

# DARSTELLUNGEN HALBEINFACHER LIE-ALGEBREN

Wolfgang Soergel

16. August 2018

Die ersten beiden Kapitel dieses Textes setzen ausschließlich Kenntnisse der linearen Algebra voraus, wie sie in den Grundvorlesungen [LA1] und [LA2] entwickelt wurden. Zur Motivation der grundlegenden Definitionen und Fragestellungen ist es jedoch wichtig, auch etwas über Lie-Gruppen zu wissen oder zu lernen, wie es etwa in [ML] dargestellt wird.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einfache endlichdimensionale Darstellungen</b>	<b>4</b>
1.1	Klassifikation durch das höchste Gewicht . . . . .	4
1.2	Beweis erster Teile des Klassifikationssatzes . . . . .	11
1.3	Die universelle einhüllende Algebra . . . . .	14
1.4	Konstruktion von Moduln mit höchstem Gewicht . . . . .	24
1.5	Induktion und Koinduktion bei Liealgebren* . . . . .	33
1.6	Die Weyl'schen Formeln . . . . .	35
1.7	Die Tensoridentität* . . . . .	51
1.8	Quellen . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Infinitesimale zentrale Charaktere</b>	<b>53</b>
2.1	Motivation . . . . .	53
2.2	Das Zentrum der universellen Einhüllenden . . . . .	53
2.3	Der Chevalley-Isomorphismus . . . . .	56
2.4	Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus . . . . .	59
2.5	Zentrale Charaktere . . . . .	64
2.6	Die ganzzahlige Weylgruppe eines Gewichts . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Multiplizitäten von Vermamoduln</b>	<b>71</b>
3.1	Kategorie $\mathcal{O}$ . . . . .	71
3.2	Zerlegungen der Kategorie $\mathcal{O}$ . . . . .	76
3.3	Projektive Objekte von $\mathcal{O}$ . . . . .	79
3.4	Verschiebungsfunktoren . . . . .	82
3.5	Homomorphismen zwischen Vermamoduln . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Kazhdan-Lusztig-Theorie</b>	<b>99</b>
4.1	Die Iwahori-Hecke-Algebra . . . . .	99
4.2	Die kanonische Basis der Heckealgebra . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Danksagung</b>	<b>107</b>
<b>6</b>	<b>Die Vorlesung Darstellungstheorie im SS 16</b>	<b>108</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>
	<b>Index</b>	<b>112</b>

# 1 Einfache endlichdimensionale Darstellungen

## 1.1 Klassifikation durch das höchste Gewicht

**Definition 1.1.1.** Ich erinnere an Terminologie aus [?] ??. Sei  $\mathfrak{h}$  eine abelsche Liealgebra. Die Elemente des Dualraums  $\mathfrak{h}^*$  der heißen auch **Gewichte**. Für jede Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{h}$  und jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  definiert man den **Gewichtsraum**  $V_\lambda$  zum Gewicht  $\lambda$  als den Untervektorraum

$$V_\lambda := \{v \in V \mid Hv = \lambda(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Gilt  $V_\lambda \neq 0$ , so heißt  $\lambda$  ein **Gewicht von  $V$** . Die Menge aller Gewichte einer Darstellung  $V$  einer abelschen Liealgebra  $\mathfrak{h}$  notieren wir

$$P(V) = P_{\mathfrak{h}}(V) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq 0\}$$

mit  $P$  nach französisch „poids“ für „Gewicht“.

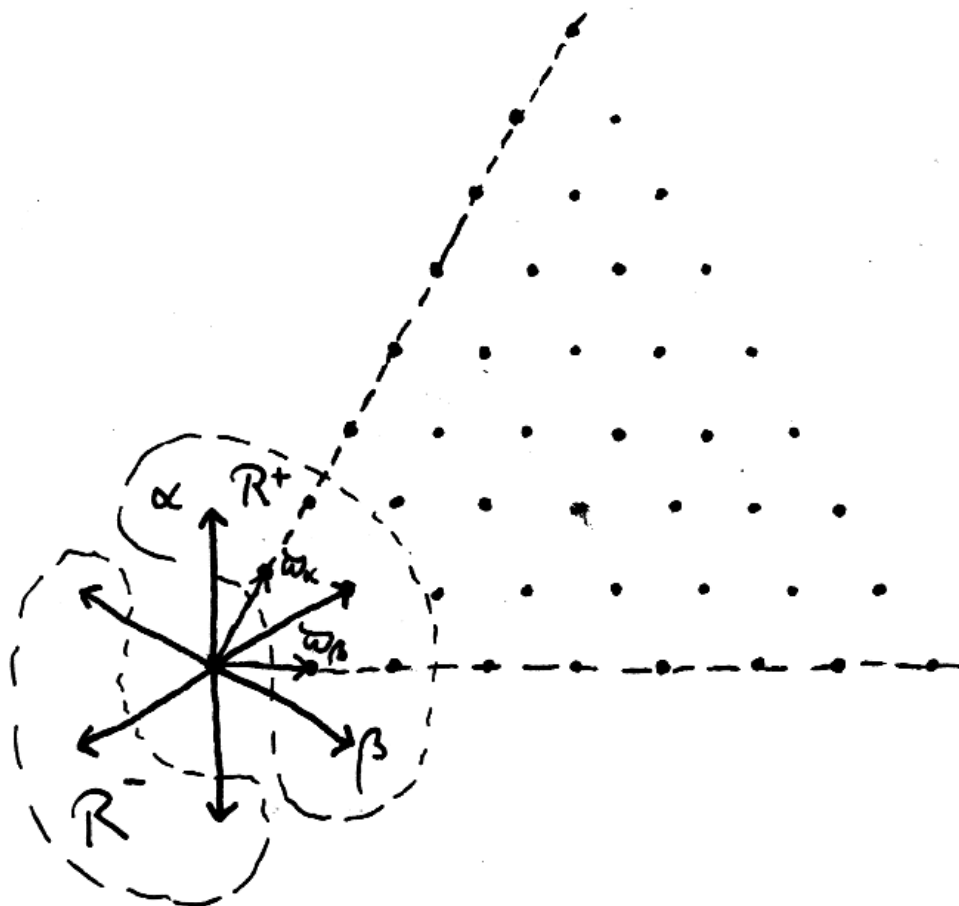
1.1.2 (**Konsequenzen aus der Theorie abstrakter Wurzelsysteme**). Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine halbeinfache Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null mit einer Cartan'schen Untereralgebra. Fassen wir  $\mathfrak{g}$  auf als eine Darstellung von  $\mathfrak{h}$  mittels der adjungierten Operation, so bilden die von Null verschiedenen Gewichte genau unser Wurzelsystem  $R$  aus [?] ??, in Formeln

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = P_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) \setminus 0$$

Der zu  $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  gehörige Gewichtsraum ist unser Wurzelraum  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Des weiteren ist die Teilmenge  $R \subset \mathfrak{h}^*$  nach [?] ?? ein abstraktes Wurzelsystem im Sinne unserer Definition [?] ??. Insbesondere liefert uns [?] ?? oder alternativ die Theorie abstrakter Wurzelsysteme [SPW] 2.1.10 zu jeder Wurzel  $\alpha$  eine Kowurzel  $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$  sowie eine Wurzelspiegelung  $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  gegeben durch  $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  und die durch diese Spiegelungen erzeugte Untergruppe, die sogenannte **Weylgruppe**

$$W = W(R) = \text{Weyl}(R) \subset \text{GL}(\mathfrak{h}^*)$$

Diese Weylgruppe operiert nach [SPW] 2.1.8 als endliche Spiegelungsgruppe im Sinne von [SPW] 1.2.5 auf dem  $\mathbb{Q}$ -Spann  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  der Wurzeln. Die maximalen konvexen Teilmengen im Komplement der Vereinigung der Spiegelhyperebenen heißen die **Weylkammern**, und die Theorie der Spiegelungsgruppen [SPW] 1.6.1 zeigt, daß die Weylgruppe frei und transitiv auf der Menge der Weylkammern operiert. Bei der Entwicklung der Theorie abstrakter Wurzelsysteme haben wir auch vereinbart, welche Teilmengen eines Wurzelsystems **Systeme positiver**



Ein Wurzelsystem  $R$  aus sechs Wurzeln mit einem System positiver Wurzeln  $R^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$  den zugehörigen einfachen Wurzeln  $\alpha, \beta$ , der zugehörigen Weylkammer und der Menge der ganzen dominante Gewichte. Außerdem habe ich noch die Menge der drei negativen Wurzeln sowie die beiden fundamentalen dominanten Gewichte  $\varpi_\alpha, \varpi_\beta$  nach 1.1.10 eingezeichnet.

**Wurzeln** heißen und welche Teilmengen **Basen des Wurzelsystems**, vergleiche [SPW] 2.2.2 und [SPW] 2.2.1. Weiter sagt diese Theorie uns, daß jedes System positiver Wurzeln  $R^+ \subset R$  genau eine Basis  $\Pi = \Pi(R^+)$  umfaßt, deren Elemente die **einfachen Wurzeln** zu unserem System positiver Wurzeln heißen, und nach [SPW] 2.2.6 erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge aller Systeme positiver Wurzeln und der Menge aller Weylkammern durch die Vorschrift

$$R^+ \mapsto C(R^+) := \{\lambda \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \forall \alpha \in R^+\}$$

Die Weylkammer  $C(R^+)$  heißt die **dominante Weylkammer** zu unserem System von positiven Wurzeln  $R^+$ , und die Spiegelungen zu den zugehörigen einfachen Wurzeln aus  $\Pi(R^+)$ , auch genannt die **einfachen Spiegelungen**, sind dann genau die Spiegelungen an den Wänden der dominanten Kammer und erzeugen die Weylgruppe nach [SPW] 2.2.12. Die geometrische Erkenntnis, daß das Bild einer Kammer unter einer Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch besagte Wand von ihrem Spiegelbild getrennt wird, übersetzt sich in die Erkenntnis [SPW] 2.2.7, daß für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Pi(R^+)$  gilt

$$s_\alpha(R^+) = (R^+ \setminus \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

**Definition 1.1.3.** Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen Unteralgebra und Wurzelsystem  $R := R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Für jedes System positiver Wurzeln  $R^+ \subset R$  definieren wir eine partielle Ordnung auf der Menge  $\mathfrak{h}^*$  aller Gewichte durch die Vorschrift

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda \in \mu + |R^+\rangle$$

Hier bezeichnet  $|R^+\rangle$  getreu unserer allgemeinen Konvention [AL] 3.5.1 das von  $R^+$  in  $\mathfrak{h}^*$  erzeugte Untermonoid. Ist  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , und gibt es bezüglich unserer partiellen Ordnung in der Menge  $P_{\mathfrak{h}}(V)$  der  $\mathfrak{h}$ -Gewichte oder kurz Gewichte von  $V$  ein größtes Element  $\mu$ , so heißt  $\mu$  das **höchste Gewicht von  $V$**  bezüglich  $R^+$  und jeder von Null verschiedene Vektor aus  $V_\mu$  ein **höchster Gewichtsvektor**.

1.1.4. Sei  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen Unteralgebra und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. Es gibt durchaus von Null verschiedene unendlichdimensionale Darstellungen von  $\mathfrak{g}$ , die überhaupt keine  $\mathfrak{h}$ -Gewichte haben, in Formeln  $V \neq 0$  aber  $P_{\mathfrak{h}}(V) = \emptyset$ . Ein erstes Beispiel werden wir mit der Einhüllenden kennenlernen. Ebenso kann es auch passieren, daß  $P_{\mathfrak{h}}(V)$  zwar nicht leer ist, aber kein größtes Element hat. Wir werden jedoch sehen, daß einfache endlichdimensionale Darstellungen stets ein höchstes Gewicht haben, und daß sie sogar durch dieses höchste Gewicht klassifiziert werden. Genauer ist unser nächstes Ziel:

**Satz 1.1.5 (Klassifikation durch das höchste Gewicht).** Seien  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche Unteralgebra und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System von positiven Wurzeln. Bezeichne

$$\mathfrak{X}^+ := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall \alpha \in R^+\}$$

die Menge der in Bezug auf  $R^+$  **dominanten ganzen Gewichte**. So haben wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{einfache endlichdimensionale} \\ \text{Darstellungen von } \mathfrak{g}, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^+$$

$$V \quad \mapsto \quad \begin{array}{l} \text{das in Bezug auf } R^+ \\ \text{höchste Gewicht von } V \end{array}$$

*Ergänzung 1.1.6.* Dieser Satz ist eine algebraisierte Fassung einer entsprechenden Klassifikation der einfachen Darstellungen einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe, die wir in ?? besprechen. Diese Klassifikation hinwiederum ergibt sich in natürlicher Weise, wenn man weiß, daß die irreduziblen Charaktere einer kompakten topologischen Gruppe eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Klassenfunktionen bilden müssen, und das wissen wir zumindest im Fall endlicher Gruppen bereits aus [NAS] 2.4.9.

1.1.7. Der Beweis der Klassifikation durch das höchste Gewicht 1.1.5 benötigt starke Hilfsmittel und wird sich als direkte Konsequenz aus 1.4.7 und 1.4.10 ergeben.

*Beispiel 1.1.8.* Im Fall  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und  $R^+ = \{\alpha\}$  ist  $m\alpha/2$  das höchste Gewicht der  $m$ -dimensionalen einfachen Darstellung  $L(m)$  aus ?? und wir haben  $\mathfrak{X}^+ = \mathbb{N}(\alpha/2)$ .

1.1.9. In  $\mathfrak{h}^*$  oder ganz allgemein in einem beliebigen Vektorraum der Charakteristik Null mit einem Wurzelsystem  $R$  betrachtet man das Gitter der **ganzen Gewichte**

$$\mathfrak{X} := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in R\}$$

Per definitionem sind alle Wurzeln ganze Gewichte, in Formeln  $R \subset \mathfrak{X}$ , und das Gitter der ganzen Gewichte  $\mathfrak{X}$  ist stabil unter der Weylgruppe.

1.1.10. Ist  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  die in  $R^+$  enthaltene Basis des Wurzelsystems  $R$ , so bilden die Kowurzeln  $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_r^\vee$  eine Basis des Vektorraums  $\mathfrak{h}$ . Die Elemente der zur Basis der Kowurzeln dualen Basis von  $\mathfrak{h}^*$  notiert man  $\varpi_1, \dots, \varpi_r$  mit  $\varpi$  dem griechischen Schreibschrift- $\pi$  und bezeichnet sie als die **fundamentalen dominanten Gewichte**. Sie werden also charakterisiert durch  $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ . Natürlich

bilden die fundamentalen dominanten Gewichte  $\varpi_1, \dots, \varpi_r$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis für das Gitter  $\mathfrak{X}$  der ganzen Gewichte und die Menge der dominanten ganzen Gewichte

$$\mathfrak{X}^+ = \mathbb{N}\varpi_1 + \dots + \mathbb{N}\varpi_r$$

ist genau der Schnitt von  $\mathfrak{X}$  mit dem Abschluß der dominanten Weylkammer. Formeln für die Darstellung der fundamentalen dominanten Gewichte durch die einfachen Wurzeln findet man am Ende von [Bou81].

*Vorschau* 1.1.11. Ist  $\mathfrak{g}$  eine einfache endlichdimensionale Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln, so besitzt nach 1.1.5 insbesondere die adjungierte Darstellung ein höchstes Gewicht  $\beta \in R^+$ . Es heißt die **höchste Wurzel** und kann nach 1.4.17 auch beschrieben werden als die einzige Wurzel  $\beta \in R^+$  derart, daß für alle  $\alpha \in R^+$  die Summe  $\alpha + \beta$  keine Wurzel mehr ist. Im Rahmen der abstrakten Theorie der Wurzelsysteme wird sie in [SPW] 2.4.2 diskutiert.

*Ergänzung* 1.1.12. In einem Skript von Andersen kann man eine Argumentation finden, die von da ausgehend zeigt, daß eine halbeinfache Liealgebra schon durch ihr Wurzelsystem eindeutig bestimmt ist.

**Lemma\* 1.1.13 (Ergänzung zur Geometrie der Weylkammer).** *Die dominante Weylkammer ist enthalten in dem von den positiven Wurzeln erzeugten Kegel.*

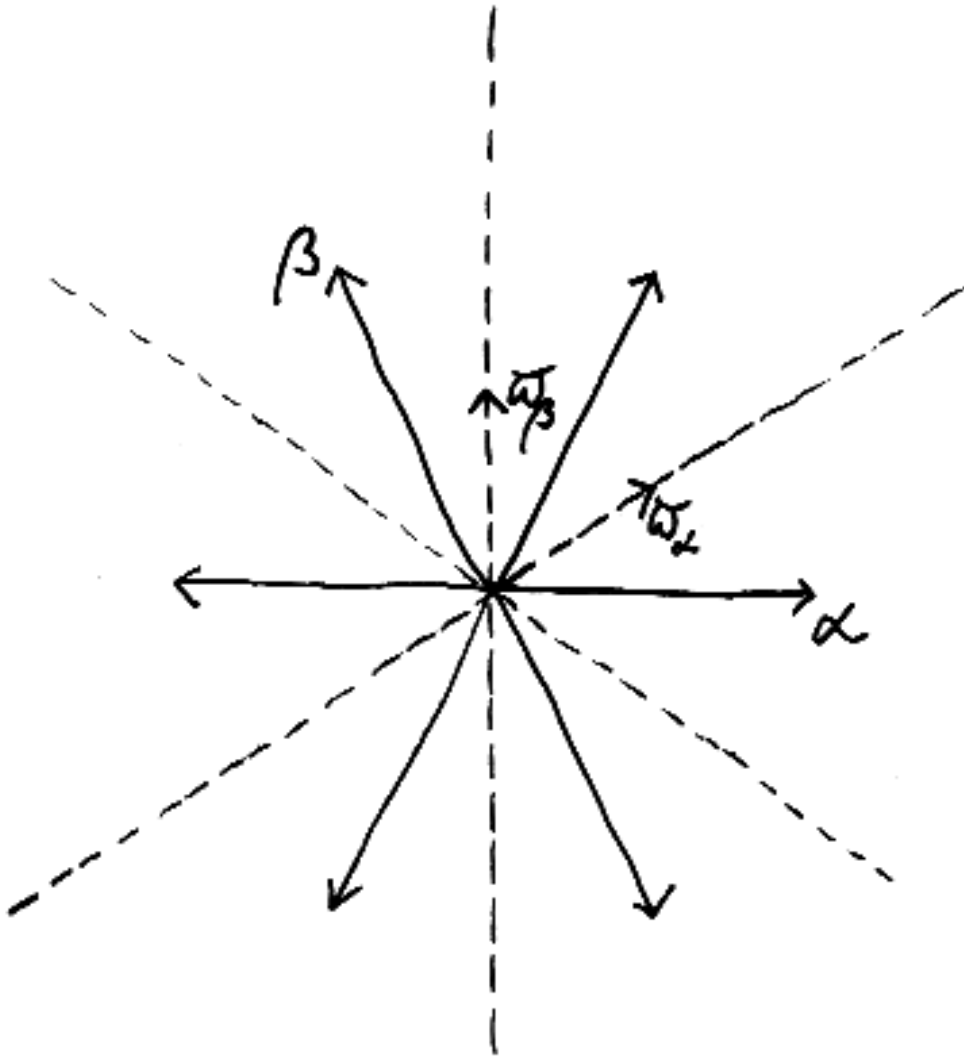
*Beweis.* Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die einfachen Wurzeln und  $\varpi_1, \dots, \varpi_n$  die zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichte. Wir schreiben  $\varpi_1 = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$  und müssen zeigen  $a_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Wählen wir ein unter der Weylgruppe invariantes Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ , so gilt  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$  und folglich  $0 < (\varpi_1, \varpi_1) = (\varpi_1, a_1\alpha_1) = a_1(\alpha_1, \alpha_1)/2$  und damit erhalten wir bereits  $a_1 > 0$ . Bringen wir nun alle Summanden mit  $a_i \geq 0$  auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\varpi_1 - \sum_{a_i \geq 0} a_i \alpha_i = \sum_{a_j < 0} a_j \alpha_j$$

und das Skalarprodukt der rechten Seite mit der linken Seite ist  $\leq 0$ , da rechts das  $\alpha_1$  nicht auftreten kann. Also sind beide Seiten Null.  $\square$

*Ergänzung* 1.1.14. Insbesondere schließen je zwei fundamentale dominante Gewichte einen spitzen Winkel ein, in den Notationen des vorhergehenden Beweises gilt nämlich  $(\varpi_2, \varpi_1) = a_2(\varpi_2, \alpha_2) = a_2(\alpha_2, \alpha_2)/2 \geq 0$ .





Eine Basis eines Wurzelsystems vom Typ  $A_2$  mit den zugehörigen fundamentalen dominanten Gewichten.

## Übungen

*Übung 1.1.15.* Gegeben eine Darstellung  $V$  einer abelschen Liealgebra  $\mathfrak{h}$  und ein Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  liefert das Auswerten bei  $1 \in k_\lambda$  einen Isomorphismus  $\text{Mod}^{\mathfrak{h}}(k_\lambda, V) \xrightarrow{\sim} V_\lambda$ .

*Übung 1.1.16.* Im Fall des Wurzelsystems  $G_2$  mit einer ausgezeichneten Basis zeige man, daß das Fundamentalgewicht zur kurzen einfachen Wurzel die höchste kurze Wurzel ist und das Fundamentalgewicht zur langen einfachen Wurzel die höchste Wurzel.

*Übung 1.1.17.* Wir erinnern aus [HL] 2.3.31 das Wurzelsystem  $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  mit der Bezeichnung  $D_n$  von  $\mathfrak{so}(2n)$ . Wir erinnern aus Übung [SPW] 2.2.17, wenn man sie denn gemacht hat, seine Basis  $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  für  $1 \leq i < n$  zusammen mit  $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ . Man zeige für das Gitter der ganzen Gewichte

$$\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle_{\mathbb{Z}} + \mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)/2$$

Man zeige, daß die äußeren Potenzen  $\bigwedge^i(\mathbb{C}^{2n})$  für  $1 \leq i \leq n$  irreduzible Darstellungen sind mit den höchsten Gewichten  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$  und daß diese Gewichte für  $1 \leq i < n - 1$  die fundamentalen dominanten Gewichte  $\varpi_i$  sind, wohingegen gilt  $\varpi_{n-1} = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)/2$  und  $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)/2$ . Irreduzible Darstellungen zu den höchsten Gewichten  $\varpi_{n-1}$  und  $\varpi_n$  liefert die sogenannte Clifford-Algebra, vergleiche [ML] 4.5.9. Man zeige, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der  $\varepsilon_i$  gefolgt von der Änderung einer geraden Zahl von Vorzeichen besteht.

*Übung 1.1.18.* Wir erinnern aus [HL] 2.3.32 das Wurzelsystem  $R = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  mit der Bezeichnung  $B_n$  von  $\mathfrak{so}(2n+1)$ . Wir erinnern aus Übung [SPW] 2.2.17, wenn man sie denn gemacht hat, seine Basis  $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  für  $1 \leq i < n$  zusammen mit  $\alpha_n = \varepsilon_n$ . Man zeige für das Gitter der ganzen Gewichte

$$\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle_{\mathbb{Z}} + \mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)/2$$

Man zeige, daß die äußeren Potenzen  $\bigwedge^i(\mathbb{C}^{2n+1})$  für  $1 \leq i \leq n$  irreduzible Darstellungen sind mit den höchsten Gewichten  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$  und daß diese Gewichte für  $1 \leq i < n$  die fundamentalen dominanten Gewichte  $\varpi_i$  sind, wohingegen gilt  $\varpi_n = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)/2$ . Eine irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht  $\varpi_n$  liefert die sogenannte Clifford-Algebra, vergleiche [ML] 4.5.10. Man zeige, daß die Weylgruppe aus allen Permutationen der  $\varepsilon_i$  gefolgt von einer beliebigen Änderung der Vorzeichen besteht.

## 1.2 Beweis erster Teile des Klassifikationssatzes

*Notation 1.2.1.* Seien  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche Unteralgebra,  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$  das Wurzelsystem und  $R^+ \subset R$  ein System von positiven Wurzeln.

**Lemma 1.2.2 (Gewichtsverschiebung durch Wurzelräume).** *Sei  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . So gilt*

$$\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha} \quad \forall \alpha \in R, \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus der Definition eines Gewichtsraums und der Formel  $HXv = [H, X]v + XHv \quad \forall H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, v \in V$ .  $\square$

**Lemma 1.2.3.** *Sei eine Liealgebra  $\mathfrak{a}$  als Vektorraum die Summe von zwei Unter-algebren  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ . Seien  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{a}$  und  $U \subset V$  ein  $\mathfrak{b}$ -stabiler Teilraum. So ist die von  $U$  erzeugte  $\mathfrak{c}$ -Unterdarstellung von  $V$  schon  $\mathfrak{a}$ -stabil.*

*Vorschau 1.2.4.* Im Rahmen unserer Untersuchung der universellen Einhüllenden werden wir dies Lemma nocheinmal vom höheren Standpunkt verstehen und beweisen können, vergleiche [1.3.36](#).

*Beweis.* Bezeichne  $W$  die von  $U$  erzeugte  $\mathfrak{c}$ -Unterdarstellung von  $V$ . Wir müssen zeigen, daß gilt  $XW \subset W$  für alle  $X \in \mathfrak{b}$ . Wir betrachten dazu für festes  $r \in \mathbb{N}$  den Raum

$$W(r) = \langle Y_1 \dots Y_i v \mid i \leq r, Y_\nu \in \mathfrak{c} \rangle$$

Sicher gilt  $W = \bigcup W(r)$ . Es reicht zu zeigen  $XW(r) \subset W(r)$  für alle  $r$ . Dazu argumentieren wir mit Induktion über  $r$ . Die Induktionsbasis bildet unsere Voraussetzung, daß  $W(0) = U$  stabil ist unter  $\mathfrak{b}$ . Für den Induktionsschritt benutzen wir die Gleichung

$$XY_1 \dots Y_r v = Y_1 XY_2 \dots Y_r v + [X, Y_1] Y_2 \dots Y_r v$$

Auf den ersten Term wenden wir die Induktionsvoraussetzung an. Im zweiten Term schreiben wir  $[X, Y_1] = \tilde{X} + \tilde{Y}$  mit  $\tilde{X} \in \mathfrak{b}, \tilde{Y} \in \mathfrak{c}$  und benutzen nochmals die Induktionsvoraussetzung.  $\square$

**Proposition 1.2.5.** *Mit der zu  $R^+$  gehörigen partiellen Ordnung auf  $\mathfrak{h}^*$  gilt:*

1. *Besitzt die Menge  $P(V)$  der Gewichte einer einfachen Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  ein maximales Element, so ist dies maximale Element auch schon das größte Element, als da heißt das höchste Gewicht von  $V$ ;*
2. *Jede endlichdimensionale einfache Darstellung von  $\mathfrak{g}$  hat ein höchstes Gewicht.*

*Beweis.* Offensichtlich reicht es, Teil 1 zu zeigen. Dazu betrachten wir die Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}$  mit

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

Offensichtlich sind  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{n}$  Unteralgebren. Die Unteralgebra  $\mathfrak{b}$  wird sich später als eine „Borel’sche Unteralgebra“ erweisen und die Unteralgebra  $\mathfrak{n}$  ist nilpotent, daher die Bezeichnungen. Ist  $\lambda \in P(V)$  maximal, so ist  $V_{\lambda}$  ein  $\mathfrak{b}$ -stabiler Teilraum. Nach Lemma 1.2.3 ist dann die von  $V_{\lambda}$  erzeugte  $\mathfrak{n}$ -Unterdarstellung  $W$  von  $V$  schon eine  $\mathfrak{g}$ -Unterdarstellung. Da wir  $V$  einfach angenommen hatten, folgt  $W = V$ , in anderen Worten erzeugt also der Gewichtsraum  $V_{\lambda}$  sogar schon ganz  $V$  unter der Operation von  $\mathfrak{n}$ . Die Proposition folgt mit der Gewichtsverschiebung durch Wurzelräume 1.2.2.  $\square$

**Lemma 1.2.6 (Stabilität der Gewichte unter der Weylgruppe).** *] Ist  $V$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , so sind alle Gewichte von  $V$  in  $\mathfrak{h}^*$  ganz und die Menge der Gewichte ist stabil unter der Weylgruppe  $W$ . In Formeln folgt aus  $\dim V < \infty$  also*

$$P(V) \subset \mathfrak{X} \quad \text{und} \quad WP(V) = P(V)$$

*Beweis.* Betrachten wir für  $\alpha \in R$  die zu  $\mathfrak{sl}(2; k)$  isomorphe Unteralgebra  $\mathfrak{g}^{\alpha} := \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus k\alpha^{\vee} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$  von  $\mathfrak{g}$ . Die Kowurzel  $\alpha^{\vee}$  hat hierbei nach [?] ?? und [?] ?? die Eigenschaft, daß ein Isomorphismus  $\mathfrak{sl}(2; k) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\alpha}$  mit  $\text{diag}(1, -1) \mapsto \alpha^{\vee}$  existiert. Aus der in [?] ?? entwickelten Darstellungstheorie der  $\mathfrak{sl}(2; k)$  folgt jedoch, daß die Eigenwerte von  $h := \text{diag}(1, -1)$  auf endlichdimensionalen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2; k)$  stets ganze Zahlen sind. Damit folgt für alle  $\lambda \in P(V)$  sofort  $\langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle \in \mathbb{Z}$ . Ist weiter  $0 \neq v \in V_{\lambda}$ ,  $m = \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle$  und  $kx_{\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $ky_{\alpha} = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , so folgt aus der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}(2; k)$  auch  $y_{\alpha}^m v \neq 0$  falls  $m \geq 0$  bzw.  $x_{\alpha}^{-m} v \neq 0$  falls  $m \leq 0$ . Insbesondere gilt in jedem Fall  $V_{\lambda - m\alpha} \neq 0$  und damit  $s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle \alpha \in P(V)$ .  $\square$

1.2.7. Ist ein Gewicht  $\lambda \in P(V)$  nicht dominant, gibt es also eine positive Wurzel  $\alpha \in R^+$  mit  $\langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle < 0$ , so liegt auch  $s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle \alpha$  in  $P(V)$  und erfüllt  $s_{\alpha}(\lambda) > \lambda$ . Die maximalen Gewichte einer endlichdimensionalen Darstellung  $V$  sind mithin sämtlich ganz und dominant.

**Lemma 1.2.8.** *Haben zwei einfache Darstellungen unserer halbeinfachen komplexen Liealgebra  $\mathfrak{g}$  dasselbe höchste Gewicht, so sind sie isomorph.*

1.2.9. Der hier gegebene Beweis ist noch ziemlich „zu Fuß“. Mithilfe der universellen Einhüllenden geben wir einen besseren Beweis in 1.4.7.

*Beweis.* Seien  $V$  und  $V'$  unsere einfachen Darstellungen und sei  $\lambda$  ihr gemeinsames höchstes Gewicht. Wir wählen von Null verschiedene Vektoren  $v \in V_\lambda$  und  $v' \in V'_\lambda$ , betrachten in  $V \oplus V'$  die von  $(v, v')$  erzeugte Unterdarstellung  $W$ , und zeigen zunächst, daß auch  $W$  einfach ist. Wir betrachten die Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b}$  wie beim Beweis von 1.2.5 und bemerken als erstes, daß die Gerade  $U$  durch  $(v, v')$  stabil ist unter  $\mathfrak{b}$ . Nach 1.2.3 ist  $W$  dann schon erzeugt von  $(v, v')$  als Darstellung von  $\mathfrak{n}$ , insbesondere ist  $W$  nach dem Lemma zur Gewichtsverschiebung 1.2.2 die direkte Summe seiner Gewichtsräume und der Gewichtsräume  $W_\lambda$  ist genau die Gerade durch  $(v, v')$ . Jede Unterdarstellung von  $W$  ist natürlich stabil unter der Cartan'schen und ist damit auch die direkte Summe ihrer Gewichtsräume. Jede echte Unterdarstellung von  $W$  liegt damit notwendig in  $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} W_\mu$ . Damit folgt für jede echte Unterdarstellung  $A \subset W$  schon  $\text{pr}_1(A) \neq V$ ,  $\text{pr}_2(A) \neq V'$ . Da aber  $V$  und  $V'$  einfach sind, folgt  $\text{pr}_1(A) = 0$ ,  $\text{pr}_2(A) = 0$  und damit  $A = 0$ . Mit hin ist  $W$  einfach, und die von Null verschiedenen Abbildungen  $\text{pr}_1 : W \rightarrow V$ ,  $\text{pr}_2 : W \rightarrow V'$  müssen Isomorphismen sein, denn bei beiden Abbildungen sind ja Bild und Kern Unterdarstellungen der einfachen Darstellungen  $W$  bzw.  $V, V'$ . Daraus folgt aber  $V \simeq W \simeq V'$  wie gewünscht.  $\square$

**1.2.10 (Darstellungen mit fundamentalem Höchstgewicht für  $\mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$ ).** Zum Beweis der Klassifikation durch das höchste Gewicht 1.1.5 fehlt uns nun nur noch der Nachweis der Surjektivität, also der Nachweis, daß es zu jedem ganzen dominanten Gewicht auch tatsächlich eine endlichdimensionale einfache Darstellung mit diesem höchsten Gewicht gibt. Dafür ist mir im allgemeinen kein Argument eingefallen, das ohne die universelle Einhüllende auskommt. Im Fall  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$  können wir die Surjektivität jedoch auch hier schon zeigen: Dazu beachte man, daß die Darstellung  $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$  gerade das höchste Gewicht  $\varpi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$  hat, mit zugehörigem höchstem Gewichtsvektor  $e_1 \wedge \dots \wedge e_i$ . Hier verstehen wir implizit die übliche Cartan'sche und die übliche Basis des Wurzelsystems gegeben durch die  $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ . Zu jedem ganzen dominanten Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{X}^+$  konstruiert man nun eine Darstellung mit höchstem Gewicht  $\lambda$ , indem man geeignete Tensorprodukte der  $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$  bildet, und ein geeigneter einfacher Summand des entsprechenden Tensorprodukts muß dann die gesuchte einfache Darstellung mit höchstem Gewicht  $\lambda$  sein.

1.2.11. Ist  $\mathfrak{g}$  eine einfache endlichdimensionale Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln, so besitzt insbesondere die adjungierte Darstellung ein höchstes Gewicht  $\beta \in R^+$ . Es heißt die **höchste Wurzel** und kann auch beschrieben werden als die einzige Wurzel  $\beta \in R^+$  derart, daß für alle  $\alpha \in R^+$  die Summe  $\alpha + \beta$  keine Wurzel mehr ist.

*Ergänzung 1.2.12.* In einem Skript von Andersen kann man eine Argumentation finden, die von da ausgehend zeigt, daß eine halbeinfache Liealgebra schon durch

ihr Wurzelsystem eindeutig bestimmt ist.

### 1.3 Die universelle einhüllende Algebra

1.3.1. Ich erinnere an unsere Notation  $A_L$  aus [?] ?? für die aus einer assoziativen Algebra  $A$  mit dem Kommutator als Verknüpfung entstehende Liealgebra.

**Definition 1.3.2.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra über einem Körper  $k$ . Eine **universelle einhüllende Algebra von  $\mathfrak{g}$**  oder kurz **Einhüllende** ist ein Paar  $(U, \text{can})$  bestehend aus einer  $k$ -Ringalgebra  $U$  und einem Liealgebren-Homomorphismus  $\text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow U_L$  derart, daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Gegeben eine  $k$ -Ringalgebra  $A$  und ein Homomorphismus von  $k$ -Liealgebren  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow A_L$  gibt es genau einen Homomorphismus von  $k$ -Ringalgebren  $\tilde{\varphi} : U \rightarrow A$  mit  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \text{can}$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{can}} & U \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

1.3.3. Hier noch eine Umformulierung der Definition. Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra über einem Körper  $k$ . Eine **universelle einhüllende Algebra von  $\mathfrak{g}$**  oder kurz **Einhüllende** ist ein Paar  $(U, \text{can})$  bestehend aus einer  $k$ -Ringalgebra  $U$  und einem Liealgebrenhomomorphismus  $\text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow U_L$  derart, daß für jede  $k$ -Ringalgebra  $A$  das Vorschalten von  $\text{can}$  eine Bijektion  $\text{Ralg}_k(U, A) \xrightarrow{\sim} \text{Lalg}_k(\mathfrak{g}, A_L)$  induziert.

*Ergänzung 1.3.4.* In der Sprache der Kategorientheorie ist das Bilden der universellen Einhüllenden, von der wir bald zeigen werden, daß sie immer existiert, der linksadjungierte Funktor zum Funktor  $A \mapsto A_L$  von der Kategorie der  $k$ -Ringalgebren in die Kategorie der  $k$ -Liealgebren.

*Beispiele 1.3.5.* Ist  $\mathfrak{g} = 0$ , so ist  $U = k$  eine Einhüllende. Ist  $\mathfrak{g}$  eine eindimensionale Liealgebra mit Basis  $X \in \mathfrak{g}$ , so ist der Polynomring in einer Veränderlichen  $U = k[X]$  eine Einhüllende, mit  $\text{can}$  der offensichtlichen Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{can} : & \mathfrak{g} & \rightarrow k[X] \\ & aX & \mapsto aX \end{array}$$

1.3.6 (**Eindeutigkeit der Einhüllenden**). Ist  $(U_1, \text{can}_1)$  eine zweite Einhüllende von  $\mathfrak{g}$ , so muß mit den üblichen Argumenten die Abbildung  $\tilde{\text{can}}_1 : U \rightarrow U_1$  ein Isomorphismus sein. Eine Liealgebra besitzt also bis auf eindeutigen Isomorphismus höchstens eine Einhüllende. Wir werden aus diesem Grund oft den bestimmten Artikel verwenden und von *der* Einhüllenden reden.

1.3.7 (**Erzeugung der Einhüllenden als Ringalgebra**). Eine universelle Einhüllende  $U$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper  $k$  wird als  $k$ -Ringalgebra stets vom Bild von  $\mathfrak{g}$  erzeugt. Von der vom Bild von  $\mathfrak{g}$  erzeugten Unterringalgebra  $k[\mathfrak{g}] \subset U$  sieht man nämlich leicht ein, daß sie auch bereits die von einer Einhüllenden geforderte universelle Eigenschaft hat.

**Lemma 1.3.8 (Darstellungen als Moduln).** Seien  $V$  eine abelsche Gruppe,  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra über einem Körper  $k$  und  $\text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow U$  eine Einhüllende von  $\mathfrak{g}$ . So gilt:

1. Die Einschränkung vermittels  $\text{can}$  zusammen mit der Einschränkung vermittels der Einbettung  $k \hookrightarrow U$ ,  $a \mapsto a1$  liefern eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Strukturen auf } V \text{ als} \\ \text{Modul über dem Ring } U \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Strukturen auf } V \text{ als Darstellung} \\ \text{der } k\text{-Liealgebra } \mathfrak{g} \end{array} \right\}$$

2. Diese Konstruktion liefert einen Isomorphismus von Kategorien

$$U\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}\text{-Mod}$$

*Beweis.* Eine Struktur auf  $V$  als  $U$ -Modul ist ja per definitionem ein Ringhomomorphismus  $\varphi : U \rightarrow \text{End } V$ . Die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $k \subset U$  macht  $V$  zu einem  $k$ -Vektorraum, und für diese Struktur induziert  $\varphi$  erst einen Homomorphismus von  $k$ -Ringalgebren  $\varphi : U \rightarrow \text{End}_k V$ , dann einen Homomorphismus von Liealgebren  $\varphi : U_L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , und schließlich einen Homomorphismus von Liealgebren  $\varphi \circ \text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ . Die Einschränkungen liefern also auf  $V$  die Struktur einer Darstellung über  $k$ . Um zu zeigen, daß diese Zuordnung bijektiv ist, geben wir die inverse Abbildung an. Eine Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über  $k$  ist ja per definitionem ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum  $V$  und einem Homomorphismus  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow (\text{End}_k V)_L$  von Liealgebren über  $k$ . Diesen Homomorphismus können wir aber nach der Definition der universellen Einhüllenden auf genau eine Weise erweitern zu einem Homomorphismus von  $k$ -Ringalgebren  $\tilde{\rho} : U \rightarrow \text{End}_k V$ , und damit haben wir auf  $V$  die gesuchte  $U$ -Modulstruktur konstruiert. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese beiden Konstruktionen zueinander invers sind.  $\square$

1.3.9. Im folgenden bezeichnen wir für ein Element  $X$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  sein Bild  $\text{can}(X)$  in einer Einhüllenden meist kurz auch mit  $X$ .

1.3.10. Unter einem **augmentierten Ring** versteht man ganz allgemein einen Ring mitsamt einem ausgezeichneten Ideal, dem **Augmentationsideal**, das manchmal auch nur als einseitiges Ideal angenommen wird. Die Bezeichnung kommt wohl daher, daß hier die Ringstruktur durch ein zusätzliches Datum erweitert wird. Die Abbildung auf den Quotienten nach besagtem Ideal heißt dann die **Augmentation**.

1.3.11. Jede Liealgebra  $\mathfrak{g}$  besitzt die triviale eindimensionale Darstellung  $k$ . Diese führt nach dem Vorhergehenden zu einem Homomorphismus von  $k$ -Ringalgebren  $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$  mit  $\epsilon(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$ . Den Kern von  $\epsilon$  bezeichnen wir manchmal mit  $\ker \epsilon =: U^+$  und machen so unsere Einhüllende zu einem augmentierten Ring mit Augmentation  $\epsilon$ .

**Satz 1.3.12 (Poincaré-Birkhoff-Witt).** *Jede Liealgebra besitzt eine universelle Einhüllende. Ist  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra über einem Körper  $k$  und  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$  und  $\leq$  eine totale Ordnung auf  $\Lambda$ , so bilden die geordneten Monome, d.h. die Monome  $X_{\lambda(1)} \dots X_{\lambda(r)}$  mit  $\lambda(1) \leq \lambda(2) \dots \leq \lambda(r)$  eine Basis der Einhüllenden  $U(\mathfrak{g})$  über  $k$ .*

1.3.13. Der erste Aussage wird in einer präzisierten Form als 1.3.22 bewiesen, die Zweite im Anschluß daran.

1.3.14. Bei der Formulierung haben wir die Konvention benutzt, nach der das „leere“ Monom, als da heißt das Monom mit  $r = 0$ , die Einheit  $1 \in U(\mathfrak{g})$  darstellt. Ist  $X_1, \dots, X_d$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$ , so bilden nach unserem Satz insbesondere die Monome  $X_1^{n_1} \dots X_d^{n_d}$  mit  $n_i \geq 0$  eine Basis von  $U(\mathfrak{g})$ .

*Ergänzung 1.3.15.* Arbeiten wir nicht über einem Körper  $k$ , sondern vielmehr über einem Kring, so gilt der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 1.3.12 analog immer noch und mit demselben Beweis. Allerdings kann er nur angewendet werden, wenn unsere Liealgebra auch eine Basis als  $k$ -Modul besitzt.

**Definition 1.3.16.** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $k$ . Eine **freie Ringalgebra über  $V$**  ist ein Paar  $(T, \text{can})$  bestehend aus einer  $k$ -Ringalgebra  $T$  und einer linearen Abbildung  $c : V \rightarrow T$  derart, daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Gegeben eine  $k$ -Ringalgebra  $A$  und eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow A$  gibt es genau einen Homomorphismus von  $k$ -Ringalgebren  $\tilde{\varphi} : T \rightarrow A$  mit  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ c$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{c} & U \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

1.3.17. Hier noch eine Umformulierung der Definition. Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $k$ . Eine **freie Ringalgebra über  $V$**  ist ein Paar  $(T, c)$  bestehend aus einer  $k$ -Ringalgebra  $T$  und einer linearen Abbildung  $c : V \rightarrow T$  derart, daß für jede  $k$ -Ringalgebra  $A$  das Vorschalten von  $c$  eine Bijektion

$$\text{Ralg}_k(T, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(V, A)$$

zwischen Homomorphismen von Ringalgebren und Homomorphismen von Vektorräumen induziert.



1.3.18. Mit denselben Argumenten wie im Fall der Einhüllenden zeigt man, daß solch eine freie Ringalgebra im wesentlichen eindeutig ist, wenn sie existiert.

*Ergänzung* 1.3.19. In der Sprache der Kategorientheorie ist das Bilden der freien Ringalgebra, von der wir bald zeigen werden, daß sie immer existiert, der linksadjungierte Funktor zum vergeßlichen Funktor von der Kategorie der  $k$ -Ringalgebren in die Kategorie der  $k$ -Vektorräume.

**Lemma 1.3.20.** *Gegeben ein Vektorraum  $V$  über einem Körper  $k$  existiert stets eine freie Ringalgebra  $T(V) = T_k V$  über  $V$ .*

1.3.21. Ich gebe für diese Behauptung zwei Beweise. Der erste Beweis ist in gewisser Weise sauberer. Er gibt eine explizite Konstruktion, die vom vorgegebenen Vektorraum ausgeht und keine weiteren Wahlen benötigt. Er benötigt jedoch das Tensorprodukt, das erfahrungsgemäß viele Studenten sehr lange als ein sehr abstraktes Konstrukt empfinden. Der zweite Beweis benötigt die Wahl einer Basis, hat aber den Vorteil, eine konkretere Konstruktion zu liefern.

*Beweis mit multilinearer Algebra.* Ich erinnere an die Konstruktion der Tensoralgebra in [LA2] 8.8.7 und ihre universelle Eigenschaft. Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $k$ . Die Tensoralgebra über  $V$  ist die  $k$ -Ringalgebra

$$\text{Ten}(V) = T(V) = T_k V = \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der  $k$ -bilinearen Multiplikation, die eindeutig festgelegt wird durch die Vorschrift  $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_t) = (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_t)$ . Die Einbettung „als zweiter Summand“  $c : V \hookrightarrow T(V)$  hat dann offensichtlich die gesuchte universelle Eigenschaft.  $\square$

*Beweis mit Polynomen in nichtkommutierenden Variablen.* Wir wählen eine Basis  $B \subset V$  und das freie Monoid  $\text{Mon}^\uparrow B$  über  $B$  im Sinne von [TF] ?? alias die „Menge aller Wörter endlicher Länge in Buchstaben  $B$ , einschließlich des leeren Wortes, mit dem Hintereinanderschreiben von Wörtern als Verknüpfung“. Dann bilden wir den freien  $k$ -Vektorraum  $T := k\langle \text{Mon}^\uparrow B \rangle$  über dieser Menge oder präziser den Monoidring über diesem Monoid im Sinne von [NAS] 1.3.5 alias den „Polynomring über  $k$  in den nichtkommutierenden Variablen  $B$ “, vergleiche auch [NAS] 1.10.1. Die offensichtliche Einbettung „als Variablen“  $B \hookrightarrow T$  besitzt genau eine Fortsetzung zu einer linearen Abbildung  $c : V \rightarrow T$  und ich behaupte, daß wir auf diese Weise auch eine freie Ringalgebra über  $V$  erhalten. In der Tat folgt das daraus, daß wir für jede  $k$ -Ringalgebra  $A$  im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Ralg}_k(k\langle \text{Mon}^\uparrow B \rangle, A) & \longrightarrow & \text{Hom}_k(V, A) \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ \text{Mon}(\text{Mon}^\uparrow B, A) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ens}(B, A) \end{array}$$

mit den durch die offensichtlichen Vorschaltungen gegebenen Abbildungen aus den universellen Eigenschaften des freien Monoids und des Monoidrings bereits wissen, daß die untere Horizontale und die linke Vertikale Bijektionen sind. Ebenso wissen wir aus der linearen Algebra, daß die rechte Vertikale eine Bijektion ist. Damit folgt dasselbe für die obere Horizontale, was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 1.3.22.** *Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra über einem Körper  $k$ . Betrachten wir das Ideal  $I = I(\mathfrak{g}) \subset T(\mathfrak{g})$ , das von allen  $(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$  mit  $x, y \in \mathfrak{g}$  erzeugt wird, so ist die Ringalgebra  $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I$  mit der Abbildung  $\text{can} : \mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g})$  eine Einhüllende von  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Für diesen Beweis bezeichne  $p : T(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$  die Projektion und  $c : \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathfrak{g})$  die kanonische Abbildung, wir haben also  $\text{can} = p \circ c$ . Sicher ist  $\text{can}$  ein Homomorphismus von Liealgebren, denn wir haben

$$\begin{array}{ccc} \text{can}[x, y] & = & (\text{can } x)(\text{can } y) - (\text{can } y)(\text{can } x) = [\text{can } x, \text{can } y] \\ \parallel & & \parallel \\ p[x, y] & = & p(x \otimes y - y \otimes x) \end{array}$$

da nach Konstruktion gilt  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in I = \ker p$ . Nach Konstruktion wird  $U(\mathfrak{g})$  als  $k$ -Ringalgebra von  $\mathfrak{g}$  erzeugt, eine Abbildung von  $\mathfrak{g}$  in eine  $k$ -Ringalgebra  $A$  läßt sich also auf höchstens eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  fortsetzen. Um die folgende Argumentation übersichtlich zu machen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & T(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & A & & \end{array}$$

Sei also  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow A$  ein Liealgebren-Homomorphismus von  $\mathfrak{g}$  in eine  $k$ -Ringalgebra  $A$ . Selbst wenn  $\varphi$  nur linear ist, erweitert es auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren  $\hat{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ . Ist  $\varphi$  zusätzlich ein Homomorphismus von Liealgebren, so folgt sofort  $\hat{\varphi}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0$ , also  $\hat{\varphi}(I) = 0$ . Damit faktorisiert dann  $\hat{\varphi}$  wie gewünscht über einen Homomorphismus von  $k$ -Ringalgebren  $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ .  $\square$

*Beweis, daß die geordneten Monome aus 1.3.12 die Einhüllende aufspannen.* Wir betrachten in  $U = U(\mathfrak{g})$  den Teilraum  $U_r$ , der von allen Monomen der Länge höchstens  $r$  aufgespannt wird, also das Bild von  $\bigoplus_{0 \leq s \leq r} \mathfrak{g}^{\otimes s}$  in  $U(\mathfrak{g})$ , und zeigen durch Induktion, daß  $U_r$  schon von den geordneten Monomen der Länge  $\leq r$  aufgespannt wird. Denn sei  $X_{\lambda(1)} \dots X_{\lambda(r)}$  ein Monom. Wir wissen ja, daß gilt

$$X_{\lambda(i)} X_{\lambda(i+1)} = X_{\lambda(i+1)} X_{\lambda(i)} + [X_{\lambda(i)}, X_{\lambda(i+1)}]$$

Hier können wir den Kommutator entwickeln als (endliche) Linearkombination  $\sum a_j X_{\kappa}$ , mithin hängt die Nebenklasse eines Monoms der Länge  $r$  in  $U_r/U_{r-1}$  nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab. Mit Induktion über  $r$  sehen wir so, daß  $U_r$  von den geordneten Monomen der Länge  $\leq r$  aufgespannt wird.  $\square$

**1.3.23 (Poincaré-Birkhoff-Witt für die Liealgebra einer Liegruppe).** Ist  $\mathfrak{g}$  die Liealgebra einer Lie-Gruppe, so kann man die lineare Unabhängigkeit über  $\mathbb{R}$  der aufsteigenden Monome besonders leicht zeigen: Man wählt dazu in einer offenen Umgebung  $V$  des neutralen Elements  $e$  von  $G$  lokale Koordinaten  $x_1, \dots, x_r$ , die bei  $e$  verschwinden, und so, daß das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  am neutralen Element mit  $X_i$  übereinstimmt, für  $1 \leq i \leq r$ . Durch das Anwenden von linksinvarianten Vektorfeldern auf Funktionen wird  $\mathcal{C}^\infty(V)$  ein  $U(\mathfrak{g})$ -Modul. Lassen wir die aufsteigenden Monome aus  $U(\mathfrak{g})$  operieren auf Monomen in den lokalen Koordinaten und werten das Resultat am neutralen Element aus, so erhalten wir unter Verwendung der üblichen Multiindex-Schreibweise  $(X^\alpha x^\alpha)(e) \neq 0$ , aber  $(X^\alpha x^\beta)(e) = 0$  falls gilt  $\alpha \neq \beta$  und  $|\alpha| \leq |\beta|$ . Daraus folgt dann die lineare Unabhängigkeit der  $X^\alpha$ . Im Übrigen kann man die universelle Einhüllende der Liealgebra einer Liegruppe mit dem Raum der Distributionen mit Träger im neutralen Element verstehen, mit der „Konvolution“ als Multiplikation. Dasselbe gilt für die universelle Einhüllende der Liealgebra einer algebraischen Gruppe in Charakteristik Null und algebraische Distributionen im Sinne von [?] ??.

*Beweis, daß die geordneten Monome aus 1.3.12 linear unabhängig sind.* Wir betrachten den Vektorraum  $S$  mit einer Basis indiziert durch alle endlichen monoton wachsenden Folgen aus  $\Lambda$  und versuchen, ihn zu einer Darstellung unserer Liealgebra zu machen, und zwar so, als ob er schon die Einhüllende mit einer Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis wäre. Sei genauer  $S = k[\hat{\chi}]_{\chi \in \Lambda}$  der Polynomring in den Variablen  $\hat{\chi}$ , die ich deshalb nicht wie zuvor  $\hat{X}_\chi$  schreibe, damit nicht alles Wesentliche in Indizes verschwindet, und wo ich deshalb  $\chi$  statt  $\lambda$  schreibe, damit der Akzent besser darüberpaßt. Mit demselben Hintergedanken schreiben wir von nun an auch  $\hat{\chi} := X_\chi$  für das durch  $\chi \in \Lambda$  indizierte Basiselement von  $\mathfrak{g}$ . Nun behaupten wir:

**Lemma 1.3.24.** *Seien  $k$  ein Körper,  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra über  $k$ ,  $(\hat{\chi})_{\chi \in \Lambda}$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$  und  $\leq$  eine Anordnung von  $\Lambda$ . Sei weiter  $S = k[\hat{\chi}]_{\chi \in \Lambda}$  der Polynomring in Variablen  $\hat{\chi}$  für  $\chi \in \Lambda$ . So gibt es eine Operation  $\mathfrak{g} \times S \rightarrow S$  der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  auf dem Vektorraum  $S$  mit der Eigenschaft*

$$\hat{\chi}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2 \dots \hat{\chi}_r = \hat{\chi}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2 \dots \hat{\chi}_r \quad \text{wenn immer gilt } \chi \leq \chi_1 \leq \dots \leq \chi_r.$$

Im Anschluß beweisen wir sogar noch die präzisere Aussage 1.3.26. Um die lineare Unabhängigkeit der geordneten Monome in 1.3.12 abzuleiten, betrachten wir  $S$

als Modul über  $U = U(\mathfrak{g})$  wie in 1.3.8. Ist  $\acute{\chi}_1 \dots \acute{\chi}_r$  ein aufsteigendes Monom in  $U(\mathfrak{g})$ , so gilt

$$\acute{\chi}_1 \dots \acute{\chi}_r 1_S = \hat{\chi}_1 \dots \hat{\chi}_r$$

für  $1_S \in S$  das neutrale Element. Da nun aber die aufsteigenden Monome linear unabhängig sind in  $S$ , müssen sie auch in  $U$  linear unabhängig gewesen sein.  $\square$

1.3.25. Um schließlich Lemma 1.3.24 zu beweisen, führen wir zusätzliche Notationen ein. Für einen Multiindex  $\sigma = (\chi_1, \dots, \chi_r) \in \Lambda^r$  bezeichne  $\hat{\sigma}$  das Monom  $\hat{\sigma} = \hat{\chi}_1 \dots \hat{\chi}_r$ . Für  $\chi \in \Lambda$  soll  $\chi \leq \sigma = (\chi_1, \dots, \chi_r)$  bedeuten  $\chi \leq \chi_i$  für  $1 \leq i \leq r$ . Wir nennen einen Multiindex **monoton** genau dann, wenn gilt  $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_r$ . Die Länge  $r$  von  $\sigma$  bezeichnen wir mit  $|\sigma|$ . Nach Konvention gibt es genau einen Multiindex der Länge Null, er ist monoton, größer als jedes  $\chi \in \Lambda$ , und das zugehörige Monom ist das Eins-Element  $1_S \in S$ . Die  $\hat{\sigma}$  für monotone  $\sigma$  bilden eine Basis von  $S$ . Der von den Monomen der Länge  $r$  aufgespannte Teilraum heiße  $S_r$ , es ist also  $S_0 = k$ ,  $S = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S_r$ , und  $S_r S_s \subset S_{r+s} \quad \forall r, s \in \mathbb{N}$ . Wir schreiben  $S_{\leq r} := \bigoplus_{0 \leq i \leq r} S_i$  und setzen  $S_{\leq r} = 0$  für  $r < 0$ . Mit diesen Notationen zeigen wir sogar eine genauere Aussage.

**Lemma 1.3.26.** *Es gibt genau eine durch  $r \in \mathbb{Z}$  indizierte Familie von bilinearen Abbildungen  $\varphi_r : \mathfrak{g} \times S_{\leq r} \rightarrow S_{\leq r+1}$ ,  $(x, p) \mapsto xp$  derart, daß gilt:*

1.  $\varphi_r$  setzt  $\varphi_{r-1}$  fort;
2.  $\acute{\chi}\hat{\sigma} = \hat{\chi}\hat{\sigma}$  für  $\chi \in \Lambda$ ,  $\sigma \in \Lambda^r$  mit  $\chi \leq \sigma$ ;
3.  $\acute{\chi}\hat{\sigma} \in \hat{\chi}\hat{\sigma} + S_{\leq r} \quad \forall \chi \in \Lambda$ ,  $\sigma \in \Lambda^r$ ;
4.  $\acute{\chi}(\acute{\nu}p) - \acute{\nu}(\acute{\chi}p) = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]p \quad \forall \chi, \nu \in \Lambda$ ,  $p \in S_{\leq r-1}$ .

*Beweis.* Sicher haben wir solche Abbildungen  $\varphi_r$  für  $r < 0$ . Es reicht also, wenn wir zeigen: Ist  $\varphi_r$  bereits konstruiert mit den Eigenschaften 1–4, so gibt es genau eine Möglichkeit,  $\varphi_r$  zu einer Abbildung  $\varphi_{r+1}$  mit den Eigenschaften 1–4 auszuweiten. Sei also  $\varphi_r$  gegeben. Es gilt, für alle  $\chi \in \Lambda$  und monotonen  $\sigma$  der Länge  $|\sigma| = r + 1$  das Bild  $\varphi_{r+1}(\acute{\chi}, \hat{\sigma}) = \acute{\chi}\hat{\sigma} \in S$  anzugeben. Im Fall  $\chi \leq \sigma$  definieren wir  $\acute{\chi}\hat{\sigma} = \hat{\chi}\hat{\sigma}$ , damit 2 erfüllt ist. Sonst schreiben wir  $\sigma = (\nu, \tau)$  mit  $\nu \in \Lambda$ ,  $\tau \in \Lambda^r$ , und da  $\chi \not\leq \sigma$  haben wir  $\chi > \nu$ . Wenn 1–4 erfüllt sein sollen, so muß gelten

$$\begin{aligned} \acute{\chi}\hat{\sigma} &= \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} && \text{da } \nu \leq \tau, \\ &= \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} && \text{nach 4,} \\ &= \acute{\nu}\hat{\chi}\hat{\tau} + \acute{\nu}q + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} && \text{für } q = \acute{\chi}\hat{\tau} - \hat{\chi}\hat{\tau}, \\ &= \acute{\nu}\hat{\chi}\hat{\tau} + \acute{\nu}q + [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} && \text{da } \nu \leq \chi, \nu \leq \tau. \end{aligned}$$

Nach Induktion gilt nun  $q \in S_{\leq r}$ , also sind rechts unten alle Terme schon induktiv definiert, und wir können und werden unsere Gleichung als eine induktive Definition von  $\acute{\chi}\hat{\sigma} = \varphi_{r+1}(\acute{\chi}, \hat{\sigma})$  im Fall  $\chi \not\leq \sigma$  auffassen. Die von  $\varphi_{r+1}$  geforderten Eigenschaften sind offensichtlich mit Ausnahme von 4. Nach Induktionsannahme gilt es noch zu zeigen

$$\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$$

für alle  $\chi, \nu \in \Lambda$  und  $\tau \in \Lambda^r$ . Wir geben dieser Aussage den Namen  $(\chi, \nu, \tau)$ . Offensichtlich gilt  $(\chi, \nu, \tau)$  für  $\chi = \nu$ , nach Definitionen von  $\varphi_{r+1}$  gilt  $(\chi, \nu, \tau)$  unter der Voraussetzung  $\chi > \nu \leq \tau$ , und da die Lieklammer schiefssymmetrisch ist, folgt die Gültigkeit von  $(\chi, \nu, \tau)$  auch für den Fall  $\nu > \chi \leq \tau$ . Es bleibt also nur noch,  $(\chi, \nu, \tau)$  zu zeigen im Fall  $\chi \not\leq \tau, \nu \not\leq \tau$ . In diesem Fall schreiben wir  $\tau = (\mu, \omega)$  mit  $\mu \in \Lambda, \omega \in \Lambda^{r-1}$  und haben also  $\mu < \chi, \mu < \nu$  und  $\mu \leq \omega$ . Jetzt entwickeln wir

$$\begin{aligned} \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} &= \acute{\chi}\acute{\nu}\acute{\mu}\hat{\omega} \\ &= \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\chi}\acute{\mu}\acute{\nu}\hat{\omega} \\ &= \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + [\acute{\chi}, \acute{\mu}]\acute{\nu}\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\omega} \end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Gleichung per Induktion und die dritte aus schon bekannten Fällen, indem wir schreiben  $\acute{\nu}\hat{\omega} = \hat{\nu}\hat{\omega} + q$  mit  $q \in S_{\leq r-2}$  und beachten, daß gilt  $\mu < \nu$  und  $\mu \leq \omega$ . Dasselbe gilt, wenn wir  $\chi$  und  $\nu$  vertauschen, und indem wir auch noch  $\hat{\tau} = \acute{\mu}\hat{\omega}$  entwickeln, erhalten wir die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} &= \acute{\chi}[\acute{\nu}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\omega} + [\acute{\chi}, \acute{\mu}]\acute{\nu}\hat{\omega} \\ \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} &= \acute{\nu}[\acute{\chi}, \acute{\mu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}\acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\omega} + [\acute{\nu}, \acute{\mu}]\acute{\chi}\hat{\omega} \\ [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau} &= [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\acute{\mu}\hat{\omega} \end{aligned}$$

Unser Ziel ist, noch in unserem speziellen Fall die Formel

$$\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} = [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$$

zu zeigen. Aber ziehen wir bei unseren drei Gleichungen von eben die beiden unteren von der oberen ab, so ergibt sich für  $\acute{\chi}\acute{\nu}\hat{\tau} - \acute{\nu}\acute{\chi}\hat{\tau} - [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\tau}$  nach kurzer Rechnung mit Hilfe der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} &[\acute{\chi}, [\acute{\nu}, \acute{\mu}]]\hat{\omega} + [[\acute{\chi}, \acute{\mu}], \acute{\nu}]\hat{\omega} + \acute{\mu}[\acute{\chi}, \acute{\nu}]\hat{\omega} - [\acute{\chi}, \acute{\nu}]\acute{\mu}\hat{\omega} = \\ &= ([[ \acute{\chi}, [\acute{\nu}, \acute{\mu}] ] + [\acute{\nu}, [\acute{\mu}, \acute{\chi}]] + [\acute{\mu}, [\acute{\chi}, \acute{\nu}]])\hat{\omega} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 1.3.27.** Die **opponierte Algebra**  $A^{\text{opp}}$  zu einer  $k$ -Algebra  $A$  wird erklärt dadurch, daß man auf dem Vektorraum  $A$  die opponierte Verknüpfung betrachtet, die gegeben wird durch  $a^\circ * b^\circ := (b \cdot a)^\circ$ .

1.3.28. Ist  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra, so ist auch  $\mathfrak{g}^{\text{opp}}$  eine Liealgebra und die Multiplikation mit  $(-1)$  ist ein Algebrenhomomorphismus  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\text{opp}}$ .

1.3.29. Ist  $\mathfrak{g} \rightarrow U$  eine Einhüllende, so auch dieselbe Abbildung  $\mathfrak{g}^{\text{opp}} \rightarrow U^{\text{opp}}$ . Insbesondere setzt sich die Multiplikation mit  $(-1) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\text{opp}}$  fort zu einem Isomorphismus assoziativer Algebren  $S : U \xrightarrow{\sim} U^{\text{opp}}$ , den wir den **prinzipalen Antiautomorphismus** von  $U$  nennen und  $u \mapsto u^t$  notieren. Ist  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  und  $u \in U$ , so haben wir für die kontragrediente Darstellung  $V^*$  die Formel  $(uf)(v) = f(u^t v)$  für alle  $f \in V^*$ ,  $v \in V$  und  $u \in U$ .

1.3.30. Im folgenden verwende ich Grundlagen der Theorie der filtrierten und graduierten Ringe, wie sie etwa in [KAG] 5.1 entwickelt werden. Die Tensoralgebra  $T(V)$  über einem Vektorraum  $V$  trägt eine offensichtliche Graduierung. Definieren wir wie in [AL] ?? die **symmetrische Algebra**

$$\text{Sym}(V) := S(V) := T(V)/\langle x \otimes y - y \otimes x \rangle$$

als die Einhüllende der abelschen Liealgebra  $V$ , so erbt  $S(V)$  eine Graduierung von  $T(V)$ . Ist  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra, so erbt  $U = U(\mathfrak{g})$  zumindest noch die Filtrierung von  $T(\mathfrak{g})$  und wird so eine filtrierte Ringalgebra  $0 = U^{\leq -1} \subset U^{\leq 0} \subset U^{\leq 1} \subset U^{\leq 2} \subset \dots$  mit  $U^{\leq 0} = k$ ,  $U^{\leq 1} = k \oplus \mathfrak{g}$ .

**Satz\* 1.3.31 (Poincaré-Birkhoff-Witt ohne Koordinaten).** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra. Die beiden Surjektionen  $T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow S(\mathfrak{g})$  und  $T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \text{gr } T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \text{gr } U(\mathfrak{g})$  haben denselben Kern und definieren folglich einen Isomorphismus von graduierten  $k$ -Ringalgebren

$$\text{gr } U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})$$

*Beweis.* Das mag der Leser zur Übung selbst aus dem Satz von Poincaré, Birkhoff und Witt 1.3.12 folgern.  $\square$

**Korollar 1.3.32.** Die Einhüllende einer Liealgebra ist stets nullteilerfrei. Die Einhüllende einer endlichdimensionalen Liealgebra ist stets noethersch.

*Beweis.* Das folgt sofort aus den Lemmata [KAG] 5.2.14 und [KAG] 5.2.17, nach denen ein Ring mit einer bei Null beginnenden ausschöpfenden Filtrierung nullteilerfrei bzw. noethersch sein muß, wenn das für den assoziierten graduierten Ring gilt. Da nun aber über Körpern Polynomringe nullteilerfrei sind und Polynomringe in endlich vielen Variablen noethersch nach dem Hilbert'schen Basissatz, folgt das Korollar.  $\square$

## Übungen

*Übung 1.3.33.* Sei  $e, f, h$  die übliche Basis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  mit  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ . Man schreibe  $f^2 h e$  in der Einhüllenden von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  als Linearkombination geordneter Monome für die Ordnung  $e, h, f$ .

*Übung 1.3.34.* Gegeben eine bilineare Verknüpfung  $b$  auf einem Vektorraum  $\mathfrak{g}$  über einem Körper  $k$  kann man stets in der Tensoralgebra  $T(\mathfrak{g})$  das von allen  $x \otimes y - y \otimes x - b(x, y)$  mit  $x, y \in \mathfrak{g}$  erzeugte Ideal  $I = I(\mathfrak{g}) \subset T(\mathfrak{g})$  betrachten und den Quotientenring  $U := T(\mathfrak{g})/I$  bilden. Man zeige, daß die Verknüpfung  $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U$  genau dann injektiv ist, wenn  $b$  antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt.

*Übung 1.3.35.* Jeder Homomorphismus von Liealgebren läßt sich auf genau eine Weise ausdehnen zu einem Homomorphismus zwischen ihren Einhüllenden.

*Übung 1.3.36.* Ist eine Liealgebra  $\mathfrak{a}$  über einem Körper  $k$  als  $k$ -Vektorraum die Summe von zwei Unteralegebren  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ , so induziert die Multiplikation eine Surjektion

$$U(\mathfrak{c}) \otimes_k U(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{a})$$

Man leite aus dieser Erkenntnis einen neuen Beweis von Lemma 1.2.3 ab. Diejenigen Leser, die mit allgemeinen Tensorprodukten vertraut sind, mögen gleich zeigen, daß die Multiplikation einen Isomorphismus  $U(\mathfrak{c}) \otimes_{U(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b})} U(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{a})$  induziert, und damit bereits eine Verallgemeinerung der anschließenden Übung.

*Übung 1.3.37.* Ist  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$  eine Zerlegung als  $k$ -Vektorraum einer Liealgebra über einem Körper  $k$  in die direkte Summe von zwei Unteralegebren, so induziert die Multiplikation einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$U(\mathfrak{c}) \otimes_k U(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{a})$$

*Übung 1.3.38 (Casimir-Operator in der Einhüllenden).* Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlichdimensionale Liealgebra und  $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$  eine nichtausgeartete invariante Bilinearform. Wir wählen eine Basis  $x_1, \dots, x_n$  von  $\mathfrak{g}$ , bezeichnen mit  $x^1, \dots, x^n$  die bezüglich  $b$  duale Basis, charakterisiert durch  $b(x_i, x^j) = \delta_{ij}$ , und setzen

$$C = C_b := \sum_{i=1}^n x_i x^i$$

So hängt  $C_b \in U(\mathfrak{g})$  nicht von der Wahl der Basis unserer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  ab und liegt im Zentrum der Einhüllenden, in Formeln  $uC = Cu \forall u \in U(\mathfrak{g})$ .

*Ergänzende Übung 1.3.39 (Die Einhüllende als Hopf-Algebra).* Gegeben eine Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper  $k$  mit Einhüllender  $U$  läßt sich die Abbildung  $\mathfrak{g} \rightarrow U \otimes_k U$  gegeben durch  $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$  auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus von Ringalgebren

$$\Delta : U \rightarrow U \otimes_k U$$

fortsetzen, und wir erhalten so eine Hopfalgebra im Sinne von [?] ?? mit dem prinzipalen Antiautomorphismus als Antipode.

*Ergänzende Übung 1.3.40 (Satz von Friedrichs).* Gegeben eine Liealgebra über einem Körper  $k$  der Charakteristik Null sind die primitiven Elemente ihrer Einhüllenden, als da heißt die Elemente  $a$  mit  $\Delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ , genau die Bilder der Elemente der Liealgebra. Hinweis: Die Komultiplikation ist mit der Filtrierung verträglich und die auf der assoziierten Graduierten induzierte Komultiplikation ist die Komultiplikation der symmetrischen Algebra nach [?] ??. Deren primitive Elemente aber kennen wir aus [?] ??.

*Ergänzende Übung 1.3.41.* Ist  $V$  ein Vektorraum über einem Körper einer Charakteristik  $p > 0$  und bezeichnet  $A^{[p]} \in \text{End } V$  die  $p$ -te Potenz eines Endomorphismus  $A \in \text{End } V$  und  $A^p \in \text{U}(\mathfrak{gl}(V))$  die  $p$ -te Potenz von  $A$  in  $\text{U}(\mathfrak{gl}(V))$ , so gehören die Elemente  $A^p - A^{[p]}$  zum Zentrum von  $\text{U}(\mathfrak{gl}(V))$ . Hinweis: Man bemerke  $A^{(\cdot p)} \cdot X - X \cdot A^{(\cdot p)} = ((A \cdot) - (\cdot A))^p(X)$  für Elemente  $A, X$  einer beliebigen assoziativen  $k$ -Algebra mit Multiplikation  $\cdot$ , was hinwiederum aus der binomischen Formel folgt.

*Ergänzende Übung 1.3.42.* Gegeben ein Körper oder allgemeiner ein Kring  $k$  und eine Menge  $I$  zeige man, daß die kanonische Abbildung  $\text{Lalg}_k^\uparrow I \rightarrow \text{Ralg}_k^\uparrow I$  der freien Liealgebra in die freie Ringalgebra die von einer universellen Einhüllenden geforderte universelle Eigenschaft hat. Insbesondere ist sie als Abbildung von  $k$ -Moduln nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 1.3.15 eine spaltende Injektion. Hat unser Körper  $k$  die Charakteristik Null, so kann insbesondere nach dem Satz von Friedrichs 1.3.40 das Bild dieser Abbildung beschrieben werden als die Menge aller  $x \in R := \text{Ralg}_k^\uparrow I$  mit  $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$  für den Ringalgebrenhomomorphismus  $\Delta : R \rightarrow R \otimes_k R$  gegeben durch  $\Delta(i) = i \otimes 1 + 1 \otimes i$  für alle  $i \in I$ .

## 1.4 Konstruktion von Moduln mit höchstem Gewicht

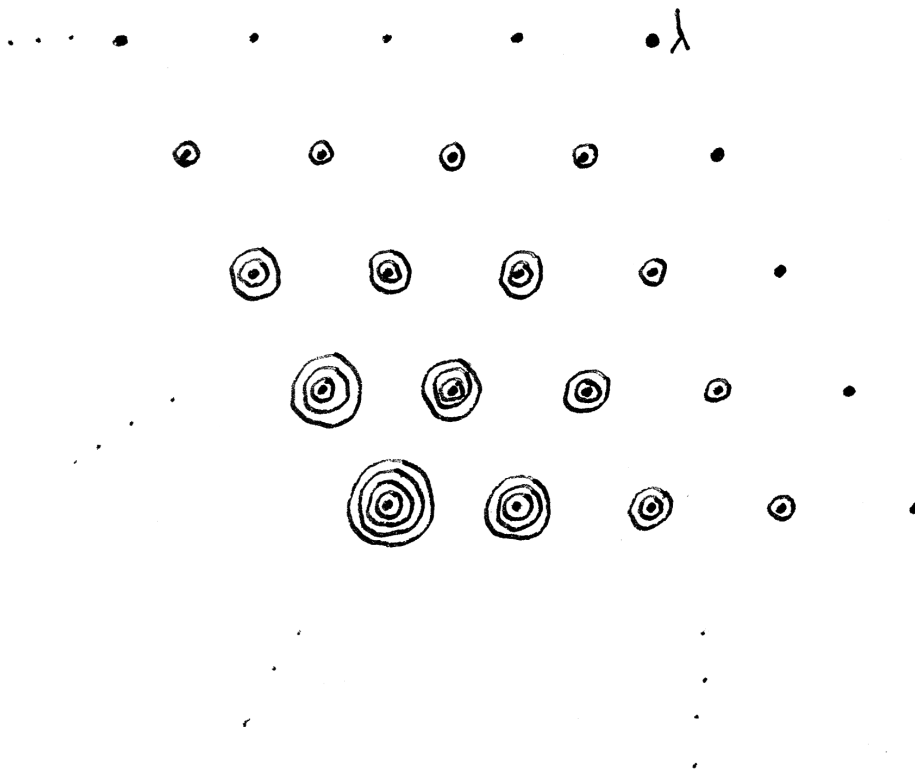
1.4.1. Bei der Untersuchung der einfachen endlichdimensionalen Darstellungen einer halbeinfachen Liealgebra  $\mathfrak{g}$  mußten wir die Frage offenlassen, ob jedes ganze dominante Gewicht in der Tat das höchste Gewicht einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung ist. Unter Zuhilfenahme der universellen Einhüllenden können wir diese Frage nun beantworten.

**Definition 1.4.2.** Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. Für jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  betrachten wir in  $\text{U}(\mathfrak{g})$  das Linksideal  $I_\lambda$ , das erzeugt wird von allen  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  mit  $\alpha \in R^+$  und allen  $H - \lambda(H)$  mit  $H \in \mathfrak{h}$ . Der Quotient

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+) := \text{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda$$

nach diesem Linksideal heißt der **Verma-Modul zum höchsten Gewicht**  $\lambda$ . Die





Dieses Bild soll die Struktur des Vermamoduls  $\Delta(\lambda)$  für die Liealgebra  $\mathfrak{sl}(3)$  mit höchstem Gewicht  $\lambda$  veranschaulichen. Die Papierebene ist dazu in geeigneter Weise mit dem reell-affinen Teilraum  $\lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$  im Dualraum der Cartan'schen zu identifizieren. Die fetten Punkte sind dann die Gewichte der von Null verschiedenen Gewichtsräume,  $n$  Kringel deuten an, daß der entsprechende Gewichtsraum die Dimension  $n + 1$  hat.

Nebenklasse von  $1 \in U(\mathfrak{g})$  bezeichnen wir mit  $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$  und nennen sie den **kanonischen Erzeuger des Verma-Moduls**  $\Delta(\lambda)$ .

**Proposition 1.4.3 (Struktur von Verma-Moduln).** *Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. Für jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  gilt:*

1. Sind  $\alpha, \dots, \beta \in R^+$  die positiven Wurzeln in einer fest gewählten Reihenfolge und  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  Erzeuger der Wurzelräume der negativen Wurzeln, so bilden die Vektoren  $y_\alpha^{m(\alpha)} \dots y_\beta^{m(\beta)} v_\lambda$  mit  $m \in \text{Ens}(R^+, \mathbb{N})$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis des Verma-Moduls  $\Delta(\lambda)$ ;
2. Der Verma-Modul  $\Delta(\lambda)$  besitzt eine Gewichtsraumzerlegung der Gestalt

$$\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$$

und sein höchster Gewichtsraum  $\Delta(\lambda)_\lambda$  ist eindimensional mit Basis  $v_\lambda$ ;

3. Bezeichnet  $\mathcal{P} : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{N}$  die **Kostant'sche Partitionsfunktion**, die zählt, auf wieviele verschiedene Weisen sich ein Gewicht zerlegen läßt in eine Summe positiver Wurzeln, so erhalten wir für die Dimensionen der Gewichtsräume unserer Verma-Moduln feiner die Formel

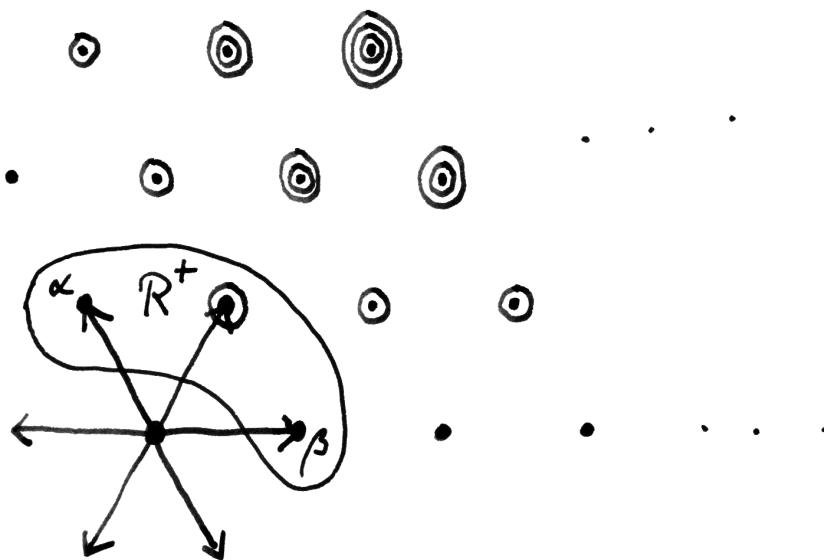
$$\dim_k \Delta(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu)$$

*Ergänzung 1.4.4.* Betrachten wir in  $\mathfrak{g}$  die Unter algebra  $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , so ist  $\Delta(\lambda)$  in anderen Worten ein freier  $U(\mathfrak{n})$ -Modul vom Rang Eins mit Basis  $v_\lambda$ . In Formeln ausgedrückt liefert also die Multiplikation eine Bijektion  $U(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\lambda)$ ,  $u \mapsto uv_\lambda$ . All das sind Umformulierungen der ersten Aussage der Proposition. In dieser Form aber gelten sie in größerer Allgemeinheit, vergleiche etwa [1.5.5](#).

**1.4.5 (Kostant'sche Partitionsfunktion).** Bei der Definition der Kostant'schen Partitionsfunktion werden Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, als gleich betrachtet. Im Extremfall  $\mu = 0$  vereinbaren wir  $\mathcal{P}(0) = 1$ , in der Tat läßt sich ja die Null auf genau eine Weise als Summe positiver Wurzeln schreiben, indem wir nämlich die Summe von überhaupt keiner positiven Wurzel nehmen. In Formeln können wir die Kostant'sche Partitionsfunktion schreiben als

$$\mathcal{P}(\lambda) := \text{card} \left\{ m \in \text{Ens}(R^+, \mathbb{N}) \mid \lambda = \sum_{\alpha \in R^+} m(\alpha)\alpha \right\}$$

*Beweis.* Wir betrachten den Polynomring  $\mathbb{C}[H_1, \dots, H_r]$  in  $r$  Veränderlichen. Gegeben Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$  sieht man leicht ein, daß die Familie aller Polynome



Dieses Bild zeigt ein Wurzelsystem in der Papierebene, aufgefaßt als Vektorraum mit Ursprung im Ausgangspunkt aller Pfeile. Die drei Wurzeln innerhalb des nierenförmigen Bereichs bilden darin ein System positiver Wurzeln. Die zugehörige Kostant'sche Partitionsfunktion nimmt nur an den fett eingezeichneten Punkten von Null verschiedene Werte an, und zwar den Wert Eins bei einfachen Punkten, den Wert Eins bei einfachen fetten Punkten, den Wert Zwei bei einmal umkringelten fetten Punkten etc. Zum Beispiel hätten wir

$$\mathcal{P}(2\alpha + 3\beta) = 3.$$

der Gestalt  $(H_1 - \lambda_1)^{n(1)} \dots (H_r - \lambda_r)^{n(r)}$  für Multiindizes  $n : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis unseres Polynomrings bildet. Bilden speziell  $H_1, \dots, H_r$  eine Basis unserer Cartan'schen  $\mathfrak{h}$  und sind  $\alpha, \dots, \beta \in R^+$  unsere positiven Wurzeln in einer fest gewählten Reihenfolge und  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  sowie  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  Basisvektoren, so folgt aus Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 1.3.12 zusammen mit dieser Erkenntnis, daß auch die Produkte

$$y_\alpha^{m(\alpha)} \dots y_\beta^{m(\beta)} (H_1 - \lambda_1)^{n(1)} \dots (H_r - \lambda_r)^{n(r)} x_\alpha^{l(\alpha)} \dots x_\beta^{l(\beta)}$$

für  $m, l : R^+ \rightarrow \mathbb{N}$  und  $n : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis der Einhüllenden  $U(\mathfrak{g})$  bilden. Bezeichnet  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$  die Unter algebra  $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$  aus 1.2.5, so gilt Analoges für  $U(\mathfrak{b})$ , wenn wir die Faktoren  $y_\alpha$  weglassen. Nun haben wir Homomorphismen  $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  von Liealgebren, wo der Erste die Injektion  $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{b}$  spaltet und alle Wurzelvektoren zu Null macht und der Zweite unsere Linearform  $\lambda$  ist. Sie induzieren einen Ringalgebrenhomomorphismus  $U(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathbb{C}$ , dessen Kern genau aus allen nichttrivialen Monomen unserer Basis besteht. Diese bilden folglich ein Ideal in  $U(\mathfrak{b})$ . Multiplizieren wir noch beliebige Elemente unserer Basis von  $U(\mathfrak{g})$  davor, so erhalten wir ein Erzeugendensystem über  $\mathbb{C}$  eines Linksideals von  $U(\mathfrak{g})$ . Damit ist offensichtlich, daß unser Linksideal  $I_\lambda$  beschrieben werden kann, indem wir obige Basis der Einhüllenden  $U(\mathfrak{g})$  bilden mit  $\lambda_i := \lambda(H_i)$  und dann darin das Erzeugnis der Basisvektoren mit  $n \neq 0$  oder  $l \neq 0$  betrachten. Folglich bilden die Nebenklassen der  $y_\alpha^{m(\alpha)} \dots y_\beta^{m(\beta)}$  für  $m : R^+ \rightarrow \mathbb{N}$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis des Vermamoduls  $\Delta(\lambda)$ . Per definitionem gilt  $Hv_\lambda = \lambda(H)v_\lambda$  für alle  $H \in \mathfrak{h}$ . In anderen Worten ist  $v_\lambda$  ein Gewichtsvektor zum Gewicht  $\lambda$  ist. Daraus folgen die beiden anderen Teile der Proposition unmittelbar.  $\square$

**Lemma 1.4.6 (Universelle Eigenschaft von Verma-Moduln).** *Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. So liefert für jede Darstellung  $M$  von  $\mathfrak{g}$  und jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  das Auswerten  $\varphi \mapsto \varphi(v_\lambda)$  am kanonischen Erzeuger  $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$  eine Bijektion*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} \{v \in M_\lambda \mid \mathfrak{g}_\alpha v = 0 \forall \alpha \in R^+\}$$

*Beweis.* Wir erinnern, daß für jeden Modul  $M$  über einem Ring  $R$  das Auswerten beim neutralen Element  $1_R$  eine Bijektion  $\text{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\sim} M$  induziert. Die universelle Eigenschaft von Quotienten [KAG] 1.3.9 zeigt dann, daß für jedes Linksideal  $I \subset R$  das Auswerten an  $1_R + I$  eine Bijektion

$$\text{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\sim} \{m \in M \mid Im = 0\}$$

induziert. Da in unserer Situation nach Annahme gilt  $I_\lambda v = 0$ , folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.4.7 (Klassifikation einfacher Höchstgewichtsmoduln).** Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. So gilt:

1. Für jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  besitzt der Vermamodul  $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+)$  einen größten echten Untermodul  $\text{rad } \Delta(\lambda)$ ;
2. Der Quotient  $L(\lambda, R^+) = L(\lambda) := \Delta(\lambda) / \text{rad } \Delta(\lambda)$  ist eine einfache Darstellung und wir erhalten so eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache Darstellungen von } \mathfrak{g} \text{ mit einem} \\ R^+ \text{-höchsten Gewicht, bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \lambda & \mapsto & L(\lambda) \end{array}$$

3. Besitzt eine einfache Darstellung ein maximales Gewicht, so ist dies Gewicht bereits ihr höchstes Gewicht.

**1.4.8 (Terminologisches zu Radikalen).** Gegeben ein Modul  $M$  über einem Ring  $R$  erklärt man ganz allgemein das **Radikal**  $\text{rad } M$  **von**  $M$  als den Schnitt aller Homomorphismen von  $M$  zu einfachen  $R$ -Moduln. Im Fall des Ringes selbst, betrachtet als  $R$ -Linksmodul, ist das genau unser Jacobson-Radikal aus [NAS] ???. Dahingegen versteht man unter dem Radikal eines Ideals im allgemeinen wie in [KAG] 1.10.13 etwas völlig anderes als sein Radikal als Modul. Wenn es nötig sein sollte, werde ich unterscheiden zwischen dem **Modulradikal** und dem **Potenzradikal** eines Ideals in einem Ring.

*Beispiel 1.4.9.* Im allgemeinen bezeichnet meist  $\rho$  die Halbsumme der positiven Wurzeln. Im Fall  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und  $R^+ = \{\alpha\}$  setzen wir dieser Konvention vorgreifend bereits hier  $\rho := \alpha/2$ . Damit ist also unsere einfache Darstellung  $L(m)$  der Dimension  $(m + 1)$  aus [?] ?? in unserer Notation hier die einfache Darstellung  $L(m\rho)$  mit höchstem Gewicht  $m\rho$ .

*Beweis.* Mit  $\Delta(\lambda)$  zerfällt nach [LA1] 5.6.19 jeder  $\mathfrak{h}$ -Untermodul  $N \subset \Delta(\lambda)$  auch in Gewichtsräume  $N = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} N_\mu$ . Ist  $N$  ein  $\mathfrak{g}$ -Untermodul, so folgt aus  $N_\lambda \neq 0$  schon  $N = \Delta(\lambda)$ . Ist  $N$  ein echter  $\mathfrak{g}$ -Untermodul, so gilt also  $N \subset \bigoplus_{\mu \neq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$ . Die Summe von allen echten Untermoduln ist mithin selbst immer noch ein echter Untermodul. Der Quotient  $L(\lambda) = \Delta(\lambda) / \text{rad } \Delta(\lambda)$  ist natürlich eine einfache Darstellung mit höchstem Gewicht  $\lambda$ . Umgekehrt beachte man: Jede einfache Darstellung mit höchstem Gewicht  $\lambda$  ist also ein Quotient von  $\Delta(\lambda)$ , und der Kern einer solchen Surjektion muß der größte Untermodul von  $\Delta(\lambda)$  sein. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Proposition 1.4.10.** Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. Für ein Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  sind gleichbedeutend:

1. Der einfache Modul  $L(\lambda)$  mit höchstem Gewicht  $\lambda$  ist endlichdimensional, in Formeln  $\dim L(\lambda) < \infty$ ;
2. Das Gewicht  $\lambda$  ist ganz und dominant, in Formeln  $\lambda \in X^+$ .

1.4.11. (1)  $\Rightarrow$  (2) hatten wir schon als 1.2.6 bewiesen. Zum Beweis der anderen Richtung holen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen etwas weiter aus. Wir erinnern an die Halbsumme  $\rho$  der positiven Wurzeln und die Formel  $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$  für  $\alpha$  eine einfache positive Wurzel, siehe [SPW] 2.2.16.

**Definition 1.4.12.** Bezeichne wie üblich  $\rho$  die Halbsumme der positiven Wurzeln. Wir definieren die „zum Fixpunkt  $-\rho$  verschobene“ Operation von  $W$  auf  $\mathfrak{h}^*$ , die sogenannte **dot-Operation**, durch die Formel

$$x \cdot \lambda := x(\lambda + \rho) - \rho$$

**Lemma 1.4.13.** Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. Für jede einfache Wurzel  $\alpha$  und jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit  $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$  gibt es eine Injektion von  $\mathfrak{g}$ -Moduln

$$\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$$

*Ergänzung 1.4.14.* Wir werden später zeigen, daß dieselbe Aussage allgemeiner für jede positive Wurzel  $\alpha \in R^+$  gilt.

*Beweis.* Für eine einfache Wurzel  $\alpha$  gilt  $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$  und folglich  $s_\alpha \cdot \lambda < \lambda$  gleichbedeutend zu  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ . Sei nun zunächst  $\alpha \in R^+$  beliebig mit  $n = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ . Für  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  und  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  behaupten wir dann

$$x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$$

Man kann das entweder durch Rechnung prüfen, indem man unter der Zusatzvoraussetzung  $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$  induktiv für alle  $i \geq 1$  die Formel  $x_\alpha y_\alpha^i v_\lambda = i(n-i+1)y_\alpha^{i-1} v_\lambda$  herleitet ganz analog dazu, wie wir es aus im Beweis von [?] ?? bereits kennen. Man kann sich aber einfacher auch überlegen, daß die  $y_\alpha^i v_\lambda$  ja eine Basis eines Vermamoduls von  $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus k\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$  mit höchstem Gewichtsvektor  $v_\lambda$  bilden, und operiert  $\alpha^\vee$  alias  $h$  auf diesem höchsten Gewichtsvektor durch einen nichtnegativen ganzzahligen Eigenwert, so gibt es auch eine einfache  $(n+1)$ -dimensionale Darstellung von  $\mathfrak{sl}_2$  mit diesem höchsten Gewicht, die nach

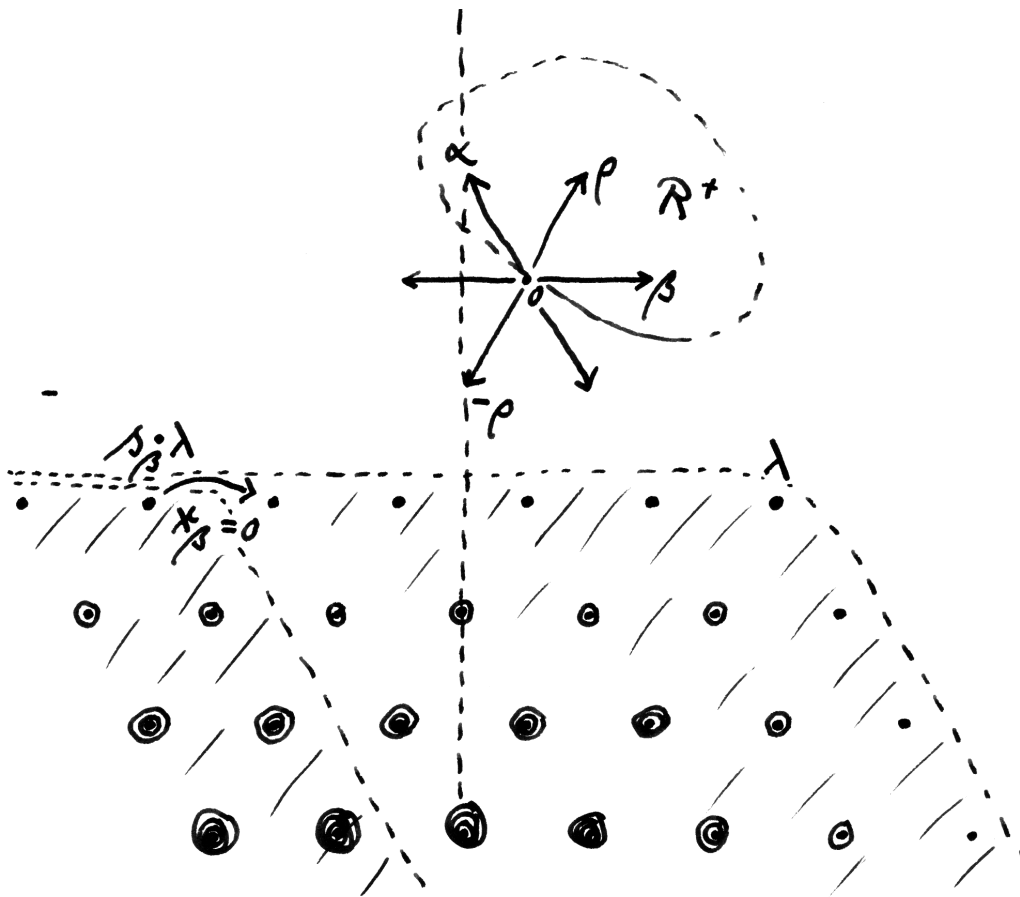


Illustration für Lemma 1.4.13. Sie ist nur insofern unzutreffend, als darin  $\beta$  die Rolle der einfachen Wurzel spielt, die im Lemma  $\alpha$  heißt. Der Vermamodul mit höchstem Gewicht  $s_\beta \cdot \lambda$  umfaßt nur in der obersten Zeile die vollen Gewichtsräume zu den fetten Punkten im kleinen gestrichelt umrandeten Bereich.

**1.4.7** notwendig ein Quotient unseres  $\mathfrak{sl}_2$ -Vermamoduls sein muß. Der Kern der Quotientenabbildung ist offensichtlich gerade das Erzeugnis der  $y_\alpha^i v_\lambda$  mit  $i > n$ , folglich bilden diese einen Untermodul, und damit erkennen wir  $x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$ , ohne die Rechnung aus dem Beweis von [?] ?? wiederholen zu müssen. Ist nun zusätzlich  $\alpha$  eine einfache Wurzel, so gilt sogar  $x_\beta y_\alpha^i v_\lambda = 0$  für alle  $\beta \in R^+ \setminus \alpha$  und  $i \in \mathbb{N}$ , denn  $i\alpha - \beta$  ist dann nie eine Summe positiver Wurzeln. Da aber gilt  $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - (n+1)\alpha$  nach [SPW] 2.2.16 und den Definitionen, folgern wir  $0 \neq y_\alpha^{n+1} v_\lambda \in \Delta(\lambda)_{s_\alpha \cdot \lambda}$  und erhalten nach der Definition unserer Verma-Moduln wie im Beweis von 1.4.7.3 aus ihrer universellen Eigenschaft als koinduzierte Darstellungen einen von Null verschiedenen Homomorphismus  $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \rightarrow \Delta(\lambda)$ , der den kanonischen Erzeuger von  $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda)$  auf  $y_\alpha^{n+1} v_\lambda$  abbildet. Da alle Verma-Moduln frei sind vom Rang Eins über dem nach 1.3.32 nullteilerfreien Ring  $U(\mathfrak{n})$ , muß dieser Homomorphismus sogar eine Injektion sein.  $\square$

*Beweis von (2)  $\Leftarrow$  (1) in 1.4.10.* Das Lemma zeigt, daß für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $\alpha$  einfach mit  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$  ganz und nichtnegativ ein höchster Gewichtsvektor von  $L(\lambda)$  stets eine endlichdimensionale  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Unterdarstellung erzeugt. Nun ist in jeder Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  die Summe  $W$  aller endlichdimensionalen  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Unterdarstellungen für beliebiges festes  $\alpha \in R$  eine  $\mathfrak{g}$ -Unterdarstellung von  $V$ , wie man zum Beispiel aus Übung [?] ?? folgert. Gilt nun  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$  für jede einfache Wurzel  $\alpha$ , so ist also  $L(\lambda)$  für jede einfache Wurzel  $\alpha$  die Summe seiner endlichdimensionalen  $\mathfrak{g}^\alpha$ -Unterdarstellungen. Aus deren expliziten Beschreibung in [?] ?? und 1.2.2 folgt dann  $s_\alpha P(L(\lambda)) = P(L(\lambda))$  für jede einfache Spiegelung  $s_\alpha \in W$ . Dann ist aber notwendig  $P(L(\lambda))$  stabil unter der Weylgruppe, also endlich, also  $\dim L(\lambda) < \infty$ .  $\square$

## Übungen

*Übung 1.4.15.* Man zeige, daß im Fall  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  ein Vermamodul  $\Delta(\lambda)$  genau dann einfach ist, wenn er keinen endlichdimensionalen Quotienten hat, wenn also sein höchstes Gewicht auf der positiven Wurzel als Wert keine natürliche Zahl annimmt, in Formeln  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{N}$  für  $\alpha$  die positive Wurzel.

*Übung 1.4.16.* Gegeben  $\lambda$  ganz und dominant ist die Summe über alle einfachen Wurzeln  $\alpha$  der Bilder der Inklusionen  $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$  nach 1.4.13 der größte echte Untermodul von des Vermamoduls  $\Delta(\lambda)$ . Hinweis: Man variiere den Beweis der Rückrichtung von 1.4.10. Man zeige auch die Variante, nach der für  $\lambda$  ganz und dominant die Vektoren  $y_\alpha^{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1} v_\lambda$  für  $\alpha \in \Pi$  einfache Wurzeln den größten Untermodul des Vermamoduls  $\Delta(\lambda)$  erzeugen, ja sogar bereits als  $U(\mathfrak{n})$ -Untermodul erzeugen.

*Übung 1.4.17.* Gibt es in einer einfachen Darstellung einer halbeinfachen Liealgebra einen von Null verschiedenen Vektor, der von allen Wurzelvektoren zu einem



System positiver Wurzeln aus dem Wurzelsystem zu einer Cartan'schen annulliert wird, so ist der fragliche Vektor bereits ein höchster Gewichtsvektor unserer Darstellung.

*Übung 1.4.18.* Man zeige: Die Darstellung  $\bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$  von  $\mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$  ist einfach für  $1 \leq i \leq n+1$  und hat das höchste Gewicht  $\varpi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ .

## 1.5 Induktion und Koinduktion bei Liealgebren\*

1.5.1. Viele Konstruktionen und Resultate des vorhergehenden Abschnitts sind Spezialfälle sehr allgemeiner Konstruktionen und Prinzipien, die in [TS] 4.7.1 erläutert werden und eine gewisse Erfahrung im Umgang mit allgemeinen Tensorprodukten und der Sprache der Kategorien voraussetzen. Das soll im folgenden für diejenigen Leser, die mit diesen Konzepten vertraut sind, beleuchtet werden.

**Definition 1.5.2.** Jeder Liealgebren-Homomorphismus  $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g}$  induziert einen Ringhomomorphismus  $U(\mathfrak{b}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$  und unsere Kategorien von Darstellungen identifizieren sich mit den Kategorien aller Moduln über diesen Ringen. Der Restriktionsfunktor

$$\text{res}_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{b}} : \mathfrak{g}\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{b}\text{-Mod}$$

hat nach [TS] 4.7.5 folglich einen Rechtsadjungierten  $\text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}$  und nach [TS] 4.7.7 einen Linksadjungierten  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}$ , die **Induktion** und die **Koinduktion** oder **Produktion** von Darstellungen von Liealgebren, die explizit beschrieben werden können durch die Formeln

$$\text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M := \text{Hom}_{U(\mathfrak{b})}(U(\mathfrak{g}), M) \quad \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} M$$

*Bemerkung 1.5.3 (Diskussion der Terminologie).* Beim Studium der Literatur ist Vorsicht geboten: Bei Darstellungen von Lie-Gruppen und algebraischen Gruppen bezeichnet Induktion in der Literatur stets den Rechtsadjungierten der Restriktion wie hier. Bei Darstellungen von Liealgebren jedoch wird in der Literatur als Induktion meist abweichend der Linksadjungierte der Restriktion bezeichnet, den wir hier Produktion genannt haben. Die Idee dazu kommt aus [Vog81], wo allerdings die Begriffe Induktion und Produktion im Vergleich zu unseren Begriffen hier vertauscht definiert werden.

*Ergänzung 1.5.4.* Bei Darstellungen endlicher Gruppen bezeichnet man als Induzieren zwar meist die Erweiterung der Skalare, also den Linksadjungierten der Restriktion, aber dieser ist glücklicherweise kanonisch isomorph zum Rechtsadjungierten der Restriktion. Der Begriff der „Produktion“ ist überhaupt nicht gebräuchlich.

1.5.5. Ist  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$  sogar eine Unteralgebra, so ist  $U(\mathfrak{g})$  nach Poincaré-Birkhoff-Witt frei als Rechtsmodul und als Linksmodule über  $U(\mathfrak{b})$ , so daß die Induktion und Koinduktion nach [KAG] 1.4.4 und [TS] 4.2.17 beide exakte Funktoren werden. Ist zusätzlich  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$  eine Unteralgebra mit  $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$  als Vektorräume über unserem Grundkörper  $k$ , so liefert nach 1.3.37 die Multiplikation einen Isomorphismus  $U(\mathfrak{n}) \otimes_k U(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g})$  von  $U(\mathfrak{n})$ - $U(\mathfrak{b})$ -Bimoduln und wir erhalten mit [TS] 4.2.30 einen kanonischen Isomorphismus von  $U(\mathfrak{n})$ -Moduln

$$U(\mathfrak{n}) \otimes_k M \xrightarrow{\sim} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$$

Ebenso liefert die Multiplikation auch einen Isomorphismus  $U(\mathfrak{b}) \otimes_k U(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g})$  von  $U(\mathfrak{b})$ - $U(\mathfrak{n})$ -Bimoduln und wir erhalten einen kanonischen Isomorphismus von  $U(\mathfrak{n})$ -Moduln

$$\text{Hom}_k(U(\mathfrak{n}), M) \xrightarrow{\sim} \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$$

*Ergänzung 1.5.6.* Ist  $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$  eine Surjektion und bezeichnet  $\mathfrak{c}$  ihren Kern, so ist  $\text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = M^{\mathfrak{c}}$  der Teilraum der  $\mathfrak{c}$ -**Invarianten** aus [?] ?? und  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M$  heißt der Raum der  $\mathfrak{c}$ -**Koinvarianten** und wird  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = M_{\mathfrak{c}}$  notiert. Diese beiden Funktoren sind im allgemeinen alles andere als exakt.

1.5.7 (**Vermamoduln als koinduzierte Darstellungen**). Seien nun  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche Unteralgebra,  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  das Wurzelsystem,  $R^+ \subset R$  ein System von positiven Wurzeln, und  $\leq$  die zugehörige partielle Ordnung auf  $\mathfrak{h}^*$ . Wir betrachten in  $\mathfrak{g}$  die Unteralgebra

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

Dehnen wir unser Gewicht  $\lambda$  aus zu einer Linearform auf  $\mathfrak{b}$  durch die Vorschrift  $\lambda(\mathfrak{g}_{\alpha}) = 0 \quad \forall \alpha \in R^+$ , so erhalten wir offensichtlich einen Charakter  $\lambda : \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}$ , d.h. eine eindimensionale Darstellung  $\mathbb{C}_{\lambda}$  der Liealgebra  $\mathfrak{b}$ . Diese Darstellung können wir auffassen als einen Homomorphismus von Ringalgebren  $\tilde{\lambda} : U(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Bezeichnen wir seinen Kern mit  $J_{\lambda} := \ker \tilde{\lambda}$ , so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$J_{\lambda} \hookrightarrow U(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$$

Per definitionem liegen alle  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  mit  $\alpha \in R^+$  und alle  $H - \lambda(H)$  mit  $H \in \mathfrak{h}$  in  $J_{\lambda}$ , ja unser Kern ist genau das von diesen Elementen in  $U(\mathfrak{b})$  erzeugte Linksideal, denn modulo diesem Linksideal ist offensichtlich jedes Element von  $U(\mathfrak{b})$  kongruent zu einem Skalar aus  $\mathbb{C}$ . Wir können unsere kurze exakte Sequenz auch lesen als eine kurze exakte Sequenz  $J_{\lambda} \hookrightarrow U(\mathfrak{b}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_{\lambda}$  von Darstellungen von  $\mathfrak{b}$ . Anwenden von  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})}$  liefert eine rechtsexakte Sequenz

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} J_{\lambda} \rightarrow U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda}$$

Hier ist die linke Abbildung die Multiplikationsabbildung, ihr Bild also das von  $J_\lambda$  in  $U(\mathfrak{g})$  erzeugte Linksideal  $I_\lambda$ , und wir erhalten so einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\Delta(\lambda) = U(\mathfrak{g})/I_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{prod}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g} \mathbb{C}_\lambda = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

mit  $v_\lambda \mapsto 1 \otimes 1$ . Die universelle Eigenschaft 1.4.6 von Verma-Moduln folgt dann aus der universellen Eigenschaft der Koinduktion: Für jede Darstellung  $L$  von  $\mathfrak{g}$  liefert die Restriktion auf  $\mathbb{C}_\lambda$  danach eine Bijektion

$$\text{Hom}_\mathfrak{g}(\Delta(\lambda), L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_\mathfrak{b}(\mathbb{C}_\lambda, L)$$

Falls  $\lambda$  maximal ist unter den Gewichten von  $L$ , identifiziert das Auswerten bei 1 hier zusätzlich die rechte Seite mit dem Gewichtsraum  $L_\lambda$ .

## 1.6 Die Weyl'schen Formeln

*Notation 1.6.1.* Seien  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche Unteralgebra,  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  das Wurzelsystem,  $R^+ \subset R$  ein System positiver Wurzeln,  $\rho \in \mathfrak{h}^*$  die Halbsumme der positiven Wurzeln,  $\mathfrak{X}$  das Gitter der ganzen Gewichte und  $\mathfrak{X}^+ \subset \mathfrak{X}$  die Menge der in Bezug auf  $R^+$  dominanten ganzen Gewichte.

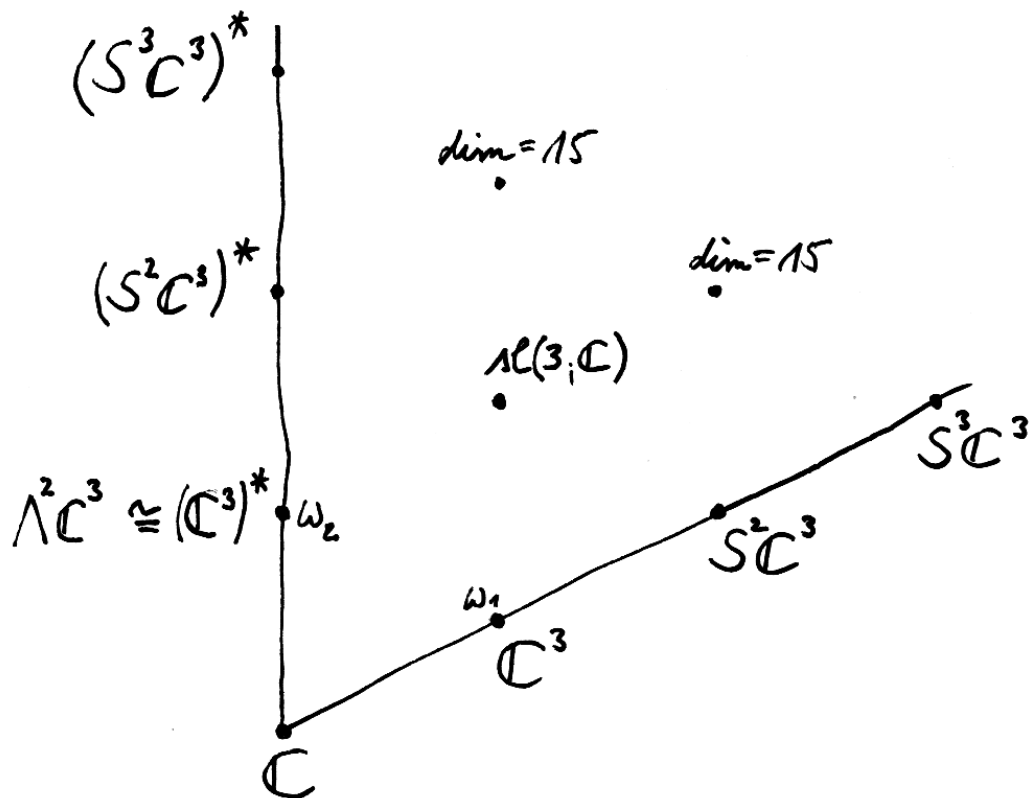
**Satz 1.6.2 (Weyl'sche Dimensionsformel).** *Für jedes ganze dominante Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{X}^+$  wird die Dimension der einfachen Darstellung  $L(\lambda)$  mit höchstem Gewicht  $\lambda$  gegeben durch die Formel*

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle}$$

1.6.3. Der Beweis wird im Anschluß an 1.6.30 gegeben. Auf dem Weg dahin werden wir sogar Formeln für die Dimensionen  $\dim_k L(\lambda)_\mu$  aller Gewichtsräume von endlichdimensionalen einfachen Darstellungen angeben. Obiger Formel kann ich mit bloßem Auge noch nicht einmal ansehen, warum sie immer natürliche Zahlen liefern sollte. Im Spezialfall  $\lambda = n\rho$  ergibt sich  $\dim L(n\rho) = (n+1)^{|R|/2}$ .

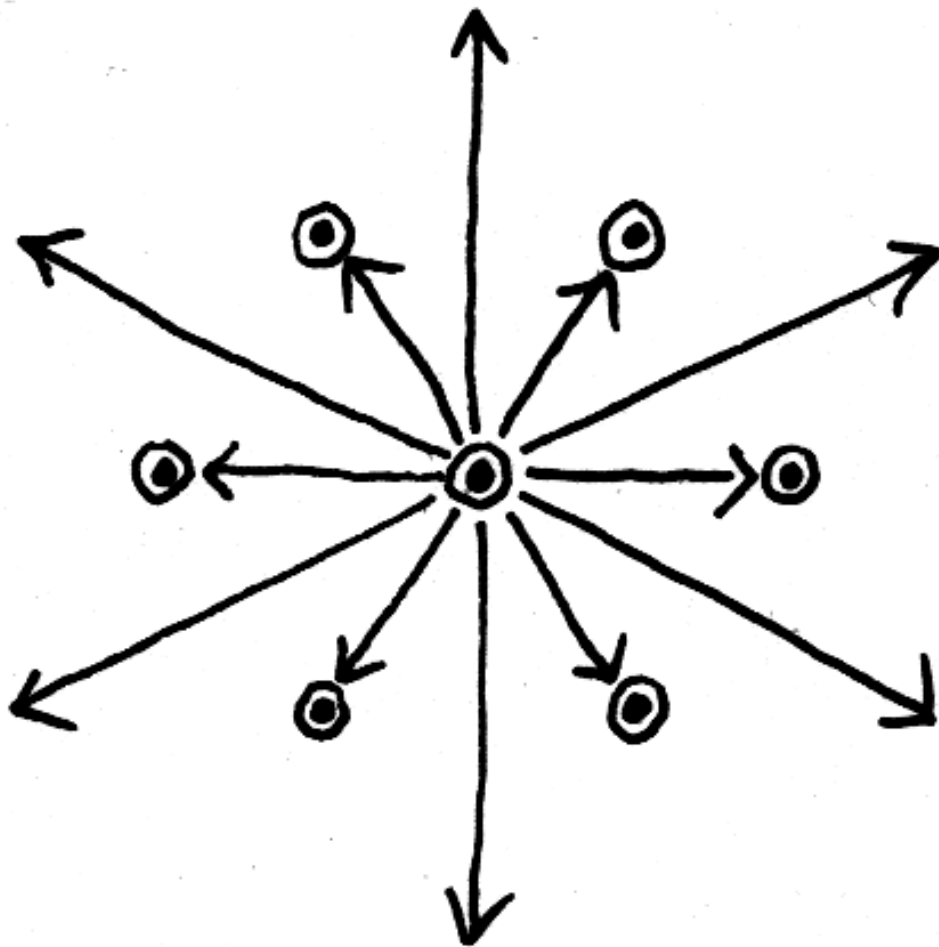
1.6.4. Wir betrachten den Gruppenring  $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$  der additiven Gruppe  $\mathfrak{h}^*$ . Fassen wir  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  als ein Element dieses Gruppenrings auf, so schreiben wir  $e^\lambda$  statt  $\lambda$ , da sonst  $\lambda + \mu$  zweideutig wäre. Die  $e^\lambda$  für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  bilden also eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$  und es gilt  $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ .

1.6.5. Der Ring  $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$  ist nullteilerfrei. In der Tat liegen je zwei Elemente stets in einem Teilring der Gestalt  $\mathbb{Z}E$  für  $E \subset \mathfrak{h}^*$  eine endlich erzeugte Untergruppe, und da  $E$  notwendig eine freie abelsche Gruppe ist, muß  $\mathbb{Z}E$  isomorph sein zu einem Ring von Laurent-Polynomen in mehreren Veränderlichen.



Einige ganze dominante Gewichte zur  $\mathfrak{sl}(3; \mathbb{C})$  mit den zugehörigen irreduziblen Darstellungen oder zumindest deren Dimensionen. Die Kanten werden in [ML] 2.3.19 gerechtfertigt. Sind  $\alpha_1, \alpha_2$  die einfachen Wurzeln, so ist die einzige weitere positive Wurzel  $\alpha_1 + \alpha_2$  und in diesem Fall gilt auch  $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee$ . Sind  $\varpi_1, \varpi_2$  die fundamentalen dominanten Gewichte, so gilt per Definitionem  $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$  und nach [SPW] 2.2.16 haben wir  $\rho = \varpi_1 + \varpi_2$ . Der Nenner in der Weyl'schen Dimensionsformel ist also  $\langle \varpi_1 + \varpi_2, \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee \rangle = 2$ . Setzen wir  $\lambda = \lambda_1 \varpi_1 + \lambda_2 \varpi_2$ , so ergibt sich der Zähler zu  $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)$  und wir erhalten

$$\dim L(\lambda) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)/2$$



Die Gewichte der 7-dimensionalen irreduziblen Darstellung von  $G_2$ .

**Definition 1.6.6.** Für jede endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  definieren wir ihren **Charakter**  $\text{ch } V \in \mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$  durch die Vorschrift

$$\text{ch } V = \sum_{\mu} (\dim V_{\mu}) e^{\mu}$$

1.6.7. Der Charakter einer endlichdimensionalen Darstellung ist stabil unter der Weylgruppe. In der Tat folgt aus der Darstellungstheorie der  $\mathfrak{sl}(2; k)$  nach ??, daß geeignete Potenzen von Erzeugern von  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  und  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  Isomorphismen zwischen den Gewichtsräumen zu  $\lambda$  und  $s_{\alpha}\lambda$  liefern.

**Satz 1.6.8 (Weyl'sche Charakterformel).** Für jedes ganze dominante Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{X}^+$  gilt in  $\text{Quot}(\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*)$  für den Charakter der endlichdimensionalen einfachen Darstellung mit höchstem Gewicht  $\lambda$  die Formel

$$\text{ch } L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w\rho}}$$

1.6.9. Der Beweis wird im Anschluß an den Beweis von 1.6.29 gegeben. Die Formel selbst ist insbesondere für theoretische Überlegungen nützlich, für praktische Berechnungen scheint mir 1.6.27 sehr viel besser, und es gibt sogar noch bessere Verfahren. Das Vorzeichen  $(-1)^{l(w)}$  ist übrigens gerade die Determinante von  $w$ . In [ML] 5.9.6 erklären wir, inwiefern diese Formel die Charaktere der Darstellungen kompakter Liegruppen liefert.

*Beispiel 1.6.10.* Man prüft sofort, daß sich korrekt  $\text{ch } L(0) = e^0$  ergibt. Im Fall  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; k)$  haben wir  $\rho = \alpha/2$ ,  $\mathfrak{X}^+ = \mathbb{N}\rho$  und es ergibt sich für alle  $n \in \mathbb{N}$  korrekt

$$\text{ch } L(n\rho) = \frac{e^{(n+1)\rho} - e^{-(n+1)\rho}}{e^{\rho} - e^{-\rho}} = e^{n\rho} + e^{(n-2)\rho} + \dots + e^{-n\rho}$$

1.6.11. Ist  $\mathfrak{g}$  einfach und  $\beta \in R^+$  die höchste Wurzel, so ist  $L(\beta)$  die adjungierte Darstellung und die Weyl'sche Charakterformel spezialisiert zu einer bemerkenswerten kombinatorischen Identität, die der Leser selbst ausschreiben mag.

1.6.12. Wir wollen nun unseren Charakterring so erweitern, daß wir auch mit Charakteren von Verma-Moduln rechnen können.

**Definition 1.6.13.** Ganz allgemein können wir die Menge  $\text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$  aller Abbildungen von  $\mathfrak{h}^*$  nach  $\mathbb{Z}$  betrachten. Wir schreiben solche Abbildungen  $f : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  als unendliche formale Ausdrücke  $f = \sum f(\lambda) e^{\lambda}$  und ordnen jeder Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  oder sogar von  $\mathfrak{h}$  mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen ihren **Charakter**  $\text{ch } V \in \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$  zu mittels der Vorschrift

$$\text{ch } V = \sum (\dim V_{\mu}) e^{\mu}$$

1.6.14. Offensichtlich bilden die Charaktere aller Verma-Moduln eine linear unabhängige Familie in  $\text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$  und dasselbe gilt für die Charaktere aller einfachen höchsten Gewichtsmodule. Ich wüßte aber nicht, wie man die Multiplikation in  $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$  sinnvoll auf ganz  $\text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$  ausdehnen könnte. Um dennoch mit Charakteren von Verma-Moduln rechnen zu können, arbeiten wir mit einer geeigneten Untergruppe.

**Definition 1.6.15 (Erweiterter Charakterring).** Bezeichne

$$\mathbb{Z}^{\neg}\mathfrak{h}^* \subset \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{Z})$$

die Menge aller Abbildungen von  $\mathfrak{h}^*$  nach  $\mathbb{Z}$ , deren Träger in einer Vereinigung von endlich vielen Mengen der Form  $\lambda + \{-R^+\}$  enthalten ist, in anderen Formeln also Mengen der Form  $\{\lambda - \sum n_{\alpha}\alpha \mid n \in \text{Ens}(R^+, \mathbb{N})\}$ .

1.6.16. Natürlich können wir  $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \subset \mathbb{Z}^{\neg}\mathfrak{h}^*$  als die Teilmenge aller Funktionen mit endlichem Träger auffassen. Wir können nun die Multiplikation in  $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$  zu einer assoziativen kommutativen Multiplikation auf  $\mathbb{Z}^{\neg}\mathfrak{h}^*$  fortsetzen durch die Vorschrift  $(fg)(\nu) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} f(\lambda)g(\mu)$ , denn unsere Trägerbedingung stellt sicher, daß in diesen Summen nur endlich viele Terme nicht verschwinden. Man kann sich überlegen, daß dieser **erweiterte Charakterring** auch nullteilerfrei ist, aber wir werden das nicht benötigen. Als Beispiel für die Nützlichkeit unseres Rings zeigen wir gleich ein Lemma.

1.6.17. Sind  $M, N$  zwei  $\mathfrak{h}$ -Moduln mit endlichdimensionalen Gewichtsräumen derart, daß beide die Summe ihrer Gewichtsräume sind und daß ihre Charaktere beide zu  $\mathbb{Z}^{\neg}\mathfrak{h}^*$  gehören, so gilt  $\text{ch}(M \otimes N) = (\text{ch } M)(\text{ch } N)$ .

**Lemma 1.6.18.** *Der Charakter eines Verma-Moduls wird gegeben durch die Formel  $\text{ch } \Delta(\lambda) = e^{\lambda} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots)$ . Insbesondere gilt in  $\mathbb{Z}^{\neg}\mathfrak{h}^*$  die Formel*

$$\left( \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \right) \text{ch } \Delta(\lambda) = e^{\lambda}$$

*Beweis.* Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten und die erste drückt nur unsere Erkenntnisse über Verma-Moduln aus 1.4.3 in unserem neuen Formalismus aus, da ja offensichtlich gilt  $\prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots) = \sum_{\mu} \mathcal{P}(-\mu) e^{-\mu}$ .  $\square$

1.6.19. Wir interessieren uns nun für den Eigenwert des Casimir-Operators auf einem Verma-Modul. Bezeichne  $\bar{\kappa} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$  den von der Killingform  $\kappa$  induzierten Isomorphismus, charakterisiert durch  $\langle \bar{\kappa}(h), h' \rangle = \kappa(h, h') \quad \forall h, h' \in \mathfrak{h}$ . Bezeichne

$$(\ , \ )$$

die Bilinearform auf  $\mathfrak{h}^*$ , die unter dem Isomorphismus  $\bar{\kappa}$  der Killingform auf  $\mathfrak{h}$  entspricht. Haben wir  $\bar{\kappa} : h \mapsto \lambda$ , so folgt für alle  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  auch  $\mu(h) = (\lambda, \mu)$ . Nach ?? ist unsere Bilinearform positiv definit auf dem von den Wurzeln aufgespannten  $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Nach dem anschließenden Lemma ist unsere Bilinearform invariant unter der Weylgruppe.

**Lemma 1.6.20.** *Die Restriktion der Killingform einer komplexen halbeinfachen Liealgebra auf eine Cartan'sche ist invariant unter der Weylgruppe.*

*Erster Beweis.* Für  $x, y \in \mathfrak{h}$  und  $w \in W$  rechnen wir

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, x \rangle \langle \alpha, y \rangle \\ \kappa(wx, wy) &= \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, wx \rangle \langle \alpha, wy \rangle = \sum_{\alpha \in R} \langle w^{-1}\alpha, x \rangle \langle w^{-1}\alpha, y \rangle \quad \square \end{aligned}$$

*Zweiter Beweis.* Natürlich ist die Killingform einer endlichdimensionalen Liealgebra invariant unter jedem Automorphismus  $\tau$  unserer Liealgebra, in Formeln  $\kappa(\tau x, \tau y) = \kappa(x, y)$  für alle  $x, y$ . Die Elemente der Weylgruppe operieren aber nach ?? auf der Cartan'schen wie die Elemente des Normalisators unserer Cartan'schen in der adjungierten Gruppe, wenn man denn weiß, was alle diese Begriffe bedeuten.  $\square$

**Lemma 1.6.21.** *Jeder Endomorphismus eines Verma-Moduls ist die Multiplikation mit einem Skalar.*

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildungen  $k \leftrightarrow \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} \Delta(\lambda) \leftrightarrow \operatorname{End}_k(\Delta(\lambda)_{\lambda})$ . Die zweite ist injektiv, da  $\Delta(\lambda)_{\lambda}$  nach 1.4.3 schon  $\Delta(\lambda)$  erzeugt. Die Verknüpfung ist eine Bijektion, da ja nach 1.4.3 der höchste Gewichtsraum eines Verma-Moduls eindimensional ist. Also sind unsere Abbildungen alle drei Bijektionen.  $\square$

**Lemma 1.6.22 (Eigenwert des Casimir auf Verma-Moduln).** *Der Casimir-Operator  $C = C_{\kappa}$  aus ?? operiert auf dem Verma-Modul  $\Delta(\lambda)$  durch den Skalar  $c_{\lambda} = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$  in den Notationen aus 1.6.19.*

1.6.23. Dies Lemma gilt unverändert, wenn wir die Killingform ersetzen durch eine beliebige invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf unserer halbeinfachen Liealgebra. Es zeigt im Übrigen in Verbindung mit 1.4.13 auch  $(\lambda, \lambda) = (w\lambda, w\lambda)$  zumindest für alle ganzen Gewichte  $\lambda$  und alle  $w \in W$ .

*Beweis.* Nach 1.3.38 können wir den Casimiroperator  $C$  als Element des Zentrums der universellen Einhüllenden auffassen. Wir müssen nach 1.6.21 nur ausrechnen, durch welchen Skalar er auf dem höchsten Gewichtsraum  $\Delta(\lambda)_{\lambda}$  operiert. Dazu wählen wir für  $\alpha \in R^+$  Wurzelvektoren  $x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  und  $y_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit



$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$ , wählen des weiteren eine Orthonormalbasis  $h_1, \dots, h_n$  von  $\mathfrak{h}$  unter der Killing-Form  $\kappa$  und erhalten

$$\begin{aligned} C &= \sum_{\alpha \in R^+} y_\alpha x_\alpha + x_\alpha y_\alpha + \sum_{i=1}^n h_i^2 \\ &= \sum_{\alpha \in R^+} 2y_\alpha x_\alpha + [x_\alpha, y_\alpha] + \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck operiert auf  $\Delta(\lambda)_\lambda$  natürlich durch den Skalar

$$c_\lambda = \sum_{\alpha \in R^+} \lambda([x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \lambda(h_i)^2$$

Schreiben wir  $\lambda = \bar{\kappa}(h)$ , so liest sich unser Skalar als

$$c_\lambda = \sum_{\alpha \in R^+} \kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^n \kappa(h, h_i)^2$$

Wegen  $\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(h)$  ergibt sich schließlich für unseren Skalar die Formel

$$\begin{aligned} c_\lambda &= 2\rho(h) + \kappa(h, h) \\ &= (2\rho, \lambda) + (\lambda, \lambda) \\ &= (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho) \quad \square \end{aligned}$$

**Ergänzung 1.6.24 (Formel von Freudenthal).** Der Beweis von 1.6.22 liefert bereits eine Formel zur induktiven Berechnung irreduzibler Charaktere. Ist  $L = L(m\rho)$  die  $(m+1)$ -dimensionale einfache Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und ist  $e, h, f$  die Standardbasis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  wie in ??, so liefern die Formeln aus dem Beweis dort, daß die Operation von  $fe$  auf jedem von Null verschiedenen Gewichtsraum  $L(m\rho)_{m\rho - i\alpha}$  geschieht durch den Skalar  $(m-i+1)i$ , den wir mit  $\mu := m\rho - i\alpha$  auch schreiben können als

$$(m-i+1)i = \sum_{j \geq 1} (\dim L(m\rho)_{\mu+j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle$$

Die rechte Seite wird nun zusätzlich Null für alle Gewichte  $\mu$  mit  $L(m\rho)_\mu = 0$  und das zeigt, daß für alle endlichdimensionalen Darstellungen  $V$  der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und alle Gewichte  $\mu$  gilt

$$\text{tr}(fe|V_\mu) = \sum_{j \geq 1} (\dim V_{\mu+j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle$$

Gegeben  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  und  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $[x, y] = \alpha^\vee$  folgt aus der Formel  $\kappa(h, [x, y]) = \alpha(h)\kappa(x, y)$  vom Beginn des Beweises von ?? sofort

$$\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = 2\kappa(x, y)$$

Gegeben  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  und  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$  folgt umgekehrt dann auch, daß  $x_\alpha, \alpha^\vee$  und  $(\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee)/2)y_\alpha$  ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel  $(e, h, f)$  bilden. Für  $\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  kürzen wir nun  $\sqrt{(\lambda, \lambda)} = |\lambda|$  ab. Für die Spur des Casimir auf dem Gewichtsraum  $L(\lambda)_\mu$  ergeben sich mit 1.6.22 und den Formeln aus dem Beweis dieses Lemmas die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{tr}(C|L(\lambda)_\mu) &= (\dim L(\lambda)_\mu) (|\lambda + \rho|^2 - |\rho|^2) \\ \text{tr}(C|L(\lambda)_\mu) &= \sum_{\alpha \in R^+} (2/\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee)) \sum_{j \geq 1} (\dim L(\lambda)_{\mu+j\alpha}) \langle \mu + j\alpha, \alpha^\vee \rangle \\ &\quad + (\dim L(\lambda)_\mu) (|\mu + \rho|^2 - |\rho|^2) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich dieser beiden Formeln zusammen mit der Erkenntnis  $\bar{\kappa}(\alpha^\vee) = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$  ergibt sich dann schließlich **Freudenthal's Formel**

$$(\dim L(\lambda)_\mu) (|\lambda + \rho|^2 - |\mu + \rho|^2) = 2 \sum_{\alpha \in R^+} \sum_{j \geq 1} (\dim L(\lambda)_{\mu+j\alpha}) (\mu + j\alpha, \alpha)$$

Sie erlaubt es, induktiv die Dimension eines Gewichtsraums in einer einfachen Darstellung aus den Dimensionen der Gewichtsräume zu höheren Gewichten zu berechnen.

**Lemma 1.6.25 (Kompositionsreihen von Vermamoduln).** *Jeder Vermamodul  $\Delta(\lambda)$  hat endliche Länge und jeder einfache Subquotient von  $\Delta(\lambda)$  ist ein einfacher höchster Gewichtsmodul  $L(\mu)$  mit  $\mu \leq \lambda$  und  $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ .*

*Beweis.* Die zweite Aussage folgt aus 1.4.7.3 und 1.6.22, da der Casimir-Operator auf jedem Subquotienten von  $\Delta(\lambda)$  auch durch den Skalar  $c_\lambda$  operieren muß. Wir folgern daraus zunächst einmal, daß es überhaupt nur endlich viele  $\mu$  gibt, die als höchste Gewichte einfacher Subquotienten unseres Vermamoduls in Frage kommen. Aus  $\mu \leq \lambda$  folgt ja unter anderem  $\mu = \lambda + \nu$  mit  $\nu \in \langle R \rangle$ . Nun gibt es aber nur endlich viele Elemente des Wurzelgitters  $\nu \in \langle R \rangle$  mit  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\lambda + \nu + \rho, \lambda + \nu + \rho)$ , denn diese Gleichung ist gleichbedeutend zu  $(\nu, \nu) + 2(\lambda + \rho, \nu) = 0$ , und da unsere Bilinearform  $(\ , \ )$  nach ?? positiv definit ist auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ , kann unsere Gleichung im Gitter  $\langle R \rangle$  höchstens endlich viele Lösungen haben. Weiter hat jeder von Null verschiedene Subquotient  $S$  von  $\Delta(\lambda)$  selbst einen einfachen Subquotienten, ganz allgemein besitzt ja nach [KAG] 3.5.24 jeder von Null verschiedene Modul über einem Ring einen einfachen Subquotienten. Damit gibt es also für jeden von Null verschiedenen Subquotienten  $S$  von  $\Delta(\lambda)$  ein Gewicht  $\mu$  mit  $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$  und  $S_\mu \neq 0$ . Wir können dann die Länge  $l(\Delta(\lambda))$  einer in jedem Schritt echt absteigenden Filtrierung der Darstellung  $\Delta(\lambda)$  abschätzen durch

$$l(\Delta(\lambda)) \leq \sum \dim_k \Delta(\lambda)_\mu$$

mit der Summe über alle  $\mu \leq \lambda$  mit  $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ . □

1.6.26. Wir erinnern an die „zum Fixpunkt  $-\rho$  verschobene“ Operation von  $W$  auf  $\mathfrak{h}^*$ , gegeben durch die Formel  $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ .

**Satz 1.6.27 (Kostant'sche Charakterformel).** *Gegeben  $\lambda \in \mathfrak{X}^+$  ein dominantes ganzes Gewicht ist der Charakter der einfachen Darstellung mit höchstem Gewicht  $\lambda$  die alternierende Summe über die Charaktere der Vermoduln mit höchstem Gewicht in der Bahn von  $\lambda$  unter der dot-Operation der Weylgruppe, in Formeln*

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \text{ch } \Delta(w \cdot \lambda)$$

*Beispiel 1.6.28.* Im Fall der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2)$  liefert die Einbettung von Vermoduln aus 1.4.13 offensichtlich für alle  $m \in \mathbb{N}$  eine kurze exakte Sequenz  $\Delta((-m-2)\rho) \hookrightarrow \Delta(m\rho) \rightarrow L(m\rho)$ , die die obige Formel direkt liefert.

*Beweis.* Für  $\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  kürzen wir  $\sqrt{(\lambda, \lambda)} = |\lambda|$  ab. Lemma 1.6.25 sagt uns, daß wir den Charakter von  $\Delta(\lambda)$  schreiben können in der Form

$$\text{ch } \Delta(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ |\mu + \rho| = |\lambda + \rho|}} a_{\lambda}^{\mu} \text{ch } L(\mu)$$

für geeignete  $a_{\lambda}^{\mu} \in \mathbb{N}$  mit  $a_{\lambda}^{\lambda} = 1$ . Da sich eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen stets invertieren läßt, können wir umgekehrt auch den Charakter von  $L(\lambda)$  schreiben in der Form

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ |\mu + \rho| = |\lambda + \rho|}} b_{\lambda}^{\mu} \text{ch } \Delta(\mu)$$

für geeignete  $b_{\lambda}^{\mu} \in \mathbb{Z}$  mit  $b_{\lambda}^{\lambda} = 1$ . Insoweit gilt alles für beliebige  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$  und wenn wir die Notation  $|\mu|$  vermeiden sogar für beliebige  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Ist  $\lambda$  nun ganz und dominant, so hat  $L(\lambda)$  endliche Dimension nach 1.4.10 und  $\text{ch } L(\lambda)$  ist nach 1.2.6 invariant unter der Weylgruppe  $W$ . Wir multiplizieren dann beide Seiten unserer Gleichung mit

$$\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = e^{\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})$$

und erhalten mit der Abkürzung  $d_{\nu} = b_{\lambda}^{\nu - \rho}$  und 1.6.18 die Formel

$$\left( \prod_{\alpha \in R^+} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2} \right) \text{ch } L(\lambda) = \sum_{\mu} b_{\lambda}^{\mu} e^{\mu + \rho} = \sum_{\nu} d_{\nu} e^{\nu}$$

mit der zusätzlichen Information  $d_{\lambda+\rho} = 1$  und  $d_\nu = 0$  falls  $|\nu| \neq |\lambda+\rho|$  oder  $\nu \not\leq \lambda+\rho$ . Nach [SPW] 2.2.7 ändert die linke Seite ihr Vorzeichen, wenn man darauf eine einfache Spiegelung  $s_\beta$  anwendet. Dasselbe muß dann auch für die rechte Seite gelten und wir folgern  $d_\nu = (-1)^{l(w)} d_{w\nu}$  für alle  $w \in W$ . Insbesondere haben wir damit sogar  $d_\nu = 0$  falls nicht  $|\nu| = |\lambda+\rho|$  und  $w\nu \leq \lambda+\rho$  für alle  $w \in W$ . Mit dem anschließenden Lemma 1.6.29 folgt  $d_\nu = 0$  falls nicht gilt  $\nu \in W(\lambda+\rho)$ , und mit unserer zusätzlichen Information  $d_{\lambda+\rho} = 1$  und Zurückparametrisieren folgt die Kostant'sche Charakterformel.  $\square$

**Lemma 1.6.29.** *Sei  $\mu \in \mathfrak{X}^+$  ein ganzes dominantes Gewicht und  $\nu \in \mathfrak{X}$  ein ganzes Gewicht. Aus  $|\nu| = |\mu|$  und  $w\nu \leq \mu$  für alle  $w \in W$  folgt  $\nu \in W\mu$ .*

*Beweis.* Jedes ganze Gewicht läßt sich mit  $W$  nach  $\mathfrak{X}^+$  konjugieren, und sein „Betrag“ ändert sich nach 1.6.23 dabei nicht. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\nu \in \mathfrak{X}^+$  annehmen und müssen nur für  $\mu, \nu \in \mathfrak{X}^+$  aus  $\nu \leq \mu$  und  $|\nu| = |\mu|$  folgern  $\nu = \mu$ . Nun ist ja per definitionem das Skalarprodukt eines Vektors aus der dominanten Weylkammer mit einer positiven Wurzel stets nichtnegativ, als da heißt, unter unseren Voraussetzungen schließen  $\mu - \nu$  und  $\nu$  einen stumpfen Winkel ein. Dann aber muß die Summe mindestens genauso lang sein wie jeder der beiden Summanden, und Gleichheit der Längen ist nur möglich, wenn der entsprechende Summand mit der Summe übereinstimmt.  $\square$

*Beweis der Weyl'schen Charakterformel 1.6.8.* Wir teilen die Formel

$$\left( \prod_{\alpha \in R^+} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2} \right) \text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)}$$

aus dem Beweis der Kostant'schen Charakterformel 1.6.27 durch ihre Spezialisierung an  $\lambda = 0$ .  $\square$

1.6.30. Die Spezialisierung obiger Formel bei  $\lambda = 0$  ist auch für sich genommen eine bemerkenswerte kombinatorische Identität, die sogenannte **Weyl'sche Nennerformel**

$$e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w\rho}$$

Einen direkten Beweis der Weyl'schen Nennerformel geben wir in [ML] 5.9.10.

*Beweis der Weyl'schen Dimensionsformel 1.6.2.* Es liegt nahe, den Ringhomomorphismus  $a : \mathbb{Z}\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  zu betrachten mit  $a(e^\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Wir bezeichnen ihn mit  $a$ , da seine Einschränkung auf  $\mathbb{Z}\mathfrak{X}$  entspricht unter dem Isomorphismus  $\mathbb{C}\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(T_{\mathbb{C}})$  unseres Gruppenrings mit dem Ring der regulären Funktionen auf

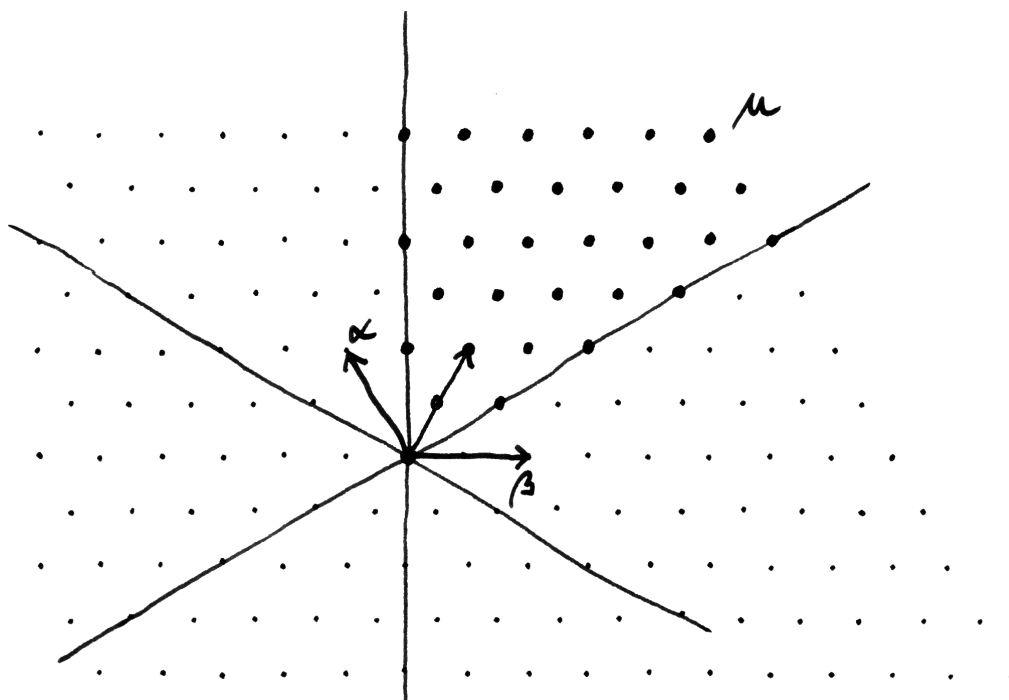


Illustration zu Lemma 1.6.29. Fett eingezeichnet sind alle dominanten ganzen Gewichte  $\nu \in \mathfrak{X}^+$  mit  $\nu \leq \mu$ . Als magere Punkte eingezeichnet sind die anderen ganzen Gewichte  $\nu \in \mathfrak{X}$  mit  $\nu \leq \mu$ , soweit sie eben ins Bild passen. Die Grenzen des Bereichs, in dem Gewichte  $\leq \mu$  zu finden sind, stehen senkrecht auf den Wänden des dominanten Alkoven. Man erkennt, daß alle von  $\mu$  verschiedenen fetten Punkte näher am Ursprung liegen.

einem geeigneten algebraischen Torus  $T_{\mathbb{C}}$  dem Auswerten am neutralen Element entspricht. Nun gilt natürlich  $\dim L(\lambda) = a(\text{ch } L(\lambda))$ , nur führt uns die Weyl'sche Charakterformel zunächst auf die wenig hilfreiche Relation  $0 \cdot \dim L(\lambda) = 0$ . Um hier weiterzukommen benutzen wir eine abstrakte Version der Regel von de l'Hospital. Dazu bilden wir in unserem Gruppenring  $\mathbb{Z}\mathfrak{h}^*$  den Teilring  $\mathbb{Z}\mathfrak{X}$  und betrachten für  $\alpha \in R^+$  den Gruppenhomomorphismus  $\partial_\alpha : \mathbb{Z}\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{Z}\mathfrak{X}$  mit  $\partial_\alpha(e^\mu) = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle e^\mu$ . Man prüft mühelos, daß  $\partial_\alpha$  eine Derivation ist und daß die  $\partial_\alpha$  für verschiedene  $\alpha$  kommutieren. Unter unserem Isomorphismus  $\mathbb{C}\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(T_{\mathbb{C}})$  entspricht  $\partial_\alpha$  im übrigen dem Anwenden des invarianten Vektorfeldes zu  $\alpha^\vee \in \text{Lie } T_{\mathbb{C}}$ . Ist  $D = \prod_{\alpha \in R^+} \partial_\alpha \in \text{End } \mathbb{Z}\mathfrak{X}$  das Produkt der  $\partial_\alpha$ , so gilt offensichtlich  $aD e^\mu = \prod_{\alpha \in R^+} \langle \mu, \alpha^\vee \rangle$ . Mit [SPW] 2.2.7 folgt daraus  $aD e^{w\mu} = (-1)^{l(w)} aD e^\mu$  zuerst für  $w$  eine einfache Spiegelung und dann für beliebige  $w \in W$ . Unter der Übersetzung in  $\mathcal{O}(T_{\mathbb{C}})$  ist diese Formel im übrigen auch ohne weitere Rechnung evident. Betrachten wir nun die aus der Kombination der Weyl'schen Charakterformel und der Weyl'schen Nennerformel entstehende Gleichung

$$\left( e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \right) \text{ch } L(\lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda + \rho)}$$

und wenden auf beide Seiten  $aD$  an, so ergibt sich

$$aD \left( e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \right) a(\text{ch } L(\lambda)) = |W| \prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle$$

denn „kriegt einer der Faktoren  $1 - e^{-\alpha}$  keine Derivation ab, so verschwindet er unter  $a$ “. Setzen wir hier  $a(\text{ch } L(\lambda)) = \dim_{\mathbb{C}} L(\lambda)$  ein und teilen unsere Gleichung durch ihre Spezialisierung an  $\lambda = 0$ , so ergibt sich die Weyl'sche Dimensionsformel 1.6.2.  $\square$

1.6.31. Die Gewichte maximaler Länge in einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung nennen wir ihre **extremen Gewichte**. Die extremen Gewichte von  $L(\nu)$  sind nach 1.6.29 gerade die Weylgruppenkonjugierten des höchsten Gewichts, d.h. die Elemente von  $W\nu$ .

**Satz\* 1.6.32 (Formel von Klimyk).** *Gegeben  $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{X}^+$  dominante ganze Gewichte gelten für die Vielfachheit  $[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)]$  von  $L(\lambda)$  als Summand der Tensor Darstellung die Formeln*

$$[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)] = \sum_{y \in W} (-1)^{l(y)} \dim L(\mu)_{\lambda - y \cdot \nu} \leq \dim L(\mu)_{\lambda - \nu}$$

1.6.33. Ist  $\mu$  klein im Vergleich zu  $\nu$  in dem Sinne, daß für alle einfachen Wurzeln  $\alpha$  und alle  $z \in W$  gilt  $\langle \nu + z\mu, \alpha^\vee \rangle \geq -1$ , so haben wir in der obigen Formel

sogar ganz rechts Gleichheit für alle  $\lambda$ . Auch im allgemeinen zeigt unsere Formel  $[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)] \neq 0 \Rightarrow |\lambda - \nu| \leq |\mu|$  bezüglich jedes unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts auf  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ .

*Beweis.* Ist  $E$  irgendeine endlichdimensionale Darstellung und  $P_{\mu}(E)$  die Multimenge ihrer Gewichte im Sinne von [GR] 2.3.38, wobei jedes Gewicht mit der Dimension des zugehörigen Gewichtsraums gewichtet wird und der „Multimengenanzeiger“  $\mu$  nicht mit dem Gewicht  $\mu$  zu verwechseln ist, so liefert die Kostant'sche Charakterformel 1.6.27

$$\text{ch}(E \otimes L(\nu)) = \sum_{y \in W, \tau \in P_{\mu}(E)} (-1)^{l(y)} \text{ch} \Delta(y \cdot \nu + \tau)$$

Um die Vielfachheit von  $L(\lambda)$  in  $E \otimes L(\nu)$  zu bestimmen, müssen wir nur auf der rechten Seite die Summanden  $\Delta(\lambda)$  zählen und erhalten die Gleichung aus der Formel von Klimyk in der Gestalt

$$[E \otimes L(\nu) : L(\lambda)] = \sum_{\substack{y \in W, \tau \in P_{\mu}(E) \\ y \cdot \nu + \tau = \lambda}} (-1)^{l(y)} = \sum_{y \in W} (-1)^{l(y)} \dim E_{\lambda - y \cdot \nu}$$

Ebenso finden wir auch  $\text{ch}(E \otimes \Delta(\nu)) = \sum_{\tau \in P_{\mu}(E)} \text{ch} \Delta(\nu + \tau)$  und damit sofort  $[E \otimes \Delta(\nu) : L(\lambda)] = \dim E_{\lambda - \nu}$ . Das liefert dann auch die Ungleichung in obigem Satz.  $\square$

1.6.34. Haben wir nun wieder  $E = L(\mu)$ , so können wir die Kostant'sche Charakterformel auch mit der Kostant'schen Partitionsfunktion aus 1.4.3 schreiben in der Gestalt

$$\dim L(\mu)_{\eta} = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \mathcal{P}(x \cdot \mu - \eta)$$

Setzen wir das in die Formel von Klimyk 1.6.32 ein, so ergibt sich die **Formel von Steinberg**

$$[L(\mu) \otimes L(\nu) : L(\lambda)] = \sum_{x, y \in W} (-1)^{l(xy)} \mathcal{P}(x \cdot \mu + y \cdot \nu - \lambda)$$

1.6.35. Sei  $T \subset GL(n, \mathbb{C})$  die Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und  $\varepsilon_i : T \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag. Die Charaktergruppe  $\mathfrak{X}(T)$  ist die freie abelsche Gruppe über den  $\varepsilon_i$  und ihr Gruppenring ist der Ring  $\mathbb{Z}[X_i, X_i^{-1}]$  der Laurentpolynome in Veränderlichen  $X_1, \dots, X_n$ , wo wir  $e^{\varepsilon_i} = X_i$  abgekürzt haben, d.h.  $X_i$  ist  $\varepsilon_i$  aufgefaßt als Element des Gruppenrings. Der Charakter definiert einen Ringisomorphismus

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Grothendieckgruppe der} \\ \text{endlichdimensionalen polynomialen} \\ \text{Darstellungen von } GL(n; \mathbb{C}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$$

des Darstellungsrings der polynomialen Darstellungen mit dem Ring der symmetrischen Polynome. Die irreduziblen Darstellungen entsprechen hierbei den sogenannten **Schur-Polynomen**. Gegeben natürliche Zahlen  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  gehört genauer zur irreduziblen Darstellung  $L(\lambda)$  mit höchstem Gewicht  $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$  das Schur-Polynom  $S_\lambda$  mit der kombinatorischen Definition

$$S_\lambda = \det(X_j^{\lambda_i + n - i}) / \det(X_j^{n - i})$$

In der Tat folgt das aus der Weyl'schen Charakterformel und der Erkenntnis, daß wir eine Identität haben der Gestalt

$$X_1^{n-1} X_2^{n-2} \dots X_{n-2}^2 X_{n-1}^1 X_n^0 = e^{\rho + \kappa}$$

mit  $\kappa$  einem Gewicht, das invariant ist unter der Weylgruppe. Etwas Vorsicht ist jedoch geboten, denn weder  $\rho$  noch  $\kappa$  gehören zu  $\mathfrak{X}(T)$ .

**Proposition\* 1.6.36 (Gewichte endlichdimensionaler Darstellungen).** *Die Menge der Gewichte einer einfachen endlichdimensionalen Darstellung einer komplexen reductiven Liealgebra ist der Schnitt des um das höchste Gewicht verschobenen Wurzelgitters mit der konvexen Hülle der Bahn des höchsten Gewichts unter der Weylgruppe, in Formeln*

$$P(L(\lambda)) = \text{Conv}(W\lambda) \cap (\lambda + \langle R \rangle)$$

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß beide Seiten mit dem Abschluß  $\bar{C}^+$  der dominanten Weylkammer denselben Schnitt haben. Aber sei  $K^-$  der von den negativen Wurzeln erzeugte Kegel. Man sieht leicht

$$\text{Conv}(W\lambda) \subset \lambda + K^-$$

und wir behaupten zunächst, daß hier beide Seiten denselben Schnitt mit  $\bar{C}^+$  haben. Man kann ja wohl zeigen, daß für zwei endlich erzeugte Kegel, die durch eine Hyperebene getrennt werden in dem Sinne, daß sie abgesehen vom Ursprung ganz im einen beziehungsweise im anderen offenen Halbraum liegen, der Schnitt des Einen mit dem verschobenen Anderen die konvexe Hülle der Menge aller einelementigen Schnitte von Facetten unserer beiden Kegel ist. Unser Schnitt  $\bar{C}^+ \cap \lambda + K^-$  hat nun als extreme Punkte gerade die Punkte, die man erhält, wenn man  $\lambda$  senkrecht bezüglich eines unter der Weylgruppe invarianten Skalarprodukts auf den Träger einer Facette von  $\bar{C}^+$  projiziert. Diese Punkte liegen aber auch in  $\text{Conv}(W\lambda)$  als die Schwerpunkte der Bahnen  $W_F \lambda$  für  $W_F$  die Isotropiegruppe der fraglichen Facette. Damit folgt schon mal

$$\text{Conv}(W\lambda) \cap \bar{C}^+ = (\lambda + K^-) \cap \bar{C}^+$$

Schneiden wir aber die rechte Seite mit dem um  $\lambda$  verschobenen Wurzelgitter  $\lambda + \langle R \rangle$ , so sollte  $\mathfrak{sl}_2$ -Theorie zeigen, daß wir gerade  $P(L(\lambda)) \cap \bar{C}^+$  erhalten.  $\square$



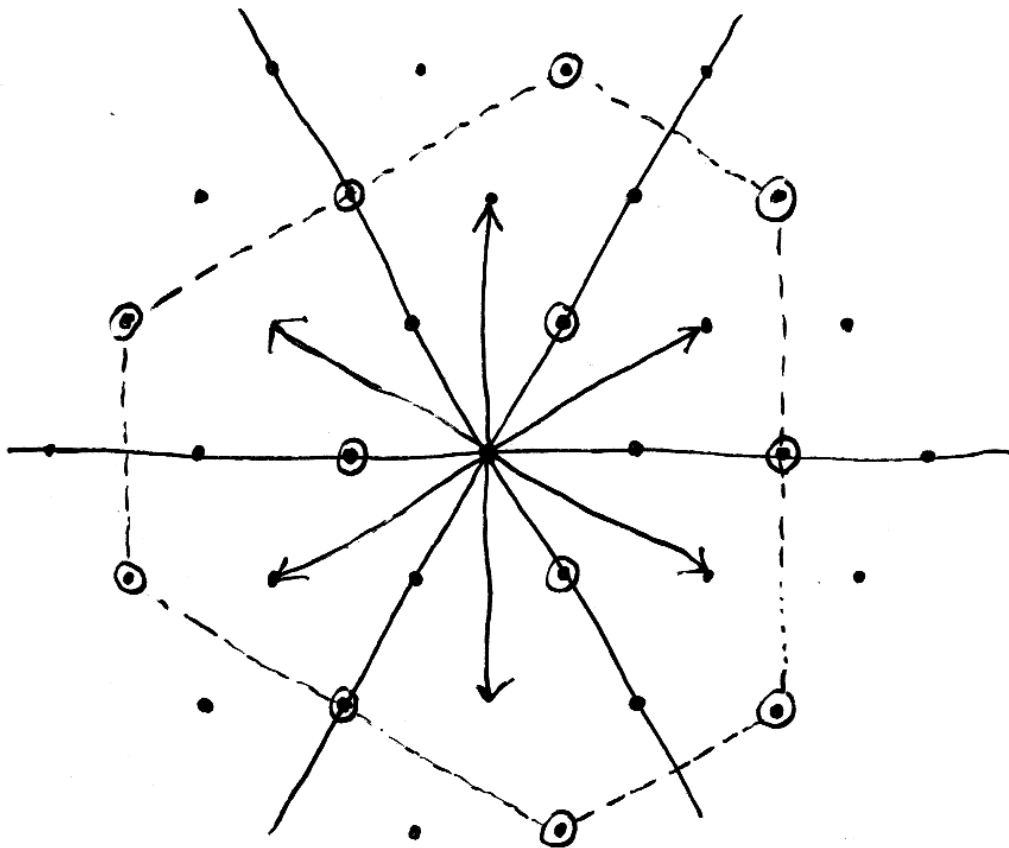


Illustration von Proposition 1.6.36 über die Gewichte einer irreduziblen Darstellung. Im Bild stellen die fetten Punkte ganze Gewichte dar und die eingekreisten fetten Punkte die Gewichte einer speziellen irreduziblen Darstellung. Über die Dimension der zugehörigen Gewichtsräume wird hier keine Aussage gemacht, nur daß das eben genau die Gewichte mit von Null verschiedenen Gewichtsräumen in unserer Darstellung sind.

Ergänzung 1.6.37. Jetzt betrachten wir die Menge

$$D := \left\{ \rho - \sum_{\alpha \in R^+} t_\alpha \alpha \mid 0 \leq t_\alpha \leq 1 \right\}$$

Sie kann auch beschrieben werden als die konvexe Hülle  $D = \text{Conv}(W\rho)$ , denn beide Seiten dieser Gleichung sind invariant unter der Weylgruppe und haben denselben Schnitt mit dem Abschluß der dominanten Weylkammer. Nun zeigen wir für alle Gewichte  $\mu, \nu$  aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer die Inklusion

$$\mu + \text{Conv}(W\nu) \subset \text{Conv}(W(\mu + \nu))$$

Um das zu sehen, brauchen wir ja nur  $\mu + W\nu \subset \text{Conv}(W(\mu + \nu))$  zu zeigen. Wir behaupten sogar allgemeiner  $W\mu + W\nu \subset \text{Conv}(W(\mu + \nu))$ . Das hinwiederum scheint mir klar, da man die Punkte aus  $W\nu$  beziehungsweise  $W\mu$  alle durch geeignete Spiegelfolgen „immer über eine Wand“ kriegen kann und das Ende einer solchen Spiegelfolge für einen Punkt aus  $\mu + W\nu$  jeweils in der konvexen Hülle der entsprechenden Spiegelfolge aus  $W\mu$  liegen muß. Daraus folgt, wenn wir  $\mu = \lambda - m\rho$  und  $\nu = m\rho$  nehmen, was mich Steen gefragt hatte: Gegeben  $\lambda$  ganz und dominant und  $m$  das Minimum der Werte aller positiven Kowurzeln darauf gehören die  $\lambda - \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$  für  $0 \leq n_\alpha \leq m$  alle zur Menge der Gewichte von  $L(\lambda)$ .

## Übungen

Übung 1.6.38. Man zeige mithilfe einer Streckung der Nennerformel 1.6.30 für eine beliebige halbeinfache Liealgebra die Formel

$$\text{ch } L(n\rho) = e^{n\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + \dots + e^{-n\alpha})$$

Übung 1.6.39. Man folgere aus der Dimensionsformel, daß die symmetrischen Potenzen  $S^r \mathbb{C}^{n+1}$  stets irreduzible Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$  sind. Sie haben im übrigen das höchste Gewicht  $r\varpi_1$ . Wer Rechenzeit sparen will, sollte sich zumindest den Fall  $n = 2$  überlegen. Alternativ und vielleicht einfacher kann man die Irreduzibilität auch wie in [?] ?? begründen.

Übung 1.6.40. Ich sollte wohl einmal als Übung die fundamentale Darstellung der Dimension 27 der Liealgebra vom Typ  $E_6$  diskutieren lassen.

Übung 1.6.41. Wir erinnern aus 1.1.16, daß die fundamentalen Gewichte zu  $G_2$  die höchste Wurzel und die höchste kurze Wurzel sind. Die Darstellung zur höchsten Wurzel ist natürlich die adjungierte Darstellung. Man zeige, daß die Darstellungen zur höchsten kurzen Wurzel eine irreduzible Darstellung  $L$  der Dimension

7 ist mit den kurzen Wurzeln sowie der Null als Gewichten und eindimensionalen Gewichtsräumen. Gegeben ein Gewicht  $\lambda$  und eine Wurzel  $\alpha$  mit  $L_\lambda \neq 0 \neq L_{\lambda+\alpha}$  zeige man  $x_\alpha : L_\lambda \xrightarrow{\sim} L_{\lambda+\alpha}$  für jeden von Null verschiedenen Wurzelvektor  $x_\alpha$ . Jede von Null verschiedene invariante Bilinearform auf  $L$  ist symmetrisch und liefert so eine Einbettung unserer Liealgebra vom Typ  $G_2$  in die  $\mathfrak{so}(7)$ .

*Übung 1.6.42.* Betrachtet man die Abbildung  $\chi : \mathbb{Z}[\mathfrak{X}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$ , die jedem  $e^\lambda$  den Ausdruck  $\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho)}$  zuordnet, so gilt  $\chi(BA) = B\chi(A)$  für alle  $B \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$  und  $A \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$ . Das ist recht nahe an der Tensoridentität und der Steinberg'schen Formel, man sieht es auch durch explizite Rechnung.

## 1.7 Die Tensoridentität\*

**Proposition 1.7.1 (Die Tensoridentität und ihre Verwandten).** Sei  $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g}$  ein Homomorphismus von Liealgebren über einem Körper  $k$ . Gegeben Darstellungen  $M \in \mathfrak{b}\text{-Mod}$  und  $E \in \mathfrak{g}\text{-Mod}$  haben wir kanonische Isomorphismen von  $\mathfrak{g}\text{-Moduln}$

$$\begin{aligned} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(E \otimes_k M) &\xrightarrow{\sim} E \otimes_k (\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \\ \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \text{Hom}_k(E, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(E, \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \\ \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \text{Hom}_k(M, E) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M, E) \end{aligned}$$

*Ergänzung 1.7.2.* Eine Variante dieser Aussagen für Mengen mit Gruppenoperation wird in [TF] 4.8.24 ausformuliert.

*Beweis.* Ganz allgemein ist nach [TF] 4.8.20 der Adjungierte einer Verknüpfung von Funktoren die Verknüpfung der Adjungierten, wenn sie existieren. Diese Erkenntnis gilt es nun anzuwenden auf die kommutativen Diagramme von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{E \otimes} & \mathfrak{g}\text{-Mod} & & \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(E, \cdot)} & \mathfrak{g}\text{-Mod} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{E \otimes} & \mathfrak{b}\text{-Mod} & & \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(E, \cdot)} & \mathfrak{b}\text{-Mod} \\ & & & & \mathfrak{g}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(\cdot, E)} & \mathfrak{g}\text{-Mod}^\circ \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathfrak{b}\text{-Mod} & \xrightarrow{\text{Hom}(\cdot, E)} & \mathfrak{b}\text{-Mod}^\circ \end{array}$$

mit den Restriktionen als Vertikalen und der Adjunktion  $(E \otimes, \text{Hom}(E, \cdot))$  bzw. der Tatsache, daß der Rechtsadjungierte der Horizontalen  $\text{Hom}(\cdot, E)$  im Diagramm ganz rechts wieder  $\text{Hom}(\cdot, E)$  ist, nur diesmal aufgefaßt als Funktor in der Gegenrichtung.  $\square$

1.7.3. Nehmen wir im letzten unserer Isomorphismen speziell  $E = k$ , so ergibt sich ein kanonischer Isomorphismus  $(\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} N)^* \xrightarrow{\sim} \text{ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(N^*)$ .

## Übungen

*Übung 1.7.4.* Der erste unserer drei Isomorphismen wird unter der Identifikation  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} M$  auf Elementen gegeben durch die Vorschrift  $u \otimes (e \otimes m) \mapsto u(e \otimes (1 \otimes m))$ .

*Übung 1.7.5.* Gegeben eine weitere Darstellung  $F \in \mathfrak{g}\text{-Mod}$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(E \otimes F \otimes M) & \longrightarrow & (E \otimes F) \otimes \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \otimes \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(F \otimes M) & \longrightarrow & E \otimes (F \otimes \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} M) \end{array}$$

## 1.8 Quellen

Proposition 1.1.5 habe ich in [[Kac90, 11.3.a]] gelernt.

## 2 Infinitesimale zentrale Charaktere

### 2.1 Motivation

2.1.1 (**Bezug zu Darstellungen von Gruppen**). Die Frage nach den Multiplizitäten  $[\Delta(\lambda) : L(\nu)]$  der einfachen Subquotienten in Jordan-Hölder-Reihen von Vermamoduln hat sich als ebenso schwierig wie fruchtbar erwiesen. Sie ist auch für Darstellungen von Gruppen relevant. Zum Beispiel werden wir in ?? zeigen, daß für die Wirkung der topologischen Gruppe  $SL(n; \mathbb{C})$  auf der komplexen Fahnenmannigfaltigkeit  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$  die partiell geordnete Menge der  $SL(n; \mathbb{C})$ -invarianten unter der Norm der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossenen Untervektorräume des Raums  $\mathcal{C}(\mathcal{F}) := \text{Top}(\mathcal{F}, \mathbb{C})$  der stetigen komplexwertigen Funktionen  $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$  isomorph ist zur Opponierten der partiell geordneten Menge der Untermodule des Vermamoduls  $\Delta(0)$  der halbeinfachen Liealgebra  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ . Allgemeiner werden wir zeigen, daß die anderen Vermamoduln in einer analogen Beziehung zu den Räumen stetiger Schnitte anderer äquivarianter komplexer Geradenbündel auf der Fahnenmannigfaltigkeit stehen. Um ein etwas leichter zu erreichendes motivierendes Ziel vor Augen zu haben, formulieren wir bereits hier ein erstes Hauptresultat.

**Satz 2.1.2 (Einfache Vermamoduln).** *Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System von positiven Wurzeln und  $\cdot$ . Genau dann ist der Vermamodul  $\Delta(\lambda)$  einfach, wenn gilt  $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \dots\} \forall \alpha \in R^+$  mit  $\rho$  der Halbsumme der positiven Wurzeln.*

2.1.3. Um das einzusehen, müssen wir zunächst das Zentrum der Einhüllenden Algebra verstehen. Daß unsere Bedingungen hinreichend sind, wird dann zu Ende des Abschnitts in 2.6.10 bewiesen. Daß sie auch notwendig sind, wird erst in 3.5.2 klar werden.

### 2.2 Das Zentrum der universellen Einhüllenden

**Definition 2.2.1.** Das **Zentrum**  $Z(R)$  eines Rings  $R$  ist definiert als der Teilring derjenigen Elemente, die mit allen anderen Elementen unseres Rings kommutieren, in Formeln

$$Z(R) := \{z \in R \mid zr = rz \forall r \in R\}$$

2.2.2. Gegeben eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  bezeichne  $Z(\mathfrak{g}) := Z(U(\mathfrak{g}))$  das Zentrum ihrer Einhüllenden  $U(\mathfrak{g})$ . Im Fall einer halbeinfachen komplexen Liealgebra hatten wir in 1.3.38 bereits den Casimiroperator  $C \in Z(\mathfrak{g})$  kennengelernt. Im folgenden wollen wir uns einen Überblick über das ganze Zentrum verschaffen.

2.2.3. Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. Nach 1.6.21 operiert jedes Element des Zentrums  $Z := Z(\mathfrak{g})$  der Einhüllenden auf jedem **Vermamodul** durch einen Skalar. Wir vereinbaren die Bezeichnung  $\langle z, \lambda \rangle$  für den komplexen Skalar, mit dem  $z \in Z$  auf dem Verma-Modul  $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, R^+)$  operiert, in Formeln  $zv = \langle z, \lambda \rangle v$  für alle  $v \in \Delta(\lambda)$ . Wir erhalten so einen  $\mathbb{C}$ -linearen Ringhomomorphismus von  $Z$  in den Ring aller  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf dem Dualraum der Cartan'schen

$$\begin{aligned} \xi = \xi_{R^+} : Z &\rightarrow \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{C}) \\ z &\mapsto \langle z, \cdot \rangle \end{aligned}$$

**Satz 2.2.4 (Harish-Chandra-Isomorphismus).** *Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. So liefert der eben erklärte Homomorphismus  $\xi$  einen Isomorphismus zwischen dem Zentrum  $Z$  der Einhüllenden von  $\mathfrak{g}$  und dem Ring der unter der dot-Operation der Weylgruppe invarianten polynomialen Funktionen auf  $\mathfrak{h}^*$ , in Formeln*

$$\xi : Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W \cdot)}$$

2.2.5. Für einen komplexen Vektorraum  $V$  bezeichnen wir ganz allgemein mit  $\mathcal{O}(V) \subset \text{Ens}(V, \mathbb{C})$  diejenige Unterringalgebra der Algebra aller  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf  $V$ , die von den linearen Funktionen erzeugt wird, und nennen ihre Elemente die **polynomialen Funktionen auf  $V$** . Die universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra  $S(V^*)$  liefert einen Homomorphismus  $S(V^*) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ , der in unserem Fall und allgemeiner im Fall eines beliebigen unendlichen Grundkörpers ein Isomorphismus ist.

2.2.6. Ist  $f : V \rightarrow V'$  eine lineare oder affine Abbildung, so liefert das „Vorschalten von  $f$ “ einen Homomorphismus in die Gegenrichtung  $f^\sharp : \mathcal{O}(V') \rightarrow \mathcal{O}(V)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ . Operiert insbesondere eine Gruppe  $G$  auf  $V$  durch lineare oder affine Transformationen, so operiert  $G$  auch auf  $\mathcal{O}(V)$ . Die unter  $G$  invarianten polynomialen Funktionen auf  $V$  heißen dann die  **$G$ -Invarianten** und werden  $\mathcal{O}(V)^G$  notiert.

2.2.7. Natürlich induziert die Abbildung  $(-\rho) : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  einen Isomorphismus zwischen den Invarianten für die dot-Operation der Weylgruppe und den Invarianten für die lineare Operation

$$(-\rho)^\sharp : \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W \cdot)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$$

Man zeigt unschwer, daß die Verknüpfung  $(-\rho)^\sharp \circ \xi : Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$  nicht mehr von der Wahl eines Systems positiver Wurzeln abhängt. Meist nennt man diese Verknüpfung dann den **Harish-Chandra-Isomorphismus**.

2.2.8. Ich ziehe eine andere Sichtweise vor. Gegeben eine halbeinfache komplexe Liealgebra  $\mathfrak{g}$  heißt die Einskomponente  $G$  ihrer Automorphismengruppe die **adjungierte Gruppe** unserer halbeinfachen komplexen Liealgebra. Nun wissen wir aus ?? und ??, daß die adjungierte Gruppe je zwei Cartan'sche ineinander konjugiert, und wir wissen aus ?? oder besser 2.3.6, daß sie sogar je zwei Paare  $(\mathfrak{h}, R^+)$  bestehend aus einer Cartan'schen und einem System positiver Wurzeln in ihrem Dualraum ineinander konjugiert. So ein Paar ist damit eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen es die **absolute Cartan'sche** und notieren es

$$(\mathfrak{h}_{\text{abs}}, R_{\text{abs}}^+)$$

Der Weylvektor ist dann ein wohlbestimmtes Element  $\rho_{\text{abs}} \in \mathfrak{h}_{\text{abs}}^*$  und der Harish-Chandra-Homomorphismus ein wohlbestimmter Isomorphismus

$$Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}_{\text{abs}}^*)^{(W \cdot)}$$

*Beweis.* Zunächst einmal zeigen wir, daß  $\xi(Z)$  wirklich aus polynomialen Funktionen auf  $\mathfrak{h}^*$  besteht; danach, daß  $\xi$  sogar in den  $(W \cdot)$ -invarianten polynomialen Funktionen landet; und zum Schluß, daß die damit erst recht eigentlich etablierte Abbildung aus unserem Satz injektiv und surjektiv ist. Bezeichne

$$\pi_\lambda : \Delta(\lambda) \rightarrow \Delta(\lambda)_\lambda$$

diejenige Projektion eines Verma-Moduls auf seinen höchsten Gewichtsraum, die alle anderen Gewichtsräume  $\Delta(\lambda)_\mu$  annulliert. Wir betrachten die Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ , wobei  $\mathfrak{n}$  bzw.  $\mathfrak{n}^+$  die direkten Summen der Wurzelräume zu den negativen bzw. positiven Wurzeln meint. Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt liefert dann für die Einhüllende  $U := U(\mathfrak{g})$  eine Vektorraumzerlegung  $U = U(\mathfrak{h}) \oplus \langle \mathfrak{n}U + U\mathfrak{n}^+ \rangle$  und wir notieren

$$\eta : U \twoheadrightarrow U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$$

die Projektion längs dieser Zerlegung. Diese Projektion ist kein Algebrenhomomorphismus, sondern nur eine lineare Abbildung. Für die Operation auf dem kanonischen Erzeuger  $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$  eines Verma-Moduls gilt jedoch offensichtlich  $\pi_\lambda(uv_\lambda) = \eta(u)v_\lambda$ . Für  $z \in Z$  ist sogar die Projektion  $\pi_\lambda$  überflüssig und wir haben

$$zv_\lambda = \eta(z)v_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

Nun ist hoffentlich klar, daß für  $u \in U(\mathfrak{h})$  gilt  $uv_\lambda = \delta_\lambda(c(u))v_\lambda$  für  $c$  die Komposition  $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*) \subset \text{Ens}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{C})$  und  $\delta_\lambda$  das Auswerten bei  $\lambda$ . Wir finden also  $\langle z, \lambda \rangle = \delta_\lambda(c(\eta(z)))$  für alle  $\lambda$  alias  $\xi(z) = c(\eta(z))$ . Also ist  $\xi(z)$  schon einmal polynomial für alle  $z \in Z$ . Als nächstes zeigen wir, daß  $\xi$  sogar in

den  $(W\cdot)$ -Invarianten landet. Wir wissen nach [KAG] 1.1.21, daß zwei Polynomfunktionen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, die auf der von einer Basis erzeugten Untergruppe übereinstimmen, schon gleich sind. Es reicht also für alle  $z \in Z$  und  $w \in W$  zu zeigen, daß  $\xi(z)$  und  $\xi(z) \circ (w\cdot)$  auf dem Gitter  $X$  der ganzen Gewichte dieselben Werte annehmen. Da die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe erzeugen, müssen wir nur zeigen, daß gilt

$$\langle z, \lambda \rangle = \langle z, s_\alpha \cdot \lambda \rangle \quad \forall \alpha \in \Pi, \lambda \in X$$

Wir kennen jedoch schon aus 1.4.13 für alle  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit  $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$  eine Einbettung  $\Delta(s_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$  oder einfacher einen von Null verschiedenen Homomorphismus. Da das Zentrum der universellen Einhüllenden dann auf diesen beiden Moduln durch denselben Skalar operieren muß, ergibt sich die Behauptung. Wir wissen damit, daß unser  $\xi$  tatsächlich in den  $(W\cdot)$ -invarianten Polynomfunktionen landet. Daß  $\xi$  einen Isomorphismus des Zentrums mit diesem Ring induziert, wird erst nach einigen Vorbereitungen in den folgenden Abschnitten im Anschluß an 2.4.4 gezeigt werden.  $\square$

*Ergänzung 2.2.9.* Unter dem Harish-Chandra-Isomorphismus  $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^W$  entspricht dem durch den prinzipalen Antiautomorphismus gegebenen Automorphismus  $z \mapsto z^\top$  von  $Z$  die durch die Multiplikation mit  $(-1) : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  induzierte Abbildung links. Um das zu sehen geht man aus von der Erkenntnis, daß für ganze dominante Gewichte  $\lambda \in X^+$  gilt  $L(\lambda)^* \cong L(-w_0\lambda)$ , und folgert

$$\langle z^\top, \lambda \rangle = \langle z, -w_0\lambda \rangle = \langle z, w_0 \cdot (-w_0\lambda) \rangle = \langle z, -\lambda - 2\rho \rangle$$

erst für alle  $\lambda \in X^+$ , und da diese Zariski-dicht liegen dann für alle  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Unter dem nichtnormalisierten Isomorphismus  $Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W\cdot)}$  entspricht der prinzipale Antiautomorphismus links also dem Automorphismus rechts, der von der Punktspiegelung  $\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  mit Zentrum  $-\rho$  erzeugt wird. Identifiziert man die Punkte aus dem Abschluß der dominanten Weylkammer mit gewissen maximalen Idealen des Zentrums, so ist unser prinzipaler Antiautomorphismus verträglich mit der Involution  $\lambda \mapsto -w_0\lambda$  dieser Kammer, sowohl im verschobenen als auch im unverschobenen Fall.

## 2.3 Der Chevalley-Isomorphismus

**Satz 2.3.1 (Chevalley-Isomorphismus).** *Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei  $G \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$  die adjungierte Gruppe nach ???. So induziert die Restriktion von Funktionen  $\mathcal{O}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})$  einen Isomorphismus zwischen den  $G$ -Invarianten in  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$  und den Weylgruppeninvarianten in  $\mathcal{O}(\mathfrak{h})$ , in Formeln*

$$\text{Res} : \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$$



*Ergänzung 2.3.2.* Diese Aussage ist ein algebraischer Verwandter unseres Homöomorphismus  $T/W \xrightarrow{\sim} K/(\text{int } K)$  für eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe  $(K, T)$  aus [ML] 5.9.12. In der Sprache der geometrischen Invariantentheorie [KAG] 7.5.9 besagt unser Satz, daß die Einbettung  $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  einen Isomorphismus  $\mathfrak{h}/W \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} // G$  zwischen den algebraischen Quotienten induziert, von denen der Erste sogar ein geometrischer Quotient ist.

*Beispiel 2.3.3.* Wir besprechen den Fall  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$  und zeigen dazu eine analoge Aussage für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$  mit  $\mathfrak{h}$  dem Unterraum der Diagonalmatrizen, die zwar streng genommen nicht durch den vorstehenden Satz abgedeckt wird, deren Beweis mir jedoch besonders instruktiv scheint. Unser Invariantenring  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  ist in diesem Fall die Menge aller Polynome in den Matrixeinträgen, die konstant sind auf allen Konjugationsklassen. Ist  $x = x_s + x_n$  die (konkrete) Jordan-Zerlegung von  $x \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ , so gehört  $x_s + \varepsilon x_n$  für alle  $\varepsilon \neq 0$  zur selben Konjugationsklasse wie  $x$ . Für  $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  ist also  $\varepsilon \mapsto f(x_s + \varepsilon x_n)$  eine polynomiale Funktion in  $\varepsilon$ , die konstant ist außerhalb von  $\varepsilon = 0$ . Es folgt sofort  $f(x) = f(x_s)$ , und da jede halbeinfache Konjugationsklasse die Menge  $\mathfrak{h}$  der Diagonalmatrizen trifft, definiert die Restriktion eine Injektion  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})$ . Nun sind je zwei Diagonalmatrizen konjugiert, deren Einträge sich nur in ihrer Reihenfolge unterscheiden. Folglich landet unsere Injektion in den symmetrischen Polynomen in den Matrixeinträgen, als da heißt in  $\mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$ . Weiter wissen wir aber, daß die symmetrischen Polynome ihrerseits Polynome sind in den elementarsymmetrischen Polynomen, und für diese finden wir als Urbilder in  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  die Funktionen, die jeder Matrix einen geeigneten Koeffizienten ihres charakteristischen Polynoms zuordnen. Also ist unsere Restriktion für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$  und  $\mathfrak{h}$  die Diagonalmatrizen eine Bijektion  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$ . Dasselbe folgt leicht für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ .

*Beispiel 2.3.4.* Im Fall der Gruppe  $G = \text{SO}(2n; \mathbb{C})$  besteht die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  aus allen schiefsymmetrischen Matrizen und eine interessante invariante polynomiale Funktion aus  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  ist die Pfaff'sche Determinante [LA2] 2.5.8.

2.3.5. Der Beweis wird in eine Folge von Teilresultaten aufgebrochen. Lemma 2.3.6 zeigt, daß unsere Restriktion die  $G$ -Invarianten  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  wirklich in die  $W$ -Invarianten schickt. Bemerkung 2.3.7 zeigt, daß die Einschränkung der Restriktionsabbildung auf  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  injektiv ist. Im Anschluß daran zeigen wir dann noch die Surjektivität, indem wir hinreichend viele  $G$ -invariante polynomiale Funktionen auf  $\mathfrak{g}$  explizit angeben.

**Lemma 2.3.6 (Realisierung der Weylgruppe in der adjungierten Gruppe).** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Lie-Algebra. Ist  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche Unteralgebra und  $w \in W$  ein Element der Weylgruppe, so gibt es ein Element der adjungierten Gruppe  $\dot{w} \in G$  mit  $\dot{w}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$  und

$$\dot{w} = w : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$$

*Beweis.* Es reicht, ein mögliches  $\dot{s}_\alpha$  für jede Wurzel  $\alpha \in R$  anzugeben. Dazu wählen wir  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $[x_\alpha, y_\alpha] = \alpha^\vee$  und versuchen unser Glück mit

$$\dot{s}_\alpha = \exp(\operatorname{ad} x_\alpha) \exp(\operatorname{ad}(-y_\alpha)) \exp(\operatorname{ad} x_\alpha)$$

Für  $h \in \ker \alpha \subset \mathfrak{h}$  gilt offensichtlich  $[x_\alpha, h] = 0 = [y_\alpha, h]$ , folglich halten  $\exp(\operatorname{ad} x_\alpha), \exp(\operatorname{ad} y_\alpha)$  und schließlich auch  $\dot{s}_\alpha$  jedes  $h \in \ker \alpha$  fest. Dann berechnen wir noch mit Gewalt

$$\begin{aligned} \dot{s}_\alpha(\alpha^\vee) &= \exp(\operatorname{ad} x_\alpha) \exp(\operatorname{ad}(-y_\alpha))(\alpha^\vee - 2x_\alpha) \\ &= \exp(\operatorname{ad} x_\alpha)(\alpha^\vee - 2x_\alpha - 2y_\alpha - 2\alpha^\vee + 2y_\alpha) \\ &= -\alpha^\vee - 2x_\alpha + 2x_\alpha \\ &= -\alpha^\vee \end{aligned}$$

und das Lemma ist gezeigt. □

2.3.7. Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei  $G \subset \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$  die adjungierte Gruppe. So liegt  $G\mathfrak{h}$  Zariski-dicht in  $\mathfrak{g}$ . Das haben wir bereits beim Beweis der Konjugiertheit von Cartan'schen ?? gezeigt. Will man das differentielle Dominanzkriterium ?? hier vermeiden, kann man auch einfacher argumentieren mit der Erkenntnis, daß jede nichtleere in der metrischen Topologie des  $\mathbb{C}^n$  offene Teilmenge bereits Zariski-dicht liegt.

*Beweis der Surjektivität in 2.3.1.* Dazu müssen wir genügend  $G$ -invariante polynomiale Funktionen auf  $\mathfrak{g}$  konstruieren. Ist  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \operatorname{End} V$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $\mathfrak{g}$  und  $p \in \mathbb{N}$ , so behaupten wir, daß  $x \mapsto \operatorname{tr}(\rho(x)^p)$  zu  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  gehört. In der Tat kommutiert für alle  $y \in \mathfrak{g}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes V & \longrightarrow & V \\ (\operatorname{ad} y) \otimes \operatorname{id} + \operatorname{id} \otimes \rho(y) \downarrow & & \downarrow \rho(y) \\ \mathfrak{g} \otimes V & \longrightarrow & V \end{array}$$

Wenn man  $y$  als nilpotent annimmt, von beiden vertikalen Abbildungen  $\exp$  nimmt und das entstehende kommutative Diagramm auf  $x \otimes v$  auswertet, folgt

$$\rho((\exp(\operatorname{ad} y))(x)) (\exp \rho(y)) v = (\exp \rho(y)) (\rho(x)v)$$

und mit der Abkürzung  $\exp(\operatorname{ad} y) = g$  und  $\exp \rho(y) = b$  haben wir  $\rho(gx)b = b\rho(x)$  in  $\operatorname{End} V$ , d.h.  $\rho(x)$  ist konjugiert zu  $\rho(gx)$  für alle  $g \in G$ . Wir erhalten also als invariante Funktionen schon mal die Funktionen  $C(V, p) \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$  gegeben durch  $C(V, p)(x) = \operatorname{tr}(\rho_V(x)^p)$ . Nun beachte man, daß  $\mathcal{O}(\mathfrak{h})$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

von allen Potenzen  $\lambda^n$  mit  $\lambda \in \mathfrak{X}$  ein ganzes Gewicht erzeugt wird. Betrachten wir also die „Symmetrisierung“

$$\begin{aligned} \text{sym} : \mathcal{O}(\mathfrak{h}) &\rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W \\ f &\mapsto \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} wf \end{aligned}$$

so erzeugen die  $\text{sym}(\lambda^p)$  für  $\lambda \in \mathfrak{X}^+$  schon  $\mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Es ist aber klar, daß die Restriktionen auf  $\mathfrak{h}$  der bereits konstruierten Invarianten die Gestalt

$$C(L(\lambda), p) = \sum_{\mu \in \mathfrak{X}^+, \mu \leq \lambda} a_\mu \text{sym}(\mu^p)$$

haben mit  $a_\lambda \neq 0$ , genauer gilt für  $h \in \mathfrak{h}$  offensichtlich

$$C(L(\lambda), p)(h) = \sum_{\nu \in \mathfrak{X}} (\dim L(\lambda)_\nu) \nu(h)^p$$

Eine kurze Induktion zeigt dann, daß unsere Restriktion in der Tat eine Surjektion  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h})^W$  liefert.  $\square$

## 2.4 Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus

2.4.1. Ist  $V$  ein Vektorraum und  $x : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, so gibt es offensichtlich genau eine Fortsetzung  $\hat{x} : TV \rightarrow TV$  von  $x$  zu einer Derivation auf der Tensoralgebra, und diese induziert eine Derivation  $\hat{x} : SV \rightarrow SV$  auf der symmetrischen Algebra. Ist  $V$  endlichdimensional und der Grundkörper algebraisch abgeschlossen, so haben wir einen natürlichen Isomorphismus  $SV \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V^*)$ , unter dem unser  $\hat{x}$  dem Anwenden des durch  $y \mapsto (y \circ x)$  auf  $V^*$  gegebenen Vektorfelds entspricht.

2.4.2. Ist  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra und  $x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  eine Derivation, so induziert unsere Derivation  $\hat{x} : T\mathfrak{g} \rightarrow T\mathfrak{g}$  aus 2.4.1 eine Derivation  $\hat{x} : U\mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g}$  auf der einhüllenden Algebra. Ist speziell  $x = \text{ad } y$  für  $y \in \mathfrak{g}$ , so finden wir

$$\hat{x}(u) = yu - uy$$

In der Tat sind beide Seiten Derivationen von  $U\mathfrak{g}$ , die auf allen  $u \in \mathfrak{g}$  übereinstimmen. Folglich müssen sie gleich sein.

2.4.3. Ist  $\mathfrak{g}$  eine komplexe Lie-Algebra und  $V$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , so operiert  $\mathfrak{g}$  auf den Tensorpotenzen  $V^{\otimes n}$  und auch auf der ganzen Tensoralgebra  $TV$ . Diese Operation geschieht offensichtlich durch Derivationen, d.h. wir haben einen Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} TV$$

Weiter ist die symmetrische Algebra  $SV$  eine Quotientendarstellung von  $TV$  und man sieht ohne Schwierigkeiten, daß wir so auch eine Operation durch Derivationen  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} SV$  erhalten.

2.4.4. Sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe Lie-Algebra. Die adjungierte Darstellung führt nach unseren allgemeinen Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts zu einer  $\mathfrak{g}$ -Operation durch Derivationen auf der Tensoralgebra und auf der symmetrischen Algebra und auch zu einer  $\mathfrak{g}$ -Operation durch Derivationen auf der universellen Einhüllenden Algebra

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} T\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} S\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} U\mathfrak{g}\end{aligned}$$

Auf der universellen Einhüllenden  $U := U\mathfrak{g}$  notieren wir  $\text{ad } x$  die Derivation zu  $x$  und prüfen leicht  $(\text{ad } x)(u) = xu - ux$ , da beide Seiten Derivationen der Einhüllenden sind, die auf  $u \in \mathfrak{g} \subset U$  denselben Effekt haben. Insbesondere können wir das Zentrum der Einhüllenden auch beschreiben als die  $\mathfrak{g}$ -Invarianten unter der adjungierten Operation, in Formeln

$$Z = U^{\mathfrak{g}}$$

2.4.5. Ist  $V = \mathfrak{g}^*$  die koadjungierte Darstellung und ist unsere Lie-Algebra endlichdimensional, so erhalten wir speziell eine Operation durch Derivationen  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ . Geometrisch können wir diese Operation verstehen, indem wir ein  $x \in \mathfrak{g}$  auffassen als das algebraische Vektorfeld  $y \mapsto [x, y]$  auf dem Raum  $\mathfrak{g}$ . Ist  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra einer Liegruppe  $G$ , so wird unsere Operation induziert von der adjungierten Operation von  $G$  auf  $\mathfrak{g}$ , die eine Operation von  $G$  auf  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$  liefert, die dann differenziert werden kann.

**Proposition 2.4.6.** *Ist  $\mathfrak{g}$  eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und  $G$  ihre adjungierte Gruppe, so haben wir  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ .*

*Beweis mit Lie-Theorie.* Für jedes  $r \geq 0$  bilden die polynomialen Funktionen vom Grad  $\leq r$  eine stetige Darstellung der adjungierten Gruppe  $G$  und die Operation von  $\mathfrak{g}$  ist offensichtlich die zugehörige abgeleitete Operation der Liealgebra. Die Proposition folgt damit aus [ML] 2.2.13. Im Rahmen algebraischer Gruppen kann man auch mit [?] ?? argumentieren.  $\square$

*Beweis.* Wir wählen Bezeichnungen für unsere beiden Operationen und notieren sie

$$\begin{aligned}\rho : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \\ \psi : G &\rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})\end{aligned}$$

Jetzt behaupten wir für  $y \in \mathfrak{g}$  nilpotent in  $\text{Aut}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathfrak{g})$  die Gleichung

$$\exp \rho(y) = \psi(\exp(\text{ad } y))$$

Da beiden Seiten Automorphismen von  $\mathbb{C}$ -Ringalgebren sind, reicht es zu zeigen, daß ihre Einschränkungen auf den Raum  $\mathfrak{g}^* \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})$  der linearen Funktionen übereinstimmen. Zu zeigen ist also nur

$$\exp(\operatorname{ad}^* y) = (\exp(\operatorname{ad} y)^\top)^{-1}$$

und das folgt sofort aus  $\operatorname{ad}^* y = (-\operatorname{ad} y)^\top$ . Aus unserer ersten Gleichung erhalten schon einmal  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^\mathfrak{g} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})^G$ . Da andererseits die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von ihren nilpotenten Elementen erzeugt wird, kann man  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$  auch beschreiben als die Menge aller  $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$  mit  $\rho(y)f = 0$  für alle nilpotenten  $y \in \mathfrak{g}$ . Mit dem anschließenden Lemma 2.4.7 folgt so umgekehrt auch  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})^G \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Lemma 2.4.7.** *Sei  $x : V \rightarrow V$  ein lokal nilpotenter Endomorphismus eines  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums. Bezeichne  $\exp(\mathbb{Q}x) \subset \operatorname{GL}(V)$  die Untergruppe aller  $\exp tx$  mit  $t \in \mathbb{Q}$ . So besteht der Kern von  $x$  genau aus den Invarianten von  $\exp(\mathbb{Q}x)$ , in Formeln*

$$\ker x = V^{\exp \mathbb{Q}x}$$

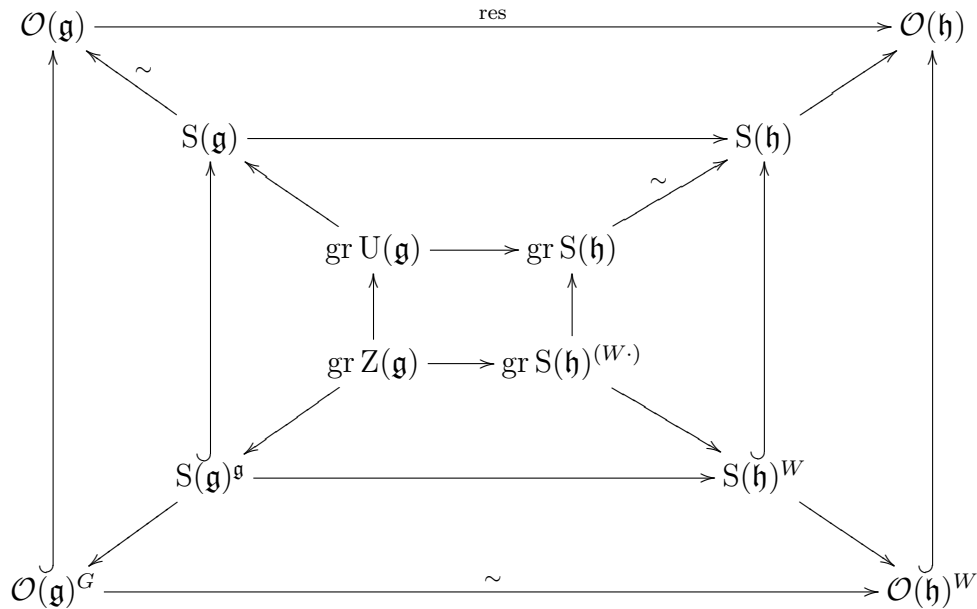
*Beweis.* Die Inklusion  $\subset$  ist evident. Die andere Inklusion  $\supset$  folgt aus der Tatsache, daß auch eine vektorwertige polynomiale Funktion  $v_0 + v_1 t + \dots + v_n t^n$  einer Variablen  $t$  aus einem unendlichen Körper nur konstant sein kann, wenn sie keine Terme höherer Ordnung hat,  $v_1 = \dots = v_n = 0$ . Betrachten wir nun speziell für  $v \in V$  die Abbildung  $\mathbb{Q} \rightarrow V$ ,  $t \mapsto \exp(tx)v$ , so ist unsere Abbildung konstant genau dann, wenn gilt  $xv = 0$ .  $\square$

*Herleitung des Harish-Chandra-Isomorphismus.* Wir betrachten dazu mit den Notationen aus dem ersten Teil des Beweises von 2.2.4 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\eta} & S(\mathfrak{h}) \\ \cup & & \cup \\ Z(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\xi} & S(\mathfrak{h})^{(W \cdot)} \end{array}$$

Die Abbildung  $\eta$  in der oberen Zeile ist verträglich mit den Standardfiltrierungen 1.3.30 auf den jeweiligen Räumen. Die Abbildung  $\xi$  in der unteren Zeile ist folglich verträglich mit den jeweils induzierten Filtrierungen. Induziert  $\xi : Z \rightarrow S(\mathfrak{h})^{(W \cdot)}$  einen Isomorphismus nach Übergang zu den assoziierten graduierten Räumen, so ist es nach [KAG] ?? bereits selbst ein Isomorphismus. Machen wir nun diesen Übergang, so erhalten wir das innere Rechteck eines kommutativen

### Diagramm der Gestalt



Die Bedeutung der anderen Pfeile wird im folgenden erläutert: Mit den beiden inneren oberen nach außen weisenden Pfeilen sind die Identifikationen  $\text{gr}(U(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})$  und  $\text{gr}(S(\mathfrak{h})) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})$  aus dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 1.3.31 gemeint, mit dem inneren nach außen weisenden Pfeil unten rechts die hoffentlich offensichtliche Identifikation  $\text{gr}(S(\mathfrak{h})^{(W\cdot)}) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$ . Der innere nach außen weisende Pfeil unten links meint die Identifikation  $\text{gr}(Z(\mathfrak{g})) = \text{gr}(U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} (\text{gr } U(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  mit dem ersten Pfeil wie im anschließenden Lemma 2.4.9. Die obere mittlere Horizontale sei induziert von der Projektion  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ , die alle Wurzelräume zu Null macht, die mittleren Vertikalen seien die offensichtlichen Inklusionen, und die untere mittlere Horizontale sei definiert durch die Kommutativität der darüberliegenden Zelle unseres Diagramms. Aus der Kommutativität der anderen Zellen, deren Nachweis dem Leser überlassen bleiben kann, folgt dann die Kommutativität des mittleren Rechtecks. Identifizieren wir darin  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$  und  $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$  vermittels der Killingform oder allgemeiner vermittels irgendeiner nichtausgearteten invarianten Bilinearform auf  $\mathfrak{g}$ , so identifiziert sich dies mittlere Rechteck mit dem äußersten Rechteck mit der Restriktion als oberer Horizontale. In diesem Diagramm ist die untere Horizontale aber ein Isomorphismus, genauer unser Chevalley-Isomorphismus aus 2.3.1.  $\square$

**Lemma 2.4.8 (Invarianten und assoziierte Graduierte).** *Ist  $V$  eine Darstellung einer endlichen Gruppe  $W$  über einem Körper  $k$  und ist auf  $V$  eine Filtrierung durch Unterdarstellungen gegeben und teilt die Charakteristik von  $k$  nicht die Gruppenordnung, so liefert die Einbettung einen Isomorphismus zwischen dem*

assozierten Graduierten der Invarianten und den Invarianten des assoziierten Graduierten

$$\text{gr}(V^W) \xrightarrow{\sim} (\text{gr } V)^W$$

*Beweis.* Nach dem Satz von Maschke [NAS] 2.3.1 ist unter unseren Annahmen jede Darstellung unserer Gruppe über besagtem Körper halbeinfach als Modul über dem Gruppenring, nach [NAS] 1.6.5 besitzt also jede Unterdarstellung ein Komplement und insbesondere auch die Unterdarstellungen  $V^{\leq n-1} \subset V^{\leq n}$ . Das Lemma folgt.  $\square$

**Lemma 2.4.9.** *Gegeben eine Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper der Charakteristik Null ist die Standardfiltrierung auf  $U = U(\mathfrak{g})$  stets  $(\text{ad } \mathfrak{g})$ -stabil und die von der Einbettung  $U^{\mathfrak{g}} \subset U$  induzierte Einbettung  $\text{gr}(U^{\mathfrak{g}}) \subset \text{gr } U$  induziert einen Isomorphismus*

$$\text{gr}(U^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} (\text{gr } U)^{\mathfrak{g}}$$

*Beweis.* Ist  $V$  ein Vektorraum, so operiert die symmetrische Gruppe  $S_n$  auf  $V^{\otimes n}$  durch Vertauschung der Faktoren. Im Fall  $\text{char } k = 0$  induziert die Surjektion  $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$  einen Isomorphismus

$$(V^{\otimes n})^{S_n} \xrightarrow{\sim} S^n V$$

von den „symmetrischen“ Tensoren der Stufe  $n$  auf die  $n$ -te homogene Komponente der symmetrischen Algebra, vergleiche [?] ??. Wir bezeichnen mit  $T^S V \subset TV$  die Summe über alle  $(V^{\otimes n})^{S_n}$  und haben damit einen Isomorphismus

$$T^S V \xrightarrow{\sim} SV$$

von Vektorräumen konstruiert, der allerdings mit der Multiplikation im Allgemeinen nicht verträglich sein wird. Ist  $V$  eine Darstellung einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , so operiert  $\mathfrak{g}$  auch durch Derivationen auf  $TV$  und  $SV$ , unser  $T^S V$  ist eine Unterdarstellung von  $TV$  und unsere Abbildung  $T^S V \xrightarrow{\sim} SV$  ist ein Isomorphismus von Darstellungen. Ist  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra und  $U := U(\mathfrak{g})$  ihre Einhüllende, so erhalten wir in derselben Weise einen Isomorphismus von Darstellungen  $T^S \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} U$ , der einen Isomorphismus  $\text{gr } T^S \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \text{gr } U$  induziert. Damit paßt der Morphismus aus dem Lemma in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}((T^S \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) & \rightarrow & (\text{gr}(T^S \mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}(U^{\mathfrak{g}}) & \rightarrow & (\text{gr } U)^{\mathfrak{g}} \end{array}$$

Hier sind die Vertikalen und obere Horizontale Isomorphismen, also auch die untere Horizontale.  $\square$

## Übungen

Übung 2.4.10. Das Zentrum von  $U(\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}))$  ist der Polynomring, der erzeugt wird von den Elementen  $c_1, \dots, c_n$  mit

$$c_i = \sum_{\nu: \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \rightarrow \{1, \dots, n\}} E_{\nu(0)\nu(1)} E_{\nu(1)\nu(2)} \dots E_{\nu(i-1)\nu(i)}$$

Speziell wird  $c_1 = E_{11} + E_{22} + \dots + E_{nn}$  die Einheitsmatrix in  $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$  und  $c_2$  ist der Casimiroperator zu einer geeigneten Bilinearform auf  $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ .

## 2.5 Zentrale Charaktere

2.5.1. Gegeben ein kommutativer Ring  $A$  bezeichne  $\text{Max } A$  die Menge der maximalen Ideale von  $A$ . Ist  $A$  ein ringendlicher  $\mathbb{C}$ -Kring, so liefert die Abbildung  $\varphi \mapsto \ker \varphi$  nach der körpertheoretischen Form des Hilbert'schen Nullstellensatzes und genauer [KAG] 1.10.23 eine Bijektion

$$\text{Kring}^{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Max } A$$

Wir haben also zum Beispiel eine kanonische Bijektion  $\text{Max } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$  und koordinatenfrei für jeden endlichdimensionalen komplexen Vektorraum  $V$  eine kanonische Bijektion  $\text{Max } \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\sim} V$ . Weiter liefert jeder Homomorphismus  $f: A \rightarrow B$  von  $\mathbb{C}$ -Kringen in einen weiteren ringendlichen  $\mathbb{C}$ -Kring  $B$  eine Abbildung in der Gegenrichtung

$$\begin{array}{ccc} \text{Max } B & \rightarrow & \text{Max } A \\ \chi & \mapsto & f^{-1}(\chi) \end{array}$$

**Satz 2.5.2 (Maximale Ideale von Invariantenringen).** Sei  $A$  ein ringendlicher  $\mathbb{C}$ -Kring mit einer Operation einer endlichen Gruppe  $W$  durch Automorphismen. So induziert die von der Einbettung  $A^W \subset A$  induzierte Abbildung  $\text{Max } A \rightarrow \text{Max}(A^W)$  eine Bijektion

$$(\text{Max } A)/W \xrightarrow{\sim} \text{Max}(A^W)$$

und für alle  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A^W)$  liefert die Einbettung von  $\mathbb{C}$  einen Isomorphismus  $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} A^W/\mathfrak{m}$ .

*Ergänzung 2.5.3.* In [KAG] 4.3.3 zeigen wir dieselbe Aussage über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper und zeigen zusätzlich, daß auch  $A^W$  ringendlich ist über dem Grundkörper.



*Beweis.* Wir beginnen mit der Surjektivität. Sei  $\mathfrak{m} \subset A^W$  ein maximales Ideal und  $\langle A\mathfrak{m} \rangle$  das von  $\mathfrak{m}$  in  $A$  erzeugte Ideal. Ich behaupte  $\langle A\mathfrak{m} \rangle \neq A$ . Es reicht zu zeigen, daß für ein beliebiges Ideal  $\mathfrak{m} \subset A^W$  aus  $\langle A\mathfrak{m} \rangle = A$  folgt  $\mathfrak{m} = A^W$ . Aber  $\langle A\mathfrak{m} \rangle = A$  impliziert eine Gleichung

$$a_1 m_1 + \dots + a_r m_r = 1 \quad \text{mit } a_i \in A, m_i \in \mathfrak{m}.$$

Summieren wir alle Transformierten dieser Gleichung unter den verschiedenen  $x \in W$  auf, so ergibt sich eine Gleichung der Gestalt

$$b_1 m_1 + \dots + b_r m_r = |W|$$

mit  $b_i \in A^W$  und es folgt  $\mathfrak{m} = A^W$ . Für  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A^W)$  gibt es also  $\tilde{\mathfrak{m}} \in \text{Max } A$  mit  $\tilde{\mathfrak{m}} \supset A\mathfrak{m}$ , und dann haben wir notwendig  $\tilde{\mathfrak{m}} \cap A^W = \mathfrak{m}$ . Das zeigt die Surjektivität der Abbildung in unserem Satz und zeigt auch, daß die offensichtliche Abbildung eine Injektion  $A^W/\mathfrak{m} \hookrightarrow A/\tilde{\mathfrak{m}}$  ist und mithin die Einbettung von  $\mathbb{C}$  in den ersten Ring auch ein Isomorphismus. Es bleibt nur noch die Injektivität der ersten Abbildung im Satz zu zeigen. Sind aber  $\lambda, \mu \in \text{Max } A$  gegeben mit  $\lambda \notin W\mu$ , so gibt es ein  $a \in A$ , das „verschwindet an der Stelle  $\lambda$  aber bei keinem der  $x\mu$ “, in Formeln  $a \in \lambda, a \notin x\mu \quad \forall x \in W$ . Bilden wir dann das Produkt aller  $xa$  mit  $x \in W$ , so erhalten wir eine Invariante  $f \in A^W$  mit  $f \in \lambda, f \notin \mu$ . Das zeigt die Injektivität.  $\square$

**Definition 2.5.4.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine komplexe Lie-Algebra und  $Z := Z(\mathfrak{g})$  das Zentrum ihrer Einhüllenden. Ein Homomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Kringen  $Z \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein **zentraler Charakter** von  $\mathfrak{g}$ . Ist  $Z$  endlich erzeugt als  $\mathbb{C}$ -Algebra, so können und werden wir die Menge aller zentralen Charaktere identifizieren mit  $\text{Max } Z$ .

**Proposition 2.5.5.** Seien  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra,  $\mathfrak{h}$  eine Cartan'sche und  $R^+$  ein ausgezeichnetes System positiver Wurzeln. Die von unserem Harish-Chandra-Homomorphismus induzierte Abbildung  $\xi : \mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Max } Z, \lambda \mapsto \text{Ann}_Z \Delta(\lambda)$  induziert eine Bijektion

$$\mathfrak{h}^*/(W\cdot) \xrightarrow{\sim} \text{Max } Z$$

*Bemerkung 2.5.6.* Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann  $\xi$  eine Abbildung  $Z \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$  meint und wann wie hier die induzierte Abbildung  $\mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Max } Z$ .

*Beweis.* Wir betten unsere Abbildung ein in ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^*/(W\cdot) & \rightarrow & \text{Max } Z \\ \wr \downarrow & & \uparrow \wr \\ (\text{Max } \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*))/ (W\cdot) & \rightarrow & \text{Max } (\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*))^{(W\cdot)} \end{array}$$

wo die linke Vertikale induziert wird von der kanonischen Identifikation  $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \text{Max } \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$ , die rechte Vertikale von  $\xi : Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W \cdot)}$  und die untere Horizontale von der Einbettung  $\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)^{(W \cdot)} \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$ . Der Leser mag prüfen, daß dies Diagramm kommutiert. Die rechte Vertikale ist bijektiv nach dem Satz von Harish-Chandra. Die untere Horizontale ist bijektiv nach dem vorhergehenden allgemeinen Satz 2.5.2. Die Proposition folgt.  $\square$

**Lemma 2.5.7.** *Jeder einfache Subquotient des Vermamoduls  $\Delta(\lambda)$  ist isomorph zu  $L(x \cdot \lambda)$  für geeignetes  $x \in W$ .*

*Beweis.* Das folgt sofort aus Proposition 2.5.5, da ja jeder Subquotient von demselben maximalen Ideal des Zentrums der Einhüllenden annulliert werden muß wie der ganze Vermamodul.  $\square$

## 2.6 Die ganzzahlige Weylgruppe eines Gewichts

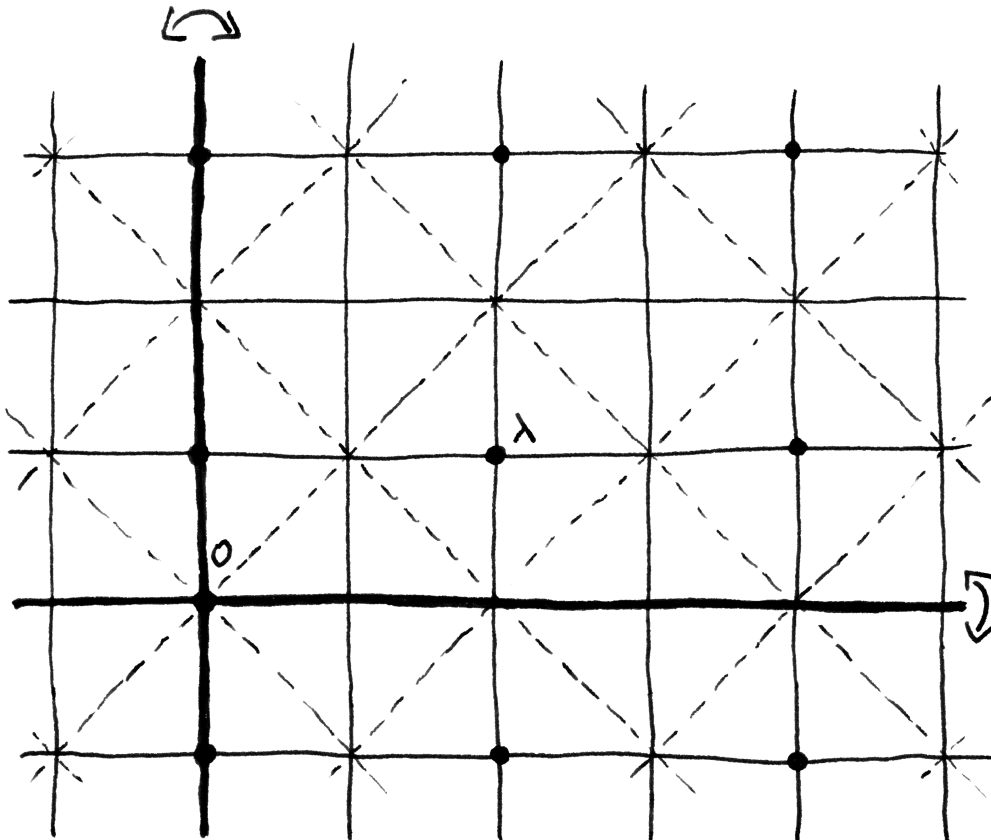
**Definition 2.6.1.** Seien  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null,  $R \subset V$  ein Wurzelsystem im Sinne von [SPW] 2.1.1 und  $\Lambda \in V/\langle R \rangle$  eine Nebenklasse unter dem Wurzelgitter. Wir bezeichnen mit  $W$  die Weylgruppe unseres Wurzelsystems und mit  $W_\Lambda \subset W$  die Isotropiegruppe der Nebenklasse  $\Lambda$ . Weiter definieren wir das **System der auf  $\Lambda$  ganzzahligen Wurzeln** durch

$$R_\Lambda := \{\alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Man sieht leicht ein, daß  $R_\Lambda$  ein Wurzelsystem ist in dem von ihm aufgespannten Teilraum von  $V$ . Gegeben ein System positiver Wurzeln  $R^+ \subset R$  ist sicher auch  $R^+ \cap R_\Lambda$  ein System positiver Wurzeln in  $R_\Lambda$ . Die zugehörige Menge von einfachen Wurzeln notieren wir  $\Pi_\Lambda$ . Ist  $\lambda \in V$  gegeben, so bezeichnen wir mit  $\bar{\lambda}$  seine Nebenklasse modulo dem Wurzelgitter und nennen die Isotropiegruppe  $W_{\bar{\lambda}}$  dieser Nebenklasse die **ganzzahlige Weylgruppe von  $\lambda$** , nicht zu verwechseln mit der Isotropiegruppe  $W_\lambda$  von  $\lambda$  selbst. Ebenso nennen wir  $R_{\bar{\lambda}}$  das **ganzzahlige Wurzelsystem von  $\lambda$** . Bei genauerem Hinsehen erkennt man unschwer, daß diese Bildungen sogar nur von der Nebenklasse von  $\lambda$  modulo dem Gitter  $X$  der ganzzahligen Gewichte abhängen.

**Proposition 2.6.2 (zur ganzzahligen Weylgruppe eines Gewichts).** *Seien  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null,  $R \subset V$  ein Wurzelsystem,  $W$  die Weylgruppe und  $\Lambda \in V/\langle R \rangle$  eine Nebenklasse des Wurzelgitters. So wird die Isotropiegruppe  $W_\Lambda$  von  $\Lambda$  erzeugt von den Spiegelungen an den auf  $\Lambda$  ganzzahligen Wurzeln, in Formeln*

$$W_\Lambda = \langle s_\alpha \mid \alpha \in R_\Lambda \rangle$$



Die Spiegelebenen der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems, das im Bild neben [SPW] 2.5.5 eingezeichnet war. Hier habe ich ein Gewicht  $\lambda$  eingezeichnet und als fette Punkte den Nullpunkt sowie die Elemente seiner Nebenklasse  $\bar{\lambda}$  unter dem Wurzelgitter. Die Spiegelungen an den beiden fett eingezeichneten Linien erzeugen die ganzzahlige Weylgruppe  $W_{\bar{\lambda}}$  von  $\lambda$ . Die Spiegelungen an den durchgezogenen Linien erzeugen den Stabilisator in der affinen Weylgruppe seiner Nebenklasse modulo dem Wurzelgitter.

*Beweis.* Sei  $\lambda \in \Lambda$  ein Repräsentant. Das anschließende Lemma 2.6.3 zeigt, daß die Isotropiegruppe  $\mathcal{W}_\lambda$  von  $\lambda$  in der affinen Weylgruppe  $\mathcal{W}$  unseres Wurzelsystems  $R$  von Spiegelungen erzeugt wird. Damit wird auch  $W_\Lambda$  von Spiegelungen erzeugt, denn  $W_\Lambda$  ist gerade das Bild von  $\mathcal{W}_\lambda$  unter dem Bilden des linearen Anteils  $\mathcal{W} \rightarrow W$ . Die Spiegelungen aus  $W_\Lambda$  sind aber per definitionem gerade die Spiegelungen zu Wurzeln aus  $R_\Lambda$ .  $\square$

**Lemma 2.6.3.** *Seien  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper  $k$  und  $\mathcal{W} \subset \text{Aff}^\times V$  eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne von [SPW] 1.5.2. Ist  $K \supset k$  eine Körpererweiterung, so wird auch für jedes  $\lambda \in K \otimes_k V$  seine Isotropiegruppe  $\mathcal{W}_\lambda \subset \mathcal{W}$  erzeugt von Spiegelungen.*

*Beweis.* Wir ergänzen  $e_0 = 1 \in k$  zu einer  $k$ -Basis  $(e_i)_{i \in I}$  von  $K$  und erhalten eine Zerlegung  $K \otimes_k V = \bigoplus (e_i \otimes V)$ . Nach geeigneter Umbenennung von  $I$  können wir dann  $\lambda$  darstellen in der Form

$$\lambda = \lambda_0 + e_1 \otimes \lambda_1 + \dots + e_n \otimes \lambda_n$$

mit  $\lambda_i \in V$ . Bezeichnet  $\bar{w} \in \text{GL}(V)$  den linearen Anteil von  $w \in \mathcal{W}$ , so haben wir offensichtlich

$$w\lambda = w\lambda_0 + e_1 \otimes \bar{w}\lambda_1 + \dots + e_n \otimes \bar{w}\lambda_n$$

Die Isotropiegruppe von  $\lambda$  können wir demnach so beschreiben: Wir nehmen erst die Isotropiegruppe von  $\lambda_0$ , eine endliche affine Spiegelungsgruppe nach [SPW] 1.7.4. Diese identifizieren mit der endlichen Spiegelungsgruppe ihrer linearen Anteile und nehmen dann darin die Isotropiegruppe von  $\lambda_1$ , darin hinwiederum die Isotropiegruppe von  $\lambda_2$  etc. In jedem Schritt wird aber nach [SPW] 1.7.4 aus einer Spiegelungsgruppe wieder eine Spiegelungsgruppe.  $\square$

**Definition 2.6.4.** Seien  $V \supset R \supset R^+$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null, ein Wurzelsystem und ein System positiver Wurzeln. Gegeben  $\Lambda \in V/\langle R \rangle$  eine Nebenklasse des Wurzelgitters bezeichnen wir die durch  $R_\Lambda \cap R^+$  gegebene Länge auf der Isotropiegruppe  $W_\Lambda$  mit  $l_\Lambda : W_\Lambda \rightarrow \mathbb{N}$  und bezeichnen mit  $w_\Lambda \in W_\Lambda$  das bezüglich  $l_\Lambda$  längste Element.

2.6.5. Sei ganz allgemein  $(W, E)$  eine endliche affine Spiegelungsgruppe und  $A$  einer ihrer Alkoven. Wir betrachten im Raum der Richtungsvektoren  $\vec{E}$  die Menge  $A^*$  aller nichtnegativen Linearkombinationen von Vektoren, die  $(-1)$ -Eigenvektoren von Spiegelungen sind und in Richtung von  $A$  zeigen. Nun führen wir auf  $E$  zwei Ordnungsrelationen ein:

1.  $\lambda \leq \mu$  möge bedeuten  $\mu \in \lambda + A^*$ . Wir verwenden das Symbol  $\leq$ , um den Unterschied zur Relation  $\leq$  aus 2.6.7 anzudeuten;

2.  $\lambda \preceq \mu$  möge bedeuten, daß es eine Folge  $t_1, t_2, \dots, t_r$  von Spiegelungen gibt mit  $\lambda \leq t_1 \lambda \leq t_2 t_1 \lambda \leq \dots \leq t_r \dots t_2 t_1 \lambda = \mu$ .

Offensichtlich ist die zweite Relation stärker als die Erste. Offensichtlich ist weiter in jeder  $W$ -Bahn auf  $E$  der Repräsentant aus  $\bar{A}$  das größte Element für beide Ordnungen und der Repräsentant aus  $w_A \bar{A} = -\bar{A}$  das Kleinste.

*Ergänzung 2.6.6.* Im Übrigen ist für  $\lambda \in A$  und  $x, y \in W$  auch  $x\lambda \preceq y\lambda$  gleichbedeutend dazu, daß gilt  $x \geq y$  in der Bruhat-Ordnung auf  $W$  aus [SPW] 3.3.

**Definition 2.6.7.** Seien  $V \supset R \supset R^+$  ein Vektorraum mit einem Wurzelsystem und einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. Wir führen zwei Ordnungsrelationen auf  $V$  ein:

1.  $\lambda \leq \mu$  möge wie in 1.1.3 bedeuten  $\mu \in \lambda + |R^+|$ ;
2.  $\lambda \uparrow \mu$  möge bedeuten, daß es eine Folge  $t_1, t_2, \dots, t_r$  von Spiegelungen gibt mit  $\lambda \leq t_1 \cdot \lambda \leq (t_2 t_1) \cdot \lambda \leq \dots \leq (t_r \dots t_1) \cdot \lambda = \mu$ .

*Beispiel 2.6.8.* Auch auf der Weylbahn eines ganzen Gewichts ist die untere Relation im allgemeinen echt stärker. Zum Beispiel mag man das Wurzelsystem  $\{e_i - e_j \mid i \neq j\}$  in  $\{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + \dots + x_4 = 0\}$  aus [SPW] 2.1.13 vom Typ  $A_3$  betrachten mit dem üblichen System positiver Wurzeln  $R^+ = \{e_i - e_j \mid i < j\}$ . Für die Gewichte  $\lambda = \lambda' - \rho$  und  $\mu = \mu' - \rho$  mit  $\mu' = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + \varepsilon_4$  und  $\lambda' = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4$  in den Notationen [SPW] 2.1.13, also mit  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ , gilt dann  $\mu = \lambda + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)$  und damit  $\lambda \leq \mu$  in Bezug auf das duale Wurzelsystem. Wir haben auch  $W \cdot \lambda = W \cdot \mu$ , aber dennoch gilt nicht  $\lambda \uparrow \mu$ , wie man unschwer einsieht.

**Korollar 2.6.9.** Seien  $V \supset R \supset R^+$  ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null mit einem Wurzelsystem und einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln. So haben wir:

1. Für alle  $\lambda \in V$  gilt  $\bar{\lambda} \cap (W \cdot \lambda) = W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ ;
2. Für jedes  $\lambda \in V$  besitzt seine Bahn unter seiner ganzzahligen Weylgruppe, kurz seine **ganzzahlige Bahn**  $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ , ein größtes und ein kleinstes Element bezüglich  $\uparrow$  und a fortiori auch bezüglich  $\leq$ ;
3. Ein Gewicht  $\lambda \in V$  ist  $\rho$ -dominant genau dann, wenn es das größte Element seiner ganzzahligen Bahn  $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$  ist. Das kleinste Element besagter Bahn ist dann  $w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ .

*Beweis.* Die erste Aussage folgt sofort aus den Definitionen. Die anderen ergeben sich, wenn wir Bemerkung 2.6.5 anwenden auf die dot-Operation der ganzzahligen Weylgruppe  $W_{\bar{\lambda}}$  auf dem affinen Raum  $\lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  über dem angeordneten Körper  $\mathbb{Q}$ . □

**Proposition 2.6.10 (Einfache Verma-Moduln).** *Der Verma-Modul  $\Delta(\lambda)$  einfach, wenn gilt  $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \dots\} \forall \alpha \in R^+$ , wo  $\rho$  die Halbsumme der positiven Wurzeln bezeichnet.*

*Vorschau 2.6.11.* Die hinreichende Bedingung für die Einfachheit eines Verma-Moduls aus obigem Satz ist auch notwendig, wie aus unserer Beschreibung aller Homomorphismen zwischen Verma-Moduln 3.5.2 unmittelbar folgen wird.

*Beweis.* Wir wissen nach 2.5.7, daß nur die einfachen Höchstgewichtsmoduln  $L(x \cdot \lambda)$  mit  $x \in W$  und  $x \cdot \lambda \in \lambda - |R^+)$  als einfache Subquotienten in Frage kommen. Nach 2.6.9 gehört  $x$  dann zur ganzen Weylgruppe  $W_{\bar{\lambda}}$  und ist  $\lambda$  das  $\leq$ -kleinste Element von  $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$ , so muß  $\Delta(\lambda)$  einfach sein. Dies  $\leq$ -kleinste Element ist aber nach 2.6.9 auch das  $\uparrow$ -kleinste und kann deshalb charakterisiert werden durch die Eigenschaft  $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{1, 2, \dots\}$  für alle  $\alpha \in R^+$ .  $\square$

*Beispiel 2.6.12.* Im Kontext von 2.6.4 muß die Bruhat-Ordnung auf  $W$  nicht notwendig die Bruhat-Ordnung auf  $W_\Lambda$  induzieren. Ist etwa  $R$  das Wurzelsystem vom Typ  $G_2$  mit Basis  $\{\alpha, \beta\}$  und  $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -3$ , und erklären wir  $\lambda$  durch  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 1/2$  und  $\langle \lambda, \beta^\vee \rangle = 1$  und  $\Lambda$  als seine Nebenklasse, so ist  $R_\Lambda$  vom Typ  $A_1 \times A_1$ , aber die Bruhat-Ordnung auf  $W$  induziert eine totale Ordnung auf  $W_\Lambda$ .

### 3 Multiplizitäten von Vermamoduln

Die Kategorie  $\mathcal{O}$  wurde eingeführt in einer Arbeit von Bernstein-Gelfand-Gelfand [?] als natürlicher Rahmen für das Studium der Jordan-Hölder-Multiplizitäten von Vermamoduln. In dieser Arbeit zeigen die Autoren eine Analogie im Kontext unendlichdimensionalen Darstellungen komplexer halbeinfacher Liealgebren zur sogenannten „Brauer-Nesbitt-Reziprozität“ [?] aus der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Für derartige Phänomene hat sich mittlerweile die Bezeichnung „BGG-Reziprozität“ durchgesetzt.

#### 3.1 Kategorie $\mathcal{O}$

**Definition 3.1.1.** Gegeben  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan’schen und ein System  $R^+$  positiver Wurzeln setzen wir  $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$  und definieren die **Kategorie  $\mathcal{O}$**  als diejenige volle Unterkategorie in der Kategorie aller Darstellungen der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ , die gegeben wird durch die Bedingungen

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+) := \left\{ M \in \mathfrak{g}\text{-Mod} \left| \begin{array}{l} M \text{ ist endlich erzeugt über } \mathfrak{g} \\ M \text{ ist lokal endlich über } \mathfrak{b} \\ M \text{ ist halbeinfach über } \mathfrak{h} \end{array} \right. \right\}$$

Die zweite Bedingung meint ausgeschrieben, daß jeder Vektor unserer Darstellung in einem endlichdimensionalen  $\mathfrak{b}$ -stabilen Teilraum enthalten ist. Die dritte Bedingung bedeutet, daß alle  $H \in \mathfrak{h}$  auf unserer Darstellung durch diagonalisierbare Endomorphismen operieren, daß also gilt  $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$  mit

$$M_\lambda := \{m \in M \mid Hm = \lambda(H)m \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

dem **Gewichtsraum** zum Gewicht  $\lambda$ .

3.1.2. Die Terminologie „halbeinfach“ ist an dieser Stelle aus der Theorie der Moduln über Ringen entnommen: Wie in [NAS] 1.6.2 nennen wir auch Darstellungen von Liealgebren „halbeinfach“ genau dann, wenn sie das Erzeugnis ihrer einfachen Unterdarstellungen sind. Durch [NAS] ?? ist der Begriff „halbeinfach“ ja sogar für Moduln über beliebigen Mengen erklärt.

*Ergänzung 3.1.3.* Ist  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan’sche und  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  das Wurzelsystem, so erhalten wir nach Übung [?] ?? eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Systeme } R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ von} \\ \text{positiven Wurzeln} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Borelsche Unteralgebren,} \\ \text{die } \mathfrak{h} \text{ umfassen} \end{array} \right\}$$

durch die Vorschrift  $R^+ \mapsto \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ . Im Rahmen der Theorie der algebraischen Gruppen [?] ?? sieht man ohne große Schwierigkeiten, daß je zwei Borel'sche Unteralgebren einer endlichdimensionalen reductiven komplexen Liealgebra konjugiert sind unter einem Automorphismus der Liealgebra, so daß insbesondere jede Borel'sche einer halbeinfachen Liealgebra von der oben angegebenen Gestalt ist. Weiter hängt unsere Kategorie  $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+) \subset \mathfrak{g}\text{-Mod}$  von der Wahl von  $\mathfrak{h}$  gar nicht ab, sondern nur von der Borel'schen  $\mathfrak{b}$ , und wir hätten sie durchaus  $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$  notieren können: In der Tat kann die dritte Bedingung umformuliert werden zur Forderung, daß für jeden  $\mathfrak{b}$ -Untermodul  $N \subset M$  unserer Darstellung der Quotient  $N/[\mathfrak{b}, N]$  ein halbeinfacher  $\mathfrak{b}$ -Modul ist. Ich schreibe dennoch  $\mathcal{O}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, R^+)$ , weil sich so die Theorie der Borel'schen Unteralgebren ausklammern läßt.

3.1.4. Gegeben  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und sei  $R^+$  ein System positiver Wurzeln. So ist für die zugehörige Borel'sche  $\mathfrak{b}$  die Surjektion  $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$  mit den Wurzelräumen im Kern ein Homomorphismus von Liealgebren und jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  liefert durch Vorschalten besagter Surjektion einen Charakter  $\lambda : \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir erinnern an die Verma-Moduln  $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, \mathfrak{b}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda = \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda$  aus [?] ???. Eine endliche Filtrierung eines  $\mathfrak{g}$ -Moduls durch Unterdarstellungen, deren sukzessive Subquotienten sämtlich Verma-Moduln zu einer festen Borel'schen sind, nennt man eine **Vermafahne**.

**Lemma 3.1.5 (Erste Eigenschaften der Kategorie  $\mathcal{O}$ ).** *Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit Cartan'scher und  $R^+$  ein System positiver Wurzeln mit der zugehörigen Kategorie  $\mathcal{O}$ . So gilt:*

1. *Alle Verma-Moduln  $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, \mathfrak{b})$  liegen in  $\mathcal{O}$ . Ist allgemeiner  $V$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $\mathfrak{b}$ , die halbeinfach ist über  $\mathfrak{h}$ , so besitzt  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} V$  eine Vermafahne und gehört zu  $\mathcal{O}$ ;*
2. *Alle Subquotienten von Darstellungen aus  $\mathcal{O}$  liegen wieder in  $\mathcal{O}$ , und jedes Objekt von  $\mathcal{O}$  ist Quotient eines Objekts von  $\mathcal{O}$  mit einer Vermafahne;*
3. *Jede Darstellung aus  $\mathcal{O}$  ist ein  $U(\mathfrak{g})$ -Modul endlicher Länge;*
4. *Alle Gewichtsräume von Darstellungen aus  $\mathcal{O}$  sind endlichdimensional, ja für alle  $M \in \mathcal{O}$  und  $\nu \in \mathfrak{h}^*$  ist sogar der Raum  $\bigoplus_{\mu \geq 0} M_{\nu+\mu}$  endlichdimensional;*
5. *Gehören bei einer kurzen exakten Sequenz von Darstellungen von  $\mathfrak{g}$  die Enden zu  $\mathcal{O}$  und ist die Mitte halbeinfach unter unserer Cartan'schen  $\mathfrak{h}$ , so gehört auch die Mitte zu  $\mathcal{O}$ ;*



6. Die Kategorie der Darstellungen aus  $\mathcal{O}$  ist stabil unter dem Tensorieren mit endlichdimensionalen Darstellungen von  $\mathfrak{g}$ , in Formeln haben wir also ( $\dim E < \infty$  und  $M \in \mathcal{O}$ )  $\Rightarrow E \otimes M \in \mathcal{O}$ ;

7. Die einfachen Darstellungen aus  $\mathcal{O}$  sind genau die einfachen Höchstgewichtsmoduln. Bezeichnet genauer  $L(\lambda)$  den nach 1.4.7 eindeutig bestimmten einfachen Quotienten von  $\Delta(\lambda)$ , so haben wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^* &\xrightarrow{\sim} \text{irr } \mathcal{O} \\ \lambda &\mapsto L(\lambda) \end{aligned}$$

3.1.6. Im letzten Punkt bezeichnet  $\text{irr } \mathcal{O}$  die Menge der Isomorphieklassen von einfachen Objekten aus  $\mathcal{O}$ . Dieselbe Notation verwenden wir für beliebige „abelsche Kategorien“.

*Beweis.* 1. Verma-Moduln sind endlich erzeugt, ja sogar zyklisch. Weiter zerfallen sie nach 1.4.3 in Gewichtsräume, genauer haben sie die Zerlegung  $\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \lambda - |R^+)} \Delta(\lambda)_\nu$  mit der Notation  $|R^+)$  für das von  $R^+$  erzeugte Untermonoid von  $\mathfrak{h}^*$ . Da alle diese Gewichtsräume wieder nach 1.4.3 von endlicher Dimension sind und da gilt

$$U(\mathfrak{b})\Delta(\lambda)_\nu \subset \bigoplus_{\mu \in |R^+)} \Delta(\lambda)_{\nu+\mu}$$

und da überdies  $(\nu + |R^+)) \cap (\lambda - |R^+))$  stets endlich ist, hat die rechte Seite unserer Inklusion endliche Dimension und unser Verma-Modul ist auch lokal endlich über  $\mathfrak{b}$ . Allgemeiner ist das Produzieren alias Koinduzieren

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} = \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{b}\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{g}\text{-Mod}$$

nach 1.5.5 ein exakter Funktor und macht  $\mathfrak{h}$ -halbeinfache Moduln zu  $\mathfrak{h}$ -halbeinfachen Moduln. Da  $\mathfrak{b}$  auflösbar ist, besitzt  $V$  nach dem Satz von Lie oder vielmehr seinem Korollar [?] ?? oder auch einfacheren expliziten Überlegungen in unserer speziellen Situation eine Filtrierung

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r = V$$

mit eindimensionalen Subquotienten  $V_i/V_{i-1} \cong \mathbb{C}_{\lambda_i}$  für geeignete  $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ . Wir erhalten so auf  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V$  eine Filtrierung durch die  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V_i$  mit Subquotienten  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda_i} = \Delta(\lambda_i)$ . Daß  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V$  lokal endlich ist über  $\mathfrak{b}$ , folgert man ganz analog wie bei Verma-Moduln.

2. Daß Quotienten von Objekten aus  $\mathcal{O}$  wieder in  $\mathcal{O}$  liegen ist offensichtlich. Um es für Untermoduln zu erhalten müssen wir nur bemerken, daß jeder Untermodul eines endlich erzeugten  $U(\mathfrak{g})$ -Moduls endlich erzeugt ist, da nämlich

$U(\mathfrak{g})$  noethersch ist nach 1.3.32. Um schließlich ein beliebiges Objekt  $M \in \mathcal{O}$  als Quotient eines Objekts mit Vermafahne zu schreiben, suchen wir uns einen endlichdimensionalen erzeugenden Teilraum  $V \subset M$ , den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathfrak{b}$ -stabil annehmen dürfen, und erhalten eine Surjektion  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V \rightarrow M$ .

3. Das folgt sofort aus Teil 2, da nach 1.6.25 jeder Verma-Modul endliche Länge hat.

4. Das folgt sofort aus dem bereits bewiesenen Teil 2 des Lemmas.

5. Das einzige Problem ist zu zeigen, daß die Mitte auch lokal endlich ist unter  $\mathfrak{b}$ . Das folgt jedoch mit Teil 4, wenn wir beachten, daß mit Anfang und Ende unserer Sequenz auch ihre Mitte die in Teil 4 beschriebene Endlichkeitseigenschaft haben muß.

6. Sind Darstellungen  $E$  und  $M$  lokal endlich über  $\mathfrak{b}$  bzw. halbeinfach über  $\mathfrak{h}$ , so gilt offensichtlich dasselbe für ihr Tensorprodukt. Sind weiter  $E$  und  $M$  Darstellungen einer Liealgebra und wird  $M$  als Darstellung erzeugt von einem Teilraum  $V \subset M$ , so wird offensichtlich  $E \otimes M$  erzeugt von  $E \otimes V$ . Ist insbesondere  $M$  endlich erzeugt und  $E$  endlichdimensional, so ist auch  $E \otimes M$  endlich erzeugt.

7. Das folgt aus Teil 2: Nach 1.6.25 wissen wir nämlich bereits, daß alle Kompositionsfaktoren von Verma-Moduln einfache höchste Gewichtsmoduln sind.  $\square$

**Beispiel 3.1.7 (Die Kategorie  $\mathcal{O}$  im Fall  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ).** Wir untersuchen die Kategorie  $\mathcal{O}$  im Fall  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ . Wir arbeiten mit der üblichen Basis  $e, h, f$  wie in [?] ?? und mit  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$  und  $\mathfrak{b} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e$ . Da alle  $h$ -Eigenräume jedes Objekts  $M \in \mathcal{O}$  endlichdimensional sind, operiert der Casimiroperator  $C = C_{\kappa}$  darauf lokal endlich und  $M$  zerfällt in die direkte Summe seiner Haupträume  $M = \bigoplus_{a \in \mathbb{C}} \text{Hau}(C|M; a)$ . Wir setzen

$${}_a\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{O} \mid (C - a) \text{ operiert lokal nilpotent auf } M\}$$

Wir wissen nach 1.6.22, daß der Casimiroperator auf zwei einfachen Moduln  $L(\lambda)$  und  $L(\mu)$  genau dann durch denselben Skalar  $a$  operiert, wenn gilt  $\lambda = \mu$  oder  $\lambda = s \cdot \mu$  für  $s$  das einzige nichttriviale Element der Weylgruppe. Wir unterscheiden drei Fälle.

**Singulärer zentraler Charakter.** Der Fixpunkt  $-\rho$  von  $(s \cdot)$  ist das einzige  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit  $(C - a)\Delta(\lambda) = 0$ . In diesem Fall gibt es in  ${}_a\mathcal{O}$  nur ein einfaches Objekt  $L(-\rho) = \Delta(-\rho)$  und ein beliebiges Objekt  $M \in {}_a\mathcal{O}$  ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien dieses einfachen Objekts, genauer ist der von der universellen Eigenschaft induzierte Morphismus ein Isomorphismus  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(M_{-\rho}) \xrightarrow{\sim} M$ ;

**Regulärer nicht ganzer zentraler Charakter.** Es gibt zwei Gewichte  $\lambda \neq \mu$  mit  $(C - a)\Delta(\lambda) = (C - a)\Delta(\mu) = 0$ , aber wir haben  $\lambda - \mu \notin \langle R \rangle$ . In diesem Fall gibt es in  ${}_a\mathcal{O}$  genau zwei einfache Objekte  $L(\lambda) = \Delta(\lambda)$  und  $L(\mu) = \Delta(\mu)$  ein beliebiges Objekt  $M \in {}_a\mathcal{O}$  ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien dieser beiden einfachen Objekte, genauer sind die Gewichtsräume  $M_\lambda$  und  $M_\mu$  stabil unter  $\mathfrak{b}$  und die universelle Eigenschaft koinduzierter Darstellungen liefert einen Isomorphismus  $\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(M_\lambda \oplus M_\mu) \xrightarrow{\sim} M$ ;

**Regulärer ganzer zentraler Charakter.** Es gibt zwei Gewichte  $\lambda \neq \mu$  mit  $(C - a)\Delta(\lambda) = (C - a)\Delta(\mu) = 0$  und  $\lambda - \mu \in \langle R \rangle$ . Dann finden wir  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\{\lambda, \mu\} = \{n\rho, -(n+2)\rho\}$ . In diesem Fall gibt es in  ${}_a\mathcal{O}$  genau zwei einfache Objekte, die einfache endlichdimensionale Darstellung  $L(n\rho)$  der Dimension  $n+1$  und den einfachen Vermamodul  $L(-(n+2)\rho) = \Delta(-(n+2)\rho)$ . Wir werden in 3.4.12 Äquivalenzen zwischen je zwei dieser Kategorien  ${}_a\mathcal{O}$  konstruieren und konzentrieren uns im folgenden auf den Fall  $a = 0$ . Dann hat  ${}_0\mathcal{O}$  als einfache Objekte nur die triviale Darstellung  $L(0) = \mathbb{C}$  und den Vermamodul  $\Delta(-2\rho)$  und wir erhalten eine Äquivalenz

$${}_0\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \{V \in \text{Car}(q \rightleftharpoons p, \mathbb{C}\text{-Modf}) \mid (V_q \rightarrow V_p \rightarrow V_q) = 0\}$$

mit der besagten Kategorie aller Darstellungen des oben angedeuteten Köchers mit zwei Ecken  $p, q$  und zwei Pfeilen, indem wir dem Objekt  $M \in {}_0\mathcal{O}$  das Diagramm

$$M_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightleftharpoons \\ \xleftarrow{e} \end{array} M_{-2\rho}$$

zuordnen. Der quasiinverse Funktor wird dann dadurch gegeben, daß man  $M_0 \oplus M_{-2\rho}$  als  $\mathfrak{b}$ -Modul auffaßt und aus  $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (M_0 \oplus M_{-2\rho})$  den von allen Ausdrücken  $f \otimes (v, 0) - 1 \otimes (0, fv)$  erzeugten  $\mathfrak{g}$ -Untermodul herausschneidet. Man überzeugt sich im Köcherbild leicht, daß unsere Kategorie bis auf Isomorphismus genau fünf unzerlegbare Objekte besitzt: Die ersten vier mag man schematisch schreiben als  $\mathbb{C} \rightleftharpoons 0, 0 \rightleftharpoons \mathbb{C}, \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$ , wo wir in den letzten beiden Fällen nur den von Null verschiedenen Pfeil notiert haben. Das Fünfte dieser unzerlegbaren Objekte ist  $\mathbb{C} \rightleftharpoons \mathbb{C}^2$  mit  $\text{in}_1$  und  $\text{pr}_2$  als Morphismen. In  ${}_0\mathcal{O}$  entsprechen diese fünf Objekte der Reihe nach den Darstellungen  $L(0), L(-2\rho) = \Delta(-2\rho), \Delta(0)$ , einem noch nicht besprochenen Objekt  $\nabla(0)$  und  $L(1) \otimes \Delta(-\rho)$ . Ein Möglichkeit,  $\nabla(0)$  hier schon zu beschreiben, ist als der Kokern eines und jedes injektiven Morphismus  $\Delta(-2\rho) \hookrightarrow L(1) \otimes \Delta(-\rho)$ .

## Übungen

*Übung 3.1.8.* Der Raum der Homomorphismen zwischen Darstellungen aus  $\mathcal{O}$  ist stets endlichdimensional.

**Übung 3.1.9 (Dualität auf  $\mathcal{O}$ ).** Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+$  ein System positiver Wurzeln. Man erinnere aus dem Beweis von [?] ??, daß es einen Liealgebrenautomorphismus  $\tau : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$  gibt mit  $\tau^2 = \text{id}$  und  $\tau(h) = -h \forall h \in \mathfrak{h}$ , und daß derartige Liealgebrenautomorphismen **Chevalley-Involutionen** heißen. Man zeige, daß wir für jede Chevalley-Involution zu  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$d = d_\tau : \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\text{opp}}$$

erhalten durch die Vorschrift  $dM := (M^*)_{\mathfrak{h}}^\tau$  alias den Raum der  $\mathfrak{h}$ -endlichen Vektoren der kontragredienten Darstellung mit der durch  $\tau$  getwisteten  $\mathfrak{g}$ -Operation, in Formeln  $xf := -f \circ (\tau x)$ . Weiter zeige man, daß die kanonische Abbildung in den Bidualraum für alle  $M \in \mathcal{O}$  einen Isomorphismus  $M \xrightarrow{\sim} ddM$  induziert. Man zeige, daß der natürliche Homomorphismus  $E^* \otimes M^* \rightarrow (E \otimes M)^*$  für  $M \in \mathcal{O}$  und  $E$  eine endlichdimensionale Darstellung einen Isomorphismus  $E^{*\tau} \otimes dM \xrightarrow{\sim} d(E \otimes M)$  induziert. Im übrigen ist auch  $E^{*\tau}$  isomorph zu  $E$ , aber das Auszeichnen eines Isomorphismus bedeutet eine unkanonische Wahl. Man zeige weiter  $\dim_{\mathbb{C}}(dM)_\lambda = \dim_{\mathbb{C}}(M)_\lambda$  und folgere  $dL(\lambda) \cong L(\lambda)$ .

**Ergänzende Übung 3.1.10 ( $\nabla$ -Moduln und ihre universelle Eigenschaft).** Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Liealgebra mit einer Cartan'schen und  $R^+$  ein System positiver Wurzeln. Gegeben  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und eine Chevalley-Involution  $\tau$  setzen wir

$$\nabla(\lambda) = \nabla_\tau(\lambda) := d_\tau \Delta(\lambda)$$

und erklären den kanonischen Erzeuger  $v_\lambda^\top \in \nabla(\lambda)_\lambda$  des höchsten Gewichtsraums durch  $v_\lambda^\top(v_\lambda) = 1$  für  $v_\lambda \in \Delta(\lambda)_\lambda$  den bereits in 1.4.2 erklärten kanonischen Erzeuger. Für alle  $M \in \mathcal{O}$  folgere man aus 1.4.6, daß wir einen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, \nabla(\lambda)) \xrightarrow{\sim} M_\lambda^{*\tau} / \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} M_{\lambda+\alpha}^{*\tau}$$

erhalten, indem wir jeden Homomorphismus auf den  $\lambda$ -Gewichtsraum einschränken und den durch  $v_\lambda^\top$  gegebenen Isomorphismus  $\nabla(\lambda)_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  nachschalten. Dadurch ist das Paar  $(\nabla(\lambda), v_\lambda^\top)$  eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus und hängt insbesondere nicht von der Wahl der Chevalley-Involution  $\tau$  ab.

## 3.2 Zerlegungen der Kategorie $\mathcal{O}$

3.2.1. Ich erinnere an unsere allgemeine Terminologie [NAS] 5.3.1 zur Blockzerlegung.

**Lemma 3.2.2 (Zerlegung nach der Nebenklasse der Gewichte).** Für  $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$  setze man  $\mathcal{O}_\Lambda := \{M \in \mathcal{O} \mid M_\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \Lambda\}$ . So haben wir die Zerlegung

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\langle R \rangle} \mathcal{O}_\Lambda$$

*Beweis.* Gegeben ein Objekt  $M \in \mathcal{O}$  und eine Nebenklasse unter dem Wurzelgitter  $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\langle R \rangle$  setzen wir  $M_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ . Natürlich sind die  $M_\Lambda$  Unterdarstellungen von  $M$  und es gilt  $M = \bigoplus_\Lambda M_\Lambda$ . Den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser.  $\square$

3.2.3. Wir erinnern an das Zentrum  $Z$  der universellen Einhüllenden Algebra  $U(\mathfrak{g})$ , an die Menge  $\text{Max } Z$  aller maximalen Ideale von  $Z$  und an die Abbildung  $\xi : \mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Max } Z$ ,  $\lambda \mapsto \text{Ann}_Z \Delta(\lambda)$ , deren Fasern nach 2.5.5 gerade die Bahnen unter der dot-Operation der Weylgruppe sind.

**Lemma 3.2.4 (Zerlegung nach zentralem Charakter).** Für  $\chi \in \text{Max } Z$  setze man  ${}_\chi \mathcal{O} := \{M \in \mathcal{O} \mid \chi^n M = 0 \text{ für } n \gg 0\}$ . So haben wir die Zerlegung

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\chi \in \text{Max } Z} {}_\chi \mathcal{O}$$

*Beweis.* Nach 3.1.5.3 hat jedes  $M \in \mathcal{O}$  endliche Länge und alle seine einfachen Subquotienten sind einfache höchste Gewichtsmoduln. Auf diesen operiert jedoch das Zentrum durch Skalare. Damit ergibt sich unser Satz als Spezialfall aus dem Satz über die verallgemeinerte Hauptraumzerlegung von Moduln über kommutativen Ringen [KAG] 3.6.1.  $\square$

**Definition 3.2.5.** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und  $R \subset V$  ein Wurzelsystem im Sinne von ?? und  $R^+ \subset R$  ein System positiver Wurzeln und  $\rho = \rho(R^+)$  die Halbsumme der positiven Wurzeln. Dann bilden wir die Menge

$$V_{\text{dom}} = \{\lambda \in V \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{-1, -2, \dots\} \forall \alpha \in R^+\}$$

und nennen ihre Elemente die  **$\rho$ -dominanten Vektoren von  $V$** . Sind wir in einer der in der Darstellungstheorie üblichen Situationen, daß unser Vektorraum etwa der Dualraum einer Cartan'schen ist, so daß seine Elemente üblicherweise als Gewichte bezeichnet werden, so sprechen wir entsprechend von  **$\rho$ -dominanten Gewichten**. Die dominanten ganzen Gewichte in  $\mathfrak{h}^*$  erhalten wir mithin aus den  $\rho$ -dominanten ganzen Gewichten durch die Addition von  $\rho$ .

**Satz 3.2.6 (Blockzerlegung von  $\mathcal{O}$ ).** Gegeben ein Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit Nebenklasse  $\bar{\lambda} = \lambda + \langle R \rangle$  unter dem Wurzelgitter bezeichne  $\mathcal{O}_\lambda = \xi(\lambda) \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{\bar{\lambda}}$  den Schnitt der zugehörigen Unterkategorien aus beiden vorhergehenden Lemmata 3.2.2 und 3.2.4. So haben wir die Zerlegung

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*} \mathcal{O}_\lambda$$

3.2.7. Aus unserer Beschreibung 3.5.2 aller Homomorphismen zwischen Vermoduln wird unmittelbar folgen, daß sich die  $\mathcal{O}_\lambda$  nicht mehr weiter in direkte Summen von nichttrivialen Unterkategorien zerlegen lassen. Das rechtfertigt dann auch recht eigentlich erst die Bezeichnung unserer Zerlegung als Blockzerlegung. Den Block  $\mathcal{O}_0$ , der die triviale eindimensionale Darstellung enthält, bezeichnet man auch als den **Hauptblock von  $\mathcal{O}$** .

*Beweis.* Die einfachen Isomorphieklassen in  ${}_{\xi(\lambda)}\mathcal{O}$  werden repräsentiert von den  $L(\mu)$  mit  $\mu \in W \cdot \lambda$ , der Bahn von  $\lambda$  unter der zum Fixpunkt  $-\rho$  verschobenen Operation der Weylgruppe nach [?] ??, und die einfachen Isomorphieklassen in  $\mathcal{O}_{\bar{\lambda}}$  werden repräsentiert von den  $L(\mu)$  mit  $\mu \in \bar{\lambda}$ . Es reicht demnach zu zeigen, daß für alle  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  der Schnitt von  $W \cdot \lambda$  und  $\bar{\lambda}$  genau ein  $\rho$ -dominantes Gewicht enthält. Dazu dienen die anschließenden Überlegungen zur Geometrie von Spiegelungsgruppen. Die Aussage selber ergibt sich als Korollar 2.6.9.  $\square$

**Korollar 3.2.8.** *Seien  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche,  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln und  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  ein  $\rho$ -dominantes Gewicht.*

1. *Die einfachen Objekte von  $\mathcal{O}_\lambda$  werden parametrisiert durch die dot-Bahn des Gewichts  $\lambda$  unter seiner ganzzahligen Weylgruppe, genauer haben wir eine Bijektion  $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda \xrightarrow{\sim} \text{irr } \mathcal{O}_\lambda$  durch die Vorschrift  $\mu \mapsto L(\mu)$ ;*
2. *Der Vermamodul  $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$  ist einfach.*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus der ersten Aussage von 2.6.9. Zum Nachweis der Zweiten bemerken wir, daß für  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  ein  $\rho$ -dominantes Gewicht und  $x \in W_{\bar{\lambda}}$  beliebig nach 2.6.9 gilt

$$w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda \leq x \cdot \lambda \leq \lambda$$

Jeder einfache Subquotient von  $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$  gehört nun aber zu  $\mathcal{O}_\lambda$  und ist daher nach unseren Resultaten zur Blockzerlegung 3.2.6 ein einfacher höchster Gewichtsmodul der Gestalt  $L(x \cdot \lambda)$  mit  $x \in W_{\bar{\lambda}}$ . Bei  $\Delta(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$  kommt nun als einfacher Untermodul nur  $L(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$  in Frage, als da heißt, jeder einfache Untermodul unseres Vermamoduls ist bereits der Vermamodul selber.  $\square$

## Übungen

*Übung 3.2.9.* Man zeige, daß für jede Chevalley-Involution die zugehörige Dualität auf  $\mathcal{O}$  die Blockzerlegung erhält, in Formeln  $M \in \mathcal{O}_\lambda \Rightarrow dM \in \mathcal{O}_\lambda$ .

### 3.3 Projektive Objekte von $\mathcal{O}$

3.3.1. Wir haben mittlerweile bewiesen, daß „fast alle“ Vermamoduln einfach sind. Unser Leitproblem für die nächsten Abschnitte ist es, die Kompositionsfaktoren der übrigen Vermamoduln zu bestimmen. Dazu wird sich ein vertieftes Verständnis der Projektiven von  $\mathcal{O}$  als außerordentlich hilfreich erweisen. Darunter verstehen wir projektive Objekte der abelschen Kategorie  $\mathcal{O}$ , d.h. Darstellungen  $P \in \mathcal{O}$  derart, daß jeder surjektive Homomorphismus  $M \twoheadrightarrow N$  zwischen Darstellungen  $M, N \in \mathcal{O}$  eine Surjektion  $\mathcal{O}(P, M) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(P, N)$  induziert. Hier erinnere ich unsere allgemeine Konvention, nach der wir für eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und Objekte  $M, N \in \mathcal{C}$  mit  $\mathcal{C}(M, N)$  die Menge der Morphismen von  $M$  nach  $N$  bezeichnen.

**Satz 3.3.2 (Projektive Vermamoduln).** *Seien  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Cartan'sche und  $R^+ \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ein System positiver Wurzeln. So ist für jedes  $\rho$ -dominante Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  der Vermamodul  $\Delta(\lambda)$  ein projektives Objekt der Kategorie  $\mathcal{O}$ .*

*Vorschau 3.3.3.* Diese hinreichende Bedingung für die Projektivität eines Vermamoduls aus obigem Satz ist auch notwendig. Wir zeigen das in ??.

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, daß  $\Delta(\lambda)$  projektiv ist in  $\mathcal{O}_\lambda$ , denn der Projektionsfunktor  $\text{pr}_\lambda : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$  ist exakt und wir haben

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), M) = \mathcal{O}_\lambda(\Delta(\lambda), \text{pr}_\lambda M)$$

für alle  $M \in \mathcal{O}$ . Nach unseren Erkenntnissen über die ganzzahlige Weylgruppe aus 2.6.9 und über die Irreduziblen in  $\mathcal{O}_\lambda$  aus 3.2.8 haben wir für  $M \in \mathcal{O}_\lambda$  jedoch  $M_\nu \neq 0 \Rightarrow \nu \leq \lambda$ . Nach 1.4.7.1.4.6 liefert also für  $M \in \mathcal{O}_\lambda$  das Auswerten auf dem kanonischen Erzeuger  $v_\lambda \in \Delta(\lambda)$  einen Isomorphismus  $\mathcal{O}_\lambda(\Delta(\lambda), M) \xrightarrow{\sim} M_\lambda$ . Da jedoch das Bilden des  $\lambda$ -Gewichtsraums ein exakter Funktor ist, folgt aus diesem Isomorphismus die Projektivität von  $\Delta(\lambda)$ .  $\square$

**Satz 3.3.4.** *Es gibt in  $\mathcal{O}$  genügend projektive Objekte und jedes projektive Objekt von  $\mathcal{O}$  besitzt eine Vermaflagge.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus den zwei präziseren Aussagen 3.3.5 und 3.3.6, die wir gleich im Anschluß beweisen.  $\square$

**Proposition 3.3.5.** *Jeder Vermamodul kann eingefügt werden in eine kurze exakte Sequenz  $N \hookrightarrow P \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$ , bei der  $P$  projektiv ist in  $\mathcal{O}$  und  $N$  eine Vermaflagge besitzt, in der nur Subquotienten  $\Delta(\mu)$  mit  $\mu > \lambda$  vorkommen.*

*Beweis.* Gegeben  $\gamma \in \mathfrak{h}^*$  und  $M$  ein  $\mathfrak{b}$ -Modul betrachten wir in  $M$  den Untervektorraum

$$\tau_{\leq \gamma} M = \bigoplus_{\mu \leq \gamma} M_\mu$$

Sicher ist die Summe aller Gewichtsräume eine Unterdarstellung von  $M$  und  $\tau_{\leq \gamma} M$  ist wiederum ein Quotient dieser Unterdarstellung nach einem  $\mathfrak{b}$ -stabilen Teilraum und damit auch ein  $\mathfrak{b}$ -Modul. Wir betrachten nun den Projektionsfunktork  $\text{pr}_\lambda : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$  und bilden für  $\nu \in |R^+|$  in  $\mathcal{O}$  die Darstellungen

$$P_{\leq \lambda + \nu} = \text{pr}_\lambda \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \tau_{\leq \lambda + \nu} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda$$

Zusammen mit den natürlichen Surjektionen bilden sie ein durch die Menge  $|R^+|$  indiziertes projektives System, das mit  $\Delta(\lambda)$  endet. Wir behaupten, daß  $P_{\leq \lambda + \nu}$  für  $\nu$  hinreichend groß nicht mehr von  $\nu$  abhängt und daß das dann ein projektives Objekt  $P$  der gewünschten Gestalt ist. Genauer stabilisiert unser System bereits, wenn  $\lambda + \nu$  größer ist als jedes Gewicht aus  $(W \cdot \lambda) \cap (\lambda + \langle R \rangle)$ , denn die Kerne der Surjektionen im projektiven System vor Anwenden von  $\text{pr}_\lambda$  haben stets Vermafahren und werden unter dieser Bedingung von  $\text{pr}_\lambda$  annulliert. Weiter folgt unter dieser Bedingung an  $\nu$  für jedes  $N \in \mathcal{O}_\lambda$  aus  $N_\mu \neq 0$  schon  $\mu \leq \lambda + \nu$ . Für beliebiges  $M \in \mathcal{O}$  folgern wir damit kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Mod}^{\mathfrak{g}}(P_{\leq \lambda + \nu}, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{g}}(P_{\leq \lambda + \nu}, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{b}}(\tau_{\leq \lambda + \nu} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{b}}(\text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Mod}^{\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, \text{pr}_\lambda M) \\ &\xrightarrow{\sim} (\text{pr}_\lambda M)_\lambda \end{aligned}$$

und erkennen so die Projektivität von  $P_{\leq \lambda + \nu}$ . Die übrigen in der Proposition behaupteten Eigenschaften sind leicht einzusehen.  $\square$

**Proposition 3.3.6.** *Seien  $M', M'' \in \mathcal{O}$ . Genau dann besitzt  $M' \oplus M''$  eine Vermafahne, wenn sowohl  $M'$  als auch  $M''$  eine Vermafahne besitzen.*

*Beweis.* Daß eine direkte Summe von zwei Moduln mit Vermafahne auch eine Vermafahne besitzt ist offensichtlich. Um die andere Implikation zu zeigen beginnen wir mit einem Lemma.

**Lemma 3.3.7.** *Besitzt  $M \in \mathcal{O}$  eine Vermafahne und ist  $\lambda$  ein maximales Gewicht von  $M$  und  $v \in M_\lambda$  ein von Null verschiedener Gewichtsvektor, so ist die Abbildung  $\Delta(\lambda) \rightarrow M$ ,  $v_\lambda \mapsto v$  eine Injektion und  $M/\Delta(\lambda)$  besitzt auch eine Vermafahne.*

*Beweis des Lemmas.* Besitzt  $M$  eine Vermafahne, so ist  $M$  offensichtlich frei als  $U(\mathfrak{n})$ -Modul. Das zeigt, daß unsere Abbildung  $\Delta(\lambda) \rightarrow M$  eine Injektion sein muß. Ihr Bild ist offensichtlich  $U(\mathfrak{g})v$ . Gegeben eine Vermafahne

$$M = M_n \supset \dots \supset M_i \supset M_{i-1} \supset M_0 = 0$$



von  $M$  sei nun  $i$  der Index mit  $v \in M_i$  aber  $v \notin M_{i-1}$ . Da  $\lambda$  ein maximales Gewicht von  $M$  war, haben wir notwendig  $U(\mathfrak{g})v \xrightarrow{\sim} M_i/M_{i-1}$  und damit  $U(\mathfrak{g})v \cap M_{i-1} = 0$ . Also hat  $\overline{M} = M/U(\mathfrak{g})v$  die Vermafabne

$$\overline{M} = \overline{M}_n \supset \dots \supset \overline{M}_i = \overline{M}_{i-1} \supset \dots \supset \overline{M}_0 = 0 \quad \square$$

Um nun die Proposition zu zeigen, wählen wir einen von Null verschiedenen Vektor  $v$  zu einem maximalen Gewicht aus einem der beiden Summanden, sagen wir aus  $M'$ . Dann haben wir offensichtlich  $\overline{M'} \oplus \overline{M''} = \overline{M'} \oplus \overline{M''}$  und Induktion über die kleinstmögliche Länge einer Vermafabne von  $M$  beendet den Beweis der Proposition.  $\square$

3.3.8. Wir bezeichnen mit  $P(\lambda)$  eine **projektive Decke** von  $L(\lambda)$  in  $\mathcal{O}$ , als da heißt, ein unzerlegbares projektives Objekt mit Quotient  $L(\lambda)$ . Nach 3.3.4 existiert stets solch ein Objekt. Nach [NAS] 5.1.21 ist es eindeutig bis auf nichteindeutigen Isomorphismus und wir haben

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(\lambda), L(\mu)) = \delta_{\lambda\mu}$$

Weiter hat der Kern der offensichtlichen Surjektion  $P(\lambda) \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$  nach 3.3.5 und 3.3.6 eine Vermafabne, in der nur Subquotienten  $\Delta(\mu)$  mit  $\mu > \lambda$  auftreten.

**Satz 3.3.9 (Reziprozitätsformel).** *Die Vielfachheit eines Vermaomoduls als Subquotient in einer Vermafabne eines unzerlegbaren Projektiven der Kategorie  $\mathcal{O}$  stimmt überein mit der Vielfachheit des einfachen Quotienten von besagtem Projektiven als Subquotient einer Kompositionsreihe von besagtem Vermaomodul, in Formeln*

$$[P(\lambda) : \Delta(\mu)]_{\Delta} = [\Delta(\mu) : L(\lambda)] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$$

3.3.10. Die Reziprozitätsformel wurde in diesem Kontext zuerst von Bernstein, Gelfand und Gelfand bewiesen und wird deshalb meist **BGG-Reziprozität** genannt. Daß die Subquotienten in einer Vermafabne eines Objekts von Kategorie bis auf Reihenfolge wohldefiniert sind, kann man entweder aus dem gleich folgenden Beweis ableiten oder auch einfacher aus 3.4.10.

*Beweis.* Nach 3.3.8 haben wir  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(\lambda), L(\mu)) = \delta_{\lambda\mu}$  und damit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(P(\lambda), M) = [M : L(\lambda)]$$

für alle Objekte  $M \in \mathcal{O}$ . Wegen  $[\Delta(\mu) : L(\lambda)] = [\nabla(\mu) : L(\lambda)]$  reicht es also, für alle  $\lambda, \mu$  die Gleichheit  $[P(\lambda) : \Delta(\mu)]_{\Delta} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(P(\lambda), \nabla(\mu))$  zu zeigen, und dafür müssen wir nur für alle projektiven Objekte  $P$  von  $\mathcal{O}$  und alle Gewichte  $\mu$  die Gleichheit

$$[P : \Delta(\mu)]_{\Delta} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(P, \nabla(\mu))$$

zeigen. Wir zeigen diese Gleichheit allgemeiner für alle Objekte  $P$  mit Vermafabne, und zwar durch vollständige Induktion über die Länge einer Vermafabne. Sei dazu  $Q \hookrightarrow P \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$  eine kurze exakte Sequenz in  $\mathcal{O}$ . Es reicht zu zeigen, daß sie eine kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) \hookrightarrow \mathcal{O}(P, \nabla(\mu)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Q, \nabla(\mu))$$

induziert, als da heißt, daß die rechte Abbildung hier wie bereits angedeutet eine Surjektion sein muß. Um das zu sehen, zeigen wir zunächst, daß jede kurze exakte Sequenz  $\nabla(\mu) \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$  in  $\mathcal{O}$  spaltet. Gilt hier nicht  $\lambda < \mu$ , so liefert die universelle Eigenschaft von Verma-Moduln unmittelbar eine Spaltung. Gilt dahingegen  $\lambda < \mu$ , so dualisieren wir und sind auch wieder fertig. Für die mit den langen exakten Ext-Sequenzen vertrauten Leser ist der Beweis damit zu Ende. Die anderen müssen sich noch überlegen, daß wir durch Bilden des Pushout  $E := \text{cok}((i, -\varphi)^\top : Q \hookrightarrow (P \oplus \nabla(\mu)))$  zur Einbettung  $i : Q \hookrightarrow P$  und irgendeinem Morphismus  $\varphi : Q \rightarrow \nabla(\mu)$  ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \Delta(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \nabla(\mu) & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & \Delta(\lambda) \end{array}$$

erhalten. Da die untere Zeile spaltet, läßt sich unser Morphismus  $\varphi : Q \rightarrow \nabla(\mu)$  in der Tat zu einem Morphismus  $P \rightarrow \nabla(\mu)$  ausdehnen.  $\square$

## Übungen

*Übung 3.3.11.* Ist  $P$  ein projektives Objekt von  $\mathcal{O}$  und  $E$  eine endlichdimensionale Darstellung, so ist auch  $E \otimes P$  ein projektives Objekt von  $\mathcal{O}$ .

## 3.4 Verschiebungsfunktoren

3.4.1. Wir erinnern an die Zerlegung  $\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}} \mathcal{O}_\lambda$  aus 3.2.6, in der  $\lambda$  über alle  $\rho$ -dominante Gewichte läuft. Zu dieser Zerlegung gehören Projektionsfunktoren  $\text{pr}_\lambda : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$  und Einbettungsfunktoren  $\text{in}_\lambda : \mathcal{O}_\lambda \hookrightarrow \mathcal{O}$ .

**Definition 3.4.2.** Gegeben  $\lambda, \mu$  zwei  $\rho$ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz  $\mu - \lambda \in \mathfrak{X}$  betrachten wir eine einfache endlichdimensionale Darstellung  $E$  mit extremem Gewicht  $\mu - \lambda$  und einem ausgezeichnetem Erzeuger des zugehörigen Gewichtsraums und definieren den **Verschiebungsfunktor von  $\lambda$  nach  $\mu$** , auf englisch und französisch **translation functor**, als den Funktor

$$\begin{array}{ccc} T_\lambda^\mu : \mathcal{O}_\lambda & \rightarrow & \mathcal{O}_\mu \\ M & \mapsto & \text{pr}_\mu(E \otimes M) \end{array}$$

3.4.3. Die Wahl eines ausgezeichneten Erzeugers des zugehörigen Gewichtsraums ist nur eine von vielen Möglichkeiten, unseren Funktor bis auf eindeutigen Isomorphismus festzulegen. Alternativ könnte man auch  $E = L(\nu)$  nehmen für  $\{\nu\} = W(\mu - \lambda) \cap \mathfrak{X}^+$ , aber mit dieser Wahl erreicht man bei den nun folgenden Konstruktionen nur schwer denselben Grad von Eindeutigkeit.

**Lemma 3.4.4 (Erste Eigenschaften der Verschiebungsfunktoren).** *Seien  $\lambda, \mu$  zwei  $\rho$ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz. So gilt:*

1. *Der Verschiebungsfunktor  $T_\lambda^\mu$  ist exakt;*
2. *Es gibt Adjunktionen  $(T_\mu^\lambda, T_\lambda^\mu)$ ;*
3. *Die Verschiebungsfunktoren vertauschen mit der Dualität, wir geben im Beweis sogar genauer für jede Chevalley-Involution eine ausgezeichnete Isotransformation  $T_\lambda^\mu \circ d \xrightarrow{\cong} d \circ T_\lambda^\mu$  an;*
4. *Unter unseren Verschiebungsfunktoren  $T_\lambda^\mu$  werden Projektive zu Projektiven.*

*Beweis.* 1. Der Verschiebungsfunktor  $T_\lambda^\mu$  ist exakt als Komposition der exakten Funktoren  $T_\lambda^\mu = \text{pr}_\mu \circ (E \otimes) \circ \text{in}_\lambda$ ;

2. Wir haben natürliche Adjunktionen  $(\text{in}_\lambda, \text{pr}_\lambda), (E \otimes, E^* \otimes)$  und  $(\text{pr}_\mu, \text{in}_\mu)$ . Weiter haben wir  $T_\mu^\lambda = \text{pr}_\lambda \circ (E^* \otimes) \circ \text{in}_\mu$ , wobei wir in  $E^*$  den Gewichtsvektor auszeichnen, der auf dem in  $E$  ausgezeichneten Gewichtsvektor den Wert Eins annimmt. So erhalten wir eine Adjunktion von Funktoren  $(T_\lambda^\mu, T_\mu^\lambda)$ ;

3. Wir denken uns hier eine Chevalley-Involution  $\tau$  fest gewählt und verstehen  $d = d_\tau$ . Wir haben kanonische Isomorphismen  $(E \otimes M)^* \xrightarrow{\cong} E^* \otimes M^*$  wegen  $\dim E < \infty$  und dann auch  $d(E \otimes M) \xrightarrow{\cong} dE \otimes dM$ . Weiter erklären wir kanonische Isomorphismen  $dE \xrightarrow{\cong} E$  dadurch, daß wir den eben erklärten ausgezeichneten extremen Gewichtsvektor von  $E^*$  mit dem ausgezeichneten extremen Gewichtsvektor von  $E$  identifizieren. Mit der offensichtlichen Isotransformation  $\text{pr}_\mu \circ d \xrightarrow{\cong} d \circ \text{pr}_\mu$  erhalten wir dann kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} T_\lambda^\mu dM &= \text{pr}_\mu(E \otimes dM) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{pr}_\mu(dE \otimes dM) \\ &\xrightarrow{\cong} \text{pr}_\mu d(E \otimes M) \\ &\xrightarrow{\cong} d \text{pr}_\mu(E \otimes M) = d(T_\lambda^\mu M) \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

4. Ist in der Tat  $P$  projektiv in  $\mathcal{O}_\lambda$ , so ist  $\mathcal{O}_\lambda(P, \ ) \circ T_\mu^\lambda \cong \mathcal{O}_\mu(T_\lambda^\mu P, \ )$  exakt als Verknüpfung exakter Funktoren und somit ist  $T_\lambda^\mu P$  projektiv in  $\mathcal{O}_\mu$ .  $\square$

3.4.5. Wir bezeichnen von nun an mit  $W_\lambda$  die Isotropiegruppe von  $\lambda$  bezüglich der dot-Operation und  $W_{\bar{\lambda}}$  die ganzzahlige Weylgruppe von  $\lambda$  nach 2.6.1. Bei der ganzzahligen Weylgruppe kommt es noch nicht einmal darauf an, ob wir diesen Begriff in Bezug auf die lineare Operation oder in Bezug auf die dot-Operation verstehen.

**Proposition 3.4.6 (Verschieben von Vermamoduln).** *Seien  $\lambda, \mu$  zwei  $\rho$ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz  $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$ . So besitzt für alle Elemente der ganzzahligen Weylgruppe  $x \in W_{\bar{\lambda}}$  der verschobene Vermamodul  $T_\lambda^\mu \Delta(x \cdot \lambda)$  eine Vermaflagge, in der jeder Vermamodul  $\Delta(xy \cdot \mu)$  mit  $y \in W_\lambda / (W_\lambda \cap W_\mu)$  genau einmal als Subquotient auftritt.*

3.4.7. Zwei Spezialfälle verdienen besondere Beachtung: Im Fall  $W_\lambda \subset W_\mu$  der sogenannten **Verschiebung auf Wände** werden Vermamoduln zu Vermamoduln, genauer gilt  $T_\lambda^\mu \Delta(x \cdot \lambda) \cong \Delta(x \cdot \mu)$ . Im Fall  $W_\lambda \supset W_\mu$  der sogenannten **Verschiebung aus Wänden** hat  $T_\lambda^\mu \Delta(x \cdot \lambda)$  eine Filtrierung mit Subquotienten  $\Delta(xy \cdot \mu)$  für  $y \in W_\lambda / W_\mu$ .

*Beweis.* Wir haben nach der Definition  $T_\lambda^\mu \Delta(x \cdot \lambda) = \text{pr}_\mu(E \otimes \Delta(x \cdot \lambda))$  für  $E \cong L(\nu)$  mit  $\{\nu\} = W(\mu - \lambda) \cap \mathfrak{X}^+$ . Jetzt brauchen wir ein Lemma.

**Lemma 3.4.8.** *Sei  $E$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . So hat die Tensordarstellung  $E \otimes \Delta(\lambda)$  eine Verma-Flagge mit Subquotienten  $\Delta(\lambda + \eta)$ , wobei  $\eta$  über die Multimenge  $P_\mu(E)$  der Gewichte von  $E$  mit ihren Multiplizitäten läuft.*

*Beweis.* Die Tensoridentität 1.7.1 liefert uns einen kanonischen Isomorphismus  $E \otimes_{\mathbb{C}} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} (E \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda)$ , und jede Filtrierung des  $\mathfrak{b}$ -Moduls  $E$  mit eindimensionalen Subquotienten induziert eine  $\Delta$ -Flagge der gewünschten Art auf  $E \otimes \Delta(\lambda)$ .  $\square$

Insbesondere hat in unserem Fall  $E \otimes \Delta(x \cdot \lambda)$  eine Vermaflagge mit Subquotienten  $\Delta(x \cdot \lambda + \eta)$ , wo  $\eta$  die Multimenge  $P_\mu(E)$  der Gewichte von  $E$  durchläuft. Wir müssen demnach nur für alle  $\eta \in P_\mu(E)$  die drei Implikationen

$$\begin{aligned} \text{pr}_\mu \Delta(x \cdot \lambda + \eta) \neq 0 &\Leftrightarrow \exists y \in W_\lambda \text{ mit } x \cdot \lambda + \eta = xy \cdot \mu \\ &\Downarrow \\ \dim E_\eta &= 1 \end{aligned}$$

zeigen.  $\Leftarrow$  und  $\Downarrow$  sind evident. Wir zeigen nun  $\Rightarrow$ . Gegeben eine beliebige affine Spiegelungsgruppe  $\mathcal{W}$  auf einem affinen euklidischen Raum  $E$  wird für beliebige  $v, w \in E$  nach [SPW] 1.7.6 der Abstand  $\|v - zw\|$  minimal genau für die  $z \in \mathcal{W}$ , für die  $v$  und  $zw$  im Abschluß desselben Alkoven liegen. Lassen wir speziell  $\mathcal{W} = W_{\bar{\lambda}} = W_{\bar{\mu}}$  operieren vermittelt der dot-Operation als affine Spiegelungsgruppe auf dem affinen euklidischen Raum  $E = \lambda + \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  über dem

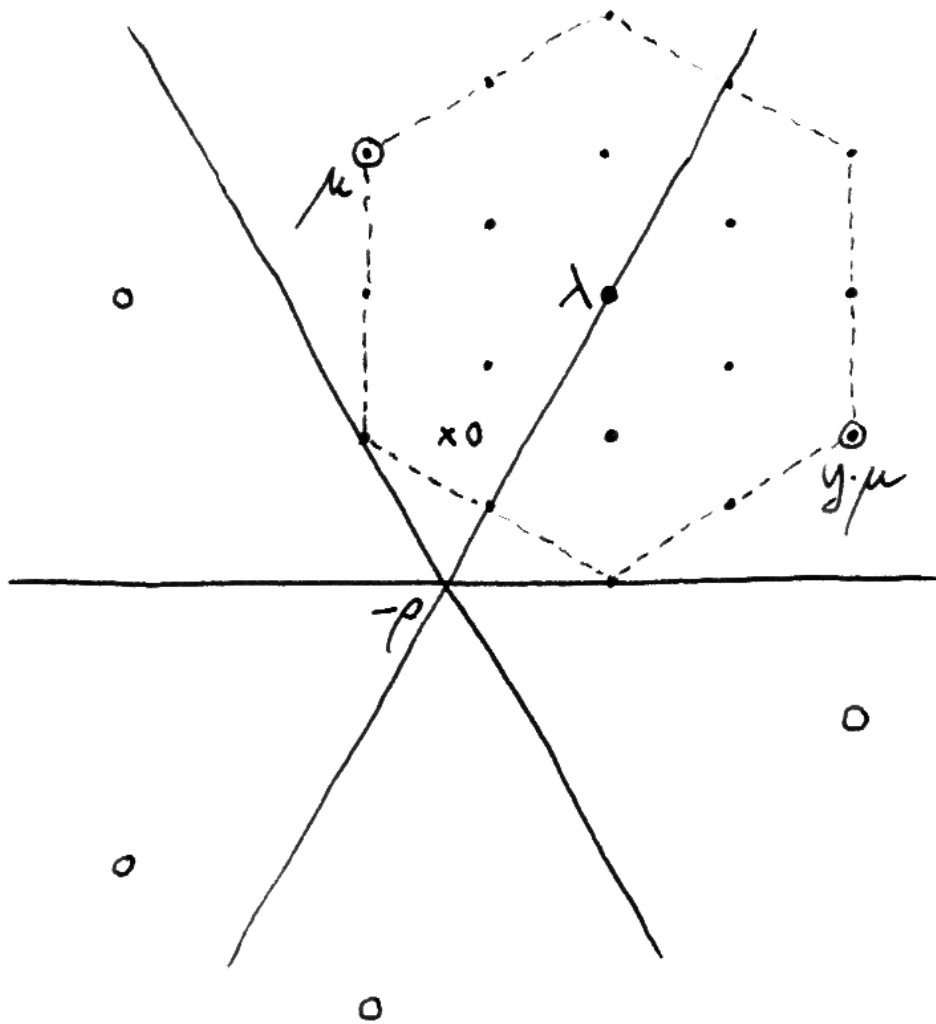


Illustration zur Verschiebung aus der Wand: In diesem Fall ergibt sich eine kurze exakte Sequenz

$$\Delta(\mu) \hookrightarrow T_{\lambda}^{\mu} \Delta(\lambda) \twoheadrightarrow \Delta(y \cdot \mu)$$

angeordneten Körper  $\mathbb{Q}$ , so liegen  $\lambda$  und  $\mu$  im Abschluß desselben Alkoven, da sie beide  $\rho$ -dominant sind. Andererseits sind aber die Gewichte maximaler Länge von  $E$  nach 1.6.31 genau die extremen Gewichte, d.h. die Gewichte auf dem Weylgruppenorbit  $W(\mu - \lambda)$ . Nur dann kann also ein Gewicht  $\eta \in P_\mu(E)$  den Abstand zwischen einem Element aus  $W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$  und einem Element aus  $W_{\bar{\lambda}} \cdot \mu$  überbrücken, wenn unser Gewicht  $\eta$  extrem ist und die beiden fraglichen Punkte im Abschluß desselben Alkoven liegen. Genau dann liegen nun aber  $x \cdot \lambda$  und  $xy \cdot \mu$  im Abschluß desselben Alkoven, wenn es ein  $z$  aus der Isotropiegruppe von  $\lambda$  gibt mit  $y \cdot \mu = z \cdot \mu$ , und dann wird ihre Differenz auch in der Tat gerade überbrückt durch ein extremes Gewicht von  $E$ , nämlich durch das Gewicht  $xz(\mu - \lambda)$ .  $\square$

3.4.9. Ich erinnere an die Grothendieckgruppe einer abelschen Kategorie [NAS] ?? und an den von einem exakten Funktor induzierten Gruppenhomomorphismus [NAS] 5.4.5.

**Proposition 3.4.10.** *Die einfachen Moduln, die Vermamoduln und die unzerlegbaren Projektiven liefern jeweils eine  $\mathbb{Z}$ -Basis der Grothendieckgruppe von  $\mathcal{O}$ .*

*Beweis.* Es reicht, die analoge Aussage für die Kategorien  ${}_{\chi}\mathcal{O}$  zu zeigen. Die Einfachen bilden für jede längenendliche Kategorie eine Basis der Grothendieckgruppe, siehe [NAS] 5.4.3. Die Einfachen von  ${}_{\chi}\mathcal{O}$  sind genau die  $L(\lambda)$  mit  $\lambda$  aus einer geeigneten endlichen Menge  $S$ , genauer der Menge  $S = \xi^{-1}(\chi)$ . Die quadratische Matrix der  $([\Delta(\lambda) : L(\mu)])$  mit  $\lambda, \mu \in S$  hat Einsen auf der Diagonalen und obere Dreiecksgestalt bei geeigneter Nummerierung von  $S$ . Mithin ist diese Matrix invertierbar und das zeigt, daß auch die  $[\Delta(\lambda)]$  mit  $\lambda \in S$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $[{}_{\chi}\mathcal{O}]$  bilden. Für die unzerlegbaren Projektiven argumentiert man genauso, auch die Matrix  $([P(\lambda) : \Delta(\mu)]_{\Delta})$  mit  $\lambda, \mu \in S$  hat nach 3.3.8 Einsen auf der Diagonalen und obere Dreiecksgestalt bei geeigneter Nummerierung von  $S$ .  $\square$

**Korollar 3.4.11.** *Seien  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  zwei  $\rho$ -dominante Gewichte mit ganzer Differenz. Gilt  $W_{\lambda} \subset W_{\mu}$ , so induziert  $T_{\lambda}^{\mu} T_{\mu}^{\lambda}$  auf der Grothendieckgruppe  $[\mathcal{O}_{\mu}]$  die Multiplikation mit der natürlichen Zahl  $|W_{\mu}/W_{\lambda}|$ . Insbesondere wird unter der Verschiebung  $T_{\mu}^{\lambda}$  aus der Wand kein von Null verschiedener Modul zu Null.*

*Beweis.* Die Vermamoduln aus  $\mathcal{O}_{\mu}$  bilden eine Basis der Grothendieckgruppe  $[\mathcal{O}_{\mu}]$ . Das Korollar folgt damit aus 3.4.6.  $\square$

**Satz 3.4.12.** *Gegeben  $\rho$ -dominante Gewichte  $\lambda, \mu$  mit ganzer Differenz  $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$  und mit derselben Isotropiegruppe  $W_{\lambda} = W_{\mu}$  unter der dot-Operation liefert der Verschiebungsfunktor eine Äquivalenz von Kategorien*

$$T_{\lambda}^{\mu} : \mathcal{O}_{\lambda} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mu}$$

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, die mittels einer Adjunktion  $\alpha$  erklärten Abbildungen Isomorphismen

$$\hat{\alpha}_M : M \xrightarrow{\sim} T_\mu^\lambda T_\lambda^\mu M \quad \text{und} \quad \check{\alpha}_N : T_\lambda^\mu T_\mu^\lambda N \xrightarrow{\sim} N$$

sind für alle  $M \in \mathcal{O}_\lambda$ ,  $N \in \mathcal{O}_\mu$ . Wir führen das nur für die Erste unserer beiden Abbildungen aus. Per definitionem ist  $\hat{\alpha}_M$  das Bild der Identität auf  $T_\lambda^\mu M$  unter dem durch die Adjunktion gegebenen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_\mu(T_\lambda^\mu M, T_\lambda^\mu M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\lambda(M, T_\mu^\lambda T_\lambda^\mu M)$$

Aus  $T_\lambda^\mu M \neq 0$  folgt also  $\hat{\alpha}_M \neq 0$ . Da die Endomorphismen von Vermoduln genau die skalaren Vielfachen der Identität sind, ist nach 3.4.6 mithin  $\hat{\alpha}_M$  ein Isomorphismus für jeden Verma-Modul  $M = \Delta(x \cdot \lambda) \in \mathcal{O}_\lambda$ . Dann ist  $\hat{\alpha}_M$  auch ein Isomorphismus für jeden Modul  $M$  mit Vermafahne, nach dem Fünferlemma und Induktion. Nach 3.1.5.2 ist aber jedes Objekt von  $\mathcal{O}$  Quotient eines Objekts mit Vermafahne. Damit ist natürlich auch jedes Objekt von  $\mathcal{O}_\lambda$  Quotient eines Objekts von  $\mathcal{O}_\lambda$  mit Vermafahne. Für beliebiges  $M$  folgt dann die Behauptung mittels einer Zwei-Schritte-Auflösung durch Objekte mit Vermafahne und erneuter Anwendung des Fünferlemmas.  $\square$

**Korollar 3.4.13.** *Seien  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  mit  $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$  und  $W_\lambda = W_\mu$ . So gilt für alle  $x, y \in W_{\check{\lambda}} = W_{\check{\mu}}$  die Identität von Jordan-Hölder-Multiplizitäten*

$$[\Delta(x \cdot \lambda) : L(y \cdot \lambda)] = [\Delta(x \cdot \mu) : L(y \cdot \mu)]$$

*Beweis.* Wir haben eine Äquivalenz von Kategorien, die  $\Delta(x \cdot \lambda)$  auf  $\Delta(x \cdot \mu)$  abbildet und damit natürlich auch den eindeutigen einfachen Quotienten auf den eindeutigen einfachen Quotienten.  $\square$

### 3.5 Homomorphismen zwischen Vermamoduln

3.5.1. Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit einer Cartan'schen und sei  $R^+$  ein System von positiven Wurzeln.

**Satz 3.5.2 (Homomorphismen zwischen Vermamoduln).** *1. Jeder von Null verschiedene Homomorphismus zwischen zwei Vermamoduln ist injektiv;*

*2. Jeder Vermamodul hat genau einen einfachen Untermodul, und dieser einfache Untermodul ist auch selbst wieder ein Vermamodul;*

*3. Der Raum der Homomorphismen zwischen zwei Vermamoduln hat höchstens die Dimension Eins;*

4. Bezeichne  $\uparrow$  die stärkste reflexive transitive Relation auf  $\mathfrak{h}^*$  derart, daß gilt  $(s_\alpha \cdot \lambda) \uparrow \lambda$  für alle  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $\alpha \in R$  mit  $(s_\alpha \cdot \lambda) \leq \lambda$ . Andererseits stehe  $\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu)$  für die Aussage, daß sich  $\Delta(\lambda)$  als Untermodul in  $\Delta(\mu)$  einbetten läßt. So haben wir

$$\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu) \Leftrightarrow \lambda \uparrow \mu$$

3.5.3. Bezeichne  $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{g}$  die Summe der Wurzelräume zu positiven Wurzeln. Unser Satz kann auch aufgefaßt werden als eine Beschreibung des  $\mathfrak{h}$ -Moduls der  $\mathfrak{n}^+$ -Invarianten in einem beliebigen Vermamodul.

*Beweis.* 1. Ist  $A$  ein Ring, so ist jeder Homomorphismus des  $A$ -Linksmoduls  $A$  in sich selber die Multiplikation mit einem Element von  $A$  von rechts. Ist  $A$  ein nullteilerfreier Ring, so ist folglich jeder von Null verschiedene Homomorphismus des  $A$ -Linksmoduls  $A$  in sich selber injektiv. Bezeichne  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$  die Summe der Wurzelräume zu nichtpositiven Wurzeln. Wenden wir unsere Erkenntnis an auf die Einhüllende  $A = U(\mathfrak{n})$  und beachten, daß Vermamoduln als Moduln über  $U(\mathfrak{n})$  isomorph sind zu  $U(\mathfrak{n})$  selber, so ergibt sich die Behauptung.

2. Jeder Vermamodul ist frei über dem nullteilerfreien Ring  $U(\mathfrak{n})$  und damit auch torsionsfrei. Für  $u \in U(\mathfrak{n}), v \in \Delta(\lambda)$  folgt aus  $u \cdot v = 0$  also schon  $u = 0$  oder  $v = 0$ . Ein einfacher Modul  $L(\lambda)$  kann aber nur dann torsionsfrei sein über  $U(\mathfrak{n})$ , wenn er schon selbst ein Vermamodul ist,  $L(\lambda) = \Delta(\lambda)$ . Insbesondere ist jeder einfache Untermodul eines Vermamoduls selbst wieder ein Vermamodul. Für eine endlichdimensionale Lie-Algebra  $\mathfrak{n}$  kann es nun aber keine Einbettung

$$U(\mathfrak{n}) \oplus U(\mathfrak{n}) \hookrightarrow U(\mathfrak{n})$$

von  $U(\mathfrak{n})$ -Linksmoduln geben, denn die Bilder von  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  unter so einer Einbettung müßten für geeignetes  $n \in \mathbb{N}$  in  $U^{\leq n}(\mathfrak{n})$  liegen und wir hätten damit Einbettungen

$$U^{\leq i}(\mathfrak{n}) \oplus U^{\leq i}(\mathfrak{n}) \hookrightarrow U^{\leq n+i}(\mathfrak{n})$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  im Widerspruch dazu, daß  $\dim U^{\leq i}(\mathfrak{n})$  nach Poincaré-Birkhoff-Witt gegeben wird durch ein Polynom in  $i$ , genauer  $\dim U^{\leq i}(\mathfrak{n}) = \binom{i+d}{d}$  für  $d = \dim \mathfrak{n}$ . Ein Vermamodul kann damit nicht zwei verschiedene einfache Untermoduln besitzen, denn beide müßten Vermamoduln sein und Schnitt Null haben im Widerspruch zu unseren Betrachtungen zu Moduln über  $U(\mathfrak{n})$ .

3. Bezeichne  $\text{soc } \Delta(\lambda)$  den einfachen Untermodul von  $\Delta(\lambda)$ , d.h. seinen Sockel. Da nach Teil 1 jeder von Null verschiedene Homomorphismus von Verma-Moduln injektiv ist, verschwindet er auch nicht auf dem Sockel des Ausgangsmoduls. Gegeben Verma-Moduln  $\Delta(\lambda)$  und  $\Delta(\mu)$  folgern wir die dritte Behauptung nun aus



den Inklusionen

$$\mathcal{O}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \hookrightarrow \mathcal{O}(\text{soc } \Delta(\lambda), \Delta(\mu)) = \mathcal{O}(\text{soc } \Delta(\lambda), \text{soc } \Delta(\mu))$$

4. Der Beweis dieser Aussage kann erst nach einigen Vorbereitungen im Anschluß an 3.5.19 gegeben werden.  $\square$

**Definition 3.5.4.** Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung. Eine **Verschiebung durch die  $s$ -Wand** ist ein Funktor

$$\theta_s : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$$

der Gestalt  $\theta_s = T_\mu^0 T_0^\mu$  für ein  $\mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap \mathfrak{X}$  **auf der  $s$ -Wand**, d.h. mit  $W_\mu = \langle s \rangle$ .

*Vorschau 3.5.5.* Wir werden uns später überlegen, daß so eine Verschiebung durch die Wand bis auf natürliche Äquivalenz nicht von der Wahl der Stelle  $\mu$  auf der Wand abhängt. Die möglichen  $\mu$  sind übrigens genau alle ganzzahligen Linearkombinationen von fundamentalen dominanten Gewichten, in denen das fundamentale dominante Gewicht zu unserer einfachen Spiegelung den Koeffizienten  $-1$  hat und alle anderen Koeffizienten nichtnegativ sind.

**Lemma 3.5.6 (Eigenschaften von Verschiebungen durch Wände).** *Sei  $s$  eine einfache Spiegelung in Bezug auf unser System von positiven Wurzeln  $R^+$ . So gilt:*

1. *Jede Verschiebung  $\theta_s$  durch die  $s$ -Wand ist ein exakter und selbstadjungierter Funktor, der mit jeder Dualität vertauscht;*
2. *Die von unseren Adjunktionen  $\alpha : (T_0^\mu, T_\mu^0)$  und  $\omega : (T_\mu^0, T_0^\mu)$  induzierten Transformationen  $\hat{\alpha} : \text{id} \rightarrow \theta_s$  bzw.  $\hat{\omega} : \theta_s \rightarrow \text{id}$  liefern genau dann von Null verschiedene Abbildungen  $M \rightarrow \theta_s M$  beziehungsweise  $\theta_s M \rightarrow M$ , wenn gilt  $\theta_s M \neq 0$ ;*
3. *Wir haben  $\dim \mathcal{O}(\Delta, \theta_s \Delta) = \dim \mathcal{O}(\theta_s \Delta, \Delta) = 1$  für jeden Vermamodul  $\Delta$  aus  $\mathcal{O}_0$ ;*
4. *Wir haben  $\theta_s \Delta(x \cdot 0) \cong \theta_s \Delta(xs \cdot 0)$  für alle  $x \in W$ , und nehmen wir zusätzlich  $x < xs$  an, so gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$\Delta(x \cdot 0) \hookrightarrow \theta_s \Delta(x \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(xs \cdot 0)$$

*Vorschau 3.5.7.* Wir werden gleich zeigen können, daß die kurze exakte Sequenz aus 4 nicht spaltet: Sobald wir die Einbettung  $\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(xs \cdot 0)$  kennen, liefert die Annahme einer Spaltung nämlich einen Widerspruch zur Aussage von Teil 3.

*Beweis.* 1. Die entsprechenden Aussagen über Verschiebungsfunktoren aus 3.4.4 liefern sofort eine natürliche Äquivalenz  $\theta_s \circ d \xrightarrow{\sim} d \circ \theta_s$  und die Existenz von Adjunktionen  $(\theta_s, \theta_s)$ .

2. Unsere Adjunktionen liefern von Null verschiedene Abbildungen  $M \rightarrow \theta_s M$  beziehungsweise  $\theta_s M \rightarrow M$  genau dann, wenn gilt  $T_0^\mu M \neq 0$ . In der Tat kommen sie ja her von der Identität auf  $T_0^\mu M$  mittels der Adjunktionsisomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T_0^\mu M, T_0^\mu M) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(M, T_\mu^0 T_0^\mu M) \\ \text{Hom}(T_0^\mu M, T_0^\mu M) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T_\mu^0 T_0^\mu M, M) \end{aligned}$$

Schließlich liefert jedoch die Verschiebung aus der Wand  $T_\mu^0$  eine Injektion auf der Grothendieckgruppe nach 3.4.11, und die dort bewiesene Aussage zeigt genauer  $\theta_s M \neq 0 \Leftrightarrow T_0^\mu M \neq 0$ .

3. Das folgt mit den Adjunktionen  $(T_0^\mu, T_\mu^0)$  und  $(T_\mu^0, T_0^\mu)$  daraus, daß Vermamoduln auf die Wand gerückt Vermamoduln bleiben.

4. Als aus der Wand gerückter Vermamodul hat  $\theta_s \Delta(x \cdot 0) = T_\mu^0 \Delta(x \cdot \mu)$  nach 3.4.6 eine Vermafahne mit Subquotienten  $\Delta(x \cdot 0)$  und  $\Delta(xs \cdot 0)$ . Diese Vermafahne läßt sich tatsächlich in der behaupteten Weise anordnen, da sie sonst nach 1.4.6 spalten müßte und sich dann eben umsortieren ließe.  $\square$

3.5.8. Ich erinnere an die Bruhat-Ordnung [SPW] 3.3.2 auf der Weylgruppe. Sie kann dadurch charakterisiert werden, daß gegeben eine kürzestmögliche Darstellung  $w = s_1 \dots s_r$  eines Elements als Produkt von einfachen Spiegelungen die Menge  $\{x \in W \mid x \leq w\}$  mit der Menge aller Produkte von Teilausdrücken  $x = s_{i(1)} \dots s_{i(s)}$  zusammenfällt, für  $ss \geq 0$  und  $i : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  streng monoton wachsend. Daß jedoch diese Menge nicht von der Wahl der kürzestmöglichen Darstellung abhängt und daß wir so in der Tat eine partielle Ordnung erhalten, muß erst einmal bewiesen werden. Aus [SPW] 1.6.10 folgt sogar, daß jedes  $x \leq w$  unter den reduzierten Teilausdrücken unserer gegebenen kürzestmöglichen Darstellung zu finden ist.

**Proposition 3.5.9.** *Bezeichne  $\leq$  die Bruhat-Ordnung auf der Weylgruppe. So haben wir für alle  $x, y \in W$*

$$\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(y \cdot 0) \Leftrightarrow x \geq y$$

*Beweis.* Für diesen Beweis kürzen wir  $\Delta(x \cdot 0) = \Delta(x)$  ab und haben insbesondere  $\Delta(0) = \Delta(e)$  für  $e \in W$  das neutrale Element. Wir zeigen zunächst die Implikation  $\Leftarrow$  und gehen dazu in mehreren Schritten vor.

1. Nach 1.4.13 gilt  $\Delta(s) \subset \Delta(e)$  für alle einfachen Spiegelungen  $s \in S$ .

2. Für  $x, y \in W$  und  $s \in S$  mit  $x < xs, y < ys$  gilt

$$\Delta(x) \subset \Delta(y) \Rightarrow \Delta(xs) \subset \Delta(ys)$$

Um das zu sehen, wenden wir auf die linke Inklusion den Funktor  $\theta_s$  an und erhalten mithilfe von 3.5.6 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Delta(x) & \hookrightarrow & \theta_s \Delta(x) & \twoheadrightarrow & \Delta(xs) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta(y) & \hookrightarrow & \theta_s \Delta(y) & \twoheadrightarrow & \Delta(ys) \end{array}$$

Wäre hier die rechts induzierte Vertikale die Nullabbildung, so müßte die mittlere Vertikale über  $\Delta(y)$  faktorisieren. Da  $\theta_s$  exakt ist, ist jedoch die mittlere Vertikale injektiv, und wir erhielten auf diese Weise eine Injektion  $\theta_s \Delta(x) \hookrightarrow \Delta(y)$  und damit eine Injektion von  $U(\mathfrak{n})$ -Linksmoduln  $U(\mathfrak{n}) \oplus U(\mathfrak{n}) \hookrightarrow U(\mathfrak{n})$ . Die aber kann es nicht geben, wie wir bereits im Beweis von 3.5.2 gesehen hatten.

3. Für alle  $x \in W$  gilt  $\Delta(x) \subset \Delta(e)$ . Das folgt aus den ersten beiden Schritten mit Induktion über die Länge von  $x$ . Man kann das aber auch zeigen, ohne Punkt 2 zu verwenden, indem man die volle Kraft von 1.4.13 ausnutzt, die ja auch  $sx > x \Rightarrow \Delta(sx) \subset \Delta(x)$  liefert für alle einfachen Spiegelungen  $s \in S$ .

4. Wir zeigen als Zwischenschritt für jeden Vermamodul  $\Delta$  aus  $\mathcal{O}_0$ , daß jede Komposition von Abbildungen  $\Delta \rightarrow \theta_s \Delta \rightarrow \Delta$  verschwindet. Nach dem vorhergehenden Punkt, und da diese Morphismenräume eh höchstens eindimensional sind, dürfen wir uns hierbei auf den Fall  $\Delta = \Delta(e)$  beschränken. Unsere Adjunktionen zeigen in diesem Fall, daß die Homomorphismenräume von  $\Delta(e)$  oder  $\Delta(s)$  nach  $\theta_s \Delta(e) \cong \theta_s \Delta(s)$  eindimensional sind, und die Homomorphismenräume in der umgekehrten Richtung desgleichen. Die kanonische Abbildung  $\theta_s \Delta(e) \rightarrow \Delta(e)$  faktorisiert also über die Einbettung  $\Delta(s) \subset \Delta(e)$  und die Komposition von kanonischen Abbildungen  $\Delta(e) \hookrightarrow \theta_s \Delta(e) \rightarrow \Delta(e)$  ist folglich in der Tat Null.

5. Wir zeigen für alle  $x \in W$  und  $s \in S$ , daß gilt

$$xs > x \Rightarrow \Delta(xs) \subset \Delta(x)$$

Nach dem vorhergehenden Punkt faktorisiert nämlich die von Null verschiedene kanonische Abbildung  $\Delta(xs) \rightarrow \theta_s \Delta(xs)$  über den Kern der kanonischen Abbildung  $\theta_s \Delta(xs) \rightarrow \Delta(xs)$ , als da heißt über  $\Delta(x)$ .

6. Ist  $x = s_1 s_2 \dots s_l$  eine reduzierte Darstellung von  $x$  und haben wir  $y$  mit  $y \leq x$ , so gibt es nach unserer Charakterisierung der Bruhatordnung 3.5.8 geeignete  $t_i \in \{s_i, e\}$  mit  $y = t_1 t_2 \dots t_l$  und sogar so, daß die vom neutralen Element  $e$  verschiedenen  $t_i$  eine reduzierte Darstellung von  $y$  bilden. Mit 2 und 5 folgern wir nun induktiv  $\Delta(s_1 s_2 \dots s_i) \subset \Delta(t_1 t_2 \dots t_i)$  für alle  $i$ .

7. Die andere Implikation  $\Delta(x) \subset \Delta(y) \Rightarrow x \geq y$  folgt sofort aus dem anschließenden Lemma.  $\square$

**Lemma 3.5.10.** *Seien  $x, y \in W$ . So gilt  $[\Delta(y \cdot 0) : L(x \cdot 0)] \neq 0 \Leftrightarrow x \geq y$ .*

*Beweis.* Wir kürzen stärker  $\Delta(x \cdot 0) = \Delta(x) = \Delta_x$  ab und ähnlich  $P(x \cdot 0) = P_x$  sowie  $L(x \cdot 0) = L_x$ . Die Implikation  $\Leftarrow$  folgt aus der Implikation  $\Leftarrow$  in 3.5.9 alias der Inklusion  $\Delta_x \subset \Delta_y$  für  $x \geq y$ , die ja bereits bewiesen ist. Es gilt noch  $\Rightarrow$  zu zeigen. Gegeben  $x \in W$  und  $s \in S$  mit  $x < xs$  bemerken wir zunächst  $[\theta_s L_{xs} : L_x] \neq 0$ . In der Tat haben wir nämlich

$$\mathcal{O}(\Delta_x, \theta_s L_{xs}) = \mathcal{O}(\theta_s \Delta_x, L_{xs}) \supset \mathcal{O}(\Delta_{xs}, L_{xs}) \neq 0$$

mit dem letzten Teil von 3.5.6. Ist also  $x = s \dots t$  eine reduzierte Darstellung von  $x$  als Produkt einfacher Spiegelungen, so folgern wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} [\theta_s \dots \theta_t L_x : L_e] \neq 0 &\Rightarrow \mathcal{O}(\Delta_e, \theta_s \dots \theta_t L_x) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{O}(\theta_t \dots \theta_s \Delta_e, L_x) \neq 0 \\ &\Rightarrow P_x \text{ ist Summand von } \theta_t \dots \theta_s \Delta_e \\ &\Rightarrow ([P_x : \Delta_y] \neq 0 \Rightarrow [\theta_t \dots \theta_s \Delta_e : \Delta_y] \neq 0) \\ &\Rightarrow ([P_x : \Delta_y] \neq 0 \Rightarrow y \leq x) \end{aligned}$$

In der Tat hat ja  $\theta_t \dots \theta_s \Delta_e$  eine Vermaform mit Subquotienten  $\Delta_z$ , wo  $z$  über die Multimenge aller Teilausdrücke des Worts  $s \dots t$  läuft. Aus  $[P_x : \Delta_y] \neq 0$  folgt also  $x \geq y$ , und die Reziprozitätsformel 3.3.9 liefert die Behauptung.  $\square$

3.5.11. Damit ist 3.5.9 vollständig bewiesen, als da heißt, im Hauptblock  $\mathcal{O}_0$  werden die Homomorphismen zwischen Vermamoduln vollständig kontrolliert durch die Bruhat-Ordnung auf der Weylgruppe. Als nächstes behandeln wir allgemeiner Blöcke mit ganzem Parameter und müssen einige kombinatorische Vorbereitungen treffen.

**Lemma 3.5.12.** *Seien  $R \supset R^+$  ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln,  $(W, S)$  seine Weylgruppe mit den einfachen Spiegelungen,  $S_\iota \subset S$  eine Teilmenge der Menge der einfachen Spiegelungen und  $W_\iota \subset W$  das Erzeugnis von  $S_\iota$ . So haben wir:*

1. *In jeder Nebenklasse aus  $W/W_\iota$  gibt es genau einen Repräsentanten kleinster Länge und genau einen Repräsentanten größter Länge. Sie sind auch für die Bruhat-Ordnung die kleinsten bzw. größten Elemente ihrer Nebenklasse.*
2. *Bezeichnet  $W^\iota \subset W$  die Menge der kürzesten Repräsentanten, so gilt für alle  $x \in W^\iota$  und  $y \in W_\iota$  die Formel  $l(xy) = l(x) + l(y)$ .*

*Ergänzung 3.5.13.* Dasselbe gilt analog für jedes Coxetersystem  $(W, S)$ .

*Beweis.* Bezeichne  $R_\iota \subset R$  die Menge aller derjenigen Wurzeln, die sich aus den einfachen Wurzeln zu Spiegelungen aus  $S_\iota$  linear kombinieren lassen. Sicher ist  $R_\iota$  ein Wurzelsystem in dem von ihm aufgespannten Teilraum. Offensichtlich stabilisiert jedes  $s \in S_\iota$  die Menge  $R^+ \setminus R_\iota$ . Gegeben  $w \in W$  ist nun  $R_\iota \cap (wR^+)$  ein System positiver Wurzeln in  $R_\iota$  und es gibt folglich genau ein  $v \in W_\iota$  mit  $v(R_\iota \cap (wR^+)) = R_\iota \cap R^+$ . Da die Länge eines Elements nach [SPW] 2.2.15 genau die Zahl der positiven Wurzeln ist, die von ihm negativ gemacht werden, ist  $x = vw$  notwendig das kürzeste Element der Linksnebenklasse  $W_\iota w$  und für alle  $y \in W_\iota$  gilt  $l(yx) = l(y) + l(x)$ . Das zeigt die analoge Aussage für Linksnebenklassen. Die im Lemma behauptete Aussage für Rechtsnebenklassen folgt durch Invertieren.  $\square$

**Proposition 3.5.14.** *Gegeben  $\mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap \mathfrak{X}$  ein ganzes  $\rho$ -dominantes Gewicht und  $x, y \in W^\mu$  kürzeste Repräsentanten von Nebenklassen aus  $W/W_\mu$  gilt*

$$\Delta(x \cdot \mu) \subset \Delta(y \cdot \mu) \Leftrightarrow x \geq y$$

*Beweis.* Um die Implikation  $\Leftarrow$  zu zeigen, rückt man die Einbettung  $\Delta(x \cdot 0) \subset \Delta(y \cdot 0)$  mit  $T_0^\mu$  an die Stelle  $\mu$ . Um die andere Implikation  $\Rightarrow$  zu zeigen, folgern wir aus  $\Delta(x \cdot \mu) \subset \Delta(y \cdot \mu)$  der Reihe nach

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T_0^\mu \Delta(x \cdot 0), \Delta(y \cdot \mu)) &\neq 0 && \text{wegen } T_0^\mu \Delta(x \cdot 0) \cong \Delta(x \cdot \mu), \\ \text{Hom}(\Delta(x \cdot 0), T_\mu^0 \Delta(y \cdot \mu)) &\neq 0 && \text{wegen der Adjunktion } (T_0^\mu, T_\mu^0), \text{ und} \\ \text{Hom}(\Delta(x \cdot 0), \Delta(yu \cdot 0)) &\neq 0 && \text{für ein } u \in W_\mu \text{ wegen 3.4.6.} \end{aligned}$$

Mit dem Hauptblock-Fall 3.5.9 folgt dann  $x \geq yu \geq y$ .  $\square$

3.5.15. Gegeben  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  ist  $W_{\bar{\lambda}}$  kanonisch isomorph zur Weylgruppe des Wurzelsystems  $R_{\bar{\lambda}}$ . Das System positiver Wurzeln  $R^+ \cap R_{\bar{\lambda}}$  definiert folglich eine partielle Ordnung auf  $W_{\bar{\lambda}}$ , die wir „die Bruhatordnung auf  $W_{\bar{\lambda}}$ “ nennen und  $\geq_{\bar{\lambda}}$  notieren.

**Satz 3.5.16.** *Gegeben  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  und  $x, y \in W_{\bar{\lambda}}$  kürzeste Repräsentanten von Nebenklassen aus  $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$  gilt mit  $\geq_{\bar{\lambda}}$  der Bruhat-Ordnung auf  $W_{\bar{\lambda}}$  die Regel*

$$\Delta(x \cdot \lambda) \subset \Delta(y \cdot \lambda) \Leftrightarrow x \geq_{\bar{\lambda}} y$$

*Beweis.* Ganz genauso wie der Beweis für den bisher behandelten Spezialfall  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap \mathfrak{X}$  mit zwei Ausnahmen: Erstens sollten wir uns klarmachen, daß es für jede einfache Spiegelung  $s \in W_{\bar{\lambda}}$  tatsächlich ein  $\mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^* \cap (\lambda + \mathfrak{X})$  gibt mit  $W_\mu = \langle s \rangle$ . Das überlassen wir dem Leser. Zweitens benötigen wir für jede einfache Spiegelung  $s \in W_{\bar{\lambda}}$  eine Einbettung  $\Delta(s \cdot \lambda) \subset \Delta(\lambda)$ . Das leistet die anschließende Proposition 3.5.17.  $\square$

**Proposition 3.5.17.** *Gegeben  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  beliebig und  $s \in W$  eine Spiegelung mit  $(s \cdot \lambda) \leq \lambda$  gilt  $\Delta(s \cdot \lambda) \subset \Delta(\lambda)$ .*

*Beweis.* Zunächst einmal zeigen wir das für  $\lambda$  ganz und regulär. In diesem Fall haben wir ja  $\lambda = z \cdot \mu$  für eindeutig bestimmte  $z \in W$  und  $\mu \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  und es gilt, aus  $(sz \cdot \mu) \leq (z \cdot \mu)$  zu folgern  $sz \geq z$  in der Bruhat-Ordnung. Nun bedeutet unsere Ungleichung  $(sz \cdot \mu) \leq (z \cdot \mu)$  aber geometrisch gerade, daß die Spiegelebene  $L$  von  $s$  den Alkoven  $B$  von  $(z \cdot \mu)$  und den Alkoven  $A$  von  $\mu$  nicht trennt. Mit ?? folgt erst  $l(sz) > l(z)$  und dann  $sz \geq z$  wie gewünscht. Jetzt behandeln wir den allgemeinen Fall. Hier beruht das Argument auf dem folgenden Lemma, das wir im Anschluß beweisen.

**Lemma 3.5.18.** *Für jedes ganze Gewicht  $\nu \in \mathfrak{X}$  ist die Menge*

$$\{\tau \in \mathfrak{h}^* \mid \Delta(\tau + \nu) \subset \Delta(\tau)\}$$

*abgeschlossen in  $\mathfrak{h}^*$  für die Zariski-Topologie.*

Daraus folgt dann die Proposition, denn ist sagen wir  $\alpha$  die Wurzel zu  $s$  und setzen wir  $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle = n$ , betrachten die Hyperebene  $H$  aller  $\tau \in \mathfrak{h}^*$  mit  $\langle \tau + \rho, \alpha^\vee \rangle = n$  und nehmen  $\nu = -n\alpha$ , so gilt  $(s \cdot \tau) = \tau + \nu$  für alle  $\tau \in H$  und nach dem schon Bewiesenen haben wir  $\Delta(\tau + \nu) \subset \Delta(\tau)$  für alle regulären  $\tau \in \mathfrak{X} \cap H$ . Da diese jedoch in  $H$  Zariski-dicht liegen, folgt diese Inklusion mit 3.5.18 für alle  $\tau \in H$  und insbesondere für  $\lambda$ .  $\square$

*Beweis von Lemma 3.5.18.* Gegeben Vektorräume  $V, W$  endlicher Dimension ist die Menge aller Injektionen sicher Zariski-offen in  $\text{Hom}(V, W)$  und die Menge der Nicht-Injektionen folglich Zariski-abgeschlossen. Identifizieren wir alle  $\Delta(\lambda)$  mit dem festen Vektorraum  $U(\mathfrak{n})$  mittels ihres kanonischen Erzeugers  $v_\lambda$  und ist  $\nu \in \mathfrak{X}$  fest gewählt, so wird für  $\alpha \in R$  die Operation eines Elements  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  eine von  $\lambda$  abhängige lineare Abbildung

$$\varphi_\alpha(\lambda) : U(\mathfrak{n})_\nu \rightarrow U(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha}$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß wir auf diese Weise eine algebraische Abbildung  $\varphi_\alpha : \mathfrak{h}^* \rightarrow \text{Hom}(U(\mathfrak{n})_\nu, U(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha})$  erhalten. Die  $\lambda$  mit  $\Delta(\lambda + \nu) \subset \Delta(\lambda)$  können nun beschrieben werden als das Urbild der Nicht-Injektionen unter der algebraischen Abbildung  $\mathfrak{h}^* \mapsto \text{Hom}(U(\mathfrak{n})_\nu, \bigoplus_{\alpha \in R^+} U(\mathfrak{n})_{\nu+\alpha})$ , die jedem  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  die Spaltenmatrix der  $\varphi_\alpha(\lambda)$  zuordnet.  $\square$

3.5.19. Wir haben nun Satz 3.5.16 vollständig bewiesen und damit die Homomorphismen zwischen Vermamoduln sogar noch expliziter beschrieben als im eingangs formulierten Satz 3.5.2. Der Vollständigkeit halber müssen wir jedoch auch noch die dort gegebene Beschreibung ableiten.

*Beweis von 3.5.2.4.* Wir zeigen also noch

$$\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu) \Leftrightarrow \lambda \uparrow \mu$$

Die Implikation  $\Leftarrow$  ist schon klar nach 3.5.17. Zum Nachweis der anderen Implikation schreiben wir  $\lambda = x \cdot \tau$  und  $\mu = y \cdot \tau$  mit  $\tau \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  und  $x, y \in W_{\bar{\tau}}$  und es reicht, aus  $x \geq_{\bar{\tau}} y$  zu folgern  $(x \cdot \tau) \uparrow (y \cdot \tau)$ . Zu zeigen ist also nur, daß für eine Spiegelung  $s \in W_{\bar{\tau}}$  mit  $l_{\bar{\tau}}(sy) > l_{\bar{\tau}}(y)$  gilt  $(sy \cdot \tau) \uparrow (y \cdot \tau)$ . Das folgt jedoch aus ??, angewandt auf die affine Spiegelungsgruppe  $W_{\bar{\tau}} \subset \text{Aff}(\tau + \langle R_{\bar{\tau}} \rangle_{\mathbb{Q}})$ .  $\square$

**Satz 3.5.20.** *Es gilt  $[\Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \uparrow \mu$ .*

*Beweis.* Die Implikation  $\Leftarrow$  folgt sofort aus der eben bewiesenen Inklusion von Vermamoduln  $\Delta(\lambda) \subset \Delta(\mu)$ . Die andere Implikation zeigt man wie ihren Spezialfall 3.5.10.  $\square$

**Satz 3.5.21 (Verschieben einfacher Moduln auf Wände).** *Seien gegeben Gewichte  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  mit ganzer Differenz und  $W_{\lambda} \subset W_{\mu}$ . Sei  $x \in W_{\bar{\lambda}}$  der größte Repräsentant aus seiner Nebenklasse in  $W_{\bar{\lambda}}/W_{\lambda}$ . So haben wir*

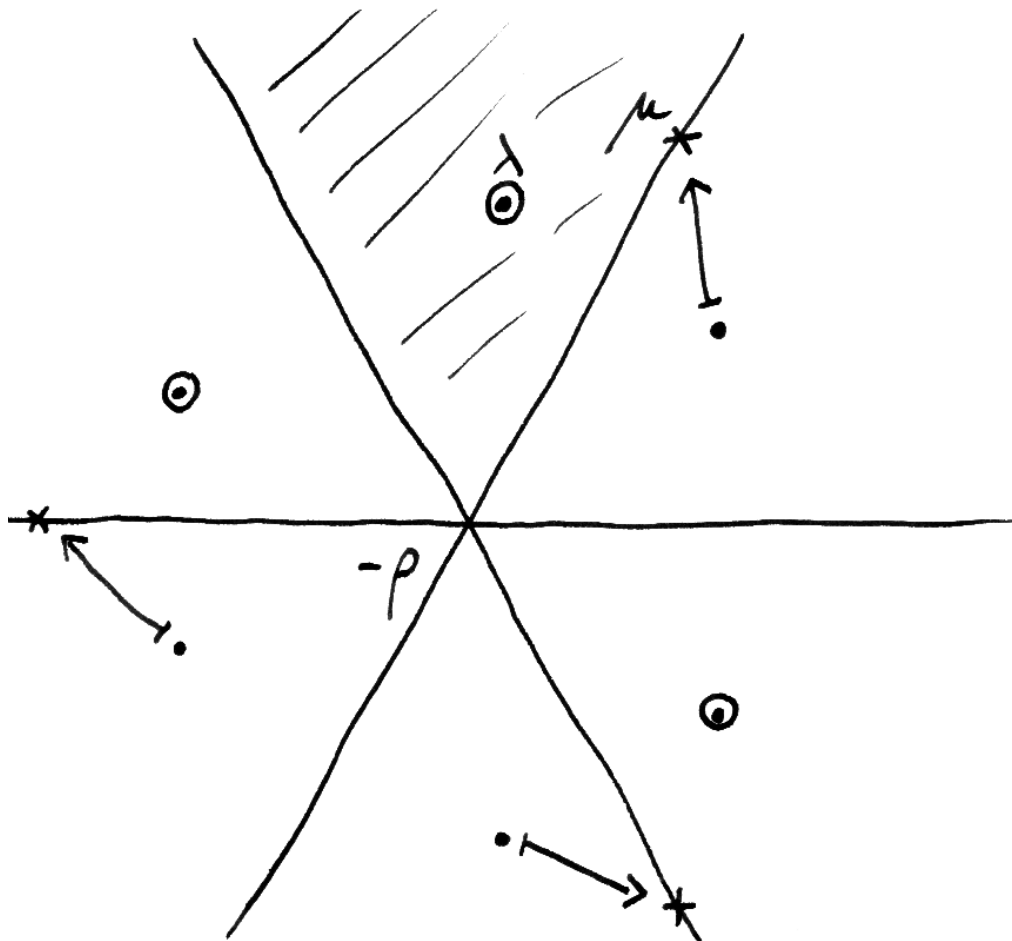
$$T_{\lambda}^{\mu} L(x \cdot \lambda) \cong \begin{cases} L(x \cdot \mu) & \text{falls } x \text{ auch der größte Repräsentant} \\ & \text{aus seiner Nebenklasse in } W_{\bar{\mu}}/W_{\mu} \text{ ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.5.22. Man kann die Bedingung in Satz 3.5.21 auch geometrischer fassen wie folgt: Für jede Spiegelung auf einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachtet man die dreiteilige Partition in die zwei offenen Halbräume und die Spiegelhyperebene. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe betrachtet man die größte Partition des affinen Raums, die feiner ist als diese Partition für jede der Spiegelebenen. Die Stücke dieser Partition heißen die **Facetten** unserer affinen Spiegelungsgruppe. Ist unsere Spiegelungsgruppe endlich und zeichnen wir einen Alkoven  $A$  als dominant aus, so definieren wir zu einer Facette  $F$  ihren **oberen Abschluß**  $\hat{F}$  als

$$\hat{F} = \bigcap_{H \supset F} H \cap \bigcap_{H_A^+ \supset F} H_A^+ \cap \bigcap_{H_A^- \supset F} \bar{H}_A^-$$

wo der Schnitt über alle Spiegelhyperebenen  $H$  läuft. Dann haben wir für beliebige  $x \in W_{\bar{\lambda}}$  in der Situation des Satzes  $T_{\lambda}^{\mu} L(x \cdot \lambda) = L(x \cdot \mu)$  genau dann, wenn  $x \cdot \mu$  im oberen Abschluß der Facette von  $x \cdot \lambda$  liegt, für die Operation von  $W_{\bar{\lambda}}$  auf  $\lambda + \langle R_{\bar{\lambda}} \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Andernfalls gilt  $T_{\lambda}^{\mu} L(x \cdot \lambda) = 0$ .

*Beweis.* Schiebt man einen einfachen Modul auf Wände, so erhält man einen einfachen Modul oder Null. In der Tat ist jeder einfache Modul das Bild eines Homomorphismus von einem Vermamodul in einen Nablamodul und umgekehrt hat



Die eingekringelten Punkte aus der Bahn von  $\lambda$  unter der dot-Operation der Weylgruppe zeigen die Gewichte  $x \cdot \lambda$  mit  $T_x^\mu L(x \cdot \lambda) = 0$ , bei denen eben „von der Seite der positiven Weylkammer her auf die Wand gerückt wird“. Die Pfeile deuten dahingegen an, auf welche Einfachen in der Wand die anderen Einfachen außerhalb der Wand geschoben werden.



jeder von Null verschiedene derartige Homomorphismus einfaches Bild. Folglich kommen für  $T_\lambda^\mu L(x \cdot \lambda)$  überhaupt nur die Alternativen  $L(x \cdot \mu)$  und 0 in Betracht. Ist  $x$  nicht der größte Repräsentant seiner Nebenklasse aus  $W_{\bar{\mu}}/W_\mu$ , so finden wir in dieser Nebenklasse ein  $y$ , das noch größer ist. Da  $x$  maximal war in seiner Nebenklasse aus  $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$ , folgt  $(y \cdot \lambda) \neq (x \cdot \lambda)$  und  $L(x \cdot \lambda)$  ist ein Quotient des Kokerns der Inklusion  $\Delta(y \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(x \cdot \lambda)$ . Beim Verschieben auf die Wände wird diese Inklusion jedoch nach 3.4.6 eine Inklusion von einem Vermamodul in sich selber, folglich muß ihr Kokern bei diesem Verschieben sterben. Es bleibt damit nur zu zeigen, daß diejenigen einfachen Moduln, denen das vorhergehende Argument eine Überlebenschance einräumt, auch tatsächlich die Verschiebung auf die Wand überleben. Mithilfe der Vermamoduln erkennt man jedoch, daß das Verschieben eine Surjektion  $T_\lambda^\mu : [\mathcal{O}_\lambda] \twoheadrightarrow [\mathcal{O}_\mu]$  auf den Grothendieckgruppen liefert. Das zeigt, daß in der Tat die übrigen Einfachen alle am Leben bleiben müssen.  $\square$

**Korollar 3.5.23.** *Seien  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  mit  $\lambda - \mu \in \mathfrak{X}$  und  $W_\lambda \subset W_\mu$ . So gilt für alle  $x, y \in W_{\bar{\lambda}} = W_{\bar{\mu}}$  mit  $y$  maximal in seiner Nebenklasse  $yW_\mu$  die Identität von Jordan-Hölder-Multiplizitäten*

$$[\Delta(x \cdot \lambda) : L(y \cdot \lambda)] = [\Delta(x \cdot \mu) : L(y \cdot \mu)]$$

*Beweis.* Der Verschiebungsfunktor  $T_\lambda^\mu$  ist ein exakter Funktor, der  $\Delta(x \cdot \lambda)$  auf  $\Delta(x \cdot \mu)$  abbildet, einfache Objekte auf einfache Objekte oder auf Null, das Objekt  $L(y \cdot \lambda)$  auf  $L(y \cdot \mu)$ , und kein nicht zu  $L(y \cdot \lambda)$  isomorphes einfaches Objekt von  $\mathcal{O}$  auf  $L(y \cdot \mu)$ .  $\square$

3.5.24. Wir sehen insbesondere, daß wir aus den Multiplizitäten der Vermamoduln im Hauptblock bereits die Multiplizitäten aller Vermamoduln mit ganzem höchsten Gewicht herleiten können.

3.5.25 (**Multiplizitäten im subgenerischen Fall**). Sei  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{dom}}^*$  gegeben derart, daß seine ganzzahlige Weylgruppe genau zwei Elemente hat, sagen wir  $W_{\bar{\lambda}} = \{e, s\}$ , und die Isotropiegruppe von  $\lambda$  trivial ist, in Formeln  $s \cdot \lambda \neq \lambda$ . So haben wir nach 3.5.2 eine kurze exakte Sequenz

$$\Delta(s \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda) \twoheadrightarrow L(\lambda)$$

Wegen  $\Delta(s \cdot \lambda) = L(s \cdot \lambda)$  nach 2.6.10 liefert diese Sequenz bereits alle Multiplizitäten von Vermamoduln im Block  $\mathcal{O}_\lambda$ .

3.5.26 (**Einige weitere Multiplizitäten**). Wir erinnern unsere Notation  $\Delta_x = \Delta(x \cdot 0)$  und betrachten den Isomorphismus  $\Delta : \mathbb{Z}W \xrightarrow{\sim} [\mathcal{O}_0]$ , der gegeben wird

durch  $x \mapsto [\Delta_x]$  für  $x \in W$ . Unsere Formeln 3.5.6 für die Verschiebung von Vermamoduln durch die Wand zeigen  $\theta_s \circ \Delta = \Delta \circ (\cdot(1+s))$  für jede einfache Spiegelung  $s \in W$ . Wir erklären nun  $C_x \in \mathbb{Z}W$  durch die Vorschrift  $\Delta(C_x) = [P_x]$  alias

$$C_x := \sum_{y \in W} [P_x : \Delta_y]_{\Delta} y$$

Aus der Reziprozitätsformel und unseren Erkenntnissen über Homomorphismen von Vermamoduln folgt  $[P_x : \Delta_e]_{\Delta} \geq 1$  und  $[P_x : \Delta_x]_{\Delta} = 1$ . Wir wissen, daß  $\theta_s P_x$  projektiv ist, also  $\theta_s P_x \cong \bigoplus_{z \in W} P_z^{\oplus m(z)}$  für geeignete Vielfachheiten  $m(z) \geq 0$ . Es folgt  $C_x(1+s) = \sum_{z \in W} m(z)C_z$  mit  $m(z) \geq 0$ . Besitzt nun  $W$  genau zwei einfache Spiegelungen  $s$  und  $t$ , so betrachten wir im Gruppenring die Elemente  $D_x := \sum_{y \leq x} y$  und finden durch elementare Rechnung

$$D_x(1+s) = \begin{cases} 2D_x & \text{falls } xs < x; \\ D_{xs} + D_{xt} & \text{falls } xs > x \text{ und } x \neq e; \\ D_{xs} & \text{falls } x = e \text{ oder } x = t. \end{cases}$$

Im Fall  $sts = tst$  alias  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3; \mathbb{C})$  überzeugt man sich nun leicht, daß wir notwendig  $C_x = D_x$  erhalten und damit

$$[\Delta_x : L_y] = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \geq x; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In derselben Weise erhält man im Fall einer beliebigen halbeinfachen Liealgebra für ein  $\rho$ -dominantes Gewicht  $\lambda$  mit  $|W_{\bar{\lambda}}| \leq 6$  und beliebige  $\mu, \nu \in W_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda$  die Multiplizitäten

$$[\Delta(\mu) : L(\nu)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu \uparrow \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im allgemeinen liegen die Verhältnisse jedoch nicht so einfach, wie im weiteren ausgeführt werden soll.

## 4 Kazhdan-Lusztig-Theorie

### 4.1 Die Iwahori-Hecke-Algebra

4.1.1. Gegeben  $G \supset B$  eine Gruppe mit einer endlichen Untergruppe können wir im Gruppenring  $\mathbb{Z}G$  mit der Konvolution  $*$  als Multiplikation die additive Untergruppe  $\mathcal{H}(G, B)$  der  $B$ -Biinvarianten betrachten. Eine  $\mathbb{Z}$ -Basis dieser Untergruppe bilden die charakteristischen Funktionen der  $B$ -Doppelnebenklassen. Die Untergruppe  $\mathcal{H}(G, B) \subset \mathbb{Z}G$  ist zwar abgeschlossen unter der Konvolution, besitzt jedoch im allgemeinen in Bezug auf diese Multiplikation kein Einselement. Um das zu korrigieren führen wir auf  $\mathcal{H}(G, B)$  eine neue Multiplikation ein durch die Vorschrift

$$f *_B g := \frac{1}{|B|}(f * g)$$

und erhalten so einen Ring mit der charakteristischen Funktion von  $B$  als Einselement, die sogenannte **Hecke-Algebra** zu  $G \supset B$ .

4.1.2 (**Ursprung der Terminologie**). In ?? werde ich diskutieren, wie man diese Konstruktion auf den Fall einer beliebigen Untergruppe  $B$  verallgemeinern kann, und inwiefern gewisse Erzeuger der Hecke-Algebra zu  $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R}) \supset \mathrm{GL}(2; \mathbb{Z})$  dann gerade den Operatoren entsprechen, die Hecke in die Theorie der Modulformen eingeführt hat und denen unsere Hecke-Algebra ihren Namen verdankt.

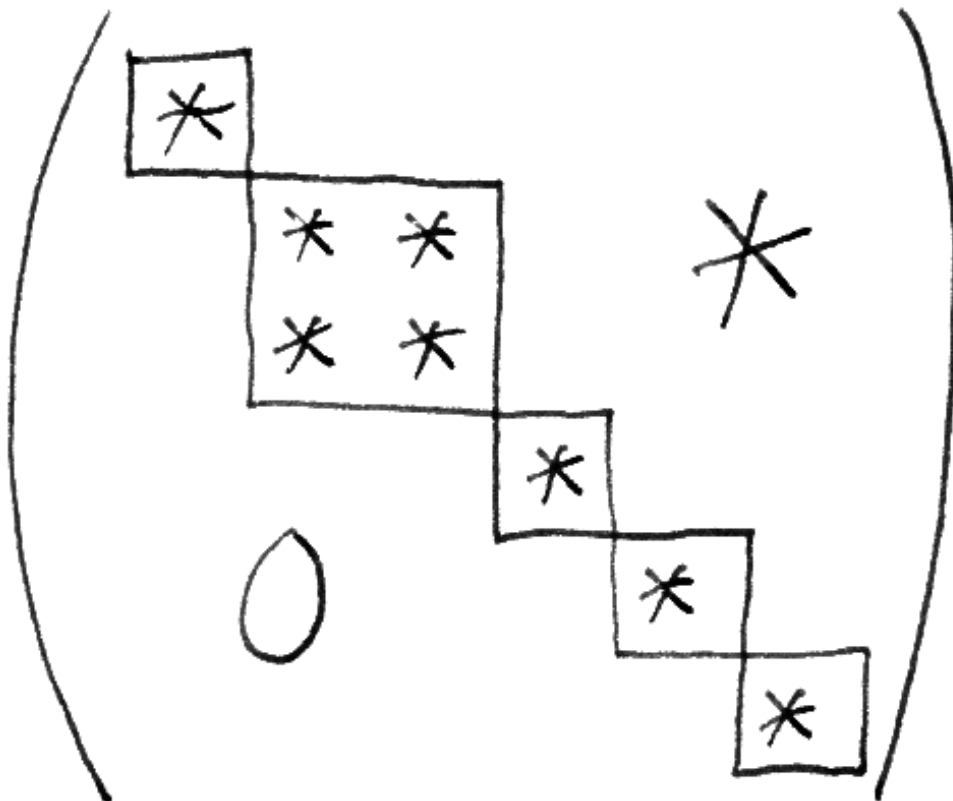
4.1.3. Bezeichne  $\mathbb{F}_q$  den endlichen Körper mit  $q$  Elementen. Wir interessieren uns für den Fall der endlichen Gruppe  $G = \mathrm{GL}(n; \mathbb{F}_q)$  mit der Untergruppe  $B$  der oberen Dreiecksmatrizen. Nach [LA1] ?? ist  $G$  die disjunkte Vereinigung der  $B$ -Doppelnebenklassen zu Permutationsmatrizen, in Formeln

$$\mathrm{GL}(n; \mathbb{F}_q) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB$$

Die charakteristischen Funktionen  $T_x$  der Doppelnebenklassen  $BxB$  für  $x \in \mathcal{S}_n$  bilden folglich eine  $\mathbb{Z}$ -Basis der Hecke-Algebra  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, B)$ . Bezeichne  $l(x)$  die Zahl der Fehlstände alias die **Länge** der Permutation  $x$  in Bezug auf die Menge  $S$  der Transpositionen benachbarter Elemente, die genau die einfachen Spiegelungen sind in Bezug auf das durch  $B$  gegebene System positiver Wurzeln. Wir behaupten für die Multiplikation  $*_B$  in dieser Heckealgebra, die wir von nun an einfach durch Hintereinanderschreiben notieren, die Formeln

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q-1)T_s && \text{für } s \text{ von der Länge } l(s) = 1. \end{aligned}$$

In der Tat kennen wir aus Übung [LA2] 5.2.7 für die Kardinalitäten der Doppelnebenklassen die Formel  $|BxB| = q^{l(x)}|B|$ . Für  $x, y$  mit  $l(x) + l(y) = l(xy)$  liefert



Die Untergruppe  $B \sqcup BsB$  im Fall der Transposition benachbarter Elemente  $s = (2, 3)$  in der  $GL(6)$ .

die Multiplikation  $BxB \times_B ByB \rightarrow G$  sicher eine Abbildung, deren Bild  $BxyB$  umfaßt. Ein Vergleich der Kardinalitäten zeigt dann, daß sie sogar eine Bijektion mit  $BxyB$  liefern muß, und das zeigt die erste Formel. Ist  $s \in \mathcal{S}_n$  von der Länge  $l(s) = 1$ , also die Vertauschung zweier benachbarter Elemente von  $\{1, \dots, n\}$ , so erkennt man leicht, daß  $B \sqcup BsB$  eine Untergruppe ist, nämlich die Untergruppe aller invertierbaren Block-obere-Dreiecksmatrizen mit lauter  $(1 \times 1)$ -Blöcken aber einem  $(2 \times 2)$ -Block auf der Diagonalen, und daß diese Untergruppe genau  $(q+1)|B|$  Elemente hat. Es folgt  $(T_s + T_e) * (T_s + T_e) = (q+1)|B|(T_s + T_e)$  und in der Hecke-Algebra mit dem neutralen Element  $1 = T_e$  gilt folglich  $(T_s + 1)^2 = (q+1)(T_s + 1)$  alias  $T_s^2 = (q-1)T_s + q$ .

*Vorschau 4.1.4.* Haben wir allgemeiner eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe über dem endlichen  $q$ -elementigen Körper  $\mathbb{F}_q$  mit einer Borel'schen und bezeichnet  $G \supset B$  die zugehörigen endlichen Gruppen  $\mathbb{F}_q$ -wertiger Punkte, so gilt das Vorhergehende entsprechend, sobald wir in unserer Borel'schen eine Cartan'sche wählen und statt mit  $\mathcal{S}_n$  allgemeiner mit der zugehörigen Weylgruppe  $W$  und der darauf durch die Borel'sche festgelegten Längenfunktion arbeiten. Die Elemente der Länge Eins heißen in dieser Allgemeinheit die „einfachen Spiegelungen“.

**Lemma 4.1.5 (Universelle Strukturkonstanten).** *Für die symmetrische Gruppe  $W := \mathcal{S}_n$  mit dem System einfacher Spiegelungen  $S := \{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$  gibt es eindeutig bestimmte Polynome  $c_{x,y}^z$  im Polynomring  $\mathbb{Z}[q]$  derart, daß bei Einsetzen einer beliebigen Primzahlpotenz für  $q$  in unserer Hecke-Algebra aus 4.1.3 gilt*

$$T_x T_y = \sum_z c_{x,y}^z(q) T_z$$

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist klar und nur die Existenz ist noch zu zeigen. Ist  $y = s$  eine einfache Spiegelung, so haben wir  $T_x T_s = T_{xs}$  falls  $xs > x$  und  $T_x T_s = T_{xs} T_s^2 = qT_{xs} + (q-1)T_x$  falls  $xs < x$  und die Existenz ist auch klar. Im allgemeinen schreibe man  $T_y = T_s \dots T_r$  für  $y = s \dots r$  eine reduzierte Darstellung. □

**Satz 4.1.6 (Iwahori-Hecke-Algebra für  $\mathcal{S}_n$ ).** *Für die symmetrische Gruppe  $W := \mathcal{S}_n$  mit dem System einfacher Spiegelungen  $S := \{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$  gibt es auf dem freien Modul  $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q] T_x$  über dem Polynomring  $\mathbb{Z}[q]$  zur Basis  $W$  genau eine assoziative  $\mathbb{Z}[q]$ -bilineare Verknüpfung derart, daß gilt*

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q-1)T_s && \text{für } s \in S. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Eindeutigkeit scheint mir offensichtlich. Um die Existenz einer derartigen Verknüpfung zu zeigen, mag man schlicht eine Verknüpfung definieren

durch die im vorhergehenden Lemma 4.1.5 eingeführten Polynome  $c_{x,y}^z$  mittels der Vorschrift

$$T_x T_y = \sum_z c_{x,y}^z T_z$$

Das einzige Problem ist der Nachweis der Assoziativität der so erklärten Verknüpfung. Unser freier  $\mathbb{Z}[q]$ -Modul mit Verknüpfung läßt sich jedoch durch Spezialisieren von  $q$  zu allen Primzahlpotenzen einbetten in das Produkt aller zuvor betrachteten konkreten Hecke-Algebren aus 4.1.3. In der Tat ist das Produkt dieser Spezialisierungsabbildungen injektiv, da jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat. Da alle konkreten Hecke-Algebren assoziativ sind, muß das auch für unsere Iwahori-Hecke-Algebra gelten.  $\square$

**Satz 4.1.7 (Iwahori-Hecke-Algebra eines Coxetersystems).** *Gegeben ein Coxetersystem  $(W, S)$  gibt es auf dem freien Modul  $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$  über dem Polynomring  $\mathbb{Z}[q]$  zur Basis  $W$  genau eine assoziative  $\mathbb{Z}[q]$ -bilineare Verknüpfung derart, daß gilt*

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= qT_e + (q-1)T_s && \text{für } s \in S. \end{aligned}$$

*Beweis.* Diese weitreichende Verallgemeinerung von 4.1.6 zeigt man im Fall einer Diedergruppe  $S = \{s, t\}$ , indem man auf dem freien  $\mathbb{Z}[q]$ -Modul  $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$  Endomorphismen  $(T_s \cdot)$  und  $(T_t \cdot)$  und  $(\cdot T_s)$  und  $(\cdot T_t)$  erklärt durch

$$(T_s \cdot) : T_x \mapsto \begin{cases} T_{sx} & \text{falls } sx > x; \\ qT_{sx} + (q-1)T_x & \text{falls } sx < x, \end{cases}$$

und analoge Regeln in den drei anderen Fällen. Dann prüft man durch explizite Rechnung, daß  $(T_s \cdot)$  und  $(T_t \cdot)$  mit  $(\cdot T_s)$  und  $(\cdot T_t)$  jeweils kommutieren. Die Endomorphismen unseres freien  $\mathbb{Z}[q]$ -Moduls, die mit  $(\cdot T_s)$  und  $(\cdot T_t)$  kommutieren, bilden dann offensichtlich eine Ringalgebra mit den behaupteten Eigenschaften. Im allgemeinen betrachtet man die von den in derselben Weise definierten Endomorphismen  $(T_s \cdot)$  von  $\bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q]T_x$  und folgert aus dem bereits behandelten Diederfall, daß sie die Zopfrelationen erfüllen. Da man nun nach [SPW] ?? zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein und desselben Elements einer Coxetergruppe mit Zopfrelationen hin- und hergehen kann, folgert man leicht, daß die von diesen Endomorphismen erzeugte Unterringalgebra die behaupteten Eigenschaften besitzt.  $\square$

*Ergänzung 4.1.8.* Gegeben ein Coxetersystem  $(W, S)$  und ein Kring  $R$  und eine Abbildung  $S \rightarrow R$ ,  $s \mapsto q_s$  mit der Eigenschaft, daß gilt  $q_s = q_t$  falls  $ts$  ungerade

Ordnung hat, gibt es auf dem freien Modul  $\bigoplus_{x \in W} RT_x$  über dem Kring  $R$  zur Basis  $W$  genau eine assoziative  $R$ -bilineare Verknüpfung derart, daß gilt

$$\begin{aligned} T_x T_y &= T_{xy} && \text{falls } l(x) + l(y) = l(xy); \\ T_s^2 &= q_s T_e + (q_s - 1) T_s && \text{für } s \in S. \end{aligned}$$

Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe. Meist wählt man  $R = \mathbb{Z}[Q, q]$  und spricht dann von **Hecke-Algebren mit verschiedenen Parametern**.

**4.1.9 (Varianten der Heckealgebra).** Vielfach betrachtet man statt der im vorhergehenden Satz erklärten Hecke-Algebra

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q] T_x$$

auch Varianten mit nach  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  oder sogar nach  $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$  erweiterten Skalaren und bezeichnet diese Algebren mit demselben Buchstaben  $\mathcal{H}$ . Der Ausdruck  $q^{1/2}$  meint in diesem Zusammenhang nur ein formales Symbol, dessen Quadrat  $q$  sein soll. Wir führen stattdessen ein neues Symbol  $v$  ein mit  $v^{-2} = q$  und bezeichnen den Ring der Laurentpolynome in  $v$  mit  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$  und arbeiten also in Formeln ausgedrückt meist mit der Algebra

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] T_x = \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}[q]} \left( \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z}[q] T_x \right)$$

Das Tensorieren ist dabei bezüglich der Einbettung  $\mathbb{Z}[q] \hookrightarrow \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$  mit  $q \mapsto v^{-2}$  gemeint und ganz rechts unsere Hecke-Algebra aus [4.1.7](#) verstanden werden soll.

**4.1.10 (Beschreibung der Heckealgebra durch Erzeuger und Relationen).** Die Hecke-Algebra  $\mathcal{H}(W, S)$  zu einem Coxetersystem  $(W, S)$  vom Schluß der vorhergehenden Bemerkung [4.1.9](#) kann mit der Abkürzung  $q = v^{-2}$  und der Terminologie aus [\[NAS\] 1.10.2](#) auch beschrieben werden als die  $\mathcal{L}$ -Ringalgebra mit den Erzeugern  $\{T_s\}_{s \in S}$ , den quadratischen Relationen  $(T_s + 1)(T_s - q) = 0$  sowie den sogenannten Zopf-Relationen  $T_s T_t \dots T_s = T_t T_s \dots T_t$  beziehungsweise  $T_s T_t T_s \dots T_t = T_t T_s T_t \dots T_s$  wenn gilt  $st \dots s = ts \dots t$  beziehungsweise  $sts \dots t = tst \dots s$  für  $s, t \in S$ . Das folgt ohne Schwierigkeiten aus der Erkenntnis [\[SPW\] ??](#), daß man zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein und desselben Elements einer Coxetergruppe mit Zopfrelationen hin- und hergehen kann.

## 4.2 Die kanonische Basis der Heckealgebra

**4.2.1.** Sei  $(W, S)$  ein Coxeter-System,  $l : W \rightarrow \mathbb{N}$  die zugehörige Längenfunktion und  $\leq$  die Bruhat-Ordnung auf  $W$ . Insbesondere bedeutet  $x < y$  also  $x \leq y$ ,

$x \neq y$ . Bezeichne  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$  den Ring der Laurentpolynome über  $\mathbb{Z}$  in einer Variablen  $v$ . Auf dem freien  $\mathcal{L}$ -Modul

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathcal{L}T_x$$

über  $W$  gibt es nach 4.1.10 genau eine Struktur einer assoziativen  $\mathcal{L}$ -Algebra mit  $T_x T_y = T_{xy}$  falls  $l(x) + l(y) = l(xy)$  und  $T_s^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_s$  für alle  $s \in S$ . Diese assoziative Algebra  $\mathcal{H}$  nennen wir im folgenden die **Hecke-Algebra** von  $(W, S)$ . Sie ist unitär mit Eins-Element  $T_e$ , wir schreiben auch oft  $T_e = 1$ .

4.2.2. Die Hecke-Algebra kann in leichter Abwandlung von 4.1.10 auch beschrieben werden als die unitäre assoziative  $\mathcal{L}$ -Algebra mit den Erzeugern  $\{H_s\}_{s \in S}$  (für  $H_s = vT_s$ ), den quadratischen Relationen

$$(H_s + v)(H_s - v^{-1}) = 0 \quad \text{alias} \quad H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v)H_s$$

sowie den sogenannten Zopf-Relationen  $H_s H_t \dots H_s = H_t H_s \dots H_t$  beziehungsweise  $H_s H_t H_s \dots H_t = H_t H_s H_t \dots H_s$  wenn gilt  $st \dots s = ts \dots t$  beziehungsweise  $sts \dots t = tst \dots s$  für  $s, t \in S$ . Alle  $H_s$  sind invertierbar, genauer prüft man leicht die Formel

$$H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$$

4.2.3. Wir arbeiten von nun an mit  $H_x = v^{l(x)}T_x$ . Sicher gilt auch  $H_x H_y = H_{xy}$  falls  $l(x) + l(y) = l(xy)$ . Mit den  $H_s$  sind also auch alle  $H_x$  Einheiten in  $\mathcal{H}$ . Wir können involutive alias selbstinverse Ringautomorphismen  $a, b : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definieren durch die Regeln

$$\begin{aligned} a(v) &= -v, & a(H_y) &= (-1)^{l(y)} H_y, \\ b(v) &= -v^{-1}, & b(H_x) &= H_x. \end{aligned}$$

Wir können weiter involutive Ringantiautomorphismen  $\delta, i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  erklären durch die Regeln

$$\begin{aligned} \delta(v) &= v^{-1}, & \delta(H_x) &= H_x^{-1}, \\ i(v) &= v, & i(H_x) &= H_{x^{-1}}. \end{aligned}$$

Diese vier Involuntionen kommutieren paarweise und definieren mithin eine Operation von  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  auf  $\mathcal{H}$ , die für nichtkommutatives  $W$  sogar treu ist. Insbesondere ist  $d = i\delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein involutiver Automorphismus von  $\mathcal{H}$ , die sogenannte **Dualität**. Indem man  $H_x$  als ein Produkt von  $H_s$  mit  $s \in S$  schreibt, prüft man leicht

$$d(H_x) \in H_x + \sum_{y < x} \mathcal{L}H_y$$

Die Dualität  $d$  spielt in der Theorie der Kazhdan-Lusztig-Polynome eine fundamentale Rolle. Wir schreiben oft  $d(H) = \overline{H}$ , es gilt also  $\overline{\overline{v}} = v^{-1}$  und  $\overline{\overline{H}_x} = (H_{x^{-1}})^{-1}$ . Wir nennen  $H \in \mathcal{H}$  **selbstdual**, wenn gilt  $\overline{\overline{H}} = H$ .



**Satz 4.2.4.** Sei  $(W, S)$  ein Coxetersystem. Für alle  $x \in W$  gibt es genau ein selbstduales  $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$  mit der Eigenschaft

$$\underline{H}_x \in H_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$$

4.2.5. In [KL79] wird unser  $\underline{H}_x$  mit  $C'_x$  bezeichnet. Kazhdan und Lusztig arbeiten mit der Variablen  $q = v^{-2}$  und mit der  $\mathcal{L}$ -Basis der  $T_x$ . Wir werden gleich sehen, daß die  $\underline{H}_x$  eine  $\mathcal{L}$ -Basis der Heckealgebra bilden. Sie heißt die **kanonische selbstduale Basis** oder kurz **kanonische Basis**.

4.2.6 (**Die Kazhdan-Lusztig-Vermutungen**). Seien  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra und  $R^+$  ein System positiver Wurzeln. Ebenfalls in [KL79] wird die Vermutung ausgesprochen, daß unsere Elemente

$$C_x := \sum_{y \in W} [P_x : \Delta_y]_{\Delta} y = \sum_{y \in W} [\Delta_y : L_x]_{\Delta} y$$

des Gruppenrings  $\mathbb{Z}W$  aus 3.5.26, die die Jordan-Hölder-Multiplizitäten der Vermoduln beschreiben, die Bilder der kanonischen Basis der Heckealgebra unter dem durch  $v \mapsto 1$  gegebenen Ringhomomorphismus  $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}W$  sind, in Formeln  $\underline{H}_x \mapsto C_x$  bei  $v \mapsto 1$ . Das ist mittlerweile bewiesen und ich will im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen einen Beweis vorstellen.

*Beweis.* Die Existenz und Eindeutigkeit folgen sofort aus den beiden anschließenden Lemmata 4.2.7 und 4.2.8. Alternativ kann man das Theorem auch aus der sehr allgemeinen Proposition ?? folgern.  $\square$

**Lemma 4.2.7.** Es gibt für alle  $x \in W$  ein selbstduales  $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$  mit  $\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y < x} v\mathbb{Z}[v]H_y$ .

*Beweis.* Wir wissen ja schon, daß gilt  $\overline{H}_s = H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$  für alle  $s \in S$ . Insbesondere ist  $H_s + v$  selbstdual, und sobald wir die Eindeutigkeit der  $\underline{H}_x$  gezeigt haben, können und werden wir  $H_s + v$  mit  $\underline{H}_s$  abkürzen. Die Rechtsmultiplikation von  $(H_s + v)$  auf  $\mathcal{H}$  wird beschrieben durch die Formeln

$$H_x(H_s + v) = \begin{cases} H_{xs} + vH_x & \text{falls } xs > x; \\ H_{xs} + v^{-1}H_x & \text{falls } xs < x. \end{cases}$$

Wir zeigen nun das Lemma durch Induktion über die Bruhat-Ordnung. Sicher können wir die Induktion mit  $\underline{H}_e = H_e = 1$  beginnen. Sei nun  $x \in W$  gegeben und sei die Existenz von  $\underline{H}_y$  bekannt für alle  $y < x$ . Falls  $x \neq e$  finden wir  $s \in S$  mit  $xs < x$  und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\underline{H}_{xs}(H_s + v) = H_x + \sum_{y < x} h_y H_y$$

für geeignete  $h_y \in \mathbb{Z}[v]$ . Wir bilden

$$\underline{H}_x = \underline{H}_{xs}(H_s + v) - \sum_{y < x} h_y(0)\underline{H}_y$$

und unsere Induktion läuft.  $\square$

**Lemma 4.2.8.** Für  $H \in \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$  folgt aus  $H = \overline{H}$  schon  $H = 0$ .

*Beweis.* Sicher gilt  $H_x \in \underline{H}_x + \sum_{y < x} \mathcal{L}\underline{H}_y$  für  $\underline{H}_x$  wie in der schon gezeigten Behauptung 4.2.7 und folglich  $\overline{H}_x \in H_x + \sum_{y < x} \mathcal{L}H_y$  für alle  $x \in W$ . Schreiben wir nun  $H = \sum h_y H_y$  und wählen  $z$  maximal mit  $h_z \neq 0$ , so folgt aus  $H = \overline{H}$  schon  $h_z = \overline{h}_z$  im Widerspruch zu  $h_z \in v\mathbb{Z}[v]$ . Das zeigt die Behauptung und das Lemma ist bewiesen.  $\square$

**Definition 4.2.9.** In einer abelschen Gruppe  $E$  mit Involution  $d$  bezeichne  $E^+ \subset E$  die Untergruppe der selbstdualen Elemente  $E^+ := \{e \in E \mid de = e\}$ .

**Proposition 4.2.10.** Die selbstdualen Elemente der Hecke-Algebra bilden einen freien Modul  $\mathcal{H}^+$  über  $\mathcal{L}^+ = \mathbb{Z}[(v + v^{-1})]$  mit Basis  $\underline{H}_x$  mit  $x \in W$ . Als Algebra über  $\mathcal{L}^+$  wird  $\mathcal{H}^+$  erzeugt von den  $\underline{H}_s$  mit  $s \in S$ .

*Beweis.* Offensichtlich bilden die  $\underline{H}_x$  eine  $\mathcal{L}$ -Basis von  $\mathcal{H}$ , und  $\sum h_x \underline{H}_x$  ist selbstdual genau dann, wenn alle  $h_x$  es sind. Die induktive Konstruktion der  $\underline{H}_x$  zeigt sogar, daß alle  $\underline{H}_x$  in der  $\mathbb{Z}$ -Unteralgebra von  $\mathcal{H}$  liegen, die von den  $\underline{H}_s$  mit  $s \in S$  erzeugt wird.  $\square$

## 5 Danksagung

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten, insbesondere Catharina Stoppel, Olaf Schnürer und auch Christoph Geiss. Eine wesentliche Quelle war für mich der Text [Hum70] von Humphreys und natürlich Bourbaki, insbesondere [Bou81]. Weiter war auch [Kna96] sehr hilfreich sowie ein Skript von Dragan Miličić.

## 6 Die Vorlesung Darstellungstheorie im SS 16

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also  $4 \times 45$  Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 19.4 Beginn der Darstellungstheorie endlicher Gruppen nach [NAS] 1.1, aber nicht Darstellungen als Multikategorie [NAS] 1.2.1. Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring [NAS] 1.3, aber nicht freie abelsche Gruppen mit Involution [NAS] 1.3.9.
- 22.4 Satz von Jordan-Hölder für Moduln [NAS] 1.5.11. Halbeinfache Moduln [NAS] 1.6. Isotypische Anteile [NAS] 1.6.9 und Sockel. Dichtesatz von Jacobson [NAS] 1.7.1.
- 26.4 Lemma von Schur [NAS] 2.1.1. Nicht Darstellungen von Produkten. Satz von Maschke [NAS] 2.3.1. Diskrete Fouriertransformation [NAS] 2.4.2. Spuren in Algebren [NAS] 2.5.1. Charaktere und Charakter-Projektor-Formel [NAS] 2.5.9.
- 28.4 Orthogonalitätsrelationen für Charaktere [NAS] 2.5.11, [NAS] 2.5.13, [NAS] 2.5.16 und Matrixkoeffizienten [NAS] 2.8.7. Dimension irreduzibler Darstellungen [NAS] 2.5.18. Inverse Fouriertransformation und Matrixkoeffizienten [NAS] 2.8.2.
- 3.5 Irreduzible Darstellungen von Produkten [NAS] 2.2.3. Haar'sche Maße als Radonmaße auf lokal kompakten Hausdorffgruppen [ML] ?? ohne Beweis. Charaktere der irreduziblen endlichdimensionalen stetigen Darstellungen Orthonormalsystem in den Klassenfunktionen, mit dichtem Erzeugnis in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz [ML] ??, beides noch ohne Beweis.
- 10.5 Orthogonalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten [ML] ?? und Charaktere [ML] ?? auf kompakten Hausdorffgruppen.
- 12.5 Untergruppen als Untermannigfaltigkeiten [ML] 1.2.2. Deren Tangentialraum und die Exponentialabbildung [ML] 1.2.10. Beispiele  $O(n)$  und  $SL(n; \mathbb{R})$ . Angefangen mit dem Kommutator auf dem Tangentialraum.
- 24.5 Lie-Algebra einer Matrix-Liegruppe [ML] 1.3. Adjungierte Darstellung [ML] 1.3.3. Lie-Algebren von Schnitten. Einparameteruntergruppen [ML] 1.4.1, [ML] 1.4.3. Homomorphismen von Matrix-Liegruppen [ML] 1.4.7. Noch nicht gezeigt, daß das Differential mit der Lieklammer verträglich ist.

- 31.5 Verträglichkeit von Differential und Lie-Klammer. Ableiten von Darstellungen. Ableiten der adjungierten Darstellung. Verflechtungsoperatoren für Liegruppen und Liealgebren. Unterdarstellungen für Liegruppen und Liealgebren. Einfache Darstellungen von Liegruppen und Liealgebren.
- 2.6 Irreduzible Darstellungen von  $SU(2)$ ,  $SO(3)$  und  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  nach [ML] 2.3.2, [ML] 2.3.5, [ML] 2.3.9. Klassifikation der kompakten zusammenhängenden Liegruppen nach [ML] 5.5.3 ohne Beweis. Beispiele niedrigen Ranges, noch nicht  $U(n)$ .
- 7.6 Ausführlich  $U(n)$  besprochen, mit maximalen Tori, Weylgruppe, Wurzelsystem, nach [ML] 5.5.2 und [ML] 5.5.6. Geometrie endlicher Spiegelungsgruppen nach [SPW] 1.6.1, insbesondere frei transitive Operation auf der Menge der Alkoven und erzeugt von Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven. Klassifikation irreduzibler Darstellungen durch höchstes Gewicht begonnen.
- 9.6 Klassifikation durch das höchste Gewicht [ML] 5.8.5, Surjektivität steht noch aus. Weyl'sche Integrationsformel [ML] 5.9.1 ohne Beweis.
- 14.6 Weyl'sche Formeln bewiesen bis auf Dimensionsformel und Integrationsformel. Klassifikation durch das höchste Gewicht beendet.
- 16.6 Dimensionsformel und Integrationsformel bewiesen.
- 21.6 Irreduzible, einfache, halbeinfache, reduktive Liealgebren [?] ??. Liealgebren kompakter Liegruppen reaktiv. Universelle einhüllende Algebra [?] ??.
- 23.6 Struktur halbeinfacher komplexer Lie-Algebren. Cartan'sche und ihr Bezug zu maximalen Tori, Wurzelsystem, Wurzelraumzerlegung, Weylgruppe. Verma-Moduln, speziell im Fall  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ . Frei über  $U(n)$ . Noch nicht: Eindeutiger einfacher Quotient, universelle Eigenschaft.
- 28.6 Eindeutiger einfacher Quotient, universelle Eigenschaft von Verma-Moduln. Kostant'sche Partitionsfunktion. Endlichdimensionale Darstellungen. Casimir-Operator begonnen.
- 30.6 Casimir-Operator, Kostant'sche Charakterformel [?] ??. Weyl'sche Charakterformel nocheinmal bewiesen.
- 5.7 Vermamoduln und Hauptseriendarstellungen. Harish-Chandra-Isomorphismus, noch ohne Injektivität und Surjektivität. Chevalley-Isomorphismus noch ohne Beweis, aber Beispiel  $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ .

- 7.7 Herleitung des Chevalley-Isomorphismus und des Harish-Chandra-Isomorphismus.
- 12.7 Zentrale Charaktere, einfache Verma-Moduln, Kategorie  $\mathcal{O}$ . Noch nicht den interessanten Fall von Beispiel  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  behandelt.
- 14.7 Hauptblock von  $\mathcal{O}$  im Fall  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  als Darstellungen von Köcher. Blockzerlegung von  $\mathcal{O}$ . Projektive Verma-Moduln, Existenz von genug Projektiven mit Verma-Fahne.
- 19.7 Verschiebungsfunktoren, deren Effekt auf Verma-Moduln, Äquivalenz durch Verschiebung.
- 21.7 BGG-Reziprozität, Verschiebung durch die Wand, Multiplizitäten in Verma-Moduln im Hauptblock von  $\mathfrak{sl}(3; \mathbb{C})$ , Hecke-Algebra der symmetrischen Gruppe, Kazhdan-Lusztig-Vermutung.

## Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*;
- [Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4–6*, Masson, 1981.
- [GR] *Skriptum Grundlagen*;
- [HL] *Skriptum halbeinfache Lie-Algebren*;
- [Hum70] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, GTM, vol. 9, Springer, 1970.
- [Kac90] Victor G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3 ed., Cambridge University Press, 1990.
- [KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie*;
- [KL79] David Kazhdan and George Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, *Inventiones* **53** (1979), 191–213.
- [Kna96] Anthony W. Knaapp, *Lie groups beyond an introduction*, Birkhäuser, 1996.
- [LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*;
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;
- [ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*;
- [NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie*;
- [SPW] *Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*;
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*;
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;
- [Vog81] David A. Vogan, Jr., *Representations of real reductive Lie groups*, *Progress in Mathematics*, vol. 15, Birkhäuser, 1981.

## Index

- adjungierte Gruppe, 55
- auf der  $s$ -Wand, 89
- Augmentation, 15
- Augmentationsideal, 15
- augmentierten Ring, 15
- Bahn
  - ganzahlige, 69
- BGG-Reziprozität, 81
- Cartan'sche
  - absolute, 55
- ch  $V$  Charakter
  - bei Liealgebra, 38
- Charakter
  - bei Liealgebra, 38
  - Darstellung von Liealgebra, 38
- Charakterformel, Weyl'sche, 38
- Charakterring
  - erweiterter, 39
- Dimensionsformel
  - Weyl'sche, für Darstellungen, 35
- $\rho$ -dominant, 77
- dot-Operation, 30
- Dualität
  - der Heckealgebra, 104
- Einhüllende, 14
- Erweiterter Charakterring, 39
- extremen Gewichte, 46
- Facette
  - von Spiegelungsgruppe, 95
- frei
  - Ringalgebra, 16
- Freudenthal's Formel, 42
- Funktion
  - polynomiale, 54
- ganzahlige Weylgruppe von  $\lambda$ , 66
- ganzahlige Wurzelsystem von  $\lambda$ , 66
- Gewicht
  - $\rho$ -dominantes, 77
  - fundamentales dominantes, 7
- Gewicht, höchstes, 6
- Gewichte, 4
- Gewichte, dominante ganze, 7
- Gewichte, ganze, 7
- Gewichtsraum, 4, 71
- $\mathcal{H}$ , Hecke-Algebra, 104
- Harish-Chandra-Isomorphismus, 54
- Hauptblock
  - von  $\mathcal{O}$ , 78
- Hecke-Algebra, 99
- höchste Wurzel, 8, 13
- Induktion
  - bei Liealgebrendarstellungen, 33
- Invarianten, 54
  - von Liealgebra, 34
- $\bar{\kappa}$  Isomorphismus zu Killingform, 39
- kanonische Basis
  - der Heckealgebra, 105
- kanonischer Erzeuger, 26
- Kategorie  $\mathcal{O}$ , 71
- Klimyk, Formel von, 46
- Koinduktion
  - bei Liealgebrendarstellungen, 33
- Koinvarianten
  - von Liealgebra, 34
- Kostant'sche Charakterformel, 43
- $\mathcal{L}$ , Laurentpolynome, 104
- Modulradikal, 29
- monoton, 20



Nennerformel, Weyl'sche, 44  
 oberen Abschluß, 95  
 opponiert  
     Algebra, 21  
 $P_\mu(E)$  Multimenge der Gewichte von  $E$ ,  
     47  
 Partitionsfunktion, Kostant'sche, 26  
 Poincaré-Birkhoff-Witt, 16  
 polynomiale Funktion, 54  
 Potenzradikal, 29  
 prinzipalen Antiautomorphismus, 22  
 Produktion  
     bei Liealgebrendarstellungen, 33  
 Radikal  
     Modulradikal, 29  
     Potenzradikal, 29  
     von Modul, 29  
 $S(V)$  symmetrische Algebra, 22  
 Schurpolynom, 48  
 Steinberg, Formel von, 47  
 $\text{Sym}(V)$  symmetrische Algebra, 22  
 symmetrisch  
     Algebra, 22  
 System der auf  $\Lambda$  ganzzahligen Wurzeln,  
     66  
 $T(V)$  Tensoralgebra, 17  
 $\text{Ten}(V)$  Tensoralgebra, 17  
 Tensoralgebra, 17  
 Tensoridentität, 51  
 translation functor, 82  
 universelle einhüllende Algebra, 14  
 Verma-Fahne, 72  
 Verma-Modul, 24  
 Verschiebung, 82  
     auf Wände, 84  
     aus Wänden, 84  
     durch Wand, 89  
 $W(R)$  Weylgruppe von  $R$ , 4  
 Weyl  
     Dimensionsformel, 35  
 $Weyl(R)$  Weylgruppe von  $R$ , 4  
 Weylgruppe  
     von halbeinfacher Liealgebra, 4  
 zentraler Charakter, 65  
 Zentrum  
     eines Rings, 53