

# MANNIGFALTIGKEITEN UND LIEGRUPPEN

Wolfgang Soergel

25. April 2024

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Matrixliegruppen</b>                           | <b>4</b>   |
| 1.1      | Einfache Darstellungen der Drehgruppen . . . . .  | 4          |
| 1.2      | Tangentialraum und Exponentialabbildung . . . . . | 8          |
| 1.3      | Liealgebren von Matrixliegruppen . . . . .        | 19         |
| 1.4      | Homomorphismen von Matrixliegruppen . . . . .     | 25         |
| 1.5      | Drehgruppe und Spingruppe . . . . .               | 33         |
| 1.6      | Quaternionale Gruppen . . . . .                   | 34         |
| <b>2</b> | <b>Endlichdimensionale Darstellungen</b>          | <b>38</b>  |
| 2.1      | Darstellungen und ihre Ableitungen . . . . .      | 38         |
| 2.2      | Homomorphismen von Darstellungen . . . . .        | 42         |
| 2.3      | Einfache Darstellungen der Spingruppe . . . . .   | 47         |
| 2.4      | Haarmaß für Matrixliegruppen . . . . .            | 55         |
| 2.5      | Vollständig reduzible Darstellungen . . . . .     | 58         |
| 2.6      | Kugelfunktionen* . . . . .                        | 64         |
| <b>3</b> | <b>Mannigfaltigkeiten</b>                         | <b>70</b>  |
| 3.1      | Geringste Räume . . . . .                         | 70         |
| 3.2      | Mannigfaltigkeiten und Eckfaltigkeiten . . . . .  | 75         |
| 3.3      | Tangentialräume . . . . .                         | 84         |
| 3.4      | Tangentialbündel . . . . .                        | 92         |
| 3.5      | Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten . . . . .     | 98         |
| 3.6      | Flußwege und Flüsse . . . . .                     | 101        |
| 3.7      | Lieklammer von Vektorfeldern . . . . .            | 107        |
| <b>4</b> | <b>Liegruppen und Liealgebren</b>                 | <b>114</b> |
| 4.1      | Lieklammer und adjungierte Darstellung . . . . .  | 114        |
| 4.2      | Kompakte Liealgebren . . . . .                    | 121        |
| 4.3      | Von Liealgebren zu Liegruppen . . . . .           | 123        |
| 4.4      | Quotienten und homogene Räume . . . . .           | 128        |
| 4.5      | Abelsche Liegruppen . . . . .                     | 135        |
| 4.6      | Morphismen von Tori . . . . .                     | 140        |
| <b>5</b> | <b>Struktur kompakter Liegruppen</b>              | <b>143</b> |
| 5.1      | Maximale Tori in kompakten Liegruppen . . . . .   | 143        |
| 5.2      | Klassifikation im Rang Eins . . . . .             | 147        |
| 5.3      | Weylgruppen kompakter Liegruppen . . . . .        | 152        |
| 5.4      | Gitterspiegelungsgruppen . . . . .                | 154        |
| 5.5      | Struktur der kompakten Liegruppen . . . . .       | 156        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.6      | Spiegelungen in der Weylgruppe . . . . .              | 164        |
| 5.7      | Klassifikation der kompakten Liegruppen* . . . . .    | 168        |
| 5.8      | Einfache Darstellungen kompakter Liegruppen . . . . . | 174        |
| 5.9      | Differentialformen und Integration . . . . .          | 177        |
| 5.10     | Die Weyl'schen Formeln . . . . .                      | 182        |
| 5.11     | Der Hamilton'sche Formalismus* . . . . .              | 190        |
| <b>6</b> | <b>Danksagung</b>                                     | <b>197</b> |
| <b>7</b> | <b>Die Vorlesung Darstellungstheorie im SS 16</b>     | <b>198</b> |
| <b>8</b> | <b>Nichtkommutative Algebra und Symmetrie SS 19</b>   | <b>201</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>                           | <b>204</b> |
|          | <b>Indexvorwort</b>                                   | <b>205</b> |
|          | <b>Index</b>  | <b>206</b> |

# 1 Matrixliegruppen

## 1.1 Einfache Darstellungen der Drehgruppen

1.1.1. Zur besseren Motivation der im folgenden entwickelten Theorie bespreche ich zunächst die Klassifikation der endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe. Die Beweise der im folgenden aufgestellten Behauptungen werden nach etwas auf sich warten lassen, sie sollen gerade den Aufbau der Theorie in den folgenden Abschnitten motivieren. Ich beginne mit einer Klärung einiger Grundbegriffe der Darstellungstheorie, wie sie in [NAS] 1.1 ausführlicher besprochen werden.

**Definition 1.1.2.** Eine **Darstellung**, englisch und französisch **representation**, einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  ist ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum  $V$  und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

Oft bezeichnen wir eine Darstellung abkürzend mit demselben Symbol wie den zugrundeliegenden Vektorraum. Gegeben eine Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$  bezeichnet oft  $\rho_V$  den zugehörigen Gruppenhomomorphismus  $\rho_V : G \rightarrow \text{GL}(V)$ .

1.1.3 (**Herkunft der Terminologie**). Im Fall  $V = k^n$  ist  $\text{GL}(V) = \text{GL}(n; k)$  kanonisch isomorph zur Gruppe der invertierbaren  $(n \times n)$ -Matrizen. Ist der Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(n; k)$  dann auch noch injektiv, so „stellt  $\rho$  die abstrakte Gruppe  $G$  dar als eine konkrete Gruppe von Matrizen“. Daher rührt die Bezeichnung als „Darstellung“.

1.1.4 (**Darstellungen als Operationen**). Seien  $G$  eine Gruppe,  $k$  ein Körper und  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Die Bijektion  $\text{Ens}(G, \text{Ens}(V, V)) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(G \times V, V)$  des Exponentialgesetzes induziert dann eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Darstellungen} \\ G \rightarrow \text{GL}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} G\text{-Operationen } G \times V \rightarrow V \\ \text{durch } k\text{-lineare Abbildungen} \end{array} \right\}$$

Unter einer „ $G$ -Operation durch  $k$ -lineare Abbildungen“ verstehen wir dabei eine  $G$ -Operation  $G \times V \rightarrow V$  auf der Menge  $V$  mit der Eigenschaft, daß gilt  $g(v + w) = gv + gw$  und  $g(\lambda v) = \lambda(gv) \forall g \in G, \lambda \in k$  und  $v, w \in V$ . Gegeben eine Darstellung  $V$  schreiben wir im Lichte dieser Erkenntnis statt  $(\rho_V(g))(v)$  meist einfach nur  $gv$ .

*Beispiel 1.1.5.* Jeder Vektorraum  $V$  wird eine Darstellung seiner Automorphismengruppe  $G = \text{GL}(V)$  mittels  $\rho = \text{id}$ . Diese Darstellung heißt die **Standarddarstellung von  $\text{GL}(V)$** .

*Beispiel 1.1.6.* Jeder Vektorraum  $V$  wird eine Darstellung jeder beliebigen Gruppe  $G$  mittels der **trivialen Operation**  $\rho(g) = \text{id}_V \quad \forall g \in G$ . Der Körper  $k$  mit der trivialen Operation heißt die **Einsdarstellung**.

*Beispiel 1.1.7 (Darstellungen auf Funktionenräumen).* Gegeben eine Menge  $X$  mit einer Operation einer Gruppe  $G$  und ein Körper  $k$  wird der Funktionenraum  $V := \text{Ens}(X, k)$  eine Darstellung von  $G$  mittels der Vorschrift

$$(gf)(x) := f(g^{-1}x) \quad \forall g \in G, x \in X$$

Zum Beispiel operiert die Drehgruppe  $\text{SO}(3)$  auf der Kugelschale  $S^2$  und der Raum  $\text{Ens}(S^2, \mathbb{R})$  aller reellwertigen Funktionen auf der Kugelschale wird so eine reelle Darstellung der Drehgruppe.

*Beispiel 1.1.8 (Darstellungen der Gruppe der ganzen Zahlen).* Für jede Gruppe  $G$  liefert das Auswerten bei 1 nach [GR] 2.3.31 eine Bijektion  $\text{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$  zwischen der Menge der Gruppenhomomorphismen von  $\mathbb{Z}$  nach  $G$  und der Gruppe  $G$  selbst. Eine Darstellung  $(V, \rho)$  der Gruppe  $\mathbb{Z}$  anzugeben bedeutet demnach nichts anderes, als einen Automorphismus  $A \in \text{GL}(V)$  des Vektorraums  $V$  anzugeben, nämlich den Automorphismus  $A = \rho(1)$ . Die zugehörige Darstellung wird dann gegeben durch den Gruppenhomomorphismus  $\rho_A : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(V)$  mit  $n \mapsto A^n$ .

**Definition 1.1.9.** Seien  $V, W$  Darstellungen einer Gruppe  $G$  über einem festen Körper  $k$ . Ein **Homomorphismus von Darstellungen** oder **Verflechtungsoperator** oder englisch **intertwining operator** ist eine  $k$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  derart, daß gilt

$$f(gv) = gf(v) \quad \forall v \in V, g \in G$$

Ein **Isomorphismus von Darstellungen** ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei Darstellungen  $V$  und  $W$ , so schreiben wir auch  $V \cong W$  und sagen,  $V$  und  $W$  seien **isomorph**.

*Ergänzung 1.1.10 (Darstellungen in der Begriffswelt der Kategorien).* Zusammenfassend haben wir im vorhergehenden für jede Gruppe  $G$  und jeden Körper  $k$  eine Kategorie  $\text{Mod}_{k,G}$  konstruiert, die „Kategorie aller Darstellungen der Gruppe  $G$  über dem Körper  $k$ “. Im Rahmen der Kategorientheorie können wir diese Kategorie auch beschreiben als die Kategorie

$$\text{Mod}_{k,G} = \text{Cat}([G], \text{Mod}_k)$$

aller Funktoren von der Ein-Objekt-Kategorie  $[G]$  aus [LA2] 7.1.6 in die Kategorie  $\text{Mod}_k$  aller  $k$ -Vektorräume im Sinne von [LA2] 7.4.12.

*Beispiel 1.1.11.* Sind  $(V, A)$  und  $(W, B)$  Vektorräume mit Automorphismen, so ist ein Homomorphismus der zugehörigen Darstellungen  $(V, \rho_A)$  und  $(W, \rho_B)$  der Gruppe  $\mathbb{Z}$  eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

kommutiert. In der Tat folgt aus  $fA = Bf$  nämlich  $fA^n = B^n f$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 1.1.12.** Sei  $G$  eine Gruppe.

1. Eine Teilmenge  $W \subset V$  einer Darstellung  $V$  von  $G$  heißt eine **Unterdarstellung**, wenn  $W$  ein unter  $G$  stabiler Untervektorraum ist, in Formeln  $g \in G, w \in W \Rightarrow gw \in W$ ;
2. Eine Darstellung  $V$  von  $G$  heißt **irreduzibel** oder **einfach**, wenn sie genau zwei Unterdarstellungen hat. Das ist gleichbedeutend dazu, daß  $V$  nicht der Nullraum ist und daß  $0$  und  $V$  die einzigen Unterdarstellungen von  $V$  sind.

*Beispiele 1.1.13.* Jede eindimensionale Darstellung ist irreduzibel. Unsere Darstellung  $\text{Ens}(S^2, \mathbb{R})$  der Drehgruppe  $\text{SO}(3)$  aus 1.1.7 ist nicht irreduzibel, denn die konstanten Funktionen oder auch die stetigen Funktionen bilden jeweils eine echte und von Null verschiedene Unterdarstellung.

**Satz 1.1.14 (Einfache Darstellungen der Kreisgruppe).** *Jede einfache endlichdimensionale stetige komplexe Darstellung der Kreisgruppe  $S^1$  ist für genau ein  $n \in \mathbb{Z}$  isomorph zur Darstellung  $(\mathbb{C}, \rho_n)$  gegeben durch  $\rho_n(z) := z^n \in \text{GL}(1; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$  für alle  $z \in S^1$ .*

1.1.15. Anders gesagt liefert also die Vorschrift  $n \mapsto \rho_n$  eine Bijektion

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache stetige endlichdimensionale} \\ \text{komplexe Darstellungen der Kreislinie } S^1, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

Mit einer **stetigen Darstellung**  $(V, \rho)$  ist hier schlicht gemeint, daß  $\rho$  stetig sein soll. Im Fall topologischer Vektorräume  $V$  unendlicher Dimension muß die Stetigkeit einer Darstellung allerdings sorgfältiger formuliert werden.

1.1.16 (**Einfache Darstellungen der ebenen Drehgruppe**). Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der Gruppe  $\text{SO}(2)$  der ebenen Drehungen sind damit auch klassifiziert, denn es gibt einen, ja sogar genau zwei stetige Gruppenisomorphismen  $\text{SO}(2) \xrightarrow{\sim} S^1$  und deren Umkehrabbildungen sind auch stetig.

*Beweis.* Sei  $\rho : S^1 \rightarrow GL(V)$  eine von Null verschiedene endlichdimensionale komplexe Darstellung. Da die  $\rho(g)$  paarweise kommutieren, besitzen sie nach [LA2] 3.2.18 einen simultanen Eigenvektor  $v \in V \setminus 0$ . Die von diesem Eigenvektor erzeugte Gerade ist dann eine Unterdarstellung. Folglich ist jede einfache endlichdimensionale komplexe Darstellung unserer Gruppe, wie im übrigen jede einfache endlichdimensionale komplexe Darstellung einer beliebigen kommutativen Gruppe, eindimensional. Folglich wird sie gegeben durch einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Sein Bild muß eine kompakte Untergruppe von  $\mathbb{C}^\times$  sein und folglich in  $S^1$  liegen. Die stetigen Gruppenhomomorphismen  $S^1 \rightarrow S^1$  kennen wir aber bereits aus [AN3] 2.7.13.  $\square$

**Satz 1.1.17 (Einfache Darstellungen der räumlichen Drehgruppe).** *Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der räumlichen Drehgruppe werden klassifiziert durch ihre Dimension. Genauer liefert die Dimension eine Bijektion mit den ungeraden natürlichen Zahlen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale stetige komplexe} \\ \text{Darstellungen der räumlichen Drehgruppe } SO(3), \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 3, 5, \dots\}$$

1.1.18. Anders gesagt ist also (1) die Dimension jeder einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellung der räumlichen Drehgruppe  $SO(3)$  ungerade, zu jeder ungeraden natürlichen Zahl gibt es umgekehrt auch (2) eine einfache Darstellung dieser Dimension und je zwei einfache Darstellungen derselben Dimension sind (3) isomorph.

1.1.19. Der vorhergehende Satz gilt analog auch für die einfachen stetigen reellen Darstellungen der räumlichen Drehgruppe. Sein Beweis kann erst nach einigen Vorbereitungen in 2.3.9 gegeben werden. Er bildet eine wesentliche Motivation für die im folgenden entwickelte Theorie.

*Beispiele* 1.1.20. Die einfache Darstellung der Dimension 1 ist die Einsdarstellung. Die einfache reelle Darstellung der Dimension 3 ist die Standarddarstellung  $SO(3) \hookrightarrow GL(3; \mathbb{R})$  alias die Einbettung als Untergruppe. Die einfache komplexe Darstellung der Dimension 3 entsteht daraus durch das Nachschalten der offensichtlichen Einbettung  $GL(3; \mathbb{R}) \hookrightarrow GL(3; \mathbb{C})$ . Die einfache reelle Darstellung der Dimension 5 kann man konstruieren als den Raum aller symmetrischen reellen  $(3 \times 3)$ -Matrizen mit Spur Null unter der durch die Konjugation gegebenen Operation. Es ist aber nicht ganz so leicht zu sehen, daß diese Darstellung irreduzibel ist.

*Ergänzung* 1.1.21 (**Eindimensionale Darstellungen der Drehgruppe**). Insbesondere beinhaltet der vorhergehende Satz die Behauptung, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\rho : SO(3) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  konstant ist. Will man das explizit einsehen, kann man sich überlegen, daß es für jede Drehung  $r \in SO(3)$  eine weitere

Drehung  $x \in \text{SO}(3)$  gibt mit  $r^{-1} = xrx^{-1}$ . In der Tat sagt der Satz vom Fußball [LA2] 1.4.14, daß jede Drehung  $r \in \text{SO}(3)$  eine Gerade punktweise festhält, und als  $x$  können wir dann eine beliebige Drehung nehmen, die diese Gerade stabilisiert aber nicht punktweise festhält. Es folgt  $\rho(r)^{-1} = \rho(r)$  alias  $\rho(r) = \pm 1 \forall r$ . Da aber  $\text{SO}(3)$  wegzusammenhängend ist, etwa wieder nach dem Satz vom Fußball, folgt  $\rho(r) = 1 \forall r$ .

## Übungen

**Übung 1.1.22 (Rückzug von Darstellungen mit inneren Automorphismen).** Gegeben ein Gruppenhomomorphismus  $H \rightarrow G$  können wir jede Darstellung  $V$  von  $G$  zurückziehen zu einer Darstellung  $\text{res}_G^H V$  von  $H$ . Man zeige, daß wir beim Zurückziehen mit einem inneren Automorphismus  $G \rightarrow G$  eine zur ursprünglichen Darstellung isomorphe Darstellung erhalten.

**Übung 1.1.23.** Gegeben eine Darstellung  $(V, \rho)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  erhalten wir eine Darstellung  $(V^*, \rho^*)$  auf dem Dualraum durch die Vorschrift  $\rho^*(g) = (\rho(g^{-1}))^\top$ . Sie heißt die **kontragrediente Darstellung** zur Darstellung  $(V, \rho)$ . Man zeige, daß eine endlichdimensionale Darstellung einfach ist genau dann, wenn die zugehörige kontragrediente Darstellung einfach ist. Man gebe ein Beispiel für eine eindimensionale Darstellung, die nicht zu ihrer kontragredienten Darstellung isomorph ist.

**Übung 1.1.24.** Man zeige, daß die Quaternionen als reeller Vektorraum eine irreduzible Darstellung der Gruppe  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  aus [AL] 1.4.13 bilden.

**Übung 1.1.25 (Einfache reelle Darstellungen der Kreisgruppe).** Jede einfache endlichdimensionale stetige reelle Darstellung der Kreisgruppe  $S^1$  ist entweder isomorph zur Einsdarstellung  $\mathbb{R}$  oder für genau ein  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  isomorph zur reell zweidimensionalen Darstellung  $(\mathbb{C}, \rho_n)$  gegeben durch  $\rho_n(z) := z^n \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  für alle  $z \in S^1$ .

## 1.2 Tangentialraum und Exponentialabbildung

**1.2.1 (Erinnerungen an eingebettete Mannigfaltigkeiten).** Ich erinnere daran, daß wir die natürliche Topologie auf einem endlichdimensionalen reellen Raum in [AN1] ?? erklärt hatten als die metrische Topologie zu einer und jeder Norm. Ich erinnere daran, daß wir in [AN2] 4.2.6 und [AN2] 9.7.1 vereinbart hatten, eine Teilmenge  $M \subset X$  eines  $n$ -dimensionalen reellen affinen Raums  $X$  eine **glatte  $k$ -Mannigfaltigkeit** zu nennen, wenn es um jeden Punkt  $p \in M$  ein lokales Koordinatensystem  $(U, g)$  von  $X$  gibt mit

$$M \cap U = \{x \in U \mid g_{k+1}(x) = \dots = g_n(x) = 0\}$$

Anders gesagt wird also  $M$  „lokal durch das Verschwinden der letzten  $k$  Koordinaten eines glatten lokalen Koordinatensystems von  $X$  beschrieben“. Eine **Karte von  $M$**  erklären wir wie in [AN2] 4.4.2 als ein Paar  $(W, \varphi)$  mit  $W \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $\varphi : W \hookrightarrow M$  offen, glatt und injektiv derart, daß die Verknüpfung mit der Einbettung  $i \circ \varphi : W \hookrightarrow X$  an jeder Stelle injektives Differential hat. Ich erinnere an den Tangentialraum  $T_p M \subset \vec{X}$  an eine eingebettete Mannigfaltigkeit  $M$  in einem Punkt  $p \in M$  aus [AN2] 4.2.7, den wir definiert hatten als die Menge aller Geschwindigkeitsvektoren bei  $p$  von stetig differenzierbaren Wegen durch  $p$  in  $M$ . Insbesondere haben wir im Fall  $M \subseteq X$  einer offenen Teilmenge  $T_p M = \vec{X}$  für alle  $p \in M$ .

**1.2.2 (Tangentialräume von Mannigfaltigkeiten in Vektorräumen).** Im Fall einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset V$  eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  erinnere ich zusätzlich an unsere kanonische Identifikation

$$\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen dem zugrundeliegenden Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums aus [LA1] 3.1.8 durch  $\text{trans} : v \mapsto (v+)$ , die derart kanonisch ist, daß wir sie in Sprache und Notation oft so behandeln, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich. Im Fall einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $M \subseteq V$  haben wir in dieser Konvention dann  $T_p M = V$ . Im Fall der Zahlengeraden machen wir aber doch gerne den Unterschied und schreiben  $\partial = \text{trans}(1) \in \vec{\mathbb{R}}$ .

**Satz 1.2.3 (Untergruppen als Untermannigfaltigkeiten).** *Jede abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist eine glatte Untermannigfaltigkeit im Raum aller Endomorphismen unseres Vektorraums.*

**1.2.4.** Bezeichne  $V$  unseren endlichdimensionalen reellen Vektorraum. Man beachte, daß wir von unserer Gruppe  $G \triangleleft \text{Aut } V$  keineswegs fordern, daß sie abgeschlossen sein soll im endlichdimensionalen Vektorraum  $\text{End } V$ . Ausgeschrieben fordern wir vielmehr nur für jede Folge in  $G$ , die bezüglich irgendeiner Norm auf  $\text{End } V$  gegen einen Punkt von  $\text{Aut } V$  konvergiert, daß dann auch dieser Punkt bereits in  $G$  liegen soll. Eine abgeschlossene Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums nennen wir eine **Matrix-Liegruppe**.

**Beispiele 1.2.5.** Typische Beispiele für Matrixliegruppen sind die allgemeinen linearen Gruppen  $\text{GL}(n; \mathbb{R}) = \text{Aut } \mathbb{R}^n$ ,  $\text{GL}(n; \mathbb{C}) \subset \text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$  und  $\text{GL}(n; \mathbb{H}) \subset \text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^n$  für den Schiefkörper  $\mathbb{H}$  der Quaternionen aus [LA1] 5.6.4; die Gruppen  $\text{SL}(n; \mathbb{R}) \subset \text{Aut } \mathbb{R}^n$  und  $\text{SL}(n; \mathbb{C}) \subset \text{Aut } \mathbb{C}^n$  aller reellen beziehungsweise

komplexen Matrizen mit Determinante Eins; die Gruppen  $O(n) \subset \text{Aut } \mathbb{R}^n$  und  $U(n) \subset \text{Aut } \mathbb{C}^n$  aller orthogonalen beziehungsweise unitären Matrizen und darin die Untergruppen  $SO(n)$  und  $SU(n)$  aller Matrizen mit Determinante Eins; die Gruppen aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen, oder aller reellen oder komplexen Diagonalmatrizen, jeweils zu einer fest vorgegebenen Zahl von Zeilen und Spalten.

*Vorschau 1.2.6.* Eine „Liegruppe“ oder ausführlicher und gleichbedeutend „abstrakten Liegruppe“ erklären wir in 3.2.19 ganz allgemein eine „glatte Mannigfaltigkeit“  $G$  mit einer Gruppenstruktur derart, daß die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  und die Inversenbildung  $G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x^{-1}$  beide glatt sind. Die Terminologie erinnert an den Begründer der Theorie, den norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842-1899). Hierbei verstehen wir unter Mannigfaltigkeiten nicht nur eingebettete Mannigfaltigkeiten, sondern allgemeiner abstrakte Mannigfaltigkeiten, wie wir sie in 3.2.1 diskutieren. Wir werden dort sehen, wie sich unsere Argumente in diesem Rahmen verallgemeinern lassen. Insbesondere wird es sich erweisen, daß jede Matrixliegruppe mit ihrer „induzierten Struktur als Mannigfaltigkeit“ auch eine Liegruppe ist.

1.2.7. Wir zeigen obigen Satz 1.2.3 zusammen mit einer genaueren Aussage, die wir im folgenden formulieren. Dazu erinnern wir daran, daß wir in [AN1] ?? für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  die Exponentialabbildung

$$\begin{aligned} \exp : \text{End } V &\rightarrow \text{Aut } V \\ X &\mapsto \sum_{\nu \geq 0} X^\nu / \nu! \end{aligned}$$

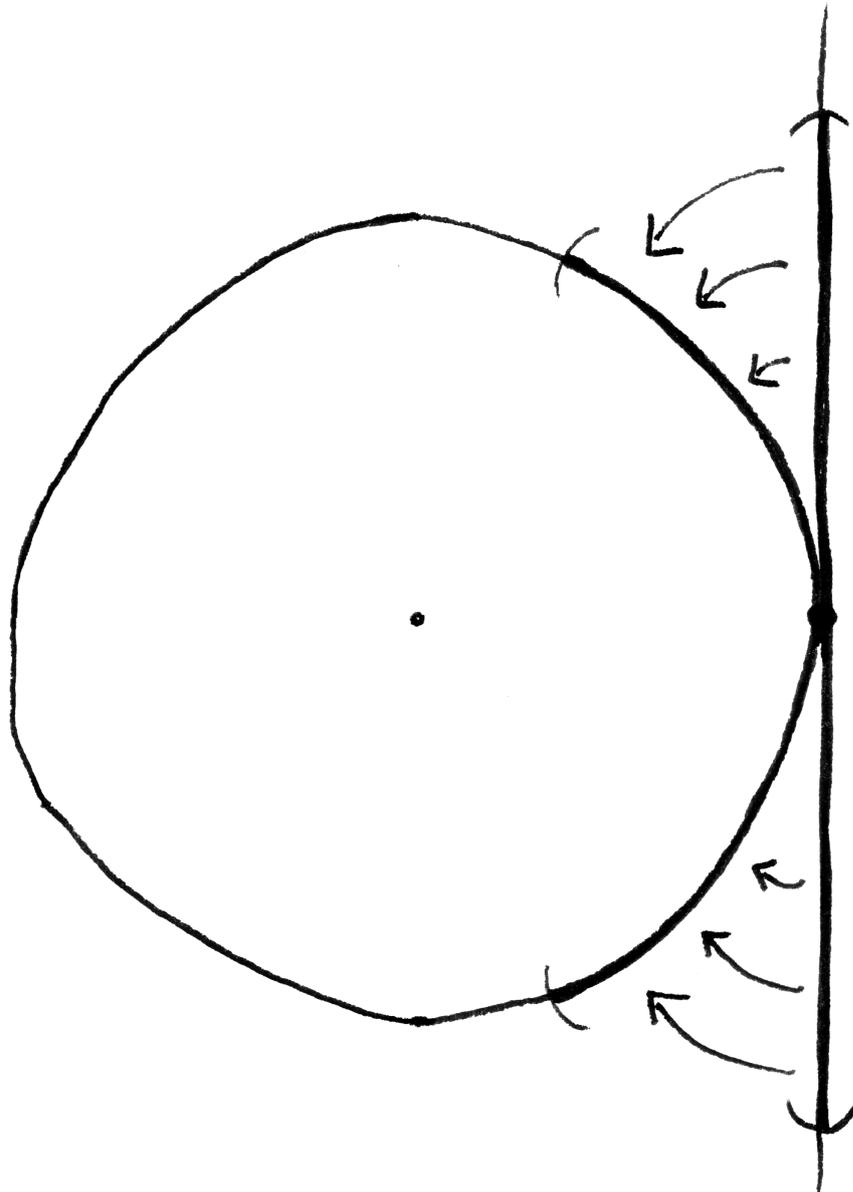
eingeführt hatten. Sie ist eine glatte Abbildung nach [AN2] ?? und ihr Differential am Ursprung ist die Identität nach [AN2] 2.3.26.

**Definition 1.2.8.** Eine Abbildung von einer Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen endlichdimensionalen reellen Raum heißt **glatt**, wenn die daraus durch Vorschalten einer beliebigen Karte unserer Untermannigfaltigkeit entstehende Abbildung glatt ist im Sinne von [AN2] 9.5.8.

**Definition 1.2.9.** Eine Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler reeller Räume heißt **glatt**, wenn ihre Verknüpfung mit der Einbettung der zweiten Untermannigfaltigkeit glatt ist im Sinne von 1.2.8. Ein **Diffeomorphismus** von glatten Untermannigfaltigkeiten ist eine glatte bijektive Abbildung mit glatter Umkehrabbildung.

1.2.10. Den Tangentialraum an eine Matrixliegruppe im neutralen Element nennen wir den **Einstangentialraum**.

**Satz 1.2.11 (Tangentialraum und Exponentialabbildung).** *Gegeben eine Matrixliegruppe  $G \triangleleft \text{GL}(V)$  gilt:*



Der besseren Anschaulichkeit halber habe ich hier den Einstangentialraum  $T_1 S^1 = i\mathbb{R}$  an die Kreislinie dargestellt als den „zum Fußpunkt 1 verschobenen“ affinen Raum  $1 + T_1 S^1 \subset \mathbb{C}$ . Die kleinen Pfeile deuten die Exponentialabbildung an, genauer die Abbildung  $1 + ia \mapsto \exp ia$ .

1. Der Einstangentialraum  $T_e G \subset \text{Richt}(\text{End } V)$  unserer Matrixliegruppe entspricht unter  $\text{trans} : \text{End } V \xrightarrow{\sim} \text{Richt}(\text{End } V)$  der Vereinigung aller Ursprungsgeraden des Endomorphismenraums, die unter der Exponentialabbildung in unserer Matrixliegruppe  $G$  landen;
2. Die Verknüpfung  $\exp \circ \text{trans}^{-1} : T_e G \rightarrow G$  liefert einen Diffeomorphismus im Sinne von 1.2.9 zwischen einer offenen Umgebung der Null im Einstangentialraum  $T_e G$  und einer offenen Umgebung des neutralen Elements  $e \in G$ .

*Beispiel 1.2.12.* Der Satz gilt a fortiori auch für jeden endlichdimensionalen komplexen oder quaternionalen Vektorraum und kann am Beispiel der Kreisgruppe  $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$  besonders gut veranschaulicht werden: In diesem Fall haben wir  $T_1 S^1 = \text{trans}(i\mathbb{R})$ .

*Beweis von 1.2.3 und 1.2.11.* Wir zeigen zunächst, daß die Menge

$$\mathfrak{g} := \{X \in \text{End } V \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset G\}$$

ein Untervektorraum des Endomorphismenraums ist. Nach dem Umkehrsatz der Analysis [AN2] 4.1.2 definiert ja die Exponentialabbildung  $\text{End } V \rightarrow \text{Aut } V$  einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung  $A \Subset \text{End } V$  der Null und einer offenen Umgebung  $B \Subset \text{Aut } V$  der Identität. Jetzt brauchen wir eine Formel, die ich als eigenständiges Lemma formuliere.

**Lemma 1.2.13 (Produktformel von Trotter).** *Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, so gilt für alle  $X, Y \in \text{End } V$  die Formel*

$$\exp(X + Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(\frac{X}{n}\right) \exp\left(\frac{Y}{n}\right) \right)^n$$

*Ergänzung 1.2.14.* Das verallgemeinert sich mit demselben Beweis auf den Fall eines beliebigen Banachraums  $V$ , wenn wir statt  $\text{End } V$  nur den Teilraum der stetigen Endomorphismen  $\mathcal{B}(V)$  betrachten und statt  $\text{Aut } V$  die Gruppe  $\mathcal{B}(V)^\times$  der Einheiten dieses Rings.

*Beweis.* Für kleine  $t \in \mathbb{R}$  gilt sicher

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp(Z(t))$$

für eine wohldefinierte glatte Kurve  $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{End } V$ . Ein Vergleich der Differentiale zeigt  $\dot{Z}(0) = X + Y$  und folglich  $Z(t) = t(X + Y) + t\eta(t)$  für  $\eta$  stetig bei Null mit Funktionswert Null. So ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right) \exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n &= \exp\left(Z\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(nZ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(X + Y + \eta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

und das strebt für  $n \rightarrow \infty$  offensichtlich gegen  $\exp(X + Y)$ .  $\square$

Unsere Menge  $\mathfrak{g}$  aller  $X \in \text{End } V$  mit  $\exp(\mathbb{R}X) \subset G$  vom Beginn des Beweises ist nun sicher für jede Untergruppe  $G$  stabil unter der Multiplikation mit reellen Zahlen, und nach der Produktformel von Trotter 1.2.13 gilt im Fall einer abgeschlossenen Untergruppe  $G$  auch  $X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow (X + Y) \in \mathfrak{g}$ . Damit ist die Menge  $\mathfrak{g}$  in der Tat ein Untervektorraum von  $\text{End } V$ . Wir wählen nun zu diesem Untervektorraum ein Komplement  $\mathfrak{t}$ , also  $\text{End } V = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{t}$ , und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \text{End } V &\rightarrow \text{Aut } V \\ X + Y &\mapsto (\exp X)(\exp Y) \end{aligned}$$

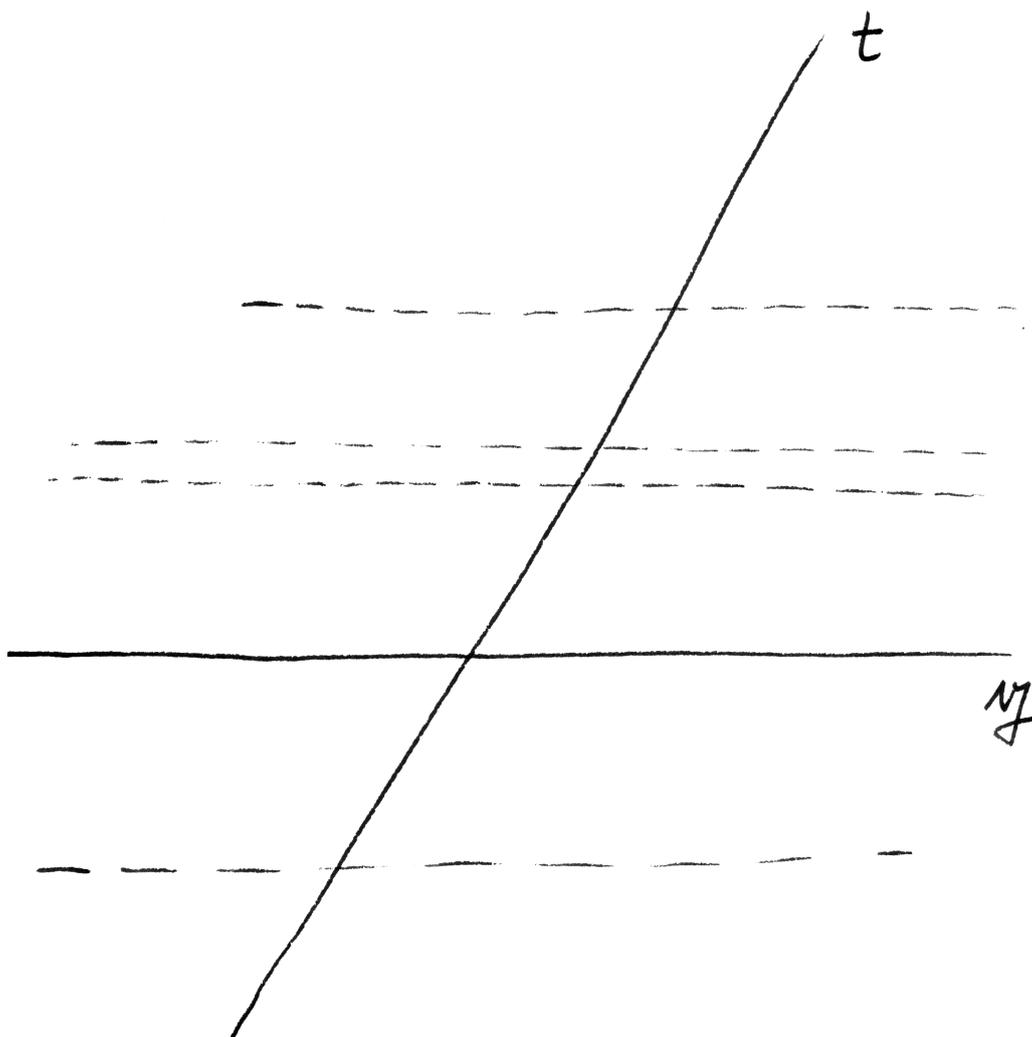
für alle  $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{t}$ . Offensichtlich ist  $\psi^{-1}(G)$  stabil unter der Addition von Vektoren aus  $\mathfrak{g}$ . Weiter hat  $\psi$  bijektives Differential bei Null und induziert folglich nach dem Umkehrsatz [AN2] 4.1.2 oder besser seiner glatten Variante [AN2] ?? einen Diffeomorphismus  $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$  zwischen geeigneten offenen Umgebungen der Null in  $\text{End } V$  beziehungsweise der Identität in  $\text{Aut } V$ . Wenn wir zeigen können, daß  $\psi$  für hinreichend kleine  $A$  und  $B$  sogar eine Bijektion

$$\psi : A \cap \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} B \cap G$$

induziert, so liefert die Umkehrabbildung von  $\psi$  eine Plättung im Sinne von [AN2] 4.2.6 der Gruppe  $G$  um das neutrale Element. Die Umkehrabbildung von  $(g \cdot) \circ \psi$  liefert dann auch eine Plättung um ein beliebiges Element  $g \in G$  und 1.2.3 ist bewiesen und 1.2.11 folgt aus dem Beweis gleich auch noch mit. Also müssen wir nur noch die behauptete Eigenschaft von  $\psi$  zeigen. Da  $\psi^{-1}(G)$  stabil ist unter der Addition von Vektoren aus  $\mathfrak{g}$ , reicht es zu zeigen, daß die Null ein offener Punkt von  $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$  ist, daß es also eine Umgebung der Null in  $\mathfrak{t}$  gibt, die  $\psi^{-1}(G)$  nur in Null trifft. Nun ist aber  $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$  sicher stabil unter der Multiplikation mit ganzen Zahlen. Wäre außerdem die Null ein Häufungspunkt von  $\psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$ , so fänden wir nach dem anschließenden technischen Lemma 1.2.15 ein von Null verschiedenes  $X \in \mathfrak{t}$  mit  $\mathbb{R}X \subset \psi^{-1}(G) \cap \mathfrak{t}$  im Widerspruch zu unserer Annahme  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g} = 0$ .  $\square$

**Lemma 1.2.15.** *Ist eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums stabil unter der Multiplikation mit allen ganzen Zahlen und ist der Ursprung ein Häufungspunkt unserer Teilmenge, so enthält unsere Teilmenge eine Gerade durch den Ursprung.*

*Beweis.* Sei  $M$  unser endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $C \subset M$  unsere abgeschlossene Teilmenge. Wir wählen eine Norm  $|| \cdot ||$  auf  $M$ . Nach unseren Annahmen finden wir eine Nullfolge  $c_n$  in  $C \setminus \{0\}$ . Bezeichnet  $\beta_n$  die kleinste ganze



Die  $g$ -Linie zusammen mit den parallelen gestrichelten Linien stellen die unter Addition mit Vektoren aus  $\mathfrak{g}$  stabile Menge  $\psi^{-1}(G)$  dar.

Zahl über  $1/|c_n|$ , so haben wir offensichtlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n c_n| = 1$  und nach Heine-Borel besitzt die Folge  $\beta_n c_n$  eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß sie bereits selbst konvergiert, sagen wir gegen ein  $d \in \mathbb{C}$ , in Formeln  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n c_n = d$ . Sicher gilt dann  $|d| = 1$ . Ist weiter  $t \in \mathbb{R}$  beliebig, so gibt es wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$  eine Folge von ganzen Zahlen  $\gamma_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n / \beta_n = t$  und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n c_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n / \beta_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n c_n) = td$$

Da  $C$  abgeschlossen ist, folgt  $\mathbb{R}d \subset C$ . □

**Beispiel 1.2.16 (Einstangentialraum an  $GL(n)$  und  $SL(n)$ ).** Wir verwenden hier unsere Konvention 1.2.2 und identifizieren also stillschweigend jeden Vektorraum mit dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Der Einstangentialraum an  $GL(n; \mathbb{C})$  ist dann  $Mat(n; \mathbb{C})$ . Der Einstangentialraum an  $SL(n; \mathbb{R})$  ist die Menge  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$  aller  $(n \times n)$ -Matrizen mit Spur Null. In der Tat beachte man die Formel

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$$

Sie ist für komplexe obere Dreiecksmatrizen offensichtlich und folgt für beliebige komplexe Matrizen mit dem Satz über die Trigonalisierbarkeit [LA1] 6.6.11 daraus, daß beide Seiten konstant sind auf Konjugationsklassen, daß also beide Seiten für alle Matrizen  $A$  und alle invertierbaren Matrizen  $B$  auf  $A$  und  $BAB^{-1}$  denselben Wert annehmen. Diese Formel zeigt, daß  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$  unter der Exponentialabbildung in  $SL(n; \mathbb{R})$  landet, und daraus folgt bereits  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R}) \subset T_e SL(n; \mathbb{R})$ . Andererseits umfaßt  $SL(n; \mathbb{R})$  keine Umgebung der Einheitsmatrix in  $GL(n; \mathbb{R})$ , und daraus folgt  $T_e SL(n; \mathbb{R}) \neq Mat(n; \mathbb{R})$ . Beides zusammen zeigt dann die Gleichheit  $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R}) = T_e SL(n; \mathbb{R})$ . Ein besseres Argument liefert später 1.4.20.

**Beispiel 1.2.17 (Einstangentialraum orthogonaler Gruppen).** Der Einstangentialraum der Gruppe  $O(n) := \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$  ist der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen

$$T_I O(n) = \{X \in Mat(n; \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$$

Um das zu sehen, verwenden wir die exponentielle Beschreibung 1.2.11. In der Tat folgt aus  $X + X^T = 0$  sofort  $I = \exp(tX + tX^T) = \exp(tX) \exp(tX^T) = \exp(tX) \exp(tX)^T$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und umgekehrt folgt für  $X \in Mat(n; \mathbb{R})$  aus  $\exp(tX) \exp(tX)^T = I$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  durch Bilden der Ableitung nach  $t$  bei  $t = 0$  auch sofort  $X + X^T = 0$ . Die Bestimmung des Tangentialraums liefert für die Dimension der orthogonalen Gruppen die Formel  $\dim O(n) = n(n-1)/2$ .

1.2.18. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen

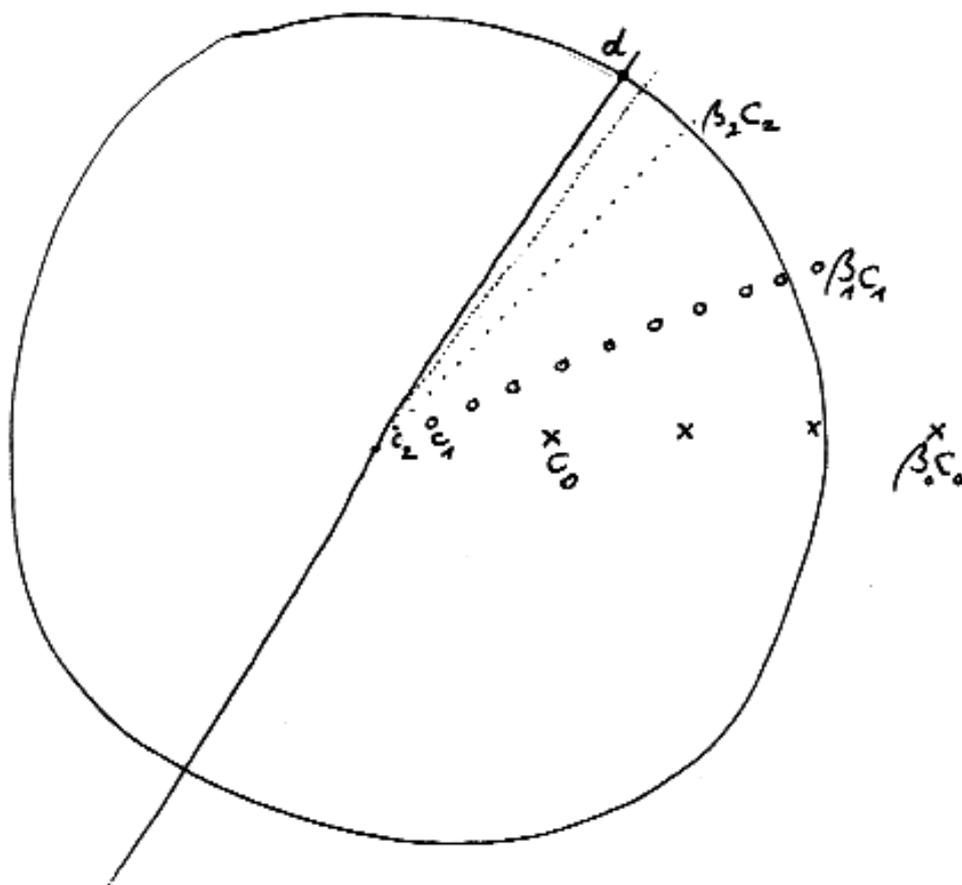


Illustration zum Beweis von 1.2.15. Die Kreislinie stellt den Einheitskreis dar, die Kreuzchen, Kringelchen und Punkte die ersten Folgenglieder  $c_0, c_1, c_2$  und ihre Vielfachen.

schreiben läßt. Wir werden diese Eigenschaft in [TM] 1.3.3 ausführlich diskutieren. Aus [TM] 1.3.15 wird folgen, daß eine Matrixliegruppe genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist im Sinne unserer Definition [AN2] 8.5.1.

**Beispiel 1.2.19 (Komponenten orthogonaler Gruppen).** Die spezielle orthogonale Gruppe  $SO(n) \subset O(n)$  ist nach [AN2] 8.5.19 zusammenhängend und als Urbild von 1 unter  $\det$  auch abgeschlossen. Da ihr Komplement als Urbild von  $(-1)$  unter  $\det$  ebenfalls abgeschlossen ist, und da dies Komplement darüber hinaus auch zusammenhängend, ja sogar homöomorph zu  $SO(n)$  ist, erhalten wir damit eine Darstellung von  $O(n)$  als eine disjunkte Vereinigung von zwei offenen zusammenhängenden Teilmengen.

**Proposition 1.2.20.** *Eine zusammenhängende Matrixliegruppe wird von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.*

*Vorschau 1.2.21.* In [TM] 2.1.10 zeigen wir dieselbe Aussage allgemeiner für beliebige topologische Gruppen.

*Beweis.* Die von einer Umgebung  $U$  des neutralen Elements erzeugte Untergruppe  $H \subset G$  ist offen in unserer Gruppe  $G$ , da für jedes  $h \in H$  auch seine Umgebung  $hU$  in  $H$  enthalten ist. Dann sind auch alle Linksnebenklassen  $Hg$  unserer Untergruppe offen in  $G$ . Als Bahnen der Linksoperation von  $H$  auf  $G$  sind sie aber paarweise disjunkt, und für  $G$  zusammenhängend folgt dann aus [TM] 1.3.15 bereits, daß es nur eine einzige Linksnebenklasse geben kann, also  $H = G$ .  $\square$

**Korollar 1.2.22 (Einstangententialraum bestimmt Einskomponente).** *Haben zwei zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums denselben Einstangententialraum, so stimmen sie überein.*

*Beweis.* Nach Lemma 1.2.20 wird eine zusammenhängende Matrixliegruppe von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt. Wegen 1.2.11 umfaßt das Bild der Exponentialabbildung stets eine Umgebung des neutralen Elements, folglich wird eine zusammenhängende Matrixliegruppe stets vom Bild ihres Einstangententialraums unter der Exponentialabbildung erzeugt.  $\square$

**Beispiel 1.2.23 (Einstangententialraum orthogonaler Gruppen, Variante).** Sind  $V, W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume und ist  $\omega : V \times V \rightarrow W$  bilinear und  $G \subset GL(V)$  die Gruppe aller  $g$  mit  $\omega(gv, gu) = \omega(v, u)$  für alle  $v, u \in V$ , so besteht  $T_e G \subset \text{End}(V)$  genau aus allen Endomorphismen  $X$  mit  $\omega(Xv, u) + \omega(v, Xu) = 0$  für alle  $v, u \in V$ . Das will ich nun einmal beispielhaft ausarbeiten. Gegeben  $X$  mit  $\omega(\exp(tX)v, \exp(tX)u) = \omega(v, u)$  für alle  $t, u, v$  erhalten wir durch Ableiten beider Seiten nach  $t$  bei  $t = 0$  bereits  $\omega(Xv, u) + \omega(v, Xu) = 0$ .

Hier verwenden wir die Kettenregel für Differentiale [AN2] 2.4.2 und die Formel für das Differential einer bilinearen Abbildung [AN2] 2.6.5. Umgekehrt finden wir  $\exp(X \otimes \text{id} + \text{id} \otimes X) = \exp(X) \otimes \exp(X)$  mit der Formel [AN1] 7.2.4 und damit folgt leicht die Gegenrichtung.

## Übungen

**Übung 1.2.24 (Zusammenhangskomponenten von Matrixliegruppen).** Gegeben eine Matrixliegruppe  $G$  ist ihre Einskomponente alias Zusammenhangskomponente des neutralen Elements offen und abgeschlossen in  $G$  und insbesondere selbst eine Matrixliegruppe derselben Dimension wie  $G$ .

*Ergänzende Übung 1.2.25.* Man folgere direkt aus 1.2.15, daß jede zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ein Untervektorraum ist. Hinweis: Vollständige Induktion.

**Übung 1.2.26 (Einstangententialraum an  $U(n)$ ).** Der Einstangententialraum der Gruppe  $U(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^T = I\}$  der unitären Matrizen ist der Raum der schiefhermiteschen Matrizen

$$T_I U(n) = \{X \in \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^T = 0\}$$

Hinweis: Es geht auch noch allgemeiner, vergleiche 1.2.23.

**Übung 1.2.27.** Ich erinnere an das Kreuzprodukt auf einem dreidimensionalen orientierten reellen Skalarproduktraum [LA2] 1.9.1. Gegeben ein dreidimensionaler Skalarproduktraum  $V$  liefert mit dieser Begriffsbildung die Wahl einer Orientierung einen Vektorraumisomorphismus

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sim} T_e O(V) \\ \vec{v} &\mapsto (\vec{v} \times) \end{aligned}$$

Der Automorphismus  $\exp(\vec{v} \times)$  bedeutet geometrisch eine Drehung um die Achse  $\mathbb{R}\vec{v}$  mit Winkel  $\|\vec{v}\|$  im Bogenmaß. Ist genauer  $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $V$ , so zeige man für die Matrix  $\exp(t\vec{v}_1 \times)$  in dieser Basis die Formel

$${}_{\mathcal{B}} [\exp(t\vec{v}_1 \times)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

**Übung 1.2.28 (Beispiel für eine bijektive Exponentialabbildung).** Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Die Logarithmusreihe liefert eine inverse Abbildung.

**Übung 1.2.29 (Beispiel für eine bijektive Exponentialabbildung).** Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller reellen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Jordan-Zerlegung und 1.2.28 und Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

**Übung 1.2.30 (Beispiel für eine surjektive Exponentialabbildung).** Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller komplexen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen eine Surjektion ist. Hinweis: Jordanzerlegung und 1.2.28. Man folgere, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller komplexen invertierbaren Matrizen eine Surjektion ist.

**Übung 1.2.31 (Beispiel für eine nicht surjektive Exponentialabbildung).** Ist  $x = x_s + x_n$  die additive Jordanzerlegung einer Matrix  $x \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  oder  $x \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ , so ist  $\exp x = (\exp x_s)(\exp x_n)$  die multiplikative Jordanzerlegung von  $\exp x$ . Man folgere, daß der  $(2 \times 2)$ -Jordanblock zum Eigenwert  $-1$  nicht zum Bild von  $\exp : \text{Mat}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(2; \mathbb{R})$  gehören kann, obwohl er durchaus zur Zusammenhangskomponente der Einheitsmatrix gehört.

**Übung 1.2.32.** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und ein Vektor  $v \in V$  hat die Matrixliegruppe  $G := \{g \in \text{Aut } V \mid gv = v\}$  den Einstangentialraum  $T_e G = \{x \in \text{End } V \mid xv = 0\}$ . Des weiteren hat die Matrixliegruppe  $G := \{g \in \text{Aut } V \mid gv \in \mathbb{R}v\}$  den Einstangentialraum  $T_e G = \{x \in \text{End } V \mid xv \in \mathbb{R}v\}$ .

**Übung 1.2.33.** Man zeige, daß das Zentrum der orthogonalen Gruppe  $O(n)$  aus der Einheitsmatrix und ihrem Negativen besteht, in Formeln  $Z(O(n)) = \{\pm I\}$ . Hinweis: Kommutieren mit  $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  bedeutet, die Gerade  $\mathbb{R}e_1$  zu stabilisieren. Man zeige, daß für das Zentrum der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO(n)$  gilt  $Z(SO(n)) = \{I\}$  für  $n$  ungerade,  $Z(SO(n)) = \{\pm I\}$  für  $n \geq 4$  gerade und  $Z(SO(2)) = SO(2)$ .

### 1.3 Liealgebren von Matrixliegruppen

1.3.1. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Im Lichte von 1.2.22 stellt sich die Frage, welche reellen Untervektorräume in  $\text{End } V$  die Einstangentialräume abgeschlossener Untergruppen von  $\text{Aut } V$  sind. Eine notwendige Bedingung liefert der folgende Satz.

**Satz 1.3.2 (Stabilität des Einstangentialraums unter dem Kommutator).** Für jede abgeschlossene Untergruppe  $G \triangleleft \text{Aut } V$  der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  ist ihr Einstangentialraum  $T_e G \subset \text{End } V$  stabil unter dem Bilden des Kommutators. Mit  $X$  und  $Y$  gehört also in Formeln auch  $XY - YX$  zu  $T_e G$ .

*Beweis.* Für jedes  $g \in \text{Aut } V$  betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \text{int}_g : \text{End } V &\rightarrow \text{End } V \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

Ihr Differential bei der Einheitsmatrix notieren wir  $\text{Ad}_g$ . Da  $\text{int}_g$  linear ist, wird  $\text{Ad}_g$  durch dieselbe Formel gegeben wie  $\text{int}_g$ . Unter der zusätzlichen Voraussetzung  $g \in G$  stabilisiert  $\text{int}_g$  die Menge  $G$  und induziert folglich eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g : \text{T}_e G &\rightarrow \text{T}_e G \\ X &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

Insbesondere verläuft für alle  $Y \in \text{T}_e G$  die Kurve  $t \mapsto \exp(tY)X \exp(-tY)$  ganz in  $\text{T}_e G$ . Damit liegt auch ihr Geschwindigkeitsvektor bei  $t = 0$  in  $\text{T}_e G$ , und der ist nach der Produktregel gerade der Kommutator  $YX - XY$ .  $\square$

1.3.3. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $G \triangleleft \text{Aut } V$  eine Matrixliegruppe. Natürlich ist unsere Abbildung  $g \mapsto \text{int}_g$  aus dem vorhergehenden Beweis eine Darstellung  $\text{Aut } V \rightarrow \text{GL}(\text{End } V)$  und liefert damit auch eine Darstellung  $G \rightarrow \text{GL}(\text{End } V)$ . Unsere Erkenntnisse aus dem Beweis lassen sich dann auch dahingehend formulieren, daß für diese Darstellung von  $G$  der Teilraum  $\text{T}_e G \subset \text{End } V$  eine Unterdarstellung ist. Diese Unterdarstellung

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\text{T}_e G)$$

heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Matrixliegruppe  $G$  und daher rührt die Notation  $\text{Ad}$ . Wir werden diese Konstruktion in 4.1 in einer größeren Allgemeinheit noch ausführlich besprechen. Der Kommutator wird oft notiert in der Form

$$XY - YX = [X, Y]$$

und heißt auch die **Lie-Klammer**.

1.3.4. Einen Vektorraum  $A$  über einem Körper  $k$  mit einer  $k$ -bilinearen Verknüpfung  $A \times A \rightarrow A$  bezeichnet man ganz allgemein als eine  $k$ -**Algebra**, vergleiche [LA2] 7.9.1. Gegeben eine Matrixliegruppe  $G$  wird demnach der Einstangenialraum  $\text{T}_e G$  mit der Verknüpfung  $(X, Y) \mapsto [X, Y]$  eine  $\mathbb{R}$ -Algebra. Sie heißt die **Lie-Algebra von  $G$** . Wir notieren sie

$$\text{Lie } G := \text{T}_e G$$

*Vorschau* 1.3.5. Unter einer **partiellen Matrixliegruppe** verstehen wir eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset \text{Aut}(V)$  der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums derart, daß (1) die Identität zu  $M$  gehört und

daß es (2) eine Umgebung  $U$  der Identität gibt mit den Eigenschaften  $(U \cap M)(U \cap M) \subset M$  und  $(U \cap M)^{-1} \subset M$ . Jede offene Umgebung der Identität in einer partiellen Matrixliegruppe ist natürlich auch ihrerseits eine partielle Matrixliegruppe. Wir nennen zwei partielle Matrixliegruppen **äquivalent**, wenn es eine Umgebung der Identität gibt, die mit beiden denselben Schnitt hat. Eine Äquivalenzklasse unter dieser Äquivalenzrelation nennen wir einen **Matrixliegruppenkeim**. Das Bilden des Tangentialraums beim neutralen Element liefert nun eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Matrixliegruppenkeime} \\ \text{in Aut}(V) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Unterliealgebren} \\ \text{von End}(V) \end{array} \right\}$$

Die inverse Abbildung ordnet dabei jeder Unterliealgebra  $\mathfrak{g} \subset \text{End}(V)$  den Matrixliegruppenkeim zu, der durch das Bild hinreichend kleiner offener Umgebungen der Null in  $\mathfrak{g}$  unter der Exponentialabbildung repräsentiert wird. Wir zeigen das erst in 4.3.5, es folgt aus dem sogenannten „Frobenius-Theorem“ 4.3.3.

1.3.6. Unter einer **Lie-Algebra** über einem Körper  $k$  versteht man eine  $k$ -Algebra  $\mathfrak{g}$ , deren Verknüpfung in diesem Zusammenhang meist  $(x, y) \mapsto [x, y]$  notiert wird, derart daß gilt:

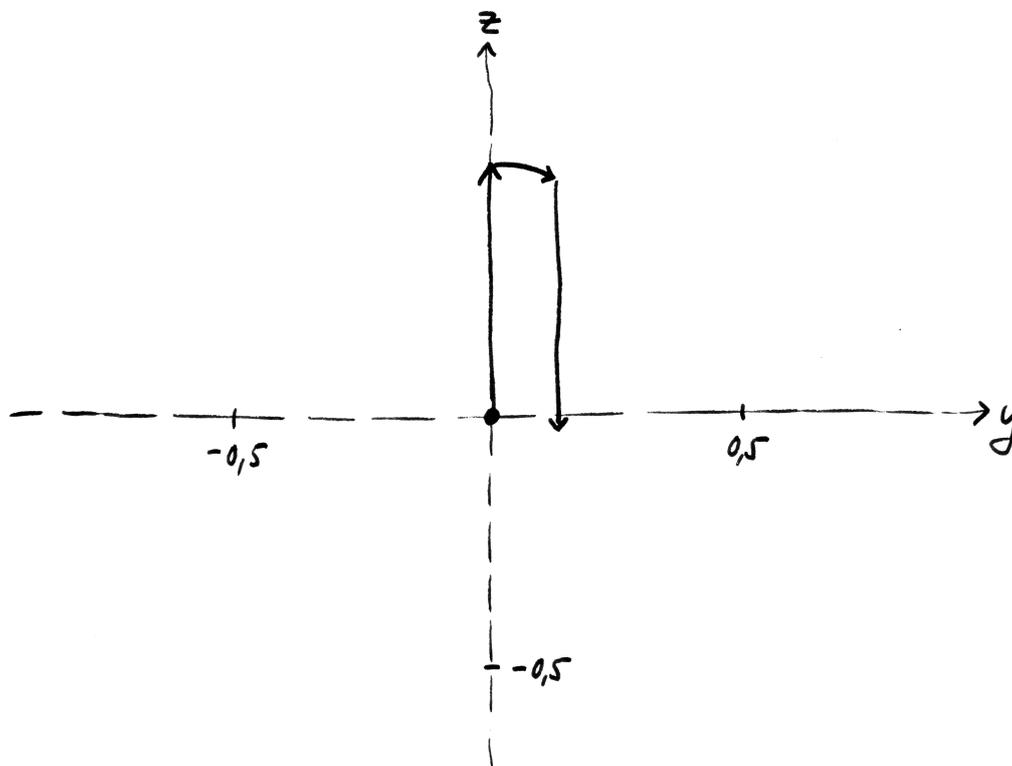
1.  $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ ;
2.  $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

Die zweite Forderung heißt die **Jacobi-Identität**. Daß in unseren Algebren  $\text{Lie } G = \mathbb{T}_G$  zu Matrixliegruppen diese Formeln gelten, rechnet man mühelos nach. Daß gerade diese Formeln einen mit der Theorie der Liegruppen aufs engste verwobenen Typ von Algebra definieren, erkennt man mit der vorhergehenden Bemerkung in Anbetracht des Satzes von Ado, nach dem sich jede endlichdimensionale komplexe Liealgebra als Unterliealgebra in die Algebra  $\text{End}(V)$  der Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums einbetten läßt. A fortiori gilt das dann auch für jede endlichdimensionale reelle Liealgebra.

*Beispiel 1.3.7 (Anschauung für die Liealgebra der Drehgruppe).* Man kann die Lieklammer auf der Liealgebra einer Matrixliegruppe auch symmetrischer verstehen mithilfe der Formel

$$[A, B] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\exp(tA) \exp(tB) - \exp(tB) \exp(tA))$$

die man leicht über die Taylorentwicklung nachrechnet. Beachtet man, daß  $t \mapsto \exp(tX)$  ein und nach 1.4.5 sogar der einzige differenzierbare Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow G$  mit Geschwindigkeitsvektor  $X$  beim neutralen Element ist, so



Dieses Bild soll die zur Formel von eben äquivalente Formel

$$[A, B] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\exp(-tA) \exp(-tB) \exp(tA) \exp(tB) - I)$$

anschaulich machen im Fall der in 1.3.7 behandelten Drehgruppe für  $B = E_1$  und  $A = E_2$ . Die  $x$ -Achse kommt darin senkrecht aus dem Papier, und das Bild zeigt, wie ein Punkt auf der  $x$ -Achse „in der Höhe 1 oberhalb der Papierebene“ sich bewegt, wenn wir erst ein bißchen um die  $x$ -Achse drehen—dabei bleibt er fest—dann dasselbe bißchen um die  $y$ -Achse, dann um die  $x$ -Achse in der Gegenrichtung und schließlich um die  $y$ -Achse in der Gegenrichtung, jeweils um denselben kleinen Winkel, im Bild etwa  $1/2$  im Bogenmaß. Machen wir diesen Winkel kleiner, so werden die Effekte des Drehens um die  $y$ -Achse in der Aufsicht in etwa linear kleiner, genauer hat der erste vertikale Pfeil die Länge  $\sin t$ , aber der Effekt des Drehens um die  $x$ -Achse wird quadratisch kleiner, genauer hat der krumme eher horizontale Pfeil die Länge  $t \sin t$ . Ich finde, man sieht ganz gut, daß die Differenz von Ausgangs- und Endpunkt unseres Pfeilweges gegen eine quadratisch kleine Drehung um die  $z$ -Achse strebt, wie es auch unsere Formel  $[E_1, E_2] = E_3$  vorhersagt.

kann man diese Formel dahingehend interpretieren, daß die Lieklammer mißt, inwieweit zwei „infinitesimale Elemente“ unserer Gruppe kommutieren. Zum Beispiel ergibt sich die Liealgebra der Drehgruppe  $SO(3)$  mit 1.2.17 als die Liealgebra  $\mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$  aller reellen schiefsymmetrischen  $(3 \times 3)$ -Matrizen. Als Basis mag man die drei Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Deren Kommutatoren werden gegeben durch die leicht zu verifizierenden Formeln  $[E_1, E_2] = E_3$ ,  $[E_2, E_3] = E_1$  und  $[E_3, E_1] = E_2$ . Nun beschreibt

$$\exp(tE_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

eine Drehung um die  $x$ -Achse mit Winkel  $t$  und  $\exp(tE_2), \exp(tE_3)$  bedeuten ähnlich Drehungen um die  $y$ -Achse beziehungsweise die  $z$ -Achse. Um die Lieklammer anschaulich zu interpretieren gilt es damit einzusehen, daß „ein kleines bißchen Drehen um die  $x$ -Achse gefolgt von einem kleinen bißchen Drehen um die  $y$ -Achse sich vom Effekt derselben Operationen in der umgekehrten Reihenfolge unterscheidet um ein quadratisch kleines bißchen Drehen um die  $z$ -Achse, bis auf einen kubisch kleinen Fehler“. Diese Aussage scheint mir der Anschauung durchaus zugänglich zu sein. Man bemerke auch, daß  $e_i \mapsto E_i$  einen Vektorraumisomorphismus  $\psi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$  definiert, unter dem das Kreuzprodukt der Lieklammer entspricht. Es ist eine gute Übung zu zeigen, daß mit dieser Notation  $\exp(\psi(v))$  die Matrix einer Drehung mit Drehachse  $\mathbb{R}v$  und Drehwinkel  $\|v\|$  ist.

**Definition 1.3.8.** Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Ein **Algebrenhomomorphismus** ist eine lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist.

1.3.9. Gegeben ein Körper  $k$  und ein  $k$ -Vektorraum  $V$  wird  $\text{End } V$  eine Liealgebra mit der Verknüpfung  $[X, Y] = XY - YX$ . Man notiert diese Liealgebra meist  $\mathfrak{gl}(V)$ . Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  ist im allgemeinen keineswegs jede reelle Unterliealgebra  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  der Tangentialraum im neutralen Element einer Matrixliegruppe  $G \triangleleft GL(V)$ . Das Problem ist, daß die vom Bild der Exponentialabbildung erzeugte Untergruppe keineswegs abgeschlossen zu sein braucht, wie zum Beispiel der Fall  $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \text{diag}(i, \alpha i) \subset \text{End } \mathbb{C}^2$  für irrationales reelles  $\alpha$  zeigt. Es gibt aber auf der fraglichen Untergruppe, auch wenn sie in  $GL(V)$  nicht abgeschlossen ist, stets genau eine Struktur von glatter Mannigfaltigkeit im Sinne von 3.2.7 derart, daß die Einbettung differenzierbar

ist und ihr Tangential den Tangentialraum unserer Mannigfaltigkeit mit  $\mathfrak{g}$  identifiziert. Mehr dazu lernt man in der Differentialgeometrie.

**1.3.10 (Liealgebren von Schnitten).** Aus 1.2.11 folgt für abgeschlossene Untergruppen der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $G, H \triangleleft \text{Aut } V$  die Formel

$$\text{Lie}(G \cap H) = (\text{Lie } G) \cap (\text{Lie } H)$$

Allgemeiner gilt für eine beliebige Familie  $(G_i)_{i \in I}$  von abgeschlossenen Untergruppen auch

$$\text{Lie} \bigcap_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \in I} \text{Lie } G_i$$

Diese Bemerkung hätte auch schon direkt im Anschluß an 1.2.11 stehen können. Ich habe sie nur deshalb hierher verschoben, um sie bereits mit der Bezeichnung  $\text{Lie } G$  statt  $T_e G$  formulieren zu können. Mit 3.6.23 wird in 3.6.23 dasselbe auch für abgeschlossene Untergruppen einer abstrakten Liegruppe folgen.

## Übungen

*Übung 1.3.11.* Ist  $A$  eine endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Algebra und  $G := \text{Alg}_{\mathbb{R}}^{\times}(A) \subset \text{GL}(A)$  ihre Automorphismengruppe, so besteht  $\text{Lie } G \subset \text{End}(A)$  genau aus allen **Derivationen von  $A$** , als da heißt, aus allen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $d : A \rightarrow A$  mit der Eigenschaft  $d(ab) = (da)b + a(db)$  für alle  $a, b \in A$ . Wir bezeichnen diesen Raum mit  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$  und haben also in Formeln

$$\text{Lie}(\text{Alg}_{\mathbb{R}}^{\times}(A)) = \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$$

Man zeige auch, daß für eine endlichdimensionale  $\mathbb{C}$ -Algebra analog gilt

$$\text{Lie}(\text{Alg}_{\mathbb{C}}^{\times}(A)) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(A)$$

*Übung 1.3.12.* Ist  $G$  eine Matrixliegruppe und  $N \triangleleft G$  ein abgeschlossener Normalteiler, so gilt für alle  $X \in \text{Lie } G$  und  $Y \in \text{Lie } N$  sogar  $[X, Y] \in \text{Lie } N$ . In der in [HL] 1.4.3 eingeführten Terminologie ist also die Liealgebra eines Normalteilers stets ein Ideal.

*Ergänzende Übung 1.3.13.* Man zeige, daß jeder echte abgeschlossene Normalteiler der Drehgruppe  $\text{SO}(3)$  trivial ist. Hinweis: 1.3.12 zeigt, daß unser Normalteiler diskret sein muß, und [TM] 2.1.21 zeigt weiter, daß er im Zentrum von  $\text{SO}(3)$  liegen muß.

*Übung 1.3.14.* Man zeige, daß jede abgeschlossene Untergruppe von  $\text{O}(3)$  konjugiert ist zu genau einer Untergruppe der folgenden Liste:

1. Eine endliche Untergruppe, wie sie in [LA2] 5.4.25 klassifiziert wurden;
2. Eine der Untergruppen  $O(3)$  und  $SO(3)$ ;
3. Eine der Gruppen  $\{\pm 1\} \times O(2)$  oder  $\{\pm 1\} \times SO(2)$  von Blockmatrizen.

*Übung 1.3.15.* Für jede Liealgebra  $L$  und jedes Element  $x \in L$  ist  $\text{ad } x$  eine Derivation von  $L$  und  $\text{ad}(L) \subset \text{Der}_k L$  ist ein Ideal. Genauer gilt sogar  $[\delta, \text{ad } x] = \text{ad}(\delta x) \forall \delta \in \text{Der}_k L, x \in L$ .

## 1.4 Homomorphismen von Matrixliegruppen

**Satz 1.4.1 (Gruppenwege in  $\mathbb{C}^\times$ ).** Jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  hat die Gestalt  $\varphi(t) = \exp(at)$  für genau ein  $a \in \mathbb{C}$ .

1.4.2. Die stetigen Gruppenwege in der Kreisgruppe haben wir bereits in [AN1] 4.5.8 bestimmt. Die Argumentation hier ist im wesentlichen dieselbe.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $a$  folgt aus  $\varphi'(0) = a$ . Nur die Existenz von  $a$  ist also noch zu zeigen. Die offene Halbebene  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$  hat die Eigenschaft, daß es für jedes  $z \in H$  genau ein  $w \in H$  gibt mit  $w^2 = z$ . Gegeben ein stetiger Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  finden wir nun sicher erst ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset H$  und dann ein  $b \in U$  mit  $\varphi(\varepsilon) = \exp(b)$ . Es folgt

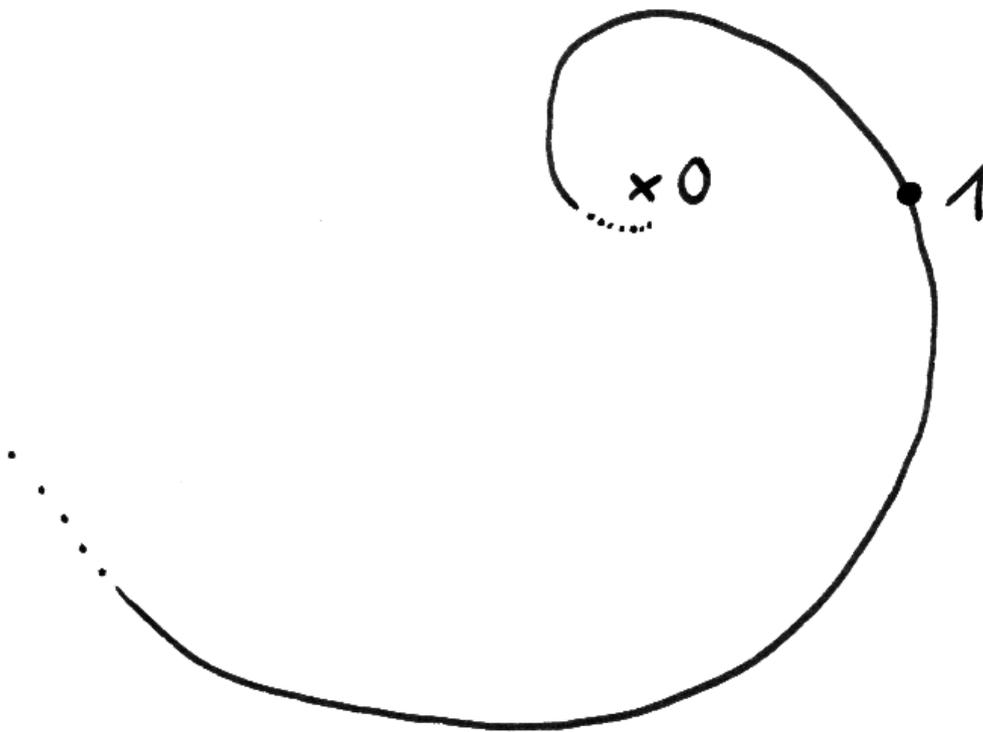
$$\varphi(\varepsilon/2) = \sqrt{\exp(b)} = \exp(b/2)$$

und induktiv  $\varphi(\varepsilon/2^n) = \exp(b/2^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und dann sogar  $\varphi(m\varepsilon/2^n) = \exp(mb/2^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{Z}$ . Setzen wir  $a = b/\varepsilon$ , so gilt mithin  $\varphi(t) = \exp(at)$  für alle reellen Zahlen  $t$  der Gestalt  $t = m\varepsilon/2^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{Z}$ . Da beide Seiten stetig sind, gilt das dann auch für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 1.4.3 (Gruppenwege in  $GL(V)$ ).** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller oder auch komplexer Vektorraum, so ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow GL(V)$  von der Gestalt  $\varphi(t) = \exp(tA)$  für genau ein  $A \in \text{End } V$ .

1.4.4. Die stetigen Gruppenhomomorphismen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  haben wir gerade eben bestimmt. Die Argumentation hier ist im wesentlichen dieselbe.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $A$  folgt aus  $\varphi'(0) = A$ . Nur die Existenz von  $A$  ist also noch zu zeigen. Nach dem Umkehrsatz [AN2] 4.1.2 gibt es in  $\text{End } V$  eine offene Umgebung  $U \ni 0$  des Ursprungs, die unter  $\exp$  homöomorph auf eine offene Teilmenge  $W \ni I$  der Identität abgebildet wird. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $U$  konvex annehmen. Das Bild  $H := \exp((1/2)U)$



Das Bild eines stetigen Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  hat im allgemeinen die Gestalt einer Spirale. Sie wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen, aber der Radius hängt exponentiell von der Zeit ab.

der entsprechend um den Faktor Zwei geschrumpften Umgebung hat dann offensichtlich die Eigenschaft, daß das Quadrieren  $g \mapsto g^2$  einen Diffeomorphismus

$$H \xrightarrow{\sim} W$$

induziert. Da wir  $U$  konvex angenommen hatten, gilt außerdem  $H \subset W$ . Folglich besitzt jedes  $z \in H$  genau eine Wurzel in  $H$ . Gegeben ein stetiger Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  finden wir nun sicher ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset H$  und ein  $X \in (1/2)U$  mit  $\varphi(\varepsilon) = \exp(X)$ . Es folgt

$$\varphi(\varepsilon/2) = \sqrt{\exp(X)} = \exp(X/2)$$

und induktiv  $\varphi(\varepsilon/2^n) = \exp(X/2^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $A := X/\varepsilon$ , so gilt mithin  $\varphi(t) = \exp(tA)$  für alle  $t = \varepsilon/2^n$ . Da beide Seiten Gruppenhomomorphismen sind, gilt es dann auch für alle  $t = m\varepsilon/2^n$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ . Da beide Seiten stetig sind, folgt es schließlich für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 1.4.5 (Gruppenwege in Matrixliegruppen).** *Ist  $G$  eine Matrixliegruppe, so ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  von der Gestalt  $\varphi(t) = \exp(tA)$  für genau ein  $A \in \mathrm{Lie} G$ .*

*Beweis.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und eine abgeschlossene Untergruppe  $G \triangleleft \mathrm{GL}(V)$  ist nach 1.4.3 jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$  jedenfalls schon mal von der Gestalt  $t \mapsto \exp(tA)$  für genau ein  $A \in \mathrm{End} V$ , und nach 1.2.11 landet die Abbildung  $t \mapsto \exp(tA)$  in der Untergruppe  $G$  genau dann, wenn  $A$  zum Tangentialraum  $T_e G$  unserer Untergruppe gehört.  $\square$

**Proposition 1.4.6.** *1. Gegeben eine glatte Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen glatten Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler reeller Räume  $X, Y$  und ein Punkt  $p \in M$  gibt es genau eine lineare Abbildung, genannt die **Tangentialabbildung** oder auch das **Differential***

$$T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

*derart, daß für jede Karte  $(W, \varphi)$  von  $M$  mit  $W \subset \mathbb{R}^k$  und  $w \in W$  mit  $p = \varphi(w)$  die Gleichheit  $T_p f \circ d_w \varphi = d_w (f \circ \varphi)$  von linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^k \rightarrow \vec{Y}$  gilt;*

*2. Gegeben zwei differenzierbare Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow L$  von Untermannigfaltigkeiten erfüllen die Differentiale für jeden Punkt  $p \in M$  die **Kettenregel***

$$T_{f(p)} g \circ T_p f = T_p (g \circ f)$$

3. Das Differential der Einbettung  $i : M \hookrightarrow N$  einer offenen Teilmenge  $M \subseteq N$  ist an jeder Stelle die Identität  $T_p i = \text{id} : T_p M \rightarrow T_p N$ ;
4. Gilt speziell für unsere erste Mannigfaltigkeit  $M \subseteq X$  und bezeichnet  $j : N \hookrightarrow Y$  die Inklusion, so haben wir  $T_p f = d_p(j \circ f) : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ .

1.4.7. Sobald der folgende Beweis zu Ende ist, ändern wir unsere Notation und setzen auch im allgemeinen

$$d_p f := T_p f$$

Für den Beweis schien es mir jedoch wichtig, zwischen den neu eingeführten Begriffen und dem bereits Bekannten zu unterscheiden.

1.4.8. Etwas allgemeiner gilt die Proposition auch analog für Randfaltungen [AN2] 9.6.1 und sogar Eckfaltungen [AN2] 9.7.12, wenn wir den Tangentialraum an einer Stelle als das Bild des Differentials einer und jeder Randkarte beziehungsweise Eckenkarte an besagter Stelle im Sinne von [AN2] 2.3.19 erklären. Wir werden das insbesondere im Fall von Abbildungen mehrpunktiger Intervalle in Mannigfaltigkeiten verwenden.

*Beweis.* Per definitionem induziert für jede Karte wie in der Proposition ihr Differential einen Isomorphismus  $d_w \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_p M$ . Für jede Karte um  $p$  finden wir also genau eine Abbildung

$$T_p^\varphi f : T_p M \rightarrow \vec{Y}$$

mit  $T_p^\varphi f \circ d_w \varphi = d_w(f \circ \varphi)$ . Um zu zeigen, daß  $T_p^\varphi f$  nicht von der Karte  $\varphi$  abhängt, sei  $(V, \psi)$  eine weitere Karte von  $M$  und  $v \in V$  ein Punkt mit  $\psi(v) = p$ . Wir dürfen annehmen, daß unsere beiden Karten dasselbe Bild haben, so daß gilt  $\psi = \varphi \circ \kappa$  für den Kartenwechsel  $\kappa : V \xrightarrow{\sim} W$ . Die Kettenregel zeigt dann

$$T_p^\varphi f \circ d_v \psi = T_p^\varphi f \circ d_w \varphi \circ d_v \kappa = d_w(f \circ \varphi) \circ d_v \kappa = d_v(f \circ \psi) = T_p^\psi f \circ d_v \psi$$

und so  $T_p^\varphi f = T_p^\psi f$ . Nun zeigen wir, daß die so definierte Abbildung  $T_p f$  auch tatsächlich in  $T_{f(p)} N$  landet. Hierzu verwenden wir ein an  $N \subset Y$  angepaßtes lokales Koordinatensystem  $(U, h)$  von  $Y$  um  $f(p)$  im Sinne von [AN2] 4.2.6 und dürfen  $\varphi(W) \subset U$  annehmen. Die Beschreibung [AN2] ?? des Tangentialraums als Kern der Differentiale  $d_{f(p)} h_j$  der auf  $N$  identisch verschwindenden Koordinaten  $h_j$ . Aus  $h_j \circ f \circ \varphi = 0$  folgt dann  $d_{f(p)} h_j \circ T_p f = 0$ . Damit landet  $T_p f$  in der Tat in  $T_{f(p)} N$  und der erste Teil ist gezeigt. Wir geben nun die Notationen  $V, \psi, v$  wieder frei, um sie neu in anderer Bedeutung verwenden zu können. Um den zweiten Teil zu zeigen, nehmen wir die nicht auf  $N$  identisch verschwindenden Koordinaten unsers Systems  $(U, h)$ . Hat  $N$  etwa die Dimension  $k$ , so bilden

sie zusammen eine glatte Abbildung  $\bar{h} := (h_1, \dots, h_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ , die eine Bijektion  $(N \cap U) \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^k$  induziert, die ihrerseits die Umkehrabbildung einer Karte  $\psi : V \rightarrow N$  ist. Wir erklären  $v \in V$  durch  $\psi(v) = f(p)$  und bezeichnen mit  $j : N \cap U \hookrightarrow U$  die Einbettung. Es folgt  $gf\varphi = g\psi\bar{h}jf\varphi$  und so finden wir mit der Kettenregel aus der Analysis und unseren Definitionen

$$\begin{array}{ccccc} d_w(gf\varphi) & = & d_w(g\psi\bar{h}jf\varphi) & = & d_v(g\psi) \circ d_{f(p)}\bar{h} \circ d_w(jf\varphi) \\ \parallel & & & & \parallel \\ T_p(gf) \circ d_w\varphi & & T_{f(p)}g \circ d_v\psi \circ d_{f(p)}\bar{h} \circ T_p f \circ d_w\varphi & & \\ & & \parallel & & \\ & & T_{f(p)}g \circ T_p f \circ d_w\varphi & & \end{array}$$

wegen  $\bar{h}j\psi = \text{id}_V$  und folglich  $d_{f(p)}\bar{h} : T_{f(p)}N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$  invers zu  $d_v\psi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{f(p)}N$  und so Teil 2. Der Beweis von 3 und 4 bleibe dem Leser überlassen.  $\square$

**Beispiel 1.4.9.** Für  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  in eine Mannigfaltigkeit  $M$  wird unsere lineare Abbildung  $T_t\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T_{\gamma(t)}M$  oder besser in der bereits angekündigten vereinfachten Notation  $d_t\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T_{\gamma(t)}M$  gegeben durch die Multiplikation mit einem wohlbestimmten Vektor aus  $T_{\gamma(t)}M$ , den man in Anlehnung an [AN2] 2.3.12 wieder

$$(d_t\gamma)(\partial) = \gamma'(t)$$

notiert für  $\partial = (+1) \in \vec{\mathbb{R}}$  und den **Geschwindigkeitsvektor** nennt.

**Satz 1.4.10 (Homomorphismen von Matrixliegruppen).** *Jeder stetige Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  von Matrixliegruppen ist glatt und sein Differential beim neutralen Element  $d_e\varphi$  ist ein Homomorphismus von Liealgebren mit der Eigenschaft  $\exp \circ d_e\varphi = \varphi \circ \exp$ .*

1.4.11. Etwas ausführlicher geschrieben behauptet die Formel aus dem Satz das Kommutieren des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G & \xrightarrow{d_e\varphi} & \text{Lie } H \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Der Satz gilt auch für abstrakte Liegruppen und wird in dieser Allgemeinheit in 4.1.5 formuliert. Der Beweis bleibt derselbe.

*Beispiel 1.4.12.* Man erinnere sich an die Erkenntnis aus [AN2] 2.6.14, nach der das Differential an die Determinante bei der Einheitsmatrix die Spur ist. Als Korollar aus unserem Satz erkennen wir damit das Kommutieren des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}(n; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{tr}} & \mathbb{C} \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ \text{GL}(n; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{det}} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Das hatten wir in 1.2.16 bereits elementar gezeigt. Umgekehrt kann man aus dem Kommutieren dieses Diagramms auch unschwer folgern, daß das Differential an die Determinante bei der Einheitsmatrix die Spur sein muß.

*Beweis.* Jeder Gruppenweg in  $G$  liefert durch Nachschalten von  $\varphi$  einen Gruppenweg in  $H$ . Aus unserer Beschreibung der Gruppenwege 1.4.5 folgt, daß es eine Abbildung  $\tilde{\varphi} : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } H$  geben muß, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \text{Lie } H \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

zum Kommutieren bringt und die darüber hinaus mit allen Streckungen vertauscht, in Formeln  $\tilde{\varphi}(sX) = s\tilde{\varphi}(X)$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  und  $X \in \text{Lie } G$ . Wenden wir  $\varphi$  auf beide Seiten von Trotter's Produktformel 1.2.13 an, so folgt weiter  $\tilde{\varphi}(X + Y) = \tilde{\varphi}(X) + \tilde{\varphi}(Y)$  und damit die Linearität von  $\tilde{\varphi}$ . Da im Diagramm beide Vertikalen Diffeomorphismen zwischen einer offenen Umgebung der Null in der jeweiligen Liealgebra und einer offenen Umgebung des neutralen Elements in der jeweiligen Gruppe liefern, können wir folgern, daß  $\varphi$  auf einer offenen Umgebung des neutralen Elements von  $G$  glatt ist mit Differential  $d_e\varphi = \tilde{\varphi}$ . Wegen  $\varphi = (\varphi(g)\cdot) \circ \varphi \circ (g^{-1}\cdot)$  ist dann  $\varphi$  auch für jedes andere Gruppenelement  $g \in G$  glatt in einer Umgebung desselben und damit eine glatte Abbildung. Um schließlich zu zeigen, daß  $d_e\varphi$  ein Homomorphismus von Liealgebren ist, gehen wir aus vom kommutativen Diagramm von Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \text{int } x \downarrow & & \downarrow \text{int } \varphi(x) \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Indem man darin zu den Differentialen an den neutralen Elementen übergeht und die Kettenregel 1.4.6 beachtet, erhält man das kommutative Diagramm von reellen

Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{d_e \varphi} & T_e H \\ \text{Ad } x \downarrow & & \downarrow \text{Ad } \varphi(x) \\ T_e G & \xrightarrow{d_e \varphi} & T_e H \end{array}$$

Gegeben  $X, Y \in \text{Lie } G$  mit Bildern  $\bar{X}, \bar{Y} \in \text{Lie } H$  erhalten wir nach dem bereits Bewiesenen  $\varphi(\exp(tX)) = \exp(t\bar{X})$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Damit folgt

$$d_e \varphi : \text{Ad}(\exp(tX))(Y) \mapsto \text{Ad}(\exp(t\bar{X}))(\bar{Y})$$

nach dem vorhergehenden kommutativen Diagramm mit  $x = \exp(tX)$ , angewandt auf  $Y \in T_e G$ . Dann muß aber nach der Kettenregel  $d_e \varphi = d_0(d_e \varphi)$  auch den Geschwindigkeitsvektor bei  $t = 0$  der Kurve  $t \mapsto \text{Ad}(\exp(tX))(Y)$  auf den Geschwindigkeitsvektor bei  $t = 0$  der Kurve  $t \mapsto \text{Ad}(\exp(t\bar{X}))(\bar{Y})$  abbilden, und nach 1.3.2 oder besser seinem Beweis läßt sich diese Erkenntnis in der Tat schreiben als die behauptete Verträglichkeit des Differential's unseres Gruppenhomomorphismus mit der Lieklammer

$$d_e \varphi : [X, Y] \mapsto [\bar{X}, \bar{Y}] \quad \square$$

## Übungen

*Übung 1.4.13.* Eine Karte einer glatten Untermannigfaltigkeit ohne Rand eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums im Sinne von [AN2] 4.4.2 ist nichts anderes als ein Diffeomorphismus zwischen einer offenen Teilmenge eines  $\mathbb{R}^k$  und einer offenen Teilmenge unserer Mannigfaltigkeit.

*Übung 1.4.14.* Gegeben eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein Punkt  $p \in M$  und eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt der Wert des Differential's  $d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Tangentialvektor  $v \in T_p M$  auch die **Richtungsableitung von  $f$  bei  $p$  in Richtung  $v$**  und wird notiert als

$$(d_p f)(v) = D_v(f)$$

Das große D steht je nach Geschmack für „directional derivative“ oder „Derivation“.

*Übung 1.4.15.* Man zeige, daß für  $n \in \mathbb{Z}$  das Differential beim neutralen Element des Potenzierens auf der Kreislinie  $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$  die Multiplikation mit  $n$  auf dem Tangentialraum ist.

*Übung 1.4.16.* Man konstruiere eine Bijektion  $\text{GrpTop}((S^1)^m, (S^1)^n) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}(n \times m; \mathbb{Z})$  zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen  $(S^1)^m \rightarrow (S^1)^n$  und der Menge aller  $(n \times m)$ -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen.

*Übung 1.4.17.* Man zeige, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus  $SO(3) \rightarrow SO(3)$  von der Gestalt  $(\text{int } g)$  ist für genau ein  $g \in SO(3)$ . Hinweis: Man erinnere sich, daß die Liealgebra von  $SO(3)$  identifiziert werden kann mit dem  $\mathbb{R}^3$  mit Kreuzprodukt, und diskutiere, welche linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit dem Kreuzprodukt verträglich sind.

*Übung 1.4.18.* Sei  $X$  ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ist  $M \subset X$  eine glatte Untermannigfaltigkeit, so ist das Tangentialbündel  $TM \subset X \times \vec{X}$  aus [AN2] 10.5.2 nach [AN2] 10.5.3 eine glatte Untermannigfaltigkeit. Man zeige: Für jede glatte Abbildung  $f : M \rightarrow N$  in eine weitere glatte eingebettete Mannigfaltigkeit liefern auch die Differentiale  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  eine glatte Abbildung  $df : TM \rightarrow TN$ . Hinweis: [AN2] 4.4.1.

*Übung 1.4.19.* Das Differential des Invertierens  $\text{inv} : G \rightarrow G$  auf einer Matrixliegruppe beim neutralen Element ist die Punktspiegelung am Ursprung auf dem Tangentialraum, in Formeln  $d_e \text{inv} = ((-1) \cdot) : T_e G \rightarrow T_e G$ .

*Übung 1.4.20 (Liealgebra eines Kerns).* Gegeben ein glatter Homomorphismus von Matrixliegruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  zeige man mit 1.2.11 die Formel  $\text{Lie}(\ker \varphi) = \ker(d_e \varphi)$  und allgemeiner für  $K \subset H$  eine abgeschlossene Untergruppe

$$\text{Lie}(\varphi^{-1}(K)) = \{x \in \text{Lie } G \mid (d_e \varphi)(x) \in \text{Lie } K\}$$

Daraus folgt im Übrigen mit [AN2] 2.6.14 auch sofort die in 1.2.16 bereits elementar gezeigte Beziehung  $\text{Lie}(SL(n; \mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$ . Mit 3.6.23 wird dasselbe auch allgemeiner für abstrakte Liegruppen folgen.

1.4.21. Die wichtigsten Methoden zur Berechnung von Liealgebren sind für uns die Verträglichkeit der Liealgebrenbildung mit Schnitten von abgeschlossenen Untergruppen 1.3.10, mit dem Bilden des Urbilds einer abgeschlossenen Untergruppe unter einem Homomorphismus 1.4.20, sowie die Formel 2.1.13 für die Liealgebra der Standgruppe eines Vektors in einer glatten Darstellung und ihrer Projektivisierung.

*Übung 1.4.22 (Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten).* Gegeben  $G$  eine Matrixliegruppe und  $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$  ein glatter Automorphismus von  $G$  ist die Liealgebra der Gruppe der Fixpunkte  $G^\varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = g\}$  von  $\varphi$  genau die Menge der Fixpunkte des Differentials  $d_e \varphi$  in der Liealgebra, in Formeln

$$\text{Lie}(G^\varphi) = (\text{Lie } G)^{d_e \varphi}$$

Mit 3.6.23 wird dasselbe auch allgemeiner für abstrakte Liegruppen folgen, vergleiche etwa 3.6.25. Hinweis: Man mag entweder ein direktes Argument geben oder 1.4.20 auf  $(\text{id}, \varphi) : G \rightarrow G \times G$  und die diagonale Untergruppe anwenden.

**Übung 1.4.23 (Komplexe Matrizen und Relativitätstheorie).** Man betrachte für  $SL(2; \mathbb{C})$  die vierdimensionale reelle Darstellung  $L := \ker(\wedge_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{C}^2) \rightarrow \wedge_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^2))$ . Man zeige, daß  $SL(2; \mathbb{C})$  trivial auf  $\wedge_{\mathbb{R}}^4(\mathbb{C}^2)$  operiert, etwa mit [LA1] 6.4.14. Man zeige weiter, daß die durch  $\wedge$  und eine geeignete von Null verschiedene reelle Volumenform  $\wedge_{\mathbb{R}}^4(\mathbb{C}^2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  gegebene symmetrische Bilinearform auf unserem Kern  $L$  nichtausgeartet vom Typ  $(3, 1)$  ist. Man zeige die Existenz einer kurzen exakten Sequenz

$$\{\pm \text{id}\} \hookrightarrow SL(2; \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, 1)^+$$

Hier bezeichnet  $SO(3, 1)^+$  wie in [TM] 2.2.22 die Einskomponente von  $O(3, 1)$ .

## 1.5 Drehgruppe und Spingruppe

1.5.1. Wir erinnern aus [AN2] 8.5.19 oder [TM] 2.2.12, daß  $SU(2)$  und  $SO(3)$ , ja sogar  $SU(n)$  und  $SO(n)$  zusammenhängend sind. Man kann das auch leicht „zu Fuß“ einsehen.

**Proposition 1.5.2 (Drehgruppe und Spingruppe).** *Es gibt einen stetigen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$  mit Kern  $\{\pm \text{id}\}$ .*

*Beweis.* Sozusagen zu Fuß haben Sie das eventuell bereits in [LA2] 1.11.26 gezeigt. Hier soll nun ein mehr konzeptionelles Argument erklärt werden. Wir betrachten die adjungierte Darstellung 1.3.3 der **Spingruppe**  $SU(2)$  auf dem Raum der schiefhermiteschen Matrizen mit Spur Null  $\text{Lie } SU(2)$ . Sie ist eine dreidimensionale reelle Unterdarstellung der Darstellung von  $SU(2)$  auf  $\text{Mat}(2; \mathbb{C})$  durch Konjugation, und die Elemente dieser Unterdarstellung erzeugen zusammen mit der Einheitsmatrix ganz  $\text{Mat}(2; \mathbb{C})$  als komplexen Vektorraum. Der Kern unserer adjungierten Darstellung besteht folglich genau aus den Matrizen aus  $SU(2)$ , die mit allen Matrizen von  $\text{Mat}(2; \mathbb{C})$  kommutieren, und das ist eben der Schnitt der Menge  $\mathbb{C}I$  aller Vielfachen der Einheitsmatrix mit unserer Gruppe  $SU(2)$  alias die Untergruppe  $\{\pm \text{id}\}$ . Auf dem Raum  $\mathfrak{su}(2) := \text{Lie } SU(2)$  aller schiefhermiteschen Matrizen mit Spur Null definiert aber nun die Vorschrift  $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$  eine negativ definite symmetrische Bilinearform, wie man leicht nachrechnet, die offensichtlich unter allen Konjugationen mit unitären Matrizen invariant ist. Versehen wir  $\mathfrak{su}(2)$  mit dem Negativen dieser Bilinearform als Skalarprodukt, so liefert die adjungierte Darstellung also einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{Ad} : SU(2) \rightarrow O(\mathfrak{su}(2))$$

mit Kern  $\{\pm \text{id}\}$ . Da  $SU(2)$  zusammenhängend ist, muß dieser Gruppenhomomorphismus bereits in  $SO(\mathfrak{su}(2))$  landen, und da der Kern diskret ist, muß unser Gruppenhomomorphismus nach 1.4.20 eine injektive Abbildung auf den Lie-Algebren induzieren. Nach Dimensionsvergleich muß diese injektive Abbildung

dann sogar ein Isomorphismus sein, so daß nach 1.4.10 das Bild von  $\text{Ad}$  eine Umgebung des neutralen Elements umfaßt. Da aber  $\text{SO}(\mathfrak{su}(2))$  nach [LA2] 1.11.24 oder [TM] 2.2.12 zusammenhängend ist, muß folglich  $\text{Ad}$  ganz  $\text{SO}(\mathfrak{su}(2))$  als Bild haben.  $\square$

## Übungen

*Übung 1.5.3.* Man zeige, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus  $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SU}(2)$  von der Gestalt  $(\text{int } g)$  ist für ein  $g \in \text{SU}(2)$ . Hinweis: 1.4.17.

*Übung 1.5.4.* Folgern Sie aus 1.5.2, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  konstant oder surjektiv ist, und daß es für je zwei stetige surjektive Gruppenhomomorphismen  $\phi, \psi$  ein  $g \in \text{SO}(3)$  gibt mit  $\phi = (\text{int } g) \circ \psi$ .

## 1.6 Quaternionale Gruppen

1.6.1 (**Erinnerungen zu Quaternionen**). Die Behauptungen des vorhergehenden Abschnitts kann man alternativ auch im Bild der Quaternionen verstehen. Wir erinnern an den Schiefkörper der Quaternionen

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

aus [LA1] 5.6.4 mit den Rechenregeln  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  und insbesondere an die quaternionale Konjugation

$$\overline{a + bi + cj + dk} := a - bi - cj - dk$$

mit der Eigenschaft  $\overline{q\bar{w}} = \bar{w}q$ . Man setzt  $|q| := \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$  und  $\text{Re}(q) := (q + \bar{q})/2$ , also  $\text{Re}(a + bi + cj + dk) = a$ .

1.6.2 (**Kugelschalen als Liegruppen**). Alle Kugelschalen  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  sind glatte Mannigfaltigkeiten. Auf  $S^0, S^1$  und  $S^3$  induziert die Multiplikation in  $\mathbb{R}$ , den komplexen Zahlen  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  beziehungsweise den Quaternionen  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$  aus [LA1] 5.6.4 sogar die Struktur einer Liegruppe. Für das Modell des Schiefkörpers der Quaternionen aus dem Beweis von [LA1] 5.6.3 stimmt die Gruppe  $S^3$  der Quaternionen der Länge Eins überein mit der Gruppe  $\text{SU}(2)$  und wir erhalten so einen Isomorphismus

$$\text{SU}(2) \xrightarrow{\sim} S^3$$

Es scheint mir anschaulich klar und ist auch formal nicht schwer nachzurechnen, daß der Tangentialraum beim neutralen Element  $T_1 S^3$  genau der Raum der rein imaginären Quaternionen  $Q = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \{w \in \mathbb{H} \mid \bar{w} = -w\}$  ist. Die

adjungierte Darstellung der  $S^3$  darauf geschieht wie immer durch Konjugation, ein invariantes Skalarprodukt können wir in diesem Fall leicht explizit angeben durch die Vorschrift  $\langle v, w \rangle = \operatorname{Re}(\bar{v}w)$ , und dafür bilden  $i, j, k$  dann eine Orthonormalbasis.

**Definition 1.6.3.** Wir erinnern den Schiefkörper  $\mathbb{H}$  der Quaternionen mit seinem Antiautomorphismus  $q \mapsto \bar{q}$ . Gegeben ein  $\mathbb{H}$ -Rechtsmodul  $V$  erklären wir eine **quaternional-hermitesche Form auf  $V$**  als eine biadditive Abbildung

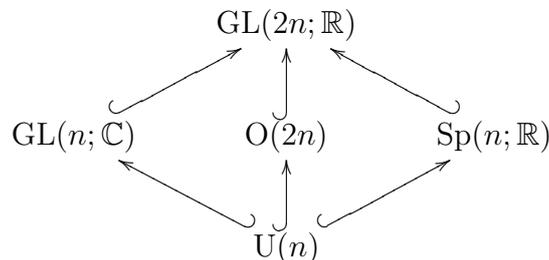
$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{H} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

mit  $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$  und  $\langle v, w\mu \rangle = \langle v, w \rangle \mu$  für alle  $v, w \in V$  und  $\mu \in \mathbb{H}$ . **quaternionales Skalarprodukt** erklären wir als eine quaternional-hermitesche Form mit  $\langle v, v \rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$ .

1.6.4. Die Abbildung  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $(x, y) \mapsto \sum \bar{x}_i y_i$  ist ein quaternionales Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{H}$ -Rechtsmodul  $\mathbb{H}^n$ . Die Gruppe der Automorphismen unseres  $\mathbb{H}$ -Rechtsmoduls, die dieses quaternionale Skalarprodukt invariant lassen, heißt die **kompakte symplektische Gruppe** und wird  $\operatorname{Sp}(n)$  notiert. Den Ursprung dieser Terminologie diskutieren wir in 1.6.6.

## Übungen

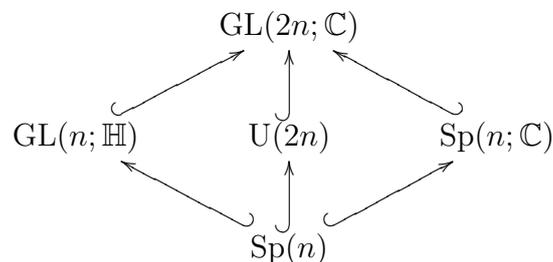
*Übung 1.6.5.* Seien  $V_{\mathbb{C}}$  ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt  $s = \langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $V_{\mathbb{R}}$  seine Reellifizierung. Dann ist  $\operatorname{Re} \circ s$  ein Skalarprodukt auf  $V_{\mathbb{R}}$  und  $\operatorname{Im} \circ s$  eine symplektische Form auf  $V_{\mathbb{R}}$  und wir erhalten in  $\operatorname{GL}(V_{\mathbb{R}})$  die drei Untergruppen  $\operatorname{GL}(V_{\mathbb{C}})$ ,  $\operatorname{O}(V_{\mathbb{R}}; \operatorname{Re} s)$  und  $\operatorname{Sp}(V_{\mathbb{R}}; \operatorname{Im} s)$ . Man zeige, daß der Schnitt von je Zweien dieser Untergruppen bereits der Schnitt von allen Dreien ist. Insbesondere erhalten wir damit im Diagramm



die Untergruppe ganz unten als Schnitt von je Zwei der Untergruppen in der Mitte.

*Übung 1.6.6 (Kompakte symplektische Gruppe und Quaternionen).* Jedes Quaternion  $q \in \mathbb{H}$  können wir eindeutig schreiben als  $q = x + jy$  mit  $x, y \in \mathbb{C}$ . Wir

setzen  $x := \text{Com}(q)$  und  $y := \text{Qua}(q)$  und nennen das den **komplexen** und den **quaternionalen Anteil** unseres Quaternions. So vertauschen  $\text{Com}$  und  $\text{Qua}$  mit der Rechtsoperation von  $\mathbb{C}$ . Weiter gilt  $\bar{q} = \bar{x} - jy$  und folglich  $\text{Com}(\bar{q}) = \overline{\text{Com}(q)}$  sowie  $\text{Qua}(\bar{q}) = -\text{Qua}(q)$ . Sei nun  $V_{\mathbb{H}}$  ein  $\mathbb{H}$ -Rechtsmodul mit quaternionalem Skalarprodukt  $s = \langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $V_{\mathbb{C}}$  seine Restriktion zu einem komplexen Vektorraum. Dann ist  $\text{Com} \circ s$  ein Skalarprodukt auf  $V_{\mathbb{C}}$  und  $\text{Qua} \circ s$  eine symplektische Form auf  $V_{\mathbb{C}}$  und wir erhalten in  $\text{GL}(V_{\mathbb{C}})$  die drei Untergruppen  $\text{GL}(V_{\mathbb{H}})$ ,  $\text{U}(V_{\mathbb{C}}; \text{Com } s)$  und  $\text{Sp}(V_{\mathbb{C}}; \text{Qua } s)$ . Man zeige, daß der Schnitt von je Zweien dieser Untergruppen bereits der Schnitt von allen Dreien ist. Insbesondere erhalten wir damit im Diagramm



die Untergruppe ganz unten als Schnitt von je Zwei der Untergruppen in der Mitte.

1.6.7. Seien  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und  $\omega, \eta$  symplektische Formen. Stimmen die Automorphismengruppen  $G$  unserer beiden Formen überein, so unterscheiden sich unsere Formen höchstens um einen komplexen Skalar. In der Tat ist die Darstellung  $V$  der symplektischen Gruppe irreduzibel, und damit ist  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V, V^*)$  höchstens eindimensional.

1.6.8. Der Normalisator von  $\text{Sp}(n)$  in  $\text{U}(2n)$  ist  $\text{Sp}(n)(\text{U}(1) \text{id})$ . In der Tat ist  $\text{Sp}(n; \mathbb{C})$  der Zariski-Abschluß von  $\text{Sp}(n)$ . Aus  $g \text{Sp}(n) g^{-1} = \text{Sp}(n)$  folgt also  $g \text{Sp}(n; \mathbb{C}) g^{-1} = \text{Sp}(n; \mathbb{C})$ . Daraus folgt hinwiederum, daß die symplektische Form  $\omega$  und die symplektische Form  $\omega \circ (g \times g)$  dieselbe Automorphismengruppe haben, nach 1.6.7 gilt demnach  $\omega \circ (g \times g) = \lambda \omega$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ . Die Abbildung  $g \mapsto \lambda$  ist nun ein Gruppenhomomorphismus von unserem Normalisator nach  $\mathbb{C}^{\times}$  und ihre Restriktion auf den Normalisator in  $\text{U}(2n)$  muß folglich in der Kreisgruppe  $\text{U}(1)$  landen. Wählen wir schließlich  $\alpha$  mit  $\alpha^2 \lambda = 1$ , so folgt  $\alpha \in \text{U}(1)$  und  $(\alpha \text{id})g \in \text{Sp}(n; \mathbb{C})$ .

*Übung 1.6.9.* Die Lösungsmenge der Gleichung  $X^2 = -1$  in den Quaternionen ist genau die Kugelschale aller Quaternionen vom Betrag Eins mit Realteil Null.

*Übung 1.6.10.* Wir haben in [AN1] 2.4.3 gesehen, daß jeder Automorphismus des Körpers  $\mathbb{R}$  die Identität ist, und in [LA1] 2.7.5, daß jeder stetige Automorphismus des Körpers  $\mathbb{C}$  die Identität oder die komplexe Konjugation ist. Man zeige nun, daß jeder stetige Automorphismus des Schiefkörpers  $\mathbb{H}$  durch die Konjugation

mit einem invertierbaren Körperelement gegeben wird und konstruiere eine Identifikation besagter Automorphismengruppe mit der  $SO(3)$ .

*Übung 1.6.11 (Iwasawa-Zerlegung quaternionaler Matrizen).* Gegeben eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  eines  $\mathbb{H}$ -Rechtsmoduls von endlichem Rang  $V$  finden wir, indem wir das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren verallgemeinern, eindeutig bestimmte  $\lambda_{ij} \in \mathbb{H}$  für  $i \leq j$  mit  $\lambda_{ii} > 0$  derart, daß  $\vec{w}_1 := \vec{v}_1 \lambda_{11}, \vec{w}_2 := \vec{v}_2 \lambda_{22} + \vec{v}_1 \lambda_{12}, \dots$  eine Orthonormalbasis von  $V$  bilden. Man folgere, daß für  $N \subset GL(n; \mathbb{H})$  die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit reellen positiven Diagonaleinträgen die Multiplikation eine Bijektion  $Sp(n) \times N \xrightarrow{\sim} GL(n; \mathbb{H})$  liefert.

*Übung 1.6.12.* Die Operation der Quaternionen der Länge Eins auf dem Quaternionenraum durch Rechts- und Linksmultiplikation liefert eine Surjektion

$$S^3 \times S^3 \rightarrow SO(\mathbb{H}) \cong SO(4)$$

gegeben in Formeln durch  $(q, w) \mapsto (x \mapsto (qx\bar{w}))$  mit zweielementigem Kern  $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ . Das Skalarprodukt auf  $\mathbb{H}$  ist dabei  $\langle x, y \rangle := \operatorname{Re}(\bar{x}y)$ .

## 2 Endlichdimensionale Darstellungen

### 2.1 Darstellungen und ihre Ableitungen

2.1.1. In diesem Abschnitt mag der Leser unter einer Liegruppe je nach Kenntnisstand eine Matrixliegruppe oder auch eine abstrakte Liegruppe verstehen. Unter einer reellen beziehungsweise komplexen **endlichdimensionalen Darstellung einer Liegruppe**  $G$  verstehen wir stets eine stetige Darstellung im Sinne von 1.1, also ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem endlichdimensionalen reellen beziehungsweise komplexen Vektorraum  $V$  mit einem stetigen Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Statt  $\rho(g)(v)$  schreiben wir auch oft abkürzend  $gv$ . Wollen wir die bei Liegruppen meist implizit zugrundegelegte Annahme der Stetigkeit besonders betonen, so reden wir auch von **stetigen endlichdimensionalen Darstellungen**.

*Beispiel 2.1.2.* Der  $\mathbb{R}^n$  ist in offensichtlicher Weise eine Darstellung der Liegruppe  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ . Dasselbe gilt für die Räume  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^{(m)}$  aller Polynomfunktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , die homogen sind vom Grad  $m$ , für die Operation gegeben durch das „Verschieben von Funktionen“, in Formeln  $(gf)(p) = f(g^{-1}p)$  für alle  $g \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Dasselbe gilt mit  $\mathbb{C}$  statt  $\mathbb{R}$  und wir erhalten die komplexe Darstellung  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  von  $\text{GL}(n; \mathbb{C})$ , bei der ich die Variablen groß geschrieben habe, weil sie hier keine Koordinaten im reellen Sinne mehr sind.

**Definition 2.1.3.** Sei  $k$  ein Körper. Eine **Darstellung einer Liealgebra**  $\mathfrak{g}$  über  $k$  ist ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum  $V$  und einem Homomorphismus von Liealgebren  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

*Beispiel 2.1.4 (Ableiten einer Liegruppendarstellung).* Ist  $G$  eine Liegruppe und  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine stetige Darstellung durch Automorphismen eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums, so wird  $V$  nach 1.4.10 eine Darstellung der Liealgebra  $\text{Lie } G$  mittels des Differential beim neutralen Element, das wir oft abkürzen zu

$$d\rho = d_e\rho : \text{Lie } G \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Diese Darstellung der Liealgebra  $\text{Lie } G$  heißt die **abgeleitete Darstellung** zur Darstellung unserer Liegruppe  $G$ .

*Beispiel 2.1.5.* Die Darstellung  $\rho_n : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $z \mapsto z^n$  der Kreislinie hat das Differential  $d_e\rho_n : \lambda \mapsto n\lambda$  für  $\lambda \in T_1S^1 = i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = T_1\mathbb{C}^\times$ .

**Definition 2.1.6.** Sei  $k$  ein Körper. Eine **Operation einer Liealgebra**  $\mathfrak{g}$  über  $k$  auf einem  $k$ -Vektorraum  $V$  ist eine bilineare Abbildung  $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ ,  $(x, v) \mapsto xv$  mit der Eigenschaft

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Wir werden in diesem Zusammenhang die Klammern oft weglassen und  $x(yv)$  mit  $xyv$  abkürzen.

2.1.7. Seien  $k$  ein Körper,  $\mathfrak{g}$  eine  $k$ -Liealgebra und  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. So induziert die Identifikation  $\text{Ens}(\mathfrak{g} \times V, V) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\mathfrak{g}, \text{Ens}(V, V))$  aus dem Exponentialgesetz [GR] 1.6.5 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Operationen von } \mathfrak{g} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Liealgebrenhomomorphismen} \\ \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \end{array} \right\}$$

Ein Vektorraum mit der Operation einer Liealgebra ist also im wesentlichen dasselbe wie eine Darstellung besagter Liealgebra.

2.1.8 (**Berechnung der abgeleiteten Darstellung**). Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellung  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  einer Liegruppe und  $x \in \text{Lie } G$  und  $v \in V$  berechnet man  $xv \in V$  zweckmäßig, indem man unserem  $\rho$  das Auswerten  $a_v : \text{GL}(V) \rightarrow V$  nachschaltet. Als Restriktion einer linearen Abbildung  $a_v : \text{End}(V) \rightarrow V$  ist  $a_v$  sein eigenes Differential, in Formeln  $da_v = a_v$  oder ganz pedantisch  $da_v \circ \text{trans} = \text{trans} \circ a_v$ . So ergibt sich für die Operation eines Elements  $x$  der Liealgebra auf einem Vektor  $v$  die Formel

$$xv = (d_e(a_v \circ \rho))(x)$$

für das Bild von  $x$  unter dem Differential beim neutralen Element der Abbildung  $a_v \circ \rho : G \rightarrow V$ , also der Abbildung  $g \mapsto gv$ . Halten wir noch eine Kurve  $\mathbb{R} \rightarrow G$  mit Geschwindigkeit  $x$  bei  $t = 0$  davor, zum Beispiel die Kurve  $t \mapsto \exp(tx)$ , ergibt sich für die Operation eines Elements  $x$  der Liealgebra auf einem Vektor  $v$  einer Darstellung die Formel

$$xv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\exp tx)v - v}{t}$$

**Beispiel 2.1.9 (Abgeleitete Darstellung auf Funktionenräumen).** Wir berechnen die Ableitung der Darstellung von  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^{(m)}$  aus 2.1.2. Gegeben  $A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$  und ein Polynom  $f$  finden wir für die zugehörige Operation von  $A$  auf  $f$  gefolgt vom Auswerten an einer Stelle  $p \in \mathbb{R}^n$  sofort

$$(Af)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\exp(-tA)p) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(-tA)p) = (D_{-Ap}f)(p)$$

alias die Richtungsableitung von  $f$  bei  $p$  in der Richtung  $-Ap$ . Nun kann die Richtungsableitung in Richtung  $v = (v_1, \dots, v_n)$  geschrieben werden als  $v_1 \partial_1 + \dots + v_n \partial_n$  und wir haben folglich  $(Af)(p) = - \sum_{i,j} a_{ij} x_j(p) (\partial_i f)(p)$  alias

$$Af = - \sum_{i,j} a_{ij} x_j \partial_i f$$

Betrachten wir etwa die eindimensionale Untergruppe aller Vielfachen der Einheitsmatrix, die ja durch Streckungen auf  $\mathbb{R}^n$  operiert, so operiert die Einheitsmatrix als Element der Liealgebra durch das radiale Vektorfeld  $-\sum_i x_i \partial_i$ .

**Beispiel 2.1.10 (Abgeleitete Darstellung auf Funktionenräumen, Variante).** Wir berechnen die Ableitung der Darstellung von  $GL(n; \mathbb{C})$  auf  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{(m)}$  aus 2.1.2. Gegeben  $A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$  und ein Polynom  $f$  finden wir für die zugehörige Operation von  $A$  auf  $f$  gefolgt vom Auswerten an einer Stelle  $p \in \mathbb{C}^n$  sofort

$$(Af)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\exp(-tA)p) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(-tA)p) = (D_{-Ap}f)(p)$$

alias die Richtungsableitung von  $f$  bei  $p$  in der Richtung  $-Ap$ . Ich behaupte nun, daß die Richtungsableitung in Richtung  $v = (v_1, \dots, v_n)$  einer polynomialen Funktion auch in diesem Fall geschrieben werden kann als  $v_1 \partial_1 + \dots + v_n \partial_n$  mit diesmal rein formal-algebraisch zu verstehenden partiellen Ableitungen unserer komplexen Polynome. Das ist aber klar für die Variablen  $X_i$ , und da beide Ausdrücke die Leibnizregel erfüllen, folgt es für beliebige Polynome. Wir haben folglich wie zuvor  $(Af)(p) = -\sum_{i,j} a_{ij} X_j(p) (\partial_i f)(p)$  alias

$$Af = -\sum_{i,j} a_{ij} X_j \partial_i f$$

**Beispiel 2.1.11.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra. Die **triviale Operation**  $xv = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und  $v \in V$  macht jeden Vektorraum  $V$  zu einer Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Der Grundkörper  $k$  versehen mit der trivialen Operation heißt die **Einsdarstellung**, den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation die **Nulldarstellung** unserer Liealgebra. Ist  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und lassen wir eine Liegruppe derart darauf operieren, daß jedes Gruppenelement als die Identität operiert, so erhalten wir als Ableitung die triviale Operation von  $\text{Lie } G$  auf  $V$ .

**Beispiel 2.1.12.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra. Für  $x \in \mathfrak{g}$  erkläre man  $(\text{ad } x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  durch die Vorschrift  $(\text{ad } x) : y \mapsto [x, y]$ . Die Jacobi-Identität besagt dann, daß  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  ein Homomorphismus von Liealgebren ist. Er heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Liealgebra. Ist nun speziell  $G$  eine Matrixliegruppe und  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\text{Lie } G)$  ihre adjungierte Darstellung, so ist deren abgeleitete Darstellung der Liealgebra gerade unsere adjungierte Darstellung der Liealgebra  $\text{ad} : \text{Lie } G \rightarrow GL(\text{Lie } G)$ . In der Tat finden wir mit 2.1.8 mühelos

$$((d_e \text{Ad})(X))(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(tX))Y(\exp(-tX)) = [X, Y] = (\text{ad}(X))(Y)$$

## Übungen

**Übung 2.1.13 (Liealgebra einer Standgruppe).** Ist  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine stetige endlichdimensionale Darstellung einer Liegruppe und  $v \in V$  ein Vektor, so gilt für die Liealgebra der Standgruppe

$$\text{Lie}(G_v) = \{x \in \text{Lie } G \mid xv = 0\}$$

Hinweis: Man mag 1.2.32 anwenden.

**Übung 2.1.14.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Die offensichtliche Operation macht  $V$  zu einer Darstellung von  $\mathfrak{gl}(V)$ , der **Standarddarstellung** von  $\mathfrak{gl}(V)$ . Im Fall eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums zeige man, daß sie die Ableitung der offensichtlichen Darstellung der Matrixliegruppe  $G = \text{GL}(V)$  durch Automorphismen von  $V$  ist.

**Übung 2.1.15.** Gegeben zwei Darstellungen  $(V, \rho)$  und  $(W, \sigma)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  wird der Raum  $\text{Hom}_k(V, W)$  aller  $k$ -linearen Homomorphismen zu einer Darstellung mittels der Vorschrift, daß für  $f : V \rightarrow W$  linear und  $g \in G$  der Morphismus  $gf$  gegeben sein soll durch  $gf = \sigma(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$  alias

$$(gf)(v) = g(f(g^{-1}v)) \quad \forall v \in V$$

Wir nennen diese Operation auf dem Raum aller Homomorphismen die **Operation durch Konjugation**. Man zeige: Gegeben zwei stetige endlichdimensionale Darstellungen  $V, W$  einer Liegruppe  $G$  ist auch die Operation durch Konjugation von  $G$  auf  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  stetig, und die abgeleitete Operation der Liealgebra wird für  $x \in \text{Lie } G$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  dadurch gegeben, daß für alle  $v \in V$  gilt

$$(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv)$$

**Ergänzende Übung 2.1.16.** Gegeben zwei Darstellungen  $(V, \rho)$  und  $(W, \sigma)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  wird der Raum  $V \otimes_k W$  zu einer Darstellung mittels der Vorschrift  $g(v \otimes w) := gv \otimes gw$ . Wir nennen diese Darstellung die **Tensor-Darstellung**. Man zeige: Gegeben zwei stetige endlichdimensionale Darstellungen  $V, W$  einer Liegruppe  $G$  ist auch die Tensordarstellung stetig, und die abgeleitete Operation der Liealgebra wird für  $x \in \text{Lie } G$  gegeben durch

$$x(v \otimes w) = xv \otimes w + v \otimes xw$$

**Ergänzende Übung 2.1.17.** Gegeben eine Darstellung  $(V, \rho)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  werden ihre äußeren Potenzen  $\bigwedge^i V$  zu Darstellungen in der offensichtlichen Weise. Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellungen  $V$  einer Liegruppe  $G$  sind auch ihre äußeren Potenzen stetig. Man beschreibe die abgeleitete Operation der Liealgebra.

## 2.2 Homomorphismen von Darstellungen

2.2.1. Ich erinnere daran, daß wir in 1.1.9 einen Homomorphismus von Darstellungen  $V, W$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  definiert hatten als eine  $k$ -lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  mit der Eigenschaft  $\varphi(gv) = g\varphi(v) \forall v \in V, g \in G$ . Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen  $\text{Mod}_G(V, W)$  oder, wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen,  $\text{Mod}_{k,G}(V, W)$ . Noch allgemeiner erklären wir für Darstellungen  $V_1, \dots, V_r, W$  mit  $r \geq 0$  eine **Verschmelzung** als eine  $G$ -äquivalente multilineare Abbildung  $V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  und notieren die Menge aller derartigen Verschmelzungen

$$\text{Mod}_{k,G}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$$

Im Spezialfall  $r = 0$  verstehen wir das leere Produkt als die einpunktige Menge  $\{*\}$  mit der trivialen  $G$ -Operation und das Auswerten auf deren einzigem Element  $*$  ist eine Bijektion  $\text{Mod}_{k,G}(\curlywedge, W) \xrightarrow{\sim} W^G$  zwischen der Menge der Leerverschmelzungen nach  $W$  und der Menge der  $G$ -invarianten Vektoren. Verschmelzungen lassen sich in der offensichtlichen Weise „multiverknüpfen“ und wir erhalten so eine „Schmelzkategorie“ im Sinne von [TS] ??, aber so weit will ich hier nicht gehen. Ich will jedoch gegebene  $k$ -Vektorräume  $V_1, \dots, V_r, W$  mit  $r \geq 0$  für die Menge der multilinearen Abbildungen von nun an auch die Notation  $\text{Mod}_k(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$  verwenden.

**Definition 2.2.2.** Ein **Homomorphismus von Darstellungen** oder auch **Verflechtungsoperator** zwischen zwei Darstellungen  $V, W$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper  $k$  ist eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  derart, daß gilt  $\varphi(xv) = x\varphi(v) \forall v \in V, x \in \mathfrak{g}$ . Wir notieren die Menge aller solchen Homomorphismen  $\text{Mod}_{\mathfrak{g}}(V, W)$  oder auch  $\text{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V, W)$ , wenn wir den Grundkörper explizit machen wollen. Allgemeiner erklären wir für Darstellungen  $V_1, \dots, V_r, W$  mit  $r \geq 0$  eine **Verschmelzung** als eine multilineare Abbildung  $V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  mit

$$\varphi(xv_1, \dots, v_r) + \dots + \varphi(v_1, \dots, xv_r) = x\varphi(v_1, \dots, v_r) \forall v_i \in V_i, x \in \mathfrak{g}$$

und notieren die Menge aller derartigen Verschmelzungen

$$\text{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$$

Im Spezialfall  $r = 0$  verstehen wir die leere Summe als die Null von  $W$  und das leere Produkt als die einpunktige Menge  $\{*\}$  und das Auswerten auf dem einzigen Element  $*$  der einpunktigen Menge ist eine Bijektion  $\text{Mod}_{k,\mathfrak{g}}(\curlywedge, W) \xrightarrow{\sim} W^{\mathfrak{g}}$  zwischen der Menge der Leerverschmelzungen nach  $W$  und der Menge der Vektoren von  $W$ , die von allen Elementen der Liealgebra zu Null gemacht werden. Verschmelzungen lassen sich in der offensichtlichen Weise „multiverknüpfen“ und wir erhalten so eine „Schmelzkategorie“ [TS] ??, aber so weit will ich hier nicht gehen.

**Satz 2.2.3 (Verschmelzungen unter Liegruppen und Liealgebren).** Gegeben  $r \geq 0$  und endlichdimensionale stetige reelle Darstellungen  $V_1, \dots, V_r, W$  einer Liegruppe  $G$  sind alle Verschmelzungen unserer Darstellungen auch Verschmelzungen zwischen den abgeleiteten Darstellungen der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ , in Formeln

$$\text{Mod}_{\mathbb{R},G}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W) \subset \text{Mod}_{\mathbb{R},\mathfrak{g}}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$$

Ist  $G$  zusammenhängend, so ist diese Inklusion sogar eine Gleichheit.

**Vorschau 2.2.4 (Darstellungen als Schmelzkategorie).** In der in [TS] ?? eingeführten Terminologie kann man die vorhergehenden Bemerkungen dahingehend zusammenfassen, daß die endlichdimensionalen stetigen reellen Darstellungen einer Liegruppe eine Schmelzkategorie  $\text{Modfd}_{\mathbb{R}}^G$  mit universellen Verschmelzungen und Multihom bilden, daß die Darstellungen einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  desgleichen eine Schmelzkategorie  $\text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{g}}$  mit universellen Verschmelzungen und Multihom bilden, und daß das Ableiten ein mit universellen Verschmelzungen und Multihom verträglicher Schmelzfunktor

$$\text{Modfd}_{\mathbb{R},G} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R},\mathfrak{g}}$$

ist, der im Fall einer zusammenhängenden Liegruppe sogar ein volltreuer Schmelzfunktor  $\text{Modfd}_{\mathbb{R},G} \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathbb{R},\mathfrak{g}}$  ist.

**2.2.5 (Invarianten von Liegruppen und Liealgebren).** Gegeben eine Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$  verwenden wir wie in [LA2] 5.1.7 die Notation

$$V^G := \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}$$

für die Menge der  **$G$ -invarianten Vektoren von  $V$** . Für eine Darstellung  $V$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid xv = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

und nennen die Elemente von  $V^{\mathfrak{g}}$  die  **$\mathfrak{g}$ -invarianten Vektoren von  $V$** . Ist  $G$  eine Liegruppe mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$  und  $V$  eine stetige Darstellung von  $G$  in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so sind nach dem Spezialfall  $r = 0$  unseres Satzes alle unter der Gruppe invarianten Vektoren auch invariant unter ihrer Liealgebra, in Formeln  $V^G \subset V^{\mathfrak{g}}$ , und für zusammenhängendes  $G$  gilt sogar

$$V^G = V^{\mathfrak{g}}$$

**2.2.6.** Zwei Darstellungen heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Die Umkehrabbildung dieses Isomorphismus ist dann notwendig auch ein Homomorphismus von Darstellungen. Spezialisieren wir unseren Satz zum Fall  $r = 1$ , so sehen wir insbesondere, daß zwei endlichdimensionale stetige reelle Darstellungen einer zusammenhängenden Liegruppe, die isomorphe Darstellungen der Liealgebra liefern, bereits als Darstellungen der Gruppe isomorph gewesen sein müssen.

*Beweis.* Für alle  $x \in \mathfrak{g}$  und jede Verschmelzung  $\varphi$  von  $G$ -Darstellungen und alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\varphi(\exp(tx)v_1, \dots, \exp(tx)v_r) = \exp(tx)\varphi(v_1, \dots, v_r)$$

Die Kettenregel und unsere Regel für das Differential multilinearer Abbildungen liefern dann durch Vergleich der beiden Ausdrücke für die Geschwindigkeit im Ursprung dieses Weges zum Zeitpunkt Null die gewünschte Identität

$$\varphi(xv_1, \dots, v_r) + \dots + \varphi(v_1, \dots, xv_r) = x\varphi(v_1, \dots, v_r)$$

Andererseits liefert das Vorschalten von  $x$  an den verschiedenen Stellen paarweise kommutierende Endomorphismen des Raums  $\text{Mod}_{\mathbb{R}}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$  aller multilinearen Abbildungen, folglich ist das Exponential ihrer Summe das Produkt ihrer Exponentiale und aus unserer letzten Gleichung folgt umgekehrt

$$\varphi(\exp(x)v_1, \dots, \exp(x)v_r) = \exp(x)\varphi(v_1, \dots, v_r) \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

Ist zusätzlich  $G$  zusammenhängend, so wird  $G$  von  $\exp \mathfrak{g}$  erzeugt und wir erhalten die behauptete Gleichheit von Räumen von Verschmelzungen.  $\square$

**Definition 2.2.7.** Ein Untervektorraum  $U$  einer Darstellung  $V$  einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  heißt eine **Unterdarstellung**, wenn gilt  $xv \in U \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in U$ . Wir sagen in diesem Zusammenhang auch,  $U$  sei **stabil unter**  $\mathfrak{g}$ . Eine von  $V$  verschiedene Unterdarstellung  $U \subsetneq V$  heißt eine **echte Unterdarstellung** von  $V$ .

*Beispiele 2.2.8.* Gegeben eine Darstellung  $V$  sind ganz  $V$  und der Nullraum Unterdarstellungen. Ist  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist das Bild jeder Unterdarstellung von  $V$  eine Unterdarstellung von  $W$  und das Urbild jeder Unterdarstellung von  $W$  eine Unterdarstellung von  $V$ . Insbesondere ist  $\ker \varphi$  eine Unterdarstellung von  $V$  und  $\text{im} \varphi$  eine Unterdarstellung von  $W$ .

**Satz 2.2.9 (Unterdarstellungen zu Liegruppen und Liealgebren).** *Ein Untervektorraum einer stetigen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Darstellung einer zusammenhängenden Liegruppe ist stabil unter unserer Liegruppe genau dann, wenn er stabil ist unter ihrer Liealgebra.*

*Ergänzung 2.2.10.* In der Sprache der Kategorientheorie sagt das im Fall reeller Darstellungen, daß für eine zusammenhängende Liegruppe  $G$  das essentielle Bild des volltreuen Funktors des Differenzierens  $\text{Modfd}_{\mathbb{R}}^G \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{g}}$  stabil ist unter dem Bilden von Unterdarstellungen.

*Beweis.* Sei  $G$  unsere zusammenhängende Liegruppe,  $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$  ihre Liealgebra und  $V$  unsere Darstellung. Jeder  $G$ -stabile Teilraum ist offensichtlich auch

$\mathfrak{g}$ -stabil. Jeder unter einem Endomorphismus  $x \in \text{End } V$  stabile Teilraum ist auch unter  $\exp(x)$  stabil, da er abgeschlossen ist. Jeder  $\mathfrak{g}$ -stabile Teilraum ist damit auch  $(\exp \mathfrak{g})$ -stabil wegen der Kommutativität des Diagramms in 1.4.10. Damit ist er dann auch  $G$ -stabil, denn jede zusammenhängende Liegruppe wird vom Bild ihrer Exponentialabbildung erzeugt nach 1.2.20 oder ausführlicher nach dem Beweis von 1.2.22.  $\square$

**Definition 2.2.11.** Eine Darstellung einer Liealgebra heißt **einfach** oder gleichbedeutend **irreduzibel**, wenn sie nicht Null ist und ihre einzige echte Unterdarstellung die Nulldarstellung ist.

**Korollar 2.2.12.** *Gegeben jede zusammenhängende Liegruppe liefert das Ableiten von Darstellungen eine Einbettung auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale} \\ \text{stetige reelle Darstellungen} \\ \text{unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache Darstellungen} \\ \text{ihrer Liealgebra} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Einfache Darstellungen bleiben einfach beim Übergang zur Liealgebra nach 2.2.9, nichtisomorphe bleiben nichtisomorph nach 2.2.3.  $\square$

2.2.13. Gegeben ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  gibt es auf der Menge  $V \times V$  genau eine Struktur als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum derart, daß die Einbettung in die erste Komponente  $\text{can} : V \rightarrow V \times V, v \mapsto (v, 0)$  reell-linear ist und daß für die Multiplikation mit  $i \in \mathbb{C}$  gilt  $i(v, 0) = (0, v)$ . Wir bezeichnen diesen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit

$$V^{\mathbb{C}}$$

und nennen ihn die **Komplexifizierung** des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$ . Weiter kürzen wir meist  $(v, 0) = v$  ab und können dann jedes Element von  $V^{\mathbb{C}}$  eindeutig schreiben in der Form  $v + iw$  mit  $v, w \in V$ . Das Vorschalten unserer Einbettung  $\text{can} : V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$  liefert für jeden  $\mathbb{C}$ -Vektorraum eine Bijektion  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  und allgemeiner auch auf Räumen multilinearer Abbildungen Bijektionen

$$\text{Mod}_{\mathbb{C}}(V_1^{\mathbb{C}} \curlywedge \dots \curlywedge V_r^{\mathbb{C}}, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1 \curlywedge \dots \curlywedge V_r, W)$$

Die Abbildung  $c : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$  gegeben durch  $(v + iw) \mapsto (v - iw)$  für beliebige  $v, w \in V$  ist schieflinear, als da heißt, sie erfüllt die Regel  $c(za) = \bar{z}c(a)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $a \in V^{\mathbb{C}}$ , und für jeden  $c$ -stabilen komplexen Teilraum  $W \subset V^{\mathbb{C}}$  entspricht die reell-lineare Einbettung  $W^c \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$  der Fixpunkte von  $c$  in  $W$  nach  $V^{\mathbb{C}}$  unter obiger Bijektion einem Isomorphismus  $(W^c)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W$ . Noch allgemeiner liefert sogar für jeden komplexen Vektorraum  $W$  mit einer schieflinearen Involution  $c$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $(W^c)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W$  von komplexen Vektorräumen.

*Ergänzung 2.2.14.* Eine alternative und besser verallgemeinerbare Konstruktion der Komplexifizierung wird in [LA2] 6.1.42 besprochen. Ist genauer  $V$  ein reeller Vektorraum, so ist der mithilfe des Tensorprodukts konstruierte Vektorraum  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  kanonisch isomorph zur hier sozusagen zu Fuß konstruierten Komplexifizierung von  $V$ .

2.2.15. Für jede reelle Algebra  $A$  ist ihre Komplexifizierung  $A^{\mathbb{C}}$  mit der induzierten Verknüpfung eine komplexe Algebra und die Komplexifizierung jeder reellen Liealgebra ist offensichtlich eine komplexe Liealgebra. Ist schließlich  $B$  eine komplexe Algebra und  $A \rightarrow B$  ein Morphismus von reellen Algebren, so ist die induzierte komplexlineare Abbildung  $A^{\mathbb{C}} \rightarrow B$  nach dem Vorhergehenden ein Morphismus von komplexen Algebren.

**Korollar 2.2.16.** *Für jede zusammenhängende Liegruppe liefert das Differenzieren gefolgt von der kanonischen Erweiterung auf die Komplexifizierung der Liealgebra eine Einbettung von Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale} \\ \text{stetige komplexe Darstellungen} \\ \text{unserer Liegruppe} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache Darstellungen} \\ \text{ihrer komplexifizierten} \\ \text{Liealgebra} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Ist  $G$  eine Liegruppe und  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine stetige Darstellung durch Automorphismen eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums, so liefert das Differential beim neutralen Element einen Homomorphismus von reellen Liealgebren  $d\rho : \text{Lie } G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ . Vermittels der universellen Eigenschaft der Komplexifizierung können wir diesen Homomorphismus auf genau eine Weise zu einer komplexlinearen Abbildung

$$(\text{Lie } G)^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

fortsetzen, die dann offensichtlich ein Homomorphismus von komplexen Liealgebren alias eine Darstellung der komplexen Liealgebra  $(\text{Lie } G)^{\mathbb{C}}$  sein muß. Das ist die Darstellung von  $(\text{Lie } G)^{\mathbb{C}}$ , die im Korollar gemeint ist. Natürlich ist ein komplexer Teilraum  $W \subset V$  stabil unter  $\text{Lie } G$  genau dann, wenn er stabil ist unter  $(\text{Lie } G)^{\mathbb{C}}$ . Zusammen mit 2.2.9 folgt das Korollar.  $\square$

## Übungen

*Übung 2.2.17.* Sind  $V, W$  Darstellungen einer Gruppe über einem Körper  $k$ , so sind die Verflechtungsoperatoren genau die Invarianten im Raum aller linearen Abbildungen unter der Operation durch Konjugation, in Formeln gilt also

$$\text{Mod}_{k,G}(V, W) = \text{Hom}_k(V, W)^G$$

*Übung 2.2.18.* Sind  $V, W$  Darstellungen einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper  $k$ , so wird der Homomorphismenraum  $\text{Hom}_k(V, W)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  durch die Vorschrift  $(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V$  und  $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ , und mit dieser Operation von  $\mathfrak{g}$  auf dem Homomorphismenraum gilt

$$\text{Mod}_{k, \mathfrak{g}}(V, W) = \text{Hom}_k(V, W)^{\mathfrak{g}}$$

Die Sinnhaftigkeit der hier auf  $\text{Hom}_k(V, W)$  erklärten  $\mathfrak{g}$ -Operation wird durch 2.1.15 belegt.

*Vorschau 2.2.19.* Diese Übungen erweisen sich beide als Spezialfälle der natürlichen Bijektion  $\mathcal{M}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\gamma, V \rightrightarrows W)$  in einer Schmelzkategorie  $\mathcal{M}$  mit internem Hom und, wenn wir statt einer Bijektion sogar einen Vektorraumisomorphismus erhalten wollen, einer  $k$ -linearen Schmelzkategorie mit internem Hom.

## 2.3 Einfache Darstellungen der Spingruppe

2.3.1. Jetzt können wir auch unser Versprechen einlösen und die Klassifikation 1.1.17 der einfachen Darstellungen der Drehgruppe herleiten. Wir beginnen dem einfacheren Fall der Spingruppe  $SU(2)$ .

**Satz 2.3.2 (Einfache Darstellungen der Spingruppe).** *Bis auf Isomorphismus gibt es in jeder Dimension genau eine irreduzible stetige komplexe Darstellung der Spingruppe, die Dimension liefert mithin eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \text{Darstellungen der Spingruppe } SU(2) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, 3, \dots\}$$

2.3.3. Ich meine hier auf der linken Seite genauer Darstellungen bis auf Isomorphismus und habe das nur nicht explizit dazugeschrieben, um die Notation nicht zu überladen. Dieser Satz gilt im Gegensatz zum entsprechenden Satz im Fall der Drehgruppe  $SO(3)$  nicht analog für reelle Darstellungen. Zum Beispiel besitzt die Spingruppe keine reelle stetige irreduzible Darstellung der Dimension Zwei, wie Sie in der folgenden Übung 2.3.10 zeigen sollen.

*Beweis.* Natürlich operiert  $GL(2; \mathbb{C})$  auf der komplexen Ebene  $\mathbb{C}^2$ . Damit operiert unsere Gruppe auch auf dem Raum  $\text{Ens}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$  aller Abbildungen  $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , der so eine unendlichdimensionale komplexe Darstellung wird. In Formeln wird diese Operation gegeben durch die Formel

$$(gP)(v) = P(g^{-1}v) \quad \forall v \in \mathbb{C}^2, g \in GL(2; \mathbb{C})$$

Sie ist äquivalent zur vielleicht anschaulicheren Bedingung  $(gP)(gv) = P(v)$ . Der Teilraum  $L(m) := \mathbb{C}[X, Y]^m \subset \mathbb{C}[X, Y]$  aller polynomialen Abbildungen,

die homogen sind vom Grad  $m$ , ist in diesem Abbildungsraum eine Unterdarstellung der Dimension  $(m + 1)$  mit der Basis  $Y^m, XY^{m-1}, \dots, X^m$ . Die Operation von  $GL(2; \mathbb{C})$  auf dieser Unterdarstellung ist offensichtlich stetig. Wir wollen nachweisen, sie eine irreduzible Darstellung von  $SU(2)$  ist. Dazu erinnern wir, daß die abgeleitete Operation einer Elements  $A$  der Liealgebra nach 2.1.10 gegeben wird durch das Anwenden des formal-algebraischen Differentialoperators

$$(-a_{11}X - a_{12}Y)\partial_x + (-a_{21}X - a_{22}Y)\partial_y$$

Diese Formeln liefern also eine Operation der Liealgebra  $\mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$  auf dem Polynomring  $\mathbb{C}[X, Y]$ . Diese Operation ist offensichtlich sogar komplexlinear und macht insbesondere den komplexen Vektorraum  $\mathbb{C}[X, Y]$  zu einer Darstellung der komplexen Liealgebra  $\mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$ . Wir müssen nach 2.2.9 nur nachweisen, daß  $L(m)$  in Bezug auf diese Operation keinen echten unter  $\mathfrak{su}(2) = \text{Lie}(SU(2))$  stabilen komplexen Untervektorraum hat außer dem Nullraum. Gleichbedeutend reicht es zu zeigen, daß  $L(m)$  eine irreduzible Darstellung der komplexen Unterliealgebra  $\langle \mathfrak{su}(2) \rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$  ist. Nun erinnern wir

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in \text{Mat}(2; \mathbb{C}) \mid \text{tr } A = 0, \bar{A} = -A^T\}$$

und beachten  $\mathfrak{su}(2) \cap i\mathfrak{su}(2) = 0$  und folgern mit Dimensionsvergleich  $\langle \mathfrak{su}(2) \rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ . Wir müssen also zeigen, daß  $L(m)$  eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  ist. Unter unserer Operation wirken, wie oben ausgerechnet, die Elemente

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  wie die Differentialoperatoren  $-X\partial_x + Y\partial_y$ ,  $-Y\partial_x$  und  $-X\partial_y$ . Insbesondere bilden die Vektoren  $Y^m, XY^{m-1}, \dots, X^m$  eine Basis von  $L(m)$  aus Eigenvektoren von  $h$  zu den Eigenwerten  $m, m - 2, \dots, -m$  und  $e$  und  $f$  induzieren Isomorphismen zwischen Eigenräumen zu benachbarten Eigenwerten. Die Darstellung  $L(m)$  von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  ist damit in der Tat irreduzibel, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung muß nach [LA1] 6.6.19 einen Eigenvektor von  $h$  enthalten und damit bereits die ganze Darstellung sein. Um zu zeigen, daß unsere Gruppe keine anderen irreduziblen komplexen Darstellungen besitzt, reicht es nach 2.2.16, dasselbe für ihre komplexifizierte Liealgebra zu prüfen. Nun ist wegen  $\mathfrak{su}(2) \cap i\mathfrak{su}(2) = 0$  der von der Einbettung  $\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  induzierte Homomorphismus von komplexen Liealgebren sogar ein Isomorphismus  $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und wir zeigen gleich anschließend als Satz 2.3.5, daß  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  nicht noch weitere irreduzible endlichdimensionale Darstellungen hat. Damit ist dann auch unser Beweis hier zu Ende.  $\square$

*Ergänzung 2.3.4.* In der Physik lernt man die hier mit  $e$  und  $f$  bezeichneten Elemente auch als **Leiteroperatoren** oder **Kletteroperatoren** kennen. Die aus der Physik vertrauten weniger übersichtlichen Formeln werden Sie jedoch erst in 2.5.22 sehen, wenn wir ein invariantes Skalarprodukt wählen und zu einer Orthonormalbasis übergehen. In der Physik rechnet man auch oft mit den sogenannten **Pauli-Matrizen**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  und eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathfrak{isu}(2)$  bilden.

**Satz 2.3.5 (Einfache Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ).** 1. Zu jeder positiven endlichen Dimension gibt es bis auf Isomorphismus genau eine einfache Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ ;

2. Ist  $e, h, f$  eine Basis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  mit  $[h, e] = 2e$  und  $[h, f] = -2f$  und  $[e, f] = h$ , so zerfällt jede einfache Darstellung  $L$  der Dimension  $m + 1$  unter  $h$  in eindimensionale Eigenräume

$$L = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \dots \oplus L_{2-m} \oplus L_{-m}$$

zu den ganzzahligen Eigenwerten  $m, m - 2, \dots, 2 - m, -m$ , und aus  $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$  folgt  $f : L_{j+2} \xrightarrow{\sim} L_j$  sowie  $e : L_j \xrightarrow{\sim} L_{j+2}$ .

2.3.6. Die einfachen Darstellungen der Dimensionen 1, 2 und 3 sind die triviale Darstellung  $\mathbb{C}$ , die Standarddarstellung  $\mathbb{C}^2$  und die „adjungierte Darstellung“, die wir in 2.1.12 eingeführt haben. Eine explizite Beschreibung der anderen einfachen Darstellungen wird im Beweis gegeben.

*Ergänzung 2.3.7.* Der Satz gilt mit demselben Beweis allgemeiner über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null und er folgt daraus ohne Schwierigkeiten über jedem Körper der Charakteristik Null. In positiver Charakteristik sind die Verhältnisse jedoch komplizierter.

*Beweis.* Daß es zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung  $L(m)$  mit den versprochenen Eigenschaften gibt, wissen wir bereits aus dem Beweis von 2.3.2. Explizit läßt sich eine derartige Darstellung auch mit etwas weniger Vorzeichen angeben. Die Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  hat ja die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lie-Klammern zwischen den Elementen dieser Basis sind  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ . Mithilfe der Produktregel für formale partielle Ableitungen prüft man leicht explizit, daß die Abbildung  $\rho : \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[X, Y])$  gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}\rho(e) &= X\partial_y \\ \rho(f) &= Y\partial_x \\ \rho(h) &= X\partial_x - Y\partial_y\end{aligned}$$

eine Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  ist, daß die homogenen Polynome von festem Totalgrad  $m$  eine Unterdarstellung  $L(m) = \mathbb{C}[X, Y]^m$  der Dimension  $d = m + 1$  mit Basis  $w_i = Y^i X^{m-i}$  für  $i = 0, \dots, m$  bilden. In dieser Basis wird die Operation von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  auf  $L(m)$  beschrieben durch die Formeln

$$\begin{aligned}ew_i &= iw_{i-1} \\ fw_i &= (m-i)w_{i+1} \\ hw_i &= (m-2i)w_i\end{aligned}$$

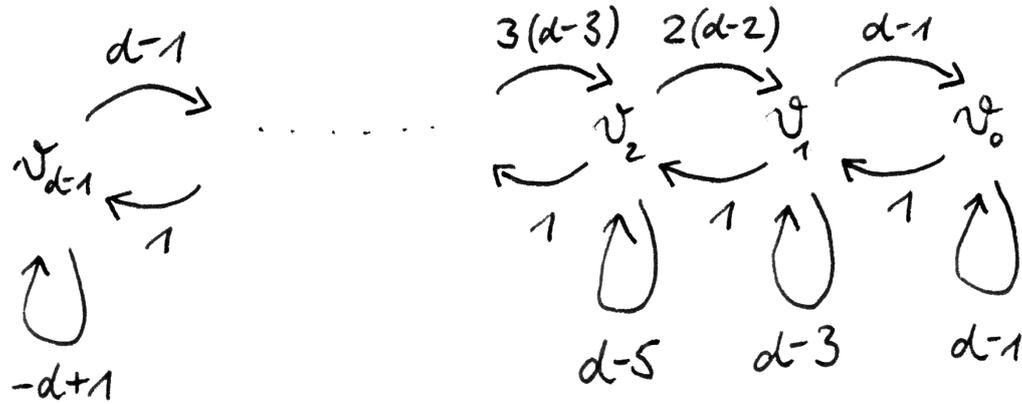
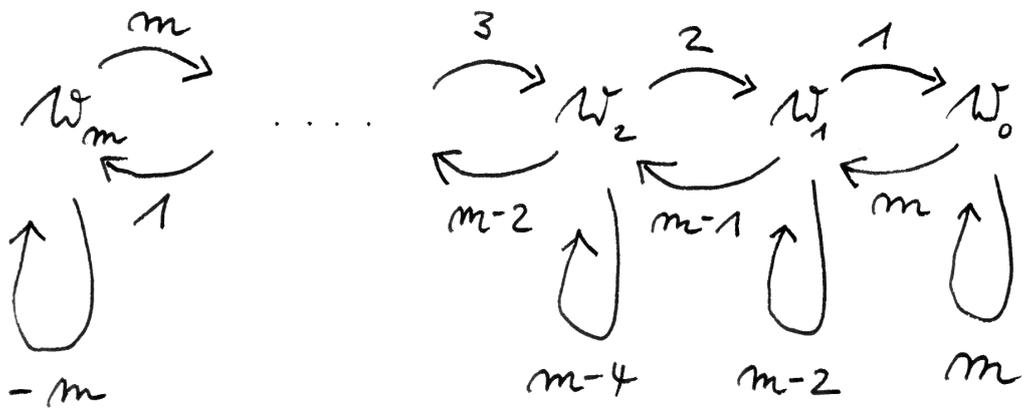
wo wir  $w_{-1} = w_{m+1} = 0$  verstehen. Die Darstellungen  $L(m)$  sind einfach, denn jede von Null verschiedene Unterdarstellung  $0 \neq U \subset L(m)$  enthält notwendig einen Eigenvektor zu  $h$ , also eines der  $w_i$ , und daraus folgt sofort  $U = L(m)$ . Damit haben wir nun auch in etwas übersichtlicherer Weise zu jeder endlichen Dimension eine einfache Darstellung gefunden. Wir müssen jedoch noch zeigen, daß je zwei einfache Darstellungen derselben endlichen Dimension isomorph sind. Sei dazu zunächst  $\rho : \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  irgendeine Darstellung. Bezeichne  $V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$  den Eigenraum von  $\rho(h)$  zum Eigenwert  $\mu \in \mathbb{C}$ . So gilt

$$eV_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \text{und} \quad fV_\mu \subset V_{\mu-2}$$

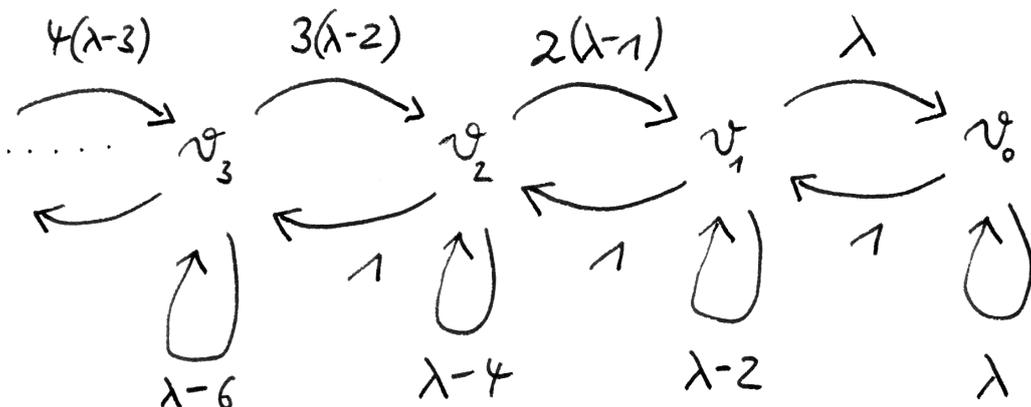
denn aus  $hv = \mu v$  folgt  $hev = ehv + [h, e]v = e\mu v + 2ev = (\mu + 2)ev$  und der zweite Fall ergibt sich ähnlich aus  $[h, f] = -2f$ . Ist  $V$  endlichdimensional und  $V \neq 0$ , so gibt es sicher  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $V_\lambda \neq 0$  aber  $V_{\lambda+2} = 0$ . Für  $v \in V_\lambda$  folgt dann  $ev = 0$  und  $hv = \lambda v$ . Wir schreiben  $f^i v$  für den Vektor, der aus  $v$  durch  $i$ -maliges Anwenden von  $f$  entsteht. Man prüft per Induktion die Formeln

$$\begin{aligned}hf^i v &= (\lambda - 2i)f^i v && \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v &= i(\lambda - i + 1)f^{i-1} v && \text{für alle } i \geq 1.\end{aligned}$$

Die erste folgt unmittelbar aus unserer Erkenntnis  $fV_\mu \subset V_{\mu-2}$ , für die zweite muß etwas mehr gerechnet werden. Insbesondere ist nach diesen Formeln der von den  $f^i v$  mit  $i \geq 0$  aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist  $V$  zusätzlich einfach und  $v \neq 0$ , so müssen die  $f^i v$  demnach ganz  $V$  aufspannen. Gilt  $f^i v \neq 0$ ,



Die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  in zwei Basen.  
 Die nach rechts weisenden Pfeile stellen jeweils die Operation von  $e$  dar, die nach links weisenden Pfeile die Operation von  $f$  und die Schleifen die Operation von  $h$ .



Die Operation auf dem von den  $v_i = f^i v$  aufgespannten Teilraum, in derselben Weise zu interpretieren wie die obenstehenden Darstellungen.

so sind  $v, fv, \dots, f^i v$  Eigenvektoren von  $h$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und damit linear unabhängig. Da wir  $V$  endlichdimensional angenommen hatten, gibt es folglich  $d \geq 1$  mit  $f^d v = 0$ . Wählen wir  $d$  kleinstmöglich, so ist  $v, fv, \dots, f^{d-1} v$  eine Basis von  $V$ , also  $d = \dim V$ . Weiter folgt aus  $f^d v = 0$  auch  $0 = e f^d v = d(\lambda - d + 1) f^{d-1} v$  und mithin  $\lambda = d - 1$ , da wir ja  $d \neq 0$  und  $f^{d-1} v \neq 0$  vorausgesetzt hatten. Damit haben wir gezeigt, daß je zwei einfache Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  derselben endlichen Dimension  $d$  isomorph sind, da nämlich die Matrizen von  $\rho(e), \rho(f)$  und  $\rho(h)$  in der Basis  $v, fv, \dots, f^{d-1} v$  nur von  $d$  abhängen.  $\square$

2.3.8. Die expliziten Formeln für die einfachen endlichdimensionalen Darstellungen der  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  gefallen mir noch besser bei Parametrisierung der Basis nach den Eigenwerten von  $h$ . Setzen wir genauer  $w_i = u_{m-2i}$ , so erhalten wir für  $L(m)$  eine Basis bestehend aus  $u_m, u_{m-2}, \dots, u_{-m}$  und die Operation unserer Liealgebra wird gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned} eu_j &= ((m-j)/2)u_{j+2} \\ fu_j &= ((m+j)/2)u_{j-2} \\ hu_j &= ju_j \end{aligned}$$

**Satz 2.3.9 (Einfache Darstellungen der räumlichen Drehgruppe).** *Die einfachen endlichdimensionalen stetigen komplexen Darstellungen der Drehgruppe werden klassifiziert durch ihre Dimension. Genauer liefert die Dimension eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale komplexe} \\ \text{Darstellungen der Drehgruppe } SO(3) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{1, 3, 5, \dots\}$$

*Beweis von 2.3.9.* Wir erinnern uns an die stetige Surjektion  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  mit Kern  $\{+1, -1\}$  aus 1.6.2. Das Zurückholen mit dieser Surjektion liefert nach der universellen Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen [LA2] 4.2.1 eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Drehgruppe und denjenigen Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Spingruppe, auf denen das Negative der Einheitsmatrix trivial operiert. Nach [AN1] ?? alias, in der angemessenen Terminologie gesagt, da nach [AN3] ?? eine stetige Surjektion von einem Kompaktum auf einen Hausdorffraum stets final ist, liefert diese Bijektion auch eine Bijektion zwischen den entsprechenden Isomorphieklassen einfacher stetiger Darstellungen. Das sind aber nach dem vorhergehenden offensichtlich genau die Darstellungen  $L(m) = \mathbb{C}[X, Y]^m$  für gerades  $m$  alias die einfachen stetigen Darstellungen ungerader Dimension der Spingruppe.  $\square$

## Übungen

*Übung 2.3.10.* Man zeige, daß die Spingruppe keine reelle stetige irreduzible Darstellung der Dimension Zwei besitzt. Hinweis: Man zeige zunächst, daß jede kompakte zusammenhängende Untergruppe von  $GL(\mathbb{R}; n)$  in  $SL(\mathbb{R}; n)$  enthalten sein muß, und argumentiere dann mit der Dimension.

*Ergänzende Übung 2.3.11.* Eine endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  derart, daß weder Null noch Eins Eigenwerte von  $h = \text{diag}(1, -1)$  sind, in Formeln  $V_0 = V_1 = 0$ , kann nur die Nulldarstellung  $V = 0$  sein.

*Übung 2.3.12.* Man zeige: Ist  $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f}$  eine Basis von  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  mit  $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$  und  $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$ , so gilt  $[\tilde{e}, \tilde{f}] = c\tilde{h}$  für einen Skalar  $c \neq 0$ .

*Ergänzende Übung 2.3.13.* Die Räume  $L_{\mathbb{R}}(m) = \mathbb{R}[X, Y]^m$  aller homogenen Polynomfunktionen auf  $\mathbb{R}^2$  vom Grad  $m$  sind unter der von der offensichtlichen Wirkung von  $SL(2; \mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}^2$  induzierten Operation einfache reelle Darstellungen der Gruppe  $SL(2; \mathbb{R})$  und jede stetige einfache endlichdimensionale Darstellung von  $SL(2; \mathbb{R})$  ist isomorph zu genau einer dieser Darstellungen. Hinweis: 2.3.6.

*Ergänzende Übung 2.3.14.* Gegeben ein beliebiger Körper  $k$  und eine Darstellung  $\rho : \mathfrak{sl}(2; k) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2; k)$  mit ihrer Standardbasis  $e, h, f$  mit Kommutatoren  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$  liefert der in der assoziativen Algebra  $\text{End}_k(V)$  zu interpretierende Ausdruck

$$4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h) + 2)$$

einen mit der Operation unserer Liealgebra verträglichen Endomorphismus von  $V$ . Im Fall der einfachen  $(m+1)$ -dimensionalen Darstellung  $L(m)$  der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  ist dieser Endomorphismus die Multiplikation mit dem Skalar  $m(m+2)$ . Hinweis: Tapfer rechnen. Dieser Operator ist im übrigen das einfachste Beispiel eines sogenannten **Casimir-Operators**, vergleiche [HL] 2.1.17.

*Ergänzende Übung 2.3.15.* Man betrachte die Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2; k)$  mit ihrer Standardbasis  $e, h, f$  und Kommutatoren  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ . Man prüfe per Induktion, daß allgemeiner als im Beweis von Satz 2.3.5 für jeden Vektor  $v$  einer Darstellung besagter Liealgebra mit  $ev = 0$  gilt

$$\begin{aligned} hf^i v &= f^i(h - 2i)v && \text{für alle } i \geq 0, \\ ef^i v &= if^{i-1}(h - i + 1)v && \text{für alle } i \geq 1. \end{aligned}$$

*Ergänzende Übung 2.3.16.* Man zeige, daß jede endlichdimensionale Darstellung  $V$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist. Hinweis: Man zerlege besagte Darstellung zunächst in die Haupträume des in 2.3.14 eingeführten Casimiroperators und ziehe sich so auf den Fall zurück, daß

die einfachen Subquotienten unserer Darstellung  $V$  paarweise isomorph sind, sagen wir zu  $L(m)$ . Dann zeige man, daß  $f^m$  einen Isomorphismus  $\text{Hau}(h; m) \xrightarrow{\sim} \text{Hau}(h; -m)$  zwischen den Haupträumen von  $h$  zu den entsprechenden Eigenwerten liefert. Schließlich folgere man aus 2.3.15 unter Verwendung von  $f^{m+1}v = 0$ , daß  $h$  auf  $\text{Hau}(h; m)$  diagonal operiert, und argumentiere von da ausgehend. Man zeige dasselbe Resultat auch im Fall reeller Koeffizienten und, wenn man in Algebra bewandert ist, über einem beliebigen Grundkörper der Charakteristik Null. Eine Verallgemeinerung des Resultats auf allgemeinere, sogenannte „halbeinfache“ Liealgebren wird in [HL] 2.1.6 gezeigt.

*Ergänzende Übung 2.3.17.* Jede endlichdimensionale Darstellung der Liegruppen  $SU(2)$  und  $SO(3)$  und  $SL(2; \mathbb{R})$  ist eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen. Hinweis: 2.3.16. Im Fall der beiden ersten Gruppen wird 2.4.12 einen alternativen Zugang liefern.

*Übung 2.3.18.* Man betrachte die Darstellung von  $GL(n; \mathbb{R})$  auf dem reellen Vektorraum  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^{(d)}$  der homogenen Polynome vom Grad  $d$  durch

$$(gP)(x) = P(g^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, g \in GL(n; \mathbb{R})$$

und zeige, daß in der abgeleiteten Darstellung der Liealgebra die Basismatrix  $E_{ij}$  mit einer Eins in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte und Null sonst wie der Differentialoperator  $-X_j \partial_i$  operiert. Es scheint mir nun offensichtlich, daß wir mit diesen Operatoren jedes von Null verschiedene homogene Polynom in ein von Null verschiedenes homogenes Monom überführen können, und ein solches Monom in jedes andere vom selben Grad. Man folgere, daß diese Darstellungen sämtlich irreduzibel sind.

*Ergänzende Übung 2.3.19.* Für alle  $n \geq 1$  bilden die homogenen Polynome vom Grad  $d$  eine irreduzible Darstellung

$$\mathcal{O}^d(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{(d)}$$

der Gruppe  $GL(n; \mathbb{C})$  sowie ihrer Untergruppen  $GL(n; \mathbb{R})$  und  $U(n)$ . Für  $n \geq 2$  bleiben sie irreduzibel unter  $SL(n; \mathbb{C})$ ,  $SL(n; \mathbb{R})$  und  $SU(n)$ . In der Tat besteht  $\text{Lie } SU(n)$  aus den Fixpunkten einer schieflinearen Involution auf  $\text{Lie } SL(n; \mathbb{C})$  und die Einbettung liefert folglich einen Isomorphismus

$$\text{Lie}_{\mathbb{C}} SU(n) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } SL(n; \mathbb{C})$$

Auf diese Weise können wir uns auf  $SL(n; \mathbb{C})$  und dann sogar  $GL(n; \mathbb{C})$  zurückziehen. Nun überlegt man sich wie in 2.3.18, daß die Standardmatrizen  $E_{ij}$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$  als die Differentialoperatoren  $-X_j \partial_i$  wirken. Es scheint mir nun offensichtlich, daß wir mit diesen Operatoren jedes von Null verschiedene homogene Polynom in ein von Null verschiedenes homogenes Monom überführen können, und ein solches Monom in jedes andere vom selben Grad.

## 2.4 Haarmaß für Matrixliegruppen

**Definition 2.4.1.** Eine **stetige positive Dichte** auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Borelmaß, dessen Restriktion auf jede Karte durch das Produkt des Lebesgue-Maßes mit einer stetigen positiven Funktion dargestellt werden kann.

2.4.2. Gegeben ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten  $\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$  ist das Bildmaß  $\varphi_*\mu$  einer stetigen positiven Dichte auf  $M$  offensichtlich eine stetige positive Dichte auf  $N$ .

*Beispiel 2.4.3.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum  $X$  und eine  $k$ -Mannigfaltigkeit  $M \subset X$  und eine stetige  $k$ -Form  $\omega : M \rightarrow \text{Alt}^k(\vec{X})$  gibt es genau eine stetige positive Dichte  $|\omega|$  auf  $M$  mit der Eigenschaft, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  ihre Restriktion auf die Karte gegeben wird durch das Produkt des Lebesgue-Maßes mit der Funktion  $|(\varphi^*\omega)(e_1, \dots, e_k)|$  auf  $W$ . Man sieht das leicht vermittelt unserer Regel für das Verkleben von Maßen [AN3] 1.1.42 und der Transformationsformel [AN2] 5.2.8 und der Formel [AN2] 9.2.16 für den Rückzug von Volumenformen.

**Definition 2.4.4.** Ein **Haar'sches Maß**, genauer ein **linksinvariantes Haar'sches Maß** und kurz ein **Haarmaß** auf einer Matrixliegruppe  $G$  ist eine stetige positive Dichte  $\mu$  auf  $G$  im Sinne von 2.4.1 mit  $\mu(xA) = \mu(A)$  für alle  $x \in G$  und alle Borelmengen  $A \subset G$ .

*Vorschau 2.4.5.* Ganz allgemein definiert man ein Haarmaß auf einer topologischen Gruppe als ein von Null verschiedenes nichtnegatives linksinvariantes „Radonmaß“ und zeigt seine Existenz und Eindeutigkeit bis auf eine multiplikative Konstante für beliebige lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppen, vergleiche [TM] 4.3.2 und [TM] 4.3.3. In unserem speziellen Fall entsprechen nun nach dem Riesz'schen Darstellungssatz [TM] 4.2.4 Radonmaße eineindeutig Borelmaßen, weshalb unser Haarmaß hier auch im Sinne der allgemeinen Definition ein Haarmaß ist.

**Satz 2.4.6 (Existenz und Eindeutigkeit Haar'scher Maße).** *Auf jeder Matrixliegruppe gibt es ein Haarmaß im Sinne einer linksinvarianten positiven Dichte, und je zwei derartige Dichten unterscheiden sich höchstens um einen positiven konstanten reellen Faktor.*

2.4.7. Die hier behauptete und bewiesene Eindeutigkeitsaussage ist schwächer als in [TM] 4.3.3, da wir die Eindeutigkeit nur unter stärkeren Annahmen zeigen. Sie werden aber sehen, daß man auch mit dieser schwächeren Aussage schon recht weit kommen kann. Den Fall allgemeiner Liegruppen diskutieren wir in 5.9.23.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist klar, da sich je zwei stetige positive Dichten offensichtlich nur um das Produkt mit einer stetigen positiven Funktion unterscheiden, die im Fall von zwei Haarmaßen ebenfalls linksinvariant und damit konstant sein muß. Um die Existenz zu zeigen, erinnern wir die Einbettung  $G \hookrightarrow \text{Aut}(V)$  unserer Matrixliegruppe. Sei  $k$  die Dimension von  $G$ . Sicher gibt es eine alternierende  $k$ -Multilinearform  $\omega_e \in \text{Alt}^k(\text{End } V)$  mit der Eigenschaft, daß ihre Restriktion  $\omega_e \in \text{Alt}^k(T_e G)$  nicht verschwindet. Wir wählen sie beliebig aber fest und erklären eine  $k$ -Form oder genauer ein Feld von  $k$ -Formen  $\omega$  auf  $\text{Aut}(V)$  durch die Vorschrift

$$\omega_g = (g^{-1} \cdot)^{\top} \omega_e$$

in der Notation aus [AN2] 9.1.13. So erhalten wir eine stetige  $k$ -Form  $\omega$  auf  $\text{Aut}(V)$  mit der Eigenschaft  $(h \cdot)^* \omega = \omega$  alias  $(h \cdot) : \omega \rightsquigarrow \omega$  für alle  $h \in \text{Aut}(V)$ . Das in 2.4.3 erklärte zugehörige Maß  $|\omega|$  auf der eingebetteten  $k$ -Mannigfaltigkeit  $G$  ist dann die gesuchte positive stetige linksinvariante Dichte.  $\square$

*Beispiel 2.4.8.* Wir erhalten ein Haarmaß auf  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ , indem wir das gewöhnliche Lebesgue-Maß von  $\text{Mat}(n; \mathbb{R})$  einschränken und mit der Funktion  $A \mapsto |\det A|^{-n}$  multiplizieren. Speziell ist  $|x|^{-1} dx$  ein Haarmaß auf der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{R}^\times$ .

2.4.9. Auf einer kompakten Matrixliegruppe  $G$  ist jedes Haarmaß  $\mu$  auch rechtsinvariant, in Formeln  $\mu(Ag) = \mu(A)$  für alle  $g \in G$ . In der Tat ist für jedes feste  $g \in G$  mit  $\mu$  auch die Vorschrift  $A \mapsto \mu(Ag)$  ein linksinvariantes Haarmaß, also gibt es nach 2.4.6 eine Konstante  $c_g$  mit  $\mu(A) = c_g \mu(Ag)$  für alle  $A$ . Für kompaktes  $G$  gilt aber  $0 < \mu(G) < \infty$ . Setzen wir also in der vorhergehenden Gleichung  $A = G$ , so folgt wie gewünscht  $c_g = 1$ .

**Lemma 2.4.10.** *Auf jeder endlichdimensionalen stetigen reellen oder komplexen Darstellung einer kompakten Matrixliegruppe gibt es ein invariantes Skalarprodukt.*

2.4.11. Dieselbe Aussage folgt für jede endlichdimensionale stetige reelle oder komplexe Darstellung einer beliebigen „kompakten topologischen Gruppe“ im Sinne von [TM] 2.1.4, da deren Bild in der Automorphismengruppe besagter Darstellung ja nach 1.2.3 und [TM] 1.5 eine kompakte Matrixliegruppe sein muß.

*Beweis.* Bezeichne  $K$  unsere kompakte Matrixliegruppe und  $V$  unsere Darstellung. Nach 2.4.6 gibt es ein Haarmaß  $\mu$  auf  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, ist nach [AN3] 1.6.15 jede stetige Funktion integrierbar. Ist nun  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  irgendein Skalarprodukt, so liefert die Formel

$$(v, w) := \int_K b(gv, gw) \mu(g)$$

ein  $K$ -invariantes Skalarprodukt, es gilt also  $(gv, gw) = (v, w) \forall g \in K$ . Damit das richtig ist, muß a priori  $\mu$  ein rechtsinvariantes Haarmaß sein. Im kompakten Fall wissen wir aber bereits, daß linksinvariante Haarmaße auch rechtsinvariant sind und umgekehrt.  $\square$

**Satz 2.4.12 (Vollständige Reduzibilität).** *Jede stetige Darstellung endlicher Dimension einer kompakten Matrixliegruppe ist eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen.*

*Ergänzung 2.4.13.* Für diejenigen Leser, die den Begriff einer topologischen Gruppe kennen, ist die Verallgemeinerung dieses Satzes auf kompakte topologische Gruppen offensichtlich, da deren Bild in der Automorphismengruppe des Darstellungsraums nach 1.2.3 bereits eine Matrixliegruppe sein muß. Eine Verallgemeinerung auf unendlichdimensionale Darstellungen wird in ?? diskutiert.

2.4.14. Die Frage, inwieweit eine derartige Zerlegung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen eindeutig ist, wird im kommenden Abschnitt und dort insbesondere in 2.5.7 und 2.5.10 diskutiert.

*Beweis.* Nach dem im folgenden bewiesenen Lemma 2.4.10 finden wir auf unserer Darstellung stets ein unter der Gruppenoperation invariantes Skalarprodukt. Nun argumentieren wir durch Induktion über die Dimension unserer Darstellung. Ist sie Null, so ist nichts zu zeigen. Sonst besitzt sie eine einfache Unterdarstellung, und deren orthogonales Komplement ist auch eine Unterdarstellung, auf die wir dann nur noch die Induktionsannahme anzuwenden brauchen.  $\square$

2.4.15. Unser Satz 2.4.12 über die vollständige Reduzibilität gilt sowohl für reelle wie auch für komplexe Darstellungen. Im Fall der einelementigen Gruppe besagt der Satz schlicht, daß sich jeder endlichdimensionale Vektorraum als eine direkte Summe von eindimensionalen Teilräumen schreiben läßt. Ein rein algebraischer Beweis für eine analoge Aussage im Fall von Darstellungen der Liealgebra  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  wird in Übung 2.3.16 erklärt. Wenn wir diese algebraische Aussage aus dem vorhergehenden Satz 2.4.12 ableiten wollen, muß jedoch der Satz zur Verfügung stehen, nach dem jede endlichdimensionale Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{su}(2)$  zu einer Darstellung der Liegruppe  $SU(2)$  integriert werden kann.

*Beispiel 2.4.16.* Die offensichtliche zweidimensionale Darstellung von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

auf  $\mathbb{R}^2$  läßt sich nicht als direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen schreiben, denn sie hat nur eine einzige eindimensionale Unterdarstellung, die Gerade  $\mathbb{R}e_1$ . Die Kompaktheit der dargestellten Gruppe ist also für unseren Satz 2.4.12 wesentlich.

## Übungen

*Übung 2.4.17.* Man gebe auf  $\mathbb{C}^\times$  und allgemeiner auf  $GL(n; \mathbb{C})$  ein Haarmaß an.

*Übung 2.4.18.* Es gibt eine linksinvariante Differentialform  $\omega$  auf  $SL(2; \mathbb{R})$ , deren Restriktion auf die offene Teilmenge  $U$  aller Matrizen  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  mit Determinante Eins und  $x \neq 0$  gegeben wird durch die Formel  $\omega|_U = \frac{1}{x} dx \wedge dy \wedge dz$ .

*Übung 2.4.19.* Man zeige:  $U(n) \subset GL(n; \mathbb{C})$  ist eine maximale kompakte Untergruppe und gegeben eine beliebige kompakte Untergruppe  $K \subset GL(n; \mathbb{C})$  gibt es stets  $g \in GL(n; \mathbb{C})$  mit  $gKg^{-1} \subset U(n)$ . Man zeige auch die analoge Aussage im Fall  $O(n) \subset GL(n; \mathbb{R})$ . Hinweis: 2.4.10. Man zeige auch die analoge Aussage im Fall  $\bar{U}(n) \subset PGL(n; \mathbb{C})$  mit  $PGL(n; \mathbb{C}) := GL(n; \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$  und  $\bar{U}(n)$  dem Bild von  $U(n)$  darin. Hier mag die endliche Überlagerung  $SL(n; \mathbb{C}) \rightarrow PGL(n; \mathbb{C})$  helfen.

*Übung 2.4.20.* Gegeben eine stetige Darstellung  $\rho : S^1 \rightarrow GL(V)$  der Kreislinie  $S^1$  durch Automorphismen eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums  $V$  zerfällt unser Raum als eine direkte Summe von Teilräumen

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

mit  $V_n = \{v \in V \mid \rho(z)v = z^n v \ \forall z \in S^1\}$ . Hierbei werden dann natürlich fast alle der  $V_n$  nur aus dem Nullvektor bestehen und die direkte Summe ist im Sinne von [LA2] 7.8.1 zu interpretieren. Einen alternativen Zugang, der mit sehr viel weniger Analysis auskommt und stattdessen von der Jordan'schen Normalform ausgeht, wird in [LA2] 3.3.21 skizziert. Eine Verallgemeinerung auf Tori wird in 2.5.9 besprochen.

## 2.5 Vollständig reduzible Darstellungen

**Lemma 2.5.1.** *Jeder Verflechtungsoperator zwischen einfachen Darstellungen ist entweder die Nullabbildung oder ein Isomorphismus.*

2.5.2. Sind insbesondere  $L \not\cong M$  nichtisomorphe einfache Darstellungen einer Gruppe  $G$ , so folgt  $\text{Hom}_G(L, M) = 0$ . Sind  $L$  und  $M$  dahingegen isomorphe einfache Darstellungen und ist  $\varphi : L \xrightarrow{\sim} M$  ein Isomorphismus, so liefert das Nachschalten von  $\varphi$  eine Bijektion  $\text{End}_G(L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(L, M)$  und das Vorschalten von  $\varphi$  eine Bijektion  $\text{End}_G(M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(L, M)$ .

*Beweis.* Für einen Verflechtungsoperator  $\varphi : L \rightarrow M$  ist das Bild stets eine Unterdarstellung im  $\varphi \subset M$ . Aus  $\varphi \neq 0$  und  $M$  einfach folgt also  $\varphi$  surjektiv. Für einen Verflechtungsoperator  $\varphi : L \rightarrow M$  ist weiter der Kern stets eine Unterdarstellung  $\ker \varphi \subset L$ . Aus  $\varphi \neq 0$  und  $L$  einfach folgt also  $\ker \varphi = 0$  und damit  $\varphi$  injektiv. Sind also  $M$  und  $L$  beide einfach und ist  $\varphi$  nicht Null, so ist  $\varphi$  bijektiv.  $\square$

**Lemma 2.5.3 (von Schur).** *Die einzigen Verflechtungsoperatoren zwischen einer einfachen komplexen endlichdimensionalen Darstellung und ihr selbst sind die skalaren Vielfachen der Identität.*

*Beweis.* Jeder Eigenraum eines Endomorphismus einer Darstellung muß eine Unterdarstellung sein. Jeder Eigenraum eines Endomorphismus einer einfachen Darstellung ist also der ganze Raum oder der Nullraum. Da jeder Endomorphismus eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen Raums über  $\mathbb{C}$  mindestens einen Eigenwert hat, folgt das Lemma.  $\square$

2.5.4. Für jede komplexe endlichdimensionale einfache Darstellung  $L$  einer Gruppe  $G$  liefert unser Schur'sches Lemma in Formeln einen Isomorphismus

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C},G} L$$

vermittels  $\lambda \mapsto \lambda \text{id}_L$ . Eine allgemeinere Variante des Schur'schen Lemmas findet man in [NAS] 3.2.6. Es ist hierbei wesentlich, mit komplexen Darstellungen oder allgemeiner Darstellungen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zu arbeiten: Für die durch die Einbettung  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$  gegebene Darstellung von  $S^1$  auf  $\mathbb{C}$  etwa hätten wir  $\text{End}_{\mathbb{R},S^1} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ , für die Einsdarstellung dahingegen  $\text{End}_{\mathbb{R},S^1} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ .

2.5.5. Wie bereits der Fall der trivialen Gruppe zeigt, sind die bei einer Zerlegung einer Darstellung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen auftretenden Unterdarstellungen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt: Ein endlichdimensionaler Vektorraum etwa kann auf viele verschiedene Arten als direkte Summe eindimensionaler Teilräume dargestellt werden. Die folgenden Bemerkungen erläutern, was im Allgemeinen bei der Zerlegung in eine direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen an Eindeutigkeit noch zu retten ist.

**Definition 2.5.6.** Eine Darstellung einer Gruppe heißt **vollständig reduzibel** oder auch **halbeinfach**, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen ist.

2.5.7 (**Isotypische Zerlegung**). Ist  $V$  eine endlichdimensionale halbeinfache komplexe Darstellung einer Gruppe  $G$  und sind  $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_m$  und  $V = L'_1 \oplus \dots \oplus L'_{m'}$  zwei Zerlegungen in eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen, so gilt  $m = m'$  und es gibt eine Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_m$  mit  $L'_i \cong L_{\sigma(i)}$  für alle  $i$ . In der Tat läßt sich nach 2.5.1 und 2.5.3 die Vielfachheit einer einfachen Darstellung  $L$  als Unterdarstellung in einer solchen Zerlegung darstellen als die Dimension des Raums von Verflechtungsoperatoren  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C},G}(L, V)$ . Weiter gilt für jede einfache Darstellung  $L$  von  $G$  in unserer Darstellung  $V$  die Gleichheit von Untervektorräumen

$$\bigoplus_{L_i \cong L} L_i = \bigoplus_{L'_j \cong L} L'_j$$

In der Tat lassen sich diese Untervektorräume wieder nach 2.5.1 beschreiben als das Erzeugnis der Bilder aller Verflechtungsoperatoren  $L \rightarrow V$  von unserer einfachen Darstellung  $L$  zur gegebenen Darstellung. Wir bezeichnen diesen Untervektorraum mit  $V_L \subset V$ . Er heißt die **isotypische Komponente** in  $V$  vom Typ  $L$ . Natürlich erhalten wir dann für  $V$  die **Zerlegung in isotypische Komponenten**

$$V = \bigoplus_{L \in \text{irr } G} V_L$$

wo sich die Summe über die Menge  $\text{irr } G$  aller Isomorphieklassen von einfachen endlichdimensionalen komplexen Darstellungen von  $G$  erstreckt. Im Fall einer unitären Darstellung stehen die isotypischen Komponenten paarweise senkrecht aufeinander nach 2.5.18.

*Ergänzung 2.5.8.* Analoge Aussagen gelten auch für nicht notwendig endlichdimensionale halbeinfache Darstellungen über beliebigen Körpern, ja sogar für halbeinfache Moduln über beliebigen Ringen, vergleiche [NAS] 2.3.

*Beispiel 2.5.9 (Isotypische Zerlegung für Tori).* Dies Beispiel verallgemeinert 2.4.20. Ist  $T$  eine kompakte abelsche Matrixliegruppe und  $V$  eine endlichdimensionale stetige komplexe Darstellung von  $T$ , so hat die isotypische Zerlegung die Gestalt

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(T)} V_\chi$$

wobei  $\chi$  wie angedeutet über alle Charaktere von  $T$  alias alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $T \rightarrow \mathbb{C}^\times$  läuft und  $V_\chi$  beschrieben werden kann als

$$V_\chi := \{v \in V \mid tv = \chi(t)v \ \forall t \in T\}$$

Insbesondere im Fall eines Torus  $T$  heißen die  $\chi \in \mathfrak{X}(T)$  mit  $V_\chi \neq 0$  die **Gewichte von  $T$  in  $V$**  und werden nach französisch **poids** auch notiert in der Form

$$P(V) = P_T(V) := \{\chi \in \mathfrak{X}(T) \mid V_\chi \neq 0\}$$

Die isotypischen Komponenten  $V_\chi$  ihrerseits heißen, immer noch im Fall der Darstellungen einer kompakten abelschen Liegruppe, die **Gewichtsräume** unserer Darstellung.

**Satz 2.5.10 (Kanonische Zerlegung).** *Seien  $K$  eine kompakte Matrixliegruppe und  $\text{irr } K$  ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen komplexer einfacher Darstellungen von  $K$ . So liefert für jede komplexe endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $K$  das Auswerten einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{L \in \text{irr } K} L \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}, K}(L, V) \xrightarrow{\sim} V$$

2.5.11. Unter diesem Isomorphismus entspricht  $L \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C},K}(L, V)$  gerade der  $L$ -isotypischen Komponente  $V_L$  von  $V$  aus 2.5.7.

*Beweis.* Gilt der Satz für zwei Darstellungen  $V$  und  $W$ , so offensichtlich auch für ihre Summe  $V \oplus W$ . Da nach 2.4.12 unsere Darstellung in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen zerfällt, müssen wir ihn damit nur noch für  $V$  einfach zeigen. In diesem Fall folgt er aber aus der Schur'schen Lemma 2.5.1.  $\square$

**Satz 2.5.12 (Äußere Algebra und orthogonale Gruppe).** *Gegeben ein euklidischer Vektorraum  $V$  gilt:*

1. *Alle von Null verschiedenen äußeren Potenzen  $\bigwedge^i V$  sind irreduzibel als Darstellungen von  $O(V)$ , ja sogar ihre Komplexifizierungen  $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$  sind es;*
2. *Im Fall  $\dim V \neq 2i$  sind die  $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$  auch irreduzibel als Darstellungen von  $SO(V)$ . Im Fall  $\dim V = 2i > 0$  dahingegen ist  $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$  eine direkte Summe von zwei irreduziblen Darstellungen von  $SO(V)$ .*

*Beweis.* Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Orthonormalbasis. Schränken wir die Operation der orthogonalen Gruppe ein auf die Untergruppe  $\{1, -1\}^{\times n}$  der Vorzeichenwechsel der Basisvektoren, so sind die simultanen Eigenräume in  $\bigwedge V^{\mathbb{C}}$  die von den  $v_I$  für  $I \subset \{1, \dots, n\}$  erzeugten Geraden. Jede von Null verschiedene Unterdarstellung enthält also einen dieser Vektoren und ist folglich eines der  $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$ . Operiert nur  $SO(V)$ , so haben wir nur die Gruppe der Wechsel einer geraden Zahl von Vorzeichen zur Verfügung und die simultanen Eigenräume in  $\bigwedge V^{\mathbb{C}}$  sind die von den  $v_I$  und  $v_{\bar{I}}$  für  $I \subset \{1, \dots, n\}$  erzeugten Ebenen. Diese Erkenntnis erledigt bereits den Fall  $\dim V \neq 2i$ . Im Fall  $\dim V = 2i$  schließlich liegen für  $|I| = i$  sowohl  $v_I$  als auch  $v_{\bar{I}}$  in  $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$  und der Hodgeoperator 2.5.13 stabilisiert die von diesen beiden „komplementären“ Dachprodukten aufgespannte Ebene und operiert darauf mit zwei verschiedenen Eigenwerten. Jede irreduzible Unterdarstellung muß folglich mindestens einen Hodge-Eigenraum in mindestens einer dieser Ebenen umfassen und dann sieht man leicht, daß sie bereits mit diesem Hodge-Eigenraum in  $\bigwedge^i V^{\mathbb{C}}$  übereinstimmt.  $\square$

2.5.13 (**Hodgeoperator**). Seien  $V$  ein pseudo-euklidischer reeller Vektorraum der Dimension  $n$  und  $\mathbb{L}$  seine Längengerade und  $GO(V) := \mathbb{R}^{\times} O(V)$  die Gruppe seiner linearen Ähnlichkeiten. Die kanonische symmetrische Bilinearform ist eine nichtausgeartete Paarung  $V \times V \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  und liefert einen Isomorphismus  $V \xrightarrow{\sim} V^* \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2}$ . Das Dachprodukt liefert nichtausgeartete Paarungen  $\bigwedge^i V \times \bigwedge^{n-i} V \rightarrow \bigwedge^n V$ . In [LA2] 6.4.12 haben wir einen natürlichen Isomorphismus  $\bigwedge^n V \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$  angegeben. Zusammen mit der Vertauschung von äußerer Potenz und Dualisieren aus [LA2] 6.5.6 erhalten wir so unter der zusätzlichen

Annahme  $V \neq 0$  ausgezeichnete Isomorphismen

$$\wedge^i V \xrightarrow{\sim} (\wedge^{n-i} V)^* \otimes \wedge^n V \xrightarrow{\sim} \wedge^{n-i} V \otimes \mathbb{L}^{\otimes(2i-n)} \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(V)$$

oder gleichbedeutend  $\wedge^p V \otimes \mathbb{L}^{\otimes(-p)} \xrightarrow{\sim} \wedge^q V \otimes \mathbb{L}^{\otimes(-q)} \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(V)$  für  $p+q = n$ . Das sind Isomorphismen von Darstellungen von  $\text{GO}(V)$ . Halten wir eine Längeneinheit und eine Orientierung fest, so spezialisieren sie zu Isomorphismen  $\wedge^p V \xrightarrow{\sim} \wedge^q V$  von Darstellungen von  $\text{SO}(V)$ , immer noch für  $p+q = n$ . Diese Isomorphismen werden  $*$  notiert und heißen der **Hodge\*-Operator** oder kurz **Hodgeoperator**.

## Übungen

*Übung 2.5.14.* Man verallgemeinere 2.5.12 auf den Fall pseudoeuklidischer Vektorräume. Hinweis: 2.2.9.

*Übung 2.5.15.* Für je zwei komplexe endlichdimensionale einfache Darstellung  $L, M$  einer Gruppe  $G$  gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}, G}(L, M) \leq 1$ .

*Übung 2.5.16 (Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte im Komplexen).* Je zwei invariante Skalarprodukte auf einer irreduziblen endlichdimensionalen komplexen Darstellung einer Gruppe unterscheiden sich höchstens um einen positiven Skalar, ja je zwei invariante Sesquilinearformen auf einer irreduziblen endlichdimensionalen komplexen Darstellung unterscheiden sich höchstens um einen komplexen Skalar. Hinweis: Man beachte für einen komplexen Vektorraum mit der Notation  $\text{Ses}(V)$  für die Menge der Sesquilinearformen  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  die Identifikation

$$\text{Ses}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\overline{V}, V^*)$$

mit  $s \mapsto f_s$  und  $f_s$  gegeben durch  $f_s(\bar{v}) : w \mapsto s(v, w)$  mit  $\overline{V}$  dem komplex konjugierten Vektorraum nach [LA2] 1.12.33. Dann wende man 2.5.15 an.

*Übung 2.5.17 (Eindeutigkeit invarianter Skalarprodukte im Reellen).* Gegeben ein invariantes Skalarprodukt auf einer irreduziblen endlichdimensionalen reellen Darstellung einer Gruppe ist jede weitere invariante symmetrische Bilinearform ein Vielfaches. Hinweis: Hauptachsentransformation [LA2] ??.

*Übung 2.5.18.* Unter einer **unitären Darstellung** einer Gruppe versteht man eine Darstellung durch unitäre Automorphismen eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums oder allgemeiner eines Hilbertraums. Man zeige: Sind  $U, V$  zwei nichtisomorphe endlichdimensionale einfache Unterdarstellungen einer unitären Darstellung, so stehen  $U$  und  $V$  aufeinander senkrecht. Hinweis: Orthogonale Projektion [LA2] 1.3.18.

*Übung 2.5.19.* Jede endlichdimensionale komplexe einfache Darstellung der Drehgruppe hat unter der Einschränkung auf die Gruppe der Drehungen um eine feste Achse isotypische Komponenten der Dimension höchstens Eins, und die zu den Komponenten der Dimension Eins gehörigen Parameter bilden in  $\mathbb{Z}$  ein Intervall mit Zentrum im Ursprung, in Formeln

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}, S^1}(\chi_n, L(m)) = \begin{cases} 1 & |n| \leq m/2; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Übung 2.5.20.* Gegeben eine endlichdimensionale unitäre Darstellung  $V$  einer Liegruppe  $G$  gilt für die abgeleitete Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  die Identität

$$\langle xv, w \rangle + \langle v, xw \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v, w \in V$$

*Ergänzende Übung 2.5.21.* Man zeige, daß in einer endlichdimensionalen unitären Darstellung einer Liegruppe jedes Element der Liealgebra als diagonalisierbare Matrix mit rein imaginären Eigenwerten operiert. Man folgere, daß jede endlichdimensionale unitäre Darstellung  $(V, \rho)$  der Gruppe  $SL(2; \mathbb{R})$  konstant ist, in Formeln  $\rho(g) = \text{id} \quad \forall g \in SL(2; \mathbb{R})$ . Hinweis: Jede unitäre endlichdimensionale Darstellung dieser Gruppe entsteht durch Restriktion einer Darstellung von  $SL(2; \mathbb{C})$  und besitzt jedenfalls ein invariantes Skalarprodukt unter der Restriktion auf  $SU(2)$ , so daß auch  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  mit rein imaginären Eigenwerten operieren muß.

*Ergänzende Übung 2.5.22.* Wir erinnern an unsere  $(m+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung  $\mathbb{C}[X, Y]^m = L(m)$  der Spingruppe  $SU(2)$  aus dem Beweis von 2.3.2 mit ihrer Basis  $w_\nu := Y^\nu X^{m-\nu}$  für  $0 \leq \nu \leq m$ . Man wähle darauf jeweils ein invariantes Skalarprodukt. Man mag es normalisieren durch die Bedingung  $\|w_m\| = 1$ , aber auf darauf kommt es im folgenden gar nicht an. In der Physik verwendet man statt  $m$  als Parameter lieber  $\frac{m}{2} = j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  und bezeichnet die auf Länge Eins normierten Vektoren  $w_\nu$  mit

$$|j, j - \nu\rangle := w_\nu / \|w_\nu\|$$

Damit bilden dann die Vektoren  $|j, \mu\rangle$  für  $\mu = j, j-1, \dots, -(j-1), -j$  eine Orthonormalbasis von  $L(m)$ . Schließlich schreibt man  $J_+ := e$ ,  $J_- := f$  und  $J_z := h/2$ . Man prüfe in dieser Notation die Formeln

$$\begin{aligned} J_z |j, \mu\rangle &= \mu |j, \mu\rangle \\ J_\pm |j, \mu\rangle &= \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu \pm 1)} |j, \mu \pm 1\rangle \\ &= \sqrt{(j \pm \mu + 1)(j \mp \mu)} |j, \mu \pm 1\rangle \end{aligned}$$

Hinweis: Beim Rechnen in mathematischer Terminologie mag man davon ausgehen, daß  $e - f$  zu  $\mathfrak{su}(2; \mathbb{C})$  gehört, so daß nach 2.5.20 für jedes invariante Skalarprodukt gelten muß  $\langle (e - f)w_\nu, w_{\nu+1} \rangle + \langle w_\nu, (e - f)w_{\nu+1} \rangle = 0$ .

## 2.6 Kugelfunktionen\*

2.6.1 (**Zerlegung von Funktionen auf der Kreislinie**). In der unitären Darstellung der Kreislinie  $S^1 \cong \text{SO}(2)$  auf dem Raum  $L^2(S^1)$  der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Kreislinie durch Verschieben von Funktionen tritt jede endlichdimensionale einfache Darstellung der Kreislinie genau einmal als Unterdarstellung auf, in Formeln

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}, S^1}(\chi_n, L^2(S^1)) = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Des Weiteren ist die Summe all dieser endlichdimensionalen Unterdarstellungen ein dichter Teilraum des Hilbertraums  $L^2(S^1)$ , in dem sie im übrigen nach 2.5.18 paarweise senkrecht stehen. Mit  $\chi_n$  meinen wir hier den Vektorraum  $\mathbb{C}$  mit derjenigen  $S^1$ -Operation, unter der  $z$  durch Multiplikation mit  $\chi_n(z) = z^n$  operiert. Diese ganzen Aussagen sind nur eine Umformulierung von Satz [AN3] 2.6.5, nach dem die Charaktere  $\chi_n : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  eine Hilbertbasis von  $L^2(S^1)$  bilden. Mit unserer Hilbertsumme aus [AN3] 2.5.11 können wir unsere Erkenntnisse auch umschreiben zu einem Isomorphismus

$$\hat{\bigoplus}_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbb{C}, \chi_n) \xrightarrow{\sim} L^2(S^1)$$

von unitären  $S^1$ -Darstellungen, der gegeben wird durch das Bilden der Fourierreihe  $(a_n) \mapsto \sum_n a_n z^n$ .

**Satz 2.6.2 (Zerlegung von Funktionen auf der Kugelschale).** *In der unitären Darstellung durch Verschieben von Funktionen der Drehgruppe  $\text{SO}(3)$  auf dem Raum  $L^2(S^2)$  der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Kugelschale tritt jede endlichdimensionale einfache Darstellung der Drehgruppe genau einmal als Unterdarstellung auf, in Formeln*

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}, \text{SO}(3)}(L(2l), L^2(S^2)) = 1 \text{ für } l \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist die Summe all dieser Unterdarstellungen ein dichter Teilraum des Hilbertraums  $L^2(S^2)$ , in dem sie nach 2.5.18 paarweise aufeinander senkrecht stehen.

2.6.3. Insbesondere erhalten wir eine Hilbertbasis unseres Raums  $L^2(S^2)$ , indem wir in jeder unserer einfachen Unterdarstellungen eine Orthonormalbasis wählen und alle diese Basen zusammenfassen. Wieder anders gesagt existiert ein Isomorphismus

$$\hat{\bigoplus}_{l \in \mathbb{N}} L(2l) \xrightarrow{\sim} L^2(S^2)$$

von unitären Darstellungen der Gruppe  $SO(3)$ . Wir erklären in 2.6.6 folgende, wie man diese Basisvektoren und damit auch diesen Isomorphismus nach Wahl einer festen gerichteten Achse besonders geschickt wählen kann: Die so ausgezeichneten Funktionen heißen dann die **Kugelfunktionen** oder auch **Kugelflächenfunktionen**.

2.6.4. Im Anschluß zeigen wir zusätzlich, daß der Raum der unter allen Rotationen um die  $z$ -Achse invarianten Funktionen aus der einfachen Unterdarstellung  $\mathcal{H}^l \subset L^2(S^2)$  der Dimension  $2l + 1$  erzeugt wird vom sogenannten „ $l$ -ten Legendre-Polynom“  $P_l(z)$ , aufgefaßt als Funktion der  $z$ -Koordinate auf der Kugelschale. Die Wahl der Bezeichnung  $\mathcal{H}^l$  für unsere einfachen Unterdarstellungen geht auf das Wort „harmonisch“ zurück, das sich die fraglichen Funktionenräume hinwiederum verdienen als Eigenräume des „Laplace-Operators auf der Kugelschale“, aber darauf will ich hier noch nicht eingehen.

*Ergänzung 2.6.5.* Man kann auch für die höherdimensionalen Sphären  $S^n$  mit  $n \geq 1$  zeigen, daß in  $L^2(S^n)$  die irreduziblen Darstellungen von  $SO(n + 1)$  jeweils höchstens einmal vorkommen. Ganz allgemein nennt man einen homogenen Raum „sphärisch“, wenn er die Eigenschaft hat, daß in geeigneten Funktionenräumen keine einfachen Darstellungen mit höheren Multiplizitäten auftreten.

*Beweis.* Wir betrachten die Räume homogener Polynome in drei Veränderlichen  $\mathbb{C}[X, Y, Z]^l$ . Eine Polynomfunktion  $P$ , die homogen ist vom Grad  $d$ , erfüllt die Gleichung  $P(\lambda v) = \lambda^d P(v)$  für alle  $v \in \mathbb{R}^3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mithin definiert die Einschränkung für alle  $d \geq 0$  eine Einbettung

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]^l \hookrightarrow \mathcal{C}(S^2)$$

wobei die Polynome von geradem beziehungsweise ungeradem Grad in den Räumen aller unter der Punktspiegelung am Ursprung geraden beziehungsweise ungeraden Funktionen  $\mathcal{C}(S^2)^+$  beziehungsweise  $\mathcal{C}(S^2)^-$  landen. Bezeichnet  $\mathcal{C}^l$  das Bild von  $\mathbb{C}[X, Y, Z]^l$  in  $\mathcal{C}(S^2)$ , so haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0 &\subset \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{C}^4 \subset \dots \subset \mathcal{C}(S^2)^+ \\ \mathcal{C}^1 &\subset \mathcal{C}^3 \subset \mathcal{C}^5 \subset \dots \subset \mathcal{C}(S^2)^- \end{aligned}$$

da ja ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]^l$  dieselbe Einschränkung auf die Sphäre hat wie das Polynom  $(X^2 + Y^2 + Z^2)P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]^{l+2}$ . Die Dimensionen ergeben sich leicht zu

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}^l &= \dim \mathbb{C}[X, Y, Z]^l \\ &= \dim \mathbb{C}[X, Y]^{\leq l} \\ &= 1 + 2 + \dots + l + (l + 1) \\ &= (l + 1)(l + 2)/2 \end{aligned}$$

Nun sind alle  $\mathcal{C}^l$  offensichtlich stabil unter der Drehgruppe  $SO(3)$  und die konstanten Funktionen  $\mathcal{C}^0$  beziehungsweise die linearen Funktionen  $\mathcal{C}^1$  bilden irreduzible Darstellungen der Dimensionen Eins beziehungsweise Drei. Wir zeigen als nächstes, daß für  $l \geq 2$  das orthogonale Komplement  $\mathcal{H}^l$  von  $\mathcal{C}^{l-2}$  in  $\mathcal{C}^l$  eine irreduzible Darstellung der Dimension  $2l + 1$  ist. Die Dimension ergibt sich durch direkte Rechnung und besonders anschaulich durch die Betrachtung geeigneter Treppenbilder. Die Irreduzibilität folgern wir induktiv mithilfe unserer Erkenntnisse über die Struktur irreduzibler Darstellungen der Drehgruppe aus 2.3.9 und 2.5.19. Zunächst beachten wir dazu für  $S^1 \subset SO(3)$  die Gruppe der Drehungen um die  $z$ -Achse und  $\chi_n$  die entsprechende einfache Darstellung von  $S^1$ , daß  $\chi_l$  in  $\mathcal{C}^l$  vorkommt, in Formeln

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}, S^1}(\chi_l, \mathcal{C}^l) \neq 0$$

In der Tat ist  $(x + iy)^l$  eine Funktion, die sich entsprechend unter  $S^1$  transformiert. Per Induktion beziehungsweise expliziter Betrachtung im Fall  $l = 0, 1$  wissen wir nach 1.1.14 auch, daß dieses Gewicht von  $S^1$  in  $\mathcal{C}^{l-2}$  nicht vorkommt. Folglich muß es in  $\mathcal{H}^l$  vorkommen, und aus Dimensionsbetrachtungen folgt dann, daß  $\mathcal{H}^l$  irreduzibel ist. Die Dichtheit des Raums der Polynomfunktionen im Raum aller stetigen Funktionen folgt mit Stone-Weierstrass [AN1] ??, die Dichtheit von  $\mathcal{C}(S^2)$  in  $L^2(S^2)$  mit [AN3] 2.6.1. Vereinbaren wir noch die Bezeichnungen  $\mathcal{H}^0 = \mathcal{C}^0$  und  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{C}^1$ , so bildet demnach die Summe aller  $\mathcal{H}^l$  einen dichten Teilraum

$$\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^l \subset L^2(S^2)$$

Bezeichne nun  $\text{pr}_l : L^2(S^2) \rightarrow \mathcal{H}^l$  die orthogonale Projektion. Sie ist sicher ein Homomorphismus von Darstellungen. Ist  $L(m)$  eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung der Drehgruppe und  $\varphi : L(m) \rightarrow L^2(S^2)$  ein Homomorphismus von Darstellungen, so folgt  $\text{pr}_l \circ \varphi = 0$  für  $m \neq 2l$  nach 2.5.3, und gilt auch noch  $\text{pr}_l \circ \varphi = 0$  für  $m = 2l$ , so folgt  $\varphi = 0$ , weil dann das Bild von  $\varphi$  auf allen Vektoren eines dichten Teilraums senkrecht steht. Mithin liefert für alle  $l \in \mathbb{N}$  das Verknüpfen mit  $\text{pr}_l$  eine Einbettung und dann sogar einen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}, SO(3)}(L(2l), L^2(S^2)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{C}, SO(3)}(L(2l), \mathcal{H}^l)$$

und damit folgt unser Satz aus dem Schur'schen Lemma 2.5.1.  $\square$

2.6.6. Nach unseren Erkenntnissen über einfache Darstellungen der Drehgruppe bilden in jedem  $\mathcal{H}^l$  die unter allen Drehungen um die  $z$ -Achse  $S^1 \subset SO(3)$  invarianten Funktionen einen eindimensionalen Teilraum  $(\mathcal{H}^l)^{S^1}$ . Um Erzeuger dieser Teilräume zu finden, gehen wir aus von der offensichtlichen Einbettung

$$\mathbb{C}[z] \hookrightarrow \mathcal{C}(S^2)^{S^1}$$

unter der sicher Polynome vom Grad  $\leq d$  in  $\mathcal{H}^0 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^l$  landen. Unser Skalarprodukt auf  $L^2(S^2)$  schränkt nach [AN2] 5.6.9 ein zu dem Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}[z]$ , das gegeben wird durch die Formel

$$\langle g, f \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 \bar{g}(z) f(z) dz$$

Mithin finden wir Erzeuger von  $(\mathcal{H}^l)^{S^1}$ , wenn wir auf die durch Potenzen von  $z$  gegebene angeordnete Basis  $z^0, z^1, z^2, \dots$  des Polynomrings  $\mathbb{C}[z]$  in Bezug auf besagtes Skalarprodukt das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren [LA2] 1.11.6 anwenden. Die so entstehenden Polynome sind bis auf einen konstanten Faktor die sogenannten **Legendre-Polynome**  $(P_l)_{l \geq 0}$ . Der Faktor wird hierbei üblicherweise so gewählt, daß gilt  $P_l(1) = 1$ . Mit dieser Normalisierung können besagte Polynome dann auch durch die explizite Formel

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l$$

beschrieben und durch die Rekursion  $(l+1)P_{l+1} = (2l+1)zP_l - P_{l-1}$  berechnet werden. Ihre Quadratnorm ergibt sich aus den Formeln

$$\langle P_k, P_l \rangle = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{k,l}$$

Diese Formeln mag der Leser zur Übung selbst prüfen. Die ersten Legendre-Polynome sind  $P_0 = 1, P_1 = z, P_2 = (3z^2 - 1)/2$ . Ausführliche Tafelwerke findet man in Bibliotheken und im Netz.

2.6.7. In der Liealgebra der räumlichen Drehgruppe haben wir in 1.3.7 eine Basis  $E_1, E_2, E_3$  ausgezeichnet, deren Kommutatoren durch  $[E_1, E_2] = E_3$  und die beiden durch zyklische Vertauschung der Indizes entstehenden Formeln gegeben werden. In der komplexifizierten Liealgebra  $\mathfrak{so}(3)^{\mathbb{C}}$  liefern dann die Ausdrücke  $h = 2iE_3, e = E_2 - iE_1$  und  $f = -E_2 - iE_1$  eine Basis, in der die Klammern die Form  $[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$  haben. Nach 2.3.18 wirkt  $E_3$  als der Differentialoperator  $y\partial_x - x\partial_y$  und annulliert insbesondere alle Polynome, die nur von  $z$  abhängen. Wir erhalten also in  $L^2(S^2)$  ein Orthogonalsystem mit dichtem Erzeugnis, wenn wir zu den Legendre-Polynomen  $P_l$  noch alle  $e^m P_l$  und  $f^m P_l$  für  $0 < m \leq l$  dazunehmen, und normieren wir alle diese Funktionen auf die Länge Eins, indem wir sie durch ihre Norm teilen, so erhalten wir eine Hilbertbasis  $L^2(S^2)$  bestehend aus den sogenannten **Kugelfunktionen**

$$Y_{l,m} := \begin{cases} e^m P_l / \|e^m P_l\| & 0 < m \leq l; \\ P_l / \|P_l\| & m = 0; \\ f^{-m} P_l / \|f^{-m} P_l\| & 0 > m \geq -l. \end{cases}$$

Um zu einer expliziteren Beschreibung zu kommen, bemerken wir, daß nach 2.3.18 unser  $e$  auf komplexwertigen Polynomen wirkt wie der Differentialoperator  $z(-i\partial_y - \partial_x) + (x + iy)\partial_z$ . Dann prüfen wir  $(i\partial_y + \partial_x)(x + iy) = 0$  und erhalten folglich  $e^m P_l = (x + iy)^m \partial_z^m P_l$ . Ähnlich ergibt sich auch die Formel  $f^m P_l = (-(x - iy))^m \partial_z^m P_l$ . Nebenbei bemerkt ist  $e^m P_l$  komplex konjugiert zu  $(-1)^m f^m P_l$  und so finden wir auch eine Hilbertbasis aus reellwertigen Funktionen. In Kugelkoordinaten  $(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$  nach [AN2] 4.2.3 haben wir  $x + iy = e^{i\varphi} \sin \vartheta$ . Bis auf einen Normierungsfaktor werden unsere Kugelfunktionen also in Kugelkoordinaten gegeben durch den Ausdruck  $e^{im\varphi} (\sin^m \vartheta) P_l^{(m)}(\cos \vartheta)$ . Um den Normierungsfaktor auch noch zu bestimmen, gehen wir von unserer Formel für die Norm eines Legendre-Polynoms aus, die schon einmal

$$Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta)$$

liefert. Nun zeigen die Formeln in 2.5.22, daß das Anwenden von  $e$  auf  $\tilde{Y}_{l,m}$  die Norm um den Faktor  $\sqrt{(l+m+1)(l-m)}$  ändert, wohingegen das Anwenden von  $f$  auf  $\tilde{Y}_{l,m}$  die Norm um den Faktor  $\sqrt{(l-m+1)(l+m)}$  ändert. Das zeigt induktiv, daß unsere Kugelfunktionen beschrieben werden können durch die Formel

$$Y_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} (\sin^m \vartheta) P_l^{(m)}(\cos \vartheta)$$

Unser Casimir-Operator  $4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h) + 2)$  aus 2.3.14 schreibt sich in unserer alten Basis der Liealgebra  $-4(\rho(E_1)^2 + \rho(E_2)^2 + \rho(E_3)^2)$ . Eine kurze Rechnung zeigt, daß dieser Ausdruck ohne den Vorfaktor 4 auf Polynomfunktionen auf  $\mathbb{R}^3$  wirkt als der Differentialoperator

$$2(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$$

Nach unseren Erkenntnissen aus 2.3.14 müssen die Kugelfunktionen  $Y_{l,m}$ , wenn wir sie etwa als homogene Funktionen vom Grad  $l$  auf  $\mathbb{R}^3$  auffassen, Eigenfunktionen dieses Differentialoperators sein zum Eigenwert  $l(l+1)$ . Mit etwas Rechnung folgt, daß dieser Differentialoperator der „Laplace-Operator auf der Sphäre“ ist und unsere Kugelfunktionen heißen als Eigenfunktionen dieses „sphärischen Laplace-Operators“ auf Englisch auch **spherical harmonics**.

## Übungen

*Übung 2.6.8.* Jede endlichdimensionale Unterdarstellung von  $L^2(S^1)$  ist stetig. Hinweis: Fourierentwicklung.



Die Intervalle zwischen je zwei Zweierpotenzen müssen für ein Haarmaß auf der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen jeweils dasselbe Maß haben. Man sieht so zumindest qualitativ recht gut, daß die Massebelegung gegen den Ursprung hin immer dichter werden muß.

### 3 Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt geht es um abstrakte, als da heißt nicht notwendig eingebettete differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ich definiere sie als spezielle geringte Räume. Das hat den Vorteil, daß man mit diesem Formalismus auch ihre algebraischen Verwandten, die algebraischen Varietäten, effizient behandeln kann. Ich denke aber davon abgesehen auch, daß dieser Zugang nicht weniger anschaulich und technisch wenn nicht einfacher, so doch eleganter ist als die übliche Vorgehensweise: In der Tat sind in dieser Sprache Untermannigfaltigkeiten gerade die Teilmengen, die mit der induzierten Struktur eines geringten Raums zu Mannigfaltigkeiten werden, und die finale Struktur eines geringten Raums auf Quotienten liefert unmittelbar die Struktur besagter Quotienten als Mannigfaltigkeit mitsamt der zugehörigen universellen Eigenschaft.

#### 3.1 Geringte Räume

**Definition 3.1.1.** Sei  $k$  ein Körper. Ein  $k$ -geringter Raum  $X = (X, \mathcal{O})$  ist ein topologischer Raum  $X = (X, \mathcal{T})$  mitsamt einer Vorschrift  $\mathcal{O}$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  eine  $k$ -Teilringalgebra  $\mathcal{O}(U) \subset \text{Ens}(U, k)$  in der  $k$ -Ringalgebra aller Abbildungen von  $U$  nach  $k$  zuordnet, deren Elemente wir **strukturierende Funktionen auf  $U$**  nennen und von denen wir fordern:

Ist  $\mathcal{U}$  ein System offener Teilmengen von  $X$  und  $V := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  seine Vereinigung, so ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow k$  strukturierend genau dann, wenn ihre Restriktionen auf alle  $U \in \mathcal{U}$  strukturierend sind.

3.1.2. Eine Teilringalgebra muß nach unseren Definitionen stets das Einselement der ursprünglichen Ringalgebra enthalten. Unter anderem impliziert unsere Definition damit, daß alle konstanten Funktionen strukturierend sind, daß also für jedes  $U \subseteq X$  die konstanten Abbildungen von  $U$  nach  $k$  in  $\mathcal{O}(U)$  liegen.

*Vorschau 3.1.3.* Im Zusammenhang mit Schemata und Supermannigfaltigkeiten wird eine noch allgemeinere Definition des Konzepts eines geringten Raums benötigt. Wenn wir betonen wollen, daß wir den hier erklärten einfacheren Begriff meinen, reden wir genauer von einem **durch Funktionen  $k$ -geringten Raum**. In der Sprache der Garbentheorie, die ich hier noch vermeiden will, könnte man unser  $\mathcal{O}$  als eine „ $k$ -Ringalgebren-Untergarbe der  $k$ -Ringalgebren-Garbe aller  $k$ -wertigen Funktionen auf  $X$ “ charakterisieren.

*Beispiel 3.1.4.* Fundamental für uns sind die  $\mathbb{R}$ -geringten Räume  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$ , die entstehen, wenn wir  $\mathbb{R}^n$  mit seiner natürlichen Topologie versehen und als strukturierende Funktionen auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  alle stetig differenzierbaren Funktionen nehmen. Etwas allgemeiner können wir auch die  $\mathbb{R}$ -geringten

Räume  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^k)$  betrachten, bei denen wir als strukturierende Funktionen auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  alle  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen nehmen.

*Vorschau 3.1.5.* Fundamental für die algebraische Geometrie ist ein anderer Fall. Man geht dabei aus von einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k = \bar{k}$  und versieht  $k^n$  mit der sogenannten „Zariski-Topologie“, deren abgeschlossene Mengen genau alle Schnitte von Nullstellenmengen von Polynomen sind. Als strukturierende Funktionen nimmt man diejenigen Funktionen, die lokal als Quotienten von Polynomen dargestellt werden können. Auch jede abgeschlossene alias algebraische Teilmenge  $X \subseteq k^n$  wird dann zu einem  $k$ -geringten Raum, indem man sie mit der induzierten Topologie versieht und als strukturierende Funktionen wieder diejenigen Funktionen nimmt, die lokal als Quotienten von Polynomen dargestellt werden können. Unwesentlich allgemeiner wird jede affine  $k$ -Varietät ein  $k$ -geringter Raum, wenn wir sie mit ihrer Zariski-Topologie versehen und strukturierende Funktionen auf offenen Teilmengen erklären wie in [KAG] 4.4.3.

**Definition 3.1.6.** Seien  $k$ -geringte Räume  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  gegeben. Eine Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  heißt ein **Morphismus von  $k$ -geringten Räumen**, wenn sie stetig ist und wenn das Vorschalten unserer Abbildung strukturierende Funktionen zu strukturierenden Funktionen macht, wenn also in Formeln aus  $U \subseteq Y$  und  $f \in \mathcal{O}_Y(U)$  folgt  $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ . Die Menge aller Morphismen von  $X$  nach  $Y$  bezeichnen wir mit  $\text{Ger}_k(X, Y)$  oder auch kurz  $\text{Ger}(X, Y)$ . Ein **Isomorphismus von  $k$ -geringten Räumen** ist ein bijektiver Morphismus, dessen Umkehrabbildung auch ein Morphismus ist.

*Beispiel 3.1.7.* Morphismen  $\mathbb{R}$ -geringter Räume von  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$  nach  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{C}^1)$  sind genau die  $\mathcal{C}^1$ -Abbildungen. In der Tat ist jede  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung offensichtlich ein Morphismus und umgekehrt sind für jeden Morphismus  $\varphi$  die  $\varphi_j := x_j \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq m$  notwendig  $\mathcal{C}^1$ -Funktionen, als da heißt, jeder Morphismus ist auch umgekehrt eine  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung.

**3.1.8 (Schnitt von Strukturen als  $k$ -geringter Raum).** Sind auf ein und derselben Menge  $X$  mehrere Strukturen als  $k$ -geringter Raum gegeben, so bilden wir ihren Schnitt, indem wir diejenigen Mengen offen nennen, die in jeder unserer Strukturen offen sind, und diejenigen Funktion strukturierend, die in jeder unserer Strukturen strukturierend sind. Dieser Schnitt ist dann offensichtlich auch eine Struktur als  $k$ -geringter Raum auf  $X$ .

**3.1.9 (Strukturen als  $k$ -geringter Raum als teilgeordnete Menge).** Gegeben zwei Strukturen als  $k$ -geringter Raum auf derselben Menge  $X$  nennen wir die eine **größergleich** als die andere, wenn ihr Schnitt die andere Struktur ist. Salopp gesprochen sind also größere Strukturen solche „mit mehr offenen Mengen oder mehr strukturierenden Funktionen oder beidem“. Auf diese Weise erhalten wir

eine Teilordnung auf der Menge aller Strukturen als  $k$ -geringter Raum auf einer vorgegebenen Menge  $X$ .

**Definition 3.1.10.** Eine Familie  $(\varphi_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  von Morphismen  $k$ -geringter Räume heißt **gesamthaft final**, wenn für jeden weiteren  $k$ -geringten Raum  $W$  und jede Abbildung  $\psi : Y \rightarrow W$  gilt

$$(\psi \circ \varphi_i \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

**Lemma 3.1.11.** Gegeben  $k$ -geringte Räume  $(X_i)_{i \in I}$ , eine Menge  $Y$  und Abbildungen  $\varphi_i : X_i \rightarrow Y$  gibt es genau eine Struktur als  $k$ -geringter Raum auf  $Y$  derart, daß unsere Familie gesamthaft final wird. Sie heißt die **finale Struktur** zu unserer Familie.

*Beweis.* Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sind  $(\mathcal{T}_1, \mathcal{O}_1)$  und  $(\mathcal{S}_2, \mathcal{O}_2)$  zwei derartige Strukturen auf  $Y$ , jeweils bestehend aus einer Topologie und einer Vorgabe strukturierender Funktionen, für die unsere Familie gesamthaft final wird, so ist  $\text{id} : (Y, \mathcal{T}_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_j, \mathcal{O}_j)$  für beliebige  $i, j \in \{1, 2\}$  ein Morphismus. Das zeigt die Eindeutigkeit. Nun zeigen wir noch, daß für die größte Struktur auf  $Y$ , für die alle die  $\varphi_i$  Morphismen werden, die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt ist. Diese größte Struktur kann ja explizit dadurch beschrieben werden, daß ihre Topologie die Finaltopologie  $\mathcal{T} = \{V \subset Y \mid \varphi_i^{-1}(V) \subseteq X_i \forall i\}$  ist und die strukturierenden Funktionen gegeben werden durch

$$\mathcal{O}(V) = \{f : V \rightarrow k \mid f \circ \varphi_i \in \mathcal{O}(\varphi_i^{-1}(V)) \forall i\}$$

Damit ist klar, daß diese Struktur die von einer gesamthaft finalen Struktur geforderte Eigenschaft erfüllt.  $\square$

**3.1.12 (Transitivität gesamthaft finaler Familien).** Seien  $e_{ij} : W_{ij} \rightarrow X_i$  und  $f_i : X_i \rightarrow Y$  Familien von  $k$ -geringten Räumen und Morphismen. Ist die Familie der  $f_i e_{ij}$  gesamthaft final, so auch die Familie der  $f_i$ . Ist die Familie der  $e_{ij}$  gesamthaft final für alle  $i$  und die Familie der  $f_i$  gesamthaft final, so ist auch die Familie der  $f_i e_{ij}$  gesamthaft final. Das alles folgt unmittelbar aus der Definition.

**3.1.13.** Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  von  $k$ -geringten Räumen heißt **final**, wenn  $Y$  die finale Struktur in Bezug auf die einelementige Familie  $f$  trägt. Zum Beispiel ist die Identität auf einem  $k$ -geringten Raum stets final.

**3.1.14 (Disjunkte Vereinigung  $k$ -geringter Räume).** Gegeben eine Familie  $k$ -geringter Räume  $(X_i)$  versehen wir ihre disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup X_i$  mit der finalen Struktur bezüglich der Inklusionen, wenn nichts anderes gesagt wird. Wir erhalten so ein Koproduct in der Kategorie  $\text{Ger}_k$ .

**Definition 3.1.15.** Eine Familie  $(\varphi_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$  von Morphismen  $k$ -geringter Räume heißt **gesamthaft initial**, wenn für jeden weiteren  $k$ -geringten Raum  $W$  und jede Abbildung  $\psi : W \rightarrow X$  gilt

$$(\varphi_i \psi \text{ Morphismus } \forall i) \Rightarrow (\psi \text{ Morphismus})$$

3.1.16. Ganz allgemein nennen wir einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  **initial**, wenn er als einelementige Familie gesamthaft initial ist. Zum Beispiel ist die Identität auf einem  $k$ -geringten Raum stets initial. Ist  $\psi : X \hookrightarrow Y$  ein injektiver Morphismus von  $k$ -geringten Räumen und trägt  $X$  die initiale Struktur, so nennen wir  $\psi$  eine **Einbettung** von  $k$ -geringten Räumen.

3.1.17 (**Diskussion der Terminologie**). In der algebraischen Geometrie ist für unsere Einbettungen auch die Bezeichnung **Immersion** gebräuchlich. In der Differentialgeometrie versteht man jedoch unter einer Immersion stattdessen meist wie in 3.3.14 einen nicht notwendig injektiven Morphismus mit injektivem Differential an jedem Punkt.

3.1.18. Besonders oft werden uns **offene Einbettungen** und **abgeschlossene Einbettungen** begegnen, bei denen zusätzlich gefordert wird, daß sie als Abbildungen topologischer Räume offen beziehungsweise abgeschlossen sind, oder gleichbedeutend, daß ihr Bild offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

**Lemma 3.1.19.** *Gegeben  $k$ -geringte Räume  $(Y_i)_{i \in I}$ , eine Menge  $X$  und Abbildungen  $\varphi_i : X \rightarrow Y_i$  gibt es genau eine Struktur als  $k$ -geringter Raum auf  $X$  derart, daß unsere Familie gesamthaft initial wird. Sie heißt die **initiale Struktur** zu unserer Familie.*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit zeigt man wie im Fall gesamthaft finaler Strukturen in 3.1.11. Für den Nachweis der Existenz zeigen wir genauer, daß die kleinste Struktur  $\mathcal{I}$  eines  $k$ -geringten Raums auf  $X$ , für die alle unsere  $\varphi_i$  Morphismen werden, die geforderte universelle Eigenschaft hat. Ist in der Tat  $\psi : W \rightarrow X$  eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß alle  $\varphi_i \psi$  Morphismen sind, so muß ja die finale Struktur  $\mathcal{T}$  auf  $X$  in Bezug auf  $\psi$  größergleich unserer kleinsten Struktur  $\mathcal{I}$  sein. Das zeigt, daß  $\psi$  auch in Bezug auf  $\mathcal{I}$  ein Morphismus ist.  $\square$

3.1.20. Ist  $X \subset Y$  eine Teilmenge eines  $k$ -geringten Raums, so nennen wir die initiale Struktur zur Inklusion die **induzierte Struktur** eines  $k$ -geringten Raums auf  $X$  und notieren sie  $(X, \mathcal{O}_Y|_X)$ . Explizit kann man die induzierte Struktur beschreiben wie folgt: Als Topologie auf  $X$  erhält man die von  $Y$  induzierte Topologie, und eine Funktion  $g$  auf  $U \subseteq X$  ist strukturierend genau dann, wenn es für alle  $x \in U$  eine offene Umgebung  $V \subseteq Y$  von  $x$  in  $Y$  gibt und eine Funktion  $f \in \mathcal{O}_Y(V)$  mit  $g|_{U \cap V} = f|_{U \cap V}$ .

3.1.21 (**Transitivität gesamthaft initialer Familien**). Seien  $\varphi_i : X \rightarrow Y_i$  und  $\psi_{ji} : Y_i \rightarrow Z_{ji}$  Familien von  $k$ -geringten Räumen und Morphismen. Trägt  $X$  die initiale Struktur für die  $\varphi_i$  und tragen die  $Y_i$  die initialen Strukturen für die  $\psi_{ji}$ , so trägt  $X$  auch die initiale Struktur für die  $\psi_{ji}\varphi_i$ . Trägt andererseits  $X$  die initiale Struktur für die  $\psi_{ji}\varphi_i$ , so trägt  $X$  auch die initiale Struktur bezüglich der  $\varphi_i$ . All das folgt direkt aus den Definitionen.

3.1.22. Bemerkung 3.1.21 besagt unter anderem, daß die Verknüpfung von zwei initialen Morphismen stets initial ist, und daß Verknüpfung  $\psi\varphi$  von zwei Morphismen nur dann initial sein kann, wenn  $\varphi$  initial ist. Insbesondere ist jeder Morphismus initial, zu dem es einen linksinversen Morphismus gibt. Weiter ist die Verknüpfung von zwei Einbettungen stets wieder eine Einbettung.

*Ergänzung* 3.1.23. Diese Aussagen und ihr Beweis sind ebenso wie die Aussagen zur Transitivität finaler Familien völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen [TM] 1.6.14, [TM] 1.7.5 im Kontext topologischer Räume. Sie wären noch allgemeiner sinnvoll und richtig für eine beliebige Kategorie mit einem treuen Funktor in die Kategorie der Mengen, ja mit etwas mehr Mühe bei der Formulierung sogar für einen beliebigen treuen Funktor.

## Übungen

*Übung* 3.1.24. Für  $m \leq n$  ist die Projektion auf die ersten Koordinaten  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  final in Bezug auf die in 3.1.4 erklärten  $\mathcal{C}^1$ -Strukturen  $\mathbb{R}$ -geringter Räume.

*Übung* 3.1.25. Man folgere aus 3.1.12: Die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen ist stets final. Ist die Verknüpfung  $\varphi \circ \psi$  von zwei Morphismen final, so ist  $\varphi$  final. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, für den es also einen Morphismus  $s$  gibt mit  $fs = \text{id}$ .

*Übung* 3.1.26 (**Finalität offener Überdeckungen**). Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung eines  $k$ -geringten Raums  $X$ , so trägt  $X$  die finale Struktur in Bezug auf die Einbettungen  $U_i \hookrightarrow X$ . Eine Abbildung  $X \rightarrow Y$  in einen weiteren  $k$ -geringten Raum ist also genau dann ein Morphismus, wenn ihre Restriktionen auf alle  $U_i$  Morphismen sind.

*Übung* 3.1.27 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von  $k$ -geringten Räumen  $\varphi : X \rightarrow Y$  final, so ist auch für jede offene Teilmenge  $V \Subset Y$  die induzierte Abbildung  $\varphi^{-1}(V) \rightarrow V$  final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt  $\varphi : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von  $k$ -geringten Räumen und besitzt  $Y$  eine offene Überdeckung  $\mathcal{V}$  derart, daß  $\varphi : \varphi^{-1}(V) \rightarrow V$  für alle  $V \in \mathcal{V}$  final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

## 3.2 Mannigfaltigkeiten und Eckfaltigkeiten

**Definition 3.2.1.** Sei  $k$  ein Kring und  $\mathcal{M}$  eine Menge von  $k$ -geringten Räumen. Unter einem **geringten Raum mit Modellen**  $\mathcal{M}$  verstehen wir einen  $k$ -geringten Raum derart, daß jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die als  $k$ -geringter Raum isomorph ist zu einer offenen Teilmenge eines unserer Modelle aus  $\mathcal{M}$ . Eine  **$\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit** ist ein geringter Raum mit Modellen  $\mathcal{M}$ , der zusätzlich Hausdorff ist. Ein **Morphismus von Mannigfaltigkeiten** ist ein Morphismus der zugrundeliegenden  $k$ -geringten Räume.

3.2.2. Die Forderung „Hausdorff“ schließt Beispiele aus wie die „Zahlengerade mit verdoppeltem Nullpunkt“ aus [TM] 1.4.8. Sie ist nötig für Satz [TM] 1.8.2, nach dem jede eindimensionale kompakte zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit isomorph ist zur Kreislinie. Viele grundlegende Teile der Theorie funktionieren aber auch ohne diese Annahme. In diesen Vorlesungen benötigen wir die Hausdorff-Eigenschaft zum ersten Mal beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf für Mannigfaltigkeiten 3.6.2, nach dem jedes glatte Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit zu jedem Anfangswert einen eindeutig bestimmten größten Flußweg hat. Dieser Satz ist ohne Annahme der Hausdorff-Eigenschaft offensichtlich falsch.

3.2.3 (**Diskussion der Terminologie**). Die meisten Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß der zugrundeliegende topologische Raum „parakompakt“ sein soll oder sogar abzählbar basiert im Sinne von [AN3] 1.4.21. Alle diese Bedingungen sind jedoch erst später von Belang, ich fordere sie deshalb lieber im Bedarfsfall jeweils explizit. Ein Beispiel für eine nicht abzählbar basierte Mannigfaltigkeit ist jede überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie, auf der alle Funktionen „strukturierend“ sind. Ein Beispiel für eine nicht parakompakte Mannigfaltigkeit findet man etwa in [AL] 5.4.2.

*Beispiele 3.2.4.* Die folgende Tabelle liefert die gebräuchlichsten Varianten von Mannigfaltigkeiten. Das Symbol  $\mathcal{C}^p$  für  $p \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\omega\}$  steht im Fall  $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  für die Struktur von  $\mathbb{R}$ -geringtem Raum, in der genau die  $p$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen strukturierend sind. Bei  $p = 0$  vereinbaren wir, daß das genau die stetigen Funktionen sein mögen, bei  $p = \infty$  die glatten Funktionen und bei  $p = \omega$  die analytischen Funktionen. Dahingegen steht  $(\mathbb{C}, \mathcal{O}^{\text{an}})$  für den  $\mathbb{C}$ -geringten Raum, für den genau die holomorphen Funktionen strukturierend sind. Bei  $(\mathbb{C}^d, \mathcal{O}^{\text{an}})$  sind allgemeiner die komplex-analytischen Funktionen gemeint.

| Modelle $\mathcal{M}$  | Übliche Bezeichnung für $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeiten |
|--|---|
| $(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^0)$                              | topologische $d$ -Mannigfaltigkeiten                      |
| $(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)$                              | $d$ -dimensionale $\mathcal{C}^p$ -Mannigfaltigkeiten     |
| $(\mathbb{C}, \mathcal{O}^{\text{an}})$                      | eindimensionale holomorphe Mannigfaltigkeiten             |
| $(\mathbb{C}^d, \mathcal{O}^{\text{an}})_{d \in \mathbb{N}}$ | komplex-analytische Mannigfaltigkeiten                    |
| $(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)_{d \in \mathbb{N}}$           | $\mathcal{C}^p$ -Mannigfaltigkeiten variabler Dimension   |
| $(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{C}^p)$   | $(d + 1)$ -dimensionale $\mathcal{C}^p$ -Randfaltigkeiten |
| $(\mathbb{R}_{\leq 0}^d, \mathcal{C}^p)$                     | $d$ -dimensionale $\mathcal{C}^p$ -Eckfaltigkeiten        |

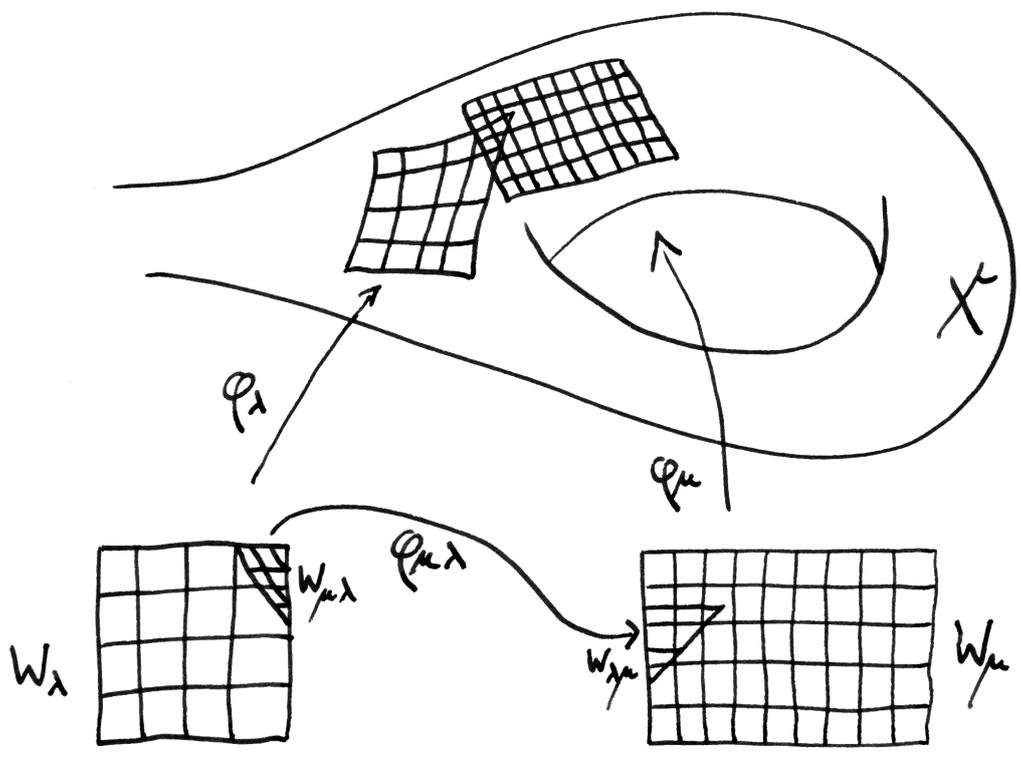
Für Morphismen in den jeweiligen Kategorien schreiben wir auch oft das Symbol für den fraglichen Typ von Funktionen. Eine zusammenhängende eindimensionale holomorphe Mannigfaltigkeit heißt eine **Riemann'sche Fläche**. Für die Menge aller Morphismen von einer Riemann'schen Fläche  $X$  in eine Riemann'sche Fläche  $Y$  schreiben wir also etwa  $\mathcal{O}^{\text{an}}(X, Y)$ .

3.2.5. Eine offene Einbettung von einer offenen Teilmenge eines Modells in eine derartige Mannigfaltigkeit nennen wir eine **Karte**. Ein **Atlas** einer Mannigfaltigkeit ist eine Familie von Karten, deren Bilder die ganze Mannigfaltigkeit überdecken. Nach 3.1.26 trägt eine Mannigfaltigkeit in Bezug auf jeden Atlas die finale Struktur.

*Beispiel 3.2.6 (Ursprung der Terminologie).* Die auf den Seiten eines Atlanten aus dem Bücherschrank abgebildeten schmutzigen Karten identifizieren jeweils einen Teil der Erdoberfläche mit einem Teil der entsprechenden Papierebene, die hinwiederum mit etwas gutem Willen als Teilmenge eines  $\mathbb{R}^2$  aufgefaßt werden kann. Das motiviert die eben für allgemeine Mannigfaltigkeiten eingeführte Terminologie.

3.2.7. Wir konzentrieren uns im folgenden auf den Fall von  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und nennen sie **glatte Mannigfaltigkeiten**. Soweit möglich gebe ich grundlegende Definitionen allgemeiner für glatte Eckfaltigkeiten. Das hat insbesondere den Vorteil, daß alle reellen Intervalle zu einem Teil des allgemeinen Formalismus werden.

*Beispiel 3.2.8 (Affine Räume als Mannigfaltigkeiten).* Jeden endlichdimensionalen reellen affinen Raum  $X$  können wir mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen, indem wir einen Isomorphismus von reellen affinen Räumen  $\varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$  wählen und die finale Struktur zur offensichtlichen Struktur auf  $\mathbb{R}^n$  in Bezug auf diese Bijektion nehmen. Man sieht nun leicht, daß diese Struktur auf  $X$  vom gewählten Isomorphismus gar nicht abhängt. Die so auf  $X$  erklärte Struktur als glatte Mannigfaltigkeit nennen wir die **natürliche glatte Struktur**.



Eine Mannigfaltigkeit mit zwei Karten und dem zugehörigen Kartenwechsel

Die zugrundeliegende Topologie ist im übrigen unsere natürliche Topologie aus [AN2] 2.2.6.

3.2.9. Die  $\mathbb{R}$ -Kringalgebra der  $C^p$ -Funktionen auf einer  $C^p$ -Mannigfaltigkeit  $M$  notieren wir  $C^p(M)$  oder  $C^p(M, \mathbb{R})$ , wenn wir besonders betonen wollen, daß reellwertige Funktionen gemeint sind. Manchmal verwenden wir nämlich die Notation  $C^p(M)$  auch für die komplexwertigen  $C^p$ -Funktionen auf  $M$ . Das gilt es jeweils aus dem Kontext zu erschließen.

*Ergänzung 3.2.10.* Gegeben  $p \geq q$  scheint es mir klar, daß man jede  $C^p$ -Mannigfaltigkeit auf genau eine Weise so mit der Struktur einer  $C^q$ -Mannigfaltigkeit versehen kann, daß Karten Karten bleiben. Für diejenigen Leser, die mit der Sprache der Kategorien und Funktoren vertraut sind, will ich das auch noch in voller Allgemeinheit formulieren: Gegeben zwei Mengen von Modellen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  und ein Funktor  $F$  von der Kategorie aller offenen Teilmengen von Modellen aus  $\mathcal{M}$  in die Kategorie der  $\mathcal{M}'$ -Mannigfaltigkeiten, der auf den zugrundeliegenden Mengen die Identität ist und die Struktur als geringter Raum höchstens vergrößert im Sinne von 3.1.9, in Formel  $F : (U, \mathcal{O}_U) \mapsto (U, \mathcal{O}'_U)$  und genauer  $F : (U, \mathcal{T}_U, \mathcal{O}_U) \mapsto (U, \mathcal{T}'_U, \mathcal{O}'_U)$ , weil sich ja auch die Topologie verfeinern darf, erhalten wir ganz allgemein einen Funktor

$$F : \left\{ \begin{array}{l} \text{Geringte Räume} \\ \text{mit Modellen } \mathcal{M} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Geringte Räume} \\ \text{mit Modellen } \mathcal{M}' \end{array} \right\}$$

Er kann dadurch charakterisiert werden, daß er die zugrundeliegende Menge nicht ändert, also  $F : (X, \mathcal{T}, \mathcal{O}_X) \mapsto (X, \mathcal{T}', \mathcal{O}'_X)$ , und daß für jede Karte  $U \rightarrow X$  von  $X$  die induzierte Abbildung  $FU \rightarrow FX$  eine offene Einbettung in den neu konstruierten geringten Raum  $FX$  ist. Zum Beispiel können wir so jede Riemann'sche Fläche als eine zweidimensionale reelle  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit auffassen und jede separierte glatte komplexe algebraische Varietät als eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit.

**Lemma 3.2.11 (Projektive Räume als Mannigfaltigkeiten).** *Die projektiven Räume  $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  werden glatte Mannigfaltigkeiten, wenn wir erst  $\mathbb{K}^{n+1}$  mit der natürlichen glatten Struktur nach 3.2.8 versehen, dann  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  mit der induzierten Struktur und schließlich  $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$  mit der finalen Struktur.*

3.2.12. Ich formuliere das auch noch aus. Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{P}^n\mathbb{K}$  soll offen sein, wenn ihr Urbild in  $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  unter einem und jedem Isomorphismus  $\varphi : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$  von reellen Vektorräumen einer offenen Teilmenge  $\varphi^{-1}(\pi^{-1}(U)) \subseteq \mathbb{R}^m$  entspricht. Eine reellwertige Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  soll strukturierend alias glatt sein, wenn  $f \circ \pi \circ \varphi : \varphi^{-1}(\pi^{-1}(U)) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist im Sinne der Analysis.

3.2.13. Dasselbe gilt für die reell-analytischen und im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  auch für die komplex-analytischen Strukturen. Im Fall  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  kann man die Struktur als Riemann'sche Fläche alternativ erklären als die finale Struktur zu den beiden Abbildungen  $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  gegeben durch  $z \mapsto \langle z, 1 \rangle$  und  $z \mapsto \langle 1, z \rangle$  mit  $\langle a, b \rangle = \langle (a, b) \rangle$  dem vom Vektor  $(a, b)$  erzeugten Teilraum. Das ist insofern einfacher, als diese Beschreibung ohne den Begriff komplexanalytischer Funktionen in mehreren Veränderlichen auskommt.

*Beweis.* Wir wissen nach [TM] 2.3.7 bereits, daß unsere Räume Hausdorff sind. Somit müssen wir nur noch um jeden Punkt eine Karte finden. Sei dazu  $v \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$  ein Repräsentant unseres Punktes,  $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$  eine lineare  $\mathbb{K}$ -Hyperebene mit  $v \notin H$  und  $U \subseteq \mathbb{P}^n\mathbb{K}$  die Menge aller nicht in  $H$  enthaltenen Geraden. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} w & \in & \mathbb{K}^{n+1} \setminus H \rightarrow U \\ \downarrow & & \downarrow \parallel \\ (w\mathbb{K}) \cap (v + H) & \in & (v + H) \rightarrow U \end{array}$$

ist dann die obere Horizontale final nach der Lokalität von Finalität in der Basis 3.1.27 und die linke Vertikale glatt, wie man durch explizite Rechnung prüft. Damit ist auch die untere Horizontale final nach 3.1.25 und als bijektive finale Abbildung muß sie dann ein Homöomorphismus sein.  $\square$

**Proposition 3.2.14 (über Untermannigfaltigkeiten).** *Für eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  oder allgemeiner eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Teilmenge ist eine  $d$ -dimensionale  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit im Sinne der Definition [AN2] 4.2.6, ist also lokal  $C^1$ -plättbar;*
2. *Unsere Teilmenge ist mit ihrer von  $(\mathbb{R}^n, C^1)$  induzierten Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums eine  $d$ -Mannigfaltigkeit im Sinne der vorstehenden Definition 3.2.1.*

3.2.15. Analoges gilt mit demselben Beweis auch für  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten mit  $0 \leq k \leq \infty$  sowie für Eckfaltigkeiten.

*Beweis.* Die einzige Richtung, die einen Beweis verdient, ist  $2 \Rightarrow 1$ . Wir geben dazu unserer Teilmenge den Namen  $M$ . Ist  $M$  mit seiner induzierten Struktur eine  $d$ -Mannigfaltigkeit im Sinne von 3.2.1, so gibt es insbesondere für jeden Punkt  $p \in M$  einen Isomorphismus von geringten Räumen

$$\varphi : W \rightarrow \varphi(W) \subseteq M$$

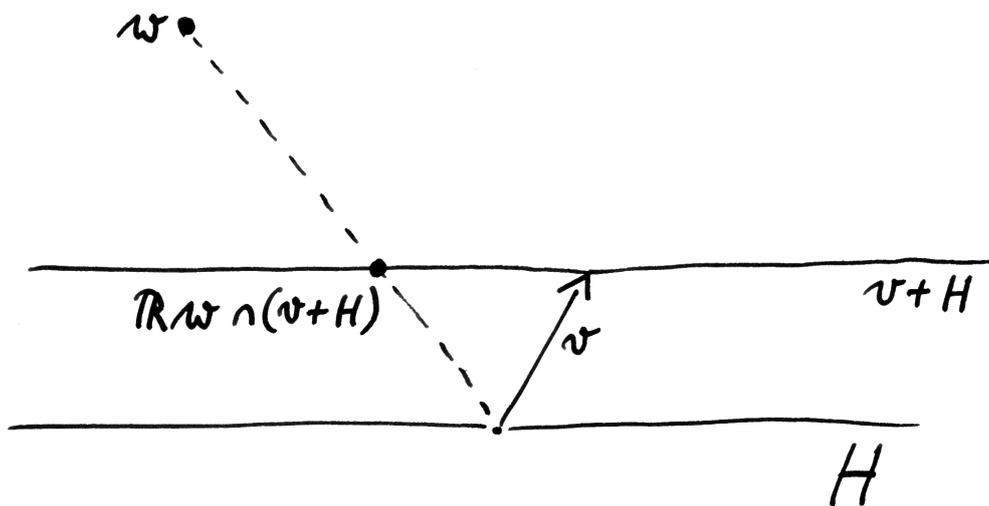


Illustration zum Beweis von 3.2.11

mit  $p \in \varphi(W)$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^k$ . Proposition [AN2] 4.4.1 zeigt dann, daß  $M$  eine eingebettete Mannigfaltigkeit ist, wenn wir nur zeigen können, daß  $\varphi$  als Abbildung in den  $\mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar ist mit injektivem Differential an jeder Stelle von  $W$ . Daß hier  $\varphi$  stetig differenzierbar ist, folgt aus einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 3.1.7: Auch für  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  sind die Morphismen von  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen  $(W, \mathcal{C}^1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1)$  genau die stetig differenzierbaren Abbildungen  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Daß sein Differential überall injektiv ist, erkennt man, indem man die Koordinatenfunktionen  $x_1, \dots, x_d$  auf  $W$  als Funktionen auf  $\varphi(W)$  betrachtet. Nach Definition der induzierten Struktur lassen sich alle diese Koordinatenfunktionen stetig differenzierbar auf eine offene Umgebung von  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  ausdehnen. Ist  $q \in W$  der Punkt mit  $\varphi(q) = p$ , so sind die Bilder unter  $d_q\varphi$  der Standardbasis des  $\mathbb{R}^d$  gewisse Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  derart, daß die Richtungsableitungen in Richtung dieser Vektoren unserer Ausdehnungen  $f_1, \dots, f_d$  jeweils Eins sind auf der Ausdehnung der entsprechenden Koordinate und Null auf den Ausdehnungen aller anderen Koordinaten, in Formeln

$$((d_q\varphi)\partial_i)(f_j) = (\partial_i(f_j \circ \varphi))(q) = (\partial_i(x_j))(q) = \delta_{ij}$$

Das zeigt die Injektivität des Differentials. □

**Proposition 3.2.16 (Produkt von Mannigfaltigkeiten).** *Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten  $M, N$  kann ihr Produkt*

$$M \times N$$

*auf genau eine Weise mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen werden derart, daß eine Abbildung  $f : X \rightarrow M \times N$  von einer glatten Mannigfaltigkeit in unser Produkt glatt ist genau dann, wenn  $\text{pr}_1 \circ f$  und  $\text{pr}_2 \circ f$  es sind.*

3.2.17. Versehen mit dieser Struktur nennen wir  $M \times N$  das **Produkt** der glatten Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ . Das ist per definitionem dann auch das Produkt in der Kategorie der Mannigfaltigkeiten im Sinne der Kategorientheorie [LA2] 7.7.1. Der Beweis zeigt im übrigen, daß die Produktmannigfaltigkeit die Produkttopologie trägt. Das Produkt von  $\mathbb{R}^m$  mit  $\mathbb{R}^n$  ist offensichtlich  $\mathbb{R}^{m+n}$  mit seiner üblichen Struktur als glatte Mannigfaltigkeit. Die Proposition gilt analog auch für Mannigfaltigkeiten mit anderen Differenzierbarkeitsannahmen und sogar für solche mit Ecken, nicht aber für „Mannigfaltigkeiten mit Rand“. Betrachten wir speziell für  $f$  die Identität auf  $M \times N$ , so erkennen wir, daß die Projektionen eines Produkts auf seine Faktoren glatt sind.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist klar. Die Existenz zeigen wir, indem wir  $M \times N$  mit der finalen Struktur in Bezug auf alle Abbildungen

$$(\varphi \times \psi) : V \times W \rightarrow M \times N$$

versehen, für  $\varphi : V \rightarrow M$  und  $\psi : W \rightarrow N$  Karten von  $M$  beziehungsweise von  $N$ . Ist  $M$  eine  $m$ -Mannigfaltigkeit und  $N$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit, so haben wir hier  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  und denken uns  $V \times W \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$  versehen mit seiner von  $(\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{C}^\infty)$  induzierten Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums. Aus der Beschreibung 3.2.24 einer Mannigfaltigkeit durch einen verträglichen Atlas folgt, daß  $M \times N$  mit dieser Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums in der Tat eine glatte Mannigfaltigkeit wird, die die gewünschten Eigenschaften hat.  $\square$

3.2.18. Jedes Produkt von Einbettungen ist wieder eine Einbettung. Sind also in Formeln  $X \hookrightarrow M$  und  $Y \hookrightarrow N$  Einbettungen von glatten Mannigfaltigkeiten, so ist auch  $X \times Y \hookrightarrow M \times N$  ein Einbettung. Das folgert man mühelos aus den universellen Eigenschaften.

**Definition 3.2.19.** Eine **Liegruppe** ist eine Gruppe  $G$  mit einer Struktur als glatte Mannigfaltigkeit derart, daß die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$  und die Inversenbildung  $G \rightarrow G$  glatt sind.

3.2.20 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur wird von einer Liegruppe meist zusätzlich gefordert, daß sie eine abzählbare Basis der Topologie besitzen soll. Wir werden diese Bedingung stets explizit erwähnen, wenn wir sie brauchen, und dann von einer **abzählbar basierten Liegruppe** reden.

*Beispiel 3.2.21.* Die vorhergehende Bemerkung 3.2.18 zeigt, daß unsere Matrixliegruppen aus 1.2.4 tatsächlich Liegruppen in diesem abstrakten Sinne sind.

**Satz\* 3.2.22 (Kompakte Liegruppen sind Matrixliegruppen).** *Jede kompakte Liegruppe besitzt eine endlichdimensionale treue Darstellung, ist also isomorph zu einer Matrixliegruppe.*

*Beweis.* Gegeben zwei verschiedene Elemente unserer Gruppe gibt es nach dem Satz von Peter-Weyl [TM] 4.7.7 stets eine stetige darstellende Funktion, die an ihnen verschiedene Werte annimmt. Für jedes vom neutralen Element verschiedene Gruppenelement gibt es folglich eine stetige endlichdimensionale Darstellung, auf der besagtes Element nicht als die Identität operiert. Ist nun  $G$  unsere kompakte Liegruppe und  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine stetige endlichdimensionale Darstellung, die nicht treu ist, in Formeln  $\ker \rho \neq 1$ , so finden wir ein Element  $x \neq 1$  in  $\ker \rho$  und eine stetige endlichdimensionale Darstellung  $W$ , auf der  $x$  nicht als Identität operiert. Die Summe  $V_1 = V \oplus W$  liefert dann eine Darstellung  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$  mit  $\ker \rho \supsetneq \ker \rho_1$ . Besäße  $G$  keine treue endlichdimensionale Darstellung, so könnten wir auf diese Weise in  $G$  eine unendliche echt absteigende Folge kompakter Untergruppen konstruieren. Das ist jedoch absurd, da in jedem Schritt entweder die Dimension abnehmen muß oder, wenn diese gleich bleibt, die Zahl der Zusammenhangskomponenten.  $\square$

## Übungen

*Ergänzende Übung 3.2.23.* Gegeben eine kompakte Liegruppe  $K$  trifft der Abschluß ihrer derivierten Gruppe  $(K, K)$ , also der von allen Kommutatoren  $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$  mit  $a, b \in K$  erzeugten Untergruppe, das Zentrum in einer endlichen Untergruppe, in Formeln

$$|(\overline{(K, K)} \cap Z(K))| < \infty$$

Hinweis: Man findet eine treue endlichdimensionale Darstellung  $V$ , darauf ein invariantes Skalarprodukt und eine Zerlegung  $V = L \oplus \dots \oplus M$  in irreduzible Unterdarstellungen. Dann landet das Zentrum in  $\mathbb{C}^\times \text{id}_L \times \dots \times \mathbb{C}^\times \text{id}_M$  und der Abschluß der derivierten Gruppe in  $SU(L) \times \dots \times SU(M)$ . In 5.7.11 werden wir im übrigen sehen, daß die derivierte Gruppe  $(K, K)$  bereits selbst abgeschlossen sein muß.

*Übung 3.2.24 (Kriterium für Atlanten).* Gegeben Modelle  $\mathcal{M}$  und eine Menge  $X$  ist eine vorgegebene Familie  $(W_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  mit  $W_\lambda$  offen in Modellen aus  $\mathcal{M}$  und  $\varphi_\lambda : W_\lambda \hookrightarrow X$  jeweils einer Injektion ein Atlas für die Struktur einer  $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit auf  $X$  genau dann, wenn (1) die Finaltopologie auf  $X$  in Bezug auf die  $\varphi_\lambda$  Hausdorff ist, wenn (2) für alle  $\lambda, \mu \in \Lambda$  die Mengen  $W_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}(\varphi_\mu(W_\mu))$  offen sind in  $W_\lambda$  und wenn (3) die **Kartenwechsel**

$$\varphi_{\mu\lambda} : W_{\lambda\mu} \rightarrow W_{\mu\lambda}$$

Morphismen von geringten Räumen sind. Wegen  $\varphi_{\lambda\mu} \circ \varphi_{\mu\lambda} = \text{id}$  sind sie dann sogar Isomorphismen.

*Ergänzende Übung 3.2.25.* Man konstruiere einen Diffeomorphismus  $SO(3) \cong \mathbb{P}^3\mathbb{R}$  von glatten Mannigfaltigkeiten. Hinweis: Man betrachte geeignete finale Morphismen von  $S^3$  auf beide Seiten. Hierzu mag die in 1.6.2 diskutierte Spingruppe helfen.

*Übung 3.2.26.* Gegeben zwei Liegruppen  $G, H$  ist auch ihr Produkt  $G \times H$  mit der komponentenweisen Verknüpfung eine Liegruppe.

*Übung 3.2.27.* Die Quotientengruppe  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  wird mit der finalen Struktur zur kanonischen Projektion eine Liegruppe, die isomorph ist zu  $(S^1)^n$ .

*Übung 3.2.28.* Eine stetige Abbildung  $p : X \rightarrow Y$  heißt wie in [TF] 3.1.10 **étale**, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \Subset X$  besitzt, die von  $p$  homöomorph auf eine offene Teilmenge  $p(U) \Subset Y$  abgebildet wird. Sei  $X \rightarrow Y$  eine étale Abbildung von Hausdorffräumen. Gegeben eine Struktur als  $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit auf  $Y$  betrachten wir die kleinste Struktur als geringter Raum auf  $X$ , für die  $p$  ein Morphismus ist und für die alle offenen Teilmengen von  $X$  offen sind. Man zeige, daß solch eine kleinste Struktur in der Tat existiert, daß sie

die Topologie auf  $X$  zu einer Struktur als  $\mathcal{M}$ -Mannigfaltigkeit erweitert, und daß für alle  $U \subseteq X$ , für die  $p$  einen Homöomorphismus  $p : U \xrightarrow{\sim} p(U)$  induziert, dieser Homöomorphismus auch ein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist. Ich nenne diese Struktur die **étale induzierte Struktur**.

*Weiterführende Übung 3.2.29.* Jede zusammenhängende Überlagerung einer Liegruppe wird mit der durch die Wahl eines Urbilds des neutralen Elements gegebenen stetigen Verknüpfung aus [TF] ?? und der étale induzierten  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur im Sinne von 3.2.28 selbst eine Liegruppe.

*Übung 3.2.30.* Jede zusammenhängende Liegruppe ist abzählbar basiert. Hinweis: [TF] 1.2.31.

### 3.3 Tangentialräume

3.3.1 (**Keime von Mannigfaltigkeiten**). Seien  $(M, p)$  und  $(N, q)$  bepunktete Mannigfaltigkeiten. Unter einem **Morphismenkeim**  $\varphi : (M, p) \rightarrow (N, q)$  verstehen wir eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, \varphi)$  mit  $p \in U \subseteq M$  und  $\varphi : (U, p) \rightarrow (N, q)$  einem Morphismus bepunkteter Mannigfaltigkeiten mit der Maßgabe, daß  $(U, \varphi)$  und  $(U', \varphi')$  äquivalent sind, wenn sie auf einer Umgebung  $U'' \subseteq (U \cap U')$  von  $p$  übereinstimmen. Es ist klar, wie wir Morphismenkeime zu verknüpfen haben. Wir erhalten so eine Kategorie und vereinbaren dafür die Notation

$$\mathcal{C}^1\text{-Mgf}^\kappa$$

und nennen sie die Kategorie der **Keime von Mannigfaltigkeiten**, obwohl nur die Morphismen Keime sind und die Objekte ganz gewöhnliche bepunktete Mannigfaltigkeiten.

3.3.2 (**Keime affiner Räume**). Seien  $(X, p)$  und  $(Y, q)$  bepunktete endlichdimensionale reelle affine Räume. Unter einem **Morphismenkeim**  $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  verstehen wir eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, \varphi)$  mit  $p \in U \subseteq X$  und  $\varphi : (U, p) \rightarrow (Y, q)$  einer  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung mit der Maßgabe, daß  $(U, \varphi)$  und  $(U', \varphi')$  äquivalent sind, wenn sie auf einer Umgebung  $U'' \subseteq (U \cap U')$  von  $p$  übereinstimmen. Es ist klar, wie wir Morphismenkeime zu verknüpfen haben. Wir erhalten so die Kategorie der  $\mathcal{C}^1$ -**Keime von affinen Räumen**

$$\mathcal{C}^1\text{-Aff}^\kappa$$

3.3.3 (**Tangentialraum**). Der offensichtliche Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$j : \mathcal{C}^1\text{-Aff}^\kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^1\text{-Mgf}^\kappa$$

Wir erklären nun den **Differential-Funktor**  $\text{Diff} : \mathcal{C}^1\text{-Aff}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$  durch die Vorschrift, daß er jedem bepunkteten affinen Raums  $(X, p)$  den Richtungsraum

$\vec{X}$  zuordnet und jedem Morphismenkeim  $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  das Differential  $d_p\varphi : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$  aus der Analysis [AN2] 2.3.1. Ein **Tangentialraumfunktork** ist ein Paar  $(T, \tau)$  aus einem Funktor

$$T : \mathcal{C}^1\text{-Mgf}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$$

und einer Isotransformation  $\tau : T \circ j \xrightarrow{\cong} \text{Diff}$ . Da  $j$  eine Äquivalenz ist, gibt es Tangentialraumfunktoren und sie sind eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus in der Weise, daß es für jeden weiteren Tangentialraumfunktork  $(T', \tau')$  genau eine Transformation  $\eta : T \Rightarrow T'$  gibt mit  $(\eta j) \circ \tau = \tau'$ . Der Tangentialraumfunktork verdient deshalb die Ansprache mit bestimmtem Artikel und eine Notation. Man verwendet meist die Notation  $(M, p) \mapsto T_pM$  für seinen Effekt auf Objekten. Den Effekt auf Morphismen notiere ich vorerst  $\varphi \mapsto T_p\varphi$  und erlaube mir die übliche Notation  $d_p\varphi$  erst, wenn wir uns etwas an den neuen Formalismus gewöhnt haben und klar ist, daß das nicht zu Widersprüchen führt. Man nennt

$$T_pM$$

den **Tangentialraum an  $M$  bei  $p$**  und  $T_p\varphi$  das **Differential von  $\varphi$  bei  $p$** . Die Funktorialität  $T_{\varphi(p)}\psi \circ T_p\varphi = T_p(\psi \circ \varphi)$  heißt auch in dieser Allgemeinheit die **Kettenregel**. Die Transformation  $\tau$  wird selten notiert aber oft implizit verwendet.

**3.3.4 (Differential und Jacobimatrix).** Gegeben  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  notieren wir  $\partial_1, \dots, \partial_n \in T_xU$  diejenigen Vektoren des Tangentialraums, die unter  $\tau$  und trans der Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  entsprechen. Sie bilden eine Basis des besagten Tangentialraums. Im Fall  $n = 1$  verwenden wir auch die Abkürzung  $\partial = \partial_1$  und nennen dies Element den **kanonischen Erzeuger von  $T_x\mathbb{R}$** . Ist  $\varphi : U \hookrightarrow M$  eine Karte einer Mannigfaltigkeit mit  $\varphi(x) = p$ , so notieren wir  $\partial_i^\varphi \in T_pM$  die Bilder unserer  $\partial_i$  unter dem Differential  $T_x\varphi$  der Karte. Sie bilden eine Basis des Tangentialraums  $T_pM$ . Ist ebenso  $\psi : V \hookrightarrow N$  eine Karte und  $y \in V$  und  $\psi(y) = q$  und  $f : M \rightarrow N$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Morphismus mit  $f(p) = q$ , so wird die lineare Abbildung

$$T_p f : T_pM \rightarrow T_qN$$

in den Basen  $\partial_i^\varphi$  und  $\partial_j^\psi$  gegeben durch die Jacobimatrix  $[d_p(\psi^{-1}f\varphi)]$  für die Verknüpfung geeignet eingeschränkter Abbildungen, wie man unmittelbar aus den Definitionen. folgert. In Formeln gilt also

$${}_{(\partial_j^\psi)}[T_p f]_{(\partial_i^\varphi)} = [d_p(\psi^{-1}f\varphi)]$$

**3.3.5 (Tangentialräume eingebetteter Mannigfaltigkeiten).** Analog wie in 3.3.1 erklären wir die Kategorie  $\text{Mgf}^{\mathcal{C}^\kappa}$  der **Keime eingebetteter Mannigfaltigkeiten** und erhalten Äquivalenzen

$$\mathcal{C}^1\text{-Aff}^\kappa \xrightarrow{\cong} \text{Mgf}^{\mathcal{C}^\kappa} \xrightarrow{\cong} \text{Mgf}^\kappa$$

Wir notieren sie  $j^C$  und  $i$ . Die erste Äquivalenz  $j^C$  ist hier sogar die Einbettung einer vollen Unterkategorie und in 1.4.6 hatten wir bereits einen Funktor

$$T^C : \text{Mgf}^{C^\kappa} \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$$

konstruiert, der auf der vollen Unterkategorie  $C^1\text{-Aff}^\kappa$  mit dem Differentialfunktor übereinstimmt,  $T^C \circ j^C = \text{Diff}$ . Aus dem vorhergehenden folgt, daß es genau eine Isotransformation  $\eta : T \circ i \xrightarrow{\cong} T^C$  gibt mit  $(\eta j^C) = \tau : T \xrightarrow{\cong} \text{Diff}$ . In diesem Sinne verallgemeinert unsere neue Konstruktion also unseren Tangentialraum für eingebettete Mannigfaltigkeiten aus 1.4.6. Speziell erhalten wir für jede bepunktete offene Teilmenge eines affinen Raums  $p \in U \subseteq X$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\eta : T_p U \xrightarrow{\cong} \vec{X}$$

und für jede bepunktete offene Teilmenge eines Vektorraums  $p \in U \subseteq V$  durch Nachschalten von  $\text{trans}^{-1}$  einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\text{trans}^{-1} \circ \eta : T_p U \xrightarrow{\cong} V$$

Wir nennen beide **kanonische Isomorphismen**.

**3.3.6 (Tangentialraum von Produkten).** Der Tangentialraumfunktor ist verträglich mit endlichen Produkten. Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben. Gegeben  $C^1$ -Mannigfaltigkeiten  $X, Y$  und Punkte  $x \in X$  sowie  $y \in Y$  induzieren mithin die Differentiale der Projektionen einen Vektorraumisomorphismus

$$(T_{(x,y)} \text{pr}_1, T_{(x,y)} \text{pr}_2)^\top : T_{(x,y)}(X \times Y) \xrightarrow{\cong} T_x X \times T_y Y$$

In der Notation lehne ich mich hier an die in [KAG] 2.1.17 vereinbarten Konventionen an: Vektoren aus direkten Summen werden als Spalten mit Einträgen in den Summanden aufgefaßt und der obere Index  $\top$  in obiger Formel transponiert die gegebene Zeilenmatrix von Homomorphismen zu einer Spaltenmatrix. Der behauptete Isomorphismus folgt sofort aus der expliziten Beschreibung der Produktmannigfaltigkeit durch Karten. Die inverse Abbildung kann entsprechend geschrieben werden als  $(T_x(\text{id}_X, y), T_y(x, \text{id}_Y))$ , wobei das erste  $y$  beziehungsweise das zweite  $x$  jeweils die entsprechende konstante Abbildung meinen. Formal ist weiter der Tangentialraum des einpunktigen Raums der Nullraum, aber das ist auch direkt klar. Aus der Kettenregel folgt, daß jede konstante Abbildung das Differential Null hat.

**3.3.7 (Tangentialraum für Eckfaltigkeiten).** In derselben Weise erklären wir auch den Tangentialraumfunktor für Keime von Eckfaltigkeiten

$$T : C^1\text{-Eckf}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$$

und verwenden dafür dieselbe Notation. Die Rolle von  $\mathcal{C}^1$ - $\text{Aff}^k$  lassen wir in diesem Fall der Einfachheit halber von der Kategorie  $\mathcal{C}^1\text{-}(\mathbb{R}_{\leq 0}^n)^k$  aller Keime von bepunkteten Kopien irgendwelcher  $\mathbb{R}_{\leq 0}^n$  spielen, auf der uns ein offensichtliches Analogon des Differentialfunktors zur Verfügung steht. Auch im Fall von Eckfaltigkeiten ist der Tangentialraumfunktors verträglich mit endlichen Produkten.

3.3.8. In der Literatur ist es üblich, die Begrifflichkeit der Kategorientheorie bei der Diskussion des Tangentialraums zu vermeiden und stattdessen explizite Konstruktionen für Tangentialraumfunktoren  $\mathcal{C}^1\text{-Mgf}^k \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$  anzugeben. Ich beschreibe nun zwei besonders gängige Konstruktionen dieser Art.

3.3.9 (**Tangentialraum durch Wegekeime**). Besonders beliebt ist eine Konstruktion, bei der man eine Variante  $T_p^{\text{geom}}M$  des Tangentialraums erklärt als die Menge aller Äquivalenzklassen von  $\mathcal{C}^1$ -Wegen  $\gamma : (I, 0) \rightarrow (M, p)$  mit  $I \subseteq \mathbb{R}$  einer offenen Umgebung des Ursprungs unter der Äquivalenzrelation, daß  $\gamma \sim \kappa$  gleichbedeutend sein soll zu  $(\varphi^{-1}\gamma)'(0) = (\varphi^{-1}\kappa)'(0)$  für jede Karte  $\varphi$  um  $p$ . Diese Konstruktion funktioniert allerdings nur für Mannigfaltigkeiten und nicht für Eckfaltigkeiten und es ist auch nicht unmittelbar klar, wie die fragliche Menge mit der Struktur eines reellen Vektorraums zu versehen ist. Die Isotransformation  $\tau$  zu unserem Differentialfunktors auf punktierten affinen Räumen  $(X, p)$  wird gegeben durch die Abbildungen  $\tau_X : T_p^{\text{geom}}X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$  mit  $[\gamma] \mapsto \gamma'(0)$ .

3.3.10 (**Ableitung eines Weges**). Gegeben  $\gamma : I \rightarrow M$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in eine  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit oder sogar eine  $\mathcal{C}^1$ -Eckfaltigkeit und  $t \in I$  setzen wir

$$\gamma'(t) = (T_t\gamma)(\partial) \in T_{\gamma(t)}M$$

Der Leser wird leicht einsehen, daß wir so im Fall von eingebetteten Mannigfaltigkeiten unseren Geschwindigkeitsvektor erhalten, wie er früher als Grenzwert von Differentialquotienten eingeführt wurde.

3.3.11 (**Tangentialraum durch Derivationen**). Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein  $k$ -geringter Raum und  $x \in X$  ein Punkt. Die  $k$ -Ringalgebra  $\mathcal{O}_{X,x}$  der **Keime strukturierender Funktionen bei  $x$**  ist definiert durch die Vorschrift

$$\mathcal{O}_{X,x} := \{(U, f) \mid U \text{ offene Umgebung von } x \text{ und } f \in \mathcal{O}(U) \text{ strukturierend}\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation  $\sim$  erklärt durch die Vorschrift, daß gilt  $(U, f) \sim (V, g)$  genau dann, wenn die Funktionen  $f$  und  $g$  auf einer hinreichend kleinen in  $U \cap V$  enthaltenen Umgebung  $W$  von  $x$  übereinstimmen. Für jeden Homomorphismus  $k$ -geringter Räume  $\varphi : X \rightarrow Y$  induziert das Zurückholen von Funktionen  $k$ -lineare Ringhomomorphismen

$$(\circ\varphi) : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

auf den Funktionskeimen in der Gegenrichtung. Für offene Einbettungen sind diese Homomorphismen offensichtlich Isomorphismen. Jetzt mag man für  $(M, p)$  eine reelle bepunktete  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit  $T_p^{\text{alg}}M \subset \mathcal{O}_{M,p}^*$  erklären als den Raum derjenigen Linearformen auf  $\mathcal{O}_{M,p}$ , die unter einer und jeder Karte einer Richtungsableitung entsprechen. Im Fall einer glatten, ja einer  $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit kann man besagte Linearformen  $D : \mathcal{O}_{M,p} \rightarrow \mathbb{R}$  auch alternativ dadurch charakterisieren, daß sie die Leibnizregel  $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$  erfüllen. Die Isotransformation  $\tau$  zu unserem Differentialfunktorkomplex auf punktierten affinen Räumen  $(X, p)$  wird gegeben durch Umkehrung der Isomorphismen  $\vec{X} \xrightarrow{\sim} T_p^{\text{alg}}X$ , die jedem Richtungsvektor  $\vec{v} \in \vec{X}$  die Richtungsableitung  $D_{\vec{v}}$  bei  $p$  zuordnen.

**3.3.12 (Richtungsableitung nach Tangentialvektor).** Gegeben  $(M, p)$  eine bepunktete  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit und  $v \in T_pM$  ein Tangentialvektor und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion alias reguläre Funktion erklären wir ihre **Richtungsableitung bei  $p$  in Richtung  $v$**  als die reelle Zahl

$$D_v(f) := ((T_p f)(v))/\partial$$

Wir wenden also das Differential  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$  an auf  $v$  und erhalten ein Vielfaches des kanonischen Erzeugers  $\partial \in T_{f(p)}\mathbb{R}$  und der Vorfaktor ist unsere Richtungsableitung. Allgemeiner erklären wir die **Richtungsableitung**  $D_v f$  einer  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $f : M \rightarrow X$  mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum  $X$  durch

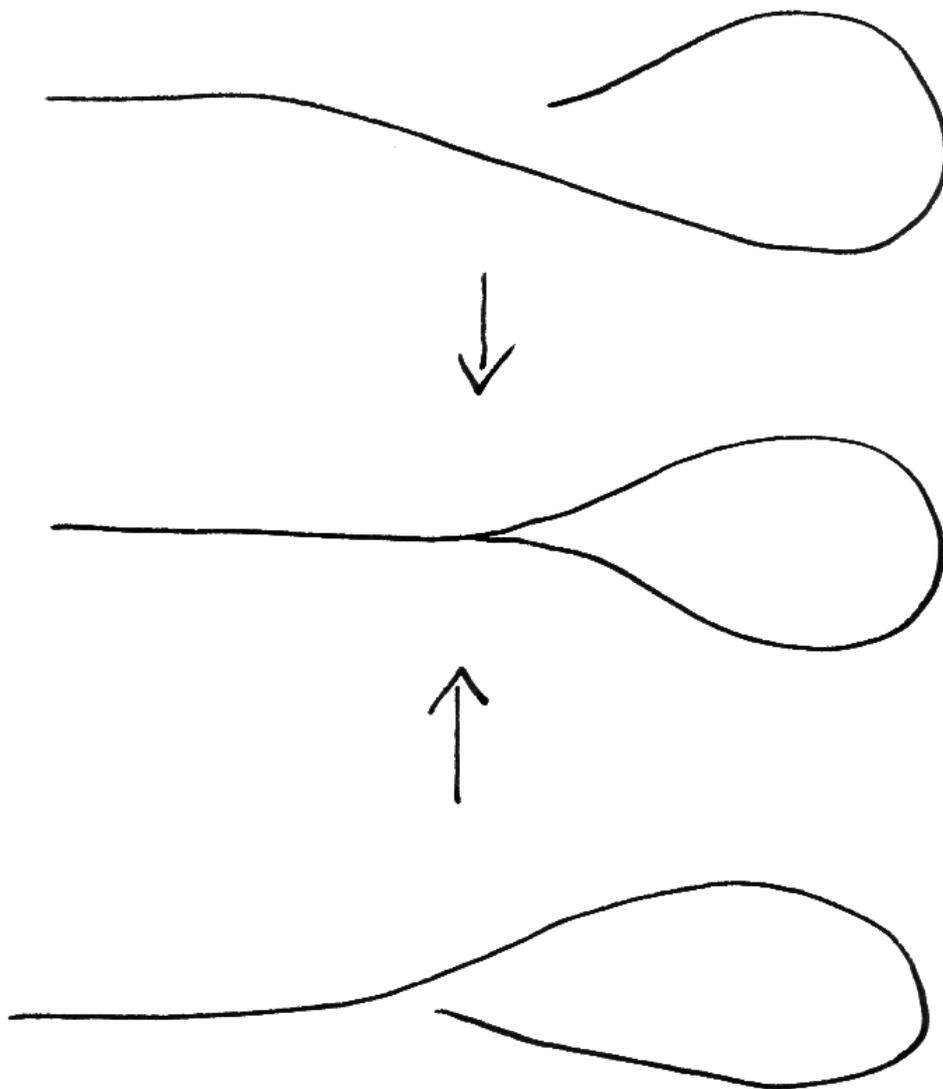
$$D_v f := \tau_X((T_p f)(v)) \in \vec{X}$$

Ist  $X = W$  bereits selbst ein Vektorraum, so halten wir oft noch implizit  $\text{trans}^{-1}$  dahinter und haben so  $D_v f \in W$ .

**3.3.13.** Im weiteren gebe ich nun die Notation  $T_p \varphi$  wieder auf und verwende stattdessen die übliche Notation  $d_p \varphi$  auch für das Differential einer Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

**Definition 3.3.14.** Eine  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung von  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten heiße **differentialinjektiv**, wenn ihr Differential an jeder Stelle injektiv ist.

**3.3.15 (Diskussion der Terminologie).** In der Differentialgeometrie nennt man eine differentialinjektive Abbildung auch eine **Immersion**. Ich möchte jedoch den Begriff der Immersion wie in der algebraischen Geometrie reservieren für Morphismen in Kategorien mit einem ausgezeichneten Mengenfunktor, die unter besagtem Mengenfunktor zu Injektionen werden. Manche Quellen, zum Beispiel [War83], verwenden den Begriff einer Untermannigfaltigkeit als Synonym für das, was wir eine „differentialinjektive Injektion“ nennen würden. Ich mag



Zwei glatte injektive Immersionen mit demselben Bild, die besagtes Bild in zwei verschiedenen Weisen mit der Struktur einer Untermannigfaltigkeit im Sinne von Warner versehen.

die in [War83] verwendete Terminologie nicht, da in dieser Terminologie ein- und dieselbe Teilmenge einer Mannigfaltigkeit verschiedene Strukturen als Untermannigfaltigkeit tragen kann.

**Beispiel 3.3.16 (Differential einer Verknüpfung beim neutralen Element).** Gegeben eine Liegruppe  $G$  mit neutralem Element  $e \in G$  und Verknüpfung  $m : G \times G \rightarrow G$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{(e,e)}(G \times G) & \xrightarrow{d_{(e,e)}m} & T_e G \\ \text{can} \downarrow \wr & & \parallel \\ T_e G \times T_e G & \xrightarrow{+} & T_e G \end{array}$$

Salopp gesprochen ist also „das Differential der Verknüpfung die Summe“. Um das zu sehen muß man nur bemerken, daß  $d_{(e,e)}m$  linear ist und daß die Inverse der Vertikale links  $(A, 0)$  abbildet auf  $\text{can}^{-1}(A, 0) = (d_e(\text{id}, e))(A)$ . Nun ist die Verknüpfung

$$G \xrightarrow{(\text{id}, e)} G \times G \xrightarrow{m} G$$

die Identität. Daraus folgt  $(d_{(e,e)}m) \text{can}^{-1}(A, 0) = A$  durch Übergang zu den Differentialen. Ebenso zeigen wir  $(d_{(e,e)}m) \text{can}^{-1}(0, B) = B$  und mittels der Linearität folgt dann wie behauptet

$$(d_{(e,e)}m) \text{can}^{-1}(A, B) = A + B$$

**Beispiel 3.3.17 (Differential des Invertierens).** Das Differential beim neutralen Element der Inversenabbildung auf einer Liegruppe ist die Multiplikation mit  $(-1)$ , in Formeln

$$(d_e \text{inv})(A) = -A$$

In der Tat ist die Verknüpfung  $G \xrightarrow{(\text{id}, \text{inv})} G \times G \xrightarrow{m} G$  konstant und ihr Differential folglich Null. Andererseits läßt es sich mit der Kettenregel 3.3.3 und unter Verwendung des vorhergehenden Beispiels 3.3.16 auch darstellen als die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc} T_e G & \xrightarrow{d_e(\text{id}, \text{inv})} & T_e(G \times G) & \xrightarrow{d_e m} & T_e G \\ \parallel & & \text{can} \downarrow & & \parallel \\ T_e G & \xrightarrow{(\text{id}, d_e \text{inv})} & T_e G \times T_e G & \xrightarrow{+} & T_e G \end{array}$$

Aus der Tatsache, daß diese Verknüpfung Null ist, folgt sofort unsere Behauptung.

**Satz 3.3.18 (Gruppenwege in Liegruppen).** Stetige Gruppenhomomorphismen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in eine Liegruppe  $G$

sind notwendig glatt, und ordnen wir jedem stetigen Gruppenhomomorphismus  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  seine Geschwindigkeit  $\gamma'(0)$  bei Null zu, so erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Stetige Gruppenhomomorphismen } \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G\} &\xrightarrow{\sim} T_e G \\ \gamma &\mapsto \gamma'(0) \end{aligned}$$

3.3.19. Der Beweis des Satzes braucht einige Vorbereitungen, genauer wird er sich als Konsequenz der präziseren Aussage 3.6.4 ergeben. Zunächst diskutieren wir nun Tangentialbündel und Vektorfelder sowie deren Flüsse auf Mannigfaltigkeiten. Dann konstruieren wir im Satz die Umkehrabbildung, indem wir jeden Tangentialvektor am neutralen Element unserer Liegruppe durch Verschiebung mittels der Linksmultiplikation mit Gruppenelementen zu einem glatten Vektorfeld auf der ganzen Gruppe ausdehnen und diejenigen Integralkurven dieser Vektorfelder betrachten, die zum Zeitpunkt Null durchs neutrale Element laufen. Wir werden in diesem Zusammenhang auch sehen, daß stetige Gruppenhomomorphismen zwischen Liegruppen immer glatt sind.

## Übungen

*Übung 3.3.20.* Man bestimme für  $p \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$  den Kern des Differentials bei  $p$  der kanonischen Projektion auf den projektiven Raum  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ .

*Übung 3.3.21.* Eine stetige Abbildung  $p : X \rightarrow Y$  heißt eine **Überlagerung**, wenn es für jeden Punkt  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $U$  gibt und eine Zerlegung  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$  ihres Urbilds in paarweise disjunkte offene Teilmengen von  $X$  derart, daß  $p$  für alle  $i$  einen Homöomorphismus  $p : V_i \xrightarrow{\sim} U$  induziert. Man zeige, daß jeder Homomorphismus von Liegruppen mit bijektivem Differential beim neutralen Element eine Überlagerung ist.

*Übung 3.3.22.* Eine glatte Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten heißt eine **Submersion**, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Man zeige, daß jede surjektive Submersion final ist. Man zeige, daß das Produkt von Submersionen eine Submersion ist.

*Übung 3.3.23 (Faserprodukt mit Submersion).* Seien  $X, Y, Z$  Mannigfaltigkeiten. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Submersion und  $g : Z \rightarrow Y$  eine glatte Abbildung. Man zeige, daß dann  $X \times_Y Z := \{(x, z) \in X \times Z \mid f(x) = g(z)\}$  eine Untermannigfaltigkeit von  $X \times Z$  ist.

*Übung 3.3.24.* Gegeben Abbildungen  $f : Z \rightarrow X$  und  $g : Z \rightarrow Y$  von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und  $z \in Z$  haben wir

$$\text{can} \circ d_z(f, g) = (d_z f, d_z g) : T_z Z \rightarrow T_x X \times T_y Y$$

*Übung 3.3.25.* Sei  $G$  eine Liegruppe. Man bestimme das Differential am neutralen Element der Abbildung  $G \rightarrow G, g \mapsto g^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 3.4 Tangentialbündel

**Lemma 3.4.1 (Das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit).** *Gegeben eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  gibt es auf der disjunkten Vereinigung*

$$TX = \bigsqcup_{x \in X} T_x X$$

*ihrer Tangentialräume genau eine Struktur als glatte  $2n$ -Mannigfaltigkeit derart, daß wir für jede Karte  $\varphi : W \hookrightarrow X$  von  $X$  eine Karte von  $TX$  erhalten, indem wir auf  $\hat{W} := W \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  die Abbildung  $\hat{\varphi} : \hat{W} \rightarrow TX$  erklären durch die Vorschrift*

$$\hat{\varphi} : (p, v) \mapsto (d_p \varphi)(v) \in T_p X \subset TX$$

3.4.2. Die so definierte glatte Mannigfaltigkeit  $TX$  wird in der Folge sogar mit der noch feineren Struktur eines „glatten Vektorraumbündels auf  $X$ “ versehen. Mit dieser Struktur heißt sie dann das **Tangentialbündel** von  $X$ . Ist  $X$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit für  $k \geq 1$ , so wird  $TX$  in derselben Weise eine  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit. Analoges gilt für Eckfaltigkeiten.

*Beweis.* Nach 3.2.24 müssen wir nur zeigen, daß (1) die Finaltopologie in Bezug auf alle unsere  $\hat{\varphi}$  Hausdorff ist und daß (2) die zugehörigen Kartenwechsel glatt sind. (1) sei dem Leser überlassen, (2) erkennt man wie folgt: Sind  $(W_\lambda, \varphi_\lambda)$  und  $(W_\mu, \varphi_\mu)$  Karten von  $X$ , so ist  $\hat{\varphi}_\lambda^{-1}(\hat{\varphi}_\mu(\hat{W}_\mu)) = W_{\lambda\mu} \times \mathbb{R}^n$  offen in  $\hat{W}_\lambda$  und die zugehörigen Kartenwechsel lassen sich in den Notationen von 3.2.24 mithilfe der Kartenwechsel  $\varphi_{\mu\lambda}$  von  $X$  beschreiben durch die Vorschrift  $\hat{\varphi}_{\mu\lambda} : (p, v) \mapsto (\varphi_{\mu\lambda}(p), (d_p \varphi_{\mu\lambda})(v))$  und sind in der Tat Morphismen von geringten Räumen.  $\square$

**Definition 3.4.3.** Sei  $X$  eine glatte Eckfaltigkeit.

1. Ein **glattes Präbündel von reellen Vektorräumen** oder kurz ein **Präbündel**  $E = (E, p) = (p : E \rightarrow X)$  auf  $X$  ist ein Datum bestehend aus einer glatten Eckfaltigkeit  $E$ , seinem **Totalraum**, einer glatten Abbildung  $p : E \rightarrow X$ , seiner **Fußpunktprojektion**, sowie einer  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur auf jeder Faser  $E_x := p^{-1}(x)$  der Fußpunktprojektion;
2. Ein **Morphismus** von einem Präbündel  $(E, p)$  in ein weiteres  $(F, q)$  ist eine glatte Abbildung  $h : E \rightarrow F$  mit  $qh = p$  derart, daß für alle  $x \in X$  die auf den Fasern der Fußpunktprojektionen induzierte Abbildung  $h : E_x \rightarrow F_x$  linear ist;
3. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  heißt der Raum  $X \times V$  mit seiner offensichtlichen Struktur als Präbündel das **triviale Bündel auf  $X$  mit Faser  $V$** ;

4. Ein  $n$ -**dimensionales reelles Vektorraumbündel auf**  $X$  ist ein Präbündel  $(E, p)$ , bei dem jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \Subset X$  besitzt derart, daß das davon auf  $U$  induzierte Präbündel  $(p : p^{-1}(U) \rightarrow U)$  isomorph ist zum trivialen  $\mathbb{R}$ -Bündel  $U \times \mathbb{R}^n$  auf  $U$ . Ein solcher Isomorphismus oder etwas allgemeiner auch ein Isomorphismus mit einem Bündel der Gestalt  $U \times V$  für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  heißt dann eine **Bündelkarte**.

Eine Abbildung  $U \times V \rightarrow E$ , die in obigem Sinne eine Bündelkarte auf ihr Bild liefert, nennen wir kurzerhand auch eine Bündelkarte. Statt von reellen glatten Vektorraumbündeln reden wir oft kürzer von **Vektorraumbündeln** oder **Vektorbündeln** oder ganz kurz **Bündeln** und machen deren Dimension nicht notwendig explizit.

*Beispiel 3.4.4 (Das Tangentialbündel).* Unser Tangentialbündel besitzt offensichtlich genau eine Struktur als glattes Vektorbündel derart, daß wir für jede Karte  $\varphi : W \hookrightarrow X$  mit  $\hat{\varphi}$  wie in 3.4.1 eine Bündelkarte erhalten durch das Bilden der Komposition

$$\varphi(W) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi^{-1} \times \text{id}} W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\hat{\varphi}} TX$$

*Ergänzung 3.4.5 (Kategoriale Charakterisierung des Tangentialbündels).* Wie für den Tangentialraum gibt es auch für das Tangentialbündel alternative Konstruktionen. Ich will im folgenden analog zu 3.3.3 in der Sprache der Kategorientheorie formulieren, worauf es wirklich ankommt. Zunächst einmal definieren wir dazu eine Kategorie

Vekb

von „Vektorbündeln auf Mannigfaltigkeiten“. Objekte sind Paare  $(X, E)$  mit  $X$  einer glatten Mannigfaltigkeit und  $E$  einem endlichdimensionalen glatten reellen Vektorbündel auf  $X$ , Morphismen  $(X, E) \rightarrow (Y, F)$  sind Paare  $(g, \tilde{g})$  mit  $g : X \rightarrow Y$  glatt und  $\tilde{g} : E \rightarrow F$  einer glatten Abbildung, mit  $\pi_F \circ \tilde{g} = g \circ \pi_E$ , die lineare Abbildungen  $\tilde{g} : E_x \rightarrow F_{g(x)}$  zwischen den Fasern der Bündelprojektionen induziert. Das Vergessen des Bündels liefert einen Funktor

$$B : \text{Vekb} \rightarrow \text{Mgf}$$

in die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. Weiter erklären wir die Kategorie  $\mathcal{C}^\infty\text{-Aff}^\circledast$  aller offenen Teilmengen von endlichdimensionalen reellen affinen Räumen mit glatten Abbildungen als Morphismen und erklären den **Differential-funktor**

$$\text{Diff} : \mathcal{C}^\infty\text{-Aff}^\circledast \rightarrow \text{Vekb}$$

dadurch, daß er jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  das Vektorbündel  $U \times \vec{X}$  auf  $U$  zuordnet und jeder glatten Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  mit  $V \subseteq Y$  den Morphismus

$$\begin{aligned} U \times \vec{X} &\rightarrow V \times \vec{Y} \\ (x, \vec{v}) &\mapsto (\varphi(x), d_x(\vec{v})) \end{aligned}$$

Unter einem **Tangentialbündelfunktor** verstehen wir nun ein Paar  $(T, \tau)$  bestehend aus einem Funktor  $T : \text{Mgf} \rightarrow \text{Vekb}$  mit  $B \circ T = \text{id}$ , der offene Einbettungen zu offenen Einbettungen macht, und einer Isotransformation

$$\tau : Tj \xrightarrow{\cong} \text{Diff}$$

zwischen der Restriktion unseres Funktors unter  $j : \mathcal{C}^\infty\text{-Aff}^\circledast \rightarrow \text{Mgf}$  und unserem Differentialfunktor. Solch ein Paar ist wieder im wesentlichen eindeutig bestimmt in derselben Weise, wie wir das für den Tangentialraumfunktor in 3.3.3 ausformuliert hatten. Die vorhergehenden Teile dieses Abschnitts haben in diesem Licht betrachtet im wesentlichen den Inhalt, ein mögliches Paar  $(T, \tau)$  explizit anzugeben.

**Definition 3.4.6.** Gegeben eine Abbildung  $p : Y \rightarrow X$  von Mengen versteht man unter einem **Schnitt** von  $p$  eine Abbildung  $s : X \rightarrow Y$  mit  $p \circ s = \text{id}_X$ . Ein glatter Schnitt eines glatten Vektorbündels  $p : E \rightarrow X$  ist insbesondere eine glatte Abbildung  $s : X \rightarrow E$  mit  $p \circ s = \text{id}_X$ . Wir notieren die Menge aller derartigen glatten Schnitte

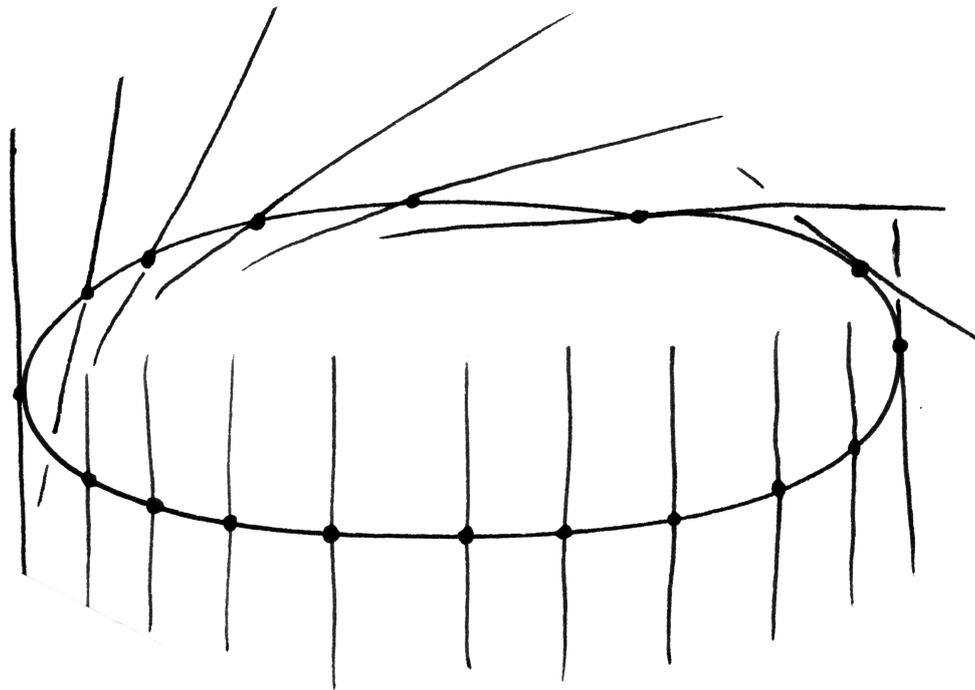
$$\mathcal{C}_X^\infty(X, E)$$

Ein Schnitt des Tangentialbündels einer Mannigfaltigkeit heißt ein **Vektorfeld** auf besagter Mannigfaltigkeit.

*Beispiel 3.4.7.* Gegeben ein glattes Vektorraumbündel  $E \rightarrow X$  erhalten wir stets einen glatten Schnitt in Gestalt des **Nullschnitts**, der jedem Punkt  $x \in X$  die Null  $0 \in E_x$  in der Faser über  $x$  zuordnet. Mithilfe von 3.4.13 identifiziert man die Vektorfelder auf offenen Teilmengen affiner Räume im Sinne von [AN2] 8.1.1 mit den Vektorfeldern im hier erklärten Sinn.

**3.4.8 (Nichttriviale Vektorbündel).** Ein Vektorraumbündel muß keineswegs global, als da heißt als Bündel auf ganz  $X$ , isomorph sein zu einem trivialen Bündel, es kann vielmehr „verdrillt“ sein: Man stelle sich etwa auf der Kreislinie  $S^1$  das „möbiusbandartige“ Geradenbündel vor, dessen Totalraum man erhält als den Bahnenraum  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$  für die Operation von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^2$  mittels der Vorschrift

$$n * (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$$



Versuch der graphischen Darstellung eines „möbiusbandartig verdrehten“ Geradenbündels auf der Kreislinie. Das entsprechend „doppelt verdrehte“ Geradenbündel wäre übrigens isomorph zum trivialen Bündel.

Auch Tangentialbündel werden im allgemeinen „verdrillt“ sein. So besagt etwa der Satz von Igel [TF] 1.4.4, daß es auf der Kugelschale  $S^2$  kein stetiges Vektorfeld ohne Nullstelle gibt. Das scheint mir auch anschaulich zumindest einleuchtend und impliziert insbesondere, daß das Tangentialbündel  $TS^2$  an die Kugelschale nicht isomorph sein kann zum trivialen Bündel  $S^2 \times \mathbb{R}^2$ . Ist das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit isomorph zum trivialen Bündel der entsprechenden Dimension, gilt also in Formeln  $TX \cong X \times \mathbb{R}^d$  mit  $d = \dim X$ , so heißt unsere Mannigfaltigkeit **parallelisierbar**.

**Satz 3.4.9 (Parallelisierung des Tangentialbündels von Liegruppen).** *Für jede Liegruppe  $G$  liefert das Verschieben von Tangentialvektoren am neutralen Element mit Linksmultiplikationen einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln*

$$\begin{aligned} G \times T_e G &\xrightarrow{\sim} TG \\ (g, B) &\mapsto (d_e(g \cdot))(B) \end{aligned}$$

Analoges gilt für das Verschieben mit Rechtsmultiplikationen.

3.4.10. Insbesondere ist also jede Liegruppe parallelisierbar und damit auch die dreidimensionale Sphäre  $S^3 \cong SU(2)$ . Außer  $S^0, S^1, S^3$  gibt es nebenbei bemerkt nur noch eine einzige weitere parallelisierbare Sphäre, nämlich die  $S^7$ . Deren Parallelisierbarkeit hängt eng mit der Existenz der sogenannten „Oktaven“ zusammen, einer reell achtdimensionalen sogenannten „Kompositionsalgebra“, vergleiche [AL] 3.12.4.

*Beweis.* Unsere Abbildung aus dem Satz ist glatt als Einschränkung der Verknüpfung  $TG \times TG \xrightarrow{\sim} T(G \times G) \rightarrow TG$  der kanonischen Identifikation mit dem Differential der Multiplikation unserer Gruppe. In der Tat bildet die erste dieser Abbildungen nach 3.3.6 ja  $(0, B) \in T_g G \times T_e G$  ab auf  $d_e(g, \text{id})(B)$ , und unter  $dm$  wird das weiter abgebildet auf  $(d_{(g,e)} m \circ d_e(g, \text{id}))(B)$ . Wegen  $m \circ (g, \text{id}) = (g \cdot)$  ist das aber nichts anderes als  $d_e(g \cdot)(B)$ . Bezeichnet  $\pi : TG \rightarrow G$  die Fußpunktprojektion unseres Bündels, so erhalten wir ähnlich eine inverse Abbildung, indem wir die Komposition

$$TG \xrightarrow{(\pi, \text{id})} G \times TG \hookrightarrow TG \times TG \rightarrow T(G \times G) \xrightarrow{d\varphi} TG$$

betrachten mit  $\varphi : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g^{-1}h$ . Unter ihr geht nämlich  $A \in T_g G$  auf  $(d_g(g^{-1} \cdot))(A) \in T_e G$ .  $\square$

## Übungen

*Übung 3.4.11.* Für jede glatte Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von glatten Mannigfaltigkeiten liefern die Differentiale eine glatte Abbildung

$$d\phi : TX \rightarrow TY$$

Ist  $\phi$  eine Einbettung im Sinne von 3.1.16, so auch  $d\phi$ .

**Übung 3.4.12 (Tangentialbündel eines Produkts).** Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten  $X, Y$  liefern die Differentiale der Projektionen des Produkts  $X \times Y$  auf die Faktoren einen Diffeomorphismus  $T(X \times Y) \xrightarrow{\sim} TX \times TY$ .

**Übung 3.4.13 (Tangentialbündel eines affinen Raums).** Gegeben  $E$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $X \subseteq E$  eine offene Teilmenge erhalten wir einen Diffeomorphismus

$$\text{can} : X \times \vec{E} \xrightarrow{\sim} TX$$

durch die Vorschrift, daß jedem Paar  $(x, v)$  dasjenige Element von  $T_x X$  zugeordnet wird, das durch die Richtungsableitung bei  $x$  in Richtung  $v$  gegeben wird, also durch  $f \mapsto (D_v f)(x)$  für alle Funktionskeime  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ . Ist  $F$  ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und  $Y \subseteq F$  eine offene Teilmenge und  $\phi : X \rightarrow Y$  glatt, so kommutiert mit den eben erklärten kanonischen Isomorphismen in den Vertikalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{d\phi} & TY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \vec{E} & \longrightarrow & Y \times \vec{F} \end{array}$$

mit der durch  $(p, v) \mapsto (\phi(p), (d_p \phi)(v))$  gegebenen unteren Horizontalen. Dabei verwenden wir sowohl das Differential  $d_p \psi : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  im Sinne der Analysis [AN2] 2.3.1 für  $\psi : U \rightarrow V$  eine Abbildung von offenen Teilmengen reeller Räume  $U \subseteq E$  und  $V \subseteq F$ , als auch das Differential  $d_x \phi : T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Y$  nach 3.3.3.

**Übung 3.4.14 (Tangentialbündel eingebetteter Mannigfaltigkeiten).** Ist  $E$  ein endlichdimensionaler reeller Raum und  $X \subseteq E$  eine Untermannigfaltigkeit und bezeichnet  $T^c X \subset X \times \vec{E}$  das Tangentialbündel, wie es speziell für Untermannigfaltigkeiten in [AN2] 10.5.2 erklärt wurde, so liefern unsere Identifikationen  $T_x^c X \xrightarrow{\sim} T_x X$  aus ?? auch einen Diffeomorphismus

$$T^c X \xrightarrow{\sim} TX$$

mit dem hier in voller Allgemeinheit für abstrakte Mannigfaltigkeiten erklärten Tangentialbündel  $TX$ .

**Übung 3.4.15.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi : U \rightarrow \text{End}(V)$  eine glatte Abbildung derart, daß der Rang von  $\varphi(x)$  unabhängig ist von  $x \in U$ . Man zeige, daß  $\bigcup_{x \in U} \{x\} \times \ker \varphi(x)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $U \times V$  ist.

*Übung 3.4.16.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest gewählt. Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $p : E \rightarrow X$  eine Abbildung. Sei weiter eine Familie von Tripeln  $(V_\alpha, U_\alpha, \varphi_\alpha)$  gegeben mit  $V_\alpha$  einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum,  $U_\alpha \subseteq X$  einer offenen Teilmenge und  $\varphi_\alpha : U_\alpha \times V_\alpha \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_\alpha)$  einer Bijektion, die mit den offensichtlichen Projektionen beider Seiten auf  $U_\alpha$  verträglich ist. Nehmen wir zusätzlich an, daß (1) für alle  $\alpha, \beta$  die Verknüpfung

$$\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\alpha \xrightarrow{\sim} (U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\beta$$

ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist und daß (2) die  $U_\alpha$  unsere Mannigfaltigkeit  $X$  überdecken, so gibt es auf  $(E, p)$  genau eine Struktur als Vektorbündel, für die alle unsere  $\varphi_\alpha$  Bündelkarten sind.

### 3.5 Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

3.5.1. Ein Vektorfeld  $A$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  hatten wir bereits in 3.4.6 erklärt als einen Schnitt des Tangentialbündels. In Formeln ist ein Vektorfeld also eine Abbildung  $A : X \rightarrow TX$  mit  $\pi \circ A = \text{id}_X$  für  $\pi : TX \rightarrow X$  die Fußpunktprojektion. Meist betrachten wir **glatte Vektorfelder**, für die also  $A$  eine glatte Abbildung ist. Wir schreiben oft  $A_x$  für den Wert des Vektorfelds  $A$  an der Stelle  $x \in X$ , so daß stets gilt  $A_x \in T_x X$ .

**Definition 3.5.2.** Gegeben ein Vektorfeld  $A$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  und eine glatte Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  erklären wir eine weitere Funktion  $(Af) : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$(Af)(x) := A_x(f_x)$$

Hier meint  $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$  den Funktionskeim von  $f$  an der Stelle  $x \in X$ . Wir sagen dann, die Funktion  $Af$  entstehe durch **Ableiten der Funktion  $f$  in Richtung des Vektorfelds  $A$** . Des weiteren können wir auch das Vektorfeld  $fA$  bilden, das durch Multiplikation des Vektorfelds  $A$  mit der Funktion  $f$  entsteht.

**Definition 3.5.3.** Gegeben eine glatte Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von Mannigfaltigkeiten und Vektorfelder  $A$  auf  $X$  und  $B$  auf  $Y$  sagen wir, unsere Vektorfelder seien  **$\phi$ -verwandt** und schreiben

$$\phi : A \rightsquigarrow B$$

wenn  $(d_x \phi)(A_x) = B_{\phi(x)} \forall x \in X$ . Ebenso sagen wir, Funktionen  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  seien  **$\phi$ -verwandt** und schreiben auch schon mal  $\phi : g \rightsquigarrow f$  wenn gilt  $g = f \circ \phi$ . In diagrammatischer Schreibweise ist die Verwandtschaft  $\phi : A \rightsquigarrow B$

von Vektorfeldern gleichbedeutend zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ TX & \xrightarrow{d\phi} & TY \end{array}$$

**3.5.4 (Anwenden verwandter Vektorfelder auf verwandte Funktionen).** Verwandte glatte Funktionen haben in Bezug auf verwandte Vektorfelder verwandte Ableitungen. Ist also in Formeln  $\phi : X \rightarrow Y$  glatt und gilt  $\phi : A \rightsquigarrow B$  für Vektorfelder und  $\phi : g \rightsquigarrow f$  für Funktionen, so folgt  $\phi : Ag \rightsquigarrow Bf$ . Anders formuliert gilt für jede glatte Funktion  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  die Identität

$$A(f \circ \phi) = (Bf) \circ \phi$$

Ebenso haben wir unter denselben Voraussetzungen auch die Verwandtschaft von Vektorfeldern  $\phi : gA \rightsquigarrow fB$ .

**3.5.5 (Vektorfelder in Koordinaten).** Will man ein Vektorfeld  $A$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  explizit angeben, so wird man einen Atlas wählen und für jede Karte  $\varphi_\lambda : W_\lambda \rightarrow X$  dasjenige Vektorfeld  $\sum_{i=1}^d a_i \partial_i$  auf  $W_\lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  hinschreiben, das  $\varphi_\lambda$ -verwandt ist zu  $A$ . Hier sind die  $a_i$  dann Funktionen  $a_i : W_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind umgekehrt Vektorfelder auf den Definitionsbereichen der Karten eines Atlas gegeben, so kommen sie in dieser Weise von einem Vektorfeld auf unserer Mannigfaltigkeit her genau dann, wenn für je zwei Karten ihre entsprechenden Einschränkungen unter dem Kartenwechsel verwandt sind.

**Beispiel 3.5.6 (Vektorfelder auf der Kreislinie).** Die Kreislinie  $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\|_2 = 1\}$  kann überdeckt werden durch die beiden Karten  $\varphi_\pm : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , deren Inverse man durch stereographische Projektion [EL] 2.5.11 von den Polen  $(0, \pm 1)$  erklärt. Nach [AN1] 5.8.20 werden sie gegeben durch

$$\varphi_\pm(x) = \left( \frac{2x}{1+x^2}, \pm \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir die Koordinaten zur Karte  $\varphi_+$  nun  $u$ . Als Kartenwechsel ergibt sich mit direkter Rechnung oder allgemeinen Erkenntnissen zu Möbiustransformationen [EL] 2.5.10 und [EL] 2.5.9 das Invertieren

$$\varphi_{+-} : x \mapsto u^{-1}$$

Ein Vektorfeld auf der Kreislinie anzugeben bedeutet damit, Funktionen  $a_-(x)$  und  $a_+(u)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  hinzuschreiben, für die gilt  $\varphi_{+-} : a_-(x)\partial_x \rightsquigarrow a_+(u)\partial_u$ . Erinnern wir [AN2] 8.2.21, so läuft das hinaus auf die Identität

$$a_-(u^{-1})(-u^2)\partial_u = a_+(u)\partial_u$$

alias  $a_+(u) = -u^2 a_-(u^{-1})$  für alle  $u \in \mathbb{R} \setminus 0$ . Ein stetiges Vektorfeld auf der Kreislinie anzugeben meint also, eine stetige Funktion  $a_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hinzuschreiben mit der Eigenschaft, daß  $-u^2 a_-(u^{-1})$  einen Grenzwert hat für  $u \rightarrow 0$ , daß also vage gesprochen  $a_-$  nicht gar zu schlimm wächst für  $u \rightarrow \infty$ .

**Beispiel 3.5.7 (Vektorfelder auf der Kugelschale).** Zur Abschreckung hier auch noch das Beispiel der Kugelschale oder Sphäre  $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|_2 = 1\}$ . Sie kann überdeckt werden durch die beiden Karten  $\varphi_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ , deren Inverse man durch stereographische Projektion [EL] 2.5.11 von den Polen  $(0, 0, \pm 1)$  erklärt. Nach [AN1] 5.8.20 werden sie gegeben durch

$$\varphi_{\pm}(x, y) = \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \pm \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

Als Kartenwechsel ergibt sich mit direkter Rechnung oder allgemeinen Erkenntnissen zu Möbiustransformationen [EL] 2.5.10 und [EL] 2.5.9 die Inversion am Einheitskreis

$$\varphi_{+-} : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir die Koordinaten zur Karte  $\varphi_+$  nun  $(u, v)$ . Ein Vektorfeld auf der Sphäre anzugeben bedeutet in diesen Koordinaten also, Funktionen  $e(u, v)$ ,  $f(u, v)$  auf  $\mathbb{R}^2$  hinzuschreiben, für die gilt  $\varphi_{+-} : a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y \rightsquigarrow e(u, v)\partial_u + f(u, v)\partial_v$ . Erinnern wir schließlich [AN2] 8.2.21, so läuft das hinaus auf die Identität

$$a(u/(u^2+v^2), v/(u^2+v^2))((v^2-u^2)\partial_u - 2uv\partial_v) + b(u/(u^2+v^2), v/(u^2+v^2))((u^2-v^2)\partial_v - 2uv\partial_u) = e(u, v)\partial_u + f(u, v)\partial_v$$

alias mit der Abkürzung  $r^2 = u^2 + v^2$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} e(u, v) &= (v^2 - u^2)a(u/r^2, v/r^2) - 2uvb(u/r^2, v/r^2) \\ f(u, v) &= (u^2 - v^2)b(u/r^2, v/r^2) - 2uva(u/r^2, v/r^2) \end{aligned}$$

für alle  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ . Ein stetiges Vektorfeld auf der Sphäre anzugeben meint also, stetige Funktionen  $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  so hinzuschreiben, daß die rechte Seite der Ausdrücke in den beiden vorhergehenden Gleichungen jeweils einen Grenzwert hat für  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ .

**Definition 3.5.8.** Ein Vektorfeld auf einer Liegruppe heißt **linksinvariant**, wenn es unter allen Linksmultiplikationen zu sich selbst verwandt ist. Analog erklärt man **rechtsinvariante** Vektorfelder. Ist  $G$  unsere Liegruppe, so ist also in Formeln ein Vektorfeld  $A : G \rightarrow TG$  linksinvariant genau dann, wenn gilt  $(g \cdot) : A \rightsquigarrow A$  für alle  $g \in G$ , und rechtsinvariant genau dann, wenn gilt  $(\cdot g) : A \rightsquigarrow A$  für alle  $g \in G$ .

*Beispiel 3.5.9.* Die linksinvarianten Vektorfelder auf der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  sind genau diejenigen Vektorfelder, die wir in unserer ursprünglichen Begrifflichkeit konstant genannt hätten, die also konstanten Abbildungen  $V \rightarrow V$  entsprechen. Ein Vektorfeld auf der Liegruppe  $\mathbb{C}^\times$  ist linksinvariant genau dann, wenn es anschaulich betrachtet invariant ist unter allen Drehstreckungen der komplexen Zahlenebene. Die linksinvarianten Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^\times$  sind genau die Vektorfelder  $cx\partial_x$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

**Satz 3.5.10 (Invariante Vektorfelder auf Liegruppen).** *Alle linksinvarianten Vektorfelder auf einer Liegruppe  $G$  sind glatt und das Auswerten beim neutralen Element liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{linksinvariante Vektorfelder} \\ G \rightarrow TG \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} T_e G$$

*Dasselbe gilt analog auch für rechtsinvariante Vektorfelder.*

3.5.11. Wir vereinbaren die Notation  $X \mapsto \dot{X}$  für die Fortsetzung von  $X \in T_e G$  zu einem linksinvarianten Vektorfeld.

*Beweis.* Wir geben die inverse Abbildung explizit an, indem wir zu  $A_e \in T_e G$  das Vektorfeld  $A : G \rightarrow TG$  bilden, das jedem  $g \in G$  den Wert des Differential an die Multiplikation  $TG \times TG \xrightarrow{\sim} T(G \times G) \rightarrow TG$  auf  $(g, A_e)$  zuordnet.  $\square$

## Übungen

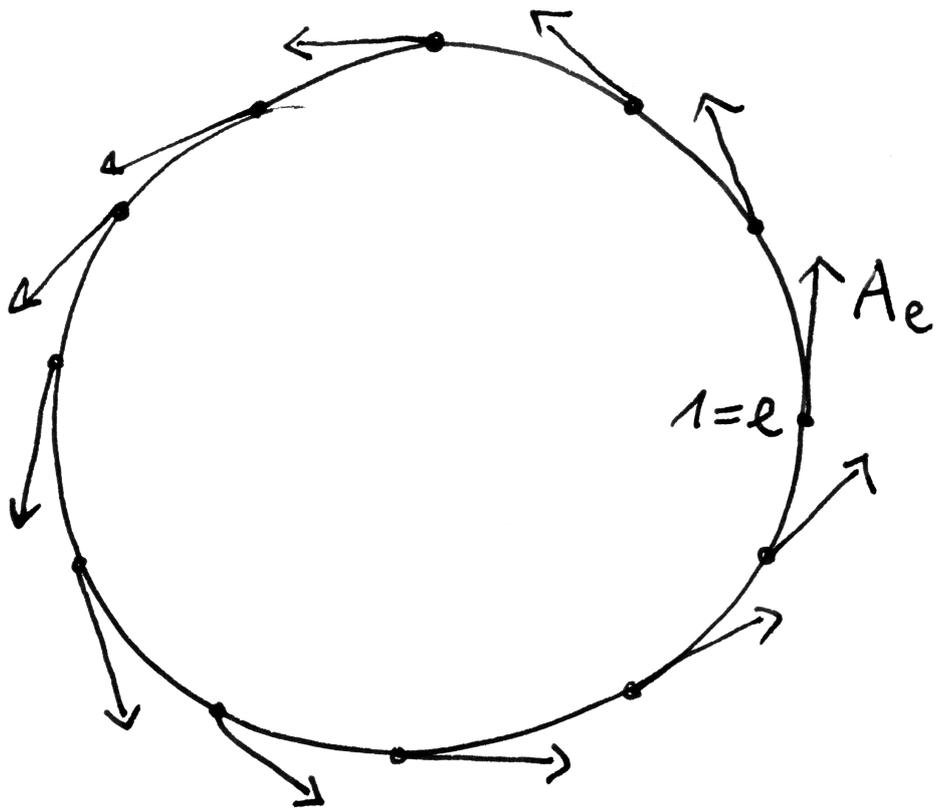
*Übung 3.5.12.* Für welche Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  ist  $f\partial_x + g\partial_y$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf  $\mathbb{C}^\times$ , wo  $x$  den Realteil und  $y$  den Imaginärteil einer komplexen Zahl bedeuten mögen?

*Übung 3.5.13.* Für welche Funktionen  $f(a, b)$  und  $g(a, b)$  ist  $f\partial_a + g\partial_b$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und Spalten und Determinante Eins, wo  $a$  und  $b$  die beiden Einträge der ersten Zeile bedeuten mögen?

## 3.6 Flußwege und Flüsse

**Definition 3.6.1.** Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $A : X \rightarrow TX$  ein Vektorfeld. Ein **Flußweg** unseres Vektorfelds ist eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow X$  von einem mehrpunktigen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $X$  mit

$$\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$



Ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Kreislinie. Alle Pfeile sind gleich lang  
gemeint. Da die Kreislinie eine kommutative Liegruppe ist, stimmen hier links-  
und rechtsinvariante Vektorfelder überein.

Ein **maximaler Flußweg** ist ein Flußweg, die nicht zu einem auf einem echt größeren reellen Intervall definierten Flußweg erweitert werden kann. Ist  $p \in X$  gegeben, so verstehen wir unter einem **Flußweg mit Anfangswert  $p$**  oder kurz einem **Flußweg zu  $p$**  einen Flußweg  $(\gamma, I)$  mit  $0 \in I$  und  $\gamma(0) = p$ .

**Satz 3.6.2 (Picard-Lindelöf auf Mannigfaltigkeiten).** *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit gibt es zu jedem Anfangswert einen größte Flußweg, und dieser hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall. Verläuft unser größter Flußweg in einem Kompaktum, so ist sein Definitionsbereich die ganze Zahlengerade.*

*Ergänzung 3.6.3.* Die weitergehenden Aussagen von [AN2] 6.4.9 übertragen sich entsprechend, aber die Übertragung ihres Beweises benötigt Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen.

*Beweis.* Das folgt ohne Schwierigkeiten in derselben Weise wie bei der Herleitung des Satzes über die globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen [AN2] 6.4.9 aus der lokalen Existenz und Eindeutigkeit [AN2] 6.4.4, wenn man beachtet, daß jeder Punkt unserer Mannigfaltigkeit ja im Bild einer Karte liegt. Beim Nachweis der Eindeutigkeit eines maximalen Flußwegs mit vorgegebenem Anfangswert benötigen wir im Übrigen zum ersten Mal die Hausdorff-Eigenschaft unserer Mannigfaltigkeiten, und zwar an der Stelle, an der wir bemerken, daß die Menge der Parameter, an denen zwei vorgegebene Flußwege mit demselben Definitionsbereich übereinstimmen, abgeschlossen ist in dem fraglichen Definitionsbereich.  $\square$

**Satz 3.6.4 (Flußwege linksinvarianter Vektorfelder).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  und darauf ein linksinvariantes Vektorfeld  $A$  ist der maximale Flußweg  $\gamma = \gamma_A$  unseres Vektorfelds mit Anfangswert  $\gamma(0) = e$  für alle Zeiten definiert und kann charakterisiert werden als der eindeutig bestimmte glatte Gruppenhomomorphismus  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  mit  $\dot{\gamma}(0) = A_e$ .*

3.6.5. Dieser Satz liefert die in 3.3.18 behauptete Klassifikation der glatten Gruppenwege in einer Liegruppe.

*Beweis.* Mit  $\gamma$  ist auch  $t \mapsto g\gamma(t)$  ein Flußweg unseres linksinvarianten Vektorfelds  $A$ , für alle  $g \in G$ . Ebenso sind auch alle „zeitverschobenen“ Flußwege wieder Flußwege, das gilt ja bei jedem zeitunabhängigen Vektorfeld. Wäre nun  $\gamma : (a, b) \rightarrow G$  der maximale Flußweg mit Anfangswert  $\gamma(0) = e$  und wäre etwa  $b \neq \infty$ , so wäre  $t \mapsto \gamma(b/2)\gamma(t - b/2)$  ebenfalls ein Flußweg, der auf  $(a + b/2, b + b/2)$  definiert wäre und auf dem gemeinsamen Definitionsbereich mit  $\gamma$  übereinstimmte. Also könnte  $\gamma$  doch nicht maximal gewesen sein, und dieser Widerspruch zeigt, daß die maximalen Flußwege linksinvarianter Vektorfelder für alle Zeiten definiert sein müssen. Dasselbe Argument zeigt dann  $\gamma(t) =$

$\gamma(s)\gamma(t-s)$  für alle reellen  $s, t$  und damit sind unsere maximalen Flußwege Gruppenhomomorphismen. Umgekehrt gilt für jeden glatten Gruppenhomomorphismus  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  die Identität  $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$  und damit  $\dot{\gamma}(t) = d_e(\gamma(t)\cdot)\dot{\gamma}(0)$ , was ja gerade bedeutet, daß  $\gamma$  ein Flußweg des linksinvarianten Vektorfelds  $A$  ist, der den Ursprung mit der Geschwindigkeit  $\dot{\gamma}(0) = A_e$  durchläuft.  $\square$

**Definition 3.6.6.** Wir definieren für jede Liegruppe  $G$  ihre **Exponentialabbildung**  $\exp : T_e G \rightarrow G$  durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \exp : T_e G &\rightarrow G \\ A &\mapsto \gamma_A(1) \end{aligned}$$

für  $\gamma_A : \mathbb{R} \rightarrow G$  den glatten Gruppenweg mit  $\dot{\gamma}_A(0) = A$ .

3.6.7. Das  $s$ -fache eines Vektorfelds hat offensichtlich als Flußwege die mit  $s$ -facher Geschwindigkeit durchlaufenen Flußwege des ursprünglichen Vektorfelds. In Formeln gilt für alle  $s \in \mathbb{R}$  also  $\gamma_{sA}(t) = \gamma_A(st)$  und damit  $\exp(sA) = \gamma_A(s)$  für alle  $s \in \mathbb{R}, A \in T_e G$ .

**Satz 3.6.8 (Eigenschaften der Exponentialabbildung für Liegruppen).** *Für jede Liegruppe  $G$  ist die Exponentialabbildung  $\exp : T_e G \rightarrow G$  glatt und ihr Differential am Ursprung entspricht unter den üblichen Identifikationen der Identität auf  $T_e G$ .*

3.6.9. Ganz präzise formuliert behauptet also unser Satz, daß die Komposition  $T_e G \xrightarrow{\sim} T_0(T_e G) \rightarrow T_e G$  der kanonischen Abbildung aus ?? mit  $d_0(\exp)$  die Identität ist. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird im Anschluß an 3.6.13 gegeben.

3.6.10. Da das Differential der Exponentialabbildung bei Null bijektiv ist, liefert  $\exp : T_e G \rightarrow G$  einen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung der Null im Tangentialraum  $T_e G$  und einer offenen Umgebung des neutralen Elements  $e$  in unserer Gruppe  $G$ .

3.6.11. Mit 1.4.5 folgt, daß die hier definierte Exponentialabbildung im Fall von Matrixliegruppen unter den entsprechenden Identifikationen mit der Exponentialabbildung für Matrizen zusammenfällt.

**Definition 3.6.12.** Ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  besitzt nach 3.6.2 zu jedem Anfangswert  $q \in X$  einen größten Flußweg  $\gamma_q : I_q \rightarrow X$ . Wir erklären seinen **Fluß** als die Abbildung

$$\Phi : (t, q) \mapsto \gamma_q(t)$$

von der Menge  $\tilde{X} = \{(t, q) \in \mathbb{R} \times X \mid t \in I_q\}$ , dem sogenannten **Definitionsbereich des Flusses**, in unsere Mannigfaltigkeit.

**Satz 3.6.13 (Flüsse von Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten).** *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit hat sein Fluß einen offenen Definitionsbereich und ist ebenfalls glatt.*

*Beweis.* Das folgt ohne Schwierigkeiten aus dem in [AN2] 6.6.2 behandelten Fall, daß unsere glatte Mannigfaltigkeit eine offene Teilmenge eines reellen affinen Raums ist.  $\square$

*Beweis von Satz 3.6.8 zu Eigenschaften der Exponentialabbildung.* Wir betrachten die Abbildung  $\mathbb{R} \times T_e G \rightarrow G$  gegeben durch  $(t, A) \mapsto \gamma_A(t)$  und zeigen, daß sie glatt ist. Dazu reicht es sicher zu zeigen, daß die Abbildung  $\mathbb{R} \times G \times T_e G \rightarrow G \times T_e G$  gegeben durch  $(t, g, A) \mapsto (g\gamma_A(t), A)$  glatt ist. Diese Abbildung ist jedoch glatt als der Fluß eines glatten Vektorfelds auf  $X = G \times T_e G$ , nämlich des Vektorfelds  $(g, A) \mapsto (d_e(g \cdot)A, 0)$ , wobei rechts die Null von  $T_A(T_e G)$  gemeint ist und wir genau genommen eigentlich die Verknüpfung unseres Vektorfelds mit den kanonischen Identifikationen  $T_{(g,A)}X \xrightarrow{\sim} T_g G \times T_A(T_e G)$  beschrieben haben. Damit wissen wir schon mal, daß unsere Exponentialabbildung glatt ist. Ihr Differential beim Ursprung von  $T_e G$  muß bis auf die üblichen Identifikationen die Identität sein, da ja für alle  $A \in T_e G$  der Weg  $t \mapsto tA$  in  $T_e G$  mit Geschwindigkeitsvektor  $A$  bei  $t = 0$  unter  $\exp$  zum Weg  $t \mapsto \exp(tA) = \gamma_A(t)$  wird, der per definitionem auch den Geschwindigkeitsvektor  $A$  bei  $t = 0$  hat.  $\square$

**Satz 3.6.14 (Homomorphismen von Liegruppen).** *Jeder stetige Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  von Liegruppen ist glatt und für sein Differential  $d\varphi$  beim neutralen Element gilt  $\exp \circ d\varphi = \varphi \circ \exp$ .*

3.6.15. Etwas ausführlicher geschrieben behauptet die Formel aus dem Satz ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{d\varphi} & T_e H \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

*Beweis.* Das wurde im Fall von Matrixliegruppen bereits in 1.4.10 gezeigt. Der Beweis im allgemeinen ist derselbe.  $\square$

**Korollar 3.6.16.** *Auf einer topologischen Gruppe gibt es höchstens eine Struktur als glatte Mannigfaltigkeit, die sie zu einer Liegruppe macht.*

*Beweis.* Gegeben zwei derartige Strukturen ist die Identität nach 3.6.14 ein Diffeomorphismus zwischen unserer Gruppe mit der einen Struktur und unserer Gruppe mit der anderen Struktur.  $\square$

**Korollar 3.6.17.** *Ein stetiger Gruppenhomomorphismus von einer zusammenhängenden Liegruppe in eine weitere Liegruppe wird bereits durch sein Differential beim neutralen Element eindeutig festgelegt.*

*Beweis.* Nach 3.6.14 und 3.6.8 wird unser Gruppenhomomorphismus durch sein Differential zumindest in einer Umgebung des neutralen Elements eindeutig festgelegt. Eine zusammenhängende Liegruppe wird aber nach [TM] 2.1.10 bereits von jeder Umgebung ihres neutralen Elements erzeugt.  $\square$

## Übungen

*Übung 3.6.18.* Verwandte Vektorfelder haben verwandte Flußwege. Ist genauer  $\phi : X \rightarrow Y$  eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten und ist  $A$  ein Vektorfeld auf  $X$  und  $B$  ein dazu unter  $\phi$  verwandtes Vektorfeld auf  $Y$ , so ist für jeden Flußweg  $\gamma$  von  $A$  auch  $\phi \circ \gamma$  ein Flußweg von  $B$ .

*Übung 3.6.19.* Man beschreibe die Exponentialabbildung der Liegruppe  $(\mathbb{R}, +)$ . Man beschreibe die Exponentialabbildung für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, aufgefaßt als Liegruppe.

*Übung 3.6.20.* In jeder Liegruppe gibt es eine Umgebung des neutralen Elements, die keine Untergruppe außer der einpunktigen Untergruppe umfaßt.

*Übung 3.6.21.* Zwei abgeschlossene zusammenhängende Untergruppen einer Liegruppe, die dieselbe Liealgebra haben, stimmen überein.

*Übung 3.6.22 (Fluß eines linksinvarianten Vektorfelds).* Man zeige, daß der Fluß eines linksinvarianten Vektorfelds  $X$  auf einer Liegruppe  $G$  durch die Formel  $X^t g = g \exp(tX_e)$  beschrieben werden kann. Man beschreibe in ähnlicher Weise auch den Fluß eines rechtsinvarianten Vektorfelds.

*Übung 3.6.23 (Liealgebren von Schnitten).* Gegeben eine Liegruppe  $G$  mit einer abgeschlossenen Untergruppe  $H$  gilt  $\text{Lie } H = \{X \in \text{Lie } G \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset H\}$ . Gegeben abgeschlossene Untergruppen einer Liegruppe  $H, K \triangleleft G$  folgere man die Formel

$$\text{Lie}(H \cap K) = (\text{Lie } H) \cap (\text{Lie } K)$$

In derselben Weise folgt sogar für eine beliebige Familie  $(G_i)_{i \in I}$  von abgeschlossenen Untergruppen einer Liegruppe

$$\text{Lie} \bigcap_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \in I} \text{Lie } G_i$$

*Übung 3.6.24 (Liealgebra einer Standgruppe).* Gegeben eine glatte Operation  $G \times X \rightarrow X$  einer Liegruppe  $G$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  und  $x \in X$  ein Punkt und  $G_x$  seine Standgruppe gilt  $T_e G_x = \ker d_e(\cdot x)$  für  $(\cdot x)$  die Abbildung

$G \rightarrow X, g \mapsto gx$ . Hinweis: Man überlege sich, daß gegeben  $A \in T_e G$  die Kurve  $t \mapsto \exp(tA)x$  entweder für alle  $t$  die Geschwindigkeit Null hat oder für kein  $t$ .

**Übung 3.6.25 (Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten).** Gegeben  $G$  eine Liegruppe und  $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$  ein glatter Automorphismus von  $G$  ist die Liealgebra der Gruppe der Fixpunkte  $G^\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = g\}$  von  $\varphi$  genau die Menge der Fixpunkte des Differential  $d_e \varphi$  in der Liealgebra, in Formeln

$$\text{Lie}(G^\varphi) = (\text{Lie } G)^{d_e \varphi}$$

### 3.7 Lieklammer von Vektorfeldern

**Lemma 3.7.1.** Gegeben differenzierbare Vektorfelder  $A, B : U \rightarrow \vec{X}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$  gibt es genau ein Vektorfeld  $[A, B] : U \rightarrow \vec{X}$  mit der Eigenschaft

$$[A, B]f = A(Bf) - B(Af) \quad \forall f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

3.7.2. Dieses Feld  $[A, B]$  heißt die **Lie-Klammer** oder der **Kommutator** der Felder  $A$  und  $B$ . Seine anschauliche Bedeutung wird in 3.7.8 und 3.7.13 diskutiert. Differenzierbarkeit ist im Sinne von [AN2] 2.3.1 gemeint. Der folgende Beweis wird zeigen, daß die fragliche Gleichung sogar für alle  $C^2$ -Funktionen  $f$  gilt.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $X = \mathbb{R}^n$  annehmen. Unsere beiden Felder haben dann die Gestalt

$$\begin{aligned} A &= a_1 \partial_1 + \dots + a_n \partial_n \\ B &= b_1 \partial_1 + \dots + b_n \partial_n \end{aligned}$$

mit  $a_i, b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und wir finden

$$\begin{aligned} ABf &= \sum a_i \partial_i \sum b_j \partial_j f = \sum a_i (\partial_i b_j) \partial_j f + a_i b_j \partial_i \partial_j f \\ BAf &= \sum b_j \partial_j \sum a_i \partial_i f = \sum b_j (\partial_j a_i) \partial_i f + b_j a_i \partial_j \partial_i f \end{aligned}$$

und damit schließlich  $ABf - BAf = Cf$  für

$$C = \sum_j \left( \sum_i a_i (\partial_i b_j) - b_i (\partial_i a_j) \right) \partial_j$$

Damit haben wir gleichzeitig sogar eine explizite Formel für den Kommutator zweier Vektorfelder auf  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  erhalten.  $\square$

**Lemma 3.7.3.** *Gegeben glatte Vektorfelder  $A, B : X \rightarrow TX$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  gibt es genau ein glattes Vektorfeld  $[A, B] : X \rightarrow TX$  mit der Eigenschaft*

$$[A, B]f = A(Bf) - B(Af) \quad \forall f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$$

*Beweis.* Das folgt leicht aus dem in 3.7.1 behandelten Fall von Vektorfeldern auf offenen Teilmengen affiner Räume und der in 3.5.5 besprochenen Darstellung von Vektorfeldern in Karten.  $\square$

**Definition 3.7.4.** Das Feld  $[A, B]$  aus Lemma 3.7.3 heißt die **Lieklammer** oder der **Kommutator** der Felder  $A$  und  $B$ . Die anschauliche Bedeutung dieser Konstruktion wird in 3.7.8 erklärt.

3.7.5. Der reelle Vektorraum aller glatten Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit wird mit der Lieklammer aus der vorhergehenden Definition zu einer Liealgebra im Sinne von 1.3.6, genauer zu einer Unter-Liealgebra der Liealgebra aller Endomorphismen des Vektorraums der glatten Funktionen auf unserer Mannigfaltigkeit.

3.7.6 (**Spezielle höhere Ableitungen**). Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $X$ , ein mehrpunktiges Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , eine  $C^2$ -Abbildung  $\gamma : I \rightarrow X$  und ein Punkt  $t \in I$  mit  $\gamma'(t) = 0$  und  $\gamma(t) = x$  können wir einen Tangentialvektor

$$\gamma''(t) \in T_x X$$

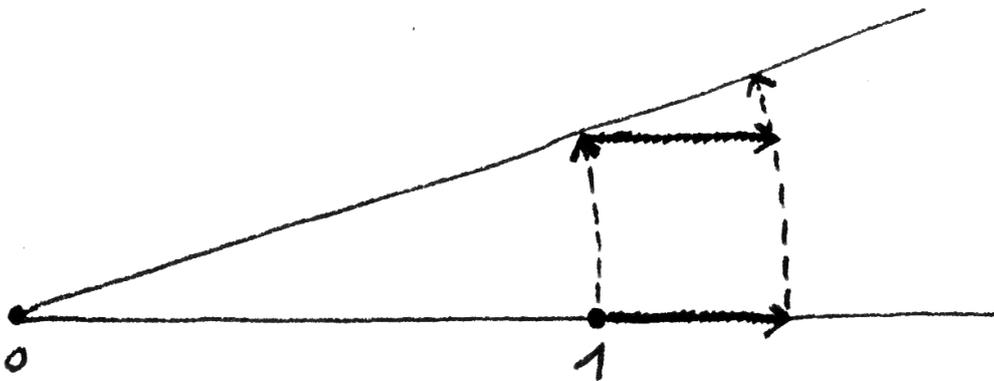
erklären durch die Vorschrift  $f \mapsto (f \circ \gamma)''(t)$  für alle Funktionskeime  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ . Diese Linearform entspricht in der Tat unter jeder Karte einer Richtungsableitung, wie man aus Satz [AN2] 3.3.6 über das Rechnen mit Approximationen unschwer folgert. Ist zusätzlich  $\varphi : X \rightarrow Y$  glatt, so gilt offensichtlich

$$d_x \varphi : \gamma''(t) \mapsto (\varphi \circ \gamma)''(t)$$

Im Fall einer eingebetteten Mannigfaltigkeit  $X \subset E$  in einem endlichdimensionalen affinen Raum  $E$  entspricht unsere Linearform schlicht der Richtungsableitung in Richtung  $\gamma''(t)$  und  $\gamma''(t)$  kann berechnet werden als der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h^2} (\gamma(t+h) - \gamma(t))$$

Wir erlauben uns diese Notation manchmal auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten, obwohl sie dort eigentlich sinnlos ist, denn die Differenz zweier Punkte kann man in dieser Allgemeinheit partout nicht bilden.



In der Situation und den Notationen von [AN2] 8.2.20 finden wir  $[\partial_x, \partial_\vartheta] = [\partial_x, -y\partial_x + x\partial_y] = \partial_y$ . Die zugehörigen Flüsse sind Verschiebung in  $x$ -Richtung und Rotation um den Ursprung. Setzen wir genauer  $A = \partial_x$  und  $B = \partial_\vartheta$ , gilt  $A^t(p_1, p_2) = (p_1 + t, p_2)$  und  $B^t(p_1, p_2) = ((\cos t)p_1 - (\sin t)p_2, (\sin t)p_1 + (\cos t)p_2)$ . Mit diesen Formeln ist der Kommutator der Flüsse schnell berechnet, und das Ergebnis scheint mir auch der Anschauung gut zugänglich zu sein.

3.7.7. Gegeben ein glattes Vektorfeld  $A$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  schreiben wir im folgenden

$$A^t q$$

für die Stelle  $A^t q \in M$ , an der der Punkt  $q$  landet, wenn er sich für die Zeitspanne  $t$  mit dem Fluß des Vektorfeldes  $A$  treiben läßt.

**Proposition 3.7.8 (Anschauliche Bedeutung der Lieklammer).** *Gegeben glatte Vektorfelder  $A, B$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  kann ihre Lieklammer an jeder Stelle  $p \in M$  mithilfe einer höheren Ableitung im Sinne von 3.7.6 beschrieben werden durch die Gleichung*

$$[A, B]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (B^{-t} A^{-t} B^t A^t p - p)$$

3.7.9. Anschaulich gesprochen mißt die Lieklammer zweier Vektorfelder im Lichte dieser Proposition, inwieweit die zugehörigen Flüsse vertauschen oder lateinisch „kommutieren“, als da heißt, welchen Unterschied es macht, ob sich ein gegebener Punkt für ein festes kleines Zeitintervall erst mit dem einen und dann mit dem anderen Vektorfeld treiben läßt oder umgekehrt. Ein alternativer Beweis der Proposition unter Verwendung der Lie-Ableitung wird in ?? diskutiert.

*Beweis.* Wir setzen  $\Phi(x, y, z, w) = B^{-x} A^{-y} B^z A^w p$  und betrachten erst mal den Fall einer offenen Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Die partiellen Ableitungen von  $\Phi$  am Ursprung ergeben sich dann zu  $\Phi_x = -B_p, \Phi_y = -A_p, \Phi_z = B_p, \Phi_w = A_p$ . Ich kann nur hoffen, daß die Bedeutung des unteren Index mal als partielle Ableitung und dann wieder als Auswerten eines Vektorfeldes an einer Stelle den Leser nicht allzusehr verwirrt. Jetzt folgt für  $\gamma(t) := \Phi(t, t, t, t)$  sofort  $\gamma'(0) = 0$ . Durch Rechnung in einer Karte um  $p$  folgt dasselbe auch für eine beliebige Mannigfaltigkeit. Damit ist insbesondere die höhere Ableitung  $\gamma''(0)$  nach 3.7.6 auch für eine beliebige Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Um sie zu berechnen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit wieder annehmen, daß wir eine offene Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  vor uns haben. Wir können also unsere Erkenntnisse [AN2] 3.3.6 über das Rechnen mit Approximationen verwenden. Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $\Phi$  am Ursprung erhalten wir wegen  $\Phi(x, 0, z, 0) = \Phi(x - z, 0, 0, 0) = \Phi(0, 0, z - x, 0)$  sofort  $\Phi_{xx} = -\Phi_{xz} = -\Phi_{zx} = \Phi_{zz}$  und ebenso  $\Phi_{yy} = -\Phi_{yw} = -\Phi_{wy} = \Phi_{ww}$ . Damit kürzt sich der Einfluß dieser Terme auf  $\gamma''(0)$  weg. Weiter haben wir per definitionem  $\Phi_z(0, 0, 0, w) = B(A^w p)$ , wobei wir den Auswertungspunkt des Vektorfeldes  $B$  diesmal in Klammern dahinterschreiben, um Subindizes zu vermeiden. Nun ist  $w \mapsto A^w p$  ein Weg durch  $p$  mit Geschwindigkeit  $A_p$  bei  $w = 0$ . Setzen wir  $B = \sum b_i \partial_i$  und  $A = \sum a_j \partial_j$

mit glatten reellwertigen Funktionen  $b_i, a_j$ , so ergibt sich für  $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$  folglich

$$\Phi_{xy}^i = -\Phi_{xw}^i = \Phi_{zw}^i = A_p(b_i) = \sum_j a_j(p) \cdot (\partial_j b_i)(p)$$

und mit einer ähnlichen Rechnung

$$\Phi_{yz}^i = -B_p(a_i) = \sum_j b_j(p) \cdot (\partial_j a_i)(p)$$

Hier muß ich wieder hoffen, daß die inkonsistente Notation  $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$  mit oberen Indizes für die Koordinaten den Leser nicht allzusehr verwirrt. Die unteren Indexplätze sind leider bereits für die Notation partieller Ableitungen vergeben. Nach unseren Formeln für das Rechnen mit Approximationen [AN2] 3.3.6 ist also  $\gamma''(0)/2$  der Vektor des  $\mathbb{R}^n$  mit den Einträgen  $A_p(b_i) - B_p(a_i)$ , und diese Beschreibung stimmt mit unserer Beschreibung der Lieklammer in Koordinaten aus dem Beweis von 3.7.1 überein.  $\square$

**Proposition 3.7.10 (über kommutierende Vektorfelder).** *Zwei glatte Vektorfelder  $A, B$  auf einer Mannigfaltigkeit kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse lokal kommutieren, wenn es also in Formeln für jeden Punkt  $p \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit*

$$A^t B^s p = B^s A^t p \quad \forall s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

3.7.11. Diese Proposition sagt insbesondere: Wenn die Flüsse zweier glatter Vektorfelder an jeder Stelle „kommutieren bis auf einen Fehler von mindestens dritter Ordnung“ in dem Sinne, daß der Grenzwert in 3.7.8 verschwindet, so kommutieren sie bereits ohne jeglichen Fehler.

*Beweis.* Kommutieren die Flüsse, so auch die Vektorfelder nach 3.7.8. Kommutieren umgekehrt die Vektorfelder und hat das erste Feld bei  $p$  keine Nullstelle, so wählen wir mit [AN2] 6.6.6 lokale Koordinaten derart, daß das erste Vektorfeld gerade  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  wird. Dann hat das zweite Vektorfeld die Gestalt

$$a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

wobei  $a_2, \dots, a_n$  konstant sind in  $x_1$ . Der Fluß des zweiten Feldes ist also invariant unter Verschiebung in die  $x_1$ -Richtung, d.h. unter dem Fluß des ersten Feldes, und die Behauptung folgt. Verschwinden beide Felder bei  $p$ , ist die Behauptung eh klar.  $\square$

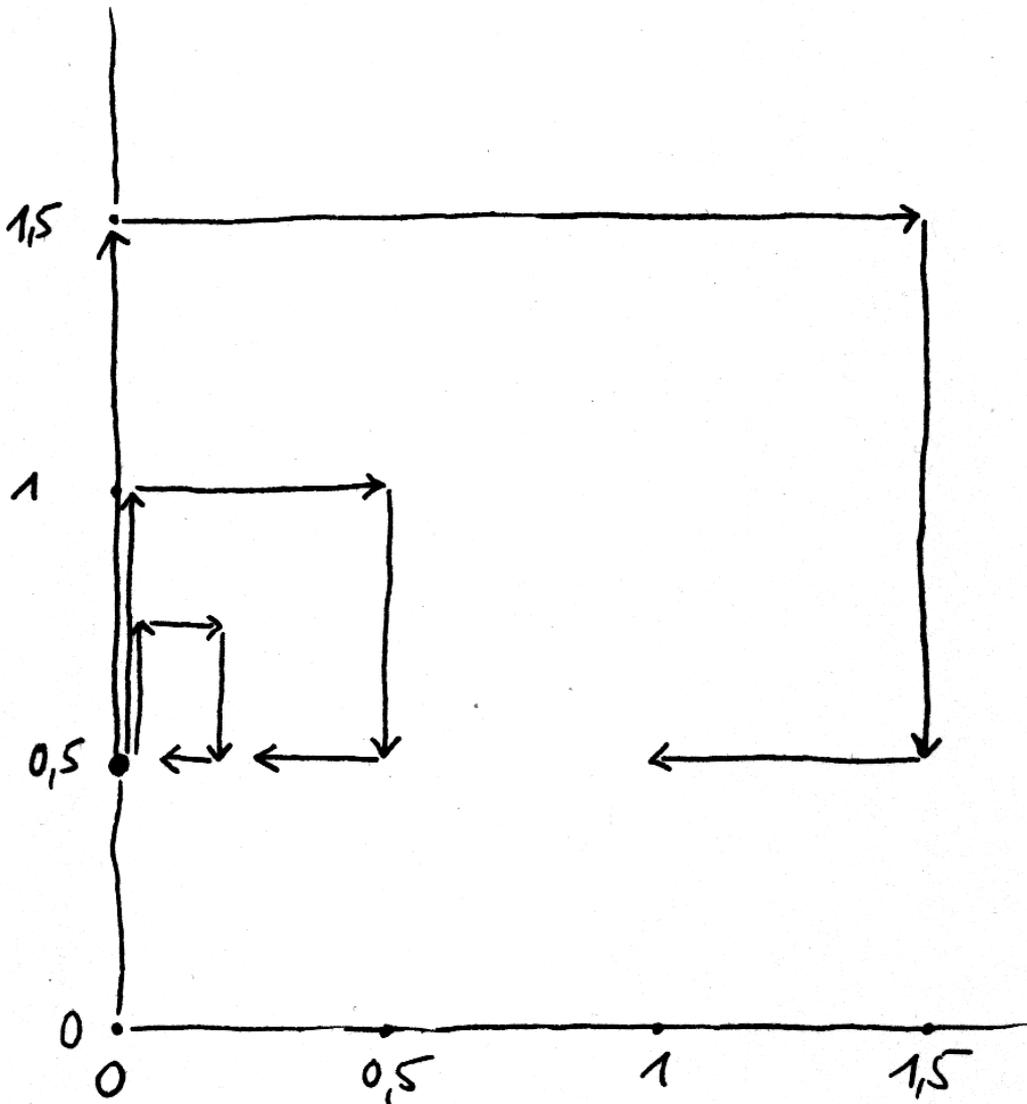


Illustration zur Formel  $[\partial_y, y\partial_x] = \partial_x$ . Gezeichnet ist das Bild von  $(0, 1/2)$  unter den Flüssen dieser Felder für Zeiten 1,  $1/2$  und  $1/4$ , und zwar „erst mit  $\partial_y$ , dann mit  $y\partial_x$ , dann mit  $-\partial_y$ , dann mit  $-y\partial_x$ “. Man sieht zumindest qualitativ, wie der Abstand des Endpunkts vom Ausgangspunkt mit der Zeit von zweiter Ordnung klein wird, und daß der Differenzvektor geteilt durch das Quadrat der „Zeit“ gegen den Kommutator alias die Lie-Klammer  $\partial_x$  strebt.

## Übungen

*Übung 3.7.12 (Verträglichkeit von Verwandtschaft und Lieklammer).* Verwandte Vektorfelder haben verwandte Lieklammern. Sind genauer und in Formeln  $X$  und  $Y$  Mannigfaltigkeiten und ist  $\phi : U \rightarrow V$  eine glatte Abbildung und sind  $A, B$  glatte Vektorfelder auf  $U$  und  $\tilde{A}, \tilde{B}$  glatte Vektorfelder auf  $V$ , so gilt

$$(\phi : A \rightsquigarrow \tilde{A} \text{ und } \phi : B \rightsquigarrow \tilde{B}) \quad \Rightarrow \quad \phi : [A, B] \rightsquigarrow [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

*Übung 3.7.13 (Lieklammer durch Vergleich von Flüssen).* Sind  $A, B$  glatte Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge  $U$  eines endlichdimensionalen reellen Raums  $X$ , so gelten im Richtungsraum  $\vec{X}$  für alle  $p \in U$  die Gleichungen

$$[A, B]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (B^t A^t p - A^t B^t p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (A^{-t} B^t A^t p - B^t p)$$

*Übung 3.7.14.* Gegeben glatte paarweise kommutierende Vektorfelder, die an einer gegebenen Stelle linear unabhängig sind, finden wir stets lokale Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  um diese Stelle, in der unsere Vektorfelder die Gestalt  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}$  haben.

## 4 Liegruppen und Liealgebren

### 4.1 Lieklammer und adjungierte Darstellung

4.1.1. Die linksinvarianten Vektorfelder auf einer Liegruppe bilden wegen der Verträglichkeit von Lieklammern mit Verwandtschaft 3.7.12 einen unter der Lieklammer stabilen Teilraum im Raum aller glatten Vektorfelder. Dasselbe gilt für die rechtsinvarianten Vektorfelder.

**Definition 4.1.2.** Gegeben eine Liegruppe  $G$  versehen wir den Tangentialraum im neutralen Element  $T_e G$  mit derjenigen Struktur einer Liealgebra, für die das Fortsetzen zu einem linksinvarianten Vektorfeld ein Liealgebrenhomomorphismus in die Liealgebra der glatten Vektorfelder auf  $G$  ist. Den Raum  $T_e G$  mit dieser Struktur einer Liealgebra nennen wir die **Liealgebra der Liegruppe  $G$**  und notieren ihn

$$\text{Lie } G$$

4.1.3. Daß wir hier die linksinvarianten Vektorfelder bevorzugen, hängt damit zusammen, daß wir auch die allgemeinen linearen Gruppen  $GL(V)$  und die Endomorphismenringe  $\text{End } V$  stets in der Weise definieren, daß sie von links auf  $V$  operieren. Unsere Konventionen passen dann in der in 4.1.4 erklärten Weise so zusammen, daß dem Kommutator von linksinvarianten Vektorfeldern der Kommutator von Endomorphismen entspricht. Die Beziehung zur entsprechenden Konstruktion mit rechtsinvarianten Vektorfeldern klärt 4.1.18.

**Satz 4.1.4 (Die Lieklammer der allgemeinen linearen Gruppe).** *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  ist die durch  $\text{trans}^{-1}$  gegebene kanonische Identifikation  $T_e GL(V) \xrightarrow{\sim} \text{End } V$  ein Isomorphismus von Liealgebren*

$$\text{Lie}(GL(V)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(V)$$

für die Liealgebrenstruktur „durch den Kommutator der linksinvariant fortgesetzten Vektorfelder“ links und die Liealgebrenstruktur „durch den Kommutator im Matrizenring“ rechts.

*Beweis.* Für die Einheitsmatrix verwenden wir die beiden Notationen  $e = I$  je nachdem, ob wir sie eher als einen Punkt oder eher als eine Matrix auffassen. Für jede von Null verschiedene Linearform  $\mu : V \rightarrow k$  liefert die sogenannte Matrixkoeffizientenabbildung eine Einbettung  $c = c_\mu : V \hookrightarrow C^\infty(GL(V), \mathbb{R})$  durch  $c_\mu(v) := c_{\mu,v}$  mit  $c_{\mu,v}(x) := \mu(xv)$ . Die Vorschrift  $(v, \mu) \mapsto c_{\mu,v}$  ist dann ein Homomorphismus

$$V \boxtimes V^* \rightarrow C^\infty(GL(V), \mathbb{R})$$

von Darstellungen von  $G \times G^{\text{opp}}$  für  $G = \text{GL}(V)$ . Gegeben  $X \in T_e \text{GL}(V)$  notieren wir  $\bar{X} \in \mathfrak{gl}(V)$  sein Urbild unter der kanonischen Identifikation  $\text{trans} : \mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\sim} T_e \text{GL}(V)$  und  $\dot{X}$  seine linksinvariante Fortsetzung. Gegeben  $f \in C^\infty(\text{GL}(V), \mathbb{R})$  haben wir einerseits per definitionem

$$X(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(I + t\bar{X})$$

Speziell ergibt sich für unsere Matrixkoeffizienten  $X(c_{\mu,v}) = \mu(\bar{X}v)$ . Andererseits gilt für die linksreguläre Darstellung alias die Wirkung von  $G^{\text{opp}}$  die Formel  $g^\circ c_{\mu,v} = c_{g^\circ \mu,v}$  und wir folgern

$$(\dot{X}c_{\mu,v})(g) = (g^\circ(\dot{X}c_{\mu,v}))(e) = (\dot{X}(g^\circ c_{\mu,v}))(e) = X(c_{g^\circ \mu,v}) = c_{\mu,\bar{X}v}(g)$$

alias  $\dot{X}c_{\mu,v} = c_{\mu,\bar{X}v}$  alias  $\dot{X}c(v) = c(\bar{X}v)$  alias  $\dot{X}c = c\bar{X}$ . Es folgt  $[\dot{X}, \dot{Y}]c = c[\bar{X}, \bar{Y}]$  und für das  $Z \in T_e \text{GL}(V)$  mit  $\dot{Z} = [\dot{X}, \dot{Y}]$  gilt folglich

$$c\bar{Z} = \dot{Z}c = [\dot{X}, \dot{Y}]c = c[\bar{X}, \bar{Y}]$$

Wegen der Injektivität von  $c$  folgt schließlich  $\bar{Z} = [\bar{X}, \bar{Y}]$  in  $\mathfrak{gl}(V)$ . □

**Satz 4.1.5.** *Das Differential beim neutralen Element eines stetigen Homomorphismus von Liegruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  ist ein Homomorphismus von Liealgebren*

$$d_e \varphi : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } H$$

4.1.6. Wir kürzen diesen Homomorphismus oft zu  $d_e \varphi = d\varphi$  ab.

*Beweis.* Der größte Teil dieses Satzes wurde bereits in 3.6.14 gezeigt. Offen ist nur noch, daß das fragliche Differential mit dem Kommutator verträglich ist. Man sieht jedoch leicht ein, daß das linksinvariante Vektorfeld zu  $A \in T_e G$  unter  $\varphi$  verwandt ist zum linksinvarianten Vektorfeld zu  $(d_e \varphi)(A) \in T_e H$  auf  $H$ . Die Behauptung folgt nun, da das Bilden des Kommutators nach 3.7.12 Verwandtschaft respektiert. □

4.1.7. Die Exponentialabbildung einer Liegruppe  $G$  schreiben wir von nun an meist  $\exp : \text{Lie } G \rightarrow G$  und unser kommutatives Diagramm aus 3.6.15 erhält damit die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G & \xrightarrow{d\varphi} & \text{Lie } H \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

4.1.8. Gegeben ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und eine Liegruppe  $G$  und ein stetiger Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  notieren wir die Verknüpfung  $d_e\rho : T_eG \rightarrow T_e\mathrm{GL}(V)$  mit der kanonischen Identifikation  $T_e\mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End} V = \mathfrak{gl}(V)$  auch

$$d\rho = d_e\rho : \mathrm{Lie} G \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Nach 4.1.5 und 4.1.4 ist diese Abbildung auch ein Homomorphismus von Liealgebren. Wir nennen ihn das **Differential der Darstellung**  $\rho$ .

4.1.9. Gegeben eine Gruppe  $G$  definiert jedes Element  $x \in G$  einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{int} x : G &\rightarrow G \\ y &\mapsto xyx^{-1} \end{aligned}$$

Er heißt die **Konjugation mit  $x$**  oder auch der durch  $x$  definierte **innere Automorphismus**, auf Englisch **interior automorphism**, daher die Notation. Mehr dazu findet man in [LA2] 5.3.1. Ist  $G$  eine Liegruppe, so ist  $\mathrm{int} x$  für jedes  $x \in G$  eine glatte Abbildung  $G \rightarrow G$ .

**Lemma 4.1.10 (Adjungierte Darstellung).** *Ist  $G$  eine Liegruppe und ordnen wir jedem Gruppenelement  $x \in G$  das Differential am neutralen Element der Konjugation mit  $x$  zu und setzen  $\mathrm{Ad}(x) := d_e(\mathrm{int} x) : T_eG \rightarrow T_eG$ , so erhalten wir einen Homomorphismus von Liegruppen*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\mapsto \mathrm{Aut}(T_eG) \\ x &\mapsto \mathrm{Ad} x \end{aligned}$$

Ist weiter  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Liegruppen, so kommutiert für alle  $x \in G$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{d_e\varphi} & T_eH \\ \mathrm{Ad} x \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ad} \varphi(x) \\ T_eG & \xrightarrow{d_e\varphi} & T_eH \end{array}$$

*Beispiel 4.1.11.* Für  $G = \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$  oder allgemeiner  $G = \mathrm{Aut} V$  mit  $V$  einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist  $\mathrm{int} x$  die Einschränkung einer linearen Abbildung auf  $\mathrm{Mat}(n; \mathbb{K})$  beziehungsweise  $\mathrm{End} V$ , die durch dieselbe Formel gegeben wird. Das Differential einer linearen Abbildung ist aber an jeder Stelle schlicht die Abbildung selber, unter der kanonischen Identifikation des Tangentialraums mit dem Raum selber, so daß wir erhalten

$$(\mathrm{Ad} x)(A) = xAx^{-1}$$

4.1.12. Vermittels des Differential der Konjugation  $\text{Ad}$  wird nach 4.1.10 also der Tangentialraum einer Liegruppe beim neutralen Element eine Darstellung unserer Liegruppe. Diese Darstellung heißt die **adjungierte Darstellung** unserer Liegruppe, und diese Terminologie motiviert auch erst recht eigentlich die Notation  $\text{Ad}$ .

*Beweis.* Zunächst einmal zeigen wir, daß  $\text{Ad}$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Nun gilt aber offensichtlich  $\text{int}(xz) = \text{int}(x) \circ \text{int}(z)$  und nach der Kettenregel folgt daraus  $d_e \text{int}(xz) = d_e(\text{int } x) \circ d_e(\text{int } z)$  alias in unserer Notation  $\text{Ad}(xz) = \text{Ad}(x) \circ \text{Ad}(z)$  für alle  $x, z \in G$ . Dann zeigen wir, daß  $\text{Ad}$  eine glatte Abbildung ist. Dazu gehen wir aus von der glatten Abbildung  $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xyx^{-1}$ , die nach 3.4.11 eine glatte Abbildung auf den Tangentialbündeln  $T(G \times G) \rightarrow TG$  liefert. Mit einigen kanonischen Identifikationen und Einbettungen liefert das ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} G \times TG & \hookrightarrow & TG \times TG & \xrightarrow{\sim} & T(G \times G) & \longrightarrow & TG \\ \uparrow & & & & & & \uparrow \\ G \times T_e G & \longrightarrow & & & & & T_e G \end{array}$$

dessen untere Zeile  $(x, v) \mapsto (\text{Ad } x)(v)$  dann auch eine glatte Abbildung sein muß. Das zeigt, daß  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } T_e G$  glatt ist. Das kommutative Diagramm im letzten Teil unseres Lemmas ergibt sich schließlich, indem man im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \text{int } x \downarrow & & \downarrow \text{int } \varphi(x) \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

zu den Differentialen an den neutralen Elementen übergeht. □

**Definition 4.1.13.** Das Differential im Sinne von 4.1.8 der adjungierten Darstellung  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(T_e G)$  wird notiert als

$$\text{ad} := d_e \text{Ad} : \text{Lie } G \rightarrow \mathfrak{gl}(T_e G)$$

*Beispiel 4.1.14 (Adjungierte Darstellung der  $\text{GL}(n; \mathbb{K})$ ).* Im Fall der Gruppen  $G = \text{GL}(n; \mathbb{K})$  oder allgemeiner der Automorphismengruppen  $G = \text{Aut } V$  endlichdimensionaler reeller Vektorräume haben wir  $(\text{ad } A)(B) = AB - BA$ . In der Tat ist das Auswerten an  $B \in \text{End } V$  eine lineare Abbildung  $\text{aus}_B : \text{End}(\text{End } V) \rightarrow \text{End } V$ , es gilt also  $d_e(\text{aus}_B \circ \text{Ad}) = \text{aus}_B \circ \text{ad}$ . Nun gilt offensichtlich weiter auch  $(\text{aus}_B \circ \text{Ad})(x) = (\text{Ad } x)(B) = xBx^{-1}$ . Um das Differential dieser Abbildung zu berechnen, schreiben wir sie als Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc} \text{Aut } V & \rightarrow & \text{End } V \times \text{End } V & \rightarrow & \text{End } V \\ x & \mapsto & (x, x^{-1}) & \mapsto & yBz \end{array}$$

Hier ist nun das Differential der ersten Abbildung beim neutralen Element nach 3.3.17 gegeben durch  $A \mapsto (A, -A)$  und das Differential der Zweiten beim Bild des neutralen Elements nach [AN2] 2.6.5 durch  $(C, D) \mapsto (CB + BD)$  und das Differential der Verknüpfung ist folglich gegeben durch  $A \mapsto AB - BA$ . Damit erhalten wir schließlich  $(\text{ad } A)(B) = AB - BA = [A, B]$  wie gewünscht.

**Proposition 4.1.15 (Differential der adjungierten Darstellung).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  gilt für alle  $X, Y \in \text{Lie } G$  die Formel*

$$(\text{ad } X)(Y) = [X, Y]$$

4.1.16. Rechts steht hier der Kommutator der beiden Vektorfelder, die durch linksinvariante Fortsetzung zweier Tangentialvektoren am neutralen Element entstehen, oder vielmehr der Wert dieses Kommutatorfeldes am neutralen Element. Links dahingegen steht salopp gesprochen das Differential der von der Operation durch Konjugation unserer Liegruppe auf sich selbst induzierten Operation auf dem Tangentialraum beim neutralen Element. Wir geben für die Proposition zwei Beweise.

*Erster Beweis.* Wir verwenden im folgenden meist dieselbe Notation für linksinvariante Vektorfelder und ihre Werte beim neutralen Element, und deuten nur in Ausnahmefällen den Unterschied durch einen Index  $e$  an. Der Fluß eines linksinvarianten Feldes  $X$  wird nach 3.6.22 gegeben durch

$$X^t g = g \exp(tX)$$

für alle  $g \in G$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Bezeichne  $\log$  die Umkehrung von  $\exp$  in einer kleinen Umgebung des neutralen Elements. Da die Lieklammer Verwandtschaft respektiert und da das Differential des Logarithmus bis auf kanonische Identifikationen die Identität ist, liefert die Darstellung 3.7.13 des Kommutators zweier Vektorfelder die Relation

$$\begin{aligned} [X, Y]_e &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\log(X^{-t} Y^t X^t e) - \log(Y^t e)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\log(e^{tX} e^{tY} e^{-tX}) - \log(e^{tY})) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\text{Ad}(e^{tX})(tY) - tY) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Ad}(e^{tX})(Y) - Y) \\ &= (\text{ad } X)(Y) \quad \square \end{aligned}$$

*Zweiter Beweis.* Dieser Beweis ist zwar etwas länger, dafür aber unabhängig von unseren Erkenntnissen 3.7.13 über den Zusammenhang zwischen der Lieklammer von Vektorfeldern und dem Kommutieren der zugehörigen Flüsse. Um Klammern

zu sparen, kürzen wir  $\text{ad}(X) = \text{ad}_X$  ab. Es reicht, für jede glatte Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  zu zeigen

$$[X, Y]f = (\text{ad}_X Y)f$$

Dazu beachten wir zunächst  $\text{ad}_X Y = \partial_t(\text{Ad } e^{tX})(Y)$ , wobei wir hier und im Rest des Beweises alle partiellen Ableitungen als ausgewertet bei Null verstehen. Das Anwenden auf eine glatte Funktion  $f$  gefolgt vom Auswerten  $\delta_g$  an einem Gruppenelement  $g$  ist eine Linearform auf dem Raum aller glatten Vektorfelder und damit auch auf dem Raum aller linksinvarianten Vektorfelder, wir haben demnach auch

$$\delta_g(\text{ad}_X Y)f = \partial_t \delta_g((\text{Ad } e^{tX})(Y))f$$

Jetzt beachten wir die Verwandtschaften

$$\begin{aligned} (\text{int } h) : Y &\rightsquigarrow (\text{Ad } h)(Y) \\ (\text{int } h) : f \circ (\text{int } h) &\rightsquigarrow f \end{aligned}$$

woraus sofort folgt  $(\text{int } h) : Y(f \circ \text{int } h) \rightsquigarrow ((\text{Ad } h)(Y))(f)$  alias

$$(Y(f \circ \text{int } h)) \circ (\text{int } h)^{-1} = ((\text{Ad } h)(Y))(f)$$

und damit

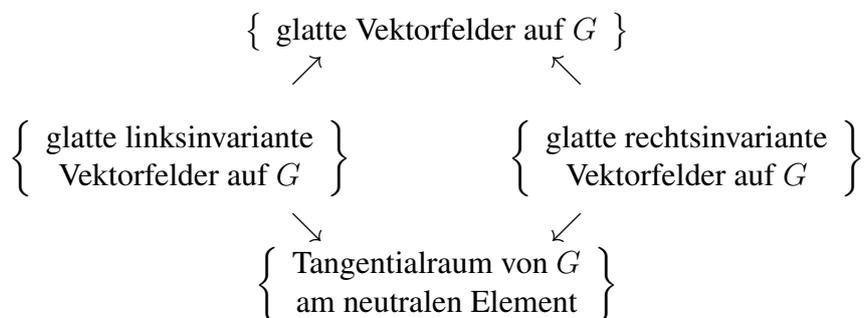
$$\begin{aligned} \delta_g(\text{ad}_X Y)f &= \partial_t \delta_g((\text{Ad } e^{tX})(Y))f \\ &= \partial_t (Y(f \circ \text{int } e^{tX})(e^{-tX} g e^{tX})) \\ &= \partial_t \partial_s (f \circ \text{int } e^{tX})(e^{-tX} g e^{tX} e^{-sY}) \\ &= \partial_t \partial_s f(g e^{tX} e^{sY} e^{-tX}) \\ &= \partial_t \partial_s f(g e^{tX} e^{sY}) - \partial_t \partial_s f(g e^{sY} e^{tX}) \\ &= (X(Yf))(g) - (Y(Xf))(g) \end{aligned}$$

Dieser Beweis verwendet die Exponentialabbildung nicht wirklich: Statt  $e^{tX}$  und  $e^{sY}$  könnten wir darin ebenso irgendwelche anderen glatten Wege verwenden, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  beziehungsweise  $s = 0$  mit der Geschwindigkeit  $X$  beziehungsweise  $Y$  durch das neutrale Element fahren.  $\square$

4.1.17. Gegeben eine Liegruppe  $G$  folgt aus der Beschreibung 1.4.20 der Liealgebra des Kerns eines Liegruppenhomomorphismus unmittelbar die Identität  $\text{Lie}(\ker \text{Ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ . Dieser Teilraum heißt im übrigen für eine beliebige Liealgebra  $\mathfrak{g}$  das **Zentrum** der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ .

## Übungen

*Ergänzende Übung 4.1.18.* Sei  $G$  eine Liegruppe. Wir betrachten das Diagramm



wo die beiden unteren Pfeile durch das Auswerten am neutralen Element definiert werden. Die obere Hälfte unseres Diagramms besteht aus Lie-Algebren und Lie-Algebren-Homomorphismen. Die beiden unteren Pfeile sind Isomorphismen und versehen den Tangentialraum am neutralen Element  $T_e G$  mit zwei Lie-Algebra-Strukturen. Der Leser möge als Übung zeigen, daß hier die Lieklammer für die eine Struktur auf  $T_e G$  gerade das Negative der Lieklammer für die andere Struktur ist. Hinweis: Man fasse die Inversenabbildung  $G \xrightarrow{\sim} G^{\text{opp}}$  auf als Homomorphismus in die Gruppe mit der opponierten Multiplikation.

*Übung 4.1.19.* Das linksinvariante Vektorfeld auf der Gruppe  $G = \text{GL}(2; \mathbb{R})$ , dessen Wert beim neutralen Element durch die Matrix  $A \in \text{Mat}(2; \mathbb{R})$  gegeben wird, muß sich als Linearkombination der partiellen Ableitungen nach den Matrixeinträgen  $\sum f_{ij} \partial_{ij}$  mit gewissen glatten Funktionen  $f_{ij}$  als Koeffizienten schreiben lassen. Man berechne diese Funktionen und prüfe explizit, daß die linksinvariante Fortsetzung in diesem Fall ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, wenn wir  $\text{Mat}(2; \mathbb{R})$  mit der durch den üblichen Kommutator gegebenen Struktur einer Liealgebra versehen. Mutige rechnen dasselbe allgemeiner für  $G = \text{GL}(n; \mathbb{R})$  und auch für rechtsinvariante Felder, beachten dabei jedoch die vorhergehende Übung 4.1.18.

*Übung 4.1.20 (Derivierte Liegruppen und Liealgebren).* Gegeben eine Gruppe  $G$  bezeichne  $(G, G)$  die von allen Kommutatoren  $aba^{-1}b^{-1}$  erzeugte Untergruppe, die sogenannte **derivierte Gruppe**. Gegeben eine Liealgebra  $\mathfrak{g}$  bezeichne  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  den von allen Kommutatoren  $[X, Y]$  erzeugten Untervektorraum. Er ist, wie man leicht einsieht, wieder eine Liealgebra, die sogenannte **derivierte Liealgebra**. Gegeben eine zusammenhängende Liegruppe  $G$  mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$  zeige man nun, daß aus  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  bereits folgt  $(G, G) = G$ . Hinweis: Zunächst zeige man, daß die  $(\text{Ad } g)(X) - X$  für  $g \in G$  und  $X \in \mathfrak{g}$  bereits ganz  $\mathfrak{g}$  als Vektorraum erzeugen. Dann verwende man den Umkehrsatz um zu zeigen, daß  $(G, G)$  eine Umgebung des neutralen Elements umfaßt.

**Übung 4.1.21 (Liealgebra einer Gruppe von Fixpunkten, Variante).** Gegeben  $G$  eine Liegruppe und  $\Phi \subset \text{GrpTop}^\times G$  eine Menge von Automorphismen von  $G$  ist die Liealgebra der abgeschlossenen Untergruppe  $G^\Phi = \{g \in G \mid \varphi(g) = g \ \forall \varphi \in \Phi\}$  der Fixpunkte von  $\Phi$  genau die Menge der Fixpunkte in der Liealgebra, in Formeln

$$\text{Lie}(G^\Phi) = (\text{Lie } G)^\Phi$$

Hier ist rechts die abgeleitete Operation gemeint, ausgeschrieben hätten wir also  $\text{Lie}(G^\Phi) = \{X \in \text{Lie } G \mid (d_e \varphi)(X) = X \ \forall \varphi \in \Phi\}$ . Hinweis: Man kombiniere 3.6.25 und 3.6.23.

**Übung 4.1.22 (Liealgebra eines Zentralisators).** Gegeben eine Liegruppe  $G$  und ein Element  $h \in G$  gilt stets  $\text{Lie } Z_G(h) = \{X \in \text{Lie } G \mid (\text{Ad } h)(X) = X\}$ . Gegeben eine Liegruppe  $G$  und eine Teilmenge  $H \subset G$  gilt stets  $\text{Lie } Z_G(H) = \{X \in \text{Lie } G \mid (\text{Ad } h)(X) = X \ \forall h \in H\}$ . Hinweis: Man wende 3.6.25 an auf  $\phi = \text{int } h$  beziehungsweise 4.1.21 auf  $\Phi = \{\text{int } h \mid h \in H\}$ .

**Übung 4.1.23.** Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung  $G \rightarrow \text{GL}(V)$  einer Liegruppe mit der abgeleiteten Darstellung ihrer Liealgebra zeige man die Formel

$$g(X(g^{-1}v)) = ((\text{Ad } g)(X))v \quad \forall g \in G, X \in \text{Lie } G, v \in V$$

**Übung 4.1.24.** Man zeige, daß gegeben eine Liegruppe  $G$  für jedes Gruppenelement  $g \in G$  die Abbildung  $\text{Ad}(g)$  ein Liealgebrenhomomorphismus ist.

**Übung 4.1.25.** Gegeben eine zusammenhängende Liegruppe  $G$  fällt ihr Zentrum stets zusammen mit dem Kern der adjungierten Darstellung, in Formeln  $Z(G) = \ker(\text{Ad})$ .

**Übung 4.1.26.** Man zeige: Gegeben eine Liegruppe  $G$  und eine abelsche Unter-algebra  $\mathfrak{h} \subset \text{Lie } G$  ist  $\exp : \mathfrak{h} \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe des Vektorraums  $\mathfrak{h}$  in unsere Liegruppe  $G$ . Hinweis: Kommutierende Vektorfelder haben kommutierende Flüsse.

**Übung 4.1.27.** Auf einer Liegruppe ist die Lieklammer eines linksinvarianten Vektorfeldes mit einem rechtinvarianten Vektorfeld stets das Nullfeld.

## 4.2 Kompakte Liealgebren

**Definition 4.2.1.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlichdimensionale Liealgebra über einem Körper  $k$ . Die **Killingform von  $\mathfrak{g}$**  ist die Bilinearform  $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$  auf unserer Liealgebra, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\kappa(X, Y) := \text{tr}((\text{ad } X)(\text{ad } Y))$$

**Definition 4.2.2.** Eine reelle Liealgebra heißt **kompakt**, wenn sie endlichdimensional ist mit negativ definiter Killing-Form.

**Proposition 4.2.3.** *Jede zusammenhängende kompakte Liegruppe mit endlichem Zentrum hat eine kompakte Liealgebra.*

*Beweis.* Sei  $K$  unsere kompakte Liegruppe und  $\mathfrak{k} = \text{Lie } K$  ihre Liealgebra. Das Bild der adjungierten Darstellung ist eine kompakte Matrixliegruppe und nach 2.4.10 gibt es damit auf  $\mathfrak{k}$  ein  $(\text{Ad } K)$ -invariantes Skalarprodukt. Bezüglich einer Orthonormalbasis werden mithin alle  $\text{Ad } g$  für  $g \in K$  durch orthogonale Matrizen dargestellt und alle  $\text{ad } X$  für  $X \in \mathfrak{k}$  dementsprechend durch schiefsymmetrische Matrizen. Alle Eigenwerte dieser  $\text{ad } X$  sind insbesondere rein imaginär, und das zeigt

$$\text{tr}((\text{ad } X)(\text{ad } X)) < 0$$

falls  $\text{ad } X \neq 0$ . Hat unsere Gruppe zusätzlich endliches Zentrum und ist zusammenhängend, so gilt auch  $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = 0$ , mithin  $(\text{ad } X = 0) \Rightarrow (X = 0)$ , und ihre Liealgebra ist in der Tat kompakt.  $\square$

**Satz 4.2.4 (Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum).** *Das Bilden der Liealgebra und das Bilden der Einskomponente der Automorphismengruppe liefern zueinander inverse Bijektionen auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{kompakte} \\ \text{Liealgebren} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} K & \mapsto & \text{Lie } K \\ (\text{Aut } \mathfrak{k})^\circ & \leftarrow & \mathfrak{k} \end{array}$$

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß die im Satz gegebene Abbildungsvorschrift in der Gegenrichtung eine Umkehrabbildung liefert. Ist  $\mathfrak{k}$  eine kompakte Liealgebra, so ist  $A := (\text{Aut } \mathfrak{k})^\circ$  als abgeschlossene Untergruppe der orthogonalen Gruppe zur Killingform eine kompakte Liegruppe und wir erhalten Isomorphismen  $\mathfrak{k} \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathbb{R}} \mathfrak{k} \xleftarrow{\sim} \text{Lie } A$  mit 4.2.5 und 1.2.23 oder 1.3.11. Die Komposition dieser Isomorphismen ist sogar ein Isomorphismus von Darstellungen von  $A$ , wenn man auf  $\mathfrak{k}$  die offensichtliche Darstellung betrachtet und auf  $\text{Lie } A$  die adjungierte Darstellung. Damit zeigt 4.1.25, daß unser  $A$  triviales Zentrum hat und wir haben eine Abbildung  $\mathfrak{k} \mapsto K_{\mathfrak{k}} := A = (\text{Aut } \mathfrak{k})^\circ$  in die Gegenrichtung konstruiert und auch schon einen Isomorphismus  $\mathfrak{k} \xrightarrow{\sim} \text{Lie } K_{\mathfrak{k}}$  angegeben. Ist andererseits  $K$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit trivialem Zentrum, so liefert die adjungierte Darstellung nach 4.1.25 eine Injektion  $\text{Ad} : K \hookrightarrow (\text{Aut } \mathfrak{k})^\circ$  und damit einen Homöomorphismus auf das Bild dieser Injektion, das eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe mit Liealgebra  $\text{ad } \mathfrak{k}$  sein muß. Nach 4.2.5 und 1.3.11 hat dies Bild damit dieselbe Liealgebra wie  $(\text{Aut } \mathfrak{k})^\circ$  und nach 1.2.22

ist unsere Injektion damit erst ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, dann aber nach ?? auch ein Isomorphismus von topologischen Gruppen, und dann nach 3.6.16 sogar ein Isomorphismus von Liegruppen.  $\square$

**Lemma 4.2.5.** Für jede kompakte Liealgebra  $\mathfrak{k}$  liefert  $\text{ad}$  einen Isomorphismus von Liealgebren  $\text{ad} : \mathfrak{k} \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}$ .

4.2.6. Dieser Beweis verwendet zwei Aussagen aus der allgemeinen Theorie der Lie-Algebren, die der Leser aber auch ohne alle Theorie leicht prüfen kann: Nach [HL] 1.7.11 ist die Restriktion der Killingform einer endlichdimensionalen Liealgebra auf ein Ideal die Killingform des besagten Ideals, und nach [HL] 1.6.10 ist das orthogonale Komplement eines Ideals unter der Killingform stets wieder ein Ideal.

*Beweis.* In der Tat ist  $\text{ad}$  im Fall einer kompakten Liealgebra sicher injektiv. Das einzige Problem ist nachzuweisen, daß diese Abbildung surjektiv ist. Da  $\mathfrak{k} \cong \text{ad } \mathfrak{k}$  kompakt ist, kann die Restriktion der Killingform  $\kappa_D$  von  $D := \text{Der}_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}$  auf  $\text{ad } \mathfrak{k}$  nicht entarten. Ist also  $I \subset D$  das orthogonale Komplement von  $\text{ad } \mathfrak{k}$  unter der Killingform  $\kappa_D$ , so gilt  $I \cap \text{ad } \mathfrak{k} = 0$  und folglich  $D = I \oplus \text{ad } \mathfrak{k}$  mit Dimensionsbetrachtungen. Da nach 1.3.15 beide Ideale sind, folgt  $[I, \text{ad } \mathfrak{k}] = 0$ , also  $[\delta, \text{ad } x] = \text{ad}(\delta x) = 0 \forall \delta \in I, x \in \mathfrak{k}$ , also  $\delta x = 0 \forall \delta \in I, x \in \mathfrak{k}$  und damit  $I = 0$  wie gewünscht.  $\square$

## Übungen

*Übung 4.2.7.* Man zeige: Gegeben eine Liegruppe ist die Killingform auf ihrer Lie-Algebra invariant unter der adjungierten Darstellung.

*Übung 4.2.8.* Man erkläre, wie die adjungierte Darstellung von  $\text{SL}(2; \mathbb{R})$  zu einem Isomorphismus  $\text{SL}(2; \mathbb{R})/(\pm \text{id}) \xrightarrow{\sim} \text{SO}(2, 1)^+$  führt.

*Übung 4.2.9.* Man zeige: Gegeben eine kompakte Liegruppe  $K$  zerfällt ihre Liealgebra  $\mathfrak{k}$  in die direkte Summe  $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$  der derivierten Liealgebra mit dem Zentrum. Hinweis: Unter der adjungierten Darstellung zerfällt  $\mathfrak{k}$  nach 2.4.12 in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen.

## 4.3 Von Liealgebren zu Liegruppen

**Definition 4.3.1.** Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und  $U \subset X$  eine offene Teilmenge. Eine  $d$ -dimensionale **Distribution**  $D$  auf  $U$  ist eine Zuordnung, die jedem Punkt  $p \in U$  einen  $d$ -dimensionalen Teilraum

$$D(p) \subset \vec{X}$$

zuordnet. Eine derartige Distribution heißt **glatt**, wenn es um jeden Punkt  $q \in U$  eine offene Umgebung  $V \Subset U$  und glatte Vektorfelder auf  $V$  gibt, deren Werte an jedem Punkt  $p \in V$  den Raum  $D(p)$  aufspannen. Eine glatte Distribution heißt **involutiv**, wenn diejenigen glatten Vektorfelder auf  $U$ , die an jeder Stelle  $p$  Werte in unserem Teilraum  $D(p)$  annehmen, im Raum aller glatten Vektorfelder auf  $U$  eine Unter-Liealgebra bilden, wenn also in Formeln für je zwei glatte Vektorfelder  $A, B : U \rightarrow \vec{X}$  mit  $A_p, B_p \in D(p) \forall p \in U$  gilt  $[A, B]_p \in D(p) \forall p \in U$ .

**4.3.2 (Diskussion der Terminologie).** Die Bezeichnung „Distribution“ wird auch für gewisse verallgemeinerte Funktionen oder genauer verallgemeinerte Maße verwendet. Man lasse sich hierdurch nicht verwirren.

**Satz 4.3.3 (von Frobenius).** *Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum,  $U \Subset X$  eine offene Teilmenge und  $D$  eine glatte  $d$ -dimensionale Distribution auf  $U$ . Genau dann ist  $D$  involutiv, wenn man für jeden Punkt  $q \in U$  eine offene Umgebung  $V \Subset U$  und darauf Koordinaten  $y_1, \dots, y_n$  so finden kann, daß für alle  $p \in V$  gilt*

$$D(p) = \langle (\partial/\partial y_1)_p, \dots, (\partial/\partial y_d)_p \rangle_{\mathbb{R}}$$

*Beweis.* Die einzige Schwierigkeit besteht darin, aus der Involutivität der Distribution die Existenz der fraglichen lokalen Koordinatensysteme zu folgern. Indem wir  $U$  notfalls verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es glatte Vektorfelder  $A^1, \dots, A^d : U \rightarrow \vec{X}$  gibt, deren Werte an jeder Stelle  $p \in U$  den Raum  $D(p)$  aufspannen. Insbesondere hat dann  $A^1$  keine Nullstelle und wir finden nach Satz [AN2] 6.6.6 über die Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle, wenn wir  $U$  notfalls noch weiter verkleinern, Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  auf  $U$  mit  $A^1 = \partial/\partial x_1$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß unsere Vektorfelder  $A^i$  für  $i \geq 2$  keinen  $\partial/\partial x_1$ -Anteil haben alias in der Gestalt

$$A^i = a_2^i \partial/\partial x_2 + \dots + a_n^i \partial/\partial x_n$$

geschrieben werden können mit  $a_j^i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ . Zu den Feldern  $A^i$  für  $2 \leq i \leq n$  gibt es unter dieser Annahme jeweils genau ein verwandtes Feld  $B^i$  auf der Hyperfläche  $W := \{p \in U \mid x_1(p) = x_1(q)\}$ . Da nach 3.7.12 verwandte Felder verwandte Lieklammern haben, erzeugen die  $B^i$  eine involutive  $(d-1)$ -Distribution auf  $W$ . Wenn wir  $W$  noch etwas verkleinern, so gibt es nach Induktionsannahme auf  $W$  Koordinaten  $y_2, \dots, y_n$  mit

$$\langle B_p^2, \dots, B_p^d \rangle = \langle (\partial/\partial y_2)_p, \dots, (\partial/\partial y_d)_p \rangle \quad \forall p \in W$$

Verkleinern wir  $U$  hinreichend weiter, so liefert das Vergessen der ersten Koordinate eine glatte Abbildung  $\pi : U \rightarrow W$ , vermittle derer wir die Koordinaten

$y_2, \dots, y_n$  zu Funktionen auf  $U$  zurückziehen können, die dann zusammen mit  $y_1 := x_1$  ein Koordinatensystem einer Umgebung von  $q$  in  $U$  bilden. Das Vektorfeld  $A^1 = (\partial/\partial x_1)$  bezüglich  $(x_1, \dots, x_n)$  ist dann auch das Vektorfeld  $(\partial/\partial y_1)$  bezüglich  $(y_1, \dots, y_n)$ . Es reicht nun zu zeigen, daß auf einer Umgebung von  $q$  das Anwenden jedes unserer Felder  $A^i$  auf jede der Funktionen  $y_j$  mit  $d+1 \leq j \leq n$  die Nullfunktion liefert, denn dann tauchen in der Darstellung

$$A^i = b_1^i(\partial/\partial y_1) + b_2^i(\partial/\partial y_2) + \dots + b_n^i(\partial/\partial y_n)$$

nur die  $\partial/\partial y_j$  für  $1 \leq j \leq d$  mit von Null verschiedenen Koeffizienten auf. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigen wir das nur für  $j = n$  und nehmen  $d < n$  an. Für  $i = 1$  ist die Aussage eh klar, aber dieser Fall kann auch ohne Schaden im folgenden Argument noch mitlaufen. Aus der Involutivität unserer Distribution folgt  $[A^1, A^i] = \sum c_k^i A^k$  für geeignete glatte Funktionen  $c_k^i$ , und das liefert hinwiederum für die  $(A^i(y_n))$  das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(A^i(y_n)) = \sum_{k=1}^d c_k^i A^k(y_n)$$

Schränken wir diese Identitäten von glatten Funktionen ein auf die Fasern von  $\pi : U \rightarrow W$ , so bedeuten sie homogene lineare Systeme von Differentialgleichungen von Funktionen in  $y_1$ . Wählen wir  $U$  so klein, daß alle Fasern von  $\pi$  zusammenhängend sind, so gibt es zu jedem Anfangswert nach [AN2] 6.5.1 genau eine Lösung auf jeder Faser. Bei Punkten  $p \in W$  ist aber nach Konstruktion der Koordinaten  $y_i$  der fragliche Wert  $(A^i(y_n))(p) = (B^i(y_n))(p) = 0$ , folglich bilden unsere Funktionen  $A^i(y_n)$  auf jeder Faser die Null-Lösung und verschwinden also auf ganz  $U$ .  $\square$

*Ergänzung 4.3.4.* Unter einer **partiellen Unter-Liegruppe** einer Liegruppe verstehen wir wie in 1.3.5 eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset G$  derart, daß (1) die Identität zu  $M$  gehört und daß es (2) eine Umgebung  $U$  der Identität gibt mit den Eigenschaften  $(U \cap M)(U \cap M) \subset M$  und  $(U \cap M)^{-1} \subset M$ .

**Lemma 4.3.5 (Unter-Liealgebren und partielle Unter-Liegruppen).** *Ist  $G$  eine Liegruppe und  $\mathfrak{h} \subset \text{Lie } G$  eine Lie-Unteralgebra, so ist für eine hinreichend kleine Umgebung  $V \ni \mathfrak{h}$  des Ursprungs das Bild  $M = \exp(V) \subset G$  eine partielle Unter-Liegruppe.*

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{h} \subset T_e G$  ein Untervektorraum, so ist für eine hinreichend kleine Umgebung  $V \ni \mathfrak{h}$  des Ursprungs das Bild  $M = \exp(V) \subset G$  nach 3.6.8 schon mal eine Untermannigfaltigkeit und die linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  zu Elementen von  $\mathfrak{h}$  erzeugen eine  $(\dim \mathfrak{h})$ -dimensionale linksinvariante Distribution  $D_{\mathfrak{h}}$  auf  $G$ . Ist  $\mathfrak{h} \subset T_e G$  eine Lie-Unteralgebra, so erkennt man leicht, daß diese

Distribution auch involutiv und rechtsinvariant sein muß. Nun finden wir mithilfe des Frobenius-Theorems 4.3.3 eine offene Umgebung  $W \subseteq G$  des neutralen Elements und darauf ein Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n) : W \xrightarrow{\sim} (-1, 1)^n$  derart, daß das neutrale Element dem Nullvektor entspricht und daß für  $d = \dim \mathfrak{h}$  gilt

$$D_{\mathfrak{h}}(p) = \langle (\partial/\partial x_1)_p, \dots, (\partial/\partial x_d)_p \rangle \quad \forall p \in W$$

Ist dann  $V \subseteq \mathfrak{h}$  eine konvexe Umgebung des neutralen Elements mit der Eigenschaft  $\exp(V)\exp(V) \subset W$ , so behaupte ich

$$\exp(V)\exp(V) \subset \{p \in W \mid x_{d+1}(p) = \dots = x_n(p) = 0\}$$

In der Tat, gehen wir für  $X, Y \in V$  erst mit dem Weg  $t \mapsto \exp(tX)$  vom neutralen Element nach  $\exp X$  und dann mit dem Weg  $s \mapsto \exp(X)\exp(sY)$  weiter nach  $\exp(X)\exp(Y)$ , so liegen die Geschwindigkeitsvektoren beider Wege an jeder Stelle in unserer Distribution  $D_{\mathfrak{h}}$ , was die Behauptung zeigt. Andererseits gibt es eine offene Umgebung  $A \subseteq W$  des neutralen Elements mit  $\exp(V) \cap A = \{p \in A \mid x_{d+1}(p) = \dots = x_n(p) = 0\}$ . Wählen wir  $U \subseteq A$  hinreichend klein, so können wir sicher erreichen, daß gilt  $(\exp(V) \cap U)(\exp(V) \cap U) \subset A$  und damit nach dem vorhergehenden  $(\exp(V) \cap U)(\exp(V) \cap U) \subset \exp(V)$ . Man erkennt damit, daß  $\exp(V) \subset G$  in der Tat eine partielle Lie-Untergruppe ist.  $\square$

**Satz 4.3.6 (Unter-Liegruppen zu Unter-Liealgebren).** *Gegeben eine Liegruppe  $G$  und eine Unter-Liealgebra  $\mathfrak{h} \subset \text{Lie } G$  gibt es auf der von  $(\exp \mathfrak{h})$  erzeugten Untergruppe  $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle \subset G$  genau eine Struktur als Liegruppe derart, daß die Injektion  $H \hookrightarrow G$  ein glatter Gruppenhomomorphismus ist und ihr Differential beim neutralen Element einen Isomorphismus von Lie-Algebren  $\text{Lie } H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$  induziert.*

4.3.7. Man beachte, daß wir keineswegs fordern, daß  $H$  die von  $G$  induzierte Topologie trägt. Das typische Gegenbeispiel ist eine Gerade, die sich mit dichtem Bild und injektiv um einen zweidimensionalen Torus windet.

*Beweis.* Wir finden eine offene konvexe Umgebung des Ursprungs  $V \subseteq \mathfrak{h}$  wie in 4.3.5, so daß also  $\exp(V)\exp(V)$  in einer Umgebung  $W$  des neutralen Elements mit der Distribution  $D_{\mathfrak{h}}$  angepaßten Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n) : W \xrightarrow{\sim} (-1, 1)^n$  landet. Dann versehen wir  $H$  mit der finalen Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums zur Familie der Abbildungen

$$(h \cdot) \circ \exp : V \rightarrow H$$

für  $h \in H$ . Der Rest des Arguments kann dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

4.3.8. Ein topologischer Raum heißt **einfach zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und jede zusammenhängende Überlagerung unseres Raums im Sinne von 3.3.21 bereits ein Homöomorphismus ist. In [TF] ?? wird gezeigt, daß eine Mannigfaltigkeit genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn sie wegweise einfach zusammenhängend ist im Sinne von [AN2] 8.7.6.

**Satz 4.3.9 (Integration von Liealgebrenhomomorphismen).** *Sind  $G, H$  Liegruppen und ist  $G$  einfach zusammenhängend, so liefert das Differenzieren eine Bijektion*

$$\text{GrpTop}(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Lalg}_{\mathbb{R}}(\text{Lie } G, \text{Lie } H)$$

*zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $H$  und der Menge aller Homomorphismen von reellen Liealgebren von  $\text{Lie } G$  nach  $\text{Lie } H$ .*

4.3.10. Die inverse Abbildung zur Bijektion in unserem Satz nennt man auch das **Integrieren**. Man würde etwa sagen, daß unter gewissen Umständen ein Homomorphismus von Liealgebren zu einem Homomorphismus von Liegruppen integriert werden kann. Den Spezialfall der Gruppe  $G = \mathbb{R}$  haben wir bereits in 3.3.18 kennengelernt. Der Fall  $G = S^1, H = \mathbb{R}$  zeigt, daß die Bedingung  $G$  einfach zusammenhängend für die Surjektivität im zweiten Teil unseres Satzes notwendig ist.

4.3.11. Der Satz impliziert insbesondere, daß zwei einfach zusammenhängende Liegruppen mit isomorphen Liealgebren bereits isomorph sein müssen: In der Tat läßt sich sogar jeder Isomorphismus ihrer Liealgebren zu einem Isomorphismus der Liegruppen selber integrieren.

*Beweis.* Daß das Differenzieren im Fall einer zusammenhängenden Liegruppe  $G$  stets eine Injektion liefert, haben wir bereits als Korollar 3.6.17 gezeigt. Es bleibt, die Surjektivität zu zeigen. Der Graph unseres Liealgebrenhomomorphismus ist offensichtlich eine Unterlieagebra  $\mathfrak{l} \subset \text{Lie } G \times \text{Lie } H$ . Nach 4.3.6 gilt es auf der Untergruppe  $L := \langle \exp \mathfrak{l} \rangle \subset G \times H$  eine Struktur als Liegruppe derart, daß die Injektion  $L \hookrightarrow G \times H$  ein glatter Gruppenhomomorphismus ist und daß ihr Differential am neutralen Element einen Isomorphismus  $\text{Lie } L \xrightarrow{\sim} \mathfrak{l}$  induziert. Die Projektion  $L \rightarrow G$  ist also auch glatt und ihr Differential am neutralen Element induziert einen Isomorphismus  $\text{Lie } L \xrightarrow{\sim} \text{Lie } G$ . Damit aber muß  $L \rightarrow G$  nach 3.3.21 eine Überlagerung sein und, wenn  $G$  bereits einfach zusammenhängend ist, ein Homöomorphismus von topologischen Räumen und dann auch sofort ein Isomorphismus von Liegruppen. Das Inverse dieses Isomorphismus gefolgt von der Projektion von  $L$  auf  $H$  ist dann der gesuchte Homomorphismus von Liegruppen  $G \rightarrow H$  mit vorgegebenem Differential beim neutralen Element.  $\square$

*Ergänzung 4.3.12.* Ich sollte diskutieren, unter welchen Umständen sich ein Liealgebrenhomomorphismus von der Liealgebra einer Liegruppe in die glatten Vektorfelder einer Mannigfaltigkeit zu einer Gruppenoperation integrieren läßt. Das sollte doch wohl möglich sein, wenn alle Integralkurven der Vektorfelder aus dem Bild auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind und außerdem unsere Liegruppe einfach zusammenhängend ist.

*Ergänzung 4.3.13 (Liegruppen mit vorgegebener Liealgebra).* Man kann zeigen, daß sogar jede endlichdimensionale reelle Liealgebra zur Liealgebra einer einfach zusammenhängenden Liegruppe isomorph ist, vergleiche etwa [HN91]. Dieser Satz ist für uns jedoch im folgenden nicht relevant. Der Beweis geht aus von Satz [?] ??, der besagt, daß jede endlichdimensionale reelle Liealgebra zu einer Unter algebra einer Liealgebra  $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$  isomorph ist. Dann nimmt man schlicht die nach 4.3.6 zugehörige Untergruppe mit ihrer Struktur einer Liegruppe von ebendort und deren universelle Überlagerung [TF] 3.6.3 und macht sie mit 3.2.29 wieder zu einer Liegruppe.

*Ergänzung 4.3.14 (Integration als Linksadjungierter der Differentiation).* Leser, die mit der Begrifflichkeit adjungierter Funktoren vertraut sind, mögen Satz 4.3.9 über die Beziehung von Liegruppen zu endlichdimensionalen Liealgebren zusammen mit Bemerkung 4.3.13 auffassen als die Beschreibung eines Linksadjungierten desjenigen Funktors, der jeder Liegruppe ihre Liealgebra zuordnet: Dieser Linksadjungierte ordnet jeder endlichdimensionalen Liealgebra  $\mathfrak{g}$  die einfach zusammenhängende Liegruppe  $G$  mit  $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$  zu.

## 4.4 Quotienten und homogene Räume

**Satz 4.4.1.** *Jede abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe ist bereits eine Untermannigfaltigkeit und damit selbst eine Liegruppe.*

*Beweis.* Mutatis mutandis wie im Fall 1.2.3 von Matrixliegruppen. □

4.4.2. Die Liealgebra einer abgeschlossenen Untergruppe einer Liegruppe  $H \triangleleft G$  besteht nach 3.6.23 genau aus allen Tangentialvektoren am neutralen Element der ursprünglichen Liegruppe derart, daß der zugehörige Gruppenweg ganz in unserer Untergruppe verläuft. In Formeln gilt also

$$\text{Lie } H = \{X \in \text{Lie } G \mid \exp(\mathbb{R}X) \subset H\}$$

**Satz 4.4.3 (Quotientenkonstruktion).** *Seien  $G$  eine Liegruppe und  $H \triangleleft G$  eine abgeschlossene Untergruppe. So gilt:*

1. *Versehen mit der finalen Struktur eines  $\mathbb{R}$ -geringten Raums bezüglich der Projektion  $\pi : G \rightarrow G/H$  ist  $G/H$  eine glatte Mannigfaltigkeit;*

2. Jeder Punkt von  $G/H$  besitzt eine offene Umgebung  $U \Subset G/H$  derart, daß  $\pi$  über  $U$  einen glatten Schnitt besitzt, und für jeden solchen glatten Schnitt  $s : U \rightarrow G$  ist die Abbildung  $U \times H \rightarrow G$ ,  $(x, h) \mapsto s(x)h$  eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten.

4.4.4. Die zweite Eigenschaft des Quotienten besagt insbesondere, daß die Projektion  $G \rightarrow G/H$  eine glatte Submersion im Sinne von 3.3.22 sein muß. In der Terminologie der Hauptfaserbündel, die wir in ?? einführen, besagt die zweite Eigenschaft genauer, daß  $G$  mit seiner  $H$ -Rechtsoperation und der offensichtlichen Projektion auf den Quotienten ein glattes  $H$ -Hauptfaserbündel auf  $G/H$  ist. Wir erinnern Teil zwei auch in der Sprechweise, die **Quotientenabbildung sei lokal trivial**.

*Ergänzung 4.4.5 (Motivation für abstrakte Mannigfaltigkeiten).* In meinen Augen ist eine der wesentlichen Motivationen für die Entwicklung der Begrifflichkeit abstrakter Mannigfaltigkeiten, daß es diese Sprache erlaubt, die Methoden der Analysis auf Quotientenräume der hier betrachteten Art auszudehnen. Stetigkeitsbetrachtungen für Quotienten gelingen bereits mit dem Formalismus der topologischen Räume, Differenzierbarkeitsbetrachtungen aber erst mit dem Formalismus der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. In diesem Sinne beginnt also hier die Belohnung für die Arbeit, die wir seit dem Beginn dieses Abschnitts in die Entwicklung der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gesteckt haben. Sie kulminiert im Beweis der Weyl'schen Charakterformel, bei dem Analysis auf Quotientenräumen maßgeblich eingeht.

*Beweis.* Nach [TM] 2.2.10 ist der Quotient mit seiner Quotiententopologie schon einmal Hausdorff. Wir wählen nun ein Vektorraumkomplement  $V \subset \text{Lie } G$  von  $\text{Lie } H$  und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : V \times H &\rightarrow G \\ (X, h) &\mapsto (\exp X)h \end{aligned}$$

Nach Wahl von  $V$  ist ihr Differential in  $(0, 1)$  bijektiv, folglich gibt es offene Umgebungen  $A \Subset V$  von Null und  $B \Subset H$  von 1 derart, daß  $\varphi$  eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten

$$\varphi : A \times B \hookrightarrow G$$

induziert. Ich will nun zeigen, daß  $A$  so zu einer offenen Umgebung  $D \Subset V$  von Null verkleinert werden kann, daß  $\varphi$  sogar eine Injektion

$$\varphi : D \times H \hookrightarrow G$$

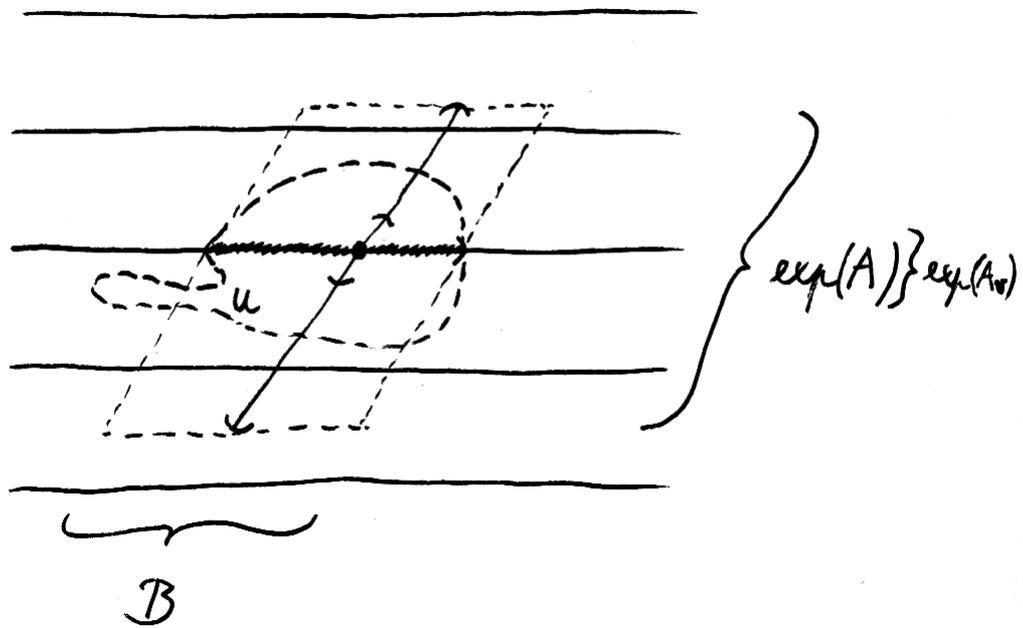


Illustration zum Beweis des Satzes über Quotientenmannigfaltigkeiten. Hier ist etwa  $G \cong \mathbb{R}^2$  die Papierebene, das neutrale Element ist als fetter Punkt eingezeichnet, und  $H \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  bestünde aus lauter horizontalen Linien.

induziert. Ganz allgemein ist  $\varphi(X, h) = \varphi(Y, k)$  gleichbedeutend zur Identität  $\exp(Y)^{-1} \exp(X) = kh^{-1}$ . Da  $H$  eine Mannigfaltigkeit ist für die induzierte Topologie, gibt es  $U \subseteq G$  mit  $U \cap H = B$ . Sicher können wir  $A$  so verkleinern zu  $D$ , daß für  $X, Y \in D$  stets gilt  $\exp(Y)^{-1} \exp(X) \in U$ . Dann folgt aus  $\varphi(X, h) = \varphi(Y, k)$  mit  $X, Y \in D$  jedoch erst

$$\exp(Y)^{-1} \exp(X) = kh^{-1} \in U \cap H = B$$

und dann  $\exp(X) = \exp(Y)kh^{-1}$  und daraus wegen der Injektivität von  $\varphi$  restringiert auf  $A \times B$  wieder  $(X, 1) = (Y, kh^{-1})$  alias  $(X, h) = (Y, k)$ . Mithin induziert  $\varphi$  für unser so verkleinertes  $D$  eine Injektion  $\varphi : D \times H \hookrightarrow G$ . Mit Rechtsverschiebung durch  $h \in H$  erkennen wir, daß ihr Differential an jeder Stelle bijektiv ist. Folglich ist diese Injektion eine offene Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten und liefert wegen 3.1.27 auch eine offene Einbettung von  $\mathbb{R}$ -geringen Räumen  $D \hookrightarrow G/H$ . Verknüpfen wir diese Einbettung mit den Automorphismen  $(g \cdot) : G/H \rightarrow G/H$ , so erkennen wir, daß  $G/H$  in der Tat eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und folgern auch die zweite Aussage des Satzes sofort.  $\square$

4.4.6. Gegeben ein homogener Raum  $X$  einer Liegruppe  $G$  alias eine transitive  $G$ -Menge derart, daß die Standgruppe eines Punktes abgeschlossen ist, gibt es nach unserer Quotientenkonstruktion 4.4.3 genau eine Struktur als Mannigfaltigkeit auf  $X$  derart, daß für jeden Punkt  $x \in X$  das Anwenden  $G \rightarrow X, g \mapsto gx$  eine finale Abbildung ist.

4.4.7. Wichtige Mannigfaltigkeiten dieser Bauart sind die reellen und die komplexen **Graßmann-Mannigfaltigkeiten**

$$\text{Gr}(m; V) := \{W \subset V \mid \dim W = m\}$$

für einen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraum  $V$  sowie die reellen und die komplexen **Stiefel-Mannigfaltigkeiten**  $V_q(W)$  aller angeordneten Orthonormalsysteme mit  $q$  Vektoren in einem vorgegebenen reellen Skalarproduktraum  $W$ . Auf allen diesen Mannigfaltigkeiten, sofern sie nicht leer sind, operiert eine kompakte Gruppe transitiv. Mithin sind sie alle auch selbst kompakt.

**Proposition 4.4.8.** *Ist  $G$  eine Liegruppe und  $H \subset G$  eine abgeschlossene Untergruppe, so ist die Operation  $G \times G/H \rightarrow G/H$  glatt.*

*Erster Beweis.* Das Produkt von Submersionen ist eine Submersion, das Produkt von Surjektionen ist eine Surjektion, und surjektive Submersionen sind final nach 3.3.22. Mithin ist  $G \times G \twoheadrightarrow G \times G/H$  final und damit ist die Multiplikation  $G \times G/H \rightarrow G/H$  glatt.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Da Finalität lokal ist in der Basis nach 3.1.27, und da die Projektionen eines Produkts von Mannigfaltigkeiten auf seine Faktoren final sind, folgt aus der lokalen Trivialität des Quotientenmorphismus nach 4.4.3 unmittelbar, daß auch  $G \times G \rightarrow G \times G/H$  final und damit die Multiplikation  $G \times G/H \rightarrow G/H$  glatt ist.  $\square$

**Definition 4.4.9.** Eine Mannigfaltigkeit  $X$  mit einer transitiven Operation einer Liegruppe  $G$  derart, daß für jeden Punkt  $x \in X$  die Operation einen Diffeomorphismus  $G/G_x \xrightarrow{\sim} X$  induziert, heißt auch ein **homogener Raum** für unsere Liegruppe  $G$ . Zum Beispiel ist die Kugelschale ein homogener Raum für die Drehgruppe.

**Proposition 4.4.10.** *Eine Mannigfaltigkeit mit einer transitiven Operation einer Liegruppe ist stets ein homogener Raum für besagte Liegruppe.*

4.4.11. Beim Beweis dieser Proposition geht wesentlich ein, daß wir bei unserer Definition einer Liegruppe in 3.2.19 mit gefordert hatten, daß ihre Topologie abzählbar basiert sein soll.

*Beweis.* Sei  $G \times X \rightarrow X$  unser homogener Raum. Gegeben  $x \in X$  liefert das Anwenden auf  $x$  wegen der universellen Eigenschaft des Quotienten eine glatte bijektive Abbildung  $G/G_x \rightarrow X$  vom Quotienten nach der Standgruppe von  $x$  in unseren homogenen Raum. Nach Übung 3.6.24 ist deren Differential injektiv beim Bild des neutralen Elements in  $G/G_x$ , und mit Verschieben folgt, daß es überall injektiv sein muß. Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, daß es überall bijektiv sein muß. In allen Anwendungen, die mir einfallen, ist nun die Identität

$$\dim G = \dim X + \dim G_x$$

eh klar und der Rest des Beweises damit überflüssig. Auch diese Identität kann man jedoch aus unseren Annahmen folgern, wenn man sich erinnert, daß wir ja von unseren Liegruppen fordern, daß ihre Topologie abzählbar basiert ist. Gälte nun unsere Identität nicht, so hätten ja die Tangentialräume von  $G/G_x$  eine Dimension  $k < \dim X := n$  und nach Übergang zu Karten würde folgen, daß es eine offene Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  gäbe und eine abzählbare Familie  $(U_\nu, \varphi_\nu)$  mit  $U_\nu \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $\varphi_\nu : U_\nu \rightarrow W$  stetig differenzierbar derart, daß die Bilder  $\varphi_\nu(U_\nu)$  bereits ganz  $W$  überdecken. Das ist jedoch unmöglich, da diese Bilder nach [AN3] 1.8.5 alle Lebesgue-Nullmengen sind.  $\square$

*Ergänzung 4.4.12.* Mit etwas mehr Mühe kann man im vorhergehenden Beweis von 4.4.10 die Argumentation mit dem Lebesgue-Integral auch durch eine Argumentation mit dem dem Baire'schen Kategoriensatz [AN3] 4.2.5 ersetzen.

*Beispiel 4.4.13.* Versieht man  $\mathbb{R}$  mit der diskreten Topologie, so erhält man eine „nicht abzählbar basierte nulldimensionale Liegruppe“  $\mathbb{R}_\delta$ . Die Identität  $\mathbb{R}_\delta \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann ein bijektiver stetiger Gruppenhomomorphismus, aber kein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten.

*Vorschau 4.4.14.* Die offensichtliche Operation von  $SO(n+1)$  auf der Sphäre  $S^n$  ist transitiv für  $n \geq 1$  und die Standgruppe des ersten Vektors der Standardbasis ist offensichtlich die Gruppe von Blockmatrizen  $\text{diag}(1, SO(n))$ . Wir identifizieren sie kurzerhand mit  $SO(n)$  und erhalten dann nach 4.4.10 einen Isomorphismus

$$SO(n+1)/SO(n) \xrightarrow{\sim} S^n$$

Die lange exakte Homotopiesequenz [?] ?? dieses Faserbündels liefert uns dann für  $n \geq 3$  Isomorphismen  $\pi_1(SO(n)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(SO(n+1))$ . Nach 1.6.2 wissen wir bereits, daß  $SO(3)$  durch die Sphäre  $S^3$  zweifach überlagert wird. Da diese Sphäre einfach zusammenhängend ist, folgt mit [TF] 4.5.11 unmittelbar  $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und induktiv  $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  für  $n \geq 3$ . Nach [TF] 5.2.5 besitzt die universelle Überlagerung von  $SO(n)$  zu vorgegebenem Urbild des neutralen Elements genau eine stetige Verknüpfung mit diesem Element als neutralem Element, für die die Überlagerungsabbildung ein Homomorphismus von Magmas ist, und die universelle Überlagerung wird so selbst eine topologische Gruppe. Man sieht leicht, daß diese Struktur zur Struktur einer Liegruppe erweitert werden kann, und daß es nur genau eine derartige Erweiterung gibt, für die die Überlagerungsabbildung glatt ist. Für  $n \geq 3$  heißt die universelle Überlagerung von  $SO(n)$  mit dieser Struktur einer Liegruppe die **Spin-Gruppe**  $\text{Spin}(n)$ . Wir geben eine konkrete Konstruktion dieser Gruppe in [?] ??.

*Vorschau 4.4.15.* Die offensichtliche Operation von  $SU(n+1)$  auf der Sphäre  $S^{2n+1}$  ist transitiv für  $n \geq 1$  und die Standgruppe des ersten Vektors der Standardbasis ist offensichtlich die Gruppe von Blockmatrizen  $\text{diag}(1, SU(n))$ . Wir identifizieren sie kurzerhand mit  $SU(n)$  und erhalten nach 4.4.10 einen Isomorphismus

$$SU(n+1)/SU(n) \xrightarrow{\sim} S^{2n+1}$$

Die lange exakte Homotopiesequenz [?] ?? dieses Faserbündels liefert uns dann für  $n \geq 1$  Isomorphismen  $\pi_1(SU(n)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(SU(n+1))$ . Das zeigt induktiv, daß die Gruppen  $SU(n)$  alle einfach zusammenhängend sind. Mit der Iwasawa-Zerlegung [LA2] 1.11.29 folgt, daß auch die Gruppen  $SL(n; \mathbb{C})$  einfach zusammenhängend sind.

**4.4.16 (Ebene Geometrien).** Unter einer **ebenen Geometrie** verstehen wir eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit  $E$  mit einer ausgezeichneten Gruppe von Automorphismen  $K$  genannt **Kongruenzen** derart, daß es für je zwei Paare  $(x, S)$  und  $(y, T)$  bestehend aus einem Punkt und einem Strahl seines

Tangentialraums genau zwei Kongruenzen gibt, die das eine Paar in das andere Paar überführen. Wir zeigen, daß es bis auf Isomorphismus genau drei ebene Geometrien gibt: Die **euklidische Ebene**, die Kugelschale alias die **shpärische Geometrie**  $S^2 = O(3)/O(2)$ , und das Hyperboloid alias die **hyperbolische Geometrie**  $O(2, 1)^+/O(2)$ . Dazu betrachten wir das Strahlbündel  $T_1E$  von  $E$  alias den Quotient des Komplements des Nullschnitts im Tangentialbündel nach  $\mathbb{R}_{>0}$ . Offensichtlich ist es eine Mannigfaltigkeit, auf der die Untergruppe  $K^+ \subset K$  der orientierungserhaltenden Kongruenzen frei und transitiv operiert. Man kann nun zeigen, daß die so von  $K^+$  geerbte Struktur einer Mannigfaltigkeit unser  $K^+$  zu einer Liegruppe macht. Dann ist also  $G := K^+$  eine dreidimensionale zusammenhängende Liegruppe mit  $SO(2)$  als abgeschlossener Untergruppe und wir erhalten  $E \cong G/SO(2)$ . Die Liealgebra  $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$  ist dann eine dreidimensionale reelle Liealgebra mit einer Operation von  $S^1 \cong SO(2)$ , die als reelle Darstellung von  $S^1$  isomorph ist zur Summe  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$  der Einsdarstellung mit der offensichtlichen Darstellung. Wir finden also eine Basis  $h, x, y$  von  $\mathfrak{g}$  mit  $[h, x] = y$  und  $[h, y] = -x$  und dann notwendig  $[x, y] = \alpha h$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Durch Umskalieren können wir  $\alpha \in \{1, 0, -1\}$  erreichen. Dann erhalten wir  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  beziehungsweise  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$  und landen nach einiger weiterer Argumentation bei unseren drei ebenen Geometrien.

## Übungen

*Übung 4.4.17.* Ist  $G$  eine Liegruppe und  $N \subset G$  ein abgeschlossener Normalteiler, so ist auch  $G/N$  eine Liegruppe. Hinweis: Man orientiere sich an 4.4.8.

*Übung 4.4.18.* Sind  $G \supset H \supset K$  eine Liegruppe mit abgeschlossenen Untergruppen, so ist die offensichtliche Abbildung  $G/K \rightarrow G/H$  eine glatte Submersion. Ist  $K$  ein Normalteiler in  $H$ , so trägt  $G/K$  zusätzlich eine glatte Rechtsoperation von  $H/K$ . Später wird klar sein, daß wir so ein  $(H/K)$ -Hauptfaserbündel erhalten.

*Übung 4.4.19.* Man zeige für einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  der Dimension  $n$ , daß die Dimension der Graßmann'schen seiner  $m$ -dimensionalen Teilräume gegeben wird durch die Formel

$$\dim(\text{Gr}(m; V)) = m(n - m)$$

*Übung 4.4.20.* Ist  $\varphi : G \rightarrow H$  ein stetiger Homomorphismus von Liegruppen mit abgeschlossenem Bild, so induziert  $\varphi$  einen Isomorphismus von Liegruppen  $(G/\ker \varphi) \xrightarrow{\sim} \text{im } \varphi$ . Hinweis: 4.4.10. Auch hier ist wesentlich, daß  $G$  abzählbar basiert ist.

*Ergänzende Übung 4.4.21.* Gegeben  $G \supset K$  eine Liegruppe mit einer kompakten Untergruppe zeige man, daß die Abbildung  $G \rightarrow G/K$  eigentlich ist.

*Übung 4.4.22.* Gegeben ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum  $V$  und ein Liegruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{PGL}(V)$  erhalten wir durch Bilden des Faserprodukts mit  $\text{SL}(V) \rightarrow \text{PGL}(V)$  eine Hochhebung zu einem Liegruppenhomomorphismus  $\tilde{G} \rightarrow \text{SL}(V)$  für eine Überlagerung  $\tilde{G} \rightarrow G$ .

## 4.5 Abelsche Liegruppen

**Lemma 4.5.1 (Charakterisierungen abelscher Liegruppen).** *Für eine zusammenhängende Liegruppe sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Liegruppe ist abelsch;*
2. *Ihre Liealgebra ist abelsch;*
3. *Die Exponentialabbildung definiert einen Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der Liealgebra in unsere Liegruppe;*
4. *Die Exponentialabbildung definiert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der Liealgebra in unsere Liegruppe.*

*Beweis.* Sei  $G$  unsere Liegruppe. Wir erinnern das Korollar 3.6.17, wonach ein Homomorphismus von einer zusammenhängenden Liegruppe in eine weitere Liegruppe bereits durch sein Differential beim neutralen Element eindeutig festgelegt wird. Wir beginnen mit (1)  $\Leftrightarrow$  (2) und bemerken dazu, daß für jede zusammenhängende Liegruppe gilt

$$\begin{aligned}
 G \text{ abelsch} &\Leftrightarrow \text{Int } g = \text{id} : G \rightarrow G && \forall g \in G \\
 &\Leftrightarrow \text{Ad } g = \text{id} : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } G && \forall g \in G \\
 &\Leftrightarrow \text{ad } X = 0 : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } G && \forall X \in \text{Lie } G \\
 &\Leftrightarrow [X, Y] = 0 && \forall X, Y \in \text{Lie } G
 \end{aligned}$$

Hier haben wir zweimal das Korollar 3.6.17 angewendet. Zum Nachweis der Implikation (1)  $\Rightarrow$  (3) bemerken wir, daß für abelsches  $G$  und  $X, Y \in \text{Lie } G$  beliebig ja auch  $t \mapsto \exp(tX) \exp(tY)$  ein Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow G$  ist. Berechnen wir seine Geschwindigkeit bei  $t = 0$ , so folgt  $\exp(tX) \exp(tY) = \exp(t(X + Y))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und damit  $\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y)$ . Die Exponentialabbildung ist also ein Gruppenhomomorphismus. Ihr Bild  $\exp(\text{Lie } G)$  ist dann eine Untergruppe von  $G$ , die offen ist, da sie eine offene Umgebung des neutralen Elements umfaßt. Wegen  $G$  zusammenhängend folgt daraus  $\exp$  surjektiv, und das zeigt (3)  $\Rightarrow$  (4). Schließlich ist (4)  $\Rightarrow$  (1) offensichtlich.  $\square$

**Proposition 4.5.2 (Abelsche Liegruppen).** *Jede zusammenhängende abelsche Liegruppe ist isomorph zu genau einer Gruppe der Gestalt*

$$S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

*Beweis.* Sei  $G$  unsere Liegruppe. Nach 4.4.20 und 4.5.1 induziert die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus  $\text{Lie } G / \ker(\exp) \xrightarrow{\sim} G$  und der Kern  $\ker(\exp) \subset \text{Lie } G$  ist eine diskrete Untergruppe. Nun kann man die Klassifikation 4.5.5 diskreter Untergruppen endlichdimensionaler reeller Vektorräume anwenden, die im Anschluß diskutiert wird.  $\square$

*Ergänzung 4.5.3.* Wir hätten diesen Satz auch für Matrixliegruppen bereits formulieren und beweisen können. Dennoch sind dieser Satz und sein Beweis in meinen Augen eine gute Illustration für die Kraft unserer neuen abstrakteren Methoden.

4.5.4. Eine Untergruppe einer topologischen Gruppe ist diskret genau dann, wenn es eine Umgebung des neutralen Elements gibt, die unsere Untergruppe nur im neutralen Element trifft. Eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist abgeschlossen, da für eine beliebig vorgegebene Norm jede Cauchy-Folge in unserer diskreten Untergruppe bis auf endlich viele Glieder konstant sein muß.

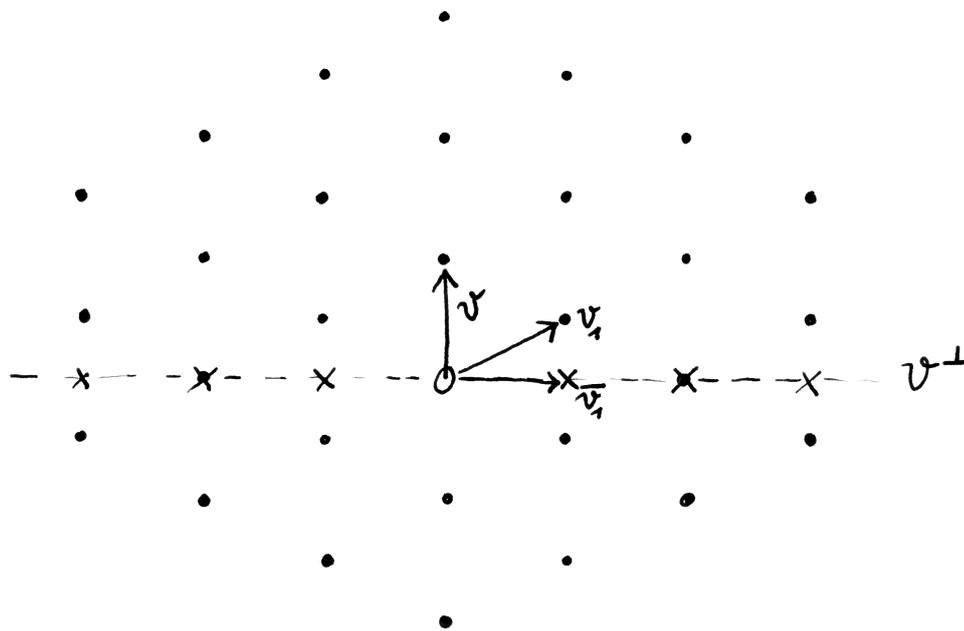
**Satz 4.5.5 (Diskrete Untergruppen reeller Vektorräume).** *Eine Untergruppe der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums ist diskret genau dann, wenn sie als Untergruppe von einer linear unabhängigen Teilmenge unseres Vektorraums erzeugt wird.*

*Beweis.* Das Gruppenerzeugnis einer linear unabhängigen Teilmenge ist offensichtlich diskret. Um auch die andere Implikation zu zeigen, versehen wir unseren endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und argumentieren durch Induktion über die Dimension. Nach ?? trifft unsere diskrete Untergruppe  $L \subset V$  jedes Kompaktum in einer endlichen Menge. Ist  $L$  trivial, so ist der Satz klar. Sonst finden wir in  $L \setminus 0$  einen Vektor  $v$  kürzester Länge. Wir bezeichnen dann mit  $p : V \rightarrow v^\perp$  die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement von  $v$  und behaupten, daß auch  $p(L)$  diskret ist. Sonst finden wir nämlich in  $p(L) \setminus 0$  Vektoren beliebig kleiner Länge. Gegeben  $a \in p(L)$  hat jedoch sein Urbild in  $L$  die Gestalt

$$p^{-1}(a) \cap L = a + cv + \mathbb{Z}v \quad \text{mit } |c| \leq 1/2$$

Insbesondere hat  $a + cv$  die quadrierte Länge  $\|a + cv\|^2 \leq \|a\|^2 + \frac{1}{4}\|v\|^2$ , und für  $0 < \|a\| < \frac{1}{2}\|v\|$  erhielten wir Vektoren in  $L \setminus 0$ , die noch kürzer wären als  $v$ . Dieser Widerspruch zeigt, daß  $p(L)$  diskret liegen muß. Nach Induktionsannahme finden wir also linear unabhängige  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r \in v^\perp$ , die  $p(L)$  erzeugen. Sind dann  $v_i \in L$  Urbilder der  $\bar{v}_i$ , so sind  $v, v_1, \dots, v_r$  linear unabhängig in  $V$  und erzeugen  $L$ .  $\square$

**Definition 4.5.6.** Eine topologische Gruppe heißt ein **Torus** oder präziser ein **kompakter Torus** genau dann, wenn sie isomorph ist zu einem Produkt von endlich vielen Kopien der Kreislinie  $S^1$ . Die Zahl der benötigten Kopien ist nach 3.6.16 wohlbestimmt und heißt der **Rang** unseres Torus.



Die fetten Punkte stellen Elemente einer diskreten Untergruppe der Verschiebungsgruppe der Papierebene dar, bezüglich des durch einen Kringel markierten Ursprungs. Die Kreuzchen stellen Elemente der Projektion  $p(L)$  unseres Gitters  $L$  auf den als gestrichelte Linie eingezeichneten Teilraum  $v^\perp$ .

4.5.7. Nach der Klassifikation in 4.5.2 zusammenhängender abelscher Liegruppen kann man Tori charakterisieren als abelsche kompakte zusammenhängende Liegruppen.

**Definition 4.5.8.** Eine topologische Gruppe heißt **topologisch zyklisch** genau dann, wenn es ein Element darin gibt, dessen Erzeugnis dicht liegt. Solch ein Element heißt dann ein **topologischer Erzeuger**.

4.5.9. Nach [TM] 2.1.13 ist jede topologisch zyklische topologische Gruppe kommutativ, da sie eben eine dichte kommutative Untergruppe hat.

**Proposition 4.5.10.** *Jeder kompakte Torus ist topologisch zyklisch.*

4.5.11. In 4.5.13 geben wir sogar die vollständige Klassifikation aller topologisch zyklischen Liegruppen, aber für den weiteren Fortgang der Theorie ist das nicht mehr von Belang.

*Beweis.* Wir zeigen genauer, daß für  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$  gleichbedeutend sind:

- (1)  $\bar{a} \in \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$  ist kein topologischer Erzeuger;
- (2) Die Elemente  $1, a_1, \dots, a_k$  sind linear abhängig über  $\mathbb{Q}$ ;
- (3) Es gibt einen surjektiven stetigen Homomorphismus von Liegruppen  $\varphi : \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{Z}$  mit  $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$ .

Hier ist (3)  $\Rightarrow$  (1) offensichtlich und (1)  $\Rightarrow$  (3) ergibt sich, da der Quotient nach dem Abschluß des Erzeugnisses von  $\bar{a}$  ja nach 4.5.2 ein nichttrivialer Torus sein muß. Weiter muß jeder Morphismus wie in (3) die Gestalt

$$\overline{(b_1, \dots, b_k)} \mapsto \overline{n_1 b_1 + \dots + n_k b_k}$$

haben für geeignete  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ , nicht alle Null wegen der Surjektivität, und  $\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$  bedeutet dann  $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n_0$  für ein  $n_0 \in \mathbb{Z}$  und damit (2). Dasselbe Argument zeigt aber auch (2)  $\Rightarrow$  (3). Folglich ist in der Tat jeder kompakte Torus topologisch zyklisch.  $\square$

*Ergänzung 4.5.12.* Im Verlauf des vorhergehenden Beweises haben wir unter anderem gezeigt, daß für  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$  genau dann  $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}^k$  in  $\mathbb{R}^k$  dicht liegt, wenn  $1, a_1, \dots, a_k$  linear unabhängig sind über  $\mathbb{Q}$ . Der Beweis dieser Aussage im Rahmen der Lie-Theorie scheint mir besonders transparent.

**Lemma 4.5.13 (Topologisch zyklische kompakte Liegruppen).** *Eine kompakte Liegruppe ist topologisch zyklisch genau dann, wenn sie abelsch ist mit zyklischer Komponentengruppe.*

4.5.14. Das Lemma wird in 5.5.11 noch gebraucht, wo wir zeigen, daß der Zentralisator eines Torus in einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe stets zusammenhängend ist. Stärkere Aussagen, die im folgenden nicht mehr gebraucht werden, faßt dann der anschließende Satz 4.5.15 zusammen.

*Beweis.* Jede topologisch zyklische Gruppe ist abelsch nach [TM] 2.1.13 und jeder Quotient einer topologisch zyklischen Gruppe ist offensichtlich auch topologisch zyklisch. Es bleibt zu zeigen, daß jede kompakte abelsche Liegruppe mit zyklischer Komponentengruppe topologisch zyklisch ist. Sei dazu  $G$  unsere Gruppe und  $g \in G$  ein Repräsentant eines Erzeugers der Komponentengruppe  $G/G^\circ$ . Diese Komponentengruppe ist endlich, sagen wir von der Ordnung  $|G/G^\circ| = m$ . Es folgt  $g^m \in G^\circ$ , und da  $G^\circ$  ein Torus ist, finden wir  $a \in T$  mit  $a^m = g^m$ . Indem wir  $g$  durch  $a^{-1}g$  ersetzen, dürfen wir also  $g^m = 1$  annehmen, und dann erhalten wir einen Isomorphismus  $G^\circ \times (G/G^\circ) \xrightarrow{\sim} G$  mittels der Abbildungsvorschrift  $(b, \bar{g}^n) \mapsto bg^n$ . Ein topologischer Erzeuger dieses Produkts ist aber offensichtlich jedes Paar  $(c, \bar{g})$ , bei dem wir  $c$  so wählen, daß  $c^m$  ein topologischer Erzeuger von  $G^\circ$  wird. Das schließlich ist nach 4.5.10 stets möglich.  $\square$

**Satz 4.5.15 (Klassifikation topologisch zyklischer Liegruppen).** *Jede topologisch zyklische Liegruppe ist entweder isomorph zu  $\mathbb{Z}$  oder aber isomorph zu  $S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  für eine wohlbestimmte Zahl  $r \geq 0$  von Kopien von  $S^1$  und ein wohlbestimmtes  $m \geq 1$ .*

*Beweis.* Der kompakte Fall wurde bereits im Beweis von Lemma 4.5.13 vollständig geklärt. Es bleibt zu zeigen, daß jede nichtkompakte topologisch zyklische Liegruppe isomorph ist zu  $\mathbb{Z}$ . Nach Übung 4.5.20 ist unsere Gruppe ja isomorph zum Produkt ihrer Komponentengruppe mit ihrer Einskomponente. Die Einskomponente muß ein kompakter Torus sein, da unsere Gruppe sonst einen surjektiven Gruppenhomomorphismus auf die nicht topologisch zyklische Gruppe  $\mathbb{R}$  hätte. Desgleichen muß die Komponentengruppe zyklisch sein, und im nichtkompakten Fall muß die Komponentengruppe dann natürlich unendlich zyklisch sein. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß das Produkt eines nichttrivialen kompakten Torus mit  $\mathbb{Z}$  nicht topologisch zyklisch sein kann.  $\square$

## Übungen

*Übung 4.5.16.* Eine diskrete Untergruppe einer Hausdorffgruppe ist stets abgeschlossen. Hinweis: Sonst gäbe es einen Punkt außerhalb unserer Untergruppe derart, daß jede seiner Umgebungen Punkte aus besagter Untergruppe enthält.

*Übung 4.5.17.* Man bestimme alle stetigen Gruppenhomomorphismen zwischen zwei beliebigen zusammenhängenden abelschen Liegruppen.

*Ergänzende Übung 4.5.18 (Untergruppen reeller Vektorräume).* Eine Untergruppe  $L$  der additiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums  $V$  ist abgeschlossen genau dann, wenn es in  $V$  eine linear unabhängige Familie von Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  gibt und ein  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$  und

$$L = \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_k + \mathbb{Z}v_{k+1} + \dots + \mathbb{Z}v_n$$

Hinweis: Eine abgeschlossene Untergruppe ist stets *glatt* und ihre Einskomponente  $L^\circ$  ist abgeschlossen. Da  $V/L^\circ$  die Quotiententopologie trägt, ist das Bild von  $L$  darin auch abgeschlossen. Man mag auch elementar ohne alle Liethorie mit 1.2.25 und 4.5.5 argumentieren.

*Ergänzende Übung 4.5.19.* Die diskreten Untergruppen von  $\mathbb{C}^\times$  sind genau die Gruppen, die von einer Einheitswurzel oder einer invertierbaren komplexen Zahl außerhalb des Einheitskreises oder je einem Element dieser beiden Arten erzeugt werden.

*Übung 4.5.20 (Struktur abelscher Liegruppen).* Man zeige, daß jede abelsche Liegruppe  $G$  isomorph ist zum Produkt ihrer Einskomponente  $G^\circ$  mit ihrer Komponentengruppe  $G/G^\circ$ , einer diskreten Gruppe. Hinweis: Man beschränke sich der Einfachkeit halber auf den Fall, daß die Komponentengruppe endlich erzeugt ist. Wenn die entsprechenden Vorkenntnisse vorhanden sind, kann man sehr elegant mit [TS] 6.6.5 und [TS] 6.5.6 argumentieren: Die exakte Sequenz  $G^\circ \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/G^\circ$  muß spalten, da  $G^\circ$  divisibel und mithin eine injektive abelsche Gruppe ist.

## 4.6 Morphismen von Tori

4.6.1. Die Menge der stetigen Gruppenhomomorphismen von einer topologischen Gruppe  $G$  nach  $S^1$  notieren wir

$$\mathfrak{X}(G) := \text{GrpTop}(G, S^1)$$

und versehen sie wie in [AN3] 3.10.21 mit der kompakt-offenen Topologie. Offensichtlich bildet  $\mathfrak{X}(G)$  eine Untergruppe der Einheitengruppe des Rings  $\mathcal{C}(G)$  mit seiner punktweisen Verknüpfung. Wir notieren jedoch die Verknüpfung in  $\mathfrak{X}(G)$  additiv in der Hoffnung, daß das anschaulicher wirkt. Elemente  $\lambda \in \mathfrak{X}(G)$  schreiben wir in der Form  $e^\lambda$ , wenn wir sie als komplexwertige Funktionen auffassen und insbesondere, wenn wir sie als komplexwertige Funktionen addieren wollen, so daß also im Ring  $\mathcal{C}(G)$  gilt  $e^{\lambda+\mu} = e^\lambda e^\mu$ . Gegeben ein stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  induziert das Vorschalten von  $\varphi$  in der Gegenrichtung einen stetigen Homomorphismus abelscher topologischer Gruppen

$$(\circ\varphi) : \mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$$

4.6.2. Ist  $G$  eine Liegruppe, so liefert für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus  $\chi : G \rightarrow S^1$ , ja sogar für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , das Differential gefolgt von der offensichtlichen Identifikation  $T_1\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $d_e\chi : \text{Lie } G \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann liefert er mit der universellen Eigenschaft der Komplexifizierung auch eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $d_e\chi : \text{Lie}_{\mathbb{C}} G \rightarrow \mathbb{C}$ , also ein Element  $d_e\chi \in (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^*$  des Dualraums. Nach der Produktregel ist  $\chi \mapsto d_e\chi$  ein Gruppenhomomorphismus  $\mathfrak{X}(G) \rightarrow (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^*$ , und man sieht auch leicht, daß er natürlich ist in  $G$ , daß also für jeden Homomorphismus von Liegruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(H) & \rightarrow & (\text{Lie}_{\mathbb{C}} H)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}(G) & \rightarrow & (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^* \end{array}$$

kommutiert, mit  $(\circ\varphi)$  und dem Transponierten des komplexifizierten Differentials  $(d\varphi)^\top$  in den Vertikalen. Ist  $G$  zusammenhängend, so liefert die Vorschrift  $\chi \mapsto d_e\chi$  sogar eine Injektion

$$\mathfrak{X}(G) \hookrightarrow (\text{Lie}_{\mathbb{C}} G)^*$$

Es ist dann üblich, diese Injektion schlicht als Einbettung einer Teilmenge zu denken und zu schreiben und insbesondere  $d_e\chi$  auch schlicht  $\chi$  zu notieren.

*Ergänzung 4.6.3.* In der Fouriertheorie hatten wir für verschiedene kommutative topologische Gruppen auch die Notation  $\text{GrpTop}(G, S^1) = \hat{G}$  eingeführt und diese Menge als die Menge der unitären Charaktere von  $G$  bezeichnet. Im nichtkommutativen Fall meint  $\hat{G}$  jedoch meist die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler unitärer Darstellungen, und im Fall nichtkommutativer Gruppen sind diese keineswegs alle eindimensional.

**Lemma 4.6.4.** *Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $T$  ein Torus, so induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen den stetigen Gruppenhomomorphismen von  $G \rightarrow T$  und den Morphismen abelscher Gruppen  $\mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$  in die Gegenrichtung, in Formeln eine Bijektion*

$$\mathfrak{X} : \text{GrpTop}(G, T) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(\mathfrak{X}(T), \mathfrak{X}(G))$$

*Beweis.* Gilt die Aussage für zwei Tori  $T_1$  und  $T_2$ , so auch für ihr Produkt  $T := T_1 \times T_2$ . Es reicht also, den Fall  $T = S^1$  zu prüfen, und der ist evident.  $\square$

*Ergänzung 4.6.5.* Sind  $G$  und  $H$  abelsche lokal kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppen, so erhalten wir in derselben Weise eine Bijektion

$$\text{GrpTop}(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{GrpTop}(\hat{H}, \hat{G})$$

mit  $\hat{G} = \mathfrak{X}(G)$  der „Pontrjagin-dualen“ Gruppe.

## Übungen

*Übung 4.6.6 (Kompakte abelsche Liegruppen).* Der Funktor  $\mathfrak{X}$  liefert sogar eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Kompakte abelsche} \\ \text{Liegruppen} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Endlich erzeugte abelsche} \\ \text{diskrete Gruppen} \end{array} \right\}^{\text{opp}} \\ Z & \mapsto & \mathfrak{X}(Z) \end{array}$$

Um das zu sehen, zeige man die Aussage des Lemmas 4.6.4 allgemeiner für  $H$  eine nicht notwendig zusammenhängende kompakte abelsche Liegruppe. Hinweis: 4.5.20. Des weiteren prüfe man für jede zyklische, ja für jede endliche kommutative Gruppe  $E$ , daß es Isomorphismen  $E \cong \mathfrak{X}(E)$  gibt. Diese sind jedoch im allgemeinen unkanonisch.

*Übung 4.6.7.* Man zeige, daß eine Sequenz von kompakten abelschen Gruppen  $T' \rightarrow T \rightarrow T''$  exakt ist genau dann, wenn die auf den Charaktergruppen induzierte Sequenz  $\mathfrak{X}(T'') \rightarrow \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(T')$  exakt ist. Hinweis: 4.6.6.

## 5 Struktur kompakter Liegruppen

### 5.1 Maximale Tori in kompakten Liegruppen

**Lemma 5.1.1.** *Seien  $K \supset N$  eine kompakte Liegruppe und eine abgeschlossene normale Untergruppe. Sind  $N$  und  $K/N$  Tori, so ist auch  $K$  ein Torus.*

5.1.2. Diese Aussage hätten wir auch schon viel früher zeigen können. Ich habe sie hierher gestellt, weil sie erst hier beim Beweis des Satzes 5.1.7 über maximale Tori gebraucht werden wird. Eine analoge Aussage gilt im nichtkompakten Fall nicht mehr: Zum Beispiel finden wir in der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen mit drei Zeilen und Spalten einen Normalteiler, der isomorph ist zur Liegruppe  $\mathbb{R}$ , so daß der Quotient danach isomorph ist zur Liegruppe  $\mathbb{R}^2$ . Dennoch ist unsere Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen nicht kommutativ.

*Beweis.* Wäre  $K$  nicht zusammenhängend, so könnte auch  $K/N$  nicht zusammenhängend sein, etwa nach [TM] 2.2.11. Also ist  $K$  zusammenhängend und wir müssen nach 4.5.1 und 4.5.7 nur zeigen, daß seine Liealgebra abelsch ist. Nach 2.4.10 finden wir auf  $\text{Lie } K$  ein  $(\text{Ad } K)$ -invariantes Skalarprodukt. Das liefert eine Zerlegung von  $\text{Lie } K$  in ein Produkt von  $(\text{Ad } K)$ -stabilen und damit auch  $\text{ad}(\text{Lie } K)$ -stabilen Teilräumen alias Idealen

$$\text{Lie } K = \text{Lie } N \oplus (\text{Lie } N)^\perp$$

Die Projektion definiert nun aber offensichtlich einen Isomorphismus von Liealgebren  $(\text{Lie } N)^\perp \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(K/N)$ , woraus folgt, daß  $\text{Lie } K$  abelsch ist.  $\square$

**Definition 5.1.3.** Unter einem **Torus in einer topologischen Gruppe** versteht man eine Untergruppe, die mit der induzierten Topologie ein Torus ist, genauer ein kompakter Torus im Sinne von 4.5.6. Unter einem **maximalen Torus** versteht man einen Torus, der nicht in einem anderen Torus echt enthalten ist.

**Definition 5.1.4.** Gegeben eine Gruppe  $G$  und darin eine Teilmenge  $T \subset G$  setzen wir

$$Z_G(T) := \{g \in G \mid gtg^{-1} = t \quad \forall t \in T\}$$

und nennen diese Untergruppe den **Zentralisator von  $T$  in  $G$** .

**Lemma 5.1.5.** *Der Zentralisator eines maximalen Torus  $T$  in einer kompakten Liegruppe  $K$  hat als Einskomponente genau den besagten Torus selbst, in Formeln*

$$Z_K(T)^\circ = T$$

*Vorschau 5.1.6.* In 5.5.11 zeigen wir, daß in einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend sein muß, so daß für  $K$  zusammenhängend sogar gilt  $Z_K(T) = T$ . Der Beweis dieses Resultats basiert jedoch auf dem Satz über maximale Tori 5.1.7, und unser Lemma hinwiederum wird beim Beweis dieses Satzes gebraucht.

*Beweis.* Sei  $K$  unsere kompakte Liegruppe und  $T \subset K$  ein maximaler Torus. In Formeln behauptet die Proposition  $Z_K(T)^\circ = T$ . Nach 3.6.21 reicht es,  $\text{Lie } Z_K(T) = \text{Lie } T$  zu zeigen. Für jedes  $x \in \text{Lie } Z_K(T)$  ist aber  $\mathbb{R} \times T \rightarrow K, (a, t) \mapsto \exp(ax)t$  ein Gruppenhomomorphismus, und hätten wir  $x \notin \text{Lie } T$ , so wäre das Bild dieses Gruppenhomomorphismus eine zusammenhängende abelsche Untergruppe von  $K$ , die  $T$  echt umfaßt. Der Abschluß dieses Bildes wäre dann zusätzlich kompakt und immer noch abelsch und damit nach 4.5.2 ein Torus. Dieser Torus müßte  $T$  echt umfassen, und dann könnte  $T$  nicht maximal gewesen sein.  $\square$

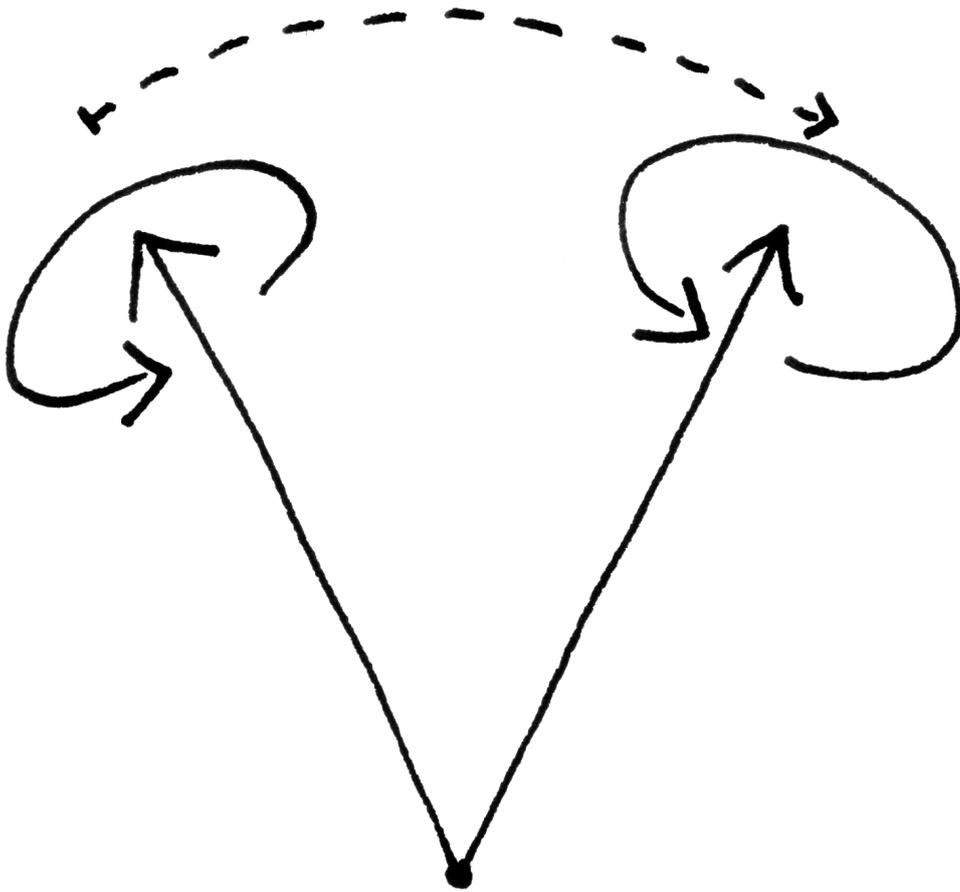
**Satz 5.1.7 (über maximale Tori).** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe gehört jedes Element zu einem maximalen Torus und je zwei maximale Tori sind konjugiert.*

*Beispiel 5.1.8.* In der Gruppe  $U(n)$  bilden die unitären Diagonalmatrizen einen maximalen Torus, und man zeigt leicht direkt, daß in diesem Fall je zwei maximale Tori konjugiert sind: Das Argument geht davon aus, daß eine Menge von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen stets simultan diagonalisierbar ist nach Übung [LA2] 7.8.10. Wenn wir eine Basis aus simultanen Eigenvektoren wählen, liegt unsere Untergruppe in der Menge der bezüglich dieser Basis diagonalen Matrizen.

*Beweis.* Sei  $K$  unsere zusammenhängende kompakte Liegruppe. Aus Dimensionsgründen gibt es in  $K$  einen maximalen Torus  $T$ . Wir zeigen im folgenden

$$K = \bigcup_{g \in K} gTg^{-1}$$

Der Satz folgt, denn ist dann  $S \subset K$  ein weiterer maximaler Torus, so finden wir nach 4.5.10 einen topologischen Erzeuger  $s \in S$  und ein  $g \in K$  mit  $s \in gTg^{-1}$  und damit  $S \subset gTg^{-1}$  und so  $S = gTg^{-1}$ . Es bleibt also wie oben in Formelsprache behauptet zu zeigen, daß die Konjugierten eines festen maximalen Torus bereits die ganze Gruppe überdecken. Das zeigen wir durch vollständige Induktion über die Dimension unserer Gruppe. Der Fall einer nulldimensionalen Gruppe ist klar. Ist ganz allgemein  $Z \subset K$  das Zentrum und  $Z^\circ$  seine Einskomponente, so ist  $TZ^\circ$  nach 4.5.7 ein Torus und es folgt  $T \supset Z^\circ$ . Nach 5.1.1 ist dann auch  $T/Z^\circ \subset K/Z^\circ$  ein maximaler Torus, und ist  $Z^\circ$  nicht trivial, so folgt unsere Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Wir dürfen also  $Z^\circ$  trivial alias  $Z$



Dies Bild soll illustrieren, daß in der Gruppe  $SO(3)$  aller Drehungen des Raums je zwei maximale Tori konjugiert sind. In der Tat ist in dieser Gruppe jeder maximale Torus eindimensional und besteht aus den Drehungen zu einer festen Drehachse. Je zwei maximale Tori sind dann konjugiert, da eben je zwei Drehachsen ihrerseits durch eine Drehung ineinander überführt werden können, wie im Bild durch den gestrichelten Pfeil angedeutet.

diskret und damit endlich annehmen und dürfen auch annehmen, daß  $K$  positive Dimension hat, also nicht nur aus einem Punkt besteht. Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir nun zunächst

$$\bigcup_{g \in K} g(T \setminus Z)g^{-1} = K \setminus Z \quad (*)$$

Haben wir das gezeigt, so gehen wir auf beiden Seiten zum Abschluß in  $K$  über. Der Abschluß der rechten Seite ist sicher  $K$ . Der Abschluß von  $T \setminus Z$  ist  $T$ , da in einer kompakten Gruppe positiver Dimension auch jeder maximale Torus positive Dimension haben muß, was man etwa daran erkennt, daß der Abschluß des Bildes jeder Einparameteruntergruppe ein Torus ist. Der Abschluß der linken Seite umfaßt also  $\bigcup_{g \in K} gTg^{-1}$ . Er muß aber sogar mit dieser Vereinigung zusammenfallen, da sie abgeschlossen ist als Bild einer stetigen Abbildung  $K \times T \rightarrow K$  von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum. Es reicht also, wenn wir aus der Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung  $(*)$  folgern unter der zusätzlichen Annahme, daß  $K$  endliches Zentrum hat und nicht nur aus einem Punkt besteht. Nach 4.5.1 hat dann  $K$  mindestens die Dimension zwei und insbesondere ist nach [TM] 1.4.13 mit  $K$  auch  $K \setminus Z$  zusammenhängend. Es reicht also, wenn wir zeigen, daß

$$\bigcup_{g \in K} g(T \setminus Z)g^{-1}$$

sowohl offen als auch abgeschlossen ist in  $K \setminus Z$ . Daß es abgeschlossen ist in  $K \setminus Z$  folgt aus der Identität

$$\bigcup_{g \in K} g(T \setminus Z)g^{-1} = \left( \bigcup_{g \in K} gTg^{-1} \right) \setminus Z$$

zusammen mit unserer Erkenntnis von eben, daß die Vereinigung auf der rechten Seite abgeschlossen ist in  $K$ . Um zu zeigen, daß es auch offen ist, müssen wir nur für jeden Punkt  $t \in T \setminus Z$  nachweisen, daß eine ganze Umgebung von  $t$  zu  $\bigcup_{g \in K} g(T \setminus Z)g^{-1}$  gehört. Da  $t$  nicht im Zentrum von  $K$  liegt, dürfen wir auf die Einskomponente seines Zentralisators  $H := Z_K(t)^\circ$  die Induktionsvoraussetzung anwenden und finden erst  $H = \bigcup_{g \in H} gTg^{-1}$  und als Folgerung dann auch  $H \setminus Z = \bigcup_{g \in H} g(T \setminus Z)g^{-1}$ . Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} K \times (H \setminus Z) &\rightarrow K \\ (g, h) &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

und sind fertig mit dem Umkehrsatz, wenn wir nur zeigen können, daß sie an der Stelle  $(1, t)$  surjektives Differential hat. Gleichbedeutend können wir natürlich

zeigen, daß die Abbildung  $K \times H \rightarrow K$ ,  $(g, h) \mapsto t^{-1}gthg^{-1}$  an der Stelle  $(1, 1)$  surjektives Differential hat. Nun ist aber dieses Differential gerade die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Lie } K \times \text{Lie } H &\rightarrow \text{Lie } K \\ (x, y) &\mapsto (\text{Ad } t^{-1})(x) + y - x \end{aligned}$$

und nach 4.1.21 wissen wir um die Gleichung

$$\text{Lie } H = \ker(\text{Ad } t - \text{id}) = \ker(\text{Ad } t^{-1} - \text{id})$$

Andererseits ist  $\text{Ad } t$  diagonalisierbar über  $\mathbb{C}$  nach 2.4.10, es muß ja auch auf der Restriktion der adjungierten Darstellung von  $K$  auf  $T$  ein  $T$ -invariantes Skalarprodukt geben, und bezüglich dieses Skalarprodukts ist  $\text{Ad } t$  dann sogar unitär. Ebenso ist auch  $(\text{Ad } t)^{-1} - \text{id}$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar. Für jeden diagonalisierbaren Endomorphismus  $f$  eines endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums  $V$  gilt aber  $V = \ker f \oplus \text{im } f$ . Diese Identität wenden wir an auf die Komplexifizierung  $V = \text{Lie}_{\mathbb{C}} K$  der Liealgebra von  $K$  mit  $f = (\text{Ad } t)^{-1} - \text{id}$  und folgern die Surjektivität unseres Differentials zunächst nach Komplexifizierung, aber damit dann auch schon auf  $\text{Lie } K$  selbst.  $\square$

**Korollar 5.1.9.** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist das Zentrum der Schnitt aller maximalen Tori.*

*Beweis.* Jedes Element des Zentrums liegt in einem maximalen Torus, also in jedem dazu konjugierten Torus, also in jedem maximalen Torus. Liegt umgekehrt ein Element in jedem maximalen Torus, so kommutiert es mit jedem Element jedes maximalen Torus.  $\square$

## Übungen

*Übung 5.1.10.* Die maximalen abelschen Unteralgebren der Liealgebra einer kompakten Liegruppe sind genau die Liealgebren der maximalen Tori.

*Übung 5.1.11.* Eine maximale abelsche Unteralgebra einer Liealgebra liefert eine maximale abelsche Unteralgebra unter jeder Erweiterung des Grundkörpers.

## 5.2 Klassifikation im Rang Eins

**Satz 5.2.1 (Kompakte Liegruppen vom Rang Eins).** *Jede zusammenhängende kompakte Liegruppe mit eindimensionalen maximalen Tori ist isomorph zu genau einer der drei Liegruppen  $\text{SO}(3)$ ,  $\text{SU}(2)$  oder  $S^1$ .*

5.2.2. Die nach 5.1.7 wohldefinierte Dimension eines maximalen Torus in einer kompakten Liegruppe heißt auch der **Rang** unserer kompakten Liegruppe, daher der Name des Satzes. Im folgenden notieren wir für jede Liegruppe  $G$  ihre komplexifizierte Liealgebra im Sinne von 2.2.13 mit  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} G$ .

*Beweis.* Sei  $K$  unsere Gruppe. Wir nehmen  $\dim K > 1$  an und müssen zeigen, daß  $K$  isomorph ist zu  $SO(3)$  oder zu  $SU(2)$ . Wir zeigen zunächst  $\dim K = 3$ . Sei dazu  $T \subset K$  ein maximaler Torus und  $\mathfrak{g} := \text{Lie}_{\mathbb{C}} K$  die komplexifizierte Liealgebra. Die komplexe Konjugation induziert eine schieflineare Involution  $c : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , deren Invarianten in natürlicher Weise mit der ursprünglichen Liealgebra  $\text{Lie } K$  selbst identifiziert werden können. Jetzt zerlegen wir  $\mathfrak{g}$  unter der adjungierten Operation des maximalen Torus wie in 2.5.9 in Gewichtsräume

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{X}(T)} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

In Formeln haben wir also  $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{Ad } t)(X) = \alpha(t)X \ \forall t \in T\}$ . Hier gilt  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ , wie der Leser unschwer nachrechnet. Weiter gilt die Formel  $c(\mathfrak{g}_{\alpha}) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , denn für  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  und alle  $t \in T$  haben wir notwendig

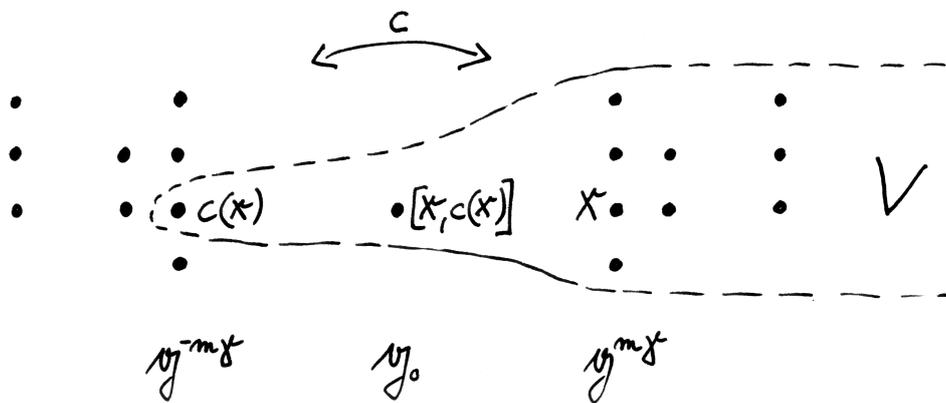
$$\begin{aligned} (\text{Ad } t)(c(X)) &= c(\text{Ad } t)X \\ &= c(\alpha(t)X) \\ &= \alpha(t)^{-1}c(X) \end{aligned}$$

Hier verwenden wir, daß  $\alpha(t)$  stets eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis ist, und für diese fällt das Inverse mit dem komplex Konjugierten zusammen. Da unser maximaler Torus nach 5.1.5 zumindest die Einszusammenhangskomponente seines eigenen Zentralisators ist – daß unser maximaler Torus sogar genau sein eigener Zentralisator ist, zeigen wir erst später – folgt mit 4.1.22 zunächst  $\text{Lie } T = \text{Lie } Z_K(T) = \{X \in \text{Lie } K \mid (\text{Ad } t)(X) = X \ \forall t \in T\}$  und dann auch in der Komplexifizierung  $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie}_{\mathbb{C}} T$ . Ist die Dimension unserer Gruppe größer als Eins, so gibt es folglich mindestens ein  $\alpha \in \mathfrak{X}(T) \setminus 0$  mit  $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0 \neq \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Jetzt wählen wir einen Erzeuger  $\gamma$  der Charaktergruppe  $\mathfrak{X}(T)$  unseres maximalen Torus und  $m > 0$  kleinstmöglich mit  $\mathfrak{g}_{m\gamma} \neq 0$ . Wählen wir dann  $X \in \mathfrak{g}_{m\gamma}$  von Null verschieden, so haben wir  $[X, c(X)] \neq 0$ , da sonst die  $c$ -Invarianten in  $\mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}c(X)$  eine zweidimensionale abelsche Unteralgebra von  $\text{Lie } K$  bildeten, im Widerspruch zu 5.1.10. Also ist  $[X, c(X)]$  eine Basis von  $\mathfrak{g}_0$ . Jetzt betrachten wir in  $\mathfrak{g}$  den Untervektorraum

$$V = \mathbb{C}c(X) \oplus \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}_{n\gamma}$$

Er ist offensichtlich stabil unter  $\text{ad } X$  und  $\text{ad } c(X)$ , folglich hat der Kommutator  $[\text{ad } X, \text{ad } c(X)] = \text{ad}[X, c(X)]$  Spur Null auf  $V$ , und damit auch  $\text{ad}(H)$  für alle  $H \in \text{Lie}_{\mathbb{C}} T$ . Bezeichnen wir der Einfachheit halber das Differential von  $\gamma$  auch mit  $\gamma : \text{Lie } T \rightarrow \mathbb{C}$ , so erhalten wir für alle  $H \in \text{Lie } T$  nach 4.6.2 die Identität

$$0 = \text{tr}(\text{ad } H : V \rightarrow V) = -m\gamma(H) + \sum_{n \geq m} n\gamma(H) \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{n\gamma})$$



Versuch einer graphischen Darstellung dessen, was wir über  $\mathfrak{g} \supset V$  in der Mitte des Beweises von 5.2.1 wissen. Die fetten Punkte stellen Basisvektoren von  $\mathfrak{g}$  dar, die fetten Punkte in einer Vertikalen Basisvektoren eines Gewichtsraums  $\mathfrak{g}_\alpha$ .

Daraus folgt sofort  $\dim \mathfrak{g}_{m\gamma} = 1$  und  $\dim \mathfrak{g}_{n\gamma} = 0$  für  $n > m$ . Wenden wir dieselbe Überlegung mit  $-\gamma$  an statt mit  $\gamma$ , oder beachten wir alternativ unsere Symmetrie  $c$ , so erhalten wir  $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3$  wie gewünscht. Andererseits wissen wir, daß  $\text{Lie } K$  triviales Zentrum hat, da ja nach 5.1.10 jede maximale abelsche Unteralgebra von  $\text{Lie } K$  eindimensional ist, so daß also die maximalen abelschen Unteralgebren von  $\text{Lie } K$  genau die eindimensionalen Teilräume sind. Die adjungierte Darstellung

$$K \rightarrow \text{GL}(\text{Lie } K)$$

hat nach 4.1.17 also injektives Tangential. Wählen wir mithilfe von 2.4.10 ein  $K$ -invariantes Skalarprodukt auf  $\text{Lie } K$ , so hat durch Dimensionsvergleich der induzierte Homomorphismus

$$K \rightarrow \text{SO}(\text{Lie } K)$$

bijektives Tangential beim neutralen Element und ist folglich eine stetige Surjektion mit diskretem, also endlichem Kern. Ist diese Surjektion ein Isomorphismus, so gilt  $K \cong \text{SO}(3)$  und wir sind fertig. Sonst wenden wir das im Anschluß bewiesene Lemma 5.2.3 an und sind auch fertig.  $\square$

**Lemma 5.2.3.** *Sei  $K$  eine kompakte zusammenhängende Liegruppe. Gibt es einen surjektiven stetigen Homomorphismus mit endlichem Kern  $\varphi : K \rightarrow \text{SO}(3)$ , so gilt  $K \cong \text{SU}(2)$  oder  $K \cong \text{SO}(3)$ .*

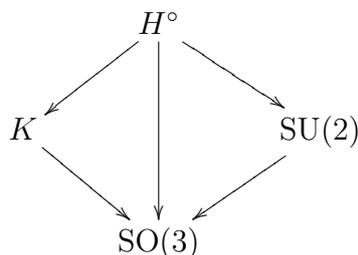
5.2.4. Ich gebe drei verschiedene Beweise. Der erste baut nur auf in dieser Vorlesung bereits bewiesenen Resultaten auf, die anderen setzen jeweils verschiedene zusätzliche Kenntnisse voraus.

*Erster Beweis.* Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } K & \xrightarrow{\sim} & \text{Lie } \text{SO}(3) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ K & \xrightarrow{\varphi} & \text{SO}(3) \end{array}$$

Die Exponentialabbildung ist für zusammenhängende kompakte Liegruppen nach 5.1.7 stets surjektiv. Aus der expliziten Beschreibung der Exponentialabbildung der Drehgruppe in 1.2.27 erkennt man, daß das Urbild  $\exp^{-1}(\text{id}) \subset \text{Lie } \text{SO}(3)$  bezüglich eines geeigneten Skalarprodukts eine disjunkte Vereinigung von konzentrischen Kugelschalen  $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots$  der Radien  $0, 1, 2, \dots$  ist, wobei  $S_0$  nur aus dem Ursprung besteht, aber doch noch als „entartete Kugelschale“ durchgehen mag. Unter  $\exp : \text{Lie } K \rightarrow K$  müssen alle diese Kugelschalen oder genauer deren Urbilder  $S_n^{\mathfrak{g}} \subset \text{Lie } K$  jeweils auf einen einzigen Punkt der diskreten Untergruppe  $\ker \varphi$  abgebildet werden, und die Vereinigung dieser Bilder ist auch ganz

$\ker \varphi$ . Insbesondere geht die Kugelschale  $S_1^{\mathfrak{g}}$  mit Radius Eins auf einen einzigen Punkt  $z \in K$ . Durch diesen Punkt  $z$  laufen notwendig alle nichtkonstanten Einparameteruntergruppen  $\gamma$  von  $K$ , ja es gibt für jedes derartige nichtkonstante  $\gamma$  sogar ein  $t$  mit  $\gamma(t) = z = \gamma(-t)$ , und das zeigt sofort  $z^2 = e$ . Induktiv folgt  $\exp(S_n^{\mathfrak{g}}) = z^n$ . Die einzig möglichen Fälle sind also  $|\ker \varphi| = 1$  und  $|\ker \varphi| = 2$ . Im ersten Fall ist  $\varphi$  ein Isomorphismus. In jedem Fall mag man einen surjektiven stetigen Gruppenhomomorphismus  $\phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  wählen und die Liegruppe  $H = \{(g, s) \in K \times \mathrm{SU}(2) \mid \varphi(g) = \phi(s)\}$  betrachten mitsamt dem offensichtlichen stetigen Gruppenhomomorphismus  $H \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ . Die Einskomponente  $H^\circ$  von  $H$  paßt in ein kommutatives Diagramm von Liegruppen der Gestalt



Auf den Liealgebren induzieren alle Morphismen dieses Diagramms Isomorphismen, folglich sind alle Morphismen dieses Diagramms surjektiv. Da aber der Kern der Vertikale  $H^\circ \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  nach unseren bisherigen Erkenntnissen, nun angewandt auf  $H^\circ$  statt auf  $K$ , auch höchstens zwei Elemente haben kann, müssen im zweiten Fall die oberen schrägen Pfeile beide Isomorphismen sein. Wir folgern  $K \cong H^\circ \cong \mathrm{SU}(2)$ .  $\square$

*Zweiter Beweis.* Dieser Beweis setzt Kenntnisse in Überlagerungstheorie voraus. Da die Sphäre  $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$  einfach wegzusammenhängend ist nach [TF] 1.2.23, und da  $K \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$  sicher eine Überlagerung ist, existiert nach [TF] 3.4.13 ein Lift von  $s : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{s} : \mathrm{SU}(2) \rightarrow K$  mit  $1 \mapsto 1$ . Wir zeigen, daß dieser Lift ein Gruppenhomomorphismus ist. In der Tat sind aber sowohl  $m \circ (\tilde{s} \times \tilde{s})$  als auch  $\tilde{s} \circ m$  Lifts der Abbildung  $s \circ m : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  mit  $(1, 1) \mapsto 1$  und stimmen folglich überein. Da der Kern eines und jedes surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  aus zwei Elementen besteht, muß in der Sequenz  $\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow K \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$  einer der beiden Pfeile ein Isomorphismus sein.  $\square$

*Dritter Beweis.* Dieser Beweis setzt zusätzliche Kenntnisse über Darstellungstheorie voraus, genauer die Tatsache, daß nach [TM] 4.7.7 außer dem Neutralen jedes Element einer kompakten topologischen Gruppe auch auf mindestens einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung nichttrivial operiert. Ist unsere Surjektion  $K \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$  kein Isomorphismus, so hat  $K$  nach [TM] 4.7.7 auch irreduzible

Darstellungen, die nicht von irreduziblen Darstellungen von  $SO(3)$  herkommen. Wegen der Klassifikation der Darstellungen der Liealgebra hat  $K$  also eine irreduzible Darstellung gerader Dimension. Darin ist die von  $\exp(\text{Lie } K)$  erzeugte Untergruppe aber nach 1.3.13 isomorph zu  $SU(2)$  und wir erhalten so einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $K \rightarrow SU(2)$ . Dieser muß bijektiv sein, da sonst  $K$  nach [TM] 4.7.7 auch irreduzible Darstellungen besitzen müßte, die nicht von irreduziblen Darstellungen von  $SU(2)$  herkommen. Die einfachen Darstellungen der  $SU(2)$  liefern jedoch bereits alle einfachen endlichdimensionalen Darstellungen seiner komplexifizierten Liealgebra.  $\square$

### 5.3 Weylgruppen kompakter Liegruppen

**Satz 5.3.1 (Starrheit kompakter Tori).** *Seien  $S$  und  $T$  kompakte Tori und sei  $\varphi : Z \rightarrow \text{GrpTop}(S, T)$  eine durch einen zusammenhängenden topologischen Raum  $Z$  parametrisierte Familie stetiger Gruppenhomomorphismen  $S \rightarrow T$ , die stetig vom Parameter  $z \in Z$  abhängt in dem Sinne, daß die induzierte Abbildung  $Z \times S \rightarrow T$  stetig ist. So ist unsere Familie  $\varphi$  konstant.*

5.3.2. Der Satz gilt mit demselben Beweis für beliebige kompakte abelsche Liegruppen, aber der Fall von Tori ist für das Weitere besonders wichtig. Eine gewisse Intuition mag [AN3] 2.7.29 geben.

*Beweis.* Gegeben  $z \in Z$  bezeichnen wir den zugehörigen Homomorphismus mit  $\varphi_z : S \rightarrow T$ . Für beliebige  $s \in S, t \in T$  ist

$$Z_{s,t} := \{z \in Z \mid \varphi_z(s) = t\}$$

abgeschlossen in  $Z$ . Für  $n \geq 1$  betrachten wir nun in einer beliebigen Gruppe  $G$  die Teilmenge  $G[n] := \{g \in G \mid g^n = 1\}$  aller Elemente, deren Ordnung  $n$  teilt. In unserem Fall sind  $S[n]$  und  $T[n]$  endlich und jeder Gruppenhomomorphismus schickt sicher  $S[n]$  nach  $T[n]$ . Für  $s \in S[n]$  haben wir also eine endliche Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen

$$Z = \bigcup_{t \in T[n]} Z_{s,t}$$

Da  $Z$  zusammenhängend ist, muß für  $s \in S$  von endlicher Ordnung also  $\varphi_z(s)$  unabhängig sein von  $z$ . Da jedoch die Elemente endlicher Ordnung in unserem Torus  $S$  dicht liegen, folgt daraus, daß  $\varphi_z$  unabhängig ist von  $z$ .  $\square$

**Definition 5.3.3.** Der **Normalisator** einer Untergruppe  $H$  in einer Gruppe  $G$  ist definiert als die Untergruppe  $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$  von  $G$ .

**Proposition 5.3.4.** Gegeben  $S \subset G$  ein Torus in einer topologischen Gruppe liegt die Einszusammenhangskomponente seines Normalisators bereits in seinem Zentralisator, in Formeln

$$(\mathbb{N}_G S)^\circ \subset Z_G S$$

*Beweis.* Wir wenden Proposition 5.3.1 über die Starrheit von Tori an auf die Abbildung  $\varphi : (\mathbb{N}_G S)^\circ \rightarrow \text{GrpTop}(S, S)$ ,  $g \mapsto \text{int } g$  und folgern  $\text{int } g$  konstant, also  $\text{int } g = \text{int } e = \text{id}_S$  für alle  $g \in (\mathbb{N}_G S)^\circ$ .  $\square$

**Definition 5.3.5.** Die **Weylgruppe**  $W = W(K, T)$  einer kompakten Liegruppe, genauer eines Paares  $K \supset T$  bestehend aus einer kompakten Liegruppe mitsamt einem maximalen Torus, ist der Quotient des Normalisators unseres Torus nach dem Torus selbst, in Formeln

$$W = (\mathbb{N}_K T)/T$$

*Beispiel 5.3.6.* Der Normalisator des maximalen Torus  $T$  aller Diagonalmatrizen in der unitären Gruppe  $U(n)$  besteht genau aus allen Matrizen, die die simultanen Eigenräume  $\mathbb{C} e_\nu$  unserer Diagonalmatrizen permutieren, als da heißt aus allen unitären Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben. In diesem Fall bilden die Permutationsmatrizen ein Repräsentantensystem für die Weylgruppe.

*Beispiel 5.3.7.* Im Fall der Drehgruppe  $SO(3)$  besteht ein maximaler Torus aus allen Drehungen um eine feste Achse und sein Normalisator aus allen Drehungen, die besagte Achse in sich selber überführen, aber nicht notwendig punktweise festhalten. Die Weylgruppe besteht aus zwei Elementen, und Repräsentanten des nicht neutralen Elements sind alle Drehungen, die besagte Achse „auf den Kopf stellen“.

**Korollar 5.3.8.** Ist  $K$  eine kompakte Liegruppe und  $T \subset K$  ein maximaler Torus, so ist die Weylgruppe  $W = (\mathbb{N}_K T)/T$  endlich.

*Bweis.* Wir haben  $(\mathbb{N}_K T)^\circ = (Z_K T)^\circ = T$  nach 5.3.4 und 5.1.5, folglich ist  $(\mathbb{N}_K T)/T$  diskret als topologischer Raum. Dieser Raum ist jedoch auch kompakt und folglich endlich.  $\square$

## Übungen

*Übung 5.3.9.* Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung  $V$  einer Liegruppe  $G$  und ein Torus  $T \subset G$  induziert die Operation seines Normalisators  $\mathbb{N}_G T$  durch Konjugation auf  $T$  natürlich eine Operation von  $\mathbb{N}_G T$  auf der Charaktergruppe  $\mathfrak{X}(T)$ . Man zeige für die Gewichtsräume von  $V$  unter  $T$  aus 2.5.9 die Formel

$$nV_\chi = V_{n\chi} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_G(T) \text{ und } \chi \in \mathfrak{X}(T).$$

## 5.4 Gitterspiegelungsgruppen

**Definition 5.4.1.** Eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe  $X$  nennen wir ein **Gitter**. Unter einer **Gitterspiegelung** oder kurz **Spiegelung** verstehen wir einen Automorphismus eines Gitters  $s : X \xrightarrow{\sim} X$  derart, daß sein Quadrat die Identität ist und die Untergruppe der Elemente, die auf ihr Negatives gehen, unendlich zyklisch, in Formeln  $s^2 = \text{id}_X$  und  $X^{-s} \cong \mathbb{Z}$ . Unter einer **Wurzel zu einer Gitterspiegelung** verstehen wir ein Element unseres Gitters  $\alpha \in X$  derart, daß sich jeder Punkt unseres Gitters von seinem Spiegelbild um ein ganzzahliges Vielfaches des besagten Elements unterscheidet, in Formeln  $s\lambda - \lambda \in \mathbb{Z}\alpha \ \forall \lambda \in X$ .

5.4.2 (**Gitterspiegelungen, Wurzeln und Kowurzeln**). Ist  $X$  ein Gitter und  $s : X \rightarrow X$  eine Gitterspiegelung und  $\alpha \in X$  eine Wurzel zu  $s$ , so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\alpha^\vee : X \rightarrow \mathbb{Z}$ , sprich „Alpha Tschech“, mit

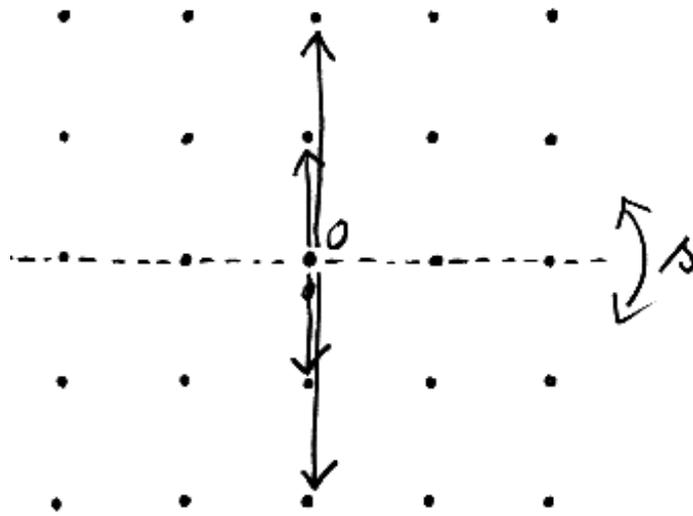
$$s\lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in X$$

Hier verwenden wir für das Auswerten von  $\chi \in X^* = \text{Hom}(X, \mathbb{Z})$  auf  $\lambda \in X$  die symmetrischere Notation  $\chi(\lambda) = \langle \lambda, \chi \rangle$ . Unser  $\alpha^\vee$  heißt die **Kowurzel** zur Wurzel  $\alpha$  der Spiegelung  $s$ . Wegen  $s\alpha = -\alpha$  gilt stets  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ . Umgekehrt ist auch für jedes Paar  $(\alpha, \alpha^\vee)$  mit  $\alpha \in X$  und  $\alpha^\vee \in X^*$  und  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  die Abbildung  $s_{\alpha, \alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  eine Gitterspiegelung. Das Negative einer Wurzel zu einer Gitterspiegelung ist stets wieder eine Wurzel zu derselben Gitterspiegelung. Zu jeder Gitterspiegelung  $s$  gibt es mindestens zwei und höchstens vier Wurzeln: Genauer sind die beiden Erzeuger der unendlich zyklischen Gruppe  $X^{-s}$  aller Vektoren  $\lambda \in X$  mit  $s\lambda = -\lambda$  stets mögliche Wurzeln, und nehmen die zugehörigen Kowurzeln auf  $X$  nur gerade Werte an, so sind die Doppelten besagter Erzeuger auch noch mögliche Wurzeln. Damit sind dann aber auch bereits alle Möglichkeiten ausgeschöpft.

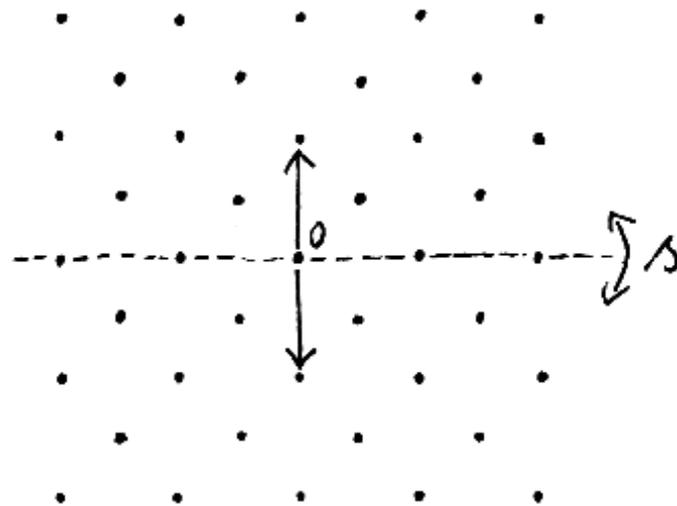
**Definition 5.4.3.** Eine **endliche Gitterspiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Gitters, die von Spiegelungen erzeugt wird. Eine **stabile Wurzelwahl** für eine endliche Gitterspiegelungsgruppe ist eine Teilmenge des zugrundeliegenden Gitters, die (1) stabil ist unter der Spiegelungsgruppe, die (2) aus **Wurzeln zu Spiegelungen** der Spiegelungsgruppe besteht und die (3) zu jeder Spiegelung der Spiegelungsgruppe genau zwei Wurzeln enthält, von denen die Eine dann natürlich die Negative der Anderen sein muß.

*Ergänzung 5.4.4.* In der Literatur trifft man statt endlichen Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl meist das äquivalente Konzept eines **Wurzeldatums** an. Darunter versteht man ein Datum

$$(X, R, X^\vee, R^\vee, \phi, \tau)$$



Eine Gitterspiegelung, zu der es vier Wurzeln gibt.



Eine Gitterspiegelung, zu der es nur zwei Wurzeln gibt.

bestehend aus zwei Gittern  $X, X^\vee$ , einer bilinearen Abbildung  $\phi : X \times X^\vee \rightarrow \mathbb{Z}$ , die das eine Gitter mit dem Dualen des Anderen identifiziert und üblicherweise  $(\lambda, \nu) \mapsto \langle \lambda, \nu \rangle$  notiert wird, sowie endlichen Teilmengen  $R \subset X$  und  $R^\vee \subset X^\vee$  mitsamt einer Bijektion  $\tau : R \xrightarrow{\sim} R^\vee$ , die üblicherweise  $\alpha \mapsto \alpha^\vee$  notiert wird, so daß gilt  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 \forall \alpha \in R$  und  $\beta \in R \Rightarrow \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$  und  $\beta^\vee \in R^\vee \Rightarrow \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in R^\vee$  und  $\alpha \in R \Rightarrow 2\alpha \notin R$  und  $\alpha^\vee \in R^\vee \Rightarrow 2\alpha^\vee \notin R^\vee$ . Diese Begrifflichkeit hat den Vorteil, eine zusätzliche Symmetrie sichtbar zu machen in dem Sinne, daß unmittelbar klar wird, was unter dem **dualen Wurzeldatum** zu verstehen ist. Jedes derartige Wurzeldatum liefert eine Gitterspiegelungsgruppe auf dem Gitter  $X$  mit Spiegelungen  $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  und stabiler Wurzelwahl  $R$ , und umgekehrt können wir aus den Spiegelungen und Wurzeln  $R$  auch unschwer unser Wurzeldatum zurückgewinnen.

*Ergänzung 5.4.5.* Ein minimalistischer Zugang besteht darin, ein Wurzeldatum zu erklären als ein Tripel  $(X, R, \tau)$  bestehend aus einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe  $X$ , einer Teilmenge  $R \subset X$  und einer Injektion  $\tau : R \hookrightarrow X^\vee$  in die duale Gruppe derart, daß die offensichtlichen Eigenschaften erfüllt sind.

## Übungen

*Übung 5.4.6.* Die Transponierte einer Gitterspiegelung ist stets eine Gitterspiegelung des dualen Gitters und jedes Paar von Wurzel und Kowurzel zu einer Gitterspiegelung ist ein Paar von Kowurzel und Wurzel zu ihrer Transponierten.

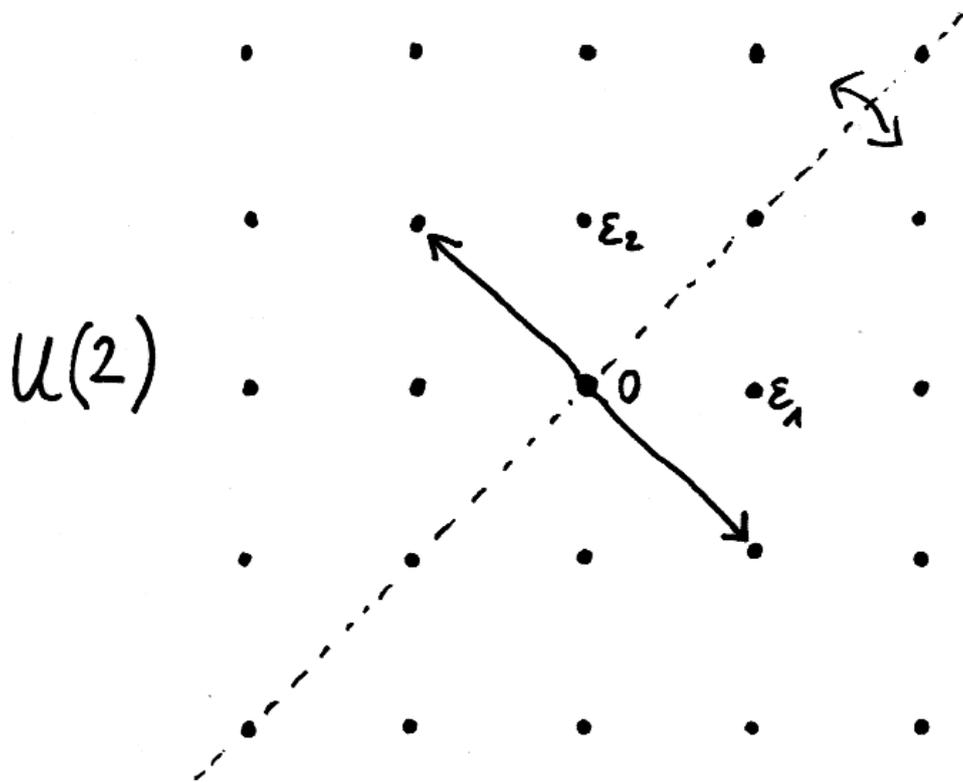
## 5.5 Struktur der kompakten Liegruppen

**Definition 5.5.1.** Gegeben  $K \supset T$  eine kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus erklärt man das zugehörige **Wurzelsystem**

$$R(K, T) \subset \mathfrak{X}(T)$$

als die Menge  $R(K, T) := P_T(\text{Lie}_{\mathbb{C}} K) \setminus \{0\}$  aller von Null verschiedenen Gewichte der komplexifizierten Liealgebra von  $K$  unter der adjungierten Operation von  $T$ .

*Beispiel 5.5.2 (Wurzelsystem der unitären Gruppen).* Wir besprechen den Fall der unitären Gruppen  $K = U(n)$ . Als maximalen Torus  $T$  können wir nach 5.1.8 etwa die unitären Diagonalmatrizen nehmen. Eine Basis des Charaktergitters  $\mathfrak{X}(T)$  über  $\mathbb{Z}$  bilden die  $\varepsilon_i : T \rightarrow S^1$ , die jeder unitären diagonalen Matrix ihren  $i$ -ten Diagonaleintrag zuordnen, für  $1 \leq i \leq n$ . Die Operation der Weylgruppe auf dem Charaktergitter identifiziert unsere Weylgruppe nach 5.3.6 mit der Gruppe aller Permutationen der  $\varepsilon_i$  und wir erhalten so einen kanonischen Isomorphismus  $W \xrightarrow{\sim} S_n$ . Die Einbettung  $\text{Lie } U(n) \hookrightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  führt zu einem



Die Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl zu  $U(2)$ . In diesem Fall haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der anschaulich orthogonalen Spiegelung an der zu den Wurzeln senkrechten Geraden durch den Ursprung.

Isomorphismus  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} \text{U}(n) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  von Liealgebren, etwa nach 2.2.13, da ja  $\text{Lie} \text{U}(n)$  die Fixpunktmenge einer schieflinearen Involution auf  $\text{Mat}(n; \mathbb{C})$  ist. Als Wurzelsystem ergibt sich so die Menge

$$R(\text{U}(n), T) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$$

Der zur Wurzel  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$  gehörende Wurzelraum  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} \text{U}(n))_{\alpha}$  entspricht unter unserer Identifikation mit den quadratischen Matrizen der Gerade  $\mathbb{C}E_{ij}$  aller Matrizen, denen nur in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  ein von Null verschiedener Eintrag erlaubt ist.

**Satz 5.5.3 (Klassifikation der zusammenhängenden kompakten Liegruppen).** *Ordnen wir jeder zusammenhängenden kompakten Liegruppe die Charaktergruppe eines maximalen Torus zu mitsamt der Operation der zugehörigen Weylgruppe und dem zugehörigen Wurzelsystem, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zusammenhängende} \\ \text{kompakte Liegruppen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Gitterspiegelungsgruppen} \\ \text{mit stabiler Wurzelwahl} \end{array} \right\}$$

$$K \quad \mapsto \quad W(K, T) \curvearrowright \mathfrak{X}(T) \supset R(K, T)$$

5.5.4. Eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem ausgezeichneten maximalen Torus nennen wir eine **toriierte** zusammenhängende kompakte Liegruppe. Die zugehörige Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl nennen wir ihr **Gitterdatum**.

5.5.5. Da nach 5.1.7 je zwei maximale Tori einer kompakten Liegruppe zueinander konjugiert sind, hängt unsere Abbildung nicht von der Wahl eines maximalen Torus ab. Im folgenden zeigen wir zunächst nur, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift in der Tat eine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen liefert, und auch das steht verstreut an verschiedenen Stellen. Wendet man 5.3.9 auf die adjungierte Darstellung an, so folgt schon einmal, daß die Weylgruppe die Wurzeln permutiert. Demnächst zeigen wir als Proposition 5.5.14, daß jede Wurzel des Wurzelsystems durch genau eine Spiegelung aus Weylgruppe negativ gemacht wird. Dann zeigen wir in 5.6.9, daß die Spiegelungen zu Wurzeln die Weylgruppe erzeugen und daß keine anderen Elemente der Weylgruppe als Gitterspiegelungen auf der Charaktergruppe des maximalen Torus operieren. Alles zusammen zeigt dann, daß die im Satz erklärte Abbildungsvorschrift in der Tat eine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen liefert. Daß diese Abbildung tatsächlich eine Bijektion ist, zeigen wir in 5.7. Dazu benötigen wir Methoden und Ergebnisse der Überlagerungstheorie und der Theorie halbeinfacher komplexer Liealgebren und ihrer Darstellungen, die über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgehen.



Das Gitterdatum zu  $S^1$ . In diesem Fall ist die Menge der Wurzeln leer und die Gitterspiegelungsgruppe besteht nur aus dem neutralen Element.



Die Gitterdaten zu  $SU(2)$  und  $SO(3)$ . In diesen Fällen haben wir zwei Wurzeln, die als Pfeile eingezeichnet sind, und die Gitterspiegelungsgruppe besteht aus dem neutralen Element und der Punktspiegelung am Ursprung. Das Gitter zu  $SU(2)$  kann man als Quotient des Gitters zu  $U(2)$  verstehen, das Gitter zu  $SO(3)$  als Untergitter des Gitters zu  $SU(2)$ .

**Beispiel 5.5.6 (Gitterdatum der unitären Gruppen).** Wir setzen die in 5.5.2 begonnene Diskussion des Falls  $K = \mathrm{U}(n)$  fort. Die Spiegelung zur Wurzel  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$  entspricht unter der offensichtlichen Identifikation  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n$  der Transposition  $(i, j)$ , und in der Tat erzeugen diese Transpositionen die symmetrische Gruppe. Die zugehörige Kowurzel entspricht der Abbildung  $S^1 \rightarrow T$  gegeben durch

$$z \mapsto \mathrm{diag}(1, \dots, z, \dots, z^{-1}, \dots, 1)$$

mit einem  $z$  an der  $i$ -ten Stelle, einem  $z^{-1}$  an der  $j$ -ten Stelle und Einsen sonst. In der Notation  $\varepsilon_i^* : z \mapsto \mathrm{diag}(1, \dots, z, \dots, 1)$  mit einem  $z$  an der  $i$ -ten Stelle hat die Kowurzel zur Wurzel  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$  also die Gestalt  $\alpha^\vee = \varepsilon_i^* - \varepsilon_j^*$ .

**Proposition 5.5.7 (Bilder von Tori).** *Gegeben ein Homomorphismus von kompakten Liegruppen sind die maximalen Tori des Bildes die Bilder der maximalen Tori.*

*Beweis.* Weil wir eh nur am Bild unseres Homomorphismus interessiert sind, dürfen wir ihn auch gleich als surjektiv annehmen. Sei also  $\varphi : K \rightarrow H$  ein surjektiver Homomorphismus von kompakten Liegruppen. Ist  $S \subset H$  ein maximaler Torus, so finden wir dazu nach 4.5.13 einen topologischen Erzeuger  $s \in S$  und finden dazu nach ?? ein Urbild in der Einszusammenhangskomponente  $t \in K^\circ$  und darüber nach 5.1.7 einen maximalen Torus  $T \subset K$  mit  $t \in T$ . Dann haben wir offensichtlich  $\varphi(T) = S$ . Da je zwei maximale Tori in  $K$  konjugiert sind, ist dann auch umgekehrt das Bild jedes maximalen Torus von  $K$  ein maximaler Torus von  $H$ .  $\square$

**Proposition 5.5.8 (Homomorphismen und Weylgruppen).** *Unter einem surjektiven Homomorphismus mit zentralem Kern von zusammenhängenden kompakten Liegruppen ist das Urbild jedes maximalen Torus ein maximaler Torus und das Urbild seines Normalisators der Normalisator seines Urbilds und wir erhalten so einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Weylgruppen.*

5.5.9. In der Situation der Proposition ist auch das Urbild des Zentrums das Zentrum. In der Tat liegt nach der Proposition das Urbild des Zentrums im Zentralisator jedes maximalen Torus, und eine zusammenhängende kompakte Liegruppe wird ja bereits von ihren maximalen Tori überdeckt.

*Beweis.* Sei  $\varphi : K \rightarrow H$  unser surjektiver Homomorphismus. Da  $K$  zusammenhängend ist, liegt nach 5.1.9 sein Zentrum in jedem maximalen Torus  $T \subset K$ . Nach Annahme haben wir dann erst recht  $\ker \varphi \subset T$  und folglich  $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$ . Da wir bereits nach 5.5.7 wissen, daß jeder maximale Torus in  $H$  das Bild eines maximalen Torus in  $K$  ist, folgt die erste Behauptung. Die beiden weiteren Behauptungen folgen nun ohne weitere Schwierigkeiten. Für eine formale Argumentation scheint mir das Neunerlemma [LA2] 4.7.5 besonders übersichtlich. Die benötigten Rechnungen macht 5.5.10 explizit.  $\square$

5.5.10. Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \twoheadrightarrow H$  und Teilmengen  $A, B \subset H$  gilt  $\varphi^{-1}(AB) = \varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)$ . Gegeben eine Teilmenge  $S \subset H$  und ein Element  $g \in G$  gilt mit der ad hoc erfundenen der Situation angepaßten nur hier gültigen Notation  $\bar{a}$  für das Inverse eines Gruppenelements  $a$  des weiteren die Äquivalenz  $g\varphi^{-1}(S)\bar{g} \subset \varphi^{-1}(S) \Leftrightarrow \varphi(g)S\varphi(g) \subset S$ . Das alles kann der Leser leicht selbst prüfen.

**Proposition 5.5.11.** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist der Zentralisator eines Torus stets zusammenhängend.*

5.5.12. Diese Proposition dient vorerst nur dazu, im folgenden Beweis die Notation zu vereinfachen und uns zu erlauben, dort stets  $Z_K(S)$  statt  $Z_K(S)^\circ$  zu schreiben. Ihr Korollar 5.6.7 wird jedoch zum Abschluß des folgenden Abschnitts noch eine entscheidende Rolle spielen.

*Beweis.* Seien  $K$  unsere Gruppe,  $S \subset K$  unser Torus und  $x \in Z_K(S)$  ein Element seines Zentralisators. Sicher ist  $B = \langle x, S \rangle$  abelsch und kompakt und  $B/B^\circ$  ist topologisch erzeugt von  $\bar{x}$  und mithin zyklisch. Damit ist aber  $B$  topologisch zyklisch nach 4.5.13 und liegt folglich in einem maximalen Torus von  $K$ . Wir folgern, daß  $Z_K(S)$  die Vereinigung aller der maximalen Tori von  $K$  ist, die  $S$  umfassen. Nach [TM] 1.3.17 ist  $Z_K(S)$  dann zusammenhängend als Vereinigung einer Familie zusammenhängender Teilmengen mit nichtleerem Schnitt.  $\square$

**Korollar 5.5.13.** *In einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist jeder maximale Torus sein eigener Zentralisator.*

*Beweis.* In jeder kompakten Liegruppe ist jeder maximale Torus die Einzusammenhangskomponente seines Zentralisators nach 5.1.5, und ist unsere Liegruppe zusammenhängend, so ist der Zentralisator unseres Torus bereits zusammenhängend nach 5.5.11.  $\square$

**Proposition 5.5.14 (Wurzeln und ihre Spiegelungen).** *Seien  $K \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalem Torus,  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$  das Charaktergitter,  $R = R(K, T) \subset \mathfrak{X}$  das Wurzelsystem und  $W = W(K, T)$  die Weylgruppe. So gilt für jede Wurzel  $\alpha \in R$  :*

1. *Der Wurzelraum  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha$  ist eindimensional und kein positives Vielfaches von  $\alpha$  ist auch positives Vielfaches einer anderen Wurzel  $\beta$ , so daß in Formeln für  $\beta \in R$  gilt  $(\alpha \neq \beta) \Rightarrow (\mathbb{N}\alpha \cap \mathbb{N}\beta = 0)$ ;*
2. *Es gibt genau ein Element der Weylgruppe  $s_\alpha \in W$ , das auf  $\mathfrak{X}$  als Spiegelung operiert und die Eigenschaft  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  hat;*
3. *Es gibt genau ein  $\alpha^\vee : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in \mathfrak{X}$ .*

*Beweis.* 1. Wir betrachten die Einskomponente des Kerns von  $\alpha : T \rightarrow S^1$ , den Torus  $S := (\ker \alpha)^\circ \subset T$ , und bilden das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Z_K(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T/S & \longrightarrow & Z_K(S)/S \end{array}$$

Ein Beispiel für diese Konstruktion wird in 5.5.15 skizziert. Die obere Horizontale ist offensichtlich die Einbettung eines maximalen Torus, und wegen 5.5.7 gilt dasselbe für die untere Horizontale. Die obere und damit auch die untere Horizontale ist weiter wegen

$$(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha \subset (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)^{\ker \alpha} = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} Z_K(\ker \alpha) \subset \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} Z_K(S)$$

keine Bijektion. Aus Dimensionsgründen haben wir  $T/S \cong S^1$ . Nach der Klassifikation der Gruppen vom Rang Eins 5.2.1 ist folglich  $Z_K(S)/S$  dreidimensional und das Wurzelsystem dieser Gruppe in Bezug auf den Torus  $T/S$  enthält  $\alpha \in \mathfrak{X}(T/S) \subset \mathfrak{X}(T)$  und es folgt  $R(Z_K(S)/S, T/S) = \{\alpha, -\alpha\}$ . Es folgt  $R(Z_K(S), T) = \{\alpha, -\alpha\}$ . Andererseits kann die komplexifizierte Liealgebra des Zentralisators mithilfe von 4.1.22 und 2.2.5 auch dargestellt werden als

$$\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} Z_K(S) = (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)^{\mathrm{Ad}(S)} = (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)^{\mathrm{ad}(\mathrm{Lie} S)} = \bigoplus_{\ker d\beta \supset \ker d\alpha} (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\beta$$

Hier verwenden wir im zweiten Schritt, daß  $S$  zusammenhängend ist, und im Dritten die Formel  $\mathrm{Lie} S = \ker d\alpha$ . Aus dem Vergleich dieser beiden Beschreibungen von  $\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} Z_K(S)$  als Darstellung von  $T$  folgt sofort Teil 1. Weiter folgt  $\mathrm{Lie} Z_K(\ker \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} Z_K(S)$ , was wir später noch brauchen werden.

2. Nach 5.5.11 wissen wir, daß  $Z_K(S)$  zusammenhängend ist. Wenn wir das nicht wüßten, könnten wir im Übrigen den Beweis in derselben Weise führen und müßten nur stets statt  $Z_K(S)$  seine Einskomponente betrachten. Ein mögliches  $s \in W$  erhält man, indem man das nichttriviale Element der Weylgruppe von  $Z_K(S)/S$  bezüglich  $T/S$  mithilfe von 5.5.8 unter unserem Homomorphismus  $Z_K(S) \rightarrow Z_K(S)/S$  in die Weylgruppe  $W(Z_K(S), T)$  von  $Z_K(S)$  bezüglich  $T$  zurückholt, die ja offensichtlich als Untergruppe von  $W(K, T)$  aufgefaßt werden kann. Nun haben wir nach 4.6.7 eine kurze exakte Sequenz

$$\mathfrak{X}(T/S) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$$

Unser  $s$  operiert per definitionem vorne durch  $-1$ , und da es einen Repräsentanten in  $Z_K(S)$  hat, muß es hinten als die Identität operieren. Sein Quadrat operiert auf

$\mathfrak{X}(T)$  also durch einen Automorphismus, der unipotent ist, also den einzigen Eigenwert Eins hat, und der darüber hinaus endliche Ordnung hat, da die Weylgruppe endlich ist. Damit muß dies Quadrat nach [LA2] 3.3.18 auf  $\mathfrak{X}(T)$  die Identität sein. Das zeigt, daß  $s$  als Gitterspiegelung auf  $\mathfrak{X}(T)$  operiert. Die Eindeutigkeit folgt ähnlich, da das Produkt von zwei möglichen Wahlen  $s, t \in W$  durch einen unipotenten Automorphismus von endlicher Ordnung auf  $\mathfrak{X}(T)$  operieren muß.

3. Die Surjektion  $\alpha : T \rightarrow S^1$  induziert eine kurze exakte Sequenz  $\ker \alpha \hookrightarrow T \rightarrow S^1$  und damit nach 4.6.7 in der Gegenrichtung eine kurze exakte Sequenz  $\mathfrak{X}(S^1) \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(\ker \alpha)$  alias

$$\mathbb{Z}\alpha \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(\ker \alpha)$$

Die Operation von  $s$  induziert natürlich die Multiplikation mit  $(-1)$  auf  $\mathbb{Z}\alpha$ . Sie induziert jedoch zusätzlich die Identität auf  $\mathfrak{X}(\ker \alpha)$ , da  $Z_K(\ker \alpha)$  nach der Bemerkung zu Schluß des Beweises von Teil 1 dieselbe Liealgebra hat wie die a priori größere Gruppe  $Z_K(S)$  und folglich  $s$  in  $Z_K(\ker \alpha) = Z_K(S)$  repräsentiert wird. Die Abbildung  $\mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(T)$ ,  $\lambda \mapsto (\lambda - s\lambda)$  faktorisiert somit über  $\mathbb{Z}\alpha$  und liefert daher einen Gruppenhomomorphismus  $\alpha^\vee : \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  und  $\alpha^\vee \circ s = -\alpha^\vee$ . Die Abbildung  $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$  ist also auf  $\mathbb{Z}\alpha$  die Multiplikation mit  $(-1)$  und auf der Fixpunktmenge von  $s$  die Identität und muß folglich mit  $s$  übereinstimmen.  $\square$

**5.5.15 (Beispiele zum vorhergehenden Beweis bei unitären Gruppen).** Im Fall  $K = U(n)$  und  $T$  den Diagonalmatrizen und  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$  wird  $S = (\ker \alpha)^\circ = \ker \alpha$  die Gruppe der unitären Diagonalmatrizen, die an der  $i$ -ten Stelle denselben Eintrag haben wie an der  $j$ -ten Stelle. Der Zentralisator dieser Untergruppe besteht aus allen unitären Matrizen, die höchstens auf der Diagonalen und an den Stellen mit Indizes  $(i, j)$  oder  $(j, i)$  von Null verschiedene Einträge haben. Man kann damit leicht einen Isomorphismus  $SU(2)/\{\pm \text{id}\} \xrightarrow{\sim} Z_K(S)/S$  angeben.

## Übungen

*Übung 5.5.16.* Man zeichne das Gitterdatum für die kompakten zusammenhängenden Liegruppen  $SU(3)$  und  $SO(4)$ .

*Übung 5.5.17.* Ein Element eines maximalen Torus in einer kompakten Liegruppe liegt in keinem anderen maximalen Torus genau dann, wenn es im Kern keiner Wurzel liegt.

*Übung 5.5.18.* Ein Element eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe liegt im Zentrum genau dann, wenn es im Kern jeder Wurzel liegt.

*Übung 5.5.19.* Gegeben ein Torus  $T$  faktorisiert das Ableiten von Charakteren  $\mathfrak{X}(T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{Lie}(T), \mathbb{C})$  über  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{Lie}(T), i\mathbb{C})$ . Ist  $T$  ein maximaler Torus einer kompakten Liegruppe mit endlichem Zentrum, so ist die Killingform nach 4.2.3 negativ definit auf  $\text{Lie}(T)$  und entspricht so unter dem durch die Killingform gegebenen Isomorphismus einer negativ definiten Bilinearform auf dem Dualraum  $\text{Lie}(T)^*$ . Auf dem Erzeugnis der Differentiale der Wurzeln  $\langle R \rangle_{\mathbb{R}} \subset \text{Lie}_{\mathbb{C}}(T)^*$  ist diese Bilinearform folglich positiv definit.

## 5.6 Spiegelungen in der Weylgruppe

**5.6.1 (Bestimmung des Zentrums aus den Gitterdaten).** Seien  $K \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. Die vorhergehende Übung 5.5.18 liefert uns schon mal eine linksexakte Sequenz  $Z(K) \hookrightarrow T \rightarrow \prod_{\alpha \in R} S^1$  mit dem Auswerten aller Wurzeln als rechtem Pfeil. Gehen wir zu den Charaktergruppen über, so erhalten wir mit 4.6.7 eine exakte Sequenz

$$\langle R \rangle \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}(Z(K))$$

Genau dann hat also unsere Gruppe  $K$  triviales Zentrum, wenn die Wurzeln die Charaktergruppe des maximalen Torus erzeugen, und genau dann ist das Zentrum diskret, wenn das von den Wurzeln erzeugte Gitter endlichen Index in der Charaktergruppe hat.

*Ergänzung 5.6.2 (Rang-Eins-Untergruppen zu Wurzeln).* Ist  $K \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalem Torus, so gibt es für jede Wurzel  $\alpha \in R(K, T)$  genau eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe  $K^\alpha$  vom Rang Eins mit  $\text{Lie}_{\mathbb{C}}(K^\alpha) \supset (\text{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha$ . Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Gegeben so ein  $K^\alpha$  ist sicher  $\text{Lie}_{\mathbb{C}}(K^\alpha)$  stabil unter der komplexen Konjugation und muß folglich mit  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha$  auch  $(\text{Lie}_{\mathbb{C}} K)_{-\alpha}$  umfassen und damit die von diesen beiden Wurzelräumen erzeugte Unteralgebra, die wir mit  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$  bezeichnen. Diese Unteralgebra ist nach 5.5.14.1 von der Dimension höchstens drei und sie muß surjektiv und folglich vermittels eines Isomorphismus in den Notationen des vorhergehenden Beweises von 5.5.14 mit  $S = (\ker \alpha)^\circ$  auf  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_K(S)/S$  gehen. Unsere Unteralgebra ist offensichtlich auch stabil unter der komplexen Konjugation, folglich schneidet sie  $\text{Lie} Z_K(S)$  in einer Unteralgebra  $\mathfrak{g}^\alpha$ , die unter der Projektion isomorph auf  $\text{Lie} Z_K(S)/S$  alias  $\mathfrak{su}(2)$  abgebildet wird. Invertieren wir diesen Isomorphismus, so erhalten wir einen Homomorphismus von Liealgebren

$$\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \text{Lie} Z_K(S)$$

mit Bild  $\mathfrak{g}^\alpha$ , der sich nach 4.3.9 integrieren läßt zu einem Homomorphismus von Liegruppen

$$\text{SU}(2) \rightarrow Z_K(S)$$

Das Bild dieses Homomorphismus ist dann eine Untergruppe  $K^\alpha$  mit den gewünschten Eigenschaften. Unser  $\alpha^\vee$  entspricht in diesem Bild der von unserem Homomorphismus induzierten Abbildung eines geeigneten maximalen Torus von  $SU(2)$  nach  $T$ . In 5.7.11 zeigen wir im übrigen, daß  $K^\alpha$  genau die derivierte Gruppe von  $Z_K(S)$  ist.

**Definition 5.6.3.** Ein Automorphismus eines Vektorraums über einem Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik heißt eine **Spiegelung**, wenn er eine Hyperebene punktweise festhält und einen Vektor außerhalb dieses **Spiegels** auf sein Negatives wirft.

5.6.4. Seien  $K \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. Die Weylgruppe  $W(K, T)$  operiert auch auf dem reellen Vektorraum  $\text{Lie } T$ . Die Spiegelung  $s_\alpha$  zu einer Wurzel  $\alpha \in R(K, T)$  nach 5.5.14 hält darin die Hyperebene  $\ker(d\alpha)$  punktweise fest und operiert folglich auch auf  $\text{Lie } T$  als Spiegelung mit dem Spiegel  $\ker(d\alpha)$ . Die Zusammenhangskomponenten des Komplements

$$\text{Lie } T \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \ker(d\alpha)$$

der Vereinigung aller Spiegel zu Spiegelungen  $s_\alpha$  heißen **Alkoven**. Die Menge aller Alkoven bezeichnen wir mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\text{Lie } T)$ . Sicher permutiert die Weylgruppe  $W$  die Spiegel  $\ker(d\alpha) \subset \text{Lie } T$ , folglich erhalten wir auch eine Operation der Weylgruppe auf der Menge  $\mathcal{A}$  aller Alkoven.

**Proposition 5.6.5 (Spiegelungen in der Weylgruppe).** *Seien  $K \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit einem maximalen Torus. So gilt:*

1. *Die Weylgruppe  $W = W(K, T)$  wird von den Spiegelungen  $s_\alpha$  zu Wurzeln  $\alpha \in R(K, T)$  erzeugt;*
2. *Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe als Spiegelungen auf  $\text{Lie } T$ ;*
3. *Die Weylgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge der Alkoven in  $\text{Lie } T$ . In Formeln liefert also für jeden Alkoven  $A$  das Anwenden eine Bijektion  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, w \mapsto wA$ .*

*Ergänzung 5.6.6.* Teile des anschließenden Beweises werden wir später im Rahmen der allgemeinen Theorie endlicher Spiegelungsgruppen [SPW] 1.6.1 noch besser verstehen können. Insbesondere kann man ganz allgemein zeigen, daß jede endliche von Spiegelungen erzeugte Gruppe von Automorphismen eines endlichen reellen Vektorraums frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert, und daß jede Spiegelung einer derartigen Gruppe konjugiert ist zu einer der erzeugenden Spiegelungen.

*Beweis.* Wir zeigen etwas technischer die beiden folgenden Aussagen:

1. Die Operation der Weylgruppe auf der Menge aller Alkoven ist frei;
2. Die Operation der von allen Spiegelungen  $s_\alpha$  an Wurzeln  $\alpha$  erzeugten Untergruppe auf der Menge aller Alkoven ist transitiv.

Hier und im folgenden meinen wir mit Alkoven stets die Zusammenhangskomponenten des Komplements der Vereinigung aller Spiegel von Spiegelungen  $s_\alpha \in W$  zu Wurzeln  $\alpha \in R$ . Erst im nachhinein wird klar werden, daß das auch die Vereinigung aller Spiegel zu Spiegelungen aus  $W$  ist. Zusammen liefern unsere beiden technischen Aussagen sofort, daß die Weylgruppe frei und transitiv auf der Menge aller Alkoven operiert und von den Spiegelungen an Wurzeln erzeugt wird, also die Aussagen 1 und 3 der Proposition. Um auch die zweite Aussage der Proposition abzuleiten, beachten wir, daß es nach 2.4.10 oder einfacher [NAS] 4.1.4 auf  $\text{Lie } T$  ein  $W$ -invariantes Skalarprodukt gibt, so daß eine Spiegelung aus  $W$  durch ihren Spiegel bereits eindeutig festgelegt wird. Hätten wir zusätzlich zu den  $s_\alpha$  noch eine weitere Spiegelung  $s$  in  $W$ , so müßte deren Spiegel ganz offensichtlich und formal nach [AL] 3.10.1 einen Alkoven  $A$  treffen und es folgte  $sA = A$  im Widerspruch zur Freiheit der Operation. Es reicht folglich, wenn wir unsere beiden technischen Aussagen zeigen.

Wir beginnen mit der Ersten. Es gilt zu zeigen, daß ein Element der Weylgruppe, das einen Alkoven festhält, bereits die Identität sein muß. Aber bildet ein Element der Weylgruppe einen Alkoven auf sich selber ab, so hat es in diesem Alkoven auch einen Fixpunkt, sagen wir den Schwerpunkt einer Bahn der Untergruppe, die von besagtem Element erzeugt wird. Unser Element der Weylgruppe wird also repräsentiert im Zentralisator eines Elements  $X \in \text{Lie } T$ , auf dem das Differential keiner Wurzel verschwindet. Für jeden Punkt  $X \in \text{Lie } T$ , der vom Differential keiner Wurzel annulliert wird, gilt aber  $\text{Lie}_{\mathbb{C}} Z_K(X) = \text{Lie}_{\mathbb{C}} T$  und damit  $\text{Lie } Z_K(X) = \text{Lie } T$ . Weil nun nach dem im Anschluß bewiesenen Lemma 5.6.7 der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammenhängend ist, folgt  $Z_K(X) = T$  und unser Element der Weylgruppe war die Identität.

Nun zeigen wir die Zweite unserer technischen Aussagen. Bezeichne  $W' \subset W$  die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe. Wir wählen wieder ein  $W$ -invariantes Skalarprodukt auf  $\text{Lie } T$  und finden wir für beliebige Vektoren  $v, w \in \text{Lie } T$  ein  $x \in W'$  derart, daß der Abstand  $\|v - xw\|$  kleinstmöglich wird. Dann können  $v$  und  $xw$  durch keinen Spiegel einer Wurzelspiegelung mehr getrennt werden, da ja sonst aus elementargeometrischen Gründen für  $s_\alpha$  die Spiegelung an besagtem Spiegel  $v$  und  $s_\alpha xw$  noch näher aneinander wären. Also liegen  $v$  und  $xw$  für jeden Spiegel einer Wurzelspiegelung in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven.  $\square$

**Lemma 5.6.7.** *In einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe ist der Zentralisator eines Elements der Liealgebra stets zusammenhängend.*

*Beweis.* Der Zentralisator eines Elements der Liealgebra fällt zusammen mit dem Zentralisator der Gerade durch besagtes Element, dann auch mit dem Zentralisator ihres Bildes unter der Exponentialabbildung, und dann schließlich auch mit dem Zentralisator des Abschlusses dieses Bildes. Dieser Abschluß aber ist eine zusammenhängende kompakte abelsche Liegruppe, als da heißt ein Torus, und der Zentralisator eines Torus in einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe ist nach 5.5.11 auch zusammenhängend.  $\square$

**5.6.8 (Liealgebra und Charaktergitter).** Gegeben eine abelsche kompakte Liegruppe  $T$  liefert das Ableiten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{Lie } T, i\mathbb{R}) \\ \alpha &\mapsto d\alpha \end{aligned}$$

Im Fall eines Torus ist sie sogar injektiv. Hierbei fassen wir den Charakter  $\alpha$  als Gruppenhomomorphismus  $\alpha : T \rightarrow S^1$  auf und  $S^1$  als Untergruppe  $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$  mit Liealgebra  $\text{Lie } S^1 = i\mathbb{R} \subset \text{Lie } \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}$ . Man sieht nun leicht ein, daß diese Einbettung einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(T), i\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } T$$

induziert, der auch natürlich ist in  $T$  in dem Sinne, daß jeder Homomorphismus in eine weitere abelsche kompakte Liegruppe  $\varphi : T \rightarrow S$  ein kommutatives Diagramm liefert der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(T), i\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Lie } T \\ \downarrow & & \downarrow d\varphi \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{X}(S), i\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Lie } S \end{array}$$

Gegeben  $K \supset T$  eine kompakte zusammenhängende Liegruppe mit einem maximalen Torus wirkt also insbesondere ein Element der Weylgruppe  $W(K, T)$  auf  $\text{Lie } T$  als Spiegelung genau dann, wenn es auf  $\mathfrak{X}(T)$  als Gitterspiegelung wirkt.

**5.6.9.** Außer den Spiegelungen zu Wurzeln operieren keine weiteren Elemente der Weylgruppe einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe als Gitterspiegelungen auf dem Charaktergitter des zugehörigen maximalen Torus. In der Tat müßten diese Elemente 5.6.8 als Spiegelungen auf der Liealgebra unseres maximalen Torus wirken, und das tun nach 5.6.5 außer den Wurzelspiegelungen keine weiteren Elemente der Weylgruppe.

## 5.7 Klassifikation der kompakten Liegruppen\*

5.7.1. In diesem Abschnitt brauchen wir Grundkenntnisse über Überlagerungen und die Fundamentalgruppe, wie sie etwa in [TF] 3.1.1 folgende erklärt werden. Weiter müssen wir die Klassifikation der kompakten Liegruppen mit trivialem Zentrum durch Wurzelsysteme voraussetzen, die wir in [HL] 3.5.21 im Rahmen der Theorie der halbeinfachen Liealgebren zeigen und gleich in 5.7.8 wiederholen. Schließlich müssen wir aus dieser Theorie auch noch wissen, daß jedes ganze Gewicht des Wurzelsystems einer halbeinfachen komplexen Liealgebren als Gewicht einer endlichdimensionalen Darstellung besagter Liealgebra auftritt, was etwa aus der Klassifikation durch das höchste Gewicht [?] ?? unmittelbar folgt.

**Lemma 5.7.2 (Erweiterung von Gittern zu Vektorräumen).** *Sei  $k$  ein Körper.*

1. *Gegeben eine abelsche Gruppe  $X$  gibt es ein Paar  $(X_k, \text{can}_X)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum  $X_k$  und einem Gruppenhomomorphismus  $\text{can}_X : X \rightarrow X_k$  derart, daß für jeden  $k$ -Vektorraum  $W$  das Vorschalten von  $\text{can}_X$  eine Bijektion  $\text{Hom}_k(X_k, W) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(X, W)$  liefert;*
2. *Unser Paar ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist genauer  $(V, \kappa)$  ein weiteres derartiges Paar, so ist der eindeutig bestimmte Vektorraumhomomorphismus  $\varphi : X_k \rightarrow V$  mit  $\varphi \circ \text{can}_X = \kappa$  ein Isomorphismus;*
3. *Für jeden Homomorphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  von abelschen Gruppen gibt es genau eine lineare Abbildung  $\varphi_k : X_k \rightarrow Y_k$  mit  $\varphi_k \circ \text{can}_X = \text{can}_Y \circ \varphi$ .*

5.7.3. Man sagt in diesem Zusammenhang, der Vektorraum  $X_k$  entstehe aus der abelschen Gruppe  $X$  durch **Erweiterung der Skalare**. Da das Paar  $(X_k, \text{can}_X)$  eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, erlauben wir uns den bestimmten Artikel. In der Sprache der Kategorientheorie ist  $X \mapsto X_k$  der Linksadjungierte des Vergißfunktors von der Kategorie der  $k$ -Vektorräume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

*Beispiel 5.7.4.* Für  $X = \mathbb{Z}^n$  ist die Erweiterung der Skalare offensichtlich der Vektorraum  $X_k = k^n$  zusammen mit dem offensichtlichen Gruppenhomomorphismus  $\text{can}_X : \mathbb{Z}^n \rightarrow k^n$ . Damit haben wir bereits erkannt, wie für jedes Gitter  $X$  eine Erweiterung der Skalare  $X_k$  konstruiert werden kann. Mehr brauchen wir im folgenden gar nicht zu wissen.

*Beweis.* Im allgemeinen erhält man eine Erweiterung der Skalare mithilfe des Tensorprodukts [TS] ?? als  $X_k := X \otimes_{\mathbb{Z}} k$ . Ich gehe nicht näher darauf ein, weil wir die Erweiterung der Skalare hier nur im Fall eines Gitters  $X$  brauchen werden. In diesem Fall und allgemeiner für endlich erzeugte abelsche Gruppen  $X$  können wir die Erweiterung der Skalare alternativ auch als den Dualraum  $X_k =$

$\text{Ab}(X, k)^*$  des Raums der Gruppenhomomorphismen  $X \rightarrow k$  mit der durch das Auswerten gegebenen Abbildung  $X \rightarrow X_k$  konstruieren.  $\square$

5.7.5. Schreiben wir  $V_{\mathbb{C}}$ , so muß der Leser von nun an aus dem Kontext erschließen, ob die Komplexifizierung eines reellen Vektorraums  $V$  oder vielmehr die Erweiterung einer endlich erzeugten abelschen Gruppe  $V$  zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum gemeint ist.

*Beispiel 5.7.6.* Mit unseren neuen Notationen liefert etwa das Ableiten wie in 5.6.8 für jede kompakte abelsche Liegruppe  $T$  einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen  $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{Lie } T, i\mathbb{R})$  und einen Isomorphismus von komplexen Vektorräumen  $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (\text{Lie}_{\mathbb{C}} T)^*$  der zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum erweiterten Charaktergruppe mit dem Dualraum der komplexifizierten Liealgebra.

5.7.7. Gegeben eine endliche Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl  $W \curvearrowright X \supset R$  wie in 5.4.3 ist im von  $R$  erzeugten  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \subset X_{\mathbb{Q}}$  die Teilmenge  $R$  ein abstraktes Wurzelsystem im Sinne von [SPW] 2.1.2. Kommt unsere endliche Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl von einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe  $K$  mit maximalem Torus  $T$  her, so nennen wir dies abstrakte Wurzelsystem das **Wurzelsystem von  $(K, T)$**  und notieren es  $R(K, T)$ . Es hängt bis auf Isomorphismus nicht von  $T$  ab und heißt je nach Kontext auch das **Wurzelsystem von  $K$** .

5.7.8 (**Kompakte Liegruppen mit trivialem Zentrum**). Ordnen wir jeder kompakten Liegruppe ihr Wurzelsystem zu, so erhalten wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{abstrakte} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

Das wurde bereits in [HL] 3.5.21 bewiesen. Dem Wurzelsystem  $A_{n-1}$  entspricht etwa der Quotient  $U(n)/Z$  der unitären Gruppe  $U(n)$  nach ihrem Zentrum, das im übrigen als  $Z = S^1 \text{ id}$  explizit angegeben werden kann. Die Klassifikation abstrakter Wurzelsysteme wird in [SPW] 2.3.9 besprochen. Will man die Aussage noch elementarer formulieren, mag man beachten, daß kompakte Liegruppen nach 3.2.22 stets Matrixliegruppen sind und stetige Homomorphismen von Matrixliegruppen nach 1.4.10 glatt. Folglich erhalten wir mit obigen Argumenten sogar eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Matrixliegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{abstrakte} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

**Satz 5.7.9 (Überlagerungen kompakter Liegruppen).** 1. Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit endlichem Zentrum ist auch ihre universelle Überlagerung kompakt;

2. Genau dann ist eine zusammenhängende kompakte Liegruppe einfach zusammenhängend, wenn die Kowurzeln eines und jedes maximalen Torus  $T$  bereits das volle duale Gitter  $\mathfrak{X}(T)^* := \text{Ab}(\mathfrak{X}(T), \mathbb{Z})$  zum Charaktergitter  $\mathfrak{X}(T)$  erzeugen.

*Beweis.* 1. Seien  $K$  eine zusammenhängende Liegruppe und  $p : \hat{K} \rightarrow K$  eine zusammenhängende Überlagerung. Nach [TF] 5.2.2 kann  $\hat{K}$  so mit einer Verknüpfung versehen werden, daß es zu einer topologischen Gruppe wird und  $\hat{K} \rightarrow K$  zu einem Gruppenhomomorphismus. Immer noch nach [TF] 5.2.2 ist der Kern dieses Gruppenhomomorphismus dann zentral. Mit der im Sinne von 3.2.28 étale induzierten Struktur als  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist dann nach 3.2.29 auch  $\hat{K}$  eine Liegruppe. Ist unsere Überlagerung endlich und  $K$  kompakt, so ist offensichtlich auch  $\hat{K}$  kompakte Liegruppe. Formal zeigen die Resultate [TM] 2.4.4 und [TM] 2.4.15 und [TM] 2.4.16 zu eigentlichen Abbildungen sogar ganz allgemein, daß jede Überlagerung eines Kompaktums mit endlichen Fasern wieder kompakt ist. Nach 5.5.8 ist dann für  $T \subset K$  ein maximaler Torus auch sein Urbild  $\hat{T} \subset \hat{K}$  ein maximaler Torus und wir haben eine kurze exakte Sequenz  $\ker p \hookrightarrow \hat{T} \rightarrow T$  und dual eine kurze exakte Sequenz  $\mathfrak{X}(T) \hookrightarrow \mathfrak{X}(\hat{T}) \rightarrow \mathfrak{X}(\ker p)$ . Hat unsere kompakte Liegruppe  $K$  zusätzlich endliches Zentrum, so hat nach 5.6.1 die von den Wurzeln erzeugte Untergruppe  $\langle R \rangle \subset \mathfrak{X}(T)$  endlichen Index. Damit ist notwendig

$$X := \{ \lambda \in \mathfrak{X}(T)_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in R \}$$

ein Gitter, das „Gitter der ganzen Gewichte unseres Wurzelsystems“, und  $\mathfrak{X}(T)$  hat darin endlichen Index. Nun induziert die Einbettung einen Isomorphismus  $\mathfrak{X}(T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$ , und unter dessen Inversem muß auch  $\mathfrak{X}(\hat{T})$  im Gitter der ganzen Gewichte  $X$  landen. Mit  $|\ker p| = |\mathfrak{X}(\ker p)|$  folgern wir für alle zusammenhängenden endlichen Überlagerungen von  $K$  dieselbe endliche Schranke  $|\ker p| \leq |X/\mathfrak{X}(T)|$  ihrer Blätterzahl. Wenn die universelle Überlagerung

$$\pi : \tilde{K} \rightarrow K$$

unendliche Fasern hat, kann es aber solch eine universelle Schranke nicht geben. In der Tat ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(K; 1)$  als Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit endlich erzeugt nach [TF] 1.2.30 und als Fundamentalgruppe einer lokal zusammenziehbaren topologischen Gruppe abelsch nach [TF] 5.2.2 oder [TF] 1.2.29, und die Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser über dem neutralen Element liefert nach [TF] 5.2.2 einen Gruppenisomorphismus

$$c : \pi_1(K; 1) \xrightarrow{\sim} \ker \pi$$

Als endlich erzeugte unendliche abelsche Gruppe hätte diese Gruppe Untergruppen  $\Gamma$  von beliebig großem endlichen Index. Dann aber wären die  $\tilde{K}/\Gamma \rightarrow K$  endliche Überlagerungen mit beliebig großer Blätterzahl im Widerspruch zu Existenz

einer universellen Schranke.

2. Erzeugen die Kowurzeln eines maximalen Torus bereits das volle duale Gitter, so gilt in den Notationen aus dem Beweis des ersten Teils  $X = \mathfrak{X}(T)$  und unsere Gruppe hat endliches Zentrum nach 5.6.1 und besagte universelle Schranke ist Eins. Dann folgt wie im Beweis des ersten Teils, daß jede universelle Überlagerung ein Isomorphismus sein muß. Erzeugen die Kowurzeln eines maximalen Torus nicht das volle duale Gitter, so unterscheiden wir zwei Fälle: Erzeugen unsere Kowurzeln noch nicht einmal eine Untergruppe von endlichem Index, so hat nach 5.6.1 das Zentrum von  $K$  positive Dimension und damit auch das Zentrum  $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$  der Liealgebra von  $K$ . Die Zerlegung  $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$  aus 4.2.9 zeigt, daß jede Linearform  $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathbb{C}$  zu einem Homomorphismus von Liealgebren  $\mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{C}$  fortgesetzt werden kann. Wäre  $K$  einfach zusammenhängend, so müßte also nach 4.3.9 das Differenzieren eine Surjektion  $\mathfrak{X}(Z(K)) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{k}), \mathbb{C})$  liefern. Das aber kann offensichtlich nicht sein, da die rechte Seite nicht endlich erzeugt ist als abelsche Gruppe. Also erzeugen unsere Kowurzeln notwendig eine Untergruppe von endlichem Index, und nach 5.6.1 ist das Zentrum von  $K$  endlich. Nun ist  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  nach [HL] 1.7.9 eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit Cartan'scher  $\mathfrak{h} := \text{Lie}_{\mathbb{C}} T$ . Sei  $R = R(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$  das Wurzelsystem und  $X \subset \mathfrak{h}^*$  das Gitter der ganzen Gewichte. Mit [?] ?? finden wir eine endlichdimensionale komplexe Darstellung  $V$  der halbeinfachen Liealgebra  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ , deren Gewichte das Gitter der ganzen Gewichte erzeugen. Ist  $K$  einfach zusammenhängend, so muß sich die  $\mathfrak{k}$ -Operation auf  $V$  nach 4.3.9 zu einer  $K$ -Operation integrieren lassen, und diese zeigt unmittelbar  $\mathfrak{X}(T) = X$ .  $\square$

**Korollar 5.7.10.** *Jede zusammenhängende Liegruppe mit kompakter Liealgebra ist kompakt.*

*Beweis.* Sei  $G$  unsere Liegruppe. Die adjungierte Darstellung  $\text{Ad} : G \rightarrow (\text{Aut } \mathfrak{g})^{\circ}$  induziert nach 4.2.5 einen Isomorphismus  $\text{ad} : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  auf den jeweiligen Liealgebren und muß also nach 3.3.21 eine Überlagerung sein. Wir wissen aber schon aus 4.2.4, daß  $(\text{Aut } \mathfrak{g})^{\circ}$  für eine kompakte Liealgebra  $\mathfrak{g}$  eine kompakte Liegruppe mit trivialem Zentrum ist. Damit folgt das Korollar aus Satz 5.7.9, nach dem jede zusammenhängende Überlagerung einer kompakten Liegruppe mit endlichem Zentrum kompakt ist.  $\square$

**Lemma 5.7.11 (Zentrum und derivierte Gruppe kompakter Liegruppen).** *Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe  $K$  ist die derivierte Gruppe eine abgeschlossene Untergruppe  $(K, K) \triangleleft K$ , deren Schnitt mit dem Zentrum  $Z(K)$  ist endlich, und die Multiplikation ist ein surjektiver Liegruppenshomomorphismus mit endlichem Kern*

$$(K, K) \times Z(K)^{\circ} \twoheadrightarrow K$$

*Beweis.* Gegeben eine kompakte Liegruppe  $K$  zerfällt ihre Liealgebra  $\mathfrak{k}$  nach 4.2.9 als  $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ . Dann ist  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \cong \text{Lie}(K/Z(K))$  eine kompakte Liealgebra und nach 4.3.6 gibt es eine zusammenhängende Liegruppe  $L$  und einen Liegruppenhomomorphismus  $L \hookrightarrow K$ , der einen Isomorphismus  $\text{Lie } L \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$  induziert. Nach 5.7.10 ist  $L$  kompakt und geht folglich isomorph auf eine abgeschlossene Untergruppe  $L \triangleleft K$ , die wir der Einfachkeit halber mit demselben Buchstaben bezeichnen. Die Betrachtung des Differentials zeigt, daß die Multiplikation eine Surjektion

$$L \times Z(K)^\circ \twoheadrightarrow K$$

mit diskretem und dann sogar endlichem Kern induziert. Es bleibt also nur noch, die Identität  $L = (K, K)$  zu zeigen. Aber wir wissen ja aus 4.1.20 um die Identität  $(L, L) = L$ , und daraus folgt die Behauptung mit unserer Surjektion sofort.  $\square$

**5.7.12 (Kompakte Liegruppen mit fixiertem Zentrumsquotienten).** Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe  $L$  mit trivialem Zentrum betrachten wir die Kategorie

$$\text{Lie}_L^{\text{zk}}$$

aller Paare  $(K, p)$  bestehend aus einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe  $K$  und einem surjektiven Homomorphismus mit zentralem Kern  $p : K \twoheadrightarrow L$ . Gegeben ein weiteres derartiges Paar  $(H, q)$  erklären wir einen Morphismus in  $\text{Lie}_L^{\text{zk}}$  als einen Morphismus von Liegruppen  $\varphi : H \rightarrow K$  mit  $p \circ \varphi = q$ . Man beachte, daß für jedes unserer Paare  $(K, p)$  das Differential der Projektion einen Isomorphismus  $dp : \text{Lie}(K, K) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } L$  induziert.

**5.7.13 (Gitterdaten mit fixiertem Wurzelsystem).** Gegeben ein rationales Wurzelsystem  $R$  betrachten wir die Kategorie

$$\text{GittSpieg}^R$$

aller Paare bestehend aus einer Gitterspiegelungsgruppe  $(X \leftarrow^p W)$  mit einer Einbettung  $c : R \hookrightarrow X$ , die sich zu einer  $\mathbb{Z}$ -linearen Einbettung  $c : \langle R \rangle_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow X$  fortsetzen läßt und deren Bild  $w(R)$  eine stabile Wurzelwahl ist. Für  $\alpha \in R$  bezeichnen wir das Element  $s_{c(\alpha)} \in W$  dann kurz als  $s_\alpha$ . Morphismen von  $(c : R \hookrightarrow X \leftarrow^p W)$  nach  $(c' : R \hookrightarrow X' \leftarrow^p W')$  erklären wir als Gruppenhomomorphismen  $\phi : X \rightarrow X'$  mit  $c' = \phi \circ c$  und  $s_\alpha \circ \phi = \phi \circ s_\alpha$  für alle  $\alpha \in R$ . Insbesondere müssen Fixvektoren unter  $W$  auf Fixvektoren unter  $W'$  abgebildet werden.

**Proposition 5.7.14 (Zentrale Erweiterungen bei kompakten Liegruppen).** Gegeben  $L$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe mit trivialem Zentrum und darin ein maximaler Torus  $S$  mit Wurzelsystem  $R := R(L, S)$  erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Lie}_L^{\text{zk}} \xrightarrow{\sim} (\text{GittSpieg}^R)^{\text{opp}}$$

durch die Vorschrift  $(K, p) \mapsto (\mathfrak{X}(p^{-1}S) \leftarrow W(K, (p^{-1}S)))$  mit der durch  $\mathfrak{X}(p)$  induzierten Einbettung  $c : R \hookrightarrow \mathfrak{X}(p^{-1}S)$ .

5.7.15. Diese Proposition zeigt insbesondere unseren Satz 5.5.3, nach dem kompakte zusammenhängende Liegruppen durch ihr Gitterdatum klassifiziert werden.

*Beweis.* Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Unser Funktor ist sicher treu, denn je zwei Morphismen  $\varphi, \psi : H \rightarrow K$  in  $\text{Lie}_L^{\text{zk}}$ , die dieselbe Abbildung auf den Charaktergittern derjenigen maximalen Tori induzieren, die wir als Urbilder von  $S$  erhalten, müssen auf diesen maximalen Tori schon mal übereinstimmen. Andererseits müssen sie aber auch dieselbe Abbildung, ja denselben Isomorphismus  $\text{Lie}(H, H) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(K, K)$  induzieren, da die Projektionen  $q, p$  Isomorphismen beider Seiten mit  $\text{Lie } L$  induzieren. Damit aber sind unsere Morphismen  $\varphi, \psi$  notwendig gleich.

2. Im Fall der universellen Überlagerung  $H = \tilde{L}$  von  $L$  ist unser Funktor sogar volltreu für von  $\tilde{L}$  ausgehende Morphismen. In der Tat bestehen dann die fraglichen Morphismenräume alle aus genau einem Morphismus: Auf der Gruppenseite muß jeder Morphismus  $\tilde{L} \rightarrow K$  über  $(K, K)$  faktorisieren, und da  $(K, K) \rightarrow L$  eine Überlagerung ist, gibt es genau einen Morphismus  $\tilde{L} \rightarrow (K, K)$  über  $L$ . Auf der Gitterseite muß unser Morphismus  $\mathfrak{X}(p^{-1}S) \rightarrow \mathfrak{X}(q^{-1}S)$  alle  $W$ -Invarianten auf Null werfen, und der Quotient nach diesen Invarianten besitzt nach jeweils genau einen wurzelverträglichen Morphismus in das größtmögliche Gitter zu unserem Wurzelsystem, als da heißt das duale Gitter zum Erzeugnis der Kowurzeln. Nach 5.7.9 ist das auch genau das Charaktergitter unserer universellen Überlagerung.

3. Im Fall des Produkts  $H = T \times \tilde{L}$  der universellen Überlagerung mit einem Torus ist unser Funktor auch volltreu für von  $H$  ausgehende Morphismen. In der Tat ist ein Morphismus über  $L$  dann festgelegt und festlegbar durch den induzierten Morphismus  $T \rightarrow Z(K)$  alias die Angabe eines Gruppenhomomorphismus  $\mathfrak{X}(p^{-1}S) \rightarrow \mathfrak{X}(T)$ , unter dem alle Wurzeln nach Null abgebildet werden. Umgekehrt liefert das auch genau alle möglichen Morphismen auf der Gitterseite.

4. Im Fall eines Quotienten  $H = (T \times \tilde{L})/\Gamma$  nach einer endlichen zentralen Untergruppe schließlich besteht das Gitterdatum aus dem Teilgitter der auf  $\Gamma$  verschwindenden Charaktere von  $T \times \tilde{L}$  und der Morphismenraum auf der Gitterseite ist die Teilmenge derjenigen Morphismen, die bereits in diesem Teilgitter landen. Sie entsprechen auf der Gruppenseite genau den Homomorphismen, die auf  $\Gamma$  trivial sind. Lemma 5.7.11 zeigt, daß das bereits der allgemeine Fall ist. Unser Funktor ist also volltreu.

5. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß er surjektiv ist auf Isomorphieklassen. Gegeben ein Datum  $R \subset X \leftarrow W$  haben wir sicher eine Zerlegung  $X_{\mathbb{Q}} = \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \oplus X_{\mathbb{Q}}^W$ .

Jetzt betrachten wir die Bilder  $\bar{R} \subset \bar{X} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  von  $R$  und  $X$  unter der Projektion von  $X_{\mathbb{Q}}$  auf den ersten Summanden. Dann ist  $\bar{R} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  ein Wurzelsystem und  $\bar{X}$  liegt im Gitter  $\bar{P} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$  der ganzen Gewichte des Wurzelsystems  $\bar{R} \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Bezeichne andererseits  $\bar{Y}$  das Bild von  $X$  unter der Projektion auf den zweiten Summanden. So erhalten wir eine Einbettung  $X \hookrightarrow \bar{X} \oplus \bar{Y}$  als Untergitter von endlichem Index, und das zeigt die Surjektivität unseres Funktors auf Isomorphieklassen.  $\square$

*Ergänzung 5.7.16 (Wie es besser gemacht werden sollte).* Betrachten wir allgemeiner die Kategorie

KonTorLie

Als Objekte nehmen wir alle Paare  $(K, T)$  bestehend aus einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe mit einem maximalen Torus. Gegeben ein weiteres Objekt  $(L, S)$  nehmen wir als Morphismen  $(K, T) \rightarrow (L, S)$  alle  $S$ -Konjugationsklassen von stetigen Gruppenhomomorphismen (Oder  $T$ -Konjugationsklassen? Oder kommt das eh nicht drauf an?), die den ausgezeichneten Torus in den ausgezeichneten Torus abbilden und eine Surjektion  $(K, K) \twoheadrightarrow (L, L)$  auf den derivierten Gruppen induzieren. Betrachten wir andererseits die Kategorie

GittSpieg

Als Objekte nehmen wir alle Gitterspiegelungsgruppen mit stabiler Wurzelwahl  $(W \curvearrowright X \supset R)$ . Als Morphismen nehmen wir alle Homomorphismen abelscher Gruppen  $\varphi : X \rightarrow X'$  mit  $\varphi(R) \subset R'$  und  $s_{\varphi(\alpha)} \circ \varphi = \varphi \circ s_{\alpha} \forall \alpha \in R$  und  $s_{\beta} \circ \varphi = \varphi \forall \beta \in R' \setminus \varphi(R)$ . So erhalten wir mit unseren Konstruktionen einen Funktor und vermutlich sogar eine Äquivalenz von Kategorien

KonTorLie  $\xrightarrow{\sim}$  GittSpieg

Das mag einmal ein Student ausarbeiten.

## Übungen

*Übung 5.7.17.* Gegeben eine exakte Sequenz  $X' \rightarrow X \rightarrow X''$  von abelschen Gruppen ist auch die durch Erweiterung der Skalare zu  $\mathbb{Q}$  entstehende Sequenz  $X'_{\mathbb{Q}} \rightarrow X_{\mathbb{Q}} \rightarrow X''_{\mathbb{Q}}$  exakt. Diese Aussage ist im übrigen ein Spezialfall der „Exaktheit der Lokalisierung“ [KAG] 4.3.11.

## 5.8 Einfache Darstellungen kompakter Liegruppen

**Definition 5.8.1.** Seien  $(K, T)$  eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe und  $R \subset \mathfrak{X}(T)$  ihr Wurzelsystem. Eine Teilmenge  $R^+ \subset R$  heißt ein

**System positiver Wurzeln**, wenn es eine Linearform  $\mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathbb{Z}$  gibt, die auf keiner Wurzel verschwindet und genau auf den Wurzeln aus  $R^+$  positiv ist. Gegeben ein System positiver Wurzeln erklären wir eine Teilordnung  $\leq$  auf  $\mathfrak{X}(T)$  durch die Vorschrift

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu \in \lambda + |R^+\rangle$$

Hier bezeichnet  $|R^+\rangle$  das von den positiven Wurzeln erzeugte Monoid, also die Menge aller endlichen Summen von positiven Wurzeln unter Einbeziehung der leeren Summe 0.

*Beispiel 5.8.2.* Im Fall der Gruppe  $K = \mathrm{U}(n)$  ist  $R^+ := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\}$  in unserer Notation aus 5.5.2 ein System positiver Wurzeln.

**Proposition 5.8.3.** *Seien  $(K, T)$  eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe und  $R^+ \subset R(K, T)$  ein System positiver Wurzeln. So gilt:*

1. *Gegeben eine endlichdimensionale irreduzible komplexe Darstellung  $L$  von  $K$  gibt es in der Menge  $P_T(L) \subset \mathfrak{X}(T)$  ihrer Gewichte aus 2.5.9 ein größtes Element für die Ordnung 5.8.1. Es heißt das **höchste Gewicht** unserer Darstellung. Der zugehörige Gewichtsraum ist eindimensional.*
2. *Haben zwei irreduzible Darstellungen von  $K$  dasselbe höchste Gewicht, so sind sie isomorph.*

*Beweis.* 1. Sicher gibt es in jeder endlichdimensionalen Darstellung ein maximales Gewicht  $\lambda$ . Sei  $v_\lambda \in V_\lambda$  ein Gewichtsvektor von diesem Gewicht. Gegeben  $\alpha \in R$  und  $x_\alpha \in (\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K)_\alpha$  gilt für jeden Gewichtsraum  $x_\alpha V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$ , denn die Operation der komplexifizierten Liealgebra ist stets ein Homomorphismus

$$(\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}} K) \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow V$$

von Darstellungen. Es folgt  $x_\alpha v_\lambda = 0 \forall \alpha \in R^+$ . Ich behaupte, daß wir eine  $K$ -Unterdarstellung erhalten, wenn wir auf unseren maximalen Gewichtsvektor in irgendeiner Reihenfolge irgendwelche Wurzelvektoren zu negativen Wurzeln anwenden und von den so erhaltenen Vektoren das Vektorraumerzeugnis nehmen. In der Tat ist es sicher stabil unter  $T$  und unter dem Anwenden von Wurzelvektoren zu negativen Wurzeln. Wendet man aber einen Wurzelvektor zu einer positiven Wurzel  $x_\alpha$  an auf einen Ausdruck  $x_{\beta(1)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda$  mit negativen Wurzeln  $\beta(i)$ , so ergibt sich

$$x_\alpha x_{\beta(1)} x_{\beta(2)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda = x_{\beta(1)} x_\alpha x_{\beta(2)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda + [x_\alpha, x_{\beta(1)}] x_{\beta(2)} \dots x_{\beta(n)} v_\lambda$$

und unabhängig davon, ob  $\alpha + \beta(1)$  eine positive Wurzel, eine negative Wurzel oder gar keine Wurzel ist, kommen wir mit einer Induktion ans Ziel. War nun

$V = L$  irreduzibel und haben wir  $v_\lambda \neq 0$ , so muß unsere Unterdarstellung bereits ganz  $L$  gewesen sein und Teil 1 folgt.

2. Seien  $L$  und  $L'$  unsere einfachen Darstellungen und sei  $\lambda$  ihr gemeinsames höchstes Gewicht. Wir wählen von Null verschiedene Vektoren  $v_\lambda \in L_\lambda$  und  $v'_\lambda \in L'_\lambda$ , betrachten in  $V := L \oplus L'$  die von  $(v_\lambda, v'_\lambda)$  erzeugte Unterdarstellung  $W$ , und zeigen zunächst, daß auch  $W$  einfach ist. Wie wir beim Beweis von Teil 1 gesehen haben, ist der Gewichtsraum  $W_\lambda$  genau die Gerade durch  $(v_\lambda, v'_\lambda)$ . Jede echte Unterdarstellung  $U \subsetneq W$  liegt damit notwendig in  $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} W_\mu$ . Damit folgt für jede echte Unterdarstellung  $U \subset W$  schon  $\text{pr}_1(U) \neq L$ ,  $\text{pr}_2(U) \neq L'$ . Da aber  $L$  und  $L'$  einfach sind, folgt  $\text{pr}_1(U) = 0$ ,  $\text{pr}_2(U) = 0$  und damit  $U = 0$ . Mithin ist  $W$  einfach, und die von Null verschiedenen Abbildungen  $\text{pr}_1 : W \rightarrow L$ ,  $\text{pr}_2 : W \rightarrow L'$  müssen Isomorphismen sein, denn bei beiden Abbildungen sind ja Bild und Kern Unterdarstellungen der einfachen Darstellungen  $W, L, L'$ . Daraus folgt dann  $L \simeq W \simeq L'$  wie gewünscht.  $\square$

5.8.4. Seien  $(K, T)$  eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe und  $R^+ \subset \mathfrak{R}(K, T)$  ein System von positiven Wurzeln. So setzen wir

$$\mathfrak{X}(T)^+ := \{\lambda \in \mathfrak{X}(T) \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \forall \alpha \in R^+\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **dominanten Gewichte**. Diese Menge hängt natürlich von der Wahl eines Systems positiver Wurzeln  $R^+$  ab.

**Satz 5.8.5 (Klassifikation der einfachen Darstellungen).** *Gegeben  $(K, T)$  eine torierte zusammenhängende kompakte Liegruppe und  $R^+ \subset \mathfrak{R}(K, T)$  ein System positiver Wurzeln liefert die Vorschrift, die jeder einfachen Darstellung ihr höchstes Gewicht zuordnet, eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache endlichdimensionale} \\ \text{stetige komplexe} \\ \text{Darstellungen von } K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(T)^+$$

$$L \mapsto (\text{Das höchste Gewicht von } L)$$

5.8.6. Man betrachte in der Reellifizierung  $\mathfrak{X}(T)_\mathbb{R} = \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  unseres Charaktergitters das Komplement der Vereinigung der Fixpunkthyperebenen aller Spiegelungen der Weylgruppe. Seine maximalen konvexen Teilmengen heißen **Alkoven** oder **Weylkammern**. Diese Alkoven entsprechen nach [SPW] 2.2.6 eindeutig Systemen von positiven Wurzeln unter der Zuordnung, die einem System  $R^+$  die konvexe Menge

$$C(R^+) := \{\lambda \in \mathfrak{X}(T)_\mathbb{R} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \forall \alpha \in R^+\}$$

zuordnet. Per definitionem ist dann die Menge der dominanten Gewichte der Schnitt des Charaktergitters mit dem Abschluß der Weylkammer zu  $R^+$ , in Formeln

$$\mathfrak{X}(T)^+ = \mathfrak{X}(T) \cap \overline{C(R^+)}$$

*Beweis.* Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $K$  ist die Menge  $P_T(V)$  ihrer Gewichte offensichtlich stabil unter der Weylgruppe  $W$ , genauer gilt  $wV_\lambda = V_{w\lambda}$  für jeden Repräsentanten  $w \in N_K(T)$  eines Elements  $w \in W$ . Ist nun ein Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$  einer Darstellung von  $K$  nicht dominant, so existiert  $\alpha \in R^+$  mit  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < 0$  und folglich  $s_\alpha(\lambda) > \lambda$  und  $\lambda$  kann kein maximales Gewicht gewesen sein. Das höchste Gewicht einer einfachen Darstellung ist also stets dominant. Damit ist die Abbildung aus unserem Satz schon mal sinnvoll definiert. Nach 5.8.3 ist sie schon mal injektiv. Es bleibt zu zeigen, daß sie auch surjektiv ist, daß also zu jedem dominanten Gewicht auch eine einfache Darstellung mit diesem höchsten Gewicht existiert. Das verschieben wir auf Abschnitt 5.10.  $\square$

## 5.9 Differentialformen und Integration

5.9.1. Wir verallgemeinern nun den Formalismus der Differentialformen, wie er in [AN2] 9.2 folgende entwickelt wurde, auf abstrakte Mannigfaltigkeiten. Gleichzeitig besprechen wir auch allgemeinere Felder. Wir verwenden im folgenden die Sprache der Kategorientheorie [LA2] 7.1.1.

5.9.2. Sei  $A : \text{Modf}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Modf}_{\mathbb{R}}^{\text{opp}}$  ein Opfunktorkontraktor von der Kategorie der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in sich selbst. Solch ein Opfunktorkontraktor  $A$  heißt **glatt**, wenn die Abbildungen  $A : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(A(W), A(V))$  glatt sind. Ausführlicher reden wir dann von einem **reellen glatten Opfunktorkontraktor**.

5.9.3. Ausformuliert ist solch ein Opfunktorkontraktor eine Zuordnung, die jedem endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  einen endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $A(V)$  zuordnet und jedem Vektorraumhomomorphismus  $f : V \rightarrow W$  einen Vektorraumhomomorphismus  $A(f) : A(W) \xrightarrow{\sim} A(V)$  in die Gegenrichtung derart, daß für jeden endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  gilt  $A(\text{id}_V) = \text{id}_{A(V)}$  und, wann immer  $f, g$  verknüpfbare Homomorphismen sind,  $A(f \circ g) = A(g) \circ A(f)$ .

*Beispiele* 5.9.4. Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist die Vorschrift  $V \mapsto V^*$ ,  $f \mapsto f^\top$ , die jedem endlichdimensionalen Raum seinen Dualraum zuordnet und jedem Isomorphismus die transponierte Abbildung, ein glatter Opfunktorkontraktor. Allgemeiner ist für  $r \geq 0$  die Vorschrift  $V \mapsto \text{Alt}^r V$  aus [AN2] 9.1.1 oder auch [LA2] 6.5.3 mit der Vorschrift  $f \mapsto f^\top$  auf Morphismen in der Notation [AN2] 9.1.13 ein glatter Opfunktorkontraktor. Auch die Vorschriften  $\text{Bil}$  und  $\text{SBil}$ , die jedem Vektorraum den Raum seiner Bilinearformen beziehungsweise symmetrischen Bilinearformen zuordnen, sind glatte Opfunktorkontraktoren.

5.9.5 (**Anwenden glatter Opfunktoren auf Vektorbündel**). Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$  und ein glatter Opfunktoren  $A$  und ein glattes Vektorbündel  $p : E \rightarrow M$  im Sinne von 3.4.3.4 gibt es auf der disjunkten Vereinigung

$$A(E) := \bigsqcup_{x \in M} A(E_x)$$

genau eine Struktur als glattes Vektorbündel auf  $M$  derart, daß für jede Bündelkarte  $f : U \times V \rightarrow E$  mit  $U \subseteq M$  und  $V$  ein reeller Vektorraum der entsprechenden Dimension die Abbildung  $U \times A(V) \hookrightarrow A(E)$  gegeben durch  $(x, v) \mapsto (A(f_x)^{-1})(v)$  eine Bündelkarte von  $A(E)$  ist. Hierbei verstehen wir  $f_x$  als den Isomorphismus  $f_x : V \xrightarrow{\sim} E_x$  gegeben durch  $f : (x, v) \mapsto f_x(v)$ . Um das einzusehen, muß man nur prüfen, daß die Kartenwechsel der so erklärten Bündelkarten glatt sind, und das folgt unmittelbar aus der Glattheit des Opfunktors  $A$ . Offensichtlich ist dies  $A : E \mapsto A(E)$  dann ein Opfunktoren von der Kategorie der glatten Vektorbündel auf  $M$  in sich selbst und für endlichdimensionale Vektorräume  $V$  haben wir natürliche Bündelisomorphismen  $M \times A(V) \xrightarrow{\sim} A(M \times V)$ .

*Ergänzung 5.9.6.* Zum Anwenden auf Vektorbündel wäre es natürlicher gewesen, statt mit „glatten Opfunktoren“ mit „glatten Funktoren von der Isomorphismenkategorie der endlichdimensionalen reellen Vektorräume in sich selber“ zu arbeiten. Der Kontext der Opfunktoren erlaubt jedoch das Zurückziehen der zugehörigen Felder unter beliebigen glatten Abbildungen und ist deshalb der Diskussion von Differentialformen besonders gut angepaßt.

5.9.7. Wir können zu jedem glatten Vektorraumbündel  $E$  insbesondere durch Anwenden des Dualraumfunktors das **duale Bündel**  $E^*$  und allgemeiner die Bündel  $\text{Alt}^r(E)$  bilden.

5.9.8. Seien  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $A$  ein glatter Opfunktoren. Unter einem  **$A$ -Feld auf  $M$**  verstehen wir einen Schnitt  $\sigma : M \rightarrow A(TM)$  des Bündels  $A(TM)$  und schreiben meist  $\sigma(x) = \sigma_x$ . Ist unsere Mannigfaltigkeit eine offene Teilmenge  $M \subseteq X$  eines reellen affinen Raums, so haben wir einen natürlichen Isomorphismus  $M \times \vec{X} \xrightarrow{\sim} TM$  von glatten Vektorbündeln und damit auch einen natürlichen Isomorphismus  $A(TM) \xrightarrow{\sim} M \times A(\vec{X})$ . Unter diesem Isomorphismus entspricht ein  $A$ -Feld  $\sigma$  einer Abbildung

$$\sigma : M \rightarrow A(\vec{X})$$

Wenn wir den glatten Opfunktoren nicht explizit machen wollen, reden wir von einem **Opfunktorenfeld**.

5.9.9. Das duale Bündel des Tangentialbündels einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  heißt das **Kotangentialbündel**  $T^*M$ . Die Schnitte des Kotangentialbündels heißen **Kovektorenfelder**. Auf einer offenen Teilmenge  $M \subseteq X$  eines reellen affinen

Raums  $X$  können wir insbesondere ein Kovektorfeld identifizieren mit einer Abbildung  $M \rightarrow \vec{X}^*$  und unser neuer Begriff erweitert unseren Begriff eines Kovektorfelds aus [AN2] 8.1.5.

5.9.10. Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Schnitte des Bündels  $\text{Alt}^r(TM)$  zum Opfunktorkomplex  $\text{Alt}^r$  der alternierenden  $r$ -Multilinearformen heißen  **$r$ -Formen** und, wenn man  $r$  im Unbestimmten lassen will, **Differentialformen auf  $M$** . Eine  $n$ -Form auf einer  $n$ -Mannigfaltigkeit heißt auch eine **Volumenform**. Auf einer offenen Teilmenge  $M \subseteq X$  eines reellen affinen Raums  $X$  können wir insbesondere eine  $r$ -Form identifizieren mit einer Abbildung  $M \rightarrow \text{Alt}^r(\vec{X})$ . Unser neuer Begriff erweitert damit unseren Begriff von Differentialform aus [AN2] ???. Den Raum der glatten  $r$ -Formen auf  $M$  notieren wir  $\Omega^r(M)$ .

5.9.11 (**Dachprodukt**). Gegeben Differentialformen  $\omega, \eta$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  erklären wir ihr **Dachprodukt** punktweise, in Formeln  $(\omega \wedge \eta)_x := \omega_x \wedge \eta_x$  für alle  $x \in M$ . Man erkennt mühelos, daß das Dachprodukt glatter Formen wieder glatt ist.

5.9.12 (**Bezug zu den Differentialformen aus der Analysis**). Eine relative Differentialform im Sinne von [AN2] 9.2 auf einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset X$  positiver Kodimension alias eine Abbildung  $M \rightarrow \text{Alt}^r \vec{X}$  ist nicht dasselbe wie eine Differentialform im hier erklärten Sinne: Salopp gesprochen liegt der Unterschied darin, daß unsere  $r$ -Formen hier an jeder Stelle  $p \in M$  nur je  $r$  Tangentialvektoren aus  $T_p M$  eine Zahl zuordnen, im Gegensatz zu unseren relativen Differentialformen im Sinne von [AN2] 9.2, die sogar je  $r$  beliebigen Vektoren des Richtungsraums  $\vec{X}$  des umgebenden affinen Raums  $X$  eine Zahl zuordneten. Allerdings liefert jede relative Differentialform auf einer Untermannigfaltigkeit durch Einschränkung auch eine „absolute“ Differentialform auf besagter Untermannigfaltigkeit. Hier ist vielleicht auch der richtige Moment für das Eingeständnis, daß das Konzept einer relativen Differentialform vom höheren Standpunkt aus gesehen ziemlich sinnlos ist und nur als Etappe beim didaktischen Aufbau der Theorie eine gewisse Berechtigung haben mag.

**Definition 5.9.13 (Verwandtschaft von Opfunktorkomplexen)**. Seien  $\phi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung von Mannigfaltigkeiten und  $A$  ein glatter Opfunktorkomplex. Zwei  $A$ -Felder  $\sigma : M \rightarrow A(TM)$  und  $\tau : N \rightarrow A(TN)$  heißen **verwandt unter  $\phi$**  und wir schreiben  $\phi : \sigma \rightsquigarrow \tau$ , wenn für alle  $x \in M$  in Vektorraum  $A(T_x M)$  gilt

$$\sigma_x = (A(d_x \phi))(\tau_{\phi(x)})$$

5.9.14. Natürlich hat jedes Opfunktorkomplex genau einen Rückwärtsverwandten. Ist unsere Abbildung ein Diffeomorphismus, so hat es auch genau einen Vorwärtsverwandten. Verwandtschaft von Opfunktorkomplexen ist transitiv im Sinne von [AN2] 8.2.18.

5.9.15. Nach 5.9.14 liefert jede glatte Abbildung  $\phi : M \rightarrow N$  von Mannigfaltigkeiten lineare Abbildungen  $\phi^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$  in die Gegenrichtung, die man das **Zurückholen von Differentialformen** nennt. Sie verallgemeinern unseren Rückzug von Differentialformen aus [AN2] 9.2.9, erfüllen die bei Verwandtschaftsbeziehungen üblichen Identitäten  $\text{id}^*(\omega) = \omega$  und  $\phi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi)^*$ , und sind verträglich mit dem Dachprodukt, in Formeln

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$$

Um eine Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit anzugeben, reicht es aus, einen Atlas zu wählen und den Rückzug unserer Form unter jeder Karte anzugeben. Haben wir umgekehrt Differentialformen auf den Definitionsbereichen aller Karten gegeben und passen diese zusammen unter dem Rückzug längs Kartenwechseln, so kommen sie von einer wohlbestimmten Differentialform auf unserer Mannigfaltigkeit her.

**Lemma 5.9.16 (Äußere Ableitung).** *Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es genau eine Abbildung*

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

*mit der Eigenschaft, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  und alle  $\omega \in \Omega^k(M)$  gilt  $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$  mit unserer äußeren Ableitung aus [AN2] 9.5.4 auf der rechten Seite.*

*Vorschau 5.9.17.* Diese Abbildung heißt wieder die **äußere Ableitung**. Eine koordinatenfreie Beschreibung der äußeren Ableitung wird in [?] ?? gegeben.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, da unsere Mannigfaltigkeit ja durch Bilder von Karten überdeckt wird. Die Existenz folgt aus [AN2] 9.5.11, das uns sagt, daß es nicht darauf ankommt, in welcher Karte wir lokal die äußere Ableitung unserer Differentialform berechnen.  $\square$

**5.9.18 (Differenziale von Funktionen).** Auch auf Mannigfaltigkeiten sind Nullformen Funktionen und Einsformen Kovektorfelder. Jeder glatten Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Mannigfaltigkeit ordnet die äußere Ableitung nach 5.9.16 also ein Kovektorfeld  $df$  zu. Dieses Kovektorfeld ist dadurch definiert, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  gilt  $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$ . Es kann aber alternativ auch wie folgt beschrieben werden: Eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  hat ja in jedem Punkt  $p \in M$  nach 3.3.3 ein Differential  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ . Mithilfe der natürlichen Identifikation  $T_{f(p)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  können wir unser Differential mithin als Linearform auf dem Dualraum  $d_p f \in T_p^* M$  auffassen und die Zuordnung  $M \rightarrow T^* M, p \mapsto d_p f$  als ein Kovektorfeld. Dieses Kovektorfeld notieren wir auch  $df$  und überlassen dem Leser den Nachweis, daß es mit unserem vermittels 5.9.16 erklärten Kovektorfeld  $df$  übereinstimmt. In diesem Fall kommt es also

nicht darauf an, ob wir das gerade  $d$  oder das kursive  $d$  verwenden. Wir nennen dieses Kovektorfeld  $df$  das **Differential von  $f$** .

**Satz 5.9.19 (Rechnen mit der äußeren Ableitung).** *Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$  gilt:*

1. Die äußere Ableitung  $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ ,  $\omega \mapsto d\omega$  ist  $\mathbb{R}$ -linear für alle  $r \in \mathbb{N}$ ;
2. Für Nullformen alias Funktionen  $f$  gilt  $df = d f$ ;
3. Für das Differential eines Dach-Produkts glatter Differentialformen gilt die **Leibniz-Regel**

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta$$

4. Gegeben ein glatter Morphismus  $\phi : M \rightarrow N$  von Mannigfaltigkeiten haben wir die **Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung**

$$d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$$

5. Für jede Differentialform auf  $M$  gilt  $d(d\omega) = 0$ .

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus der Definition der äußeren Ableitung in 5.9.16 und ihren bereits bewiesenen Analoga [AN2] 9.5.11 im Fall offener Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume.  $\square$

5.9.20. Die Existenz einer äußeren Ableitung von Differentialformen mit den im Satz formulierten bemerkenswerten Eigenschaften ist eine Besonderheit, die für allgemeinere Felder keine Entsprechung hat. Der Kalkül der Differentialformen wird dadurch ein außerordentlich bequemer und nützlicher Formalismus.

5.9.21. Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $M$  und  $k \geq 0$  bezeichne  $C_1\Omega^k(M)$  den reellen Vektorraum aller stetigen  $k$ -Formen auf  $M$  mit kompaktem Träger. Den Begriff der **Orientierung** einer abstrakten Mannigfaltigkeit definieren wir wie im eingebetteten Fall in [AN2] 9.3.3.

**Satz 5.9.22 (Integration von Volumenformen).** *Für jede orientierte  $k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es genau eine Linearform  $\int : C_1\Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, daß für jede Karte  $\varphi : W \rightarrow M$  der Orientierung  $\varepsilon$  und jede kompakt getragene Volumenform  $\omega \in C_1\Omega^k(M)$  mit Träger im Bild dieser Karte  $\text{supp } \omega \subset \varphi(W)$  gilt*

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_W (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$$

*Beweis.* Das geht genau wie der einfache Teil des Beweises von [AN2] 9.4.3. Man wählt eine Überdeckung des Trägers der Volumenform durch die Bilder endlich vieler orientierter Karten und dazu eine Teilung der Eins genau wie in [AN2] 5.2.14 und schreibt so unsere Volumenform als Summe von Formen, die jeweils nur Träger im Bild einer Karte haben. Damit ist dann die Eindeutigkeit bereits gezeigt. Um die Existenz zu zeigen, muß man nur nachweisen, daß das Ergebnis dieser Konstruktion von allen Wahlen unabhängig ist, und das folgert man aus der Transformationsformel.  $\square$

**5.9.23 (Invariante Volumenformen auf Liegruppen).** Für jede Liegruppe  $G$  und jeden glatten Opfunktorkomplex  $A$  liefert unser in 3.4.9 konstruierter Isomorphismus von Vektorbündeln  $G \times T_e G \xrightarrow{\sim} TG$  gegeben durch  $(g, B) \mapsto (d_e(g \cdot))(B)$  einen Isomorphismus

$$A(TG) \xrightarrow{\sim} G \times A(T_e G)$$

Es ist leicht zu sehen, daß für  $\omega \in A(T_e G)$  der zugehörige konstante Schnitt  $p \mapsto (p, \omega)$  rechts einem  $A$ -Feld links entspricht, daß unter allen Linkstranslationen zu sich selbst verwandt ist. Insbesondere finden wir auf jeder Liegruppe eine von Null verschiedene unter allen Linkstranslationen zu sich selbst verwandte stetige Volumenform  $\omega^G$ . Mit  $|\omega^G|$  finden wir dann auch eine unter allen Linkstranslationen zu sich selbst verwandte stetige positive Dichte alias ein Haarmaß oder genauer ein linksinvariantes Haar'sches Borelmaß im Sinne von [TM] 4.3.13.

## Übungen

*Übung 5.9.24.* Seien  $H \triangleleft G$  Liegruppen. Jede  $H$ -invariante Volumenform auf  $T_1(G/H)$  läßt sich auf genau eine Weise zu einer  $G$ -invarianten Volumenform auf  $G/H$  fortsetzen, und diese Fortsetzung ist stetig, ja sogar glatt.

*Übung 5.9.25.* Gegeben eine nirgends verschwindende stetige Volumenform  $\omega$  auf einer Mannigfaltigkeit  $X$  erhalten wir eine Orientierung auf  $X$ , indem wir jeder angeordneten Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  eines Tangentialraums  $T_x X$  das Vorzeichen der von Null verschiedenen reellen Zahl  $\omega_x(v_1, \dots, v_n)$  zuordnen. Notieren wir  $\vec{X}$  unsere Mannigfaltigkeit mit dieser Orientierung, so gilt für jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit kompaktem Träger  $(\int_{\vec{X}} f \omega) \geq 0$ , und gilt zusätzlich  $f \neq 0$ , so ist unser Integral positiv.

*Übung 5.9.26.* Jede Liegruppe ist orientierbar. Jeder Quotient einer Liegruppe nach einer zusammenhängenden Untergruppe ist orientierbar.

## 5.10 Die Weyl'schen Formeln

**Satz 5.10.1.** Seien  $K \supset T$  eine zusammenhängende kompakte Liegruppe und ein maximaler Torus. Für  $t \in T$  bezeichne  $\text{Ad}_{K/T}(t)$  die von der adjungierten

Darstellung auf dem Quotienten  $\text{Lie } K / \text{Lie } T$  induzierte Abbildung. So gilt für alle stetigen Klassenfunktionen  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  die **Weyl'sche Integrationsformel**

$$\int_K f(g) \langle g \rangle_K = \frac{1}{|W|} \int_T j(t) f(t) \langle t \rangle_T$$

mit  $j(t) := \det(\text{id} - \text{Ad}_{K/T}(t))$  für  $t \in T$ .

5.10.2. Hier bezeichnet  $W$  die Weylgruppe und  $\langle g \rangle_K$  sowie  $\langle t \rangle_T$  deuten die Integrationen über die normalisierten Haarmaße unserer kompakten Gruppen an. Der Beweis der Integrationsformel wird erst zu Ende dieses Abschnitts gegeben. Daß eine Formel dieser Art gelten könnte, wirkt zumindest plausibel, wenn man sich daran erinnert, daß jeder maximale Torus jede Konjugationsklasse trifft.

5.10.3. Wir schreiben die Gruppenstruktur des Charaktergitters  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$  additiv in der Hoffnung, daß das der Anschauung hilft. Fassen wir Elemente  $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$  dahingegen als konkrete Funktionen  $T \rightarrow \mathbb{C}$  oder auch als Elemente des Gruppenrings  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}(T)]$  auf, so schreiben wir  $e^\lambda$ , so daß also gilt  $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu} \neq e^\lambda + e^\mu$  für  $\lambda, \mu \in \mathfrak{X}(T)$ . Unsere Funktion  $j$  erhält in diesen Notationen, da ja die Zahl der Wurzeln gerade ist, die Gestalt

$$j = \prod_{\alpha \in R} (1 - e^\alpha) = \prod_{\alpha \in R} (e^\alpha - 1)$$

5.10.4. Gegeben eine endlichdimensionale Darstellung  $V$  eines Torus  $T$  gilt für ihren Charakter in unseren Notationen offensichtlich  $\chi_V = \sum_{\nu \in \mathfrak{X}(T)} \dim V_\nu e^\nu$ . Insbesondere haben wir  $\chi_V \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}(T)] \subset \mathcal{C}(T)$ .

5.10.5. Seien  $(K, T)$  eine torierte zusammenhängende kompakte Liegruppe mit Gitterdatum  $W \curvearrowright \mathfrak{X} \supset R$  und sei  $R^+ \subset R$  ein System positiver Wurzeln. Wir wählen nun ein System positiver Wurzeln  $R^+$  im Sinne von 5.8.1 und betrachten im **halbierten Gewichtegitter**  $\mathfrak{X}/2 := (1/2)\mathfrak{X}(T) \subset \mathfrak{X}(T)_\mathbb{Q}$  die Halbsumme der positiven Wurzeln alias den **Weylvektor**

$$\rho = \rho(R^+) := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

**Satz 5.10.6 (Weyl'sche Charakterformel).** Seien  $(K, T)$  eine torierte zusammenhängende kompakte Liegruppe,  $W \curvearrowright \mathfrak{X} \supset R$  ihr Gitterdatum und  $R^+ \subset R$  ein System positiver Wurzeln. So gilt für den Charakter einer irreduziblen Darstellung  $L(\lambda)$  von  $K$  mit höchstem Gewicht  $\lambda$  im Gruppenring  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}/2]$  des halbierten Gewichtegitters die Formel

$$\chi_{L(\lambda)}|_T = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w\rho}}$$

5.10.7. Der Gruppenring  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  eines Gitters  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$  ist ein Ring von Laurentpolynomen in endlich vielen Veränderlichen und damit ein Integritätsbereich und sogar ein faktorieller Ring. Unsere Formel ist im Quotientenkörper dieses faktoriellen Rings zu verstehen. Mit  $\det w = \pm 1$  ist die Determinante des durch  $w$  gegebenen Endomorphismus des Charaktergitters gemeint.

5.10.8. Aus der Weyl'schen Charakterformel folgt die **Weyl'sche Dimensionsformel**

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle}$$

Wir geben den Beweis der Dimensionsformel und weitere kombinatorische Identitäten für Charaktere im Kontext der Darstellungstheorie von Liealgebren in [?] ?? folgende. Es handelt sich im wesentlichen um eine geschickte Auswertung der Weyl'schen Charakterformel am neutralen Element mit Hilfe der Regel von de l'Hospital.

5.10.9. Der hier gegebene Beweis der Weyl'schen Charakterformel stützt sich auf die Integrationsformel 5.10.1 und die Weyl'sche Nennerformel 5.10.10. Sie sagt uns, wie wir im Gruppenring  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}/2]$  des halbierten Wurzelgitters eine Art „Quadratwurzel von  $j$ “ auch als alternierende Summe schreiben können.

**Lemma 5.10.10 (Weyl'sche Nennerformel).** *Gegeben  $W \curvearrowright \mathfrak{X} \supset R$  eine Gitterspiegelungsgruppe mit stabiler Wurzelwahl und  $R^+ \subset R$  ein System positiver Wurzeln mit Halbsumme  $\rho$  gelten in  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}/2]$  die Identitäten*

$$e^\rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} \det(w) e^{w\rho}$$

5.10.11. Multiplizieren wir die linke Seite dieser Gleichung mit  $e^{-\rho}$ , so ergibt sich das Produkt der Terme zu negativen Wurzeln aus unserer Produktdarstellung der Funktion  $j$ . Die Funktion  $j$  selber ist also das Quadrat der Norm der linken und dann natürlich auch der rechten Seite unserer Gleichung.

*Beweis der Nennerformel.* Die erste Gleichung ist evident. Zum Beweis der zweiten Gleichung brauchen wir einiges zu Spiegelungsgruppen und Wurzelsystemen. Ich erinnere daran, daß wir in [SPW] 2.2.6 zu einem System von positiven Wurzeln  $R^+$  die Teilmenge  $\Pi \subset R^+$  der **einfachen Wurzeln** erklärt hatten als die Menge aller positiven Wurzeln, die sich nicht als Summe über eine Multimenge von zwei oder mehr Elementen des besagten Systems schreiben lassen, also die kleinste Teilmenge  $\Pi \subset R^+$  mit  $R^+ \subset |\Pi|$ . In [SPW] 2.2.6 hatten wir auch gezeigt, daß die Spiegelungen zu einfachen Wurzeln von  $R^+$ , auch genannt die **einfachen Spiegelungen**, genau die Spiegelungen an den Wänden des  $R^+$  zugeordneten Alkoven sind. Damit erzeugen sie nach [SPW] 1.6.1 oder auch [SPW]

2.2.12 bereits die Weylgruppe und nach [SPW] 2.2.7 gilt für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Pi$  die Formel  $s_\alpha R^+ = (R^+ \setminus \alpha) \cup \{-\alpha\}$  und insbesondere  $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$  und folglich  $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ . Anschaulich bedeutet das, daß ein Alkoven unter der Spiegelung an einer seiner Wände in einen Alkoven übergeht, der vom ursprünglichen Alkoven nur durch diese eine Wand getrennt wird. Damit ist klar, daß in unserer Nennerformel beide Seiten bei Anwendung einer einfachen Spiegelung nur ihr Vorzeichen ändern. Die linke Seite setzt sich nun zusammen aus Summanden  $e^\lambda$  mit  $\lambda \in \rho - |R^+ \rangle$ , wo wir mit  $|R^+ \rangle$  das Monoid-Erzeugnis meinen. Es reicht also zu zeigen, daß von diesen  $\lambda$  nur  $\rho$  selbst im Inneren der dominanten Weylkammer liegt. Für alle von Null verschiedenen  $\mu \in |R^+ \rangle$  gibt es nun eine einfache Wurzel  $\alpha \in \Pi$ , deren Kowurzel darauf positiv ist, denn wo alle einfachen Kowurzeln nichtpositiv sind, ist der Abschluß des Negativen unserer Weylkammer  $C(R^+)$ . So folgt  $\langle \rho - \mu, \alpha^\vee \rangle \leq 0$  und  $\rho - \mu$  liegt nicht im Inneren der dominanten Weylkammer.  $\square$

*Beweis der Charakterformel 5.10.6.* Wir betrachten die zum Fixpunkt  $(-\rho) \in \mathfrak{X}/2$  verschobene sogenannte **dot-Operation** der Weylgruppe auf  $\mathfrak{X}/2$ , gegeben in Formeln durch  $w \cdot \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho$ . Wegen  $\rho - s_\alpha \rho = \alpha$  für jede einfache Wurzel  $\alpha$  stabilisiert sie das Untergitter  $\mathfrak{X}$ . Wir bilden für jedes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{X}$  im Gruppenring des Gewichtegitters die alternierende Summe

$$A(\lambda) := \sum_{w \in W} \det(w) e^{w \cdot \lambda}$$

Die Weyl'sche Nennerformel 5.10.10 besagt

$$A(0) = \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})$$

Die  $1 - e^{-\alpha}$  für  $\alpha \in R^+$  sind darin paarweise teilerfremd, wie der Leser selbst prüfen mag. Die Identität

$$(1 - e^\alpha)(1 + e^\alpha + \dots + e^{n\alpha}) = (1 - e^{(n+1)\alpha})$$

zeigt dann, daß  $A(0)$  bereits im Gruppenring des Charaktergitters  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$  jedes  $A(\lambda)$  teilt, denn  $e^{w \cdot \lambda} - e^{s_\alpha w \cdot \lambda}$  ist stets ein Vielfaches von einem Ausdruck der Gestalt  $(1 - e^{(n+1)\alpha})$ . Wir können mithin für alle dominanten ganzen Gewichte  $\lambda$  im Gruppenring des Charaktergitters den Quotienten

$$\chi_\lambda = A(\lambda)/A(0) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$$

bilden. Er ist invariant unter der Weylgruppe, denn rechnen wir im vergrößerten Gruppenring  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}/2]$  und erweitern unseren Bruch mit  $e^\rho$ , so wechseln Nenner

und Zähler unter jeder Spiegelung aus der Weylgruppe nur ihr Vorzeichen und der Bruch bleibt gleich. Wir interpretieren unseren Quotienten nun als eine unter der Weylgruppe invariante Funktionen auf  $T$  und dehnen sie aus zu einer Klassenfunktion  $\chi_\lambda$  auf  $K$ . So erhalten wir ein Orthonormalsystem von Klassenfunktionen, denn mit der Weyl'schen Integrationsformel 5.10.1 und der offensichtlichen Formel  $\int_T e^\mu = \delta_{0\mu}$  ergibt sich

$$\int_K \bar{\chi}_\lambda \chi_\nu = \int_T \frac{\overline{A(\lambda)}A(\nu)}{A(0)A(0)} \frac{j}{|W|} = \frac{1}{|W|} \int_T \overline{A(\lambda)}A(\nu) = \delta_{\lambda\nu}$$

Andererseits gilt  $A(0)e^\mu = e^\mu + \sum_{\nu < \mu} c_\nu e^\nu$ , als da heißt, die Multiplikation mit  $A(0)$  ändert nicht die Koeffizienten der „Leitterme“. Folglich hat  $\chi_\lambda = A(\lambda)/A(0)$  wie  $A(\lambda)$  den einzigen Leitterm  $e^\lambda$  alias die Gestalt

$$\chi_\lambda = e^\lambda + \sum_{\nu < \mu} c_\nu e^\nu$$

Daraus folgern wir nun, daß diese Funktionen  $\chi_\lambda$  genau die irreduziblen Charaktere von  $K$  sein müssen. In der Tat bilden sie sicher eine  $\mathbb{Z}$ -Basis des Teilrings  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]^W$ . Ist  $V$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $K$ , so liegt die Restriktion ihres Charakters auf  $T$  in diesem Teilring und wir können sie mithin darstellen als eine endliche Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\chi_V = \sum_{\nu} n_\nu \chi_\nu$$

Ist nun  $V$  irreduzibel, so gilt zusätzlich  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ . Daraus folgt sofort  $\chi_V = \chi_\lambda$  für ein wohlbestimmtes dominantes ganzes Gewicht  $\lambda$ , das dann natürlich das höchste Gewicht von  $V$  sein muß, und wir erhalten für  $V = L(\lambda)$  auch gleich die Weyl'sche Charakterformel

$$\chi_{L(\lambda)}|_T = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w \cdot \lambda}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w \cdot 0}} = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w \cdot \rho}}$$

Das zeigt ein zweites Mal, daß je zwei einfache Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht isomorph sind. Da weiter die Charaktere dicht liegen müssen im Raum der Klassenfunktionen, zeigt es auch, daß es zu jedem dominanten Gewicht eine einfache Darstellung gibt, die dies höchste Gewicht hat.  $\square$

**Lemma 5.10.12 (Konjugationsklassen in kompakten Liegruppen).** *Gegeben eine zusammenhängende kompakte Liegruppe  $K$  und ein maximaler Torus  $T \subset K$  induziert die Einbettung unseres Torus einen Homöomorphismus zwischen dem Raum der Bahnen der Weylgruppe auf dem Torus und dem Raum der Konjugationsklassen in unserer Gruppe*

$$T/W \xrightarrow{\sim} K/\text{int}(K)$$

5.10.13. Besonders anschaulich scheint mir die Aussage des Lemmas im Fall der Drehgruppe  $SO(3)$  und besonders leicht prüft man es im Fall  $U(n)$ . Das normierte Haarmaß auf  $K$  hat ein Bildmaß auf dem Raum der Konjugationsklassen  $K/\text{int}(K)$  und dem entspricht notwendig ein nichtnegatives Borelmaß auf  $T/W$ . Man kann sich mit etwas Mühe auch formal klarmachen, daß dieses und überhaupt jedes Borelmaß auf  $T/W$  das direkte Bild eines wohldefinierten  $W$ -invarianten Borelmaßes auf  $T$  sein muß. Die Weyl'sche Integrationsformel 5.10.1 gibt das besagte  $W$ -invariante Borelmaß auf  $T$  explizit an.

*Beweis.* Die Surjektivität unserer Abbildung folgt aus der Erkenntnis 5.1.7, daß jedes Element zu einem maximalen Torus gehört. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir an, es gebe  $t, s \in T$  und  $g \in K$  mit  $gtg^{-1} = s$ . Dann sind  $T$  und  $gTg^{-1}$  zwei maximale Tori in  $Z_K(s)$ , also gibt es wieder nach 5.1.7 ein Element  $h \in Z_K(s)$  mit  $T = hgTg^{-1}h^{-1}$  und wir haben  $y = hg \in N_K(T)$  gefunden mit  $yty^{-1} = s$ . Um schließlich zu zeigen, daß unsere Abbildung ein Homöomorphismus ist, müssen wir nach [TM] 1.5.13 nur nachweisen, daß die Konjugationsklassen in einer kompakten Hausdorffgruppe einen Hausdorffraum bilden. Das folgt jedoch aus [TM] 2.2.14.  $\square$

*Beweis der Weyl'schen Integrationsformel.* Wir interessieren uns für die Abbildung

$$\begin{aligned} K/T \times T &\xrightarrow{\varphi} K \\ (gT, t) &\mapsto gtg^{-1} \end{aligned}$$

Ihre anschauliche Bedeutung im Fall  $K = SO(3)$  diskutieren wir im Anschluß. Der homogene Raum  $K/T$  heißt die **Fahnenmannigfaltigkeit**. Unsere Abbildung ist äquivariant für die  $K$ -Operation von links auf dem Definitionsbereich und die  $K$ -Operation durch Konjugation auf dem Wertebereich. Unsere Abbildung ist auch äquivariant für die damit kommutierende Operation der Weylgruppe durch  $w(gT, t) := (gw^{-1}T, wt)$  auf dem Definitionsbereich und die triviale Operation auf dem Wertebereich. Jetzt betrachten wir

$$T_{\text{reg}} := \{t \in T \mid \alpha(t) \neq 1 \forall \alpha \in R\} \subseteq T$$

Ihre Elemente heißen die **regulären Elemente** unseres maximalen Torus  $T$ . Diese Menge ist offensichtlich  $W$ -stabil. Gegeben  $t \in T_{\text{reg}}$  erkennt man in der Lie-Algebra, daß  $T$  die Einskomponente seines Zentralisators ist, so daß der ganze Zentralisator in  $N_K(T)$  enthalten sein muß. Bezeichnen wir mit  $K_{\text{reg}} \subset K$  die Menge aller zu einem Punkt in  $T_{\text{reg}}$  konjugierten Elemente, also aller Elemente  $g \in K$  mit  $Z_K(g)^\circ$  ein maximaler Torus, so sind die Fasern von

$$\varphi_{\text{reg}} : K/T \times T_{\text{reg}} \rightarrow K_{\text{reg}}$$

folglich Bahnen unter der Weylgruppe  $W$ . Das Komplement von  $K_{\text{reg}}$  ist die Vereinigung der Bilder  $\varphi(K/T \times \ker \alpha)$  für  $\alpha \in R$  und damit abgeschlossen und eine Nullmenge für das Haarmaß. Die Menge der regulären Punkte ist folglich eine offene Teilmenge  $K_{\text{reg}} \subset K$ . Wir werden bald sehen, daß  $\varphi_{\text{reg}}$  an jeder Stelle bijektives Differential hat und daß  $W$  frei auf allen seinen Fasern operiert, aber alles der Reihe nach. Jetzt wählen wir erst einmal beliebige nirgends verschwindende glatte Volumenformen  $\omega^{K/T}$ ,  $\omega^T$  und  $\omega^K$  auf  $K/T, T$  und  $K$ . Das geht nach den Übungen 5.9.25 und 5.9.26. Wir verwenden die Notation  $\omega^{K/T} \boxtimes \omega^T := \text{pr}_1^* \omega^{K/T} \wedge \text{pr}_2^* \omega^T$ . Sicher gibt es eine glatte Funktion  $c : K/T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi^* \omega^K = c \omega^{K/T} \boxtimes \omega^T$$

Nun haben wir ja  $\varphi \circ (h \cdot) = (\text{int } h) \circ \varphi$  für alle  $h \in K$ . Falls  $\omega^K$  invariant ist unter Links- und Rechtstranslation und  $\omega^{K/T}$  invariant unter Linkstranslation, was wir von jetzt an beides annehmen wollen und nach 5.9.23 und 5.9.24 auch annehmen dürfen, so hängt offensichtlich  $c$  nur von der zweiten Koordinate ab und kann geschrieben werden als  $c(gT, t) = c(t)$ . Jetzt nehmen wir zusätzlich  $\omega^T$  auch noch invariant unter Linkstranslation an und betrachten für gegebenes  $t \in T$  die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccccc} K/T \times T & \rightarrow & K/T \times T & \xrightarrow{\varphi} & K & \rightarrow & K \\ (\bar{g}, \tau) & \mapsto & (\bar{g}, t\tau) & \mapsto & gt\tau g^{-1} & \mapsto & t^{-1}gt\tau g^{-1} \\ T_{\bar{e}}(K/T) \times T_e T & \rightarrow & T_{\bar{e}}(K/T) \times T_t T & \rightarrow & T_t K & \rightarrow & T_e K \end{array}$$

Um  $c(t)$  bis auf einen konstanten Faktor zu berechnen, müssen wir nur irgendeinen Vektorraumisomorphismus  $T_e K \xrightarrow{\sim} T_{\bar{e}}(K/T) \times T_e T$  nachschalten und die Determinante der Komposition bestimmen. Das Differential  $T_{\bar{e}}(K/T) \times T_e T \rightarrow T_e K$  unserer Verknüpfung ist gegeben durch  $(\bar{X}, Y) \mapsto \text{Ad}(t^{-1})\bar{X} + Y - \bar{X}$  für  $\bar{X} \in T_{\bar{e}}(K/T)$ . Wählen wir irgendein lineares Linksinverses  $T_e K \rightarrow T_e T$  zur offensichtlichen Einbettung, so erhalten wir einen für unsere Zwecke besonders praktischen Isomorphismus  $T_e K \xrightarrow{\sim} T_{\bar{e}}(K/T) \times T_e T$ . Die Determinante der Verknüpfung ergibt sich aus der allgemeinen Regel für Determinanten von Block-Dreiecksmatrizen zu  $\det(\text{Ad}_{K/T}(t^{-1}) - \text{id})$ . Für notfalls mit einer multiplikativen Konstante angepaßte Wahlen von  $\omega^K, \omega^T$  und  $\omega^{K/T}$  erhalten wir so

$$c(t) = \det(\text{Ad}_{K/T}(t^{-1}) - \text{id})$$

Da  $\text{Ad}_{K/T}(t)$  auf dem reellen Vektorraum  $\text{Lie } K / \text{Lie } T$  für ein geeignetes Skalarprodukt eine orthogonale Abbildung ist und offensichtlich in der Einskomponente von  $O(\text{Lie } K / \text{Lie } T)$  liegt, hat es die Determinante Eins und wir folgern  $c(t) = j(t)$ . Insbesondere ist das Differential von  $\varphi_{\text{reg}}$  an jeder Stelle ein Isomorphismus. Hätte eine Faser von  $\varphi_{\text{reg}}$  weniger als  $|W|$  Punkte, so folgte das

mit unserer  $W$ -Operation auch für alle Fasern in einer offenen Umgebung. Weil aber in jeder nichtleeren offenen Teilmenge von  $T$  offensichtlich Punkte liegen, die von keinem Element der Weylgruppe festgehalten werden, kann  $W$  auch keine Fixpunkte in  $T_{\text{reg}}$  haben. In der Sprache der Topologie wäre  $\varphi_{\text{reg}}$  ein Beispiel für eine  $|W|$ -blättrige Überlagerung. Die Wirkung von  $W$  erhält des weiteren die Orientierung, denn betrachten wir die adjungierte Operation von  $w \in N_K(T)$  auf  $\text{Lie } T \hookrightarrow \text{Lie } K \twoheadrightarrow \text{Lie } K / \text{Lie } T$ , so muß sie in der Mitte orientierungserhaltend sein als Einschränkung der Wirkung einer zusammenhängenden Gruppe und folglich links und rechts denselben Effekt auf den Orientierungen haben. Wählen wir nun Orientierungen auf  $K$ ,  $T$  und  $K/T$ , so erhalten wir für  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  stetig eine Kette von Gleichheiten „bis auf von  $f$  unabhängige multiplikative Konstanten“ der Gestalt

$$\int_K f(g) \doteq \int_{\bar{K}} f\omega^K \doteq \int_{\bar{K}/\bar{T} \times \bar{T}} \varphi^*(f\omega^K)$$

Der Punkt über den Gleichheitszeichen deutet dabei an, daß unsere Gleichungen nur bis auf von  $f$  unabhängige von Null verschiedene multiplikative Konstanten gelten. Für die zweite Gleichung argumentieren wir, daß es ausreicht, Funktionen mit Träger in  $K_{\text{reg}}$  zu betrachten, und dann sogar Funktionen mit Träger in einer offenen Teilmenge  $U \subseteq K_{\text{reg}}$  derart, daß  $\varphi_{\text{reg}}^{-1}(U)$  eine disjunkte Vereinigung von  $|W|$  offenen Mengen ist, die jeweils diffeomorph und orientierungserhaltend auf  $U$  abgebildet werden. Für  $f$  eine Klassenfunktion erhalten wir weiter

$$\doteq \int_{\bar{T}} cf\omega^T \doteq \int_T c(t)f(t) \doteq \int_T j(t)f(t)$$

Damit ist bereits gezeigt, daß die Weyl'sche Integrationsformel gilt bis auf eine von der zu integrierenden Funktion  $f$  unabhängige multiplikative Konstante  $C$ . Um diese Konstante  $C$  auch noch zu bestimmen, testen wir auf der konstanten Funktion  $f = 1$  und müssen damit nur noch  $\int_T j(t) = |W|$  zeigen. Dazu erinnern wir uns daran, daß wir ja bereits im Anschluß an die Weyl'sche Nennerformel in 5.10.11 eine Identität diskutiert hatten, die auch  $j(t) = A(0)\overline{A(0)}$  geschrieben werden kann.  $\square$

5.10.14. Als Folgerung des Beweises sehen wir, daß gegeben eine zusammenhängende torierte kompakte Liegruppe  $(K, T)$  der Zentralisator von jedem Punkt aus  $T_{\text{reg}} := T \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \ker \alpha$  gerade  $T$  selbst ist.

*Beispiel 5.10.15.* Im Fall  $K = \text{SO}(3)$  induziert die Operation auf  $S^2$  einen Isomorphismus  $K/T \xrightarrow{\sim} S^2$  und man kann sich die Abbildung  $K/T \times T \rightarrow K$  gut vorstellen: Gegeben ein Punkt auf der Sphäre und ein Winkel nehmen wir die Achse durch den entsprechenden Punkt und drehen um diese Achse mit dem entsprechenden Winkel. So kriegen wir jede nichttriviale Drehung genau zweimal, die triviale Drehung aber mit jeder Achse.

*Beispiel 5.10.16.* Im Fall  $K = \text{SU}(2)$  induziert die Operation auf  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  einen Isomorphismus  $K/T \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  und man kann sich die Abbildung  $K/T \times T \rightarrow K$  noch in etwa vorstellen. In diesem Fall haben wir im quaternionalen Bild  $K_{\text{reg}} = K \setminus \{\pm 1\}$  und ebenso  $T_{\text{reg}} = T \setminus \{\pm 1\}$  für jeden maximalen Torus. Die Tori sind gerade die Großkreise auf der Einheitskugel in den Quaternionen, die durch 1 und  $-1$  laufen.

*Ergänzung 5.10.17.* Man kann ganz allgemein zeigen, daß für  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zusammenhängender kompakter orientierter Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension stets eine Konstante  $g$  existiert mit

$$\int_{\vec{M}} \varphi^* \omega = g \int_{\vec{N}} \omega$$

für alle stetigen Volumenformen  $\omega$  auf  $N$ . Diese Konstante  $g$  ist sogar stets eine ganze Zahl und heißt der „Abbildungsgrad von  $\varphi$ “. Wir besprechen ihn in [TS] 4.3.13 im topologischen Kontext. Die Interpretation über Differentialformen kann man dann mit dem „Satz von de Rham“ [TG] 5.5.7 und der zugehörigen Funktorialitätsaussage [TG] 5.4.10 folgern. Man kann aber auch im Rahmen der de-Rham-Kohomologie argumentieren. In unserem Fall hätte  $\varphi : K/T \times T \rightarrow K$  bei geeigneter Wahl der Orientierungen den Abbildungsgrad  $|W|$ .

## 5.11 Der Hamilton'sche Formalismus\*

5.11.1. In diesem Abschnitt wird die Bedeutung des Kotangentenbündels für die klassische Mechanik erklärt. Ich habe diesen Abschnitt nur deshalb hier angefügt, weil wir gerade Kovektorfelder und das Kotangentenbündel kennengelernt haben.

5.11.2. Auf dem Kotangentenbündel  $T^*M$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  erklärt man das **kanonische Kovektorfeld** oder auch **Liouville'sche Kovektorfeld**  $\vartheta$  durch die Vorschrift

$$\vartheta_\xi := \xi \circ d_\xi \pi$$

für  $\xi \in T_x^*M$  und  $\pi : T^*M \rightarrow M$  die Bündelprojektion mit  $\pi(\xi) = x$  und  $d_\xi \pi : T_\xi(T^*M) \rightarrow T_x M$  deren Differential. Sind  $q_1, \dots, q_n$  lokale Koordinaten auf  $M$ , so sind  $dq_1, \dots, dq_n$  Schnitte in  $T^*M$ , die an jeder Stelle linear unabhängig sind. Wir erhalten also lokale Koordinaten  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  auf  $T^*M$ , indem wir die Funktionen  $p_i : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  dadurch erklären, daß die Restriktion auf die Fasern  $p_i : T_x^*M \rightarrow \mathbb{R}$  an jeder Stelle  $x \in M$  die  $i$ -te Koordinate bezüglich der durch die  $d_x q_i$  gegebenen Basis von  $T_x^*M$  sein soll. Die  $p_i$  heißen die zu unseren Ortskoordinaten  $q_i$  gehörigen **Impulskoordinaten**. In diesen Koordinaten hat unser kanonisches Kovektorfeld die Gestalt

$$\vartheta = \sum p_i dq_i$$

Insbesondere ist das kanonische Kovektorfeld stets glatt.

5.11.3. Auf dem Kotangentialbündel  $T^*M$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  erklärt man die **kanonische symplektische Form**  $\omega$  als das Negative der äußeren Ableitung des kanonischen Kovektorfelds

$$\omega := -d\vartheta$$

Gegeben Ortskoordinaten  $q_i$  und die zugehörigen Impulskoordinaten  $p_i$  hat die kanonische symplektische Form mithin die Gestalt

$$\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$$

Insbesondere zeigt diese Darstellung, daß unsere 2-Form  $\omega$  an jeder Stelle nicht-ausgeartet ist, was dann auch recht eigentlich erst die Bezeichnung als symplektische Form rechtfertigt.

*Ergänzung* 5.11.4. Arnold arbeitet stattdessen mit  $\omega := d\vartheta = \sum dp_i \wedge dq_i$ , aber durch seine auch um ein Vorzeichen abweichende Definition des symplektischen Gradienten kürzt sich dieses Vorzeichen wieder heraus und man erhält dieselben Bewegungsgleichungen.

5.11.5. Eine **symplektische Mannigfaltigkeit** ist ein Paar  $(P, \omega)$  bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $P$  und einer geschlossenen Zweiform  $\omega$  auf  $P$ , die an jeder Stelle nicht ausgeartet ist alias eine symplektische Form auf dem Tangentialraum. Geschlossen meint hier die Forderung  $d\omega = 0$ . Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $M$  ist ihr Kotangentialbündel  $P = T^*M$  mit seiner kanonischen symplektischen Form nach dem vorhergehenden stets eine symplektische Mannigfaltigkeit.

5.11.6. Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(P, \omega)$  und eine glatte Funktion  $H : P \rightarrow \mathbb{R}$  erklärt man ihren **symplektischen Gradienten** als das Vektorfeld

$$\text{grad}_\omega H := \text{can}_\omega^{-1}(dH)$$

Ausgeschrieben wird diese Vektorfeld dadurch charakterisiert, daß für jeden Punkt  $p \in P$  und jeden Tangentialvektor  $v \in T_p P$  gilt

$$\omega_p((\text{grad}_\omega H)(p), v) = (d_p H)(v)$$

5.11.7 (**Bezug zu Systemen mit Zwangsbedingungen**). Ich will diskutieren, inwiefern man die Lösungen der Bewegungsgleichungen eines Systems von Massepunkten mit Zwangsbedingungen in einem Potentialfeld erhalten kann, indem man auf dem Kotangentialraum des Konfigurationsraums eine ausgezeichnete glatte Funktion, die „Hamilton-Funktion“, betrachtet und die Flußwege von deren symplektischem Gradienten auf den Konfigurationsraum projiziert. Ich erinnere dazu an unsere Beschreibung [AN2] 10.7.11 der Lösungen der Newton'schen

Gleichungen mit Zwangsbedingungen. Seien  $X$  ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum und  $M \subset X$  eine glatte eingebettete Mannigfaltigkeit. In physikalischen Anwendungen war  $X = \mathbb{E}^N$  der Raum aller a priori und ohne Zwangsbedingungen denkbaren Ortsbestimmungen für  $N$  Massepunkte,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das massebehaftete Skalarprodukt und  $M$  der Konfigurationsraum, der die Zwangsbedingungen beinhaltet. Der Diffeomorphismus  $TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ , der von der Restriktion des Skalarprodukts auf  $TM$  induziert wird, ist die Komposition in der unteren Horizontale eines kommutativen Diagramms von Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \vec{X} & \xrightarrow[\sim]{\text{id} \times \kappa} & X \times \vec{X}^* \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 TM & \longrightarrow & M \times \vec{X}^* \twoheadrightarrow T^*M
 \end{array}$$

Die anderen Pfeile dieses Diagramms sind die hoffentlich offensichtlichen Abbildungen. Die kanonischen Kovektorfelder auf  $X \times \vec{X}^*$  und  $T^*M$  sind offensichtlich verwandt zu demselben Kovektorfeld auf  $M \times \vec{X}^*$ . Dasselbe folgt für die kanonischen symplektischen Formen. Mithin ist die durch Zurückholen der kanonischen symplektischen Form auf  $X \times \vec{X}^*$  erklärte symplektische Form  $\bar{\eta}$  auf  $TM$ , mit der wir in [AN2] 10.7.11 gearbeitet hatten, unter unserem Diffeomorphismus  $TM \xrightarrow{\sim} T^*M$  verwandt zur kanonischen symplektischen Form  $\omega$  auf  $T^*M$ . Ist nun  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Potentialfunktion und  $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$  die zum Potential  $V$  wie in [AN2] 10.7.11 gebildete Gesamtenergie, so heißt die dazu unter unserem Diffeomorphismus verwandte Funktion  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Kotangentenbündel die **Hamiltonfunktion**. Offensichtlich haben dann auch die jeweiligen symplektischen Gradienten  $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$  und  $\text{grad}_{\omega} H$  verwandte Flußwege. In [AN2] 10.7.11 hatten wir die Lösungen der Bewegungsgleichungen beschrieben als die Fußpunktprojektionen auf  $M$  der Flußwege des symplektischen Gradienten  $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$  der Gesamtenergie  $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach dem vorhergehenden können wir sie genausogut beschreiben als die Fußpunktprojektionen auf  $M$  der Flußwege des symplektischen Gradienten  $\text{grad}_{\omega} H$  der Hamiltonfunktion  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  in Bezug auf die kanonische symplektische Form  $\omega$  auf dem Kotangentenbündel. Das hat den Vorteil, daß die gesamte Komplexität des physikalischen Problems in der Hamiltonfunktion  $H$  zusammengefaßt wird, statt sich auf die Funktion  $E$  der Gesamtenergie und die durch die Massen der beteiligten Massepunkte und die Geometrie des Raums bestimmte symplektische Form  $\bar{\eta}$  zu verteilen.

5.11.8. Ich will noch erwähnen, daß die Verwendung des Buchstabens  $H$  in diesem Zusammenhang zum ersten Mal in der „Mécanique Analytique“ von Lagrange auftaucht, die im Jahre 1811 erschien, und vermutlich den Nachnamen von Christiaan Huygens abkürzt. Jedenfalls hat sie Nichts mit Hamilton zu tun, der im

Jahre 1811 erst sechs Jahre alt wurde. Mehr dazu mag man bei Patrick Iglesias in der Schrift „Symétries et Moment“ nachlesen.

**5.11.9 (Die Hamilton'schen Gleichungen).** Die vorhergehenden Überlegungen legen die Frage nahe, wie denn die Integralkurven des symplektischen Gradienten einer glatten Funktion auf einem Kotangentialbündel beschrieben werden können. Seien dazu  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $U \subset M$  eine offene Teilmenge. Ist  $q_1, \dots, q_r$  ein Koordinatensystem auf  $U$ , so erhalten wir ein Koordinatensystem auf  $T^*U$  durch die sogenannten Ortskoordinaten  $q_i = \pi \circ q_i$  und die zugehörigen Impulskoordinaten  $p_i$ , gegeben in Formeln durch  $w = \sum_{i=1}^r p_i(x, w) d_x q_i$  für  $x \in U$  und  $w \in T_x^*M$ . Die zu diesem Koordinatensystem gehörigen Vektorfelder auf der offenen Teilmenge  $T^*U$  des Kotangentialbündels notieren wir  $\partial_i^q, \partial_i^p$ . Für die kanonische symplektische Form  $\omega = -d\vartheta = \sum dq_i \wedge dp_i$  erhalten wir dann die Identität

$$\omega(\partial_i^q, \partial_j^p) = \delta_{ij}$$

Das Differential der Hamiltonfunktion ist  $dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i$  und führt in diesen Koordinaten zum symplektischen Gradienten

$$\text{grad}_\omega H = \sum_{i=1}^r \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_i^q - \frac{\partial H}{\partial q_i} \partial_i^p$$

Die Koordinaten der Integralkurven  $\beta$  unseres symplektischen Gradienten sind folglich genau die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}(q_i(\beta(t))) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\beta(t)) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(p_i(\beta(t))) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\beta(t)) \quad \text{für } 1 \leq i \leq r.$$

Man nennt sie die **Hamilton'schen Bewegungsgleichungen** und schreibt sie meist abkürzend in der Form

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

**5.11.10 (Kanonische Koordinaten).** Ist  $(X, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit, so nennt man ein System von zu Paaren zusammengefaßten lokalen Koordinaten  $(q_i, p_i)$  ganz allgemein **kanonisch**, wenn gilt  $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ . Die obige Rechnung zeigt, daß gegeben eine glatte Funktion  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit die Integralkurven ihres symplektischen Gradienten in jedem System von kanonischen Koordinaten durch die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Im übrigen kann man auch zeigen, daß eine symplektische Mannigfaltigkeit um jeden Punkt ein System von kanonischen Koordinaten besitzt.

5.11.11 (**Die Hamilton'schen Gleichungen mit Einheiten**). Ergänzen wir die jeweiligen Einheiten, so liefert das massebehaftete Skalarprodukt einen Diffeomorphismus

$$TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} T^*M \otimes \langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$$

zwischen dem sogenannten **Geschwindigkeitsphasenraum** links und dem sogenannten **Impulsphasenraum** rechts. Die kanonische  $\langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$ -wertige symplektische Form  $\omega$  rechts ist verwandt zur  $\langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$ -wertigen symplektischen Form  $\bar{\eta}$  links, wie wir sie in [AN2] 10.7.11 betrachtet hatten. Die Gesamtenergie  $E : TM \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/s^2 \rangle\rangle$  auf dem Geschwindigkeitsphasenraum ist verwandt zur Hamiltonfunktion  $H : T^*M \otimes \langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \text{gm}^2/s^2 \rangle\rangle$  auf dem Impulsphasenraum. Ist  $U \subset M$  eine offene Teilmenge und  $q_1, \dots, q_r$  ein Koordinatensystem auf  $U$ , möglicherweise mit Werten in eindimensionalen Räumen  $L_1, \dots, L_r$ , so erhalten wir ein Koordinatensystem auf  $T^*U \otimes \langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$  durch die Funktionen  $q_i = \pi \circ q_i$  und die Funktionen  $p_i$  mit Werten in  $\vec{L}_i^* \otimes \langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle$  gegeben durch

$$w = \sum_{i=1}^r p_i(x, w) d_x q_i \quad \text{für } x \in U \text{ und } w \in T_x^*M \otimes \langle\langle \text{gm}^2/s \rangle\rangle.$$

Die  $p_i$  heißen die zu unseren **Ortskoordinaten**  $q_i$  gehörigen **Impulskordinaten**. Wie zuvor landen wir bei den **Hamilton'schen Bewegungsgleichungen**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Beachten wir die Einheiten, so steht rechts eine Gleichheit in  $\vec{L}_i^* \otimes \langle\langle \text{gm}^2/s^2 \rangle\rangle$  und links eine Gleichheit in  $\vec{L}_i \otimes \langle\langle 1/s \rangle\rangle$ .

5.11.12 (**Bedeutung des Kotangentenbündels**). Rückblickend mag man sich die Frage stellen, ob das mit dem Kotangentenbündel wirklich nötig war und wir nicht unsere kanonischen Koordinaten  $q_i, p_i$  einfach auf dem Tangentenbündel hätten einführen können. Das wäre in der Tat durchaus möglich gewesen, und ich vermute fast, daß Hamilton diese Frage als Spitzfindigkeit abgetan hätte. Die Verwendung des Kotangentenbündels hat den Vorteil, daß in diesem Rahmen ein großer Teil unserer Überlegungen sehr elegant in großer Allgemeinheit und unabhängig vom zugrundeliegenden physikalischen System durchgeführt werden kann. Man bezahlt dafür allerdings mit einem gewissen Verlust an Anschaulichkeit.

*Beispiel* 5.11.13 (**Bewegung einer Töpferscheibe**). Wir betrachten eine Töpferscheibe mit Zentrum in  $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$ . Wir denken sie uns zusammengesetzt aus Massepunkten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  der Massen  $m_1, \dots, m_N$ . Der Konfigurationsraum  $M$  ist eine Kreislinie. Als lokale Koordinate wählen wir den Drehwinkel im Bogenmaß  $q_1 = q$ , wobei wir den Nullwinkel willkürlich festlegen. Bezeichne  $\partial^q$  das

zugehörige Vektorfeld und  $\dot{q}$  die zugehörige Koordinate auf  $TM$  gegeben durch  $\dot{q} : (q, a\partial^q) \mapsto a$ . Unter dem massenbehafteten Skalarprodukt haben wir dann

$$\langle \partial^q, \partial^q \rangle_g = J := \sum \| \mathbf{r}_i - \mathbf{p} \|^2 m_i$$

Dieser Wert  $J \in \langle\langle g^2 m \rangle\rangle$  heißt das **Trägheitsmoment** unserer Töpferscheibe. Nun finden wir  $(q, \partial^q) \mapsto (q, Jdq)$  unter unserem Isomorphismus  $TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ . Die Impulskoordinate zu  $q$  ist also  $q = J\dot{q}$ , sie heißt in dieser Situation der **Drehimpuls**. Die Hamiltonfunktion ist  $H(q, \dot{q}) = J\dot{q}^2/2$  alias  $H(q, p) = p^2/2J$  und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen spezialisieren zu den Gleichungen

$$\dot{q} = p/J \quad \text{und} \quad \dot{p} = 0.$$

Also ist der Drehimpuls  $p$  konstant und  $\dot{q}$  ist auch konstant und unsere Töpferscheibe dreht sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte bis in alle Ewigkeit mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

5.11.14. Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(P, \omega)$  und eine glatte Funktion  $H : P \rightarrow \mathbb{R}$  und eine weitere glatte Funktion  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir für die Änderung von  $f$  zum Zeitpunkt  $t = t_0$  längs eines Flußwegs  $\alpha$  des symplektischen Gradienten  $\text{grad}_\omega H$  mit der Notation  $x = \alpha(t_0)$  unmittelbar

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(\alpha(t)) &= \langle d_{\alpha(t_0)} f, \dot{\alpha}(t_0) \rangle \\ &= \langle d_x f, (\text{grad}_\omega H)(x) \rangle \\ &= \omega_x((\text{grad}_\omega f)(x), (\text{grad}_\omega H)(x)) := \{f, H\}(x) \end{aligned}$$

mit der durch letztere Gleichung für beliebige glatte Funktionen  $f, g \in C^\infty(P; \mathbb{R})$  auf einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit  $(P, \omega)$  erklärten **Poisson-Klammer**  $\{f, g\} \in C^\infty(P; \mathbb{R})$ . Die Formeln aus 5.11.9 zeigen, daß sie in kanonischen Koordinaten gegeben wird durch die Formel

$$\{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Offensichtlich verschwindet die Poissonklammer einer Funktion mit sich selber. Die Hamiltonfunktion ist folglich eine Invariante der Bewegung. Physikalisch bedeutet das die Energieerhaltung.

5.11.15. Sei  $(P, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einer glatten Hamiltonfunktion  $H$ . Ist  $x \in P$  ein kritischer Punkt von  $H$ , so ist der konstant bei  $x$  verweilende Weg ein Flußweg des symplektischen Gradienten von  $H$  alias eine Lösung der Bewegungsgleichungen.

## Übungen

*Übung 5.11.16.* Fassen wir ein glattes Kovektorfeld  $\alpha$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  auf als eine glatte Abbildung  $\alpha : M \rightarrow T^*M$  in das Kotangentialbündel und holen das kanonische Kovektorfeld unter dieser Abbildung zurück, so erhalten wir gerade  $\alpha$  selber, in Formeln  $\alpha^*(\vartheta) = \alpha$  oder in einer anderen Notation  $\alpha : \alpha \rightsquigarrow \vartheta$ .

## **6 Danksagung**

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich vielen Freiburger Studenten und Mitarbeitern, insbesondere David Stotz, Manuel Bleichner, Maximilian Gerhards, Leonardo Patimo.

## 7 Die Vorlesung Darstellungstheorie im SS 16

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also  $4 \times 45$  Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 19.4 Beginn der Darstellungstheorie endlicher Gruppen nach [NAS] 1.1, aber nicht Darstellungen als Multikategorie [NAS] 3.8.3. Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring [NAS] 1.2, aber nicht freie abelsche Gruppen mit Involution [NAS] 1.2.10.
- 22.4 Satz von Jordan-Hölder für Moduln [NAS] 2.2.13. Halbeinfache Moduln [NAS] 2.3. Isotypische Anteile [NAS] 2.3.8 und Sockel. Dichtesatz von Jacobson [NAS] 3.3.1.
- 26.4 Lemma von Schur [NAS] 3.2.1. Nicht Darstellungen von Produkten. Satz von Maschke [NAS] 4.1.1. Diskrete Fouriertransformation [NAS] 4.2.3. Spuren in Algebren [NAS] ???. Charaktere und Charakter-Projektor-Formel [NAS] 4.2.19.
- 28.4 Orthogonalitätsrelationen für Charaktere [NAS] ??, [NAS] ??, [NAS] 4.3.10 und Matrixkoeffizienten [NAS] ??. Dimension einfacher Darstellungen [NAS] 4.4.2. Inverse Fouriertransformation und Matrixkoeffizienten [NAS] ??.
- 3.5 Einfache Darstellungen von Produkten [NAS] 3.4.3. Haar'sche Maße als Radonmaße auf lokal kompakten Hausdorffgruppen [TM] 4.3.3 ohne Beweis. Charaktere der einfachen endlichdimensionalen stetigen Darstellungen Orthonormalsystem in den Klassenfunktionen, mit dichtem Erzeugnis in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz [TM] 4.9.15, beides noch ohne Beweis.
- 10.5 Orthogonalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten [TM] ?? und Charaktere [TM] 4.9.15 auf kompakten Hausdorffgruppen.
- 12.5 Untergruppen als Untermannigfaltigkeiten [ML] 1.2.3. Deren Tangentialraum und die Exponentialabbildung [ML] 1.2.11. Beispiele  $O(n)$  und  $SL(n; \mathbb{R})$ . Angefangen mit dem Kommutator auf dem Tangentialraum.
- 24.5 Lie-Algebra einer Matrix-Liegruppe [ML] 1.3. Adjungierte Darstellung [ML] 1.3.3. Lie-Algebren von Schnitten. Einparameteruntergruppen [ML] 1.4.3, [ML] 1.4.5. Homomorphismen von Matrix-Liegruppen [ML] 1.4.10. Noch nicht gezeigt, daß das Differential mit der Lieklammer verträglich ist.
- 31.5 Verträglichkeit von Differential und Lie-Klammer. Ableiten von Darstellungen. Ableiten der adjungierten Darstellung. Verflechtungsoperatoren für

Liegruppen und Liealgebren. Unterdarstellungen für Liegruppen und Liealgebren. Einfache Darstellungen von Liegruppen und Liealgebren.

- 2.6 Einfache Darstellungen von  $SU(2)$ ,  $SO(3)$  und  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  nach [ML] 2.3.2, [ML] 2.3.5, [ML] 2.3.9. Klassifikation der kompakten zusammenhängenden Liegruppen nach [ML] 5.5.3 ohne Beweis. Beispiele niedrigen Ranges, noch nicht  $U(n)$ .
- 7.6 Ausführlich  $U(n)$  besprochen, mit maximalen Tori, Weylgruppe, Wurzelsystem, nach [ML] 5.5.2 und [ML] 5.5.6. Geometrie endlicher Spiegelungsgruppen nach [SPW] 1.6.1, insbesondere frei transitive Operation auf der Menge der Alkoven und erzeugt von Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven. Klassifikation einfacher Darstellungen durch höchstes Gewicht begonnen.
- 9.6 Klassifikation durch das höchste Gewicht [ML] 5.8.5, Surjektivität steht noch aus. Weyl'sche Integrationsformel [ML] 5.10.1 ohne Beweis.
- 14.6 Weyl'sche Formeln bewiesen bis auf Dimensionsformel und Integrationsformel. Klassifikation durch das höchste Gewicht beendet.
- 16.6 Dimensionsformel und Integrationsformel bewiesen.
- 21.6 Einfache, einfache, halbeinfache, reductive Liealgebren [HL] 1.1.18. Liealgebren kompakter Liegruppen reaktiv. Universelle einhüllende Algebra [?] ??.
- 23.6 Struktur halbeinfacher komplexer Lie-Algebren. Cartan'sche und ihr Bezug zu maximalen Tori, Wurzelsystem, Wurzelraumzerlegung, Weylgruppe. Verma-Moduln, speziell im Fall  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ . Frei über  $U(n)$ . Noch nicht: Eindeutiger einfacher Quotient, universelle Eigenschaft.
- 28.6 Eindeutiger einfacher Quotient, universelle Eigenschaft von Verma-Moduln. Kostant'sche Partitionsfunktion. Endlichdimensionale Darstellungen. Casimir-Operator begonnen.
- 30.6 Casimir-Operator, Kostant'sche Charakterformel [?] ??, Weyl'sche Charakterformel nocheinmal bewiesen.
- 5.7 Verma-Moduln und Hauptseriendarstellungen. Harish-Chandra-Isomorphismus, noch ohne Injektivität und Surjektivität. Chevalley-Isomorphismus noch ohne Beweis, aber Beispiel  $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ .
- 7.7 Herleitung des Chevalley-Isomorphismus und des Harish-Chandra-Isomorphismus.

- 12.7 Zentrale Charaktere, einfache Verma-Moduln, Kategorie  $\mathcal{O}$ . Noch nicht den interessanten Fall von Beispiel  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  behandelt.
- 14.7 Hauptblock von  $\mathcal{O}$  im Fall  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  als Darstellungen von Köcher. Blockzerlegung von  $\mathcal{O}$ . Projektive Verma-Moduln, Existenz von genug Projektiven mit Vermafahne.
- 19.7 Verschiebungsfunktoren, deren Effekt auf Verma-Moduln, Äquivalenz durch Verschiebung.
- 21.7 BGG-Reziprozität, Verschiebung durch die Wand, Multiplizitäten in Verma-Moduln im Hauptblock von  $\mathfrak{sl}(3; \mathbb{C})$ , Hecke-Algebra der symmetrischen Gruppe, Kazhdan-Lusztig-Vermutung.

## 8 Nichtkommutative Algebra und Symmetrie SS 19

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also  $4 \times 45$  Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 23.4 Beginn der Darstellungstheorie endlicher Gruppen nach [NAS] 1.1, aber nicht Darstellungen als Multikategorie [NAS] 3.8.3. Darstellungen als Moduln über dem Gruppenring [NAS] 1.2, aber nicht freie abelsche Gruppen mit Involution [NAS] 1.2.10. Einfache Moduln über Ringen [NAS] 2.2.9.
- 25.4 Satz von Jordan-Hölder für Moduln [NAS] 2.2.13. Charakterisierung halbeinfacher Moduln [NAS] 2.3.4.
- 30.4 Isotypische Anteile [NAS] 2.3.8 und Sockel. Dichtesatz von Jacobson [NAS] 3.3.1. Struktur halbeinfacher Ringe [NAS] 3.5.4.
- 2.5 Lemma von Schur. Satz von Maschke. Einfache Darstellungen von Produkten versprochen. Nach der Pause Tensorprodukte diskutiert.
- 7.5 Einfache Darstellungen von Produkten. Diskrete Fouriertransformation mit Korollaren. Spur auf Algebren. Projektoren, aber noch nicht Charakter-Projektor-Formel.
- 9.5 Charaktere. Charakter-Projektor-Formel ?? . Orthonormalität einfacher Charaktere ?? und ?? . Charaktertafel und Orthogonalitätsrelationen darin ?? . Die Dimensionen einfacher Darstellungen teilen die Gruppenordnung ?? . Noch nicht Unabhängigkeit von der Charakteristik ?? .
- 14.5 Unabhängigkeit von der Charakteristik ?? . War wohl zu schwer, da brauchte man zu viel kommutative Algebra. Matrixkoeffizienten und isotypische Komponenten. War wohl zu allgemein. Die inverse Fouriertransformation habe ich angefangen. Nächstes Mal fertig machen.
- 16.5 Inverse Fouriertransformation, mittlerweile auch ?? . Orthonormalbasis des komplexen Gruppenrings durch Matrixkoeffizienten ?? . Darstellungen der symmetrischen Gruppe angefangen.
- 21.5 Darstellungen der symmetrischen Gruppe besprochen. Robinson-Schensted-Algorithmus. Obere Abschätzung der Dimensionen der einfachen Darstellungen nicht ausgeführt.
- 23.5 Haar'sches Maß ohne Beweis. Darstellende Funktionen. Invariantes Skalarprodukt. Hauptsatz der Fouriertheorie auf kompakten Hausdorffgruppen, noch ohne Beweis.

- 28.5 Beweise zum Hauptsatz der Fouriertheorie auf kompakten Hausdorffgruppen [TM] 4.9.5. Das habe ich danach nocheinmal gründlich überarbeitet.
- 4.6 Leonardo vertritt mich und diskutiert die Beziehungen zwischen reellen, komplexen und quaternionalen Darstellungen.
- 6.6 Leonardo vertritt mich und diskutiert die Beziehungen zwischen reellen, komplexen und quaternionalen Darstellungen.
- 18.6 Klassifikation der einfachen Darstellungen der  $SO(3)$  nach [ML] 1.1.17 als Fernziel deklariert. Tangentialraum und Exponentialabbildung nach [ML] 1.2.3 besprochen und versprochen, das nächste Mal wieder zur Algebra zurückzukommen.
- 25.6 Tangentialraum bei der Eins an Matrixliegruppe stabil unter dem Kommutator. Lie-Algebren. Gruppenwege in Matrixliegruppen. Stetige Homomorphismen von Matrixliegruppen glatt. Darstellungen von zusammenhängenden Matrixliegruppen und ihren Liealgebren.
- 27.6 Einfache Darstellungen von  $SU(2)$  und  $SO(3)$  und  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ . Einfache Darstellungen von  $SU(n)$  versprochen.
- 2.7 Sätze von Engel [HL] 1.4.1, [HL] 1.4.18 und Lie [HL] 1.5.2. Klassifikation durch das höchste Gewicht versprochen.
- 4.7 Auflösbarkeitskriterium von Cartan [HL] 1.6.1 und [HL] 1.6.12. Charakterisierung halbeinfacher Liealgebren [HL] 1.7.9.
- 9.7 Satz von Weyl [HL] 2.1.6. Jordan-Zerlegung nur bis [HL] 2.2.10, eigentlicher Beweis steht noch aus.
- 11.7 Jordanzerlegung fertig. Wurzelraumzerlegung begonnen.  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  gezeigt, Rest noch nicht.
- 16.7 Wurzelraumzerlegung fertig. Klassifikation halbeinfacher Liealgebren durch Wurzelsysteme besprochen. Klassifikation durch das höchste Gewicht noch ohne Beweis.
- 18.7 Klassifikation durch das höchste Gewicht: Wohldefiniertheit der Abbildung bewiesen und deren Injektivität. Struktur der dominanten Gewichte. Surjektivität im Fall der speziellen linearen Liealgebra.
- 23.7 Einhüllende Algebra. Poincaré-Birkhoff-Witt ohne Beweis, nur Skizze. Verma-Moduln und ihre eindeutig bestimmten einfachen Quotienten. Noch nicht gezeigt, daß diese für dominante Gewichte endlichdimensional sind. Weyl'sche Dimensionsformel angegeben und Beweis versprochen.

25.7 Beweis der Klassifikation durch das höchste Gewicht zu Ende gebracht. Weyl'sche Charakterformel angegeben und für  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$  geprüft. Ausblick auf Kazhdan-Lusztig-Vermutung und deren Beweis. Bezug zum unitären Dual und dessen Bedeutung in der Physik angerissen.

## Literatur

- [AL] **Skriptum Algebra und Zahlentheorie.** Wolfgang Soergel.
- [AN1] **Skriptum Analysis 1.** Wolfgang Soergel.
- [AN2] **Skriptum Analysis 2.** Wolfgang Soergel.
- [AN3] **Skriptum Analysis 3.** Wolfgang Soergel.
- [EL] **Skriptum Elementargeometrie.** Wolfgang Soergel.
- [GR] **Skriptum Grundlagen.** Wolfgang Soergel.
- [HL] **Skriptum halbeinfache Lie-Algebren.** Wolfgang Soergel.
- [HN91] Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren.* Vieweg, 1991.
- [KAG] **Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie.** Wolfgang Soergel.
- [LA1] **Skriptum Lineare Algebra 1.** Wolfgang Soergel.
- [LA2] **Skriptum Lineare Algebra 2.** Wolfgang Soergel.
- [ML] **Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen.** Wolfgang Soergel.
- [NAS] **Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie.** Wolfgang Soergel.
- [SPW] **Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme.** Wolfgang Soergel.
- [TF] **Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie.** Wolfgang Soergel.
- [TG] **Skriptum Garbenkohomologie.** Wolfgang Soergel.
- [TM] **Skriptum Topologie und kompakte Gruppen.** Wolfgang Soergel.
- [TS] **Skriptum Singuläre Homologie.** Wolfgang Soergel.
- [War83] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer, 1983.

## **Indexvorwort**

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das  $\cup$  dem Buchstaben u oder das  $\subset$  dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa  $\zeta$  unter z und  $\omega$  unter o.

## Index

- $\rightsquigarrow$  verwandt
  - Funktionen, 98
  - Vektorfelder, 98
- $\{f, g\}$  Poisson-Klammer, 195
- abgeleitete Darstellung
  - der Liealgebra, 38
- abgeschlossen
  - Einbettung geringter Räume, 73
- Ad adjungierte Darstellung
  - von Liegruppe, 116
  - von Matrixliegruppe, 20
- adjungiert
  - Darstellung
    - von Liealgebra, 40
    - von Liegruppe, 117
    - von Matrixliegruppe, 20
- äußere Ableitung
  - auf Mannigfaltigkeiten, 180
- Algebra
  - über Körper, 20
- Algebrenhomomorphismus, 23
- Alkoven
  - bei kompakten Liegruppen, 165
- Anfangswert
  - von Flußweg, 103
- Atlas, 76
- Bündel, 93
  - triviales, 92
- Bündelkarte, 93
- $C_X^\infty(X, E)$  glatte Schnitte von  $E$ , 94
- $C^p(M)$  reelle oder komplexe  $C^p$ -Funktionen,
  - 78
- $C^p(M, \mathbb{R})$  reelle  $C^p$ -Funktionen, 78
- Casimir-Operator
  - für  $\mathfrak{sl}(2)$ , 53
- $D_v$  Richtungsableitung
  - auf eingebetteter Mannigfaltigkeit,
    - 31
- Darstellung
  - adjungierte
    - von Liealgebra, 40
  - einfache, 6
  - irreduzible, 6
  - unitäre, 62
  - von Gruppe, 4
  - von Liealgebra, 38
  - von Liegruppe, 38
- Derivation
  - einer  $\mathbb{R}$ -Algebra, 24
- Dichte
  - stetige positive, 55
- Diffeomorphismus
  - zwischen Untermannigfaltigkeiten,
    - 10
- Differential
  - auf Tangentialraum, 85
  - bei eingebetteten Mannigfaltigkeiten, 27
  - einer Darstellung, 116
  - von Funktion
    - als Kovektorfeld, 181
- Differential-Funktor, 84
- Differentialform, 179
- differentialinjektiv, 88
- Dimensionsformel
  - Weyl'sche, für Darstellungen, 184
- Distribution
  - $d$ -dimensionale, 123
- dot-Operation, 185
- Drehimpuls, 195
- echt
  - Unterdarstellung, 44

Einbettung  
      $k$ -geringter Räume, 73  
     abgeschlossene, geringter Räume, 73  
     offene, geringter Räume, 73  
 einfach  
     Darstellung, Gruppe, 6  
     Darstellung, Liealgebra, 45  
     zusammenhängend, 127  
 Einsdarstellung, 5  
     von Liealgebra, 40  
 Einstangentialraum, 10  
 endliche Gitterspiegelungsgruppe, 154  
 étale  
     induzierte Struktur, 84  
     stetige Abbildung, 83  
 Exponentialabbildung, 104  
 Feld, 178  
 final  
     Morphismus  
         geringter Räume, 72  
 finale Struktur, 72  
 Fluß  
     von Vektorfeld  
         auf Mannigfaltigkeit, 104  
 Flußweg, 101  
     maximaler, 103  
 Frobenius  
     Satz von, 124  
 Funktion  
     strukturierende, 70  
 Fußpunktprojektion, 92  
 $\text{Ger}_k$  Morphismen geringter Räume, 71  
 $k$ -geringter Raum  
     durch Funktionen, 70  
 Geschwindigkeitsphasenraum, 194  
 Geschwindigkeitsvektor, 29  
 Gewichte, 60  
 Gewichtsraum, 60  
 Gitter, 154  
 Gitterdatum, 158  
 Gitterspiegelung, 154  
 glatt  
     Abbildung  
         zwischen Untermannigfaltigkeiten, 10  
     Distribution, 124  
     Mannigfaltigkeit, 76  
     Opfunktorkomplex, 177  
 Graßmann-Mannigfaltigkeit, 131  
 größergleich  
     Struktur als  $k$ -geringter Raum, 71  
 Gruppenweg  
     in  $\mathbb{C}^\times$ , 25  
     in  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ , 25  
 Gruppenwege  
     in Liegruppe, 90  
 Haar'sches Maß  
     auf Matrixliegruppe, 55  
 Haarmaß, 55  
 halbeinfach, 59  
 Hamilton  
     Bewegungsgleichung, 193, 194  
 harmonics  
     spherical, 68  
 Hodgeoperator, 62  
 $\text{Hom}_{k,G}$  Verflechtungsoperatoren, 42  
 homogener Raum, 132  
 Homomorphismus  
     von Darstellungen, 5  
 Immersion  
     in algebraischer Geometrie, 73  
     in der Differentialgeometrie, 88  
 Impulskoordinaten, 190, 194  
 Impulsphasenraum, 194  
 induzierte Struktur  
     eines geringten Raums, 73  
 initial

Morphismus, 73  
 initiale Struktur, 73  
 innerer Automorphismus  
 einer Gruppe, 116  
 Integrieren  
 von Liealgebrenhomomorphismen,  
 127  
 interior automorphism, 116  
 intertwining operator, 5  
 invariant  
 Vektor unter Gruppe, 43  
 Vektor unter Liealgebra, 43  
 involutiv, 124  
 irreduzibel  
 Darstellung, Gruppe, 6  
 Darstellung, Liealgebra, 45  
 isomorph  
 Darstellungen, 5  
 Isomorphismus  
 von Darstellungen, 5  
 von geringten Räumen, 71  
 isotypisch  
 Komponente von Darstellung, 60  
 Jacobi-Identität, 21  
 $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$  Killing-Form, 121  
 $K^\alpha$  die Rang-Eins-Untergruppe zur Wur-  
 zel  $\alpha$ , 164  
 kanonisch  
 Koordinate, 193  
 Karte, 76  
 Kartenwechsel, 83  
 Keime strukturierender Funktionen, 87  
 Kettenregel  
 bei Mannigfaltigkeiten  
 eingebetteten, 27  
 Killingform, 121  
 Kletteroperatoren, 49  
 Kommutator  
 von Vektorfeldern  
 auf affinen Räumen, 107  
 auf Mannigfaltigkeiten, 108  
 kompakt  
 Lie-Algebra, 122  
 komplexer Anteil  
 von Quaternion, 36  
 Komplexifizierung, 45  
 Komponente  
 isotypische von Darstellung, 60  
 Konjugation mit  $x$ , 116  
 kontragredient  
 Darstellung von Gruppe, 8  
 Kovektorfeld, 178  
 kanonisches, 190  
 Liouville'sches, 190  
 Kowurzel, 154  
 Kugelflächenfunktionen, 65  
 Kugelfunktionen, 65, 67  
 Legendre-Polynome, 67  
 Leibniz-Regel  
 für Differentialformen, 181  
 Leiteroperatoren, 49  
 Lie-Algebra, 21  
 einer Liegruppe, 114  
 einer Matrixliegruppe, 20  
 Lie-Klammer  
 bei Matrixliegruppe, 20  
 von Vektorfeldern  
 auf affinen Räumen, 107  
 Liegruppe, **82**  
 Matrixliegruppe, 9  
 Lieklammer  
 von Vektorfeldern  
 auf Mannigfaltigkeiten, 108  
 linksinvariant  
 Vektorfeld, 100  
 Liouville  
 Kovektorfeld, 190  
 Mannigfaltigkeit

- abstrakte, 75
- glatte, 76
- Matrixliegruppe, 9
  - partielle, 20
- Matrixliegruppenkeim, 21
- maximal
  - Flußweg, 103
  - Torus, 143
- $\text{Mod}_{k,G}$  Verflechtungsoperatoren, 42
- $\text{Mod}_{k,g}$  Verflechtungsoperatoren, 42
- Morphismus, 92
  - von geringten Räumen, 71
  - von Mannigfaltigkeiten, 75
- Normalisator
  - von Untergruppe, 152
- Nulldarstellung, 40
- Nullschnitts, 94
- $\Omega^r(M)$  glatte  $r$ -Formen auf  $M$ , 179
- $\mathcal{O}|_X$  induzierte Struktur, 73
- $\mathcal{O}^{\text{an}}(X, Y)$ , 76
- Operation
  - von Liealgebra, 38
- Operation durch Konjugation, 41
- Opfunktorfeld, 178
- Orientierung
  - allgemeiner Mannigfaltigkeiten, 181
- Ortskoordinaten, 194
- $P(V)$  Gewichte von  $V$ , 60
- parallelisierbar, 96
- partiell
  - Matrixliegruppe, 20
  - Unter-Liegruppe, 125
- Pauli-Matrizen, 49
- poids, 60
- Poisson-Klammer, 195
- Produkt
  - von Mannigfaltigkeiten, 81
- projektiver Raum
  - als glatte Mannigfaltigkeit, 78
- quaternional-hermitesche Form, 35
- quaternionaler Anteil, 36
- $R(K, T)$  Wurzelsystem, 156
- Rang
  - einer kompakten Liegruppe, 147
  - eines kompakten Torus, 136
- rechtsinvariant
  - Vektorfeld, 100
- reduzibel, 59
- representation, 4
- Richtungsableitung
  - auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 31
  - vektorwertig, auf Mgf, 88
- Riemann
  - Riemann'sche Fläche, 76
- Schnitt
  - in Vektorraumbündel, 94
  - von Abbildung, 94
- Schur, Lemma von, 59
- Skalarprodukt
  - quaternionales, 35
- $\text{Sp}(n)$  kompakte symplektische Gruppe, 35
- spherical harmonics, 68
- Spiegel, 165
- Spiegelung
  - bei Gitter, 154
  - reelle lineare, 165
- $\text{Spin}(n)$  Spin-Gruppe, 133
- Spin-Gruppe, 133
- Spingruppe, 33
- stabil
  - unter Liealgebra, 44
- stabile Wurzelwahl, 154
- Standarddarstellung, 41
  - von  $\text{GL}(V)$ , 4
- Stiefel-Mannigfaltigkeit, 131
- strukturierend

- Funktion, 70
- Submersion
  - in der Differentialgeometrie, 91
- symplektisch
  - Gradienten, 191
  - Mannigfaltigkeit, 191
- symplektische Form
  - kanonische, 191
- symplektische Gruppe
  - kompakte, 35
- Tangentialabbildung, 27
- Tangentialbündel, 92
- Tangentialbündelfunktor, 94
- Tangentialraum, 85
- Tangentialraumfunktor, 85
- Tensorprodukt
  - von Darstellungen, 41
- topologisch
  - Erzeuger, 138
  - zyklisch
    - topologische Gruppe, 138
- Torus
  - kompakter, 136
  - maximaler
    - in topologischer Gruppe, 143
- Totalraum, 92
- Trägheitsmoment, 195
- Überlagerung, 91
- unitär
  - Darstellung, 62
- Unter-Liegruppe
  - partielle, 125
- Unteralgebra
  - von allgemeiner Algebra, 23
- Unterdarstellung, 44
  - abstrakte, 6
- Untermannigfaltigkeit, 88
- Vekb Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten, 93
- Vektorbündel, 93
- Vektorfeld
  - auf Mannigfaltigkeit, 94
  - glattes, 98
- Vektorraumbündel, 93
- Verflechtungsoperator, 5, 42
- Verschmelzung
  - von Darstellungen
    - von Gruppen, 42
    - von Liealgebren, 42
- verwandt
  - Funktionen, 98
  - Opfunktorkfelder, 179
  - Vektorfelder, 98
- Volumenform, 179
- Weyl
  - Charakterformel, 183
  - Dimensionsformel, 184
  - Integrationsformel, 183
- Weylgruppe
  - von kompakter Liegruppe, 153
- Weylvektor, 183
- Wurzel
  - zu Gitterspiegelung, 154
- Wurzeldatum, 154
  - duales, 156
- Wurzelsystem
  - von kompakter Liegruppe, 156
- $Y_{l,m}$  Kugelfunktionen, 67
- Zentralisator
  - von Teilmenge, 143
- Zentrum
  - einer Liealgebra, 119
- Zurückholen
  - von Differentialformen, 180
- zusammenhängend
  - topologischer Raum, 15