AFFINE ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Wolfgang Soergel

13. September 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare und affine algebraische Gruppen

Ich will im folgenden so viel wie möglich auch für algebraische Monoide machen.

1.1 Einführung und Grundbegriffe

Definition 1.1.1. Eine **lineare algebraische Gruppe** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist eine Untergruppe

$$G \subset \mathrm{GL}(n; k)$$

einer allgemeinen linearen Gruppe derart, daß es eine Menge $P \subset k[X_{ij}]$ von Polynomen in den Matrixeinträgen gibt, deren simultane Nullstellenmenge gerade G ist, in Formeln $G = \{A \in \mathrm{GL}(n; k) \mid f(A) = 0 \; \forall f \in P\}$.

Beispiele 1.1.2. Erste Beispiele sind die Untergruppen der invertierbaren Diagonalmatrizen, der oberen Dreiecksmatrizen, und der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Des weiteren Gruppen von invertierbaren Blockoberen Dreiecksmatrizen, die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n; k) := \{A \in \mathrm{GL}(n, k) \mid \det A = 1\}$ und die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n; k) := \{A \in \mathrm{GL}(n; k) \mid A^\top A = I\}$.

1.1.3 (**Notwendigkeit des Formalismus der algebraischen Varietäten**). In dieser Vorlesung sollen algebraische Gruppen „unabhängig von ihrer Einbettung“ studiert werden und wir bauen einen Formalismus auf, der das präzisiert und ermöglicht. In diesem Formalismus sind dann etwa $G = \mathrm{GL}(1; k) = k^\times$ und $G = \{\mathrm{diag}(\lambda, 1) \mid \lambda \in k^\times\} \subset \mathrm{GL}(2; k)$ als „dieselbe“ algebraische Gruppe anzusehen. Des weiteren werden viele Argumente induktiv unter Zuhilfenahme von Quotienten algebraischer Gruppen nach geeigneten Untergruppen geführt. Dazu müssen diese Quotienten ihrerseits mit einer algebraischen Struktur versehen werden. Um all das zu präzisieren und formalisieren, arbeitet man mit abstrakten algebraischen Varietäten, wie sie etwa in [KAG] 6.8.2 eingeführt werden. Da die volle Kraft dieser Begrifflichkeit aber erst nach und nach benötigt wird, beginnen wir elementarer, erinnern nur den Begriff einer „naiven affinen k-Varietät“ aus [KAG] 2.4.1 folgende und arbeiten so lange wie möglich mit dieser einfacher zugänglichen Begrifflichkeit. Ich empfehle jedoch, parallel auch die ausführlichere Diskussion der Grundlagen der algebraischen Geometrie in [KAG] 1 folgende zu studieren.

1.1.4. $(k = \bar{k})$. Eine **affine k-Varietät** oder genauer eine **naive affine k-Varietät** ist wie in [KAG] 2.4.1 ein Paar $(X, \mathcal{O}(X))$ bestehend aus einer Menge X und einer k-Unterringalgebra $\mathcal{O}(X) \subset \mathrm{Ens}(X, k)$ der Ringalgebra aller k-wertigen Funktionen auf X mit den beiden folgenden Eigenschaften:

1. Unsere Ringalgebra $\mathcal{O}(X)$ ist ringendlich über k;

2. Wir erhalten eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ring}^k(\mathcal{O}(X), k)$ zwischen X und der Menge der k-linearen Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to k$ durch die Vorschrift $x \mapsto \delta_x$, die jedem Punkt $x \in X$ den durch das Auswerten bei x gegebenen Ringhomomorphismus $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k$, $f \mapsto f(x)$ zuordnet.

Die Elemente von $\mathcal{O}(X)$ heißen die **regulären Funktionen auf** X. Ein **Morphismus** von affinen k-Varietäten ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ derart, daß das Vorschalten besagter Abbildung reguläre Funktionen zu regulären Funktionen macht, in Formeln $f \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$. Dies Vorschalten von φ heißt der **Komorphismus zu** φ und wird $\varphi^\sharp = (\circ\varphi) : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ notiert. Gegeben affine Varietäten X, Y bezeichnen wir die Menge aller Morphismen von X nach Y mit

$$\mathrm{Var}(X, Y)$$

1.1.5 (**Zur algebraischen Abgeschlossenheit des Grundkörpers**). Ich finde es verblüffend, wie weit man mit dem Formalismus dieser naiven affinen Varietäten kommen kann, ohne den Hilbert'schen Nullstellensatz, ja ohne irgendwelche Annahmen an den Grundkörper k zu benötigen. Ich nehme dennoch stets $k = \bar{k}$ an, da sonst die Kategorie unserer naiven k-Varietäten nicht mehr zur Kategorie der affinen k-Varietäten äquivalent ist, wie sie in der Literatur sinnvollerweise für gewöhnlich betrachtet wird.

1.1.6 (**Invertieren regulärer Funktionen**). Gegeben eine affine algebraische Varietät X und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ ohne Nullstelle ist auch $1/f$ eine reguläre Funktion. Das gilt nur im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ und wird bewiesen, indem man die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führt. Ist genauer $f \in \mathcal{O}(X)$ keine Einheit, so ist das von f erzeugte Ideal nicht der ganze Ring und kann mithin zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ vergrößert werden. Jetzt sagt der Hilbert'sche Nullstellensatz in seiner körpertheoretischen Form [KAG] 1.9.10, daß die Komposition $k \to \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung sein muß, also wegen $k = \bar{k}$ ein Isomorphismus. So erhalten wir einen Homomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ von k-Kringalgebren mit $f \mapsto 0$, und das bedeutet im Lichte unserer Definition einer naiven affinen Varietät, daß f ein Nullstelle auf X gehabt haben muß.

Beispiele 1.1.7. ($k = \bar{k}$). Ich erinnere einige Beispiele aus [KAG] 2.4.3. Die Beweise können dort nachgeschlagen, aber ebensogut auch hier als Übungsaufgaben gelöst werden.

1. Jede endliche Menge X wird mit allen Funktionen als regulären Funktionen $\mathcal{O}(X) := \mathrm{Ens}(X, k)$ eine affine Varietät.

2. Die Menge $X = k^n$ wird mit allen polynomialen Funktionen als regulären Funktionen $\mathcal{O}(X) := k[T_1, \ldots, T_n]$ eine affine Varietät.

3. Gegeben eine affine Varietät X und eine Teilmenge $P \subset \mathcal{O}(X)$ ihres Rings von regulären Funktionen wird die simultane Nullstellenmenge

$$Y = \mathcal{Z}(P) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in P\}$$

eine affine Varietät mit den Restriktionen regulärer Funktionen von X als regulären Funktionen alias mit $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}_{X|Y}(Y) := \{f|_Y \mid f \in \mathcal{O}(X)\}$. In der Tat kommt jeder k-lineare Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(Y) \to k$ von einem k-linearen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$ her, der durch das Auswerten δ_x an einem Punkt $x \in X$ gegeben wird, der dann bereits zu Y gehört haben muß. Wir nennen die durch $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}_{X|Y}(Y)$ gegebene Struktur einer affinen Varietät die **induzierte Struktur** auf $\mathcal{Z}(P)$.

4. Gegeben eine affine Varietät $(X, \mathcal{O}(X))$ und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ wird das Komplement der Nullstellenmenge

$$X_f := X \backslash \mathcal{Z}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

unserer Funktion f eine affine Varietät, wenn wir ihren Ring von regulären Funktionen erklären als den von den Restriktionen der regulären Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ zusammen mit der Funktion $1/f$ erzeugten Teilring

$$\mathcal{O}(X_f) := \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \subset \operatorname{Ens}(X_f, k)$$

In der Tat liefert jeder Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \to k$ einen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$, der von der Auswertung an einem Punkt $x \in X$ herkommt, und man sieht leicht ein, daß dieser Punkt x bereits zu X_f gehört haben muß.

1.1.8 (**Produkte affiner Varietäten**). $(k = \bar{k})$. Besonders wichtig ist für uns die Konstruktion von Produkten affiner Varietäten, vergleiche auch [KAG] 2.5.8. Gegeben affine Varietäten X, Y wird ihr Produkt $X \times Y$ zu einer affinen Varietät durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{O}_{\text{prod}}(X \times Y) := [f \boxtimes g \mid f \in \mathcal{O}(X), g \in \mathcal{O}(Y)]$$

Hier meint $f \boxtimes g$ die Funktion $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ auf $X \times Y$ und die eckigen Klammern meinen den von all diesen Funktionen in $\operatorname{Ens}(X \times Y, k)$ erzeugten Teilring. In der Tat ist er sicher ringendlich über k. Nach [LA2] 6.1.41 induziert weiter die Abbildung $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ eine Injektion $\operatorname{Ens}(X, k) \otimes_k \operatorname{Ens}(Y, k) \hookrightarrow \operatorname{Ens}(X \times Y, k)$, und das liefert uns unmittelbar einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$$

Da aber nach [LA2] 8.6.21 für zwei beliebige k-Kringalgebren A, B jeder Ringalgebrenhomomorphismus $A \otimes_k B \to k$ die Form $a \otimes b \mapsto \phi(a)\psi(b)$ hat für wohlbestimmte Ringalgebrenhomomorphismen $\phi : A \to k$, $\psi : B \to k$, folgt auch die Zweite unserer Bedingungen an eine affine Varietät. Die beiden Projektionen $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ sind dann Morphismen von affinen Varietäten und $(X \times Y, \mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y)$ ist ein Produkt in der Kategorie der affinen Varietäten im Sinne von [LA2] 8.6.1. Die einpunktige Varietät ist im übrigen ein finales Objekt in dieser Kategorie, in der mithin „alle endlichen Produkte existieren“.

Definition 1.1.9. Eine **affine algebraische Gruppe** über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist eine Gruppe G, die so mit der Struktur einer affinen k-Varietät versehen ist, daß die Verknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversenbildung $G \to G$ Morphismen von affinen Varietäten sind. Ein **Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen** ist ein Morphismus von affinen Varietäten, der gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Menge aller Homomorphismen zwischen zwei affinen algebraischen Gruppen G, H notieren wir $\mathrm{GrpVar}(G, H)$. Analog erklären wir allgemeiner den Begriff eines **affinen algebraischen Monoids**.

Vorschau 1.1.10. $(k = \bar{k})$ Unter einer **algebraischen Gruppe** versteht man allgemeiner und unter Verwendung der Begrifflichkeit allgemeiner k-Varietäten [KAG] 6.2.1 eine Gruppe G, die so mit der Struktur einer k-Varietät versehen ist, daß die Verknüpfung $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ und die Inversenbildung $\mathrm{inv} : G \to G$ Morphismen von Varietäten sind.

Proposition 1.1.11 ($\mathrm{GL}(n; k)$ **als algebraische Gruppe**)**.** *Die allgemeine lineare Gruppe* $G = \mathrm{GL}(n; k)$ *ist mit ihrer Struktur als Komplement der Nullstellenmenge der regulären Funktion* $\det : \mathrm{Mat}(n; k) \to k$ *nach 1.1.7 eine affine algebraische Gruppe.*

Beweis. Die Multiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ ist ein Morphismus, da das Zurückholen mit mult reguläre Funktionen zu regulären Funktionen macht. Genauer gilt $T_{ij} \circ \mathrm{mult} = \sum_k T_{ik} \boxtimes T_{kj}$ und $\det \circ \mathrm{mult} = \det \boxtimes \det$ und deshalb auch $\det^{-1} \circ \mathrm{mult} = \det^{-1} \boxtimes \det^{-1}$. Die Cramer'sche Regel zeigt, daß auch das Invertieren $G \to G$ ein Morphismus ist. □

1.1.12. Ich erinnere [KAG] 2.5.3 und [KAG] 2.5.5, die auch an dieser Stelle leicht bewiesen werden können. Gegeben eine affine Varietät X bilden die Teilmengen $\mathcal{Z}(P)$ für $P \subset \mathcal{O}(X)$ die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf X, der **Zariski-Topologie**. Gegeben $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge einer affinen Varietät mit ihrer induzierten Struktur einer affinen Varietät aus 1.1.7 ist die Einbettung offensichtlich ein Morphismus. Ist weiter $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $\varphi(Z) \subset Y$, so ist offensichtlich auch die induzierte Abbildung $\varphi : Z \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten nach Y mit der induzierten Struktur. Diese Eigenschaft heißt die **universelle Eigenschaft der induzierten Struktur**. Gegeben affine Varietäten X, Y mit abgeschlossenen Teilmengen $A \subset\!\!\!\!\!\triangleleft\, X$ und $B \subset\!\!\!\!\!\triangleleft\, Y$ ist schließlich $A \times B$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ und die universellen Eigenschaften von Produkt und induzierter Struktur zeigen, daß auf $A \times B$ die von $X \times Y$ induzierte Struktur als affine Varietät zusammenfällt mit der Struktur als Produkt der Varietäten A und B mit ihrer jeweils von X und Y induzierten Struktur.

Ergänzung 1.1.13 (**Universelle Eigenschaft von** X_f). Gegeben eine affine Varietät X und darauf eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ besitzt auch die Einbettung $X_f \hookrightarrow X$ eine natürliche universelle Eigenschaft. Ist genauer $Z \to X$ ein Morphismus von affinen Varietäten, der bereits in X_f landet, so ist auch die induzierte Abbildung $Z \to X_f$ ein Morphismus. Das folgt leicht aus der Tatsache 1.1.6, daß gegeben eine reguläre Funktion $g \in \mathcal{O}(Z)$ ohne Nullstelle auch die Funktion $g : z \mapsto 1/g(z)$ regulär ist.

Beispiele 1.1.14. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset\!\!\!\!\!\triangleleft\, G$ ist auch H mit der induzierten Struktur einer affinen Varietät nach 1.1.12 eine affine algebraische Gruppe.

Ergänzung 1.1.15 (**Funktionen auf speziellen linearen Gruppen**). Die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus $k[T_{ij}]/\langle \det -1 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathrm{SL}(n;k))$, aber ich kenne dafür keinen vollständig elementaren Beweis. Die Schwierigkeit besteht darin zu zeigen, daß der Restklassenring auf der linken Seite nilpotentfrei ist. Eine mögliche Argumentation wird in [KAG] 2.7.19 erklärt. Es mag eine gute Übung sein, das hier zumindest im Fall $n = 2$ explizit zu prüfen.

Lemma 1.1.16. *Der Abschluß jeder Untergruppe einer algebraischen Gruppe ist wieder eine Untergruppe.*

Beweis. Sei G unsere algebraische Gruppe und $H \subset G$ unsere Untergruppe. Für alle $h \in H$ impliziert $hH \subset H$ bereits $H\bar{H} \subset \bar{H}$, denn die Linkstranslation mit h ist stetig. Damit wissen wir $Hg \subset \bar{H}$ für alle $g \in \bar{H}$ und folgern $\bar{H}g \subset \bar{H}$, denn die Rechtstranslation mit g ist stetig. Zusammengenommen ist also $\bar{H}$ abgeschlossen unter der Verknüpfung. Ebenso folgt aus $\operatorname{inv}(H) \subset H$ sofort $\operatorname{inv}(\bar{H}) \subset \bar{H}$, und $1 \in \bar{H}$ ist eh klar. □

Übungen

Übung 1.1.17 (**Affine Räume als affine Varietäten**). $(k = \bar{k})$. Jeder endlichdimensionale affine Raum E über k wird eine affine k-Varietät, wenn wir $\mathcal{O}(E) \subset$

$\mathrm{Ens}(E, k)$ erklären als die von allen affinen Abbildungen $E \to k$ erzeugte k-Unterringalgebra. Jede affine Abbildung von endlichdimensionalen affinen Räumen ist in Bezug auf diese Strukturen ein Morphismus von affinen Varietäten. Man beachte jedoch, daß keineswegs jede affine Varietät zu einem derartigen affinen Raum isomorph ist.

Übung 1.1.18. $(k = \bar{k})$. Für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V ist $\mathrm{GL}(V)$ mit der Struktur einer k-Varietät als Komplement der Nullstellenmenge einer regulären Funktion auf dem endlichdimensionalen k-Vektorraum $\mathrm{End}\, V$ eine affine algebraische Gruppe.

Übung 1.1.19. Ein Morphismus $\varphi : Z \to X$ induziert genau dann einen Isomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ mit ihrer induzierten Struktur, wenn sein Komorphismus eine Surjektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Z)$ ist.

Übung 1.1.20. Ich erinnere an [AL] 1.2.10: Sind N und B Gruppen und $\tau : B \to \mathrm{Grp}^\times N$ ein Gruppenhomomorphismus alias eine Operation von B auf N durch Gruppenautomorphismen, notiert $(\tau(a))(n) = ({}^a n)$, so kann man $N \times B$ mit einer Gruppenstruktur versehen vermittels der Vorschrift $(m, a)(n, b) = (m\ ({}^a n), ab)$ Diese Gruppe heißt das oder genauer ein **semidirektes Produkt** von N mit B und wird auch notiert als $N \rtimes B = N \rtimes_\tau B$. Man zeige: Sind hier B und N algebraische Gruppen und ist $B \times N \to N$, $(a, n) \mapsto ({}^a n)$ ein Morphismus von Varietäten, so ist auch das semidirekte Produkt eine algebraische Gruppe, wenn wir es als Varietät mit der Produktstruktur betrachten.

Übung 1.1.21. $(k = \bar{k})$. Es sei $k^\times$ die multiplikative Gruppe und k die additive Gruppe. Man zeige: Alle Homomorphismen von der einen in die andere sind konstant, in Formeln $|\,\mathrm{GrpVar}(k, k^\times)| = 1 = |\,\mathrm{GrpVar}(k^\times, k)|$. Später wird das auch direkt aus der Jordan-Zerlegung folgen. Man zeige weiter: Jeder Endomorphismus von $k^\times$ ist ein Potenzieren, in Formeln haben wir eine Bijektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GrpVar}(k^\times, k^\times)$, $n \mapsto (z \mapsto z^n)$. Jeder Endomorphismus von k in Charakteristik Null ist ein Multiplizieren, in Formeln haben wir eine Bijektion $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{GrpVar}(k, k)$, $\lambda \mapsto (a \mapsto \lambda a)$. In Charakteristik p bilden die fraglichen Endomorphismen einen k-Vektorraum unter Nachschalten von $(\lambda \cdot)$ und die Potenzen des Frobeniushomomorphismus bilden eine Basis dieses k-Vektorraums.

Ergänzende Übung 1.1.22. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß auf der affinen Varietät k die Addition die einzige Verknüpfung ist, die sie zu einer algebraischen Gruppe mit neutralem Element Null macht. Man zeige, daß auf der affinen Varietät $k^\times$ die Multiplikation die einzige Verknüpfung ist, die sie zu einer algebraischen Gruppe mit neutralem Element Eins macht. Man zeige, daß auf der affinen Varietät $k \backslash E$ für $E \subset k$ endlich mit zwei oder mehr Elementen keine Struktur als algebraische Gruppe gibt. Hinweis: Man erinnere die Automorphismen offener Teilmengen der Geraden aus Übung [KAG] 2.4.13.

Übung 1.1.23. $(k = \bar{k})$. Gegeben $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen von affinen Varietäten ist der Abschluß von $A \times B$ in $X \times Y$ das Produkt der Abschlüsse, in Formeln $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$. Man folgere, daß der Abschluß jeder Untergruppe einer affinen aalgebraischen Gruppe wieder eine Untergruppe ist.

1.2 Verknüpfungen auf Objekten

Definition 1.2.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten und nach unseren Konventionen [LA2] 8.6.11 insbesondere auch einem finalen Objekt, das wir mit pt bezeichnen. Eine **Verknüpfung** auf einem Objekt $G \in \mathcal{C}$ ist ein Morphismus

$$m : G \times G \to G$$

Solch eine Verknüpfung heißt **assoziativ** beziehungsweise **kommutativ**, wenn von den beiden folgenden Diagrammen das Linke beziehungsweise das Rechte kommutiert, mit $\tau : G \times G \to G \times G$ der Vertauschung der beiden Faktoren und der offensichtlichen Vertikalen ganz links:

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d] & G \times G \arrow[r, "m"] & G \arrow[d, equal] \\
G \times (G \times G) \arrow[r, "\mathrm{id}\times m"] & G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\tau"'] & G \arrow[d, equal] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

Ein **neutrales Element** für eine Verknüpfung auf einem Objekt G ist ein Morphismus $e : \mathrm{pt} \to G$ des finalen Objekts nach G derart, daß mit der Notation fin für den einzigen Morphismus $\mathrm{fin} : G \to \mathrm{pt}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, e\circ\mathrm{fin})"] \arrow[d, "(e\circ\mathrm{fin}, \mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutiert. So ein neutrales Element ist, wenn es überhaupt existiert, eindeutig bis auf die Wahl des finalen Objekts, als da heißt: Ist $e' : \mathrm{pt}' \to G$ ein weiteres neutrales Element, so gilt $e' = e \circ \mathrm{fin}$ für den einzigen Morphismus $\mathrm{fin} : \mathrm{pt}' \to \mathrm{pt}$. Wir überlassen diesen Nachweis dem Leser. Ein **Monoidobjekt** von $\mathcal{C}$ ist ein Objekt mit Verknüpfung (G, m) derart, daß die Verknüpfung assoziativ ist und ein neutrales Element existiert. Existiert zusätzlich ein Morphismus **Inversenbildung** $i : G \to G$ derart, daß auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, i)"] \arrow[d, "(i, \mathrm{id})"'] \arrow[dr, "e\circ\mathrm{fin}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutiert, so nennen wir unser Objekt mit Verknüpfung (G, m) ein **Gruppenobjekt**. Wieder überlassen wir dem Leser den Nachweis, daß es höchstens einen Morphismus $i : G \to G$ mit dieser Eigenschaft geben kann. Ich hoffe, daß sich von selbst versteht, was Homomorphismen zwischen Objekten mit Verknüpfung oder auch zwischen Monoidobjekten derselben Kategorie sind. Wir erhalten so insbesondere für jede Kategorie mit endlichen Produkten $\mathcal{C}$ die Kategorien

$\operatorname{Mon}\mathcal{C}$	der Monoidobjekte,
$\operatorname{Kmon}\mathcal{C}$	der abelschen alias kommutativen Monoidobjekte,
$\operatorname{Grp}\mathcal{C}$	der Gruppenobjekte und
$\operatorname{Ab}\mathcal{C}$	der abelschen alias kommutativen Gruppenobjekte.

Eine **Operation** oder **Wirkung** eines Gruppenobjekts oder allgemeiner eines Monoidobjekts G einer Kategorie $\mathcal{C}$ auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $a : G \times X \to X$ derart, daß die beiden folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times X \arrow[r, "m \times \mathrm{id}"] \arrow[d] & G \times X \arrow[r, "a"] & X \arrow[d, equal] \\
G \times (G \times X) \arrow[r, "\mathrm{id} \times a"] & G \times X \arrow[r, "a"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "(e \circ \mathrm{fin}, \mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
G \times X \arrow[r, "a"] & X
\end{tikzcd}$$

Die Notation a soll an das Wort **action** erinnern, mit dem man Operationen auf englisch und französisch bezeichnet.

Beispiele 1.2.2. Ein Monoidobjekt in der Kategorie der Mengen ist ein Monoid, ein Gruppenobjekt eine Gruppe, ein Objekt mit G-Operation eine G-Menge. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der topologischen Räume heißt eine **topologische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation ein G**-Raum**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der separablen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt eine **Liegruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine G**-Mannigfaltigkeit**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der affinen algebraischen Varietäten heißt eine **affine algebraische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine **affine** G**-Varietät**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der algebraischen Varietäten heißt eine **algebraische Gruppe**, ein Objekt mit G-Operation eine G**-Varietät**. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Schemata heißt ein **Gruppenschema**, ein Objekt mit G-Operation ein G**-Schema**. In der Kategorie der Schemata ist die volle Unterkategorie der affinen Schemata abgeschlossen unter Produkten und sozusagen per definitionem äquivalent zur opponierten Kategorie $\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ der Kategorie Kring der kommutativen Ringe. Gruppenobjekte in dieser Kategorie heißen **affine Gruppenschemata** oder **kommutative Hopfalgebren über** $\mathbb{Z}$ **mit Antipode**, wie wir sie gleich ausfülicher diskutieren werden. In der Kategorie der Garben von Mengen über einem gegebenen topologischen Raum ist ein Gruppenobjekt eine **Garbe von Gruppen** und ein abelsches Gruppenobjekt eine **abelsche Garbe**. Ein Monoidobjekt in der Kategorie Cat der Kategorien schließlich heißt eine **strikte Tensorkategorie**. Dieses Konzept werden wir in **??** genauer betrachten.

Ergänzung 1.2.3 (**Einordnung der affinen Supergruppenschemata**). In noch größerer Allgemeinheit können wir Monoidobjekte und Kmonoidobjekte auch in sogenannten „Schmelzkategorien" erklären, vergleiche [TS] 5.10.4. Ich nenne sie dann die „Ringobjekte" beziehungsweise „Kringobjekte" unserer Schmelzkategorie. Die Kringobjekte einer Schmelzkategorie „mit stark universellen Verschmelzungen" bilden hinwiederum eine Kategorie mit endlichen Koprodukten, wie in [TS] 5.10.25 ausgeführt wird. In der opponierten Kategorie können wir damit Gruppenobjekte G sinnvoll definieren. Das zugrundeliegende Kringobjekt notieren wir auch in dieser Allgemeinheit $\mathcal{O}(G)$. Gehen wir speziell von der Schmelzkategorie der abelschen Gruppen aus, so erhalten wir wieder unsere affinen Gruppenschemata von eben. Gehen wir dahingegen von der Schmelzkategorie der „Paritätsgruppen" alias „Super-$\mathbb{Z}$-Moduln" nach [TS] 5.7.1 aus, so erhalten wir „affine Supergruppenschemata".

1.2.4. Natürlich muß jeder mit endlichen Produkten verträgliche Funktor Monoidobjekte zu Monoidobjekten machen, Gruppenobjekte zu Gruppenobjekten, und so weiter. Zum Beispiel wird jede topologische Gruppe durch das Vergessen der Topologie zu einer gewöhnlichen Gruppe alias einem Gruppenobjekt in der Kategorie der Mengen, und jede affine algebraische Gruppe ist auch eine algebraische Gruppe.

1.2.5. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten ist für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ der Mengenfunktor $\mathcal{C}(A, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ verträglich mit Produkten und macht folglich Gruppenobjekte zu Gruppen.

1.2.6. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit endlichen Produkten ist für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ der Mengenfunktor $\mathcal{C}(A, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ verträglich mit Produkten und macht folglich Gruppenobjekte zu Gruppen.

1.2.7. Gegeben eine Körper k erinnern wir aus [LA2] 8.6.22 den mit endlichen Produkten verträglichen Funktor

$$\{\text{Endliche Mengen}\} \to \{k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

gegeben durch $X \mapsto \mathrm{Ens}(X, k)$. Er macht insbesondere endliche Gruppen zu Gruppenobjekten in $k\text{-Kring}^{\mathrm{opp}}$.

1.2.8. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so erinnern wir aus 1.1.8, daß der durch $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ gegebene Funktor

$$\{\text{Naive affine } k\text{-Varietäten}\} \to \{k\text{-Kringe}\}^{\mathrm{opp}}$$

mit endlichen Produkten verträglich ist. Er macht also affine algebraische Gruppen zu Gruppenobjekten in k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$. Im folgenden will ich diskutieren, wie Gruppenobjekte in k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ konkret aussehen.

1.2.9. Nach [LA2] 8.6.21 kann für jeden Körper k ein Koprodukt von je zwei Objekten A, B in der Kategorie aller k-Kringe konstruiert werden als $A \otimes_k B$, und k selbst ist in k-Kring ein initiales Objekt. Im übrigen gilt beides sogar für jeden Kring k, aber so allgemein brauchen wir hier nicht zu werden. Ein Monoidobjekt von k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ ist demnach per definitionem ein Paar (A, Δ) bestehend aus einem k-Kring A und einem Morphismus von k-Kringen $\Delta : A \to A \otimes_k A$ derart, daß

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & A \otimes (A \otimes A)
\end{tikzcd}$$

kommutiert und daß ein ein Morphismus von k-Kringen $\varepsilon : A \to k$ existiert, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[d, "(\varepsilon, \mathrm{id})"] \\
A \otimes A \arrow[r, "(\mathrm{id}, \varepsilon)"'] & A
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier meint etwa $(\varepsilon, \mathrm{id}) : A \otimes A \to A$ die Abbildung $a \otimes b \mapsto \varepsilon(a)b$ aus dem Koprodukt im Sinne von [LA2] 8.6.13. Nach dem Vorhergehenden ist hier ε eindeutig bestimmt, wenn es existiert. Solch ein Monoidobjekt ist weiter ein Gruppenobjekt genau dann, wenn es zusätzlich einen Morphismus $S : A \to A$ gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & A \otimes A \arrow[d, "(S, \mathrm{id})"] \\
A \otimes A \arrow[r, "(\mathrm{id}, S)"'] & A
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier meint etwa $(\mathrm{id}, S) : A \otimes A \to A$ wieder die Abbildung aus dem Koprodukt $a \otimes b \mapsto aS(b)$. Ein Gruppenobjekt (A, Δ) in der Kategorie k-$\mathrm{Kring}^{\mathrm{opp}}$ nennt man eine **kommutative Hopf-Algebra über** k. Die Abbildung $\Delta : A \to A \otimes A$ heißt ihre **Komultiplikation**, die Abbildung $\varepsilon : A \to k$ die **Ko-Eins**, die Abbildung $S : A \to A$ die **Antipode**.

1.2.10 (**Algebraische Gruppen und kommutative Hopfalgebren**). Das oben bereits angedeutete Beispiel besagt explizit, daß man von einer affinen algebraischen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ausgehend eine kommutative Hopf-Algebra erhält, indem man auf $A = \mathcal{O}(G)$ als Komultiplikation

$$\Delta : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)$$

den Komorphismus der Verknüpfung $\Delta := \operatorname{can} \circ m^\sharp$ betrachtet. Die Koeins ist dann das Auswerten am neutralen Element, die Antipode der Komorphismus $S = i^\sharp : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ zum Invertieren. Noch einfacher wird in derselben Weise auch für jede endliche Gruppe G und jeden Körper k der k-Kring $kG = \mathcal{O}(G) = \operatorname{Ens}(G, k)$ zu einer kommutativen Hopf-Algebra über k.

1.2.11. Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so erinnern wir aus [KAG] 2.4.7, daß das Bilden der regulären Funktionen $\mathcal{O}$ sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Affine } k\text{-Varietäten}\} \stackrel{\approx}{\to} \{\text{Affine } k\text{-Kringe}\}^{\text{opp}}$$

induziert. Unter einem affinen k-Kring versteht man dabei eine ringendliche nilpotentfreie kommutative Ringalgebra über k. Natürlich muß unsere Äquivalenz $\mathcal{O}$ Gruppenobjekte mit Gruppenobjekten identifizieren. So erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{Affine algebraische Gruppen}\} \stackrel{\approx}{\to} \{k\text{-Hopfalgebren zu affinen } k\text{-Kringen}\}^{\text{opp}}$$

Ergänzung 1.2.12. Allgemeiner versteht man unter einer **Koalgebra** über einem Kring k ein Paar (A, Δ) bestehend aus einem k-Modul A und einem Morphismus von k-Moduln

$$\Delta : A \to A \otimes_k A$$

mit dem Namen **Komultiplikation**. Auf dem Dualraum $A^* := \operatorname{Hom}_k(A, k)$ liefert dann die Verknüpfung

$$A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^* \xrightarrow{\Delta^\top} A^*$$

eine bilineare Verknüpfung alias die Struktur einer k-Algebra, wobei ich mich an dieser Stelle nicht darauf festlegen will, welchem der beiden natürlichen Morphismen $A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ hier der Vorzug gebührt. Eine Koalgebra (A, Δ) heißt **koassoziativ** genau dann, wenn die im Vorhergehenden bereits als Diagramm ausgeschriebene Identität $(\Delta \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta = (\operatorname{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ erfüllt ist. Diese Bedingung führt zur Assoziativität der Algebra A^*. Eine Koalgebra (A, Δ) heißt **kokommutativ** genau dann, wenn gilt $\Delta = \tau \circ \Delta$ für τ die Vertauschung der Tensorfaktoren. Diese Bedingung führt zur Kommutativität der Algebra A^*. Eine **Koeins** einer Koalgebra ist ein Morphismus von k-Moduln $\varepsilon : A \to k$ derart, daß die die im Vorhergehenden bereits als Diagramm ausgeschriebenen Identitäten $(\varepsilon, \operatorname{id}) \circ \Delta = \operatorname{id} = (\operatorname{id}, \varepsilon) \circ \Delta$ erfüllt sind. Eine Koeinheit ist stets ein Einselement der Algebra A^* und damit eindeutig, wenn es existiert. Existiert eine Koeins, so heißt unsere Koalgebra **kounitär**. Eine kounitäre koassoziative Koalgebra nenne ich eine **Koringalgebra** und im kokommutativen Fall eine **Kokringalgebra**.

Ergänzung 1.2.13. Eine **Biringalgebra** über einem Kring k ist ein k-Modul A mit einer Multiplikation, die ihn zu einer Ringalgebra macht, und einer Komultiplikation, die ihn zu einer Koringalgebra macht derart, daß die Komultiplikation ein Homomorphismus von Ringalgebren ist für die Multiplikation $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ auf $A \otimes A$ und die Koeins ein Homomorphismus von Ringalgebren $A \to k$. In der Literatur heißt diese Struktur meist kürzer eine **Bialgebra**, aber das paßt hier nicht, da wir den Begriff einer Algebra sehr allgemein gefaßt hatten. Gegeben eine endlichdimensionale Biringalgebra über einem Körper ist ihr Dualraum in natürlicher Weise wieder eine Biringalgebra.

Vorschau 1.2.14. Eine **Hopf-Algebra** über einem Kring k ist eine Biringalgebra A, für die zusätzlich ein Modulhomomorphismus $S : A \to A$ existiert derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[r, "S\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[dr, "m"] & \\
A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & k \arrow[r, equal] & k \arrow[r, "1"] & A \\
& A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes S"'] & A \otimes A \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Solch ein S ist dann eindeutig bestimmt und heißt auch in dieser Allgemeinheit **Antipode**. Gegeben eine endlichdimensionale Hopfalgebra über einem Körper ist ihr Dualraum in natürlicher Weise wieder eine Hopfalgebra. Gegeben ein Vektorraum V wird die symmetrische Algebra $\mathrm{S}V$ eine Hopfalgebra mit der Komultiplikation $\Delta : \mathrm{S}V \to \mathrm{S}V \otimes \mathrm{S}V$, die bestimmt wird durch die Vorschrift $v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$ für alle $v \in V$. Typische Beispiele für Hopfalgebren sind auch die Einhüllenden von Liealgebren [**?**] **??**. Mehr zu Hopf-Algebren findet man etwa in [Kas95]. Man beachte jedoch, daß Hopfalgebren im allgemeinen nicht mehr als Gruppenobjekte aufgefaßt werden können, denn das Tensorprodukt ist kein Koprodukt in der Kategorie der k-Ringe, sondern nur in der Kategorie der k-Kringe.

Übungen

Übung 1.2.15 (**Die algebraische Gruppe** $\mathrm{PSL}(2; k)$). $(k = \bar{k})$. Wir betrachten die algebraische Gruppe $\mathrm{SL}(2; k)$ mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k)) = k[T_1, T_2, T_3, T_4]/\langle T_1T_4 - T_2T_3 - 1\rangle$. Es sei $A \subset \mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$ die von allen $T_i T_j$ mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ erzeugte Unterringalgebra von $\mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$. Man zeige:

(a) Die Struktur einer Hopfalgebra auf $\mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$ induziert eine Struktur einer Hopfalgebra auf A. Damit gibt es eine algebraische Gruppe $\mathrm{PSL}(2; k)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{O}(\mathrm{PSL}(2; k)) = A$;

(b) Der von der Inklusion $A \subset \mathcal{O}(\mathrm{SL}(2; k))$ induzierte Homomorphismus $\phi : \mathrm{SL}(2; k) \to \mathrm{PSL}(2; k)$ hat den Kern $\ker \phi = \{I, -I\}$;

(c) Im Fall $\mathrm{char}\, k = 2$ ist ϕ ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, aber nicht von algebraischen Gruppen.

In 3.9.25 werden wir eine isomorphe Gruppe nocheinmal auf andere Weise konstruieren und $\mathrm{PGL}(2; k)$ nennen.

Ergänzende Übung 1.2.16. Ein Element f einer Hopf-Algebra heißt **primitiv**, wenn gilt $\Delta(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f$. Man zeige, daß die primitiven Elemente im Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(G)$ auf einer affinen algebraischen Gruppe G genau die Homomorphismen in die additive Gruppe $f : G \to k$ sind. Man folgere im Fall eines Körpers k der Charakteristik Null, daß die primitiven Elemente der symmetrischen Algebra $\mathrm{S}V$ genau die Bilder der Elemente von V sind.

Ergänzende Übung 1.2.17. Ein kommutatives Monoid wird durch seine Verknüpfung ein Monoidobjekt in der Kategorie der Monoide. Man zeige, daß jedes Monoidobjekt in der Kategorie der Monoide von dieser Gestalt ist.

Übung 1.2.18. Wir können die Definition 1.2.1 von Gruppenobjekten dahingehend abschwächen, daß wir statt die Existenz eines Morphismus „Inversenbildung“ nur die Existenz von zwei Morphismen „Bilden des Linksinversen“ und „Bilden des Rechtsinversen“ fordern. Aus dem Rest der Axiome folgt dann bereits, daß sie übereinstimmen müssen.

1.3 Einbettung in eine allgemeine lineare Gruppe

Satz 1.3.1 (Affine algebraische Gruppen sind linear). *Jede abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen k-Vektorraums ist eine affine algebraische Gruppe, und jede affine algebraische Gruppe ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe dieser Art.*

1.3.2. Die Bedingung abgeschlossen bezieht sich hier auf die Zariskitopologie. Ganz allgemein heißt eine Gruppe **linear** genau dann, wenn sie als Untergruppe in die Automorphismengruppe eines Vektrorraums eingebettet werden kann. Unsere affinen algebraischen Gruppen werden aufgrund des obigen Satzes auch und sogar meist **lineare algebraische Gruppen** genannt.

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft der induzierten Struktur auf abgeschlossenen Teilmengen einer affinen Varietät. Um die zweite Aussage zu beweisen, betrachten wir die Komposition Δ von Homomorphismen von k-Ringalgebren

$$\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \stackrel{\sim}{\leftarrow} \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)$$

der von der Multiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ auf den regulären Funktionen induzierten Abbildung $\mathrm{mult}^\sharp$ mit dem Inversen des Isomorphismus 1.1.8 oder alternativ [KAG] 2.1.16. Genau dann haben wir also $\Delta f = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i$, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $f(xy) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y)$. Definieren wir die Rechtsverschiebung $\rho(y) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ durch die Vorschrift $(\rho(y)f)(x) = f(xy)$, so liegen alle $\rho(y)f$ also in dem von den g_i aufgespannten Teilraum und wir folgern, daß der von den Translaten von f aufgespannte Teilraum $V := \langle \rho(y)f \mid y \in G \rangle$ endlichdimensional ist. Weiter ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G & \to & \langle g_1, \ldots, g_n \rangle \\ g & \mapsto & \rho(y)f = \sum_{i=1}^n h_i(y) g_i \end{array}$$

offensichtlich algebraisch und landet in V. Zusammenfassend liegt jede reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ in einem endlichdimensionalen unter allen Rechtsverschiebungen invarianten Teilraum V. Weiter liefert die Operation von G durch Rechtsverschiebung auf einem derartigen Teilraum V für jeden Vektor $v \in V$ eine algebraische Abbildung $G \to V$, $y \mapsto \rho(y)v$. Durch Anwenden dieser Erkenntnis auf die Vektoren einer Basis erhalten wir einen Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

Wählen wir nun V so groß, daß V ein Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_t$ des k-Krings $\mathcal{O}(G)$ umfaßt, so induziert unser Morphismus von algebraischen Gruppen ρ eine Surjektion

$$\mathcal{O}(\mathrm{GL}(V)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(G)$$

Betrachten wir in der Tat das Auswerten am neutralen Element $a_e : \mathcal{O}(G) \to k$ und die reguläre Abbildung $F_\tau : \mathrm{GL}(V) \to k$, $A \mapsto a_e(Af_\tau)$, so gilt $F_\tau(\rho(y)) = (\rho(y)f_\tau)(e) = f_\tau(y)$ und folglich liegen alle f_τ im Bild, das damit ganz $\mathcal{O}(G)$ sein muß. Nach 1.1.19 oder alternativ [KAG] 2.5.9 liefert unser Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ folglich einen Isomorphismus von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$. $\square$

Übungen

1.3.3. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und ein Automorphismus σ von G, der einen lokal endlichen Automorphismus von $\mathcal{O}(G)$ induziert, gibt es stets einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ und ein Element $s \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\rho(\sigma(g)) = s\rho(g)s^{-1}\ \forall g \in G$.

1.4 Jordan-Zerlegung

1.4.1 (**Erinnerungen**). Ein Endomorphismus eines Vektorraums heißt nach [LA2] 3.2.17 **lokal endlich**, wenn jeder Vektor in einem endlichdimensionalen unter unserem Endomorphismus stabilen Teilraum liegt. Ein Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt nach [LA2] 3.2.17 unter einem Endomorphismus in die direkte Summe seiner Haupträume genau dann, wenn besagter Endomorphismus lokal endlich ist. Ein Endomorphismus x eines Vektorraums heißt **lokal nilpotent**, wenn jeder Vektor von einer Potenz von x zu Null gemacht wird, wenn also unser Vektorraum die Vereinigung der Kerne der Potenzen von x ist. Natürlich ist jeder lokal nilpotente Endomorphismus lokal endlich.

1.4.2 (**Multiplikative Jordan-Zerlegung von Automorphismen**). Ich erinnere an die multiplikative Jordan-Zerlegung [LA2] 3.3.20: Jeder lokal endliche Automorphismus x eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper läßt sich auf genau eine Weise darstellen als ein Produkt

$$x = x_{\mathrm{u}} x_{\mathrm{s}}$$

mit x_{s} halbeinfach alias „semisimple“ alias diagonalisierbar, x_{u} unipotent oder genauer lokal unipotent alias $(x_{\mathrm{u}} - \mathrm{id})$ lokal nilpotent, und $x_{\mathrm{u}} x_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{u}}$. Ich erinnere weiter an die Funktorialitätseigenschaften dieser Zerlegung. Sei

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Vektorräumen mit invertierbaren lokal endlichen Vertikalen. Sind dann $x = x_{\mathrm{s}} x_{\mathrm{u}}$ und $y = y_{\mathrm{s}} y_{\mathrm{u}}$ die multiplikativen Jordan-Zerlegungen von x und y, so kommutieren auch die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_{\mathrm{s}} \downarrow & & \downarrow y_{\mathrm{s}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_{\mathrm{u}} \downarrow & & \downarrow y_{\mathrm{u}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

1.4.3. Ich erinnere daran, daß nach dem Beweis von 1.3.1 für jedes $g \in G$ die Rechtsverschiebung $\rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ eine k-lineare lokal endliche Abbildung ist, gegeben durch $(\rho(g)f)(x) = f(xg)$ für alle $x \in G$ und $f \in \mathcal{O}(G)$.

Definition 1.4.4. $(k = \bar{k})$. Ein Element einer affinen algebraischen Gruppe heißt **halbeinfach** beziehungsweise **unipotent**, wenn es auf jeder algebraischen Darstellung besagter Gruppe durch einen halbeinfachen beziehungsweise lokal unipotenten Automorphismus operiert.

Satz 1.4.5 (Jordan-Zelegung in algebraischen Gruppen). *1. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G gibt es für jedes Element $g \in G$ eindeutig bestimmte $g_{\mathrm{s}}, g_{\mathrm{u}} \in G$ mit g_{s} halbeinfach und g_{u} unipotent und $g = g_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{u}} = g_{\mathrm{u}}g_{\mathrm{s}}$. Diese Elemente g_{s} und g_{u} heißen der* **halbeinfache** *und der* **unipotente Anteil von** *g;*

2. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to G'$ von affinen algebraischen Gruppen gilt $\varphi(g_{\mathrm{u}}) = \varphi(g)_{\mathrm{u}}$ und $\varphi(g_{\mathrm{s}}) = \varphi(g)_{\mathrm{s}}$ für alle $g \in G$;

1.4.6. Sobald der Satz und insbesondere sein dritter Teil einmal bewiesen ist, müssen wir in der Notation nicht mehr zwischen der Jordan-Zerlegung in affinen algebraischen Gruppen und der multiplikativen Jordan-Zerlegung lokal endlicher Endomorphismen unterscheiden. Für die Dauer des Beweises notieren wir die Jordan-Zerlegung in affinen algebraischen Gruppen abweichend von der Formulierung des Satzes noch $g = g_u g_s$ mit Indizes in einem anderen Schrifttyp als bei der konkreten Zerlegung $g = g_{\mathrm{u}}g_{\mathrm{s}}$ eines Automorphismus g eines endlichdimensionalen Vektorraums.

Beweis. Eine lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt her von einem Homomorphismus von Varietäten genau dann, wenn sie ein Homomorphismus von Ringalgebren ist. Eine bijektive lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt her von einem Isomorphismus von Varietäten genau dann, wenn sie ein Isomorphismus von Algebren alias in unserer Terminologie verträglich mit der Multiplikation ist, denn ein solcher Isomorphismus muß das Eins-Element automatisch erhalten. Ein Homomorphismus von Varietäten $G \to G$ ist die Rechtsmultiplikation mit einem Gruppenelement genau dann, wenn er mit den Linksmultiplikationen mit allen Gruppenelementen $z \in G$ vertauscht. Kürzen wir $\mathcal{O}(G) = A$ ab, so ist ein Vektorraumisomorphismus $r : A \xrightarrow{\sim} A$ demnach ein $\rho(g)$ genau dann, wenn die beiden folgenden Diagramme kommutieren, das Letztere für alle $z \in G$:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{mult}"] \arrow[d, "r \otimes r"'] & A \arrow[d, "r"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda(z)"] \arrow[d, "r"'] & A \arrow[d, "r"] \\
A \arrow[r, "\lambda(z)"] & A
\end{tikzcd}
$$

mit $\lambda(z) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ der Rechtsoperation durch Linksverschiebung, gegeben durch $(\lambda(z)f)(x) = f(zx)$. Nach der Funktorialität der Jordanzerlegung 1.4.2 kommutieren diese Diagramme aber auch dann noch, wenn wir in den Vertikalen den halbeinfachen bzw. den unipotenten Anteil nehmen. Die Eindeutigkeit der multiplikativen Jordan-Zerlegung 1.4.2 liefert unmittelbar $(r \otimes r)_{\mathrm{s}} = r_{\mathrm{s}} \otimes r_{\mathrm{s}}$ und $(r \otimes r)_{\mathrm{u}} = r_{\mathrm{u}} \otimes r_{\mathrm{u}}$. Es folgt, daß mit $r = \rho(g)$ auch $\rho(g)_{\mathrm{s}}$ und $\rho(g)_{\mathrm{u}}$ die fraglichen Diagramme kommutieren lassen. Folglich gibt es $g_s, g_u \in G$ mit $\rho(g)_{\mathrm{s}} = \rho(g_s)$ und $\rho(g)_{\mathrm{u}} = \rho(g_u)$. Wegen $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u) = \rho(g_u)\rho(g_s)$ folgt $g = g_s g_u = g_u g_s$. Jetzt zeigen wir, daß g_s, g_u auch im Sinne unserer Definition halbeinfach beziehungsweise unipotent sind. Es reicht dafür zu zeigen, daß sie auf jeder endlichdimensionalen algebraischen Darstellung V von G durch halbeinfache beziehungsweise unipotente Automorphismen operieren. Für $\psi_1, \ldots, \psi_n$ eine Basis von V^* liefern aber die Matrixkoeffizientenabbildungen eine für die G-Operation durch Rechtstranslation auf $\mathcal{O}(G)$ äquivariante Einbettung

$$\begin{array}{ccl} V & \hookrightarrow & \mathcal{O}(G)^n \\ v & \mapsto & (x \mapsto \psi_i(xv))_{i=1}^n \end{array}$$

In anderen Worten erhalten wir also für alle $g \in G$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{O}(G)^n \arrow[d, "\rho(g)\times\ldots\times\rho(g)"] \\ V \arrow[r, hook] & \mathcal{O}(G)^n \end{tikzcd}$$

Nun erkennt man aber auch ohne Schwierigkeiten die Identitäten $(x \times y)_{\mathrm{u}} = x_{\mathrm{u}} \times y_{\mathrm{u}}$ sowie $(x \times y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} \times y_{\mathrm{s}}$ für $x : V \to V$ und $y : W \to W$ lokal endlich und invertierbar. Wenden wir also auf unser Diagramm die Funktorialität der konkreten Jordan-Zerlegung an, so folgt, daß g_s auf V durch einen halbeinfachen Automorphismus operiert und g_u durch einen unipotenten Automorphismus. Das zeigt die Existenz der multiplikativen Jordan-Zerlegung. Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit der konkreten multiplikativen Jordan-Zerlegung von $\rho(g)$ im Sinne von 1.4.2. Um den zweiten Teil zu zeigen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g"] & G' \arrow[d, "\cdot\varphi(g)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$$

und das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(G) & \mathcal{O}(G') \arrow[l, "\circ\varphi"'] \\
\mathcal{O}(G) \arrow[u, "\rho(g)"] & \mathcal{O}(G') \arrow[l, "\circ\varphi"'] \arrow[u, "\rho(\varphi(g))"']
\end{tikzcd}$$

Wieder bleibt es kommutativ, wenn wir in den Vertikalen den unipotenten oder den halbeinfachen Anteil nehmen. Kehren wir dann wieder zu unseren Varietäten zurück, so erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_u"'] & G' \arrow[d, "\cdot\varphi(g)_u"] \\
G \arrow[r, "\varphi"] & G'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_s"'] & G' \arrow[d, "\cdot\varphi(g)_s"] \\
G \arrow[r, "\varphi"] & G'
\end{tikzcd}$$

Setzen wir darin schließlich oben links das neutrale Element ein, so ergibt sich $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$ und $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ wie gewünscht. □

1.4.7 (**Eigenschaften der Menge der unipotenten Elemente**). Die unipotenten Elemente einer affinen algebraischen Gruppe G bilden stets eine abgeschlossene Teilmenge $G_{\mathrm{u}} \subset\!\!\!\!\!\!\!\circ\, G$. In der Tat dürfen wir, um das zu zeigen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G \subset\!\!\!\!\!\!\!\circ\, \mathrm{GL}(n;k)$ annehmen, und dann sind die unipotenten Elemente gerade die Matrizen mit charakteristischem Polynom $(T-1)^n$. Die unipotenten Elemente bilden aber im allgemeinen keine Untergruppe und die Abbildung $g \mapsto g_{\mathrm{u}}$ ist im allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus, ja im allgemeinen noch nicht einmal ein Morphismus von Varietäten.

Proposition 1.4.8 (**Jordan-Zerlegung in kommutativen Gruppen**). *Ist K eine kommutative affine algebraische Gruppe, so bilden die unipotenten und die halbeinfachen Elemente jeweils abgeschlossene Untergruppen $K_{\mathrm{u}}, K_{\mathrm{s}} \subset\!\!\!\!\!\!\!\circ\, K$ und die Multiplikation liefert einen Isomorphismus von algebraischen Gruppen*

$$K_{\mathrm{s}} \times K_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} K$$

Vorschau 1.4.9. In 4.1.10 zeigen wir dieselbe Aussage für jede zusammenhängende nilpotente affine algebraische Gruppe.

Beweis. Als allererstes bemerken wir, daß die Abbildung in unserer Proposition nach dem Satz über die Jordanzerlegung jedenfalls schon mal eine Bijektion von Mengen sein muß. Nach 1.3.1 können wir nun K als abgeschlossene Untergruppe in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums V einbetten. Nach Übung [LA2] 8.7.10 über die simultane Eigenraumzerlegung finden wir eine Zerlegung in Untervektorräume $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ und paarweise verschiedene Abbildungen $\lambda_i : K_\mathrm{s} \to k$ mit

$$V_i = \{v \in V \mid gv = \lambda_i(g)v \ \ \forall g \in K_\mathrm{s}\}$$

den simultanen Eigenräumen. Da unsere Gruppe kommutativ ist, müssen alle $g \in K$ jeden dieser simultanen Eigenräume V_i stabilisieren. Nach Übung [LA2] **??** über die simultane Trigonalisierbarkeit finden wir also eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von K_s durch Diagonalmatrizen dargestellt werden und alle Elemente von K durch obere Dreiecksmatrizen. In dieser Einbettung $K \not\trianglelefteq \mathrm{GL}(n;k)$ ist dann aber offensichtlich, daß K_s und K_u abgeschlossene Untergruppen von K sind, daß der halbeinfache Anteil von $g \in K$ genau sein diagonaler Anteil ist, und daß $g \mapsto g_\mathrm{s}$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen sein muß. Weiter können wir dann eine inverse Abbildung zur Bijektion aus der Proposition explizit angeben als $g \mapsto (g_\mathrm{s}, gg_\mathrm{s}^{-1})$. Da das auch ein Morphismus ist, folgt die Proposition. □

Beispiel 1.4.10 (**Jordan-Zerlegung in endlichen Gruppen**). Jede endliche Gruppe kann über einem vorgegebenen algebraisch abgeschlossenen Körper k auch als algebraische Gruppe aufgefaßt werden. Dann besteht $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ aus halbeinfachen Elementen für m teilerfremd zur Charakteristik von p, da es nach [LA2] 4.4.17 als die Untergruppe von $k^\times$ der m-ten Einheitswurzeln realisiert werden kann. Ist dahingegen m eine p-Potenz, so sind für jede Einbettung unserer Gruppe in eine Matrizengruppe alle Eigenwerte m-te Einheitswurzeln, also Eins, und unsere Gruppe besteht folglich aus unipotenten Elementen. Im allgemeinen liefert für $m = p^r n$ mit n teilerfremd zu p der chinesische Restsatz einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, und der liefert auch schon die Jordan-Zerlegung in dieser kommutativen Gruppe. Im allgemeinen zerlegt sich jedes Element wie in der von ihm erzeugten zyklischen Gruppe. Der folgende Satz 1.6.2 liefert dann einen neuen Beweis unserer Erkenntnis [NAS] 1.1.26, daß jede p-Gruppe in Charakteristik p bis auf Isomorphismus nur eine einzige irreduzible Darstellung hat, nämlich eben die Einsdarstellung. Aus 1.6.3 kann man sogar folgern, daß jede p-Gruppe auflösbar ist.

Übungen

Übung 1.4.11. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine affine algebraische Gruppe über k. Man zeige, daß für $g \in G$ die Rechtsverschiebung $\rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ lokal halbeinfach bzw. unipotent ist genau dann, wenn die Linksverschiebung $\lambda(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Übung 1.4.12. Man zeige, daß jeder surjektive Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen $G \twoheadrightarrow H$ Surjektionen $G_\mathrm{s} \twoheadrightarrow H_\mathrm{s}$ und $G_\mathrm{u} \twoheadrightarrow H_\mathrm{u}$ induziert.

Übung 1.4.13. Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ offen? Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ dicht?

1.5 Algebraische Darstellungen

Definition 1.5.1. Seien V ein k-Vektorraum nicht notwendig endlicher Dimension und G eine affine algebraische Gruppe über k. Ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ heißt eine **algebraische Darstellung** von G in V, wenn es eine lineare Abbildung

$$\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$$

gibt derart, daß aus $\Delta_V : v \mapsto \sum_{i=1}^n g_i \otimes v_i$ folgt $\rho(x)v = \sum_{i=1}^n g_i(x)v_i$. Analog erklärt man algebraische Darstellungen eines algebraischen Monoids.

1.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere algebraischen Darstellungen meist **rationale Darstellungen**. Diese Terminologie erklärt sich daraus, daß man bereits zuvor **polynomiale Darstellungen** der Gruppen $\mathrm{GL}(n; k)$ erklärt hatte als Gruppenhomomorphismen $\mathrm{GL}(n; k) \to \mathrm{GL}(m; k)$, bei denen die Matrixeinträge der Bildmatrix polynomial von den Matrixeinträgen der Ausgangsmatrix abhängen, in unserer Terminologie also die algebraischen Darstellungen des Monoids $\mathrm{Mat}(m; k)$. Bei rationalen Darstellungen dürfen dann im Gegensatz dazu auch Nenner auftreten, aber eben nur Potenzen der Determinante im Nenner, so daß die Matrixeinträge durchaus reguläre Funktionen auf der Gruppe sind. Die Verwendung des Wortes „rational“ in diesem Zusammenhang ist aber problematisch, weil es einen Zusammenhang mit rationalen Funktionen suggeriert, der ziemlich weit hergeholt ist.

1.5.3. Die Abbildung Δ_V wird hier durch den Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}(V)$ bereits eindeutig festgelegt. Man kann das etwa aus der Injektivität der offensichtlichen Abbildung $\mathrm{Ens}(G, k) \otimes V \to \mathrm{Ens}(G, V)$ folgern, die ihrerseits in [LA2] 8.7.12 diskutiert wird.

Beispiel 1.5.4. Für jede affine algebraische Gruppe liefert die Rechtsverschiebung

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{O}(G))$$

eine algebraische Darstellung von G. Ist allgemeiner X eine affine G-Varietät, also eine affine Varietät mit einer G-Operation $G \times X \to X$, die ein Morphismus von Varietäten ist, so liefert die Verschiebung von Funktionen mit denselben Argumenten wie im Beweis von 1.3.1 eine algebraische Darstellung $G \to \mathrm{GL}(\mathcal{O}(X))$.

Ergänzung 1.5.5 (**Einordnung der Superdarstellungen**). Unsere Bemerkungen zu affinen Supergruppenschemata 1.2.3 haben eine natürliche Ergänzung zu Darstellungen. Betrachten wir genauer wie dort zu einer Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stark universellen Verschmelzungen die zugehörige Kategorie von Kringobjekten und ein Gruppenobjekt G in deren opponierter Kategorie mit zugrundeliegendem Objekt $\mathcal{O}(G) \in \mathcal{M}$, so können wir eine „Darstellung von G“ erklären als ein Paar (V, Δ_V) bestehend aus einem Objekt $V \in \mathcal{M}$ nebst einem Morphismus $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ in $\mathcal{M}$ derart, daß gewisse mehr oder weniger offensichtliche Verträglichkeiten gelten. Insbesondere erhält man so im Fall der Schmelzkategorie der Paritätsgruppen sogenannte „Superdastellungen von affinen Supergruppenschemata“.

Übungen

Ergänzende Übung 1.5.6. Gegeben eine Schmelzkategorie $\mathcal{M}$ mit stark universellen Verschmelzungen und ein Gruppenobjekt $G \in \mathrm{Kring}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{opp}}$ mit zugrundeliegendem Objekt $\mathcal{O}(G) \in \mathrm{Kring}_{\mathcal{M}}$ können wir nach 1.2.6 die Gruppe $G(\mathrm{I})$ betrachten. Man zeige, daß für jede Darstellung V von G die Gruppe $G(\mathrm{I})$ in natürlicher Weise auf V operiert.

Übung 1.5.7. Jede irreduzible Darstellung einer affinen algebraischen Gruppe läßt sich als Unterdarstellung in die reguläre Darstellung einbetten. Hinweis: Matrixkoeffizienten.

Übung 1.5.8. Ist V endlichdimensional, so ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine algebraische Darstellung genau dann, wenn ρ ein Morphismus von algebraischen Gruppen ist. Im allgemeinen ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine algebraische Darstellung genau dann, wenn jeder Vektor $v \in V$ in einem endlichdimensionalen G-stabilen Teilraum W liegt, für den $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen ist.

Übung 1.5.9. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer algebraischen Gruppe G und Untervektorräume $U, W \subset V$ ist $\{g \in G \mid g(U) \subset W\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von G.

Übung 1.5.10. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer algebraischen Gruppe G und ein Untervektorraum $U \subset V$ und eine dichte Teilmenge $A \Subset G$ ist das Vektorraumerzeugnis W von $\{au \mid a \in A, u \in U\}$ eine G-stabile Teilmenge von V.

Übung 1.5.11. Man zeige: Jede Unterdarstellung einer algebraischen Darstellung ist algebraisch. Jede Quotientendarstellung einer algebraischen Darstellung ist algebraisch.

Übung 1.5.12 (**Algebraische Darstellungen als Schmelzkategorie**). Das Tensorprodukt algebraischer Darstellungen ist wieder eine algebraische Darstellung. Die algebraischen Darstellungen eines affinen algebraischen Monoids bilden in anderen Worten eine Schmelzkategorie mit stark universellen Verschmelzungen im Sinne von [TS] 5.4. Ist unser Monoid eine Gruppe, so erhalten wir sogar eine Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen und Multihom. Um das zu sehen, vereinbaren wir, daß wir unter einer **regulären Abbildung** einer Varietät in einen unendlichdimensionalen Vektorraum eine Abbildung verstehen wollen, deren Bild einen endlichdimensionalen Teilraum erzeugt und die als Abbildung dorthin ein Morphismus von Varietäten ist. Dann kann $(V \Rrightarrow W)$ als der Untervektorraum aller der Vektoren f der abstrakten Darstellung auf dem Hom-Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ beschrieben werden, für die die Abbildung $G \to \mathrm{Hom}(V, W)$, $g \mapsto gf$ regulär ist. Unklar sind zumindest mir zur Zeit die Exaktheitseigenschaften dieses internen Hom-Funktors $\Rrightarrow$.

Übung 1.5.13. Gegeben algebraische Darstellungen $(\rho, V), (\psi, W)$ einer affinen algebraischen Gruppe G mit $\dim V < \infty$ ist auch der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, W)$ eine algebraische Darstellung von G unter der Operation $(gf) = \psi(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$ für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist speziell W die Einsdarstellung von G, so erhalten wir eine Darstellung von G durch Automorphismen des Dualraums V^* von V, die sogenannte **kontragrediente Darstellung**.

Übung 1.5.14. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung V einer algebraischen Gruppe oder eines algebraischen Monoids G zeige man:

1. Der Komorphismus $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(G \times V) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(V)$ zur Operation $G \times V \to V$ induziert eine lineare Abbildung $V^* \to \mathcal{O}(G) \otimes V^*$;

2. Diese lineare Abbildung ist der Komorphismus zur kontragredienten Darstellung von G^{opp} auf V^*.

Übung 1.5.15. Jede irreduzible algebraische Darstellung einer kommutativen algebraischen Gruppe ist eindimensional. Hinweis: Existenz simultaner Eigenvektoren [LA2] 3.2.19.

Übung 1.5.16. Der Komorphismus $\Delta_V : V \to \mathcal{O}(G) \otimes V$ ist ein Homomorphismus von Darstellungen für die Operation durch Konjugation auf $\mathcal{O}(G)$. Hinweis: Für jede Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G und jedes Element $t \in G$ gilt $(tgt^{-1})tv = t(gv)$. Die lineare Abbildung $\rho(t) : V \to V$ ist also ein Isomorphismus von der Darstellung ρ zur Darstellung $\rho \circ (\mathrm{int}\, t)$.

Ergänzende Übung 1.5.17. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : H \to G$ von affinen, ja von beliebigen algebraischen Gruppen und eine algebraische Darstellung W von G erhalten wir durch **Restriktion** eine algebraische Darstellung $\mathrm{res}^{\varphi} W = \mathrm{res}_G^H W$ von H. Für ihren Komorphismus gilt $\Delta_{\mathrm{res}^{\varphi} W} = (\varphi^{\sharp} \otimes \mathrm{id}_W) \circ \Delta_W$. Bezeichnet $G\text{-}\mathrm{Mod}$ die Kategorie der algebraischen Darstellungen von G, so ist die Restriktion ein exakter Funktor

$$\mathrm{res}_G^H : G\text{-}\mathrm{Mod} \to H\text{-}\mathrm{Mod}$$

Er hat einen Rechtsadjungierten ind_H^G, die **Induktion**. Ganz analog zum topologischen Fall **??** kann die induzierte Darstellung konstruiert werden, indem wir den Vektorraum

$$\operatorname{ind}_H^G V := \{f : G \to V \text{ regulär} \mid f(\varphi(h)x) = hf(x)\ \forall h \in H,\ x \in G\}$$

aller H-äquivarianten regulären Abbildungen von G nach V betrachten und darauf eine G-Operation erklären durch die Vorschrift $(gf)(x) = f(xg)\ \forall g, x \in G$. Ganz genauso wie in [**?**] **??** liefern für jede endlichdimensionale algebraische Darstellung E von G die Isomorphismen $\operatorname{res}_G^H(E \otimes_k W) \xrightarrow{\sim} E \otimes_k (\operatorname{res}_G^H W)$ kanonische Isomorphismen

$$\operatorname{ind}_H^G \operatorname{Hom}_k(E, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(E, \operatorname{ind}_H^G M)$$

Wir können sie durch Übergang zum Dualraum von E umschreiben zu kanonischen Isomorphismen

$$\operatorname{ind}_H^G(F \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} F \otimes_k (\operatorname{ind}_H^G V)$$

Durch Übergang zu direkten Limites erhalten wir derartige kanonische Isomorphismen sogar für beliebige, nicht notwendig endlichdimensionale algebraische Darstellungen F von G. Sie heißen die **Tensoridentitäten**. Ich will nocheinmal darüber nachdenken, ob diese Argumentation nicht durch Verwenden des internen Hom-Funktors der Schmelzkategorie der algebraischen Darstellungen vereinfacht werden kann.

1.6 Unipotente Gruppen

Definition 1.6.1. Eine affine algebraische Gruppe heißt **unipotent**, wenn alle ihre Elemente unipotent sind.

Satz 1.6.2 (Irreduzible Darstellungen unipotenter Gruppen). *Die einzige irreduzible algebraische Darstellung einer unipotenten Gruppe ist die Einsdarstellung.*

Beweis. Wir arbeiten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Sei U unsere unipotente Gruppe und $\rho : U \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung. Da jede algebraische Darstellung lokal endlich ist, dürfen wir V endlichdimensional annehmen. Nach 1.4.5 ist $\rho(g)$ stets unipotent, woraus wir $\operatorname{tr} \rho(g) = \dim V$ für alle $g \in U$ folgern. Es folgt weiter sogar

$$0 = \operatorname{tr}(\rho(g)\rho(h) - \rho(g)) = \operatorname{tr}(\rho(g) \circ (\rho(h) - \mathrm{id}))$$

für alle $g, h \in U$. Da V einfach ist, müssen nach dem Satz von Wedderburn [NAS] 1.7.6 die $\rho(g)$ bereits $\operatorname{End}_k V$ als k-Vektorraum erzeugen. Es folgt unmittelbar $\operatorname{tr}(A(\rho(h) - \mathrm{id})) = 0$ für alle $A \in \operatorname{End}_k V$, $h \in U$ und damit $\rho(h) = \mathrm{id}$ für alle $h \in U$. □

Korollar 1.6.3 (Unipotente Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V und eine abgeschlossene unipotente Untergruppe $U \subset \mathrm{GL}(V)$ gibt es stets eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale.*

Beweis. Wir wählen eine Jordan-Hölder-Reihe $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ der Darstellung V von U. Nach 1.6.2 operiert U trivial auf den Subquotienten V_i/V_{i-1} und diese sind eindimensional. Wählen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ für $1 \leq i \leq n$, so operieren folglich alle $g \in U$ bezüglich dieser Basis durch obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. □

Korollar 1.6.4 (Lie-Kolchin). *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem beliebigen Körper und eine Untergruppe $U \subset \mathrm{GL}(V)$, die aus unipotenten Automorphismen besteht, gibt es stets eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß es einen simultanen Fixvektor gibt. Indem wir die Skalare erweitern, dürfen wir unseren Grundkörper algebraisch abgeschlossen annehmen. Der Zariski-Abschluß von U ist aber nach 1.1.16 auch eine Untergruppe und besteht nach 1.4.7 aus unipotenten Elementen. Damit folgt die Aussage aus dem vorhergehenden Korollar 1.6.3. □

1.6.5. Jede unipotente algebraische Gruppe ist nilpotent im Sinne von [AL] 1.3.11. In der Tat ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ bereits die Gruppe der unipotenten oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen nilpotent, vergleiche [AL] 1.3.14.

1.7 Diagonalisierbare algebraische Gruppen

Definition 1.7.1. Eine affine algebraische Gruppe D heißt **diagonalisierbar**, wenn sie als abgeschlossene Untergruppe in eine Gruppe von Diagonalmatrizen eingebettet werden kann, wenn es also in Formeln eine Einbettung als abgeschlossene Untergruppe $D \hookrightarrow T_n$ gibt für $T_n \subset \mathrm{GL}(n; k)$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen. Sie heißt ein **Torus**, wenn sie zu einem T_n oder gleichbedeutend einem endlichen Produkt von Kopien von $k^\times$ isomorph ist.

Definition 1.7.2. Gegeben eine algebraische Gruppe G wird die Menge

$$\mathfrak{X}(G) := \mathrm{GrpVar}(G, k^\times)$$

aller Homomorphismen von algebraischen Gruppen in die multiplikative Gruppe unter punktweiser Multiplikation von Funktionen selbst eine Gruppe, die **Charaktergruppe** oder genauer **Gruppe der multiplikativen algebraischen Charaktere von** G. Man notiert die Verknüpfung von $\mathfrak{X}(G)$ üblicherweise additiv. Ich verwende die beiden Notationen

$$(\chi \dot{+} \psi)(g) = (\chi + \psi)(g) := \chi(g)\psi(g) \quad \text{für alle } g \in G \text{ und } \chi, \psi \in \mathfrak{X}(G).$$

Die Vorschrift $\mathfrak{X}$ ist in offensichtlicher Weise ein Funktor $\mathfrak{X} : \mathrm{GrpVar} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{opp}}$. Ich nenne diesen Funktor den **Charakterfunktor**.

1.7.3 (**Schwierigkeiten der Notation**). Die allgemein übliche Notation $\chi + \psi$ ist insofern gefährlich, als nun $\chi + \psi$ einerseits als Summe von k-wertigen Funktionen auf G verstanden werden kann, die ihrerseits kein Charakter mehr wäre, andererseits aber auch als Summe in der Charaktergruppe. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

Beispiel 1.7.4 (**Charaktere von** $k^\times$). Nach Übung 1.1.21 erhalten wir einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{X}(k^\times)$ durch die Vorschrift $n \mapsto (z \mapsto z^n)$. Eine elegante Lösung für diese Übung besteht im übrigen in der Bemerkung, daß es nicht mehr Charaktere geben kann, da die fraglichen Funktionen ja bereits eine k-Basis von $\mathcal{O}(k^\times) \cong k[t, t^{-1}]$ bilden und unsere Charaktere nach Artin [AL] 3.8.16 linear unabhängig sein müssen.

Beispiel 1.7.5 (**Charaktere von Produkten**). Gegeben algebraische Gruppen G, H liefern die Restriktionen unter den Einbettungen $G \hookrightarrow G \times H$, $g \mapsto (g, 1)$ und $H \hookrightarrow G \times H$, $h \mapsto (1, h)$ einen Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(G \times H) \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

Die Umkehrabbildung wirft (χ, ξ) auf den Charakter $\chi \boxtimes \xi : (g, h) \mapsto \chi(g)\xi(h)$. Insbesondere erhalten wir einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{X}(T_n)$$

durch $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ mit $\varepsilon_i : T_n \to k^\times$ der Projektion auf den i-ten Diagonaleintrag.

Lemma 1.7.6 (Funktionen auf diagonalisierbaren Gruppen). *Gegeben eine diagonalisierbare affine algebraische Gruppe D über $k = \bar{k}$ bilden die Charaktere $\mathfrak{X}(D)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und sind eine k-Basis ihres Rings von regulären Funktionen $\mathcal{O}(D)$.*

Beweis. Nach dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren [AL] 3.8.16 ist $\mathfrak{X}(D) \subset \mathcal{O}(D)$ stets eine über k linear unabhängige Teilmenge. Im Fall

$D = T_n$ haben wir bereits in 1.7.5 einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(T_n)$ hergeleitet. Insbesondere ist $\mathfrak{X}(T_n)$ eine endliche erzeugte abelsche Gruppe. Ist $D \not\subset T_n$ eine abgeschlossene Untergruppe, so zeigt die Surjektion $\mathcal{O}(T_n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(D)$, daß die Bilder der Charaktere aus $\mathfrak{X}(T_n)$ bereits $\mathcal{O}(D)$ als k-Vektorraum erzeugen. Wir folgern, daß $\mathfrak{X}(D)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{O}(D)$ sein muß, in anderen Worten eine Basis. Wir folgern zusätzlich, daß auch das Bild von $\mathfrak{X}(T_n) \to \mathfrak{X}(D)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{O}(D)$ sein muß, in anderen Worten stimmt also dieses Bild mit $\mathfrak{X}(D)$ überein und $\mathfrak{X}(D)$ ist endlich erzeugt. □

Satz 1.7.7 (Klassifikation der diagonalisierbaren Gruppen). *Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null liefert der Funktor $\mathfrak{X}$ eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diagonalisierbare affine} \\ \textit{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endlich erzeugte abelsche} \\ \textit{Gruppen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers positiver Charakteristik $p > 0$ liefert derselbe Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diagonalisierbare affine} \\ \textit{algebraische Gruppen über } k \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Endlich erzeugte abelsche} \\ \textit{Gruppen ohne } p\textit{-Torsion} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}} \\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D) \end{array}$$

Der quasiinverse Funktor ordnet in beiden Fällen einer endlich erzeugten abelschen Gruppe X die algebraische Gruppe $\operatorname{Max}(kX)$ der maximalen Ideale des Gruppenrings kX zu, aufgefaßt als kommutative Hopf-Algebra mit der Komultiplikation

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & kX & \to & kX \otimes kX \\ & \chi & \mapsto & \chi \otimes \chi \end{array}$$

Vorschau 1.7.8. Unser quasiinverser Funktor oben liefert für jeden Kring k einen volltreuen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Hopfalgebren} \\ \text{über } k \end{array} \right\} & \leftarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abelsche} \\ \text{Gruppen} \end{array} \right\} \\ kX & \leftarrow\!\shortmid & X \end{array}$$

Er landet in den kommutativen kokommutativen Hopfalgebren und bildet endlich erzeugte abelsche Gruppen auf ringendliche Hopfalgebren ab. Er liefert weiter eine Äquivalenz zwischen endlich erzeugten abelschen Gruppen und solchen

Hopfalgebren über k, die isomorph sind zu Quotienten von Laurentpolynomen in mehreren Veränderlichen $k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$. In der Sprache der Gruppenschemata bedeutet das insbesondere für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc}\left\{\begin{array}{c}\text{Diagonalisierbare affine}\\ \text{Gruppenschemata über } k\end{array}\right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{\begin{array}{c}\text{Endlich erzeugte}\\ \text{abelsche Gruppen}\end{array}\right\}^{\text{opp}}\\ D & \mapsto & \mathfrak{X}(D)\end{array}$$

Beweis. Im Fall $\operatorname{char} k = p > 0$ folgt aus $\chi(g)^p = 1\ \forall g \in D$ bereits $\chi(g) = 1\ \forall g \in D$, also hat in diesem Fall $\mathfrak{X}(D)$ keine p-Torsion. Das zeigt schon mal, daß $\mathfrak{X}$ einen Funktor zwischen den im Satz beschriebenen Kategorien liefert. Es muß nun noch gezeigt werden, daß er eine Äquivalenz von Kategorien ist. Da $\mathfrak{X}(D)$ nach unserem Lemma 1.7.6 bereits $\mathcal{O}(D)$ als k-Vektorraum erzeugt, ist unser Funktor treu, als da heißt injektiv auf Morphismenräumen. Daß er surjektiv ist auf Isomorphieklassen, mag man aus seiner Verträglichkeit mit Produkten zusammen mit der Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen [LA2] 4.4.5 folgern: Jede endliche zyklische Gruppe ohne p-Torsion erhält man ja nach [LA2] 4.4.17 als Gruppe von Einheitswurzeln. Ich gebe zwei Beweise dafür, daß er surjektiv ist auf Morphismen. Gegeben eine diagonalisierbare Gruppe mit einer abgeschlossenen Einbettung $D \hookrightarrow T_n$ können wir unsere Surjektion $\mathfrak{X}(T_n) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(D)$ aus dem Beweis von 1.7.6 fortsetzen zu einer rechtsexakten Sequenz $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(D)$. Sie muß von einer Sequenz von algebraischen Gruppen $D \hookrightarrow T_n \xrightarrow{\varphi} T_m$ herkommen, bei der die Verknüpfung konstant ist. Man sieht unmittelbar, daß $D \to \ker \varphi$ einen Isomorphismus auf Charakteren induziert und folglich nach 1.7.6 selbst ein Isomorphismus ist. Für jede weitere diagonalisierbare, ja beliebige algebraische Gruppe H betrachten wir nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{GrpVar}(H, D) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{GrpVar}(H, T_n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \operatorname{GrpVar}(H, T_m) \arrow[d, "\wr"'] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ab}(\mathfrak{X}(D), \mathfrak{X}(H)) \arrow[r] & \operatorname{Ab}(\mathfrak{X}(T_n), \mathfrak{X}(H)) \arrow[r] & \operatorname{Ab}(\mathfrak{X}(T_m), \mathfrak{X}(H)) \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und folgern unschwer, daß auch die erste Vertikale ein Isomorphismus sein muß. Eleganter ist jedoch der zweite Beweis der Surjektivität auf Morphismen mithilfe der Konstruktion eines quasiinversen Funktors. Da nach unserem Lemma $\mathfrak{X}(D)$ sogar eine k-Basis von $\mathcal{O}(D)$ ist, liefert das Auswerten formaler Linearkombinationen einen natürlichen Isomorphismus $k\mathfrak{X}(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D)$ von k-Vektorräumen. Fassen wir $k\mathfrak{X}(D)$ als Gruppenring der Gruppe $\mathfrak{X}(D)$ auf, erklären in anderen Worten das Produkt zweier Charaktere als $\chi\xi = (\chi \dot{+} \xi)$, so ist das sogar ein Ringisomorphismus. Erklären wir zusätzlich eine Komultiplikation auf $k\mathfrak{X}(D)$ durch $\chi \mapsto \chi \otimes \chi$, so ist unser Isomorphismus auch ein Isomorphismus von Koalgebren und damit von kommutativen Hopfalgebren. Umgekehrt können wir für jede abelsche Gruppe X den Gruppenring kX zu einer Hopfalgebra machen, indem wir eine Komultiplikation auf kX erklären durch $\chi \mapsto \chi \otimes \chi$ für alle $\chi \in X$. Ist X endlich ezeugt, so ist kX ringendlich über k. Hat X keine p-Torsion, so gibt es wegen der bereits gezeigten Surjektivität auf Isomorphieklassen von Objekten eine diagonalisierbare Gruppe D mit $X \cong \mathfrak{X}(D)$ und folglich ist $kX \cong \mathfrak{X}(D) \cong \mathcal{O}(D)$ nilpotentfrei. Mithin haben wir einen Funktor $X \mapsto \operatorname{Max} kX$ in die Gegenrichtung konstruiert nebst einer Isotransformation $\tau_D : D \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} k\mathfrak{X}(D)$. Da unser Funktor in der Gegenrichtung offensichtlich auch injektiv ist auf Morphismen, muß unser ursprünglicher Funktor volltreu gewesen sein. □

Ergänzung 1.7.9. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe X ist nach [LA2] 4.4.5 isomorph zu einem Produkt von zyklischen Gruppen von Primpotenzordnung. Der Gruppenring kX ist isomorph zum Tensorprodukt der Gruppenringe der Faktoren und ist nach [KAG] 2.1.17 nilpotentfrei genau dann, wenn alle Tensorfaktoren es sind. Nun haben wir jedoch $k[t]/\langle t^q - 1\rangle \xrightarrow{\sim} k(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ vermittels der Abbildung, die t auf den natürlichen Erzeuger der zyklischen Gruppe in ihrem Gruppenring abbildet, und die linke Seite ist genau dann nilpotentfrei, wenn das Polynom $t^q - 1$ keine mehrfachen Nullstellen in k hat, also für q teilerfremd zur Charakteristik von k.

Definition 1.7.10. Sei Ω eine Menge. Ein **Ω-graduierter Vektorraum** ist ein Vektorraum V mitsamt einer Familie von Untervektorräumen $(V_\omega)_{\omega\in\Omega}$ so daß gilt $V = \bigoplus_{w\in\Omega} V_\omega$. Ein Morphismus von Ω-graduierten Vektorräumen V, W ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(V_\omega) \subset W_\omega \quad \forall \omega \in \Omega$.

Definition 1.7.11. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G und ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to k^\times$ in die multiplikative Gruppe des Grundkörpers von V erklärt man den zugehörigen **Gewichtsraum** als

$$V_\chi := \{v \in V \mid gv = \chi(g)v \ \forall g \in G\}$$

Satz 1.7.12 (Darstellungen von diagonalisierbaren Gruppen). *Gegeben eine diagonalisierbare affine algebraische Gruppe D mit Charaktergruppe $\mathfrak{X}(D)$ liefert das Zerlegen in Gewichtsräume eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{algebraische Darstellungen} \\ \textit{der Gruppe } D \end{array} \right\} & \xrightarrow{\approx} & \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{X}(D)\textit{-graduierte} \\ k\textit{-Vektorräume} \end{array} \right\} \\ (D \looparrowright V) & \mapsto & V = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}(D)} V_\chi \end{array}$$

Beweis. Das folgt ohne weitere Schwierigkeiten aus dem Satz über simultane Diagonalisierbarkeit [LA2] 8.7.10. Die Details bleiben dem Leser zur Übung überlassen. □

Definition 1.7.13. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer diagonalisierbaren affinen algebraischen Gruppe D bezeichnet

$$\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}_D(V) := \{\chi \in \mathfrak{X}(D) \mid V_\chi \neq 0\}$$

die Menge aller Charaktere unserer Gruppe, die als Unterdarstellung in unserer Darstellung aftreten, und nennt die Elemente dieser Menge die **Gewichte von** V. Die Notation geht auf französisch „poids“ zurück.

Satz 1.7.14 (Starrheit von diagonalisierbaren Gruppen). *Seien D, T diagonalisierbare affine algebraische Gruppen, V eine zusammenhängende Varietät und*

$$\Phi : V \times D \to T$$

ein Morphismus derart, daß die Abbildung $\Phi_v : D \to T$, $g \mapsto \Phi(v, g)$ für alle $v \in V$ ein Gruppenhomomorphismus ist. So ist Φ_v unabhängig von v.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei V affin. Man betrachte die Verknüpfung Φ^* des Komorphismus $\Phi^\sharp$ mit der kanonischen Identifikation, also die Verknüpfung

$$\mathcal{O}(T) \quad \to \quad \mathcal{O}(V \times D) \quad \tilde{\to} \quad \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(D)$$

Gegeben $h \in \mathcal{O}(T)$ haben wir $\Phi^*(\chi) = f_1 \otimes \chi_1 + \ldots + f_n \otimes \chi_n$ mit $\chi_i \in \mathfrak{X}(D)$ paarweise verschieden. Ist $h = \chi \in \mathfrak{X}(T)$ ein Charakter, so muß $\Phi_v^*(\chi)$ für jedes $v \in V$ ein Charakter sein, also muß an jeder Stelle $v \in V$ genau ein f_i den Wert Eins annehmen und die anderen den Wert Null. Da V zusammenhängend ist, folgt $\Phi^*(\chi) = 1 \otimes \chi_i$ für ein i. Da die Charaktere von T bereits $\mathcal{O}(T)$ erzeugen, folgt der Satz. $\square$

Übungen

Übung 1.7.15. Man zeige: Eine kommutative affine algebraische Gruppe, in der jedes Element halbeinfach ist, ist diagonalisierbar.

Übung 1.7.16. Man zeige: Ein Morphismus $D \to T$ von diagonalisierbaren Gruppen ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn die zugehörige Abbildung auf den Charaktergruppen eine Surjektion $\mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(D)$ induziert.

Übung 1.7.17. Man zeige: Eine Sequenz $T \to D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik Null ist genau dann exakt, wenn die Sequenz der zugehörigen Charaktergruppen $\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(T)$ exakt ist. Eine Sequenz $T \to D \to E$ von diagonalisierbaren Gruppen in Charakteristik $p > 0$ ist genau dann exakt, wenn die Sequenz der zugehörigen Charaktergruppen $\mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(T)$ Komposition Null hat und in der Mitte $(\ker/\mathrm{im})$ eine endliche p-Gruppe ist.

Übung 1.7.18. Seien $G \supset D$ eine affine algebraische Gruppe und eine diagonalisierbare abgeschlossene Untergruppe. Man zeige, daß jedes Gewicht von D in mindestens einer irreduziblen Darstellung von G vorkommt.

1.8 Darstellungen von $\mathrm{SL}(2;k)$

1.8.1. Dieser Abschnitt besteht weitgehend aus Übungen. Verschiedene Teile dieser Übungen werden später bei der Diskussion von Wurzelsystemen und reduktiven Gruppen benötigt. Daneben scheinen mir diese Inhalte aber auch als Beispielmaterial wichtig.

Satz 1.8.2 (Algebraische Darstellungen von $\mathrm{SL}(2;k)$). $(k = \bar{k})$. *Seien $T \subset B \subset \mathrm{SL}(2;k)$ der Torus der Diagonalmatrizen und die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. So gilt:*

1. *Gegeben ein Erzeuger $\varepsilon \in \mathfrak{X}(T)$ der Gruppe der Charaktere von T erhalten wir eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Irreduzible algebraische Darstellungen} \\ \textit{von } \mathrm{SL}(2;k) \textit{ bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{N}$$

   durch die Vorschrift $L \mapsto \sup\{n \mid L_{n\varepsilon} \neq 0\}$, die jeder irreduziblen Darstellung L das maximale $n \in \mathbb{N}$ zuordnet, für das $n\varepsilon$ ein T-Gewicht von L ist;

2. *Wählen wir den Charakter $\varepsilon : T \stackrel{\sim}{\to} k^\times$, $\mathrm{diag}(c, c^{-1}) \mapsto c$ als Erzeuger der Charaktergruppe von T, so ist der zu dem maximalen n aus Teil 1 gehörige Gewichtsraum $L_{n\varepsilon}$ die eindeutig bestimmte B-stabile Gerade von L;*

3. *In der von der Operation auf k^2 induzierten Operation von $\mathrm{SL}(2;k)$ auf $\mathcal{O}(k^2) \cong k[X,Y]$ haben die Unterdarstellungen $k[X,Y]^{(m)}$ homogener Polynome vom Grad m jeweils genau eine irreduzible Unterdarstellung L, und deren B-stabile Gerade hat das Gewicht $m\varepsilon$;*

4. *Im Fall der Charakteristik Null ist sogar $k[X,Y]^{(m)}$ selbst bereits irreduzibel.*

Beweis. Der Beweis dieser Aussagen ist der Inhalt der folgenden Übungen. □

Übungen

Übung 1.8.3. Sei $B = B_\chi = T \ltimes k$ das semidirekte Produkt eines Torus mit der additiven Gruppe, mit einer Verknüpfung der Gestalt

$$(t,u)(s,v) = (ts, \chi(s)^{-1}u + v)$$

für einen fest gewählten Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(T)$, so daß also der durch die Konjugation mit $s \in T$ induzierte Automorphismus von k gerade die Multiplikation mit $\chi(s)$ ist. Man zeige, daß für jede algebraische Darstellung V von B und jede T-stabile Gerade $L \subset V_\lambda$ die Summe $L \oplus \bigoplus_{n>0} V_{\lambda+n\chi}$ der Gerade L und besagter Gewichtsräume von T ein unter B stabiler Teilraum ist und daß alle T-Gewichtsräume der von L erzeugten B-Unterdarstellung von V höchstens eindimensional sind. Hinweis: 1.5.16.

Übung 1.8.4 (**Bruhat-Zerlegung für** $\mathrm{SL}(2;k)$). Man verifiziere die Zerlegung $G = B \sqcup BsB$ im Fall $G = \mathrm{SL}(2;k)$ und B der Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $s \in G$ einem beliebigen Element mit Nullen auf der Diagonalen. Das gilt sogar für einen beliebigen Körper k.

Übung 1.8.5. $(k = \bar{k})$. Seien $T \subset \mathrm{SL}(2;k)$ der Torus der Diagonalmatrizen, B die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, und $\bar{B}$ die Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen. Seien $\varepsilon : T \xrightarrow{\sim} k^\times$, $\mathrm{diag}(c, c^{-1}) \mapsto c$ besagter Erzeuger des Charaktergitters $\mathfrak{X}(T)$ und V eine algebraische Darstellung von $\mathrm{SL}(2;k)$. Man zeige:

1. Die Gruppe B ist ein semidirektes Produkt der in 1.8.3 betrachteten Art mit $\chi = 2\varepsilon$. Die Gruppe $\bar{B}$ ist ein semidirektes Produkt der in 1.8.3 betrachteten Art mit $\chi = -2\varepsilon$.

2. Für $\alpha := 2\varepsilon$ sind die Teilräume $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{n\alpha}$ und $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{n\alpha+\varepsilon}$ Unterdarstellungen von V.

3. Es gilt $\nu \in \mathrm{P}_T(V) \Rightarrow -\nu \in \mathrm{P}_T(V)$. Hinweis: Der Normalisator von T ist echt größer als sein Zentralisator.

4. Gegeben eine unter B stabile Gerade $L \subset V$ ist das k-Erzeugnis der $\bar{B}$-Bahn von $v \in L$ bereits G-stabil. Hinweis: 1.5.10.

5. Gegeben eine B-stabile Gerade $L \subset V$ ist die von L erzeugte G-Unterdarstellung enthalten in $L \oplus \bigoplus_{n>0} V_{\lambda-n\alpha}$ für $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ das Gewicht von L. Nach 3 haben wir also notwendig $\lambda \in \mathbb{N}\varepsilon$. Hinweis: 4.

6. Jede irreduzible Darstellung von $\mathrm{SL}(2;k)$ besitzt genau eine B-stabile Gerade. Hinweis: 5.

7. Haben die B-stabilen Geraden irreduzibler Darstellungen V, W von $\mathrm{SL}(2;k)$ dasselbe T-Gewicht, so sind unsere Darstellungen isomorph. Hinweis: Gegeben von Null verschiedene Vektoren v, w der jeweiligen B-stabilen Gerade betrachte man die von $(v, w) \in V \oplus W$ erzeugte G-Unterdarstellung U und zeige, daß die Projektionen auf Surjektionen von U auf V und W sind

mit demselben Kern, nämlich mit Kern der größten Unterdarstellung von U, die den Gewichtsraum vom Gewicht der B-stabilen Gerade nicht trifft.

8. In der von der Operation auf k^2 induzierten Operation von $\mathrm{SL}(2;k)$ auf $\mathcal{O}(k^2) \cong k[X,Y]$ bilden die Teilräume $k[X,Y]^{(m)}$ homogener Polynome vom Grad m Unterdarstellungen.

9. Wir erhalten eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Irreduzible algebraische Darstellungen} \\ \text{von } \mathrm{SL}(2;k)\text{, bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{N}\varepsilon$$

durch die Vorschrift, die jeder irreduziblen Darstellung das T-Gewicht ihrer eindeutig bestimmten B-stabilen Gerade zuordnet. Die Umkehrabbildung ordnet einem Gewicht $m\varepsilon$ mit $m \geq 0$ die eindeutig bestimmte irreduzible Unterdarstellung von $k[X,Y]^{(m)}$ zu.

10. In Charakteristik Null sind die Darstellungen $k[X,Y]^{(m)}$ alle schon selbst irreduzibel. In Charakteristik $p > 0$ ist $kX^p + kY^p \subset k[X,Y]^{(p)}$ die eindeutig bestimmte irreduzible Unterdarstellung.

Übung 1.8.6 (**Vollständige Reduzibilität in Charakteristik Null**). In Charakteristik Null ist jede Darstellung der Gruppe $\mathrm{SL}(2;k)$ isomorph zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen. Hinweis: Wir können uns mit den Methoden von [NAS] 1.6.5 auf den Fall einer endlichdimensionalen Darstellung V beschränken. Dann gibt es m mit $V_{m\varepsilon} \neq 0$ aber $V_{n\varepsilon} = 0$ für alle $n > m$. Jede Gerade in $V_{m\varepsilon}$ erzeugt eine Unterdarstellung, die nach 1.8.3 höchstens eindimensionale Gewichtsräume haben kann und folglich irreduzibel sein muß. Dasselbe gilt für die kontragrediente Darstellung V^*.

1.9 Tannaka-Krein-Dualität*

Proposition 1.9.1. *Ist $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine kompakte Untergruppe, so gibt es Polynome in den Matrixeinträgen $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_{ij}]$ mit*

$$G = \{A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \mid f_\rho(A) = 0 \ \forall \rho\}$$

1.9.2. Dieser Satz ist eine erste Formulierung der Erkenntnis, daß kompakte Liegruppen recht eigentlich algebraische Objekte sind.

Beweis. Wir betrachten auf $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ die Zariski-Topologie im Sinne von [KAG] 1.1.2 und müssen in den dort eingeführten Notationen $G = \bar{G}$ zeigen, wobei sich der Abschluß auf die Zariski-Topologie von $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ bezieht. In der Tat bedeutet diese Gleichung gerade, daß G die Nullstellenmenge seines Verschwindungsideals ist, in Formeln $G = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(G))$, und da das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(G)$ von G endlich erzeugt sein muß in $\mathbb{R}[X_{ij}]$ nach dem Hilbert'schen Basissatz, folgt $G = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$ für ein endliche Familie von Polynomen $f_1, \ldots, f_r$. Die Proposition erweist sich damit als eine Umformulierung des Satzes, den wir gleich im Anschluß beweisen. □

Satz 1.9.3. *Jede kompakte Untergruppe von* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ *ist in Bezug auf die Zariski-Topologie abgeschlossen in* $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir, daß mit einer metrisch kompakten Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auch ihr Zariski-Abschluß $\bar{G} \mathrel{\mathpalette\subset\ldots} \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine metrisch kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ ist. Indem wir ein invariantes Skalarprodukt wählen, dürfen wir ja ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G \subset \mathrm{O}(n)$ annehmen, und da $\mathrm{O}(n)$ Zariski-abgeschlossen ist in $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$, folgt $\bar{G} \subset \mathrm{O}(n)$. Folglich ist auch $\bar{G}$ metrisch kompakt. Weiter ist mit G auch $\bar{G}$ stabil unter dem Transponieren von Matrizen und enthält folglich mit jedem Element auch dessen Inverses. Und schließlich impliziert $a \in G$ sofort $a \cdot G \subset G$ und $a \cdot \bar{G} \subset \bar{G}$ und dann folgt aus $b \in \bar{G}$ bereits $G \cdot b \subset \bar{G}$ und so $\bar{G} \cdot b \subset \bar{G}$ und wir erkennen, daß $\bar{G}$ unter der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Mithin ist $\bar{G} \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine metrisch kompakte Untergruppe. Nach [TM] 2.8.7 haben wir nun den unteren Isomorphismus in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X_{ij}]/\mathcal{I}(\bar{G}) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{R}(\bar{G};\mathbb{R}) \\ \| & & \downarrow \\ \mathbb{R}[X_{ij}]/\mathcal{I}(G) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{R}(G;\mathbb{R}) \end{array}$$

Die Restriktion von $\bar{G}$ auf G induziert folglich eine Bijektion zwischen den Räumen der Matrixkoeffizienten beider Gruppen. Dasselbe folgt für komplexwertige Matrixkoeffizienten. Nun ist aber eine endlichdimensionale stetige Darstellung V unserer kompakten Hausdorffgruppe G, für die die Matrixkoeffizientenabbildung $V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \to \mathcal{C}(G)$ injektiv ist, nach [TM] 2.12.10 bereits irreduzibel. Es folgt, daß die Restriktion von $\bar{G}$ auf G eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen einfacher stetiger Darstellungen liefern muß. Damit folgt, daß die Restriktion $\mathcal{R}(\bar{G}) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{R}(G)$ auch mit den normierten invarianten Integralen auf $\bar{G}$ beziehungsweise G verträglich sein muß. Dann muß aus Stetigkeitsgründen auch die Restriktion $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(G)$ mit den normierten invarianten Integralen verträglich sein. Wäre aber $\bar{G} \neq G$, so gäbe es eine von Null verschiedene stetige Funktion $f : \bar{G} \to \mathbb{R}$ mit $f|_G = 0$, und das stünde im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß die L^2-Norm stetiger Funktionen bei der Restriktion $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(G)$ erhalten bleibt. □

Definition 1.9.4. Gegeben eine topologische Gruppe G bezeichne

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(G) \subset \mathcal{R}(G) \subset \mathcal{C}(G)$$

den Ring der reellwertigen darstellenden Funktionen im Ring der komplexwertigen darstellenden Funktionen im Ring aller stetigen Funktionen.

Lemma 1.9.5. *Gegeben topologische Gruppen G, H definiert der offensichtliche Homomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{R}(H) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{R}(G \times H)$$

Beweis. Die Injektivität gilt für beliebige Funktionen. Das einzige Problem ist die Surjektivität. Andererseits haben wir für jede stetige endlichdimensionalen Darstellung

$$\rho : G \times H \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$$

die Matrizengleichung $\rho(g, h) = \rho(g, 1)\rho(1, h)$ und erhalten sofort die Surjektivität im Lemma. □

Lemma 1.9.6. *Das Vorschalten der Verknüpfungsabbildung einer topologischen Gruppe liefert einen Ringhomomorphismus*

$$\mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G \times G)$$

Beweis. Ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ eine stetige Darstellung, so ist die Matrix $\rho(xy)$ das Produkt der Matrizen $\rho(x)$ und $\rho(y)$ und ihre Koeffizienten liegen folglich im Bild von $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$. □

Übungen

Übung 1.9.7. Man zeige: Für jede topologische Gruppe G ist $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(G)$ beziehungsweise $\mathcal{R}(G)$ ein Gruppenobjekt in der opponierten Kategorie zur Kategorie der $\mathbb{R}$-Kringe beziehungsweise der $\mathbb{C}$-Kringe.

Übung 1.9.8. Der Ring der komplexwertigen darstellenden Funktionen auf der Gruppe $\mathbb{Z}$ mit ihrer diskreten Topologie wird als $\mathbb{C}$-Ringalgebra erzeugt von den Funktionen $n \mapsto \lambda^n$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ und von der Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

2 Studium von Morphismen mit Anwendungen

Ich setzte von nun an Grundlagen der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie im Umfang von [KAG] 1 bis [KAG] 6.2.1 voraus, mit Ausnahme von Abschnitt [KAG] 5. Der Leser mag das Konzept allgemeiner Varietäten zwar vorerst noch ignorieren und sie sich als naive affine Varietäten denken, aber spätestens bei der Konstruktion der Quotienten 3.9.2 wird er mit allgemeinen Varietäten umgehen müssen. Besonders wichtig ist vorerst die Zerlegung in irreduzible Komponenten [KAG] 2.6.10 mitsamt ihrem Bezug zu Integritätsbereichen [KAG] 2.7.1. Nach [KAG] 6.7.13 existieren in der Kategorie der Varietäten endliche Produkte und der Einbettungsfunktor von der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie der Varietäten ist verträglich mit endlichen Produkten.

2.1 Bilder und Fasern von Morphismen

2.1.1. Ein Morphismus von Varietäten $X \to Y$ heißt nach unserer in [KAG] 7.2.3 eingeführten Terminologie **produktfest offen**, wenn für jede affine Varietät Z der induzierte Morphismus $X \times Z \to Y \times Z$ offen ist alias offene Teilmengen auf offene Teilmengen abbildet. Das gilt dann sogar für jede beliebige Varietät Z.

2.1.2. Ein Morphismus von Varietäten $X \to Y$ heißt **dominant**, wenn sein Bild dicht ist in Y.

Proposition 2.1.3. *Ist $\varphi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varitäten, so gibt es eine offene nichtleere Teilmenge $U \circledcirc X$ derart, daß die Restriktion von φ auf U produktfest offen ist.*

Ergänzung 2.1.4. In diesem Abschnitt werden wir die etwas technische Eigenschaft, produktfest offen zu sein, noch nicht benötigen. Bei der Diskussion von Quotienten wird sie jedoch eine wesentliche Rolle spielen. Sobald man mit Schemata arbeitet, wird man statt mit dem Begriff „produktfest offen“ besser mit dem Begriff der „Flachheit“ operieren. Damit kann man wohl sogar zeigen, daß es für einen beliebigen Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ eine offene dichte Teilmenge $V \circledcirc Y$ gibt derart, daß die Restriktion $\varphi^{-1}(V) \to V$ produktfest offen ist.

Beweis. Nach Übergang zu geeigneten offenen Teilmengen dürfen wir X und Y affin annehmen. Gilt unsere Proposition für $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$, so auch für die Komposition $\psi \circ \varphi : X \to Z$. Es reicht also, die Proposition zu zeigen im Fall $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[f]$ für ein $f \in \mathcal{O}(X)$ alias $\mathcal{O}(Y)[T] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$ durch $T \mapsto f$. Ist f nicht Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms mit Koeffizienten in

$\mathcal{O}(Y)$, so gilt $\mathcal{O}(Y)[T] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$ und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & Y \times k \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ Y & = & Y \end{array}$$

Die Projektionen von einem Produkt sind jedoch stets offen und sogar produktfest offen, da das Bild einer Teilmenge $M \subset Y \times k$ ja beschrieben werden kann als Vereinigung der „horizontalen Schnitte“ $M_\lambda := \{y \in Y \mid (y, \lambda) \in M\}$. Ist f dahingegen Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms mit Koeffizienten in $\mathcal{O}(Y)$, so ist f algebraisch über dem Quotientenkörper $\mathcal{M}(Y) = \mathrm{Quot}\, \mathcal{O}(Y)$ und hat ein Minimalpolynom $P \in \mathcal{M}(Y)[T]$, das per definitionem normiert ist. Sicher finden wir einen „Hauptnenner der Koeffizienten unseres Polynoms“ $s \in \mathcal{O}(Y)$ mit $s \neq 0$ und $sP \in \mathcal{O}(Y)[T]$. Betrachten wir nun die Lokalisierungen $\mathcal{O}(Y)_s$ und $\mathcal{O}(X)_s$, die durch formales Invertieren von s entstehen, so ist die durch $T \mapsto f$ gegebene Surjektion sogar eine Bijektion $\mathcal{O}(Y)_s[T]/\langle P \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_s$, denn sie wird eine Injektion nach dem Invertieren aller von Null verschiedenen Elemente von $\mathcal{O}(Y)$ und die linke Seite ist frei über $\mathcal{O}(Y)_s$. Damit erhalten wir für $V := Y_s = \{y \in Y \mid s(y) \neq 0\} \Subset Y$ ein kommutatives Diagramm

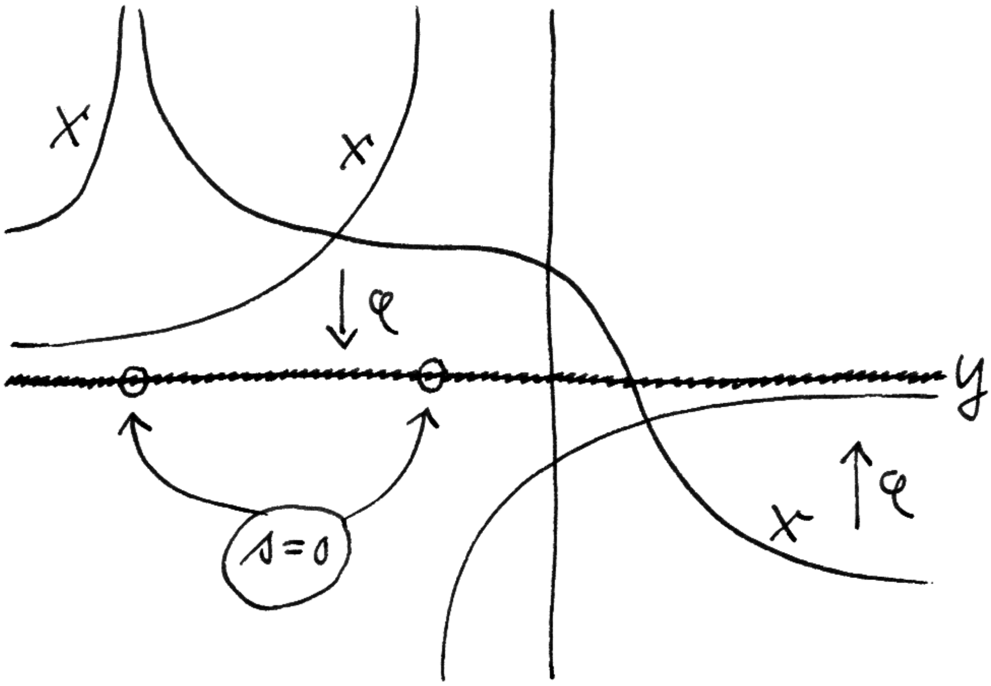
$$\begin{array}{ccccccc} X & \Supset & \varphi^{-1}(V) & \xleftarrow{\sim} & \{(y, \lambda) \mid P(y, \lambda) = 0\} & \hookrightarrow & V \times k \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ Y & \Supset & V & = & V & = & V \end{array}$$

Hier haben wir $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots a_1 T + a_0$ aufzufassen als Funktion auf $V \times k$ vermittels $P(y, \lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(y)\lambda^{n-1} + \ldots + a_1(y)\lambda + a_0(y)$. Es reicht also, die Aussage der Proposition für die zweite Vertikale von rechts zu zeigen. Damit reicht es zu zeigen, daß für jede affine Varietät V und jedes normierte Polynom $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ die Projektion auf den ersten Faktor eine offene Abbildung

$$W := \{(y, \lambda) \in V \times k \mid P(y, \lambda) = 0\} \ \to \ V$$

induziert. Dazu müssen wir nur zeigen, daß für jedes $Q \in \mathcal{O}(V \times k) = \mathcal{O}(V)[T]$ das Bild von $\{(y, \lambda) \in W \mid Q(y, \lambda) \neq 0\}$ offen ist. Dieses Bild besteht aus allen $y \in V$ derart, daß nicht alle Nullstellen von $Q(y, T)$ auch Nullstellen von $P(y, T)$ sind. Das sind aber nun offensichtlich genau alle $y \in V$ derart, daß im Polynomring $k[T]$ das Polynom $P(y, T)$ kein Teiler von $Q(y, T)^n$ ist, für n wie oben der Grad in T des Polynoms $P(y, T)$. Teilen wir im Polynomring $\mathcal{O}(V)[T]$ das Polynom Q^n mit Rest R durch das normierte Polynom P, so sind das genau diejenigen y, für die der Rest $R(y, T)$ bei y nicht das Nullpolynom ist. Diese Bedingung an y ist nun aber offensichtlich offen. □

Korollar 2.1.5 (über Bilder von Morphismen). *Bei einem Morphismus von Varietäten umfaßt das Bild stets eine offene dichte Teilmenge seines Abschlusses.*



Dieses Bild stellt einen Morphismus affiner Varietäten $\varphi : X \to Y$ dar im Fall, daß Fall, daß $\mathcal{O}(X)$ über $\mathcal{O}(Y)$ erzeugt ist von einem Element f, das nicht algebraisch unabhängig ist über $\mathcal{O}(Y)$. Hier etwa ist Y die gezackte Linie und X besteht aus den geschwungenen Linien, und φ meint die Restriktion der orthogonalen Projektion. Wenn wir zu einer geeigneten nichtleeren offenen Teilmenge $V = \{s \neq 0\} \overset{\circ}{\subset} Y$ übergehen, so können wir sogar annehmen, daß $\varphi^{-1}(V)$ identifiziert werden kann mit der Nullstellenmenge $U \overset{\mathrm{A}}{\subset} V \times k$ eines normierten Polynoms $P \in \mathcal{O}(V)[T]$.

Beweis. Sei $\varphi : X \to Y$ unser Morphismus. Es gilt zu zeigen, daß $\varphi(X)$ eine offene dichte Teilmenge von $\overline{\varphi(X)}$ umfaßt. Wir dürfen dazu X irreduzibel annehmen und Y durch $\overline{\varphi(X)}$ ersetzen. Nach [KAG] 2.6.23 ist dann auch Y irreduzibel und $\varphi : X \to Y$ ist ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varietäten. Das Korollar folgt dann direkt aus 2.1.3, indem wir in den dortigen Notationen $\varphi(U) \overset{\circ}{\subset} Y$ betrachten. □

Zweiter Beweis. Das folgt direkt aus dem Faktorisierungssatz [KAG] 4.4.14. □

Ergänzung 2.1.6 (**Satz von Chevalley**). Diejenigen Teilmengen eines topologischen Raums, die in der von den offenen Teilmengen erzeugten Mengenalgebra liegen, heißen die **konstruktiblen Teilmengen** unseres topologischen Raums. In anderen Worten sind die konstruktiblen Teilmengen eines topologischen Raums genau alle endlichen Vereinigungen von lokal abgeschlossenen Teilmengen. Der Satz von Chevalley besagt nun, daß das Bild einer konstruktiblen Teilmenge einer Varietät unter einem Morphismus von Varietäten stets konstruktibel ist. Man folgert das unschwer aus 2.1.3 oder alternativ 2.1.5 durch Induktion über die Dimension der Varietät, von der unser Morphismus ausgeht. Sicher reicht es, wenn wir im Induktionsschritt im Fall eines dominanten Morphismus irreduzibler Varietäten zeigen können, daß sein Bild konstruktibel ist. Dann ist aber nach 2.1.3 oder alternativ 2.1.5 das Bild mindestens einer offenen dichten Teilmenge offen, mithin konstruktibel, und das Bild ihres Komplements ist nach Induktionsannahme auch konstruktibel. Umgekehrt zeigt man auch leicht, daß jede konstruktible Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums eine dichte offene Teilmenge ihres Abschlusses umfaßt. So folgt auch umgekehrt 2.1.3 aus dem Satz von Chevalley.

Proposition 2.1.7 (**Mindestdimension der Fasern von Morphismen**). *Seien $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von irreduziblen Varietäten und $y \in \varphi(X)$ ein Punkt in seinem Bild. So gilt die Abschätzung*

$$\operatorname{kdim} X \leq \operatorname{kdim} Y + \operatorname{kdim} \varphi^{-1}(y)$$

2.1.8. Der Beweis zeigt sogar stärker für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y' \overset{\mathrm{A}}{\subset} Y$ und jede irreduzible Komponente X' von $\varphi^{-1}(Y')$ die Abschätzung $\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} X' \leq \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Y'$.

2.1.9. Die Proposition zeigt zum Beispiel, daß es Morphismen $X \to Y$ zwischen irreduziblen Varietäten mit mindestens einer endlichen aber nicht leeren Faser nur dann geben kann, wenn gilt $\operatorname{kdim} X \leq \operatorname{kdim} Y$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei Y affin oder auch nur separiert. Dann ist der Graph von φ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge

$\Gamma(\varphi) \overset{\mathrm{A}}{\subset} X \times Y$ und nach [KAG] 4.8.12 gilt für jede irreduzible Komponente X' des Schnitts $\Gamma(\varphi) \cap (X \times \{y\}) \cong \varphi^{-1}(y)$ die Abschätzung

$$\mathrm{kdim}(X \times Y) - \mathrm{kdim}\, X' \leq 2\,\mathrm{kdim}(X \times Y) - 2\,\mathrm{kdim}(X) \qquad \square$$

Proposition 2.1.10 (über generische Fasern von Morphismen). $(k = \bar{k})$. *Ist $\varphi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varitäten, so gibt es eine offene nichtleere Teilmenge $U \overset{\circ}{\subset} X$ derart, daß für jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge $Y' \overset{\mathrm{A}}{\subset} Y$ und jede irreduzible Komponente $U' \overset{\mathrm{A}}{\subset} U$ ihres Urbilds unter der Einschränkung $\varphi : U \to Y$ unseres Morphismus gilt*

$$\mathrm{codim}(U' \subset U) = \mathrm{codim}(Y' \subset Y)$$

Ergänzung 2.1.11. Ich erwarte, daß es sogar $V \overset{\circ}{\subset} Y$ gibt derart, daß für die Restriktion $\varphi^{-1}(V) \to V$ das Urbild jeder irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge aus irreduziblen Komponenten derselben Kodimension besteht. Dafür ist mir kein einfaches Argument eingefallen. Man kann es aber daraus folgern, daß jeder Morphismus auf einer offenen Teilmenge „flach“ ist, und daß bei flachen Morphismen die Dimension des lokalen Rings an einem Punkt die Dimension der Faser plus die Dimension des lokalen Rings am Bildpunkt ist.

Beweis. Im wesentlichen gilt es, den Beweis von 2.1.3 nocheinmal durchzugehen und zu prüfen, daß er auch diese Aussage liefert. Die einzige Schwierigkeit hierbei ist dann, die Aussage zu zeigen im Fall einer affinen Varietät V mit einem normierten Polynom $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ für die Projektion auf den ersten Faktor

$$W = \{(y, \lambda) \in V \times k \mid P(y, \lambda) = 0\} \;\to\; V$$

In diesem Fall folgt unsere Aussage jedoch aus der anschließenden Proposition 2.1.12 und der Invarianz der Krulldimension unter ganzen Kringerweiterungen [KAG] 4.2.11 sogar für $U = W$. In der Tat entspricht eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y' \overset{\mathrm{A}}{\subset} V$ einem Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(V)$, eine Komponente ihres Urbilds einem minimalen Primideal $\mathfrak{q} \subset \mathcal{O}(W)$ über $\mathfrak{p}$, und die anschließende Proposition liefert eine ganze Kringerweiterung $\mathcal{O}(V)/\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathcal{O}(W)/\mathfrak{q}$. $\square$

Proposition 2.1.12. *Seien A ein Kring und $P \in A[T]$ ein normiertes Polynom. Seien $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ ein Primideal und $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A[T]/\langle P\rangle)$ minimal unter den Primidealen von $A[T]/\langle P\rangle$, die $\mathfrak{p}$ umfassen. So gilt*

$$\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\mathfrak{p} = 0$ und A einen Integritätsbereich annehmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter P nichtkonstant annehmen. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A[T]/\langle P\rangle & \hookrightarrow & (\mathrm{Quot}\, A)[T]/\langle P\rangle \\ \cup & & \cup \\ A & \hookrightarrow & \mathrm{Quot}\, A \end{array}$$

Im Quotienten oben rechts sind die minimalen Primideale die Hauptideale $\langle \bar{Q}_i\rangle$ für Q_i die irreduziblen Faktoren des Polynoms P in $(\mathrm{Quot}\, A)[T]$. Offensichtlich besteht der Schnitt der $\langle \bar{Q}_i\rangle$ aus nilpotenten Elementen. Die minimalen Primideale von $A[T]/\langle P\rangle$ müssen dann nach [KAG] 3.2.24 alle unter den Schnitten der $\langle \bar{Q}_i\rangle$ mit diesem Teilring zu finden sein. Also schneidet jedes minimale Primideal von $A[T]/\langle P\rangle$ den Teilring A im Nullideal. □

Korollar 2.1.13 (Halbstetigkeit der Faserdimension). *Gegeben ein Morphismus von Varietäten $\varphi : X \to Y$ ist die Funktion $s : X \to \mathbb{N}$ gegeben durch*

$$s(x) := \mathrm{kdim}_x\, \varphi^{-1}(\varphi(x))$$

halbstetig auf X in dem Sinne, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X \mid s(x) \geq n\}$ offen ist in X.

2.1.14. Hier verwenden wir unsere Notation $\mathrm{kdim}_z\, Z$ aus [KAG] 2.6.15 für das Maximum der Dimensionen inrreduzibler Komponenten von Z, die den Punkt z enthalten.

Beweis. Wir zeigen das durch Induktion über die Dimension von X. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir beim Induktionsschritt X irreduzibel und dann auch φ dominant annehmen. Nach 2.1.10 besitzt dann X eine offene dichte Teilmenge $U \circeq X$, auf der unsere Funktion s konstant den Wert $c := \mathrm{kdim}\, X - \mathrm{kdim}\, Y$ annimmt. Andererseits nimmt nach 2.1.7 unser s in diesem Fall eh nur Werte $\geq c$ an. Aus der Induktionsannahme kennen wir aber bereits die Halbstetigkeit unserer Funktion auf $X \backslash U$. Das Korollar folgt. □

2.1.15. Unter dem Separabilitätsgrad $[L : K]_s$ einer algebraischen Körpererweiterung verstehen wir wie [AL] 3.9.33 den Grad über K der maximalen separablen Teilerweiterung.

Proposition 2.1.16 (über Kardinalitäten von Fasern). *Ist $\varphi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varietäten gleicher Dimension und $r := [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_s$ der Separabilitätsgrad, so gibt es eine offene nichtleere Teilmenge $V \circeq Y$ derart, daß $\varphi : \varphi^{-1}(V) \to V$ produktfest offen ist und jede nichtleere Faser dieses Morphismus genau r Elemente hat.*

Ergänzung 2.1.17. Im Rahmen des Beweises werden wir sogar ein V wie in der Proposition finden, das affin ist und ein affines Urbild hat.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit Y affin annehmen. Wählen wir eine endliche offene affine Überdeckung $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ und bezeichnen mit U den Schnitt der X_i und finden ein $V \Subset Y$, das es für alle $X_i \to Y$ tut und für das zusätzlich gilt $\varphi^{-1}(V) \cap X_i \subset U$, so tut es besagtes V auch für X. Damit folgt die Proposition aus dem anschließenden technischen Lemma 2.1.18, das eine etwas stärkere Aussage unter der Zusatzannahme formuliert, daß unsere Varietäten affin sind. □

Lemma 2.1.18. *Seien $\varphi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten gleicher Dimension, $r := [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]_s$ der Separabilitätsgrad, und $U \Subset X$ eine offene nichtleere Teilmenge. So gibt es eine offene nichtleere Teilmenge $V \Subset Y$ derart, daß $\varphi : \varphi^{-1}(V) \to V$ produktfest offen ist und jede nichtleere Faser dieses Morphismus genau r Elemente hat und daß zusätzlich gilt $\varphi^{-1}(V) \subset U$.*

Ergänzung 2.1.19. Sicher können wir V verkleinern zu einer offenen affinen Teilmenge der Gestalt $V = Y_s$ mit $s \in \mathcal{O}(Y)$ nicht Null, und dann ist sein Urbild in X die offene affine Teilmenge X_s. Damit folgt dann auch oben unsere Ergänzung 2.1.17.

Beweis. Der Vorteil der etwas technischen Formulierung in unserem Lemma liegt darin, daß die Aussage damit „stapelbar“ wird: Gilt unser Lemma für zwei Morphismen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ von affinen Varietäten, so auch für deren Verknüpfung. Es reicht also, den Fall $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[f]$ zu betrachten, und wir können zusätzlich annehmen, daß entweder f separabel ist über $\mathcal{M}(Y)$ oder, im Fall positiver Charakteristik $p > 0$, daß gilt $f \notin \mathcal{M}(Y)$ aber $f^p \in \mathcal{M}(Y)$. Zunächst aber können wir beide Fälle noch zusammen behandeln. Das Minimalpolynom P von f hat Koeffizienten in einer Lokalisierung von $\mathcal{O}(Y)$ nach einem von Null verschiedenen Element s. Können wir unser Lemma für $X_s \to Y_s$ zeigen, so folgt es für den ursprünglichen Morphismus. So landen wir beim Fall einer affinen irreduziblen Varietät Y mit einem normierten Polynom $P \in \mathcal{O}(Y)[T]$, das irreduzibel ist in $\mathcal{M}(Y)[T]$, und unser Morphismus wird die Projektion auf den ersten Faktor

$$X = \{(y, \lambda) \in Y \times k \mid P(y, \lambda) = 0\} \;\to\; Y$$

Ich zeige zunächst, daß es hier für jede nichtleere offene Teilmenge $U \Subset X$ eine nichtleere offene Teilmenge $V \Subset Y$ gibt mit $\varphi^{-1}(V) \subset U$. In der Tat dürfen wir sicher annehmen, daß U das Komplement der Nullstellenmenge eines Polynoms $Q \in \mathcal{O}(Y)[T]$ ist. Da U nicht leer sein soll, kann Q nicht auf ganz X verschwinden. Also hat Q einen von Null verschiedenen Leitkoeffizienten, und wir dürfen, indem wir sonst unser s von oben anpassen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch Q normiert annehmen. Die Punkte $y \in Y$ mit $\varphi^{-1}(y) \not\subset U$ sind genau die Nullstellen der Resultante $R \in \mathcal{O}(Y)$ von P und Q aus [AL] 2.10.5. Ist diese Resultante nicht Null, so nehmen wir das Komplement ihrer Nullstellenmenge als unser V und sind fertig. Wäre aber die Resultante die Null von $\mathcal{O}(Y)$, so wäre sie auch die Null von $\mathcal{M}(Y)$. Mindestens eine Nullstelle von $P \in \mathcal{M}(Y)[T]$ in seinem Zerfällungskörper wäre also auch Nullstelle von Q. Da aber P als normiertes irreduzibles Polynom das Minimalpolynom einer jeden seiner Nullstellen ist, existiert dann nach [AL] 3.3.3 ein Polynom $D \in \mathcal{M}(Y)[T]$ mit $DP = Q$. Das Teilen mit Rest von Q durch das normierte Polynom P führt aber zu demselben Ergebnis unabhängig davon, ob wir Koeffizienten in $\mathcal{M}(Y)$ oder $\mathcal{O}(Y)$ durchführen, und damit erhielten wir einen Widerspruch zu unserer Annahme $U \neq \emptyset$. Also ist unsere Resultante R nicht die Nullfunktion, und nehmen wir als V das Komplement ihrer Nullstellenmenge, so gilt $\varphi^{-1}(V) \subset U$. Jetzt erinnern wir, daß wir uns ganz zu Anfang schon auf die Alternative $P = T^p - f^p$ oder P separabel zurückgezogen hatten. Im ersten Fall ist der Separabilitätsgrad Eins und jede Faser über V besteht aus genau einem Punkt. Im zweiten Fall ist der Separabilitätsgrad r der Grad von P, die Diskriminante von P ist nicht die Null von $\mathcal{O}(V)$, und jede Faser über dem Komplement der Nullstellenmenge der Diskriminante besteht aus genau r Punkten. Daß $\varphi : \varphi^{-1}(V) \to V$ produktfest offen ist, hatten wir bereits im Beweis von 2.1.3 gesehen. □

Übungen

Übung 2.1.20. Ist ein Homomorphismus von irreduziblen algebraischen Gruppen birational, so ist er ein Isomorphismus.

2.2 Komponenten algebraischer Gruppen

Proposition 2.2.1 (Komponenten algebraischer Gruppen).

1. *Die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe sind genau ihre Zusammenhangskomponenten;*
2. *Die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements alias* **Einskomponente** *einer algebraischen Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe;*
3. *Die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe sind genau die Nebenklassen ihrer Einskomponente.*

Beweis. Sei G unsere algebraische Gruppe und $G = G_1 \cup \ldots \cup G_r$ ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten. Sicher gilt $G_i \cap G_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, sonst gehörte ein Gruppenelement zu mehr als einer Komponente, also gehörte jedes Gruppenelement zu mehr als einer Komponente, und dann hätten wir $G = G_2 \cup \ldots \cup G_r$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Zerlegung. Bezeichne von nun an G° die

Einskomponente einer algebraischen Gruppe G. Nun muß $\operatorname{mult}(G^\circ \times G^\circ)$ irreduzibel sein, also in einer Komponente liegen, also in G°. Dasselbe gilt für $\operatorname{inv}(G^\circ)$. Es folgt, dass G° eine abgeschlossene Untergruppe ist. Wegen $gG^\circ g^{-1} \ni 1$ folgt $G^\circ = gG^\circ g^{-1}$ und G° ist sogar Normalteiler. Die Nebenklassen von G° sind sicher stets irreduzible Komponenten von G. Da sie G überdecken, kann es keine weiteren Komponenten geben. □

Lemma 2.2.2. *Jede abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index einer algebraischen Gruppe umfaßt deren Einskomponente.*

Beweis. Seien $H \not\triangleleft G$ unsere algebraischen Gruppen. Hat H endlichen Index r in G, so folgt $G = Hg_1 \sqcup \ldots \sqcup Hg_r$ für endliches r, wobei wir ohne Einschränkung $g_1 = 1$ annehmen dürfen. Nach dem vorhergehenden haben wir auch eine endliche Zerlegung $H = H^\circ h_1 \sqcup \ldots \sqcup H^\circ h_s$, wobei wir ohne Einschränkung $h_1 = 1$ annehmen dürfen. Zusammen ergibt sich eine Zerlegung von G als endlich disjunkte Vereinigung von rs irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $H^\circ g_i h_j$, die $H^\circ = G^\circ$ impliziert. □

Lemma 2.2.3. *Seien G eine algebraische Gruppe und $U, V \Subset G$ offen und dicht. So gilt $UV = G$.*

Beweis. Gegeben $g \in G$ gilt $gV^{-1} \cap U \neq \emptyset$. Es gibt also $v \in V$ und $u \in U$ mit $gv^{-1} = u$ alias $g = uv$. □

Satz 2.2.4. *Jeder Homomorphismus von algebraischen Gruppen hat abgeschlossenes Bild und die Einskomponente seines Bildes ist das Bild der Einskomponente des Definitionsbereichs.*

Beweis. Sei $\varphi : G \to H$ unser Homomorphismus. Nach 2.1.5 gibt es $U \subset \varphi(G)$ mit U offen und dicht in $\overline{\varphi(G)}$. Nach 1.1.16 ist $\overline{\varphi(G)} \subset H$ eine Untergruppe. Nach 2.2.3 folgt erst $\overline{\varphi(G)} = U^2$ und dann $\overline{\varphi(G)} = \varphi(G)^2 = \varphi(G)$. Das zeigt die erste Behauptung. Da nun $\varphi(G^\circ) \subset \varphi(G)$ eine abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index sein muß, folgt $\varphi(G^\circ) \supset \varphi(G)^\circ$ aus 2.2.2. Wegen der Irreduzibilität von $\varphi(G^\circ)$ ergibt sich dann schließlich $\varphi(G^\circ) = \varphi(G)^\circ$. □

Satz 2.2.5 (Irreduzibles Erzeugen). *Seien G eine algebraische Gruppe und $(\varphi_i : X_i \to G)_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen irreduzibler Varietäten nach G, deren Bilder alle das neutrale Element enthalten, in Formeln $\varphi_i(X_i) \ni 1\ \forall i \in I$. So ist die von den Bildern aller unserer Morphismen erzeugte Untergruppe $H := \langle \varphi_i(X_i) \mid i \in I \rangle$ abgeschlossen in G.*

2.2.6. Der Beweis wird sogar zeigen, daß es endliche Folgen $i(1), \ldots, i(r) \in I$ und $\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(r) \in \{1, -1\}$ gibt mit $H = \varphi_{i(1)}(X_{i(1)})^{\varepsilon(1)} \ldots \varphi_{i(r)}(X_{i(r)})^{\varepsilon(r)}$.

Beispiele 2.2.7. Das Beispiel der einelementigen Familie $\varphi : \{0,1\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ zeigt, daß die Forderung X_i irreduzibel wesentlich ist: In diesem Fall wäre $H = \mathbb{Z}$ nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie. Das Beispiel der einelementigen Familie $\varphi : \{1\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ zeigt, daß auch die Forderung wesentlich ist, $\varphi_i(X_i)$ möge jeweils das neutrale Element von G enthalten.

Beweis. Indem wir notfalls I verdoppeln, dürfen wir annehmen, daß mit φ_i auch $\operatorname{inv} \circ \varphi_i$ zu unserer Familie gehört. Gegeben eine endliche Folge $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to I$ betrachte man nun die Varietät $Y_\alpha := X_{\alpha(1)} \times \ldots \times X_{\alpha(n)}$ und den Morphismus $\varphi_\alpha : Y_\alpha \to G$ gegeben durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi_{\alpha(1)}(x_1) \ldots \varphi_{\alpha(n)}(x_n)$. Sicher haben wir dann

$$H = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(Y_\alpha)$$

wo die Vereinigung wie angedeutet über alle endlichen Folgen zu bilden ist. Da das neutrale Element zu den Bildern all unserer Morphismen gehört, haben wir auch $\varphi_\alpha(Y_\alpha) \subset \varphi_{\alpha\beta}(Y_{\alpha\beta}) \supset \varphi_\beta(Y_\beta)$ mit der Notation $\alpha\beta$ für die die Verkettung zweier endlicher Folgen α, β. Da alle Y_α irreduzibel sind, müssen auch alle $\overline{\varphi_\alpha(Y_\alpha)}$ irreduzibel sein. Da die Länge echt aufsteigender Ketten irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von G begrenzt ist durch die Krulldimension von G, gibt es ein γ mit $\overline{\varphi_\alpha(Y_\alpha)} \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}\ \forall \alpha$. Es folgt $H \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}$. Nun enthält $\varphi_\gamma(Y_\gamma)$ jedoch nach 2.1.5 eine offene dichte Teilmenge U seines Abschlusses und wir finden ein Sandwich

$$U \subset \varphi_\gamma(Y_\gamma) \subset H \subset \overline{\varphi_\gamma(Y_\gamma)}$$

Dann ist erst recht U offen und dicht in $\overline{H}$ und wegen 2.2.3 folgt $U^2 = \bar{H}$, also $H = \bar{H} = \varphi_{\gamma\gamma}(Y_{\gamma\gamma})$. □

Definition 2.2.8. Gegeben Teilmengen A, B einer Gruppe G bezeichne (A, B) die von allen Kommutatoren $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe. Sind A und B Normalteiler, so ist auch (A, B) ein Normalteiler. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe (G, G) heißt auch die **derivierte Gruppe**.

Korollar 2.2.9. *Sei G eine algebraische Gruppe und seien $H, K \subset G$ Untergruppen mit H zusammenhängend und abgeschlossen. So ist auch der Kommutator (H, K) von H und K zusammenhängend und abgeschlossen.*

2.2.10. Gegeben eine zusammenhängende algebraische Gruppe G ist insbesondere ihre derivierte Gruppe (G, G) abgeschlossen in G und zusammenhängend.

Beweis. Wir betrachten für alle $b \in K$ den Morphismus $\varphi_b : H \to G$, $h \mapsto hbh^{-1}b^{-1}$. Per definitionem ist (H, K) das Gruppen-Erzeugnis der Bilder der φ_b. Das Korollar folgt damit aus Satz 2.2.5 über das irreduzible Erzeugen. □

Korollar 2.2.11. *Gegeben eine Familie $(G_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppen einer algebraischen Gruppe ist das Gruppenerzeugnis H der G_i abgeschlossen in G und es gibt eine endliche Folge $i(1), \ldots, i(n)$ in der Indexmenge I mit*

$$H = G_{i(1)} \ldots G_{i(n)}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus unserem Satz über das irreduzible Erzeugen zusammen mit der ergänzenden Bemerkung 2.2.6. □

Übungen

Übung 2.2.12. Der von einer irreduziblen das neutrale Element enthaltenden Teilmenge einer algebraischen Gruppe erzeugte Normalteiler ist stets abgeschlossen.

2.3 Operationen von algebraischen Gruppen

Definition 2.3.1. Sei G eine algebraische Gruppe. Eine **G-Varietät** ist eine Varietät X mit einer Gruppenwirkung $G \times X \to X$ derart, daß die Wirkungsabbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ ein Morphismus ist.

2.3.2. Sei X eine G-Varität. Gegeben Teilmengen $M, N \subset X$ erkläre man den **Transporteur von M nach N** als die Teilmenge

$$\mathrm{Trans}_G(M, N) := \{g \in G \mid gM \subset N\}$$

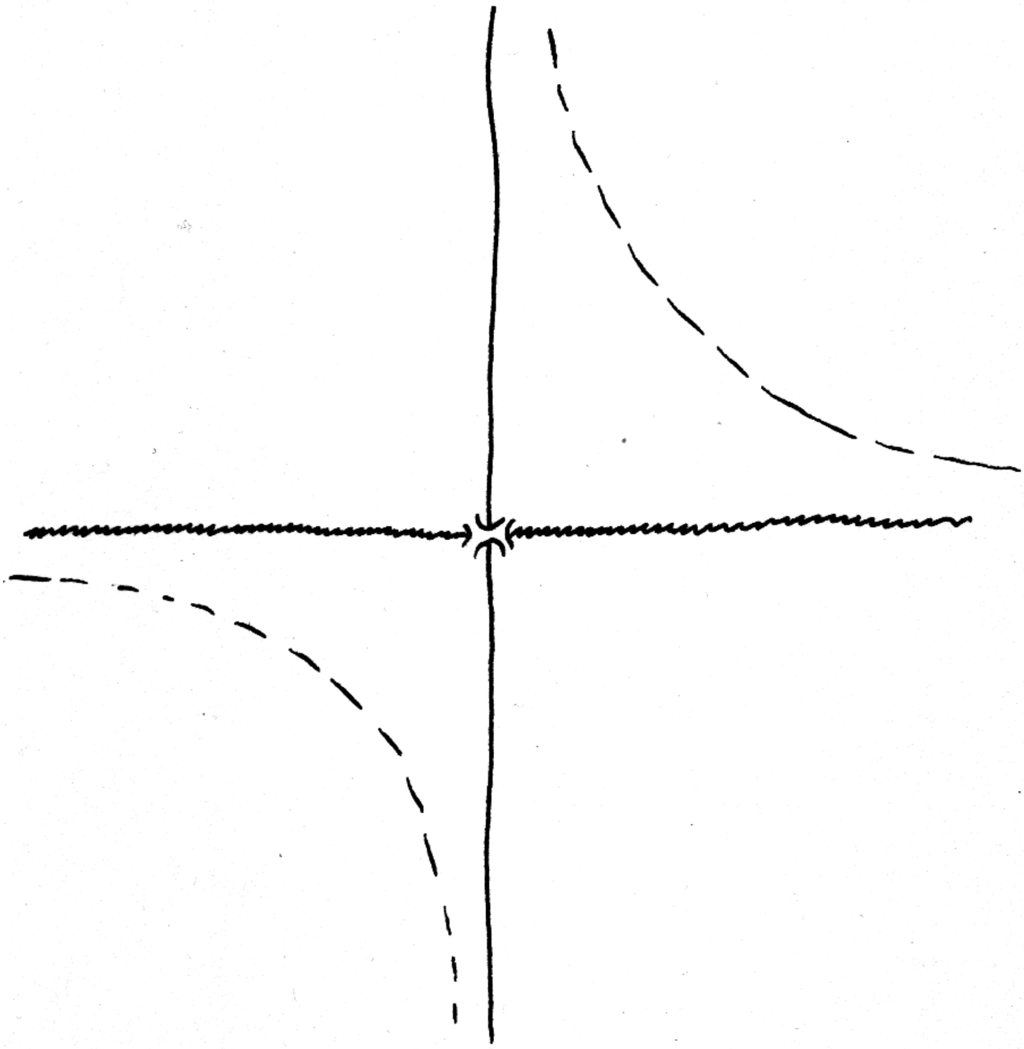
unserer Gruppe. Sicher gilt $\mathrm{Trans}_G(M, N) \subset \mathrm{Trans}_G(M, \bar{N}) = \mathrm{Trans}_G(\bar{M}, \bar{N})$ und $\mathrm{Trans}_G(M, \bar{N}) = \bigcap_{x\in M} \mathrm{Trans}_G(x, \bar{N})$ ist abgeschlossen, da die Transformatoren $\mathrm{Trans}_G(x, \bar{M})$ abgeschlossen sind als die Urbilder von $\bar{M}$ unter dem Morphismus $G \to X, g \mapsto gx$. Speziell ist für $M \not\subset\!\!\!\!\!\!\;\; X$ sein **Stabilisator** $\mathrm{Stab}_G(M) := \mathrm{Trans}_G(M, M)$ abgeschlossen und ebenso auch sein **Zentralisator**

$$\mathrm{Z}_G(M) := \{g \in G \mid gx = x \quad \forall x \in M\} = \bigcap_{x\in M} \mathrm{N}_G(x)$$

2.3.3 (**Fixpunktmengen in separierten G-Varietäten**). Sei G eine algebraische Gruppe. Gegeben eine separierte G-Varietät X und eine Teilmenge $H \subset G$ ist die Menge der Fixpunkte

$$X^H := \{x \in X \mid hx = x \quad \forall h \in H\} = \bigcap_{h\in H} X^h$$

abgeschlossen in X. In der Tat ist jedes X^h ist abgeschlossen als das Urbild der Diagonale unter dem Morphismus $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, hx)$, vergleiche [KAG] 6.8.14.



Operiert die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ auf $\mathbb{C}^2$ durch $t \mapsto \mathrm{diag}(t, t^{-1})$, so sind die Bahnen die Hyperbeln $xy = c$ für festes $c \in \mathbb{C}^\times$, die x-Achse ohne Ursprung, die y-Achse ohne Ursprung, und der Ursprung selber. Die beiden Achsen ohne Ursprung sind nicht abgeschlossen, aber offen in ihrem Abschluß. Die anderen Bahnen sind bereits abgeschlossen.

Satz 2.3.4 (Bahnen sind Varietäten). *Gegeben eine Varietät mit einer algebraischen Operation einer algebraischen Gruppe ist jede Bahn offen in ihrem Abschluß.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe und X unsere G-Varietät. Für jeden Punkt $x \in X$ behaupten wir $Gx \Subset \overline{Gx}$. Um das zu zeigen, betrachten wir den Morphismus $\varphi : G \to X$, $g \mapsto gx$. Nach dem Satz von Chevalley 2.1.5 umfaßt sein Bild $\varphi(G) = Gx$ eine offene dichte Teilmenge seines Abschlusses, in Formeln $\exists U \subset Gx$ mit $U \Subset \overline{Gx}$ und $\bar{U} = \overline{Gx}$, also insbesondere $U \neq \emptyset$. Es folgt

$$Gx = \bigcup_{g \in G} gU \Subset \overline{Gx}$$ □

Korollar 2.3.5 (Existenz abgeschlossener Bahnen). *In jeder nichtleeren Varietät mit einer Operation einer algebraischen Gruppe besitzt unsere Gruppe mindestens eine abgeschlossene Bahn.*

Beweis. Sei G unsere algebraische Gruppe und X unsere G-Varietät. Für jeden Punkt $x \in X$ ist seine Bahn $Gx \Subset \overline{Gx}$ eine offene dichte Teilmenge ihres Abschlusses. Das Komplement $\overline{Gx} \backslash Gx$ ist damit abgeschlossen, G-stabil und von echt kleinerer Dimension als Gx. Mithin muß jede Bahn kleinstmöglicher Dimension abgeschlossen sein. □

Proposition 2.3.6 (Dimensionsformel). *Gegeben eine G-Varietät X gilt für jeden Punkt $x \in X$ die Identität*

$$\operatorname{kdim} Gx + \operatorname{kdim} G_x = \operatorname{kdim} G$$

Beweis. In Worten behaupten wir also, daß sich die Dimension der Bahn eines Punktes und die Dimension seiner Isotropiegruppe zur Dimension der ganzen operierenden Gruppe aufaddieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $G = G^\circ$ zusammenhängend. Wir betrachten den dominanten Morphismus $\varphi : G \to Gx$, $g \mapsto gx$. Nach Proposition 2.1.10 über Fasern von Morphismen gibt es $U \Subset G$ offen nichtleer derart, daß für alle $y \in Gx$ jede Komponente Z von $\varphi^{-1}(y) \cap U$ die Dimension

$$\operatorname{kdim} Z = \operatorname{kdim} G - \operatorname{kdim} Gx$$

hat. Dann hat aber mindestens eine Komponente der Isotropiegruppe G_y die erwartete Dimension. Die Proposition folgt unmittelbar. □

Lemma 2.3.7. *Unter einer algebraischen Operation einer unipotenten Gruppe auf einer affinen Varietät sind alle Bahnen abgeschlossen.*

Beweis. Sei $U \looparrowright X$ unsere Operation. Fänden wir $x \in X$ mit $\overline{Ux} \neq Ux$, so wäre der Rand $\partial(Ux) := \overline{Ux} \backslash Ux$ unserer Bahn nicht leer und der Raum

$$\{f \in \mathcal{O}(\overline{Ux}) \mid f|\partial(Ux) = 0\}$$

der auf besagtem Rand verschwindenen regulären Funktionen nicht der Nullraum. Dann müßte er aber nach 1.6.2 auch eine von Null verschiedene U-invariante Funktion f enthalten, und das kann nicht sein, da jede U-invariante Funktion konstant ist auf $\overline{Ux}$. □

Definition 2.3.8. Eine Varietät mit der Operation einer algebraische Gruppe heißt genau dann **homogen** oder auch ein **homogener Raum**, wenn sie aus genau einer Bahn besteht, wenn also die Gruppenwirkung transitiv ist.

Satz 2.3.9 (Morphismen von homogenen Räumen). *Ein äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen ist stets produktfest offen. Ist weiter $\varphi : X \to Y$ unser Morphismus und $Z \subset Y$ irreduzibel, so gilt für die Dimension aller irreduziblen Komponenten W seines Urbilds $\varphi^{-1}(Z)$ die Formel*

$$\operatorname{kdim} X - \operatorname{kdim} W = \operatorname{kdim} Y - \operatorname{kdim} Z$$

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Proposition 2.1.3 nach der jeder dominante Morphismus von irreduziblen Varietäten unter Einschränkung auf eine geeignete nichtleere offene Teilmenge produktfest offen wird. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus Proposition 2.1.10 über Fasern von Morphismen. □

Proposition 2.3.10 (Birationale Morphismen homogener Räume). *Ein birationaler äquivarianter Homomorphismus zwischen homogenen Räumen ein- und derselben algebraischen Gruppe ist stets ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\varphi : X \to Y$ unser Homomorphismus. Seien $U \circledsubseteq X$ und $V \circledsubseteq Y$ offen affin irreduzibel mit $\varphi(U) \subset V$. Nach [KAG] 3.1.21 gibt es $a \in \mathcal{O}(V)\backslash 0$ mit $\mathcal{O}(U)_a$ frei als $\mathcal{O}(V)_a$-Modul. Indem wir V und U verkleinern, dürfen wir also annehmen, daß $\mathcal{O}(U)$ ein freier $\mathcal{O}(V)$-Modul ist. Mit [KAG] 3.1.22 und unseren Annahmen folgt $\mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U)$. In anderen Worten induziert φ einen Isomorphismus von Varietäten $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$. Da aber φ bijektiv sein muß etwa nach 2.1.18, liefert Homogenität die Behauptung. □

Übungen

Übung 2.3.11. Man zeige, daß im Kontext der Wirkung einer algebraischen Gruppe G auf einer Varietät X und einer abgeschlossenen Teilmenge $M \subset X$ stets gilt

$$\operatorname{Trans}_G(M, M) = \{g \in G \mid gM = M\}$$

Insbesondere ist der Stabilisator von M, wie er oben eingeführt wird, stets eine Untergruppe, und der Stabilisator einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset G$ unter der Operation durch Konjugation ist ihr Normalisator im Sinne der Gruppentheorie, vergleiche etwa [AL] 4.3.14 oder [TF] 3.2.7.

Übung 2.3.12. Man betrachte die Operation durch Konjugation von $\mathrm{GL}(n; k)$ auf $\mathrm{Mat}(n; k)$ und zeige, daß die abgeschlossenen Bahnen genau die Bahnen der diagonalisierbaren Matrizen sind. Man bestimme in diesem Fall die Dimensionen aller Bahnen. Man bestimme genauer, wann eine Bahn im Abschluß einer anderen Bahn liegt.

Übung 2.3.13. Ist $G \looparrowright X$ eine affine Varietät mit der Operation einer affinen algebraischen Gruppe, so existiert eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von G nebst einer äquivarianten abgeschlossenen Einbettung $X \hookrightarrow V$. Hinweis: Man argumentiere wie beim Beweis von 1.3.1. Mutige zeigen dasselbe auch ohne die Annahme G affin.

Übung 2.3.14. Gegeben eine Varietät mit einer Operation einer algebraischen Gruppe bilden die Punkte mit endlicher Isotropiegruppe eine offene Teilmenge. Hinweis: Halbstetigkeit der Faserdimension 2.1.13, angewandt auf das Urbild der Diagonale unter der Abbildung $G \times X \to X \times X$ mit $(g, x) \mapsto (gx, x)$. Allgemeiner bilden die Punkte, deren Isotropiegruppe die für Isotropiegruppen von Punkten von X kleinstmögliche Dimension hat, eine offene Teilmenge. Wir nennen sie die **G-regulären Punkte** von $G\backslash X$.

3 Algebraische Differentialrechnung

3.1 Derivationen und Tangentialräume

Definition 3.1.1. Seien k ein Kring, A ein k-Kring und M ein A-Modul. Eine **M-wertige k-lineare Derivation auf** A ist eine k-lineare Abbildung $D : A \to M$ mit $D(ab) = aD(b) + bD(a)$. Die abelsche Gruppe aller derartigen Derivationen notieren wir

$$\mathrm{Der}_k(A, M)$$

Sie wird ein A-Modul durch das Nachschalten von Multiplikationen, in Formeln durch die Vorschrift $aD := (a\cdot) \circ D$. Im Spezialfall $A = M$ verwenden wir die Abkürzung $\mathrm{Der}_k A := \mathrm{Der}_k(A, A)$.

3.1.2. Jede Derivation annulliert das Einselement. Für jede Derivation D auf einem Kring alias $\mathbb{Z}$-Kring A in einen A-Modul gilt also in Formeln $D(1) = 0$. In der Tat folgt aus der Definition $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$. Ist A ein k-Kring, so verschwindet mithin jede k-lineare Derivation auf $k1_A$.

Beispiel 3.1.3 (**Derivationen auf Polynomringen**). Ist k ein Kring und M ein Modul über $k[T_1, \ldots, T_n]$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_k(k[T_1, \ldots, T_n], M) \stackrel{\sim}{\to} M^n$$

durch die Vorschrift $D \mapsto (D(T_1), \ldots, D(T_n))$. In der Tat kann die Umkehrabbildung explizit angegeben werden durch $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto m_1\partial_1 + \ldots + m_n\partial_n$, womit die Derivation $P \mapsto (\partial_1 P)m_1 + \ldots + (\partial_n P)m_n$ gemeint ist, die unter Verwendung der partiellen Ableitungen gebildet wird. Die partiellen Ableitungen sind dabei wie in [AL] 3.9.5 formal zu verstehen. Ist speziell $x \in k^n$ und bezeichnet k_x die Gruppe k mit der durch das Auswerten $k[T_1, \ldots, T_n] \to k$ bei x gegebenen Modulstruktur, so ist $\mathrm{Der}_k(k[T_1, \ldots, T_n], k_x)$ ein freier k-Modul und die Derivationen $\partial_{i,x} : P \mapsto (\partial_i P)(x)$ bilden darin eine k-Basis.

Ergänzung 3.1.4. Analog erhalten wir für einen Polynomring über einem Kring k in einer beliebigen Menge $\mathcal{T}$ von Variablen und jeden Modul M über diesem Polynomring eine Bijektion $\mathrm{Der}_k(k[{}^{\prime}_{!}\mathcal{T}], M) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Ens}(\mathcal{T}, M)$ durch die Vorschrift $D \mapsto (T \mapsto D(T))$.

3.1.5 (**Funktorialität von Derivationen**). Seien k ein Kring und B ein k-Kring. Ist $\psi : M \to N$ ein Homomorphismus von B-Moduln, so induziert das Nachschalten von ψ eine B-lineare Abbildung $\mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(B, N)$. Ist $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von k-Kringen, so erhalten wir einen Homomorphismus von A-Moduln $\mathrm{res}_B^A \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(A, \mathrm{res}_B^A M)$ durch das Vorschalten von φ. Wir kürzen ihn ab zu $\mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(A, M)$ und erhalten so eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_A(B, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(A, M)$$

Ist $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Homomorphismus von k-Kringen und M weiter ein B-Modul, so erhalten wir offensichtlich sogar eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_k(B, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

Des weiteren ist Verschwinden einer Derivation auf $\ker \varphi$ gleichbedeutend zu ihrem Verschwinden auf einem Erzeugendensystem besagten Ideals.

Proposition 3.1.6 (Derivationen auf Lokalisierungen). *Ist k ein Kring, A ein k-Kring, $S \subset A$ eine Teilmenge und M ein Modul über der Lokalisierung $S^{-1}A$, so liefert das Vorschalten von $S^{-1}A \to A$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Der}_k(S^{-1}A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

3.1.7. Ist etwa k ein Körper, so gibt es genau eine Möglichkeit, unsere formale Ableitung $\partial : k[T] \to k[T]$ aus [AL] 3.9.5 so zu einer formalen Ableitung $\partial : k(T) \to k(T)$ fortzusetzen, daß die Summenregel und die Produktregel weiter gelten. Diese formale Ableitung notieren wir wieder $f \mapsto f'$.

Beweis. Wir dürfen S multiplikativ abgeschlossen annehmen. Für alle $s \in S$ und jede Derivation $D : S^{-1}A \to M$ gilt $0 = D(s \cdot s^{-1}) = s^{-1}D(s) + sD(s^{-1})$ alias $D(s^{-1}) = -s^{-2}D(s)$. Das zeigt die Injektivität der Einschränkung. Andererseits können wir jede Derivation $D : A \to M$ zu einer Derivation $S^{-1}A \to M$ ausdehnen durch die Vorschrift $D(a/s) = s^{-1}D(a) - s^{-2}aD(s)$, wie der Leser leicht nachrechnet. Das zeigt die Surjektivität. □

Definition 3.1.8. Gegeben eine Varietät X über k und ein Punkt $x \in X$ liefert das Auswerten bei x einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to k$. Wollen wir besonders betonen, daß wir k mit der durch diesen Homomorphismus gegebenen Struktur eines $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls versehen, so verwenden wir dafür die Notation k_x. Wir definieren den **Tangentialraum an** X **bei** x als den k-Vektorraum

$$\mathrm{T}_x X := \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x)$$

Gegeben ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von Varietäten sei das **Differential** $\mathrm{d}_x\varphi$ **von** φ **an der Stelle** x definiert als die durch das Vorschalten von $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ erklärte k-lineare Abbildung

$$\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$$

3.1.9 (**Der Tangentialraum als Funktor**). Gegeben Morphismen von Varietäten $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ und $x \in X$ ein Punkt mit Bildern $\varphi(x) = y$ und $\psi(y) = z$ haben wir offensichtlich

$$\mathrm{d}_y\psi \circ \mathrm{d}_x\varphi = \mathrm{d}_x(\psi \circ \varphi) : \mathrm{T}_xX \to \mathrm{T}_zZ$$

Sicher gilt auch $\mathrm{d}_x \,\mathrm{id}_X = \mathrm{id} : \mathrm{T}_xX \to \mathrm{T}_xX$. In anderen Worten haben wir also einen Funktor von der Kategorie der bepunkteten Varietäten in die Kategorie der Vektorräume konstruiert. Hier verstehen wir unter einer **bepunkteten Varietät** eine Varietät mit einem ausgezeichneten Punkt und unter einem Morphismus von bepunkteten Varietäten einen Morphismus von Varietäten, der den ausgezeichneten Punkt auf den ausgezeichneten Punkt abbildet.

3.1.10 (**Differential offener Einbettungen**). Ist $j : U \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung, so erhalten wir für alle $p \in U$ einen Isomorphismus auf den lokalen Ringen $\mathcal{O}_{X,j(p)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U,p}$ und damit auch einen Isomorphismus auf den Tangentialräumen

$$\mathrm{d}_pj : \mathrm{T}_pU \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{j(p)}X$$

3.1.11 (**Differential abgeschlossener Einbettungen**). Ist $i : Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung, so erhalten wir für alle $y \in Y$ eine Surjektion auf den lokalen Ringen $i^\sharp : \mathcal{O}_{X,i(y)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ und damit auch eine Injektion auf den Tangentialräumen

$$\mathrm{d}_yi : \mathrm{T}_yY \hookrightarrow \mathrm{T}_{i(y)}X$$

Insbesondere sind unsere Tangentialräume stets endlichdimensional. Sind Funktionen $f_\nu \in \mathcal{O}(X)$ gegeben, die das Verschwindungsideal $\ker i^\sharp$ von Y bei y erzeugen, so kann nach 3.1.5 das Bild von d_yi beschrieben werden als der Schnitt der Kerne der $\mathrm{d}_{i(y)}f_\nu : \mathrm{T}_{i(y)}X \to \mathrm{T}_0k$.

Korollar 3.1.12 (Tangentialräume affiner Varietäten). *Für jede bepunktete affine k-Varietät (X, x) liefert die Restriktion unter $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ eine Bijektion*

$$\mathrm{T}_xX \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x)$$

Beweis. Das ist genau die Aussage von Proposition 3.1.6 angewandt auf $A = \mathcal{O}(X)$, $M = k_x$ und $S \subset \mathcal{O}(X)$ die Menge aller Funktionen, die bei x nicht verschwinden. □

Lemma 3.1.13. *Seien k ein Kring, A ein k-Kring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein Ideal mit der Eigenschaft, daß die Komposition der natürlichen Abbildungen $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist. So induziert die Restriktion auf $\mathfrak{m} \subset A$ gefolgt von obigem Isomorphismus $k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Der}_k(A, A/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$$

Vorschau 3.1.14. Die Aussage dieses Lemmas werden wir in 3.7.4 zu einer Beschreibung beliebiger Derivationen durch den sogenannten „Modul der Differentiale“ ausbauen.

Beweis. Gegeben eine Derivation ∂ und $f, g \in \mathfrak{m}$ haben wir sicher $\partial(fg) = 0$ in $A/\mathfrak{m}$. Jede Derivation verschwindet also auf $\mathfrak{m}^2$, und so erhalten wir zumindest eine Abbildung wie im Lemma. Wegen $A = k1 \oplus \mathfrak{m}$ und $\partial(1) = 0$ ist diese Abbildung injektiv. Sei $A \to \mathfrak{m}$ die zu unserer Zerlegung gehörige Projektion. Wenn wir zeigen können, daß das Vorschalten der Komposition $A \to \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ aus jeder k-linearen Abbildung $\partial : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ eine Derivation $D : A \to A/\mathfrak{m}$ macht, sind wir fertig. Seien dazu $f, g \in \mathfrak{m}$ und $\alpha, \beta \in k$ gegeben. Es gilt zu zeigen

$$D((f + \alpha)(g + \beta)) = (f + \alpha)D(g + \beta) + (g + \beta)D(f + \alpha)$$

Das bedeutet umgeformt die Gleichheit $\partial(\alpha g + \beta f + fg) = \alpha\partial g + \beta\partial f$, und die ist offensichtlich wegen $\partial(fg) = 0$. $\square$

3.1.15 (**Dimensionen von Tangentialräumen**). $(k = \bar{k})$. Gegeben eine bepunktete k-Varietät (X, x) und $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ der Kern des Auswertungshomomorphismus liefert 3.1.13 insbesondere einen Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$$

Insbesondere ist nach **??** die Dimension des Tangentialraums stets mindestens so groß wie die lokale Krulldimension unserer Varietät an der entsprechenden Stelle, in Formeln $\dim_k \mathrm{T}_x X \geq \mathrm{kdim}_x X$, und Gleichheit ist nach **??** äquivalent zur Regularität des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ alias der Regularität der Varietät X an der Stelle x.

3.1.16. $(k = \bar{k})$. Unter einem **Vektorfeld auf einer Varietät** X verstehen wir analog wie in [ML] 3.4.6 eine Vorschrift D, die jedem Punkt $x \in X$ einen Tangentialvektor $D_x \in \mathrm{T}_x X$ zuordnet. Ist X affin, so nennen wir ein Vektorfeld D **algebraisch**, wenn es eine Derivation $D^\partial \in \mathrm{Der}_k \mathcal{O}(X)$ gibt derart, daß an jeder Stelle $x \in X$ unser D_x aus D^∂ entsteht durch das Nachschalten des Auswertens $\delta_x : \mathcal{O}(X) \to k_x$ an der Stelle x, in Formeln $D_x = \delta_x D^\partial$. Bezeichnet $\mathcal{T}(X)$ den Raum der algebraischen Vektorfelder auf der affinen Varietät X, so erhalten wir in dieser Weise offensichtlich nicht nur eine Surjektion, sondern sogar einen Isomorphismus

$$\mathrm{Der}_k \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(X)$$

Er scheint mir derart kanonisch, daß ich ihn sprachlich und in der Notation meist als Gleichheit behandeln werde und den oberen Index ∂ meist weglasse, auch wenn ich ein Vektorfeld als Derivation verstehen will. Algebraische Vektorfelder auf allgemeineren Varietäten diskutiere ich erst in 3.7.26.

3.1.17 (**Tangentialräume der Standardvektorräume**). $(k = \bar{k})$. Aus 3.1.3 folgt mit 3.1.12, daß für jeden Punkt $x \in k^n$ die vom Auswerten bei x gefolgten partiellen Ableitungen $\partial_{1,x}, \dots, \partial_{n,x}$ eine k-Basis des Tangentialraums $\mathrm{T}_x(k^n)$ bilden. So erhalten wir einen kanonische Isomorphismen

$$\mathrm{can} : k^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x(k^n)$$

Oft lasse ich dabei auch den zusätzlichen Index x weg, und im Fall $n = 1$ schreibe ich schlicht

$$\partial \in \mathrm{T}_x k$$

für die eindeutig bestimmte Derivation, die die Funktion $\mathrm{id} : k \to k$ auf $1 \in k$ abbildet, und nenne sie den **kanonischen Erzeuger von** $\mathrm{T}_x k$. Ein Vektorfeld D auf $U \Subset k^n$ ist offensichtlich genau dann algebraisch, wenn es $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ gibt mit $D = f_1\partial_1 + \dots + f_n\partial_n$.

Proposition 3.1.18 (Tangentialraum eines Produkts). *Der Tangentialraumfunktor ist verträglich mit Produkten. Die Differentiale der Projektionen induzieren in anderen Worten stets einen Isomorphismus von Vektorräumen*

$$(\mathrm{d}_{(x,y)}\,\mathrm{pr}_X, \mathrm{d}_{(x,y)}\,\mathrm{pr}_Y) : \mathrm{T}_{(x,y)}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X \times \mathrm{T}_y Y$$

Beweis. Die Surjektivität dieser Abbildung folgt aus der Funktorialität, die Identität auf X läßt sich ja für jedes feste $y \in Y$ schreiben als die Verknüpfung $X \to X \times Y \to X$ der Einbettung $x \mapsto (x, y)$ mit der Projektion. Um die Injektivität zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X und Y affin annehmen, da die Differentiale offener Einbettungen ja Isomorphismen sind. Nun erinnern wir aus 1.1.8 im Fall affiner Varietäten den Isomorphismus $\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$. Er zeigt, daß eine k-lineare Derivation auf $\mathcal{O}(X \times Y)$ in welchen Modul auch immer bereits durch ihre Werte auf Funktionen vom Typ $f \boxtimes 1$ und $1 \boxtimes g$ eindeutig festgelegt wird, und zeigt damit die Injektivität der entsprechenden Abbildung

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X \times Y), k_{(x,y)}) \to \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x) \oplus \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(Y), k_y)$$

Da aber diese Abbildung unter den Isomorphismen aus 3.1.12 genau der obigen Abbildung entspricht, folgt auch deren Injektivität. □

Zweiter Beweis. Das folgt auch sofort aus der Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten 3.1.21. □

Satz* 3.1.19 (Differentielles Dominanzkriterium). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von irreduziblen Varietäten. Ist für einen glatten Punkt $x \in X$ das Differential bei x eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$, so ist auch sein Bild $\varphi(x)$ glatt und der Morphismus φ dominant.*

3.1.20. Einen Spezialfall dieses Kriteriums haben wir bereits in [KAG] 4.4.16 diskutiert. Im weiteren Verlauf der Vorlesung spielt es keine Rolle. Seine Formulierung benutzt die Sprache der Differentiale, aber nach einer einfachen Umformulierung im Beweis erweist sich der Satz eher als ein Korollar der Theorie lokaler Kringe.

Beweis. Wir setzen $y := \varphi(x)$. Nach Annahme induziert der Komorphismus zu φ eine Injektion $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \hookrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ für $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ sowie $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ die maximalen Ideale. Gegeben $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{m}_y$ Repräsentanten einer k-Basis von $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ sind die $g_i \circ \varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ algebraisch unabhängig über k nach [KAG] 5.5.18. Also sind die g_i bereits selbst algebraisch unabhängig über k und wir folgern die Glattheit von Y bei y aus der Ungleichungskette

$$\operatorname{kdim} Y = \operatorname{trgr}_k \mathcal{M}(Y) \geq r = \dim_k \mathrm{T}_y Y \geq \operatorname{kdim} Y$$

Nun folgt mit [KAG] 5.6.8 weiter, daß φ eine Injektion $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}_y} \mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{X,x}$ der assozierten graduierten Ringe induziert. Da unsere Filtrierungen ausschöpfend und nach dem Durchschnittssatz [KAG] 3.4.13 auch Hausdorff sind, folgt mit [KAG] 5.1.19 die Injektivität $\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ des Komorphismus und φ ist in der Tat dominant. □

Übungen

Übung 3.1.21 (**Verträglichkeit von Derivationen mit Koprodukten**). Gegeben ein Kring k und k-Kringe A und B und ein Modul M über $A \otimes_k B$ liefern die Restriktionen eine Bijektion

$$\operatorname{Der}_k(A \otimes_k B, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(A, M) \oplus \operatorname{Der}_k(B, M)$$

Übung 3.1.22 (**Verträglichkeit von Vektorfeldern mit Produkten**). $(k = \bar{k})$. Gegeben affine k-Varietäten X und Y zeige man, daß es genau einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \oplus \mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{T}(Y) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathcal{T}(X \times Y)$$

gibt, der an allen Stellen $(x, y) \in X \times Y$ zu unserer Identifikation 3.1.18 spezialisiert.

Übung 3.1.23 (**Algebraische infinitesimale Operation**). Gegeben eine Operation $G \looparrowright X$ einer affinen algebraischen Gruppe auf einer affinen algebraischen Varietät und $v \in \mathrm{T}_e G$ erhalten wir ein algebraisches Vektorfeld $\acute{v}$ auf X durch die Vorschrift, daß für $\mathrm{d}_e(\cdot x) : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_x X$ jeweils $v \mapsto \acute{v}_x$ gelten möge. Hinweis: 3.1.22. Die Affinitätsannahmen dienen hier nur unserer Bequemlichkeit.

Übung 3.1.24. Man zeige, daß der Tangentialraum der Neil'schen Parabel an der singulären Stelle zweidimensional ist. Man zeige allgemeiner, daß der Tangentialraum einer ebenen Kurve an jeder singulären Stelle zweidimensional ist.

Übung 3.1.25. Man zeige, daß für $x \in U \Subset k$ und $f \in \mathcal{O}(U) \subset k(T)$ gilt $\mathrm{d}_x f : \partial \mapsto f'(x)\partial$ für $\partial \in \mathrm{T}_x U$ beziehungsweise $\partial \in \mathrm{T}_{f(x)} k$ die kanonischen Erzeuger aus 3.1.17. Hier ist f' zu verstehen wie in 3.1.7.

Übung 3.1.26. $(k = \bar{k})$. Für jeden endlichdimensionalen affinen Raum E über k und jeden Punkt $p \in E$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{can} : \vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p E$$

durch die Vorschrift, daß wir zu einem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E}$ den Morphismus $k \to E$, $t \mapsto p + t\vec{v}$ bilden und unserem Richtungsvektor $\vec{v}$ das Bild des kanonischen Basisvektors $\partial \in \mathrm{T}_0 k$ unter dem Differential dieses Morphismus zuordnen. Wir nennen $\mathrm{can}\,\vec{v}$ auch die **Richtungsableitung zu $\vec{v}$ an der Stelle p** und notieren sie $D_{\vec{v},p}$. Unser Isomorphismus can ist so kanonisch, daß man ihn selten explizit notiert. Im Fall $E = k^n$ fällt er bis auf die übliche Identifikation eines Vektorraums mit dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums mit unserem kanonischen Isomorphismus aus 3.1.17 zusammen. Ist F ein weiterer endlichdimensionaler affiner Raum über k und $\varphi : E \to F$ eine affine Abbildung, so ist φ auch ein Morphismus von Varietäten und für jeden Punkt $p \in E$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\vec{E} \arrow[r, "\vec{\varphi}"] \arrow[d, "\wr"] & \vec{F} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{T}_p E \arrow[r, "\mathrm{d}_p\varphi"] & \mathrm{T}_{\varphi(p)} F
\end{tikzcd}$$

Übung 3.1.27 (**Differential und Jacobi-Matrix**). Gegeben $p \in U \Subset k^n$ und ein Morphismus $\varphi : U \to k^m$ zeige man die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\wr"] & k^m \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{T}_p U \arrow[r, "\mathrm{d}_p\varphi"] & \mathrm{T}_{\varphi(p)} k^m
\end{tikzcd}$$

Hier sind in den Vertikalen die Isomorphismen $(a_1, \ldots, a_l) \mapsto a_1\partial_1 + \ldots + a_n\partial_l$ aus 3.1.17 für $l = n, m$ gemeint und J meint die durch die Jacobi-Matrix $((\partial_i\varphi_j)(p))_{ij}$ gegebene lineare Abbildung.

Übung 3.1.28. $(k = \bar{k})$. Seien V, W, E endlichdimensionale k-Vektorräume. Man zeige, daß Differential einer bilinearen Abbildung $b : V \times W \to E$ bei $p = (x, y)$

unter den üblichen Identifikationen nach 3.1.26 und 3.1.18 die lineare Abbildung $\mathrm{d}_p b : (v, w) \mapsto b(x, w) + b(v, y)$ ist.

Übung 3.1.29 (**Tangentialräume projektiver Räume**). $(k = \bar{k})$. Seien V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $\pi : V \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}V$ die Projektion und $v \in V \backslash 0$. So erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\langle v \rangle \hookrightarrow \mathrm{T}_v V \overset{\mathrm{d}_v \pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{T}_{\langle v \rangle} \mathbb{P}V$$

mit der Einbettung $\langle v \rangle \hookrightarrow V$ der von v erzeugten Gerade gefolgt von der kanonischen Identifikation $V \overset{\sim}{\to} \mathrm{T}_v V$ als erster Abbildung.

3.2 Die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe

Definition 3.2.1. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper k ist ein k-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mitsamt einer k-bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer**

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

derart, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Antisymmetrie: $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;

Jacobi-Identität: $\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

3.2.2. Unsere Bedingung $[x, x] = 0 \quad \forall x$ impliziert, wie in [LA1] 6.3.2 ausgeführt, bereits die Identität $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y$. Im Fall eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik impliziert umgekehrt $[x, x] = -[x, x]$ auch $[x, x] = 0$.

Beispiel 3.2.3. Ist A eine assoziative Algebra unter der Verknüpfung $(x, y) \mapsto x{\cdot}y$, so wird A eine Lie-Algebra A_{L} unter der Verknüpfung

$$(x, y) \mapsto [x, y] := x \cdot y - y \cdot x$$

Das rechnet man leicht nach. Man nennt deshalb die Lie-Klammer auch im allgemeinen oft den **Kommutator**. Faßt man $\operatorname{End} V$ bzw. $\operatorname{Mat}(n; k)$ in dieser Weise als Lie-Algebren auf, so bezeichnet man sie meist mit $\mathfrak{gl}(V)$ bzw. $\mathfrak{gl}(n; k)$ für **general linear Lie algebra**.

3.2.4. Sei k ein Körper. Gegeben eine nicht notwendig assoziative k-Algebra $(A, \cdot)$ heißt eine lineare Abbildung $D : A \to A$ eine **Derivation**, wenn sie die **Leibniz-Regel** $D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db)$ für alle $a, b \in A$ erfüllt. Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{Der}_k A \subset \operatorname{End}_k A$$

den Untervektorraum der Derivationen von A. Man prüft leicht, daß die Derivationen einer Algebra A eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(A)$ der Endomorphismen des k-Vektorraums A bilden. Man prüft leicht, daß unsere Derivationen hier im Fall einer Kringalgebra A mit den A-wertigen k-linearen Derivationen auf A aus 3.1.1 zusammenfallen, die wir auch dort schon $\operatorname{Der}_k A$ notiert hatten.

3.2.5. Im Fall $\operatorname{char} k = p > 0$ gilt $D \in \operatorname{Der}_k A \Rightarrow D^p \in \operatorname{Der}_k A$, denn wir haben ganz allgemein

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (D^i a)(D^{n-i} b)$$

Definition 3.2.6. $(k = \bar{k})$. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G definiert man die **Lie-Algebra ihrer linksinvarianten Vektorfelder** als die Unter-Liealgebra

$$\mathrm{L\grave{\imath}e}\, G := \{D \in \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G) \mid D \circ \acute{g} = \acute{g} \circ D \quad \forall g \in G\}$$

von $\operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$ aller linksinvarianten Derivationen alias linksinvarianten algebraischen Vektorfelder auf G. Hier verwenden wir die Notation $(\acute{g} f)(x) := f(g^{-1}x)$ für die Linksverschiebung von Funktionen $f \in \mathcal{O}(G)$. Analog erklären wir die **Lie-Algebra der rechtsinvarianten Vektorfelder** $\mathrm{L\acute{\imath}e}\, G$.

Satz 3.2.7 (Invariante Vektorfelder auf algebraischen Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Sei G eine affine algebraische Gruppe. So gilt:*

1. *Das Auswerten $D \mapsto D_1$ eines linksinvarianten Vektorfelds am neutralen Element induziert einen Vektorraumisomorphismus $\mathrm{L\grave{\imath}e}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_1 G$. Wir notieren die inverse Abbildung $v \mapsto \grave{v}$;*

2. *Das Multiplizieren regulärer Funktionen mit linksinvarianten Vektorfeldern induziert einen Isomorphismus $\mathcal{O}(G) \otimes_k \mathrm{L\grave{\imath}e}\, G \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$ von $\mathcal{O}(G)$-Moduln.*

3.2.8. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G verwenden wir nun für ihren Tangentialraum $\mathrm{T}_1 G$ beim neutralen Element mit der Struktur einer Lie-Algebra, für die der Isomorphismus mit den *links*invarianten Vektorfeldern aus dem ersten Teil unseres Satzes ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist, die Notation

$$\mathrm{Lie}\, G := \mathrm{T}_1 G$$

und nennen ihn die **Lie-Algebra von** G. Natürlich gilt Satz 3.2.7 analog für rechtsinvariante Vektorfelder. Die Komposition $\kappa : \mathrm{L\grave{\imath}e}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_1 G \xrightarrow{\sim} \mathrm{L\acute{\imath}e} G$ des Auswerten eines linksinarianten Feldes beim neutralen Element mit dem Fortsetzen zu einem rechtsinvarianten Feld ist jedoch ein *Anti*automorphismus von Lie-Algebren, in Formeln $[\kappa X, \kappa Y] = -\kappa[X, Y]$. Daß wir bei unserer Definition die linksinvarianten Vektorfelder bevorzugen, hängt damit zusammen, daß wir auch die allgemeinen linearen Gruppen $\mathrm{GL}(V)$ und die Endomorphismenringe $\operatorname{End} V$ stets in der Weise definieren, daß sie von links auf V operieren. Unsere Konventionen passen dann in dem Sinne zusammen, daß unter der Komposition von kanonischen Identifikationen $\operatorname{L\grave{i}e} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_1 \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(V)$ dem Kommutator von linksinvarianten Derivationen der Kommutator von Endomorphismen entspricht, vergleiche 3.4.1.

Beweis. Die Abbildung ist sicher injektiv, denn für jedes linksinvariante Vektorfeld D gilt $D_x = (\mathrm{d}_1(x\cdot))D_1$. Um die Surjektivität zu zeigen, konstruieren wir eine inverse Abbildung. Gegeben $v \in \mathrm{T}_1 G$ und $f \in \mathcal{O}(G)$ soll ja gelten $\grave{v}_z(f) = v(f \circ (z\cdot))$. Mit $\Delta f = \sum g_i \otimes f_i$ haben wir nun $f(zx) = \sum g_i(z) f_i(x)$ und können eine Abbildung $\grave{v} : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ erklären durch die Vorschrift

$$\grave{v}(f) := \sum v_1(f_i) g_i$$

So erhalten wir jedenfalls ein wohlbestimmtes $\grave{v} \in \operatorname{End}_k \mathcal{O}(G)$ mit der Eigenschaft $(\delta_z \grave{v})(f) = v_1(f \circ (z\cdot))$ für alle $z \in G$. Da alle $\delta_z \grave{v}$ Derivationen sind, muß dann auch $\grave{v}$ selber eine Derivation sein und der erste Teil ist bewiesen. Um den zweiten Teil zu beweisen, verwenden wir den Isomorphismus aus dem ersten Teil und entwickeln eine explizite Formel für die mit seiner Hilfe entstehende Abbildung

$$\mathcal{O}(G) \otimes_k \mathrm{T}_1 G \to \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$$

Ist (w_α) eine Basis von $\mathrm{T}_1 G$, so wird unsere Abbildung gegeben durch die Vorschrift $\sum_\alpha f_\alpha \otimes w_\alpha \mapsto D$ mit $D_z = \sum_\alpha f_\alpha(z)(\mathrm{d}_1(z\cdot) w_\alpha)$. Gegeben eine Derivation $D \in \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(G)$ werden andererseits Funktionen $f_\alpha : G \to k$ durch diese Gleichungen festgelegt, und wir haben gewonnen, wenn wir zeigen können, daß diese Funktionen f_α regulär sind. Für alle $h \in \mathcal{O}(G)$ und $z \in G$ haben wir aber

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_\alpha f_\alpha(z) w_\alpha(h) &= (\mathrm{d}_z(z^{-1}\cdot) D_z)(h) \\
&= D_z(\acute{z}^{-1} h) \\
&= \delta_z D(\acute{z}^{-1} h) \\
&= \delta_z D(\textstyle\sum_i h_i(z) g_i) \\
&= \textstyle\sum_i h_i(z)(D g_i)(z)
\end{aligned}$$

für $\Delta(h) = \sum_i h_i \otimes g_i$. Nun finden wir sicher reguläre Funktionen $h_\beta \in \mathcal{O}(G)$ mit $w_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Setzen wir dann oben $h = h_\beta$ ein, so folgt, daß f_β regulär gewesen sein muß. $\square$

Definition 3.2.9. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Vektorfelder A auf X und B auf Y heißen **φ-verwandt** und wir schreiben $\varphi : A \rightsquigarrow B$, wenn für alle $x \in X$ gilt

$$\mathrm{d}_x\varphi : A_x \mapsto B_{\varphi(x)}$$

Proposition 3.2.10 (Verwandtschaft und Lieklammer). *Verwandte Vektorfelder haben verwandte Lie-Klammern. Ist genauer $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten und sind A, A' algebraische Vektorfelder auf X und B, B' algebraische Vektorfelder auf Y und gilt $\varphi : A \rightsquigarrow B$ und $\varphi : A' \rightsquigarrow B'$, so folgt $\varphi : [A, A'] \rightsquigarrow [B, B']$.*

3.2.11. Die Affinität unserer Varietäten ist hier nur insoweit erheblich, als wir algebraische Vektorfelder auf beliebigen Varietäten erst in 3.7.26 einführen.

Beweis. Genau dann gilt $\varphi : A \rightsquigarrow B$, wenn für beliebige reguläre Funktionen $f \in \mathcal{O}(X)$ und $g \in \mathcal{O}(Y)$ mit $\varphi : f \rightsquigarrow g$ alias $f = g \circ \varphi$ gilt $Af \rightsquigarrow Bg$ alias $A(g \circ \varphi) = (Bg) \circ \varphi$. In noch anderen Worten bedeutet das das Kommutieren des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\circ\varphi"'] & \mathcal{O}(Y) \arrow[d, "\circ\varphi"] \\ \mathcal{O}(X) \arrow[r, "A"] & \mathcal{O}(X) \end{tikzcd}$$

Daraus folgt unsere Behauptung unmittelbar. □

Satz 3.2.12 (Differential eines Gruppenhomomorphismus). *Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von affinen algebraischen Gruppen induziert sein Differential beim neutralen Element $\mathrm{d}_1\varphi : \mathrm{T}_1 G \to \mathrm{T}_1 H$ einen Homomorphismus von Lie-Algebren*

$$\mathrm{d}\varphi : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} H$$

Beweis. Linksinvariante Vektorfelder v auf G und w auf H mit $\mathrm{d}_1\varphi : v_1 \mapsto w_1$ sind offensichtlich φ-verwandt, in Formeln $\varphi : v \rightsquigarrow w$. Damit folgt die Behauptung aus unserer Erkenntnis 3.2.10, daß verwandte Vektorfelder verwandte Lieklammern haben. □

3.2.13 (**Differenzieren algebraischer Darstellungen**). Gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung (ρ, V) einer affinen algebraischen Gruppe G und $X \in \operatorname{Lie} G$ und $v \in V$ setzen wir

$$Xv := \overline{(\mathrm{d}\rho)(X)}(v)$$

für $\mathrm{d}\rho : \operatorname{Lie} G \to \mathrm{T}_1 \operatorname{GL}(V)$ das Differential an ρ und $Y \mapsto \bar{Y}$ den kanonischen Isomorphismus $\mathrm{T}_1 \operatorname{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$. Da das Auswerten an einem festen Vektor

$v \in V$ linear und damit sein eigenes Differential ist, gilt auch $Xv = \overline{(\mathrm{d}_1(\cdot v))(X)}$ für $(\cdot v) : G \to V$, $g \to gv$ den Morphismus des Anwendens auf $v \in V$ und $w \mapsto \bar{w}$ den kanonischen Isomorphismus $\mathrm{T}_v V \xrightarrow{\sim} V$.

Vorschau 3.2.14. Erst Satz 3.4.1 wird zeigen, daß für jede algebraische Darstellung (V, ρ) einer affinen algebraischen Gruppe G das Differential ein Homomorphismus von Liealgebren $\overline{\mathrm{d}\rho} : \mathrm{Lie}\, G \to \mathfrak{gl}(V)$ ist, so daß in Formeln ausgedrückt gilt $X(Yv) - Y(Xv) = [X, Y]v$ für alle $v \in V$ und $X, Y \in \mathrm{Lie}\, G$.

Beispiel 3.2.15. Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V, aufgefaßt als Darstellung (V, ρ) von $G = \mathrm{GL}(V)$ vermittels $\rho = \mathrm{id}$, ist unser $\overline{\mathrm{d}\rho}$ schlicht die kanonische Identifikation $\mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, V$.

Übungen

Übung 3.2.16. $(k = \bar{k})$. Gegeben endlichdimensionale k-Vektorräume V, W und eine bilineare Abbildung $\varphi : V \times V \to W$ betrachten wir die algebraische Gruppe $\mathrm{O}(\varphi) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi(gv, gw) = \varphi(v, w) \quad \forall v, w \in V\}$. Man zeige, daß die offensichtliche Abbildung eine Inklusion

$$\mathrm{Lie}\, \mathrm{O}(\varphi) \hookrightarrow \{X \in \mathrm{End}\, V \mid \varphi(Xv, w) + \varphi(v, Xw) = 0 \quad \forall v, w \in V\}$$

induziert. In vielen Fällen werden wir zeigen können, daß diese Inklusion sogar ein Isomorphismus ist. Daß das nicht immer gilt, zeigt der Fall $\varphi : k \times k \to k$ der Multiplikation in Charakteristik Zwei.

Übung 3.2.17. $(k = \bar{k})$. Gegeben eine endlichdimensionale k-Algebra A zeige man für die Liealgebra ihrer Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}\, A \subset \mathrm{GL}(A)$, daß unter den üblichen Identifikationen gilt $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}\, A) \subset \mathrm{Der}_k(A)$.

Übung 3.2.18. Gegeben ein Homomorphismus $c : V \to W$ von Darstellungen einer affinen algebraischen Gruppe G zeige man $c(Xv) = Xc(v)$ für alle $X \in \mathrm{Lie}\, G$ und $v \in V$.

Übung 3.2.19. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ und $X \in \mathrm{Lie}\, G$ zeige man

$$\grave{X} f = \overline{(\mathrm{d}\rho)(X)}(f)$$

wo die linke Seite als das Anwenden einer linksinvarianten Derivation auf eine Funktion zu verstehen ist und die rechte als Differential einer die Funktion f enthaltenden endlichdimensionalen Unterdarstellung der rechtsregulären Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{O}(G))$, $g \mapsto \grave{g}$ mit $\grave{g}$ gegeben durch $(\grave{g} f)(x) := f(xg)$.

Übung 3.2.20. Gegeben eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ zeige man, daß die Abbildung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ gegeben durch $\mathrm{ad} : X \mapsto [X, \ ]$ ein Homomorphismus von Liealgebren ist, der in den Derivationen unserer Liealgebra landet.

3.3 Restringierte Lie-Algebren*

3.3.1. In diesem Abschnitt werden grundlegende Kenntnisse über die universelle Einhüllende Algebra einer Liealgebra im Umfang von [**?**] **??** vorausgesetzt.

Definition 3.3.2. Sei k ein Körper positiver Charakteristik $p > 0$. Eine **restringierte k-Liealgebra** ist ein Paar bestehend aus einer k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einer Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $X \mapsto X^{[p]}$ derart, daß die drei folgenden Bedingungen gelten:

1. Die Abbildung $\xi : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $X \mapsto X^p - X^{[p]}$ von der Liealgebra in ihre universelle Einhüllende ist ein Homomorphismus von additiven Gruppen;
2. Für alle $\alpha \in k$ und $X \in \mathfrak{g}$ gilt $(\alpha X)^{[p]} = \alpha^p X^{[p]}$;
3. Für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt $\mathrm{ad}(X^{[p]}) = (\mathrm{ad}\, X)^p$.

3.3.3. Es gilt in obiger Definition sorgfältig zu unterscheiden zwischen der p-ten Potenz X^p in der einhüllenden Algebra, der p-ten Potenz $(\mathrm{ad} X)^p$ im Endomorphismenring $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ des Vektorraums $\mathfrak{g}$, und der formalen p-ten Potenz $X^{[p]} \in \mathfrak{g}$. Offensichtlich ist jede Unteralgebra einer restringierten k-Liealgebra, die stabil ist unter $X \mapsto X^{[p]}$, auch ihrerseits eine restringierte k-Liealgebra.

Proposition 3.3.4 ($\mathfrak{gl}(V)$ **als restringierte Liealgebra).** *Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k der Charakteristik $\mathrm{char}\, k = p > 0$ ist $\mathfrak{gl}(V)$ mit $X^{[p]} := X^{(\circ p)}$ der p-ten Potenz von X im Endomorphismenring von V eine restringierte Liealgebra.*

3.3.5. Gegeben eine assoziative k-Algebra $(A, \circ)$ ist insbesondere A_{L} eine restringierte Liealgebra mit $X^{[p]} := X^{(\circ p)}$. Gegeben eine beliebige k-Algebra $(A, \circ)$ ist weiter $\mathrm{Der}_k A$ eine restringierte Liealgebra mit $\partial^{[p]} := \partial^{(\circ p)}$. Speziell wird so auch die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe eine restringierte Lie-Algebra. Schließlich ist für einen endlichdimensionalen Vektorraum V auch $\mathfrak{sl}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$ stabil unter $X \mapsto X^{(\circ p)}$, was man durch Übergang zu einem größeren Körper und Trigonalisierung leicht einsieht, und wird damit auch eine restringierte Lie-Algebra.

Beweis. Die zweite Bedingung aus der Definition ist offensichtlich erfüllt. Wir zeigen als nächstes die letzte Bedingung. In der Hoffnung, dadurch dem Verständnis zu helfen, notieren wir $\circ$ die Multiplikation in $\mathrm{End}(V)$ und verstehen ad stets in Bezug auf die auf $\mathfrak{g} := \mathrm{End}(V)$ induzierte Struktur einer Liealgebra. Dahingegen notieren wir die Multiplikation in $\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ ohne ein spezielles Multiplikationssymbol. Damit finden wir für $X, Y \in \mathrm{End}(V)$ im Ring $\mathrm{End}(V)$ die Identität

$$(\mathrm{ad}(X^{[p]}))(Y) = X^{(\circ p)} \circ Y - Y \circ X^{(\circ p)} = ((X\circ) - (\circ X))^p(Y) = (\mathrm{ad}\, X)^p(Y)$$

Jetzt zeigen wir noch die Additivität $\xi(A + B) = \xi(A) + \xi(B)$ von ξ. Es gilt in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ zu zeigen

$$(A + B)^p - A^p - B^p = (A + B)^{[p]} - A^{[p]} - B^{[p]}$$

Es reicht zu zeigen, daß die linke Seite im Teilraum $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ liegt, denn beide Seiten landen unter dem natürlichen Ringalgebrenhomomorphismus $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k V$ offensichtlich auf demselben Element, und die Restriktion dieses Ringalgebrenhomomorphismus auf $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ ist injektiv. Nun gilt in einer beliebigen k-Ringalgebra

$$(A + B)^p - A^p - B^p = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(A, B)$$

für gewisse universelle Polynome $s_i \in k\lfloor X, Y\rfloor$ in nichtkommutierenden Variablen, die erklärt werden können durch die Identität

$$(tX + Y)^p - (tX)^p - Y^p = \sum_{i=1}^{p-1} t^i s_i(X, Y)$$

in $k\lfloor X, Y\rfloor[t]$. Formales Ableiten nach t liefert

$$\sum_{i=1}^{p} (tX + Y)^{i-1} X (tX + Y)^{p-i} = \sum_{i=1}^{p-1} i t^{i-1} s_i(X, Y)$$

Die linke Seite kann hier umgeschrieben werden zu

$$(((tX + Y)\cdot) - (\cdot(tX + Y)))^{p-1}(X)$$

aufgrund der allgemeinen Formel $(r - s)^{p-1} = \sum_{i=1}^{p} r^{i-1} s^{p-i}$ im Polynomring $k[r, s]$, die man unschwer durch Multiplikation beider Seiten mit $(r - s)$ prüft. Das aber zeigt $(\mathrm{ad}(tX + Y))^{p-1}(X) = \sum_{i=1}^{p-1} i t^{i-1} s_i(X, Y)$. Damit sind alle $s_i(X, Y)$ Linearkombinationen von iterierten Kommutatoren. Im Fall $A, B \in \mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ gehört also in der Tat auch $(A + B)^p - A^p - B^p$ zu $\mathfrak{g} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. □

3.4 Adjungierte Darstellung

Satz 3.4.1 (Lieklammer der allgemeinen linearen Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V ist die kanonische Identifikation $\mathrm{T}_1 \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, V$, $X \mapsto \bar{X}$ ein Isomorphismus von Liealgebren*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(V)$$

für die Liealgebrenstruktur „durch den Kommutator der linksinvarianten Fortsetzungen“ aus 3.2.8 links und die Liealgebrenstruktur „durch den Kommutator“ aus 3.2.3 rechts.

Beweis. Für jede von Null verschiedene Linearform $\mu : V \to k$ liefert die sogenannte Matrixkoeffizientenabbildung eine Einbettung $c : V \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{GL}(V))$ durch $c(v) := c_{\mu,v}$ mit $c_{\mu,v}(x) := \mu(xv)$. Sie ist ein Homomorphismus von Darstellungen, wenn wir $\mathcal{O}(\mathrm{GL}(V))$ als die rechtsreguläre Darstellung von G interpretieren, in Formeln also mit $\rho(g)f = \grave{g}f$ gegeben durch $(\grave{g}f)(x) = f(xg)$. Für $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V))$ folgen aus 3.2.18 und 3.2.19 die Identitäten

$$c(\bar{X}v) = c(Xv) = Xc(v) = \grave{X}c(v)$$

alias $c\bar{X} = \grave{X}c$. Es folgt $c[\bar{X}, \bar{Y}] = [\grave{X}, \grave{Y}]c$ und für das $Z \in \mathrm{T}_e \mathrm{GL}(V)$ mit $\grave{Z} = [\grave{X}, \grave{Y}]$ gilt folglich

$$c\bar{Z} = \grave{Z}c = [\grave{X}, \grave{Y}]c = c[\bar{X}, \bar{Y}]$$

Wegen der Injektivität von c folgt schließlich $\bar{Z} = [\bar{X}, \bar{Y}]$ in $\mathfrak{gl}(V)$. □

Ergänzung 3.4.2 (**Bahnen in einer Darstellung und ihrer Dualen**). Sei über einem Körper $k = \bar{k}$ der Charakteristik Null G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und V eine endlichdimensionale Darstellung von G. Hat G in V endlich viele Bahnen, so hat G auch in der kontragredienten Darstellung V^* nur endlich viele Bahnen, und die Zahl der Bahnen stimmt überein. Um das zu zeigen, betrachte man die Operation der Liealgebra auf V und V^* und die Varietät

$$Z = Z(V) := \{(v, \xi) \in V \times V^* \mid \langle Xv, \xi \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\}$$

Unter der üblichen Identifikation $V \times V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*V$ entspricht Z der Vereinigung der Konormalenbündel an die Bahnen von G in V. Nun ist zumindest anschaulich klar, daß Z genau dann dieselbe Dimension hat wie V, wenn G nur endlich viele Bahnen in V hat, und daß dann die Abschlüsse von deren Konormalenbündeln genau die irreduziblen Komponenten von Z sind. Offensichtlich liefert aber das Vertauschen der Komponenten unserer Paare einen Isomorphismus $Z(V) \xrightarrow{\sim} Z(V^*)$. Die Behauptung folgt.

Lemma 3.4.3 (Differential von Verknüpfung und Inversenbildung). *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Das Differential der Multiplikation ist die Addition, genauer ist die Verknüpfung*

$$\mathrm{T}_1 G \oplus \mathrm{T}_1 G \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{(1,1)}(G \times G) \xrightarrow{\mathrm{d}_1(\mathrm{mult})} \mathrm{T}_1 G$$

die Addition des Vektorraums $\mathrm{T}_1 G$. Das Differential des Invertierens ist die Multiplikation mit (-1), in Formeln

$$\mathrm{d}_1(\mathrm{inv}) = (-1) : \mathrm{T}_1 G \to \mathrm{T}_1 G$$

Beweis. Unsere Verknüpfung ist linear und ihre Restriktion auf beide Summanden ist das Differential der Identität, also die Identität. Das zeigt die erste Aussage. Die Verknüpfung $G \to G \times G \to G$ von $(\mathrm{inv}, \mathrm{id})$ mit der Multiplikation ist konstant, hat also Differential Null. Das zeigt die zweite Aussage. □

Definition 3.4.4. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Gegeben $g \in G$ betrachten wir den Homomorphismus $(\mathrm{int}\, g) : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ und setzen

$$\mathrm{Ad}\, g := \mathrm{d}_1(\mathrm{int}\, g) : \mathrm{T}_1 G \to \mathrm{T}_1 G$$

3.4.5. Auf diese Weise erhalten wir zu jeder affinen algebraischen Gruppe G eine algebraische Darstellung, die **adjungierte Darstellung**

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_1 G)$$

In der Tat wird $\mathcal{O}(G)$ mithilfe der $(\mathrm{int}\, g)$ eine algebraische Darstellung von G nach 1.5.4, darin ist $\mathcal{I}(1)/\mathcal{I}(1)^2$ ein Subquotient und mithin nach 1.5.11 ebenfalls algebraisch, und $\mathrm{T}_1 G$ ist isomorph zur Kontragradienten $(\mathcal{I}(1)/\mathcal{I}(1)^2)^*$ dieser Darstellung. Das Differential von Ad im Sinne von 3.2.13 hinwiederum notiert man

$$\mathrm{ad} := \mathrm{d}(\mathrm{Ad}) : \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{End}\, \mathrm{T}_1 G$$

Satz 3.4.6 (Lieklammer und adjungierte Darstellung). *Für jede affine algebraische Gruppe G und alle $X, Y \in \mathrm{Lie}\, G$ gilt*

$$(\mathrm{ad}\, X)(Y) = [X, Y]$$

Beweis. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ zurück, den wir dann durch explizite Rechnung erledigen. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von algebraischen Gruppen kommutiert für alle $g \in G$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{int}\, g"'] & H \arrow[d, "\mathrm{int}\, \varphi(g)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

und mithin auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_1 G \arrow[r, "\mathrm{d}_1\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}\, g"'] & \mathrm{T}_1 H \arrow[d, "\mathrm{Ad}\, \varphi(g)"] \\ \mathrm{T}_1 G \arrow[r, "\mathrm{d}_1\varphi"] & \mathrm{T}_1 H \end{tikzcd}$$

In anderen Worten ist $\mathrm{d}_1\varphi : \mathrm{T}_1 G \to \mathrm{T}_1 H$ ein Homomorphismus von algebraischen Darstellungen der Gruppe G, wenn wir $g \in G$ links als $\mathrm{Ad}(\varphi(g))$ operieren lassen. Aus $\mathrm{d}_1\varphi : X \mapsto A$ und $\mathrm{d}_1\varphi : Y \mapsto B$ folgt mit 3.2.18 also

$(\mathrm{d}_1\varphi) : (\operatorname{ad} X)(Y) \mapsto (\operatorname{ad} A)(B)$. Andererseits folgt aus 3.2.12 auch $(\mathrm{d}_1\varphi) : [X, Y] \mapsto [A, B]$. Ist speziell $\varphi : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine abgeschlossene Einbettung, so folgt der Satz für G, sobald wir ihn für $\mathrm{GL}(V)$ zeigen können. Sei also V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $G = \mathrm{GL}(V) \overset{\circ}{\subset} \operatorname{End} V$. Mithilfe von 3.1.26 erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{T}_1 G \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$$

Er wird selten überhaupt notiert, aber hier notieren wir ihn ausnahmsweise durch $X \mapsto \bar{X}$. Ich behaupte, daß unter diesem Isomorphismus unser $\operatorname{ad} : \mathrm{T}_1 G \to \operatorname{End} \mathrm{T}_1 G$ der Abbildung $\operatorname{End} V \to \operatorname{End}(\operatorname{End} V)$, $A \mapsto [A, \ ]$ entspricht, mit $[A, B] = AB - BA$ dem üblichen Kommutator im Endomorphismenring $\operatorname{End} V$. Für $g \in G$ ist $(\operatorname{int} g)$ die Restriktion einer linearen Abbildung auf $\operatorname{End} V$ und wir erhalten somit für alle $g \in G$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_1 G \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{d}_1(\operatorname{int} g) = \operatorname{Ad} g"'] & \operatorname{End} V \arrow[d] & \ni A \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{T}_1 G \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{End} V & \ni gAg^{-1}
\end{tikzcd}$$

Wir notieren die rechte Vertikale meist auch $\operatorname{Ad} g : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$, $A \mapsto gAg^{-1}$ und erhalten so $\operatorname{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\operatorname{End} V)$. Um hinwiederum das Differential dieser Abbildung zu berechnen, schreiben wir sie als Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc}
G & \to & G \times G & \to & \mathrm{GL}(\operatorname{End} V) \\
g & \mapsto & (g, g^{-1}) & & \\
 & & (x, y) & \mapsto & (A \mapsto xAy)
\end{array}$$

und bilden die zugehörigen Tangentialräume und Differentiale beim neutralen Element und seinen Bildern. Das liefert die obere Horizontale im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_1 G \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{T}_{(1,1)}(G \times G) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\wr"] & \mathrm{T}_1 \mathrm{GL}(\operatorname{End} V) \arrow[d, "\wr"] \\
 & \mathrm{T}_1 G \oplus \mathrm{T}_1 G \arrow[u, shift left] \arrow[r, dashed] & \operatorname{End}(\operatorname{End} V)
\end{tikzcd}$$

Wir interessieren uns für die als Strichpfeile eingezeichneten Verknüpfungen. Der schräge Strichelpfeil wird nach 3.4.3 gegeben durch $X \mapsto (X, -X)$. Der waagerechte Strichelpfeil bildet offensichtlich $(X, 0)$ auf $(\bar{X} \cdot)$ ab und $(0, Y)$ auf $(\cdot \bar{Y})$. Zusammen geht also X auf $[\bar{X}, \ ]$. □

Satz 3.4.7 (Jordan-Zerlegung in der Lie-Algebra). *1. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Jedes Element $X \in \operatorname{Lie} G$ besitzt genau eine Zerlegung $X = X_s + X_n$ mit $\grave{X}_s \in \operatorname{End}_k \mathcal{O}(G)$ diagonalisierbar, $\grave{X}_n \in \operatorname{End}_k \mathcal{O}(G)$ lokal nilpotent und $[X_s, X_n] = 0$;*

2. *Ist $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen, so gilt $\mathrm{d}\varphi(X_s) = (\mathrm{d}\varphi(X))_s$ und $\mathrm{d}\varphi(X_n) = (\mathrm{d}\varphi(X))_n$;*

3. *Für die allgemeine lineare Gruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ entspricht unter dem kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, V$ die absolute Jordan-Zerlegung der konkreten Jordan-Zerlegung.*

Beweis. Wir stützen uns auf das anschließende Lemma 3.4.8. Ist speziell $A = \mathcal{O}(G)$ und $X \in \mathrm{Lie}\, G$ eine linksinvariante Derivation, so wirkt X lokal endlich nach 3.2.19 und wir erhalten unmittelbar die gewünschte Zerlegung in $\mathrm{Der}_k\, \mathcal{O}(G)$. Des weiteren sind wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung auch X_s und X_n und Teil 1 ist bewiesen. Teil 2 folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(H) \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{d}\varphi)(X)"'] & \mathcal{O}(G) \arrow[d, "X"] \\ \mathcal{O}(H) \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \end{tikzcd}$$

mit der Funktorialität der Jordan-Zerlegung. Man muß nur beachten, dass dies Diagramm bereits $(\mathrm{d}\varphi)(X)$ als linksinvariantes Vektorfeld eindeutig festlegt. Teil 3 zeigt man analog wie die analoge Aussage zur Jordan-Zerlegung in affinen algebraischen Gruppen in 1.4.5 $\square$

Lemma 3.4.8 (Jordan-Zerlegung von Derivationen). *Seien k ein Körper und $(A, *)$ eine k-Algebra und $\partial : A \to A$ eine lokal endliche Derivation und $A_\lambda := \mathrm{Hau}(\partial; \lambda)$ der Hauptraum von ∂ zum Eigenwert λ. So gilt*

$$A_\lambda * A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$$

Ist zusätzlich A die Summe seiner Haupträume, so sind auch der halbeinfache und der nilpotente Anteil ∂_s und ∂_n von ∂ Derivationen von A.

3.4.9. Ich erinnere an unsere Konvention, nach der Algebren nicht assoziativ zu sein brauchen.

Beweis. In der Tat gilt für $\lambda, \mu \in k$ und $a, b \in A$ sicher

$$(\partial - (\lambda + \mu))(a * b) = ((\partial - \lambda)a) * b + a * ((\partial - \mu)b)$$

Induktiv erhalten wir mühelos

$$(\partial - (\lambda + \mu))^n (a * b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\partial - \lambda)^i (a) * (\partial - \mu)^{n-i}(b)$$

Aus $a \in A_\lambda$ und $b \in A_\mu$ folgt damit $a * b \in A_{\lambda+\mu}$. Insbesondere erhalten wir so $\partial_\mathrm{s}(a * b) = (\partial_\mathrm{s} a) * b + a * (\partial_\mathrm{s} b)$ und ∂_s ist auch eine Derivation. Dasselbe folgt für $\partial_\mathrm{n} = \partial - \partial_\mathrm{s}$. $\square$

Übungen

Übung 3.4.10. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und ein Element $g \in G$ betrachte man den Morphismus $\beta : G \to G, h \mapsto hgh^{-1}g^{-1}$ und zeige die Formel $(\mathrm{d}_e\beta)(Y) = Y - (\mathrm{Ad}\, g)(Y)\ \forall Y \in \mathrm{Lie}\, G$.

Übung 3.4.11. Gegeben algebraische Darstellungen V, W einer affinen algebraischen Gruppe ist auch $V \otimes W$ eine algebraische Darstellung mit der Gruppenwirkung $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$. Das Differential dieser Darstellung wird beschrieben durch die Formel

$$X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw \quad \forall X \in \mathrm{Lie}\, G, v \in V, w \in W$$

Übung 3.4.12. Gegeben eine algebraische Darstellungen V einer affinen algebraischen Gruppe ist auch die äußere Algebra $\bigwedge V$ mit der offensichtlichen Gruppenwirkung eine algebraische Darstellung. Das Differential dieser Darstellung wird beschrieben durch die Formel

$$X(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} v_1 \wedge \ldots \wedge Xv_i \wedge \ldots \wedge v_r$$

Ergänzende Übung 3.4.13. Die Lie-Algebra eines Nomalteilers einer affinen algebraischen Gruppe ist ein Ideal in der Lie-Algebra der ursprünglichen Gruppe.

Übung 3.4.14. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Man zeige, daß die Fortsetzung eines Elements der Liealgebra durch ein linksinvariantes Vektorfeld als diagonalisierbare beziehungsweise nilpotente Derivation operiert genau dann, wenn seine Fortsetzung durch ein rechtsinvariantes Vektorfeld diese Eigenschaft hat.

3.5 Unipotente Gruppen und ihre Liealgebren*

Übung 3.5.1 (**Exponentialabbildung bei algebraischen Gruppen**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null und $X \in \mathrm{Lie}\, G$ nilpotent ist $\exp(\grave{X})$ als Exponential einer nilpotenten Derivation nach [?] **??** ein Ringalgebrenautomorphismus von $\mathcal{O}(G)$. Mit $\grave{X}$ muß natürlich auch $\exp(\grave{X})$ mit allen Linksverschiebungen $\acute{z}$ für $z \in G$ vertauschen. Wie beim Beweis von 1.4.5 diskutiert, muß dieser Automorphismus $\exp(\grave{X})$ also die Rechtsverschiebung $\grave{g}$ mit einem wohlbestimmten Element $g \in G$ sein. Wir vereinbaren für dieses Element die Notation

$$g := \exp X$$

Man zeige, daß im Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ unser $\exp X$ berechnet werden kann als $\exp(\bar{X})$ für $X \mapsto \bar{X}$ die kanonische Identifikation $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, V$ und

$\exp(\bar{X})$ gegeben durch die übliche Exponentialreihe. Man zeige weiter, daß für jeden Homomorphismus $\varphi : G \to H$ von affinen algebraischen Gruppen gilt

$$\varphi(\exp X) = \exp(\mathrm{d}\varphi(X))$$

Satz 3.5.2 (Unipotente Gruppen in Charakteristik Null). *Gegeben eine unipotente affine algebraische Gruppe U über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null induziert die Exponentialabbildung einen Isomorphismus von algebraischen Varietäten*

$$\exp : \mathrm{Lie}\, U \ \stackrel{\sim}{\to}\ U$$

3.5.3. Ist insbesondere $\dim_k V < \infty$ und $U \subset \mathrm{GL}(V)$ eine unipotente Untergruppe und $W \subset V$ stabil unter $\mathrm{Lie}\, U$, so ist W auch stabil unter U.

Beweis. Gegeben ein Körper k der Charakteristik Null liefern die Exponentialreihe und die Reihenentwicklung von $\log(1+x)$ zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\} \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

zwischen der Menge der echten oberen Dreiecksmatrizen und der Menge der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, jeweils mit Einträgen in k. Gilt zusätzlich $k = \bar{k}$ und ist U eine abgeschlossene Untergruppe rechts und $\mathrm{Lie}\, U$ ihre Liealgebra links, so folgt zunächst $\exp(\mathrm{Lie}\, U) \subset U$ mit 3.5.1 und dann $\exp(\mathrm{Lie}\, U) = U$ durch Dimensionsvergleich. □

Satz 3.5.4 (Unipotente Gruppen und ihre Liealgebren). *Gegeben k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null ist das Bilden der Lie-Algebra eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{unipotente affine algebraische} \\ \textit{Gruppen über k} \end{array} \right\} \stackrel{\approx}{\to} \left\{ \begin{array}{c} \textit{endlichdimensionale nilpotente} \\ \textit{Liealgebren über k} \end{array} \right\}$$

Beweis. Daß dieser Funktor Isomorphismen zwischen den beteiligten Morphismenräumen induziert, folgt bereits aus 3.5.2 und 3.5.1. Es bleibt zu zeigen, daß auch jede nilpotente Liealgebra isomorph ist zur Liealgebra einer unipotenten algebraischen Gruppe. Um das zu zeigen, verwenden wir zunächst die Erkenntnis 3.5.7, nach der jede nilpotente Liealgebra isomorph ist zu einer Unteralgebra $\mathfrak{n}$ einer Liealgebra von echten oberen Dreiecksmatrizen. Wenn wir dann noch zeigen können, daß $\exp \mathfrak{n}$ eine Untergruppe der Gruppe aller unipotenten oberen Dreiecksmatrizen ist, so haben wir gewonnen. Das zeigen wir durch Induktion über die

Dimension. Der nulldimensionale Fall ist klar. Sonst wähle man ein Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$ der Kodimension Eins und ein Element $x \in \mathfrak{n} \backslash \mathfrak{m}$. Die Rechtsmultiplikation mit x kommutiert mit der Linksmultiplikation, und wir erhalten so für jede nilpotente Matrix x und jede Matrix y die Identität

$$\exp(x)y\exp(x)^{-1} = \exp((x\cdot) - (\cdot x))(y) = (\exp(\operatorname{ad} x))(y)$$

Nun ist aber $\operatorname{ad} x$ eine nilpotente Derivation der Matrixalgebra und folglich muß $(\exp(\operatorname{ad} x))$ ein Automorphismus der Matrixalgebra sein. Für z eine weitere nilpotente Matrix ergibt sich damit

$$\exp(x)\exp(z)\exp(x)^{-1} = (\exp(\operatorname{ad} x))(\exp(z)) = \exp(\exp(\operatorname{ad} x)(z))$$

Folglich normalisiert die Untergruppe $\exp(kx)$ die Untergruppe $\exp \mathfrak{m}$ und damit ist das Produkt $(\exp \mathfrak{m})(\exp kx)$ selbst eine Untergruppe. Dasselbe gilt für ihren Abschluß, in dem unser Produkt als Bahn einer Wirkung von $(\exp \mathfrak{m}) \times (\exp kx)$ zumindest eine offene Teilmenge sein muß. Die Liealgebra dieses Abschlusses umfaßt nun aber offensichtlich unser $\mathfrak{n}$ und fällt dann aus Dimensionsgründen sogar damit zusammen. □

3.5.5 (**Alternativen beim Beweis**). Aus 2.3.7 folgt, daß $(\exp \mathfrak{m})(\exp kx)$ als Bahn einer unipotenten Gruppe in einer affinen Varietät bereits selbst abgeschlossen sein muß. Aus der Variante [**?**] **??** der Hausdorff-Formel kann man auch direkt folgern, daß $\exp(\mathfrak{n})$ eine Untergruppe der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen sein muß.

Lemma 3.5.6. *Gegeben eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ einer Liealgebra in die direkte Summe eine Ideals $\mathfrak{a}$ und einer Unteralgebra $\mathfrak{b}$ wird $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$ eine Darstellung ρ von $\mathfrak{g}$, indem wir für $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{U}(\mathfrak{b})$ setzen*

$$\begin{array}{rcll} \rho(a)(u) & = & au & \forall a \in \mathfrak{a} \\ \rho(b)(u) & = & bu - ub & \forall b \in \mathfrak{b} \end{array}$$

Beweis. Die Identität $[\rho(a), \rho(b)] = \rho([a, b])$ ist klar für $a, b \in \mathfrak{a}$ und für $a, b \in \mathfrak{b}$. Es bleibt, sie für $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ zu prüfen, also die Identität

$$a(bu - ub) - (bau - aub) = [a, b]u$$

für alle $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{a})$. Das aber ist offensichtlich. □

Proposition 3.5.7. *Jede endlichdimensionale nilpotente Liealgebra ist isomorph zu einer Unteralgebra einer Liealgebra von echten oberen Dreiecksmatrizen.*

Beweis. Ist unsere Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ abelsch, so ist das offensichtlich. Sonst gibt es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ der Kodimension Eins, das das Zentrum von $\mathfrak{n}$ umfaßt. Mit Induktion finden wir einen endlichdimensionalen Vektorraum V und einen injektiven Liealgebrenhomomorphismus $\rho : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, dessen Bild aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. Sei $\rho : \mathrm{U}(\mathfrak{a}) \to \operatorname{End} V$ der induzierte Ringalgebrenhomomorphismus und $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ sein Kern. Wählen wir eine Gerade $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ und machen $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{n}$ wie in 3.5.6, so ist das zweiseitige Ideal $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ eine Unterdarstellung und auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/I$ operiert $\mathfrak{b}$ nilpotent, da es bereits auf $\mathfrak{a}$ nilpotent operiert, und $\mathfrak{a}$ operiert nilpotent, da es bereits auf V nilpotent operiert. Nach 3.5.8 operiert dann ganz $\mathfrak{n}$ nilpotent auf $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/I$ und das Zentrum von $\mathfrak{n}$, ja ganz $\mathfrak{a}$ operiert treu. Die Summe von $\mathrm{U}(\mathfrak{a})/I$ mit der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{n}$ ist also eine treue Darstellung von $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums. □

Übungen

Übung 3.5.8. Sei $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ eine Zerlegung einer Liealgebra in ein Ideal $\mathfrak{a}$ und ein Vektorraumkomplement $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$. Operieren auf einer endlichdimensionalen Darstellung (V, ρ) von $\mathfrak{n}$ sowohl $\mathfrak{a}$ als auch $\mathfrak{b}$ durch nilpotente Endomorphismen, so operiert ganz $\mathfrak{n}$ durch nilpotente Endomorphismen. Hinweis: Man betrachte die zu Null absteigende Filtrierung von V durch die Teilräume

$$\langle \rho(\mathfrak{a})^i V \rangle = \langle \rho(a_1)\rho(a_2)\ldots\rho(a_i)v \mid a_\nu \in \mathfrak{a}, v \in V \rangle$$

Übung 3.5.9. Gegeben eine affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null und $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ die Menge der nilpotenten Elemente ihrer Liealgebra induziert die Exponentialabbildung einen Isomorphismus von Varietäten

$$\exp : \mathcal{N}_{\mathfrak{g}} \stackrel{\sim}{\to} G_{\mathrm{u}}$$

des nilpotenten Kegels mit der Varietät der unipotenten Elemente von G. Hinweis: Die Injektivität folgt aus [KAG] 4.4.21.

3.6 Algebraische Distributionen*

Definition 3.6.1. $(k = \bar{k})$. Gegeben eine bepunktete algebraische Varietät (X, x) und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $\operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x) := \{\mu \in \operatorname{Hom}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) \mid \mu(\mathfrak{m}_x^{n+1}) = 0\}$ und

$$\operatorname{Dist}(X, x) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{Dist}^{\leq n}(X, x)$$

Die Elemente dieses k-Vektorraums heißen **Distributionen auf X mit Träger in x**. Jeder Morphismus $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$ von bepunkteten Varietäten induziert einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, unter dem $\mathfrak{m}_x$ in $\mathfrak{m}_y$ landet, und so Homomorphismen $\operatorname{Dist}^{\leq n}(X,x) \to \operatorname{Dist}^{\leq n}(Y,y)$ und

$$\mathrm{d}_x\varphi : \operatorname{Dist}(X,x) \to \operatorname{Dist}(Y,y)$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der bepunkteten Varietäten in die Kategorie der Vektorräume, ja sogar in die Kategorie der filtrierten Vektorräume.

Beispiel 3.6.2. Gegeben eine affine bepunktete algebraische Varietät (X,x) liefert die Einbettung nach dem Satz über überflüssiges Lokalisieren Isomorphismen $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(x)^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$. Distributionen vom Grad $\leq n$ können also auch als Linearformen auf dem linken Quotienten realisiert werden. Ist etwa $X = k$ die Gerade mit $\mathcal{O}(X) = k[T]$ und $x = 0$ der Ursprung, so bilden die Koordinatenfunktionen zur Basis der Monome T^r eine Basis des Raums der Distributionen. Wir notieren die entsprechenden Basisvektoren $\partial^{(r)}$. In Charakteristik Null können sie auch explizit als die Differentialoperatoren $(r!)^{-1}\partial^r$ gefolgt vom Auswerten beim Ursprung aufgefaßt werden.

3.6.3. Das Auswerten $\delta_x : \mathcal{O}_{X,x} \to k$ an der Stelle x nennt man in diesem Zusammenhang auch die **Dirac'sche δ-Distribution**. Sie ist eine Basis des eindimensionalen k-Vektorraums $\operatorname{Dist}^{\leq 0}(X,x)$. Der Kern des Auswertens auf der konstanten Funktion Eins ist ein Teilraum $\operatorname{Dist}^{+}(X,x) \subset \operatorname{Dist}(X,x)$, der komplementär ist zu $k\delta_x$. Die Restriktion auf $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \subset \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2$ induziert uns des weiteren einen natürlichen Isomorphismus $\operatorname{Dist}^{\leq 1}(X,x)/\operatorname{Dist}^{\leq 0}(X,x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_x X$ des entsprechenden Subquotienten mit dem Tangentialraum.

3.6.4. Der Durchschnittssatz von Krull [KAG] 3.4.13 zeigt, daß für jede bepunktete Varietät (X,x) das Auswerten eine nichtausgeartete Paarung $\operatorname{Dist}(X,x) \times \mathcal{O}_{X,x} \to k$ liefert.

Satz 3.6.5 (Distributionen auf Produkten). *Gegeben bepunktete Varietäten (X,x), (Y,y) und Distributionen $\mu \in \operatorname{Dist}(X,x)$ und $\nu \in \operatorname{Dist}(Y,y)$ gibt es genau eine Distribution $\mu \boxtimes \nu \in \operatorname{Dist}(X \times Y, (x,y))$ mit der Eigenschaft, daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} \otimes_k \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d, "\mu\otimes\nu"'] & \mathcal{O}_{X\times Y,(x,y)} \arrow[d, "\mu\boxtimes\nu"] \\
k \otimes_k k \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & k
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Weiter liefert diese Vorschrift einen Isomorphismus

$$\operatorname{Dist}(X,x) \otimes_k \operatorname{Dist}(Y,y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Dist}(X \times Y, (x,y))$$

3.6.6. Der Isomorphismus aus dem Satz ist sogar ein Isomorphismus von filtrierten Vektorräumen, wenn wir die Filtierung auf dem Tensorprodukt wie in [KAG] 5.2.16 erklären. Auch das zeigt der folgende Beweis.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir X und Y affin annehmen. In diesem Fall liefert die offensichtliche Abbildung ja einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}(x)^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n$ und dann natürlich auch einen Isomorphismus der Dualräume. Anderseits induziert der kanonische Isomorphismus $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y)$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}(x) \otimes \mathcal{O}(Y) + \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{I}(y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)$$

mit dem Verschwindungsideal $\mathcal{I}(x, y)$ von (x, y). Dann entsprechen sich unter dem kanonischen Isomorphismus auch alle Potenzen dieser Ideale, in Formeln

$$\sum_{i+j=n} \mathcal{I}(x)^i \otimes \mathcal{I}(y)^j \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)^n$$

Das zeigt, daß gegeben Linearformen $\mu \in \mathcal{O}(X)^*$ und $\nu \in \mathcal{O}(Y)^*$ mit $\mu(\mathcal{I}(x)^i) = 0$ und $\nu(\mathcal{I}(y)^j) = 0$ notwendig gilt $(\mu \boxtimes \nu)(\mathcal{I}(x, y)^{i+j}) = 0$. Mithin gibt es für $\mu \in \operatorname{Dist}^{\leq i}(X, x)$ und $\nu \in \operatorname{Dist}^{\leq j}(Y, y)$ genau ein $\mu \boxtimes \nu \in \operatorname{Dist}^{\leq i+j}(X \times Y, (x, y))$ mit der im Satz geforderten Eigenschaft. Schreiben wir unsere Summe um als Schnitt

$$\bigcap_{i+j=n} \mathcal{I}(x)^i \otimes \mathcal{O}(Y) + \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{I}(y)^j \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(x, y)^n$$

so erkennen wir mit [LA2] 7.1.10, daß diese Abbildung eine Surjektion

$$\sum_{i+j=n} \operatorname{Dist}^{\leq i}(X, x) \otimes \operatorname{Dist}^{\leq j}(Y, y) \twoheadrightarrow \operatorname{Dist}^{\leq n}(X \times Y, (x, y))$$

induziert. Die Injektivität von $\operatorname{Dist}(X, x) \otimes \operatorname{Dist}(Y, y) \to \operatorname{Dist}(X \times Y, (x, y))$ ist eh klar nach [LA2] 6.1.21. □

3.6.7 (**Distributionen als Kokringalgebra**). Gegeben eine bepunktete algebraische Varietät (X, x) betrachten wir die diagonale Einbettung $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$ und die Verknüpfung

$$\operatorname{Dist}(X, x) \xrightarrow{\mathrm{d}_x\Delta} \operatorname{Dist}(X \times X, (x, x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Dist}(X, x) \otimes \operatorname{Dist}(X, x)$$

Diese Verknüpfung μ ist offensichtlich koassoziativ und kokommutativ und macht so $\operatorname{Dist}(X, x)$ zu einer Koalgebra, ja zu einer Kokringalgebra im Sinne von 1.2.12 mit dem Auswerten $\mu \mapsto \mu(1)$ auf der konstanten Funktion $1 \in \mathcal{O}_{X,x}$ als Koeinheit.

3.6.8 (**Distributionen auf einer Gruppe als Hopfalgebra**). Ist G eine algebraische Gruppe, so induziert das Gruppengesetz $G \times G \to G$ eine bilineare Abbildung

$$\operatorname{Dist}(G, e) \otimes \operatorname{Dist}(G, e) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Dist}(G \times G, (e, e)) \to \operatorname{Dist}(G, e)$$

und man sieht leicht, daß $\operatorname{Dist}(G, e)$ so eine k-Ringalgebra wird mit dem Auswerten an e als Einselement, ja eine kokommutative Hopfalgebra mit der zuvor erklärten Kokringalgebrenstruktur.

3.6.9 (**Distributionsalgebra eines Vektorraums**). Im Spezialfall der additiven Gruppe V eines endlichdimensionalen Vektorraums liefert die Einbettung $V^* \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ einen Isomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{S}(V^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)$$

Indem wir jedem Vektor die zugehörige Richtungsableitung im Ursprung zuordnen, erhalten wir auch einen natürlichen Homomorphismus von Ringalgebren

$$\mathrm{S}(V) \to \operatorname{Dist}(V, 0)$$

Im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist auch letztere Abbildung ein Isomorphismus von Ringalgebren. In jedem Fall induziert die durch das Auswerten gegebene Paarung

$$\operatorname{Dist}(V, 0) \times \mathcal{O}(V) \to k$$

eine Paarung $\mathrm{S}(V) \otimes \mathrm{S}(V^*) \to k$. Ist $T_1, \ldots, T_n$ eine Basis von V^* und $\partial_1, \ldots, \partial_n$ die duale Basis von V, so entspricht diese Paarung nach 3.6.10 dem Anwenden eines Differentialoperators auf eine polynomiale Funktion, gefolgt vom Auswerten beim neutralen Element.

Übungen

Übung 3.6.10. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Die Multiplikation von rechts mit einem Tangentialvektor auf $\operatorname{Dist}(G, e)$ kann beschrieben werden als Vorschalten des Anwendens des linksinvarianten Vektorfelds, das durch unseren Tangentialvektor bestimmt wird. Hinweis: Man erinnere den Beweis von 3.2.7.

Ergänzende Übung 3.6.11 (**Zusammenhang mit der Einhüllenden**). Sei G eine affine algebraische Gruppe und $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ ihre Lie-Algebra. So induziert die Einbettung $\mathrm{T}_e G \hookrightarrow \operatorname{Dist}(G, e)$ einen Homomorphismus von Hopf-Algebren $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{Dist}(G, e)$ von der Einhüllenden der Lie-Algebra in die Distributionenalgebra, und im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist dieser Homomorphismus ein Isomorphismus. Insbesondere liefert das Auswerten im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null unter der zusätzlichen Annahme G zusammenhängend eine nichtausgeartete Paarung

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{O}(G) \to k$$

Die davon induzierte Einbettung $\mathcal{O}(G) \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})^*$ in den Dualraum der Einhüllenden hat als Bild genau diejenigen Linearformen, die unter der Kontragredienten der Operation durch Linksmultiplikation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ eine endlichdimensionale zu einer Darstellung von G integrable $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung erzeugen.

3.7 Differentiale und Kotangentialräume

Definition 3.7.1. Seien k ein Kring, A ein k-Kring, $A \otimes_k A \to A$ die Multiplikation und I ihr Kern. Wir setzen

$$\Omega_{A/k} := I/\langle I^2 \rangle$$

und nennen diesen Raum den **Modul der Differentiale von** A **über** k. Er ist in natürlicher Weise ein Modul über $(A \otimes_k A)/I$ und wird vermittels des durch die Multiplikation gegebenen Isomorphismus $(A \otimes_k A)/I \xrightarrow{\sim} A$ ein A-Modul. Manchmal spricht man auch ausführlicher vom **Modul der Kähler-Differentiale**.

3.7.2. Für die beiden Ringhomomorphismen $A \to A \otimes_k A$, die gegeben werden durch $a \mapsto a \otimes 1$ und $a \mapsto 1 \otimes a$, ist die Verknüpfung mit der Multiplikation die Identität auf A.

3.7.3. Der Kern I der Multiplikation $A \otimes_k A \to A$ wird als Ideal erzeugt von den Elementen $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ mit $a \in A$. Liegt in der Tat $\sum a_i \otimes b_i$ in unserem Kern, so gilt

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i \otimes b_i - \sum 1 \otimes a_i b_i = \sum (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)(1 \otimes b_i)$$

Satz 3.7.4 (**Universelle Eigenschaft des Moduls der Differentiale**)**.** *Seien k ein Kring und A ein k-Kring. Die Abbildung $\mathrm{d} : A \to \Omega_{A/k}$ gegeben durch die Vorschrift $a \mapsto \mathrm{d}a := (a \otimes 1 - 1 \otimes a) + I^2$ ist eine k-lineare Derivation im Sinne von 3.1.1 und für alle A-Moduln M liefert das Vorschalten von d einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

3.7.5. Unser Element $\mathrm{d}a \in \Omega_{A/k}$ heißt das **Differential von** a. Nach 3.7.3 wird der Modul der Differentiale als A-Modul erzeugt von den Differentialen $\mathrm{d}a$ der Elemente $a \in A$. Manchmal verfeinern wir die Notation zu $\mathrm{d}_{A/k}a$.

3.7.6 (**Derivationen und Differentiale**). Im folgenden übersetzen wir verschiedene Eigenschaften von Derivationen in die Sprache der Differentiale. In dieser Sprache sind viele Aussagen leichter zu beweisen und gelten in größerer Allgemeinheit als in der dualen Sprache der Derivationen. Die Sprache der Derivationen hinwiederum ist zumindest meiner Anschauung besser zugänglich.

Beweis. Wir prüfen unschwer für alle $a, b \in A$ die Identitäten $\mathrm{d}(ab) = ab \otimes 1 - 1 \otimes ab = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)b + a(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = b\mathrm{d}a + a\mathrm{d}b$ in $\Omega_{A/k}$. Das zeigt die erste Aussage. Zum Beweis der Zweiten konstruieren wir eine inverse Abbildung. Gegeben $D \in \mathrm{Der}_k(A, M)$ betrachten wir die Abbildung $D_1 : A \otimes_k A \to M$, $a \otimes b \mapsto -aD(b)$. Sicher annulliert D_1 alle Produkte $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = ab \otimes 1 + 1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a$ und liefert nach 3.7.3 folglich eine Abbildung $D_1 : \Omega_{A/k} \to M$. Diese Abbildung D_1 muß A-linear sein, weil das bereits für $D_1 : A \otimes_k A \to M$ gilt in Bezug auf die A-Operation auf $A \otimes_k A$ vermittels der Multiplikation auf den ersten Faktor. $\square$

Beispiel 3.7.7 (**Differentiale von Polynomringen**). Gegeben ein Kring k ist der Modul der Differentiale $\Omega_{k[T_1,\ldots,T_n]/k}$ ein freier $k[T_1, \ldots, T_n]$-Modul mit Basis $\mathrm{d}T_1, \ldots, \mathrm{d}T_n$. In der Tat folgt das mit der universellen Eigenschaft leicht aus der Beschreibung der k-linearen Derivationen des Polynomrings in 3.1.3. Gegeben ein Polynom P haben wir dann

$$\mathrm{d}P = \frac{\partial P}{\partial T_1}\mathrm{d}T_1 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial T_n}\mathrm{d}T_n$$

Analog bilden auch für einen Polynomring in einer beliebigen Menge von Variablen die Differentiale der Variablen eine Basis des Moduls der Differentiale.

3.7.8 (**Differentiale als Kovektorfelder**). $(k = \bar{k})$. Sei X eine k-Varietät. Ein **Kovektorfeld** ω **auf** X ist eine Vorschrift, die jedem Punkt $x \in X$ ein Element $\omega_x \in \mathrm{T}^*_x X$ des Kotangentialraums $\mathrm{T}^*_x X := \mathrm{Hom}_k(\mathrm{T}_x X, k)$ bei x zuordnet. Ist X eine affine Varietät und $A := \mathcal{O}(X)$ der Ring ihrer regulären Funkionen, so liefert jedes Differential $\omega \in \Omega_{A/k}$ ein Kovektorfeld auf X mithilfe der ersten drei Identifikationen der Sequenz

$$\mathrm{T}_x X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, k_x) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k_x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(k_x \otimes_A \Omega_{A/k}, k_x)$$

Durch das Verknüpfen mit dem letzten Isomorphismus und Dualisieren erhalten wir sogar einen natürlichen Isomorphismus

$$k_x \otimes_A \Omega_{A/k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*_x X$$

Mit seiner Hilfe können wir das zu ω gehörige Kovektorfeld in der Weise beschreiben, daß ω_x jeweils das Bild von $1 \otimes \omega$ sein soll. Sie mögen zur Übung zeigen, daß wir auf diese Weise sogar eine Injektion vom Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$ in die Menge der Kovektorfelder auf X erhalten. Die Kovektorfelder im Bild dieser Injektion nennen wir die **algebraischen Kovektorfelder auf** X. Ist X eine affine k-Varietät, so verwenden wir auch gerne die abkürzende Notation

$$\Omega(X) = \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

für den $\mathcal{O}(X)$-Modul der algebraischen Kovektorfelder auf X.

Ergänzung 3.7.9. Gegeben eine affine Varietät X mit $A := \mathcal{O}(X)$ und ein Punkt $x \in X$ muß die offensichtliche Abbildung $\operatorname{Der}_k(A, A) \otimes_A k_x \to \operatorname{Der}_k(A, k_x)$ alias $\mathcal{T}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} k_x \to \mathrm{T}_x X$ keineswegs ein Isomorphismus sein. In diesem Sinne ist also die Beziehung von algebraischen Kovektorfeldern zum Kotangentialraum sehr viel enger als die Beziehung von algebraischen Vektorfeldern zum Tangentialraum.

3.7.10 (**Anschauung für relative Differentiale**). Sei $\varphi : Y \to X$ ein Morphismus von affinen k-Varietäten und $A \to B$ eine abkürzende Notation für den zugehörigen Komorphismus $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$. Es fällt mir schwer, eine Anschauung für den Modul der Differentiale $\Omega_{B/A}$ zu geben, der in diesem Fall auch der **Modul der relativen Differentiale** heißt. Der duale Modul

$$\operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/A}, B) \cong \operatorname{Der}_A B \subset \operatorname{Der}_k B$$

kann jedoch anschaulich interpretiert werden als der Modul derjenigen algebraischen Vektorfelder auf Y, die alle von X zurückgeholten Funktionen annullieren. Oft können diese Vektorfelder auch geometrisch beschrieben werden als diejenigen Vektorfelder, die tangential sind an die Fasern von φ. Insbesondere gilt das, wenn für alle $x \in X$ die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $B \otimes_A k_x \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(\varphi^{-1}(x))$ ist. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen k-Varietäten, so verwenden wir auch gerne die abkürzenden Notationen

$$\Omega(X/Y) = \Omega(\varphi) = \Omega_{\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(Y)}$$

für den $\mathcal{O}(X)$-Modul der relativen Differentiale auf X.

3.7.11 (**Funktorialität des Moduls der Differentiale**). Jeder Homomorphismus von k-Kringen $\varphi : A \to B$ induziert einen Homomorphismus von A-Moduln $\varphi^* : \Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k}$ mit $\mathrm{d}a \mapsto \mathrm{d}(\varphi(a))$ für alle $a \in A$. Man nennt diese Operation im geometrischen Fall auch das **Zurückholen von Kovektorfeldern**. Für jeden B-Modul N kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Der}_k(B, N) & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Der}_k(A, N) & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, N)
\end{array}$$

mit der durch diesen Homomorphismus induzierten Abbildung rechts und sonst den hoffentlich offensichtlichen Abbildungen.

Ergänzung 3.7.12 (**Weitere Funktorialitäten des Moduls der Differentiale**). Gegeben Kringhomomorphismen $k' \to k \to B$ erhalten wir für jeden B-Modul N natürliche Inklusionen $\operatorname{Der}_k(B, N) \subset \operatorname{Der}_{k'}(B, N)$, die auf den diese Funktoren darstellenden B-Moduln einen surjektiven natürlichen Homomorphismus $\Omega_{B/k'} \twoheadrightarrow \Omega_{B/k}$ induzieren müssen. Man überlegt sich leicht, daß wir zusammen mit der zuvor diskutierten Funktorialität sogar einen Funktor

$$\Omega : \operatorname{Car}(\uparrow, \operatorname{Kring}) \to \operatorname{Ab}$$

von der Kategorie der Kringhomomorphismen in die Kategorie der abelschen Gruppen erhalten.

Ergänzung 3.7.13 (**Invariante Differentiale auf algebraischen Gruppen**). Gegeben eine affine algebraische Gruppe G betrachte man die Multiplikation und die Projektion auf die zweite Koordinate $\mu, \operatorname{pr}_2 : G \times G \to G$ sowie die natürliche Abbildung $\operatorname{can} : \Omega(G \times G) \to \Omega(G \times G/G \times 1)$. Ein Kovektorfeld $\omega \in \Omega(G)$ ist genau dann linksinvariant, wenn gilt

$$\operatorname{can} \mu^* \omega = \operatorname{can} \operatorname{pr}_2^* \omega$$

Lemma 3.7.14 (Differentiale und Lokalisierung). *Gegeben ein Kringhomomorphismus $k \to A$ und eine Teilmenge $S \subset A$ liefert die von $A \to S^{-1}A$ induzierte Abbildung $\Omega_{A/k} \to \Omega_{S^{-1}A/k}$ einen Isomorphismus von $(S^{-1}A)$-Moduln*

$$S^{-1}\Omega_{A/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{S^{-1}A/k}$$

Beweis. Um das zu sehen, muß man nach [LA2] 8.1.22 nur prüfen, dass die fragliche Abbildung für jeden $(S^{-1}A)$-Modul M eine Bijektion

$$\operatorname{Hom}_{s^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/k}, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/k}, M)$$

induziert. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/k}, M) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/k}, M) \\
 & \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \arrow[u, "\wr"'] \\
\operatorname{Der}_k(S^{-1}A, M) \arrow[uu, "\wr"'] \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Der}_k(A, M) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

und führen so die Behauptung auf unsere Erkenntnisse 3.1.6 über die Verträglichkeit von Derivationen mit Lokalisierungen zurück. □

Beispiel 3.7.15 (**Differentiale von Funktionenkörpern**). Gegeben ein Körper k ist $\Omega_{k(T_1,\ldots,T_n)/k}$ ein freier $k(T_1,\ldots,T_n)$-Modul mit Basis $\mathrm{d}T_1,\ldots,\mathrm{d}T_n$.

Proposition 3.7.16 (Derivationen und Lokalisierung). *Seien k ein Kring, A ein k-Kring und $S \subset A$ eine Teilmenge. Ist der A-Modul $\Omega_{A/k}$ der Differentiale endlich präsentiert, so induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus*

$$S^{-1}\operatorname{Der}_k(A,A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(S^{-1}A, S^{-1}A)$$

3.7.17. Insbesondere gilt das also, wenn k noethersch ist und A ringendlich über k, oder nach 3.7.14 auch, wenn k noethersch ist und A eine Lokalisierung einer ringendlichen k-Kringalgebra. Für ein Gegenbeispiel nehmen wir einen Körper k und betrachten $A = k[X_1, X_2, \ldots]$ und $S = \{X_1, X_2, \ldots\}$. So ist die geeignet interpretierte unendliche Summe $\sum X_i^{-1}\partial_i$ eine k-lineare Derivation von $S^{-1}A$, die nicht im Bild von $S^{-1}\operatorname{Der}_k(A,A)$ liegt.

Beweis. Gegeben k ein Kring, A ein k-Kring und $S \subset A$ eine Teilmenge betrachten wir die Komposition $\operatorname{Der}_k(A,A) \to \operatorname{Der}_k(A, S^{-1}A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(S^{-1}A, S^{-1}A)$ des Nachschaltens von $A \to S^{-1}A$ mit dem Isomorphismus aus 3.1.6. Sie induziert einen Homomorphismus

$$S^{-1}\operatorname{Der}_k(A,A) \to \operatorname{Der}_k(S^{-1}A, S^{-1}A)$$

Unter unseren Identifikationen 3.7.4 entspricht er dem natürlichen Homomorphismus

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, A) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}\Omega_{A/k}, S^{-1}A)$$

aus [KAG] 3.3.17. Er ist nach [KAG] 3.3.17 ein Isomorphismus, falls der A-Modul $\Omega_{A/k}$ endlich präsentiert ist. □

3.7.18 (**Vektorfelder und Lokalisierung**). Ist X eine affine Varietät, $A = \mathcal{O}(X)$ ihr Ring von regulären Funktionen und $S = \{f\}$ für $f \in \mathcal{O}(X)$, so entspricht die Abbildung aus 3.7.16 unter unseren Isomorphismen aus 3.1.16 der Restriktion von algebraischen Vektorfeldern $\mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X_f)$. In diesem Fall liefert also die Restriktion von algebraischen Vektorfeldern $\mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X_f)$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(X_f)$$

zwischen der Lokalisierung nach f des Raums der algebraischen Vektorfelder und dem Raum der algebraischen Vektorfelder auf dem Komplement der Nullstellenmenge von f.

Proposition 3.7.19 (Differentiale sukzessiver Kringerweiterungen). *Gegeben k ein Kring und $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von k-Kringen erhalten wir eine rechtsexakte Sequenz von B-Moduln*

$$B \otimes_A \Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k} \twoheadrightarrow \Omega_{B/A}$$

mit $1 \otimes \mathrm{d}a \mapsto \mathrm{d}(\varphi(a))$ unter dem ersten Pfeil und $\mathrm{d}a \mapsto \mathrm{d}a$ unter dem Zweiten. Ist φ surjektiv, so gilt $\Omega_{B/A} = 0$ und wir erhalten eine Verlängerung unserer Sequenz zu einer rechtsexakten Sequenz von B-Moduln

$$B \otimes_k \ker \varphi \to B \otimes_A \Omega_{A/k} \twoheadrightarrow \Omega_{B/k}$$

mit $1 \otimes a \mapsto 1 \otimes \mathrm{d}a$ als erster Abbildung.

3.7.20. Insbesondere impliziert unser Lemma 3.7.14 über die Verträglichkeit von Differentialen mit Lokalisierungen, daß für jeden Kring A und jede Teilmenge $S \subset A$ gilt $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$.

Beispiel 3.7.21 (**Differentiale im geometrischen Fall**). $(k = \bar{k})$. Ist $X \underset{\mathcal{A}}{\subset} k^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f_1, \ldots, f_r$ ein Erzeugendensystem ihres Verschwindungsideals $\mathcal{I}(X)$, so liefert die zweite Sequenz unserer Proposition 3.7.19 zusammen mit unseren Erkenntnissen 3.7.7 über die Differentiale von Polynomringen einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)\mathrm{d}T_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(X)\mathrm{d}T_n / \langle \mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_r \rangle \ \overset{\sim}{\to} \ \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

des freien $\mathcal{O}(X)$-Moduls über der Basis der $\mathrm{d}T_i$ modulo dem von den Bildern der $\mathrm{d}f_j$ erzeugten Untermodul mit dem Modul der Differentiale von $\mathcal{O}(X)$.

Beispiel 3.7.22 (**Differentiale im allgemeinen Fall**). Sind k ein beliebiger Kring und $f_1, \ldots, f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome und $A = k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ der entsprechende Quotient des Polynomrings, so liefert die zweite Sequenz unserer Proposition 3.7.19 zusammen mit unseren Erkenntnissen 3.7.7 über die Differentiale von Polynomringen einen Isomorphismus

$$A\mathrm{d}T_1 \oplus \ldots \oplus A\mathrm{d}T_n / \langle \mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_r \rangle \ \overset{\sim}{\to} \ \Omega_{A/k}$$

des freien A-Moduls über der Basis der $\mathrm{d}T_i$ modulo dem von den Bildern der $\mathrm{d}f_j$ erzeugten Untermodul mit dem Modul der Differentiale von A über k. Dasselbe gilt allgemeiner für beliebig viele Variablen und beliebig viele Relationen, wenn wir also in anderen Worten jeweils auch unendliche Familien zulassen.

Beweis. Nach 3.1.5 haben wir für jeden B-Modul M eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_A(B, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(A, M)$$

Mit 3.7.4 wird daraus eine linksexakte Sequenz

$$\operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M) \to \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M)$$

Identifizieren wir den letzten Raum dieser Sequenz mit $\operatorname{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_{A/k}, M)$ unter Zuhilfenahme der universellen Eigenschaft von Skalarerweiterungen [TS] 4.7.7, so erhalten wir daraus mit [KAG] 1.3.18 die behauptete Rechtsexaktheit der Sequenz

$$\Omega_{B/A} \twoheadleftarrow \Omega_{B/k} \leftarrow B \otimes_A \Omega_{A/k}$$

Ist $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ surjektiv, so gilt $\operatorname{Der}_A(B, M) = 0$ für jeden B-Modul M nach 3.1.5 und folglich $\Omega_{B/A} = 0$ nach der universellen Eigenschaft 3.7.4. Weiter haben wir dann wieder nach 3.1.5 für jeden B-Modul M eine linksexakte Sequenz

$$\operatorname{Der}_k(B, M) \hookrightarrow \operatorname{Der}_k(A, M) \to \operatorname{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

Wie zuvor schreiben wir sie um zu einer linksexakten Sequenz

$$\operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \to \operatorname{Hom}_k(\ker \varphi, M)$$

und mit der universellen Eigenschaft von Skalarerweiterungen [TS] 4.7.7 weiter zu einer linksexakten Sequenz

$$\operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_{A/k}, M) \to \operatorname{Hom}_B(B \otimes_k \ker \varphi, M)$$

Mit [KAG] 1.3.18 folgt wieder die Rechtsexaktheit der Sequenz

$$\Omega_{B/k} \twoheadleftarrow B \otimes_A \Omega_{A/k} \leftarrow B \otimes_k \ker \varphi \qquad \square$$

3.7.23 (**Erzeuger für Moduln von Differentialen**). Ist k ein Kring und ist der k-Kring A eine Lokalisierung des von den Elementen $a_1, \ldots, a_n$ über k erzeugten Teilrings $k[a_1, \ldots, a_n]$, so erzeugen die Differentiale $\mathrm{d}a_1, \ldots, \mathrm{d}a_n$ den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$. Das folgt unmittelbar aus der Beschreibung der Differentiale von Polynomringen 3.7.7, der Beschreibung der Differentiale von Quotienten 3.7.19 und der Verträglichkeit mit Lokalisierungen 3.7.14. Ist allgemeiner $W \subset A$ eine Teilmenge derart, daß A eine Lokalisierung von $k[{}_!W]$ ist, so erzeugen mit denselben Argumenten die $\mathrm{d}a$ mit $a \in W$ bereits den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$.

Übungen

Ergänzende Übung 3.7.24. Gegeben ein Kring k und k-Kringe A, B zeige man, daß es genau einen Isomorphismus

$$(\Omega_{A/k} \otimes_k B) \oplus (A \otimes_k \Omega_{B/k}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{(A \otimes_k B)/k}$$

gibt mit $(\mathrm{d}a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes \mathrm{d}b_2) \mapsto (1 \otimes b_1)\mathrm{d}(a_1 \otimes 1) + (a_2 \otimes 1)\mathrm{d}(1 \otimes b_2)$. Hinweis: 3.1.21.

Ergänzende Übung 3.7.25. Man zeige, daß das Bilden des Moduls der Differentiale verträglich ist mit Kolimites von k-Kringen.

Ergänzende Übung 3.7.26. Ein Vektorfeld auf einer Varietät X heißt **algebraisch** oder genauer **lokal algebraisch**, wenn seine Restriktion auf jede affine offene Teilmenge algebraisch ist im Sinne von 3.1.16, also von einer Derivation des Rings der regulären Funktionen herkommt. Man zeige, daß ein Vektorfeld auf einer Varietät genau dann lokal algebraisch ist, wenn unsere Varietät eine offene affine Überdeckung besitzt derart, daß seine Restriktion auf jede der überdeckenden Teilmengen algebraisch ist im Sinne von 3.1.16. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß X affin ist, und verwende dazu das lokal-global-Prinzip [KAG] 3.3.25 in Verbindung mit 3.7.16 und [KAG] 6.2.24.

Übung 3.7.27. Seien $k \to A$ ein Kringhomomorphismus und $E \subset A$ ein Erzeugendensystem von A als k-Ringalgebra. Man zeige, daß die Differentiale $\mathrm{d}a$ für $a \in E$ bereits den Modul der Differentiale $\Omega_{A/k}$ als A-Modul erzeugen.

3.8 Transzendenz und Separabilität

Lemma 3.8.1 (Differentiale und separable Erweiterungen). *Seien $k \subset F \subset E$ Körper. Ist E/F separabel, so induziert die Einbettung $F \hookrightarrow E$ einen Isomorphismus*

$$E \otimes_F \Omega_{F/k} \xrightarrow{\sim} \Omega_{E/k}$$

3.8.2. Hier und im folgenden verstehe ich unter einer separablen Körpererweiterung wie in [AL] 3.9.16 eine algebraische Körpererweiterung, bei der jedes Element des Erweiterungskörpers eine einfache Nullstelle seines Minimalpolynoms über dem Grundkörper ist.

3.8.3 (**Differentiale separabler Erweiterungen im geometrischen Fall**). Ich wird kurz andeuten, welche Anschauung man im geometrischen Fall mit der Aussage dieses Lemmas verbinden mag. Sei $X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten, dessen Komorphismus eine separable Körpererweiterung $\mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ auf den Körpern von rationalen Funktionen induziert. So liefern unsere Sätze einen natürlichen Isomorphismus $\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{T}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(X)}(\Omega_{\mathcal{M}(X)/k}, \mathcal{M}(X))$ und unser Isomorphismus im Lemma dualisiert zu einem Isomorphismus

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{T}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{T}(Y)$$

Die Elemente von $\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{T}(X)$ können wir uns ähnlich wie die rationalen Funktionen in [KAG] 3.1.16 als „rationale Vektorfelder auf X“ veranschaulichen. Der Isomorphismus im Lemma sagt uns damit, daß in dieser Situation die rationalen Vektorfelder auf X durch Erweiterung der Skalare aus den rationalen Vektorfeldern auf Y hervorgehen.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die auf den Dualräumen induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist, daß sich also jede k-Derivation $F \to E$ auf genau eine Weise zu einer k-Derivation $E \to E$ ausdehnen läßt. Dazu reicht es zu zeigen, daß sich für jedes $\alpha \in E$ jede k-Derivation $F \to E$ auf genau eine Weise zu einer k-Derivation $F(\alpha) \to E$ ausdehnen läßt. Nach Annahme haben wir $F(\alpha) = F[T]/\langle P(T)\rangle$ für ein irreduzibles Polynom $P \in F[T]$ mit $P'(\alpha) \neq 0$. Nach 3.1.5 haben wir eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Der}_k(F(\alpha), E) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(F[T], E) \to \mathrm{Hom}_k(\langle P(T)\rangle, E)$$

Nach 3.1.21 ist eine k-lineare Derivation D von $F[T] = F \otimes_k k[T]$ in den durch $T \mapsto \alpha$ zu einem $F[T]$-Modul gemachten Körper E festgelegt und festlegbar durch ihre Einschränkung ∂ auf F und ihren Wert $\beta \in E$ bei T. Diese Derivation $D = D_\beta$ kann dann beschrieben werden als $D : Q \mapsto (\partial Q)(\alpha) + \beta Q'(\alpha)$, wobei ∂Q das Polynom in $E[T]$ meint, das durch Anwenden von ∂ auf die Koeffizienten von Q entsteht. Wegen $P'(\alpha) \neq 0$ gibt es genau ein $\beta \in E$ mit $D_\beta(P) = 0$, und dies D_β induziert dann die einzig mögliche Fortsetzung von ∂ zu einer k-linearen Derivation $F(\alpha) \to E$. □

Lemma 3.8.4 (Differentiale primitiver Körpererweiterungen). *Gegeben eine primitive Körpererweiterung $F(\alpha)/F$ gilt*

$$\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \text{ separabel ist über } F; \\ 1 & \text{falls } \alpha \text{ algebraisch, aber nicht separabel ist über } F; \\ 1 & \text{falls } \alpha \text{ transzendent ist über } F. \end{cases}$$

Beweis. Der Modul der Differentiale des Polynomrings $F[T]$ über F ist frei vom Rang Eins nach 3.7.7. Der Modul der Differentiale seines Quotientenkörpers $F(T)$ über F ist frei vom Rang Eins nach der Verträglichkeit mit Lokalisierungen 3.7.14. Ist also α transzendent über F, so haben wir $\dim_F(\alpha)\Omega_{F(\alpha)/F} = 1$. Sonst haben wir eine Surjektion $F[T] \twoheadrightarrow F(\alpha)$ mit $T \mapsto \alpha$, deren Kern vom Minimalpolynom P von α erzeugt wird. Damit haben wir nach unseren Erkenntnissen über die Differentiale sukzessiver Kringerweiterungen 3.7.19 eine Surjektion $F(\alpha) \otimes_{F[T]} F[T]\mathrm{d}T \twoheadrightarrow \Omega_{F(\alpha)/F}$, deren Kern von $1 \otimes \mathrm{d}P = 1 \otimes P'(T)\mathrm{d}T = P'(\alpha) \otimes \mathrm{d}T$ erzeugt wird. Damit gilt $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 1$ falls $P'(\alpha) = 0$ und $\dim_{F(\alpha)} \Omega_{F(\alpha)/F} = 0$ falls $P'(\alpha) \neq 0$. Im Lichte des Separabilitätskriteriums [AL] 3.9.22 ist aber eine primitive algebraische Körpererweiterung $F(\alpha)/F$ genau dann separabel, wenn für das Minimalpolynom P eines Erzeugers α gilt $P'(\alpha) \neq 0$. □

Definition 3.8.5. Ich erinnere aus [AL] 3.2.6, daß wir eine Körpererweiterung E/F **körperendlich** nennen, wenn der Erweiterungskörper über dem Grundkörper als Körper endlich erzeugt ist, wenn es also in Formeln endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in E$ gibt mit

$$E = F(x_1, \ldots, x_n)$$

Lemma 3.8.6. *Der Modul der Differentiale einer körperendlichen Körpererweiterung verschwindet genau dann, wenn sie separabel ist.*

Ergänzung 3.8.7. Das folgende Beispiel zeigt, daß das vorhergehende Lemma nicht auf beliebige Körpererweiterungen verallgemeinert werden kann. Sei k ein Körper positiver Charakteristik $p > 0$ und $k(T)$ sein Funktionenkörper. Die durch sukzessives Adjungieren der p-ten Wurzeln der Variablen entstehende Körpererweiterung

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} k\left(\sqrt[p^r]{T}\right)$$

des Funktionenkörpers ist algebraisch und rein inseparabel, aber der Modul ihrer relativen Differentiale verschwindet nach 3.7.25 dennoch.

Beweis. Sei E/F unsere Körpererweiterung. Ist unsere Erweiterung separabel, so verschwindet der Modul ihrer Differentiale nach 3.8.1 und unserer Sequenz 3.7.19. Verschwindet umgekehrt der Modul der Differentiale, so zeigen wir die Behauptung durch Induktion über die Zahl der Erzeuger. Haben wir etwa $E = F(x_1, \ldots, x_n)$, so betrachten wir die rechtsexakte Sequenz

$$E \otimes_F \Omega_{F(x_1)/F} \to \Omega_{E/F} \twoheadrightarrow \Omega_{E/F(x_1)}$$

In der Mitte steht nach Annahme eine Null, also auch am rechten Ende. Nach Induktionsannahme ist also $E/F(x_1)$ modulendlich und separabel. Nach 3.8.1 ist dann die erste Abbildung unserer Sequenz ein Isomorphismus, mithin haben wir $\Omega_{F(x_1)/F} = 0$ und nach 3.8.4 ist $F(x_1)/F$ separabel. Dann aber ist wegen der Transitivität der Separabilität [AL] 3.9.27 auch E/F separabel. □

Satz 3.8.8 (Differentiale körperendlicher Körpererweiterungen). *Sei E/k eine körperendliche Körpererweiterung und seien $x_1, \ldots, x_r \in E$ gegeben. So erzeugen die Differentiale $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ den Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ genau dann, wenn E separabel algebraisch ist über $k(x_1, \ldots, x_r)$*

3.8.9. Beispiel 3.8.7 zeigt, daß das für nicht körperendliche Körpererweiterungen im allgemeinen nicht mehr gilt.

3.8.10. Sei E/k eine körperendliche Körpererweiterung. Die erste Aussage des Satzes impliziert die Abschätzung $\dim_E \Omega_{E/k} \geq \operatorname{trgr}(E/k)$. sowie im Fall von Gleichheit die Existenz einer Transzendenzbasis $x_1, \ldots, x_r$ mit E separabel algebraisch über $k(x_1, \ldots, x_r)$. Der im Anschluß bewiesene Satz 3.8.11 impliziert, daß für vollkommenes k sogar stets $\dim_E \Omega_{E/k} = \operatorname{trgr}(E/k)$ gilt.

Beweis. Wir erinnern aus 3.7.19 die rechtsexakte Sequenz

$$E \otimes_F \Omega_{F/k} \to \Omega_{E/k} \twoheadrightarrow \Omega_{E/F}$$

für jeden Zwischenkörper F. Für $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ zeigt unsere rechtsexakte Sequenz $\Omega_{E/F} = 0$ und nach 3.8.6 ist folglich E separabel algebraisch über F. Ist umgekehrt E separabel algebraisch über $F = k(x_1, \ldots, x_r)$, so folgt aus 3.8.1 zusammen mit 3.7.23 umgekehrt, daß der Modul der Differentiale $\Omega_{E/k}$ von $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ erzeugt wird. □

Satz 3.8.11 (Differentiale und algebraische Unabhängigkeit). *Sei E/k eine Körpererweiterung und k vollkommen und seien $x_1, \ldots, x_r \in E$ gegeben. Sind die Differentiale $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$ linear unabhängig über k, so sind $x_1, \ldots, x_r$ bereits algebraisch unabhängig über k.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch. Sind die x_i algebraisch abhängig über k, so gibt es ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[T_1, \ldots, T_r]$ mit $P(x_1, \ldots, x_r) = 0$. Dann gibt es auch ein derartiges Polynom P von kleinstmöglichem Totalgrad. Eine partielle Ableitung dieses Polynoms P kann also nur dann auf $(x_1, \ldots, x_r)$ verschwinden, wenn sie das Nullpolynom ist. Nun kann aber P nicht konstant sein. Wären also alle partiellen Ableitungen $\partial_i P$ das Nullpolynom, so wären wir in positiver Charakteristik $p > 0$. Da k vollkommen ist, gäbe es dann ein Polynom $Q \in k[T_1, \ldots, T_r]$ mit $Q^p = P$, im Widerspruch zur Minimalität des Grades von P. Also sind nicht alle $(\partial_i P)(x_1, \ldots, x_r)$ Null und mit 3.7.19 erhalten wir die lineare Abhängigkeit

$$(\partial_1 P)(x_1, \ldots, x_r)\mathrm{d}x_1 + \ldots + (\partial_r P)(x_1, \ldots, x_r)\mathrm{d}x_r = 0$$

im Modul der Differentiale. Das schließlich ist der gesuchte Widerspruch. □

Satz 3.8.12 (Morphismen mit endlichen Fasern). *Gegeben ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varietäten $\varphi : X \to Y$ mit endlichen Fasern gilt:*

1. *Die Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ ist endlich;*
2. *Ist φ injektiv, so ist $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ rein inseparabel;*
3. *Gibt es einen regulären Punkt $x \in X$, bei dem das Differential eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ induziert, so ist $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ separabel.*

3.8.13. In 3.1.19 zeigen wir die entfernt verwandte Aussage, daß ein Morphismus von irreduziblen Varietäten, der an einem regulären Punkt surjektives Differential hat, stets dominant sein muß.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X und Y affin. Wäre die Körpererweiterung $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ nicht endlich, so folgte aus der Beschreibung der Dimension als Transzendenzgrad unmittelbar $\operatorname{kdim} X > \operatorname{kdim} Y$. Dann müßte aber unser Morphismus nach 2.1.10 auch Fasern positiver Dimension und insbesondere unendliche Fasern haben. Das zeigt die erste Aussage. Hätten wir $[\mathcal{M}(X) :$

$\mathcal{M}(Y)]_s > 1$, so könnte φ nicht injektiv sein nach Proposition 2.1.16 über die Kardinalitäten von Fasern. Das zeigt die zweite Aussage. Gibt es einen Punkt $x \in X$ mit $\mathrm{d}_x\varphi$ surjektiv, so ist die duale Abbildung auf den Kotangentialräumen eine Injektion $\mathrm{T}^*_{\varphi(x)}Y \hookrightarrow \mathrm{T}^*_x X$ alias

$$k_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \hookrightarrow k_x \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

Ist $x \in X$ regulär alias gilt $\dim_k \mathrm{T}_x X = \operatorname{kdim} X$, so muß diese Injektion aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus und insbesondere surjektiv sein. Dann aber zeigt das Lemma von Nakayama, daß es $f \in \mathcal{O}(X)$ gibt mit $f(x) \neq 0$ derart, daß die kanonische Abbildung eine Surjektion

$$\mathcal{O}(X)[f^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega_{\mathcal{O}(Y)/k} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)[f^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}(X)} \Omega_{\mathcal{O}(X)/k}$$

induziert. Aus der Verträglichkeit von Differentialen mit Lokalisierung folgt, daß die natürliche Abbildung eine Surjektion

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{M}(Y)} \Omega_{\mathcal{M}(Y)/k} \twoheadrightarrow \Omega_{\mathcal{M}(X)/k}$$

liefert, und das hinwiederum impliziert $\Omega_{\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)} = 0$. Nach 3.8.6 muß dann $\mathcal{M}(X)$ separabel sein über $\mathcal{M}(Y)$. □

3.9 Konstruktion von Quotienten

3.9.1. Ich erinnere daran, daß wir in [KAG] 6.2.1 allgemeine k-Varietäten als spezielle k-geringte Räume eingeführt hatten. Ich erinnere daran, daß wir in [KAG] 6.1.12 für jede Abbildung $f : X \to Y$ von einem k-geringten Raum X in eine Menge Y die „finale Struktur" eines k-geringten Raums auf Y eingeführt hatten. Ich erinnere schließlich daran, daß nach [KAG] 7.2.3 ein Morphismus $f : X \to Y$ **produktfest offenfinal** heißt, wenn er offen und final ist und für jede weitere affine und damit sogar jede weitere beliebige Varietät Z auch $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ offen und final ist.

Satz 3.9.2 (Quotienten affiner algebraischer Gruppen). $(k = \bar{k})$. *Gegeben eine affine algebraische Gruppe G über k mit einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset\!\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc$ G gilt:*

1. *Die Menge G/H mit ihrer finalen Struktur eines k-geringten Raums zur Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ ist eine quasiprojektive Varietät;*

2. *Mit dem Differential der Einbettung der Untergruppe und dem Differential der Projektion auf die Quotientenvarietät als Morphismen erhalten wir eine kurze exakte Sequenz $\mathrm{T}_1 H \hookrightarrow \mathrm{T}_1 G \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\bar{1}}(G/H)$;*

3. Die Projektion $G \twoheadrightarrow G/H$ ist produktfest offenfinal.

Ergänzung 3.9.3. In der Terminologie [KAG] 7.3.8 existiert unter den Annahmen des Satzes also die Bahnenvarietät und hat im Sinne von [KAG] 7.3.8 einen produktfesten Bahnenmorphismus. In der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten wird eine analoge Aussage als [ML] 4.4.3 gezeigt.

3.9.4 (**Quotienten als homogene Räume**). Aus Teil 3 des Satzes folgt, daß G/H ein homogener Raum für G ist. In der Tat ist im kommutativen Diagramm von Mengen

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G/H & \to & G/H \end{array}$$

nach Teil 3 die linke Vertikale final und damit die untere Horizontale ein Morphismus. Diese Aussage wird auch aus unserem Beweis für Teil 1 direkt hervorgehen.

Beweis. Wir finden nach 3.9.7 eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von G mitsamt einem von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ derart, daß gilt $H = \{g \in G \mid gv \in kv\}$ und $\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} G \mid Xv \in kv\}$. Dann betrachten wir die Wirkung von G auf $\mathbb{P}V$ nach [KAG] 7.2.11 und darin die Bahn $G\langle v\rangle$ von $\langle v\rangle$. Sie erbt nach 2.3.4 als lokal abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}V$ die Struktur einer Varietät mit G-Wirkung, und nach 3.1.29 haben wir mit den offensichtlichen Morphismen eine linksexakte Sequenz

$$\mathrm{T}_1 H \hookrightarrow \mathrm{T}_1 G \to \mathrm{T}_{\langle v\rangle}(G\langle v\rangle)$$

Ein Dimensionsvergleich zeigt, daß diese Sequenz sogar exakt sein muß. Können wir also zeigen, daß $\pi : G \to G\langle v\rangle$ final ist, so sind die beiden ersten Teile des Satzes bewiesen. Satz 2.3.9 über Morphismen homogener Räume zeigt schon einmal, daß π produktfest offen ist. Gegeben $U \Subset G\langle v\rangle$ mit Urbild $V := \pi^{-1}(U) \Subset G$ und eine Abbildung $f : U \to k$ mit $f \circ \pi : V \to k$ regulär gilt es nun noch zu zeigen, daß auch f bereits regulär ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dabei U affin annehmen. Für den Graphen $\Gamma(f) \subset U \times k$ gilt sicher

$$(\pi \times \mathrm{id})^{-1}(\Gamma(f)) = \Gamma(f \circ \pi)$$

Da π produktfest offen ist, muß auch $\pi \times \mathrm{id}$ offen sein. Es folgt $\Gamma(f) \mathrel{\not\Subset} U \times k$. Damit erbt $\Gamma(f)$ die Struktur einer affinen Varietät und die Projektion liefert einen bijektiven Morphismus $\Gamma(f) \to U$. Es reicht zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, denn dann ist auch f ein Morphismus als die Komposition

$$U \xleftarrow{\sim} \Gamma(f) \hookrightarrow U \times k \twoheadrightarrow k$$

Nun ist aber U glatt und $\Gamma(f)$ hat nach [KAG] 6.6.10 in Verbindung mit 3.8.8 mindestens einen regulären Punkt. Nach 3.9.8 reicht es also zu zeigen, daß $\Gamma(f) \to U$ in jedem Punkt surjektives Differential hat. Dazu hinwiederum reicht es zu zeigen, daß $\pi^{-1}(U) \to U$ in jedem Punkt surjektives Differential hat, und das haben wir bereits zu Beginn des Beweises aus einer Dimensionsabschätzung gefolgert. Daß die Quotientenabbildung produktfest offen ist, folgt wie bereits erwähnt aus der entsprechenden allgemeineren Aussage 2.3.9 für beliebige Morphismen homogener Räume. Der Morphismus $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ ist aber auch affin nach [KAG] 7.1.3 als Morphismus von einer affinen Varietät in eine separierte Varietät. Für $U \circledcirc G/H$ offen affin ist also $\pi^{-1}(U)$ auch affin und das Vorschalten von π induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(U) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H$$

Ist Y eine weitere affine Varietät, so induziert das Vorschalten von $\mathrm{id} \times \pi$ also den oberen horizontalen Isomorphismus eines kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dd, "\wr"'] & \mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H \arrow[d, "\wr"] \\
 & (\mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)))^H \arrow[d, "\wr"] \\
\mathcal{O}(Y \times U) \arrow[r] & \mathcal{O}(Y \times \pi^{-1}(U))^H
\end{tikzcd}$$

Dessen oberer rechter vertikaler Isomorphismus folgt aus [LA2] 6.1.35, die übrigen vertikalen Isomorphismen sind offensichtlich. Die untere Horizontale muß dann auch ein Isomorphismus sein und Teil 3 folgt. □

Alternativer Beweis nach Knop. Wir wissen, daß $\Gamma(f) \to U$ birational ist. Es folgt $\mathcal{M}(G\langle v\rangle) \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{M}(G)^H$. Andererseits können wir nach **??** unser U so zu einer nichtleeren affinen offenen irreduziblen Teilmenge verkleinern, daß $\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ ein freier $\mathcal{O}(U)$-Modul wird. Wenn wir zusätzlich G irreduzibel annehmen, dafür müssen wir vorneweg noch etwas argumentieren, so folgt aus **??** sofort

$$\mathcal{O}(U) = \mathcal{M}(U) \cap \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{M}(\pi^{-1}(U))^H \cap \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H$$

mit einem in $\mathcal{M}(\pi^{-1}(U))$ zu verstehenden Schnitt, was zu zeigen war. Homogenität zeigt den Rest. □

Lemma 3.9.5. *Seien $H \subset\!\!\!\!\!\!\;\measuredangle\; G$ affine algebraische Gruppen und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Einbettung. So gibt es eine endlichdimensionale algebraische Darstellung A von G mit einem Teilraum $B \subset A$ derart, daß gilt*

$$H = \{g \in G \mid gB \subset B\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}\iota : \mathrm{Lie}\, H \stackrel{\sim}{\to} \{v \in \mathrm{Lie}\, G \mid vB \subset B\}.$$

Beweis. Wir konstruieren A als Unterdarstellung der rechtsregulären Darstellung $(\mathcal{O}(G), \rho)$ von G. Seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(G)$ Erzeuger des Verschwindungsideals $\mathcal{I}(H)$ von H. Wir finden eine endlichdimensionale Unterdarstellung $A \subset \mathcal{O}(G)$ mit $f_1, \ldots, f_r \in A$ und setzen $B = A \cap \mathcal{I}(H)$. Für $g \in G$ folgt aus $gB \subset B$ dann $f_i(hg) = 0$ für alle $h \in H$ und $1 \leq i \leq r$. Insbesondere folgt das für $h = 1$ und wir folgern $g \in H$. Weiter finden wir

$$\begin{array}{rcl} vB \subset B & \Rightarrow & (\grave{v} f_i)|H = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r \\ & \Rightarrow & \grave{v}(\mathcal{I}(H)) \subset \mathcal{I}(H) \\ & \Rightarrow & \text{Es gibt } D \in \operatorname{Der}_k \mathcal{O}(H) \text{ mit } D(f|H) = (\grave{v} f)|H \quad \forall f \in \mathcal{O}(G) \\ & \Rightarrow & D \text{ ist linksinvariant und } v = \mathrm{d}i(D_1) \\ & \Rightarrow & v \in \mathrm{d}\iota(\operatorname{Lie} H) \end{array}$$

Das schließlich war gerade zu zeigen. □

Lemma 3.9.6. *Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum mit einem Teilraum $W \subset V$ der Dimension $\dim W = d < \infty$. So gilt:*

1. *Für $x \in \mathrm{GL}(V)$ ist $xW = W$ gleichbedeutend zu $x(\bigwedge^d W) = \bigwedge^d W$;*
2. *Für $A \in \mathfrak{gl}(V)$ ist $AW \subset W$ gleichbedeutend zu $A(\bigwedge^d W) \subset \bigwedge^d W$.*

Beweis. Wir finden Vektoren in V derart, daß $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von W ist und $v_{i+1}, \ldots, v_{i+d}$ eine Basis von xW. Dann gibt es eine Konstante $c \in k$ mit $x(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = c(v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_{i+d})$. Aus $x(\bigwedge^d W) = \bigwedge^d W$ folgt also $i = 0$ und damit $xW = W$. Das zeigt die erste Aussage. Für den Beweis der zweiten Aussage beachten wir

$$A(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = \sum_\nu v_1 \wedge \ldots \wedge Av_\nu \wedge \ldots \wedge v_d$$

unter der abgeleiteten Operation der Lie-Algebra nach 3.4.12. Machen wir den Ansatz $Av_\nu = \sum_{\mu=i+1}^{i+d} a_{\nu\mu} v_\mu$, so folgt aus $A(\bigwedge^d W) \subset \bigwedge^d W$ bereits $a_{\nu\mu} = 0$ für $\mu > d$ und damit die Behauptung. □

Lemma 3.9.7. *Seien $H \not\trianglelefteq G$ affine algebraische Gruppen und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Einbettung. So gibt es eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V von G mit einem von Null verschiedenen Vektor $w \in V \backslash 0$ derart, daß gilt*

$$H = \{g \in G \mid g\langle w\rangle \subset \langle w\rangle\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}\iota : \operatorname{Lie} H \xrightarrow{\sim} \{v \in \operatorname{Lie} G \mid v\langle w\rangle \subset \langle w\rangle\}.$$

Beweis. Wir gehen von der Darstellung A mit ihrem Teilraum B aus, wie sie in Lemma 3.9.5 konstruiert worden sind, setzen $d = \dim B$ und $V = \bigwedge^d A$ und $W = \bigwedge^d B$ und nehmen als w irgendeinen von Null verschiedenen Vektor aus W. Nach 3.9.6 leistet dieses Datum das Gewünschte. □

Satz 3.9.8 (Zariski's Hauptsatz für affine Varietäten). *Sei $\varphi : X \to Y$ ein bijektiver Morphismus von affinen irreduziblen Varietäten und sei $\mathcal{O}(Y)$ normal. Unter diesen Voraussetzungen gilt:*

1. *Ist $\varphi : X \to Y$ birational, so ist φ ein Isomorphismus;*
2. *Gibt es einen glatten Punkt $x \in X$, an dem das Differential eine Surjektion $\mathrm{d}_x\varphi : \mathrm{T}_x X \twoheadrightarrow \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$ induziert, so ist φ ein Isomorphismus;*
3. *Arbeiten wir über einem Grundkörper der Charakteristik Null, so ist φ ein Isomorphismus.*

3.9.9. Wir wissen aus [KAG] 5.6.18, daß jede glatte Varietät Y normal ist. Meist werden wir den Satz in diesem Fall anwenden. Der Satz gilt sogar, wenn man X und Y als beliebige irreduzible Varietäten annimmt und fordert, daß Y normal ist in dem Sinne, daß die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{Y,y}$ normal sind für alle $y \in Y$. In dieser Allgemeinheit kenne ich keinen so einfachen Beweis. Unter Zuhilfenahme von Grothendieck-Dieudonné sollte es aber doch mit wenig zusätzlichem Aufwand zu machen sein.

Beispiel 3.9.10. Im Fall eines Grundkörpers $k = \bar{k}$ einer positiven Charakteristik $p > 0$ ist $\varphi : k \to k$ mit $x \mapsto x^p$ ein bijektiver Morphismus, der kein Isomorphismus ist.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der ersten Aussage. Sei zunächst $\varphi : X \to Y$ ein beliebiger bijektiver Morphismus von affinen Varietäten. Mit der Beschreibung [KAG] 3.3.15 für das Bild des Primspektrums unter Kringerweiterungen sehen wir, daß die Einbettung $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ eine Surjektion $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}(Y)$ induziert. Ist Y irreduzibel und $\mathcal{O}(Y)$ normal, so sind nach [KAG] 5.8.10 die Lokalisierungen $\mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q}$ von $\mathcal{O}(Y)$ nach Primidealen der Höhe Eins diskrete Bewertungsringe. Gilt also $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = 1$ und ist $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(X)$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{q}$, so induziert $\mathcal{M}(Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(X)$ eine Bijektion $\mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q} \tilde{\to} \mathcal{O}(X)_\mathfrak{p}$ wegen der Maximalität diskreter Bewertungsringe [KAG] 5.8.17. Nun haben wir nach [KAG] 4.8.17 wieder aufgrund der Normalität von $\mathcal{O}(Y)$ die Gleichheit

$$\mathcal{O}(Y) = \bigcap_{\operatorname{ht}(\mathfrak{q})=1} \mathcal{O}(Y)_\mathfrak{q}$$

von Teilmengen von $\mathcal{M}(Y)$. Unter $\mathcal{M}(Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(X)$ wird $\mathcal{O}(Y)$ also auf eine Teilmenge von $\mathcal{M}(X)$ abgebildet, die $\mathcal{O}(X)$ umfaßt. Da aber das Bild von $\mathcal{O}(Y)$ stets in $\mathcal{O}(X)$ liegt, muß $\mathcal{M}(Y) \tilde{\to} \mathcal{M}(X)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}(Y) \tilde{\to} \mathcal{O}(X)$ induzieren und die erste Aussage ist gezeigt. Nach 3.8.12 liefert unser Morphismus unter den in den beiden anderen Teilen 2 und 3 gemachten Annahmen eine endliche Erweiterung der Funktionenkörper, die rein inseparabel und separabel, also trivial ist. In anderen Worten ist unser Morphismus birational und nach dem ersten Teil dann ein Isomorphismus. □

Satz 3.9.11 (Isomomorphismen homogener Räume). *Ein bijektiver äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sein Differential an einer Stelle surjektiv ist. Im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist er stets ein Isomorphismus.*

3.9.12. Wir brauchen hier noch nicht einmal, daß die transitive Gruppenwirkung durch eine algebraische Gruppe geschehen muß.

Beweis. Sei $\varphi : X \to Y$ unser bijektiver Morphismus. Wir beachten zunächst, daß es nach 2.1.17 eine nichtleere offene affine Teilmenge $V \circledcirc Y$ mit affinem Urbild $\varphi^{-1}(V) \circledcirc X$ gibt. Dann induziert φ nach unserer Variante des Hauptsatzes von Zariski 3.9.8 einen Isomorphismus $\varphi : \varphi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V$ und Homogenität zeigt den Rest. □

3.9.13 (**Quotienten unipotenter Gruppen sind affin**). Der Quotient einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe U nach einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset U$ ist stets affin. Um das zu sehen, wiederholt man die Konstruktion des Quotienten und findet eine algebraische Darstellung V von U und darin eine Gerade kv, deren Stabilisator genau H ist und für die zusätzlich gilt $\operatorname{Lie} H = \{X \in \operatorname{Lie} U \mid Xv \in kv\}$. Dann muß nach 1.6.2 aber kv bereits die Einsdarstellung von H sein und die Wirkung liefert einen Isomorphismus $U/H \xrightarrow{\sim} Uv$ unseres Quotienten mit der Bahn von v und ihrer induzierten Struktur als Varietät. Diese Bahn aber ist als Bahn einer unipotenten Gruppe auf einer affinen Varietät abgeschlossen in V nach 2.3.7.

Satz 3.9.14 (Quotientengruppen). *Der Quotient einer affinen algebraischen Gruppe nach einem abgeschlossenen Normalteiler ist wieder eine affine algebraische Gruppe.*

Beweis. Seien G unsere affine algebraische Gruppe und $N \mathrel{\underline{\triangleleft}} G$ unser Normalteiler. Die Inversenbildung auf G/N ist ein Morphismus aufgrund der Finalität der Projektion $G \twoheadrightarrow G/N$. Die Multiplikation auf G/N ist ein Morphismus aufgrund der Finalität der Projektion $G \times G \to G/N \times G/N$, die wir hinwiederum aus der Faktorisierung $G \times G \twoheadrightarrow G/N \times G \twoheadrightarrow G/N \times G/N$ in nach Teil 3 von 3.9.2 finale Morphismen folgern. Alternativ könnten wir die Finalität der Projektion $G \times G \to G/N \times G/N$ auch zeigen, indem wir den induzierten bijektiven Morphismus von homogenen Räumen $(G \times G)/(N \times N) \to G/N \times G/N$ betrachten und ihn durch Bestimmen des Differentials am neutralen Element als Isomorphismus entlarven. Damit bleibt nur zu zeigen, daß G/N affin ist. Dazu konstruieren wir einen endlichdimensionalen Vektorraum W und einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{GL}(W)$ mit Kern N und der Eigenschaft, daß die Sequenz $\mathrm{Lie}\, N \hookrightarrow \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{Lie}\, \mathrm{GL}(W)$ linksexakt ist und folgern dann mit Satz 3.9.11 über Isomorphismen homogener Varietäten, daß φ einen Isomorphismus

$$G/N \xrightarrow{\sim} \varphi(G)$$

induziert. Nach 3.9.7 finden wir eine Darstellung $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $v \in V \backslash 0$ mit $N = \mathrm{Stab}(kv)$ und $\mathrm{Lie}\, N \xrightarrow{\sim} \{X \in \mathrm{Lie}\, G \mid Xv \in kv\}$. Gegeben ein Charakter $\chi \in \mathfrak{X}^*(N)$ betrachten wir den zugehörigen Eigenraum $V_\chi \subset V$ und dürfen $V = \bigoplus V_\chi$ annehmen, da N ein Normalteiler ist und folglich die Summe der V_χ stets ein G-stabiler Teilraum ist. Dann betrachten wir

$$W = \{f \in \mathrm{End}\, V \mid f(V_\chi) \subset V_\chi \quad \forall \chi\}$$

und $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ gegeben durch $(\psi(x))f = \varphi(x) f \varphi(x^{-1})$ für $x \in G$ und $f \in W$. Dann ist $\psi(x) = \mathrm{id}_W$ gleichbedeutend zu $\varphi(x) f = f \varphi(x)$ für alle $f \in W$. In Bezug auf eine geeignete Basis von V besteht nun W aus allen blockdiagonalen Matrizen mit einer durch die Dimensionen der V_χ festgelegten Blockstruktur. Die Bedingung $\varphi(x) f = f \varphi(x)$ für alle $f \in W$ ist also gleichbedeutend zu $\varphi(x) V_\chi \subset V_\chi$ und $\varphi(x)|V_\chi \in k\, \mathrm{id}$ für alle χ. Das ist nun einerseits richtig für alle $x \in N$ und impliziert auch andererseits $x \in N$, da ja nach Konstruktion unser Vektor v in einem der V_χ liegt. Wir haben also $N = \ker \psi$. Der analoge Nachweis von $\mathrm{Lie}\, H \xrightarrow{\sim} \ker \mathrm{d}\psi$ kann dem Leser überlassen bleiben. □

Satz* 3.9.15 (Affinität von homogenen Räumen). *Gegeben ein surjektiver äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen $\varphi : X \to Y$ mit endlichen Fasern ist X affin genau dann, wenn Y affin ist.*

3.9.16. Dieser Satz wird im folgenden nicht benötigt, man kommt mit Übung 3.9.27 aus.

Beweis. Nach 2.1.17 und Homogenität gibt es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen V_i mit affinen Urbildern $\varphi^{-1}(V_i)$. Ist Y affin, so ist damit X affin nach [KAG] 7.1.4. Sei nun umgekehrt X affin. Wir dürfen unsere Varietäten sicher irreduzibel annehmen und beginnen mit dem Fall eines bijektiven äquivarianten Morphismus von homogenen Räumen. Unter dieser Annahme stellt sich das Problem nach 3.9.11 nur in positiver Charakteristik $p > 0$. Nach 3.9.21 liegt für jedes $f \in \mathcal{O}(X)$ eine geeignete iterierte p-Potenz in $\mathcal{O}(Y)$. Ist X affin, so finden wir eine Verfeinerung der Überdeckung durch die $\varphi^{-1}(V_i)$ zu einer Verfeinerung durch gewisse X_{f_ν} mit $f_\nu \in \mathcal{O}(X)$ sowie eine Relation $1 = \sum b_\nu f_\nu$ mit $b_\nu \in \mathcal{O}(X)$. Erhaben wir unsere Relation mehrmals zur p-ten Potenz, so wird sie eine Relation $1 = \sum b_\nu^q f_\nu^q$ mit $b_\nu^q, f_\nu^q \in \mathcal{O}(Y)$. Dann aber gilt

$\{y \in Y \mid f_\nu^q(y) \neq 0\} = \{y \in V_i \mid f_\nu^q(y) \neq 0\}$ für geeignetes i. Folglich sind diese offenen Teilmengen affin, und das Affinitätskriterium [KAG] 7.1.1 zeigt, daß Y affin ist. Ist unser äquivarianter Morphismus von homogenen Räumen mit endlichen Fasern nur surjektiv, so bemerken wir zunächst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur noch den Fall $G/H \to G/K$ betrachten müssen, für $H \subset K \subset H^\circ$. Dann sehen wir, daß es sogar reicht, den Fall $G/H \to G/H^\circ$ zu betrachten. In diesem Fall aber ist $H^\circ \subset H$ ein Normalteiler und die Behauptung folgt aus unserer Diskussion von Quotienten nach endlichen Gruppen [KAG] 7.2.6. □

Vorschau 3.9.17 (**Quotienten nach reduktiven Gruppen sind affin**). Jeder Quotient einer affinen algebraischen Gruppe G nach einer im Sinne von 4.9.3 reduktiven Untergruppe $H \,{\not\triangleleft}\, G$ ist affin. Ich kenne den Beweis nur im Fall der Charakteristik Null, in dem die Behauptung leicht aus [KAG] 7.7.19 folgt. Ein Satz von Matsushima besagt feiner, daß ein Quotient einer reduktiven Gruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe genau dann affin ist, wenn auch die Untergruppe reduktiv ist.

Definition 3.9.18. Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k und eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt die Menge aller m-dimensionalen Untervektorräume von V die **Graßmann'sche der m-dimensionalen Teilräume von V** und wird notiert

$$\mathrm{Graß}(m; V) = \mathrm{Gr}(m; V) := \{W \subset V \mid \dim W = m\}$$

3.9.19. Auf unseren Graßmann'schen operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist transitiv, sofern die Graßmann'sche nicht leer ist. Um die Graßmann'schen näher zu untersuchen, realisieren wir sie als Teilmengen von projektiven Räumen.

Lemma 3.9.20. *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V liefert die Abbildungsvorschrift $W \mapsto \bigwedge^m W$ eine Injektion, die* **Plücker-Einbettung**

$$\bigwedge^m : \mathrm{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^m V\right)$$

Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers ($k = \bar{k}$) ist das Bild der Plücker-Einbettung abgeschlossen in der Zariski-Topologie.

Beweis. Unsere Abbildung ist injektiv, da gilt $W = \{v \in V \mid v \wedge \bigwedge^m W = 0\}$. Um ihr Bild zu beschreiben, betrachten wir umgekehrt für ein beliebiges $\omega \in \bigwedge^m V$ den Teilraum

$$\ker(\omega\wedge) = \{v \in V \mid \omega \wedge v = 0\}$$

Ergänzen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_l$ von $\ker(\omega\wedge)$ durch $v_{l+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V und schreiben ω in der zugehörigen Basis der äußeren Potenzen, so erkennen wir, daß es im Fall $\omega \neq 0$ ein η gibt mit $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_l \wedge \eta$. Wir haben also $\omega \neq 0 \;\Rightarrow\; \dim\ker(\omega\wedge) = l \leq |\omega| = m$, und

$$\dim\ker(\omega\wedge) = m \quad\Leftrightarrow\quad k\omega = \bigwedge^m \ker(\omega\wedge) \in \operatorname{im} \bigwedge^m$$

Die Bedingung $\dim\ker(\omega\wedge) \geq m$ ist nun aber offensichtlich eine abgeschlossene Bedingung an $\omega \in \bigwedge^m V$, deshalb ist unser Bild abgeschlossen. □

Übungen

Übung 3.9.21. Sei $\varphi : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus mit endlichen Fasern von affinen irreduziblen Varietäten und sei $\mathcal{O}(Y)$ normal. Man zeige

$$\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \cap \mathcal{M}(Y)$$

alias, ganz pedantisch geschrieben, $\varphi^\sharp\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \cap \varphi^\sharp\mathcal{M}(Y)$. Hinweis: Ähnlich wie beim Beweis von 3.9.8 zeige man in den Notationen dort zunächst $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y)_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{p}} \cap \varphi^\sharp\mathcal{M}(Y)$.

Übung 3.9.22. Sind $K \not\trianglelefteq H \not\trianglelefteq G$ affine algebraische Gruppen, so ist die offensichtliche Abbildung $H/K \hookrightarrow G/K$ eine abgeschlossene Immersion.

Übung 3.9.23. Sei X eine Menge mit einer transitiven Operation einer affinen algebraischen Gruppe G. Ist die Isotropiegruppe G_x eines Punktes $x \in X$ abgeschlossen, so sind die Isotropiegruppen aller Punkte abgeschlossen und es gibt genau eine Struktur als algebraische Varietät auf X, für die alle durch die Gruppenwirkung gegebenen Abbildungen $G/G_x \to X$ Isomorphismen von Varietäten sind.

Übung 3.9.24. Gegeben eine diagonalisierbare algebraische Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper wird die Sequenz $G^\circ \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/G^\circ$ unter dem Charakterfunktor $\mathfrak{X}$ die Sequenz $\mathfrak{X}_{\mathrm{tor}} \hookrightarrow \mathfrak{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_{\mathrm{tor}}$ in der Gegenrichtung.

Übung 3.9.25. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Komposition

$$\mathrm{SL}(2;k) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2;k) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}(2;k)/k^\times =: \mathrm{PGL}(2;k)$$

über einen Isomorphismus $\mathrm{PSL}(2;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}(2;k)/k^\times$ unserer in 1.2.15 definierten Gruppe mit dem Quotienten der allgemeinen linearen Gruppe nach den Vielfachen der Einheitsmatrix faktorisiert.

Übung 3.9.26. Man zeige, daß in Charakteristik Null jede unipotente affine algebraische Gruppe zusammenhängend ist.

Übung 3.9.27. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß gegeben eine endlichdimensionale algebraische Darstellung V der multiplikativen Gruppe $k^\times$ die Bahn Y jedes Punktes des projektiven Raums $\mathbb{P}V$ entweder ein Punkt ist oder als Varietät isomorph zu $k^\times$ selber. Man zeige genauer, daß Y sogar als homogener Raum isomorph ist zu $k^\times$ mit der durch einen nichtkonstanten Gruppenhomomorphismus $k^\times \to k^\times$ gegebenen Wirkung von $k^\times$. Hinweis: Wenn man bereit ist, 3.9.15 zu verwenden, so kann man gleich Übung 3.9.28 machen. Der Punkt hier ist, 3.9.15 zu vermeiden.

Ergänzende Übung 3.9.28. Jeder homogene Raum eines Torus ist affin. Hinweis: 3.9.15.

Ergänzende Übung 3.9.29. Jeder homogene Raum einer auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist affin. Hinweis: Man verwende im Vorgriff 4.2.3. Indem man einen geeigneten maximalen Torus der großen Gruppe geeignet verkleinert, rette man sich mit 3.9.15 in den Fall 3.9.13 eines Quotienten einer unipotenten Gruppe.

Übung 3.9.30. $(k = \bar{k})$. Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Man zeige, daß auf den Graßmann'schen $\operatorname{Gr}(m; V)$ die Struktur als homogener Raum unter $\operatorname{GL}(V)$ übereinstimmt mit der induzierten Struktur in Bezug auf die Plücker-Einbettung $\bigwedge^m : \operatorname{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ aus 3.9.20.

Übung 3.9.31. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\operatorname{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Man zeige, daß $\mathcal{F}(V)$ im Fall $k = \bar{k}$ mit seiner Struktur als homogener Raum aus 3.9.23 eine projektive k-Varietät wird. Sie heißt die **Flaggenvarietät** oder **Fahnenmannigfaltigkeit** von V.

Übung 3.9.32. Gegeben eine monoton fallende Folge $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots$ natürlicher Zahlen verstehen wir unter einer **Fahne vom Typ** λ von Untervektorräumen eines vorgegebenen endlichdimensionalen Vektorraums V eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots$$

mit $\dim V_i = \lambda_i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}_\lambda(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\operatorname{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Man zeige, daß auch $\mathcal{F}_\lambda(V)$ im Fall $k = \bar{k}$ mit seiner Struktur als homogener Raum aus 3.9.23 eine projektive k-Varietät wird. Sie heißt eine **partielle Flaggenvarietät** oder **partielle Fahnenmannigfaltigkeit**.

3.10 Graßmann'sche und Plücker-Relationen*

3.10.1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper k mit Basis $v_1, \ldots, v_n$. Wir wählen in $\bigwedge^m V$ die Basis v_I, wo I über alle m-elementigen Teilmengen $I \subset \{1, \ldots, n\}$ läuft und wir wie üblich $v_I := v_i \wedge \ldots \wedge v_j$ setzen für $i < \ldots < j$ die Größe nach aufgeführten Elemente von I. Die zugehörigen Koordinatenfunktionen heißen die **Plücker-Koordinaten**, das sind also lineare Abbildungen $x_I = x_{i,\ldots,j} : \bigwedge^m V \to k$. Gegeben $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $\operatorname{sgn}(I, \nu)$ das Vorzeichen „Minus Eins hoch die Anzahl derjenigen Elemente von I, die größer sind als ν".

Satz 3.10.2. *Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Seien $x_I : \bigwedge^m V \to k$ für $I \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = m$ die zugehörigen Plücker-Koordinaten. So ist das Bild unserer eben erklärten Einbettung $\bigwedge^m : \operatorname{Gr}(m; V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ die Projektivisierung der Lösungsmenge des folgenden Systems von quadratischen Gleichungen, der sogenannten* **Plücker-Relationen**

$$0 = \sum_{\nu \in K \setminus L} \operatorname{sgn}(K, \nu) x_{L \cup \{\nu\}} x_{K \setminus \{\nu\}}$$

Diese Gleichungen sind dabei für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|K| = m + 1$ und $|L| = m - 1$ zu nehmen.

3.10.3. Im Spezialfall $m = 2$ und unter der Annahme eines Grundkörpers einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist das auch gleichbedeutend zu der besonders übersichtlichen Bedingung

$$\omega \wedge \omega = 0$$

In der Tat, $\omega = \sum_{i<j} x_{ij} v_i \wedge v_j$ erfüllt $\omega \wedge \omega = 0$ genau dann, wenn für alle $i < j < k < l$ gilt $2(x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}) = 0$. Nehmen wir nun oben $L = \{i\}$ und $K = \{j, k, l\}$, so erhalten wir genau diese Gleichungen bis auf den Faktor 2 und im Fall $L \subset K$ die Gleichungen $0 = 0$, die keine zusätzlichen Bedingungen liefern.

Beweis. Es gilt, die Bedingung $\dim \ker(\omega \wedge) \geq m$ aus dem vorhergehenden Beweis im Fall eines n-dimensionalen Raums V mit $n \geq m$ auszuschreiben. Dazu erinnern wir an die beiden nichtausgearteten Paarungen

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^m V \times \bigwedge^m V^* & \to & k \\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_m, f_1 \wedge \ldots \wedge f_m) & \mapsto & \det(f_i(v_j))_{i,j=1}^m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^m V \times \bigwedge^{n-m} V & \to & \bigwedge^n V \\ (\omega\ ,\ \eta) & \mapsto & \omega \wedge \eta \end{array}$$

Hier und im folgenden vereinbaren wir, daß das Bilden des Dualraums stärker bindet als das Bilden äußerer Potenzen, daß also $\bigwedge^m V^*$ a priori als $\bigwedge^m(V^*)$ zu verstehen ist, auch wenn es darauf ja gar nicht wirklich ankommt, denn die erste Paarung liefert eine kanonische Identifikation $\bigwedge^m V^* \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^m V)^*$. Zusammen mit der zweiten Paarung erhalten wir dann einen bis auf Skalar eindeutig bestimmten Isomorphismus $\bigwedge^m V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{n-m} V^*$. Auf die Wahl dieses Skalars kommt es uns nicht an und wir schreiben unseren Isomorphismus $\omega \mapsto \omega^*$. Bezeichnen wir weiter für einen Teilraum $A \subset B$ seinen Annullator mit $A^\perp \subset B^*$, so haben wir für $W \subset V$ einen m-dimensionalen Teilraum unter unserem Isomorphismus $\omega \mapsto \omega^*$ offensichtlich $\bigwedge^m W \mapsto \bigwedge^{n-m}(W^\perp)$. Folglich erfüllt jedes ω im Bild von $\mathrm{Gr}(m; V)$ die Gleichung

$$\ker(\omega\wedge)^\perp = \ker(\omega^*\wedge)$$

In der Tat sind für $\omega = \bigwedge^m W$ schlicht beide Seiten $W^\perp$. Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung auch $\dim\ker(\omega\wedge) + \dim\ker(\omega^*\wedge) = n$ und damit definiert unsere Gleichung genau das Bild von $\mathrm{Gr}(m; V)$. Aus Dimensionsgründen charakterisiert sogar die Bedingung $(\ker(\omega\wedge))^\perp \subset \ker(\omega^*\wedge)$ bereits das Bild von $\mathrm{Gr}(m; V)$. Weil nun bei jeder linearen Abbildung der Annullator des Kerns mit dem Bild der transponierten Abbildung zusammenfällt, in Formeln $(\ker f)^\perp = \mathrm{im}(f^\top)$, erhalten wir für $\omega \in \bigwedge^m V$ schließlich

$$(k\omega \text{ liegt im Bild von } \mathrm{Gr}(m; V)) \Leftrightarrow \mathrm{im}((\omega\wedge)^\top) \subset \ker(\omega^*\wedge)$$

Die Wahl des Elements $v_1\wedge\ldots\wedge v_n \in \bigwedge^n V$ legt die bis auf einen Skalar definierte Abbildung $\omega \mapsto \omega^*$ von oben sogar ganz fest und wir erhalten dafür die explizite Beschreibung als die Komposition

$$v_I \mapsto \mathrm{sgn}(I) v^*_{I^c}$$

mit I^c dem Komplement von I und $\mathrm{sgn}(I)$ dem Signum der Permutation, die die Elemente von I nach vorne schiebt, sonst aber alle Reihenfolgen erhält, mit v_i^* den Elementen der dualen Basis und v_J^* den Elementen der dazu entsprechend gebildeten Basis der Graßmann-Algebra $\bigwedge V^*$. Gegeben $\omega = \sum x_I v_I$ wird $\omega\wedge$ gegeben durch $v_\nu \mapsto \sum_{\nu\notin I} \mathrm{sgn}(I,\nu) x_I v_{I\cup\{\nu\}}$. Die transponierte Abbildung $(\omega\wedge)^\top$ wird also gegeben durch

$$v_K^* \mapsto \sum_{\nu\in K} \mathrm{sgn}(K,\nu) x_{K\setminus\nu} v_\nu^*$$

Unsere Bedingung $\mathrm{im}(\omega\wedge)^\top \subset \ker(\omega^*\wedge)$ lautet damit dann, daß für alle K mit $|K| = m+1$ gilt

$$0 = \sum_{\nu\in K}\sum_I \mathrm{sgn}(I) x_I \,\mathrm{sgn}(K,\nu) x_{K\setminus\nu} v^*_{I^c} \wedge v^*_\nu$$

Das bedeutet, daß für alle L mit $|L| = m - 1$ der Koeffizient von $v^*_{L^c}$ Null ist, und da $I^c \cup \{\nu\} = L^c$ gleichbedeutend ist zu $L = I \backslash \nu$, ist das äquivalent zu den Gleichungen

$$0 = \sum_{\nu \in K \backslash L} \operatorname{sgn}(L \cup \{\nu\}) \operatorname{sgn}(K, \nu) \operatorname{sgn}(L^c, \nu) x_{L \cup \{\nu\}} x_{K \backslash \{\nu\}}$$

für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|K| = m + 1$ und $|L| = m - 1$. Nun überlegen wir uns noch, daß $\operatorname{sgn}(L \cup \{\nu\}) \operatorname{sgn}(L^c, \nu)$ für $\nu \notin L$ von ν gar nicht abhängt, und folgern unsere Plücker-Relationen

$$0 = \sum_{\nu \in K \backslash L} \operatorname{sgn}(K, \nu) x_{L \cup \{\nu\}} x_{K \backslash \{\nu\}}$$

Das Bild der Graßmann'schen im projektiven Raum der entsprechenden äußeren Potenz ist also die simultane Nullstellenmenge dieser quadratischen Gleichungen für alle $K, L \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|K| = m + 1$ und $|L| = m - 1$. $\square$

Definition 3.10.4. Gegeben ein Körper k und ein k-Kring A versteht man unter einer **Theorie von Standard-Monomen** für A die Angabe einer Teilmenge $\mathcal{A} \subset A$ mitsamt einer partiellen Ordnung darauf derart, daß die Menge der „nichtfallenden Monome in den Elemten von $\mathcal{A}$", in Formeln die Menge

$$\{a_1 a_2 \ldots a_r \mid r \geq 0,\ a_i \in \mathcal{A},\ a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r\}$$

eine Basis von A über k bildet.

Beispiel 3.10.5. Man kann zeigen, daß im homogenen Koordinatenring von $\operatorname{Gr}(m; k^n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^m k^n)$ die Plücker-Koordinaten x_I eine Theorie von Standard-Monomen liefern, wenn man setzt $x_I \leq x_J$, wenn gilt $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$ mit $i_\nu \leq j_\nu \quad \forall \nu$. Weiter gibt es eine Anordnung auf der Menge der möglichen Monome derart, daß für $a, b \in \mathcal{A}$ unvergleichbar gilt $ab \in$ Standardmonom $+ \langle c \mid c < ab \rangle_k$. Solche Darstellungen von ab heißen dann „straithening relations". Man erhält solch eine Anordung laut Literatur, indem man die Bruhatordnung zu einer totalen Anordnung erweitert und dazu die lexikographische Ordnung betrachtet.

3.11 Liealgebren von Untergruppen

3.11.1 (**Liealgebra des Schnitts zweier abgeschlossener Untergruppen**). Gegeben $H, K \subset\!\!\!\!\!\! \circ\; G$ abgeschlossene Untergruppen einer affinen algebraischen Gruppe liefert die universelle Eigenschaft des ersten Quotienten einen injektiven Morphismus $c : H/H \cap K \hookrightarrow G/K$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Lie}(H \cap K) & \hookrightarrow & \operatorname{Lie} H & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_{\bar{e}}(H/H \cap K) \\
\cap & & \cap & & \downarrow \mathrm{d}_{\bar{e}} c \\
\operatorname{Lie} K & \hookrightarrow & \operatorname{Lie} G & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/K)
\end{array}$$

Wir sehen leicht, daß die rechte obere Horizontale in diesem Diagramm einen Isomorphismus $(\operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K)/\operatorname{Lie}(H \cap K) \xrightarrow{\sim} \ker \mathrm{d}_{\bar{e}} c$ induziert. Genau dann ist also dies Differential injektiv, wenn gilt $\operatorname{Lie}(H \cap K) = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K$. Das Bild unseres Morphismus c ist nun genau die H-Bahn $HK/K \subset G/K$. Nach Satz 3.9.11 über Isomorphismen von homogenen Räumen hat unser Morphismus genau dann injektives Differential, wenn er einen Isomorphismus $c : H/H \cap K \xrightarrow{\sim} HK/K$ induziert, und im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null ist das stets der Fall. Insbesondere gilt in Charakteristik Null stets

$$\operatorname{Lie}(H \cap K) = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K$$

Weiter gilt in Charakteristik Null notwendig

$$\operatorname{Lie} H \subset \operatorname{Lie} K \Rightarrow H^\circ \subset K$$

In der Tat, aus $\operatorname{Lie} H \subset \operatorname{Lie} K$ folgt $\operatorname{Lie} H = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} K = \operatorname{Lie}(H \cap K)$ und damit $\operatorname{kdim} H = \operatorname{kdim}(H \cap K)$.

Beispiel 3.11.2. Sein k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$. In $G := (k^2, +)$ haben die beiden abgeschlossenen Untergruppen $H := \{(x, y) \mid y = 0\}$ und $K := \{(x, y) \mid y = x^p\}$ denselben Tangentialraum im neutralen Element.

3.11.3 (**Liealgebren von Zentralisatoren**). Seien G eine affine algebraische Gruppe und $g \in G$. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Z}(g) & := & \{h \in G \mid ghg^{-1} = h\} \\
\mathfrak{z}(g) & := & \{X \in \operatorname{Lie} G \mid (\operatorname{Ad} g)X = X\}
\end{array}$$

Die Untergruppe $\mathrm{Z}(g)$ heißt der **Zentralisator von** g. Offensichtlich gilt die Inklusion $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}(g) \subset \mathfrak{z}(g)$, denn das Kommutieren des linken Diagramms impliziert das Kommutieren des Rechten in

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}(g) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Z}(g) \arrow[d, hook] \\
G \arrow[r, "\operatorname{int} g"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Lie} \mathrm{Z}(g) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Lie} \mathrm{Z}(g) \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Lie} G \arrow[r, "\operatorname{Ad} g"] & \operatorname{Lie} G
\end{tikzcd}$$

Im Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ gilt sogar stets $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}(g) = \mathfrak{z}(g)$, denn $\mathrm{Z}(g)$ ist schlicht der Schnitt mit $\mathrm{GL}(V)$ von $\mathfrak{z}(g) \subset \mathfrak{gl}(V)$ unter den üblichen Identifikationen.

3.11.4 (**Liealgebren von Zentralisatoren, Variante**). Ist allgemeiner $H \subset\!\!\!\!\circ\, G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit $\operatorname{Lie} H = \mathfrak{h}$, so setzen wir für $g \in G$ allgemeiner

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Z}_H(g) & := & H \cap \mathrm{Z}(g) \\ \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(g) & := & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(g) \end{array}$$

und haben wieder $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_H(g) \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(g)$. Im Fall der Charakteristik Null gilt hier sogar die Gleichheit $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_H(g) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(g)$, denn wir können $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen, und dann folgt

$$\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_H(g) = \operatorname{Lie}(H \cap \mathrm{Z}(g)) = \operatorname{Lie} H \cap \operatorname{Lie} \mathrm{Z}(g) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(g) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(g)$$

Beispiel 3.11.5. Für $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G = \mathrm{SL}_2(k)$ mit $\operatorname{char} k = 2$ erhalten wir

$$\mathrm{Z}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{aber} \quad \mathfrak{z}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$$

In diesem Fall gilt also $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}(g) \subsetneq \mathfrak{z}(g)$.

Satz 3.11.6 (**Liealgebren der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente**). *Seien $H \subset\!\!\!\!\circ\, G$ affine algebraische Gruppen und $s \in G$ ein halbeinfaches Element mit $sHs^{-1} = H$. So gilt* $\operatorname{Lie}(H^{\operatorname{int} s}) = (\operatorname{Lie} H)^{\operatorname{Ad} s}$ *alias*

$$\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_H(s) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(s)$$

3.11.7. Insbesondere erhalten wir $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}(s) = \mathfrak{z}(s)$ für jedes halbeinfache Element s einer affinen algebraischen Gruppe G.

Beweis. Man betrachte den Morphismus $\alpha : G \to G$, $h \mapsto hsh^{-1}s^{-1}$. Dann ist $\alpha(G) = C(s)s^{-1}$ die entsprechend verschobene Konjugationsklasse von s und $\alpha(H) = C_H(s)s^{-1}$ die entsprechend verschobene Bahn von s unter $\operatorname{int}(H)$. Andererseits gilt $\mathrm{d}_e\alpha : Y \mapsto Y - (\operatorname{Ad} s)(Y)$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$, wie Sie bereits in 3.4.10 gezeigt haben sollten. Ein Dimensionsvergleich zeigt, daß die Gleichheit im Satz äquivalent ist zur Surjektivität des Differentials $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_e H \to \mathrm{T}_e\alpha(H)$. Nun können wir sicher $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Damit ist die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e\alpha(G)$ bereits durch die Bemerkungen gegen Ende von 3.11.3 gesichert. Ist aber ganz allgemein $f : V \to V$ diagonalisierbar und $W \subset V$ ein unter f stabiler Teilraum, so gilt $f(V) \cap W = f(W)$, denn beide Seiten sind die Summe der Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten von $f : W \to W$. Da s halbeinfach angenommen war, können wir diese Erkenntnis auf $f = \mathrm{d}_e\alpha = \mathrm{id} - \operatorname{Ad} s$ anwenden und erhalten die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathfrak{h} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \cap \mathrm{T}_e\alpha(G)$ und a forteriori die Surjektivität $\mathrm{d}_e\alpha : \mathfrak{h} \twoheadrightarrow \mathrm{T}_e\alpha(H)$. $\square$

Satz 3.11.8 (Konjugationsklassen halbeinfacher Elemente). *Seien $H \subset\!\!\!\!\!\circ\, G$ affine algebraische Gruppen und $s \in G$ ein halbeinfaches Element mit $sHs^{-1} = H$. So ist die Bahn $\{hsh^{-1} \mid h \in H\}$ von s unter der Operation von H durch Konjugation abgeschlossen in G.*

3.11.9. Insbesondere ist die Konjugationsklasse jedes halbeinfachen Elements einer affinen algebraischen Gruppe abgeschlossen.

Beweis. Wieder reicht es, den Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ zu betrachten. Die Menge $M = M_s \subset G$ aller Elemente $g \in \mathrm{N}_G(H)$, auf denen das Minimalpolynom von s verschwindet und deren charakteristisches Polynom auf $\mathfrak{h}$ ebenfalls mit dem von s übereinstimmt, in Formeln $\mathrm{char}(\mathrm{Ad}(g)|\mathfrak{h}) = \mathrm{char}(\mathrm{Ad}(s)|\mathfrak{h})$, besteht dann aus halbeinfachen Matrizen, ist eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset\!\!\!\!\!\circ\, G$, und ist stabil unter Konjugation mit Elementen von H. Können wir zeigen, daß alle Bahnen in M unter der Operation von H durch Konjugation dieselbe Dimension haben, so haben wir gewonnen nach 2.3.4. Aber für $b \in M$ gilt ja

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{kdim}(\mathrm{int}(H)g) & = & \mathrm{kdim}\, H - \mathrm{kdim}\, \mathrm{Z}_H(g) \\ & = & \mathrm{kdim}\, H - \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(g) \end{array}$$

nach 3.11.6, und $\dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(g)$ ist die Vielfachheit von Eins als Eigenwert von $\mathrm{Ad}\, g$ auf $\mathfrak{h}$ und nach Konstruktion konstant für $g \in M$. □

3.11.10. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und eine Teilmenge $D \subset G$ setzen wir

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(D) := \bigcap_{d \in D} \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(d) = \{X \in \mathrm{Lie}\, G \mid (\mathrm{Ad}\, d)(X) = X \ \forall d \in D\}$$

Korollar 3.11.11. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und $D \subset\!\!\!\!\!\circ\, G$ eine abgeschlossene diagonalisierbare Untergruppe. So gilt*

$$\mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_G(D) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(D)$$

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über die Dimension $\mathrm{kdim}\, G$ von G. Gilt $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(D) = \mathfrak{g}$, so folgt $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(d) = \mathfrak{g}$ und damit $\mathrm{Z}_G(d) \supset G^0$ für alle $d \in D$ und damit $\mathrm{Z}_G(D) \supset G^0$ und die Behauptung ist klar. Sonst gibt es $d \in D$ mit $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(d) \neq \mathfrak{g}$, also $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Z}_G(d) \neq \mathfrak{g}$, also $\mathrm{kdim}\, \mathrm{Z}_G(d) < \mathrm{kdim}\, G$ und wir können die Induktionsannahme auf $D \subset \mathrm{Z}_G(d)$ anwenden. □

Übungen

Übung 3.11.12. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß in $\mathrm{GL}(n; k)$ nur die halbeinfachen Elemente eine abgeschlossene Konjugationsklasse haben. Man gebe eine Formel für die Dimensionen dieser Konjugationsklassen.

Übung 3.11.13. Sei G eine affine algebraische Gruppe und $D \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle\mathrm{A}}} G$ eine abgeschlossene diagonalisierbare Untergruppe. So wird G erzeugt von den Zentralisatoren $\mathrm{Z}_G(\ker \chi)$ für $\chi \in \mathrm{P}(\mathrm{Lie}\, G) \subset \mathfrak{X}(D)$ den Gewichten der auf D eingeschränkten adjungierten Darstellung.

4 Borel'sche Untergruppen und maximale Tori

4.1 Zusammenhängende auflösbare Gruppen

4.1.1. Ich erinnere 2.2.8. Gegeben Teilmengen A, B einer Gruppe G bezeichne (A, B) die von allen Kommutatoren $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe. Sind A und B Normalteiler, so ist auch (A, B) ein Normalteiler. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe (G, G) heißt die **derivierte Gruppe**. Wir notieren sie auch $\mathcal{D}G$.

Definition 4.1.2. Gegeben eine Gruppe G setzt man:

1. $\mathcal{D}^0 G = G$ und induktiv $\mathcal{D}^n G = (\mathcal{D}^{n-1}G, \mathcal{D}^{n-1}G)$ für $n \geq 1$;

2. $\mathcal{C}^0 G = G$ und induktiv $\mathcal{C}^n G = (G, \mathcal{C}^{n-1}G)$ für $n \geq 1$.

Alle diese Untergruppen sind Normalteiler von G.

4.1.3. Eine Gruppe ist auflösbar im Sinne von [AL] 1.3.10 genau dann, wenn gilt $\mathcal{D}^n G = 0$ für $n \gg 0$. Eine Gruppe ist nilpotent im Sinne von [AL] 1.3.11 genau dann, wenn gilt $\mathcal{C}^n G = 0$ für $n \gg 0$.

4.1.4. Zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppen notiere ich im folgenden vorzugsweise mit dem Buchstaben B, weil die Resultate insbesondere benötigt werden, um sie später auf die sogenannten „Borel'schen Untergruppen" anzuwenden.

4.1.5. Natürlich können wir zu jeder Gruppe G die Gruppe $G/\mathrm{Z}(G)$ konstruieren. Nilpotent ist eine Gruppe genau dann, wenn wiederholtes Anwenden dieser Konstruktion in endlich vielen Schritten von unserer Gruppe zur trivialen Gruppe führt. Die Zahl der hierbei benötigten Schritte heißt der **Nilpotenzgrad** unserer nilpotenten Gruppe. Nilpotenzgrad Null hat nur die triviale Gruppe, Nilpotenzgrad Eins ist gleichbedeutend zu nichttrivial und kommutativ.

4.1.6. Ist G eine zusammenhängende algebraische Gruppe, so sind die Untergruppen $\mathcal{C}^n G$ und $\mathcal{D}^n G$ alle abgeschlossen und zusammenhängend nach dem Satz über irreduzibles Erzeugen 2.2.11.

Satz 4.1.7 (Lie-Kolchin). *Alle irreduziblen algebraischen Darstellungen einer zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppe sind eindimensional.*

4.1.8. Die Bedingung zusammenhängend ist hier wesentlich. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ etwa ist auflösbar, hat aber eine zweidimensionale irreduzible reelle Darstellung als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks, die auch unter Komplexifizierung irreduzibel bleibt.

Beweis. Sei B unsere Gruppe und V eine von Null verschiedene Darstellung. Wir müssen zeigen, daß es in V eine unter B stabile Gerade gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir V endlichdimensional annehmen. Wir argumentieren nun mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Die Induktionsbasis $B = 1$ ist unproblematisch. Sonst gilt $\operatorname{kdim} \mathcal{D}B < \operatorname{kdim} B$ und wir dürfen die Existenz einer $\mathcal{D}B$-stabilen Gerade kv annehmen. Wie beim Beweis von 3.9.14 ist dann

$$\bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}B)} V_\chi$$

ein von Null verschiedener B-stabiler Teilraum und die B-Wirkung permutiert die Summanden. Da aber B zusammenhängend ist, muß sie alle Summanden stabilisieren und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V = V_\chi$ für ein $\chi \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}B)$ annehmen. Unter $\rho : B \to \mathrm{GL}(V)$ gilt nun sicher $\rho(\mathcal{D}B) \subset \mathrm{SL}(V)$, da ja $\mathcal{D}B$ von Kommutatoren erzeugt wird. Für alle $g \in \mathcal{D}B$ haben wir also $1 = \det \rho(g) = \chi(g)^{\dim V}$, und da die Gruppe $\mathcal{D}B$ zusammenhängend ist, folgt $\chi(g) = 1 \quad \forall g \in \mathcal{D}B$ und $\mathcal{D}B$ operiert trivial auf V. Dann aber ist $\rho(B) \subset \mathrm{GL}(V)$ eine Menge paarweise kommutierender Endomorphismen und besitzt nach [LA2] 3.2.19 einen simultanen Eigenvektor. □

4.1.9 (**Existenz stabiler Fahnen**). In jeder endlichdimensionalen Darstellung V einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe gibt es nach dem Satz von Lie-Kolchin eine Folge $V = V_r \supset V_{r-1} \supset \ldots \supset V_0 = 0$ von Unterdarstellungen mit $\dim V_i = i$. Gleichbedeutend gibt es stets eine Basis, bezüglich derer unsere Gruppe durch obere Dreiecksmatrizen operiert.

Korollar 4.1.10 (Struktur zusammenhängender nilpotenter Gruppen). *Gegeben eine zusammenhängende nilpotente affine algebraische Gruppe N sind N_u und N_s abgeschlossene Untergruppen, N_s liegt im Zentrum von N, und die Multiplikation ist ein Isomorphismus von algebraischen Gruppen*

$$N_\mathrm{s} \times N_\mathrm{u} \xrightarrow{\sim} N$$

4.1.11. Insbesondere sind auch N_s und N_u zusammenhängend und N_s ist ein zentraler Torus.

Beweis. Für N kommutativ hatten wir das bereits in 1.4.8 gezeigt, sogar ohne N zusammenhängend vorauszusetzen. Gegeben $s \in N_\mathrm{s}$ betrachten wir nun $\varphi = \varphi_s : N \to N$, $x \mapsto sxs^{-1}x^{-1}$. Nach Annahme ist φ^n konstant für $n \gg 0$. Andererseits wird das Differential von φ gegeben durch $\mathrm{d}_1\varphi = (\operatorname{Ad} s) - \mathrm{id}$ und aus φ^n konstant folgt $\operatorname{Ad} s = \mathrm{id}$ und mit 3.11.6 erst $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_N(s) = \operatorname{Lie} N$ und, da N zusammenhängend ist, sogar $\mathrm{Z}_N(s) = N$ alias $s \in \mathrm{Z}(N)$. Nun ist aber $\mathrm{Z}(N)$

kommutativ, also $N_{\mathrm{s}} = \mathrm{Z}(N)_{\mathrm{s}} \ntriangleleft \mathrm{Z}(N) \ntriangleleft N$ nach dem Fall kommutativer Gruppen, den wir bereits als 1.4.8 behandelt hatten. Die Existenz und Eindeutigkeit Jordanzerlegung zeigt dann, daß die Multiplikation einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{u}} \to N$$

liefert. Um zu zeigen, daß er sogar ein Isomorphismus von Varietäten ist, dürfen wir $N \ntriangleleft \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Sei $V = \bigoplus V_\chi$ die Zerlegung in simultane Eigenräume unter N_{s}. Nun wählen wir mithilfe des Satzes von Lie-Kolchin in jedem V_χ eine Basis, bezüglich derer N durch obere Dreiecksmatrizen operiert. So ist für $g \in N$ notwendig g_{s} der diagonale Anteil von N, und auf diese Weise erhalten wir den inversen Morphismus im Korollar. □

Korollar 4.1.12. *Für jede zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe B gilt:*

1. *Die derivierte Gruppe ist unipotent, in Formeln $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$;*

2. *Die Menge der unipotenten Elemente ist ein zusammenhängender abgeschlossener nilpotenter Normalteiler $B_{\mathrm{u}} \ntriangleleft B$ und der Quotient B/B_{u} ist ein Torus.*

Beweis. Fast alle Aussagen folgen unmittelbar aus der Existenz einer abgeschlossenen Einbettung von B in eine Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen 4.1.9. Nicht unmittelbar klar ist nur, daß B/B_{u} ein Torus ist und daß B_{u} zusammenhängend ist. Der Quotient B/B_{u} ist zusammenhängend und kommutativ wegen $B_{\mathrm{u}} \supset (B, B)$ und besteht nur aus halbeinfachen Elementen, muß also ein Torus sein nach 1.7.15. Es bleibt zu zeigen, daß B_{u} zusammenhängend ist. Sonst wäre auch $B_{\mathrm{u}}^\circ \subset B$ ein Normalteiler und in $H := B/B_{\mathrm{u}}^\circ$ wäre H_{u} eine endliche normale Untergruppe, also $H_{\mathrm{u}} \subset \mathrm{Z}(H)$ und damit $(H, H) \subset \mathrm{Z}(H)$. Dann aber wäre H nilpotent zusammenhängend und H_{u} zusammenhängend nach 4.1.11. □

Übungen

Übung 4.1.13. Jede abgeschlossene Untergruppe der Kodimension Eins in einer zusammenhängenden nilpotenten affinen algebraischen Gruppe ist ein Normalteiler. Hinweis: Entweder unsere Untergruppe umfaßt die Einskomponente des Zentrums, oder sie umfaßt sie eben nicht.

Übung 4.1.14. Für $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen ist die Gruppe $\mathrm{SL}(2; k)$ nicht auflösbar. Die Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{F}_2)$ ist auflösbar.

4.2 Maximale Tori in auflösbaren Gruppen

Definition 4.2.1. Ein **maximaler Torus** in einer affinen algebraischen Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe, die ein Torus ist und maximal mit dieser Eigenschaft bezüglich Inklusion.

4.2.2. Offensichtlich besitzt jede algebraische Gruppe maximale Tori.

Satz 4.2.3 (**Maximale Tori in auflösbaren Gruppen**). *Sei B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe. So gilt:*

1. *Für jeden maximalen Torus $T \subset B$ liefert die Multiplikation einen Isomorphismus von Varietäten*
$$T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$$
2. *Je zwei maximale Tori von B sind zueinander konjugiert;*
3. *Jede Teilmenge $X \subset B_{\mathrm{s}}$ mit paarweise kommutierenden Elementen liegt in einem maximalen Torus von B.*

Vorschau 4.2.4. In 4.6.11 zeigen wir, daß sogar in einer beliebigen affinen algebraischen Gruppe je zwei maximale Tori konjugiert sind. Dieser Beweis stützt sich aber ganz wesentlich auf den vorhergehenden Satz.

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus der anschließenden Proposition 4.2.5, in deren Beweis sich die eigentliche Arbeit versteckt. Daß für T wie dort, also mit $TB_{\mathrm{u}} = B$, die Multiplikation ein Isomorphismus $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ ist, folgt so: Wegen $T \cap B_{\mathrm{u}} = 1$ erhalten wir eine Bijektion. Aus der Jordan-Zerlegung in der Lie-Algebra folgt $\operatorname{Lie} T \cap \operatorname{Lie} B_{\mathrm{u}} = 0$, also ist das Differential am neutralen Element aus Dimensionsgründen bijektiv. Nach 4.1.12 ist B_{u} zusammenhängend, und nun können wir B als homogene Varietät für die simultane Linksoperation von T und Rechtsoperation von B_{u} betrachten und unseren Satz 3.9.11 über Isomorphismen homogener Räume anwenden. □

Proposition 4.2.5. *Sei B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe. So gibt es einen Torus $T \subset B$ mit $TB_{\mathrm{u}} = B$ und der zusätzlichen Eigenschaft, daß es für jede Teilmenge $X \subset B_{\mathrm{s}}$ aus paarweise kommutierenden Elementen ein $g \in (T, B_{\mathrm{u}})$ gibt mit $gXg^{-1} \subset T$.*

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über $\operatorname{kdim} B$. Die Induktionsbasis ist unproblematisch. Im Fall $B = B_{\mathrm{s}}$ folgt $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}} = 1$ und B ist kommutativ, also nach 1.7.15 ein Torus. Wir dürfen also $B \neq B_{\mathrm{s}}$ alias $B_{\mathrm{u}} \neq 1$ annehmen. Dann gibt es einen minimalen unipotenten zusammenhängenden nichttrivialen Normalteiler $U \not\triangleleft B$, denn B_{u} hat alle diese Eigenschaften nach 4.1.12. Als unipotente

Gruppe ist U nilpotent und es folgt $\mathcal{D}U \subsetneq U$ und folglich $\mathcal{D}U = 1$ wegen der Minimalität von U. Mithin ist unser U kommutativ. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: $\bar{B} := B/U$ ist kein Torus. Dann wenden wir die Induktionsannahme an und finden in $\bar{B}$ einen Torus $\bar{T} \subset \bar{B}$ mit $\bar{T}\bar{B}_{\mathrm{u}} = \bar{B}$ und den weiteren oben ausgeführten Eigenschaften. Bezeichnet $\pi : B \twoheadrightarrow \bar{B}$ die Projektion, so ist $\tilde{B} := \pi^{-1}(\bar{T})$ auch auflösbar zusammenhängend und wegen unserer Annahme $\bar{T} \neq \bar{B}$ ist $\tilde{B} \subset B$ eine echte Untergruppe. Wir können unsere Induktionsannahme so ein weiteres Mal anwenden und einen Torus $\tilde{T} \subset \tilde{B}$ finden mit $\tilde{T}\tilde{B}_{\mathrm{u}} = \tilde{B}$ und den weiteren oben ausgeführten Eigenschaften. Im folgenden prüfen wir, daß dies $\tilde{T}$ auch die von unserem Torus T von B in der Proposition geforderten Eigenschaften hat. In der Tat liefert $\pi : B \twoheadrightarrow \bar{B}$ nach 1.4.12 eine Surjektion $B_{\mathrm{u}} \twoheadrightarrow \bar{B}_{\mathrm{u}}$. Es folgt $\tilde{B}B_{\mathrm{u}} = B$ und dann sofort $\tilde{T}B_{\mathrm{u}} = B$. Man beachte, daß daraus auch folgt $\pi(\tilde{T}) = \bar{T}$. Sei weiter $X \subset B_{\mathrm{s}}$ eine kommutative Teilmenge. Dasselbe gilt dann für $\pi(X) \subset \bar{B}_{\mathrm{s}}$ und Induktion liefert $\bar{g} \in (\bar{T}, \bar{B}_{\mathrm{u}})$ mit $\bar{g}\pi(X)\bar{g}^{-1} \subset \bar{T}$. Dann aber gibt es auch $g \in (T, B_{\mathrm{u}})$ mit $g \mapsto \bar{g}$ und für dies g gilt $g(\pi^{-1}(\pi(X))g^{-1} \subset \tilde{B}$. Erst recht folgt $gXg^{-1} \subset \tilde{B}$ und wieder mit Induktion finden wir $h \in (\tilde{T}, \tilde{B}_{\mathrm{u}})$ mit $hgXg^{-1}h^{-1} \subset \tilde{T}$. Damit ist der Fall erledigt, daß B/U kein Torus ist.

Fall 2: $\bar{B} := B/U$ ist ein Torus. Es folgt sofort $U = B_{\mathrm{u}}$. Ist zusätzlich B_{u} zentral in B, so muß wegen $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ unsere Gruppe sogar nilpotent sein und dann nach dem Satz 4.1.10 über die Struktur nilpotenter Gruppen ist dann B_{s} eine Untergruppe und die Multiplikation ein Isomorphismus $B_{\mathrm{s}} \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ und B_{s} ist der einzige maximale Torus und die Behauptung ist klar. Wir dürfen also annehmen, daß $U = B_{\mathrm{u}}$ nicht zentral ist in B. Da U kommutativ ist, gibt es dann $s \in B_{\mathrm{s}}$ mit $s \notin \mathrm{Z}_B(U)$. Im Rest des Beweises soll gezeigt werden, daß in dieser Situation $\mathrm{Z}_B(s)$ der ersehnte Torus mit den gesuchten Eigenschaften ist. Da U kommutativ ist, muß

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & U & \to & U \\ & u & \mapsto & sus^{-1}u^{-1} \end{array}$$

ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen sein. Nach Wahl von s ist er nicht konstant. Sein Bild ist ein Normalteiler in B, denn wir haben

$$g\varphi(u)g^{-1} = gsg^{-1}vgs^{-1}g^{-1}v^{-1} = (g, s)svs^{-1}(s, g)v^{-1} = \varphi(v) \text{ für } v = gug^{-1}$$

für $v = gug^{-1}$, da $(B, B) \subset B_{\mathrm{u}} = U$ kommutativ ist und $(g, s)(s, g) = 1$ gilt. Die Minimalität von U vom Anfang des Beweises zeigt dann $\varphi(U) = U$. Nun zeigen wir $\mathrm{Z}_B(s)U = B$. In der Tat haben wir für $g \in B$ stets $sgs^{-1}g^{-1} \in \mathcal{D}B \subset B_{\mathrm{u}} = U = \varphi(U)$ und folglich gibt es $u \in U$ mit $sgs^{-1}g^{-1} = sus^{-1}u^{-1}$, woraus folgt $u^{-1}g \in \mathrm{Z}_B(s)$. Dann zeigen wir $\mathrm{Z}_B(s) \cap U = 1$. In der Tat können wir jedes g im Schnitt schreiben als $g = sus^{-1}u^{-1}$ und finden $s^{-1}g = us^{-1}u^{-1}$.

Dann wäre die linke Seite die Jordan-Zerlegung der rechten Seite, und das zeigt $g = 1$. Wegen $\mathrm{Z}_B(s) \cap B_\mathrm{u} = 1$ besteht $\mathrm{Z}_B(s)$ aus halbeinfachen Elementen. Dann zeigen wir, daß $\mathrm{Z}_B(s)$ zusammenhängend ist. In der Tat ist $U = B_\mathrm{u}$ ein Normalteiler von B und wir können das semidirekte Produkt $\mathrm{Z}_B(s)^\circ \ltimes U$ bilden mitsamt einem offensichtlichen Gruppenhomomorphismus nach B. Dessen Bild $\mathrm{Z}_B(s)^\circ U$ ist notwendig eine abgeschlossene Untergruppe von B von endlichem Index, also ganz B, und daraus folgt $\mathrm{Z}_B(s)^\circ = \mathrm{Z}_B(s)$. Jetzt folgt, daß $\mathrm{Z}_B(s)$ kommutativ ist, denn es ist auflösbar und zusammenhängend, also besteht seine derivierte Gruppe nach 4.1.12 aus unipotenten Elementen. Also ist $\mathrm{Z}_B(s) =: T$ schon mal ein Torus mit $TU = B$. Sei schließlich $X \subset B_\mathrm{s}$ kommutativ. Gilt $X \subset \mathrm{Z}_B(U)$, so führt für jedes $x \in X$ die Darstellung $x = tu$ mit $t \in T$ und $u \in U$ zu $u^{-1}x = xu^{-1} = t$ und die Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung zeigt $x = t \in T$, also $X \subset T$. Sonst gibt es $r \in X$ mit $r \notin \mathrm{Z}_B(U)$. Nach dem, was wir bereits bewiesen haben, ist dann auch $\mathrm{Z}_B(r)$ ein Torus und $\psi : U \to U$, $u \mapsto rur^{-1}u^{-1}$ ist bijektiv. Außerdem gilt natürlich $X \subset \mathrm{Z}_B(r)$. Schreiben wir nun $r^{-1} = tu$ mit $t \in T, u \in U$, so gibt es $v \in U$ mit $u^{-1} = rvr^{-1}v^{-1}$, also $t = vr^{-1}v^{-1}$, also $v\mathrm{Z}_B(r)v^{-1} = \mathrm{Z}_B(t) \supset T$ und damit $v\mathrm{Z}_B(r)v^{-1} = T$. Da schließlich wegen der Bijektivität von φ gilt $U = (T, B_\mathrm{u})$, haben wir $v \in (T, B_\mathrm{u})$ und die Proposition ist bewiesen. □

Übungen

Übung 4.2.6. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Diagonalmatrizen in der $\mathrm{GL}(n; k)$ einen maximalen Torus bilden, und daß jeder maximale Torus zu diesem konjugiert ist. Man zeige dasselbe in der Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$.

Übung 4.2.7. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß in der Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ jede aus halbeinfachen Elementen bestehende kommutative Teilmenge in einem maximalen Torus enthalten ist. Man zeige, daß das für den Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik im Quotienten $\mathrm{GL}(2; k)/\{\pm \mathrm{id}\}$ nicht mehr richtig ist.

Übung 4.2.8. Man zeige: Der Zentralisator eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist stets nilpotent.

Übung 4.2.9. Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $T \subset B$ ein Torus. Man zeige: Es gibt eine abgeschlossene Einbettung von B in die oberen Dreiecksmatrizen, unter der alle Elemente unseres Torus auf Diagonalmatrizen gehen. Ist hier T sogar ein maximaler Torus, so muß er der Schnitt von B mit der Gruppe der Diagonalmatrizen sein.

Übung 4.2.10. Man zeige: Ist B eine auflösbare affine algebraische Gruppe und $S \subset B$ ein Torus, so ist SB_u eine abgeschlossene Untergruppe von B.

4.3 Zentralisatoren in auflösbaren Gruppen

Satz 4.3.1 (Zentralisatoren halbeinfacher Elemente). *In einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist der Zentralisator jedes halbeinfachen Elements zusammenhängend.*

Ergänzung 4.3.2. Der folgende Beweis kommt ohne die Klassifikation eindimensionaler zusammenhängender Gruppen aus. Kennt man diese Klassifikation, so kann man folgern, daß im Beweis U/V isomorph sein muß zu $(k, +)$, und kann den Beweis entsprechend vereinfachen.

Ergänzung 4.3.3. Soweit ich auf die Schnelle sehen kann, zeigt der Beweis allgemeiner, daß gegeben eine zusammenhängende unipotente algebraische Gruppe mit einem halbeinfachen Automorphismus, also einem Automorphismus, der einen halbeinfachen Automorphisms auf dem Vektorraum der regulären Funktionen induziert, daß dann die Fixpunktmenge so eines Automorphismus wieder zusammenhängend ist.

Beweis. Sei B unsere Gruppe und $s \in B_{\mathrm{s}}$ unser halbeinfaches Element. Wir finden nach 4.2.3 einen maximalen Torus T über s und folgern $T \subset \mathrm{Z}_B(s)$. Nach 4.2.3 ist die Multiplikation ein Isomorphismus

$$T \times (\mathrm{Z}_B(s) \cap B_{\mathrm{u}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}_B(s)$$

und in Charakteristik Null ist der Beweis an dieser Stelle zu Ende, weil dort nach 3.9.26 jede unipotente Gruppe zusammenhängend ist. Im allgemeinen können wir B nach 4.2.9 so in eine Gruppe H von oberen Dreiecksmatrizen einbetten, daß T in den Diagonalmatrizen landet. Wir finden leicht eine Filtrierung $H_{\mathrm{u}} = H(0) \supset H(1) \supset \ldots \supset H(r) = 1$ durch Normalteiler von H mit sukzessiven Subquotienten die additive Gruppe $(k, +)$. Herunterschneiden liefert eine Filtrierung $B_{\mathrm{u}} =: U = U(0) \supset U(1) \supset \ldots \supset U(r) = 1$ durch Normalteiler von B, deren sukzessive Subquotienten injektive Gruppenhomomorphismen

$$U(i)/U(i+1) \hookrightarrow k$$

zulassen. Ist B_{u} trivial, so ist der Beweis wieder zu Ende. Da B_{u} zusammenhängend ist, finden wir sonst ein kleinstes i mit $U \supsetneq U(i+1)$ und haben dann einen bijektiven Gruppenhomomorphismus $U/U(i+1) \to k$ und für $V := U(i+1)^{\circ}$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $p : U/V \twoheadrightarrow k$ mit endlichem Kern. Mit Induktion über die Dimension von B dürfen wir die Aussage für das semidirekte Produkt $T \ltimes V$ vorraussetzen und mithin $\mathrm{Z}_V(s)$ zusammenhängend annehmen. Nach Konstruktion gibt es $\alpha \in k^\times$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U/V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi:=\mathrm{int}(s)"'] & k \arrow[d, "\alpha"] \\ U/V \arrow[r, two heads] & k \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann kommutiert dasselbe Diagramm auch mit $\psi : U/V \to U/V$ links und $(\alpha - 1)$ rechts, für $\psi(x) = \varphi(x)x^{-1}$. Da U/V als eindimensionale zusammenhängende unipotente Gruppe kommutativ ist, ist auch ψ ein Gruppenhomomorphismus. Haben wir hier $\alpha \neq 1$, so muß auch ψ birational und mithin nach 2.1.20 bijektiv sein und φ hat keine Fixpunkte außer dem neutralen Element. Es folgt $\mathrm{Z}_U(s) = \mathrm{Z}_V(s)$ und das ist zusammenhängend nach Induktionsannahme. Haben wir sonst $\alpha = 1$, so landet ψ im Kern von p, ist folglich konstant das neutrale Element, und damit ist φ die Identität. Dann betrachten wir die linksexakte Sequenz

$$\mathrm{Z}_V(s) \hookrightarrow \mathrm{Z}_U(s) \xrightarrow{\pi} U/V$$

Ist hier π surjektiv, so sind wir wieder fertig. Sonst aber gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{kdim}(\operatorname{im}\pi) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{kdim} \mathrm{Z}_V(s) = \operatorname{kdim} \mathrm{Z}_U(s) \\ &\Rightarrow \quad (\operatorname{Lie} V)^{\mathrm{Ad}(s)} = (\operatorname{Lie} U)^{\mathrm{Ad}(s)} \end{aligned}$$

nach 3.11.6. Nun haben wir aber eine kurze exakte Sequenz

$$\operatorname{Lie} V \hookrightarrow \operatorname{Lie} U \twoheadrightarrow \operatorname{Lie}(U/V)$$

und die $(\mathrm{Ad}\, s)$-Invarianten darin müssen, da s halbeinfach ist, auch eine kurze exakte Sequenz bilden. Daraus folgt, daß rechts die Null der einzige Fixpunkt von $(\mathrm{Ad}\, s)$ ist, im Widerspruch zu $\alpha = 1$. □

Korollar 4.3.4. *Seien B eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $S \subset B_{\mathrm{s}}$ eine kommutative Teilmenge aus halbeinfachen Elementen. So ist $\mathrm{Z}_B(S)$ zusammenhängend.*

Beweis. Natürlich gilt für jedes $s \in S$ die Identität $\mathrm{Z}_B(S) = \mathrm{Z}_{\mathrm{Z}_B(s)}(S)$. Induktion über die Dimension unter Anwendung von 4.3.1 zeigt die Behauptung. □

Lemma 4.3.5. *Seien B eine auflösbare zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $S \subset B$ eine kommutative Untergruppe mit $S \subset B_{\mathrm{s}}$. So gilt*

$$\mathrm{Z}_B(S) = \mathrm{N}_B(S)$$

Beweis. Seien $h \in \mathrm{N}_B(S)$ und $s \in S$ gegeben. Wir finden $hsh^{-1}s^{-1} \in (B, B) \subset B_{\mathrm{u}}$ aber auch $hsh^{-1}s^{-1} = (hsh^{-1})s^{-1} \in B_{\mathrm{s}}$. □

Zweiter Beweis. Die Operation durch Konjugation von B auf dem Torus B/B_{u} ist trivial wegen der Starrheit von Tori 1.7.14. Wegen $S \subset B_{\mathrm{s}}$ ist aber die Komposition $S \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/B_{\mathrm{u}}$ injektiv. Das Lemma folgt. □

4.4 Vollständige Varietäten

Definition 4.4.1. Eine Varietät X heißt **vollständig**, wenn für alle Varietäten Y die Projektion $X \times Y \to Y$ abgeschlossen ist.

Beispiel 4.4.2. Die Varietät k ist nicht vollständig: In $k \times k$ ist die Hyperbel $\{xy = 0\}$ abgeschlossen, ihre Projektion auf die x-Achse ist aber nicht abgeschlossen.

4.4.3. Wir werden im folgenden sehen, daß die Vollständigkeit ein algebraisches Analogon zur Kompaktheit von Mannigfaltigkeiten ist. Vollständige Varietäten sind auch genau die Varietäten, deren Projektion auf einen Punkt eigentlich ist im Sinne von [KAG] 6.8.17.

Lemma 4.4.4 (Eigenschaften vollständiger Varietäten).

1. *Die Varietät $\mathbb{P}^n k$ ist vollständig für alle $n \geq 0$;*
2. *Jede abgeschlossene Untervarietät einer vollständigen Varietät ist vollständig;*
3. *Das Produkt von zwei vollständigen Varietäten ist vollständig;*
4. *Gegeben ein surjektiver Morphismus von Varietäten $X \twoheadrightarrow Y$ mit X vollständig folgt Y vollständig;*
5. *Das Bild einer vollständigen Varietät unter einem Morphismus in eine separierte Varietät ist abgeschlossen und vollständig;*
6. *Jede reguläre Funktion auf einer irreduziblen vollständigen Varietät ist konstant;*
7. *Eine affine Varietät ist vollständig genau dann, wenn sie endlich ist.*

Beweis. Teil 1 zeigen wir in der anschließenden Proposition 4.4.5. Die Teile 2 und 3 sind klar. Teil 4 ist klar. Für 5 betrachtet man zu einem Morphismus $\varphi : X \to Y$ den Graphen $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$. Ist Y separiert, so ist er abgeschlossen nach **??** und man folgert $\varphi(X) = \mathrm{pr}_Y(\Gamma_\varphi) \overset{\subset}{\scriptstyle\triangle} Y$. Die Vollständigkeit von $\varphi(X)$ folgt aus 4. Aus Teil 4 folgt Teil 6, denn k ist nicht vollständig nach 4.4.2, folglich sind die endlichen Teilmengen die einzigen vollständigen abgeschlossenen Untervarietäten von k. Daraus hinwiederum folgt Teil 7 unmittelbar. $\square$

Proposition 4.4.5. *Für jede Varietät Y ist die Projektion $\pi : \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ abgeschlossen.*

Algebraischer Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit Y affin. Wir setzen $S := \mathcal{O}(Y)[T_0, \ldots, T_n]$. Jede abgeschlossene Teilmenge $Z \overset{\subset}{\scriptstyle\triangle} Y \times \mathbb{P}^n$ ist nach [KAG] 7.2.10 von der Gestalt $Z = \mathcal{Z}^*(I)$ für ein homogenes Ideal $I \subset S$, und für $y \in Y$ mit Verschwindungsideal $\mathcal{I}(y) \subset \mathcal{O}(Y)$ haben wir $\pi^{-1}(y) = \mathcal{Z}^*(\mathcal{I}(y)S)$. Es folgt

$$Z \cap \pi^{-1}(y) = \mathcal{Z}^*(\mathcal{I}(y)S + I)$$

Nach [KAG] 7.2.10 haben wir also $Z \cap \pi^{-1}(y) = \emptyset$ genau dann, wenn es ein d gibt derart, daß für die homogenen Komponenten vom Grad d gilt $(\mathcal{I}(y)S + I)_d = S_d$, also genau dann, wenn für ein d die offensichtliche Abbildung $I_d \to S_d/\mathcal{I}(y)S_d$ eine Surjektion ist. Nun sind aber $I_d \subset S_d$ endlich erzeugte $\mathcal{O}(Y)$-Moduln und nach dem Nakayama-Lemma [KAG] 3.4.4 ist dann die Menge aller $y \in Y$, für die $I_d \to S_d/\mathcal{I}(y)S_d$ surjektiv ist, eine offene Teilmenge von Y. Das zeigt, daß das Komplement von $\pi(Z)$ offen ist in Y. □

Geometrischer Beweis. Sei $A \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} \mathbb{P}^n \times Y$ eine abgeschlossene Teilmenge. Es gilt zu zeigen $\mathrm{pr}_Y(A) \overset{\scriptscriptstyle A}{\subset} Y$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir A irreduzibel und $\mathrm{pr}_Y(A)$ dicht annehmen und müssen dann $\mathrm{pr}_Y(A) = Y$ zeigen. Klar ist $\operatorname{kdim} A \geq \operatorname{kdim} Y$. Jetzt betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, hook] & \pi^{-1}(A) =: B \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook] & \overline{j(B)} =: C \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}^n \times Y \arrow[dr] & (k^{n+1}\backslash 0) \times Y \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & k^{n+1} \times Y \arrow[dl] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Für $B := \pi^{-1}(A)$ gilt $\operatorname{kdim} B > \operatorname{kdim} Y$ und für $C := \overline{j(B)}$ gilt $j^{-1}(C) = B$. Weiter gilt $C \supset \{0\} \times \mathrm{pr}_2(A)$, also auch $C \supset \{0\} \times Y$. Für alle $y \in Y$ ist also $C \cap (k^{n+1} \times \{y\})$ nicht leer und wegen $\operatorname{kdim} C = \operatorname{kdim} B > \operatorname{kdim} Y$ muß jede Komponente unseres Schnitts mindestens die Dimension Eins haben und folglich auch Punkte (v, y) mit $v \in k^{n+1}\backslash 0$ enthalten. So folgt $y \in \mathrm{pr}_Y(A)$. □

Ergänzung 4.4.6. Jede vollständige zusammenhängende algebraische Gruppe G ist kommutativ. In der Tat betrachte man den Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G \times G & \to & G \times G \\ & (g, h) & \mapsto & (g, hgh^{-1}) \end{array}$$

Sein Bild ist abgeschlossen nach 4.4.4 und umfaßt die Diagonale. Wäre sein Bild aber nicht die Diagonale, so folgte $\operatorname{kdim} \varphi(G \times G) > \operatorname{kdim} G$ und nach [KAG] **??** steht das im Widerspruch zu $\varphi(G \times G) \cap (1 \times G) = \{(1, 1)\}$.

Lemma 4.4.7 (Morphismen von Kurven in vollständige Varietäten). *Ist Y eine vollständige Varietät und X eine Kurve und $p \in X$ ein regulärer Punkt und $\varphi : X \backslash p \to Y$ ein Morphismus, so gibt es eine Fortsetzung von φ zu einem Morphismus $\tilde{\varphi} : X \to Y$.*

4.4.8. Ist Y separiert, so ist diese Fortsetzung sogar eindeutig bestimmt. Wir werden unser Lemma im folgenden nicht benötigen. Ich halte es aber für ein wichtiges Stück Allgemeinbildung.

Beweis. Wir betrachten die Einbettung $i : X \backslash p \hookrightarrow X$ und den Morphismus

$$(\varphi, i) : (X \backslash p) \hookrightarrow Y \times X.$$

Der Abschluß des Bildes dieses Morphismus $A := \overline{\mathrm{im}(\varphi, i)}$ muß unter der Projektion $\mathrm{pr}_X : Y \times X \to X$ wegen der Vollständigkeit von Y auf eine abgeschlossene Teilmenge von X abgebildet werden, wir haben also $\mathrm{pr}_X(A) = X$. Insbesondere gibt es $a \in A$ mit $\mathrm{pr}_X(a) = p$. Nun dürfen wir nach [KAG] 5.6.17 zusätzlich X irreduzibel annehmen. Dann ist natürlich $\psi := \mathrm{pr}_X : A \to X$ ein birationaler Morphismus, denn er induziert einen Isomorphismus $\psi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ für alle $U \Subset X$ mit $p \notin U$. Andererseits induziert der Komorphismus Injektionen $\psi^\sharp : \mathcal{O}_{X,p} \hookrightarrow \mathcal{O}_{A,a}$ für alle $a \in \psi^{-1}(p)$. Wegen der Maximalität diskreter Bewertungsringe [KAG] 5.8.17 induziert $\psi^\sharp$ dann sogar Isomorphismen $\psi^\sharp : \mathcal{O}_{X,p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{A,a}$. Das aber zeigt, daß wir für jeden Punkt $a \in \psi^{-1}(p)$ eine Fortsetzung von $(\varphi, i) : X \backslash p \to A$ erhalten durch die Vorschrift $p \mapsto a$. □

Übungen

Übung 4.4.9. Eine nichtleere echte offene Teilmenge einer irreduziblen Varietät kann nie vollständig sein. Eine Varietät, die durch endlich viele vollständige Untervarietäten überdeckt werden kann, ist vollständig.

Ergänzende Übung 4.4.10. Sei G eine algebraische Gruppe. So gibt es unter den vollständigen zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppen von G eine Größte, und die liegt im Zentrum von G.

4.5 Parabolische Untergruppen

Lemma 4.5.1. *Ist $\varphi : X \to Y$ ein bijektiver äquivarianter Homomorphismus von homogenen Räumen, so ist X vollständig genau dann, wenn Y vollständig ist.*

Beweis. Nach 2.3.9 ist φ produktfest offen, also ist für jede Varietät Z der Morphismus $(\varphi \times \mathrm{id}) : X \times Z \to Y \times Z$ ein Homöomorphismus. Die Definition der Vollständigkeit liefert den Rest. □

Definition 4.5.2. Eine Untergruppe $P \subset G$ einer affinen algebraischen Gruppe heißt **parabolisch**, wenn sie abgeschlossen und der homogene Raum G/P vollständig ist.

4.5.3. Da unsere Quotienten stets quasiprojektiv sind, ist der Quotient nach einer parabolischen Untergruppe sogar projektiv.

4.5.4 (**Ursprung der Terminologie**). Die nichttrivialen Elemente von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ heißen je nach dem Betrag ihrer Spur

elliptisch	falls $\vert\,\mathrm{tr}\,\vert < 2$;
parabolisch	falls $\vert\,\mathrm{tr}\,\vert = 2$;
hyperbolisch	falls $\vert\,\mathrm{tr}\,\vert > 2$.

Diese Terminologie erklärt sich im ersten und letzten Fall aus der Gestalt der Kegelschnitte, die von unserem Element in sich selber überführt werden. Genauer ist die Menge der Eigenwerte unserer Matrix stabil unter der komplexen Konjugation. Sie sind also entweder beide reell von der Gestalt λ, λ^{-1} oder komplex konjugiert von der Gestalt $\lambda, \bar{\lambda}$ mit $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Man rechnet leicht nach, daß der hyperbolische Fall der erste Fall ist mit der Zusatzannahme $\lambda \neq \pm 1$, der elliptische Fall der zweite Fall bei $\lambda \neq \pm 1$ mit derselben Zusatzannahme und der parabolische Fall der Grenzfall $\lambda = \bar{\lambda} = \lambda^{-1} = \pm 1$. Im hyperbolischen Fall bildet unser Element geeignete Hyperbeln in $\mathbb{R}^2$ auf sich selber ab und im elliptischen Fall geeignete Ellipsen. Der parabolische Fall erhält dann seinen Namen, weil die Parabeln unter allen Kegelschnitten in gewisser Weise „zwischen“ den Ellipsen und den Hyperbeln liegen. Die archetypische parabolische Untergruppe ist nun, wie wir noch sehen werden, die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{SL}(2;k)$, und der Normalisator vom Abschluß des Erzeugnisses von einem Element mit zwei gleichen Eigenwerten ist stets parabolisch. Das ist die einzige Idee, die ich zur Herkunft der Terminologie habe. Ich kann sie aber leider nicht belegen.

Lemma 4.5.5 (Transitivität der Parabolizität). *Seien $Q \overset{\scriptscriptstyle\mathrm{A}}{\subset} P \overset{\scriptscriptstyle\mathrm{A}}{\subset} G$ affine algebraische Gruppen. Genau dann ist Q parabolisch in G, wenn Q parabolisch ist in P und P parabolisch in G.*

Beweis. Für eine abgeschlossene Untergruppe $K \overset{\scriptscriptstyle\mathrm{A}}{\subset} H$ einer affinen algebraischen Gruppe sind gleichbedeutend:

1. Die Untergruppe K ist parabolisch in H;
2. Für jede Varietät X ist die Projektion $H/K \times X \to X$ abgeschlossen;
3. Für jede Varietät X und jede abgeschlossene Teilmenge $A \overset{\scriptscriptstyle\mathrm{A}}{\subset} H \times X$ mit $(h, x) \in A \Rightarrow (hk, x) \in A \;\forall k \in K$ ist $\mathrm{pr}_X(A)$ abgeschlossen in X.

In der Tat ist $1 \Leftrightarrow 2$ die Definition der Vollständigkeit und $2 \Leftrightarrow 3$ folgt, da nach 2.3.9 die Projektion $H \twoheadrightarrow H/K$ produktfest offen ist. Nach dieser Vorüberlegung beginnen wir mit dem eigentlichen Beweis. Sei X eine Varietät und $A \overset{\subset}{\scriptstyle\mathrm{A}} G \times X$ abgeschlossen Q-stabil. Wir betrachten

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & P \times G \times X & \to & G \times X \\ & (p, g, x) & \mapsto & (gp, x) \end{array}$$

Sicher ist $\alpha^{-1}(A)$ dann Q-stabil für die Rechtsoperation auf der ersten Variablen, und da $Q \overset{\subset}{\scriptstyle\mathrm{A}} P$ parabolisch ist, muß $\mathrm{pr}_{G \times X}(\alpha^{-1}(A))$ abgeschlossen sein in $G \times X$. Diese Menge läßt sich beschreiben als

$$\mathrm{pr}_{G \times X}(\alpha^{-1}(A)) = \{(g, x) \mid (gP \times \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

und ist insbesondere P-stabil. Da auch $P \overset{\subset}{\scriptstyle\mathrm{A}} G$ parabolisch ist, ist auch ihre Projektion auf die X-Komponente abgeschlossen, und die fällt mit $\mathrm{pr}_X(A)$ zusammen. Damit ist im Lemma eine der Implikationen gezeigt. Für die andere beachte man $G/Q \twoheadrightarrow G/P$ sowie $P/Q \overset{\subset}{\scriptstyle\mathrm{A}} G/Q$. $\square$

Proposition 4.5.6. *Eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe ist auflösbar genau dann, wenn sie keine echte, also von der ganzen Gruppe verschiedene parabolische Untergruppe besitzt.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe. Wir nehmen zunächst an, es gebe in G keine echte Parabolische. Gegeben eine Darstellung $G \to \mathrm{GL}(V)$ von G ist die induzierte G-Wirkung auf $\mathbb{P}V$ algebraisch nach [KAG] 7.2.11. Jede abgeschlossene Bahn hat nach 4.5.1 Parabolische als Isotropiegruppen. Gibt es keine echten Parabolischen, so müssen also alle abgeschlossenen Bahnen Fixpunkte sein. Da es aber nach 2.3.5 unter der Annahme $V \neq 0$ stets abgeschlossene Bahnen gibt, muß es in jeder algebraischen Darstellung $V \neq 0$ von G eine eindimensionale Unterdarstellung geben. Dann folgern wir leicht, daß G isomorph ist zu einer Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen und mithin auflösbar. Sei nun umgekehrt G zusammenhängend und auflösbar. Wir führen die Annahme, G habe eine echte Parabolische, zum Widerspruch. In der Tat fänden wir sonst auch ein Gegenbeispiel mit G von kleinstmöglicher Dimension und darin eine echte Parabolische $P \subsetneq G$ maximal möglicher Dimension. Nun gilt entweder $P \supset (G, G)$ oder $P \not\supset (G, G)$. Im ersten Fall wäre P normal, also G/P affin nach 3.9.14 und damit G/P endlich und wegen G zusammenhängend ein Punkt, im Widerspruch zur Annahme $P \subsetneq G$. Im Fall $P \not\supset (G, G)$ wäre $P(G, G) = \langle P(G, G) \rangle$ eine abgeschlossene Untergruppe größerer Dimension als P, also $P(G, G) = G$ und wir erhielten einen bijektiven Morphismus

$$(G, G)/(G, G) \cap P \to G/P$$

Dann aber muß nach 4.5.1 auch $P \cap (G, G) \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} (G, G)$ bereits eine echte Parabolische sein, und unsere verkappte Induktion über die Dimension von G zeigt $P \supset (G, G)$. □

Satz 4.5.7 (Borel'scher Fixpunktsatz). *Wirkt eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe auf einer nichtleeren vollständigen Varietät, so hat sie dort stets einen Fixpunkt.*

Beweis. Nach 4.5.1 hat jede abgeschlossene Bahn Parabolische als Isotropiegruppen, und nach 4.5.6 kann sie dann nur aus einem einzigen Punkt bestehen. Abgeschlossene Bahnen aber gibt es in jeder nichtleeren Varietät mit einer algebraischen Wirkung einer algebraischen Gruppe nach 2.3.5. □

Alternativer Beweis. Sei G unsere Gruppe und X unsere Varietät. Sei zunächst G abelsch. Nach 2.3.5 finden wir $x \in X$ mit $Gx \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} X$, also Gx vollständig. Die Abbildung $G/G_x \to Gx$ ist bijektiv und G/G_x ist affin nach 3.9.14, also besteht unsere Bahn nur aus einem Punkt. Ist nun G beliebig, so gilt für $H = (G, G)$ bereits $\operatorname{kdim} H < \operatorname{kdim} G$. Mit Induktion über die Dimension der Gruppe ist dann $X^H \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} X$ nicht leer und G/H wirkt darauf und Induktion beendet den Beweis. □

Proposition 4.5.8. *Eine auflösbare zusammenhängende Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe kann in jede parabolische Untergruppe hineinkonjugiert werden.*

Beweis. Sei G unsere affine algebraische Gruppe, $P \subset G$ eine Parabolische und $B \subset G$ zusammenhängend auflösbar. Nach dem Fixpunktsatz 4.5.7 besitzt B einen Fixpunkt $x \in G/P$. Die Isotropiegruppe G_x ist dann konjugiert zu P, in Formeln $G_x = gPg^{-1}$ mit $g \in G$, und sie umfaßt B, also $B \subset gPg^{-1}$ alias $g^{-1}Bg \subset P$. □

Übungen

Übung 4.5.9. Seien G eine affine algebraische Gruppe, X eine G-Varietät, $P \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} G$ eine Parabolische und $Y \mathrel{\subset\!\!\!\!\triangle} X$ eine abgeschlossene P-stabile Teilmenge von X. So ist auch GY abgeschlossen in X. Hinweis: Man beachte den Isomorphismus $G \times X \xrightarrow{\sim} G \times X$ mit $(g, x) \mapsto (g, gx)$ und den nach 2.3.9 offenen Morphismus $G \times X \twoheadrightarrow G/P \times X$.

4.6 Borel'sche Untergruppen

Definition 4.6.1. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Eine Untergruppe $B \subset G$ heißt eine **Borel'sche Untergruppe**, wenn sie abgeschlossen, auflösbar, zusammenhängend und maximal bezüglich Inklusion unter allen Untergruppen mit diesen Eigenschaften ist.

4.6.2. Jede affine algebraische Gruppe besitzt Borel'sche Untergruppen, denn jede aufsteigende Folge irreduzibler Untervarietäten muß aus Dimensionsgründen stagnieren.

Satz 4.6.3. *Jede Borel'sche Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe ist parabolisch und je zwei Borel'sche Untergruppen sind konjugiert.*

Beweis. Wenn wir zeigen, daß es eine parabolische Borel gibt, so folgt das sofort aus der vorhergehenden Proposition 4.5.8, nach der dann jede Borel in diese parabolische Borel hineinkonjugiert werden kann. Die Existenz einer parabolischen Borel zeigen wir durch Induktion über die Dimension. Ist G° auflösbar, so ist G° selbst bereits eine parabolische Borel'sche. Sonst existiert nach 4.5.6 eine echte Parabolische $P \subsetneq G^\circ$ und nach Induktionsannahme besitzt sie eine parabolische Borel'sche $B \subset P$. Nach 4.5.5 ist dann B parabolisch in G und folglich besitzt auch G eine parabolische Borel. □

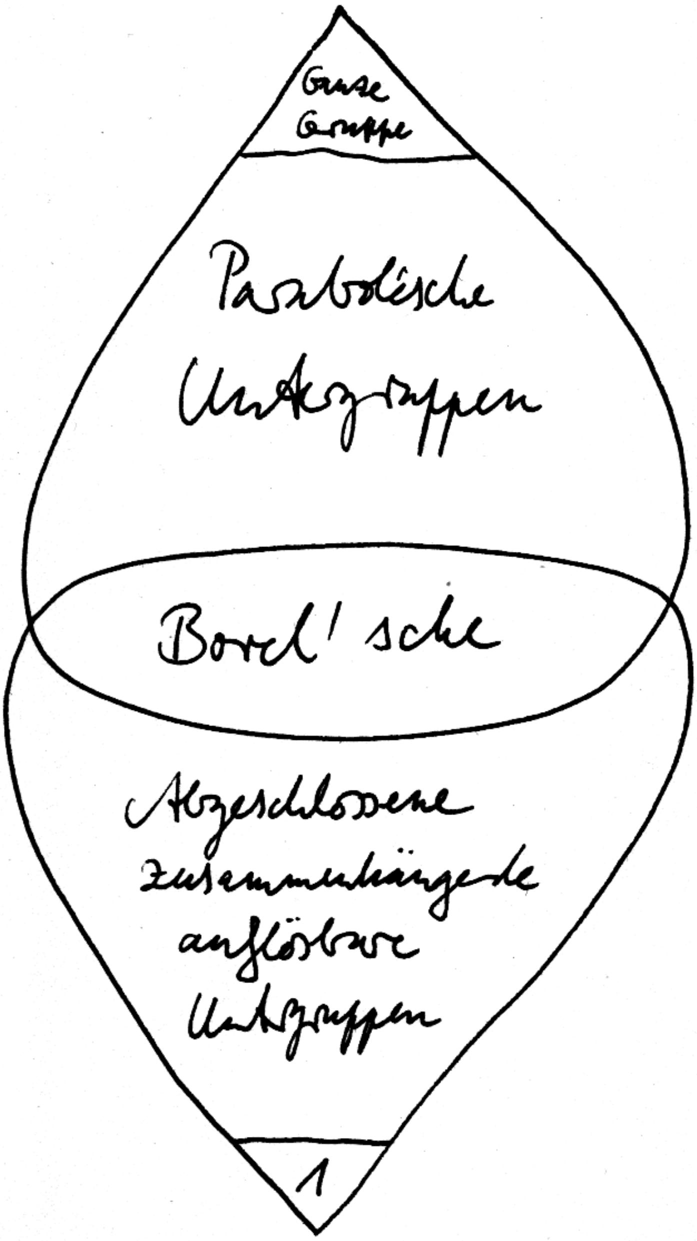
Zweiter Beweis. Wie beim ersten Beweis reicht es zu zeigen, daß es eine parabolische Borel gibt. Sei dazu $B \subset G$ eine Borel-Untergruppe maximal möglicher Dimension. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung von G derart, daß B der Stabilisator einer Gerade ist. Nach dem Satz von Lie-Kolchin 4.1.7 existiert dann sogar eine vollständige Fahne $f \in \mathcal{F}(V)$ mit $B = G_f$. Ist $\phi \in \mathcal{F}(V)$ eine beliebige vollständige Fahne, so ist G_ϕ auflösbar und folglich $\dim G_\phi \leq \dim G_f$ und es folgt $\dim G\phi \geq \dim Gf$. Das zeigt $Gf \not\sqsubset \mathcal{F}(V)$ und mit 3.9.31 folgt, daß jede Borel'sche maximal möglicher Dimension parabolisch sein muß. □

Korollar 4.6.4 (Charakterisierungen Borel'scher Untergruppen). *Gegeben affine algebraische Gruppen $B \subset G$ sind äquivalent:*

1. *B ist maximal unter den abgeschlossenen zusammenhängenden auflösbaren Untergruppen von G, also eine Borel;*
2. *B ist minimal unter den parabolischen Untergruppen von G;*
3. *B ist parabolisch, auflösbar und zusammenhängend.*

Beweis. 1⇔2 ist nur eine Umformulierung von Satz 4.6.3, und 2⇒3 folgt daraus. Aus 3 folgt hinwiederum, daß B in einer Borel enthalten ist und eine Borel umfaßt. □

Beispiel 4.6.5. $(k = \bar{k})$. In der $\mathrm{GL}(n; k)$ bilden die oberen Dreiecksmatrizen eine Borel'sche Untergruppe $B \subset \mathrm{GL}(n; k)$. In der Tat ist diese Untergruppe auflösbar und zusammenhängend. Wäre $H \supset B$ eine weitere Gruppe mit diesen Eigenschaften, so müßte sie nach dem Satz von Lie-Kolchin 4.1.7 auch eine Fahne von



Versuch einer graphischen Darstellung der zentralen Bedeutung der Borel'schen im Gefüge aller abgeschlossenen Untergruppen einer affinen algebraischen Gruppe. Nicht dargestellt ist die Tatsache, daß es nur eine Konjugationsklasse von Borel'schen und, wie wir später noch zeigen werden, nur endlich viele Konjugationsklassen von parabolischen Untergruppen gibt.

Untervektorräumen von k^n stabilisieren, also eine Folge $k^n = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_0 = 0$ von Untervektorräumen mit $\dim V_i = i$. Nun ist aber B genau der Stabilisator der Fahne

$$k^n = \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \rangle \supset \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n-1} \rangle \supset \ldots \supset \langle \mathrm{e}_1 \rangle \supset 0$$

und stabilisiert keine weitere Fahne. Es folgt $H \subset B$, also $H = B$.

Ergänzung 4.6.6. Unter einer **vollständigen Fahne** von Untervektorräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums V versteht man eine Folge von Untervektorräumen

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

mit $\dim V_i = i$. Die Menge aller derartigen Fahnen notieren wir $\mathcal{F}(V)$. Auf dieser Menge operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ in offensichtlicher Weise, und diese Operation ist auch sicher transitiv. Arbeiten wir über einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$, so ist die Isotopiegruppe jeder Fahne $x \in \mathcal{F}(V)$ nach dem Vorhergehenden eine Borel'sche $B_x \not\trianglelefteq \mathrm{GL}(V)$, und wir erhalten so eine Bijektion

$$\mathrm{GL}(V)/B_x \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{F}(V)$$

Nach Übung 3.9.23 gibt es genau eine Struktur als algebraische Varietät auf $\mathcal{F}(V)$ derart, daß alle diese Bijektionen Isomorphismen werden. Mit dieser Struktur ist $\mathcal{F}(V)$ dann eine vollständige separierte k-Varietät und heißt die **Fahnenvarietät von** V. Sie heißt auch **Flaggenvarietät** oder **Fahnenmannigfaltigkeit**.

Korollar 4.6.7 (Bilder von Borel'schen unter Surjektionen). *Unter einem surjektiven Homomorphismus affiner algebraischer Gruppen ist das Bild jeder Parabolischen eine Parabolische und das Bild jeder Borel'schen eine Borel'sche.*

Beweis. Das Bild jeder parabolischen Untergruppe ist sicher parabolisch, das Bild jeder auflösbaren Untergruppe auflösbar, das Bild jeder zusammenhängenden Untergruppe zusammenhängend. Die Behauptung folgt. □

Korollar 4.6.8 (Zentren Borel'scher Untergruppen). *Ist $B \subset G$ eine Borel'sche Untergruppe einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe, so gilt* $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \mathrm{Z}(B) \subset \mathrm{Z}(G)$.

Ergänzung 4.6.9. In 4.6.20 zeigen wir stärker $\mathrm{Z}(B) = \mathrm{Z}(G)$.

Beweis. $\mathrm{Z}(G)^\circ$ ist zusammenhängend und auflösbar, liegt also in einer Borel. Da je zwei Borel'sche konjugiert sind, liegt es damit in jeder Borel und wir folgern $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \mathrm{Z}(B)$. Gegeben $z \in \mathrm{Z}(B)$ faktorisiert die Abbildung $G \to G$, $x \mapsto zxz^{-1}x^{-1}$ über einem Morphismus $G/B \to G$. Der aber muß konstant sein als Morphismus einer vollständigen zusammenhängenden Varietät in eine affine Varietät und wir erhalten $\mathrm{Z}(B) \subset \mathrm{Z}(G)$. □

Korollar 4.6.10 (Nilpotente Borel'sche). *Hat eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe eine nilpotente Borel'sche, so fällt sie bereits mit dieser Borel'schen zusammen.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe und $B \subset G$ unsere Borel'sche. Wir argumentieren mit Induktion über den Nilpotenzgrad von B. Ist er Null, besteht also B nur aus dem neutralen Element, so ist G vollständig und besteht folglich auch nur aus einem Element. Sonst ist das Zentrum $Z := \mathrm{Z}(B)$ nicht trivial und liegt nach 4.6.8 im Zentrum von G. Induktion zeigt dann $B/Z = G/Z$ und es folgt $B = G$. □

Satz 4.6.11 (Maximale Tori sind konjugiert). *In einer affinen algebraischen Gruppe sind je zwei maximale Tori konjugiert.*

Beweis. Jeder unserer Tori liegt in einer Borel. Je zwei Borel's sind konjugiert nach 4.6.3, und je zwei maximale Tori in einer Borel sind konjugiert, da wir unseren Satz für auflösbare Gruppen ja bereits aus 4.2.3 kennen. □

Satz 4.6.12 (Bilder maximaler Tori unter Surjektionen). *Das Bild eines maximalen Torus unter einem surjektiven Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen ist wieder ein maximaler Torus.*

Beweis. Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus. Gegeben $T \subset G$ ein maximaler Torus finden wir eine Borel $B \subset G$ mit $T \subset B \subset G$. Nach 4.6.7 ist $\varphi(B) \subset H$ eine Borel und nach 4.2.3 haben wir $B = TB_{\mathrm{u}}$. Es folgt $\varphi(B) = \varphi(T)\varphi(B_{\mathrm{u}})$ und wir sehen, daß $\varphi(T)$ ein maximaler Torus von $\varphi(B)$ sein muß. Dann aber ist $\varphi(T)$ nach 4.6.28 auch ein maximaler Torus in H. □

Definition 4.6.13. Eine Untergruppe C einer affinen algebraischen Gruppe G heißt eine **Cartan'sche**, wenn es in G einen maximalen Torus T gibt mit

$$C = \mathrm{Z}_G(T)^\circ$$

Bemerkung 4.6.14. Wir werden in 4.6.23 sehen, daß der Zentralisator eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe stets zusammenhängend ist. In zuammenhängenden Gruppen sind die Cartan'schen damit schlicht die Zentralisatoren der maximalen Tori.

Proposition 4.6.15. *Jede Cartan'sche einer affinen algebraischen Gruppe ist nilpotent.*

Beweis. Sei $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Es gilt zu zeigen, daß $C := \mathrm{Z}_G(T)^\circ$ nilpotent ist. Sicher ist $T \subset C$ ein maximaler Torus. Da nach 4.6.11 alle maximalen Tori von C konjugiert sind, ist T sogar der einzige maximale Torus. Für jede Borel'sche B von C gilt nach 4.6.28 also $T \subset B$ und sogar $T \subset \mathrm{Z}(B)$. Dann aber ist die Multiplikation ein Isomorphismus $T \times B_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} B$ und B ist nilpotent. Nach 4.6.10 zeigt das hinwiederum $B = C$ und C ist nilpotent. □

Lemma 4.6.16. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und $S \subset G$ ein Torus. So gibt es $s \in S$ mit $\mathrm{Z}_G(s) = \mathrm{Z}_G(S)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $G = \mathrm{GL}(V)$ annehmen. Sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ die simultane Eigenraumzerlegung von V unter S. Wir finden $s \in S$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten auf allen V_i. Dann gilt $\mathrm{Z}_G(S) = \mathrm{Z}_G(s) \cong \mathrm{GL}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(V_r)$. □

Lemma 4.6.17. *In jeder zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe umfaßt die Vereinigung der Cartan'schen eine nichtleere offene Teilmenge.*

Beweis. Sei $C = \mathrm{Z}_G(T)^\circ$ eine Cartan'sche. Es gilt zu zeigen, daß die Vereinigung

$$\bigcup_{g \in G} gCg^{-1}$$

eine offene Teilmenge umfaßt. Dazu betrachte man den Morphismus $G \times C \to G, (g, c) \mapsto gcg^{-1}$. Nach Lemma 4.6.16 finden wir $t \in T$ mit $C = \mathrm{Z}_G(t)^\circ$. Die Faser unseres Morphismus über t ist $\{(g, c) \in G \times C \mid gcg^{-1} = t\}$. Da aber C nilpotent ist, haben wir $C_{\mathrm{s}} = T$ und mithin impliziert oben $gcg^{-1} = t$ bereits $c \in T$. Des weiteren folgt für unser g dann $gCg^{-1} \subset g\mathrm{Z}_G(c)^\circ g^{-1} = \mathrm{Z}_G(t)^\circ = C$ und folglich $g \in \mathrm{N}_G(C)$ und damit $g \in \mathrm{N}_G(T)$. Damit ist unsere Faser isomorph zu $\mathrm{N}_G(T)$. Nach der Starrheit von Tori 1.7.14 haben wir aber $\mathrm{N}_G(T)^\circ = \mathrm{Z}_G(T)^\circ$ und folgern, daß die Faser über t unseres Morphismus dieselbe Dimension hat wie C. Nach Lemma 2.1.7 ist unser Morphismus also dominant und nach 2.1.5 umfaßt sein Bild eine offene nichtleere Teilmenge von G. □

Satz 4.6.18 (Überdeckung durch Borel'sche). *Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe wird von ihren Borel'schen überdeckt. Genauer gilt für jede derartige Gruppe G sogar*

$$G = \bigcup_{B \subset G \text{ Borel}} B \quad \text{und} \quad G_{\mathrm{u}} = \bigcup_{B \subset G \text{ Borel}} B_{\mathrm{u}} \quad \text{und} \quad G_{\mathrm{s}} = \bigcup_{T \subset G \text{ Torus}} T$$

Beweis. Sobald wir wissen, daß G von seinen Borel'schen überdeckt wird, folgt die Aussage über unipotente Elemente unmittelbar, und die Aussage über halbeinfache Elemente folgt, da sie nach 4.2.3 für zusammenhängende auflösbare Gruppen gilt. Da nun die Vereinigung der Borel'schen die Vereinigung der Cartan'schen umfaßt, reicht es mit 4.6.17 zu zeigen, daß die Vereinigung der Borelschen abgeschlossen ist. Das folgt jedoch sofort, wenn wir Lemma 4.6.19 anwenden mit $Y = B$, $X = G$, $P = B$, $G = G$ und der Operation durch Konjugation. □

Lemma 4.6.19. *Seien G eine affine algebraische Gruppe, $P \subset G$ eine Parabolische, X eine G-Varietät und $Y \underset{\circ}{\subset}\!\!\!\!\!\not\;\, X$ eine abgeschlossene P-stabile Teilmenge. So ist auch $GY \,\mathring{\not\subset}\, X$ abgeschlossen in X.*

Beweis. Wir betrachten $Z := \{(g, x) \in G \times X \mid g^{-1}x \in Y\}$. Dann gilt $Z \,\mathring{\not\subset}\, G \times X$ und Z ist P-stabil, ist also das Urbild seines Bildes unter der Projektion $\pi : G \times X \twoheadrightarrow G/P \times X$, in Formeln $Z = \pi^{-1}(\pi(Z))$. Da π offen ist nach 2.3.9, folgt $\pi(Z) \,\mathring{\not\subset}\, G/P \times X$ und dann $\mathrm{pr}_X(\pi(Z)) = GY \,\mathring{\not\subset}\, X$ nach 4.4.1. □

Korollar 4.6.20. *Ist $G \supset B$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einer Borel'schen, so gilt $\mathrm{Z}(G) = \mathrm{Z}(B)$.*

Beweis. Aus 4.6.8 wissen wir bereits $\mathrm{Z}(G) \supset \mathrm{Z}(B)$. Anderseits liegt jedes $z \in \mathrm{Z}(G)$ nach 4.6.18 in einer Borel'schen und dann, da je zwei Borel'sche nach 4.6.3 konjugiert sind, in jeder Borel'schen. □

Satz 4.6.21 (Zentralisatoren von Tori). *Der Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist zusammenhängend.*

4.6.22. Daß der Zentralisator eines Torus in einer auflösbaren zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe zusammenhängend ist, wissen wir bereits aus 4.3.4, wo wir das sogar für den Zentralisator einer beliebigen kommutativen Teilmenge aus halbeinfachen Elementen gezeigt hatten.

Beweis. Wir kürzen $\mathrm{Z}_G(S) = Z$ ab. Gegeben $z \in Z$ finden wir eine Borel'sche $B \subset G$ mit $z \in B$. Also ist $\widetilde{X} = \widetilde{X}_z := \{g \in G \mid z \in gBg^{-1}\}$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von G und stabil unter der Rechtsmultiplikation mit $b \in B$, ist also das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge $X \,\mathring{\not\subset}\, G/B$. Da S auflösbar ist, hat es nach dem Borel'schen Fixpunktsatz eine Fixpunkt $x \in X$. Nun betrachten wir die Menge $\mathcal{B}$ aller Borel'schen von G und die Surjektion

$$\begin{array}{ccc} G/B & \twoheadrightarrow & \mathcal{B} \\ gB & \mapsto & gBg^{-1} \end{array}$$

Sie ist G-äquivariant für die Operation von G auf $\mathcal{B}$ durch Konjugation. Unser S-Fixpunkt $x \in X$ wird also abgebildet auf eine Borel'sche $A \subset G$ mit $z \in A$ und $sAs^{-1} = A$ für alle $s \in S$. Dann ist auch $SA = AS$ eine nach 4.6.19 abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von G, und wegen $(sa, tb) = satba^{-1}s^{-1}b^{-1}t^{-1} \in A$ für alle $s, t \in S$ und $a, b \in A$ ist auch SA auflösbar, mithin $SA = A$. Das aber zeigt

$$\mathrm{Z}_G(S) = \bigcup_{A \text{ Borel mit } A \supset S} \mathrm{Z}_A(S)$$

Daß Zentralisatoren von Tori in zusammenhängenden auflösbaren Gruppen zusammenhängend sind, wissen wir bereits aus 4.3.4. Folglich muß auch $\mathrm{Z}_G(S)$ zusammenhängend sein. □

Satz 4.6.23 (Borel'sche in Zentralisatoren von Tori). *Seien G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $S \subset G$ ein Torus. So ist für jede Borel $B \subset G$ mit $S \subset B$ auch $\mathrm{Z}_G(S) \cap B$ eine Borel von $\mathrm{Z}_G(S)$ und das Herunterschneiden liefert eine Surjektion*

$$\{\text{Borel'sche } B \subset G \text{ mit } B \supset S\} \twoheadrightarrow \{\text{Borel'sche in } \mathrm{Z}_G(S)\}$$

Beweis. Sei $B \subset G$ eine Borel, die S umfaßt. Nach 4.3.4 ist $\mathrm{Z}_B(S)$ zusammenhängend und auflösbar. Können wir zeigen, daß $\mathrm{Z}_G(S)/\mathrm{Z}_B(S)$ vollständig ist, so muß $\mathrm{Z}_B(S)$ eine Borel'sche sein. Es reicht nach 4.5.1 zu zeigen, daß $\mathrm{Z}_G(S)/\mathrm{Z}_B(S) \hookrightarrow G/B$ abgeschlossenes Bild hat, oder auch, daß $Y := \mathrm{Z}_G(S)B$ abgeschlossen ist in G. Nach 4.6.21 ist Y irreduzibel. Betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Y \times S & \to & B/B_{\mathrm{u}} \\ (y,s) & \mapsto & y^{-1}syB_{\mathrm{u}} \end{array}$$

Dieselbe Vorschrift liefert sicher auch eine Abbildung $\bar{Y} \times S \to B/B_{\mathrm{u}}$ für $\bar{Y}$ der Abschluß von Y in G. Aufgrund der Starrheit von Tori 1.7.14 muß sie bei festem $s \in S$ konstant sein, also $y^{-1}syB_{\mathrm{u}} = sB_{\mathrm{u}}$ für alle $y \in \bar{Y}, s \in S$. Andererseits ist SB_{u} eine Untergruppe von B und $y^{-1}Sy \subset SB_{\mathrm{u}}$ ist für alle $y \in \bar{Y}$ ein maximaler Torus. Also gibt es $z \in B_{\mathrm{u}}$ mit $z^{-1}Sz = y^{-1}Sy$. Nun induziert die Konjugation mit $z \in B$ stets die Identität auf $B/(B,B)$ und a forteriori induziert die Konjugation mit $z \in B_{\mathrm{u}}$ die Identität auf $SB_{\mathrm{u}}/B_{\mathrm{u}}$. Wir landen so bei einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{int}(zy^{-1})"'] & B/B_{\mathrm{u}} \arrow[d, "\mathrm{int}(z)=\mathrm{id}"] \\ S \arrow[r, hook] & B/B_{\mathrm{u}} \end{tikzcd}$$

Es folgt $zy^{-1} \in \mathrm{Z}_G(S)$ und $y \in \mathrm{Z}_G(S)B$ für alle $y \in \bar{Y}$. Mithin haben wir $Y = \bar{Y}$ und $\mathrm{Z}_B(S)$ ist in der Tat eine Borel'sche in $\mathrm{Z}_G(S)$. Da je zwei Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S)$ konjugiert sind, muß unsere Abbildung dann auch surjektiv sein. □

Korollar 4.6.24. *Seien G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe, $B \subset G$ eine Borel und $T \subset G$ ein maximaler Torus. So gilt*

$$B \supset T \Rightarrow B \supset \mathrm{Z}_G(T)$$

Beweis. Nach 4.6.21 gilt $\mathrm{Z}_G(T) = \mathrm{Z}_G(T)^\circ$, also ist $\mathrm{Z}_G(T)$ eine Cartan'sche, also nach 4.6.15 nilpotent, also folgt $B \cap \mathrm{Z}_G(T) = \mathrm{Z}_G(T)$ aus unserem Satz 4.6.23. □

Satz 4.6.25 (Darstellungen von Gruppen und Liealgebren). *Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k. So gilt:*

1. *Gegeben eine algebraische Darstellung von G ist jeder unter der Lie-Algebra stabile Teilraum auch unter der Gruppe stabil;*

2. *Gegeben eine algebraische Darstellung von G stimmen die Invarianten der Lie-Algebra mit den Invarianten der Gruppe überein;*

3. *Der Funktor des Übergangs von Darstellungen der Gruppe zu Darstellungen ihrer Liealgebra ist volltreu.*

Beweis. Wir beginnen mit dem ersten Teil. Da unsere Gruppe nach 4.6.18 von ihren Borel'schen überdeckt wird, reicht es, den Fall auflösbarer Gruppen zu betrachten. Da zusammenhängende auflösbare Gruppen nach 4.2.3 von ihrem unipotenten Radikal und einem maximalen Torus erzeugt werden, reicht es, die Fälle der unipotenten Gruppen und der Tori zu betrachten. Letzterer Fall ist evident, ersterer Fall folgt aus 3.5.2. Den zweiten Teil zeigt man genauso. Der dritte Teil folgt für die Unterkategorie der endlichdimensionalen Darstellungen unserer Gruppe mit der Identifikation von $\mathrm{Hom}_k^G(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)_k^G$ der Homomorphismen von Darstellungen als Invarianten in der Homomorphismendarstellung. Der allgemeine Fall ergibt sich unmittelbar. □

Lemma 4.6.26. *Unter einer algebraischen Operation einer affinen algebraischen Gruppe auf einer affinen Varietät sind die Bahnen von Fixpunkten maximaler Tori stets abgeschlossen.*

Beweis. Seien $G \looparrowright X$ unsere Operation, $T \subset B \subset G$ ein maximaler Torus und eine Borel und $x \in X$ ein Fixpunkt von T. Nach 4.2.3 gilt $B = UT$ für $U \subset B$ das unipotente Radikal von B, also ist $Y := Bx = Ux$ abgeschlossen nach 2.3.7. Dann ist jedoch $Gx = GY$ abgeschlossen in X nach 4.5.9. □

Übungen

Übung 4.6.27. Man zeige: Jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe der Dimension Zwei oder kleiner ist auflösbar. Hinweis: Man gehe die Möglichkeiten für die Dimensionen maximaler Tori der Reihe nach durch.

Übung 4.6.28. Gegeben eine affine algebraische Gruppe ist jeder maximale Torus einer Borel'schen bereits ein maximaler Torus der ganzen Gruppe.

Übung 4.6.29. Man zeige, daß ein halbeinfaches Element aus dem Zentrum einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe in jedem maximalen Torus liegt. Hinweis: 4.6.18.

Ergänzende Übung 4.6.30. $(\mathrm{char}\, k = 0)$. Gegeben eine affine algebraische Guppe G und eine auflösbare Unteralgebra $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ ihrer Liealgebra existiert stets eine Borel'sche $B \subset G$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Lie}\, B$. Hinweis: Man finde eine treue Darstellung und wende den Satz von Lie oder besser sein Korollar **??** an.

4.7 Fahnenmannigfaltigkeit und Weylgruppe

Satz 4.7.1 (Normalisatoren von Borel'schen). *In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist jede Borel'sche ihr eigener Normalisator.*

Beweis. Seien G unsere Gruppe und $B \subset G$ eine Borel'sche. Wir behaupten

$$\mathrm{N}_G(B) = B$$

Wir führen den Beweis mit Induktion über $\mathrm{kdim}\, G$ durch Widerspruch. Sei sonst $x \in \mathrm{N}_G(B) \backslash B$. Sei $T \subset B$ ein maximaler Torus. Indem wir sonst x abändern zu xb mit geeignetem $b \in B$, dürfen wir $xTx^{-1} = T$ annehmen, da ja in B nach 4.2.3 je zwei maximale Tori konjugiert sind. Jetzt betrachten wir den Kommutator

$$\begin{array}{rccc} \psi : & T & \to & T \\ & t & \mapsto & xtx^{-1}t^{-1} \end{array}$$

und unterscheiden zwei Fälle.

$\psi(T) \subsetneq T$: Wegen 4.6.24 gilt $x \notin \mathrm{Z}_G(T)$. Wir haben also $S := (\ker \psi)^\circ \subsetneq T$. Weiter liegt x nach Konstruktion in $\mathrm{Z}_G(S)$ und normalisiert $B \cap \mathrm{Z}_G(S)$. Nach 4.6.23 ist $\mathrm{Z}_G(S)$ zusammenhängend und $B \cap \mathrm{Z}_G(S)$ darin eine Borel'sche. Gilt hier $\mathrm{Z}_G(S) \neq G$, so folgt also $x \in B$ per Induktion. Gilt dahingegen $\mathrm{Z}_G(S) = G$, so können wir die Induktionsannahme auf G/S anwenden. In diesem Quotienten ist B/S eine Borel'sche nach 4.6.7 und wir folgern $\bar{x} \in B/S$, also wieder $x \in B$.

$\psi(T) = T$: In diesem Fall wählen wir eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und einen Vektor $v \in V \backslash 0$ mit $\mathrm{N}_G(B) = \mathrm{Stab}_G\langle v \rangle$. Dann gilt sogar $\rho(T)v = v$, da T aus Kommutatoren besteht, sowie $\rho(B_\mathrm{u})v = v$, da B_u unipotent ist. Also erhalten wir einen Morphismus $G/B \to V$, $g \mapsto \rho(g)v$, und der muß konstant sein als Morphismus einer zusammenhängenden vollständigen Varietät in eine affine Varietät. Es gilt also $G = \mathrm{Stab}_G\langle v \rangle = \mathrm{N}_G(B)$ und B ist Normalteiler. Dann aber ist G/B vollständig, affin und zusammenhängend, mithin ein Punkt, und es folgt wieder $x \in B$. □

4.7.2. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G betrachten wir die Menge

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(G) = \mathcal{B}_G := \{A \subset G \mid A \text{ ist Borel'sche}\}$$

aller Borel'schen von G. Die Gruppe G operiert darauf transitiv durch Konjugation, und nach 4.7.1 erhalten wir für jede Borel'sche $B \subset G$ eine G-äquivariante Bijektion

$$\begin{array}{ccc} G/B & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{B}_G \\ gB & \mapsto & gBg^{-1} \end{array}$$

Nach 3.9.23 gibt es nun genau eine Struktur als Varietät auf $\mathcal{B}$, bezüglich derer alle diese Abbildungen Isomorphismen von Varietäten werden. Diese Varietät $\mathcal{B}$ heißt die **Varietät der Borel'schen von** G oder, in Erweiterung der in 4.6.6 eingeführten Terminologie, die **Fahnenmannigfaltigkeit von** G. Für die G-Operation auf der Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{B}$ verwenden wir zwei Notationen: Betrachten wir eine Borel'sche eher als Punkt, so notieren wir sie mit einem kleinen Buchstaben wie etwa $x \in \mathcal{B}$ und schreiben gx für das Anwenden von $g \in G$ auf $x \in \mathcal{B}$. Betrachten wir eine Borel'sche eher als Untergruppe, so notieren wir sie mit einem großen Buchstaben wie etwa $A \subset G$ und schreiben gAg^{-1} für das Konjugieren. Manchmal notieren wir zu $x \in \mathcal{B}$ auch $B_x \subset G$ eben diese Borel'sche, aufgefaßt als Untergruppe, und haben also $B_{gx} = gB_xg^{-1}$.

Ergänzung 4.7.3. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G betrachten wir ähnlich die Menge

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_G := \{T \subset B \subset G \mid T \text{ ist maximaler Torus und } B \text{ Borel'sche}\}$$

aller **borelierten maximalen Tori** oder kurz **borelierten Tori von** G. Die Gruppe G operiert darauf transitiv durch Konjugation, und nach 4.7.1 zusammen mit 4.3.5 erhalten wir für jeden borelierten Torus $T \subset B \subset G$ eine G-äquivariante Bijektion

$$\begin{array}{ccc} G/T & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{T}_G \\ gT & \mapsto & (gTg^{-1} \subset gBg^{-1}) \end{array}$$

Nach 3.9.23 gibt es nun genau eine Struktur als Varietät auf $\mathcal{T}$, bezüglich derer alle diese Abbildungen Isomorphismen von Varietäten werden. Diese Varietät $\mathcal{T}$ heißt die **Varietät der borelierten Tori von** G. Für die G-Operation auf dieser Varietät $\mathcal{T}$ verwenden wir wieder zwei Notationen: Betrachten wir einen borelierten Torus eher als Punkt, so notieren wir ihn mit einem kleinen Buchstaben wie etwa $x \in \mathcal{T}$ und schreiben gx für das Anwenden von $g \in G$ auf $x \in \mathcal{B}$. Betrachten wir ihn eher als ein Paar von Untergruppen, so notieren wir ihn $T \subset B$ und schreiben $gTg^{-1} \subset gBg^{-1}$ für das Konjugieren. Manchmal notieren wir zu $x \in \mathcal{T}$ auch $T_x \subset B_x \subset G$ eben diesen borelierten Torus, aufgefaßt als Paar von Untergruppen, und haben also $(T_{gx} \subset B_{gx}) = (gT_xg^{-1} \subset gB_xg^{-1})$. Wir haben einen offensichtlichen G-äquivarianten Morphismus $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$. Die Faser über x ist hierbei jeweils ein prinzipaler homogener Raum über dem unipotenten Radikal von B_x.

Vorschau 4.7.4. Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G mit einer Borel'schen B existiert im allgemeinen keine zu unseren Beschreibungen von G/B und G/T vergleichbar natürliche Beschreibung des Quotienten G/B_{u}. Mehr dazu wird in **??** diskutiert.

Korollar 4.7.5 (Normalisatoren parabolischer Untergruppen). *In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist jede Parabolische zusammenhängend und ihr eigener Normalisator.*

Beweis. Seien $G \supset P$ unsere Gruppe und ihre Parabolische. Es gibt eine Borel'sche $B \subset P^\circ$. Aus $x \in \mathrm{N}_G(P)$ folgt dann, daß $xBx^{-1} \subset P^\circ$ auch eine Borel'sche ist, also gibt es $y \in P^\circ$ mit $yBy^{-1} = xBx^{-1}$ und folglich $y^{-1}x \in \mathrm{N}_G(B) = B$. So folgt unmittelbar $x \in P^\circ B \subset P^\circ$. □

Korollar 4.7.6. *Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $P \not\trianglelefteq G$ eine Parabolische. Sei weiter $x \in G$ gegeben. Umfaßt $P \cap x^{-1}Px$ eine Borel, so gilt bereits $P = x^{-1}Px$.*

Beweis. Sei $B \subset P \cap x^{-1}Px$ eine Borel. Sicher ist $xBx^{-1} \subset P$ dann auch eine Borel, also gibt es $y \in P$ mit $yxBx^{-1}y^{-1} = B$ alias $yx \in B$. Mit $y \in P$ folgt dann $x \in P$. □

Definition 4.7.7. Gegeben $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus setzt man

$$\mathrm{W}_G(T) := \mathrm{N}_G(T)/\mathrm{Z}_G(T)$$

und nennt diese endliche Gruppe die **Weylgruppe von** G oder präziser die **Weylgruppe von** (G, T).

Beispiel 4.7.8. Der Normalisator des maximalen Torus T aller Diagonalmatrizen in der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ besteht genau aus allen Matrizen, die die simultanen Eigenräume $k\mathrm{e}_\nu$ unserer Diagonalmatrizen permutieren, als da heißt aus allen Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben. In diesem Fall bilden die Permutationsmatrizen ein Repräsentantensystem für die Weylgruppe.

Korollar 4.7.9 (Borel'sche und Weylgruppe). *Gegeben eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe operiert die Weylgruppe zu einem maximalen Torus frei und transitiv durch Konjugation auf der Menge der Borel'schen über besagtem maximalen Torus.*

4.7.10. Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und ein maximaler Torus. In Formeln liefert die Konjugation also für jede Borel'sche $B \supset T$ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{W}_G(T) & \stackrel{\sim}{\to} & \{A \subset G \mid A \text{ ist Borel'sche mit } A \supset T\} \\ n & \mapsto & nBn^{-1} \end{array}$$

In nochmal anderen Worten und unter Verwendung von 4.7.1 operiert die Weylgruppe $\mathrm{W}_G(T)$ frei und transitiv auf der Menge $\mathcal{B}_G^T$ der Fixpunkte von T in der Fahnenmannigfaltigkeit.

Beweis. Wir beginnen mit der Surjektivität. Gegeben eine Borel $A \subset G$ mit $A \supset T$ gibt es $x \in G$ mit $xBx^{-1} = A$. Dann ist $xTx^{-1} \subset A$ ein maximaler Torus und nach 4.2.3 gibt es $a \in A$ mit $axTx^{-1}a^{-1} = T$. Es folgt $n = ax \in \mathrm{N}_G(T)$ und $nBn^{-1} = A$. Nun zeigen wir noch die Injektivität. Aus $n^{-1}Bn = B$ folgt mit 4.7.1 ja $n \in B$, also $n \in \mathrm{N}_B(T)$. In der zusammenhängenden auflösbaren Gruppe B gilt aber $\mathrm{N}_B(T) = \mathrm{Z}_B(T)$ nach 4.3.5. □

Lemma 4.7.11. *Ist (V, ρ) eine endlichdimensionale algebraische Darstellung von $k^\times$ und $x \in \mathbb{P}V$, so läßt sich die durch Anwenden auf x gegebene Abbildung $k^\times \to \mathbb{P}V$ eindeutig zu einem Morphismus von Varietäten $\mathbb{P}^1k \to \mathbb{P}V$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist entweder konstant oder injektiv, und die Bilder von 0 und ∞ sind Fixpunkte von $k^\times$ in $\mathbb{P}V$.*

4.7.12. Wir notieren $0x$ und ∞x die Bilder von 0 und ∞ unter unserer Fortsetzung. Überhaupt jeder Morphismus $k^\times \to \mathbb{P}V$ für $\dim_k V < \infty$ läßt sich eindeutig zu einem Morphismus $\mathbb{P}^1k \to \mathbb{P}V$ fortsetzen, wie in [KAG] 6.9.11 gezeigt wird. Allerdings ist die Fortsetzung in dieser Allgemeinheit nicht notwendig injektiv.

Beweis. Sei $v \in V \backslash 0$ mit $x = \langle v \rangle$. Wir können v schreiben als Linearkombination von simultanen Eigenvektoren

$$v = a_1v_1 + \ldots + a_rv_r$$

mit $a_i \neq 0$ für alle i und $\rho(\lambda)v_i = \lambda^{m(i)}v_i$ und $m(1) > \ldots > m(r)$. Dann kann unsere Fortsetzung explizit angegeben werden durch die Vorschrift $0 \mapsto \langle v_r \rangle, \infty \mapsto \langle v_1 \rangle$. Der Rest des Beweises kann dem Leser überlassen werden. □

Satz 4.7.13 (Zahl der Fixpunkte von Tori). *Sei $\rho : T \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung eines Torus und $Y \overset{\circ}{\subset} \mathbb{P}V$ eine abgeschlossene T-stabile Teilmenge.*

1. *Gilt $\operatorname{kdim} Y \geq 1$, so hat T in Y mindestens zwei Fixpunkte, $|Y^T| \geq 2$;*
2. *Gilt $\operatorname{kdim} Y \geq 2$, so hat T in Y mindestens drei Fixpunkte, $|Y^T| \geq 3$.*

Beweis. Sei $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ die simultane Eigenraumzerlegung von V unter T mit $V_i \neq 0$ zum Charakter $\chi_i \in \mathfrak{X}(T)$. Sicher liefern die offensichtlichen Abbildungen eine Bijektion

$$\mathbb{P}V_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{P}V_n \tilde{\to} (\mathbb{P}V)^T$$

Jetzt gibt es sicher auch $\lambda : k^\times \to T$ mit $\chi_i \circ \lambda$ paarweise verschieden. Dann sind die Fixpunkte unter der durch λ induzierten Operation von $k^\times$ dieselben wie die Fixpunkte von T, wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T = k^\times$ annehmen. Besteht ganz Y aus Fixpunkten, so ist nichts zu zeigen. Sonst gibt es schon mal mindestens zwei Fixpunkte nach 4.7.11 un der erste Teil ist gezeigt. Wählen wir für den zweiten Teil eine Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V mit $\rho(t)v_i = t^{m(i)}v_i$ für alle $t \in k^\times$ und $m(1) \geq m(2) \geq \ldots \geq m(n)$, so ist $W := \langle v_2, \ldots, v_n \rangle \subset V$ ein $k^\times$-invarianter Teilraum und $\mathbb{P}W \cap Y$ ist nach [KAG] 6.3.14 nicht leer, falls gilt $\operatorname{kdim} Y \geq 1$, und nach [KAG] 4.8.12 mindestens eindimensional falls $\operatorname{kdim} Y \geq 2$. Dort gibt es also schon mal zwei Fixpunkte. Indem wir sonst V verkleinern, dürfen wir $Y \not\subset \mathbb{P}W$ annehmen. Gegeben $y \in Y \backslash \mathbb{P}W$ ist dann ∞y noch ein dritter Fixpunkt außerhalb von $\mathbb{P}W$. □

Satz 4.7.14. *Eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe ist genau dann auflösbar, wenn ihre Weylgruppe trivial ist.*

Beweis. Ist unsere Gruppe auflösbar, so ist die Weylgruppe trivial nach 4.3.5. Ist unsere Gruppe nicht auflösbar, so ist die Fahnenmannigfaltigkeit mindestens eindimensional und nach 4.7.13 hat ein maximaler Torus darauf mindestens zwei Fixpunkte. Nach 4.7.10 folgt, daß die Weylgruppe nicht trivial ist. □

Satz 4.7.15. *Eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe wird erzeugt von den Borel'schen über einem festen maximalen Torus.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus $Q \subset G$ die von allen Borel'schen über T erzeugte Untergruppe. Sie ist parabolisch. Wäre $Q \neq G$, so hätte T auf G/Q außer Q noch einen weiteren Fixpunkt. Er entspricht einer Konjugierten xQx^{-1} unserer Parabolischen mit $T \subset xQx^{-1}$. Mit einer Induktion über die Dimension dürfen wir annehmen, daß xQx^{-1} von seinen Borel'schen über T erzeugt wird, daß also gilt $xQx^{-1} \subset Q$ im Widerspruch zu unserer Annahme $xQx^{-1} \neq Q$. □

Übungen

Übung 4.7.16. Gegeben eine algebraische Darstellung V einer affinen algebraischen Gruppe und ein maximaler Torus $T \subset G$ stabilisiert die Weylgruppe die Menge $\mathrm{P}_T(V) \subset \mathfrak{X}(T)$ der Gewichte von V.

4.8 Gruppen vom Rang Eins

Definition 4.8.1. Unter dem **Rang** einer affinen algebraischen Gruppe G versteht man die Dimension eines maximalen Torus. Man notiert den Rang $\operatorname{rk}(G)$.

Definition 4.8.2. Eine affine algebraische Gruppe heißt **halbeinfach** genau dann, wenn alle ihre auflösbaren Normalteiler endlich sind.

Satz 4.8.3 (Klassifikation halbeinfacher affiner Gruppen vom Rang Eins). $(k = \bar{k})$. *Jede halbeinfache zusammenhängende affine algebraische Gruppe vom Rang Eins ist isomorph zu* $\mathrm{SL}(2; k)$ *oder zu* $\mathrm{PGL}(2; k)$.

4.8.4. Der Beweis dieses Satzes wird den ganzen Abschnitt füllen. Wir beginnen damit, allgemeine Aussagen zu beweisen, die sogar für beliebige nicht auflösbare zusammenhängende affine algebraische Gruppen vom Rang Eins gelten.

Lemma 4.8.5. $(k = \bar{k})$. *Seien $G \supset B \supset T$ eine zusammenhängende nicht auflösbare affine algebraische Gruppe vom Rang Eins, eine Borel'sche und ein maximaler Torus. So gilt:*

1. *Die Weylgruppe hat genau zwei Elemente,* $|\,\mathrm{W}_G(T)| = 2$;
2. *Die Fahnenmannigfaltigkeit ist eine projektive Gerade,* $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$;
3. *Für jedes $n \in \mathrm{N}_G(T) \backslash \mathrm{Z}_G(T)$ haben wir $G = B \sqcup BnB$;*
4. *Für jedes $n \in \mathrm{N}_G(T) \backslash \mathrm{Z}_G(T)$ ist $B_{\mathrm{u}} \cap nB_{\mathrm{u}}n^{-1}$ ein Normalteiler von G.*

Beweis. Da unsere Gruppe nicht auflösbar ist, ist die Weylgruppe nach 4.7.14 nicht trivial. Da die multiplikative Gruppe $k^\times$ genau zwei Automorphismen hat, die Identität und das Invertieren, kann unsere Weylgruppe aber auch nicht mehr als zwei Elemente haben. Auf G/B hat T dann genau zwei Fixpunkte nach 4.7.10, also folgt $\operatorname{kdim} G/B = 1$ aus 4.7.13. Andererseits muß T auch eine eindimensionale Bahn $Y \subset B/B$ haben. Deren Abschluß ist nun notwendig eine Vereinigung mit nulldimensionalen Bahnen und wir folgern $G/B = Y \sqcup (G/B)^T$ und $Y \Subset G/B$. Nach 3.9.27 oder alternativ 3.9.28 ist dann Y als Varietät isomorph zu $k^\times$. Jetzt gibt es verschiedene Wege, um $G/B \cong \mathbb{P}^1$ zu zeigen. Kennt man die Theorie der Kurven, so folgt das mit [KAG] 6.9.2 aus

$$\mathcal{M}(G/B) \cong \mathcal{M}(k^\times) \cong \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$$

und der Beweis ist fertig. Man mag aber auch direkter eine algebraische Darstellung (V, ρ) von G wählen und $v \in V \backslash 0$ mit $G/B \xrightarrow{\sim} G\langle v \rangle \not\subset\!\!\!\!\!\!\!\!\;\mathbb{P}V$. Dann wird $y \in Y$ repräsentiert durch $w \in V \backslash 0$ und zerfällt als $w = w_1 + \ldots + w_r$ mit $\rho(t) w_i = t^{n(i)} w_i$, wobei alle w_i von Null verschieden sind und für die Exponenten gilt $n(1) > n(2) > \ldots > n(r)$. Unter unserem Isomorphismus gehen die Fixpunkte von $k^\times$ in G/B auf $\langle w_1 \rangle, \langle w_r \rangle \in \mathbb{P}V$. Ist d der größte gemeinsame Teiler der $n(i)$, so liefert die Abbildungsvorschrift $t \mapsto t^{n(1)/d} w_1 + \ldots + t^{n(r)/d}$ einen Isomorphismus von Varietäten $k^\times \xrightarrow{\sim} Y$, der sich zu einem bijektiven Morphismus $\mathbb{P}^1 \to G/B$ fortsetzen läßt durch die Vorschrift $\infty \mapsto \langle w_1 \rangle, 0 \mapsto \langle w_r \rangle$. Daß das nun ein Isomorphismus ist, kann man entweder explizit einsehen oder auch mit dem Hauptsatz von Zariski 3.9.8 prüfen, da ja jede echte offene Teilmenge von

$\mathbb{P}^1$ affin ist. Nun hat B auf G/B nach 4.7.1 den einzigen Fixpunkt B/B und die B-Bahn des anderen T-Fixpunkts nB/B muß folglich auch die dichte T-Bahn Y umfassen. Mithin zerfällt G unter der beidseitigen B-Operation in die zwei Doppelnebenklassen

$$G = B \sqcup BnB$$

Schließlich ist der Schnitt $B_{\mathrm{u}} \cap nB_{\mathrm{u}}n^{-1}$ eine unipotente Gruppe, die mindestens zwei Fixpunkte auf $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$ hat. Da Bahnen unipotenter Gruppen auf affinen Varietäten abgeschlossen sind nach 2.3.7 und da bereits das Komplement eines Punktes in $\mathbb{P}^1$ affin ist, muß unser Schnitt ganz $\mathbb{P}^1$ punktweise festhalten. Also ist $B_{\mathrm{u}} \cap nB_{\mathrm{u}}n^{-1}$ der Schnitt der unipotenten Anteile aller Borel'schen von G und damit ein Normalteiler. □

Lemma 4.8.6 (Automorphismen der projektiven Gerade). $(k = \bar{k})$. *Sei* $\Delta \not\subset (\mathbb{P}^1 k)^3$ *die sogenannte* **dicke Diagonale** *alias die Teilmenge aller Tripel mit mindestens zwei gleichen Einträgen. So liefern die Operation von* $\mathrm{PGL}(2;k) := \mathrm{GL}(2;k)/k^\times$ *auf* $\mathbb{P}^1 k$ *und das Anwenden eines Automorphismus der algebraischen Varietät* $\mathbb{P}^1$ *auf das Tripel* $(0,1,\infty)$ *Bijektionen*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{PGL}(2;k) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Var}^\times(\mathbb{P}^1 k) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{P}^1 k)^3 \backslash \Delta \\ & & \varphi & \mapsto & (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty)) \end{array}$$

Des weiteren ist die Komposition dieser Bijektionen ein Isomorphismus von Varietäten zwischen der algebraischen Gruppe $\mathrm{PGL}(2;k)$ *und der Menge aller Tripel von paarweie verschiedenen Punkten der projektiven Gerade.*

Beweis. Die erste Abbildung ist eine Bijektion nach [KAG] 6.3.19 und die Verknüpfung ist eine Bijektion nach [LA2] **??**. Nach unseren Resultaten über homogene Räume aus 3.9.11 muß nur die Surjektivität des Differentials der Abbildung $\mathrm{GL}(2;k) \to (\mathbb{P}^1)^3$, $g \mapsto (g(0), g(1), g(\infty))$ am neutralen Element geprüft werden, und die ist schnell nachgerechnet. □

Beweis von Satz 4.8.3. Sei nun G eine zusammnehängende halbeinfache affine algebraische Gruppe vom Rang Eins. Seien $T \subset B \subset G$ ein maximaler Torus und eine Borel'sche. Sei weiter $n \in \mathrm{N}_G(T) \backslash \mathrm{Z}_G(T)$. Wir kürzen für das folgende $U = B_{\mathrm{u}}$ ab und pirschen uns nun Schritt für Schritt an die Klassifikation heran.

1. Da $U \cap nUn^{-1} = U \cap nBn^{-1}$ ein unipotenter, also auflösbarer Normalteiler ist, muß diese Gruppe endlich sein. Wegen $B = TU = UT$ ist die U-Bahn von nB/B dicht in G/B. Andererseits hat sie endliche Isotropiegruppen in U und es folgt $\mathrm{kdim}\, U = 1$.

2. Aus $\mathrm{kdim}\, U = 1$ folgt unmittelbar $\mathrm{kdim}\, B = 2$ und $\mathrm{kdim}\, G = 3$.

3. Die Gruppe G hat außer sich selbst nur endliche Normalteiler. In der Tat ist

nach 4.6.27 jede zusammenhängende affine algebraische Gruppe einer Dimension Zwei oder kleiner auflösbar. Also muß jeder echte zusammenhängende Normalteiler positiver Dimension auflösbar sein und der Quotient danach desgleichen, im Widerspruch dazu, daß G selbst nicht auflösbar ist.

4. Der von der Operation von G auf seiner Fahnenmannigfaltigkeit im Verein mit der Wahl eines Isomorphismus $\mathcal{B}_G \cong \mathbb{P}^1$ nach 4.8.6 induzierte Gruppenhomomorphismus ist eine Surjektion $G \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$. In der Tat operiert G nicht trivial auf seiner Fahnenmannigfaltigkeit, der maximale Torus etwa hat ja darin nur zwei Fixpunkte. Folglich muß nach dem vorhergehenden Punkt der Kern unseres Morphismus $G \to \mathrm{PGL}(2;k)$ endlich sein. Dimensionsbetrachtungen zeigen dann die Surjektivität unseres Morphismus.

5. Nun betrachten wir die Surjektion $\phi : \mathrm{SL}(2;k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$ und die Gruppe $H := \{(g,s) \in G \times \mathrm{SL}(2;k) \mid \varphi(g) = \phi(s)\}$ mitsamt dem offensichtlichen Homomorphismus $H \to \mathrm{PGL}(2;k)$. Die Einskomponente H° von H paßt in ein kommutatives Diagramm von surjektiven Gruppenhomomorphismen der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & H^\circ \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
G \arrow[dr] & & \mathrm{SL}(2;k) \arrow[dl] \\
 & \mathrm{PGL}(2;k) &
\end{tikzcd}$$

Alle diese Gruppenhomomorphismen haben offensichtlich endliche Kerne. Mithin sind alle Gruppen unseres Diagramms halbeinfach vom Rang Eins. Wir haben gewonnen, wenn wir zeigen können, daß (a) der obere Pfeil nach rechts ein Isomorphismus $H^\circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}(2;k)$ sein muß und daß (b) von den beiden Pfeilen nach unten auf der linken Seite einer ein Isomorphismus sein muß. Dazu müssen wir noch etwas mehr über die Struktur zusammenhängender halbeinfacher Gruppen G vom Rang Eins zeigen.

6. Wir zeigen zunächst $\mathrm{Z}_G(T) = T$. In der Tat ist $\mathrm{Z}_G(T)$ zusammenhängend nach 4.6.23 und ist folglich eine Cartan'sche, also nilpotent nach 4.6.15. Damit muß $\mathrm{Z}_G(T)$ in einer und jeder Borel'schen liegen, die T umfaßt, in Formeln $\mathrm{Z}_G(T) \subset B$. Gleichheit ist hier unmöglich, weil nilpotente Borel'sche schon die ganze Einskomponente ihrer Gruppe sind nach 4.6.10. Wegen $\operatorname{kdim} B = 2$ folgt damit $\mathrm{Z}_G(T) = T$.

7. Wir zeigen $U \cap nUn^{-1} = 1$. In der Tat, da $U \cap nUn^{-1}$ von T normalisiert wird und endlich ist, muß diese Untergruppe sogar im Zentralisator von T liegen, nach dem vorhergehenden also in T selbst. Das einzige unipotente Element eines Torus

ist aber das neutrale Element.

8. Die Multiplikation liefert eine offene Einbettung $(nUn^{-1}) \times T \times U \hookrightarrow G$. In der Tat ist diese Abbildung wegen $(nUn^{-1}) \cap B = 1$ sicher injektiv und hat offenes Bild nach Dimensionsvergleich und weil das Bild als eine Bahn in G aufgefaßt werden kann, unter einer geeigneten Operation von $(nUn^{-1}) \times B$. Wir müssen also nur noch die Injektivität des Differentials an einer Stelle zeigen, in anderen Worten die Formel

$$\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie}(nUn^{-1}) \oplus \operatorname{Lie} B$$

Sicher gibt es $\alpha \in \mathfrak{X}(T)$ mit $\operatorname{Ad}(t) = \alpha(t) : \operatorname{Lie} U \to \operatorname{Lie} U$ für alle $t \in T$. Wegen $\mathrm{Z}_G(T) = T$ und $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_G(T) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(T)$ nach 3.11.11 folgt $\alpha \neq 0$. Auf $\operatorname{Lie}(nUn^{-1})$ operiert $t \in T$ dann durch $\alpha(t^{-1})$ und die Behauptung folgt.

9. Die Gruppe U ist isomorph zur additiven Gruppe k. In der Tat liefert die Operation von U auf der Fahnenmannigfaltigkeit nach dem Vorhergehenden einen Isomorphismus von U mit dem Komplement eines Punktes in der projektiven Geraden. Das zeigt $U \cong k$ als Varietät und dann nach 1.1.22 auch als algebraische Gruppe.

10. Für das α von eben gilt $\mathfrak{X}(T) \supset \mathbb{Z}\alpha \supset 2\mathfrak{X}(T)$. In der Tat ist für jede algebraische Darstellung V von G und jedes $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ der Teilraum $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{\lambda+n\alpha}$ nach 1.8.5 eine Unterdarstellung. Andererseits folgt aus $V_\lambda \neq 0$ durch Anwenden des nichttrivialen Elements der Weylgruppe auch $V_{-\lambda} \neq 0$. Für jede irreduzible Darstellung folgt aus $V_\lambda \neq 0$ also $2\lambda \in \mathbb{Z}\alpha$. Da nun jedes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{X}$ nach 1.7.18 auch in einer irreduziblen Darstellung vorkommt, folgt $2\mathfrak{X} \subset \mathbb{Z}\alpha$.

11. Wegen $\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie} B \oplus \operatorname{Lie}(nUn^{-1})$ ist das Differential beim neutralen Element der durch die Wirkung gegebenen Abbildung $\operatorname{Lie} G \to \mathrm{T}_{\bar{e}}(G/B)$ injektiv auf $\operatorname{Lie}(nUn^{-1})$. Das zeigt, daß das Differential unseres zu Beginn konstruierten Homomorphismus $G \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$ injektiv ist auf den Liealgebren aller unipotenten Untergruppen. Dieser Homomorphismus bildet also Borel'sche auf Borel'sche ab und induziert Isomorphismen zwischen deren unipotenten Anteilen. Wir sehen explizit, daß dasselbe auch für $\mathrm{SL}(2;k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(2;k)$ gilt. Dann aber muß auch für eine und jede Borel'sche in H° ihr unipotenter Anteil isomorph auf den unipotenten Anteil ihres Bildes in G bzw. $\mathrm{SL}(2;k)$ abgebildet werden. Da nun im Fall von $\mathrm{SL}(2;k)$ bereits gilt $2\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\alpha$, muß für $S \subset H^\circ$ ein maximaler Torus und T sein Bild in $\mathrm{SL}(2;k)$ die auf den Charaktergruppen induzierte Inklusion $\mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(S)$ ein Isomorphismus sein, so daß wir bereits einen Isomorphismus $S \xrightarrow{\sim} T$ vor uns hatten. Da aber der Kern des rechten oberen Pfeils im Zentrum und damit im Zentralisator von S und damit in S liegen muß, ist der rechte obere Pfeil als bijektiv entlarvt, und an seinem Differential sehen wir, daß er sogar ein Isomorphismus sein muß. Dieselbe Argumentation zeigt, daß von den beiden Morphismen links genau einer einen Isomorphismus von einem maximalen Torus

auf sein Bild induziert, und daß der dann ein Isomorphismus sein muß. □

Übungen

Übung 4.8.7. Man zeige, daß für eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe gleichbedeutend sind: (1) Die Weylgruppe hat genau zwei Elemente; (2) Die Fahnenmannigfaltigkeit ist eindimensional; (3) Die Fahnenmannigfaltigkeit ist isomorph zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$.

Übung 4.8.8. Jede halbeinfache zusammenhängende affine algebraische Gruppe G vom Rang Eins ist ihre eigene derivierte Gruppe, in Formeln $(G, G) = G$. Hinweis: 4.6.27.

Übung 4.8.9. In $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{C})$ treffen sich je zwei verschiedene maximale Tori nur im neutralen Element. In $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ ist der Schnitt von je zwei verschiedenen maximalen Tori das Zentrum $\{\pm \mathrm{id}\}$.

Beispiel 4.8.10. Alle Automorphismen der komplexen algebraischen Gruppe $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ sind innere Automorphismen, wir haben also in Formeln eine kurze exakte Sequenz

$$\{\pm \mathrm{id}\} \hookrightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$$

Es gibt zwei Konjugationsklassen von Involutionen in $\mathrm{Aut}\, \mathrm{SL}(2; \mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2; \mathbb{C})$, nämlich die Identität und das Element der Ordnung zwei aus jedem maximalen Torus.

4.9 Radikale und reduktive Gruppen

Definition 4.9.1. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Die von allen abgeschlossenen auflösbaren zusammenhängenden normalen Untergruppen erzeugte Untergruppe hat auch selbst wieder alle diese Eigenschaften und ist also die größte Untergruppe mit diesen Eigenschaften. Sie heißt das **Radikal von** G und wird $\mathrm{rad}\, G$ notiert. Dasselbe gilt, wenn man statt auflösbaren Untergruppen unipotente Untergruppen betrachtet. Man erhält dann die größte zusammenhängende normale unipotente Untergruppe von G. Sie heißt das **unipotente Radikal von** G und wird $\mathrm{rad}_{\mathrm{u}}\, G$ notiert.

4.9.2. Eine affine algebraische Gruppe G ist also halbeinfach im Sinne von 4.8.2 genau dann, wenn ihr Radikal trivial ist. Der Rang des Quotienten nach dem Radikal einer affinen algebraischen Gruppe G heißt der **halbeinfachen Rang** von G. Er wird $\mathrm{rk}_{\mathrm{s}}(G) := \mathrm{rk}(G/\mathrm{rad}\, G)$ notiert.

Definition 4.9.3. Eine affine algebraische Gruppe heißt **reduktiv** genau dann, wenn ihr unipotentes Radikal trivial ist.

4.9.4. Manche Autoren fordern von ihren reduktiven Gruppen zusätzlich, daß sie zusammenhängend sein sollen. Ich schließe mich dieser Konvention nicht an.

Satz 4.9.5 (**Radikal und Zentrum reduktiver Gruppen**). *Gegeben eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe G ist $\operatorname{rad} G = \mathrm{Z}(G)^\circ$ ein zentraler Torus und $\operatorname{rad} G \cap (G, G)$ ist endlich.*

Beweis. Da $\operatorname{rad} G$ zusammenhängend und auflösbar ist und da nach Annahme gilt $(\operatorname{rad} G)_{\mathrm{u}} = \operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G = 1$, muß $\operatorname{rad} G$ nach unserem Struktursatz für auflösbare Gruppen 4.2.3 ein Torus sein und wir schreiben von nun an $\operatorname{rad} G = S$. Wegen $G = \mathrm{N}_G(S) = \mathrm{N}_G(S)^\circ = \mathrm{Z}_G(S)^\circ$ gilt $S \subset \mathrm{Z}(G)^\circ$. Da aber $\mathrm{Z}(G)^\circ \subset \operatorname{rad} G$ eh klar ist, folgt $\mathrm{Z}(G)^\circ = \operatorname{rad} G$. Sei nun $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine treue endlichdimensionale algebraische Darstellung. Sie zerfällt über S als

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(S)} V_\chi$$

und wegen $S \subset \mathrm{Z}(G)$ sind alle V_χ stabil unter G. Es folgt $(G, G) \subset \prod \mathrm{SL}(V_\chi)$ und S operiert durch Skalare auf jedem V_χ. Es gibt jedoch jeweils nur endlich viele Skalare, die als Diagonalmatrix mit Determinante Eins auf V_χ operieren. $\square$

Lemma 4.9.6 (**Reduktivitätskriterium**). *Besitzt eine affine algebraische Gruppe eine algebraische Darstellung mit endlichem Kern, die Summe irreduzibler Unterdarstellungen ist, so ist unsere Gruppe reduktiv.*

Beweis. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ besagte Darstellung mit $|\ker \rho| < \infty$. Die Fixvektoren unter $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ bilden einen G-stabilen Teilraum $W \subset V$. Nach Annahme und [NAS] 1.6.5 besitzt er ein G-stabiles Komplement $U \subset V$. Da $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$ in U keine von Null verschiedenen Fixvektoren haben kann, folgt $U = 0$ aus 1.6.2 und so $W = V$ und $\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G \subset \ker \rho$. $\square$

Beispiele 4.9.7. Die affinen algebraischen Gruppen $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SL}(V)$ und $\mathrm{Sp}(V)$ sind reduktiv. Dasselbe gilt für $\mathrm{SO}(V)$ im Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik. In der Tat ist in allen diesen Fällen jeweils V eine irreduzible Darstellung, im letzteren Fall nach dem Satz von Witt [LA2] 2.4.2.

Übungen

Übung 4.9.8. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Man zeige die Identität $(\operatorname{rad} G)_{\mathrm{u}} = \operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G$. Man zeige, daß das Radikal die Einskomponente des Schnitts aller Borel'schen Untergruppen ist.

Übung 4.9.9 (**Untergruppen von** $\mathrm{SL}(2;k)$). Man zeige, daß jede echte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SL}(2;k)$ entweder eine Borel'sche oder das unipotente Radikal einer Borelschen oder ein maximaler Torus ist. Hinweis: Man zeige zunächst, daß unsere Untergruppe auflösbar sein muß. Man zeige, daß jede echte abgeschlossene Untergruppe positiver Dimension das Urbild einer abgeschlossenen Untergruppe des eindimensionalen Torus B/B_{u} ist für eine Borel'sche B oder ein maximaler Torus oder der Normalisator eines maximalen Torus.

4.10 Struktur reduktiver Gruppen

Definition 4.10.1 (Wurzeln). Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Die von Null verschiedenen T-Gewichte in der Liealgebra $\mathrm{Lie}(G/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G)$ des Quotienten von G nach seinem unipotenten Radikal heißen die **Wurzeln von** G. Die Menge aller Wurzeln heißt das **Wurzelsystem** und wird

$$\mathrm{R}(G,T) := \mathrm{P}_T(\mathrm{Lie}(G/\operatorname{rad}_{\mathrm{u}} G))\backslash 0$$

notiert mit R für englisch „root“ oder französisch „racine“.

4.10.2 (**Provisorische Wurzeln**). Aus beweistechnischen Gründen arbeiten wir bis zum Ende dieses Abschnitts mit einer abweichenden provisorischen Definition des Begriffs einer Wurzel. Seien $G \supset T$ eine affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Wir betrachen die Einskomponente

$$H = H(G,T) := \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}^T} B\right)^{\circ}$$

des Schnitts aller Borel'schen über T und nennen die T-Gewichte in $\mathrm{Lie}\, G/\mathrm{Lie}\, H$ die **provisorischen Wurzeln** oder kürzer auch **Wurzeln von** G. Die Menge aller provisorischen Wurzeln heißt das **provisorische Wurzelsystem** $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$. In 4.10.16 wird sich dann herausstellen, daß der unipotente Anteil H_{u} der auflösbaren Untergruppe H genau das unipotente Radikal von G ist, so daß unsere provisorischen Wurzeln mit unseren Wurzeln zusammenfallen, in Formeln $\mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) = \mathrm{R}(G,T)$.

Proposition 4.10.3 (Subquotienten vom Rang Eins zu Wurzeln). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und eine Wurzel $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ betrachten wir die Einskomponente $S_\alpha := (\ker\alpha)^\circ \subset T$ ihres Kerns und deren Zentralisator $\mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset G$. So gilt:*

1. *Der Quotient $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ ist eine halbeinfache zusammenhängende Gruppe vom Rang Eins und die von Null verschiedenen T-Gewichte ihrer Liealgebra sind $\pm\alpha$;*

2. *Der Quotient* $G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad_u} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ *hat als derivierte Gruppe eine halbeinfache zusammenhängende Gruppe vom Rang Eins* (G_α, G_α) *und das Bild* $\bar{T} \subset G_\alpha$ *von* T *schneidet* (G_α, G_α) *in einem maximalen Torus dieser Untergruppe.*

Beweis. 1. Unser Zentralisator ist nach 4.6.21 als Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden Gruppe selbst zusammenhängend und nach unserem Satz über Borel'sche in Zentralisatoren von Tori 4.6.23 ist für jede Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$ der Schnitt $B \cap \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ eine Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$. Daraus folgt $\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha) \subset H$. Nach Wahl von α und dem Satz über Liealgebren von Zentralisatoren von Tori 3.11.11 gilt aber $\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_G(S_\alpha) \not\subset \operatorname{Lie} H$, also kann $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ nicht auflösbar sein und es gilt $\alpha \in \mathrm{P}_T(\operatorname{Lie} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{Lie}(\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha))$. Jetzt setzen wir

$$G_\alpha := \mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad_u} \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$$

Das ist folglich eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe und die Projektion induziert einen Isomorphismus von T mit einem maximalen Torus $\bar{T} \subset G_\alpha$, da weder T noch seine Liealgebra T nichttriviale unipotente Elemente hat und da nach 4.6.12 das Bild eines maximalen Torus unter einem surjektiven Homomorphismus wieder ein maximaler Torus ist. Ebenso induziert die Projektion einen Isomorphismus von S_α mit einem zentralen Untertorus $\bar{S}_\alpha \subset G_\alpha$ der Kodimenion Eins in $\bar{T}$. Wir zeigen, daß genauer sogar gilt

$$\bar{S}_\alpha = \operatorname{rad} G_\alpha$$

In der Tat ist $\subset$ klar, andererseits aber muß nach 4.9.5 das Radikal der reduktiven Gruppe G_α ein zentraler Torus sein. Gäbe es aber einen echt größeren zentralen Torus als $\bar{S}_\alpha$, so wäre er schon ein maximaler Torus, und dann wäre die Weylgruppe trivial und G_α nach 4.7.14 auflösbar, was es ja eben nicht sein kann. Also gilt $\bar{S}_\alpha = \operatorname{rad} G_\alpha$, und das hinwiederum zeigt, daß die Surjektion einen Isomorphismus

$$\mathrm{Z}_G(S_\alpha)/\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S_\alpha) \xrightarrow{\sim} G_\alpha/\bar{S}_\alpha$$

induziert und daß beide Gruppen zusammenhängend und halbeinfach vom Rang Eins sind. Nach unserer Klassifikation halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins 4.8.3 enthält schließlich die Menge der T-Gewichte $\mathrm{P}_T(\operatorname{Lie}(G_\alpha/\bar{S}_\alpha))$ genau zwei Gewichte ungleich Null, deren Summe ist Null, und deren Gewichtsräume in $\operatorname{Lie}(G_\alpha/\bar{S}_\alpha)$ sind eindimensional. Da wir α bereits als Gewicht erkannt haben, muß das zweite Gewicht notwendig $-\alpha$ sein.

2. Für die derivierte Gruppe von G_α induziert die Projektion nach 4.8.8 eine Surjektion

$$(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/\bar{S}_\alpha$$

Andererseits trifft $(G_\alpha, G_\alpha) \subset G_\alpha$ nach 4.9.5 das Radikal $\bar{S}_\alpha$ in einer endlichen Gruppe, unsere Surjektion hat folglich endlichen Kern. Mithin ist auch (G_α, G_α) halbeinfach vom Rang Eins und die Einskomponente des Urbilds von $\bar{T}/\bar{S}_\alpha$ ist darin ein maximaler Torus. Der muß aber wie jeder maximale Torus einer zusammenhängenden halbeinfachen Gruppe vom Rang Eins das Zentrum umfassen und a forteriori den Kern von $(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/\bar{S}_\alpha$. Damit ist unser maximaler Torus bereits das ganze Urbild von $\bar{T}/\bar{S}_\alpha$ alias der Schnitt $\bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$. □

4.10.4 (**Vielfache von Wurzeln**). Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus sind Wurzeln $\alpha, \beta \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G, T)$ mit $\alpha \neq \pm\beta$ sind linear unabhängig. In der Tat, sind Wurzeln α, β linear abhängig, so gilt $(\ker \alpha)^\circ = S = (\ker \beta)^\circ$ und die Behauptung folgt, da $\mathrm{Z}_G(S)/\operatorname{rad} \mathrm{Z}_G(S)$ nach 4.10.3 halbeinfach ist vom Rang Eins.

Lemma 4.10.5 (Wurzelspiegelungen). *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus und sei $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G, T)$ eine Wurzel. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Element der Weylgruppe $s_\alpha \in \mathrm{W}(G, T)$ mit $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $s_\alpha|(\ker \alpha)^\circ = \mathrm{id}$;*

2. *Für dieses Element haben wir $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ und es gibt es genau eine Linearform $\alpha^\vee : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ derart, daß für alle $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ gilt*

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

4.10.6. Hier verwenden wir die in diesem Zusammenhang übliche symmetrischere Schreibweise $\langle \lambda, \psi \rangle := \psi(\lambda)$ für das Auswerten einer Linearform $\psi : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ auf einem Element $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$. Wir nennen s_α die **Wurzelspiegelung zur Wurzel** α und $\alpha^\vee$ die zugehörige **Kowurzel**.

Beweis. Wir setzen wie zuvor $S_\alpha := (\ker \alpha)^\circ$. Nach 4.10.3 ist die Gruppe $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ nicht auflösbar. Also ist nach 4.7.14 ihre Weylgruppe zum maximalen Torus T nicht trivial. Ist s ein nichttriviales Element dieser Gruppe, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{X}(T) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "s"'] & \mathfrak{X}(S_\alpha) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
\ker \arrow[r, hook] & \mathfrak{X}(T) \arrow[r, two heads] & \mathfrak{X}(S_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Hier ist $\ker \cong \mathbb{Z}$ frei vom Rang Eins. Würde s auf dem Kern die Identität induzieren, so wäre es auf $\mathfrak{X}(T)$ unipotent und müßte als unipotenter Automorphismus endlicher Ordnung trivial sein. Das ist es nicht, also haben wir $s = -\mathrm{id}$ auf dem Kern und insbesondere $s(\alpha) = -\alpha$. Dieselbe Argumentation zeigt, daß s eindeutig bestimmt ist und daß gilt $s^2 = \mathrm{id}$. Von nun an nennen wir dies s die Wurzelspiegelung zur Wurzel α und notieren es $s = s_\alpha$. Wenden wir nun die Klassifikation halbeinfacher Gruppen vom Rang Eins auf die derivierte Gruppe (G_α, G_α) von G_α an, die ja nach 4.10.3 eine Gruppe dieser Art ist, so finden wir einen Homomorphismus $\alpha^\vee : k^\times \to \bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$ von algebraischen Gruppen mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Repräsentiert $\bar{s} \in (G_\alpha, G_\alpha)$ das nichttriviale Element der Weylgruppe zum maximalen Torus $\bar{T} \cap (G_\alpha, G_\alpha)$, so kommutiert $\bar{s}$ mit $\bar{S}_\alpha$ und normalisiert damit ganz $\bar{T}$ und der davon induzierte Automorphismus $\bar{s}_\alpha$ von $\mathfrak{X}(\bar{T})$ muß folglich mit dem von unserer Wurzelspiegelung auf $\mathfrak{X}(T)$ induzierten Automorphismus übereinstimmen modulo der Identifikation $T \xrightarrow{\sim} \bar{T}$. Schreiben wir

$$\mathfrak{X}^\vee(D) := \mathrm{GrpVar}(k^\times, D)$$

für die Gruppe der multiplikativen Ein-Parameter-Untergruppen eines Torus D, so operiert unser $\bar{s}$ auch auf $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ und wir haben $\bar{s}(\alpha^\vee) = -\alpha^\vee$. Andererseits haben wir $\bar{s}(\psi) = \psi$ für alle $\psi \in \mathfrak{X}^\vee(\bar{S}_\alpha) \subset \mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$. Da nun $\mathfrak{X}^\vee(\bar{S}_\alpha)$ und $\alpha^\vee$ bereits eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ erzeugen, wird der von $\bar{s}$ induzierte Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$ durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt. Es folgt

$$\bar{s}(\psi) = \lambda - \langle \alpha, \psi \rangle \alpha^\vee$$

für alle $\psi \in \mathfrak{X}^\vee(\bar{T})$, denn die durch die rechte Seite gegebene Abbildung erfüllt auch diese Bedingungen. Nun identifiziert die offensichtliche Paarung

$$\mathfrak{X}^\vee(\bar{T}) \times \mathfrak{X}(\bar{T}) \to \mathbb{Z}$$

jeweils die eine abelsche Gruppe mit dem $\mathbb{Z}$-dualen der anderen, so daß die Operation von $\bar{s}$ auf $\mathfrak{X}(\bar{T})$ durch die transponierte Abbildung geschehen muß. Indem wir wieder zu T aufsteigen, folgt schließlich die behauptete Formel $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ für alle $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$. □

Proposition 4.10.7 (Homomorphismen und Weylgruppen). *Unter einem surjektiven Homomorphismus von zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppen mit zentralem und diagonalisierbaren Kern ist das Urbild jedes maximalen Torus ein maximaler Torus und das Urbild seines Normalisators der Normalisator seines Urbilds und wir erhalten so einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Weylgruppen.*

Beweis. Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ unser surjektiver Homomorphismus und $T \subset G$ ein maximaler Torus. Da G zusammenhängend ist, zeigt 4.6.29 bereits $\ker \varphi \subset T$ und folglich $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Da wir bereits nach 4.6.12 wissen, daß jeder maximale

Torus in H das Bild eines maximalen Torus in G ist, folgt die erste Behauptung. Die beiden weiteren Behauptungen folgen nun ohne weitere Schwierigkeiten, für eine formale Argumentation scheint mir das Neunerlemma [LA2] 7.3.4 besonders übersichtlich. Die benötigten Rechnungen macht 4.10.8 explizit. $\square$

4.10.8. Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ und Teilmengen $A, B \subset H$ gilt $\varphi^{-1}(AB) = \varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)$. Gegeben eine Teilmenge $S \subset H$ und ein Element $g \in G$ gilt des weiteren die Äquivalenz $g\varphi^{-1}(S)g^{-1} \subset \varphi^{-1}(S) \Leftrightarrow \varphi(g)S\varphi(g)g^{-1} \subset S$. Man lasse sich nicht dadurch verwirren, daß hierbei „hoch (-1)“ sowohl für Abbildungen die auf den Potenzmengen in der Gegenrichtung induzierte Abbildung bezeichnet als auch für Gruppenelemente ihr Inverses.

Satz 4.10.9 (Erzeugung der Weylgruppe durch Wurzelspiegelungen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus erzeugen die Wurzelspiegelungen die Weylgruppe $\mathrm{W}(G, T)$.*

Beweis. Gibt es keine provisorischen Wurzeln, so ist $G = H(G, T)$ per definitionem auflösbar und die Weylgruppe ist trivial nach 4.7.14. Das erledigt den Fall, daß das provisorische Wurzelsystem leer ist. Sonst argumentieren wir mit Induktion über die Dimension unserer Gruppe. Sei $w \in \mathrm{W}(G, T)$ ein nichttriviales Element der Weylgruppe und $\dot{w}$ ein Repräsentant desselben. Man betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \phi: & T & \to & T \\ & t & \mapsto & \dot{w}t\dot{w}^{-1}t^{-1} \end{array}$$

Ist ϕ nicht surjektiv, so hat sein Kern positive Dimension und w zentralisiert mithin einen echten Untertorus $S \subsetneq T$. Dann brauchen wir nur die Induktionsannahme auf $\mathrm{Z}_G(S)/S$ anzuwenden, das nach 4.10.7 dieselbe Weylgruppe hat wie $\mathrm{Z}_G(S)$ und dessen Wurzeln unter $T \twoheadrightarrow T/S$ genau den Wurzeln von $\mathrm{Z}_G(S)$ entsprechen. Ist dahingegen ϕ surjektiv, so ist die davon auf der Charaktergruppe induzierte Abbildung eine Injektion

$$(w - \mathrm{id}) : \mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T)$$

Nun wissen wir bereits, daß es Wurzeln α geben muß, und gegeben eine Wurzel α finden wir dann $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ von Null verschieden mit $(w - \mathrm{id})\lambda \in \mathbb{Z}\alpha$. Da die Bahn einer endlichen Gruppe in einer Darstellung über einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum jede affine Gerade nur in höchstens zwei Punkten treffen kann, die unter jedem invarianten Skalarprodukt denselben Abstand vom Ursprung haben, folgt $w\lambda = s_\alpha\lambda$ und damit

$$(s_\alpha w - \mathrm{id})\lambda = s_\alpha(w - \mathrm{id})\lambda + (w - \mathrm{id})\lambda = 0$$

Also ist $s_\alpha w$ ein weiteres Element der Weylgruppe, für das unser ϕ nicht mehr surjektiv ist, so daß wir den Beweis, wie zuvor erklärt, mit vollständiger Induktion zu Ende bringen können. □

Definition 4.10.10. Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Eine Teilmenge $\mathrm{R}^+ \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ nennen wir ein **System positiver Wurzeln**, wenn es eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\psi : \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ gibt, deren Kern das Wurzelsystem nicht trifft und für die gilt

$$\mathrm{R}^+ = \{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) \mid \langle \alpha, \psi \rangle > 0\}$$

4.10.11. Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Eine Teilmenge $\mathrm{R}^+ \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$ ist genau dann ein System positiver Wurzeln, wenn es einen Charakter $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ gibt, auf dem keine Kowurzel verschwindet und so daß gilt

$$\mathrm{R}^+ = \{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0\}$$

In der Tat erhält man ja nach [NAS] 2.3.4 auf $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ein unter der Weylgruppe invariantes Skalarprodukt durch Mitteln eines beliebigen Skalarprodukts, und unter der durch solch ein Skalarprodukt gegebenen Identifikation von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^\vee(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ entsprechen sich die (-1)-Eigenräume der Wurzelspiegelungen, so daß α auf ein positives Vielfaches von $\alpha^\vee$ abgebildet wird. Die Behauptung folgt.

Lemma 4.10.12. *Je zwei Systeme positiver Wurzeln sind konjugiert unter der Weylgruppe.*

Beweis. Man schreibe [ML] 5.6.5 ab und beachte die eineindeutige Entsprechung zwischen Alkoven und Systemen positiver Wurzeln. □

Satz 4.10.13 (Systeme positiver Wurzeln zu Borel'schen). *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus bilden für jede Borel'sche $B \subset G$ über T diejenigen Wurzeln $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$, die als T-Gewichte in $\operatorname{Lie} B / \operatorname{Lie} H$ vorkommen, ein System positiver Wurzeln $\mathrm{R}^+(B) \subset \mathrm{R}_{\mathrm{prov}}(G,T)$.*

4.10.14. Im Satz meinen wir mit H die bei der Definition der provisorischen Wurzeln 4.10.2 erklärte Untergruppe $H = H(G,T)$. Mit 4.10.12 folgern wir, daß die Abbildung $B \mapsto \mathrm{R}^+(B)$ sogar eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{B}^T$ der Borel'schen über T und der Menge der Systeme positiver Wurzeln unseres provisorischen Wurzelsystems induziert.

Beweis. Nach 3.9.7 finden wir $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine algebraische Darstellung und $v \in V\backslash 0$ ein Vektor derart, daß B der Stabilisator der Gerade kv ist. Sei $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ bestimmt durch $v \in V_\chi$. Wie bereits zu Beginn des Beweises von 4.10.3 erwähnt, ist $B \cap \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ für jede provisorische Wurzel α eine Borel'sche von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$. Sicher hält mithin $\mathrm{rad_u}\, \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ unseren Vektor v fest. Der von den Bildern von v unter $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ erzeugte Teilraum von V ist also eine Darstellung W von G_α mit $W_\chi \neq 0$, und das Bild in G_α der Borel'schen $B \cap \mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ ist eine Borel'sche $B_\alpha \subset G_\alpha$, die W_χ stabilisiert. Das Bild $B_\alpha/\bar{S}_\alpha \subset G_\alpha/\bar{S}_\alpha$ ist dann immer noch eine Borel'sche, und dasselbe gilt für das Urbild dieses Bildes $B_\alpha \cap (G_\alpha, G_\alpha)$ unter der Projektion mit endlichem in $\bar{T}$ enthaltenem Kern $(G_\alpha, G_\alpha) \twoheadrightarrow G_\alpha/\bar{S}_\alpha$. Da nun χ das Gewicht einer Geraden mit Stabilisator $B_\alpha \cap (G_\alpha, G_\alpha)$ in einer Darstellung von (G_α, G_α) ist, folgt $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0$ aus der Darstellungstheorie der Gruppe $\mathrm{SL}(2; k)$, insbesondere der Aussage 1.8.5.5. □

Lemma 4.10.15. *Seien $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus. Gegeben eine Wurzel $\alpha \in \mathrm{R_{prov}}(G, T)$ ist H_u ein Normalteiler der Untergruppe*

$$K(\alpha) := \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T,\, \alpha \in \mathrm{R}^+(B)} B \right)^\circ$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß $H_\mathrm{u} \subset K(\alpha)_\mathrm{u}$ ein Normalteiler ist, denn der maximale Torus T normalisiert H_u eh. Es reicht nach 4.1.13 dazu zu zeigen, daß $H_\mathrm{u} \subset K(\alpha)_\mathrm{u}$ eine Untergruppe der Kodimension Eins ist. Es reicht auch zu zeigen, daß $H \subset K(\alpha)$ eine Untergruppe der Kodimension Eins ist, denn beide Gruppen sind auflösbar mit demselben maximalen Torus T. Nun sind alle T-Gewichte von $\mathrm{Lie}\, K(\alpha)/\mathrm{Lie}\, H$ offensichtlich Wurzeln β mit der Eigenschaft, daß für jede Borel'sche $B \in \mathcal{B}^T$ gilt $\alpha \in \mathrm{R}^+(B) \Rightarrow \beta \in \mathrm{R}^+(B)$. Mit 4.10.14 folgt $\beta = \alpha$. Da wir bereits wissen, daß die fraglichen Gewichtsräume eindimensional sind, folgt die Behauptung. □

Satz 4.10.16. *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus ist $H_\mathrm{u} = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T} B_\mathrm{u}\right)^\circ$ das unipotente Radikal von G.*

Beweis. Die Inklusion $\mathrm{rad_u}\, G \subset H_\mathrm{u}$ ist evident, eine und damit jede Borel'sche umfaßt ja das Radikal. Die andere Inklusion $\supset$ folgt, sobald wir unser H_u als Normalteiler entlarven können. Nach Lemma 4.10.15 aber wird H_u von allen $K(\alpha)$ normalisiert. Man überlegt sich nun, daß der Gewichtsraum zur Wurzel α von $\mathrm{Lie}\, K(\alpha)/\mathrm{Lie}\, H$ nicht Null ist. In der Tat umfaßt ja $K(\alpha)$ eine der beiden Borel'schen von $\mathrm{Z}_G(S_\alpha)$ über T. Damit erzeugen die $K(\alpha)$ bereits eine Untergruppe von G mit der vollen Liealgebra, als da heißt, ganz G. □

Satz 4.10.17. *Gegeben $G \supset T$ eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe mit einem maximalen Torus ist der maximale Torus T die Einskomponente des Schnitts aller Borel'schen über T, in Formeln*

$$T = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T} B \right)^{\circ}$$

Beweis. Die Inklusion $\subset$ ist evident. Der unipotente Anteil der rechten Seite ist Null nach 4.10.16, folglich geht sie für eine beliebige Borel'sche B über T injektiv nach B/B_{u}. Da aber die Komposition eine Bijektion $T \xrightarrow{\sim} B/B_{\mathrm{u}}$ ist, folgt die Behauptung. □

4.10.18. In einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe ist der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend nach 4.6.23. Ist unsere Gruppe G zusätzlich reduktiv, so ist jeder maximale Torus $T \subset G$ sogar sein eigener Zentralisator, da ja nach 4.10.17 gilt $T = H$ in der Notation vom Beginn dieses Abschnitts und da in $\operatorname{Lie} G / \operatorname{Lie} H$ das T-Gewicht Null nicht vorkommt. Wir können demnach die Weylgruppe in diesem Fall auch schreiben als

$$\mathrm{W}(G, T) = \mathrm{N}_G(T)/T$$

5 Danksagung

Dieses Skript ist der Versuch einer weiteren Vereinfachung des wunderbaren Buchs von Tonny Springer über Lineare Algebraische Gruppen [Spr81]. Dort schien mir allerdings Proposition 4.2.4 problematisch, bereits im Fall der Morphismen $\mathbb{C}\backslash p \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ für $p \neq 0$. In derselben Weise schien mir Übung 4.2.6(2) dort problematisch. In der neuen Ausgabe [Spr98] wird dieser Punkt auch in anderer Weise angegangen, vergleiche Lemma 5.2.4 dort, bei dem ich jedoch den zweiten Satz des Beweises noch nicht vollständid durchdrungen habe. Eine andere wichtige Quelle war meine Mitschrift einer Vorlesung von Jens Carsten Jantzen und die Bücher von Borel [Bor91] und Humphreys [Hum75]. Hilfreich war auch das Buch von Tauvel und Yu [TW05], in dem allerdings nur den Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null betrachtet wird. Hilfreich war weiter das Buch von Hochschild [**?**], das einen ganz eigenwilligen Zugang verfolgt. Eine gewisse Vereinfachung ist mir, so hoffe ich, insbesondere bei der Diskussion von Gruppen vom Rang Eins gelungen. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Antonio Sartori, …

Literatur

[AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie;*.

[Bor91] Armand Borel, *Linear algebraic groups (second enlarged edition)*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer, 1991.

[Hum75] James E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, GTM, vol. 21, Springer, 1975.

[KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie;*.

[Kas95] Christian Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer, 1995.

[LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1;*.

[LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2;*.

[ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen;*.

[NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie;*.

[Spr81] Tonny A. Springer, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser, 1981.

[Spr98] ______, *Linear algebraic groups*, second ed., Birkhäuser, 1998, Reprint of the second edition as Ebook.

[TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie;*.

[TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen;*.

[TS] *Skriptum Singuläre Homologie;*.

[TW05] Patrice Tauvel and Rupert W.T.Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer, 2005.

Index