0$ ist ein bewertungsverträglicher Morphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad n.

Beispiel 8.4.5. Die Einbettung $\mathbb{Q}((T)) \hookrightarrow \mathbb{C}((T))$ des Körpers der Laurentreihen über $\mathbb{Q}$ in den Körper der Laurentreihen über $\mathbb{C}$ ist ein bewertungsverträglicher Morphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad Eins.

Definition 8.4.6. Ein Homomorphismus von lokalen Ringen heißt **lokal**, wenn das Urbild des größten echten Ideals das größte echte Ideal ist.



Dies Bild erinnert unsere Anschauung für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der Einheitskreisscheibe auf sich selbst. Es stellt diese Abbildung dar als die Komposition einer Abbildung der Einheitskreisscheibe auf eine räumliche sich selbst durchdringende Fläche, gegeben in etwa durch eine Formel der Gestalt $z \mapsto (z^2, \varepsilon(\operatorname{Im} z))$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ für geeignetes monotones und in einer Umgebung von Null streng monotones ε, gefolgt von einer senkrechten Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Das Zurückholen meromorpher Funktionen unter dieser Abbildung induziert für die Bewertungen nach der Nullstellen- beziehungsweise Polordnung am Ursprung einen Homomorphismus diskret bewerteter Körper vom Verzweigungsgrad Zwei.

Proposition 8.4.7 (Verzweigung bei Körpern und Ringen). *Das Bilden des Teilrings aller Elemente mit nichtnegativer Bewertung liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc}\left\{\begin{array}{c}\textit{diskret bewertete Körper,}\\ \textit{bewertungsverträgliche}\\ \textit{Körperhomomorphismen}\end{array}\right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{\begin{array}{c}\textit{diskrete Bewertungsringe,}\\ \textit{lokale Ringhomomorphismen}\end{array}\right\}\\ (K,v) & \mapsto & \mathfrak{o}_K := \{x\in K \mid v(x)\geq 0\}\end{array}$$

Die Uniformisierenden des diskreten Bewertungsrings $\mathfrak{o}_K$ sind dabei genau die Elemente unseres diskret bewerteten Körpers mit Bewertung Eins.

8.4.8. Man verwendet diese Entsprechung, um die Begriffe **Verzweigungsgrad** und **unverzweigt** auf den Fall lokaler Ringhomomorphismen diskreter Bewertungsringe zu übertragen. Im Fall eines lokalen Ringhomomorphismus diskreter Bewertungsringe $(A,\mathfrak{m})\to(B,\mathfrak{n})$ ist der Verzweigungsgrad mithin das $d\geq 1$ mit $B\mathfrak{m}=\mathfrak{n}^d$.

Beispiel 8.4.9. Sei X eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche und $x\in X$ ein Punkt. Dem diskret bewerteten Körper $\mathcal{M}_x^{\mathrm{an}}$ der „meromorphen Funktionskeime bei x" entspricht unter unserer Äquivalenz der Ring $\mathcal{O}_x^{\mathrm{an}}$ der „holomorphen Funktionskeime bei x". Eine Uniformisierende wäre in diesem Fall ein holomorpher Funktionskeim u bei x mit einer einfachen Nullstelle bei x. Per definitionem besitzt x eine zusammenhängende offene Umgebung $U\Subset X$, auf der sich unser Funktionskeim u realisieren läßt und auf der u sogar einen Isomorphismus von bepunkteten Riemann'schen Flächen

$$u:(U,x)\stackrel{\sim}{\to}(W,0)$$

mit $W=u(U)\Subset\mathbb{C}$ induziert. Man sagt dann auch, die Funktion u liefere eine „Uniformisierung der Riemann'schen Fläche X in einer Umgebung von x" und daher rührt die Bezeichnung „Uniformisierende" im Beweis von 8.1.11.

Beweis. Sei (K,v) ein diskret bewerteter Körper. Offensichtlich ist $\mathfrak{o}_K\subset K$ ein Teilring und seine Einheitengruppe ist $\mathfrak{o}_K^\times=\{x\in K\mid v(x)=0\}$. Die Nichteinheiten von $\mathfrak{o}_K$ bilden also ein Ideal $\mathfrak{m}_K=\{x\in K\mid v(x)\geq 1\}$, das notwendig das einzige maximale Ideal sein muß. Jedes $\pi\in K$ mit $v(\pi)=1$ liefert einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{o}_K^\times\times\mathbb{Z} & \stackrel{\sim}{\to} & K^\times\\ (u,n) & \mapsto & u\pi^n\end{array}$$

Dieselbe Abbildung induziert auch eine Bijektion $\mathfrak{o}_K^\times\times\mathbb{N}\stackrel{\sim}{\to}\mathfrak{o}_K\backslash 0$. Die Ideale von $\mathfrak{o}_K$ sind also genau das Nullideal und die Ideale $\langle\pi^n\rangle$ für $n\in\mathbb{N}$. Das zeigt, daß unser Ring $\mathfrak{o}_K$ ein Hauptidealring ist und π bis auf Einheiten sein einziges irreduzibles Element. Weiter liefert jeder Körperhomomorphismus $\varphi : K \to L$ von diskret bewerteten Körpern mit $v_L(\varphi(x)) \in \mathbb{N}_{>0} v_K(x)\ \forall x \in K$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_L$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_L) = \mathfrak{m}_K$. Damit liefert die Vorschrift aus unserem Lemma in der Tat einen Funktor der beschriebenen Art. Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben. □

Satz 8.4.10 (Gradformel). *Gegeben eine modulendliche Erweiterung $A \subset B$ von Dedekindringen gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ die Identität*

$$[\operatorname{Quot} B : \operatorname{Quot} A] = \sum_{\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}} d(B_{\mathfrak{n}}/A_{\mathfrak{m}}) \cdot [B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}]$$

mit der Summe über alle $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ und $d(B_{\mathfrak{n}}/A_{\mathfrak{m}})$ dem Verzweigungsgrad im Sinne von 8.4.8.

Ergänzung 8.4.11. In der Zahlentheorie schreibt man diese Identität meist mit anderen Symbolen. Ist genauer L/K eine Erweiterung von Zahlkörpern und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}_K$ ein maximales Ideal des Ganzheitsrings von K, so liest sich unsere Formel in der dort üblichen Notation

$$[L : K] = \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{P}} e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$$

Im Fall einer primitiven p^r-ten Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ und der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ finden wir mit 8.2.9 die Ganzheitsringe $\mathbb{Z}[\zeta] \supset \mathbb{Z}$ und über dem maximalen Ideal $\langle p \rangle \subset \mathbb{Z}$ liegt, nun nach dem Beweis von 8.2.9, genau ein maximales Ideal $\langle \zeta - 1 \rangle \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ und der Verzweigungsgrad ist $e = p^{r-1}(p-1)$ und der Grad der Erweiterung der Restklassenkörper ist $f = 1$. Dahingegen entsprechen für eine Primzahl l und jedes zu l teilerfremde $n \geq 1$ und jede primitive n-te Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ die über dem maximalen Ideal $\mathfrak{p} = \langle l \rangle \subset \mathbb{Z}$ liegenden maximalen Ideale von $\mathbb{Z}[\zeta]$ eineindeutig den irreduziblen Faktoren des Bildes $\bar{\Phi}_n \in \mathbb{F}_l[X]$ des n-ten Kreisteilungspolynoms $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, und ist genauer $\bar{\Phi}_n = Q_1 \ldots Q_s$ die Zerlegung in irreduzible Faktoren und sind $\mathfrak{P}_i = \langle l, Q_i \rangle \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ die zugehörigen maximalen Ideale, so haben wir $e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}) = 1$ und $f(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}) = \operatorname{grad} Q_i$, alles nach dem Beweis von 8.2.9.

8.4.12. Unsere Endlichkeitssätze von eben liefern zwei typische Situationen, in denen dieser Satz anwendbar ist: Einerseits nach 8.3.10 für einen Dedekindring A, eine endliche separable Erweiterung $L/\operatorname{Quot} A$ und B den ganzen Abschluß von A in L. Diese Situation trifft man oft in der Zahlentheorie an. Oder nach 8.3.11 für einen Dedekindring A, der ringendlich ist über einem vorgegebenen Grundkörper, eine beliebige endliche Körpererweiterung $L/\operatorname{Quot} A$ und B den ganzen Abschluß von A in L. Das ist der „geometrische“ Fall einer „verzweigten Überlagerung von algebraischen Kurven“, der für mich insbesondere im Fall des Grundkörpers $\mathbb{C}$ der Anschauung gut zugänglich ist. Allerdings wird man im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers in der Situation des Satzes stets $[B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}] = 1$ finden, weshalb dieser Faktor meiner Anschauung schlechter zugänglich ist. Man sieht ihn aber deutlich im Fall der Erweiterung $\mathbb{R}[T] \subset \mathbb{C}[T]$.

Beweis. Nach 5.2.12 ist unsere Summe endlich. Die Lokalisierung $B_\mathfrak{m}$ von B nach $A \backslash \mathfrak{m}$ ist modulendlich und torsionsfrei über dem Hauptidealring $A_\mathfrak{m}$, also frei vom Rang $[\operatorname{Quot} B : \operatorname{Quot} A]$. Damit ist auch $\bar{B} := B/\mathfrak{m}B$ frei von demselben Rang über dem Körper $\bar{A} := A/\mathfrak{m}$ und nach 5.11.4 liefern die Abbildungen in die Lokalisierungen für unseren Kring endlicher Länge $\bar{B}$ einen Isomorphismus

$$\bar{B} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}} \bar{B}_{\bar{\mathfrak{n}}}$$

mit $\bar{\mathfrak{n}}$ dem Bild von $\mathfrak{n}$ in $\bar{B}$. Da Lokalisierung nach 4.3.57 mit Restklassenbildung vertauscht, ist die natürliche Abbildung ein Isomorphismus $B_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B_\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} \bar{B}_{\bar{\mathfrak{n}}}$. Per definitionem haben wir $\mathfrak{m}B_\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\mathfrak{n}^d$ für d der zugehörige Verzweigungsgrad, folglich hat $B_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B_\mathfrak{n}$ die Länge alias Dimension d als Modul über $B/\mathfrak{n}$ und dann eine entsprechend vervielfachte Dimension als Vektorraum über $A/\mathfrak{m}$. □

8.4.13. Ist $A \subset B$ eine modulendliche Erweiterung von Dedekindringen, so ist notwendig B der ganze Abschluß von A in $\operatorname{Quot}(B)$.

Satz 8.4.14 (Galoistheorie für lokale und globale Erweiterungen). *Sei eine modulendliche Erweiterung $A \subset B$ von Dedekindringen gegeben, die eine normale Erweiterung der Quotientenkörper induziert. Sei G deren Galoisgruppe und sei $\mathfrak{n} \subset B$ ein maximales Ideal mit Bild $\mathfrak{m} := \mathfrak{n} \cap A$. So ist die auf den Restklassenkörpern induzierte Abbildung $\bar{A} \to \bar{B}$ eine normale Körpererweiterung und die offensichtliche Abbildung eine Surjektion*

$$G_\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{B}/\bar{A})$$

der Standgruppe $G_\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{n}$, der sogenannten **Zerlegungsgruppe von** $\mathfrak{n}$*, auf die Galoisgruppe der Erweiterung der Restklassenkörper.*

8.4.15. Der Kern unseres surjektiven Homomorphismus heißt die **Trägheitsgruppe von** $\mathfrak{n}$. Sind die beteiligten Körpererweiterungen der Quotientenkörper sowie der Restklassenkörper auch noch separabel, wie zum Beispiel nach [AL] 3.9.22 im Fall von Zahlkörpern, so zeigt die Gradformel zusammen mit dem folgenden Beweis, daß die Kardinalität der Trägheitsgruppe mit dem Verzweigungsindex übereinstimmen muß.

Beweis. Die Normalität ergibt sich als ein Spezialfall von 5.7.10, das Minimalpolynom von $b \in B$ zerfällt mit Nullstellen in B und folglich mit Koeffizienten in A und kann folglich modulo $\mathfrak{m}$ reduziert werden. Betrachten wir nun den Invariantenring der Standgruppe $C := B^{G_\mathfrak{n}}$, so bilden nach 5.7.8 die maximalen Ideale in B über $\mathfrak{l} := C \cap \mathfrak{n}$ eine $G_\mathfrak{n}$-Bahn, die folglich nur aus dem einzigen Punkt $\mathfrak{n}$ bestehen kann. Ein Vergleich der Gradformeln 8.4.10 für $C \subset B$ und $A \subset B$ zeigt $d(B_\mathfrak{n}/A_\mathfrak{m}) = d(B_\mathfrak{n}/C_\mathfrak{l})$ und $[B/\mathfrak{n} : C/\mathfrak{l}] = [B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}]$. Daraus hinwiederum folgt mit der Notation $\bar{C} := C/\mathfrak{l}$, daß die Einbettung einen Isomorphismus $\bar{A} \stackrel{\sim}{\to} \bar{C}$ liefert. Es reicht also zu zeigen, daß die offensichtliche Abbildung eine Surjektion

$$G_\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{B}/\bar{C})$$

induziert. Nun ist ja nach [AL] 4.1.30 der Fixkörper der Galoisgruppe von $F \subset \bar{B}$ rein inseparabel über $\bar{C}$. Andererseits gibt es nach dem Satz vom primitiven Element ein $\bar{b} \in \bar{B}$ mit $\bar{B} = F[\bar{b}]$. Ist $b \in B$ ein Urbild von $\bar{b}$, so hat das Minimalpolynom von b wie zu Anfang des Beweises besprochen Koeffizienten in C und kann folglich modulo $\mathfrak{l}$ reduziert werden. Die Operation von $G_\mathfrak{n}$ auf den Nullstellen des Minimalpolynoms von $\bar{b}$ ist folglich transitiv. Das aber zeigt die behauptete Surjektivität. □

Übungen

Übung 8.4.16. Man zeige, daß für $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl das Ideal $\langle p \rangle$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zerfällt als das Produkt der beiden Ideale $\langle p, 1+\sqrt{-5}\rangle$ und $\langle p, 1-\sqrt{-5}\rangle$, wenn (-5) ein Quadrat ist modulo p, und daß andernfalls das Hauptideal $\langle p \rangle$ auch in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ maximal ist. Im Spezialfall $p = 2$ und nur in diesem gilt zusätzlich $\langle p, 1+\sqrt{-5}\rangle = \langle p, 1-\sqrt{-5}\rangle$.

8.5 Spur und Diskriminante*

8.5.1. Gegeben ein Kring k und ein freier endlich erzeugter k-Modul M ist die **Spur** $\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_k : \mathrm{End}_k M \to k$ definiert als die Verknüpfung von kanonischen Homomorphismen

$$\mathrm{End}_k M \stackrel{\sim}{\leftarrow} M \otimes_k \mathrm{Hom}_k(M, k) \to k$$

Wir können diese Spur berechnen als die Summe der Diagonaleinträge einer darstellenden Matrix in Bezug auf eine und jede Basis von M.

8.5.2 (**Spur auf projektivem Modul**). Die vorhergehende Definition bleibt sinnvoll für einen Kring k und einen projektiven endlich erzeugten k-Modul M und liefert auch dann eine Spur $\mathrm{tr} : \mathrm{End}_k M \to k$.

8.5.3 (**Spur und Erweiterung der Skalare**). Die Spur ist verträglich mit der Erweiterung von Skalaren. Ist genauer $\varphi : k \to K$ ein Kringhomomorphismus und M ein freier oder allgemeiner projektiver endlich erzeugter k-Modul und $f \in \operatorname{End}_k M$ ein Endomorphismus und $\operatorname{id} \otimes_k f \in \operatorname{End}_K(K \otimes_k M)$ der entsprechend erweiterte Endomorphismus, so gilt die Identität

$$\varphi(\operatorname{tr}_k(f)) = \operatorname{tr}_K(\operatorname{id} \otimes_k f)$$

8.5.4 (**Spur nilpotenter Endomorphismen**). Jeder nilpotente Endomorphismus hat nilpotente Spur. Um das einzusehen, mag man beachten, daß wir nach 4.5.6 nur zu zeigen brauchen, daß die Spur eines nilpotenten Endomorphismus in jedem Primideal liegt. Mit Erweiterung der Skalare können wir uns so erst auf den Fall eines Integritätsbereichs und dann auf den Fall eines Körpers zurückziehen, und in letzterem Fall folgt es aus Übung [LA1] 2.6.15. Ich hätte gerne ein vergleichbar elementares Argument, das nicht via 4.5.6 auf dem Zorn'schen Lemma beruht.

8.5.5 (**Spur eines Kommutators**). Gegeben freie oder allgemeiner projektive endlich erzeugte Moduln M, N über einem Kring k und Homomorphismen $f : M \to N$ und $g : N \to M$ gilt

$$\operatorname{tr}(fg) = \operatorname{tr}(gf)$$

Im Fall freier Moduln prüft man das leicht in Matrizen. Im allgemeinen notiert man $M^* = \operatorname{Hom}_k(M, k)$ und die Behauptung folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & N \otimes N^* \arrow[dr] & \\
M \otimes M^* \otimes N \otimes N^* \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\
 & M \otimes M^* \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

mit den durch Evalutionen gegebenen Morphismen.

Definition 8.5.6. Gegeben ein Kring k und eine modulendliche k-Algebra A, die frei oder allgemeiner projektiv ist als k-Modul, erhalten wir wie in [NAS] 3.6.7 mit 8.5.1 eine k-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Tr} = \operatorname{Tr}_k : A & \to & k \\ a & \mapsto & \operatorname{tr}((a\cdot) : A \to A) \end{array}$$

und können so die k-bilineare Abbildung $A \times A \to k$, $(a, b) \mapsto \operatorname{Tr}(ab) = \operatorname{tr}((ab)\cdot)$ betrachten. Sie heißt auch in dieser Allgemeinheit die **Spurform**. Wieder gilt $(a, b) = (b, a)$ und $(ax, b) = (a, xb)$ für alle $a, b, x \in A$.

Satz 8.5.7 (**Endliche étale Überlangerungen eines Körpers**). *Seien k ein Körper und A eine modulendliche k-Kringalgebra. Genau dann ist A ein Produkt von separablen Körpererweiterungen von k, wenn die Spurform nicht ausgeartet ist.*

Vorschau 8.5.8. Ein Kringhomomorphismus $k \to A$ heißt allgemein **modulendlich étale** oder auch eine **endliche étale Überlagerung**, wenn A ein endlich erzeugter projektiver k-Modul ist und die Spurform $(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}_k(ab)$ einen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(A, k)$ induziert.

Beweis. Jedes nilpotente Element von A liegt nach 8.5.4 im Radikal der Spurform. Wenn sie nicht ausgeartet ist, besitzt demnach A keine nilpotenten Elemente und mit 5.9.5 folgt, daß A ein Produkt von Körpern ist, die nach dem Separabilitätskriterium 8.3.8 alle über k separabel sind. Die andere Implikation folgt sofort aus der anderen Implikation in 8.3.8. □

8.5.9. In Charakteristik Null ist unser Satz auch eine direkte Konsequenz des Spurkriteriums für Halbeinfachkeit [NAS] 3.6.12, das sogar für nicht notwendig kommutative k-Ringalgebren gilt.

Definition 8.5.10. Gegeben ein Kring k und eine k-Kringalgebra A, die frei von endlichem Rang oder zumindest endlich erzeugt und projektiv ist als k-Modul, vereinbaren wir für $a_1, \ldots, a_n \in A$ die Notation

$$\mathrm{Dis}_{A/k}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{Dis}(a_1, \ldots, a_n) := \det(\mathrm{Tr}(a_i a_j)_{i,j=1}^n)$$

Wir nennen dieses Element die **Diskriminante der Elemente** $a_1, \ldots, a_n$.

8.5.11. Gegeben ein Körper k und eine modulendliche k-Kringalgebra A ist offensichtlich die Spurform von A genau dann nicht ausgeartet, wenn für eine und jede k-Basis $a_1, \ldots, a_n$ von A gilt

$$\mathrm{Dis}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

8.5.12. Seien k ein Kring und A eine freie modulendliche k-Kringalgebra. Liegen Elemente $b_1, \ldots, b_n \in A$ im k-Spann von weiteren Elementen $a_1, \ldots, a_n \in A$, so gilt offensichtlich $\mathrm{Dis}(b_1, \ldots, b_n) = c^2 \,\mathrm{Dis}(a_1, \ldots, a_n)$ für ein $c \in k$. Für je zwei k-Basen von A unterscheiden sich insbesondere diese Elemente höchstens um die Multiplikation mit dem Quadrat einer Einheit $c \in k^\times$.

8.5.13. Seien k ein Kring und A eine freie oder zumindest projektive modulendliche k-Kringalgebra. Gegeben ein Kringhomomorphismus $\varphi : k \to K$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt offensichtlich

$$\varphi : \mathrm{Dis}_{A/k}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \mathrm{Dis}_{A \otimes_k K/K}(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1)$$

8.5.14. Gegeben ein Kring k und eine k-Algebra A, die frei ist von endlichem Rang n oder modulendlich und projektiv als k-Modul mit demselben Rang n nach Lokalisierung an jedem Primideal von k nennen wir das von allen $\operatorname{Dis}(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in A$ erzeugte Ideal von k das **Diskriminantenideal** $\operatorname{Dis}_{A/k}$ von A. Nach dem Vorhergehenden gilt für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ genau dann $\mathfrak{m} \supset \operatorname{Dis}_{A/k}$, wenn die Spurform der $A/\mathfrak{m}$-Kringalgebra $A/\mathfrak{m}A$ ausgeartet ist.

Satz 8.5.15 (Diskriminantenideal und Diskriminante). *Gegeben k ein Kring und $P \in k[T]$ ein normiertes Polynom stimmt für $A := k[T]/\langle P \rangle$ unser Element $\operatorname{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1})$ aus 8.5.10 bis auf ein Vorzeichen überein mit der Diskriminante des Polynoms P im Sinne von [AL] 2.9.14. Insbesondere wird das Diskriminantenideal von A/k erzeugt von der Diskriminante des Polynoms P.*

Beweis. Da beide Seiten mit Erweiterungen von k vertauschen, dürfen wir ohne Beschränkung annehmen, k sei der Ring der symmetrischen Funktionen $k := \mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n]^{\mathcal{S}_n}$. Bekanntlich gilt $k = \mathbb{Z}['s_1, \ldots, s_n]$ für die $s_i \in k$, die durch die Identität $P(T) := T^n + s_1 T^{n-1} + \ldots + s_n = (T + \zeta_1) \ldots (T + \zeta_n)$ in $\mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n][T]$ gegeben werden. Ich behaupte, daß für $A := k[T]/\langle P \rangle$ in der Notation aus 8.5.10 gilt

$$\operatorname{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j)$$

Man zeigt das wie **??**. Die linke Seite ist per definitionem ein Element von k. Unter der Skalarerweiterung $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ wird die linke Seite ein symmetrisches Polynom in den ζ_i mit rationalen Koeffizienten. Dies Polynom hat dort Nullstellen, wo P mehrfache Nullstellen hat, da dort $A = k[T]/\langle P \rangle$ zu einem Ring von Null verschiedenen nilpotenten Elementen spezialisiert. Wie in [AL] 3.9.30 folgt, daß die rechte Seite nach Übergang zu $\mathbb{Q}$-Koeffizienten die linke Seite teilt. Mit Gradbetrachtungen und dem Vergleich von Leitkoeffizienten zeigen wir nun auch noch die Gleichheit bis auf Vorzeichen. Die $\mathbb{Z}$-Graduierung auf $\mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n][T]$, in der alle ζ_i ebenso wie T den Grad Eins haben, induziert eine $\mathbb{Z}$-Graduierung auf $k[T]$, in der P homogen ist vom Grad n und die Multiplikation mit $\bar{T}$ homogen vom Grad Eins. Die Leibnizformel zeigt dann, daß $\operatorname{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1})$ homogen ist vom Grad $n(n-1)$, so daß unsere Behauptung bis auf einen Faktor aus $\mathbb{Q}$ schon mal richtig sein muß. Um besagten Faktor zu bestimmen, wählen wir eine primitive n-te Einheitswurzel ζ und spezialisieren zu $\zeta_i = -\zeta^i$. Dann spezialisiert die rechte Seite nach einer bereits in [AL] 3.9.30 ausgeführten Rechnung zu $(-1)^{n-1} n^n$, auf der linken Seite dahingegen ergibt sich $P = T^n - 1$ sowie $\operatorname{Tr}(\bar{T}^a) = n$ falls $n|a$ und Null sonst. Damit folgt durch elementare Rechnung $\operatorname{Dis}(1, \bar{T}, \ldots, \bar{T}^{n-1}) = n^n (-1)^{n-1} (-1)^{n(n-1)/2}$. Der Vergleich dieser Resultate zeigt die Behauptung. □

Ergänzung 8.5.16. Gegeben ein Kringhomomorphismus $k \to A$ erinnere ich an den Modul der relativen Differentiale $\Omega_{A/k}$. Nach [AAG] 3.4.29 liefert für k einen Kring und $P \in k[T]$ ein Polynom und $A = k[T]/\langle P \rangle$ den Quotienten nach P das Multiplizieren mit $\mathrm{d}T$ einen Isomorphismus von A-Moduln

$$k[T]/\langle P, P' \rangle \quad \tilde{\to} \quad \Omega_{A/k}$$

Es scheint recht klar, daß das Diskriminantenideal eng mit diesem Modul verwandt ist. Ich erwarte, daß es genau das Quadrat des Annullatorideals von $\Omega_{A/k}$ ist.

Korollar 8.5.17 (Diskriminatenideal und Verzweigung). *Sei $A \subset B$ eine modulendliche Erweiterung von Dedekindringen. Die maximalen Ideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ mit $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} \supset \operatorname{Dis}_{B/A}$ sind genau die Stellen, über denen es ein $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ gibt, das entweder echt verzweigt, in Formeln $d(B_\mathfrak{n}/A_\mathfrak{m}) > 1$, oder für das $B/\mathfrak{n}$ inseparabel ist über $A/\mathfrak{m}$.*

8.5.18. Sowohl im Fall von Ganzheitsringen von Zahlkörpern als auch im geometrischen Fall sind also die maximalen Ideale über dem Diskriminatenideal genau die Verzweigungsstellen, da in beiden Fällen $A/\mathfrak{m}$ vollkommen ist und keine inseparablen Erweiterungen besitzt.

Übungen

Übung 8.5.19. Sei $d \in \mathbb{Z} \backslash \{0, 1\}$ ohne mehrfache Primfaktoren. Aus 8.2.10 erinnern wir die Beschreibung der Ganzheitsringe

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} & d \notin 1 + 4\mathbb{Z}, \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\big((1 + \sqrt{d})/2\big) & d \in 1 + 4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Die Minimalpolynome von $\sqrt{d}$ bezihungsweise $(1 + \sqrt{d})/2$ sind $T^2 - d$ beziehungsweise $T^2 - T + (1 - d)/4$. Die Diskriminante dieser Polynome erzeugt das Diskriminantenideal und ergibt sich mit [AL] **??** zu $4d$ beziehungsweise d. Im ersten Fall verzweigen also die Zwei und alle Primteiler von d, im zweiten Fall nur die Primteiler von d.

8.6 Glatte projektive Kurven*

8.6.1. Eine äqui-eindimensionale k-Varietät heißt eine **Kurve** und eine äqui-eindimensionale k-Prävarietät eine **Präkurve** Insbesondere verstehen wir eine Kurve stets über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper. Eine **projektive Kurve** ist eine Kurve, für die eine abgeschlossene Einbettung in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^n k$ existiert. Ich betone, daß wir die Einbettung hier nicht als Teil des Datums sehen, daß projektive Kurven also durchaus auch dann isomorph sein können, wenn sie in verschiedenen $\mathbb{P}^n k$ und $\mathbb{P}^m k$ liegen.

Satz 8.6.2 (Körper und ihre Kurven). *Gegeben $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper liefert das Bilden des Körpers der rationalen Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Glatte irreduzible} \\ \textit{projektive Kurven über } k, \\ \textit{nichtkonstante Morphismen} \end{array} \right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Körperendliche} \\ \textit{Körpererweiterungen von } k \\ \textit{vom Transzendenzgrad Eins} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ X & \mapsto & \mathcal{M}(X) \end{array}$$

Ergänzung 8.6.3. Mir gefällt die alternative Formulierung noch besser, bei der links die Kategorie aller glatten irreduziblen „vollständigen" Kurven steht. Eine Varietät ist per definitionem „vollständig", wenn ihre Projektion auf einen Punkt eigentlich ist im Sinne von 6.4.43. Der Beweis bleibt fast derselbe, man muß nur am Ende statt mit 8.6.11 mit [AAG] 4.4.8 argumentieren.

Beweis. Wir bezeichnen die Kategorie aller körperendlichen Körpererweiterungen von k vom Transzendenzgrad Eins mit $\mathscr{T}$. Wir bezeichnen die Kategorie aller glatten irreduziblen projektiven Kurven über k mit $\mathscr{E}\mathscr{P}$ und die Kategorie aller glatten eindimensionalen irreduziblen Prävarietäten über k mit $\mathscr{E}$, jeweils mit nichtkonstanten Morphismen von Prävarietäten als Morphismen. Der Satz behauptet, daß der Funktor $\mathcal{M} : \mathscr{E} \to \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{M} : \mathscr{E}\mathscr{P} \stackrel{\approx}{\to} \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$$

induziert. Um das zu zeigen, konstruieren wir einen quasiinversen Funktor $\mathcal{B}$. Das hinwiederum geschieht in mehreren Schritten.

8.6.4 (**Konstruktion der Möchte-Gern-Kurve $\mathcal{B}(K)$ als Menge**). Ich erinnere an den Begriff einer diskreten Bewertung 8.1.2 eines Körpers. Gegeben eine endlich erzeugte Körpererweiterung K/k vom Transzendenzgrad Eins betrachten wir die Menge

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(K) := \{v : K \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\} \mid v \text{ ist diskrete Bewertung}\}$$

Gegeben ein Homomorphismus $K \hookrightarrow L$ von endlich erzeugten Körpererweiterungen von k vom Transzendenzgrad Eins und eine diskrete Bewertung $v : L \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ gilt $v(K^\times) \neq 0$ nach 8.1.17. Folglich existieren eine wohlbestimmte diskrete Bewertung $w : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ und ein wohlbestimmtes $d \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $v|_K = dw$ und die Vorschrift $v \mapsto w$ liefert eine Abbildung $\mathcal{B}(L) \to \mathcal{B}(K)$. Man erkennt ohne weitere Schwierigkeiten, daß wir so einen Mengenfunktor konstruiert haben.

8.6.5 (**Konstruktion einer Transformation** $\mathrm{can} : \mathrm{Vergiß} \Rightarrow \mathcal{B} \circ \mathcal{M}$). Bezeichne $\mathrm{Vergiß} : \mathscr{E} \to \mathrm{Ens}$ den offensichtlichen Funktor, der jeder Prävarietät die zugrundeliegende Menge zuordnet. Ist X eine irreduzible glatte eindimensionale Prävarietät über k, so erhalten wir nach 8.1.11 eine kanonische Abbildung $\mathrm{can}_X : X \to \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$, indem wir jedem Punkt $x \in X$ die durch die Null- beziehungsweise Polstellenordnung bei x gegebene Bewertung $v_x : \mathcal{M}(X) \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$ zuordnen. Es ist leicht zu sehen, daß diese kanonischen Abbildungen eine Transformation von Funktoren $\mathrm{can} : \mathrm{Vergiß} \Rightarrow \mathcal{B} \circ \mathcal{M}$ bilden.

8.6.6 (**Überdeckung von $\mathcal{B}(K)$ durch Maximalspektren**). Wir zeigen, daß für jede Körpererweiterung $K \in \mathscr{T}$ und jede Bewertung $v \in \mathcal{B}(K)$ ein über k ringendlicher Dedekindring $A \subset K$ mit $K = \{a/b \mid a, b \in A, b \neq 0\}$ existiert derart, daß v im Bild der kanonischen Injektion

$$\mathrm{can} : \mathrm{Max}\, A \hookrightarrow \mathcal{B}(K)$$

aus 8.2.7 liegt und daß das Komplement des Bildes dieser Einbettung endlich ist. Machen wir uns an die Arbeit. Wir finden sicher $f \in K \backslash k$ mit $v(f) \geq 0$. Nach 8.1.18 gibt es auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper keine diskrete Bewertung, folglich haben wir $v(k^\times) = 0$. Der Bewertungsring $\mathfrak{o}_v$ unserer Bewertung v muß demnach $k[f]$ und dann auch seinen ganzen Abschluß $A \subset K$ umfassen. Der Quotientenkörper $\mathrm{Quot}\, A$ dieses ganzen Abschlusses muß nach 5.7.1 aber als Teilkörper von K mit dem ganzen Abschluß des Quotientenkörpers von $k[f]$ in K zusammenfallen und folglich gilt $K = \{a/b \mid a, b \in A, b \neq 0\}$. Nach 8.3.11 ist A ringendlich über k, also noethersch, und nach 5.6.13 gilt $\mathrm{kdim}\, A = \mathrm{trgr}_k(\mathrm{Quot}\, A) = 1$. Ganz abgeschlossen ist A nach Konstruktion eh, folglich ist A ein Dedekindring und unsere kanonische Abbildung ist nach 8.2.7 eine Inklusion $\mathrm{can} : \mathrm{Max}\, A \hookrightarrow \mathcal{B}(K)$ und ihr Bild besteht aus allen Bewertungen v mit $v(f) \geq 0$. Wir folgern, daß es nur endlich viele Bewertungen v mit $v(f) > 0$ geben kann, denn wegen $f \neq 0$ gibt es nur endlich viele maximale Ideale in A über f alias Nullstellen von f auf $\mathrm{Max}\, A$. Das gilt nun aber mit derselben Argumentation für jedes Element $f \in K \backslash k$. Insbesondere ist das Komplement des Bildes unserer Einbettung endlich, besteht es doch aus allen Bewertungen v mit $v(f) < 0$ alias $v(f^{-1}) > 0$. Im übrigen zeigen unsere Argumente auch, daß $\mathcal{B}(K)$ unendlich ist, denn die eindimensionale irreduzible Varietät $\mathrm{Max}\, A$ ist bereits unendlich.

8.6.7 (**Die Möchte-Gern-Kurve $\mathcal{B}(K)$ als topologischer Raum**). Gegeben $K \in \mathscr{T}$ versehen wir $\mathcal{B}(K)$ mit der koendlichen Topologie. Abgeschlossen sind also nur ganz $\mathcal{B}(K)$ und seine endlichen Teilmengen. Da $\mathcal{B}(K)$ unendlich ist, ist es dann irreduzibel als topologischer Raum. Für jedes $X \in \mathscr{E}$ ist weiter $\mathrm{can} : X \to \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ stetig, denn diese Abbildung hat endliche Fasern, sie ist ja für X affin sogar eine Injektion nach 8.2.7. Ist weiter $K \hookrightarrow L$ ein Homomorphismus von Körpererweiterungen, so hat die induzierte Abbildung $\mathcal{B}(L) \to \mathcal{B}(K)$ endliche

Fasern und ist mithin stetig: In der Tat gibt es für $v \in \mathcal{B}(K)$ nach dem vorhergehenden Punkt 8.6.6 einen über k ringendlichen Dedekindring $A \subset K$ mit K als Quotientenkörper und mit v im Bild von $\operatorname{Max} A \hookrightarrow \mathcal{B}(K)$. Der ganze Abschluß B von A in L ist dann nach 8.3.11 auch ein über k ringendlicher Dedekindring mit $B \subset L$ mit L als Quotientenkörper, und jede Bewertung von L, die auf A nichtnegativ ist, ist auch auf B nichtnegativ, weil B ganz ist über A. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Max} B & \hookrightarrow & \mathcal{B}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Max} A & \hookrightarrow & \mathcal{B}(K) \end{array}$$

induziert also die obere Horizontale Bijektionen zwischen der Faser über einem Punkt und der Faser über seinem Bild. Die Fasern links sind aber endlich nach 5.2.12.

8.6.8 (**Die Möchte-Gern-Kurve $\mathcal{B}(K)$ als Prävarietät über k**). Gegeben $K \in \mathscr{T}$ und $v \in X = X_K := \mathcal{B}(K)$ eine diskrete Bewertung und $K \supset \mathfrak{o}_v \supset \mathfrak{m}_v$ der zugehörige diskrete Bewertungsring mit seinem maximalem Ideal liefert nach 8.6.6 die Einbettung des Grundkörpers einen Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_v/\mathfrak{m}_v$. Gegeben $U \Subset X$ erklären wir nun den Teilring

$$\mathcal{O}_X(U) \subset \operatorname{Ens}(U, k)$$

als die Menge aller Abbildungen $f : U \to k$, für die ein $a \in K$ existiert derart, daß für alle $v \in U$ gilt $v(a) \geq 0$ und $f(v) \mapsto \bar{a}$ unter unserem Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_v/\mathfrak{m}_v$. Gegeben ein über k ringendlicher Dedekindring $A \subset K$ mit $\operatorname{Quot} A = K$ und $\operatorname{Max} A \xrightarrow{\sim} U$ unter der kanonischen Einbettung induziert dann das Zurückholen von Funktionen vermittels der kanonischen Einbettung

$$\operatorname{Max} A \xrightarrow{\sim} U \Subset X$$

einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} A$, wie man aus der Beschreibung 6.4.41 von Definitionsbereichen rationaler Funktionen in Termen lokaler Ringe folgert. Für $U \neq \emptyset$ kommt also jedes $f \in \mathcal{O}_X(U)$ von genau einem Element $a \in K$ her. Wir sehen so, daß die $O_X(U)$ unser X zu einem k-geringten Raum machen. Weiter sehen wir, daß unsere Einbettungen $\operatorname{Max} A \hookrightarrow X$ offene Einbettungen von k-geringten Räumen sind, so daß X sogar eine Prävarietät über k ist. Das Diagramm am Ende von 8.6.7 zeigt, daß für jeden Homomorphismus von Körpererweiterungen $K \to L$ die induzierte Abbildung $\mathcal{B}(L) \to \mathcal{B}(K)$ ein Morphismus von k-geringten Räumen ist, und aus dem affinen Fall leitet man leicht ab, daß für alle $X \in \mathscr{E}$ unsere kanonische Abbildung ein Morphismus $\operatorname{can} : X \to \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ von k-geringten Räumen ist. Umgekehrt erhalten wir natürliche Isomorphismen $\mathcal{M}(\mathcal{B}(K)) \xrightarrow{\sim} K$, indem wir für $U \Subset \mathcal{B}(K) = X$ nichtleer jedem $f \in \mathcal{O}_X(U)$ das eindeutig bestimmte $a \in K$ zuordnen, von dem es herkommt.

8.6.9 (**Die Kurve $\mathcal{B}(K)$ ist eine projektive k-Varietät**). Wir finden nach dem Vorhergehenden eine endliche offene Überdeckung $X := \mathcal{B}(K) = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ durch irreduzible affine glatte Kurven. Seien $\bar{Y}_i$ deren projektive Abschlüsse. Nach 8.6.11 läßt sich $Y_i \hookrightarrow \bar{Y}_i$ eindeutig zu $\bar{\varphi}_i : X \to \bar{Y}_i$ fortsetzen. Nun betrachte man den durch die $\bar{\varphi}_i$ gegebenen Morphismus

$$\bar{\varphi} : X \to \prod_{i=1}^n \bar{Y}_i$$

und setze $Y := \overline{\bar{\varphi}(X)}$. Wenn wir zeigen können, daß unser $\bar{\varphi}$ einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert, sind wir fertig, denn Produkte projektiver Varietäten sind projektiv nach 6.5.23. Mit X ist auch Y irreduzibel. Weiter ist $\bar{\varphi}$ birational, induziert also einen Isomorphismus $\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$. Ich behaupte, daß dieser Isomorphismus für alle $x \in X$ Isomorphismen $\mathcal{O}_{Y,\bar{\varphi}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$ induziert. In der Tat liegt jedes $x \in X$ in einem der Y_i und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "\bar{\varphi}"] & \\ Y_i \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & Y \arrow[dl, two heads, "\mathrm{pr}_i"] \\ & \bar{Y}_i & \end{tikzcd}$$

Da darin das Zurückholen längs aller Pfeile Injektionen auf den lokalen Ringen bei x induziert und das Zurückholen längs $Y_i \hookrightarrow \bar{Y}_i$ eine Bijektion, muß das Zurückholen längs aller Pfeile Bijektionen auf den lokalen Ringen bei x liefern. Jetzt zeigen wir, daß $\bar{\varphi}$ surjektiv ist. Jedes $y \in Y$ hat ja eine offene affine Umgebung $V \Subset Y$. Die Einbettung $\mathcal{O}(V) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)^{\sim}$ von $\mathcal{O}(V)$ in seinen ganzen Abschluß entspricht einer Surjektion $\operatorname{Max} \mathcal{O}(V)^{\sim} \twoheadrightarrow \operatorname{Max} \mathcal{O}(V)$, unter der unser $y \in Y$ ein Urbild haben muß. Wir sehen mit 8.2.7, daß dies Urbild einer Bewertung $v \in X = \mathcal{B}(K)$ entspricht mit $v(\mathcal{O}_{Y,y}) \subset [0, \infty]$. Wir hätten dann aber nach Konstruktion

$$\mathcal{O}_{Y,\bar{\varphi}(v)} \supset \mathcal{O}_{Y,y}$$

und daraus folgt $y = \bar{\varphi}(v)$: In der Tat folgt ja für je zwei Punkte p, q einer irreduziblen Varietät Y, die in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge liegen, aus der Inklusion $\mathcal{O}_{Y,p} \supset \mathcal{O}_{Y,q}$ von Teilmengen von $\mathcal{M}(Y)$ bereits $p = q$. Je zwei Punkte, ja endlich viele beliebig vorgegebene Punkte einer projektiven Varietät liegen stets in einer gemeinsamen offenen affinen Teilmenge, da wir ja zu endlich vielen Ursprungsgeraden in einem Vektoraum über einem unendlichen Körper stets eine Hyperebene finden, die keine von ihnen umfaßt. Da $\bar{\varphi}$ eh injektiv ist, muß $\bar{\varphi} : X \to Y$ bijektiv sein. Da aber $\bar{\varphi}$ Isomorphismen auf den lokalen

Ringen induziert, und da stets gilt $\mathcal{O}(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$, muß damit $\bar{\varphi}$ schon ein Isomorphismus sein.

8.6.10 (**Für** $X \in \mathscr{E}\mathscr{P}$ **haben wir** $\operatorname{can} : X \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$). Es bleibt zu zeigen, daß für jede glatte projektive Kurve X die kanonische Abbildung einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ liefert. Wir wissen bereits, daß für jede nichtleere offene affine Teilmenge $V \circledcirc X$ die kanonische Abbildung eine offene Einbettung $V \xrightarrow{\sim} U \circledcirc \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ liefert. Deren Inverse $U \xrightarrow{\sim} V$ läßt sich nun aber nach 8.6.11 auf genau eine Weise zu einem Morphismus $\mathcal{B}(\mathcal{M}(X)) \to X$ fortsetzen, der dann offensichtlich invers sein muß zu unserer kanonischen Abbildung.

Bis auf die Aussage 8.6.11, deren Beweis gleich nachgeholt wird, beendet das den Beweis von Satz 8.6.2 über Körper und ihre Kurven. □

Satz 8.6.11 (Morphismen glatter Kurven in projektive Räume). *Sei X eine Kurve oder allgemeiner Präkurve und $p \in X$ ein regulärer Punkt. So läßt sich jeder Morphismus $\varphi : X \backslash p \to \mathbb{P}^n k$ zu einem Morphismus $\bar{\varphi} : X \to \mathbb{P}^n k$ fortsetzen.*

8.6.12. Das gilt mit demselben Beweis genauso, wenn X eine eindimensionale und äquidimensionale Varietät ist mit $\mathcal{O}_{X,p}$ regulär. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt hierbei ohne alle Voraussetzungen aus 6.4.6. Daß die Definitionslücke p ein regulärer Punkt von X ist, ist wesentlich für die Existenz: Sonst könnte man ja eine Einbettung einer affinen Kurve $Z \subset \mathbb{P}^n k$ betrachten und X konstruieren, indem man zwei Punkte von Z wie in 6.3.13 verklebt zu einem Punkt p von X. Dann kann das mit dem Fortsetzen natürlich nicht mehr funktionieren. In [AAG] 4.4.8 zeigen wir dieselbe Aussage allgemeiner für Morphismen in eine „vollständige“ Varietät.

Ergänzung 8.6.13. Für höherdimensionales X stimmt die analoge Aussage nicht mehr: Man betrachte etwa die Abbildung $\mathbb{C}^2 \backslash 0 \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ gegeben durch $v \mapsto (v, \langle v \rangle)$. Sie kann nicht über den Ursprung zu einem Morphismus $\mathbb{P}^2\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei X irreduzibel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß das Bild von φ in keiner der Hyperflächen $x_i = 0$ enthalten ist, für $0 \leq i \leq n$, da wir sonst mit Induktion über n argumentieren könnten. Die Funktionen $(x_i/x_j) \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}\{x_j \neq 0\})$ definieren also rationale Funktionen $\varphi_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ auf X. Setzen wir $v_p(\varphi_{i0}) = r_i$, so gilt $v_p(\varphi_{ij}) = r_i - r_j$ für alle i, j. Ist r_0 minimal unter den r_i, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, so gilt $v_p(\varphi_{i0}) \geq 0$ für alle i. Jetzt erklären wir $\bar{\varphi}(p)$ als den Punkt $\bar{\varphi}(p) = \langle \varphi_{00}(p), \ldots, \varphi_{n0}(p) \rangle$. Nach Konstruktion ist klar, daß diese Abbildung $\bar{\varphi} : X \to \mathbb{P}^n k$ ein Morphismus ist. □

Übungen

Übung 8.6.14. Man zeige, daß für jede glatte eindimensionale irreduzible Varietät X über k, in der Notation von eben also jedes Objekt $X \in \mathscr{E}$, und jede körperendliche Körpererweiterung K/k vom Transzendenzgrad Eins, in der Notation von eben also jedes Objekt $K \in \mathscr{T}$, das Bilden der rationalen Funktionen im Verein mit unserer kanonischen Bijektion $K \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{M}(\mathcal{B}(K))$ eine Bijektion

$$\mathrm{Var}^{\mathrm{nk}}(X, \mathcal{B}(K)) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Kring}^{k}(K, \mathcal{M}(X))$$

zwischen nichtkonstanten Morphismen und Morphismen von Körpererweiterungen induziert. In kategorientheoretischer Sprache ist der Funktor $\mathcal{M} : \mathscr{E} \to \mathscr{T}^{\mathrm{opp}}$ also „linksadjungiert" zu unserem Funktor $\mathcal{B} : \mathscr{T}^{\mathrm{opp}} \to \mathscr{E}$.

Übung 8.6.15. Man zeige, daß für jede glatte eindimensionale irreduzible separierte Varietät X über k die natürliche Abbildung aus 8.6.5 eine offene Einbettung $\mathrm{can}_X : X \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ von Varietäten ist. Man nennt $\mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ die **Komplettierung** oder **Vervollständigung von** X. Jede glatte eindimensionale irreduzible separierte Varietät X über k entsteht also aus ihrer Vervollständigung durch das Weglassen von endlich vielen Punkten.

9 Invariantentheorie*

9.1 Affinität von Varietäten und Morphismen

Proposition 9.1.1 (Affinitätskriterium). *Eine Prävarietät X ist eine affine Varietät genau dann, wenn es Elemente $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ gibt, die als Ideal ganz $\mathcal{O}(X)$ erzeugen und so, daß $U_i := \{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}$ jeweils eine affine Varietät ist.*

Beweis. Sei $k = \bar{k}$ unser algebraisch abgeschlossener Grundkörper. Ich behaupte zunächst, daß $\mathcal{O}(X)$ ringendlich ist über k. Seien dazu g_{ij} Erzeuger des k-Krings $\mathcal{O}(U_i)$. Für hinreichend großes n lassen sich alle $f_i^n g_{ij}$ nach 6.4.28 durch Null regulär auf X fortsetzen und ich will genauer zeigen, daß diese Fortsetzungen zusammen mit den f_i ganz $\mathcal{O}(X)$ als k-Kring erzeugen. Nun kann für jede Funktion $h \in \mathcal{O}(X)$ ihre Einschränkung auf U_i als Polynom in den g_{ij} dargestellt werden. Für hinreichend großes $m \geq 0$ kann damit auch $f_i^m h$ als Funktion auf ganz X dargestellt werden als Polynom in f_i mitsamt den durch Null fortgesetzten $f_i^n g_{ij}$. Da die f_i^m für beliebiges $m \geq 0$ als Ideal ganz $\mathcal{O}(X)$ erzeugen, folgt die Behauptung. Jetzt betrachten wir den Morphismus $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ nach 6.3.18, der jedem Punkt sein Verschwindungsideal zuordnet. Für alle $f \in \mathcal{O}(X)$ ist dann $X_f := \{f \neq 0\}$ das Urbild der offenen Teilmenge $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)_f)$. Ist speziell X_f affin, so zeigt unser Isomorphismus $\mathcal{O}(X)_f \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(X_f)$ aus 6.4.28, daß unser Morphismus $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ einen Isomorphismus $X_f \stackrel{\sim}{\to} (\operatorname{Max} \mathcal{O}(X))_f$ induziert. Gibt es also $f_1, \dots, f_r$ derart, daß die $U_i = \{f_i \neq 0\}$ affin sind und X überdecken, so folgt, daß unsere Abbildung bereits selbst ein Isomorphismus $X \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)$ sein muß. □

Definition 9.1.2. Ein Morphismus von Prävarietäten heißt **affin**, wenn das Urbild jeder affinen offenen Teilmenge wieder affin ist.

9.1.3. Unsere Erkenntnis 6.4.7 besagt, in dieser Terminologie ausgedrückt, daß jeder Morphismus von einer affinen Varietät in eine Varietät affin ist. Die Separiertheitsbedingung an letztere Varietät ist hier wesentlich: Betrachten wir für die „nichtseparierte Ebene mit verdoppeltem Ursprung“ X die beiden offenen Einbettungen $k^2 \hookrightarrow X$, deren Bilder sie überdecken, so ist das Urbild unter der einen vom Bild der anderen nicht affin.

Übungen

Übung 9.1.4. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten. Man zeige: Ist Y affin und gibt es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen V_i mit affinen Urbildern $\varphi^{-1}(V_i)$, so ist auch X affin. Hinweis: 9.1.1.

Übung 9.1.5. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten. Besitzt Y eine Überdeckung durch offene affine Untervarietäten mit affinen Urbildern, so ist φ ein affiner Morphismus. Hinweis: In 9.1.4 haben Sie das für Y affin bereits gezeigt. Für den allgemeinen Fall nehme man 6.4.29 zu Hilfe.

Übung 9.1.6. Jede abgeschlossene Einbettung von Prävarietäten ist affin. Hinweis: 9.1.5.

Übung 9.1.7. Ist $\varphi : X \to Y$ ein affiner Morphismus von Prävarietäten und $Z \overset{\mathrm{A}}{\subset} Y$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist für die jeweils induzierten Strukturen auch $\varphi : \varphi^{-1}(Z) \to Z$ ein affiner Morphismus.

Ergänzende Übung 9.1.8. Ich wüßte gerne, ob gegeben affine algebraische Gruppen $G \supset H \supset K$ der offensichtliche Morphismus $G/K \to G/H$ affin ist, wenn H/K affin ist.

Übung 9.1.9. Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Prävarietäten heißt **endlich** oder bei uns auch **modulendlich**, wenn er affin ist und wenn für alle affinen $V \overset{\circ}{\subset} Y$ der Ring $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ modulendlich ist über $\mathcal{O}(V)$. Man zeige, daß das bereits für alle affinen $V \overset{\circ}{\subset} Y$ folgt, wenn wir es nur für die Teilmengen einer Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen fordern. Hinweis: 9.1.5. Man zeige, daß jeder endliche Morphismus eigentlich ist. Hinweis: Geometrie ganzer Kringerweiterungen 5.2.10.

9.2 Quotienten nach endlichen Gruppen

9.2.1. Einen Morphismus von k-Prävarietäten nennen wir **offenfinal**, wenn er als Morphismus von k-geringten Räumen offen und final ist. Besonders oft werden wir es mit Morphismen von Prävarietäten zu tun haben, die **produktfest offenfinal** sind, also produktfest offen und produktfest final. Hier fordern wir nur die Stabilität dieser Eigenschaften mit Produkten in der Kategorie der Prävarietäten.

9.2.2. Es reicht zu prüfen, daß unsere Eigenschaft unter dem Produkt mit der Identität auf jeder affinen Varietät Z stabil ist: In der Tat sind die Eigenschaften „offen“ und „final“ nach 6.2.30 beide lokal in der Basis.

Beispiele 9.2.3. Die Projektion eines Produkts von Prävarietäten auf einen der Faktoren ist produktfest offenfinal, wenn der andere Faktor nicht leer ist, vergleiche 6.4.31. Insbesondere ist der konstante Morphismus von einer beliebigen nichtleeren Prävarietät auf einen Punkt stets produktfest offenfinal.

Definition 9.2.4. Gegeben $W \searrow X$ ein k-geringter Raum mit der Operation einer Gruppe verstehen wir den **Bahnenraum** X/W stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich der kanonischen Abbildung $X \to X/W$.

Satz 9.2.5 (Quotienten affiner Varietäten nach endlichen Gruppen). *Operiert eine endliche Gruppe W auf einer affinen Varietät X, so ist der Bahnenraum X/W auch eine affine Varietät und der Quotientenmorphismus ist produktfest offenfinal und endlich.*

Beweis. Wir wissen bereits aus 5.3.3, daß der Bahnenraum X/W mit den regulären Funktionen $\mathcal{O}(X/W) := \{f : X/W \to k \mid f \circ \operatorname{can} \in \mathcal{O}(X)\}$ zu einer naiven affinen Varietät wird. Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung zwischen den zugehörigen Varietäten final, ja sogar produktfest offenfinal ist. Nach unseren Erkenntnissen 5.2.10 über die Geometrie ganzer Kringerweiterungen ist $\pi : X \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ abgeschlossen und man folgert leicht, daß $X/W \to \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ sogar ein Homöomorphismus sein muß. Sicher induziert dieser Homöomorphismus auch einen Isomorphismus zwischen den jeweiligen Ringen von globalen regulären Funktionen. Um den Satz zu zeigen, müssen wir aber noch nachweisen, daß die finale Struktur auf X/W mit der Struktur aus der Definition von $\operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ übereinstimmt. Nun, es reicht für jede offene Teilmenge $U \Subset \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^W)$ zu zeigen, daß gilt $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to k \mid f \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))\}$. Wir setzen $A := \mathcal{O}(X)$ und dürfen wir uns sicher auf offene Teilmengen der Gestalt $U = \{h \neq 0\}$ beschränken mit $h \in A^W$. Unsere Behauptung verwandelt sich so in die Behauptung, daß die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$(A^W)_h \xrightarrow{\sim} (A_h)^W$$

ist. Wir müssen in Worten also zeigen, daß die Invarianten im lokalisierten Ring mit der Lokalisierung des Invariantenrings übereinstimmen. Das war aber gerade Übung 4.3.46. Die Eigenschaft produktfest offenfinal folgt dann leicht aus dem in [LA2] 8.1.41 erwähnten kanonischen Isomorphismus $B \otimes_k (A^W) \xrightarrow{\sim} (B \otimes_k A)^W$ angewandt auf $B = \mathcal{O}(Z)$ für eine weitere affine Varietät Z und $A = \mathcal{O}(X)$. □

Korollar 9.2.6 (Quotienten nach endlichen Gruppen). *Operiert eine endliche Gruppe W auf einer Prävarietät X und besitzt X eine Überdeckung durch unter W stabile offene affine Untervarietäten, so ist der Bahnenraum X/W auch eine Prävarietät und die Quotientenabbildung ist endlich und produktfest offenfinal. Ist hier X sogar eine Varietät, so auch X/W.*

9.2.7 (**Quotienten nach endlichen Gruppen im quasiprojektiven Fall**). Für jede quasiprojektive Varietät X mit einer Operation einer endlichen Gruppe W ist unsere Bedingung aus 9.2.6 erfüllt und X/W ist wieder eine separierte Varietät. In der Tat gibt es für jede endliche Teilmenge eines $\mathbb{P}^n$ mit $n \geq 1$ nach [AL] 3.10.1 eine Hyperebene, die unsere endliche Teilmenge nicht trifft. Wenden wir das auf eine Bahn an, so können wir uns in den Fall einer quasiaffinen Varietät retten. Nach 3.1.7 gibt es weiter für jede endliche Teilmenge einer quasiaffinen Varietät eine offene affine Teilmenge, die sie umfaßt. Insbesondere gilt das für jede Bahn. Nach 6.4.7 ist dann auch der Schnitt dieser offenen affinen Teilmengen affin und das Korollar 9.2.6 darf angewendet werden.

Beweis. Das einzige Problem ist der Beweis der letzten Aussage. Man kann sie aus 6.4.43 folgern. Will man den Begriff der Eigentlichkeit vermeiden, kann man bemerken, daß die Verknüpfung

$$X \times X \to X/W \times X \to X/W \times X/W$$

auch selbst produktfest offenfinal und insbesondere offen ist. Da nun das Urbild der Diagonale unter dieser Verknüpfung offensichtlich abgeschlossen ist, muß auch die Diagonale in $X/W \times X/W$ selbst abgeschlossen sein. □

Proposition 9.2.8 (Erkennen von Quotientenmorphismen). *Gegeben seien ein endlicher Morphismus $\varphi : X \to Y$ von irreduziblen k-Prävarietäten und eine Operation einer endlichen Guppe W auf X derart, daß die Fasern gerade die Bahnen von W sind. Ist dann Y normal und $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ eine Galoiserweiterung und die offensichtliche Abildung eine Surjektion von W auf ihre Galoisgruppe, so induziert φ einen Isomorphismus $X/W \xrightarrow{\sim} Y$ von k-geringten Räumen.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $Y = \operatorname{Max} A$ affin annehmen. Ist ganz allgemein A ein normaler kommutativer Integritätsbereich und $L/\operatorname{Quot}(A)$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ und B der ganze Abschluß $B \subset L$ von A in L, so gilt offensichtlich $A = B^\Gamma$, denn B^Γ besteht aus über A ganzen Elementen von $\operatorname{Quot}(A)$ und umfaßt A. In unserem Fall ist $\mathcal{O}(X)$ modulendlich über A, also $\mathcal{O}(X) \subset B$ und a forteriori $\mathcal{O}(X)^W = \mathcal{O}(Y)$. □

Beispiel 9.2.9. Auf der Neil'schen Parabel X mit

$$\mathcal{O}(X) = k \oplus kT^2 \oplus kT^3 \oplus \ldots \subset k[T]$$

erhalten wir eine Operation der zweielementigen Gruppe W durch die Vorschrift $T \mapsto -T$. Der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^W = k[T^2]$ ist derselbe wie bei der Operation auf der Gerade durch die Vorschrift $T \mapsto -T$. In der Situation unserer Proposition 9.2.8 kann es also durchaus passieren, daß $\mathcal{O}(X)$ nicht der ganze Abschluß von $\mathcal{O}(Y)$ in $\mathcal{M}(X)$ ist. Ist aber zusätzlich auch X normal, so kann das offensichtlich nicht passieren.

Proposition 9.2.10 (Differentialkriterium für Quotientenmorphismen). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten und sei eine freie Operation einer endlichen Guppe W auf X gegeben derart, daß die Fasern von φ gerade die Bahnen von W sind. Ist zusätzlich Y normal und gibt es eine offene dichte Teilmenge $U \Subset X$ mit $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ für alle $x \in U$, so induziert φ einen Isomorphismus*

$$X/W \xrightarrow{\sim} Y$$

Beweis. Als normale Varietät ist Y die disjunkte Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten und wir dürfen Y irreduzibel annehmen. Jede irreduzible Komponente Z von X wird nach dem differentiellen Dominanzkriterium mit einem dominanten Morphismus nach Y abgebildet und hat nach 5.4.18 dieselbe Dimension wie Y. Es gibt also Punkte $y \in Y$ derart, daß kein Punkt der Faser $\varphi^{-1}(y)$ in mehr als einer irreduziblen Komponente von X liegt. Insbesondere operiert W transitiv auf der Menge der irreduziblen Komponenten von X. Nun können wir X durch die disjunkte Vereinigung $\tilde{X}$ der irreduziblen Komponenten von X ersetzen und wenn wir $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{X})^W$ zeigen, folgt a forteriori $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)^W$. Dann können wir aber auch $(\tilde{X}, W)$ ersetzen durch (Z, W_Z) für eine irreduzible Komponente Z von X und ihren Stabilisator. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist also bereits X selbst irreduzibel und die Operation von W treu. Dann ist $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ separabel nach unserem Kriterium [AAG] 3.5.13 der generischen Bijektivität des Differentials. Dann muß nach [AAG] 6.10.2 diese Körpererweiterung den Grad $|W|$ haben und die offensichtliche Einbettung muß einen Isomorphismus $W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y))$ liefern, so daß unsere Körpererweiterung sogar Galois ist. Damit ist aber $X/W \to Y$ birational und bijektiv und folglich aufgrund der Normalität von Y ein Isomorphismus nach Zariski's Hauptsatz [AAG] 2.4.17. □

9.2.11 (**Konstruktion von Quotientenmorphismen**). Gegeben seien eine normale irreduzible affine Varietät Y und eine endliche Galoiserweiterung $L/\mathcal{M}(Y)$ mit Galoisgruppe W. Betrachten wir dann in L den ganzen Abschluß $B \subset L$ von $\mathcal{O}(Y)$, so ist B nach 8.3.10 modulendlich über $\mathcal{O}(Y)$ und ein affiner k-Kring und die Einbettung $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow B$ induziert einen Isomorphismus $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} B^W$ und für $X := \operatorname{Max} B$ einen Isomorphismus von k-geringten Räumen $X/W \xrightarrow{\sim} Y$.

Übungen

Übung 9.2.12. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß die induzierten Morphismen $\varphi^{-1}(V) \to V$ für alle $V \in \mathcal{V}$ produktfest offenfinal sind, so ist auch φ selbst produktfest offenfinal. Insbesondere ist für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V die Projektion $V \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}V$ produktfest offenfinal, da sie ja lokal in der Basis der Projektion eines Produkts mit $k^\times$ auf einen der Faktoren entspricht. Allgemeiner ist für $X \mathrel{⊂\!\!\!\!\!\not\;\,} \mathbb{P}^n k$ die Projektion $\mathrm{C}(X)\backslash 0 \to X$ produktfest offenfinal.

Übung 9.2.13 (**Zariskitopologie des Produkts affiner Varietäten mit** $\mathbb{P}^n k$). Gegeben eine affine Varietät X betrachten wir $X \times \mathbb{P}^n k$. Gegeben ein homogenes Ideal $I \subset \mathcal{O}(X)[T_0, \dots, T_n]$ ist seine Nullstellenmenge $\mathcal{Z}(I) \mathrel{⊂\!\!\!\!\!\not\;\,} X \times k^{n+1}$ stabil unter der Operation von $k^\times$ nach 6.8.7. Ihr Schnitt mit $X \times (k^{n+1} \backslash 0)$ ist damit nach 9.2.12 das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von $X \times \mathbb{P}^n k$, die wir

$\mathcal{Z}^*(I)$ oder ausführlicher $\mathcal{Z}^*_X(I)$ notieren. Man zeige, daß alle abgeschlossenen Teilmengen $Y \mathrel{\underset{\mathrm{A}}{\subset}} X \times \mathbb{P}^n k$ die Gestalt $Y = \mathcal{Z}^*_X(I)$ haben für ein homogenes Ideal I. Man zeige weiter, daß $\mathcal{Z}^*_X(I) = \emptyset$ genau dann gilt, wenn für hinreichend großes r das homogene Ideal I alle T^r_ν enthält.

Übung 9.2.14. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V ist die durch die Wirkung induzierte Abbildung $\mathrm{GL}(V) \times \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ ein Morphismus von Varietäten. Hinweis: 9.2.12.

Übung 9.2.15. Der Morphismus der leeren Varietät zu einer beliebigen endlichen Varietät ist offenfinal, aber nicht produktfest offenfinal. Jeder produktfest offenfinale Morphismus ist surjektiv.

9.3 Allgemeines zu Bahnenräumen

Definition 9.3.1. Gegeben $G \backslash\!\!\searrow X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe bezeichnen wir

$$X/G$$

mit seiner Finaltopologie als den **Bahnenraum** und nennen eine stetige Abbildung $X \to Y$ einen **Bahnenmorphismus**, wenn Y isomorph ist zu X/G als topologischer Raum unter X. Ist X ein k-geringter Raum, so denken wir uns den Bahnenraum, wenn nichts anderes gesagt ist, stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich $X \twoheadrightarrow X/G$ versehen und nennen einen Morphismus $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum einen **Bahnenmorphismus** $X \to Y$, wenn Y als k-geringter Raum unter X isomorph ist zu X/G.

9.3.2. Ist im Fall der Operation $G \backslash\!\!\searrow X$ einer Gruppe auf einer Prävarietät der Bahnenraum X/G wieder eine Prävarietät, so nennen wir den Bahnenraum auch die **Bahnenprävarietät** und, wenn sie zusätzlich separiert ist, die **Bahnenvarietät**.

9.3.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur ist es üblich, unsere Bahnenvarietät als „geometrischen Quotienten“ zu bezeichnen.

Beispiel 9.3.4. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachten wir $k^2 \backslash 0$ mit der durch $t(x, y) = (tx, t^{-1}y)$ gegebenen Operation von $k^\times$, so erhalten wir als Bahnenraum die „Gerade mit verdoppeltem Ursprung“, eine nicht separierte Prävarietät.

Beispiel 9.3.5. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachten wir $k^{n+1} \backslash 0$ mit der durch Multiplikation gegebenen Operation von $k^\times$, so erhalten wir den projektiven Raum $\mathbb{P}^n k$ als Bahnenvarietät.

Beispiel 9.3.6 (**Lokalität von Bahnenmorphismen**). Sei $G \backslash\!\!\searrow X$ ein k-geringter Raum mit einer Operation einer Gruppe. Gegeben ein Bahnenmorphismus $\pi : X \to Y$ ist offensichtlich für jede offene Teilmenge $V \mathrel{\underset{\circ}{\subset}} Y$ auch $\pi : \pi^{-1}(V) \to$

V ein Bahnenmorphismus. Ist umgekehrt $\pi : X \to Y$ ein Morphismus in einen weiteren k-geringten Raum und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ ein Bahnenmorphismus ist für alle $V \in \mathcal{V}$, so ist auch π selber bereits ein Bahnenmorphismus.

Beispiele 9.3.7. Daß der Bahnenraum eine Varietät ist, ist unter anderem bekannt in den folgenden Fällen:

1. Im Fall der Operation einer endlichen Gruppe G auf einer durch G-stabile offene affine Teilmengen überdeckten Varietät 9.2.6;

2. Im Fall einer fixpunktfreien algebraischen $k^\times$-Operation auf einer affinen Varietät 9.4.2;

3. Im Fall der $k^\times$-Operation auf dem Komplement der $k^\times$-Fixpunktmenge in einer affinen Varietät mit einer kontrahierenden algebraischen $k^\times$-Operation 9.5.3;

4. Im Fall einer affinen algebraischen Gruppe und der Operation durch Rechtstranslation oder Linkstranslation einer abgeschlossenen Untergruppe [AAG] 3.6.2;

5. Im Rahmen der sogenannten „geometrischen Invariantentheorie“ konstruiert man weitere Beispiele im Fall der Operation einer „linear reduktiven affinen algebraischen Gruppe“. Genauer zeigt man für die auf die offene Teilmenge der „stabilen Punkte“ restringierte Operation auf einer Varietät, daß der Bahnenraum eine Varietät ist, vergleiche 9.6.27 und 9.7.3;

6. In 9.6.30 zeigen wir, daß der Bahnenraum der offenen Menge $\mathrm{Mat}(n;k)^{\mathrm{reg}}$ der Matrizen mit einem Zentralisator kleinstmöglicher Dimension unter der Operation durch Konjugation von $\mathrm{GL}(n;k)$ eine Varietät ist.

9.3.8. In vielen dieser Fälle wissen wir sogar zusätzlich, daß für jede Prävarietät Y auch der Morphismus $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times X/G$ ein Bahnenmorphismus ist. Ist diese zusätzliche Eigenschaft erfüllt, so rede ich von einem **produktfesten Bahnenmorphismus**.

Ergänzung 9.3.9. Gegeben ein affiner G-äquivarianter Morphismus $X \to Y$ von Varietäten derart, daß beide Bahnenräume Varietäten sind, wüßte ich gerne, ob auch $(X/G) \to (Y/G)$ ein affiner Morphismus sein muß.

9.4 Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen

Definition 9.4.1. Eine Operation der multiplikativen Gruppe $k^\times$ auf einer k-Prävarietät X heißt **algebraisch**, wenn die zugehörige Abbildung $k^\times \times X \to X$ ein Morphismus ist.

Proposition 9.4.2 (Quotienten nach fixpunktfreien $k^\times$-Operationen). *Gegeben eine affine k-Varietät X mit einer fixpunktfreien algebraischen Operation der multiplikativen Gruppe $k^\times$ gilt:*

1. *Der Bahnenraum $X/k^\times$ mit seiner finalen Struktur ist eine affine k-Varietät und der Bahnenmorphismus $X \twoheadrightarrow X/k^\times$ ist produktfest offenfinal;*

2. *Ist $Y \mathrel{\subset\!\!\!\!\!\triangle} X$ eine abgeschlossene $k^\times$-stabile Teilmenge, so ist $Y/k^\times \hookrightarrow X/k^\times$ eine abgeschlossene Einbettung.*

Vorschau 9.4.3. Diese Proposition wird sich als ein Spezialfall von 9.6.27 erweisen, kann jedoch mit sehr viel weniger Vorkenntnissen bewiesen werden und erlaubt bereits die Konstruktion vieler wichtiger Verallgemeinerungen der projektiven Räume im folgenden Abschnitt.

9.4.4. Wenn wir diese Proposition einmal hinnehmen, so folgt sofort, daß der Rückzug vermittels der Projektion die regulären Funktionen auf der Bahnenvarietät mit den $k^\times$-invarianten Funktionen auf X identifizieren muß, in Formeln

$$\mathcal{O}(X/k^\times) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(X)^{k^\times}$$

Insbesondere sollte also auch $\mathcal{O}(X)^{k^\times}$ ringendlich sein über k. Wir zeigen diese Aussage sogar in noch größerer Allgemeinheit, bevor wir dann im Anschluß an 9.4.9 den eigentlichen Beweis der Proposition führen. Wir beginnen mit einigen Umformulierungen.

Proposition 9.4.5 (Graduierungen und $k^\times$-Operationen). *Wir erhalten für jede affine k-Varietät X eine eineindeutige Entsprechung*

$$\{\text{algebraische } k^\times\text{-Operationen auf } X\} \stackrel{\sim}{\to} \{\mathbb{Z}\text{-Graduierungen auf } \mathcal{O}(X)\}$$

dadurch, daß wir der Ringalgebra $\mathcal{O}(X)$ die Graduierung $\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(X)^i$ durch die simultanen Eigenräume der $k^\times$-Operation geben, in Formeln durch die Teilräume $\mathcal{O}(X)^i := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(\mu x) = \mu^i f(x)\ \forall x \in X, \mu \in k^\times\}$.

Ergänzung 9.4.6. Sie mögen zur Übung zeigen, daß man genauso eine eineindeutige Entsprechung zwischen algebraischen Operationen des multiplikativen Monoids k auf X und $\mathbb{N}$-Graduierungen auf $\mathcal{O}(X)$ erhält.

Beweis. Gegeben eine affine k-Varietät X und ein Morphismus $k^\times \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ liefert das Zurückholen globaler regulärer Funktionen zusammen mit 3.1.4 einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(k^\times \times X) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(k^\times) \otimes \mathcal{O}(X) \stackrel{\sim}{\to} k[T, T^{-1}] \otimes \mathcal{O}(X)$$

Haben wir $f \mapsto \sum T^i \otimes f_i$, so gilt per definitionem $f(\lambda x) = \sum \lambda^i f_i(x)$. Ist unser Morphismus eine Gruppenwirkung, so zeigt die von der Mitte aus zu entwickelnde Gleichungskette

$$\sum \lambda^i \mu^i f_i(x) = f((\lambda\mu)x) = f(\lambda(\mu x)) = \sum \lambda^i f_i(\mu x)$$

uns, daß bei festem x und μ das Laurentpolynom $\sum(\mu^i f_i(x) - f_i(\mu x))T^i$ unendlich viele Nullstellen hat und folglich alle seine Koeffizienten verschwinden müssen. Mithin gilt $f_i(\mu x) = \mu^i f_i(x)$ für alle μ und x alias $f_i \in \mathcal{O}(X)^i$. Nach Konstruktion gilt andererseits $f = \sum f_i$ und wir sehen, daß unsere $\mathcal{O}(X)^i$ ganz $\mathcal{O}(X)$ als Vektorraum erzeugen. Das Argument, daß die Summe der $\mathcal{O}(X)^i$ direkt ist, kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben. Das Argument, daß wir so die behauptete Bijektion erhalten, desgleichen. □

Lemma 9.4.7. *Ist R ein noetherscher $\mathbb{Z}$-graduierter Kring, so ist auch seine homogene Komponente R^0 vom Grad Null noethersch.*

Beweis. Für jedes Ideal $I \subset R^0$ gilt $I = \langle RI \rangle \cap R^0$. □

Lemma 9.4.8. *Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S^i$ ein nichtnegativ graduierter Kring. Ist unser Kring S noethersch, so ist er ringendlich über S^0.*

Beweis. Sind x_ν homogene Erzeuger des Ideals $S^{>0} \subset S$, so zeigt eine Induktion über den Grad schnell, daß die x_ν auch S als S^0-Kring erzeugen. □

Lemma 9.4.9. *Sei K ein Körper. Ist $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter ringendlicher K-Kring, so ist auch A^0 ringendlich über K.*

Beweis. Wir wählen homogene Erzeuger $x_1, \ldots x_n$ des K-Krings A und realisieren A als Quotienten des Polynomrings $S := K[X_1, \ldots, X_n]$. Versehen wir diesen Ring mit der $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-Graduierung, in der die Erzeuger X_ν den Bigrad $(\mathrm{grad}(x_\nu), 1)$ haben, so ist der homogene Teil vom Grad Null in Bezug auf die erste Graduierung $S^{(0,*)}$ alias der $(\{0\} \times \mathbb{Z})$-Anteil unseres bigraduierten Rings noethersch nach 9.4.7. Damit ist er auch ringendlich über K nach 9.4.8. Nun induziert jedoch unsere Surjektion $S \twoheadrightarrow A$ eine Surjektion $S^{(0,*)} \twoheadrightarrow A^0$. So folgt, daß auch A^0 ringendlich ist über K. □

Beweis von Proposition 9.4.2. Um nun Proposition 9.4.2 über die Bahnenräume für fixpunktfreie $k^\times$-Operationen zu zeigen, versehen wir $\mathcal{O}(X)$ mit seiner durch die $k^\times$-Operation induzierten Graduierung und wissen aus 9.4.9, daß $\mathcal{O}(X)^0$ ringendlich ist über k. Damit müssen wir im wesentlichen nur noch nachweisen, daß der von der Einbettung $\mathcal{O}(X)^0 \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ induzierte Morphismus $\pi : X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ genau die $k^\times$-Bahnen von X als Fasern hat und offen und final ist.

Für den Nachweis, daß π sogar produktfest offenfinal ist, dürfen wir dann Z affin annehmen und brauchen nur unsere Erkenntnisse für $\mathcal{O}(Z) \otimes \mathcal{O}(X)$ anzuwenden. Jedes Ideal in $\mathcal{O}(X)^0$ entsteht nun offensichtlich durch Herunterschneiden mit dem von ihm erzeugten Ideal von $\mathcal{O}(X)$. Damit entsteht auch jedes maximale Ideal von $\mathcal{O}(X)^0$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal von $\mathcal{O}(X)$, als da heißt, π ist surjektiv. Offensichtlich ist π auch konstant auf $k^\times$-Bahnen. Für eine $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge $Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} X$ ist weiter ihr Verschwindungideal $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{O}(X)$ ein homogenes Radikalideal, das $\mathcal{O}(X)^0$ notwendig in einem Radikalideal $\mathcal{I}(Y)^0$ schneidet. Jedes Ideal in $\mathcal{O}(X)^0$ entsteht nun aber wie gesagt durch Herunterschneiden mit einem Ideal von $\mathcal{O}(X)$, und insbesondere entsteht auch jedes maximale Ideal über $\mathcal{I}(Y)^0$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal über $\mathcal{I}(Y)$, als da heißt, die simultane Nullstellenmenge von $\mathcal{I}(Y)^0$ ist genau $\pi(Y)$. Das zeigt, daß $\pi(Y)$ abgeschlossen ist. Eine Teilmenge von $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ ist mithin genau dann abgeschlossen, wenn ihr Urbild unter π abgeschlossen ist. Folglich trägt $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ die Quotiententopologie, und π ist offen als Projektion auf einen Bahnenraum unter einer Gruppenwirkung. Nun beachten wir, daß nach 5.4.12 alle $k^\times$-Bahnen eine offene Teilmenge ihres Abschlusses umfassen, und da diese Abschlüsse höchstens eindimensional sind und unsere Operation nach Annahme fixpunktfrei ist, müssen alle Bahnen abgeschlossen sein. Gegeben verschiedene Bahnen $Y \neq Z$ gilt also $\mathcal{I}(Y) + \mathcal{I}(Z) = \mathcal{O}(X)$ und damit $\mathcal{I}(Y)^0 + \mathcal{I}(Z)^0 = \mathcal{O}(X)^0$ und folglich $\pi(Y) \neq \pi(Z)$. Die Fasern von π sind also genau die $k^\times$-Bahnen. Es bleibt nur zu zeigen, daß Funktionen auf offenen Teilmengen von $\operatorname{Max} \mathcal{O}(X)^0$ regulär sind genau dann, wenn sie unter Zurückholen auf X regulär werden. Für globale Funktionen ist das klar. Für Funktionen auf affinen offenen Mengen folgt es aus $(s^{-1}\mathcal{O}(X))^0 = s^{-1}(\mathcal{O}(X)^0)$ für alle $s \in \mathcal{O}(X)^0$, und damit ist klar, daß unser Morphismus final ist. Schließlich liefert unser Argument von oben für eine $k^\times$-stabile abgeschlossene Teilmenge $Y \underset{\mathrm{A}}{\subset} X$ die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}(Y)^0 & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X)^0 & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\pi(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I}(Y) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

In diesem Diagramm meinen sind alle Vertikalen schlicht die Einbettungen der homogenen Komponenten vom Grad Null und das zeigt den behaupteten Isomorphismus $Y/k^\times \xrightarrow{\sim} \pi(Y)$. □

Übungen

Übung 9.4.10. Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S^i$ ein nichtnegativ graduierter Kring. Ist S noethersch, so ist für jedes $d > 0$ auch der Teilring $\bigoplus_{i \geq 0} S^{di}$ ringendlich über S^0. Hinweis: 9.4.8.

9.5 Varietäten zu graduierten Kringalgebren

9.5.1. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine algebraische Operation $k^\times \times X \to X$ von $k^\times$ auf einer k-Varietät X heißt **kontrahierend**, wenn sie sich fortsetzen läßt zu einem Morphismus $k \times X \to X$. Das Bild $0X$ von $\{0\} \times X$ ist unter diesen Annahmen die Fixpunktmenge unserer Operation, denn die Regel $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ für eine Operation muß aus Stetigkeitsgründen dann auch für beliebige $\lambda, \mu \in k$ gelten. Insbesondere folgt $0X \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$. Hierfür ist die Separiertheit von X wesentlich.

9.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere kontrahierenden Operationen kontrahieren im allgemeinen nur auf eine Untervarietät und nicht notwendig auf einen Punkt. Im Fall einer Kontraktion auf einen Punkt sagen wir das explizit dazu.

Satz 9.5.3 (Varietäten zu nichtnegativ graduierten Kringalgebren). *Sei X eine affine k-Varietät mit einer kontrahierenden algebraischen Operation von $k^\times$ und sei $X^\circ \overset{\circ}{\subset} X$ das Komplement der Fixpunktmenge. So gilt:*

1. *Mit seiner finalen Struktur ist $X^\circ/k^\times$ eine k-Varietät;*

2. *Die Projektion $X^\circ \twoheadrightarrow X^\circ/k^\times$ ist produktfest offenfinal;*

3. *Ist $Y \hookrightarrow X$ die Einbettung einer $k^\times$-stabilen abgeschlossenen Teilmenge, so ist auch der induzierte Morphismus $Y^\circ/k^\times \hookrightarrow X^\circ/k^\times$ eine abgeschlossene Einbettung;*

4. *Der von der Multiplikation mit Null induzierte Morphismus $X^\circ/k^\times \to 0X$ ist eigentlich.*

9.5.4. Der Beweis wird mit 9.1.5 auch zeigen, daß die Projektion auf den Bahnenraum ein affiner Morphismus ist. Umgekehrt ist auch das Bild jeder offenen affinen $k^\times$-stabilen Teilmenge von X° nach 9.4.2 wieder affin.

Ergänzung 9.5.5. Gegeben ein nichtnegativ $\mathbb{Z}$-graduierter affiner k-Kring A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ verwenden wir die Abkürzung

$$\mathrm{MProj}(A) := (\mathrm{Max}\, A)^\circ/k^\times$$

für die durch die Konstruktion in 9.5.3 gegebene k-Varietät.

Vorschau 9.5.6. Die Varietät der k-wertigen Punkte des Schemas $\mathrm{Proj}(A)$ von Grothendieck ist im Fall $A = \mathcal{O}(X)$ genau unsere Quotientenvarietät. Der letzte Teil unseres Satzes besagt, daß $X^\circ/k^\times$ im Fall eines einzigen Fixpunkts vollständig ist. Man kann mit etwas mehr Aufwand zeigen, daß $X^\circ/k^\times$ im Fall eines einzigen Fixpunkts sogar eine projektive Varietät ist.

Beispiel 9.5.7. Betrachten wir auf der Varietät $X = k^2$ die nichtkontrahierende $k^\times$-Operation durch $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda^{-1}y)$, so ist der Bahnenraum von $X^\circ = k^2\backslash 0$ mit seiner finalen Struktur als k-geringter Raum unsere nichtseparierte Prävarietät „Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt" aus 6.4.5.

Beweis. Sei $A = \mathcal{O}(X)$ mit der nach 9.4.5 durch die $k^\times$-Operation gegebenen $\mathbb{Z}$-Graduierung versehen. Offensichtlich ist die Operation kontrahierend genau dann, wenn gilt $A^i = 0$ für $i < 0$, und wir haben dann $\mathcal{I}(0X) = A^{>0}$. Für jedes homogene $f \in A$ ist nun $X_f = X\backslash\mathcal{Z}(f)$ eine $k^\times$-stabile affine offene Teilmenge mit $A[f^{-1}]$ als Ring von regulären Funktionen, und für f homogen von positivem Grad gilt $X_f \subset X^\circ$. Nach 9.4.2 ist für f homogen von positivem Grad die durch das Herunterschneiden induzierte Abbildung

$$\operatorname{Max}(A[f^{-1}]) \to \operatorname{Max}(A[f^{-1}]^0)$$

produktfest offenfinal mit den $k^\times$-Bahnen als Fasern. Die besagten offenen Teilmengen X_f überdecken aber X°. Das zeigt, daß $X^\circ/k^\times$ mit seiner finalen Struktur eine Varietät ist und daß die Projektion produktfest offenfinal ist. Ebenso folgt aus 9.4.2 die Behauptung 3 über abgeschlossene Einbettungen. Wir müssen nur noch zeigen, daß unser Bahnenraum separiert ist. Wir finden eine homogene Surjektion $A^0[Z_1,\ldots,Z_n] \twoheadrightarrow A$ von einem Polynomring nach A mit den Z_ν homogen von Graden $d(\nu)$ und dürfen nach Teil 3 hinfort annehmen, daß A bereits selbst dieser Polynomring ist. Nun betrachten wir die ganze Ringerweiterung

$$A^0[Z_1,\ldots,Z_n] \subset A^0[T_0,\ldots,T_n]$$

mit den Z_ν homogen von Graden $d(\nu)$ und den T_ν homogen vom Grad Eins und der rechten Abbildung gegeben durch $Z_\nu \mapsto T_\nu^{d(\nu)}$. Die zugehörige Abbildung auf den Maximalspektra $Y \to X$ ist abgeschlossen und surjektiv mit endlichen Fasern und $k^\times$-äquivariant. Genauer sind die Fasern die Bahnen der Operation einer endlichen Gruppe W von Einheitswurzeln auf Y, die mit der Operation von $k^\times$ kommutiert. Unsere Abbildung induziert abgeschlossene Abbildung $Y\times Y \to X \times X$, und das Urbild von $X^\circ \times X^\circ$ ist offensichtlich $Y^\circ \times Y^\circ$. Nun sind im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y^\circ \times Y^\circ & \to & Y^\circ/k^\times \times Y^\circ/k^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^\circ \times X^\circ & \to & X^\circ/k^\times \times X^\circ/k^\times \end{array}$$

die Vertikalen surjektiv und die Horizontalen produktfest offenfinal und insbesondere offen. Es reicht also zu zeigen, daß das Urbild der Diagonale unter der unteren Horizontale abgeschlossen ist. Da wir schon wissen, daß $Y^\circ/k^\times \cong 0X \times \mathbb{P}^n k$ separiert ist, ist das Urbild der Diagonale unter der oberen Horizontale schon mal abgeschlossen. Dasselbe gilt für seine Vereinigung mit allen seinen Bildern unter der W-Operation auf dem ersten Faktor. Dann aber ist das Bild dieser Vereinigung unter der linken Vertikale abgeschlossen, und das ist genau das Urbild der Diagonale unter der unteren Horizontale. Die letzte Aussage folgt aus ihrer eigenen Allgemeinheit, sobald wir zeigen, daß der Morphismus $\pi : X^\circ/k^\times \to 0X$ abgeschlossen ist. Um das zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß sein Bild genau aus allen Punkten von $0X$ besteht, über denen der durch Multiplikation mit 0 gegebene Morphismus $X \to 0X$ eine Faser der Dimension mindestens Eins hat. Nach der Halbstetigkeit der Faserdimension 5.10.7 bilden alle Punkte von X, die zu einer Faser von $(0\cdot) : X \to X$ einer Dimension ≥ 1 gehören, eine abgeschlossene Teilmenge von X. Der Schnitt dieser Teilmenge mit $0X$ ist genau das Bild von $\pi : X^\circ/k^\times \to 0X$, mithin ist dieses Bild schon mal abgeschlossen. Gegeben $A \overset{\mathrm{A}}{\subset} X^\circ/k^\times$ eine abgeschlossene Teilmenge ist sicher ihr Urbild eine abgeschlossene $k^\times$-stabile Teilmenge $B \overset{\mathrm{A}}{\subset} X^\circ$. Folglich ist $B \sqcup 0X \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ eine abgeschlossene k-stabile Teilmenge von X, und wenn wir darauf die bereits bewiesene Erkenntnis anwenden, folgt $\pi(A) \overset{\mathrm{A}}{\subset} 0X$. $\square$

9.5.8. Im Fall eines Polynomrings $A = k[T_1, \ldots, T_n]$, der graduiert ist durch die Vorschrift $\operatorname{grad}(T_i) = w_i$ mit positiven natürlichen Zahlen $w_1, \ldots, w_n$, heißt die zugehörige Bahnenvarietät ein **gewichteter projektiver Raum**. Man notiert sie $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$.

Beispiel 9.5.9. Man prüft, daß der gewichtete projektive Raum $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ eine offene Überdeckung durch affine Untervarietäten $\mathbb{P}(1, 1, 2) = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ hat mit

$$\begin{array}{rcl} U_0 & = & \operatorname{Max} \mathbb{C}[y/x, z/x^2] \cong \mathbb{C}^2, \\ U_1 & = & \operatorname{Max} \mathbb{C}[x/y, z/y^2] \cong \mathbb{C}^2, \\ U_2 & = & \operatorname{Max} \mathbb{C}[x^2/z, xy/z, y^2/z] \text{ singulär.} \end{array}$$

Übungen

Ergänzende Übung 9.5.10. Gegeben über einem Körper K ein Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_r]$ mit Erzeugern der positiven Grade $0 < d_1 \leq \ldots \leq d_r$ gilt für die Dimensionen der homogenen Komponenten R^i im Körper der Laurentreihen $\mathbb{Q}(\!(t)\!)$ die Identität

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\dim_k R^i) t^i = \prod_{\nu=1}^{r} (1 - t^{d_\nu})^{-1}$$

Weiter zeige man, daß sowohl r als auch die Grade $d_1, \ldots, d_r$ der Erzeuger durch diese formale Potenzreihe bereits eindeutig festgelegt werden.

9.6 Bahnschlußräume und Invariantenringe

Definition 9.6.1. Gegeben $G \backslash\!\!\backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe bezeichne

$$X /\!\!/ G$$

die Menge der Äquivalenzklassen für die von der Relation $\{(x, y) \mid y \in \overline{Gx}\}$ erzeugte Äquivalenzrelation auf X. Wir nennen $X /\!\!/ G$ den **Bahnschlußraum** und nennen eine stetige Abbildung $X \to Y$ einen **Bahnschlußmorphismus**, wenn Y isomorph ist zu $X /\!\!/ G$ als topologischer Raum unter X.

9.6.2. Gegeben $G \backslash\!\!\backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe und $f : X \to Y$ ein Bahnschlußmorphismus ist für $L \subset Y$ offen oder abgeschlossen auch $f : f^{-1}(L) \to L$ ein Bahnschlußmorphismus. Das folgt aus den entsprechenden Aussagen [TM] 1.1.7.20 und [TM] 1.1.7.29 für finale Abbildungen.

Beispiel 9.6.3 (**Ein nicht offener Bahnschlußmorphismus**). Wir betrachten die Ebene $X := \mathbb{R}^2$ mit der Operation von $G := \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch $\lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. In diesem Fall geht die Vereinigung der Diagonale und der Nebendiagonale $\{(x, y) \mid x = \pm y\}$ homöomorph auf den Bahnschlußraum. Die Abbildung von $X = \mathbb{R}^2$ in den Bahnschlußraum ist in diesem Fall nicht offen, ja selbst die unter der Gruppenoperation stabile offene obere Halbebene hat kein offenes Bild.

9.6.4 (**Bahnschlußraum im Fall k-geringter Räume**). Gegeben $G \backslash\!\!\backslash X$ ein k-geringter Raum mit der Operation einer Gruppe denken wir uns den Bahnschlußraum, wenn nichts anderes gesagt ist, stets mit seiner finalen Struktur eines k-geringten Raums bezüglich $X \twoheadrightarrow X /\!\!/ G$ versehen und erklären einen Bahnschlußmorphismus $X \to Y$ in einen weiteren k-geringten Raum als einen Morphismus, für den Y als Objekt unter X isomorph ist zu $X /\!\!/ G$.

Beispiel 9.6.5 (**Lokalität von Bahnschlußmorphismen**). Sei $G \backslash\!\!\backslash X$ ein k-geringter Raum mit einer Operation einer Gruppe. Gegeben ein Bahnschlußmorphismus $\pi : X \to Y$ ist offensichtlich für jede offene Teilmenge $V \Subset Y$ auch $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ ein Bahnschlußmorphismus. Ist umgekehrt $\pi : X \to Y$ ein Morphismus in einen weiteren k-geringten Raum und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ ein Bahnschlußmorphismus ist für alle $V \in \mathcal{V}$, so ist auch π selber bereits ein Bahnschlußmorphismus.

9.6.6 (**Faktorisieren über einen Bahnschlußmorphismus**). Ist $G \backslash\!\!\backslash X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe und Y ein topologischer Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, so faktorisiert jede auf G-Bahnen konstante stetige Abbildung $X \to Y$ in eindeutiger Weise über den Bahnschlußmorphismus $X \twoheadrightarrow X /\!\!/ G$. Dasselbe gilt analog auch für k-geringte Räume und insbesondere im Fall einer k-Prävarietät Y, deren Punkte ja stets abgeschlossen sind.

Ergänzung 9.6.7. In der Allgemeinheit der obigen Definitionen ist mir nicht klar, ob alle Punkte eines Bahnschlußraums abgeschlossen sein müssen. Deshalb erlaube ich mir oben auch nicht, von einer universellen Eigenschaft zu sprechen.

9.6.8 (**Vergleich von Bahnenraum und Bahnschlußraum**). Sei $G\curvearrowright X$ ein topologischer Raum mit der Operation einer Gruppe. Liegt im Abschluß jeder G-Bahn genau eine abgeschlossene G-Bahn, so liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen der Menge der abgeschlossenen G-Bahnen in X und dem Bahnschlußraum $X/\!\!/G$. Ist jede G-Bahn abgeschlossen, so ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $X/G \xrightarrow{\sim} X/\!\!/G$ zwischen dem Bahnenraum und dem Bahnschlußraum.

9.6.9. Offensichtlich ist ein Bahnschlußmorphismus genau dann ein Bahnenmorphismus, wenn alle seine Fasern Bahnen sind. Offensichtlich ist ein Bahnenmorphismus genau dann ein Bahnschlußmorphismus, wenn alle seine Fasern abgeschlossen sind, insbesondere also dann, wenn alle Punkte des Bahnenraums abgeschlossen sind.

9.6.10. Jede G-äquivariante stetige Abbildung $X \to Y$ in einen weiteren Raum mit G-Operation induziert auch eine stetige Abbildung $X/\!\!/G \to Y/\!\!/G$, aber eine äquivariante offene Einbettung muß, im Gegensatz zum Fall der Bahnenräume, auf den Bahnschlußräumen keineswegs eine offene Einbettung induzieren.

9.6.11. Ist im Fall der Operation $G\curvearrowright X$ einer Gruppe auf einer Prävarietät der Bahnschlußraum $X/\!\!/G$ wieder eine Prävarietät, so nennen wir diese Prävarietät die **Bahnschlußprävarietät**. Ist zusätzlich der Bahnschlußmorphismus affin, so sagen wir, $G\curvearrowright X$ **habe einen affinen Bahnschlußmorphismus** und setzen dabei implizit voraus, daß der Bahnschlußraum wieder eine Prävarietät ist.

9.6.12 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur ist es üblich, unsere Bahnschlußprävarietät als „guten Quotienten“ oder auch „kategorischen Quotienten“ zu bezeichnen und diesen Begriff noch mit zusätzlichen Eigenschaften aufzuladen. Insbesondere wird oft zusätzlich gefordert, daß diese Prävarietät separiert sein soll. Ich nenne sie in diesem Fall die **Bahnschlußvarietät**.

9.6.13. Ist im Fall einer Operation einer Gruppe auf einem k-geringten Raum der Bahnenraum eine Varietät, so fällt er nach 9.6.9 mit dem Bahnschlußraum zusammen.

Definition 9.6.14. Eine algebraische Gruppe heißt **linear reduktiv**, wenn jede algebraische Darstellung unserer Gruppe im Sinne von [AAG] 1.4.4 vollständig reduzibel ist im Sinne von [NAS] 4.1.3, also die Summe ihrer irreduziblen Unterdarstellungen.

Beispiele 9.6.15. Nach [AAG] 1.7.19 sind diagonalisierbare Gruppen und insbesondere Tori stets linear reduktiv. Nach dem Satz von Maschke [NAS] 4.1.1

sind endliche Gruppen einer zur Charakteristik teilerfremden Ordnung auch linear reduktiv. Nach [HL] 31.2.6.7 sind in Charakteristik Null alle reduktiven algebraischen Gruppen linear reduktiv und insbesondere gilt das für $\mathrm{GL}(n)$. Im Fall von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ kann man auch argumentieren, daß sie der Zariski-Abschluß der unitären Gruppe $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ ist, die für die analytische Topologie kompakt ist und auf jeder algebraischen endlichdimensionalen Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ stetig operiert in Bezug auf die natürliche Topologie des zugrundeliegenden $\mathbb{C}$-Vektorraums. Damit folgt die Behauptung aus der vollständigen Reduzibilität endlichdimensionaler Darstellungen kompakter topologischer Gruppen [ML] 28.2.4.13.

Vorschau 9.6.16. Unser Ziel ist im folgenden zu zeigen, daß für die Operation einer linear reduktiven algebraische Gruppe G auf einer affinen Varietät X der Bahnschlußraum $X /\!\!/ G$ auch eine affine Varietät ist. Wenn wir das einmal hinnehmen, folgt wegen $\mathcal{O}(X)^G = \mathcal{O}(X /\!\!/ G)$ sofort, daß der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^G$ ringendlich sein muß über k. Der Nachweis dieser Aussage hinwiederum erweist sich als ein wesentlicher erster Schritt auf dem Weg zu unserem Ziel, mit dem wir jetzt erst einmal beginnen.

Vorschau 9.6.17. In positiver Charakteristik kann man noch ziemlich weit kommen, wenn man statt mit linear reduktiven Gruppen mit den sogenannten „geometrisch reduktiven" Gruppen arbeitet.

Satz 9.6.18 (Endlichkeitssatz von Hilbert). *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und A ein ringendlicher k-Kring mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G, so ist auch der Invariantenring A^G ringendlich über k.*

Ergänzung 9.6.19. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch über einem beliebigen Grundkörper, sobald einmal alle darin auftauchenden Begriffe in dieser Allgemeinheit definiert sind. Im Fall von Operationen endlicher Gruppen steht uns bereits der deutlich stärkere Satz von Noether 5.3.1 zur Verfügung.

Beweis. Die Projektion längs der isotypischen Zerlegung $A \twoheadrightarrow A^G$ ist sicher A^G-linear. Das gleich folgende Lemma 9.6.20 zeigt damit schon mal, daß der Invariantenring noethersch ist. Um zu zeigen, daß A^G sogar ringendlich ist über k, wählen wir einen endlichdimensionalen G-stabilen Teilraum $V \subset A$, der den k-Kring A erzeugt, und realisieren A als Quotienten der symmetrischen Algebra $S := \mathrm{S}(V)$ nach einem geeigneten G-stabilen Ideal J. Unser S besitzt dann eine natürliche G-invariante Graduierung, und da S^G nach dem bereits Bewiesenen noethersch sein muß, ist S^G nach 9.4.8 ringendlich über k. Dasselbe gilt dann auch für S^G/J^G. Nun haben wir ja per definitionem $S/J \xrightarrow{\sim} A$. Aus der vollständigen Reduzibilität folgt dann $S^G/J^G \xrightarrow{\sim} (S/J)^G \xrightarrow{\sim} A^G$ und wir sind fertig. □

Lemma 9.6.20. *Seien A ein Ring und $B \subset A$ ein Teilring. Ist die Inklusion $B \hookrightarrow A$ eine spaltende Einbettung von B-Rechtsmoduln, so gilt für jedes Linksideal $I \subset B$ die Formel $I = B \cap \langle AI \rangle$. Ist insbesondere A linksnoethersch, so auch B.*

9.6.21. Hier und im folgenden meint $\langle\ \rangle$ das Erzeugnis als abelsche Gruppe und AI die Menge der Produkte von einem Element von A mit einem Element von I und $\langle AI \rangle$ folgerichtig die von diesen Produkten erzeugte additive Untergruppe von A.

Beweis. Nach Annahme existiert eine Zerlegung $A = B \oplus C$ von A als B-Rechtsmodul. Sie impliziert unmittelbar eine Zerlegung $\langle AI \rangle = I \oplus \langle CI \rangle$, und diese Zerlegung hinwiederum impliziert unmittelbar die Hauptaussage des Lemmas. Der Nachsatz folgt aus der Charakterisierung noetherscher Moduln durch das Stagnieren aller aufsteigenden Folgen von Untermoduln. □

9.6.22. Sei $G\backslash X$ eine affine Varietät über $k = \bar{k}$ mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven Gruppe. Nach dem Endlichkeitssatz von Hilbert 9.6.18 ist der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^G$ ringendlich über k und wir können folglich eine affine Varietät $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ erklären durch $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G := \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G)$ und einen Morphismus von X dorthin durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Max}\mathcal{O}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \operatorname{Max}(\mathcal{O}(X)^G) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & X/\!\!/_{\mathrm{a}}G
\end{tikzcd}$$

Man nennt $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ den **algebraischen Quotienten** von X nach der Operation von G und $X \to X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ den **Quotientenmorphismus**. Wir zeigen im folgenden Satz unter anderem, daß unser Quotientenmorphismus ein Bahnschlußmorphismus ist. Sobald das gezeigt ist, vereinfachen wir unsere Notation $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ wieder zu $X/\!\!/G$.

Satz 9.6.23 (Algebraische Quotienten affiner Varietäten). *Sei $G\backslash X$ eine affine Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe. So gilt:*

1. *Der Morphismus $\pi : X \to X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ ist konstant auf G-Bahnen und jeder Morphismus von X in eine weitere Varietät, der konstant ist auf G-Bahnen, faktorisiert in eindeutiger Weise über π;*

2. *Gegeben eine Familie G-stabiler abgeschlossener Teilmengen von X stimmt das Bild in $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ ihres Schnitts überein mit dem Schnitt ihrer Bilder;*

3. *Gegeben eine G-stabile abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ ist ihr Bild eine abgeschlossene Teilmenge $\pi(Z) \subset X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ und die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus $Z/\!\!/_{\mathrm{a}}G \xrightarrow{\sim} \pi(Z)$;*

4. *Der Morphismus $\pi : X \to X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ ist produktfest offenfinal und in jeder seiner Fasern liegt genau eine abgeschlossene G-Bahn. Insbesondere ist er ein Bahnschlußmorphismus und wir dürfen unsere Notation zu $X/\!\!/G$ vereinfachen;*

5. *Gegeben eine offene Teilmenge $V \Subset X/\!\!/G$ ist V affin genau dann, wenn $\pi^{-1}(V)$ affin ist, und dann ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $\pi^{-1}(V)/\!\!/G \xrightarrow{\sim} V$.*

Beweis. 3. Für eine G-stabile abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ ist sicher auch ihr Verschwindungideal $\mathcal{I}(Z) \subset \mathcal{O}(X)$ ein G-stabiles Ideal, das den Invariantenring in einem Radikalideal $\mathcal{I}(Z)^G \subset \mathcal{O}(X)^G$ schneidet. Jedes Ideal im Invariantenring entsteht nun aber nach 9.6.20 durch Herunterschneiden mit einem Ideal von $\mathcal{O}(X)$. Insbesondere entsteht auch jedes maximale Ideal über $\mathcal{I}(Z)^G$ durch Herunterschneiden aus einem maximalen Ideal über $\mathcal{I}(Z)$, als da heißt, die simultane Nullstellenmenge von $\mathcal{I}(Z)^G$ ist genau $\pi(Z)$. Das zeigt, daß $\pi(Z)$ abgeschlossen ist, und liefert zusätzlich die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}(Z)^G & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X)^G & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\pi(Z)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I}(Z) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Z) \end{array}$$

In diesem Diagramm meinen die beiden linken Vertikalen schlicht die Einbettungen der Invarianten, und weil unter unseren Voraussetzungen das Bilden der Invarianten exakt ist, muß auch die letzte Vertikale einen Isomorphismus auf die Invarianten $\mathcal{O}(\pi(Z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Z)^G$ induzieren, also einen Isomorphismus von Varietäten $Z/\!\!/_{\mathrm{a}}G \xrightarrow{\sim} \pi(Z)$.

2. Es reicht zu zeigen, daß für G-stabile Ideale von $\mathcal{O}(X)$ der Schnitt ihrer Summe mit dem Invariantenring übereinstimmt mit der Summe ihrer Schnitte, in Formeln

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \cap \mathcal{O}(X)^G = \sum_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda \cap \mathcal{O}(X)^G)$$

Das gilt jedoch ganz allgemein für eine beliebige Familie von Unterdarstellungen einer vollständig reduziblen Darstellung oder noch allgemeiner für Untermoduln eines halbeinfachen Moduls, wenn man das Bilden der Invarianten verallgemeinert zum Bilden irgendeiner isotypischen Komponente.

4. Wenden wir 3 auf $Z = X$ an, so folgt die Surjektivität des Quotientenmorphismus. Weiter ist klar, daß unser Quotientenmorphismus auf Bahnen konstant ist. Ein Urbild ist in anderen Worten stets G-stabil, und eine Menge mit abgeschlossenem Urbild muß nach 3 selbst abgeschlossen sein. Somit trägt $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ die

Quotiententopologie. Es bleibt nur zu zeigen, daß Funktionen auf offenen Teilmengen von $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ regulär sind genau dann, wenn sie unter Zurückholen auf X regulär werden. Für globale Funktionen ist das klar, denn für eine Funktion $f : X/\!\!/_{\mathrm{a}}G \to k$ mit $f \circ \pi \in \mathcal{O}(X)$ haben wir notwendig $f \circ \pi \in \mathcal{O}(X)^G$ und damit $f \in \mathcal{O}(X/\!\!/_{\mathrm{a}}G)$. Für Funktionen auf einer Basis der Topologie von $X/\!\!/_{\mathrm{a}}G$ folgt es aus $s^{-1}(\mathcal{O}(X)^G) \xrightarrow{\sim} (s^{-1}\mathcal{O}(X))^G$ für alle $s \in \mathcal{O}(X)^G$, was man aus $\ker(s\cdot) = \ker(s^2\cdot)$ oder auch aus 4.3.47 folgern mag. Damit ist klar, daß unser Morphismus eine Submersion ist. In jeder Faser liegt nun mindestens eine Bahn kleinstmöglicher Dimension, die notwendig abgeschlossen sein muß, da ja ihr Abschluß in derselben Faser enthalten ist und beim Bilden des Abschlusses nur Bahnen echt kleinerer Dimension hinzukommen können. Es kann aber auch nicht mehr als eine abgeschlossene Bahn in einer gegebenen Faser geben, da wir sonst einen Widerspruch zu 2 erhalten würden.

1. Wir wissen ja nach Teil 4, daß unser Quotientenmorphismus ein Bahnschlußmorphismus ist.

5. Hier bemerken wir zunächst, daß jeder Morphismus von affinen Varietäten affin ist, etwa nach 9.1.3. Also ist das Urbild jeder offenen affinen Untervarietät unter affin. Andererseits ist für $V \circledsubseteq X/\!\!/G$ stets $\pi : \pi^{-1}(V) \twoheadrightarrow V$ ein Bahnschlußmorphismus, und ist $\pi^{-1}(V)$ affin, so ist zusätzlich auch $\pi^{-1}(V) \to \pi^{-1}(V)/\!\!/G$ ein Bahnschlußmorphismus und folglich $V \cong \pi^{-1}(V)/\!\!/G$ affin. $\square$

9.6.24. Sei G linear reduktiv. Jeder G-äquivariante Morphismus von affinen G-Varietäten $X \to Y$ induziert einen Morphismus $X/\!\!/G \to Y/\!\!/G$. Eine offene Einbettung muß dabei jedoch keineswegs eine offene Einbettung werden. Wir erhalten bereits ein Gegenbeispiel, wenn wir das Komplement einer Ursprungsgerade in die Ebene einbetten und jeweils die Operation der multiplikativen Gruppe durch Streckungen betrachten.

9.6.25. Sei $G\backslash X$ eine Varietät mit einer algebraischen Operation einer algebraischen Gruppe. Ich erinnere daran, daß wir die Punkte, deren Bahn die für Bahnen größtmögliche Dimension hat, die **regulären Punkte** genannt hatten, und daß nach [AAG] 2.4.22 die regulären Punkte eine offene und G-stabile Teilmenge $X^{\mathrm{reg}} \circledsubseteq X$ bilden. Die regulären Punkte mit abgeschlossener Bahn nennen wir **absolut stabile Punkte**. Die Menge aller absolut stabilen Punkte notieren wir

$$X^{\mathrm{stab}}$$

Vorschau 9.6.26. Im Rahmen der „geometrischen Invariantentheorie“ 9.7.1 werden wir auch „relativ stabile Punkte“ betrachten, die in der Literatur meist einfach nur „stabile Punkte“ heißen und deren Menge wir X^{s} notieren. Diese Menge ebenso wie die Menge X^{ss} der „semistabilen Punkte“ hängen von von zusätzlichen

Daten ab. Unsere drei Begriffe stehen dann zueinander in der Beziehung

$$X^{\mathrm{s}} = (X^{\mathrm{ss}})^{\mathrm{stab}}$$

Satz 9.6.27 (Bahnenvarietät der absolut stabilen Punkte, affiner Fall). *Sei $G\backslash\!\!\searrow X$ eine affine Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe. So bilden die absolut stabilen Punkte eine offene Teilmenge $X^{\mathrm{stab}} \circledcirc X$ und der Rückzug des Bahnschlußmorphismus $X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$ auf deren Bild ist ein Bahnenmorphismus*

$$X^{\mathrm{stab}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{stab}}/G$$

Beweis. Das Komplement $X\backslash X^{\mathrm{reg}}$ der Menge der regulären Punkte alias die Menge der nicht-regulären Punkte ist abgeschlossen und hat als G-stabile abgeschlossene Teilmenge nach 9.6.23 ein abgeschlossenes Bild in $X/\!\!/G$. Das Urbild dieses Bildes aber ist per definitionem genau die Menge aller nicht absolut stabilen Punkte, die damit auch abgeschlossen sein muß. In Formeln gilt mithin

$$X\backslash X^{\mathrm{stab}} = \pi^{-1}(\pi(X\backslash X^{\mathrm{reg}}))$$

und dann $\pi^{-1}(\pi(X^{\mathrm{stab}})) = X^{\mathrm{stab}}$. Nach 9.6.5 ist also auch $X^{\mathrm{stab}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{stab}}/G$ ein Bahnschlußmorphismus und dann als Bahnschlußmorphismus mit abgeschlossenen Fasern sogar ein Bahnenmorphismus. □

Korollar 9.6.28. *Sei $G\backslash\!\!\searrow X$ eine beliebige Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und affinem Bahnschlußmorphismus $\pi : X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$. So gilt:*

1. *In jeder Faser von π liegt genau eine abgeschlossene Bahn;*
2. *Der Morphismus π ist produktfest offenfinal;*
3. *Das Bild jeder abgeschlossenen G-stabilen Teilmenge $Z \subset X$ ist abgeschlossen und $\pi : Z \twoheadrightarrow \pi(Z)$ ist auch ein affiner Bahnschlußmorphismus;*
4. *Gegeben eine Familie G-stabiler abgeschlossener Teilmengen von X stimmt das Bild ihres Schnitts überein mit dem Schnitt ihrer Bilder.*

Beweis. Für jede affine offene Teilmenge $V \circledcirc X/\!\!/G$ ist auch ihr Urbild $\pi^{-1}(V)$ affin und der nach 9.6.5 induzierte Bahnschlußmorphismus $\pi : \pi^{-1}(V) \twoheadrightarrow V$ ist vom in 9.6.23 betrachteten Typus. □

Korollar 9.6.29 (Bahnenraum der absolut stabilen Punkte). *Sei $G\backslash\!\!\searrow X$ eine Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen*

Gruppe und affinem Bahnschlußmorphismus $\pi : X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$. So bilden die absolut stabilen Punkte eine offene G-stabile Teilmenge $X^{\mathrm{stab}} \Subset X$ und der Rückzug des Bahnschlußmorphismus $X \twoheadrightarrow X/\!\!/G$ auf deren Bild ist ein Bahnenmorphismus

$$X^{\mathrm{stab}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{stab}}/G$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus 9.6.27, das wir ja für jede affine offene Teilmenge von $X/\!\!/G$ auf deren Urbild anwenden können. □

Satz* 9.6.30 (Bahnenvarietät der regulären Punkte). *Sei $G\backslash X$ eine irreduzible normale affine Varietät mit einer algebraischen Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und bezeichne $X^{\mathrm{reg}} \Subset X$ die Menge der G-regulären Punkte. Ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion $X^{\mathrm{reg}}/G \xrightarrow{\sim} X/\!\!/G$ und hat $X\backslash X^{\mathrm{reg}}$ in X eine Kodimension ≥ 2, so ist $X^{\mathrm{reg}} \to X/\!\!/G$ ein Bahnenmorphismus.*

Beispiel 9.6.31. Die Operation durch Konjugation von $G = \mathrm{GL}(n;k)$ auf $X = \mathrm{Mat}(n;k)$ hat alle in diesem Satz geforderten Eigenschaften.

Beweis. Bezeichne $\pi : X \to X/\!\!/G$ unseren algebraischen Quotienten alias Bahnschlußmorphismus und bezeichne $\tilde{\pi} : X^{\mathrm{reg}} \to X/\!\!/G$ unseren Bahnenmorphismus in spe. Nach unseren Annahmen sind alle Fasern von $\tilde{\pi}$ disjunkte Vereinigungen von höchstens $|G/G^\circ|$ irreduziblen Varietäten der immergleichen Dimension d. Gegeben $Z \mathrel{\underset{\not\subset}{\sqsubset}} X/\!\!/G$ irreduzibel und eine irreduzible Komponente A von $\tilde{\pi}^{-1}(Z)$ hat also auch jede irreduzible Komponente jeder Faser von $A \to Z$ diese Dimension und mit generischer Flachheit 5.5.5 und den Dimensionseigenschaften flacher Morphismen 5.10.5 folgt

$$\operatorname{kdim} A = d + \operatorname{kdim} Z$$

Wir zeigen nun, daß $\tilde{\pi}$ als Abbildung von topologischen Räumen final ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß das Bild jeder G-stabilen abgeschlossenen Teilmenge $Y \mathrel{\underset{\not\subset}{\sqsubset}} X^{\mathrm{reg}}$ eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{\pi}(Y) \mathrel{\underset{\not\subset}{\sqsubset}} X/\!\!/G$ ist. Wir dürfen dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $Y = GY_1$ für eine irreduzible Komponente Y_1 von Y, so daß $Z := \overline{\tilde{\pi}(Y)}$ irreduzibel ist. Für jede irreduzible Komponente A von $\tilde{\pi}^{-1}(Z)$ gilt nun $\operatorname{kdim} A = d + \operatorname{kdim} Z$, und aus $Z \neq \tilde{\pi}(Y)$ folgte im Widerspruch dazu, daß es Komponenten geben müßte, die über echten abgeschlossenen Teilmengen von Z liegen und damit eine echt kleinere Dimension haben müßten. Mithin ist $\tilde{\pi}$ eine finale Abbildung von topologischen Räumen. Für $V \Subset X/\!\!/G$ affin ist nun $\pi^{-1}(V) \Subset X$ affin und nach 5.9.27 und Annahme ist die Restriktion eine Bijektion $\mathcal{O}(\pi^{-1}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{\pi}^{-1}(V))$. Also induziert die Restriktion auch eine Bijektion auf G-Invarianten und wir folgern, daß $\tilde{\pi}$ auch ein finaler Morphismus von k-geringten Räumen ist. □

9.6.32. Ich hätte gerne einen Studenten, der mir den vorhergehenden und den folgenden Abschnitt auf den Fall einer geometrisch reduktiven affinen algebraischen Gruppe umschreibt. Nach Haboush haben alle reduktiven algebraischen Gruppen diese Eigenschaft auch in positiver Charakteristik und Argumente von Nagata zeigen dann die endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings und dergleichen, vergleiche auch die Appendix von Mumford-Fogarty.

Übungen

Übung 9.6.33. Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V einer linear reduktiven Gruppe G mit Bahnschlußmorphismus $\pi : V \twoheadrightarrow V /\!\!/ G$ heißt $\pi^{-1}(\pi(0)) \not\subset V$ die **Nilfaser** oder auch der **Nilkegel** oder englisch **null-cone**. Man zeige, daß er auch beschrieben werden kann als die simultane Nullstellenmenge aller Invarianten positiven Grades. Mithilfe von [O] 32.1.3.4 zeige man weiter, daß der Nilkegel im Raum der quadratischen Matrizen für die Operation der allgemeinen linearen Gruppe durch Konjugation genau der Kegel der nilpotenten Matrizen ist.

Ergänzung 9.6.34. Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V einer linear reduktiven Gruppe G mit Bahnschlußmorphismus $\pi : V \twoheadrightarrow V /\!\!/ G$ induziert nach **??** die Einbettung der Nilfaser nach V einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(V)/\sqrt{\langle \mathcal{O}(V)^G_{>0} \rangle} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\pi^{-1}(\pi(0)))$$

Den nicht notwendig reduzierten Quotienten $\mathcal{O}(V)/\langle \mathcal{O}(V)^G_{>0} \rangle$ nennen wir die **Nilfaseralgebra**. Ihr Spektrum mit seiner Struktur als lokal gekringter Raum nach 14.1.9 ist die schematheoretische Nilfaser im Sinne von 14.2.11.

9.7 Geometrische Invariantentheorie

9.7.1. Üblicherweise geht man in der geometrischen Invariantentheorie von einer Varietät X mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G aus und wählt zunächst einmal eine „Linearisierung". Dem entspricht bei uns im folgenden die Wahl eines möglichen „Kegels" C über X, den wir der Einfachkeit halber erst einmal affin annehmen. Das Ziel ist die Konstruktion einer offenen G-stabilen Teilmenge

$$X^{\mathrm{ss}} \Subset X$$

von sogenannten „semistabilen" Punkten derart, daß $X^{\mathrm{ss}} \Subset X$ einen affinen Bahnschlußmorphismus $X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G$ hat mit den in 9.6.28 und 9.6.29 gezeigten Konsequenzen. Insbesondere ist nach 9.6.29 für die G-stabile offene Teilmenge

$$X^{\mathrm{s}} := (X^{\mathrm{ss}})^{\mathrm{stab}}$$

von „relativ stabilen“ Punkten der Bahnenraum eine Varietät. Die offene Teilmenge $X^{\mathrm{ss}} \Subset X$ und a forteriori X^{s} hängen jedoch, auch wenn das in der Notation nicht zum Ausdruck kommt, von C ab. Die im folgenden gegebene Konstruktion heißt der „Geometrische-Invarianten-Theorie-Quotient“ oder kurz **GIT-Quotient**.

9.7.2. Wir erinnern für eine kontrahierende $k^\times$-Operation auf einer affinen k-Varietät X und $X^\circ \Subset X$ das Komplement der Menge der Fixpunkte aus 9.5.3, daß der Quotient $X^\circ/k^\times$ mit seiner finalen Struktur als k-geringter Raum eine separierte k-Varietät ist.

9.7.3 (**Die allgemeine Quotientenkonstruktion**). Sei C eine affine Varietät mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G und einer damit kommutierenden kontrahierenden $k^\times$-Operation. In dieser Situation konstruieren wir von der obersten Zeile beginnend ein kommutatives Diagramm von separierten Varietäten

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & C/\!\!/G \\
C^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\kappa"] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & \pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde\pi"] \arrow[d, two heads, "\tilde\kappa"] & (C/\!\!/G)^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
C^\circ/k^\times & \pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ/k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & (C/\!\!/G)^\circ/k^\times \\
X \arrow[u, equal] & X^{\mathrm{ss}} \arrow[l, hook'] \arrow[u, equal] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G \arrow[u, equal] \\
 & X^{\mathrm{s}} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & X^{\mathrm{s}}/G \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Im folgenden will ich diese Konstruktion diskutieren. Der obere Index $\circ$ meint in unserem Diagramm stets das Komplement der Fixpunktmenge einer Wirkung von $k^\times$. Alle Inklusionspfeile in unserem Diagramm sind offene Einbettungen. Alle Pfeile nach rechts in unserem Diagramm sind affine Bahnschlußmorphismen und damit insbesondere offenfinal. Ich beginne damit, den Aufbau unseres Diagramms zu erklären.

1. Der Morphismus $\tilde\pi$ entsteht durch Rückzug des $k^\times$-äquivarianten affinen Bahnschlußmorphismus π für die G-Operation nach 9.6.23. Nach 9.6.5 ist dann $\tilde\pi$ auch ein $k^\times$-äquivarianter affiner Bahnschlußmorphismus für die G-Operation.

2. Die Morphismen κ und β sind affine Bahnenmorphismen auf dem Komplement der Fixpunktmenge einer kontrahierenden $k^\times$-Operation und die

zugehörigen Bahnenvarietäten sind separiert, alles nach unseren Erkenntnissen aus 9.5.3. In der Notation aus 9.5.5 haben wir also einen ausgezeichneten Isomorphismus $X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G \xrightarrow{\sim} \operatorname{MProj}(\mathcal{O}(C)^G)$. Der Morphismus κ ist nach Konstruktion außerdem G-äquivariant. Der Morphismus $\tilde{\kappa}$ erbt von κ die Eigenschaft, ein G-äquivarianter affiner Bahnenmorphismus für die $k^{\times}$-Operation zu sein.

3. Der Morphismus α wird nun konstruiert mithilfe der universellen Eigenschaft des Bahnenmorphismus $\tilde{\kappa}$. Wir zeigen, daß er ein offenfinaler Morphismus k-geringter Räume ist. Um das zu einzusehen, bezeichnen wir seinen Definitionsbereich mit X^{ss} und nennen dessen Elemente **semistabile Punkte**. Für $U \circledcirc X^{\mathrm{ss}}$ offen ist ist $\tilde{\kappa}^{-1}(U)$ offen, also $\tilde{\pi}(\tilde{\kappa}^{-1}(U))$ offen, also $\beta\tilde{\pi}(\tilde{\kappa}^{-1}(U)) = \alpha(U)$ offen. Da α auch surjektiv ist, ist es mithin offenfinal als Abbildung von topologischen Räumen. Sei weiter W offen im Wertebereich von α und $f : W \to k$ eine Funktion. Ist $f \circ \alpha$ regulär auf $\alpha^{-1}(W)$, so ist $f \circ \alpha\tilde{\kappa} = f \circ \beta\tilde{\pi}$ regulär und $(G \times k^{\times})$-invariant auf $\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha^{-1}(W))$, also ist $f \circ \beta$ regulär auf $\beta^{-1}(W)$ und $k^{\times}$-invariant, also ist f regulär. Mithin ist α offenfinal als Morphismus k-geringter Räume.

4. Wir zeigen, daß der Morphismus α ein Bahnschlußmorphismus ist, ja daß in jeder seiner Fasern genau eine in X^{ss} abgeschlossene G-Bahn liegt. Daß mindestens eine abgeschlossene Bahn in jeder Faser liegt, ist nach [AAG] 2.3.8 eh klar. Gäbe es zwei abgeschlossene Bahnen, so fänden wir jedoch auch zwei abgeschlossene Bahnen in mindestens einer Faser von $\tilde{\pi}$ und dann auch in mindestens einer Faser von π im Widerspruch zu 9.6.23.

5. Der Morphismus α ist affin. In der Tat, gegeben W offen affin in seinem Wertebereich ist $\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha^{-1}(W)) = \tilde{\pi}^{-1}(\beta^{-1}(W))$ affin aufgrund der Affinität von π und von β, letztere nach 9.5.4, und damit ist auch $\alpha^{-1}(W)$ affin wieder nach 9.5.4.

6. Wir wissen nun, daß $\alpha : X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G$ ein affiner Bahnschlußmorphismus ist. Damit ergibt sich die unterste Zeile unseres Diagramms aus unseren allgemeinen Überlegungen in 9.6.29. Die offene Teilmenge der stabilen Punkte $X^{\mathrm{s}} := (X^{\mathrm{ss}})^{\mathrm{stab}} \circledcirc X^{\mathrm{ss}}$ besteht also aus allen regulären Punkten $x \in X^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{ss}}$ mit $Gx \not\subset\!\!\!\!\!\triangle\; X^{\mathrm{ss}}$. Auch sie hängt von X^{ss} und damit von C ab. Wir nennen die Punkte von X^{s} die **relativ stabilen Punkte** von X. Es kann passieren, daß ein regulärer Punkt x bei einer anderen Wahl von C zwar semistabil bleibt, aber nicht relativ stabil.

7. Die Konstruktion liefert mit 9.5.3 zusätzlich einen eigentlichen Morphismus

$$X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G = (C /\!\!/ G)^{\circ}/k^{\times} \to 0(C /\!\!/ G) = \operatorname{Max}(\mathcal{O}(C)^G \cap \mathcal{O}(C)^0)$$

Kontrahiert die $k^\times$-Operation bereits den Kegel C zu einem Punkt, so haben wir insbesondere $\mathcal{O}(C)^0 = k$ und $X^{\mathrm{ss}} /\!\!/ G$ ist eigentlich.

Beispiel 9.7.4 (**Die Quotientenkonstruktion zu einer Darstellung**). Gehen wir bei der allgemeinen Quotientenkonstruktion 9.7.3 speziell von einer endlichdimensionalen algebraischen Darstellung $C = V$ einer linear reduktiven algebraischen Gruppe G aus und nehmen als unsere kontrahierende Operation von $k^\times$ die Operation der Skalare auf dem Vektorraum V, so spezialisiert der entsprechende Teil dieses Diagramms zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] & V \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & V /\!\!/ G \\
V\backslash 0 \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\kappa"] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & V\backslash\pi^{-1}(\bar{0}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, two heads, "\tilde{\kappa}"] & (V /\!\!/ G)\backslash\bar{0} \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
\mathbb{P}(V) & (V\backslash\pi^{-1}(\bar{0}))/k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & ((V /\!\!/ G)\backslash\bar{0})/k^\times
\end{tikzcd}$$

Mit $\bar{0}$ ist dabei das Bild des Ursprungs $\bar{0} := \pi(0)$ gemeint. Sein Urbild $\pi^{-1}(\bar{0})$ heißt die **Nullfaser** und besteht aus allen Punkten $v \in V$, deren Bahnabschluß den Ursprung enthält, in Formeln $0 \in \overline{Gv}$.

Beispiel 9.7.5 (**Die Quotientenkonstruktion zu einem Gruppencharakter**). Sei $G\backslash\!\!\searrow X$ eine affine Varietät mit einer Operation einer linear reduktiven algebraischen Gruppe und sei $\theta : G \to k^\times$ ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen. Wir können unsere allgemeine Quotientenkonstruktion 9.7.3 auf $C := X \times k$ mit der G-Operation $g(x, \lambda) = (gx, \theta(g)\lambda)$ und der damit kommutierenden kontrahierenden $k^\times$-Operation durch Multiplikation auf dem zweiten Faktor anwenden. Dann ergibt sich $\mathcal{O}(C) = \mathcal{O}(X) \otimes k[T]$ und

$$\mathcal{O}(C)^G = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(X)^{G, n\theta} \boxtimes T^n$$

für $\mathcal{O}(X)^{G,n\theta} := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(g^{-1}x) = \theta(g)^n f(x)\ \forall x \in X, g \in G\}$. Setzen wir $X^{\theta\text{-ss}} := \{x \in X \mid \exists n > 0, f \in \mathcal{O}(X)^{G,n\theta} \text{ mit } f(x) \neq 0\}$, so spezialisiert der entsprechende Teil dieses Diagramms zu einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
X \times k \arrow[r, equal] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\urcorner"] & C /\!\!/ G \\
X \times k^\times \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\kappa"] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & X^{\theta\text{-ss}} \times k^\times \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, two heads, "\tilde{\kappa}"] & (C /\!\!/ G)^\circ \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
X & X^{\theta\text{-ss}} \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\alpha"] & X /\!\!/^{\theta} G
\end{tikzcd}$$

Unten links haben wir dabei eine neue Notation eingeführt, diese Varietät $X/\!\!/^{\theta}G$ ist sowohl die Bahnschlußvarietät von $G\backslash X^{\theta\text{-ss}}$ unter dem horizontalen Morphismus α als auch die Bahnenvarietät nach $k^{\times}$ unter dem vertikalen Morphismus β. Die Menge $X^{\theta\text{-ss}} \Subset X$ heißt die Menge der **θ-semistabilen Punkte**. Gegeben $f \in \mathcal{O}(X)^{G,n\theta}$ mit $n > 0$ ist $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ das Urbild unter α einer offenen Teilmenge. Andererseits ist X_f affin und der offensichtliche Morphismus ist folglich nach 9.6.5 eine offene Einbettung $X_f/\!\!/G \hookrightarrow X/\!\!/^{\theta}G$.

Beispiel 9.7.6 (**Die Quotientenkonstruktion für $k^{\times}\backslash k^{n+1}$**). Spezialisieren wir das vorhergehende Beispiel zu $X = k^{n+1}$ mit der offensichtlichen Operation von $G = k^{\times}$ und betrachten den Charakter $\theta : k^{\times} \to k^{\times}$, $t \mapsto t^m$, so ergibt sich mit unserer Notation var für die finale einpunktige Varietät

$$X/\!\!/^{\theta}G = \begin{cases} \mathbb{P}^n k & \text{für } m < 0; \\ \mathrm{var} & \text{für } m = 0; \\ \emptyset & \text{für } m > 0. \end{cases}$$

Vorschau 9.7.7 (**Quotienten projektiver Varietäten**). Seien G linear reduktiv, X eine projektive G-Varietät und $L \to X$ ein G-äquivariantes amples Geradenbündel auf X. Man erkläre die Menge X^{ss} der **semistabilen Punkte von X in Bezug auf L** durch die Vorschrift

$$X^{\mathrm{ss}} = X^{\mathrm{ss}}(L) := \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es gibt einen } G\text{-invarianten globalen Schnitt} \\ s \text{ einer Tensorpotenz } L^{\otimes n} \text{ von } L \text{ für } n > 0, \text{ der} \\ \text{bei } x \text{ nicht verschwindet, in Formeln } s(x) \neq 0. \end{array} \right\}$$

So ist X^{ss} eine offene G-stabile Teilmenge von X und ihr Bahnschlußraum $X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ ist eine projektive Varietät und $X^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ ist ein affiner Morphismus. Erklären wir schließlich die Menge $X^{\mathrm{s}} = X^{\mathrm{s}}(L) \subset X^{\mathrm{ss}}(L)$ der **stabilen Punkte** als die Teilmenge aller Punkte $x \in X^{\mathrm{ss}}$ mit endlicher Isotropiegruppe G_x, deren G-Bahn in X^{ss} abgeschlossen ist, so ist X^{s} offen mit $X^{\mathrm{s}} = \alpha^{-1}(\alpha(X^{\mathrm{s}}))$ und unser Bahnschlußmorphismus induziert einen Bahnenmorphismus

$$\alpha : X^{\mathrm{s}} \twoheadrightarrow X^{\mathrm{s}}/G$$

Das alles ist nur ein Spezialfall unserer Grundkonstruktion 9.7.3, ausgedrückt in einer etwas feineren Sprache. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nach **??** nämlich L sehr ampel annehmen. Der Raum V der globalen Schnitte von L ist dann nach **??** endlichdimensional und wir erhalten eine kanonische abgeschlossene G-äquivariante Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}V$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen also $X \subset_{\mathcal{A}} \mathbb{P}V$ annehmen. Der Kegel über X im Sinne von 6.5.15 ist dann eine abgeschlossene Teilmenge $C = C(X) \subset_{\mathcal{A}} V$ mit einer algebraischen Operation von G und einer damit kommutierenden kontrahierenden Operation von $k^\times$ so daß die offensichliche Abbildung einen G-äquivarianten Isomorphismus $C^\circ/k^\times \xrightarrow{\sim} X$ liefert, für C° das Komplement der Menge der $k^\times$-Fixpunkte. Schließlich besteht $\pi^{-1}(C/\!\!/G)^\circ$ nach Konstruktion genau aus allen Punkten von C, auf denen irgendeine G-invariante Funktion echt positiven Grades nicht verschwindet. Übersetzen wir diese Bedingung zurück in die Situation des Satzes, so ergibt sich die dort für X^{ss} gegebene Beschreibung. Weiter wird in der Situation unseres Satzes C von $k^\times$ sogar auf einen einzigen Punkt kontrahiert und $\mathcal{O}(C)$ ist folglich nichtnegativ graduiert mit nur Skalaren im Grad Null. Dasselbe folgt für $\mathcal{O}(C)^G = \mathcal{O}(C/\!\!/G)$ und zeigt, daß auch $C/\!\!/G$ von $k^\times$ auf einen einzigen Punkt kontrahiert wird. Dann aber ist $(C/\!\!/G)^\circ/k^\times = X^{\mathrm{ss}}/\!\!/G$ nach 9.5.6 vollständig und, für letztere Aussage ebenfalls nach 9.5.6 aber noch ohne Beweis, sogar projektiv.

Ergänzung 9.7.8. Verkleben wir bei der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1 k$ mit ihrer offensichtlichen $k^\times$-Operation die beiden Fixpunkte Nord- und Südpol im Sinne von 6.4.45, so erhalten wir nach 6.4.30 oder expliziter Rechnung wieder eine $k^\times$-Varietät Z. Ist V eine algebraische Darstellung positiver endlicher Dimension von $k^\times$, so muß jeder $k^\times$-äquivariante Morpismus $Z \to \mathbb{P}V$ konstant sein, denn jede abgeschlossene $k^\times$-invariante Teilmenge $Y \subset\!\!\!\!\!\!\!\!\not\ \ \mathbb{P}V$ positiver Dimension besitzt nach [AAG] 4.7.13 mindestens zwei $k^\times$-Fixpunkte. Weiter kann auch Z offensichtlich nicht durch offene affine unter $k^\times$ invariante Teilmengen überdeckt werden.

Vorschau 9.7.9. Das tautologische Bündel $\mathcal{O}(1)$ auf $\mathbb{P}^1 k$ ist nicht äquivariant für $\mathrm{PSL}(2; k)$, sondern nur für $\mathrm{SL}(2; k)$. Es ist also in der Weise unkanonisch, daß es nicht gelingen kann, jeder Varietät X, die zu $\mathbb{P}^1 k$ isomorph ist, ein Geradenbündel $\mathcal{L}_X$ zuzuordnen und jedem Isomorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ derartiger Varietäten einen Isomorphismus $i_f : \mathcal{L}_X \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{L}_Y$ derart, daß die offensichtlichen Verträglichkeiten erfüllt sind.

10 Danksagung

Bei der Formulierung des Beweises der Faktorialität von Potenzreihenringen war mir ein Aufschrieb von Marcin Mazur, den ich im Netz gefunden habe, eine gute Hilfe. Der Beweis der Faktorialität von regulären lokalen Kringen folgt Shafarevitch [Sha13], der hinwiederum Mumford [Mum95] folgt. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich David Nies, Stefan Matting, Manuel Blickle, Friedrich Knop (5.5.3), Ivan Zaccanelli, . . .

11 Vorlesung Kommutative Algebra SS25

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen. Die Veranstaltungen wurde in der Form einer Fragestunde abgehalten.

22.4 Hilbert'scher Nullstellensatz, Formulierung 1.1.6. Zariski-Topologie 1.1.15. Noether'sche Moduln und Ringe 1.5, Hilbert'scher Basissatz 1.5.11, Kettenbedingung 1.5.13.

24.4 Ringendliche Körpererweiterungen 1.6.10. Beweis des Hilbert'schen Nullstellensatzes 1.7.13.

29.4 Polynomiale Funktionen 3.1, Räume als Ringe 3.2.1 folgende.

6.5 Den ganzen Abschnitt 3 bis 3.4.13 außer symmetrische Algebra.

8.5 Den ganzen Abschnitt 3 weiter.

13.5 Abschnitt 4.1.12 zu irreduziblen Komponenten. Analogie zur Primfaktorzerlegung in faktoriellen Ringen. Primideale und irreduzible Mengen im geometrischen Fall 4.2.8. Primärzerlegung von Idealen in noetherschen Kringen ohne Beweis.

15.5 Nocheinmal bei der Entsprechung 4.2.8 zwischen irreduziblen Teilmengen einer affinen Varietät X und Primidealen in $\mathcal{O}(X)$ beginnen. Schnitt von Idealen in einem Primideal 4.2.13, Ideale in einer Vereinigung endlich vieler Primideale 4.2.14. Krulldimension und Krullkodimension.

22.5 Planung: Lokalisierung 4.3.1 bis 4.3.22.

22.5 Planung: Lokal-global-Prinzip 4.3.26. Lokalisierung und Funktionskeime 4.4.3. Lokal reguläre Funktionen sind regulär **??**. Primideale in Lokalisierungen 4.5.4. Minimale Primideale.

12 Vorlesung Kommutative Algebra SS20

Es handelte sich um eine vierstündige Online-Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

12.5 Algebraische Teilmengen, Zariskitopologie 1.1.15, Formulierung des Hilbert'schen Nullstellensatzes 1.1.6. Überblicksartig Moduln über Ringen. Noether'sche Moduln und Ringe 1.5.5 und 1.5.9. Hilbert'scher Basissatz 1.5.11 formuliert, aber noch nicht bewiesen.

14.5 Beweis Hilbert'scher Basissatz. Charakterisierung noetherscher Moduln durch Kettenbedingung. Beweis der körpertheoretischen Form des Nullstellensatzes. Maximale Ideale in Polynomringen. Ideale in Polynomringen ohne Nullstellen.

19.5 Beweis des Hilbert'schen Nullstellensatzes. Radikalideale im Polynomring und algebraische Mengen in k^n. Polynomiale und reguläre Funktionen stimmen auf abgeschlossenen Mengen überein. Äquivalenz von Kategorien zwischen algebraischen Mengen und affinen k-Kringen. Kategorien und Funktoren diskutiert. Äquivalenz von Kategorien noch nicht diskutiert.

26.5 Äquivalenzen von Kategorien. Äquivalenz der Matrixkategorie und der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume. Äquivalenz der Kategorie der algebraischen Teilmengen und der affinen Kringalgebren. Naive affine Varietäten eingeführt, aber nicht mehr als die Definition gemacht. Neil'sche Parabel.

26.5 Beispiele für naive affine Varietäten. Erweiterter Satz über Äquivalenzen von Kategorien. Maximalspektrum. Produkte affiner Varietäten.

2.6 Irreduzible Räume, Komponentenzerlegung, Primideale und ihre Bedeutung im geometrischen Fall.

4.6 Lokalisierung von Kringen und ihre Interpretation als Funktionskeime in geometrischen Situationen. Jede ringendliche Erweiterung eines Integritätsbereichs wird nach Lokalisierung an einem von Null verschiedenen Element frei als Modul. Alternativer Beweis des Nullstellensatzes.

9.6 Lokalisierung und Primideale. Zariski-Topologie auf dem Primspektrum. Nilradikal als Schnitt aller minimalen Primideale. Verkleinerung zu minimalem Primideal. Nilradikal als Schnitt der minimalen Primideale.

16.6 Lokalisierung von Moduln. Universelle Eigenschaft, Verträglichkeit mit Koprodukten, Koprodukte in Kategorien. Exaktheit. Nicht Verträglichkeit mit

Hom-Räumen. Lemma von Nakayama in zwei Versionen, noch nicht für lokale Kringe.

18.6 Lemma von Nakayama für lokale Kringe und anschauliche Bedeutung. Ganze Kringerweiterungen. Sandwichlemma und Verkleben von Punkten, aber nur gezeigt $\mathcal{O}(Y)$ affiner k-Kring und noch nicht $Y \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(Y)$ für die verklebte geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$.

23.6 Going-up und Korollare, insbesondere Gleichheit der Krulldimension bei ganzen Kringerweiterungen und Endlichkeit der Fasern im Fall einer ganzen Kringerweiterung durch einen noetherschen Kring. $Y \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} \mathcal{O}(Y)$ für die verklebte geringte Menge $(Y, \mathcal{O}(Y))$. Noether-Normalisierung für Hyperflächen und Krulldimension von Polynomringen. Nicht Quotienten nach endlichen Gruppen. Noch nicht Krull'scher Hauptidealsatz für Polynomringe und folgende.

25.6 Noether-Normalisierung. Faktorisierungssatz. Bilder von Morphismen. Transzendenzgrad. Krulldimension als Transzendenzgrad.

30.6 Going-Down. Ringe regulärer Funktionen auf affinen Varietäten, ja beliebige über einem Körper ringendliche Kringe sind Kettenringe. Hauptidealsatz von Krull mit Anwendungen, insbesondere untere Abschätzung für die Dimension der irreduzibeln Komponenten eines Schnitts von irreduziblen algebraischen Teilmengen in k^n. Nicht Definitionslücken rationaler Funktionen.

2.7 Geringte Räume. Abstrakte Varietäten. Projektive Räume sind Varietäten. Globale reguläre Funktionen auf projektiven Räumen sind konstant.

7.7 Kegelkonstruktion. Erzwungene Schnitte in projektiven Räumen und deren Dimension. Homogener Koordinatenring einer abgeschlossenen Teilmenge im projektiven Raum und projektive Nullstellenmengen homogener Polynome. Darstellung von Hyperflächen in homogenen Räumen als Nullstellenmengen homogener quadratfreier Polynome.

9.7 Hilbertpolynom, Hilbertdimension, Multiplizität. Additivität der Multiplizitäten vergessen. Satz von Bézout, viel drumrum erklärt, aber noch ohne Beweis.

14.7 Beweis des Satzes von Bézout. Filtrierte abelsche Gruppen, Ringe und Moduln. Dimensionstheorie lokaler noether'scher Kringe anmoderiert.

16.7 Hauptsatz der Dimensionstheorie lokaler noether'scher Kringe, nur letzte Ungleichung nicht gezeigt.

21.7 Hauptsatz der Dimensionstheorie lokaler noether'scher Kringe mit Korollaren. Extrinsische Glattheit, Regularität, reguläre Quotienten regulärer lokaler Kringe. Durchschnittssatz von Krull. Noch nicht bewiesen: Das Korollar über Regularität und Glattheit.

23.7 Beweis des Korollars über Regularität und Glattheit. Lokale Irreduzibilität an glatten Stellen. Pseudokoordinten. Minimaldimension von Schnitten in glatten Varietäten. Reguläre lokale Ringe sind ganz abgeschlossen. Diskrete Bewertungsringe und ihre verschiedenen Charakterisierungen, insbesondere auch durch die Eigenschaft ganz abgeschlossen.

28.7 Dedekindringe. Bezug zu affinen glatten irreduziblen Kurven. Diskrete Bewertungen und Punkte des Maximalspektrums. Beginn der Diskussion von Körpern und ihren Kurven. Diskussion der Bedeutung der Endlichkeit des ganzen Abschlusses. Beweis steht noch aus, ebenso Norm und Spur.

30.7 Noch etwas Körper und ihre Kurven besprochen. Dann Ausblick auf Schemata.

Literatur

[AAG] Skriptum Affine Algebraische Gruppen. Wolfgang Soergel.

[AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.

[AN1] Skriptum Analysis 1. Wolfgang Soergel.

[AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.

[AN3] Skriptum Analysis 3. Wolfgang Soergel.

[Bou06] Nicolas Bourbaki. *Algèbre Commutative, Chapitres 8 et 9*. Masson 1983, réimpression inchangée par Springer, 2006.

[Coh95] P. M. Cohn. *Skew fields*, volume 57 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Theory of general division rings.

[dJ12] Aise Johan de Jong. The stacks project, founded 2012 and maintained by Aise Johan de Jong. https://stacks.math.columbia.edu, 2012.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[EL] Skriptum Elementargeometrie. Wolfgang Soergel.

[FT1] Skriptum Funktionentheorie 1. Wolfgang Soergel.

[GGPS69] Israel M. Gelfand, Graev, and Piatetski-Shapiro. *Representation Theory and Automorphic Functions*. Saunders, 1969.

[GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.

[Gro61] Alexander Grothendieck. *EGA II*, volume 8. Publications mathématiques de l'I.H.E.S., 1961.

[HL] Skriptum halbeinfache Lie-Algebren. Wolfgang Soergel.

[JS06] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer. *Algebra*. Springer, 2006.

[KAG] Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie. Wolfgang Soergel.

[Kem93] George R. Kempf. *Algebraic Varieties*, volume 172 of *LMS Lecture Notes*. Cambridge University Press, 1993.

[Kun80] Ernst Kunz. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*. Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, 1980.

[LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.

[LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.

[Lan74] Serge Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, 1974.

[ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.

[Mum95] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition.

[Nag55] M. Nagata. The theory of multiplicity in general local rings. *Symp. Tokyo-Nikkosha*, pages 191–226, 1955.

[NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.

[O] Skriptum Kategorie $\mathcal{O}$. Wolfgang Soergel.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, second edition, 2013.

[TD] Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren. Wolfgang Soergel.

[TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.

[TG] Skriptum Garbenkohomologie. Wolfgang Soergel.

[TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.

[TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.

[TSF] Skriptum Grothendieck's sechs Funktoren. Wolfgang Soergel.

[TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.

[Wei74] André Weil. *Basic Number Theory*. Springer, 1974.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index