

Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme

Wolfgang Soergel

16. August 2018

Dieser Abschnitt ist motiviert durch Anwendungen bei der Klassifikation der kompakten zusammenhängenden Liegruppen [ML] 5.5.3 und, mehr oder weniger gleichbedeutend, der Klassifikation der halbeinfachen komplexen Liealgebren [?] ?? . Er scheint mir jedoch auch ohne äußere Motivation ein interessantes Kapitel der Geometrie und Gruppentheorie und gut geeignet für die Behandlung im Rahmen eines Proseminars.

Inhaltsverzeichnis

1 Spiegelungsgruppen	4
1.1 Endliche euklidische Spiegelungsgruppen	4
1.2 Endliche Spiegelungsgruppen	7
1.3 Alkovengeometrie	10
1.4 Facettenabschluß als konvexe Hülle*	20
1.5 Affine Spiegelungsgruppen	22
1.6 Transitivität auf der Menge der Alkoven	26
1.7 Fundamentalbereiche	31
1.8 Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe	34
1.9 Coxetergraphen und Klassifikation	38
1.10 Ergänzungen zu Skalarprodukten	44
1.11 Positiv definite Coxetergraphen	46
1.12 Struktur affiner Spiegelungsgruppen*	51
2 Wurzelsysteme	54
2.1 Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen	54
2.2 Basen von Wurzelsystemen	63
2.3 Klassifikation von Wurzelsystemen	69
2.4 Höchste Wurzel und fundamentaler Alkoven*	74
2.5 Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*	81
3 Coxetergruppen als Spiegelungsgruppen	89
3.1 Spiegelungsgruppen zu Coxetermatrizen	89
3.2 Erzeuger und Relationen für Spiegelungsgruppen	96
3.3 Bruhat-Ordnung	102
4 Danksagung	108
Literaturverzeichnis	109
Index	110

1 Spiegelungsgruppen

1.1 Endliche euklidische Spiegelungsgruppen

Definition 1.1.1. Unter einem **euklidischen Vektorraum** verstehen wir hier und im Folgenden einen endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper, der mit einem Skalarprodukt versehen ist. Unter einer **Spiegelung** oder noch präziser einer **orthogonalen linearen Spiegelung** verstehen wir eine orthogonale lineare Abbildung, deren Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Wir nennen die Fixpunktmenge einer Spiegelung auch ihre **Spiegelhyperebene** oder abkürzend **Spiegelebene**.

1.1.2 (**Formelhafte Darstellung orthogonaler Spiegelungen**). Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und $s : V \rightarrow V$ eine Spiegelung und V^s ihre Spiegelhyperebene und α ein Erzeuger des Orthogonalraums der Spiegelhyperebene, so gilt $s(\alpha) = -\alpha$, da ja s den Orthogonalraum seiner Fixpunktmenge stabilisiert, Längen erhält und nicht die Identität ist. Daraus folgt dann schnell

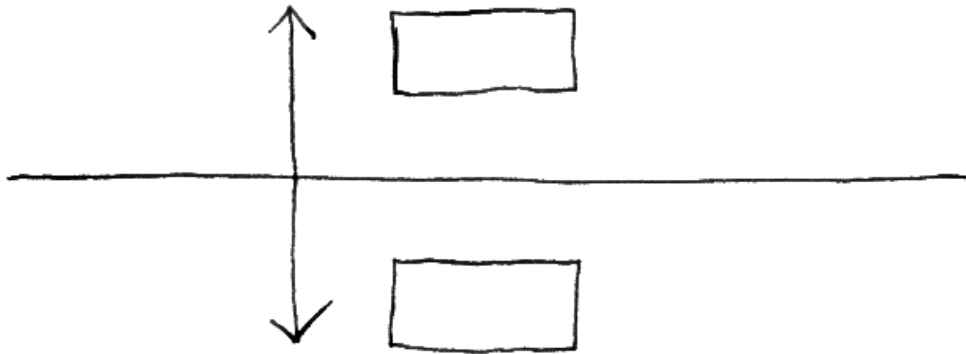
$$s(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall \lambda \in V$$

In der Tat sind beide Seiten linear und nehmen offensichtlich auf $\lambda = \alpha$ und auf jedem $\lambda \in V^s$ denselben Wert an. Eine Spiegelung in einem euklidischen Vektorraum wird insbesondere durch ihre Spiegelebene bereits eindeutig festgelegt.

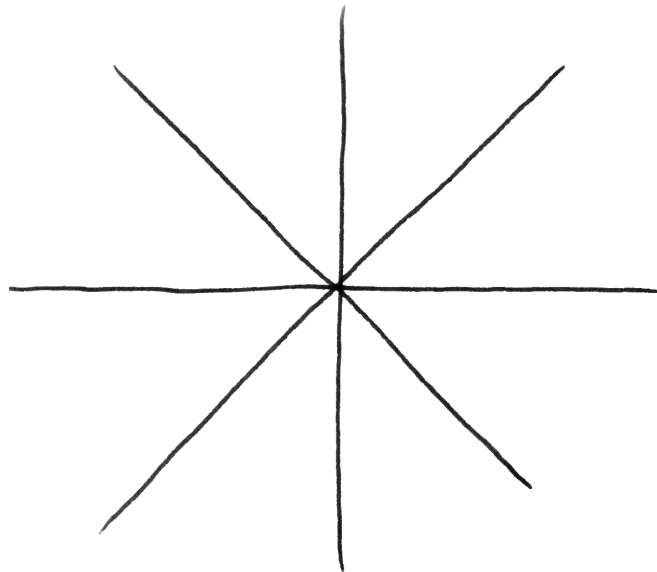
Definition 1.1.3. Unter einer **euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine endliche Gruppe von Automorphismen eines euklidischen Vektorraums, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Beispiel 1.1.4. Wir betrachten in der reellen euklidischen Ebene r Geraden durch den Ursprung derart, daß „je zwei benachbarte Geraden denselben Winkel π/r einschließen“. Diese r Geraden sind die Spiegelebenen einer endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe, der sogenannten **Diedergruppe** D_r . Sie besteht aus den r Spiegelungen an unseren r Geraden sowie den r Drehungen um die Winkel $2\pi\nu/r$ für $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Im Fall $r = 4$ ist das die „Bierdeckelgruppe“ aller acht Symmetrien eines Bierdeckels. Im allgemeinen wäre es die Gruppe aller $2r$ Symmetrien eines „Bierdeckels mit r Ecken“.

Beispiel 1.1.5 (Die symmetrische Gruppe als Spiegelungsgruppe). Wir betrachten im \mathbb{R}^n für $1 \leq i < j \leq n$ die Hyperebenen $H_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_j\}$. Die Spiegelung s an der Hyperebene $H_{i,j}$ kann auch beschrieben werden als die Vertauschung der i -ten und der j -ten Koordinate, $s(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$, denn besagte Vertauschung ist orthogonal und $H_{i,j}$ ist die Menge ihrer Fixpunkte. Diese Spiegelungen erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe, die in offensichtlicher Weise isomorph ist zur symmetrischen Gruppe S_n .



Eine orthogonale Spiegelung



Die vier Spiegelebenen der Diedergruppe D_4 . Die acht „Kuchenstücke“, jeweils ohne ihren Rand, sind die zugehörigen „Alkoven“ oder „Weylkammern“, und man überlegt sich leicht, daß je zwei Alkoven durch genau ein Element unserer Spiegelungsgruppe ineinander überführt werden.

Beispiel 1.1.6 (Die Tetraedergruppe als Spiegelungsgruppe). Die Spiegelungen an denjenigen Ebenen des \mathbb{R}^3 , die senkrecht stehen auf den Kantenmitten der Kanten eines im Ursprung zentrierten Tetraeders, erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe, die isomorph ist zur Gruppe aller 24 Permutationen der vier Ecken unseres Tetraeders.

Beispiel 1.1.7. Die Spiegelungen an den Koordinatenebenen des \mathbb{R}^n erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe mit 2^n Elementen.

1.1.8. Ich erinnere daran, daß nach [LA1] 6.4.4 eine Teilmenge eines Vektorraums über einem angeordneten Körper konvex heißt, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält.

Definition 1.1.9. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $W \subset GL(V)$ eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe. Die maximalen konvexen Teilmengen im Komplement der Vereinigung aller Spiegelebenen

$$V \setminus \bigcup_{\substack{s \in W \text{ ist} \\ \text{Spiegelung}}} V^s$$

heißen die **Weylkammern** oder **Alkoven** unserer Spiegelungsgruppe.

Ergänzung 1.1.10. Im Fall $k = \mathbb{R}$ können wir die Alkoven auch als die Zusammenhangskomponenten von besagtem Komplement beschreiben, wenn wir V mit seiner natürlichen Topologie versehen.

1.1.11 (**Operation auf den Alkoven**). Wir wollen als nächstes zeigen, daß jede euklidische Spiegelungsgruppe frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert. Die Transitivität ist schnell bewiesen: Für beliebige Vektoren $v, w \in V$ finden wir sicher ein $x \in W$ derart, daß der Abstand $\|v - xw\|$ kleinstmöglich wird. Dann können v und xw durch keine Spiegelebene mehr getrennt werden, da für s die Spiegelung an besagter Spiegelebene sonst aus elementargeometrischen Gründen v und sxw noch näher aneinander wären. Also liegen v und xw für jede Spiegelebene in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. Die Freiheit der Operation scheint mir weniger offensichtlich. Um beim Beweis inhaltsreichere Bilder malen zu können, werden wir sie gleich in der etwas allgemeineren Situation affiner Spiegelungsgruppen zeigen. Wir führen diesen Begriff im übernächsten Abschnitt ein. Zunächst treffen wir jedoch geometrische Vorbereitungen.

Übungen

Übung 1.1.12 (Symmetriegruppe eines Hyperkubus). Man zeige: Die von allen Spiegelungen an den Hyperebenen $x_i = x_j$ für $i \neq j$ und den Hyperebenen

$x_i = 0$ erzeugte Gruppe ist eine euklidische Spiegelungsgruppe. Sie ist die Symmetriegruppe des Hyperkubus, in Formeln die Gruppe aller der Automorphismen von \mathbb{R}^n , die die Menge

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (-1)^{r(i)} e_i \mid r : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\} \right\}$$

der Ecken des Hyperkubus stabilisiert. Diese Gruppe hat $n!2^n$ Elemente und kann als semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$ im Sinne von [AL] 1.2.10 alias als Kranzprodukt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathcal{S}_n$ im Sinne von [AL] 1.2.11 realisiert werden.

Ergänzende Übung 1.1.13. Ein das Skalarprodukt erhaltende lineare Abbildung von einem Skalarproduktraum über einem angeordneten Körper in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder ganz präzise eine **orthogonale lineare Spiegelung**, wenn ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Man zeige, daß auch in dieser Allgemeinheit V^{-s} eine zu V^s komplementäre Gerade ist. Hinweis: Ist $v \in V \setminus V^s$ beliebig und schreiben wir $s(v) = bv + w$ mit $w \in V^s$, so ist offensichtlich $\langle v, w \rangle \subset V$ ein zweidimensionaler s -stabiler Teilraum.

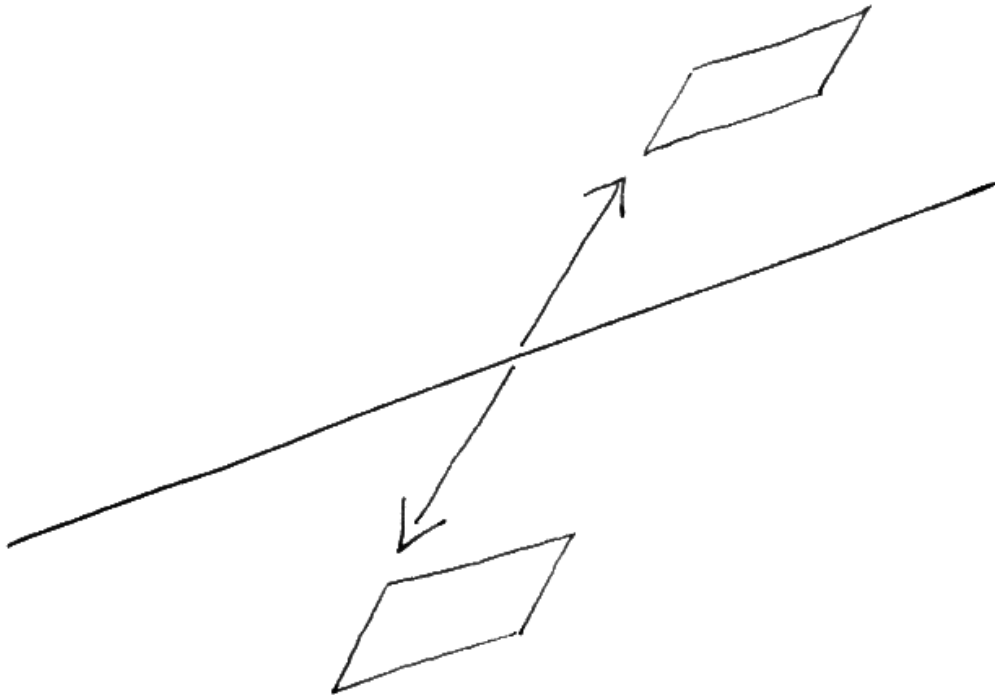
1.2 Endliche Spiegelungsgruppen

1.2.1. In den Anwendungen trifft man Spiegelungsgruppen oft im Kontext nicht-euklidischer Vektorräume an. Im folgenden bauen wir für diese Situation einen begrifflichen Rahmen auf.

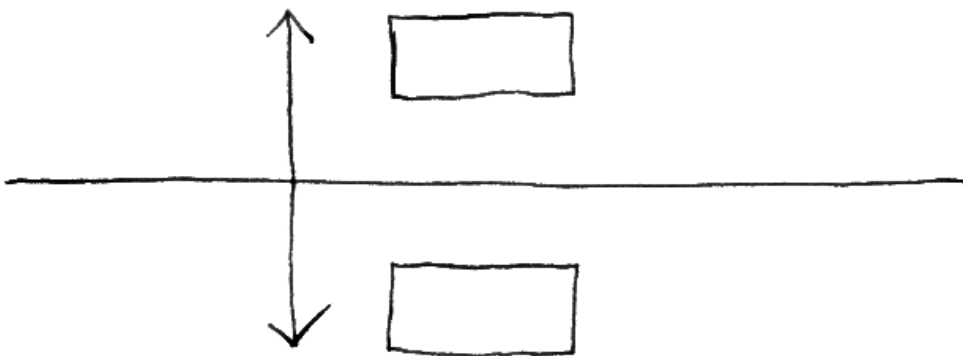
Definition 1.2.2. Eine lineare Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **lineare Spiegelung**, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene und wir uns nicht in Charakteristik Zwei befinden. Wir nennen die Fixpunktmenge einer Spiegelung auch ihre **Spiegelhyperebene** oder abkürzend **Spiegelebene**.

1.2.3 (**Formelhafte Darstellung von Spiegelungen**). Sei k ein Körper einer Charakteristik $\text{char } k \neq 2$ und V ein k -Vektorraum und $s : V \rightarrow V$ eine Spiegelung. Ihre Fixpunktmenge alias Spiegelebene notieren wir V^s . Wegen unserer Annahme $\text{char } k \neq 2$ hat jedes $v \in V$ die Zerlegung $v = (v + sv)/2 + (v - sv)/2$. Wir folgern die Zerlegung $V = V^s \oplus V^{-s}$ von V in Eigenräume von s zu den Eigenwerten ± 1 . Insbesondere ist der Eigenraum zum Eigenwert -1 unserer Spiegelung stets eine Gerade, in Formeln $\dim_k V^{-s} = 1$. Ist V ein Vektorraum und V^* sein Dualraum, so schreiben wir für den Wert $f(\lambda)$ von $f \in V^*$ an einer Stelle $\lambda \in V$ im folgenden symmetrischer $\langle f, \lambda \rangle$ oder sogar $\langle \lambda, f \rangle$. Wählen wir nun in V einen Eigenvektor α unserer Spiegelung s zum Eigenwert -1 und diejenige Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\ker \alpha^\vee = V^s$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, so gilt

$$s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$



Eine Spiegelung, die nicht orthogonal wäre für ein übliches Skalarprodukt auf der Papierebene.



Eine Spiegelung, die orthogonal ist für jedes übliche Skalarprodukt auf der Papierebene.

für alle λ in $V = k\alpha \oplus V^s$. Umgekehrt erhalten wir für beliebige $\alpha \in V, \alpha^\vee \in V^*$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ eine Spiegelung s_{α, α^\vee} durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} s_{\alpha, \alpha^\vee} : V &\rightarrow V \\ \lambda &\mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \end{aligned}$$

1.2.4 (Orthogonale Spiegelungen). Ist V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und ist die Spiegelung $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts (\cdot, \cdot) auf V , in Formeln $(s\lambda, s\mu) = (\lambda, \mu) \quad \forall \lambda, \mu \in V$, so gilt offensichtlich $V^s = \alpha^\perp = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}$ und wir haben

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall \lambda \in V$$

In der Tat nehmen beide Seiten offensichtlich auf $\lambda = \alpha$ und auf jedem $\lambda \in \alpha^\perp$ denselben Wert an. In anderen Worten bildet der zu unserem Skalarprodukt gehörige Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^*, \lambda \mapsto (\lambda, \cdot)$ den Vektor $2\alpha/(\alpha, \alpha)$ auf α^\vee ab. Dasselbe gilt auch allgemeiner, wenn wir über einem beliebigen Körper einer von zwei verschiedenen Charakteristik arbeiten und (\cdot, \cdot) eine unter s_{α, α^\vee} invariante symmetrische Bilinearform ist mit der Eigenschaft $(\alpha, \alpha) \neq 0$.

Definition 1.2.5. Eine **endliche Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Lemma 1.2.6. *Gegeben eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper gibt es auf unserem Vektorraum stets ein unter dieser Gruppe invariantes Skalarprodukt.*

1.2.7. Wir sind also nie wirklich weit von unseren euklidischen Spiegelungsgruppen entfernt. Allerdings wird solch ein invariantes Skalarprodukt im allgemeinen keineswegs eindeutig sein.

Beweis. Sei k unser angeordneter Körper und V unser Vektorraum und G unsere endliche Gruppe von Automorphismen von V . Sei $b : V \times V \rightarrow k$ irgendein Skalarprodukt. Wir erhalten ein G -invariantes Skalarprodukt durch die Vorschrift $i(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$. \square

Lemma 1.2.8. *Haben zwei Spiegelungen einer endlichen Spiegelungsgruppe dieselbe Spiegelebene, so stimmen sie überein.*

Erster Beweis. Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $W \subset GL(V)$ unsere endliche Spiegelungsgruppe. Seien $s, t \in W$ zwei Spiegelungen und $H = V^s = V^t$ die gemeinsame Spiegelebene. Nach 1.2.6 gibt es ein W -invariantes Skalarprodukt auf V . Für jedes W -invariante Skalarprodukt auf V gilt dann $V = H \oplus H^\perp$, und sowohl s als auch t operieren als die Identität auf H und als -1 auf H^\perp . \square

Zweiter Beweis. Sind s, t unsere Spiegelungen, so haben wir $s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ und $t(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \beta$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$. Es folgt mit kurzer Rechnung $t(s(\lambda)) = \lambda + \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\beta - \alpha)$ und damit $(ts)^n : \lambda \mapsto \lambda + n \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\beta - \alpha)$. Hat der Grundkörper Charakteristik Null, kann also (ts) nur dann von endlicher Ordnung sein, wenn gilt $t = s$. \square

Übungen

Übung 1.2.9 (Transponierte einer Spiegelung). Man zeige, daß die transponierte Abbildung zu einer Spiegelung $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : V \rightarrow V$ die Spiegelung $s^\top = s_{\alpha^\vee, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$ ist, wobei wir in der zweiten Identität unter α das durch Auswerten an α definierte Element des Bidualraums V^{**} verstehen.

1.3 Alkovengeometrie

1.3.1. Im folgenden arbeiten wir mit affinen Räumen über angeordneten Körpern. Wir setzen nicht voraus, daß unsere affinen Räume endlichdimensional sein sollen, wenn das auch in Anwendungen der Normalfall sein wird.

Definition 1.3.2. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Gegeben $x, y \in E$ setzen wir

$$\begin{aligned} [x, y] &:= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t \leq 1\} \\ [x, y) &:= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t < 1\} \\ (x, y] &:= \{x + t(y - x) \mid 0 < t \leq 1\} \\ (x, y) &:= \{x + t(y - x) \mid 0 < t < 1\} \end{aligned}$$

Mengen dieser Gestalt mit $x \neq y$ nennen wir **Geradensegmente**, und zwar **abgeschlossene Geradensegmente**, wenn beide **Endpunkte** x, y dazugehören, und **offene Geradensegmente**, wenn keiner der beiden Endpunkte dazugehört. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums sind zwar abgeschlossene Geradensegmente abgeschlossene Teilmengen des ganzen Raums, offene Geradensegmente jedoch nur offene Teilmengen in der von ihnen erzeugten affinen Gerade.

1.3.3. Ein affiner Teilraum eines affinen Raums heißt wie in [LA2] 7.1.7 eine **Hyperebene**, wenn sein Richtungsraum die Kodimension Eins hat im Richtungsraum unseres ursprünglichen affinen Raums.

Definition 1.3.4. Ein System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper heißt **lokal endlich**, wenn jedes Geradensegment in unserem Raum höchstens endlich viele Hyperebenen unseres Systems trifft.

Lemma 1.3.5. *Ein affiner Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperebenen überdeckt werden.*

Beweis. Jeder Punkt x unseres affinen Raums liegt auf höchstens endlich vielen unserer Hyperebenen. Wenn wir nun mithilfe von [AL] 3.10.1 einen weiteren Punkt y außerhalb dieser endlich vielen Hyperebenen wählen, so ist das Segment $[x, y]$ in keiner unserer Hyperebenen enthalten. Da es unendlich viele Punkte hat, aber nur endlich viele unserer Hyperebenen trifft und zwar in jeweils nur einem Punkt, gibt es auf $[x, y]$ notwendig Punkte, die in keiner unserer Hyperebenen enthalten sind. \square

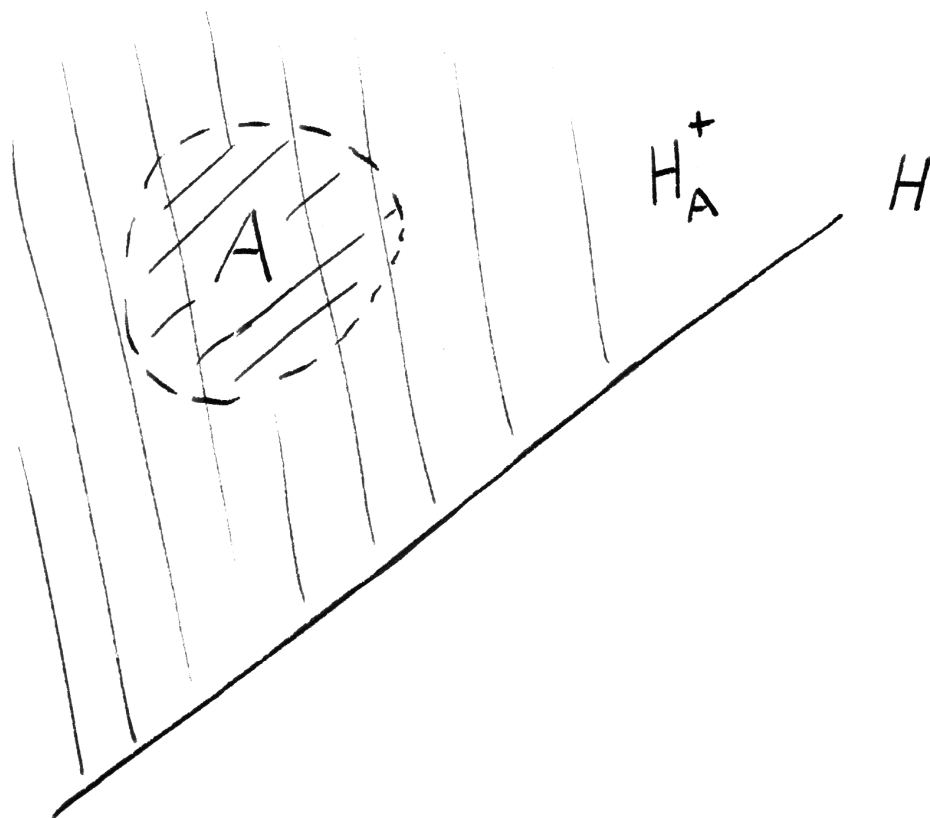
1.3.6. Ich erinnere daran, daß eine Teilmenge eines affinen Raums über einem angeordneten Körper **konvex** heißt, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält. Ich erinnere daran, daß jede Hyperebene in einem affinen Raum die Nullstellenmenge einer affinen Funktion ist.

Definition 1.3.7. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Für jede Hyperebene $H \subset E$ gibt es in $E \setminus H$ genau zwei maximale konvexe Teilmengen, die wir die **Halbräume** zu H oder die **H -Halbräume** nennen. Ist $A \subset E$ eine nichtleere konvexe Teilmenge und gilt $A \cap H = \emptyset$, so liegt A in genau einem Halbraum zu H . Diesen Halbraum bezeichnen wir mit H_A^+ und nennen ihn den **H -Halbraum von A** . Seine Vereinigung mit der Hyperebene selbst notieren wir $\bar{H}_A^+ = H_A^+ \cup H$ und nennen sie den **abgeschlossenen H -Halbraum von A** .

Definition 1.3.8. Für jede Hyperebene in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachten wir die dreiteilige Partition unseres Raums in die zwei Halbräume und die Hyperebene selbst und nennen sie die zugehörige **Hyperebenenpartition**. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen betrachten wir die grösste Partition unseres affinen Raums, die feiner ist als diese Hyperebenenpartition für jede der Hyperebenen unseres Systems. Die Stücke der so erklärten Partition heißen die **Facetten zu unserem lokal endlichen System von Hyperebenen**. Als Schnitte konvexer Teilmengen sind sie konvex und nach der Definition einer Partition sind sie nie leer.

1.3.9. Wollen wir das in algebraischer statt in geometrischer Sprechweise formulieren, so müssen wir statt unserem System von Hyperebenen eine Menge Λ von affinen Abbildungen $\lambda : E \rightarrow k$ betrachten, die Gleichungen unserer Hyperebenen sind. Für jede Dreiteilung dieses Systems $\Lambda = \Lambda^+ \sqcup \Lambda^0 \sqcup \Lambda^-$ ist dann die Menge

$$\left\{ v \in E \left| \begin{array}{l} \lambda(v) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda^0 \\ \lambda(v) > 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda^+ \\ \lambda(v) < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda^- \end{array} \right. \right\}$$



Der H -Halbraum H_A^+ einer konvexen Teilmenge A , die die Hyperebene H nicht trifft. Per definitionem gehört H selbst nicht zu H_A^+ dazu.

entweder leer oder eine Facette. Die „lokale Endlichkeit“ unseres Systems von Hyperebenen übersetzt sich dann in die Bedingung, daß auf jedem Geradensegment höchstens endlich viele $\lambda \in \Lambda$ eine Nullstelle haben dürfen.

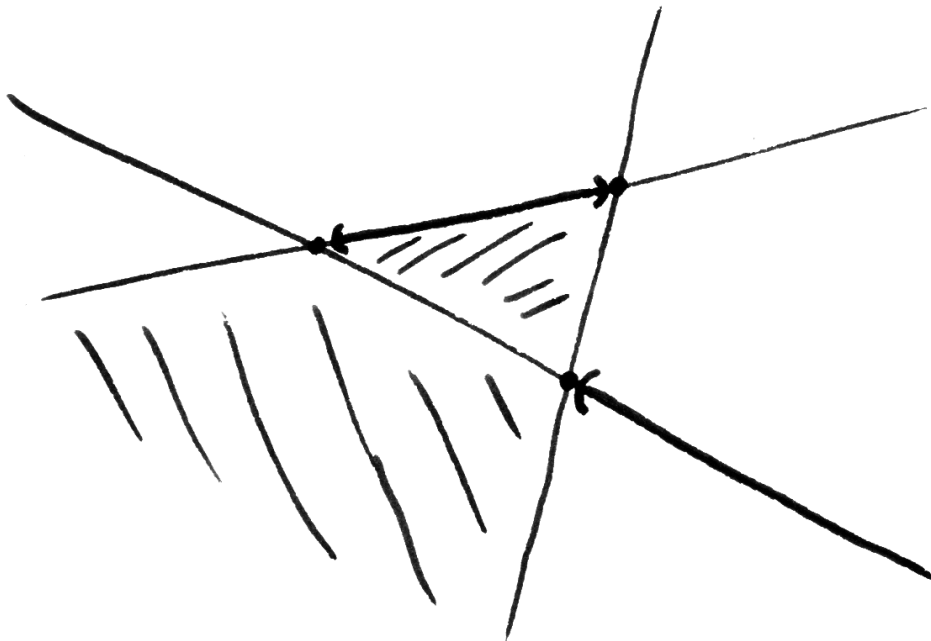
Definition 1.3.10. Ist E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper, so nennen wir eine Teilmenge $A \subset E$ ganz allgemein eine **Facette**, wenn es ein lokal endliches System von Hyperebenen gibt, zu dem unser A eine Facette im Sinne von 1.3.8 ist. Wir sagen dann auch, daß besagtes System von Hyperebenen „unsere Facette beschreibt“.

1.3.11 (**Intrinsische Natur der Definition einer Facette**). Ein- und dieselbe Facette kann im allgemeinen durch sehr verschiedene lokal endliche Systeme von Hyperebenen beschrieben werden. Insbesondere müssen verschiedene Facetten keineswegs disjunkt sein. In meinen Augen besteht der wesentliche Trick der hier gegebenen Darstellung der Alkovengeometrie darin, gewisse Aspekte der Geometrie unserer Facetten unabhängig von einem beschreibenden System von Hyperebenen zu formulieren.

Definition 1.3.12. Ist E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und $A \subset E$ eine Facette, so definieren wir ihren **Abschluß** \bar{A} als die Menge aller Punkte $x \in E$ derart, daß für mindestens einen Punkt $y \in A$ die Menge $(x, y]$ ganz in A enthalten ist.

Beispiele 1.3.13. Wegen $(x, x] = \{x\}$ liegt jede Facette in ihrem Abschluß. In einem eindimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die Facetten genau die Punkte, die offenen Geradensegmente, die offenen Halbgeraden und der ganze Raum. In einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper ist jeder nichtleere affine Teilraum und insbesondere jede einelementige Teilmenge eine Facette. Im allgemeinen ist jeder Halbraum eine Facette und sein Abschluß als Halbraum im Sinne von 1.3.7 fällt mit seinem Abschluß als Facette zusammen.

1.3.14 (**Diskussion der Terminologie**). Die Bezeichnung „Facette“ wird auch in einer anderen Bedeutung verwendet wie folgt: Ein Schnitt einer endlichen Familie abgeschlossener Halbräume heißt ein **Polyeder** oder präziser ein **konvexer Polyeder**, wenn man betonen will, daß nicht der Polyeder eines Simplizialkomplexes im Sinne von [TS] ?? gemeint ist. Das wäre in unserer Terminologie also eine Teilmenge unseres affinen Raums, die man als Abschluß einer Facette zu einem endlichen System von Hyperebenen erhalten kann. Unter einer „Facette“ eines solchen Polyeders verstehen nun manche Autoren das, was wir den „Abschluß einer Randfacette unserer ursprünglichen Facette“ nennen würden.



Die drei dargestellten Geraden liefern eine Partition der Papierebene in 19 Facetten, als da wären 3 einpunktige Facetten, 3 offene Geradensegmente, von denen ich eines versucht habe durch ein Klammerpaar anzudeuten, 6 offene Halbgeraden, von denen ich eine versucht habe durch eine Klammer anzudeuten, und 7 sogenannte Alkoven, von denen ich Zwei schraffiert habe. Der Abschluß des dreieckigen Alkoven in der Mitte ist die abgeschlossene Dreiecksfläche, er ist in unserem Fall die Vereinigung von 7 unserer Facetten, nämlich von den 3 Punkten, den 3 offenen Geradensegmenten und der offenen Dreiecksfläche selber.

1.3.15 (**Abschluß einer Facette, Hyperebenen-Beschreibung**). Ist E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und $A \subset E$ eine Facette und \mathcal{H} ein lokal endliches System von Hyperebenen, das sie beschreibt, so haben wir

$$A = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{A \not\subset H \in \mathcal{H}} H_A^+$$

Der Abschluß unserer Facette wird dann gegeben durch die Formel

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{H}, A \cap H = \emptyset} \bar{H}_A^+$$

Insbesondere gilt für jeden Punkt $y \in A$ offensichtlich $\bar{A} = \{x \in E \mid (x, y] \subset A\}$.

Ergänzung 1.3.16 (**Abschluß einer Facette, topologische Beschreibung**). Haben wir $k = \mathbb{R}$ und ist unser affiner Raum endlichdimensional und versehen wir ihn mit seiner natürlichen Topologie, so stimmt der oben definierte Abschluß einer Facette überein mit ihrem Abschluß im Sinne der Topologie.

1.3.17 (**Geradensegmente in Facetten**). Umfaßt eine Facette ein abgeschlossenes Geradensegment, so umfaßt sie auch ein offenes Geradensegment, das seinerseits dieses abgeschlossene Geradensegment umfaßt. Das folgt direkt aus der Definition 1.3.10.

1.3.18 (**Facetten in abgeschlossenen Halbräumen**). Ist eine Facette in einem abgeschlossenen Halbraum zu einer Hyperebene enthalten, so liegt sie entweder bereits im entsprechenden offenen Halbraum oder aber in der fraglichen Hyperebene. Das folgt direkt aus unseren Erkenntnissen zu Geradensegmenten in Facetten 1.3.17 und der Konvexität.

Definition 1.3.19. Die maximalen Facetten im Abschluß einer gegebenen Facette heißen ihre **Randfacetten**. Diejenigen Randfacetten, von der gegebenen Facette verschiedenen sind, nennen wir ihre **echten Randfacetten**.

Lemma 1.3.20 (Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten). *Wird eine Facette A beschrieben durch ein lokal endliches System von Hyperebenen \mathcal{H} , so beschreibt dieses System auch alle ihre Randfacetten, und diese sind genau alle nichtleeren Schnitte B der Gestalt*

$$B = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{R}} H \cap \bigcap_{A \not\subset H \notin \mathcal{R}} H_A^+$$

für beliebige Teilmengen $\mathcal{R} \subset \{H \in \mathcal{H} \mid A \not\subset H\}$.

Beweis. In der Tat ist jeder solche nichtleere Schnitt offensichtlich eine Facette im Abschluß von A . Ist umgekehrt eine Facette im Abschluß von A gegeben, so liegt sie sicher auf allen Hyperebenen, auf denen A liegt, und nach unseren Erkenntnissen 1.3.18 zu Facetten in abgeschlossenen Halbräumen liegt sie in Bezug auf alle Hyperebenen aus einem A beschreibenden System entweder auf der Hyperebene selbst oder in demselben Halbraum wie A . Folglich liegt jede im Abschluß von A enthaltene Facette in einem unserer Schnitte. \square

Ergänzung 1.3.21 (Partielle Ordnung auf der Menge der Randfacetten). Auf der Menge $\mathcal{F}(A)$ aller Randfacetten einer Facette A erhalten wir eine partielle Ordnung durch die Vorschrift $B \leq C \Leftrightarrow B \subset \bar{C}$ und für jede Facette $C \in \mathcal{F}(A)$ haben wir $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{F}(A)$.

1.3.22 (**Abschluß als Vereinigung der Randfacetten**). Nach der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20 ist der Abschluß einer Facette stets die disjunkte Vereinigung über alle maximalen in besagtem Abschluß enthaltenen Facetten, in Formeln

$$\bar{A} = \bigsqcup_{B \in \mathcal{F}(A)} B$$

Definition 1.3.23. Der von einer Facette erzeugte affine Teilraum heißt der **Träger** unserer Facette. Er kann auch beschrieben werden als der Schnitt aller derjenigen Hyperebenen eines beschreibenden lokal endlichen Systems, die die fragliche Facette enthalten. Eine Facette, deren Träger der ganze Raum ist, heißt ein **Alkoven** oder auch eine **Kammer**.

Ergänzung 1.3.24. Unter der **Dimension** einer Facette versteht man die Dimension ihres Trägers. Sie kann bei uns auch durchaus unendlich sein. Unter der **Kodimension** einer Facette versteht man die Kodimension ihres Trägers. Sie ist nach unseren Definitionen stets endlich.

Lemma 1.3.25 (Überdeckung durch Alkovenabschlüsse). *Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen \mathcal{H} in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper überdecken die Abschlüsse der zugehörigen Alkoven ganz E . Bezeichnet $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ die Menge aller Alkoven zu \mathcal{H} , so gilt also in Formeln*

$$E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})} \bar{A}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe E mehr als nur einen Punkt. Für $p \in E$ finden wir nach Lemma 1.3.5 eine affine Gerade durch p , die in keiner unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ enthalten ist. Dann gibt es auch einen Punkt q auf unserer Gerade derart, daß das halboffene Geradensegment $(p, q]$ keine unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ trifft. Damit liegt aber per definitionem der Punkt p im Abschluß des Alkoven von q . \square

Definition 1.3.26. Unter einer **Wand** eines Alkoven verstehen wir eine Hyperebene, die der Träger einer seiner Randfacetten ist.

1.3.27. Nach der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20 gehört jede Wand eines Alkoven zu jedem lokal endlichen System von Hyperebenen, das besagten Alkoven beschreibt. Die Menge der Wände eines Alkoven A notieren wir \mathcal{H}_A . Eine Randfacette der Kodimension Eins eines Alkoven nennen wir eine **Wandfacette** unseres Alkoven.

Lemma 1.3.28 (Wände als eindeutige Berührende). *Gegeben ein Alkoven und ein ihn beschreibendes System von Hyperebenen \mathcal{H} ist eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine Wand unseres Alkoven genau dann, wenn es auf H einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven gibt, der auf keiner anderen Hyperebene aus \mathcal{H} liegt.*

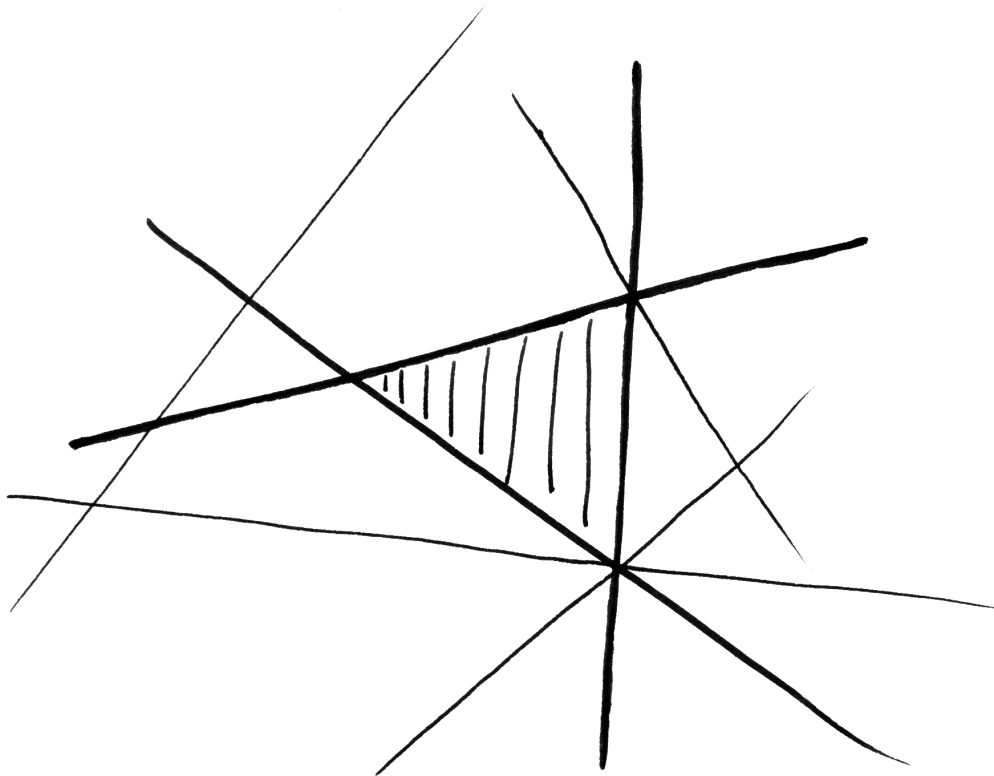
1.3.29. Anschaulich gesprochen ist also unsere Wand für mindestens einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven die einzige Hyperebene, die den Alkoven „in diesem Punkt berührt“.

Beweis. Ist unsere Hyperebene die einzige Hyperebene aus \mathcal{H} durch besagten Punkt, die den Alkoven nicht trifft, so muß besagter Punkt nach unserer Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20 zu einer Randfacette gehören, die unsere Hyperebene erzeugt. Folglich ist dann unsere Hyperebene eine Wand des besagten Alkoven. Ist umgekehrt unsere Hyperebene eine Wand des besagten Alkoven, so ist sie Träger einer Randfacette, und jeder Punkt dieser Randfacette hat besagte Eigenschaft, wieder nach unserer Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20. \square

Satz 1.3.30 (Begrenzung eines Alkoven durch seine Wände). *Jeder Alkoven ist der Schnitt über die ihn umfassenden Halbräume zu seinen Wänden. In Formeln gilt für jeden Alkoven A also*

$$A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A} H_A^+$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß jedes Segment $[x, y]$ mit $x \in A$ und $y \notin A$ mindestens eine Wand von A trifft. Per definitionem gibt es ein lokal endliches System \mathcal{H} von Hyperebenen, das den Alkoven A beschreibt. Lassen wir aus diesem System eine Hyperebene weg, die keine Wand von A ist, so erhalten wir nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.28 wieder ein lokal endliches System von Hyperebenen, das den Alkoven A beschreibt. Trifft unser Segment also keine Wand von A , so können wir die endlich vielen Hyperebenen aus \mathcal{H} , die es trifft, aus \mathcal{H} herausnehmen und erhalten wieder ein System von Hyperebenen, das den Alkoven A beschreibt. Daraus folgt jedoch $y \in A$ im Widerspruch zu unserer Annahme. \square



Ein System von Hyperebenen, ein zugehöriger Alkoven als schraffierte Dreiecksfläche, und seine drei Wände als fett eingezeichnete affine Geraden.

Lemma 1.3.31 (Jede Hyperebene ist Wand eines Alkoven). *Ist \mathcal{H} ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper, so ist jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ Wand mindestens eines der durch dieses System definierten Alkoven, in Formeln*

$$\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{H}_A$$

Beweis. Für $H \in \mathcal{H}$ finden wir nach 1.3.5 einen Punkt $q \in H$, der auf keiner anderen Hyperebene aus \mathcal{H} liegt. Er liegt nach der Überdeckung durch Alkovenabschlüsse 1.3.25 im Abschluß eines Alkoven, und unsere Hyperebene ist dann nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.28 eine Wand dieses Alkoven. \square

Ergänzung 1.3.32 (Algebraische Beschreibung der Wände eines Alkoven). Sei A ein Alkoven zu einem lokal endlichen System von Hyperebenen \mathcal{H} . Wählt man für jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine affine Abbildung $\alpha_H : E \rightarrow k$ mit $\alpha_H|_A > 0$, so sind die Wände von A genau diejenigen $H \in \mathcal{H}$ mit $\bar{A} \cap H \neq \emptyset$, für die sich α_H nicht als positive Linearkombination gewisser α_L mit $L \neq H$ schreiben läßt. Daß für jede Wand H von A diese Bedingung erfüllt ist, ist eh klar. Daß nur Wände unsere Bedingung erfüllen, ergibt sich als eine Konsequenz des Hauptsatzes über lineare Ungleichungen [LA1] ??: Ist nämlich H keine Wand und $x \in \bar{A} \cap H$, so gibt es nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.28 noch mindestens eine weitere Hyperebene aus \mathcal{H} durch x , aber auch höchstens endlich viele L, \dots, M . Ließe sich α_H nicht als positive Linearkombination aus ihnen schreiben, so gäbe es nach dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen [LA1] ?? einen Punkt y mit $\alpha_H(y) < 0$ aber $\alpha_L(y) \geq 0, \dots, \alpha_M(y) \geq 0$. Das Segment $[x, y]$ trifft nun höchstens endlich viele Hyperebenen aus \mathcal{H} , und indem wir y notfalls durch einen geeigneten anderen Punkt von $(x, y]$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß $(x, y]$ außer H selbst keine Hyperebene aus \mathcal{H} trifft. Für beliebiges $z \in A$ trifft dann (y, z) die Hyperebene H aber keine andere unserer Hyperebenen aus \mathcal{H} . Damit wäre aber H nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.28 doch eine Wand gewesen.

Übungen

Übung 1.3.33. Ist der Schnitt zweier Facetten nicht leer, so ist er wieder eine Facette, deren Abschluß als der Schnitt der Abschlüsse der ursprünglichen Facetten beschrieben werden kann.

Übung 1.3.34. Trennt eine Hyperebene H zwei Facetten A und B , so gilt stets $\bar{A} \cap \bar{B} \subset H$.

Übung 1.3.35. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper k . Gegeben eine Facette $F \subset E$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in E \setminus 0$ sind gleichbedeutend:

1. F umfaßt eine Gerade mit Richtungsvektor \vec{v} ;
2. $F = \lambda\vec{v} + F \quad \forall \lambda \in k$;
3. Es gibt ein F beschreibendes System von Hyperebenen derart, daß \vec{v} zum Richtungsraum jeder dieser Hyperebenen gehört;
4. Für jede Hyperebene in E , die F nicht trifft, liegt \vec{v} im Richtungsraum besagter Hyperebene.

Übung 1.3.36. Gegeben eine Facette A gehören zwei verschiedene Punkte aus ihrem Abschluß $x, y \in \bar{A}$ zu derselben maximalen Facette $B \subset \bar{A}$ genau dann, wenn es ein offenes ganz in \bar{A} enthaltenes Geradensegment gibt, das unsere beiden Punkte enthält.

Übung 1.3.37. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die zugehörigen Alkoven genau die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems, und jede nichtleere konvexe Teilmenge von $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ liegt in genau einem Alkoven.

Übung 1.3.38. Gegeben ein beliebiges System von Hyperebenen \mathcal{H} in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper ist das Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ die disjunkte Vereinigung seiner maximalen konvexen Teilmengen, und jede nichtleere konvexe Teilmenge ist in genau einer dieser maximalen konvexen Teilmengen enthalten.

Übung 1.3.39. Ein Alkoven in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperebenen überdeckt werden.

1.4 Facettenabschluß als konvexe Hülle*

Satz 1.4.1 (Facettenabschluß als Hülle der einpunktigen Randfacetten). *Umfaßt eine Facette in einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper keine Halbgerade, so ist ihr Abschluß die konvexe Hülle der Vereinigung aller einpunktigen Randfacetten besagter Facette.*

Beweis. Sei A unsere Facette. Jeder Punkt $x \in \bar{A}$ gehört zu genau einer Randfacette $C \in \mathcal{F}(A)$ von A . Besteht diese Randfacette nicht nur aus einem Punkt, so enthält sie ein ganzes offenes Geradensegment um unseren Punkt. Die zugehörige Gerade verläßt \bar{A} in zwei von A verschiedenen Randfacetten von A , und vollständige Induktion beendet den Beweis. \square

Proposition 1.4.2 (Facettenabschluß als Hülle der echten Randfacetten). Sei E ein endlichdimensionaler affiner Raum über einem angeordneten Körper k und sei $F \subset E$ eine Facette der Dimension $\dim F \geq 2$. Umfaßt F keine Gerade, so ist \bar{F} die konvexe Hülle von $\bar{F} \setminus F$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei F ein Alkoven. Wir argumentieren mit Induktion über die Dimension. Im ebenen Fall $\dim F = 2$ gibt es in einem F beschreibenden System nach 1.3.35 zwei Hyperebenen alias Geraden H und G , die nicht parallel sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind das die beiden Koordinatenachsen in k^2 . Es gibt folglich einen Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E} \setminus 0$ derart, daß für alle $p \in F$ die Gerade $p + k\vec{v}$ die Facette F nur in einem endlichen Segment trifft, in Formeln $p + \lambda\vec{v} \notin F$ für $\lambda \gg 0$ und auch für $\lambda \ll 0$. Also gibt es auch $\mu, \nu > 0$ mit $p + \mu\vec{v}, p - \nu\vec{v} \in \bar{F} \setminus F$ und der ebene Fall ist erledigt. Um im allgemeinen zu sehen, daß jeder Punkt $p \in F$ in besagter konvexer Hülle liegt, müssen wir nur eine Hyperebene durch p legen und die Induktionsannahme auf den Schnitt unserer Facette F mit besagter Hyperebene anwenden. \square

Korollar 1.4.3 (Facettenabschluß als Hülle kleiner Randfacetten). Sei E ein endlichdimensionaler affiner Raum über einem angeordneten Körper und $F \subset E$ eine Facette, die keine Gerade umfaßt. So ist \bar{F} die konvexe Hülle der Vereinigung aller Randfacetten der Dimension ≤ 1 von F .

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Proposition 1.4.2. \square

1.4.4 (**Konvexe Hüllen als Abschlüsse von Facetten**). In einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper ist nach dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen [LA1] ?? jeder endlich erzeugte Kegel der Abschluß einer Facette. Ebenso ist in einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper nach dem Hauptsatz über affine Ungleichungen [LA1] ?? die konvexe Hülle einer endlichen nichtleeren Teilmenge stets der Abschluß einer Facette.

Ergänzung 1.4.5. Die **Vermutung von Hirsch** besagt, daß man in einem beschränkten Alkoven aus \mathbb{R}^d mit n Wänden zwischen je zwei seiner Ecken einen Weg aus höchstens $n - d$ seiner Kanten finden sollte. Hier meinen Ecken null-dimensionale und Kanten eindimensionale Randfacetten unseres Alkoven. Einen Übersichtsartikel zu dieser Vermutung findet man etwa in [KS10], in der der Zweitautor als „note added in press“ ein Gegenbeispiel ankündigt. Der Abschluß eines beschränkten Alkoven aus \mathbb{R}^d heißt im übrigen auch ein **Polytop**.

Übungen

Übung 1.4.6. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper. Sei $A \subset E$ eine Facette und $m = \min\{\dim B \mid B \in \mathcal{F}(A)\}$

die kleinstmögliche Dimension für eine Randfacette von A . So ist A die konvexe Hülle der Vereinigung seiner Randfacetten der Dimension $\leq d + 1$.

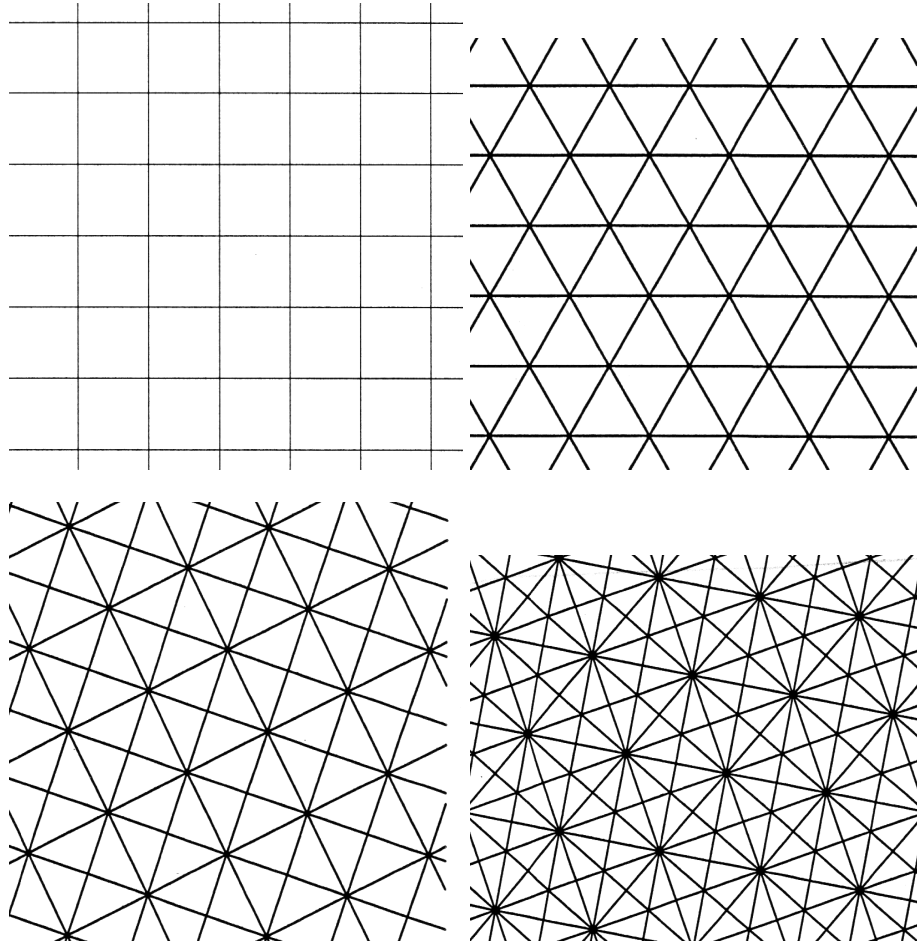
Ergänzende Übung 1.4.7. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper. So ist die konvexe Hülle einer endlichen Vereinigung von Facettenabschlüssen wieder ein Facettenabschluß. Ich habe mir die Lösung nicht überlegt und kann auf die Schnelle nicht abschätzen, wie schwer das zu zeigen ist.

1.5 Affine Spiegelungsgruppen

Definition 1.5.1. Eine affine Abbildung von einem affinen Raum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **affine Spiegelung**, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene. Wir nennen diese Fixpunktmenge dann die **Spiegelebene** oder genauer **Spiegelhyperebene** unserer Spiegelung. Wir werden Spiegelungen nur in affinen Räumen über Körpern einer von Zwei verschiedenen Charakteristik betrachten.

Definition 1.5.2. Unter einer **affinen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine Gruppe von Automorphismen eines endlichdimensionalen affinen Raums über einem angeordneten Körper, die (1) von affinen Spiegelungen erzeugt wird, für die (2) die Spiegelebenen ihrer Spiegelungen ein lokal endliches System von Hyperebenen bilden, und so daß (3) die linearen Anteile der Elemente unserer Gruppe eine endliche Gruppe von Automorphismen des Richtungsraums bilden. Wenn wir von einer affinen Spiegelungsgruppe (W, E) reden, so ist mit E der zugrundeliegende endlichdimensionale affine Raum gemeint und mit W die Gruppe selbst. Zwei affine Spiegelungsgruppen (W, E) und (W', E') über demselben Körper heißen **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus von affinen Räumen $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt mit $W = \varphi^{-1}W'\varphi$.

Vorschau 1.5.3. Der Rest dieses Abschnitts kann als eine vollständige Klassifikation der reellen affinen Spiegelungsgruppen gelesen werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Dieses Ziel ist auch der Grund, aus dem wir es bei den Definitionen stets vermeiden, in der euklidischen Situation zu arbeiten. Die endlichen reellen Spiegelungsgruppen werden bereits in 1.9.7 im Verbund mit 1.9.5 durch ihre „Coxeter-Graphen“ zusammen mit der Dimension des Raums ihrer Fixpunkte klassifiziert. Nach 1.12.7 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen „essentiellen“ Faktor und die Isomorphieklassen dieser Faktoren sind eindeutig bestimmt. Satz 2.5.3 gibt dann eine Klassifikation der „essentiellen“ affinen Spiegelungsgruppen durch sogenannte „Wurzelsysteme“, die wiederum nach 2.2.14 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Die unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich werden in 2.3.6 durch ihre „Dynkin-Diagramme“ klassifiziert.



Dieses Bild zeigt die Spiegelhyperebenen von vier ebenen affinen reellen Spiegelungsgruppen. Das sind auch bis auf Konjugation mit Automorphismen der affinen Ebene alle Möglichkeiten für ebene affine reelle Spiegelungsgruppen, die „essentiell“ sind in dem Sinne, daß die darin enthaltenen Verschiebungen den Richtungsraum aufspannen. Die Bilder sind so gezeichnet, daß die Spiegelungen an einer Hyperebene in der jeweiligen affinen Spiegelungsgruppe den Spiegelungen auf der Papierebene im Sinne der Schulgeometrie entsprechen.

Beispiel 1.5.4. Betrachten wir in einer reellen affinen Ebene zwei verschiedene aber parallele Geraden und wählen zu jeder dieser Geraden eine Spiegelung, die sie festhält, so erzeugen diese beiden Spiegelungen eine Gruppe von Automorphismen der affinen Ebene. Diese Gruppe ist jedoch nur dann eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne unserer Definition 1.5.2, wenn die linearen Anteile der beiden erzeugenden Spiegelungen übereinstimmen.

Definition 1.5.5. Unter einem **affinen euklidischen Raum** verstehen wir hier und im folgenden einen endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper, dessen Raum von Richtungsvektoren mit einem Skalarprodukt versehen ist. Eine affine Abbildung zwischen affinen euklidischen Räumen heißt **orthogonal**, wenn ihr linearer Anteil orthogonal ist. Eine **Spiegelung** oder präziser eine **affine orthogonale Spiegelung** auf einem affinen euklidischen Raum ist eine orthogonale Abbildung, deren Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Unter einer **affinen euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine **affine Spiegelungsgruppe**, die aus orthogonalen Automorphismen eines affinen euklidischen Raums besteht.

Ergänzung 1.5.6. Gegeben eine Gruppe von orthogonalen Automorphismen eines euklidischen affinen Raums, die die Bedingungen (1) und (2) aus 1.5.2 an eine affine Spiegelungsgruppe erfüllt, ist Bedingung (3) von ebendort automatisch erfüllt, als da heißt, die Gruppe aller linearen Anteile ist endlich. Um das zu sehen, reicht es zu zeigen, daß die Menge aller Normalenvektoren auf Spiegelebenen endlich ist. In der Tat operiert nämlich unsere Gruppe linearer Anteile treu auf dieser Menge, da sie ja deren orthogonales Komplement punktweise festhalten muß. Im reellen können wir nun argumentieren wie folgt: Wäre unsere Menge von Normalenvektoren nicht endlich, so gäbe es wegen der Kompaktheit der Einheitssphäre Spiegelebenen, die beliebig kleine positive Winkel einschließen. Wir zeigen, daß damit auch zwischen den Wänden eines und jedes Alkoven beliebig kleine positive Winkel vorkämen, im Widerspruch zu 1.12.3. In der Tat: Für zwei Spiegelebenen, die sich treffen, gibt es nur endlich viele Spiegelebenen, die die Schnittgerade umfassen. Auf dieser Schnittgeraden finden wir Punkte, die in keiner zusätzlichen Spiegelebene enthalten sind. Solch ein Punkt liegt dann im Abschluß eines Alkoven, und zwei Wände dieses Alkoven, die den besagten Punkt enthalten, schließen dann höchstens denselben Winkel ein wie die beiden Spiegelebenen, von denen wir ausgegangen waren. Sind wir nicht im Reellen, so können wir argumentieren wie folgt: Unterteilen wir die Oberfläche eines Einheitswürfels um den Nullpunkt in noch so kleine Schachfelder, so müßten doch zwei verschiedene Normalengeraden auf Spiegelebenen durch dasselbe Feld gehen. Der Rest des Arguments bleibt dem Leser überlassen.

Lemma 1.5.7. *In einer affinen Spiegelungsgruppe haben verschiedene Spiegelungen auch verschiedene Spiegelebenen.*

Erster Beweis. Wir finden ja nach 1.2.6 ein Skalarprodukt auf dem Richtungsraum, das unter den linearen Anteilen der Elemente unserer affinen Spiegelungsgruppe invariant ist. Bezüglich jedes solchen Skalarprodukts muß eine Spiegelung dann die orthogonale Spiegelung zu ihrer Spiegelebene sein. \square

Zweiter Beweis. Gegeben zwei Spiegelungen s, t mit derselben Spiegelebene hat (st) mindestens einen Fixpunkt und es reicht mithin zu zeigen, daß sein linearer Anteil die Identität ist. Man sieht jedoch unmittelbar, daß der lineare Anteil von (st) unipotent ist, und wäre er nicht die Identität, so hätte er folglich unendliche Ordnung. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer letzten Forderung an eine affine Spiegelungsgruppe. \square

1.5.8 (**Konjugierte einer Spiegelung**). Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe (W, E) und eine Spiegelung $s \in W$ mit Spiegelebene $E^s = H$ schreiben wir die zugehörige Spiegelung auch

$$s = s_H : E \rightarrow E$$

Für beliebiges $w \in W$ gilt dann $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$, denn beide Seiten sind Spiegelungen aus W mit derselben Spiegelebene.

1.5.9. Gegeben ein endlichdimensionaler affiner euklidischer Raum E und eine affine Hyperebene $H \subset E$ schreiben wir die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene H auch $s_H : E \rightarrow E$. Für eine beliebige orthogonale Abbildung $w : E \rightarrow E$ gilt dann $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$, denn beide Seiten sind orthogonale Spiegelungen mit derselben Spiegelebene.

Ergänzung 1.5.10. Hier ist im Fall unendlicher Dimension Vorsicht geboten. In dieser Allgemeinheit könnte es nämlich passieren, daß das orthogonale Komplement einer linearen Hyperebene nur aus dem Nullvektor besteht. Sogar das orthogonale Komplement des Raums aller differenzierbaren Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich des üblichen Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int fg$ ist ja schon der Nullraum.

Beispiel 1.5.11. Wir betrachten die Menge \mathcal{H} aller derjenigen Geraden in \mathbb{R}^2 , die parallel sind zu einer der Koordinatenachsen und durch einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen. Offensichtlich ist \mathcal{H} die Menge aller Spiegelebenen einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe und die Alkoven sind gerade die „Felder dieses Rechenpapiers“. Allgemeiner können wir natürlich auch die Menge \mathcal{H} aller derjenigen Hyperebenen in \mathbb{R}^n betrachten, die parallel sind zu einer der Koordinaten-Hyperebenen und die einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthalten. Im Fall $n = 1$ sind die Alkoven die offenen Segmente $(i, i + 1)$, im Fall $n = 3$ haben sie die Gestalt von Würfeln.

1.5.12. Eine endliche Gruppe von Bewegungen eines affinen Raums über einem Körper der Charakteristik Null hat stets einen Fixpunkt, genauer ist der Schwerpunkt jeder Bahn ein Fixpunkt.

Übungen

Übung 1.5.13. Jede von Spiegelungen erzeugte Untergruppe einer affinen Spiegelungsgruppe ist auch selbst eine affine Spiegelungsgruppe.

1.6 Transitivität auf der Menge der Alkoven

Satz 1.6.1 (Geometrie affiner Spiegelungsgruppen). Sei \mathcal{H} ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem euklidischen affinen Raum E über einem angeordneten Körper, das unter allen orthogonalen Spiegelungen an seinen Hyperebenen stabil ist. So gilt:

1. Unser System \mathcal{H} ist das System aller Spiegelebenen einer *affinen euklidischen Spiegelungsgruppe*;
2. Für jeden festen Alkoven in Bezug auf \mathcal{H} erzeugen die Spiegelungen an seinen Wänden bereits die gesamte Spiegelungsgruppe;
3. Ist A ein fester Alkoven und $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements w unserer Spiegelungsgruppe als Produkt von Spiegelungen s_i an den Wänden von A , so ist die Länge r dieser Darstellung genau die Zahl der Spiegelebenen $H \in \mathcal{H}$, die wA von A trennen;
4. Unsere Spiegelungsgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven.

Beweis. Bezeichne \mathcal{A} die Menge aller Alkoven zu \mathcal{H} und W die von den orthogonalen Spiegelungen s_H mit $H \in \mathcal{H}$ erzeugte Gruppe von affinen Selbstabbildungen von E . Daß \mathcal{H} in der Tat die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus W ist, wird sich erst am Ende des Beweises herausstellen. Wir wählen einen festen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ und bezeichnen mit

$$W' := \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A \rangle$$

die von den Spiegelungen an seinen Wänden erzeugte Untergruppe $W' \subset W$. Wir zeigen als erstes, daß W' transitiv auf \mathcal{A} operiert. Dazu benutzen wir:

Lemma 1.6.2. Ist $A \in \mathcal{A}$ ein Alkoven und H eine Wand von A , so ist H die einzige Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt.

Beweis des Lemmas. Ist H eine Wand von A , so gibt es nach 1.3.28 einen Punkt $p \in \bar{A} \cap H$, der auf keiner anderen Hyperebene liegt, die A vermeidet. Eine Hyperebene, die die zwei Facetten trennt, muß jedoch nach 1.3.34 den Schnitt ihrer Abschlüsse umfassen. Jede Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt, muß also p enthalten und A vermeiden und fällt folglich mit H zusammen. \square

Sei nun $C \in \mathcal{A}$ ein Alkoven. Wir wählen $w \in W'$ derart, daß die Zahl der Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$, die A von wC trennen, so klein wie möglich wird. Gälte nicht $A = wC$, so gäbe es nach 1.3.30 eine Wand $H \in \mathcal{H}_A$ von A , die A von wC trennt. Dann würden aber $s_H A$ und wC und ebenso A und $s_H wC$ von noch weniger Hyperebenen aus \mathcal{H} getrennt als A und wC , im Widerspruch zur Wahl von w . Es gilt also $A = wC$ und W' operiert transitiv auf \mathcal{A} . Nach dieser Vorbemerkung zeigen wir die Behauptungen des Satzes in der Reihenfolge 2–3–4–1.

2. Jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ ist nach 1.3.31 Wand eines geeigneten Alkoven $C \in \mathcal{A}$, in Formeln $H \in \mathcal{H}_C$. Nach dem Vorhergehenden finden wir $w \in W'$ mit $wC = A$. Offensichtlich gilt weiter $w\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A$ und wir folgern $s_H = w^{-1}s_w H w \in W'$ und damit $W = W'$.

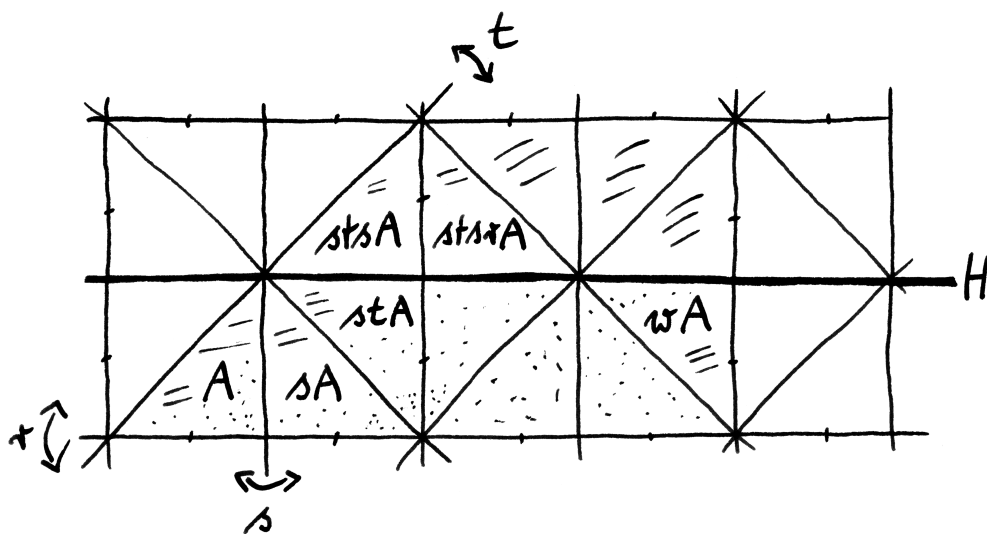
3. Sei $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements $w \in W$ als Produkt von Spiegelungen an Wänden H_1, \dots, H_r von A . Für zwei Alkoven $B, C \in \mathcal{A}$ bezeichne $d(B, C)$ die Zahl der Hyperebenen aus \mathcal{H} , die B und C trennen. Es gilt zu zeigen $r = d(A, wA)$. Wir betrachten dazu die Folge von Alkoven $A, s_1 A, s_1 s_2 A, \dots, wA$ und notieren sie der Einfachheit halber

$$A_{[i]} := s_1 \dots s_i A$$

Zwei aufeinanderfolgende Alkoven $A_{[i-1]}$ und $A_{[i]}$ unserer Folge werden nach 1.6.2 nur durch die Hyperebene $H_{[i]} := s_1 \dots s_{i-1} H_i$ getrennt, die dann auch die einzige gemeinsame Wand dieser beiden Alkoven ist. Es folgt schon $r \geq d(A, wA)$. Wäre $r > d(A, wA)$, so müßte unsere Folge von Alkoven eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ zweimal kreuzen, wir hätten also $H_{[i]} = H_{[j]}$ mit $r \geq j > i \geq 1$. Daraus folgte aber $H_i = s_i \dots s_{j-1} H_j$, mithin $s_i = s_i \dots s_{j-1} s_j s_{j-1} \dots s_i$ oder $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_j$ und unsere Darstellung wäre nicht kürzestmöglich.

4. Wir haben bereits gezeigt, daß W transitiv auf \mathcal{A} operiert. Nach 3 folgt aber aus $wA = A$ schon $w = \text{id}$, also operiert W auch frei.

1. Für eine Spiegelung aus W , deren Spiegelebene nicht zu \mathcal{H} gehörte, könnte die Spiegelebene nach 1.3.5 nicht enthalten sein in der Vereinigung der Hyperebenen aus \mathcal{H} und müßte deshalb einen Alkoven aus \mathcal{A} treffen. Dann müßte unsere Spiegelung diesen Alkoven auf sich selbst abbilden. Nach 4 ist aber die Identität das einzige Element von W , das einen Alkoven festhält. Also besteht \mathcal{H} bereits aus allen Spiegelebenen zu Spiegelungen von W . \square



Wir hätten hier die Darstellung $w = stsrtsts$ aber nur sechs Hyperebenen trennen A von wA . Die Hyperebene H wird auch von unserer Folge von Alkoven zweimal gekreuzt, und das führt zur kürzeren Darstellung $w = st\hat{s}rtst\hat{s} = strtst$, die nun bereits aus der kleinstmöglichen Zahl von sechs Spiegelungen an Wänden von A besteht, und die ich durch Pünktchen angedeutet habe.

Korollar 1.6.3. Erzeugt eine Menge von affinen Spiegelungen eine affine Spiegelungsgruppe, so ist jede Spiegelung dieser Spiegelungsgruppe konjugiert zu einer Spiegelung aus besagter Menge.

Beweis. Sei S unsere Menge von Spiegelungen, W die davon erzeugte affine Spiegelungsgruppe, und $T \subset W$ die Menge aller Konjugierten zu Elementen von S . Wir müssen nur ein unter den linearen Anteilen der Elemente von W invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum wählen und 1.6.1 auf das System \mathcal{H} der Spiegelebenen zu Spiegelungen aus T anwenden, um zu sehen, daß T bereits die Menge aller Spiegelungen aus der von T erzeugten Untergruppe von W sein muß. \square

Definition 1.6.4. Seien W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $S \subset W$ die Menge aller Spiegelungen an Wänden von A . Eine kürzestmögliche Darstellung von $w \in W$ als Produkt von Elementen von S nennt man **reduzierte Darstellung** von w durch Spiegelungen aus S , und die Länge einer reduzierten Darstellung heißt die **Länge** $l(w) = l_S(w) = l_A(w)$ von w .

1.6.5. In diesen Notationen haben wir in 1.6.1 also unter anderem gezeigt, daß gilt $l_A(w) = d(A, wA)$. Weiter haben wir beim Beweis von 1.6.1 gezeigt, daß gegeben $s_1, \dots, s_r \in S$ Spiegelungen an Wänden H_i von A mit Produkt $w = s_1 \dots s_r$ und L eine Spiegelebene von W , die A und wA trennt, es notwendig ein i gibt mit $L = s_1 \dots s_{i-1} H_i$ und folglich $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Ist unsere Darstellung von w reduziert, in Formeln $r = l(w)$, so sind immer nach dem Beweis von 1.6.1 die $s_1 \dots s_{i-1} H_i$ sogar genau die r Spiegelebenen, die A und wA trennen.

Proposition* 1.6.6. Seien A, B Alkoven und L eine Spiegelebene zu einer affinen Spiegelungsgruppe. Genau dann trennt L unsere beiden Alkoven, wenn A und $s_L B$ durch weniger Spiegelebenen getrennt werden als A und B . In Formeln gilt also

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \Leftrightarrow d(A, s_L B) < d(A, B)$$

Beweis. Es reicht \Rightarrow zu zeigen, die andere Implikation folgt dann durch Anwenden der einen Implikation auf $s_L B$ statt auf B . Wir finden Spiegelungen s_1, \dots, s_r an Wänden von A mit $r = d(A, B)$ und $B = s_1 \dots s_r A$. Da L unsere beiden Alkoven trennt, gibt es nach der vorhergehenden Bemerkung 1.6.5 einen Index i mit $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Damit folgt wie gewünscht $d(A, s_L B) < r$. \square

Satz* 1.6.7 (Austauschlemma). Seien W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein Alkoven, S die Menge der Spiegelungen an Wänden von A und $l = l_A$ die zugehörige Länge. Seien weiter $s_1, \dots, s_r \in S$. Ist t eine Spiegelung aus W mit $l(ts_1 \dots s_r) < l(s_1 \dots s_r)$, so gibt es einen Index $i \in [1, r]$ mit

$$ts_1 \dots s_i \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

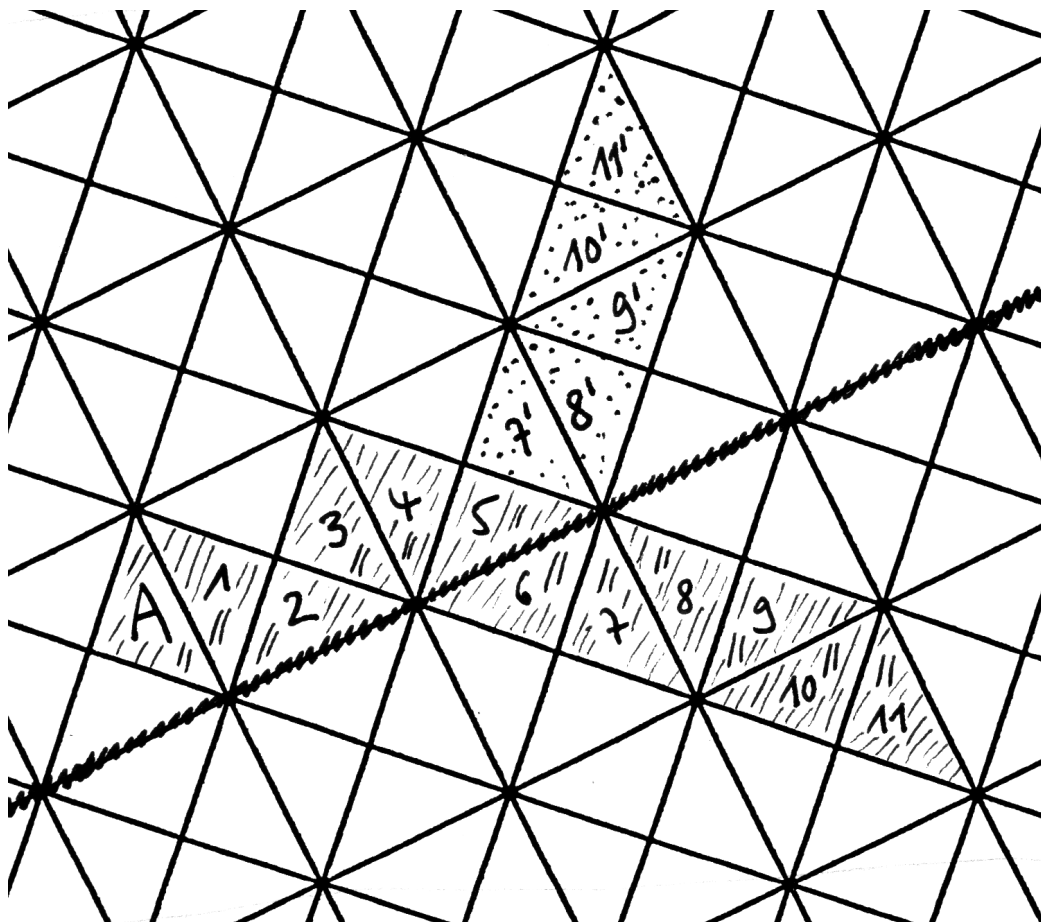


Illustration zum Austauschlemma. Die Spiegelung an der gezackelten Spiegelhyperebene stellt t dar, $s_1 \dots s_i A$ ist der Alkoven mit der Nummer i und $s_1 \dots \hat{s}_6 \dots s_i A$ der Alkoven mit der Nummer i' . Im vorliegenden Fall hätten wir

$$ts_1 \dots s_{11} = s_1 \dots \hat{s}_6 \dots s_{11}.$$

Gilt hier $r = l(s_1 \dots s_r)$, so ist dieser Index i sogar eindeutig bestimmt.

1.6.8. Die letzte Gleichung kann auch umgeschrieben werden zur Gleichung $s_1 \dots s_i \dots s_r = ts_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Wir können also in Worten eine einfache Spiegelung s_i in der Mitte austauschen gegen die Spiegelung t ganz vorne ohne das Produkt zu ändern, wenn (und im Fall einer reduzierten Darstellung genau dann, wenn) die Multiplikation mit t die Länge verkleinert.

Beweis. Sei $t = s_L$ und $B = s_1 s_2 \dots s_r A$. Aus der Annahme folgt mit 1.6.6, daß die Spiegelebene L die Alkoven A und $s_1 \dots s_r A$ trennt. Daraus folgt dann mit 1.6.5 sofort $ts_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Der Beweis der letzten Aussage bleibe dem Leser zur Übung überlassen. \square

Übungen

Übung 1.6.9. Sei W eine endliche Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $l = l_A$ die zugehörige Länge. So gibt es in W genau ein Element w_A maximaler Länge, und diese Länge ist die Zahl der Spiegelungen in W .

Übung 1.6.10. Jede nichtreduzierte Darstellung eines Elements einer affinen Spiegelungsgruppe in Bezug auf einen festen Alkoven kann durch Streichen von Faktoren zu einer reduzierten Darstellung desselben Elements gemacht werden.

Übung 1.6.11. Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{Q} -Vektorraum und $Q \subset V$ ein Gitter alias der \mathbb{Z} -Spann einer Basis und (\cdot, \cdot) ein Skalarprodukt auf V mit und $(\cdot, \cdot) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$. Man zeige, daß die orthogonalen Spiegelungen an den orthogonalen Komplementen aller Vektoren $v \in Q$ mit $(v, v) = 2$ die Spiegelungen einer endlichen Spiegelungsgruppe sind.

1.7 Fundamentalbereiche

Notation 1.7.1. Seien für diesen Abschnitts E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper, $W \subset \text{Aut } E$ eine affine Spiegelungsgruppe, \mathcal{H} die Menge ihrer Spiegelebenen und \mathcal{A} die Menge der zugehörigen Alkoven.

Definition 1.7.2. Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X und ist $Y \subset X$ eine Teilmenge, die die Bahn Gp jedes Punktes $p \in X$ in genau einem Punkt trifft, so heißt Y ein **Fundamentalbereich** oder genauer **mengentheoretischer Fundamentalbereich** für die Operation von G auf X .

Satz 1.7.3 (Alkovenabschlüsse als Fundamentalbereiche). Für die natürliche Operation einer affinen Spiegelungsgruppe auf ihrem affinen Raum ist der Abschluß eines jeden Alkoven ein Fundamentalbereich.

Beweis. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit einer Proposition.

Proposition 1.7.4 (Isotropiegruppen in affinen Spiegelungsgruppen). Sei $A \subset E$ ein fester Alkoven und $p \in \bar{A}$ ein Punkt aus dem Abschluß von A . So gilt:

1. Die Isotropiegruppe W_p von p wird erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden von A , die p enthalten. In Formeln gilt also

$$W_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$$

2. Die Isotropiegruppe W_p von p operiert frei und transitiv auf der Menge \mathcal{A}_p aller Alkoven, deren Abschluß p enthält. In Formeln liefert also $w \mapsto wA$ eine Bijektion

$$W_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_p := \{B \in \mathcal{A} \mid p \in \bar{B}\}$$

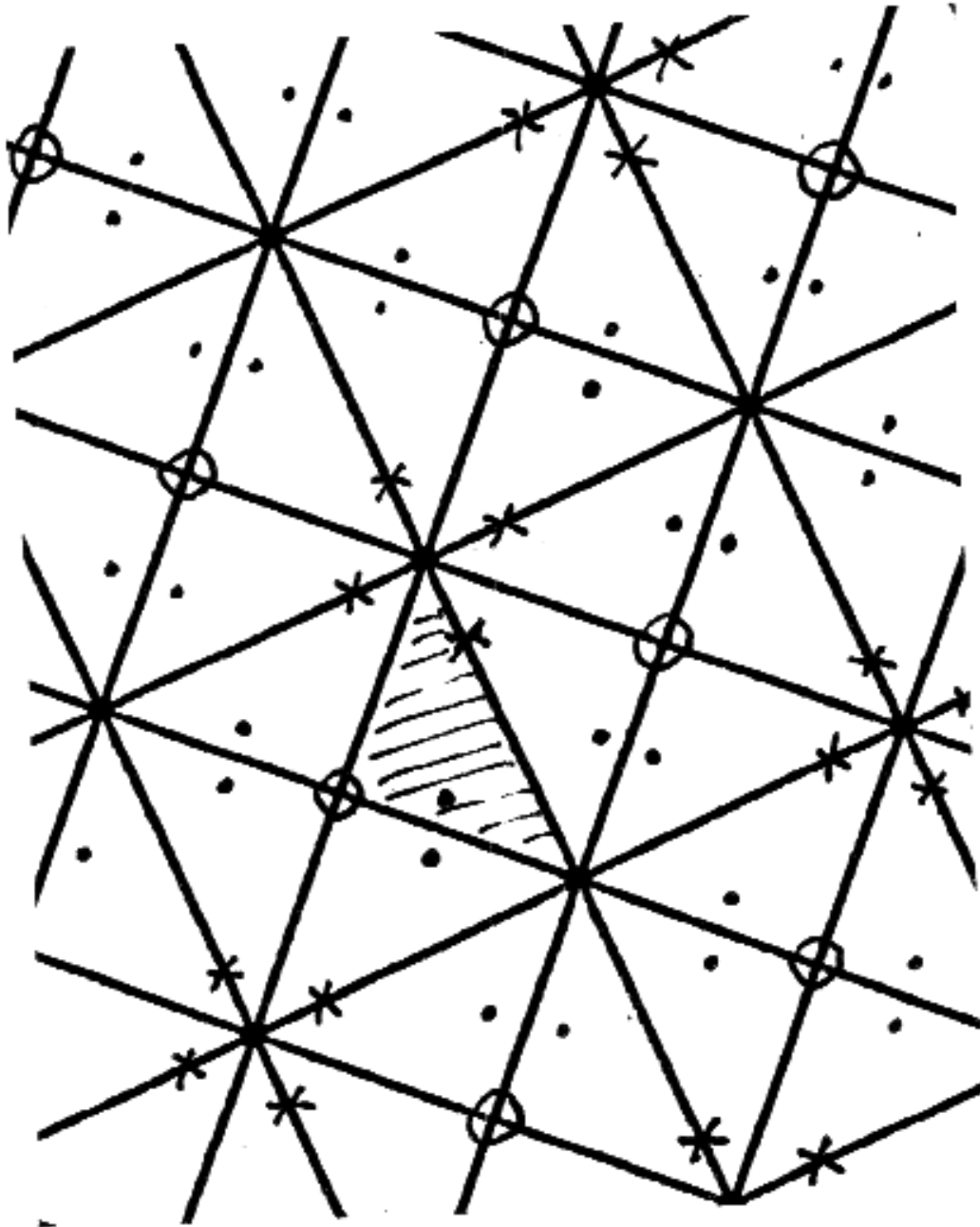
1.7.5. Insbesondere wird also bei einer affinen Spiegelungsgruppe auch die Isotropiegruppe jedes Punktes von Spiegelungen erzeugt.

Beweis der Proposition. Wir setzen $W'_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$ und zeigen zunächst, daß W'_p transitiv auf \mathcal{A}_p operiert, in Formeln $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Für $C \in \mathcal{A}_p$ müssen wir dazu $w \in W'_p$ finden derart, daß gilt $C = wA$. Wieder machen wir eine Induktion über die Zahl $d(A, C)$ der Spiegelebenen, die A und C trennen. Ist $A \neq C$, so gibt es nach Lemma 1.3.30 eine Wand H von A , die A von C trennt. Aus $p \in \bar{A} \cap \bar{C}$ folgt $p \in H$. Jetzt ist wieder $d(A, s_H C) = d(s_H A, C) = d(A, C) - 1$ und mit Induktion finden wir $w \in W'_p$ so daß gilt $wA = s_H C$, also $s_H wA = C$. Es folgt wie behauptet $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Nun ist unsere Abbildung $W_p \rightarrow \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$ injektiv nach Satz 1.6.1 und offensichtlich liegt ihr Bild in \mathcal{A}_p . Wir haben aber eben bewiesen, daß die Verknüpfung der beiden Injektionen $W'_p \hookrightarrow W_p \hookrightarrow \mathcal{A}_p$ eine Surjektion ist. Also sind diese Injektionen beide Bijektionen und die Proposition folgt. \square

Jetzt können wir den Beweis des Satzes zu Ende führen. Sei $A \subset E$ ein Alkoven und $p \in E$ ein Punkt unseres affinen Raums. Es gilt zu zeigen, daß die Bahn Wp von p den Abschluß \bar{A} von A in genau einem Punkt trifft, in Formeln

$$|Wp \cap \bar{A}| = 1$$

Jeder Punkt p liegt nach 1.3.25 im Abschluß mindestens eines Alkoven, und nach 1.6.1 trifft die Bahn von p den Abschluß \bar{A} jedes Alkoven A , in Formeln $Wp \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Wir müssen nur noch zeigen, daß für $A \in \mathcal{A}$, $p \in \bar{A}$ und $x \in W$ aus $xp \in \bar{A}$ folgt $xp = p$. Sicher folgt schon mal $xp \in x\bar{A}$, also $A, xA \in \mathcal{A}_{xp}$, und nach dem vorhergehenden Satz gilt dann $x \in W_{xp}$, also $x xp = xp$, also $xp = p$. \square



Drei Bahnen unter einer affinen Spiegelungsgruppe. Jede hat, wie Satz 1.7.3 ganz allgemein behauptet, genau einen Vertreter in dem schraffiert eingezeichneten Alkoven.

1.7.6. Gegeben eine affine euklidische Spiegelungsgruppe W auf einem affinen euklidischen Raum E wird für beliebige $v, w \in E$ der Abstand $\|v - zw\|$ minimal genau für die $z \in W$, für die v und zw im Abschluß desselben Alkoven liegen: Werden v und zw nämlich durch eine Wand getrennt, so gilt für die Spiegelung s an dieser Wand notwendig $\|v - zw\| > \|v - szw\|$.

Ergänzung 1.7.7. Hier scheint es sinnvoll zu zeigen, daß für die durch A definierte Länge l und S_p die Menge der Spiegelungen an Wänden von A durch den Punkt p und W^p die Menge aller $w \in W$ mit $l(sw) > l(w)$ für alle $s \in S_p$ die Multiplikation eine Bijektion $W_p \times W^p \xrightarrow{\sim} W$ definiert und $l(uv) = l(u) + l(v)$ gilt für $u \in W_p, v \in W^p$. Man sollte sogar zeigen, daß wir stets genau einen Doppelnebenklassenrepräsentanten kleinster Länge und bei zwei endlichen „parabolischen“ Untergruppen auch genau einen Doppelnebenklassenrepräsentanten größter Länge haben.

Übungen

Übung 1.7.8. Diejenigen Elemente einer affinen Spiegelungsgruppe, die eine vorgegebene Teilmenge des zugrundeliegenden affinen Raums punktweise festhalten, bilden selber eine Spiegelungsgruppe.

1.8 Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe

1.8.1. Gegeben zwei Vektoren eines euklidischen Vektorraums sagen wir, sie schließen einen **schwach stumpfen Winkel** bzw. einen **schwach spitzen Winkel** ein, wenn ihr Skalarprodukt nichtpositiv bzw. nichtnegativ ist.

Ergänzung 1.8.2. Die Terminologie „schwach stumpf“ und „schwach spitz“ ist nicht gebräuchlich. Ich habe sie gewählt, um nicht in Widerspruch zur Terminologie aus der Elementargeometrie zu geraten, in der man einen rechten Winkel weder spitz noch stumpf nennen würde. Wenn ich betonen will, daß das Konzept aus der Elementargeometrie gemeint ist, rede ich von **echt stumpfen** bzw. **echt spitzen Winkeln**. Das bedeutet dann in Formeln, daß die beiden fraglichen Vektoren linear unabhängig sind und daß ihr Skalarprodukt negativ bzw. positiv ist.

Lemma 1.8.3 (Winkel zwischen Wänden eines Alkoven). *Gegeben verschiedene Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe schließen auf diesen Wänden jeweils senkrecht stehende Vektoren, die in Richtung unseres Alkoven zeigen, stets schwach stumpfe Winkel ein.*

1.8.4. Anschaulich gesprochen schließen also je zwei Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besagten Alkoven „in einem schwach spitzen Winkel ein“.

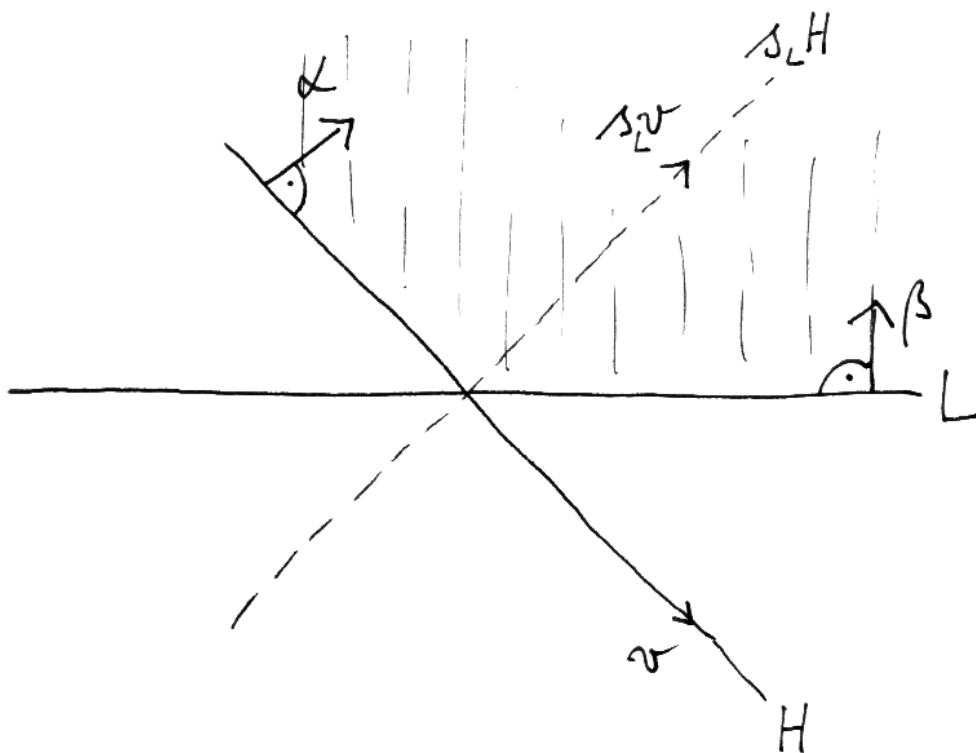


Illustration zum Beweis von Lemma 1.8.3. Schraffiert eingezeichnet ein Alkoven mit zwei ihm nicht in einem schwach spitzen Winkel einschließenden Wänden H und L . Gestrichelt eingezeichnet die Gerade $s_L H$, die zeigt, daß es sich nicht um den Alkoven eines Systems von Hyperebenen handeln kann, das aus allen Spiegelebenen einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besteht.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Spiegelungsgruppe erzeugt von den orthogonalen Spiegelungen an besagten Wänden H und L und seien α und β Vektoren, die auf diesen Wänden senkrecht stehen und in Richtung unseres Alkoven zeigen. In Formeln behauptet unser Lemma dann $(\alpha, \beta) \leq 0$. Sind unsere Wände parallel, so ist die Behauptung eh klar. Sonst können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser affiner euklidischer Raum ein euklidischer Vektorraum ist und beide Spiegelungen linear. Sicher finden wir nun $v \in H$ mit $(\beta, v) < 0$, also $(\beta, s_L v) > 0$. Aus $(\alpha, \beta) > 0$ folgte

$$(\alpha, s_L v) = (s_L \alpha, v) = \left(\alpha - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, v \right) > 0$$

und damit läge $s_L v$ gleichzeitig auf der Spiegelebene $s_L H$ und in unserem Alkoven. Das kann aber nicht sein, also gilt $(\alpha, \beta) \leq 0$. \square

1.8.5. Dieses Lemma wäre auch ein natürlicher erster Schritt zur Klassifikation derjenigen Spiegelungsgruppen, die von zwei Spiegelungen erzeugt werden.

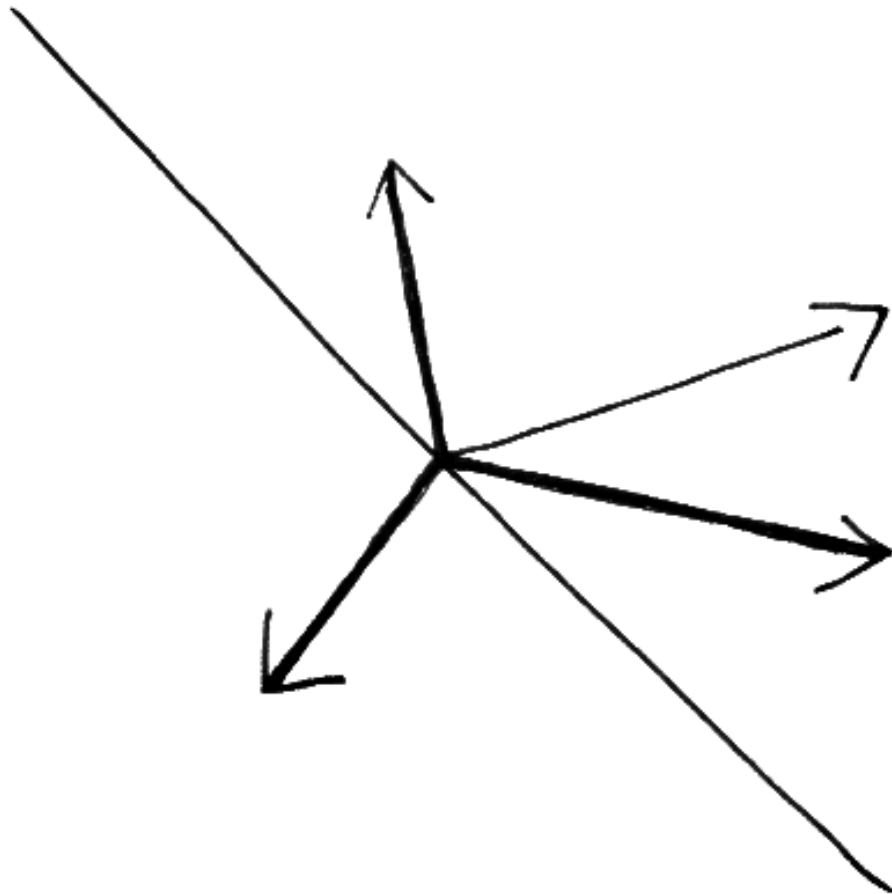
Proposition 1.8.6. *Wählen wir für jede Wand eines festen Alkoven einer endlichen linearen Spiegelungsgruppe eine lineare Gleichung, so sind diese Gleichungen linear unabhängig als Elemente des Dualraums.*

Beweis. Wir wählen zunächst einmal ein invariantes Skalarprodukt. Seien nun H_1, \dots, H_n die Wände unseres Alkoven und seien $\alpha_i \in V$ auf H_i senkrechte Vektoren, die jeweils auf derselben Seite der Hyperebene H_i liegen wie unser Alkoven. Es reicht zu zeigen, daß die α_i linear unabhängig sind. Nach 1.8.3 schließen diese Vektoren jedoch paarweise schwach stumpfe Winkel ein, in Formeln $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ falls $i \neq j$, und wählen wir $\gamma \in A$, so gilt $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i . Die lineare Unabhängigkeit der α_i folgt damit aus dem anschließenden Lemma 1.8.7. \square

Lemma 1.8.7 (Lineare Unabhängigkeit bei schwach stumpfen Winkeln). *Liegen Vektoren eines Skalarproduktraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so sind sie linear unabhängig.*

1.8.8. Schließen insbesondere $(n + 1)$ Vektoren eines n -dimensionalen euklidischen Vektorraums paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so können sie nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt liegen. Eine etwas stärkere Aussage zeigen wir in 1.10.1.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer endlichen Familie von Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ausgehen. Unsere Forderungen sagen in Formeln, daß es einen Vektor γ gibt mit $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i und daß gilt $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$



Liegen Vektoren eines euklidischen Vektorraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie nicht paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so brauchen sie keineswegs linear unabhängig zu sein. Schließen Vektoren eines euklidischen Vektorraums paarweise schwach stumpfe Winkel ein, liegen aber nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt, so brauchen sie ebensowenig linear unabhängig zu sein.

für $i \neq j$. Sei nun $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = 0$ eine verschwindende Linearkombination der α_i . Es folgt

$$\sum_{i \in I} c_i \alpha_i = \sum_{i \in J} -c_i \alpha_i$$

mit $I = \{i \mid c_i \geq 0\}$ und $J = \{i \mid c_i < 0\}$. Das Skalarprodukt der linken mit der rechten Seite der Gleichung ist nichtpositiv, da unsere Vektoren paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen. Also steht auf beiden Seiten der Gleichung der Nullvektor. Wir bilden nun unabhängig das Skalarprodukt beider Seiten mit γ und folgern, daß alle c_i verschwinden. \square

1.9 Coxetergraphen und Klassifikation

Definition 1.9.1. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper k und $W \subset \text{Aut } E$ eine affine Spiegelungsgruppe. Sei A ein Alkoven und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden von A . Wir definieren zu diesen Daten eine symmetrische $S \times S$ -Matrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die sogenannte **Coxetermatrix unserer Spiegelungsgruppe**, durch die Vorschrift, daß der Matrixeintrag in Zeile s und Spalte t die Ordnung von st sein soll, in Formeln

$$m_{s,t} = m(s, t) := \text{ord}(st)$$

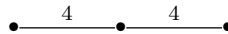
Ergänzung 1.9.2. Auf der Diagonalen unserer Matrix stehen natürlich nur Einsen und außerhalb sind alle Einträge ≥ 2 . Unsere Matrix ist unabhängig von der Wahl des Alkoven A . Etwas formaler könnten wir in $\mathcal{A} \times \mathcal{H}$ die Teilmenge \mathcal{S} aller Paare (A, H) betrachten, bei denen die Spiegelebene H eine Wand des Alkoven A ist, für S den Bahnenraum $S := \mathcal{S}/W$ nehmen, und in offensichtlicher Weise eine Matrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ erklären, die dann in der Tat von keinerlei Wahlen mehr abhängt. Gegeben eine endliche Menge S verstehen wir ganz allgemein unter einer **Coxetermatrix mit durch S indizierten Zeilen und Spalten** eine Abbildung $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $m(s, t) = m(t, s) \forall s, t \in S$ und $m(s, s) = 1 \forall s \in S$ und $m(s, t) \geq 2$ falls $s \neq t$.

1.9.3. Die Coxetermatrizen der affinen Spiegelungsgruppen haben üblicherweise nur sehr wenige von Zwei verschiedene Einträge und fast keine Einträge > 3 . Weiter sind die Einträge auf der Diagonalen eh bekannt. Besonders übersichtlich kann man die in einer Coxetermatrix enthaltene Information deshalb in der Form des sogenannten **Coxetergraphen** darstellen: Man malt einen dicken Punkt, genannt **Knoten**, für jedes Element von S , einen Strich, genannt **Kante**, zwischen je zwei Knoten $s, t \in S$ mit $m(s, t) \geq 3$, und schreibt an diese Kante noch die Zahl $m(s, t)$ im Fall $m(s, t) > 3$.

Beispiel 1.9.4. Die affine Spiegelungsgruppe, deren Alkoven ein Schachbrettmuster bilden, hat also den Coxetergraphen



und nehmen wir für jedes Schachfeld noch seine beiden Diagonalen als Spiegelhyperebenen hinzu, so hat der Coxetergraph dieser größeren Spiegelungsgruppe die Gestalt



Proposition 1.9.5 (Charakterisierung durch Coxetergraphen). *Seien V_1, V_2 reelle euklidische Vektorräume und seien $W_1 \subset GL(V_1), W_2 \subset GL(V_2)$ endliche orthogonale Spiegelungsgruppen ohne Fixpunkte außerhalb des Nullpunkts. Genau dann haben W_1 und W_2 denselben Coxetergraphen, wenn es eine lineare Isometrie $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ gibt mit $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$.*

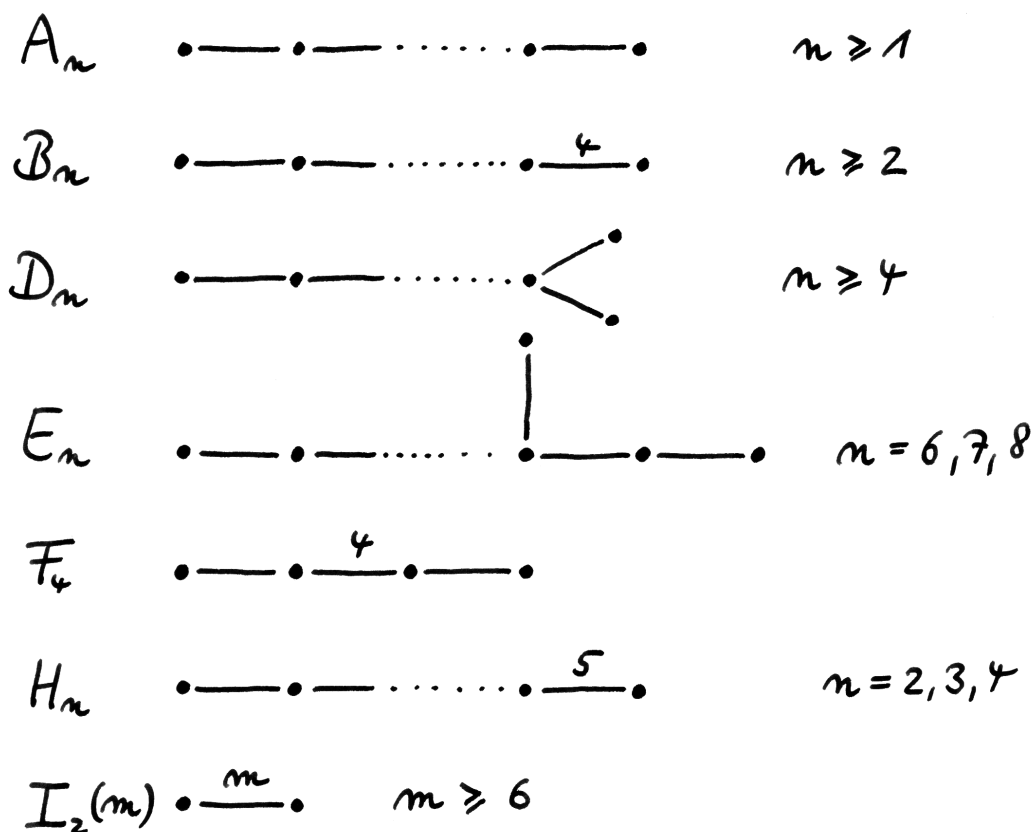
1.9.6. Noch präziser formuliert zeigen wir: Ist $A_i \subset V_i$ jeweils ein Alkoven und $S_i \subset W_i$ jeweils die Menge von Spiegelungen an den Wänden des Alkoven A_i und ist eine Bijektion $\xi : S_1 \xrightarrow{\sim} S_2$ gegeben mit $\text{ord}(st) = \text{ord}(\xi(s)\xi(t))$ für alle $s, t \in S_1$, so gibt es eine lineare Isometrie $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ mit $\varphi(A_1) = A_2$ und $\xi(s) = \varphi s \varphi^{-1}$ für alle $s \in S_1$.

Beweis. Wir wählen in $V = V_i$ jeweils einen festen Alkoven $A = A_i$ und betrachten zu jeder Wand von A den Normalenvektor, der in Richtung von A zeigt. Wir erhalten so eine Familie $(e_s)_{s \in S}$ von Einheitsvektoren in V . Offensichtlich schließen e_s und e_t gerade den Winkel $\pi - \pi/\text{ord}(st)$ ein, folglich haben wir

$$(e_s, e_t) = -\cos(\pi/\text{ord}(st))$$

Nach 1.8.6 sind unsere e_s linear unabhängig, und da die Spiegelungen an ihren orthogonalen Komplementen nach 1.6.1 die fraglichen Gruppen erzeugen und diese fixpunktfrei operieren, besteht der Schnitt der fraglichen orthogonalen Komplemente nur aus dem Nullvektor und unsere e_s bilden sogar eine Basis. Jede Identifikation unserer beiden Coxetergraphen zusammen mit der Wahl eines Alkoven in beiden Räumen liefert folglich eine Isometrie φ zwischen unseren Vektorräumen, unter der die Wände des in V_1 gewählten Alkoven in die Wände des in V_2 gewählten Alkoven übergehen. Da die orthogonalen Spiegelungen an diesen Wänden aber nach 1.6.1 bereits die fraglichen Gruppen erzeugen, folgt $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$. \square

Satz 1.9.7 (Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen). *Genau dann gehört ein vorgegebener Coxetergraph zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn alle seine Zusammenhangskomponenten in der nebenstehenden Liste zu finden sind.*



Dieses Bild zeigt alle zusammenhängenden Coxetergraphen, die zu endlichen reellen Spiegelungsgruppen gehören, als da heißt, für die die Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist. Hier meint n jeweils die Zahl der Knoten, und die unteren Schranken an n dienen nur dazu, Verdopplungen zu vermeiden.

So wäre etwa $I_2(3) = A_2$, $I_2(4) = B_2$, und $I_2(5) = H_2$. Die Auslassungen im Alphabet rühren daher, daß die in ?? gegebene Klassifikation der Wurzelsysteme alias der einfachen komplexen Liealgebren zuerst gefunden wurde und manche dieser Wurzelsysteme dieselbe endliche Spiegelungsgruppe als Weylgruppe haben. Es ist eine nette Übung, sich zu überlegen, daß H_3 realisiert werden kann als die Gruppe aller 120 nicht notwendig orientierungserhaltenden Isometrien des \mathbb{R}^3 , die einen Ikosaeder in sich überführen.

Ergänzung 1.9.8 (Bezug zur Klassifikation kompakter Liegruppen). Weylgruppen kompakter Liegruppen operieren nach [ML] 5.6.4 als endliche reelle Spiegelungsgruppen auf der Liealgebra eines maximalen Torus. Der zugehörige Coxetergraph entsteht nach [ML] ?? aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten durch Kanten der Wertigkeit 4 und Dreifachkanten durch Kanten der Wertigkeit 6 ersetzt. Unser Satz 1.9.7 zeigt somit unter anderem auch, daß sämtliche Zusammenhangskomponenten des Dynkindiagramms einer kompakten Liegruppe bereits unter den auf Seite ?? aufgelisteten Diagrammen zu finden sein müssen. Daß sich allerdings alle diese Diagramme auch tatsächlich als Dynkindiagramme kompakter Liegruppen realisieren lassen, haben wir damit noch nicht gezeigt, und inwieweit eine kompakte Liegruppe durch ihr Dynkindiagramm charakterisiert wird, werden wir noch ausführlich diskutieren müssen.

Beweis. Das folgt sofort aus den beiden anschließenden Propositionen, die wir in diesem und dem darauffolgenden Abschnitt beweisen. \square

Proposition 1.9.9 (Coxetermatrizen endlicher Spiegelungsgruppen). *Genau dann gehört eine Coxetermatrix $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn ihre Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist. Für den Fall $m_{s,t} = \infty$ vereinbaren wir dabei die Interpretation $\pi/\infty = 0$.*

1.9.10. Wir verwenden im folgenden eine abkürzende Terminologie und nennen einen Coxetergraphen **positiv definit**, wenn er endlich ist und wenn seine Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist. Nach der vorhergehenden Proposition 1.9.9 sind das genau die Coxetergraphen zu endlichen Spiegelungsgruppen.

Proposition 1.9.11 (Positiv definite Coxetergraphen). *Die zusammenhängenden Coxetergraphen, deren Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist, sind genau die Graphen der Liste auf Seite 40.*

1.9.12. Diese Aussage wird später als Proposition 1.11.1 bewiesen.

Beweis von 1.9.9. Wir zeigen zunächst, daß der Coxetergraph einer endlichen Spiegelungsgruppe stets positiv definit ist. Wir wählen dazu einen Alkoven A und ein invariantes Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und betrachten zu jeder Wand von A den Normalenvektor, der in Richtung von A zeigt. Wir erhalten so eine Familie $(e_s)_{s \in S}$ von Einheitsvektoren. Offensichtlich schließen e_s und e_t gerade den Winkel $\pi - \pi/m_{s,t}$ ein, folglich haben wir

$$(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$$

Mithin kann ein Coxetergraph nur dann zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe gehören, wenn seine Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit

ist. Wir zeigen nun umgekehrt, daß jeder Coxetergraph mit positiv definiter Cosinusmatrix auch in der Tat zu einer endlichen Spiegelungsgruppe gehört. Über unserer Menge S von Knoten bilden wir dazu den freien Vektorraum $E := \mathbb{R}S$ mit seiner kanonischen Basis $(e_s)_{s \in S}$ und erklären darauf eine symmetrische Bilinearform $(\ , \)$ durch die Vorschrift $(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$. Nach Annahme sie positiv definit alias ein Skalarprodukt. Nun betrachten wir die Untergruppe $W \subset GL(E)$, die erzeugt wird von den orthogonalen Spiegelungen an den auf unseren Basisvektoren senkrechten Hyperebenen $H_s := e_s^\perp$. Wir bezeichnen diese Spiegelungen kurzerhand mit demselben Buchstaben s wie den entsprechenden Knoten unseres Coxetergraphen und erklären die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt solcher Spiegelungen s . Dann gilt sicher $\det w = (-1)^{l(w)}$ und folglich $l(w) \neq l(ws)$ für jede Spiegelung s . Weiter setzen wir $H_s^+ := \{p \in E \mid (p, e_s) > 0\}$ und $A^+ := \bigcap_{s \in S} H_s^+$ und behaupten

$$l(ws) > l(w) \Leftrightarrow wH_s^+ \supset A^+$$

Kennen wir die Implikation \Rightarrow , so erhalten wir automatisch $l(ws) < l(w) \Rightarrow wH_s^+ \cap A^+ = \emptyset$ und damit die Äquivalenz. Die Implikation \Leftarrow zeigen wir durch Induktion über $l(w)$. Der Fall $l(w) = 0$ ist offensichtlich. Gilt $l(w) > 0$, so finden wir natürlich $t \in S$ mit $l(wt) < l(w)$ und haben notwendig $t \neq s$. Indem wir so lange s oder t von rechts an w dranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung $w = vu$ mit $u \in \langle s, t \rangle$, $l(vs) > l(v)$, $l(vt) > l(v)$ und $l(w) = l(v) + l(u)$. Natürlich gilt dann auch $l(us) > l(u)$. Falls nun gilt $u \neq w$, so können wir die Induktionsannahme auf u anwenden und erhalten $uH_s^+ \supset A^+$. Wegen $H_s^+ \cap H_t^+ = (H_s \cap H_t) + A^+$ folgt

$$uH_s^+ \supset H_s^+ \cap H_t^+$$

Da in jedem Falle gilt $u \neq 1$, können wir dann weiter die Induktionsannahme auf v anwenden und erhalten $vH_s^+ \supset A^+$ und $vH_t^+ \supset A^+$. Zusammen folgt so in der Tat

$$wH_s^+ = vuH_s^+ \supset (vH_s^+ \cap vH_t^+) \supset A^+$$

Es bleibt nur noch, den Fall $u = w$ zu behandeln, also den Fall von Diedergruppen. Der aber kann leicht durch Inspektion geregelt werden. Damit ist unsere Behauptung $l(ws) > l(w) \Leftrightarrow wH_s^+ \supset A^+$ gezeigt und wir folgern die Proposition. Die Ebenen wH_s für $w \in W$ und $s \in S$ bilden ein W -stabiles System von Hyperebenen \mathcal{H} in E , und unsere Behauptung zeigt insbesondere, daß keine dieser Hyperebenen unser A^+ trifft. Insbesondere A^+ eine maximale konvexe Teilmenge im Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen aus \mathcal{H} . Je zwei verschiedene derartige maximale konvexe Teilmengen sind disjunkt nach 1.3.38 und mit A^+

ist auch wA^+ solch eine maximale konvexe Teilmenge für alle $w \in W$. Schließlich folgt aus $wA^+ = A^+$ mit unserer Behauptung sofort $l(ws) > l(w)$ für alle $s \in S$ alias $w = \text{id}$. Folglich sind die wA^+ mit $w \in W$ paarweise disjunkt. Nun können wir aber in unserem endlichdimensionalen reellen euklidischen Vektorraum E jeder offenen Teilmenge $U \subseteq E$ ein Volumen $\text{vol} U \in [0, \infty]$ zuordnen, und jede nichtleere offene Teilmenge hat positives Volumen. Ist $K \subset E$ die offene Einheitskugel, so ist sicher $K \cap A^+$ offen und nicht leer. Insbesondere ist $\text{vol}(K)/\text{vol}(K \cap A^+)$ eine obere Schranke für die Kardinalität von W und wir folgern $|W| < \infty$. Damit ist wiederum \mathcal{H} endlich und wir folgern mit 1.6.1, daß A^+ ein Alkoven ist für die endliche Spiegelungsgruppe $W \subset \text{GL}(E)$. Aus den Definitionen folgt dann schließlich, daß der Coxetergraph von W genau der Coxetergraph ist, von dem wir ausgegangen waren. \square

Ergänzung 1.9.13 (Allgemeinere angeordnete Grundkörper). Im vorhergehenden Beweis könnten wir auch über einem beliebigen angeordneten Körper arbeiten, solange wir darüber einen euklidischen Vektorraum der Dimension $|S|$ und ein System von Hyperebenen $(H_s)_{s \in S}$ mit ausgezeichneten Halbräumen H_s^+ finden können derart, daß für $s \neq t$ die orthogonalen Spiegelungen an H_s und H_t jeweils eine Diedergruppe der Ordnung $2m_{s,t}$ erzeugen, für die $H_s^+ \cap H_t^+$ ein Alkoven ist. Ganz am Schluß des Beweises können wir dann natürlich nicht mehr mit dem Volumen argumentieren, aber der Einsatz von Lebesguemaß und Transformationsformel ist an dieser Stelle eh ein Stilbruch und man kann auch einfacher mit der Erkenntnis argumentieren, daß in einem euklidischen Vektorraum über einem angeordneten Körper in einen Ball mit ganzzahligem Radius höchstens endlich viele Bälle vom Radius Eins in paarweise disjunkter Weise hineingepackt werden können.

Ergänzung 1.9.14 (Existenz der Ikosaedergruppe). Betrachten wir für die dreielementige Menge $S = \{r, s, t\}$ die Coxetermatrix mit $m_{r,s} = 3$, $m_{s,t} = 5$ und $m_{r,t} = 2$, so erhalten wir nach 1.9.9 eine endliche orthogonale Spiegelungsgruppe im dreidimensionalen Raum. Die Untergruppe der darin enthaltenen Drehungen enthält Elemente der Ordnungen 5 und 3 und wir folgern damit auf andere Weise die in [LA2] 5.4.3 besprochene Existenz einer endlichen Drehgruppe mit Elementen dieser Ordnungen.

Übungen

Ergänzende Übung 1.9.15 (Die Symmetrien des Ikosaeders). Wir erhalten eine Surjektion der nichtorientierten Ikosaedergruppe alias Coxetergruppe vom Typ H_3 mit Erzeugern r, s, t und Relationen $r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^2 = (st)^3 = (rt)^5 = 1$ auf die alternierende Gruppe $A_5 \subset \mathcal{S}_5$ mittels der Vorschrift $r \mapsto$

(13)(24), $s \mapsto (12)(34)$ und $t \mapsto (12)(45)$. Diese Surjektion induziert einen Isomorphismus $I \xrightarrow{\sim} A_5$ zwischen der Ikosaedergruppe und der fünften alternierenden Gruppe.

1.10 Ergänzungen zu Skalarprodukten

Satz 1.10.1 (über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln). *Sei in einem Skalarproduktraum eine Familie von Vektoren gegeben, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen. Es gebe keine Zerlegung unserer Familie in zwei echte Teilfamilien, die zwei zueinander orthogonale Teilräume erzeugen. So gilt:*

1. *Jede echte Teilfamilie unserer Familie von Vektoren ist linear unabhängig;*
2. *Bei jeder nichttrivialen linearen Relation unserer Vektoren sind die Koeffizienten entweder alle positiv oder alle negativ.*

1.10.2. Das verallgemeinert Lemma 1.8.7 über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln. Dort brauchten wir die Voraussetzung, daß unsere Vektoren alle in demselben offenen Halbraum zu einer linearen Hyperebene liegen.

Beweis. Jede lineare Relation $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ unserer Vektoren können wir umschreiben zu einer Identität der Gestalt

$$\sum_{a_i > 0} a_i v_i = \sum_{a_j < 0} (-a_j) v_j$$

Da das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst nichtpositiv ist, muß es Null sein. Auf beiden Seiten unserer Gleichung steht also der Nullvektor. Nun setzen wir $I_{>0} = \{i \in I \mid a_i > 0\}$. Gibt es $j \in I \setminus I_{>0}$ mit $\langle v_j, v_i \rangle \neq 0$ für ein $i \in I_{>0}$, so folgt aus

$$0 = \left\langle v_j, \sum_{a_i > 0} a_i v_i \right\rangle = \sum_{a_i > 0} a_i \langle v_j, v_i \rangle$$

sofort ein Widerspruch. Also gilt entweder $I_{>0} = I$ oder $I_{>0} = \emptyset$. Bei jeder nichttrivialen Relation $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ sind mithin entweder alle a_i positiv oder alle a_i nichtpositiv und dann folgt durch Multiplikation mit (-1) , daß sie sogar alle negativ sein müssen. Insbesondere ist dabei kein Koeffizient Null, und das zeigt die lineare Unabhängigkeit jeder echten Teilfamilie. \square

Definition 1.10.3. Eine Matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt **unzerlegbar**, wenn gilt $n \geq 1$ und es keine Zerlegung $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$ gibt mit $I \neq \emptyset \neq J$ und $a_{ij} = a_{ji} = 0 \forall i \in I, j \in J$.

Proposition 1.10.4 (Definitheitskriterium für Bilinearformen). Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und seien Erzeuger v_1, \dots, v_n von V gegeben mit $v_1 + \dots + v_n = 0$. So gilt:

1. Hat die Matrix der $\langle v_i, v_j \rangle$ nichtpositive Einträge außerhalb der Diagonalen, in Formeln $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle \leq 0$, so ist unsere Bilinearform positiv semidefinit;
2. Ist die Matrix der $\langle v_i, v_j \rangle$ zusätzlich unzerlegbar, so ist unsere Bilinearform positiv definit.

Beweis. Wir finden unter der Annahme der Symmetrie und der Annahme, daß unsere Erzeuger sich zu Null summieren, ohne weitere Schwierigkeiten

$$\begin{aligned} \langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_j v_j \rangle &= \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle + \sum_i \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle \\ &= \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j - \alpha_i^2) \langle v_i, v_j \rangle \\ &= - \sum_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

Die Proposition folgt unmittelbar. □

Korollar* 1.10.5 (Vektoren mit vorgegebenen Skalarprodukten). Gegeben eine reelle symmetrische *unzerlegbare* $(n \times n)$ -Matrix (a_{ij}) mit nichtpositiven Einträgen außerhalb der Diagonalen gibt es stets einen Skalarproduktraum V und ein Erzeugendensystem $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $v_1 + \dots + v_n = 0$ und mit den Skalarprodukten

$$\langle v_i, v_j \rangle = a_{ij} \text{ für } i \neq j.$$

Ergänzung 1.10.6. Die Aussage und ihr Beweis gelten ebenso über jedem angeordneten Grundkörper. Ist $v'_1, \dots, v'_n \in V'$ eine zweite Lösung, so gibt es im übrigen genau einen orthogonalen Isomorphismus $B : V \xrightarrow{\sim} V'$ mit $Bv_i = v'_i$. Das folgt, da nach dem Satz über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln 1.10.1 in unseren beiden Familien jede echte Teilfamilie linear unabhängig ist.

Beweis. Wir dürfen, indem wir die Diagonaleinträge anpassen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in unserer Matrix alle Spaltensummen Null sind. Dann liefert unsere Matrix eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n und, da der Vektor $(1, \dots, 1)$ in deren Radikal liegt, auch eine symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{R}^n / \mathbb{R}(1, \dots, 1)$. Bezeichnet $v_i \in V$ das Bild des i -ten Vektors der Standardbasis, so zeigt das Definitheitskriterium 1.10.4, daß diese symmetrische Bilinearform auf V ein Skalarprodukt sein muß. □

Korollar 1.10.7 (Definitheit durch Ausartung). Sei A eine reelle symmetrische unzerlegbare Matrix mit nichtpositiven Einträgen außerhalb der Diagonalen. So sind gleichbedeutend:

1. Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $x \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ mit $Ax = 0$;
2. Der Kern von A wird von einem Vektor $x \in (\mathbb{R}_{> 0})^n$ aufgespannt;
3. Die Matrix A ist positiv semidefinit aber ausgeartet.

Für Matrizen A mit diesen äquivalenten Eigenschaften ist weiter jede Untermatrix, die durch das Streichen je einer Zeile und Spalte zum selben Index entsteht, positiv definit. Dasselbe gilt über jedem angeordneten Grundkörper.

Beweis. (3 \Rightarrow 2) Wir fassen A auf als eine Bilinearform auf dem \mathbb{R}^n , bilden ihr Radikal $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ und betrachten den Quotientenraum $V := \mathbb{R}^n/K$ mit dem darauf induzierten Skalarprodukt. Die Bilder $\bar{e}_i \in V$ der Vektoren der Standardbasis schließen nach Annahme paarweise schwach stumpfe Winkel ein und wir folgern aus dem Satz über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln 1.10.1, daß je $(n - 1)$ dieser Vektoren linear unabhängig sein müssen. Es folgt $\dim K = 1$, und ist $\sum x_i e_i$ ein Erzeuger von K , so folgt aus demselben Satz, daß die Koeffizienten x_i entweder alle positiv oder alle negativ sein müssen.

(2 \Rightarrow 3) In $V := \mathbb{R}^n/\mathbb{R}x$ betrachten wir die Vektoren $v_i := x_i e_i + \mathbb{R}x$. Die symmetrische Bilinearform $\langle v, w \rangle = v^T Aw$ auf \mathbb{R}^n induziert dann eine symmetrische Bilinearform auf V , die nach dem Definitheitskriterium 1.10.4 positiv definit sein muß.

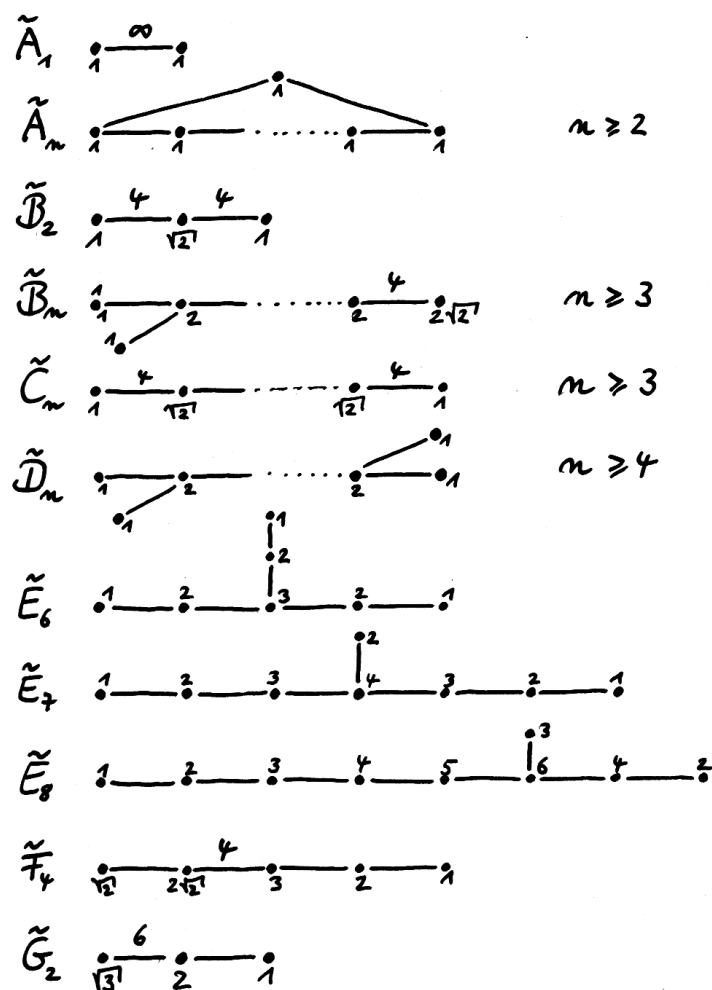
(1 \Rightarrow 2) Haben wir $a_{ij} \neq 0$, so folgt mit $\sum a_{i\nu} x_\nu = 0$ und allen $x_\nu \geq 0$ bereits ($x_j \neq 0 \Rightarrow x_i \neq 0$). In der Tat kann im einzig relevanten Fall $i \neq j$ ein negativer Beitrag $a_{ij}x_j$ zur Summe nur durch einen positiven Beitrag $a_{ii}x_i$ ausgeglichen werden.

(2 \Rightarrow 1) Das ist klar.

Die letzte Aussage schließlich folgt wieder aus Satz 1.10.1 über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln: Lassen wir aus der Familie unserer $\bar{e}_i \in V$ einen Vektor weg, wird sie eine Basis, und die entsprechende Streichmatrix ist die Matrix unseres Skalarprodukts auf V , ausgedrückt in dieser Basis. \square

1.11 Positiv definite Coxetergraphen

Proposition 1.11.1 (Positiv definite Coxetergraphen). Die zusammenhängenden Coxetergraphen, deren Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist, sind genau die Graphen der Liste auf Seite 40.



Eine Liste zusammenhängender Coxetergraphen mit jeweils einem Vektor im Kern der Cosinusmatrix des entsprechenden Coxetergraphen, dargestellt durch die Zahlen an den Punkten. Das zu prüfen, ist jeweils eine leichte Rechnung: Für den Graphen \tilde{E}_6 etwa läuft es hinaus auf die Identität

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3^2 - 3 \cdot (1 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 3) = 0$$

Nach unserem Korollar 1.10.7 über Definitheit durch Ausartung erhalten wir stets positiv definite Diagramme, wenn wir in einem Diagramm dieser Liste einen Knoten mit allen zu ihm führenden Kanten streichen.

In ?? wird erklärt, warum das auch genau die Liste aller zusammenhängenden Coxetergraphen zu essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen im Sinne von 1.12.4 ist. Die Notation kommt daher, daß der Graph der „dualen affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ Z “ stets \tilde{Z} notiert wird. Der Index ist insbesondere jeweils um eins kleiner als die Knotenzahl.

Beweis. Zunächst gilt es zu zeigen, daß alle Coxetergraphen der Liste auf Seite 40 in der Tat positiv definit sind. In den meisten Fällen folgt das aus unseren Erkenntnissen zur Definitheit durch Ausartung 1.10.7 und der Liste auf Seite 47: Diese Liste von Coxetergraphen mit Zahlen an ihren Punkten besteht nämlich aus zusammenhängenden Coxetergraphen nebst einem von Null verschiedenen Element des Kerns der zugehörigen Cosinusmatrix, dargestellt durch besagte Zahlen an den Punkten, wie der Leser leicht nachprüfen kann. Wie man auf diese Zahlen kommt, wird in 2.5.12 erklärt, man kann sie aber auch einfach vom Himmel fallen lassen. Da unsere Cosinusmatrizen stets nichtpositive Einträge außerhalb der Diagonalen haben und im Fall eines zusammenhängenden Coxetergraphen auch unzerlegbar sind, muß nach unseren Erkenntnissen zur Definitheit durch Ausartung 1.10.7 jeder echte Teilgraph eine positiv definite Cosinusmatrix haben. Das erledigt alle Fälle mit Ausnahme der Fälle H_n und $I_2(m)$. Dort hilft das Hurwitz-Kriterium [LA2] 2.3.25 und Induktion: So sehen wir, daß wir in diesen Fällen nur zu zeigen brauchen, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen positive Determinante haben, was wieder leicht nachzurechnen ist. Also sind in der Tat alle Coxetergraphen der Liste auf Seite 40 positiv definit. Anschließend gilt es zu zeigen, daß es keine anderen positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen gibt. Für die Coxetergraphen auf Seite 47 wissen wir bereits nach dem vorhergehenden, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen Determinante Null haben. Für die Coxetergraphen auf Seite 49 kann der Leser leicht prüfen, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen negative Determinante haben. Nun unterbrechen wir den Beweis durch zwei Lemmata.

Lemma 1.11.2. *Lassen wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen einen Knoten mit allen dahin führenden Kanten weg, so bleibt er positiv definit.*

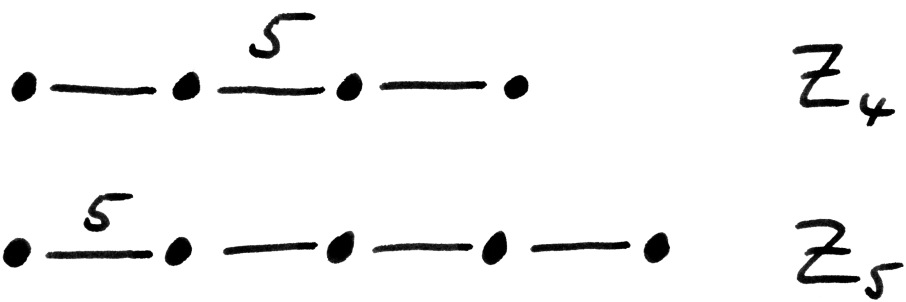
Beweis. Das ist klar, da die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Teilraum stets auch ein Skalarprodukt ist. \square

Lemma 1.11.3. *Verringern wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen den Koeffizienten einer Kante, so bleibt er positiv definit.*

Beweis. Die Cosinusmatrix A der $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t}$ hat Einsen auf der Diagonale, aber sonst nur Einträge ≤ 0 . Verringern wir den Koeffizienten einer Kante, so erhalten wir eine Matrix A' mit Einträgen $a_{ii} = a'_{ii} = 1$ und $a_{ij} \leq a'_{ij} \leq 0$ falls $i \neq j$. Wäre sie nicht positiv definit, so fänden wir einen Vektor $x \neq 0$ mit $0 \geq x^\top A' x$. Ausgeschrieben führt das zu $0 \geq \sum a'_{ij} x_i x_j$. Ersetzen wir die Einträge von x durch ihre Beträge, so gilt das erst recht und wir folgern

$$0 \geq \sum a'_{ij} |x_i| |x_j| \geq \sum a_{ij} |x_i| |x_j|$$

im Widerspruch zu unserer Annahme, A sei positiv definit. \square



Zwei indefinite Graphen, die in der Diskussion auch eine Rolle spielen.

Wir erhalten sofort, daß ein positiv definitiver Coxetergraph keinen Zykel enthalten darf, weil wir ja sonst von ihm aus durch das Weglassen von Knoten und Verringern von Koeffizienten zu einem Graph der Gestalt \tilde{A}_n mit $n \geq 2$ gelangen könnten, der nun einmal nicht positiv definit ist. Weiter verbieten \tilde{C}_n bzw. \tilde{B}_2 den Fall von zwei oder mehr Kanten „höherer Wertigkeit“, womit hier und im Folgenden eine Wertigkeit ≥ 4 gemeint sei. Wir gehen nun erst einmal die Möglichkeiten für zusammenhängende positiv definite Coxetergraphen ohne Verzweigungspunkt durch. Im Fall von einem Knoten ist eh nur A_1 möglich. Im Fall von zwei Knoten verbietet \tilde{A}_1 den Koeffizienten ∞ und alle anderen Fälle sind bereits in unserer Liste positiv definitiver Graphen zu finden. Weiter sagt uns \tilde{F}_4 , daß bei fünf oder mehr Knoten eine Kante höherer Wertigkeit nur am Ende vorkommen kann. Wegen Z_5 kommen deshalb als unverzweigte zusammenhängende Graphen mit fünf oder mehr Knoten nur A_n und B_n in Betracht. Im Fall von drei oder vier Knoten kommen bei einer höheren Wertigkeit einer Randkante wegen \tilde{G}_2 zusätzlich nur H_3 und H_4 in Betracht, und bei einer höheren Wertigkeit einer Mittelkante wegen Z_4 nur F_4 . Damit ist gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen keine unverzweigten Graphen vergessen haben. Was die verzweigten Graphen angeht, zeigt \tilde{D}_n mit $n \geq 5$, daß ein positiv definitiver Coxetergraph höchstens einen Verzweigungspunkt haben kann. Dann zeigt \tilde{D}_4 , daß er sich daselbst nicht in mehr als drei Äste verzweigen kann. Dann zeigt \tilde{B}_n , daß darin überhaupt keine Kante höherer Wertigkeit vorkommen kann. Dann zeigt \tilde{E}_6 , daß notwendig einer der drei Äste nur aus einer Kante besteht, und \tilde{E}_7 , daß ein zweiter der drei Äste aus höchstens zwei Kanten besteht, und \tilde{E}_8 , daß im Fall eines Astes mit einer und eines Astes mit zwei Kanten der dritte Ast höchstens aus vier Kanten bestehen darf. Damit kommen im verzweigten Fall in der Tat nur D_n und E_6, E_7, E_8 in Frage, und wir haben gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen auch keine verzweigten Graphen vergessen haben. \square

1.11.4. Ich finde an diesem Beweis äußerst bemerkenswert, in welchem Maße er durch die Verwendung unmathematischer Sprache an Klarheit gewinnt, ja recht eigentlich erst verständlich wird. Stellen Sie sich bloß einmal vor, die Coxetergraphen wären noch nicht erfunden und Sie sollten denselben Beweis in der äquivalenten und a priori deutlich präziseren Sprache der Coxetermatrizen führen, ja noch schlimmer, verstehen!

Ergänzung 1.11.5. Unter einer **komplexen Spiegelung** versteht man einen Automorphismus eines komplexen Vektorraums, dessen Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Eine **komplexe Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe eines komplexen Vektorraums, die von komplexen Spiegelungen erzeugt wird. Typische Beispiele sind die Gruppen $G(a, b, n) \subset GL(n; \mathbb{C})$ für $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $b|a$ aller Matrizen mit genau einem von Null ver-

schiedenen Eintrag in jeder Zeile und Spalte und der Eigenschaft, daß alle Einträge a -te Einheitswurzeln sind und ihr Produkt eine b -te Einheitswurzel. In allen diesen Beispielen mit den einzigen Ausnahmen $G(1, 1, n)$ für $n \geq 2$ ist \mathbb{C}^n eine irreduzible Darstellung von $G(a, b, n)$, und in besagten Ausnahmefällen ist $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ eine irreduzible treue Unterdarstellung von $G(1, 1, n) \cong \mathcal{S}_n$. Bis auf Isomorphismus und die 34 exceptionellen komplexen Spiegelungsgruppen G_4, \dots, G_{37} erhalten wir so alle komplexen Spiegelungsgruppen mit irreduzibler definierender Darstellung.

Ergänzung 1.11.6. Natürlich ist es terminologisch unglücklich, daß nun der Begriff einer komplexen Spiegelung auf zwei Arten verstanden werden kann: Einerseits im Sinne von 1.11.5, und andererseits im Sinne von 1.2.2 für den Spezialfall des Grundkörpers \mathbb{C} . Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

1.12 Struktur affiner Spiegelungsgruppen*

Lemma 1.12.1 (Mengen von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln). *In einem endlichdimensionalen Skalarproduktraum ist eine Menge von Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen, stets endlich.*

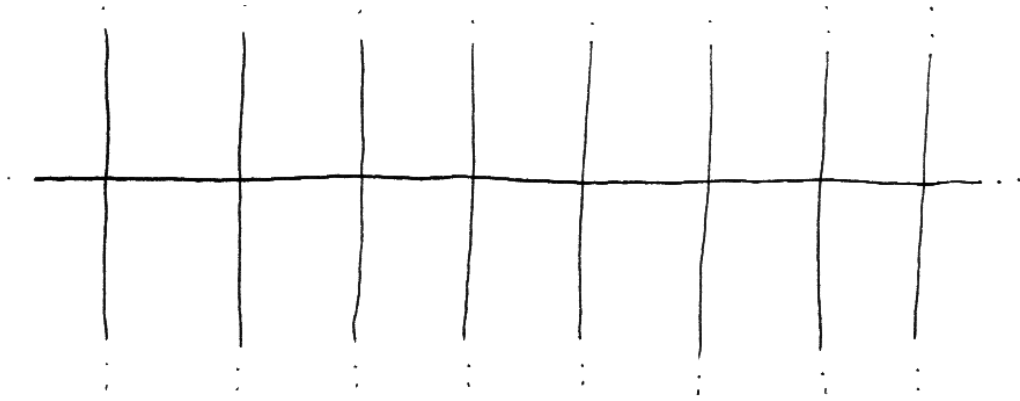
Beweis. Induktion über die Dimension. Ist unser Raum n -dimensional und v ein von Null verschiedener Vektor unserer Teilmenge, so schließen nach 1.8.7 höchstens n unserer Vektoren einen echt stumpfen Winkel mit v ein. Nach der Induktionsvoraussetzung stehen weiter höchstens endlich viele Vektoren unserer Teilmenge auf v senkrecht. \square

Ergänzung 1.12.2. Aus 1.10.1 folgt genauer, daß in einem n -dimensionalen euklidischen Raum eine Menge von Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen, höchstens aus $2n + 1$ Vektoren bestehen kann. Diese Schranke wird auch wirklich erreicht, zum Beispiel wenn man die Vektoren der Standardbasis sowie ihre Negativen betrachtet und dann noch den Nullvektor hinzunimmt.

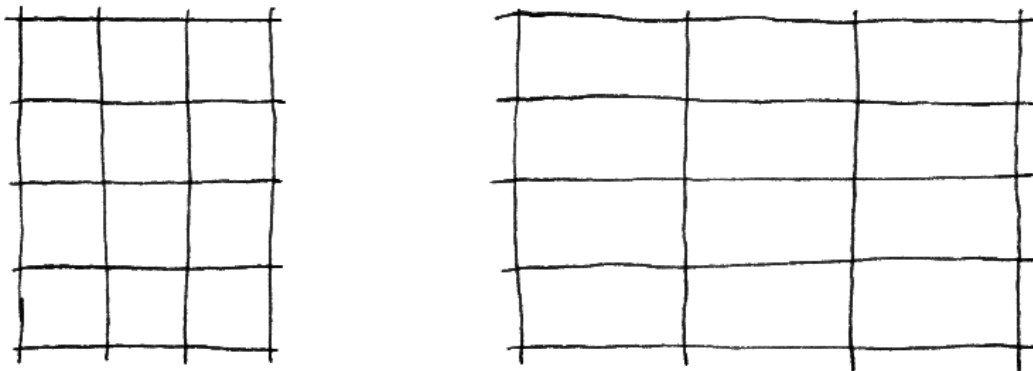
Lemma 1.12.3. *Jeder Alkoven einer affinen Spiegelungsgruppe hat nur endlich viele Wände.*

Beweis. Zunächst einmal finden wir nach 1.2.6 ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Gegeben ein Alkoven wählen wir dann zu jeder seiner Wände einen darauf senkrechten Richtungsvektor, der in Richtung des Alkovens zeigt. Nach 1.8.3 schließen diese Vektoren paarweise schwach stumpfe Winkel ein, und nach 1.12.1 bilden sie folglich eine endliche Menge. \square

Definition 1.12.4. Eine affine Spiegelungsgruppe heißt **essentiell**, wenn ihre Translationen den Raum aller Richtungsvektoren aufspannen.



Die Spiegelebenen einer nicht essentiellen affinen Spiegelungsgruppe



Die Spiegelebenen von zwei isomorphen affinen Spiegelungsgruppen

Definition 1.12.5. Zwei affine Spiegelungsgruppen (W, E) und (W', E') heißen **isomorph**, wenn es einen affinen Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, unter dem sich W und W' entsprechen.

1.12.6. Gegeben affine Spiegelungsgruppen (W_1, E_1) und (W_2, E_2) ist auch $(W_1 \times W_2, E_1 \times E_2)$ eine affine Spiegelungsgruppe in offensichtlicher Weise.

Satz 1.12.7 (Abspalten eines maximalen endlichen Faktors). *Jede affine Spiegelungsgruppe (W, E) ist isomorph zu einem Produkt*

$$(W, E) \cong (W_a, E_a) \times (W_f, E_f)$$

einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe (W_a, E_a) mit einer endlichen Spiegelungsgruppe (W_f, E_f) . Darüber hinaus sind die Isomorphieklassen derartiger Faktoren durch (W, E) bereits eindeutig bestimmt.

Vorschau 1.12.8. In 1.9.7 haben wir bereits die endlichen reellen Spiegelungsgruppen klassifiziert. Um eine Klassifikation aller reellen affinen Spiegelungsgruppen zu erreichen, dürfen wir uns nach dem Satz also auf die Klassifikation der essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen beschränken. Diese Klassifikation wird im nächste Abschnitt besprochen. Mehr dazu findet man in seiner Vorrede 2.

Beweis. Wir dürfen nach 1.2.6 annehmen, daß unsere affine Spiegelungsgruppe orthogonal ist für ein geeignetes Skalarprodukt. Bezeichnet $T \subset W$ die Untergruppe aller Translationen aus W , so bildet der lineare Anteil jeder Spiegelung das Vektorraumergebnis L von T auf sich selbst ab. Folglich liegt der (-1) -Eigenraum jeder linearisierten Spiegelung entweder in L oder in L^\perp . Nennen wir W_a das Erzeugnis der ersteren Spiegelungen und W_f das Erzeugnis der letzteren, so liefert die Multiplikation offensichtlich einen Isomorphismus

$$W_a \times W_f \xrightarrow{\sim} W$$

Wählen wir $e \in E$ beliebig und setzen $E_a = e + L$ und $E_f = e + L^\perp$, so operiert W_f als translationsfreie affine Spiegelungsgruppe auf E_f und ist mithin endlich. Der Satz ist bewiesen. \square

2 Wurzelsysteme

Die folgenden Abschnitte können als vollständige Klassifikation der reellen affinen Spiegelungsgruppen gelesen werden. In 1.9.7 haben wir ja bereits die endlichen reellen Spiegelungsgruppen klassifiziert. Nach 1.12.7 dürfen wir uns von nun an auf die Klassifikation der essentiellen affinen Spiegelungsgruppen beschränken. In 2.5.3 konstruiere ich eine eindeutige Entsprechung zwischen essentiellen affinen Spiegelungsgruppen und sogenannten „Wurzelsystemen“, die im kommenden Abschnitt eingeführt werden. Nach einigen weiteren Vorarbeiten gelingt dann schließlich in 2.3.6 die vollständige Klassifikation dieser Wurzelsysteme. Wurzelsysteme spielen in der Lie-Theorie eine wichtige Rolle, die weit über diese Anwendung hinausgeht.

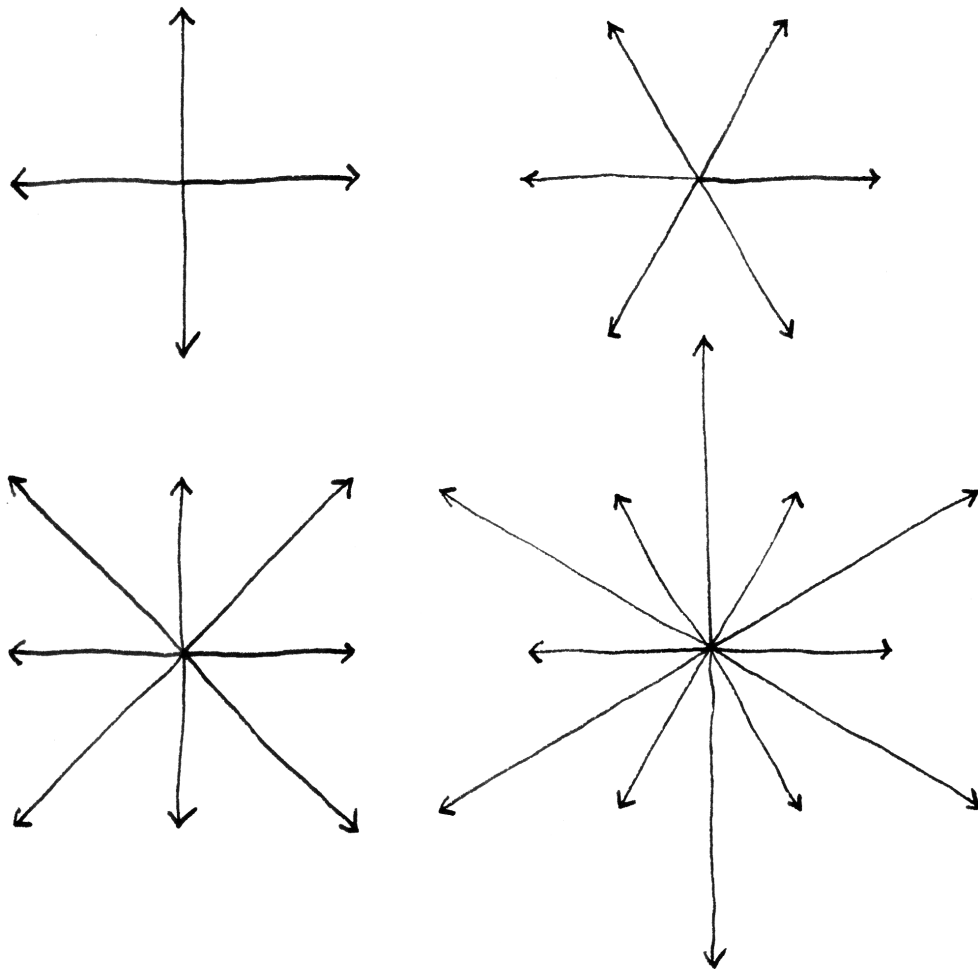
2.1 Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen

Definition 2.1.1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null. Eine Teilmenge $R \subset V$ heißt ein **Wurzelsystem** oder präziser ein **reduziertes Wurzelsystem** und ihre Elemente **Wurzeln**, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Unsere Menge R von Wurzeln ist endlich, erzeugt V , und enthält nicht den Nullvektor;
2. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine lineare Abbildung $s : V \rightarrow V$ mit $s(\alpha) = -\alpha$, $s(R) \subset R$ und $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \quad \forall \beta \in R$;
3. Außer ihrem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel. Für jedes $\alpha \in R$ gilt also $(k\alpha \cap R) = \{\alpha, -\alpha\}$.

Definition 2.1.2. Ein **Morphismus von Wurzelsystemen** über ein- und demselben Körper ist eine lineare Abbildung zwischen den jeweiligen Vektorräumen, die jede Wurzel auf eine Wurzel oder auf Null abbildet.

2.1.3. Die Dimension des von einem Wurzelsystem aufgespannten Vektorraums heißt der **Rang** eines Wurzelsystems. Die leere Menge ist ein Wurzelsystem im Nullvektorraum. In der Lie-Theorie konstruiert man zu den verschiedensten Ausgangsdaten wie etwa kompakten Lie-Gruppen oder reellen halbeinfachen Lie-Algebren einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum mit einer ausgezeichneten Teilmenge, die das zugehörige „Wurzelsystem“ genannt wird und sich dann auch in der Tat oft als ein Wurzelsystem im oben definierten Sinne erweist. In solchen Zusammenhängen nennen wir ein Wurzelsystem im Sinne der obigen Definition auch ein **abstraktes Wurzelsystem** über dem Körper k . Wenn wir von



Das Bild zeigt eine Liste von Wurzelsystemen im Raum der Richtungsvektoren der Papierebene derart, daß jedes Wurzelsystem in einem reellen zweidimensionalen Raum zu genau einem der vier Systeme dieser Liste isomorph ist. Die Bilder sind darüber hinaus so gewählt, daß die Spiegelung zu jeder Wurzel in der Sprache der Schulgeometrie gerade die orthogonale Spiegelung an der auf besagter Wurzel senkrechten Geraden durch den Ursprung ist. Wir werden die Vollständigkeit dieser Liste zum Schluß dieses Abschnitts rechtfertigen. Im oben links dargestellten Fall müssen unsere Wurzeln, anders als das Bild suggerieren mag, nicht notwendig dieselbe Länge haben.

einem **Wurzelsystem** oder **abstrakten Wurzelsystem** reden, ohne uns dabei auf einen Körper festzulegen, meinen wir ein Wurzelsystem über \mathbb{Q} .

Ergänzung 2.1.4. Eine Teilmenge $R \subset V$ eines Vektorraums über einem Körper der Charakteristik Null, die nur die ersten beiden Bedingungen aus unserer Definition 2.1.1 eines Wurzelsystems erfüllt, nennt man ein **nichtreduziertes Wurzelsystem**.

2.1.5 (**Wurzelspiegelungen und Kowurzeln**). Für die lineare Abbildung s aus Teil 2 der Definition eines Wurzelsystems hat $(s - \text{id})$ als Bild die Gerade $k\alpha$. Mithin ist der Kern von $(s - \text{id})$ alias die Fixpunktmenge von s eine Hyperebene. Zusammen mit der Bedingung $s(\alpha) = -\alpha$ zeigt das, daß unser s stets eine Spiegelung im Sinne von 1.2.2 sein muß. Weiter ist unser s durch die Wurzel α eindeutig bestimmt, denn wäre t eine zweite Abbildung mit den in Teil 2 geforderten Eigenschaften, so würde st sowohl auf $k\alpha$ als auch auf $V/k\alpha$ die Identität induzieren und wäre folglich unipotent auf V . Wäre nun st nicht die Identität, so hätte es nach [LA2] 3.3.18 unendliche Ordnung im Widerspruch zur Tatsache, daß es das endliche Erzeugendensystem R von V stabilisiert. Also ist s durch α eindeutig bestimmt. Wir schreiben von nun an $s = s_\alpha$ und nennen diese lineare Abbildung die **Spiegelung zur Wurzel** α . Dann erklären wir zu jeder Wurzel α die Linearform $\alpha^\vee \in V^*$, sprich „alfa tscheck“ durch die Eigenschaft

$$s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \text{für alle } v \in V.$$

Sie heißt die **Kowurzel zur Wurzel** α . Per definitionem nehmen Kowurzeln auf Wurzeln stets ganzzahlige Werte an, in Formeln $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in R$.

Vorschau 2.1.6 (Beziehung zu Lie-Algebren). In Abschnitt ?? wird jedem Paar $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ bestehend aus einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} und einer Cartan'schen Unter algebra \mathfrak{h} eine Teilmenge $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ zugeordnet und das „Wurzelsystem der Liealgebra \mathfrak{g} “ genannt. Nach ??, ?? und ?? ist diese Teilmenge in der Tat ein Wurzelsystem im Sinne der vorhergehenden Definition 2.1.1. Wir studieren im folgenden solche Wurzelsysteme zunächst einmal unabhängig von der Theorie der Lie-Algebren. Es wird sich jedoch später herausstellen, daß Wurzelsysteme in komplexen Vektorräumen im Sinne der vorhergehenden Definition genau die Wurzelsysteme zu komplexen halbeinfachen Lie-Algebren sind. Die vier sogenannten „klassischen“ Beispiele werden etwa in ??, ??, ?? und ?? beschrieben. Sehr viel ausführlichere Informationen und übersichtliche Tafeln findet man bei Bourbaki [Bou81].

2.1.7 (**Diskussion der Terminologie**). Ich habe mich in der vorhergehenden Definition an die Terminologie von Bourbaki [Bou81] gehalten. In anderen Quellen fordert man von einem Wurzelsystem schwächer als in 2.1.1 formuliert nicht $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$ und bezeichnet diejenigen Wurzelsysteme, die diese Bedingung

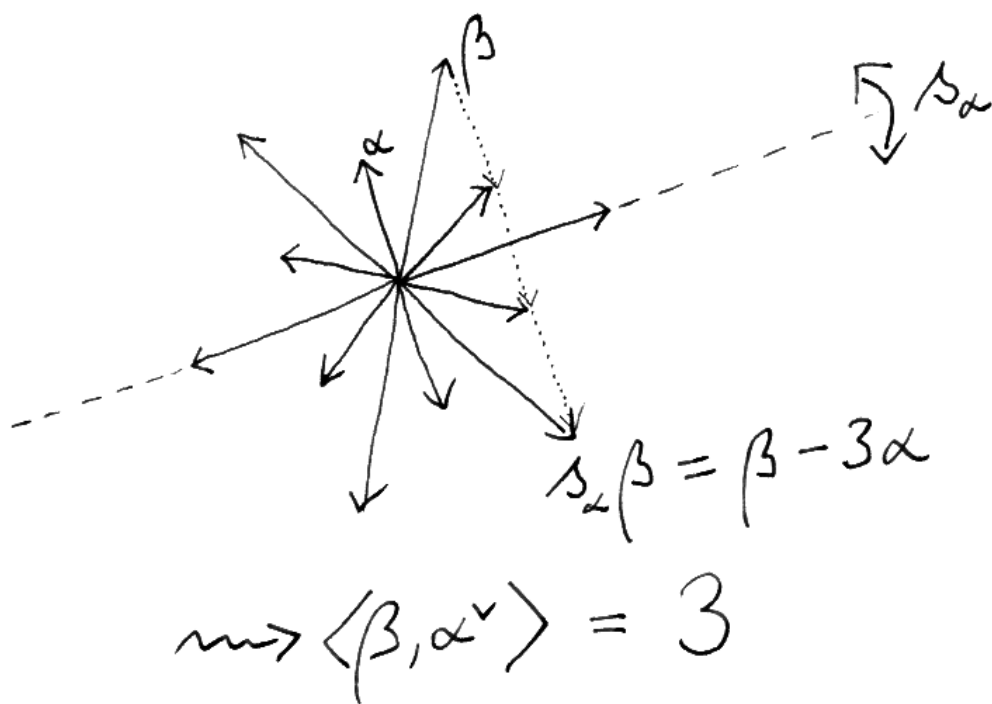
doch erfüllen, als **kristallographisch**. Oft bezeichnet man in der Literatur, insbesondere der angelsächsischen, als Wurzelsysteme auch diejenigen Teilmengen von *reellen euklidischen* Vektorräumen, die die ersten beiden Bedingungen aus 2.1.1 erfüllen und die Eigenschaft haben, daß die orthogonale Spiegelung an der auf einer Wurzel senkrechten Hyperebene stets unser System in sich selber überführt. Man mag derartige Systeme, jedenfalls wenn sie zusätzlich im eben erwähnten Sinne kristallographisch sind, **euklidische Wurzelsysteme** nennen. Nach allen Quellen gibt es jedoch bis auf Isomorphismus nur ein Wurzelsystem in einem eindimensionalen Raum. Man bezahlt in gewisser Weise für die Anschaulichkeit der angelsächsischen Definition damit, daß der Begriff eines Isomorphismus von Wurzelsystemen unnatürlich wird und a priori nicht mehr klar ist, wie sich die Operation der Weylgruppe und andere mithilfe der euklidischen Struktur konstruierte Dinge unter Isomorphismen von Wurzelsystemen verhalten.

Satz 2.1.8 (Kowurzeln und rationale Form). *Sei V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null und $R \subset V$ ein **Wurzelsystem**. So gilt:*

1. *Die Menge $R^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ aller Kowurzeln ist ein Wurzelsystem im Dualraum V^* und für die kanonische Abbildung $V \rightarrow (V^*)^*$ gilt $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$;*
2. *Genau dann bilden Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$ eine k -Basis von V , wenn sie eine \mathbb{Q} -Basis des von R in V aufgespannten \mathbb{Q} -Vektorraums $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ bilden.*

2.1.9 (Wurzelsysteme über verschiedenen Körpern). Natürlich ist in der Situation des Satzes für jedes Wurzelsystem R über einem Körper k unsere Menge R auch ein Wurzelsystem im \mathbb{Q} -Vektorraum $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Diese Konstruktion liefert eine Äquivalenz zwischen den Kategorien der Wurzelsysteme über k und über \mathbb{Q} . Beim Studium von Wurzelsystemen dürfen wir uns deshalb weitestgehend auf den Fall von Wurzelsystemen in \mathbb{Q} -Vektorräumen beschränken.

Beweis. Da V von R erzeugt wird, gilt sicher $\dim_{\mathbb{Q}} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \geq \dim_k V$. Jede Spiegelung $s_\alpha : V \rightarrow V$ wie oben stabilisiert natürlich $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und liegt in der endlichen Untergruppe $G = \{g \in GL \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid g(R) \subset R\}$. Wählen wir mithilfe von 1.2.6 ein G -invariantes Skalarprodukt $(\ , \)$ auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$, so muß s_α auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ die orthogonale Spiegelung an der zu α orthogonalen Hyperebene induzieren. Damit ist s_α eindeutig festgelegt auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und dann auch auf $V = \langle R \rangle_k$. Das zeigt ein zweites Mal die Eindeutigkeit von s_α . Sicher nimmt jede Kowurzel α^\vee auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ nur rationale Werte an, d.h. ihre Restriktion auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ ist ein Element $\alpha_{\mathbb{Q}}^\vee \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ des Dualraums des \mathbb{Q} -Vektorraums $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Unter dem durch unser invariantes Skalarprodukt vermittelten Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ haben wir nun $\alpha_{\mathbb{Q}}^\vee \mapsto 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, folglich wird $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ erzeugt von den Restriktionen der Kowurzeln $\alpha_{\mathbb{Q}}^\vee$. Wählen



Beispiel für das Auswerten einer Kowurzel auf einer Wurzel

wir eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ aus Wurzeln und eine Basis $\beta_{1, \mathbb{Q}}^{\vee}, \dots, \beta_{n, \mathbb{Q}}^{\vee}$ von $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ aus Restriktionen von Kowurzeln, so ist die Matrix der $\langle \alpha_i, \beta_{j, \mathbb{Q}}^{\vee} \rangle$ alias die Matrix der $\langle \alpha_i, \beta_j^{\vee} \rangle$ invertierbar. Damit sind notwendig $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bzw. $\beta_1^{\vee}, \dots, \beta_n^{\vee}$ auch k -linear unabhängig in V bzw. V^* . Es folgt die zweite Behauptung des Satzes. Es bleibt, die erste Behauptung nachzuweisen. Daß R^{\vee} ein endliches Erzeugendensystem von V^* ist, folgt aus dem Vorhergehenden. Daß gilt $k\alpha^{\vee} \cap R^{\vee} = \{\alpha^{\vee}, -\alpha^{\vee}\}$ desgleichen. Haben wir nun irgendeinen Isomorphismus von Vektorräumen $\varphi : V \xrightarrow{\sim} U$ und ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem, so ist natürlich auch $\varphi(R) \subset U$ ein Wurzelsystem und gegeben $\beta \in R$ gilt $\varphi(\beta)^{\vee} = (\varphi^{\top})^{-1}(\beta^{\vee})$ für $\varphi^{\top} : U^* \rightarrow V^*$ die zu φ transponierte Abbildung. Gegeben $\alpha \in R$ ist schließlich die transponierte Abbildung zur Spiegelung $s_{\alpha} = s_{\alpha, \alpha^{\vee}} : V \rightarrow V$ nach Übung 1.2.9 stets die Spiegelung $s_{\alpha}^{\top} = s_{\alpha^{\vee}, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$. Für $\varphi = s_{\alpha}$ erhalten wir insbesondere

$$(s_{\alpha}\beta)^{\vee} = s_{\alpha}^{\top}(\beta^{\vee}) = \beta^{\vee} - \langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle \alpha^{\vee}$$

Wir sehen daraus, daß s_{α}^{\top} die Bedingungen erfüllt, die von einer Spiegelung zu α^{\vee} als Element des Wurzelsystems in $\text{spe } R^{\vee}$ gefordert werden, und das zeigt auch gleich noch $\alpha \mapsto (\alpha^{\vee})^{\vee}$. \square

Definition 2.1.10. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ heißt die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe $W = W(R) \subset GL(V)$ seine **Weylgruppe**.

2.1.11. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ ist der Nullvektor der einzige Vektor von V , der von der Weylgruppe festgehalten wird. In der Tat erzeugen die Kowurzeln den Dualraum, folglich ist der Schnitt ihrer Kerne Null.

2.1.12 (**Kowurzeln als Vielfache von Wurzeln**). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ gibt es Identifikationen $V \xrightarrow{\sim} V^*$ des zugrundeliegenden Vektorraums mit seinem Dualraum, unter der alle Wurzeln positiven Vielfachen ihrer Kowurzeln entsprechen. Um das zu sehen, dürfen wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Wurzelsysteme in \mathbb{Q} -Vektorräumen beschränken. Dann gilt für jedes unter der Weylgruppe invariante Skalarprodukt $(\ , \)$ sogar genauer $\langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ alias $\text{can} : \beta \mapsto ((\beta, \beta)/2)\beta^{\vee}$ für $\text{can} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ gegeben durch $\lambda \mapsto (\ , \lambda)$.

Beispiel 2.1.13 (Wurzelsysteme vom Typ A). Die Menge aller Differenzen $R := \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des \mathbb{R}^n ist ein Wurzelsystem in $V := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$. Wegen $\dim V = n - 1$ heißt dies Wurzelsystem A_{n-1} . Wir bezeichnen mit $\varepsilon_i \in V^*$ die durch $\varepsilon_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ gegebene Linearform. Für $\alpha = e_i - e_j$ ist dann die Kowurzel $\alpha^{\vee} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ und die Spiegelung s_{α} vertauscht die i -te mit der j -ten Koordinate. Insbesondere besteht $W(R) \cong S_n$ aus den Permutationen der Koordinaten.

2.1.14. Die Einschränkung auf den \mathbb{Q} -Spann der Wurzeln $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ definiert eine natürliche Einbettung $W \subset \text{Aut}\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Diese Einbettung identifiziert die Weylgruppe mit einer endlichen Spiegelungsgruppe im Sinne von 1.2.5. Die Alkoven in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ heißen in diesem Zusammenhang meist **Weylkammern**.

Lemma 2.1.15. *Jede Spiegelung in der Weylgruppe eines Wurzelsystems ist eine Spiegelung zu einer Wurzel.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit R ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über \mathbb{Q} . Nach 1.6.3 ist jede Spiegelung einer endlichen von Spiegelungen erzeugten Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem angeordneten Körper bereits konjugiert zu einer der erzeugenden Spiegelungen. Insbesondere ist jede Spiegelung s aus der Weylgruppe schon mal konjugiert zu einer Spiegelung zu einer Wurzel $\beta \in R$. Wir folgern $s = ws_{\beta}w^{-1} = s_{w\beta} = s_{\alpha}$ mit $\alpha = w\beta \in R$. \square

Lemma 2.1.16 (Paare von Wurzeln). *Für je zwei nichtproportionale Wurzeln α, β eines Wurzelsystems gilt $0 \leq \langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle \langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle < 4$. Genauer wird der Winkel zwischen je zwei Wurzeln α und β bezüglich jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts (\cdot, \cdot) auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ gegeben durch*

$$4 \cos^2(\text{Winkel zwischen } \alpha \text{ und } \beta) = \langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle \langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$$

und je zwei nichtorthogonale Wurzeln haben das Längenverhältnis

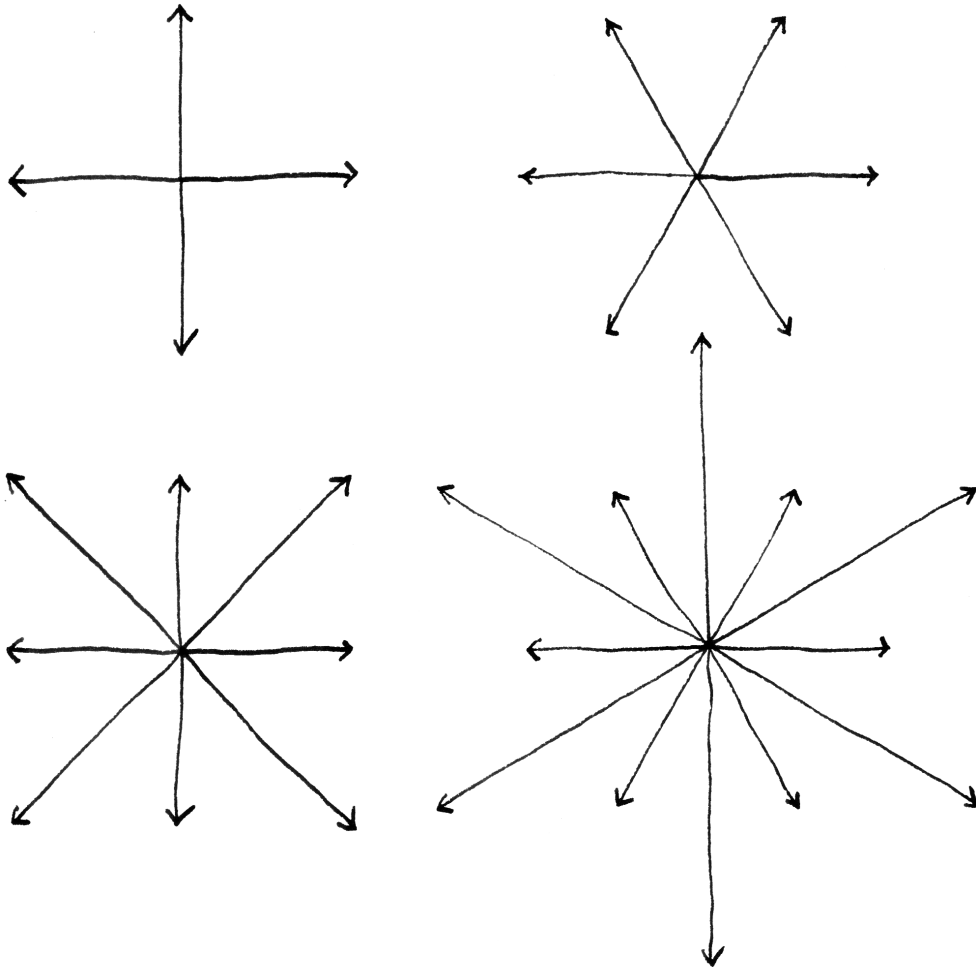
$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle}{\langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle}$$

Beweis. Beides folgt sofort aus unserer Formel $\langle \alpha, \beta^{\vee} \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$. \square

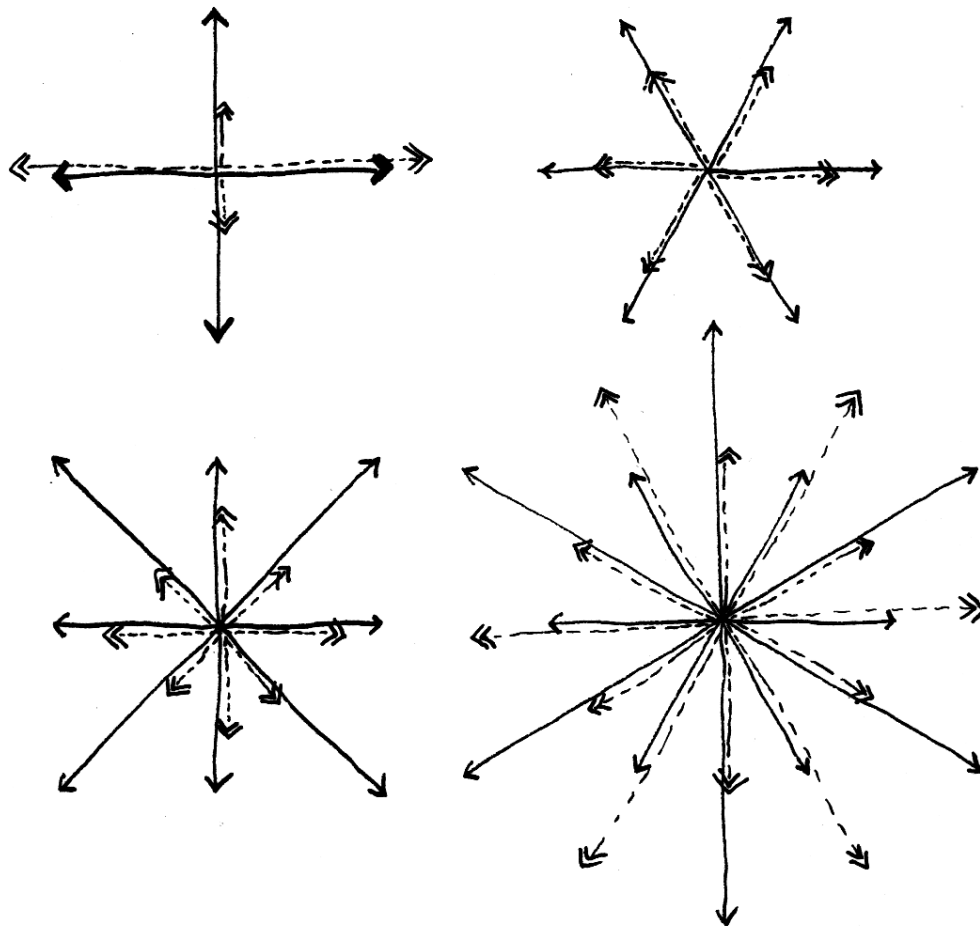
Übungen

Übung 2.1.17. Wie in 1.6.11 sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{Q} -Vektorraum und $Q \subset V$ ein Gitter alias der \mathbb{Z} -Spann einer Basis und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$. Man zeige, daß die Vektoren $v \in Q$ mit $\langle v, v \rangle = 2$ ein Wurzelsystem in dem von ihnen erzeugten Untervektorraum von V bilden.

Übung 2.1.18 (Das Wurzelsystem E_8). Die Menge Q aller Vektoren aus $\mathbb{Z}^8 \sqcup \frac{1}{2}\mathbb{Z}^8$ mit Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_8 \in 2\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe von \mathbb{Q}^8 , die diesen Vektorraum erzeugt. Das Standardskalarprodukt auf \mathbb{Q}^8 induziert eine bilineare Abbildung $Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$. Mit dieser bilinearen Abbildung heißt Q das E_8 -Gitter. Es gilt $\langle q, q \rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $q \in Q$ und die 240 Elemente $q \in Q$ mit $\langle q, q \rangle = 2$ bilden ein Wurzelsystem, das unser Gitter Q aufspannt und auch den Namen E_8 trägt. Sein Schnitt mit \mathbb{Z}^8 ist auch ein Wurzelsystem, das den Namen D_8 trägt und zur kompakten Liegruppe $SO(16)$ gehört.



Dies Bild illustriert alle möglichen Lagen für Paare von Wurzeln in einem Wurzelsystem.



In diesem Bild habe ich für verschiedene Wurzelsysteme des Richtungsraums \vec{P} der Papierebene auch noch die Bilder der dualen Wurzeln unter dem durch ein jeweils willkürlich gewähltes weylgruppeninvariantes Skalarprodukt vermittelten Isomorphismus $\vec{P}^* \xrightarrow{\sim} \vec{P}$ eingezeichnet. Wie in 2.1.12 diskutiert sind diese Bilder positive Vielfache der entsprechenden Wurzeln. Ich Fall oben links habe ich dabei ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gewählt, das nicht unter allen anschaulichen Bewegungen der Papierebene invariant ist.

Übung 2.1.19. Gegeben ein Wurzelsystem R und nichtproportionale Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0 \Rightarrow \beta - \alpha \in R$ und dann natürlich auch $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 0 \Rightarrow \beta + \alpha \in R$. Hinweis: Aus $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$ folgt mit Lemma 2.1.16, daß gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 1$ oder $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 1$.

2.1.20 (**Wurzelketten**). Gegeben ein Wurzelsystem R und nichtproportionale Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ ist $I := \{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in \mathbb{Z} . Das erkennt man unschwer durch Inspektion der Fälle vom Rang Zwei. Alternativ kann man durch Widerspruch argumentieren: Wären $s < r$ Zahlen aus I mit Abstand Zwei oder mehr, zwischen denen kein Element von I läge, so folgte aus 2.1.19 leicht $\langle \beta + s\alpha, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ und $\langle \beta + r\alpha, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ und zusammen $\langle (r - s)\alpha, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ im Widerspruch zu $r < s$.

2.2 Basen von Wurzelsystemen

Definition 2.2.1. Eine Teilmenge $\Pi \subset R$ eines Wurzelsystems $R \subset V$ heißt eine **Basis des Wurzelsystems**, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Π ist eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraums V ;
2. Schreiben wir eine Wurzel $\beta \in R$ als Linearkombination $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ der Elemente von Π , so liegen die Koeffizienten n_α entweder alle in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ oder alle in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Definition 2.2.2. Eine Teilmenge $R^+ \subset R$ eines Wurzelsystems heißt ein **System positiver Wurzeln**, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Das Wurzelsystem läßt sich schreiben als die disjunkte Vereinigung $R = R^+ \sqcup (-R^+)$, für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt also $\alpha \in R^+ \Leftrightarrow (-\alpha) \notin R^+$;
2. Aus $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^+$ und $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R$ folgt $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R^+$.

2.2.3. Jedes Wurzelsystem R besitzt ein System positiver Wurzeln. In der Tat, wählen wir einen Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^n$ von \mathbb{Q} -Vektorräumen, so bilden offensichtlich alle Wurzeln, deren Bild in \mathbb{Q}^n in der lexikographischen Ordnung größer ist als Null, ein System positiver Wurzeln.

2.2.4. Gegeben ein Wurzelsystem R gehört jede Wurzel α zu mindestens einer Basis des Wurzelsystems. In der Tat, wählen wir einen Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^n$ von \mathbb{Q} -Vektorräumen mit $\alpha \mapsto (0, \dots, 0, 1)$ und betrachten das positive System alle Wurzeln, deren Bild in \mathbb{Q}^n in der lexikographischen Ordnung größer ist als Null, so gehört α offensichtlich zur zugehörigen Basis.

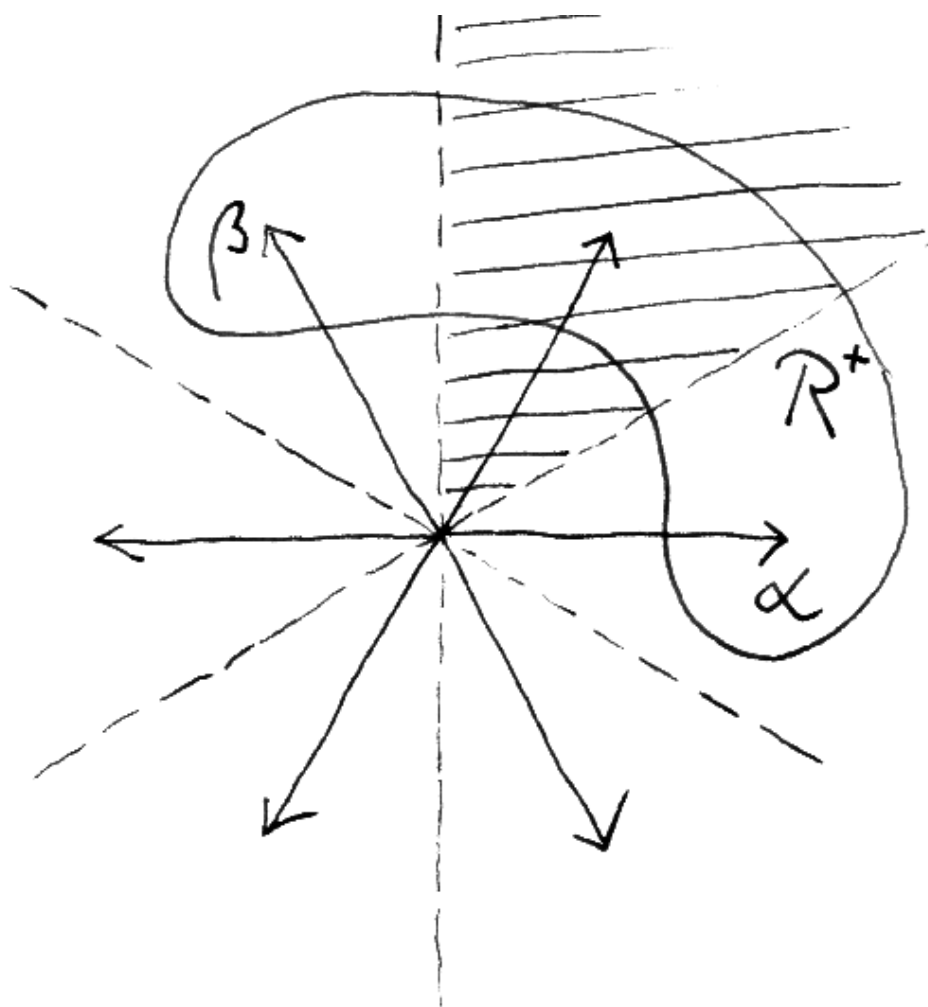
Beispiel 2.2.5 (Das Wurzelsystem A_n). Wir erinnern aus 2.1.13 das Wurzelsystem $R := \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ aller Differenzen zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des \mathbb{R}^n im Vektorraum $V := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$. Ein System positiver Wurzeln wäre $R^+ := \{e_i - e_j \mid i < j\}$ und die zugehörige Basis $\Pi(R^+) = \{e_i - e_{i+1}\}$.

Satz 2.2.6 (Weylkammern, Basen, Systeme positiver Wurzeln). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*\} & \xrightarrow{6} & \{\text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}\} \\
 4^\vee \uparrow \downarrow 3^\vee & & 4 \uparrow \downarrow 3 \\
 \{\text{Basen von } R\} & \xrightarrow{5} & \{\text{Basen von } R^\vee\} \\
 2 \uparrow \downarrow 1 & & 2^\vee \uparrow \downarrow 1^\vee \\
 \{\text{Systeme positiver Wurzeln in } R\} & \xrightarrow{5} & \{\text{Systeme positiver Wurzeln in } R^\vee\}
 \end{array}$$

vermittels der Abbildungen, die wir im folgenden genauer beschreiben:

1. Jeder Basis $\Pi \subset R$ ordnet man als positives System die Menge $R^+(\Pi)$ aller Wurzeln zu, die sich schreiben lassen als nichtnegative Linearkombination der Basiselemente;
2. Jedem System positiver Wurzeln ordnet man als Basis die Menge aller derjenigen Elemente des Systems zu, die sich nicht als Summe über eine Multimenge von zwei oder mehr Elementen des besagten Systems schreiben lassen;
3. Jeder Weylkammer im rationalen Spann der Wurzeln ordnet man als Basis des dualen Wurzelsystems die Menge derjenigen Kowurzeln zu, die Gleichungen von Wänden unserer Kammer sind und die auf der Kammer positive Werte annehmen;
4. Jeder Basis des dualen Wurzelsystems ordnet man als Kammer den Schnitt derjenigen Halbräume zu, auf denen alle Elemente besagter Basis positive Werte annehmen;
5. Jeder Menge von Wurzeln ordnen die beiden unteren horizontalen Pfeile die Menge der zugehörigen Kowurzeln zu;
6. Jeder Kammer in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ ordnet die obere Horizontale ihr Bild unter einem und jedem Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ zu, der von einem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt induziert wird.



Ein Wurzelsystem mit einer Weylkammer, dem zugehörigen System positiver Wurzeln, bestehend aus den drei Wurzeln „in der Niere“ und der zugehörigen Basis, bestehend aus den beiden Wurzeln α und β .

Beweis. Nur bei den Abbildungen 1 und 6 scheint mir a priori klar, daß sie überhaupt im behaupteten Wertebereich landen. Als nächstes überlegen wir uns das für die in 3 gegebene Abbildung und zeigen dabei insbesondere, daß jedes Wurzelsystem überhaupt Basen besitzt. Wir geben unserer Abbildung den Namen Φ , in Formeln gilt für jede Weylkammer $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ also

$$\Phi(A) = \{\alpha^{\vee} \in R^{\vee} \mid (\ker \alpha^{\vee}) \in \mathcal{H}_A, \langle A, \alpha^{\vee} \rangle \subset \mathbb{Q}_{>0}\}$$

Nach 1.8.6 ist $\Phi(A)$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ und dann nach 2.1.8.2 auch von V^* . Nach 1.6.1 erzeugen weiter die Spiegelungen s_{α} an den Wänden einer Kammer die gesamte Weylgruppe, nach 2.1.11 ist demnach der Schnitt dieser Wände alias der Schnitt der Kerne der zugehörigen Kowurzeln der Nullraum, folglich bilden die fraglichen Kowurzeln sogar eine Basis von V^* und $\Phi(A)$ erfüllt die erste Bedingung an eine Basis eines Wurzelsystems. Stellen wir nun $\beta^{\vee} \in R^{\vee}$ dar als Linearkombination

$$\beta^{\vee} = \sum_{\alpha \in \Phi(A)} n_{\alpha\beta} \alpha^{\vee}$$

so liegen sicher alle $n_{\alpha\beta}$ in \mathbb{Q} und haben sogar alle dasselbe Vorzeichen, da unsere Kowurzel β^{\vee} auf dem Abschluß der Kammer A und insbesondere auf den Vektoren der zu $\Phi(A)$ dualen Basis des Vektorraums $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ keine Werte mit verschiedenen Vorzeichen annehmen darf. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß hier alle $n_{\alpha\beta}$ in \mathbb{Z} liegen. Da aber alle Alkoven in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ konjugiert sind zu A unter W , ist auch jede Spiegelebene konjugiert zu einer Wand von A und damit jede Kowurzel zu einer Kowurzel aus $\Phi(A)$, in Formeln $R^{\vee} = W\Phi(A)$. Die von $\Phi(A)$ in $\langle R^{\vee} \rangle_{\mathbb{Q}}$ erzeugte Untergruppe $\langle \Phi(A) \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist aber offensichtlich stabil unter W und wir folgern $R^{\vee} \subset \langle \Phi(A) \rangle_{\mathbb{Z}}$. Unser $\Phi(A)$ ist also tatsächlich eine Basis von R^{\vee} . Wir geben nun der Abbildung 4 in die andere Richtung den Namen C , in Formeln gilt für eine Basis Π^{\vee} von R^{\vee} also

$$C(\Pi^{\vee}) = \{\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle > 0 \quad \forall \alpha^{\vee} \in \Pi^{\vee}\}$$

Hier ist $C(\Pi^{\vee})$ eine Weylkammer als ein Schnitt von Halbräumen zu Spiegelebenen, der von keiner Spiegelebene getroffen wird, und das hinwiederum folgt, da Π^{\vee} eine Basis von R^{\vee} ist. Wir zeigen schließlich, daß unsere beiden Abbildungen C und Φ zueinander invers sind. Für jede Kammer A folgt aus Satz 1.3.30 über die Begrenzung eines Alkoven durch sein Wände sofort $C(\Phi(A)) = A$. Ist umgekehrt $\Pi^{\vee} \subset R^{\vee}$ eine Basis, so sind die bezüglich Π^{\vee} positiven Kowurzeln genau die Kowurzeln, die auf der Kammer $C(\Pi^{\vee})$ positive Werte annehmen, und alle Wurzeln aus $\Phi(C(\Pi^{\vee}))$ sind insbesondere positive Wurzeln für Π^{\vee} . Nun ist aber Π^{\vee} offensichtlich die einzige Basis von R^{\vee} , die aus bezüglich Π^{\vee} positiven

Kowurzeln besteht. Also haben wir auch $\Phi(C(\Pi^\vee)) = \Pi^\vee$. Damit ist gezeigt, daß die in 3 und 4 angegebenen Abbildungen in der Tat zueinander inverse Bijektionen liefern. Weiter ist offensichtlich, daß wir eine Basis aus ihrem System von positiven Wurzeln zurückgewinnen können durch die in 2 beschriebene Konstruktion. Es ist also klar, daß 1 und 2 zueinander inverse Isomorphismen sind, sobald wir zeigen, daß 1 surjektiv ist, daß also jedes System positiver Wurzeln von einer Basis herkommt. Um das zu zeigen beachten wir:

Lemma 2.2.7. *Ist R ein Wurzelsystem, $\Pi \subset R$ eine Basis von R und $R^+ = R^+(\Pi)$ das zugehörige System positiver Wurzeln, so gilt für alle Wurzeln aus unserer Basis $\alpha \in \Pi$ die Formel*

$$s_\alpha R^+ = (R^+ \setminus \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

Beweis. Formal sieht man dies Lemma leicht ein, denn aus der Definition folgt für α eine Wurzel von Π schon $(R^+ + \mathbb{Z}\alpha) \cap R = R^+ \cup \{-\alpha\}$. Anschaulich bedeutet das Lemma, daß das Bild einer Weylkammer unter der Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch diese Spiegelebene von der ursprünglichen Weylkammer getrennt wird. \square

Sei nun P^+ ein System positiver Wurzeln und Π eine Basis von R derart, daß $P^+ \cap R^+(\Pi)$ soviel Elemente hat wie möglich. Wäre $P^+ \neq R^+(\Pi)$, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha \notin P^+$. Aber dann hätte $P^+ \cap R^+(s_\alpha \Pi)$ noch mehr Elemente als $P^+ \cap R^+(\Pi)$, im Widerspruch zur Wahl von Π . Also kommt jedes System positiver Wurzeln in der Tat von einer Basis her und die in 1 und 2 angegebenen Abbildungen liefern zueinander inverse Bijektionen. Wir wählen schließlich ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und betrachten den zugehörigen Isomorphismus $\text{can} : \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \rightarrow \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Gehört eine Basis Π von R zum Alkoven $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$, so gehört offensichtlich Π^\vee zum Alkoven $\text{can}(A) \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Damit ist der Satz bewiesen bis auf die Kommutativität des Diagramms, deren Nachweis wir dem Leser überlassen. \square

Korollar 2.2.8. *Jede Wurzel eines Wurzelsystems gehört zu mindestens einer Basis.*

Beweis. Das folgt mit 2.2.6 aus der Erkenntnis 1.3.31, daß jede Spiegelebene Wand von mindestens einer Weylkammer ist. \square

Korollar 2.2.9. *Gegeben zwei Basen eines Wurzelsystems gibt es genau ein Element der Weylgruppe, das die eine Basis in die andere Basis überführt.*

Beweis. Das folgt aus der eineindeutigen Entsprechung zwischen Basen und Weylkammern 2.2.6, da jede endliche Spiegelungsgruppe nach 1.6.1 frei und transitiv auf der Menge ihrer Weylkammern operiert. \square

Definition 2.2.10. Ein Wurzelsystem mit einer ausgezeichneten Basis nennen wir ein **basiertes Wurzelsystem**. In einem basierten Wurzelsystem nennt man die Elemente der Basis **einfache Wurzeln**, die zugehörigen Kowurzeln **einfache Kowurzeln**, die zugehörigen Spiegelungen **einfache Spiegelungen** und die zugehörige Weylkammer die **dominante Weylkammer**.

Ergänzung 2.2.11. Jedes basierte Wurzelsystem besitzt eine kanonische Involution, die gegeben wird durch die Vorschrift $v \mapsto -w_0 v$ für w_0 das in Bezug auf die ausgezeichnete Basis längste Element der Weylgruppe nach 1.6.9. Diese Involution macht einfache Wurzeln zu einfachen Wurzeln. Wir nennen sie den **prinzipalen Automorphismus** unseres basierten Wurzelsystems.

2.2.12. Gegeben ein basiertes Wurzelsystem erzeugen die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe, jede Spiegelung ist in der Weylgruppe konjugiert zu einer einfachen Spiegelung, und jede Wurzel ist konjugiert unter der Weylgruppe zu einer einfachen Wurzel. Das alles sind Spezialisierungen von Aussagen aus der allgemeinen Theorie von Spiegelungsgruppen 1.6.1.

Definition 2.2.13. Sind $R_1 \subset V_1$ und $R_2 \subset V_2$ Wurzelsysteme über demselben Körper, so definieren wir ihre **Summe** $R_1 \oplus R_2 \subset V_1 \oplus V_2$ als

$$R_1 \oplus R_2 := (R_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times R_2)$$

Die Summe zweier Wurzelsysteme ist natürlich wieder ein Wurzelsystem. Ein Wurzelsystem heißt **unzerlegbar**, falls es weder leer ist noch isomorph zu einer Summe von zwei nichtleeren Wurzelsystemen.

Proposition 2.2.14. *Ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem, so gibt es genau eine Partition $R = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_n$ derart, daß R_i jeweils ein unzerlegbares Wurzelsystem in dem von ihm erzeugten Untervektorraum $V_i \subset V$ ist und daß die Addition einen Isomorphismus $V_1 \oplus \dots \oplus V_n \xrightarrow{\sim} V$ liefert mit*

$$R_1 \oplus \dots \oplus R_n \xrightarrow{\sim} R$$

Beweis. Sei \simeq die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge R mit der Eigenschaft $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0 \Rightarrow \alpha \simeq \beta$. Unter dieser Äquivalenzrelation zerlegt man nun R in Äquivalenzklassen $R = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_n$. Der Rest des Beweises bleibt dem Leser überlassen. \square

Übungen

Übung 2.2.15. Ist R^+ ein System positiver Wurzeln eines Wurzelsystems und $l : W \rightarrow \mathbb{N}$ die zu den zugehörigen einfachen Spiegelungen gebildete Länge, so stimmt die Länge eines Elements $w \in W$ überein mit der Zahl der positiven Wurzeln, die es zu negativen Wurzeln macht. In Formeln gilt also $l(w) = |w(R^+) \setminus R^+|$. Hinweis: 1.6.1.3.

Übung 2.2.16. Sei $\Pi \subset R \subset V$ ein basiertes Wurzelsystem. Bezeichne $\rho \in V$ die Halbsumme der positiven Wurzeln, in Formeln

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

Man zeige mit 2.2.7 für alle einfachen Wurzeln α die Formel $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ und folgere $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ für alle einfachen Wurzeln α . Man zeige weiter, daß $x\rho - \rho$ für alle x aus der Weylgruppe im Wurzelgitter liegt, in Formeln gilt also $x\rho - \rho \in \langle R \rangle \quad \forall x \in W$.

Übung 2.2.17 (Wurzelsysteme der Typen B_n, C_n, D_n). Bezeichne $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die Vektoren der Standardbasis von \mathbb{Q}^n , die in anderen Zusammenhängen meist e_i notiert werden. Man zeige:

Typ C_n : Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\} \setminus \{0\}$ ist ein Wurzelsystem in \mathbb{Q}^n . Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe.

Typ D_n : Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in \mathbb{Q}^n für $n \geq 2$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe. Auflösung in [DHL] 1.1.17.

Typ B_n : Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in \mathbb{Q}^n . Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe. Auflösung in [DHL] 1.1.18.

Duale Systeme: Man zeige, daß die Wurzelsysteme B_n und C_n zueinander dual sind, wohingegen die Wurzelsysteme A_n und D_n jeweils zu ihren dualen Systemen isomorph sind.

Als Systeme positiver Wurzeln wähle man stets alle Wurzeln, bei denen der erste von Null verschiedene Koeffizient bei der Darstellung durch die angeordnete Basis der ε_i positiv ist. Das Standardskalarprodukt ist in diesen Fällen jeweils invariant unter der Weylgruppe.

2.3 Klassifikation von Wurzelsystemen

Definition 2.3.1. Gegeben ein Wurzelsystem R mit Basis Π definiert man seine **Cartan-Matrix** als die $(\Pi \times \Pi)$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen alias die Abbildung $(\Pi \times \Pi) \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$C(R) = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha, \beta \in \Pi}$$

Diese Matrix hängt, da nach 2.2.8 je zwei Basen durch genau ein Element der Weylgruppe ineinander überführt werden können, im Wesentlichen nicht von der Wahl unserer Basis ab.

Ergänzung 2.3.2. Genauer kann man die Menge \mathcal{B} aller Basen des Wurzelsystems R betrachten, dann im Produkt $\mathcal{B} \times R$ die Teilmenge \mathcal{T} aller Paare (Π, α) bestehend aus einer Basis Π und einer Wurzel $\alpha \in \Pi$, und schließlich die Menge

$$\Pi(R) := W \setminus \mathcal{T}$$

der Bahnen der Weylgruppe auf \mathcal{T} . Diese Menge $\Pi(R)$ hängt dann von keinerlei Wahlen mehr ab, man mag sie die **universelle Basis** des Wurzelsystems R nennen, und wir können damit die Cartan-Matrix $C(R)$ auffassen als eine von keinerlei Wahlen mehr abhängige $(\Pi(R) \times \Pi(R))$ -Matrix.

2.3.3. Die Cartan-Matrizen zu Wurzelsystemen haben typischerweise nur sehr wenige von Null verschiedene Einträge. Darüber hinaus stehen auf der Diagonalen nur Zweier, außerhalb der Diagonalen sind alle Einträge nichtpositiv, und es gilt

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$$

sowie $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$. Es ist deshalb möglich, die in der Cartan-Matrix eines Wurzelsystems enthaltene Information sehr übersichtlich graphisch darzustellen durch das sogenannte **Dynkin-Diagramm**, das wie folgt gebildet wird: Man malt zunächst für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ einen dicken Punkt; dann verbindet man je zwei Punkte $\alpha \neq \beta$ durch einen $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)$ -fachen Strich bzw. gar nicht, falls gilt $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = 0$; und schließlich versieht man die 2-fachen und 3-fachen Striche mit einem Pfeil in Richtung der Wurzel α mit $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$, d.h. in Richtung der kürzeren Wurzel bezüglich eines und damit jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts.

Lemma 2.3.4. *Ein Wurzelsystem über einem gegebenen Körper wird durch sein Dynkindiagramm eindeutig festgelegt bis auf Isomorphismus.*

Beweis. Man kann ein Wurzelsystem bis auf Isomorphismus aus seinem Dynkindiagramm rekonstruieren wie folgt: Man bildet den freien Vektorraum V über den Knoten des Diagramms, nennt die zu den Knoten gehörigen Vektoren „einfache Wurzeln“, erklärt dann zu jeder einfachen Wurzel α eine „einfache Spiegelung“ mithilfe der in unserem Diagramm enthaltenen Information gewisser ganzer Zahlen $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ auf den einfachen Wurzeln durch

$$s_\alpha : \beta \mapsto \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

und durch lineare Fortsetzung auf ganz V , und erhält das Wurzelsystem zurück als die Vereinigung der Bahnen der einfachen Wurzeln unter der von den einfachen Spiegelungen erzeugten „Weylgruppe“. \square

Lemma 2.3.5. *Ein Wurzelsystem ist unzerlegbar genau dann, wenn sein Dynkindiagramm zusammenhängend ist.*

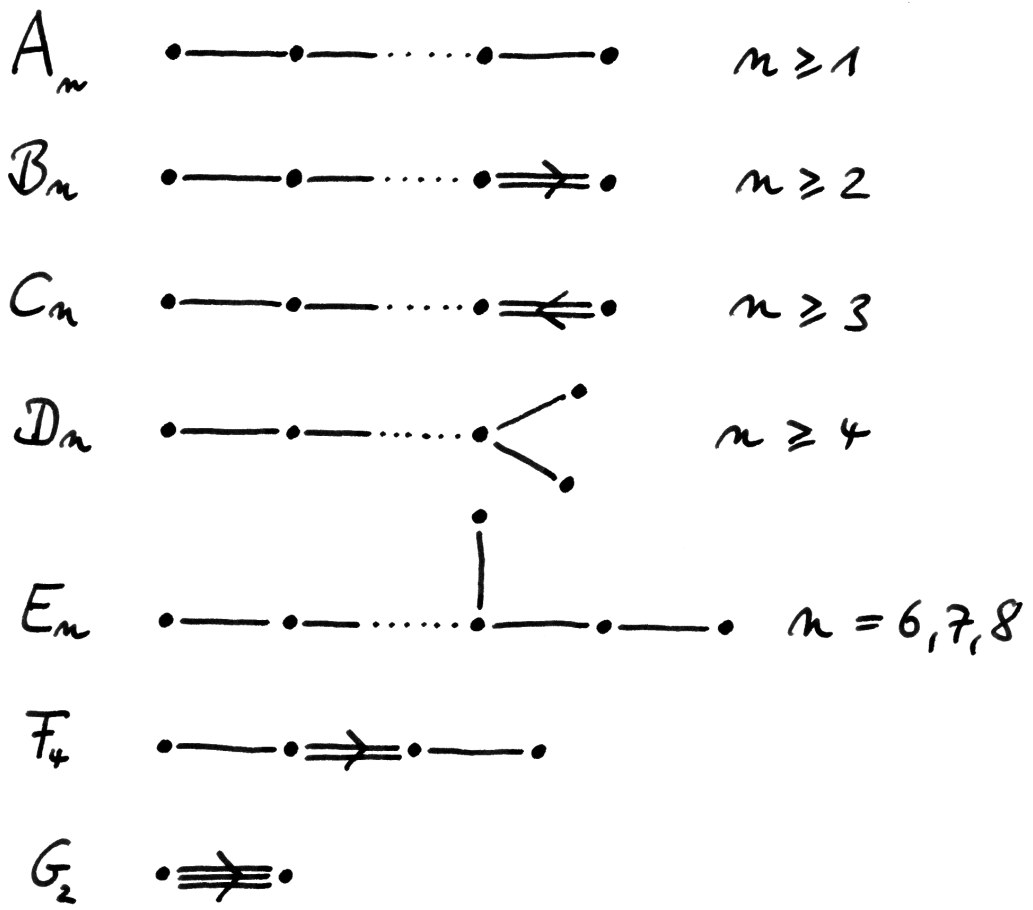
Beweis. Daß jede Zerlegung eines Wurzelsystems eine Zerlegung seines Dynkindiagramms induziert, scheint mir offensichtlich. Zerfällt umgekehrt das Dynkindiagramm eines Wurzelsystems in zwei untereinander unverbundene Teile, so kommutieren alle einfachen Spiegelungen zum einen Teil mit allen einfachen Spiegelungen zum anderen Teil, und wir erhalten erst eine Zerlegung der Weylgruppe in ein Produkt zweier miteinander kommutierender Untergruppen und daraus dann auch eine Zerlegung unseres Wurzelsystems. \square

Proposition 2.3.6 (Klassifikation unzerlegbarer Wurzelsysteme). *Das Bilden des Dynkindiagramms liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Unzerlegbare abstrakte} \\ \text{Wurzelsysteme,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Diagramme,} \\ \text{die in nebenstehender Liste} \\ \text{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

2.3.7. Ich verzichte darauf, genauer zu präzisieren, was unter so einem Diagramm genau zu verstehen sein soll, und wann zwei Diagramme als gleich anzusehen sind.

Beweis. Das Dynkin-Diagramm jedes unzerlegbaren Wurzelsystems muß nach 2.3.5 zusammenhängend sein. Weiter muß die Weylgruppe eines Wurzelsystems auf dem \mathbb{Q} -Spann der Wurzeln als endliche Spiegelungsgruppe operieren. Damit landet die Abbildung aus unserer Proposition zumindest in zusammenhängenden Diagrammen. Der zu einem Dynkindiagramm gehörige Coxetergraph entsteht nach 2.1.16 aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten als Kanten der Wertigkeit 4 interpretiert und Dreifachkanten als Kanten der Wertigkeit 6. Ein kurzer Blick auf Seite 40 zeigt dann, daß nur die Diagramme unserer nebenstehenden Liste als Dynkin-Diagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme in Frage kommen, so daß die Abbildung aus der Proposition wirklich in der angegebenen Menge landet. Ihre Injektivität haben wir bereits als Lemma 2.3.4 gezeigt. Es bleibt, ihre Surjektivität nachzuweisen. Das zeigt man, indem man das Argument aus dem Beweis von diesem Lemma umkehrt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir als Grundkörper \mathbb{Q} annehmen. Gehen wir von einem der Diagramme unserer Liste aus, so muß nach der Klassifikation endlicher Spiegelungsgruppen die wie dort konstruierte „Weylgruppe“ endlich sein und die „einfachen Spiegelungen“ müssen die von den „einfachen Wurzeln“ erzeugte Untergruppe festhalten, ja die ganze „Weylgruppe“ muß das tun. Damit ist klar, daß die Vereinigung der Bahnen der „einfachen Wurzeln“ unter der „Weylgruppe“ alle Eigenschaften eines Wurzelsystems erfüllt mit einer Ausnahme: Unklar bleibt, warum auf jeder Ursprungsgerade nicht mehr als zwei Elemente dieser Vereinigung liegen können sollten. Wegen unserer Ganzheitseigenschaften müßte dann jedoch in dieser Vereinigung ein Vektor und sein Doppeltes liegen. Wählen wir nun ein unter der Weylgruppe



Dieses Bild zeigt alle Dynkindiagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme. Wir kennen es bereits von Seite ??, wo wir kompakten Liegruppen derartige Bilder zugeordnet hatten. Die Zahl n meint wie dort jeweils die Zahl der Knoten.

invariantes Skalarprodukt, so ist das Längenverhältnis zwischen zwei „einfachen Wurzeln“, das man ja am Dynkindiagramm ablesen kann, nie $1 : 2$, und dieser Widerspruch beendet den Beweis. \square

Korollar 2.3.8 (Klassifikation von Wurzelsystemen). *Das Bilden des Dynkindiagramms liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abstrakte Wurzelsysteme,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Diagramme, deren} \\ \text{Zusammenhangskomponenten} \\ \text{alle in nebenstehender Liste} \\ \text{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

Beweis. Das folgt leicht aus dem Vorhergehenden. Ich verzichte darauf, genauer zu präzisieren, was auf der rechten Seite mit einer Zusammenhangskomponente eines Diagramms gemeint sein soll und wann zwei Diagramme als gleich anzusehen sind. \square

Proposition 2.3.9 (Wurzelwege zu einer positiven Wurzel). *Sei $R \supset R^+ \supset \Pi$ ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und der zugehörigen Basis. Gegeben eine positive Wurzel $\beta \in R^+$ gibt es eine Folge von einfachen Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ derart, daß jede Teilsumme $\alpha_1 + \dots + \alpha_i$ auch eine Wurzel ist.*

2.3.10. Eine feinere Aussage macht die anschließende Proposition 2.3.11. Wir nennen eine Folge von Teilsummen wie in der Proposition, die in jedem Schritt nur um eine einfache Wurzel weitergeht, einen **Wurzelweg** zu unserer positiven Wurzel.

Beweis. Gibt es eine einfache Wurzel $\alpha \neq \beta$ mit $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0$, so ist auch $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine positive Wurzel und wir haben gewonnen mit Induktion und unseren Erkenntnissen zu Wurzelketten 2.1.20. Ist β einfach, so ist nichts zu zeigen. Ist sonst β nicht einfach und gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ für alle einfachen Wurzeln, so müßten die einfachen Wurzeln zusammen mit β linear unabhängig sein nach unserem Lemma 1.8.7 über Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln, und das ist unmöglich. \square

Proposition* 2.3.11 (Wurzelwege zwischen positiven Wurzeln). *Gegeben ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und der zugehörigen Basis $R \supset R^+ \supset \Pi$ und positive Wurzeln $\alpha, \beta \in R^+$ mit $\beta \in \alpha + |R^+ \rangle$ gibt es eine Folge von einfachen Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\beta = \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ derart, daß jede Teilsumme $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_i$ auch eine Wurzel ist.*

Beweis. In der Tat, seien s_i die Spiegelungen zu α_i . Sie erzeugen eine Untergruppe der Weylgruppe, und da die Kerne der α_i^\vee bereits Wände zu einer Kammer der

ganzen Weylgruppe sind, müssen sie erst recht Wände zu einer Kammer dieser von Spiegelungen erzeugten Untergruppe sein. Gibt es ein s_i mit $s_i\beta \in \beta + \mathbb{Z}_{<0}\alpha_i$, so können wir mit 2.1.20 und Induktion über n argumentieren. Sonst liegt β im „Abschluß der antidominanten Kammer zu den s_i “, ausgeschrieben also in der Menge $\{\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0\}$. Ähnlich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch annehmen, daß α im „Abschluß der dominanten Kammer zu den s_i “ liegt. Dann aber müßten beide Wurzeln im Schnitt dieser Kammerabschlüsse liegen, also von allen s_i festgehalten werden, und das kann nur sein, wenn sie gleich sind. \square

Übungen

Übung 2.3.12. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem $R \subset V$ ist V eine irreduzible Darstellung der Weylgruppe, besitzt also außer 0 und V keine unter der Weylgruppe stabilen Teilräume.

Übung 2.3.13 (Lange und kurze Wurzeln). Man zeige: Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem gibt es unter der Weylgruppe höchstens zwei Bahnen von Wurzeln, und diese sind auch jeweils selbst Wurzelsysteme. Genauer sind je zwei Wurzeln derselben Länge unter einem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt konjugiert unter der Weylgruppe. Hinweis: 2.3.12.

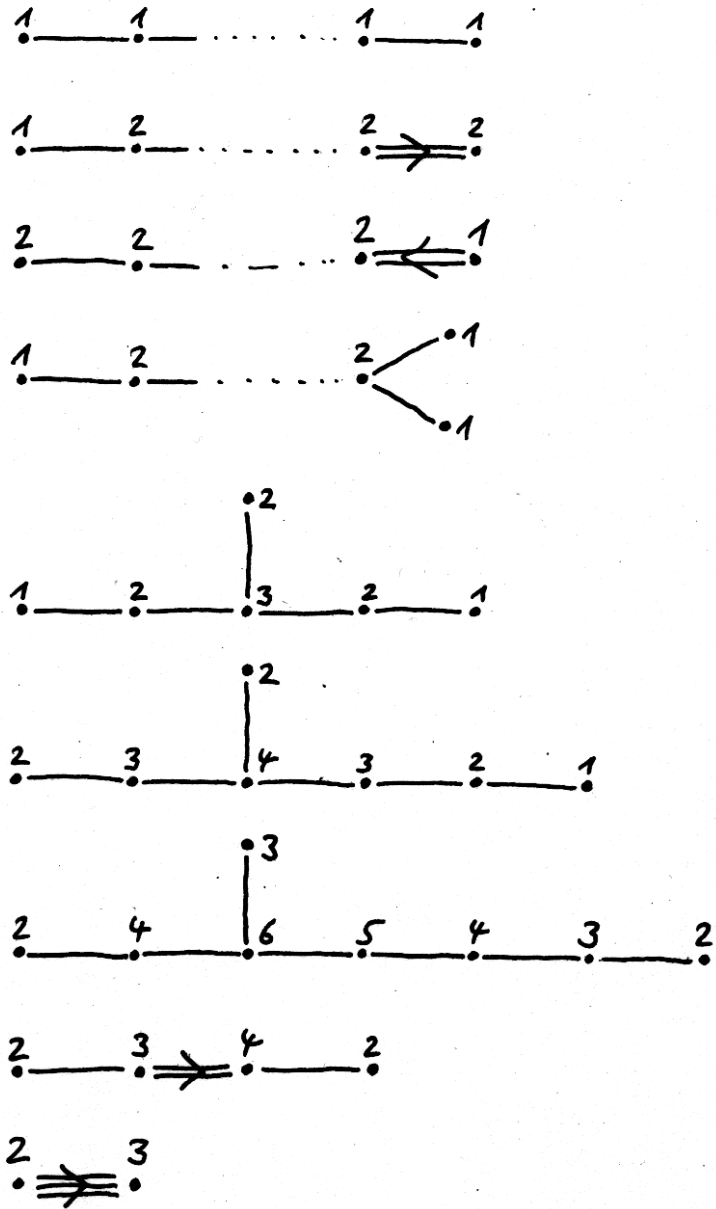
Übung 2.3.14. Ein Wurzelsystem, in dessen Dynkindiagramm keine mehrfachen Striche auftauchen, heißt **einfach geschnürt** oder englisch **simply laced**. Man zeige: Gleichbedeutend ist, daß es ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gibt, unter dem alle Wurzeln dieselbe Länge haben, und gleichbedeutend ist weiter, daß gilt $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| \leq 1$ für alle Wurzeln α, β mit $\alpha \neq \pm\beta$.

2.4 Höchste Wurzel und fundamentaler Alkoven*

Definition 2.4.1. Gegeben $V \supset R \supset R^+$ ein Vektorraum mit einem Wurzelsystem und einem System positiver Wurzeln definieren wir eine partielle Ordnung \geq auf V durch die Vorschrift $\mu \geq \lambda$, wenn gilt $\mu \in \lambda + |R^+ \rangle$ für $|R^+ \rangle$ das von R^+ erzeugte Untermonoid von V .

Proposition 2.4.2. Gegeben $R \supset R^+$ ein unzerlegbares Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln gibt es in R stets eine **höchste Wurzel**, als da heißt, eine Wurzel $\Lambda \in R$ mit $\Lambda \in \alpha + |R^+ \rangle$ alias $\Lambda \geq \alpha$ für alle $\alpha \in R$, und es gilt $\langle \Lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \forall \alpha \in R^+$.

2.4.3. Offensichtlich kommen bei einer Darstellung der höchsten Wurzel als Summe von einfachen Wurzeln alle einfachen Wurzeln als Summanden vor. Dasselbe muß dann auch im dualen Wurzelsystem gelten. Das hinwiederum zeigt, daß



Die Koeffizienten an jedem Knoten in diesem Bild sind die Koeffizienten der entsprechenden einfachen Wurzel bei einer Darstellung der höchsten Wurzel als Linearkombination der einfachen Wurzeln. Es mag eine gute Übung sein, diese Tafel zu überprüfen.

auch bei der Darstellung der höchsten kurzen Wurzel γ , also der höchsten Wurzel des Systems aller kurzen Wurzeln alle einfachen Wurzeln des Gesamtsystems als Summanden vorkommen müssen und daß gilt auch $\langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \forall \alpha \in R^+$.

Beweis. Sicher gibt es eine maximale Wurzel Λ in Bezug auf unsere Ordnung 2.4.1. Es reicht zu zeigen, daß es höchstens eine maximale Wurzel gibt. Sicher gilt $\Lambda \in R^+$ für jede maximale Wurzel Λ . Sicher gilt sogar $\langle \Lambda, \beta^\vee \rangle \geq 0 \forall \beta \in R^+$, sonst hätten wir ja $s_\beta(\Lambda) > \Lambda$. Sei Π die in R^+ enthaltene Basis von R und

$$\Lambda = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$$

So folgt $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0$ für alle $\alpha \in \Pi$ mit $n_\alpha \neq 0$ und $\beta \in \Pi$ mit $n_\beta = 0$. Da wir unser Wurzelsystem unzerlegbar angenommen hatten, folgt sofort $n_\alpha > 0$ für alle $\alpha \in \Pi$. Ist $\kappa = \sum m_\alpha \alpha$ eine weitere maximale Wurzel, so folgt $\kappa^\vee = \sum l_\alpha \alpha^\vee$ mit $l_\alpha > 0$ für alle $\alpha \in \Pi$, da es nach 2.1.12 eine Identifikation des zugrundeliegenden Vektorraums mit seinem Dualraum gibt, unter der alle Wurzeln positiven Vielfachen ihrer Kowurzeln entsprechen. Damit folgt $\langle \Lambda, \kappa^\vee \rangle = \sum l_\alpha \langle \Lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$. Natürlich ist

$$s_\kappa(\Lambda) = \Lambda - \langle \Lambda, \kappa^\vee \rangle \kappa$$

auch eine Wurzel. Nehmen wir zusätzlich $\Lambda \neq \kappa$ an, so ist nach unseren Erkenntnissen über Paare von Wurzeln dann auch $\Lambda - \kappa$ eine Wurzel. Ist sie positiv, so war κ nicht maximal. Ist sie negativ, so war Λ nicht maximal. In jedem Fall erhalten wir einen Widerspruch und es folgt $\Lambda = \kappa$. \square

Satz 2.4.4 (Wände des fundamentalen dominanten Alkoven). *Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem über einem angeordneten Körper mit einem ausgezeichneten System positiver Wurzeln hat der fundamentale dominante Alkoven seiner affinen Weylgruppe außer den Wänden der dominanten Weylkammer nur noch eine weitere Wand. Sie besteht aus den Punkten, auf denen die höchste Kowurzel den Wert Eins annimmt.*

2.4.5. Mit der höchsten Kowurzel meinen wir die höchste Wurzel des dualen Wurzelsystems in Bezug auf das durch die Kowurzeln unserer positiven Wurzeln bestimmte System positiver Wurzeln darin. Wir meinen *nicht* die Kowurzel zur höchsten Wurzel.

Beweis. Die Spiegelebenen der affinen Weylgruppe sind ja gerade die Punkte, auf denen eine Kowurzel einen ganzzahligen Wert annimmt. Nehmen an einer Stelle alle einfachen Kowurzeln positive Werte an und die höchste Kowurzel einen Wert kleiner als Eins, so nehmen dort alle Kowurzeln einen Wert zwischen Null und Eins an. Der Rest des Arguments kann dem Leser überlassen bleiben. \square

2.4.6. Die Bilder auf Seite 47 zeigen die Coxetergraphen der affinen Weylgruppen aller unzerlegbaren Wurzelsysteme.

Ergänzung 2.4.7. Gegeben eine nichttriviale endliche Spiegelungsgruppe bezeichnet man den Quotienten

$$2(\text{Zahl der Spiegelungen})/(\text{Zahl der Wände eines Alkoven})$$

als die **Coxeterzahl** unserer endlichen Spiegelungsgruppe. Sie ist eine natürliche Zahl, genauer kann sie auch beschrieben als die Ordnung des Produkts aller Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven: Alle derartigen Produkte, in beliebiger Reihenfolge und für beliebige Alkoven, bilden eine Konjugationsklasse, so daß es hier auf Wahlen nicht ankommt.

Ergänzung 2.4.8. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem R definiert man seine **duale Coxeterzahl** als $\langle \rho, \Lambda^\vee \rangle + 1$ für ρ die Halbsumme der Wurzeln aus einem System positiver Wurzeln und Λ die höchste Wurzel dieses Systems.

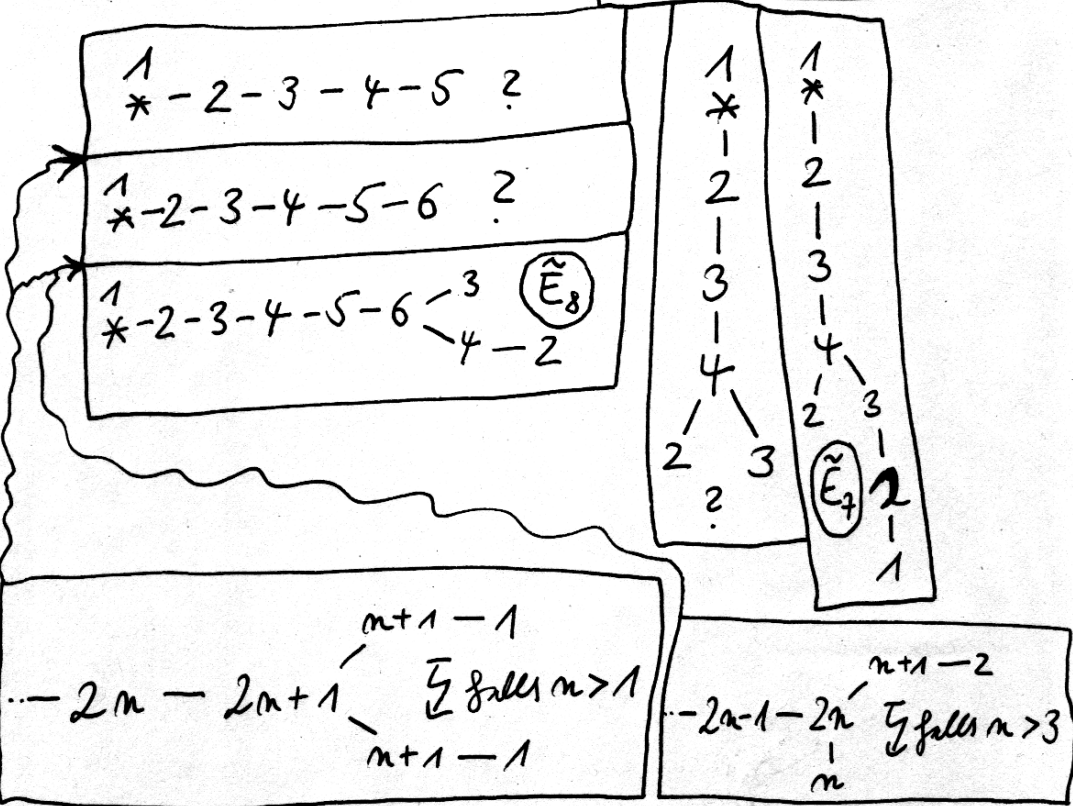
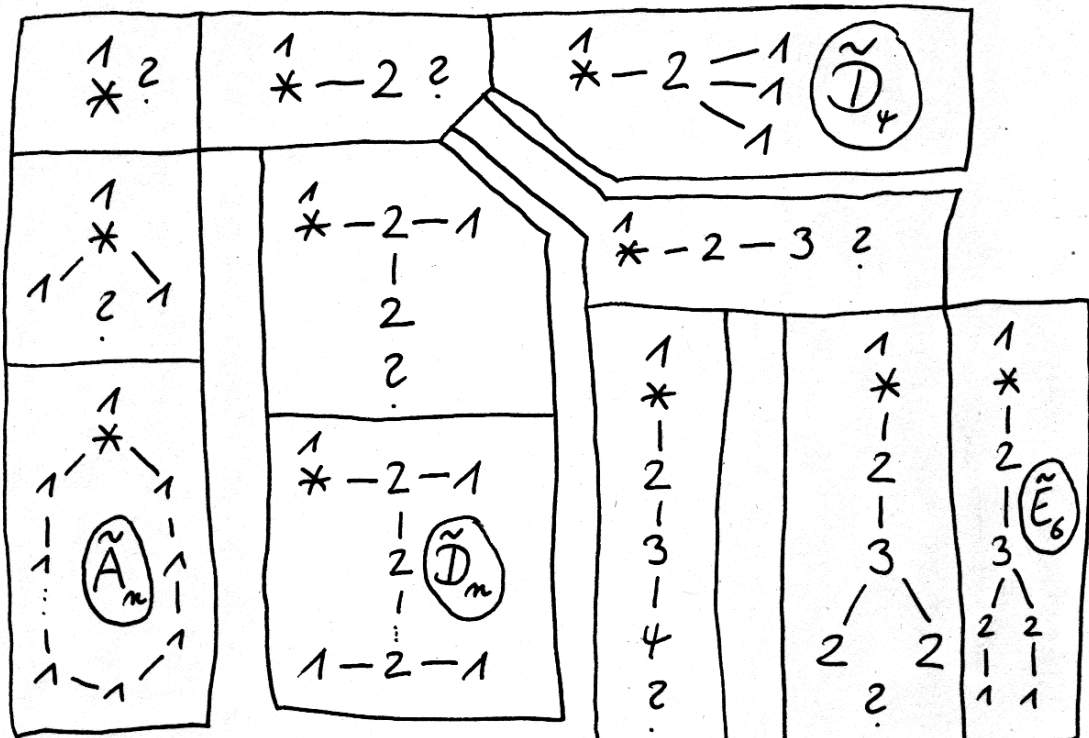
2.4.9 (**Klassifikation von Wurzelsystemen nach Vogan**). Sei R ein unzerlegbares Wurzelsystem und $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ eine Basis und $\alpha_0 := -\gamma$ das Negative der der höchsten kurzen Wurzel. So gilt eine Relation der Gestalt

$$\alpha_0 + n_1\alpha_1 + \dots + n_r\alpha_r = 0$$

und alle n_i sind darin positive natürliche Zahlen nach 2.4.3, in Formeln $n_i \geq 1$, und es gilt $\langle \alpha_0, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ für $1 \leq i \leq r$. Sicher gilt für $0 \leq j \leq r$ die Identität

$$\langle \alpha_0, \alpha_j^\vee \rangle + n_1\langle \alpha_1, \alpha_j^\vee \rangle + \dots + n_r\langle \alpha_r, \alpha_j^\vee \rangle = 0$$

Nun nehmen wir erst einmal zusätzlich an, unser Wurzelsystem sei einfach geschnürt, also $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| \leq 1$ für alle $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$, und es habe mehr als zwei Wurzeln, also $\alpha_0 \neq -\alpha_i$ für $1 \leq i \leq r$, so folgt $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \in \{0, -1\}$ falls $i \neq j$. Malen wir dann das sogenannte „erweiterte Dynkindiagramm“, also je einen fetten Punkt alias Knoten für jede der Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ und dazwischen jeweils einen Verbindungsstrich falls $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$, und schreiben den Wert n_i an den Knoten α_i und den Wert 1 an den Knoten α_0 , so bedeutet obige Relation in Worten: An jedem Knoten ist die Summe der Werte der Nachbarknoten das Doppelte des Wertes unseres Knotens selber. Malen wir im folgenden der besseren Übersichtlichkeit halber für α_0 einen Stern statt einem fetten Punkt, so können wir leicht sehen, welche Möglichkeiten das läßt. Der geneigte Leser sollte die Argumentation anhand des nebenstehenden Bildes unschwer nachvollziehen können. Als Endresultate bleiben nur die Diagramme \tilde{A}_n für $n \geq 2$, \tilde{D}_n für $n \geq 4$, und \tilde{E}_n für $n = 6, 7, 8$ aus nebenstehendem Diagramm mit jeweils $n + 1$ Knoten



und n einfachen Wurzeln. Nun gehen wir noch die Klassifikation der nicht einfach geschnürten unzerlegbaren Systeme an. Wir wissen bereits aus 2.3.13, daß es darin genau zwei Wurzellängen gibt. Mithin gibt es außer Kanten höchstens eine Sorte von mehrfachen Pfeilen. Es ist klar, daß wir bei einem einfach geschnürten Diagramm mit einem Automorphismus der Ordnung Zwei oder Drei landen, wenn wir der Teil unseres Diagramms aus langen Wurzeln je nach dem Längenverhältnis der langen und kurzen Wurzeln durch zwei oder drei disjunkte Kopien ersetzen und unsere mehrfachen bepfeilten Kanten von langen zu kurzen Wurzeln durch je eine einfache Kante von jeder der Kopien. So erhalten wir eine eindeutige Entsprechung zwischen bewerteten erweiterten Dynkindiagrammen mit mehrfachen Pfeilen und einfach geschnürten bewerteten erweiterten Dynkindiagrammen mit einem Automorphismus der Ordnung Zwei oder Drei, bei dem es keine Kanten zwischen verschiedenen Punkten ein- und derselben Bahn gibt und unter dem der ausgezeichnete Punkt fest bleibt. So erhalten wir die zusätzlichen Möglichkeiten, die in nebenstehendem Bild dargestellt sind. Ich habe mir nicht überlegt, ob man beim Nachweis der Existenz von Wurzelsystemen mit diesen erweiterten Dynkindiagrammen noch Teile der Argumentation weiter vereinfachen kann. Die ihrerseits leicht zu zeigende Proposition 1.10.4 zeigt sofort, daß unsere erweiterten Dynkindiagramme alle durch Vektoren in Skalarprodukträumen realisiert werden können. Dann muß man nur verwenden, daß das Gruppenerzeugnis der einfachen Wurzeln Weylgruppenstabil ist und jeweils nur endlich viele Vektoren gegebener Länge enthält, so daß die Weylgruppe selber endlich sein muß.

Übungen

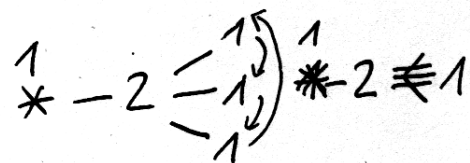
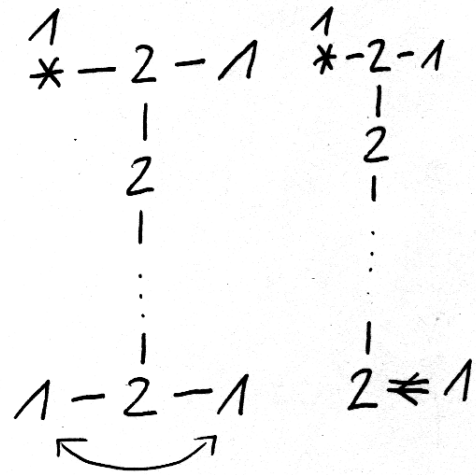
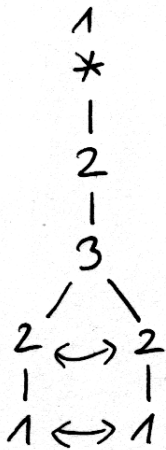
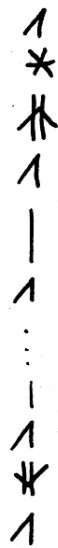
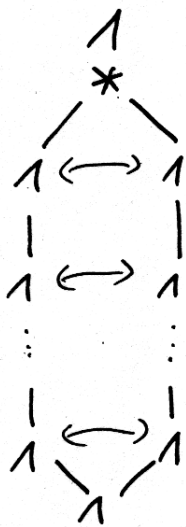
Übung 2.4.10 (Höchste Wurzeln und Kowurzeln). Wir übernehmen die Notationen aus 2.2.17. Man zeige:

Typ B_n : Die höchste Wurzel ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, die höchste Kowurzel die Kowurzel zur Wurzel ε_1 ;

Typ D_n : Die höchste Wurzel ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$;

Typ C_n : Die höchste Wurzel ist $2\varepsilon_1$, die höchste Kowurzel die Kowurzel zur Wurzel $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Ergänzende Übung 2.4.11. Gegeben ein Wurzelsystem R über einem angeordneten Körper mit einem System positiver Wurzeln R^+ gibt es für seine affine Weylgruppe genau einen Alkoven, der in der dominanten Kammer enthalten ist und in dessen Abschluß der Ursprung liegt. Er heißt der **fundamentale dominante Alkoven**. Alle Wände der dominanten Weylkammer sind auch Wände des fundamentalen dominanten Alkoven.



2.5 Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*

2.5.1. Gegeben ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null nennen wir die von seiner Weylgruppe und den Verschiebungen um Wurzeln erzeugte Gruppe von affinen Bewegungen unseres Vektorraums die **affine Weylgruppe** unseres Wurzelsystems und sprechen von der **endlichen Weylgruppe**, wenn wir besonders betonen wollen, daß nicht diese affine Weylgruppe gemeint ist. Ist $R \subset V$ unser Wurzelsystem, so bezeichnen wir seine affine Weylgruppe mit $\mathcal{W} = \mathcal{W}(R)$. Bezeichnet W die endliche Weylgruppe und $\langle R \rangle \subset V$ das Wurzelgitter, so haben wir demnach eine kurze exakte Sequenz $\langle R \rangle \hookrightarrow \mathcal{W} \twoheadrightarrow W$, wobei die Surjektion jeder affinen Bewegung aus \mathcal{W} ihren linearen Anteil zuordnet.

2.5.2 (**Terminologie bei affinen Weylgruppen**). Diese Terminologie weicht von der in der Literatur üblichen Terminologie ab. Bourbaki definiert die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems $R \subset V$ als die affine Spiegelungsgruppe $W_a(R) \subset \text{Aff}^\times(V^*)$, die wir die affine Spiegelungsgruppe des dualen Wurzelsystems nennen und $\mathcal{W}(R^\vee)$ notieren. Ich will Bourbaki's Konventionen nicht folgen, weil im folgenden bei der Darstellung einer halbeinfachen Gruppe oder Liealgebra mit Wurzelsystem R die Gruppe $\mathcal{W}(R)$ die größere Rolle spielen wird. Ich will nenne $\mathcal{W}(R^\vee)$ die **duale affine Weylgruppe von R** .

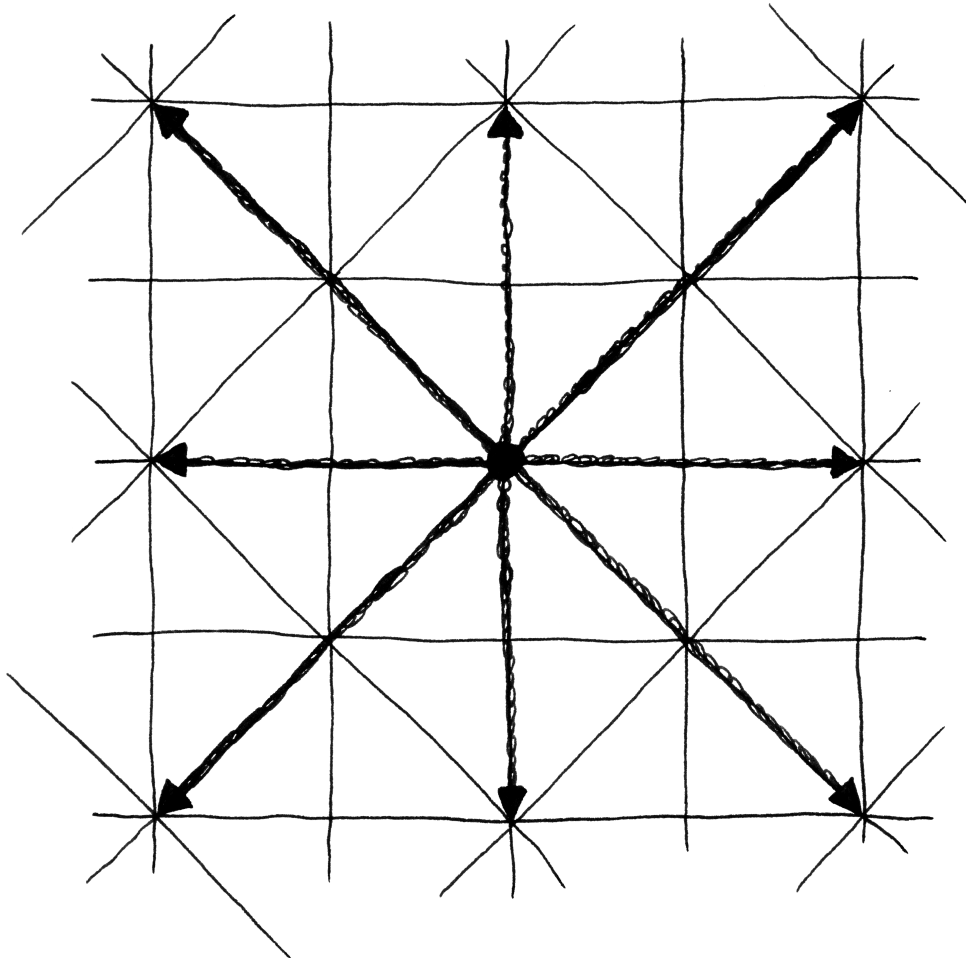
Satz 2.5.3 (Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme). *Das Bilden der affinen Weylgruppe liefert über jedem angeordneten Körper eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\{\text{Wurzelsysteme}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{essentielle affine Spiegelungsgruppen}\}$$

2.5.4. Wir brechen den Beweis in eine Reihe von Lemmata auf. Genauer zeigen wir in 2.5.5, daß die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems in der Tat eine essentielle affine Spiegelungsgruppe ist, und konstruieren in 2.5.9 und seinem Beweis eine inverse Abbildung. Die Wurzelsysteme selbst wurden bereits in 2.3.6 vollständig klassifiziert.

Lemma 2.5.5 (Affine Weylgruppen als affine Spiegelungsgruppen). *Die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems R über einem angeordneten Körper ist eine affine Spiegelungsgruppe und ihre Spiegelebenen sind genau die affinen Ebenen $H_{\alpha,n} := \{v \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle = n\} = \ker(\alpha^\vee) + (n/2)\alpha$ für $\alpha \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{H} := \{H_{\alpha,n} \mid \alpha \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ von Hyperbenen. Die Spiegelungen $s_{\alpha,n}$ mit Fixpunktmenge $H_{\alpha,n}$ und linearem Anteil s_α stabilisieren \mathcal{H} , und da \mathcal{H} auch lokal endlich ist, muß \mathcal{H} nach 1.6.1 gerade die Menge aller Spiegelebenen der von den $s_{\alpha,n}$ erzeugten affinen Spiegelungsgruppe



Die acht Vektoren eines Wurzelsystems vom Typ B_2 in der Papierebene und die Spiegelebenen seiner affinen Weylgruppe.

\mathcal{W}' sein. Offensichtlich gilt $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, aber da $s_{\alpha,1}s_{\alpha,0}$ gerade die Verschiebung $\lambda \mapsto \lambda + \alpha$ um die Wurzel $\alpha \in R$ ist, gilt auch umgekehrt $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ und mithin $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$. \square

Definition 2.5.6. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe heißt ein Punkt des zugrundeliegenden affinen Raums ein **spezieller Punkt**, wenn es für jede Spiegelebene unserer Gruppe eine parallele Spiegelebene unserer Gruppe gibt, die durch besagten Punkt geht.

Beispiel 2.5.7. Die speziellen Punkte der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems über einem angeordneten Körper sind genau die Punkte, an denen alle Korwurzeln ganzzahlige Werte annehmen. Sie heißen die **ganzen Gewichte** unseres Wurzelsystems.

Lemma 2.5.8 (Existenz spezieller Punkte). *Für jede affine Spiegelungsgruppe gibt es mindestens einen speziellen Punkt.*

Beweis. Betrachten wir einen Alkoven der Spiegelungsgruppe aller linearen Anteile unserer affinen Spiegelungsgruppe und wählen für jede Wand dieses Alkovens einen darauf senkrechten Vektor, so sind besagte Vektoren linear unabhängig nach 1.8.6. Wählen wir zu jeder Spiegelung an einer dieser Wände ein Urbild in der affinen Spiegelungsgruppe, so haben die zugehörigen affinen Spiegelebenen folglich nichtleeren Schnitt. Wir behaupten, daß jeder Punkt aus diesem Schnitt ein spezieller Punkt ist. In der Tat erzeugen ja unsere Urbilder eine Untergruppe unserer affinen Spiegelungsgruppe, die besagten Punkt festhält und die surjektiv auf die Gruppe aller linearen Anteile unserer affinen Gruppe geht. \square

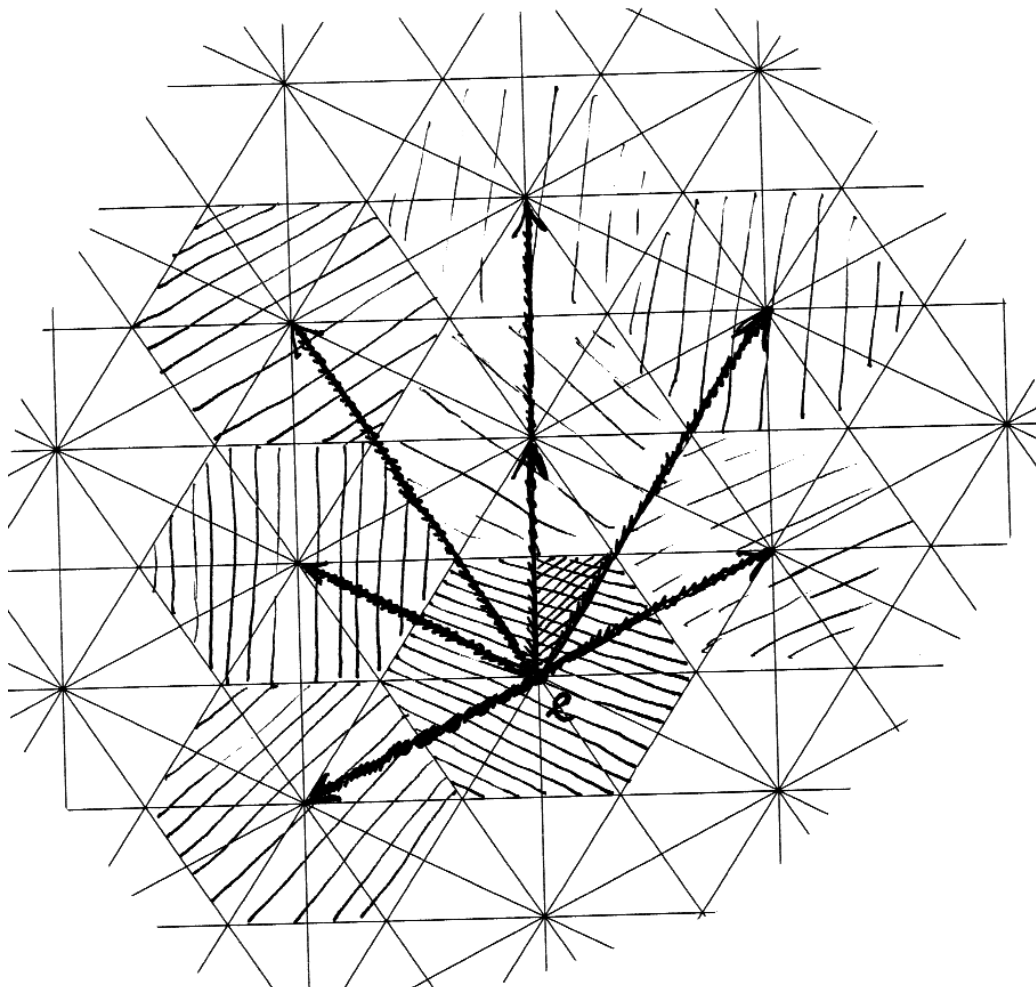
Lemma 2.5.9 (Essentielle affine Spiegelungsgruppen). *Jede essentielle affine Spiegelungsgruppe ist isomorph zur affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems.*

Beweis. Sei (W, E) unsere Spiegelungsgruppe. Wir wählen ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller ihrer Spiegelebenen, und jede Parallelenklasse von Spiegelebenen ist offensichtlich von der Gestalt

$$\{H + nv\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

für eine Spiegelebene H und einen darauf senkrechten Richtungsvektor v . Die Verschiebung um $\alpha = 2v$ gehört notwendig zu W als die Verknüpfung $s_{H+v} \circ s_H$. Bezeichnet nun R die Menge aller so konstruierten Vektoren α und ist $e \in E$ ein spezieller Punkt und W_e seine Isotropiegruppe, so schränkt die Verknüpfung in unserer Gruppe ein zu einer Bijektion

$$W_e \times \langle R \rangle \xrightarrow{\sim} W$$



Eine affine Spiegelungsgruppe, die genau genommen nicht orthogonal ist für die Standardmetrik der Papierebene. Eingezeichnet ein spezieller Punkt e , doppelt schraffiert ein Alkoven mit e im Abschluß. Das Sechseck darum besteht aus zwölf Alkoven, die die Bahn des doppelt schraffierten Alkoven unter der Isotropiegruppe W_e bilden. Durch Verschieben dieses Sechsecks mit den Vektoren des Wurzelgitters erhalten wir „eine überlappungsfreie Überdeckung der Ebene“. Das illustriert unsere Erkenntnis

$$W_e \times \langle R \rangle \xrightarrow{\sim} W$$

aus dem Beweis von Lemma 2.5.9.

In der Tat liegen nämlich alle Spiegelungen bereits im Bild dieser Abbildung und die Injektivität ist eh klar. Ist W essentiell, so spannt folglich R den Raum der Richtungsvektoren auf. Weiter ist mit e auch $\alpha + e$ ein spezieller Punkt für alle $\alpha \in R$, und das zeigt umgehend, daß R ein Wurzelsystem ist und W seine affine Weylgruppe. \square

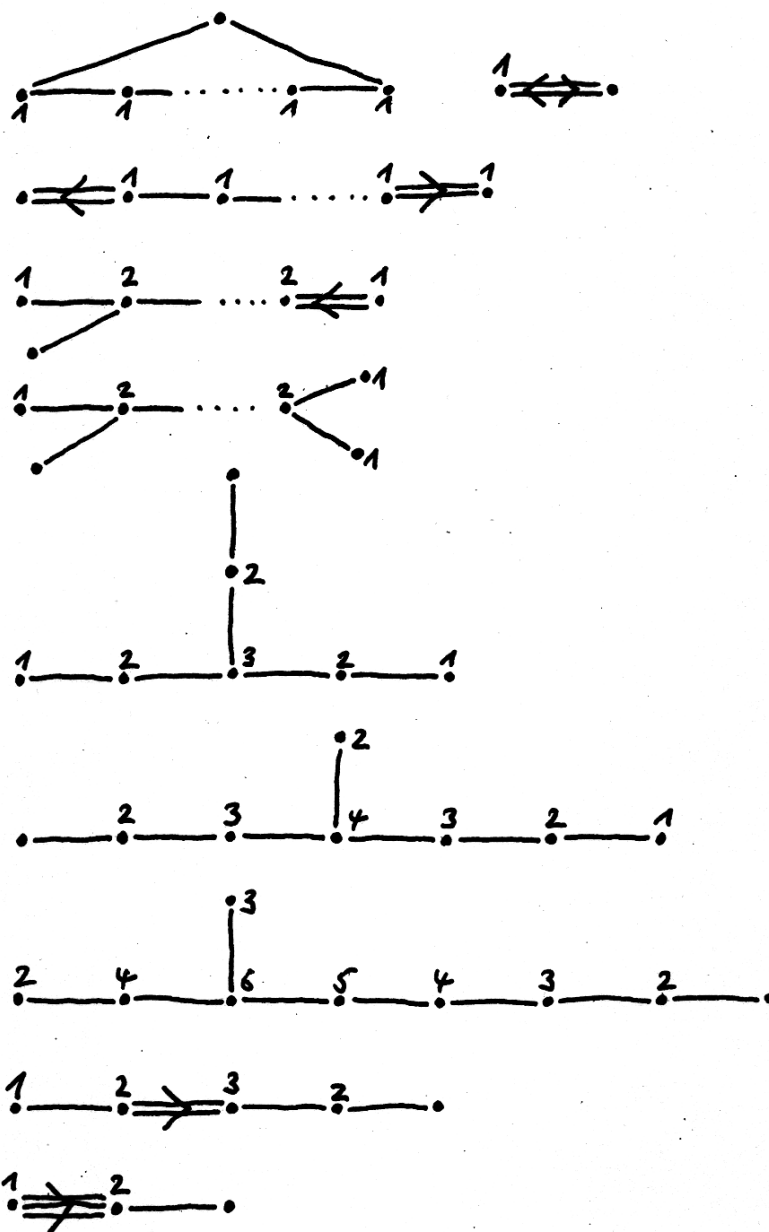
2.5.10 (Kristallographische endliche Spiegelungsgruppen). Ist eine endliche lineare reelle Spiegelungsgruppe kristallographisch und ist der Ursprung ihr einziger Fixpunkt, so ist sie die Isotropiegruppe des Ursprungs in einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe. In der Tat besitzt jede Spiegelebene dann eine Gleichung, die auf dem Gitter nur ganzzahlige Werte annimmt. Alle Parallelen durch Gitterpunkte zu Spiegelebenen bilden deshalb ein lokal endliches System von Hyperebenen und nach 1.6.1 ist dieses System das System aller Spiegelebenen einer affinen Spiegelungsgruppe, von der man leicht sieht, daß sie essentiell sein muß.

2.5.11 (Klassifikation der affinen reellen Spiegelungsgruppen). Wir haben damit die affinen reellen Spiegelungsgruppen vollständig klassifiziert: Nach 1.12.7 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen essentiellen Faktor, deren Isomorphieklassen eindeutig bestimmt sind. Nun gibt 1.9.7 im Verbund mit 1.9.5 eine Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen durch ihre Coxeter-Graphen zusammen mit der Dimension ihrer Fixpunktmenge, und 2.5.3 gibt eine Klassifikation der essentiellen affinen Spiegelungsgruppen durch Wurzelsysteme, die hinwiederum nach 2.2.14 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Diese unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich haben wir in 2.3.6 durch ihre Dynkin-Diagramme klassifiziert.

2.5.12 (Coxetergraphen affiner Spiegelungsgruppen). Wir bestimmen nun die Coxetergraphen der affinen Weylgruppen unserer Wurzelsysteme. Es reicht, das für unzerlegbare Wurzelsysteme zu leisten. Der Weg ist durch 2.4.4 vorgezeichnet: Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem R mit Basis $\Pi \subset R$ bestimmen wir zunächst $\gamma \in R$ derart, daß $\gamma^\vee \in R^\vee$ die höchste Kowurzel ist. Dann bilden wir die Matrix der $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ mit $\alpha, \beta \in \Pi \sqcup \{-\gamma\}$ und stellen diese Information wieder in Form eines Diagramms dar, das wir in diesem Fall das **erweiterte Dynkindiagramm** unseres Wurzelsystems nennen. Wir notieren dabei den einzigen zusätzlich möglichen Fall $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -2 = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ durch einen Doppelstrich mit Pfeilen in beide Richtungen. Außerdem schreiben wir an jeden Knoten $\alpha \in \Pi$ seinen Koeffizienten n_α in der Darstellung

$$\gamma = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$$

unserer Wurzel γ mit der höchsten Kowurzel, so daß nur der zusätzliche Knoten keinen Koeffizienten hat. Die so entstehenden erweiterten Dynkindiagramme sind



Die erweiterten Dynkindiagramme. Die Koeffizienten an jedem Knoten in diesem Bild sind die Koeffizienten der entsprechenden einfachen Wurzel bei einer Darstellung der Wurzel mit der höchsten Kowurzel als Linearkombination der einfachen Wurzeln. Es mag eine gute Übung sein, diese Tafel zu überprüfen.

Ich schlage die Notation \hat{Z} für das erweiterte Dynkindiagramm zu einem Dynkindiagramm Z vor, da die Notation \tilde{Z} bereits für das dual erweiterte Diagramm vergeben ist.

in nebenstehendem Bild aufgelistet. Die Coxeterdiagramme der affinen Weylgruppen liest man daraus ab, indem man wie bei den normalen Dynkindiagrammen vorgeht und zusätzlich etwaige doppelt befeilte Doppelkanten in mit ∞ bezeichnete Kanten umwandelt. Die zugehörigen Cosinusmatrizen haben nach 2.1.16 die Einträge

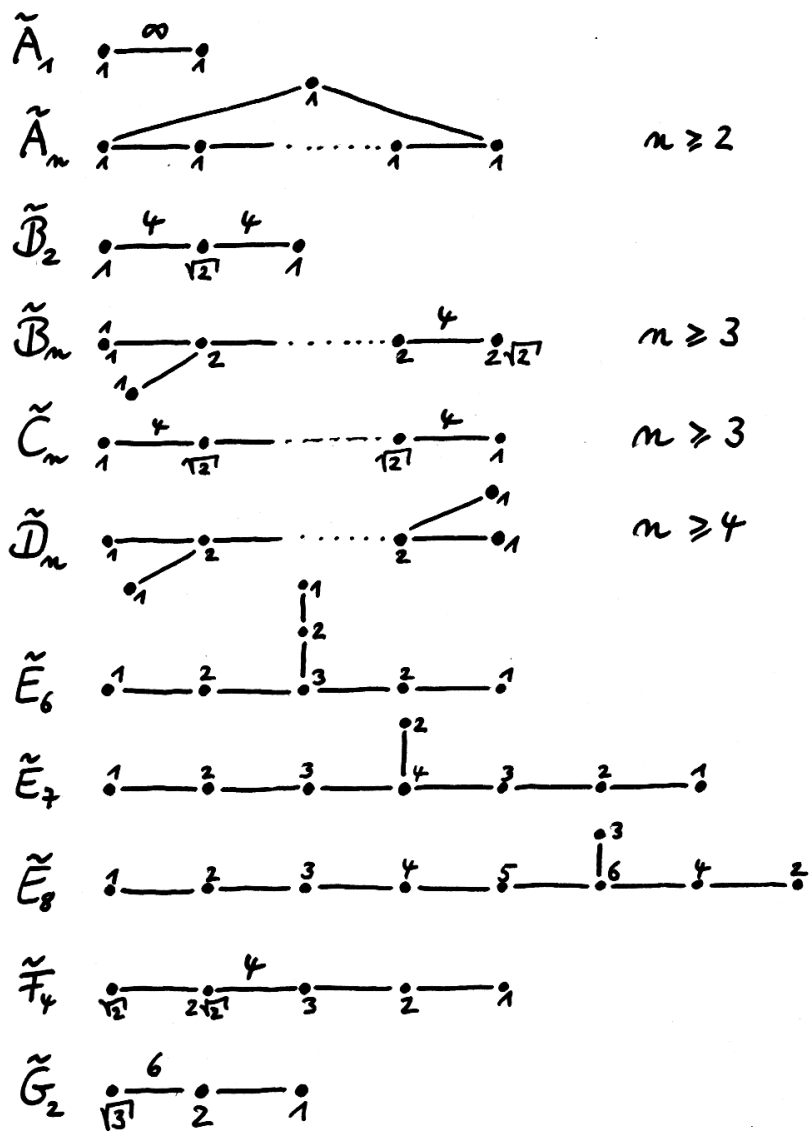
$$\|\alpha\|^{-1}(\langle\alpha, \beta^\vee\rangle/2)\|\beta\|$$

und entstehen also aus der „erweiterten Cartanmatrix“ der $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle$ bis auf den Faktor 2 durch Konjugation mit der Diagonalmatrix der Längen unserer Wurzeln. Natürlich gilt

$$0 = \langle-\gamma, \beta^\vee\rangle + \sum n_\alpha \langle\alpha, \beta^\vee\rangle$$

für alle β und wir erhalten so einen von Null verschiedenen Vektor mit nichtnegativen Einträgen im Kern der „erweiterten Cartanmatrix“ und dann durch Multiplikation mit unserer Diagonalmatrix auch einen von Null verschiedenen Vektor mit nichtnegativen Einträgen im Kern der Cosinusmatrix der affinen Weylgruppe. Das ist genau der Vektor, den wir beim Beweis von 1.11.1 haben vom Himmel fallen lassen.

Ergänzung 2.5.13 (Terminologisches zu erweiterten Dynkindiagrammen). Der **graphe de Dynkin complété** oder deutsch das „vervollständigte Dynkindiagramm“ im Sinne von Bourbaki ist zu unserem erweiterten Dynkindiagramm dual in dem Sinne, daß die Konstruktion unseres erweiterten Dynkindiagramms beschrieben werden kann als die Verkettung „drehe alle Pfeile um“, „bilde dann den graphe de Dynkin complété“ und „drehe wieder alle Pfeile um“. Man erhält es, indem man dieselbe Konstruktion mit $\Pi \sqcup \{-\Lambda\}$ für Λ die höchste Wurzel durchführt, die wir mit $\Pi \sqcup \{-\gamma\}$ für γ die Wurzel zur höchsten Kowurzel durchgeföhrt haben. Ich nenne es das **dual erweiterte Dynkindiagramm**.



Eine Liste aller zusammenhängenden Coxetergraphen zu essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen. Die Notation kommt daher, daß der Graph der dualen affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ Z stets \tilde{Z} notiert wird. Der Index ist insbesondere jeweils um eins kleiner als die Knotenzahl. Die Zahlen an den Punkten bilden jeweils einen Vektor im Kern der Cosinusmatrix des entsprechenden Coxetergraphen.

3 Coxetergruppen als Spiegelungsgruppen

3.1 Spiegelungsgruppen zu Coxetermatrizen

3.1.1. Gegeben eine endliche Menge S verstehen wir wie in 1.9.2 unter einer **Coxetermatrix mit durch S indizierten Zeilen und Spalten** eine Abbildung $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ mit $m(s, t) = m(t, s) \forall s, t \in S$ und $m(s, s) = 1 \forall s \in S$ und $m(s, t) \geq 2$ falls $s \neq t$.

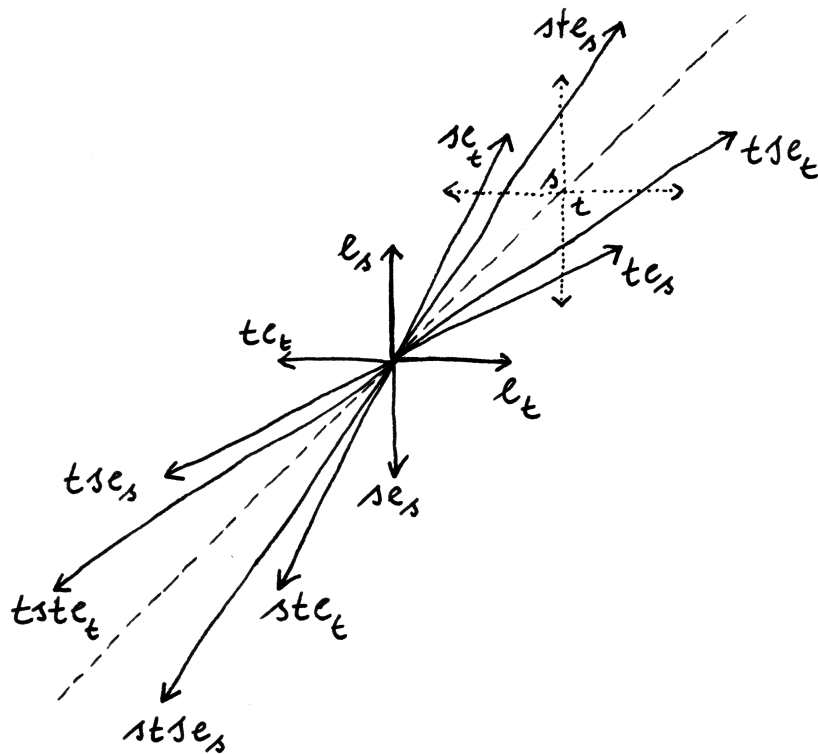
3.1.2. Für eine endliche Menge S und eine symmetrische $(S \times S)$ -Matrix $m : S \times S \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$ können wir den freien Vektorraum $E := \mathbb{R}S$ über S bilden mit seiner kanonischen Basis $(e_s)_{s \in S}$ und darauf eine symmetrische Bilinearform $(\ , \)$ erklären durch die Vorschrift $(e_s, e_t) := -\cos(\pi/m(s, t))$. Unter der Annahme $m(s, s) \neq 2$ können wir weiter in $GL(E)$ die lineare Abbildung mit Fixpunktmenge $\{v \in E \mid (e_s, v) = 0\}$ und (-1) -Eigenraum $\mathbb{R}e_s$ betrachten. Diese lineare Abbildung notieren wir \hat{s} oder oft auch einfach s und nennen sie die **einfache Spiegelung** zum Index $s \in S$. Die von den einfachen Spiegelungen erzeugte Untergruppe

$$\hat{W} \subset GL(E)$$

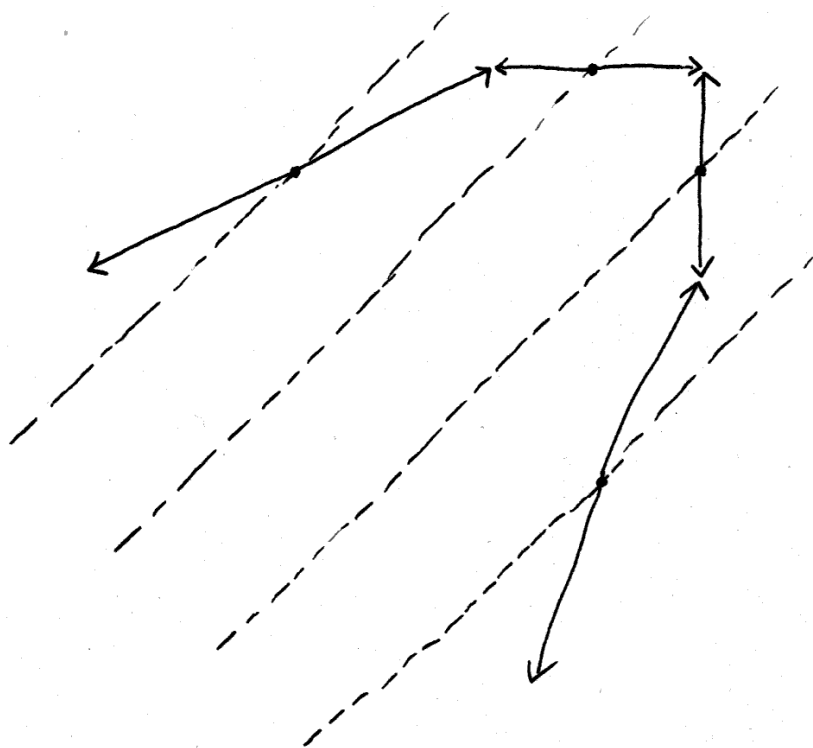
nenne ich die **Spiegelungsgruppe zur Coxetermatrix m** . Die **Länge** $l(w)$ eines Elements von \hat{W} erklären wir als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt einfacher Spiegelungen. Dann gilt sicher $\det w = (-1)^{l(w)}$ und folglich $l(w) \neq l(ws)$ für jede einfache Spiegelung s . Eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements $w \in \hat{W}$ als Produkt einfacher Spiegelungen heißt eine **reduzierte Darstellung** von w .

3.1.3. Ich schlage für die so entstehende definierende Darstellung unserer Spiegelungsgruppe \hat{W} die Bezeichnung als **wurzlige Darstellung** vor, da in ihr alle einfachen Spiegelungen verschiedene (-1) -Eigenräume haben und da diese (-1) -Eigenräume im Fall der Weylgruppe eines Wurzelsystems gerade die durch die Wurzeln erzeugten Geraden sind.

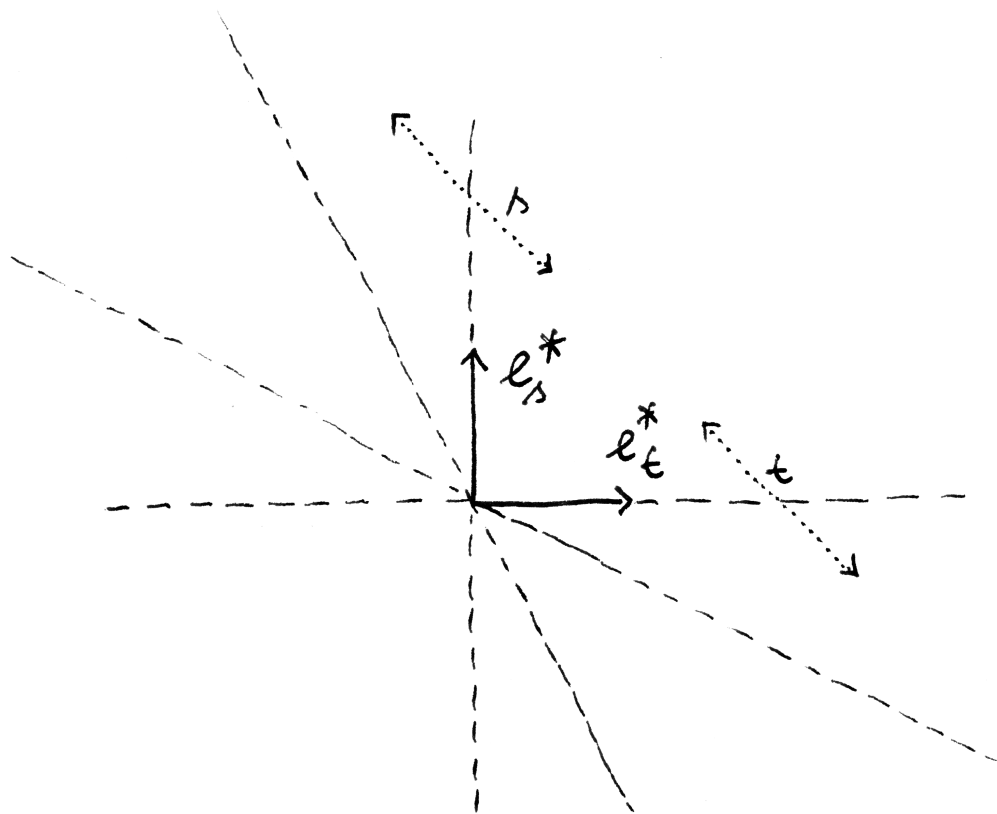
3.1.4. Gegeben eine Coxetermatrix betrachten wir zu ihrer Spiegelungsgruppe $\hat{W} \subset GL(E)$ auch die kontragrediente Operation von \hat{W} auf dem Dualraum E^* , für die ich die Bezeichnung als **alkovische Darstellung** vorschlage. In E^* ist die Fixpunktmenge einer erzeugenden Spiegelung s die Hyperebene H_s aller Linearformen, die auf e_s verschwinden, und s vertauscht beide Halbräume zu dieser Hyperebene. Negativ gemacht wird der Vektor e_s^* der dualen Basis. Gemeinsame Verallgemeinerungen dieser beiden Typen von Darstellungen, die insbesondere in der Darstellungstheorie der sogenannten „Kac-Moody-Algebren“ von Bedeutung sind, diskutieren wir in 3.2.9.



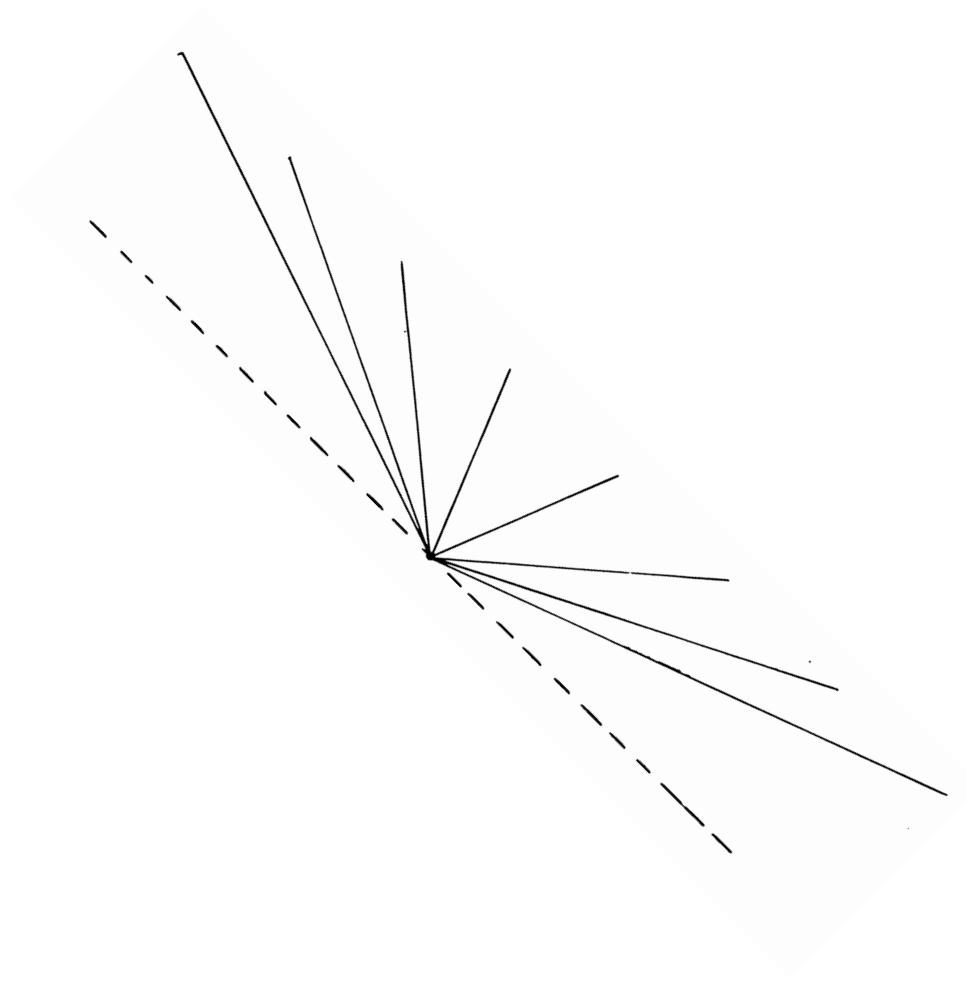
Die wurzlige Darstellung im Fall der unendlichen Diedergruppe. in diesem Fall haben wir $(e_s, e_t) = -1$ und folglich $t e_s = e_s + 2 e_t$ und entsprechend $s e_t = e_t + 2 e_s$. Die Fixpunkt mengen beider erzeugenden Spiegelungen fallen zusammen und bilden eine Gerade mit Richtungsvektor $e_t + e_s$, die ich gestrichelt eingezeichnet habe und die unter allen Elementen von W punktweise fest bleibt. Die Gruppe W besteht aus allen Wörtern in s und t , bei denen sich die Buchstaben abwechseln, und je zwei derartige Wörter liefern auch verschiedene Gruppenelemente.



Die wurzliche Darstellung der Diedergruppe im Sinne von 3.2.9 anzureichert. Wir denken uns dazu dort einen zusätzlichen Basisvektor δ , der senkrecht auch der Papierebene kommt, indem wir in der dortigen Notation zum Beispiel $\langle \delta, e_t^\vee \rangle = \langle \delta, e_t^\vee \rangle = 1$ setzen. Auf der affinen Ebene $\delta + \mathbb{R} e_s + \mathbb{R} e_t$ operiert unsere Coxetergruppe in der Weise, daß die Spiegelebenen paarweise parallele Geraden sind, ihre Eigenvektoren aber „nach außen zu immer steiler werden“, wie in obigem Bild angedeutet.



Die alkovische Darstellung im Fall der unendlichen Diedergruppe. Eingezeichnet sind die Vektoren der dualen Basis und die Fixpunktmenngen der „Spiegelungen“ s, t, sts und tst als gestrichelte Geraden. Die Wirkung von s und t ist durch gepunktete Doppelpfeile angedeutet, die jeweils Paare von Punkten verbinden, die vertauscht werden. Vereinigen wir den abgeschlossenen positiven Quadranten mit allen seinen Bildern unter der W -Operation, so erhalten wir die offene Halbebene $\{a e_s^* + b e_t^* \mid a + b > 0\}$ vereinigt mit dem Ursprung. Zeichnen wir alle Spiegelebenen ein, so entsteht in dieser offenen Halbebene eine Art „geöffnetes Buch von der Seite betrachtet“, aber natürlich mit unendlich vielen Blättern.



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit zwei Indizes s, t und Einträgen $m(s, t) = \infty$ in einer anderen Basis, in der der fundamentale Alkoven etwas spitzer aussieht und dafür mehr Alkoven einigermaßen übersichtlich eingezeichnet werden können als im vorhergehenden Bild. Die Vereinigung aller Alkoven alias der Titskegel ist eine offene Halbebene vereinigt mit dem Ursprung. Es entsteht so eine Art „geöffnetes Buch mit unendlich vielen Blättern“. Jede Parallele zur gestrichelt eingezeichneten Achse ist stabil unter unserer Spiegelungsgruppe, und mit Ausnahme der gestrichelt eingezeichneten Achse selber operiert unsere Spiegelungsgruppe dort als eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne von [1.5.2](#).

Beispiel 3.1.5. Im Fall der unendlichen Diedergruppe ist die alkovische Darstellung das „geöffnete Buch“.

Beispiel 3.1.6. Im Fall der affinen Spiegelungsgruppe (W, E) zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem ist die alkovische Darstellung der Spiegelungsgruppe zu ihrer Coxetermatrix isomorph zur Linearisierung $\text{Lin}(E)$ des affinen Raums E im Sinne von [LA1] ?? mit der offensichtlichen Fortsetzung der Operation von W zu einer Operation durch Vektorraumautomorphismen.

Beispiel 3.1.7. Eine allgemeine affine Spiegelungsgruppe können wir aus der alkovische Darstellung der Spiegelungsgruppe ihrer Coxetermatrix zurückgewinnen, indem wir darin den affinen Teilraum betrachten, der nur aus Linearformen besteht, die auf dem Radikal unserer Bilinearform $(\ , \)$ zu einer geeignet vorgegebenen festen Linearform einschränken. Im Fall einer affinen Spiegelungsgruppe (W, E) zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem reicht es zu fordern, daß diese feste Linearform nicht Null sein soll, im allgemeinen muß das „für jeden unzerlegbaren essentiellen affinen Summanden“ gefordert werden.

Satz 3.1.8 (Geometrie der alkovischen Darstellung). *In der alkovischen Darstellung E^* der Spiegelungsgruppe \hat{W} zu einer Coxetermatrix mit Indexmenge S betrachten wir die Halbräume $H_s^+ := \{p \in E^* \mid \langle p, e_s \rangle > 0\}$ und den Alkoven $A^+ := \bigcap_{s \in S} H_s^+$. So gilt:*

1. *Die Bilder wA^+ des Alkoven A^+ unter Elementen unserer Spiegelungsgruppe $w \in W$ sind paarweise disjunkt. Wir nennen sie die **Alkoven** unserer alkovischen Darstellung;*
2. *Die Vereinigung $C := \bigcup_{w \in \hat{W}} w\bar{A}^+$ der Bilder des Abschlusses des Alkoven A^+ ist eine konvexe und unter der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren stabile Teilmenge von E^* , der sogenannte **Tits-Kegel**;*
3. *Die Elemente unserer Spiegelungsgruppe \hat{W} , die auf der alkovischen Darstellung als Spiegelungen operieren, haben paarweise verschiedene Spiegelebenen, und die Menge aller dieser Spiegelebenen ist die Menge von Hyperebenen $\mathcal{H} := \{wH_s \mid w \in \hat{W}, s \in S\}$;*
4. *Die Alkoven wA^+ sind die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements $C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ der Vereinigung aller Spiegelebenen im Titskegel;*
5. *Für alle einfachen Spiegelungen $s \in S$ und alle $w \in \hat{W}$ gilt die Äquivalenz $l(ws) > l(w) \Leftrightarrow wH_s^+ \supset A^+$.*

Beispiel 3.1.9. Im Fall der unendlichen Diedergruppe ist der Titskegel eine offene Halbebene vereinigt mit dem Ursprung. Im Fall 3.1.6 der Linearisierung einer affinen Spiegelungsgruppe zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem ist der Titskegel ein offener Halbraum vereinigt mit dem Ursprung.

Beweis. 5. Wir argumentieren wie beim Beweis von 1.9.9. Kennen wir die Implikation \Rightarrow , so erhalten wir automatisch $l(ws) < l(w) \Rightarrow wH_s^+ \cap A^+ = \emptyset$ und damit die Äquivalenz. Die Implikation \Rightarrow zeigen wir durch Induktion über $l(w)$. Der Fall $l(w) = 0$ ist offensichtlich. Gilt $l(w) > 0$, so finden wir natürlich $t \in S$ mit $l(wt) < l(w)$ und haben notwendig $t \neq s$. Indem wir so lange s oder t von rechts an w daranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung $w = vu$ mit $u \in \langle s, t \rangle$, $l(vs) > l(v)$, $l(vt) > l(v)$ und $l(w) = l(v) + l(u)$. Natürlich gilt dann auch $l(us) > l(u)$. Falls nun gilt $u \neq w$, so können wir die Induktionsannahme auf u anwenden und erhalten $uH_s^+ \supset A^+$. Wegen $H_s^+ \cap H_t^+ = (H_s \cap H_t) + A^+$ folgt

$$uH_s^+ \supset H_s^+ \cap H_t^+$$

Da in jedem Falle gilt $u \neq 1$, können wir dann weiter die Induktionsannahme auf v anwenden und erhalten $vH_s^+ \supset A^+$ und $vH_t^+ \supset A^+$. Zusammen folgt so in der Tat

$$wH_s^+ = vuH_s^+ \supset (vH_s^+ \cap vH_t^+) \supset A^+$$

Es bleibt nur noch, den Fall $u = w$ zu behandeln, also den Fall von Diedergruppen. Der aber kann leicht durch Inspektion geregelt werden.

1. Die Ebenen wH_s für $w \in \hat{W}$ und $s \in S$ bilden ein \hat{W} -stabiles System von Hyperebenen \mathcal{H} in E^* , und Teil 5 zeigt insbesondere, daß keine dieser Hyperebenen unser A^+ trifft. Insbesondere ist A^+ eine maximale konvexe Teilmenge im Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen aus \mathcal{H} . Je zwei verschiedene derartige maximale konvexe Teilmengen sind disjunkt nach 1.3.38 und mit A^+ ist auch wA^+ solch eine maximale konvexe Teilmenge für alle $w \in \hat{W}$. Schließlich folgt aus $wA^+ = A^+$ mit unserer Behauptung sofort $l(ws) > l(w)$ für alle $s \in S$ alias $w = \text{id}$. Mithin sind die wA^+ mit $w \in \hat{W}$ paarweise disjunkt.

2. Induktion über die Länge von $w \in \hat{W}$ zeigt unmittelbar, daß für $p \in A^+$ und $q \in wA^+$ das Segment $[p, q]$ genau $l(w)$ Hyperebenen aus \mathcal{H} trifft und ganz in C verläuft und nur Alkovenabschlüsse $x\bar{A}^+$ mit $l(x) \leq l(w)$ trifft. Wenn wir nun $\bar{p} \in \bar{A}^+$ und $\bar{q} \in w\bar{A}^+$ nehmen, so muß folglich das Segment $[\bar{p}, \bar{q}]$ in der Vereinigung der $x\bar{A}^+$ mit $l(x) \leq l(w)$ enthalten sein.

3. Der Titskegel C kann nie ganz in einem abgeschlossenen Halbraum zu einer Spiegelebene H einer Spiegelung aus \hat{W} liegen. Dann aber finden wir auch Punkte aus dem Inneren von Alkoven auf beiden Seiten unserer Spiegelebene H , sagen wir Punkte aus den Alkoven A und B . Wir können sie verbinden durch eine endliche Folge von Alkoven $A = A_0, A_1, \dots, A_r = B$, die sich jeweils längs einer Wand berühren. Ist H keine dieser Wände, so muß es einen dieser Alkoven treffen, der dann unter der entsprechenden Spiegelung auf sich selber ginge: Widerspruch!

4. Beim Beweis von Teil 1 wurde bereits gezeigt, daß die wA^+ maximale konvexe

Teilmengen im Komplement $E^* \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ der Vereinigung aller Spiegelebenen sind. Daß sie genau die maximalen konvexen Teilmengen von $C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ sind, ist damit auch klar. \square

3.1.10 (Trennende Spiegelebenen und Austauschlemma). Auch für die Spiegelungsgruppe einer beliebigen Coxetermatrix gilt

$$d(A^+, wA^+) = l(w)$$

für $d(A, B)$ die Zahl der Hyperebenen aus \mathcal{H} , die gegebene Alkoven A und B trennen, wie bereits beim Beweis von Teil 2 aus 3.1.8 bemerkt wurde. Auch in dieser Allgemeinheit gilt für Alkoven A, B und eine Spiegelebene $L \in \mathcal{H}$ die Äquivalenz

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \Leftrightarrow d(A, s_L B) < d(A, B)$$

mit demselben Beweis wie 1.6.6. Auch in dieser Allgemeinheit folgt wie in 1.6.7 das **Austauschlemma**: Gegeben $s_1, \dots, s_r \in S$ und eine Spiegelung $t \in \hat{W}$ mit $l(ts_1 \dots s_r) < l(s_1 \dots s_r)$ gibt es einen Index $i \in [1, r]$ mit

$$ts_1 \dots s_i \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

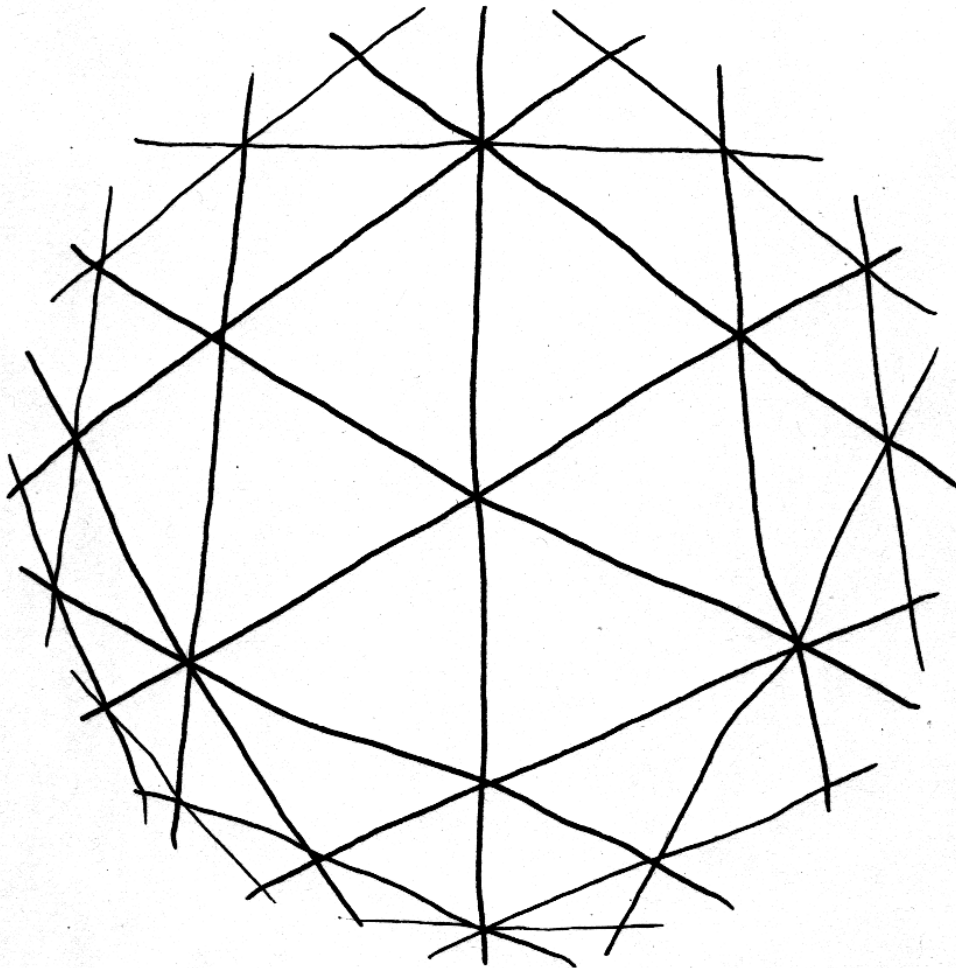
3.1.11 (Fundamentaltbereiche und Isotropiegruppen). Auch für die Spiegelungsgruppe einer beliebigen Coxetermatrix ist die Isotropiegruppe jedes Punktes aus dem Titskegel erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden eines festen Alkoven, der unseren Punkt in seinem Abschluß hat; die fragliche Isotropiegruppe operiert frei und transitiv auf der Menge aller Alkoven, die unseren Punkt in ihrem Abschluß haben; und jeder Alkovenabschluß ein Fundamentaltbereich für die Operation unserer Spiegelungsgruppe auf dem Titskegel. Die Beweise sind identisch zu den Beweisen im affinen Fall 1.7.3 und 1.7.4.

3.2 Erzeuger und Relationen für Spiegelungsgruppen

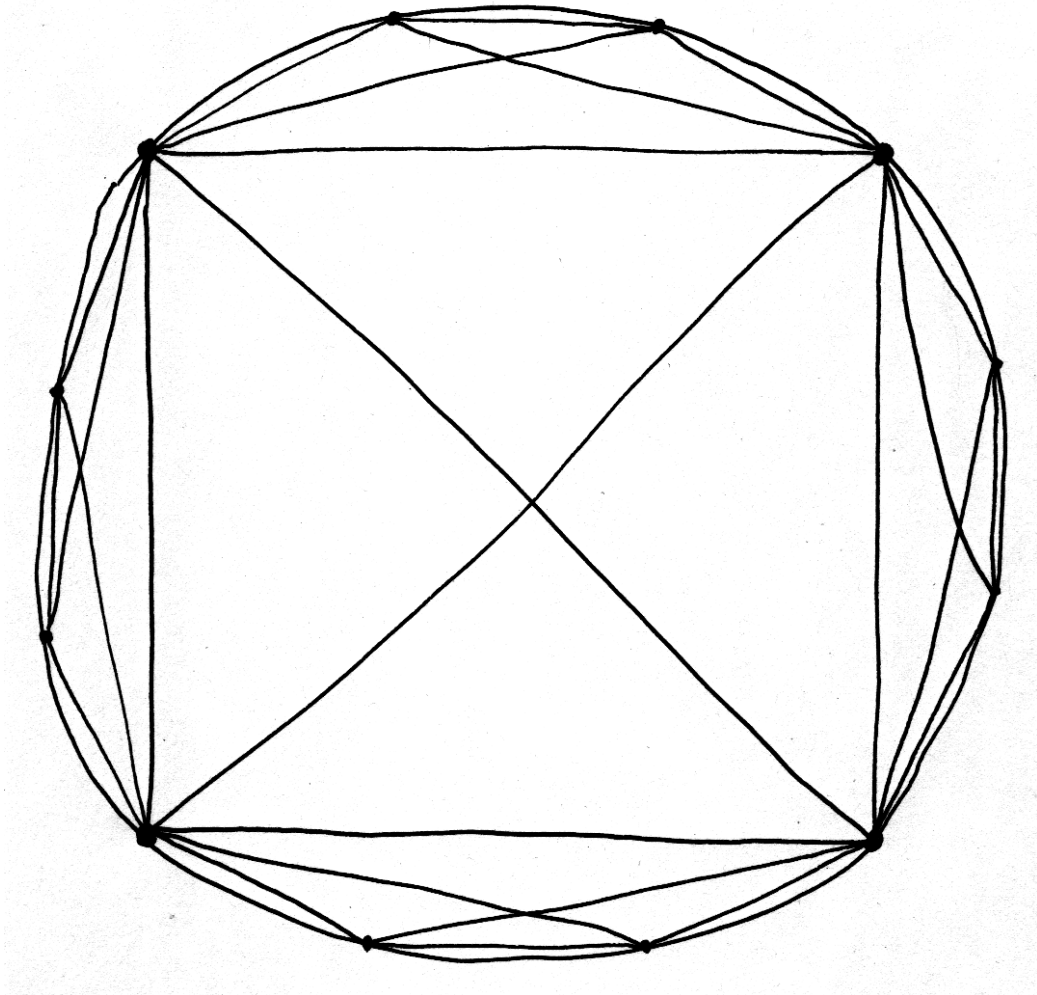
Definition 3.2.1. Ein **Coxetersystem** ist ein Paar (W, S) bestehend aus einer Gruppe W und einer Teilmenge $S \subset W$ von W derart, daß W erzeugt wird von S mit den Relationen $s^2 = e \ \forall s \in S$ und $(st)^{\text{ord}(st)} = e$ für alle $s, t \in S$ mit $\text{ord}(st) < \infty$. Die Elemente von S heißen die **einfachen Spiegelungen** von W . Wir erklären die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt einfacher Spiegelungen.

3.2.2. Die Relation $(st)^{\text{ord}(st)} = e$ kann unter der Bedingung $s^2 = t^2 = e$ auch geschrieben werden in einer der Formen

$$sts \dots t = tst \dots s \quad \text{beziehungsweise} \quad st \dots s = ts \dots t$$



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit drei Indizes r, s, t und Einträgen $m(r, s) = m(s, t) = 3$ und $m(r, t) = 4$. Genauer haben wir hier den Schnitt des Titskegels mit einer affinen Ebene H im dreidimensionalen Raum mit der Basis e_r^*, e_s^*, e_t^* eingezeichnet. Die Schnitte der Koordinatenebenen mit unserer affinen Ebene sind die drei Wände eines festen Dreiecks. Die Alkoven schneiden unsere Ebene H in den offenen Dreiecksflächen, von denen es unendlich viele gibt, die ich nicht alle einzeichnen konnte. Der Titskegel selbst schneidet in diesem Fall unsere affine Ebene H in einer offenen Kreisscheibe.



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit drei Indizes r, s, t und Einträgen $m(r, s) = m(s, t) = \infty$ und $m(r, t) = 2$. Genauer haben wir hier den Schnitt des Titskegels mit einer affinen Ebene H im dreidimensionalen Raum mit der Basis e_r^*, e_s^*, e_t^* eingezeichnet. Die Schnitte der Koordinatenebenen mit unserer affinen Ebene sind die drei Wände eines festen Dreiecks. Die Alkoven schneiden unsere Ebene H in den offenen Dreiecksflächen, von denen es unendlich viele gibt, die ich nicht alle einzeichnen konnte. Der Titskegel selbst schneidet in diesem Fall unsere affine Ebene H in einer Kreisscheibe mit zusätzlichen Punkten auf dem Rand. In unserem Fall handelt es sich dabei genau um die Punkte $\exp(2\pi i(\frac{1}{8} + \frac{1}{4 \cdot 3^n}))$ mit $n \in \mathbb{N}$. Um jeden dieser Punkte „sieht unser Bild aus wie ein geöffnetes Buch mit unendlich vielen Seiten“.

für $\text{ord}(st)$ gerade beziehungsweise ungerade, mit jeweils $\text{ord}(st)$ sich abwechselnden Faktoren auf beiden Seiten. Diese Relationen hinwiederum heißen, auch wenn die Bedingung $s^2 = t^2 = e$ nicht erfüllt ist, die **Zopfrelationen** nach der Darstellung der sogenannten „Zopfgruppe“ durch Erzeuger und Relationen in [TF] 4.6.4.

Satz 3.2.3 (Spiegelungsgruppen und Coxetersysteme). *Ist \hat{W} die Spiegelungsgruppe einer Coxetermatrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ und $S \subset \hat{W}$ die Menge ihrer einfachen Spiegelungen, so ist (\hat{W}, S) ein Coxetersystem mit den Relationen $\text{ord}(st) = m(s, t) \forall s, t \in S$.*

3.2.4. Sobald dieser Satz bewiesen ist, notieren wir die Spiegelungsgruppe \hat{W} zu einer Coxetermatrix kürzer W , weil sie ja mit der entsprechenden Coxetergruppe zusammenfällt.

Beweis. Das folgt sofort aus der folgenden präziseren Proposition 3.2.6. □

Korollar 3.2.5 (Affine Spiegelungsgruppen und Coxetersysteme). *Ist W eine affine Spiegelungsgruppe und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven, so ist (W, S) ein Coxetersystem.*

Beweis. Das kann man als Korollar des vorhergehenden Satzes zeigen mithilfe von 3.1.7. Alternativ kann man auch den Beweis der anschließenden Proposition 3.2.6 unschwer auf diesen Fall übertragen. □

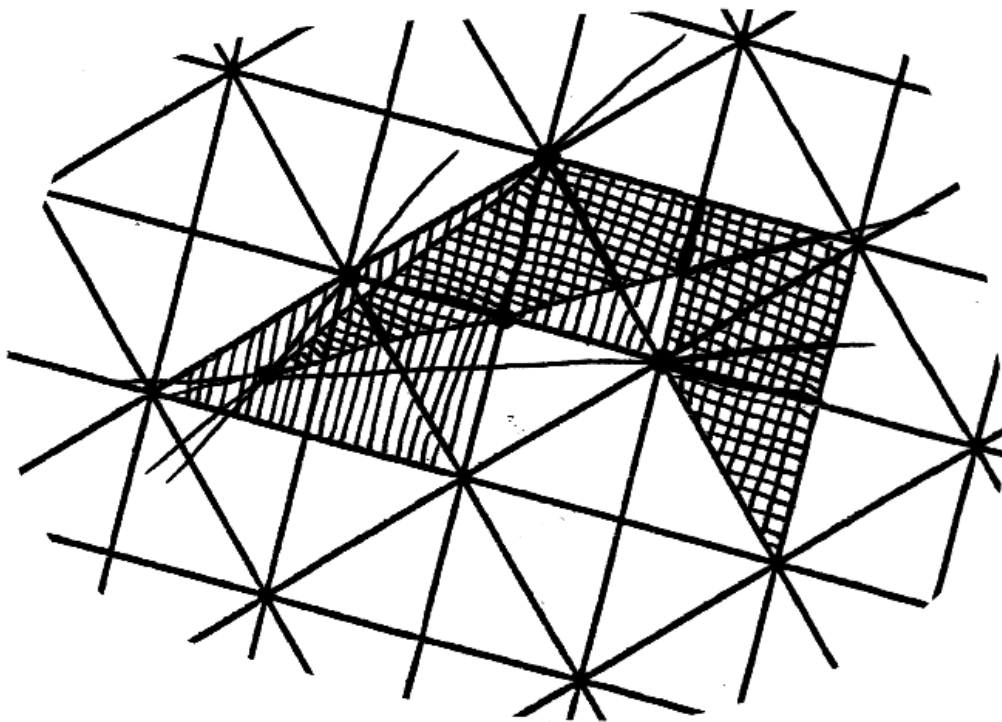
Proposition 3.2.6 (Übergang zu reduzierter Darstellung). *Sei \hat{W} die Spiegelungsgruppe einer Coxetermatrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ und seien zwei Darstellungen desselben Elements $w \in \hat{W}$ als Produkt von einfachen Spiegelungen*

$$s_1 s_2 \dots s_n = w = t_1 t_2 \dots t_l$$

gegeben. Ist die zweite Darstellung reduziert, in Formeln $l(w) = l$, so können wir von der ersten Darstellung zur Zweiten gelangen in endlich vielen Schritten, von denen jeder Einzelne entweder im Anwenden einer Zopfrelation zu unserer Coxetermatrix besteht, wobei also die Länge der Darstellung unverändert bleibt, oder im Weglassen zweier gleicher aufeinanderfolgender Faktoren, wobei die Länge um Zwei abnimmt.

3.2.7. Insbesondere kann man also zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein- und desselben Elements „mit Zopfrelationen hin- und hergehen“.

3.2.8 (**Anschauliche Bedeutung des folgenden Beweises**). Man denke sich unser Wort als eine Folge von Alkoven, von denen je zwei aufeinanderfolgende benachbart sind. In der Ausgangsalkove halte man einen generischen Punkt fest und



Alkoven und Subalkoven bei einem Übergang zu einer reduzierten Darstellung

binde dort das eine Ende eines Gummiseils an. Das andere Ende nehme man in die Hand, gehe die Alkoven unserer Folge ab, und halte dabei das Gummiseil immer gut gespannt. Manchmal wird das Gummiseil einen Schnitt von Spiegelebenen durchqueren, dabei ändert sich die Folge der von unserem Gummiseil durchlaufenen Alkoven „um eine Zopfrelation“. Manchmal mag man eine Wand eines Alkoven in der Richtung durchqueren, in der auch das Gummiseil zieht, dabei ändert sich die Folge der von unserem Gummiseil durchlaufenen Alkoven „um eine Relation $s^2 = 1$ “. Wenn man einen stückweise polynomialen generischen Weg wählt, wird man nur mit endlich vielen derartigen Ereignissen konfrontiert werden, und auch nur mit ihnen. Induktiv kommt man so unter dem Anwenden von Zopfrelationen und den Relationen $s^2 = 1$ von der ursprünglichen Folge zu der Folge, die das Gummiseil vom Anfangsalkoven bis zu einem beliebig aber fest gewählten generischen Punkt des Endalkovens durchläuft. Etwas formaler habe ich das im folgenden Beweis aufgeschrieben.

Beweis. Wir betrachten die Folge von Alkoven $A^+ = A_0, A_1, \dots, A_n = wA^+$ mit $A_i := s_1 \dots s_i A^+$. Je zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder haben hier genau eine gemeinsame Wandfacette. Dann betrachten wir alle Schnitte von je zwei verschiedenen Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$, die A^+ und eines unserer A_i trennen. Das sind gewisse Teilräume der Kodimension Zwei. Wir wählen weiter $p \in A^+$ derart, daß die affinen Hyperebenen, die von p und einem dieser Schnitte erzeugt werden, paarweise verschieden sind. Das System aller dieser affinen Hyperebenen bezeichnen wir mit \mathcal{L} . Nun zerlegen wir unsere Alkoven A_i in Subalkoven unter \mathcal{L} . Wir finden dann offensichtlich eine Folge B_0, B_1, \dots, B_m solcher Subalkoven derart, daß zwei aufeinanderfolgende Subalkoven genau eine Wandfacette gemeinsam haben und daß es eine monoton wachsende Surjektion $h : \{0, \dots, m\} \twoheadrightarrow \{0, \dots, n\}$ gibt mit $B_\mu \subset A_{h(\mu)}$ für $0 \leq \mu \leq m$. Jetzt betrachten wir zu jedem μ die Folge von Alkoven, die entsteht, wenn wir einen Punkt $q \in B_\mu$ wählen und erst auf dem Segment $[p, q]$ der Reihe nach alle von ihm getroffenen Alkoven nehmen und dann $A_{h(\mu)+1}, \dots, A_n$ anfügen. Jede dieser Folgen entspricht einer Darstellung von w als Produkt von erzeugenden Spiegelungen. Die Darstellung zu $\mu + 1$ geht aber nun offensichtlich aus der Darstellung zu μ hervor durch Nichtstun oder das Weglassen zweier aufeinanderfolgender gleicher Faktoren im Fall $h(\mu) < h(\mu + 1)$ und durch Nichtstun oder durch das Anwenden einer Zopfrelation im Fall $h(\mu) = h(\mu + 1)$, wie das nebenstehende Bild verdeutlichen mag. Formal ist dies Argument unangenehm auszuschreiben. Am Schluß landen wir für $\mu = m$ bei einer reduzierten Darstellung und die Proposition ist bewiesen. \square

Übungen

Übung 3.2.9 (Weitere natürliche Darstellungen von Coxetergruppen). Gegeben sei eine endliche Menge S und eine Coxetermatrix mit Indexmenge S der Gestalt $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ und ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V . Gegeben seien weiter Vektoren $(e_s)_{s \in S}$ in V und Linearformen $(e_s^\vee)_{s \in S}$ auf V derart, daß gilt

$$\langle e_t, e_s^\vee \rangle = -2 \cos(\pi/m_{s,t}) \quad \forall s, t \in S$$

So liefert die Vorschrift $\rho(s)(v) := v - \langle v, e_s^\vee \rangle e_s$ eine Darstellung $\rho : W \rightarrow \text{GL}(V)$ unserer Coxetergruppe. Sind die $(e_s)_{s \in S}$ eine Basis von V , so ist das unsere wurzlige Darstellung. Sind die $(e_s^\vee)_{s \in S}$ eine Basis des Dualraums V^* , so ist das unsere alkovische Darstellung. Sind die Vektoren $(e_s)_{s \in S}$ linear unabhängig, so erzeugen sie eine zur wurzlichen Darstellung isomorphe Unterdarstellung. Sind die Linearformen $(e_s^\vee)_{s \in S}$ linear unabhängig, so ist der Schnitt ihrer Kerne eine Unterdarstellung, und der Quotient danach ist isomorph zur alkovischen Darstellung.

3.3 Bruhat-Ordnung

3.3.1. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Die zu einfachen Spiegelungen konjugierten Elemente von W heißen die **Spiegelungen** von W . Die Menge aller Spiegelungen notieren wir T . Nach 3.1.8 sind das genau die Elemente, die in der Spiegelungsgruppe der zugehörigen Coxetermatrix zu Spiegelungen werden.

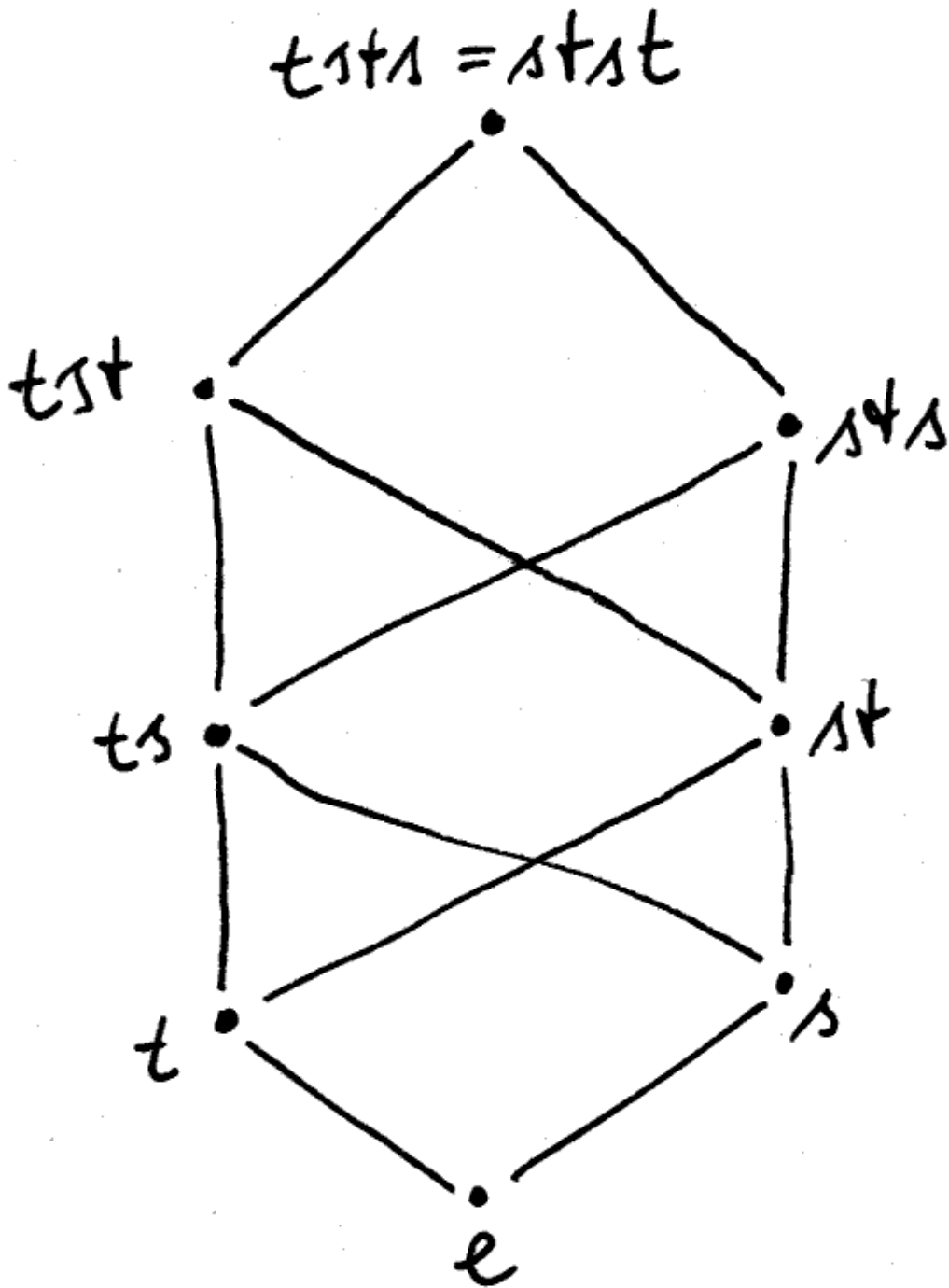
Definition 3.3.2. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Die **Bruhat-Ordnung** ist die kleinste reflexive transitive Relation \leq auf W derart, daß gilt

$$x \leq xt \quad \text{für alle } x \in W \text{ und alle Spiegelungen } t \in W \text{ mit } l(x) < l(xt).$$

3.3.3. Wir fordern, um das nochmal zu betonen, in der Definition der Bruhat-Ordnung 3.3.2 nicht $t \in S$. In der Tat würde diese Forderung im allgemeinen zu einer echt stärkeren partiellen Ordnung führen.

3.3.4. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Offensichtlich gilt $x < y \Rightarrow l(x) < l(y)$. Insbesondere ist \leq tatsächlich eine partielle Ordnung auf W . Offensichtlich ist das neutrale Element $e \in W$ das kleinste Element. Unschwer erkennt man weiter $x \leq y \Leftrightarrow x^{-1} \leq y^{-1}$. Eine explizitere Beschreibung der Bruhat-Ordnung gibt uns 3.3.6.

3.3.5 (**Anschauung für die Bruhat-Ordnung im affinen Fall**). Ist W eine affine Spiegelungsgruppe und A ein ausgezeichnete Alkoven. Nach 3.2.5 ist dann für $S = S_A \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden von A das Paar (W, S) ein Coxetersystem. Betrachten wir dann die Bijektion $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, w \mapsto wA$,



Die Bruhat-Ordnung auf einer Diedergruppe

so induziert die durch A gegebene Bruhat-Ordnung auf W eine Ordnung auf \mathcal{A} . Diese Ordnung ist nach 1.6.6 die kleinste reflexive transitive Relation auf \mathcal{A} derart, daß gilt $B \leq_{s_L} B$ wann immer $B \in \mathcal{A}$ ein Alkoven ist und L eine Spiegelebene, die B nicht von A trennt.

Satz 3.3.6 (Bruhat-Ordnung über Teilausdrücke). Sei (W, S) ein Coxetersystem. Ist $w = s_1 \dots s_{l(w)}$ eine reduzierte Darstellung von $w \in W$, so gilt

$$\{x \in W \mid x \leq w\} = \{s_{i_1} \dots s_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l(w)\}$$

Insbesondere hängt die rechte Seite nicht von der Wahl der reduzierten Darstellung von w ab.

Beweis. Wir erinnern daran, daß wir W nach 3.2.3 stets als Spiegelungsgruppe seiner Coxetermatrix treu darstellen können. Die Inklusion \subset folgt mühelos aus dem Austauschlemma 3.1.10. Für die andere Inklusion \supset müssen wir wieder nach dem Austauschlemma 3.1.10 nur für reduzierte Teilausdrücke zeigen, daß sie Elemente $\leq w$ liefern. Mit Induktion über die Länge von w brauchen wir sogar nur Teilausdrücke zu untersuchen mit $i_1 = 1$. Dann folgt die Behauptung jedoch mit Induktion aus dem anschließenden Lemma. \square

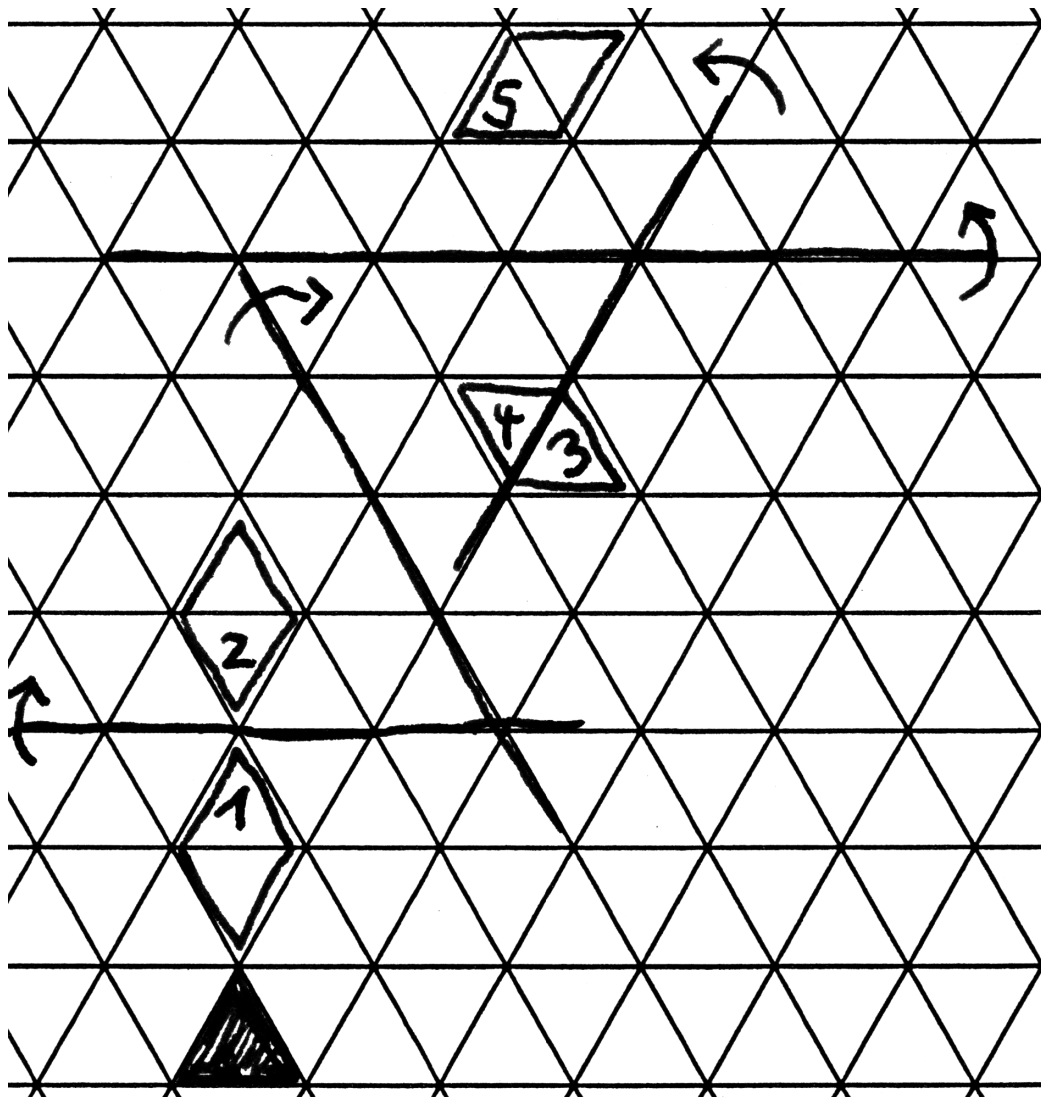
Lemma 3.3.7 (Eigenschaft Z von Deodhar). Sei (W, S) ein Coxetersystem. Gegeben $x, y \in W$ und $s \in S$ eine erzeugende Spiegelung gelten entweder mindestens drei oder keine der vier Ungleichungen

$$\begin{array}{ll} x \leq y & x \leq sy \\ sx \leq y & sx \leq sy \end{array}$$

3.3.8. Stellen wir Ungleichungen durch Pfeile zum größeren Element dar, so impliziert also unter der Annahme der beiden horizontalen Ungleichungen $y < sy$ und $x < sx$ jede der drei weiteren Ungleichungen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} y & \rightarrow & sy \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ x & \rightarrow & sx \end{array}$$

die beiden anderen. Wegen dieser graphischen Interpretation, und weil der Schluß von der Diagonale auf die beiden Vertikalen das eigentliche Problem darstellt, wird die Aussage unseres Lemmas als die „Eigenschaft Z von Deodhar“ zitiert. Man kann diese Eigenschaft ohne Schwierigkeiten aus Satz 3.3.6 folgern, sie geht jedoch bei uns in den Beweis dieses Satzes bereits ein.



Graphische Darstellung der Eigenschaft Z von Deodhar im Sinne von 3.3.10.
 Der geschwärzte Alkoven stellt das neutrale Element dar, die nummerierten Alkoven gehen jeweils durch eine verlängernde Spiegelung auseinander hervor.
 Die „Dominos“ bestehen jeweils aus einem Paar (B, Bs) mit s einer festen einfachen Spiegelung.

3.3.9. Ich gebe noch eine andere Formulierung der Eigenschaft **Z**, die für induktive Argumente besonders geschickt ist. Seien (W, S) ein Coxetersystem und $x, y \in W$ sowie $s \in S$ gegeben. Wir setzen $\{x_1, x_2\} := \{x, sx\}$ und $\{y_1, y_2\} := \{y, sy\}$. Gibt es in dieser Situation i, j mit $x_i \leq y_j$, so gilt entweder $x_1 \leq y_1$ und $x_2 \leq y_2$ oder $x_1 \leq y_2$ und $x_2 \leq y_1$.

3.3.10 (**Anschauliche Bedeutung der Eigenschaft Z**). Sei eine affine Spiegelungsgruppe mit einem ausgezeichneten Alkoven gegeben, der der fundamentale Alkoven heißen möge. Steigt ein Alkoven B durch eine Folge von Spiegelungen zu einem anderen Alkoven C auf in dem Sinne, daß die zugehörigen Elemente der Spiegelungsgruppe dabei immer länger werden, so steigt mit derselben Folge auch das ungeordnete Paar von benachbarten Alkoven $\{B, Bs\}$ zum ungeordneten Paar von benachbarten Alkoven $\{C, Cs\}$ auf. Das tut es sogar mit der Folge von Spiegelungen, die wir erhalten, wenn wir aus unserer ursprünglichen Folge von Spiegelungen alle diejenigen weglassen, die nur die Bilder des Paares (B, Bs) untereinander vertauschen. Mit dieser Folge von Spiegelungen steigt dann entweder B zu C auf und Bs zu Cs oder B zu Cs und Bs zu C . Die „Eigenschaft **Z**“ formalisiert diese Anschauung.

Ergänzung 3.3.11 (**Bedeutung der Eigenschaft Z für Weylgruppen**). Haben wir die Weylgruppe einer algebraischen Gruppe vor uns, so folgt das Lemma leicht aus der Tatsache, daß der Abschluß der Bahn einer parabolischen Untergruppe auf der Fahnenmannigfaltigkeit eine Vereinigung von Bahnen besagter parabolischer Untergruppe ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $x < y = xt$ annehmen für eine Spiegelung t . Dann sind wir in einem von vier Fällen, die wir jetzt gleich der Reihe nach abhandeln.

- $sx < x, sy > y$: Dann gelten sogar alle vier Ungleichungen;
- $sx < x, sy < y$: Dann haben wir $l(sx) < l(sy)$ und $sxt = sy$ und damit notwendig $sx < sy$;
- $sx > x, sy > y$: Dann können wir dasselbe Argument anwenden wie beim vorhergehenden Fall;
- $sx > x, sy < y$: Dann haben wir $sxt < xt$ und argumentieren so:

Wir sind fertig, wenn wir $sx \leq sy$ alias $l(sx) \leq l(sy)$ zeigen können. Gilt aber sonst $l(sx) > l(sy)$ alias $l(sx) > l(sxt)$ und ist $s_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung von x , so ist $ss_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung von sx und nach dem Austauschlemma 3.1.10 können wir in sxt den Faktor t kürzen gegen eine einfache Spiegelung in der reduzierten Darstellung von sx , ohne das Produkt zu ändern. Wegen $x < xt$ muß diese einfache Spiegelung die Erste sein und wir haben

$x = sxt = sy$. Dann gilt zwar nicht $sx \leq sy$, aber dennoch ist er unproblematisch. In der Anschauung entspricht dieser Fall im übrigen der Spiegelung eines „Dominos an einer Spiegelebene, die unser Domino halbiert“. \square

3.3.12. Sei (W, S) ein Coxetersystem und seien $S_p \subset S \supset S_q$ zwei Teilmengen mit Erzeugnissen W_p und W_q . Seien $x \geq y$ in W gegeben. So gilt auch für deren kürzeste W_p - W_q -Doppelnebenklassenrepräsentanten \bar{x} und \bar{y} die Relation $\bar{x} \geq \bar{y}$. Das folgt aus der Beschreibung 3.3.6 der Bruhatordnung durch Teilausdrücke.

3.3.1 Übungen

Übung 3.3.13. Gegeben $x < y$ in der Bruhatordnung gibt es z mit $x < z \leq y$ in der Bruhat-Ordnung und $l(z) = l(x) + 1$.

Übung 3.3.14. Wie geht das eigentlich? Gegeben $x < y$ in der Bruhatordnung mit $l(y) = l(x) + 2$ gibt es genau zwei Elemente z mit $x < z < y$.

4 Danksagung

Bei der Vorbereitung besonders hilfreich waren die Bücher von Bourbaki [Bou81] und Humphreys [Hum90]. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Pavle Pandzic, . . .

Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*;
- [Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4–6*, Masson, 1981.
- [DHL] *Skriptum Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren*;
- [Hum90] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, 1990.
- [KS10] E. D. Kim and F. Santos, *An update on the hirsch conjecture*, Jahresbericht der DMV **112** (2010), no. 2, 73–98.
- [LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*;
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*;
- [ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*;
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*;
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*;

Index

- abgeschlossen
 - Halbraum, 11
- Abschluß
 - von Facette, 13
- affin
 - Weylgruppe, 81
 - Weylgruppe, duale, 81
- Alkoven
 - fundamentaler dominanter, 79
 - in alkovischer Darstellung, 94
 - zu endlicher Spiegelungsgruppe, 6
 - zu System von Hyperebenen, 16
- alkovische Darstellung, 89
- Austauschlemma, 96
- basiertes Wurzelsystem, 68
- Basis
 - eines Wurzelsystems, 63
 - universelle, 70
- Bruhat-Ordnung, 102
- Cartan-Matrix, 69
- Cosinusmatrix, 41
- Coxetergraph, 38
- Coxetermatrix, 38
- Coxetersystem, 96
- Coxeterzahl, 77
 - duale, 77
- Deodhar
 - Eigenschaft Z von, 104
- Diedergruppe, 4
- Dimension
 - einer Facette, 16
- Dynkin-Diagramm, 70
- Dynkindiagramm
 - dual erweitertes, 87
 - erweitertes, 85
- E_8 Wurzelsystem, 60
- einfach
 - geschnürt, 74
- essentiell
 - affine Spiegelungsgruppe, 51
- euklidisch
 - affiner Raum
 - über angeordnetem Körper, 24
 - Vektorraum
 - über angeordnetem Körper, 4
 - Wurzelsystem, 57
- Facette, 13
- Fundamentalebene
 - mengentheoretischer, 31
- Geradensegment, 10
- Halbraum, 11
- Hirsch
 - Vermutung von, 21
- Hyperebene
 - affine, 10
- Hyperebenenpartition, 11
- isomorph
 - affine Spiegelungsgruppen, 53
- Kammer, 16
- Kante
 - von Coxetergraph, 38
- Knoten
 - von Coxetergraph, 38
- Kodimension
 - einer Facette, 16
- komplex
 - Spiegelung, 50
 - Spiegelungsgruppe, 50
- Kowurzel

einfache, 68
 kristallographisch, 57
 Länge
 in Spiegelungsgruppe, 29
 orthogonal
 affine Abbildung, 24
 Polyeder
 konvexer, 13
 Polytop, 21
 positiv definit
 Coxetergraph, 41
 prinzipalen Automorphismus, 68
 Randfacette, 15
 echte, 15
 Rang
 eines Wurzelsystems, 54
 Raum
 euklidischer
 über angeordnetem Körper, 24
 reduzierte Darstellung, 89
 in Spiegelungsgruppe, 29
 schwach spitzer Winkel, 34
 schwach stumpfer Winkel, 34
 simply laced, 74
 spezieller Punkt, 83
 Spiegelebene, 7, 22
 Spiegelhyperebene, 4, 7, 22
 Spiegelung
 affine, 22
 affine orthogonale, 24
 einfache, 68
 in Coxetersystem, 96
 in Coxetersystem, 102
 komplexe, 50
 lineare, 7
 orthogonale lineare, 4, 7
 Spiegelungsgruppe
 affine, 22
 affine euklidische, 24
 endliche, 9
 euklidische, 4
 komplexe, 50
 zu Coxetermatrix, 89
 spitz
 echt, Winkel, 34
 stumpf
 echt, Winkel, 34
 Summe
 von Wurzelsystemen, 68
 System positiver Wurzeln, 63
 System von Hyperebenen, 10
 Tits-Kegel, 94
 Träger
 einer Facette, 16
 unzerlegbar
 Matrix, 44
 Wurzelsystem, 68
 $W(R)$ Weylgruppe
 von abstraktem Wurzelsystem, 59
 Wand
 eines Alkoven, 17
 Wandfacette, 17
 Weylgruppe
 affine, 81
 duale affine, 81
 von abstraktem Wurzelsystem, 59
 Weylkammer
 dominante, 68
 einer Spiegelungsgruppe, 6
 eines Wurzelsystems, 60
 Winkel
 echt spitzer, 34
 echt stumpfer, 34
 schwach spitzer, 34
 schwach stumpfer, 34
 Wurzel

- einfache, 68
- höchste, 74
- kurze, 74
- lange, 74
- von Wurzelsystem, 54

Wurzelsystem

- abstraktes, 54
- euklidisches, 57
- nichtreduziertes, 56
- reduziertes, 54

Wurzelweg, 73

wurzlige Darstellung, 89

Z, Eigenschaft von Deodhar, 104

Zopfrelationen, 99