

SPIEGELUNGSGRUPPEN UND WURZELSYSTEME

Wolfgang Soergel

25. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Spiegelungsgruppen	4
1.1	Endliche euklidische Spiegelungsgruppen	4
1.2	Endliche lineare Spiegelungsgruppen	7
1.3	Alkovengeometrie	11
1.4	Facettenabschluß als konvexe Hülle*	21
1.5	Affine Spiegelungsgruppen	23
1.6	Transitivität auf der Menge der Alkoven	27
1.7	Fundamentaltbereiche	33
1.8	Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe	36
1.9	Coxetergraphen und Klassifikation	40
1.10	Ergänzungen zu Skalarprodukten	45
1.11	Positiv definite Coxetergraphen	48
1.12	Struktur affiner Spiegelungsgruppen*	53
2	Wurzelsysteme	56
2.1	Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen	56
2.2	Basen von Wurzelsystemen	66
2.3	Klassifikation von Wurzelsystemen	72
2.4	Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*	78
2.5	Höchste Wurzel und fundamentaler Alkoven*	82
3	Coxetergruppen als Spiegelungsgruppen	95
3.1	Spiegelungsgruppen zu Coxetermatrizen	95
3.2	Erzeuger und Relationen für Spiegelungsgruppen	105
3.3	Bruhat-Teilordnung	109
4	Danksagung	118
	Literaturverzeichnis	119
	Indexvorwort	120
	Index	121

Dieser Abschnitt ist motiviert durch Anwendungen bei der Klassifikation der kompakten zusammenhängenden Liegruppen [ML] 5.5.3 und, mehr oder weniger gleichbedeutend, der Klassifikation der halbeinfachen komplexen Liealgebren [HL] 1.1.20. Er scheint mir jedoch auch ohne äußere Motivation ein interessantes Kapitel der Geometrie und Gruppentheorie und gut geeignet für die Behandlung im Rahmen eines Proseminars.

1 Spiegelungsgruppen

1.1 Endliche euklidische Spiegelungsgruppen

1.1.1. Einen euklidischen Vektorraum haben wir in [LA2] 1.5.1 erklärt als einen reellen Vektorraum mit einer ausgezeichneten $\mathbb{R}_{>0}$ -Bahn von Skalarprodukten, seiner „euklidischen Struktur“. Einen euklidischen Raum haben wir erklärt als einen reellen affinen Raum mit einer euklidischen Struktur auf seinem Richtungsraum. Einen orthogonalen Automorphismus eines euklidischen Vektorraums haben wir erklärt als einen Vektorraumautomorphismus, der ein und jedes Skalarprodukt der euklidischen Struktur erhält. Einen orthogonalaffinen Automorphismus eines euklidischen Raums haben wir erklärt als eine Affinität, deren linearer Anteil orthogonal ist. Im folgenden verwenden wir dieselben Bezeichnungen etwas allgemeiner auch im Fall eines beliebigen angeordneten Grundkörpers.

1.1.2. Unter einer **Hyperebene** in einem affinen Raum verstehen wir wie in [LA1] 3.2.10 einen echten affinen Teilraum, der zusammen mit einem einzigen weiteren Punkt den ganzen Raum affin erzeugt.

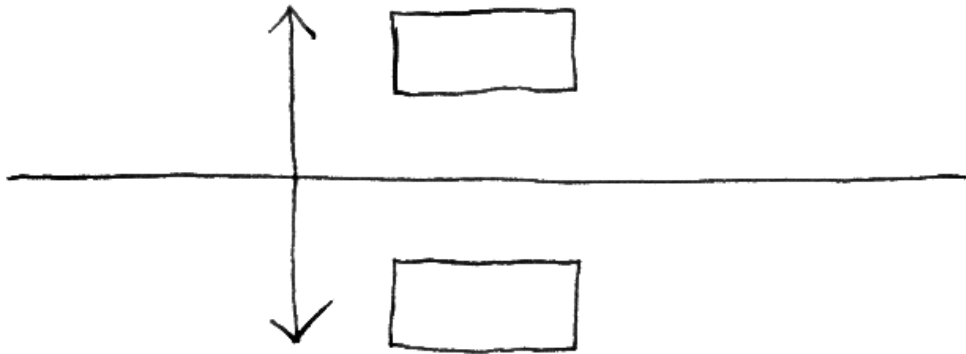
Definition 1.1.3. Unter einer **Spiegelung** oder **orthogonalen Spiegelung** verstehen wir einen orthogonalaffinen Automorphismus eines euklidischen Raums, dessen Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Wir nennen die Fixpunktmenge einer Spiegelung ihre **Spiegelhyperebene** oder ihren **Spiegel**.

1.1.4 (**Formelhafte Darstellung orthogonaler linearer Spiegelungen**). Seien V ein euklidischer Vektorraum und $(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt seiner euklidischen Struktur und $s : V \rightarrow V$ eine lineare orthogonale Spiegelung und V^s ihr Spiegel. Gegeben $v \in V \setminus V^s$ ist $v - sv \in V^{-s} = \text{Eig}(s; -1)$ von Null verschieden und wir haben offensichtlich $V = V^s \oplus V^{-s}$ sowie $V^s \perp V^{-s}$. Für jeden Erzeuger α von V^{-s} zeigen wir nun

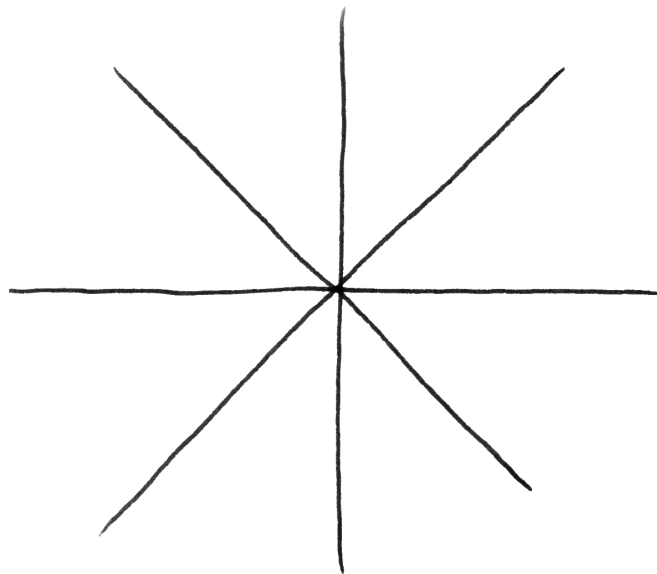
$$s(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall \lambda \in V$$

In der Tat sind beide Seiten linear und nehmen offensichtlich auf $\lambda = \alpha$ und auf jedem $\lambda \in V^s$ denselben Wert an. Eine orthogonale Spiegelung in einem euklidischen Vektorraum wird insbesondere durch ihren Spiegel bereits eindeutig festgelegt. Dasselbe folgt im Affinen.

Definition 1.1.5. Unter einer **endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine endliche Gruppe von Automorphismen eines euklidischen Raums, die von Spiegelungen erzeugt wird.



Eine orthogonale Spiegelung



Die vier Spiegel der Diedergruppe D_4 . Die acht „Kuchenstücke“, jeweils ohne ihren Rand, sind die zugehörigen „Alkoven“ oder „Weylkammern“, und man überlegt sich leicht, daß je zwei Alkoven durch genau ein Element unserer Spiegelungsgruppe ineinander überführt werden.

Beispiel 1.1.6. Wir betrachten in der euklidischen Ebene r Geraden durch einen festen Punkt derart, daß je zwei von ihnen durch eine Drehung um einen Winkel der Gestalt $n\pi/r$ mit $n \in \mathbb{Z}$ auseinander hervorgehen. Diese r Geraden sind die Spiegel einer endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe, der sogenannten **Die-dergruppe** D_r . Sie besteht aus den r Spiegelungen an unseren r Geraden sowie den r Drehungen um die Winkel $2\pi\nu/r$ für $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Im Fall $r = 4$ ist das die „Bierdeckelgruppe“ aller acht Symmetrien eines Bierdeckels. Im allgemeinen wäre es die Gruppe aller $2r$ Symmetrien eines „Bierdeckels mit r Ecken“.

Beispiel 1.1.7 (Die symmetrische Gruppe als Spiegelungsgruppe). Wir betrachten in $\mathbb{R}^n$ für $1 \leq i < j \leq n$ die Hyperebenen $H_{i,j} := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_j\}$. Die Spiegelung s an der Hyperebene $H_{i,j}$ kann auch beschrieben werden als die Vertauschung der i -ten und der j -ten Koordinate, $s(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$, denn besagte Vertauschung ist orthogonal und $H_{i,j}$ ist die Menge ihrer Fixpunkte. Diese Spiegelungen erzeugen eine endliche Spiegelungsgruppe, die in offensichtlicher Weise isomorph ist zur symmetrischen Gruppe S_n .

Beispiel 1.1.8 (Die Tetraedergruppe als Spiegelungsgruppe). Die Spiegelungen an denjenigen Ebenen des Raums, die senkrecht stehen auf den Kantenmitten eines Tetraeders, erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe, die isomorph ist zur Gruppe aller 24 Permutationen der vier Ecken unseres Tetraeders. Im übrigen kann man dieses Beispiel aus dem vorhergehenden erhalten, indem man als Ecken des Tetraeders die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^4$ nimmt und als „Raum“ ihr affines Erzeugnis betrachtet.

Beispiel 1.1.9. Die Spiegelungen an den Koordinatenebenen des $\mathbb{R}^n$ erzeugen eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe mit 2^n Elementen.

1.1.10. Ich erinnere daran, daß nach [LA1] 3.5.2 eine Teilmenge eines Vektorraums oder auch affinen Raums über einem angeordneten Körper **konvex** heißt, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält.

Definition 1.1.11. Seien E ein euklidischer Raum und $W \subset O_{\text{aff}}(E)$ eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe. Die maximalen konvexen Teilmengen im Komplement der Vereinigung aller Spiegel

$$E \setminus \bigcup_{\substack{s \in W \text{ ist} \\ \text{Spiegelung}}} E^s$$

heißen die **Weylkammern** oder **Alkoven** unserer Spiegelungsgruppe.

Ergänzung 1.1.12. Im Fall $k = \mathbb{R}$ und $\dim_{\mathbb{R}}(E) < \infty$ können wir die Alkoven, wenn wir unseren endlichdimensionalen reellen Raum mit seiner natürlichen Topologie versehen, auch als die Zusammenhangskomponenten von besagtem Komplement beschreiben.

1.1.13 (Operation auf den Alkoven). Wir wollen als nächstes zeigen, daß jede endliche euklidische Spiegelungsgruppe frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven operiert. Die Transitivität ist schnell bewiesen: Für beliebige Punkte $v, w \in E$ finden wir sicher ein $x \in W$ derart, daß der Abstand $\|v - xw\|$ kleinstmöglich wird. Dann können v und xw durch keine Spiegel mehr getrennt sein, da für s die Spiegelung an besagtem Spiegel sonst aus elementargeometrischen Gründen v und sxw noch näher aneinander wären. Also liegen v und xw in Bezug auf jeden Spiegel in demselben abgeschlossenen Halbraum und damit im Abschluß desselben Alkoven. Die Freiheit der Operation scheint mir weniger offensichtlich. Um bei ihrem Beweis inhaltsreichere Bilder malen zu können, werden wir sie gleich in der etwas allgemeineren Situation affiner Spiegelungsgruppen zeigen. Wir führen diesen Begriff im übernächsten Abschnitt ein. Zunächst treffen wir jedoch geometrische Vorbereitungen.

Übungen

Übung 1.1.14 (Symmetriegruppe eines Hyperkubus). Man zeige: Die von allen orthogonalen Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$ an den Hyperebenen $x_i = x_j$ für $i \neq j$ und den Hyperebenen $x_i = 0$ erzeugte Gruppe ist eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe. Sie ist die Symmetriegruppe des Hyperkubus, in Formeln die Gruppe aller der Automorphismen von $\mathbb{R}^n$, die die Menge

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (-1)^{r(i)} e_i \mid r : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\} \right\}$$

der Ecken des Hyperkubus stabilisiert. Diese Gruppe hat $n!2^n$ Elemente und kann als semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$ im Sinne von [AL] 1.2.10 alias als Kranzprodukt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathcal{S}_n$ im Sinne von [AL] 1.2.11 realisiert werden.

Übung 1.1.15. Ein Schnitt von zwei endlichen euklidischen Spiegelungsgruppen in der Automorphismengruppe ein- und desselben euklidischen Raums muß keineswegs wieder eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe sein. Selbst im zweidimensionalen Fall findet man leicht Gegenbeispiele und selbst dann, wenn unsere beiden endlichen euklidischen Spiegelungsgruppen in einer gemeinsamen endlichen euklidischen Spiegelungsgruppe enthalten sind. Aus 1.7.5 wird jedoch leicht folgen, daß gegeben endliche euklidische Spiegelungsgruppen $W' \subset W \subset O_{\text{aff}}(E)$ und $\lambda \in E$ auch $W'_\lambda = W_\lambda \cap W'$ eine endliche euklidische Spiegelungsgruppe ist.

1.2 Endliche lineare Spiegelungsgruppen

1.2.1. In den Anwendungen trifft man Spiegelungsgruppen oft im Kontext nicht-euklidischer Vektorräume an. Im folgenden bauen wir für diese Situation einen

begrifflichen Rahmen. Weil wir uns damit eh von der Anschauung der euklidischen Ebene entfernen und weil der affine Fall später eh noch ausführlich behandelt wird, beschränken uns dabei auf den Fall von endlicher Spiegelungsgruppen in der Automorphismengruppe von Vektorräumen.

Definition 1.2.2. Eine lineare Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **lineare Spiegelung**, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene und wir uns nicht in Charakteristik Zwei befinden. Wir nennen die Fixpunktmenge einer Spiegelung auch ihre **Spiegelhyperebene** oder abkürzend ihren **Spiegel**.

1.2.3 (Formelhafte Darstellung von linearen Spiegelungen). Seien k ein Körper einer Charakteristik $\text{char } k \neq 2$ und V ein k -Vektorraum und $s : V \rightarrow V$ eine lineare Spiegelung. Ihren Spiegel notieren wir V^s . Wegen unserer Annahme $\text{char } k \neq 2$ hat jedes $v \in V$ die Zerlegung $v = (v + sv)/2 + (v - sv)/2$. Wir folgern die Zerlegung $V = V^s \oplus V^{-s}$ von V in Eigenräume von s zu den Eigenwerten ± 1 . Insbesondere ist der Eigenraum zum Eigenwert -1 unserer Spiegelung stets eine Gerade, in Formeln $\dim_k V^{-s} = 1$. Ist V ein Vektorraum und V^* sein Dualraum, so schreiben wir für den Wert $f(\lambda)$ von $f \in V^*$ an einer Stelle $\lambda \in V$ im folgenden symmetrischer $\langle f, \lambda \rangle$ oder sogar $\langle \lambda, f \rangle$. Wählen wir nun in V erst einen Eigenvektor α unserer Spiegelung s zum Eigenwert -1 und dann diejenige Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\ker \alpha^\vee = V^s$ und $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, so gilt

$$s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

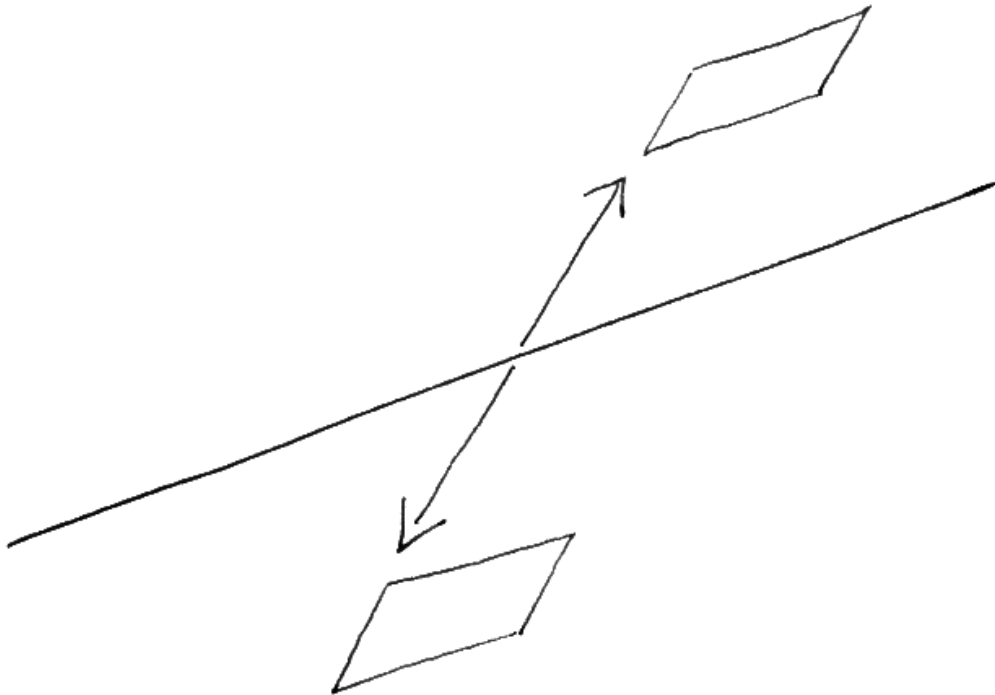
für alle λ in $V = k\alpha \oplus V^s$. Umgekehrt erhalten wir für beliebige $\alpha \in V$, $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ eine Spiegelung $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} s_{\alpha, \alpha^\vee} : V &\rightarrow V \\ \lambda &\mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \end{aligned}$$

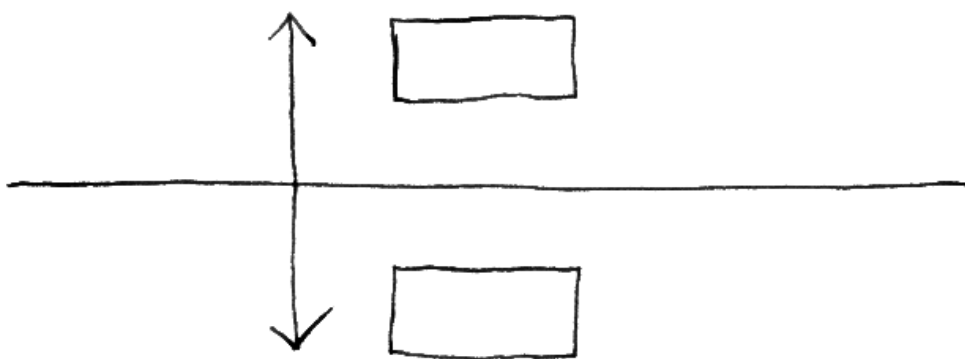
1.2.4 (Orthogonale Spiegelungen). Ist V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und ist die Spiegelung $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts $(\ , \)$ auf V , also $(s\lambda, s\mu) = (\lambda, \mu) \quad \forall \lambda, \mu \in V$, so gilt offensichtlich $V^s = \alpha^\perp = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}$ und wir haben

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall \lambda \in V$$

In der Tat nehmen beide Seiten offensichtlich auf $\lambda = \alpha$ und auf jedem $\lambda \in \alpha^\perp$ denselben Wert an. In anderen Worten bildet der zu unserem Skalarprodukt gehörige Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^*$, $\lambda \mapsto (\lambda, \)$ den Vektor $2\alpha/(\alpha, \alpha)$ auf $\alpha^\vee$ ab. Dasselbe gilt allgemeiner, wenn wir über einem beliebigen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik arbeiten und $(\ , \)$ eine unter $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ invariante symmetrische Bilinearform ist mit der Eigenschaft $(\alpha, \alpha) \neq 0$.



Eine Spiegelung, die nicht orthogonal wäre für ein übliches Skalarprodukt auf der Papierebene.



Eine Spiegelung, die orthogonal ist für jedes übliche Skalarprodukt auf der Papierebene.

Definition 1.2.5. Unter einer **endlichen linearen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Lemma 1.2.6. *Gegeben eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Vektorraums über einem angeordneten Körper gibt es auf unserem Vektorraum stets ein unter dieser Gruppe invariantes Skalarprodukt.*

1.2.7. Wir sind also nie wirklich weit von unseren euklidischen Spiegelungsgruppen entfernt. Allerdings wird solch ein invariantes Skalarprodukt im allgemeinen keineswegs eindeutig sein.

Beweis. Sei k unser angeordneter Körper und V unser Vektorraum und G unsere endliche Gruppe von Automorphismen von V . Sei $b : V \times V \rightarrow k$ irgendein Skalarprodukt. Wir erhalten ein G -invariantes Skalarprodukt durch die Vorschrift $i(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw)$. $\square$

Lemma 1.2.8. *Haben zwei Spiegelungen einer endlichen linearen Spiegelungsgruppe denselben Spiegel, so stimmen sie überein.*

Erster Beweis. Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper und $W \subset \text{GL}(V)$ unsere endliche lineare Spiegelungsgruppe. Seien $s, t \in W$ zwei Spiegelungen und $H = V^s = V^t$ der gemeinsame Spiegel. Nach 1.2.6 gibt es ein W -invariantes Skalarprodukt auf V . Für jedes W -invariante Skalarprodukt auf V gilt dann $V = H \oplus H^\perp$, und sowohl s als auch t operieren als die Identität auf H und als -1 auf $H^\perp$. $\square$

Zweiter Beweis. Sind s, t unsere Spiegelungen, so haben wir $s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ und $t(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \beta$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$. Es folgt mit kurzer Rechnung $t(s(\lambda)) = \lambda + \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\beta - \alpha)$ und damit $(ts)^n : \lambda \mapsto \lambda + n \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\beta - \alpha)$. Hat der Grundkörper Charakteristik Null, kann also (ts) nur dann von endlicher Ordnung sein, wenn gilt $t = s$. $\square$

Übungen

Übung 1.2.9 (Transponierte einer Spiegelung). Man zeige, daß die transponierte Abbildung zu einer Spiegelung $s = s_{\alpha, \alpha^\vee} : V \rightarrow V$ die Spiegelung $s^\top = s_{\alpha^\vee, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$ ist, wobei wir in der zweiten Identität unter α das durch Auswerten an α definierte Element des Bidualraums V^{**} verstehen.

1.3 Alkovengeometrie

1.3.1. Im folgenden arbeiten wir mit affinen Räumen über angeordneten Körpern. Wir setzen nicht voraus, daß unsere affinen Räume von endlicher Dimension sein müssen. In Anwendungen wird das jedoch meist der Fall sein.

Definition 1.3.2. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Gegeben $x, y \in E$ setzen wir

$$\begin{aligned} [x, y] &:= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t \leq 1\} \\ [x, y) &:= \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t < 1\} \\ (x, y] &:= \{x + t(y - x) \mid 0 < t \leq 1\} \\ (x, y) &:= \{x + t(y - x) \mid 0 < t < 1\} \end{aligned}$$

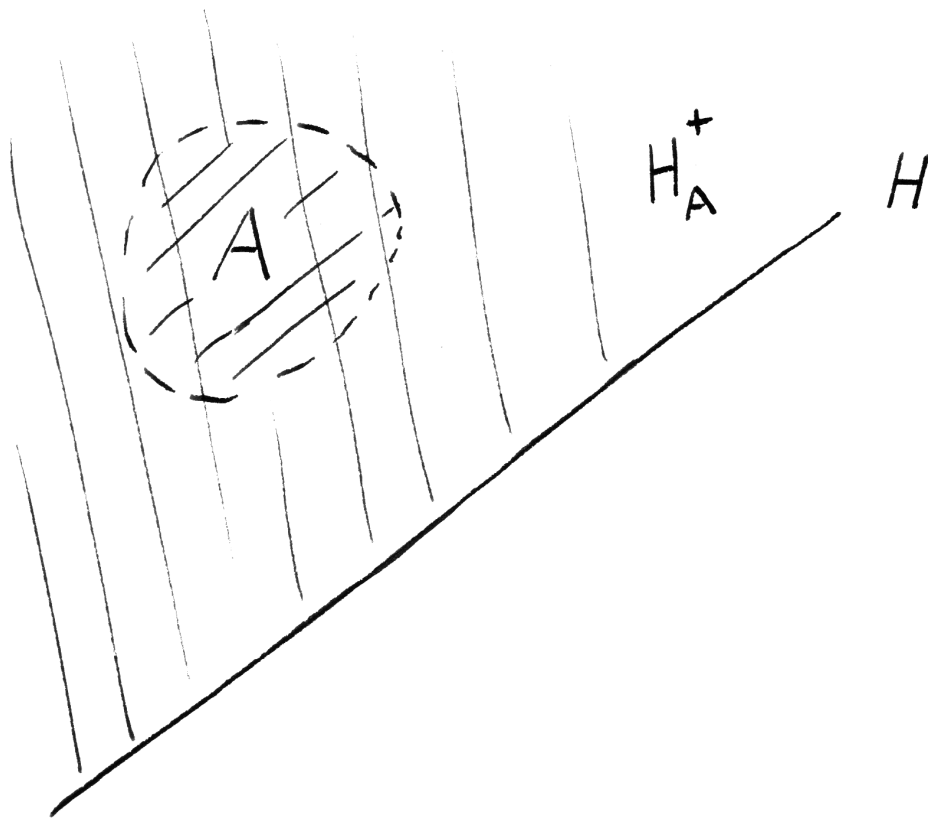
Mengen dieser Gestalt mit $x \neq y$ nennen wir **Geradensegmente**, und zwar **abgeschlossene Geradensegmente**, wenn beide **Endpunkte** x, y dazugehören, und **offene Geradensegmente**, wenn keiner der beiden Endpunkte dazugehört. Im Fall eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums mit seiner natürlichen Topologie sind zwar abgeschlossene Geradensegmente abgeschlossene Teilmengen des ganzen Raums, offene Geradensegmente jedoch nur offene Teilmengen in der von ihnen erzeugten affinen Gerade.

Definition 1.3.3. Ein System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper heißt **lokal endlich**, wenn jedes Geradensegment in unserem Raum höchstens endlich viele Hyperebenen unseres Systems trifft.

Lemma 1.3.4. *Ein affiner Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperebenen überdeckt werden.*

Beweis. In [AL] 3.10.1 hatten wir bereits gezeigt, daß ein affiner Raum über einem unendlichen Körper nicht von endlich vielen Hyperebenen überdeckt werden kann. Jeder Punkt x unseres affinen Raums hier liegt jedoch auf höchstens endlich vielen Hyperebenen unseres lokal endlichen Systems. Wenn wir nun mithilfe von [AL] 3.10.1 einen weiteren Punkt y außerhalb dieser endlich vielen Hyperebenen wählen, so ist das Segment $[x, y]$ in keiner unserer Hyperebenen enthalten. Da es unendlich viele Punkte hat, aber nur endlich viele unserer Hyperebenen trifft und zwar in jeweils nur einem Punkt, gibt es auf $[x, y]$ notwendig Punkte, die auf keiner unserer Hyperebenen liegen. $\square$

1.3.5. Ich erinnere daran, daß eine Teilmenge eines affinen Raums über einem angeordneten Körper **konvex** heißt, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze dazwischenliegende Geradensegment enthält. Ich erinnere daran, daß jede Hyperebene in einem affinen Raum die Nullstellenmenge einer affinen Funktion ist.



Der H -Halbraum H_A^+ einer nichtleeren konvexen Teilmenge A , die die Hyperebene H nicht trifft. Per definitionem gehört H selbst nicht zu H_A^+ dazu.

1.3.6. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper. Für jede Hyperebene $H \subset E$ gibt es in $E \setminus H$ genau zwei maximale konvexe Teilmengen, die wir die **Halbräume** zu H oder die **H -Halbräume** nennen. Ist $A \subset E$ eine nichtleere konvexe Teilmenge und gilt $A \cap H = \emptyset$, so liegt A in genau einem Halbraum zu H . Diesen Halbraum bezeichnen wir mit H_A^+ und nennen ihn den **H -Halbraum von A** . Seine Vereinigung mit der Hyperebene selbst notieren wir $\bar{H}_A^+ = H_A^+ \cup H$ und nennen sie den **abgeschlossenen H -Halbraum von A** .

Definition 1.3.7. Für jede Hyperebene in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper betrachten wir die dreiteilige Partition unseres Raums in die zwei Halbräume und die Hyperebene selbst und nennen sie die zugehörige **Hyperebenenpartition**. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen betrachten wir die größte Partition unseres affinen Raums, die feiner ist als diese Hyperebenenpartition für jede der Hyperebenen unseres Systems. Die Stücke der so erklärten Partition heißen die **Facetten zu unserem lokal endlichen System von Hyperebenen**. Als Schnitte konvexer Teilmengen sind sie konvex und nach der Definition einer Partition sind sie nie leer.

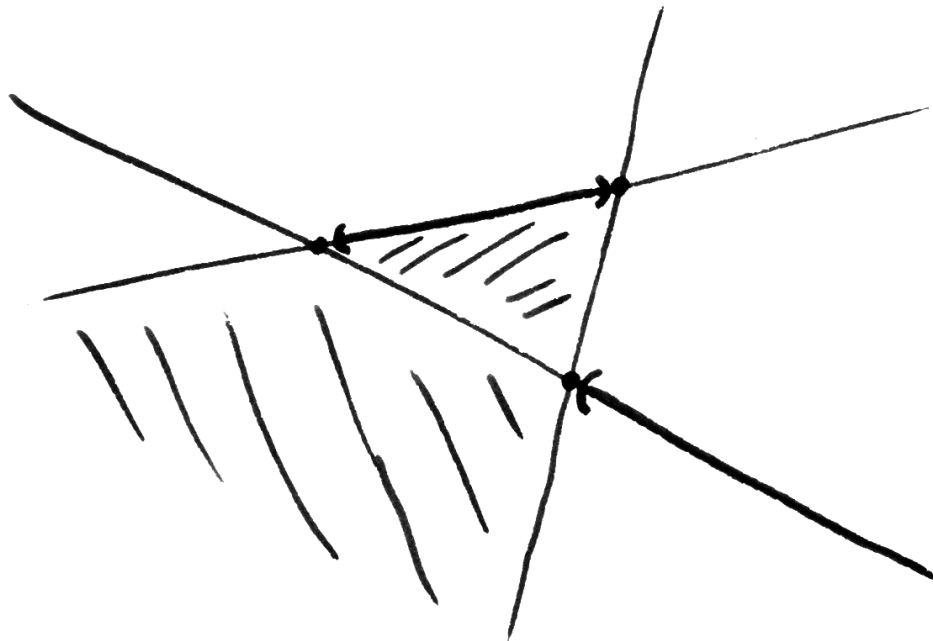
1.3.8. Wollen wir das in algebraischer statt in geometrischer Sprechweise formulieren, so müssen wir statt unserem System von Hyperebenen eine Menge Λ von affinen Abbildungen $\lambda : E \rightarrow k$ betrachten, die jeweils eine Gleichung für jede unserer Hyperebenen enthält. Für jede Dreiteilung dieses Systems $\Lambda = \Lambda^+ \sqcup \Lambda^0 \sqcup \Lambda^-$ ist dann die Menge

$$\left\{ v \in E \left| \begin{array}{ll} \lambda(v) = 0 & \forall \lambda \in \Lambda^0 \\ \lambda(v) > 0 & \forall \lambda \in \Lambda^+ \\ \lambda(v) < 0 & \forall \lambda \in \Lambda^- \end{array} \right. \right\}$$

entweder leer oder eine Facette. Die „lokale Endlichkeit“ unseres Systems von Hyperebenen übersetzt sich in dieser Formulierung in die Bedingung, daß auf jedem Geradensegment höchstens endlich viele $\lambda \in \Lambda$ eine Nullstelle haben dürfen.

Definition 1.3.9. Gegeben ein affiner Raum E über einem angeordneten Körper nennen wir eine Teilmenge $A \subset E$ ganz allgemein eine **Facette**, wenn es ein lokal endliches System von Hyperebenen gibt, zu dem unser A eine Facette im Sinne von 1.3.7 ist. Wir sagen dann auch, daß besagtes System von Hyperebenen „unsere Facette ausschneidet“.

1.3.10. Die mathematische Terminologie ist, was den Begriff einer Facette angeht, uneinheitlich. Vielfach heißt das eine Facette, was bei uns „der Abschluß einer Wandfacette eines Alkoven“ heißt, vergleiche 1.3.28.



Die drei dargestellten Geraden liefern eine Partition der Papierebene in 19 Facetten, als da wären 3 einpunktige Facetten, 3 offene Geradensegmente, von denen ich eines versucht habe durch ein Klammerpaar anzudeuten, 6 offene Halbgeraden, von denen ich eine versucht habe durch eine Klammer anzudeuten, und 7 sogenannte Alkoven, von denen ich Zwei schraffiert habe. Der Abschluß des dreieckigen Alkoven in der Mitte ist die abgeschlossene Dreiecksfläche, er ist in unserem Fall die Vereinigung von 7 unserer Facetten, nämlich von den 3 Punkten, den 3 offenen Geradensegmenten und der offenen Dreiecksfläche selber.

1.3.11 (**Intrinsische Natur der Definition einer Facette**). Ein- und dieselbe Facette kann im allgemeinen durch verschiedene lokal endliche Systeme von Hyper-ebenen ausgeschnitten werden. Insbesondere müssen verschiedene Facetten keineswegs disjunkt sein. Eine Grundprinzip des im folgenden gegebenen Zugangs zur Alkovengeometrie ist die Erkenntnis, daß sich gewisse Aspekte der Geometrie unserer Facetten unabhängig von einem sie ausschneidenden System von Hyper-ebenen formulieren lassen.

Definition 1.3.12. Seien E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und $A \subset E$ eine Facette. Wir erklären den **Abschluß** $\bar{A}$ von A als die Menge aller Punkte $x \in E$ derart, daß für mindestens einen Punkt $y \in A$ die Menge $(x, y]$ ganz in A enthalten ist.

Beispiele 1.3.13. Wegen $(x, x] = \{x\}$ liegt jede Facette in ihrem Abschluß. In einem eindimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die Facetten genau die Punkte, die offenen Geraden-segmente, die offenen Halbgeraden und der ganze Raum. In $\mathbb{R}$ sind die Facetten genau die nichtleeren offenen Intervalle, aber in $\mathbb{Q}$ ist das so nicht richtig. In einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper ist jeder nichtleere affine Teilraum und insbesondere jede einelementige Teilmenge eine Facette. Im allgemeinen ist jeder Halbraum eine Facette und sein Abschluß als Halbraum im Sinne von 1.3.6 fällt mit seinem Abschluß als Facette zusammen.

1.3.14 (**Abschluß einer Facette, Hyperebenen-Beschreibung**). Ist E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper und $A \subset E$ eine Facette und $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen, das sie ausschneidet, so haben wir

$$A = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{A \not\subset H \in \mathcal{H}} H_A^+$$

Der Abschluß unserer Facette wird dann gegeben durch die Formel

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{H}, A \cap H = \emptyset} \bar{H}_A^+$$

Insbesondere gilt für jeden Punkt $y \in A$ offensichtlich $\bar{A} = \{x \in E \mid (x, y] \subset A\}$.

Ergänzung 1.3.15 (**Abschluß einer Facette, topologische Beschreibung**). Haben wir $k = \mathbb{R}$ und ist unser affiner Raum endlichdimensional und versehen wir ihn mit seiner natürlichen Topologie, so stimmt der Abschluß einer Facette überein mit ihrem Abschluß im Sinne der Topologie.

1.3.16 (**Geraden-segmente in Facetten**). Umfaßt eine Facette ein abgeschlossenes Geraden-segment, so umfaßt sie auch ein offenes Geraden-segment, das seinerseits dieses abgeschlossene Geraden-segment umfaßt. Das folgt direkt aus der Definition 1.3.9.

1.3.17 (Facetten in abgeschlossenen Halbräumen). Ist eine Facette in einem abgeschlossenen Halbraum zu einer Hyperebene enthalten, so liegt sie entweder bereits im entsprechenden offenen Halbraum oder aber in der fraglichen Hyperebene. Das folgt direkt aus unseren Erkenntnissen zu Geradensegmenten in Facetten 1.3.16 und der Konvexität.

Definition 1.3.18. Die bezüglich der Inklusionsrelation maximalen Facetten im Abschluß einer gegebenen Facette heißen ihre **Randfacetten**. Diejenigen Randfacetten, die von der gegebenen Facette verschieden sind, nennen wir ihre **echten Randfacetten**.

Beispiel 1.3.19. In $\mathbb{R}$ sind die Facetten genau die nichtleeren offenen Intervalle und ihr Abschluß fällt mit dem topologischen Abschluß zusammen. Jede Facette in $\mathbb{R}$ hat also nur einpunktige echte Randfacetten, und zwar höchstens zwei. Letzteres gilt allgemeiner über jedem angeordneten Körper.

Lemma 1.3.20 (Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten). *Wird eine Facette A durch ein lokal endliches System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ ausgeschnitten, so schneidet dieses System auch alle ihre Randfacetten aus, und diese sind genau alle nichtleeren Schnitte B der Gestalt*

$$B = \bigcap_{A \subset H \in \mathcal{H}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{R}} H \cap \bigcap_{A \not\subset H \notin \mathcal{R}} H_A^+$$

für beliebige Teilmengen $\mathcal{R} \subset \{H \in \mathcal{H} \mid A \not\subset H\}$.

Beweis. In der Tat ist jeder solche nichtleere Schnitt offensichtlich eine Facette im Abschluß von A . Ist umgekehrt eine Facette im Abschluß von A gegeben, so liegt sie sicher auf allen Hyperebenen, auf denen A liegt, und nach unseren Erkenntnissen 1.3.17 zu Facetten in abgeschlossenen Halbräumen liegt sie in Bezug auf alle Hyperebenen aus einem A ausschneidenden System entweder auf der Hyperebene selbst oder in demselben Halbraum wie A . Folglich liegt jede im Abschluß von A enthaltene Facette in einem unserer Schnitte. $\square$

1.3.21 (Teilordnung auf der Menge der Randfacetten). Auf der Menge $\mathcal{F}(A)$ aller Randfacetten einer Facette A erhalten wir eine Teilordnung durch die Vorschrift $B \leq C \Leftrightarrow B \subset \bar{C}$ und für jede Facette $C \in \mathcal{F}(A)$ folgt aus der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20 unschwer $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{F}(A)$. In Worten ist also jede Randfacette einer Randfacette einer Facette A auch bereits selbst eine Randfacette von A .

1.3.22 (Abschluß als Vereinigung der Randfacetten). Nach der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20 ist der Abschluß einer Facette stets die dis-

junkte Vereinigung über alle maximalen in besagtem Abschluß enthaltenen Facetten, in Formeln

$$\bar{A} = \bigsqcup_{B \in \mathcal{F}(A)} B$$

Definition 1.3.23. Der von einer Facette erzeugte affine Teilraum heißt der **Träger** unserer Facette. Er kann auch beschrieben werden als der Schnitt aller derjenigen Hyperebenen eines sie ausschneidenden lokal endlichen Systems, die die fragliche Facette enthalten. Eine Facette, deren Träger der ganze Raum ist, heißt ein **Alkoven** oder auch eine **Kammer**.

Ergänzung 1.3.24. Unter der **Dimension** einer Facette versteht man die Dimension ihres Trägers. Sie kann bei uns auch durchaus unendlich sein. Unter der **Kodimension** einer Facette versteht man die Kodimension ihres Trägers. Sie ist nach unseren Definitionen stets endlich.

Lemma 1.3.25 (Überdeckung durch Alkovenabschlüsse). *Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper überdecken die Abschlüsse der zugehörigen Alkoven ganz E . Bezeichnet $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ die Menge aller Alkoven zu $\mathcal{H}$, so gilt also in Formeln*

$$E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})} \bar{A}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe E mehr als nur einen Punkt. Für $p \in E$ finden wir nach Lemma 1.3.4 eine affine Gerade durch p , die in keiner unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ enthalten ist. Dann gibt es auch einen Punkt q auf unserer Gerade derart, daß das halboffene Geradensegment $(p, q]$ keine unserer Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ trifft. Damit liegt aber per definitionem der Punkt p im Abschluß des Alkoven von q . $\square$

Definition 1.3.26. Unter einer **Wand** eines Alkoven verstehen wir eine Hyperebene, die der **Träger** einer seiner Randfacetten ist.

1.3.27. Nach der Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20 gehört jede Wand eines Alkoven zu jedem lokal endlichen System von Hyperebenen, das besagten Alkoven ausschneidet. Die Menge der Wände eines Alkoven A notieren wir $\mathcal{H}_A$. Eine Randfacette der Kodimension Eins eines Alkoven nennen wir eine **Wandfacette** unseres Alkoven.

1.3.28 (**Diskussion der Terminologie**). Mit der hier eingeführten Terminologie halten wir uns an Bourbaki. Für deren Erweiterung in 1.3.9 weiß ich nicht, ob sie bereits in der Literatur verwendet wird. Jeder Polyeder im Sinne von [LA1] 3.5.18 ist in unserer Terminologie der **Abschluß** einer wohlbestimmten Facette, die man

sein „Inneres“ nennen mag. Die Bezeichnung „Facette eines Polyeders“ wird aber oft auch abweichend verwendet für das, was wir in der hier und im folgenden eingeführten Terminologie den „Abschluß einer Wandfacette des Inneren eines Polyeders“ zu nennen hätten.

Lemma 1.3.29 (Wände als eindeutige Berührende). *Gegeben ein Alkoven und ein ihn ausschneidendes System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ ist eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine Wand unseres Alkoven genau dann, wenn es auf H einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven gibt, der auf keiner anderen Hyperebene aus $\mathcal{H}$ liegt.*

1.3.30. Anschaulich gesprochen in also unsere Wand für mindestens einen Punkt aus dem Abschluß unseres Alkoven die einzige Hyperebene, die den Alkoven „in diesem Punkt berührt“.

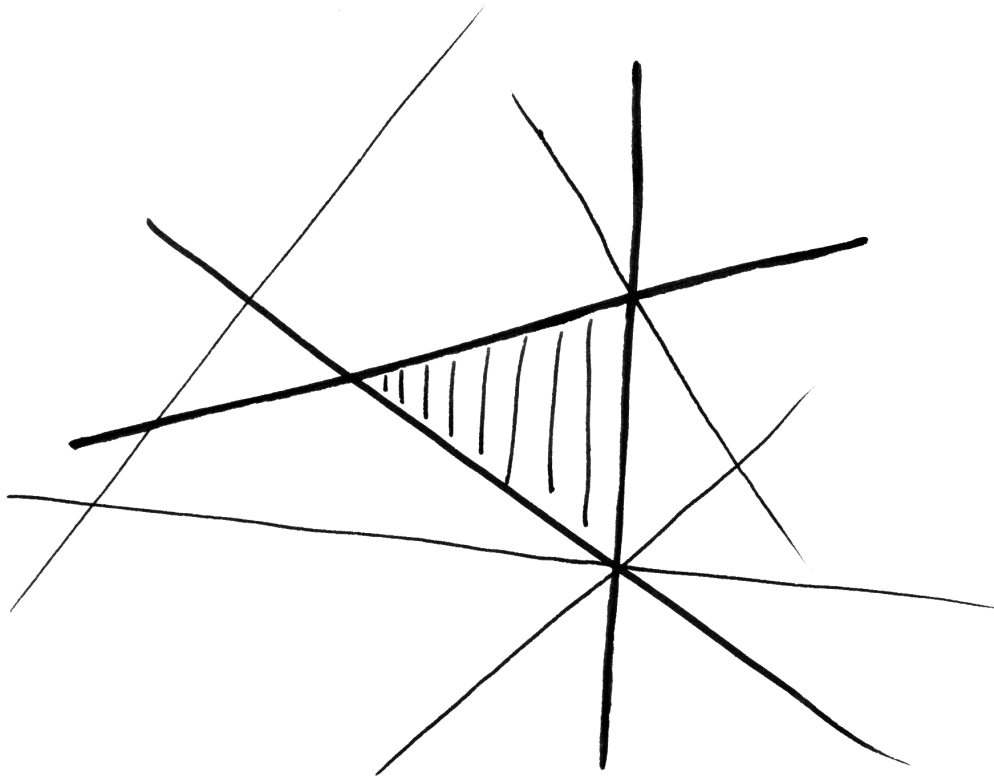
Beweis. Ist unsere Hyperebene die einzige Hyperebene aus $\mathcal{H}$ durch besagten Punkt, die den Alkoven nicht trifft, so muß besagter Punkt nach unserer Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20 zu einer Randfacette gehören, die unsere Hyperebene erzeugt. Folglich ist dann unsere Hyperebene eine Wand des besagten Alkoven. Ist umgekehrt unsere Hyperebene eine Wand des besagten Alkoven, so ist sie Träger einer Randfacette, und jeder Punkt dieser Randfacette hat besagte Eigenschaft, wieder nach unserer Hyperebenenbeschreibung von Randfacetten 1.3.20. $\square$

Satz 1.3.31 (Begrenzung eines Alkoven durch seine Wände). *Jeder Alkoven ist der Schnitt über die ihn umfassenden Halbräume zu seinen Wänden. In Formeln gilt für jeden Alkoven A also*

$$A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A} H_A^+$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß jedes Segment $[x, y]$ mit $x \in A$ und $y \notin A$ mindestens eine Wand von A trifft. Per definitionem gibt es ein lokal endliches System $\mathcal{H}$ von Hyperebenen, das den Alkoven A ausschneidet. Lassen wir aus diesem System eine Hyperebene weg, die keine Wand von A ist, so erhalten wir nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.29 wieder ein lokal endliches System von Hyperebenen, das den Alkoven A ausschneidet. Trifft unser Segment also keine Wand von A , so können wir die endlich vielen Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die es trifft, aus $\mathcal{H}$ herausnehmen und erhalten wieder ein System von Hyperebenen, das den Alkoven A ausschneidet. Daraus folgt jedoch $y \in A$ im Widerspruch zu unserer Annahme. $\square$

Lemma 1.3.32 (Jede Hyperebene ist Wand eines Alkoven). *Ist $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten*



Ein System von Hyperebenen, ein zugehöriger Alkoven als schraffierte Dreiecksfläche, und seine drei Wände als fett eingezeichnete affine Geraden.

Körper, so ist jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ Wand mindestens eines der durch dieses System definierten Alkoven, in Formeln

$$\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{H}_A$$

Beweis. Für $H \in \mathcal{H}$ finden wir nach 1.3.4 einen Punkt $q \in H$, der auf keiner anderen Hyperebene aus $\mathcal{H}$ liegt. Er liegt nach der Überdeckung durch Alkovenabschlüsse 1.3.25 im Abschluß eines Alkoven, und unsere Hyperebene ist dann nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.29 eine Wand dieses Alkoven. $\square$

Ergänzung 1.3.33 (Algebraische Beschreibung der Wände eines Alkoven). Sei A ein Alkoven zu einem lokal endlichen System von Hyperebenen $\mathcal{H}$. Wählt man für jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine affine Abbildung $\alpha_H : E \rightarrow k$ mit $\alpha_H|_A > 0$, so sind die Wände von A genau diejenigen $H \in \mathcal{H}$ mit $\bar{A} \cap H \neq \emptyset$, für die sich α_H nicht als positive Linearkombination gewisser α_L mit $L \neq H$ schreiben läßt. Daß für jede Wand H von A diese Bedingung erfüllt ist, ist eh klar. Daß nur Wände unsere Bedingung erfüllen, ergibt sich als eine Konsequenz des Hauptsatzes über lineare Ungleichungen [LA1] 3.5.8: Ist nämlich H keine Wand und $x \in \bar{A} \cap H$, so gibt es nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.29 noch mindestens eine weitere Hyperebene aus $\mathcal{H}$ durch x , aber auch höchstens endlich viele derartige Hyperebenen $L, \dots, M \in \mathcal{H}$. Ließe sich α_H nicht als positive Linearkombination aus ihnen schreiben, so gäbe es nach dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen [LA1] 3.5.8 einen Punkt y mit $\alpha_H(y) < 0$ aber $\alpha_L(y) \geq 0, \dots, \alpha_M(y) \geq 0$. Das Segment $[x, y]$ trifft nun höchstens endlich viele Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Indem wir y notfalls durch einen geeigneten anderen Punkt von $(x, y]$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß $(x, y]$ außer H selbst keine Hyperebene aus $\mathcal{H}$ trifft. Für beliebiges $z \in A$ trifft dann (y, z) die Hyperebene H aber keine andere unserer Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Damit wäre aber H nach der Beschreibung der Wände als eindeutige Berührende 1.3.29 doch eine Wand gewesen.

Übungen

Übung 1.3.34. Ist der Schnitt zweier Facetten nicht leer, so ist er wieder eine Facette, deren Abschluß als der Schnitt der Abschlüsse der ursprünglichen Facetten beschrieben werden kann.

Übung 1.3.35. Trennt eine Hyperebene H zwei Facetten A und B , so gilt stets $\bar{A} \cap \bar{B} \subset H$.

Übung 1.3.36. Sei E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper k . Gegeben eine Facette $F \subset E$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in E \setminus 0$ sind gleichbedeutend:

1. F umfaßt eine Gerade mit Richtungsvektor $\vec{v}$;
2. $F = \lambda \vec{v} + F \quad \forall \lambda \in k$;
3. Es gibt ein F ausschneidendes System von Hyperebenen derart, daß $\vec{v}$ zum Richtungsraum jeder dieser Hyperebenen gehört;
4. Für jede Hyperebene in E , die F nicht trifft, liegt $\vec{v}$ im Richtungsraum besagter Hyperebene.

Übung 1.3.37. Gegeben eine Facette A gehören zwei verschiedene Punkte aus ihrem Abschluß $x, y \in \bar{A}$ zu derselben maximalen Facette $B \subset \bar{A}$ genau dann, wenn es ein offenes ganz in $\bar{A}$ enthaltenes Geradensegment gibt, das unsere beiden Punkte enthält.

Übung 1.3.38. Gegeben ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper sind die zugehörigen Alkoven genau die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems, und jede nichtleere konvexe Teilmenge von $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ liegt in genau einem Alkoven.

Übung 1.3.39. Gegeben ein beliebiges System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in einem affinen Raum E über einem angeordneten Körper ist das Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen unseres Systems $E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ die disjunkte Vereinigung seiner maximalen konvexen Teilmengen, und jede nichtleere konvexe Teilmenge ist in genau einer dieser maximalen konvexen Teilmengen enthalten.

Übung 1.3.40. Ein Alkoven in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper kann nicht durch ein lokal endliches System von Hyperebenen überdeckt werden.

1.4 Facettenabschluß als konvexe Hülle*

Satz 1.4.1 (Facettenabschluß als Hülle der einpunktigen Randfacetten). *Umfaßt eine Facette in einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper keine Halbgerade, so ist ihr Abschluß die konvexe Hülle der Vereinigung aller einpunktigen Randfacetten besagter Facette.*

Beweis. Umfaßt unsere Facette keine Halbgerade, so kann auch keine ihrer Randfacetten eine Halbgerade umfassen, denn so eine Halbgerade könnten wir parallel in unsere ursprüngliche Facette hineinschieben. Sei nun A unsere Facette. Jeder Punkt $x \in \bar{A}$ gehört zu genau einer Randfacette $C \in \mathcal{F}(A)$ von A und diese enthält nach unserer Vorüberlegung auch keine Halbgerade. Im Fall $C \neq A$ beendet vollständige Induktion über die Dimension unserer Facette den Beweis. Ist A nur

ein Punkt, ist die Behauptung eh klar. Ist schließlich $C = A$ alias $x \in A$ aber $A \neq \{x\}$, so umfaßt A ein ganzes offenes Geradensegment um unseren Punkt. Die zugehörige Gerade schneidet dann $\bar{A}$ in einem Segment $[y, z]$ mit $y, z \notin A$, diese liegen in Randfacetten von A echt kleinerer Dimension, und vollständige Induktion beendet wieder den Beweis. $\square$

Proposition 1.4.2 (Facettenabschluß als Hülle der echten Randfacetten). *Sei E ein endlichdimensionaler affiner Raum über einem angeordneten Körper k und sei $F \subset E$ eine Facette der Dimension $\dim F \geq 2$. Umfaßt F keine Gerade, so ist $\bar{F}$ die konvexe Hülle von $\bar{F} \setminus F$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei F ein Alkoven. Wir argumentieren mit Induktion über die Dimension. Im ebenen Fall $\dim F = 2$ gibt es in einem F ausschneidenden System nach 1.3.36 zwei Hyperebenen alias Geraden H und G , die nicht parallel sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind das die beiden Koordinatenachsen in k^2 . Es gibt folglich einen Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E} \setminus 0$ derart, daß für alle $p \in F$ die Gerade $p + k\vec{v}$ die Facette F nur in einem endlichen Segment trifft, in Formeln $p + \lambda\vec{v} \notin F$ für $\lambda \gg 0$ und auch für $\lambda \ll 0$. Also gibt es auch $\mu, \nu > 0$ mit $p + \mu\vec{v}, p - \nu\vec{v} \in \bar{F} \setminus F$ und der ebene Fall ist erledigt. Um im allgemeinen zu sehen, daß jeder Punkt $p \in F$ in besagter konvexer Hülle liegt, müssen wir nur eine Hyperebene durch p legen und die Induktionsannahme auf den Schnitt unserer Facette F mit besagter Hyperebene anwenden. $\square$

Korollar 1.4.3 (Facettenabschluß als Hülle kleiner Randfacetten). *Seien E ein endlichdimensionaler affiner Raum über einem angeordneten Körper und $F \subset E$ eine Facette, die keine Gerade umfaßt. So ist $\bar{F}$ die konvexe Hülle der Vereinigung aller Randfacetten der Dimension ≤ 1 von F .*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Proposition 1.4.2. $\square$

1.4.4 (Konvexe Hüllen als Abschlüsse von Facetten). In einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem angeordneten Körper ist nach dem Hauptsatz über lineare Ungleichungen [LA1] 3.5.8 jeder endlich erzeugte Kegel der Abschluß einer Facette. Ebenso ist in einem endlichdimensionalen affinen Raum über einem angeordneten Körper nach dem Hauptsatz über affine Ungleichungen [LA1] 3.5.16 die konvexe Hülle einer endlichen nichtleeren Teilmenge stets der Abschluß einer Facette.

Ergänzung 1.4.5. Die **Vermutung von Hirsch** besagt, daß man in einem beschränkten Alkoven aus $\mathbb{R}^d$ mit n Wänden zwischen je zwei seiner Ecken einen Weg aus höchstens $n - d$ seiner Kanten finden sollte. Hier meinen Ecken null-dimensionale und Kanten eindimensionale Randfacetten unseres Alkoven. Einen Übersichtsartikel zu dieser Vermutung findet man etwa in [KS10], in der der Zweitautor als „note added in press“ ein Gegenbeispiel ankündigt. Der Abschluß eines beschränkten Alkoven aus $\mathbb{R}^d$ heißt im übrigen auch ein **Polytop**.

Übungen

Übung 1.4.6. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper. Sei $A \subset E$ eine Facette und $m = \min\{\dim B \mid B \in \mathcal{F}(A)\}$ die kleinstmögliche Dimension für eine Randfacette von A . So ist A die konvexe Hülle der Vereinigung seiner Randfacetten der Dimension $\leq d + 1$.

Ergänzende Übung 1.4.7. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper. So ist die konvexe Hülle einer endlichen Vereinigung von Facettenabschlüssen wieder ein Facettenabschluß. Ich habe mir die Lösung nicht überlegt und kann auf die Schnelle nicht abschätzen, wie schwer das zu zeigen ist.

Übung 1.4.8. Gegeben $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem affinen Raum über einem angeordneten Körper und Alkoven A, B bezeichne $d(A, B)$ die Zahl von Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die A und B trennen. Man zeige, daß es stets eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ von der Menge der Alkoven in die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ gibt mit $d(A, B) \equiv \varphi(A) - \varphi(B) \pmod{2}$ für beliebige Alkoven A, B .

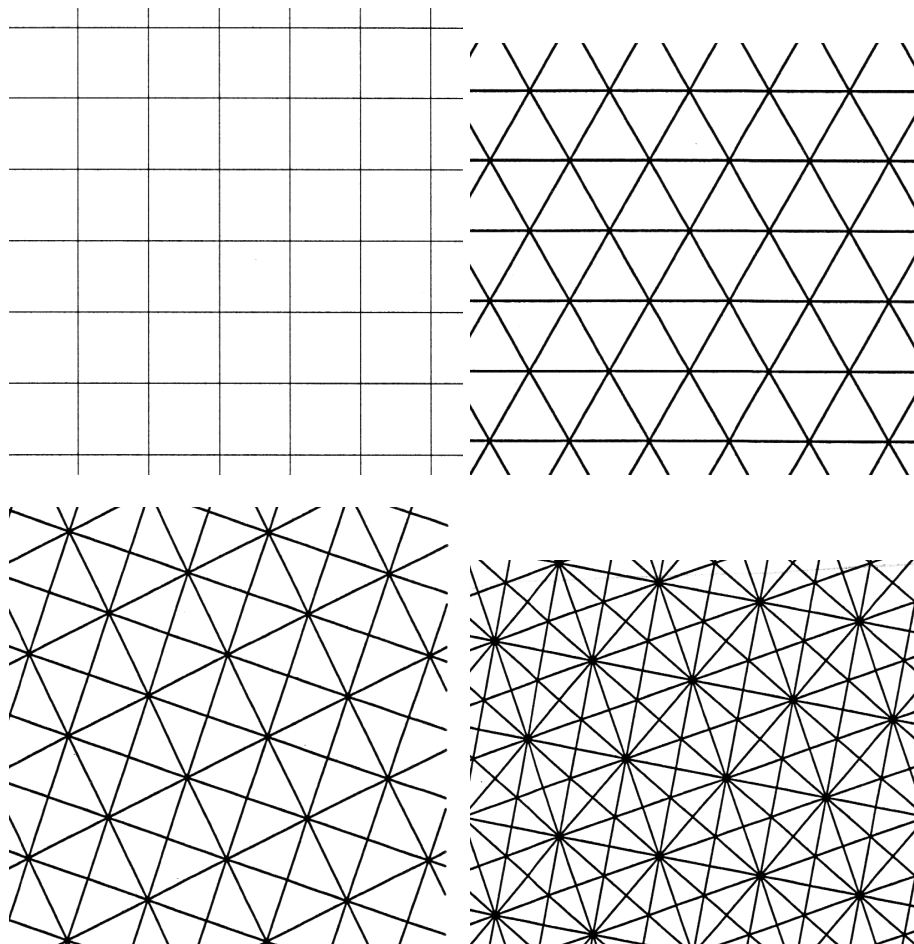
1.5 Affine Spiegelungsgruppen

Definition 1.5.1. Eine affine Abbildung von einem affinen Raum in sich selbst heißt eine **Spiegelung** oder noch präziser eine **affine Spiegelung**, wenn ihr Quadrat die Identität ist und ihre Fixpunktmenge eine Hyperebene. Wir nennen diese Fixpunktmenge dann den **Spiegel** oder genauer die **Spiegelhyperebene** unserer Spiegelung. Wir werden Spiegelungen nur in affinen Räumen über Körpern einer von Zwei verschiedenen Charakteristik betrachten.

Definition 1.5.2. Unter einer **affinen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine Gruppe von Automorphismen eines affinen Raums über einem angeordneten Körper, die (1) von Spiegelungen erzeugt wird, für die (2) die Spiegel ihrer Spiegelungen ein lokal endliches System von Hyperebenen bilden, und so daß (3) die linearen Anteile der Elemente unserer Gruppe eine endliche Gruppe von Automorphismen des Richtungsraums bilden.

1.5.3. Wenn wir von einer affinen Spiegelungsgruppe (W, E) reden, so ist mit E der zugrundeliegende affine Raum gemeint und mit W die Gruppe selbst. Zwei affine Spiegelungsgruppen (W, E) und (W', E') über demselben Körper heißen **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus von affinen Räumen $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt mit $W = \varphi^{-1}W'\varphi$.

Vorschau 1.5.4. Der Rest dieses Abschnitts kann als eine vollständige Klassifikation der reellen affinen Spiegelungsgruppen in endlichdimensionalen Räumen



Dieses Bild zeigt die Spiegelhyperebenen von vier ebenen affinen reellen Spiegelungsgruppen. Das sind auch bis auf Konjugation mit Automorphismen der affinen Ebene alle Möglichkeiten für ebene affine reelle Spiegelungsgruppen, die „essentiell“ sind in dem Sinne, daß die darin enthaltenen Verschiebungen den Richtungsraum aufspannen. Die Bilder sind so gezeichnet, daß die Spiegelungen an einer Hyperebene in der jeweiligen affinen Spiegelungsgruppe den Spiegelungen auf der Papierebene im Sinne der Schulgeometrie entsprechen.

gelesen werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Dieses Ziel ist auch der Grund, aus dem wir es bei den Definitionen stets vermeiden, in der euklidischen Situation zu arbeiten. Die endlichen reellen Spiegelungsgruppen werden bereits in 1.9.7 im Verbund mit 1.9.5 durch ihre „Coxeter-Graphen“ zusammen mit der Dimension des Raums ihrer Fixpunkte klassifiziert. Nach 1.12.4 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen „essentiellen“ Faktor und die Isomorphieklassen dieser Faktoren sind eindeutig bestimmt. Satz 2.4.3 gibt dann eine Klassifikation der „essentiellen“ affinen Spiegelungsgruppen durch sogenannte „Wurzelsysteme“, die hinwiederum nach 2.2.14 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Die unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich werden in 2.3.7 durch ihre „Dynkin-Diagramme“ klassifiziert. Der Fall unendlicher Dimension unterscheidet sich nur um einen trivialen Faktor von dem hier beschriebenen endlichdimensionalen Fall.

Beispiel 1.5.5. Betrachten wir in einer reellen affinen Ebene zwei verschiedene aber parallele Geraden und wählen zu jeder dieser Geraden eine Spiegelung, die sie festhält, so erzeugen diese beiden Spiegelungen eine Gruppe von Automorphismen der affinen Ebene. Diese Gruppe ist jedoch nur dann eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne unserer Definition 1.5.2, wenn die linearen Anteile der beiden erzeugenden Spiegelungen übereinstimmen.

Definition 1.5.6. Unter einem **affinen euklidischen Raum** verstehen wir hier und im folgenden einen affinen Raum über einem angeordneten Körper, dessen Raum von Richtungsvektoren mit einer euklidischen Struktur alias einem bis auf einen positiven Faktor wohlbestimmten Skalarprodukt versehen ist. Eine affine Abbildung zwischen affinen euklidischen Räumen heißt **orthogonal**, wenn ihr linearer Anteil orthogonal ist. Eine **Spiegelung** oder präziser eine **affine orthogonale Spiegelung** auf einem affinen euklidischen Raum ist eine orthogonale Abbildung, deren Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Unter einer **affinen euklidischen Spiegelungsgruppe** verstehen wir eine affine Spiegelungsgruppe, die aus orthogonalen Automorphismen eines affinen euklidischen Raums besteht.

Ergänzung 1.5.7. Gegeben eine Gruppe von orthogonalen Automorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen affinen Raums, die die Bedingungen (1) und (2) aus 1.5.2 an eine affine Spiegelungsgruppe erfüllt, ist Bedingung (3) von ebendort automatisch erfüllt, als da heißt, die Gruppe aller linearen Anteile ist endlich. Um das zu sehen, reicht es zu zeigen, daß die Menge aller Normalenvektoren auf Spiegeln endlich ist. In der Tat operiert nämlich unsere Gruppe linearer Anteile treu auf dieser Menge, da sie ja deren orthogonales Komplement punktweise festhalten muß. Im Reellen können wir nun argumentieren wie folgt: Wäre unsere Menge von Normalenvektoren nicht endlich, so gäbe es wegen der Kompaktheit der Einheitssphäre Spiegel, die beliebig kleine positive Winkel einschließen. Wir

zeigen, daß damit auch zwischen den Wänden eines und jedes Alkoven beliebig kleine positive Winkel vorkämen, im Widerspruch zu 1.12.8. In der Tat: Für zwei Spiegel, die sich treffen, gibt es nur endlich viele Spiegel, die die Schnittgerade umfassen. Auf dieser Schnittgeraden finden wir Punkte, die in keinem zusätzlichen Spiegel enthalten sind. Solch ein Punkt liegt dann im Abschluß eines Alkoven, und zwei Wände dieses Alkoven, die den besagten Punkt enthalten, schließen dann höchstens denselben Winkel ein wie die beiden Spiegel, von denen wir ausgegangen waren. Sind wir nicht im Reellen, so können wir argumentieren wie folgt: Unterteilen wir die Oberfläche eines Einheitswürfels um den Nullpunkt in noch so kleine Schachfelder, so müßten doch zwei verschiedene Normalengerechten auf Spiegeln durch dasselbe Feld gehen. Der Rest des Arguments bleibt dem Leser überlassen.

Lemma 1.5.8. *In einer affinen Spiegelungsgruppe haben verschiedene Spiegelungen auch verschiedene Spiegel.*

Erster Beweis. Wir finden ja nach 1.2.6 ein Skalarprodukt auf dem Richtungsraum, das unter den linearen Anteilen der Elemente unserer affinen Spiegelungsgruppe invariant ist. Bezüglich jedes solchen Skalarprodukts muß eine Spiegelung dann die orthogonale Spiegelung zu ihrem Spiegel sein. $\square$

Zweiter Beweis. Gegeben zwei Spiegelungen s, t mit demselben Spiegel hat st mindestens einen Fixpunkt und es reicht mithin zu zeigen, daß der lineare Anteil von st die Identität ist. Man sieht jedoch unmittelbar, daß der lineare Anteil von (st) unipotent ist, und wäre er nicht die Identität, so hätte er folglich unendliche Ordnung. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer letzten Forderung an eine affine Spiegelungsgruppe. $\square$

1.5.9 (Konjugierte einer Spiegelung). Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe (W, E) und eine Spiegelung $s \in W$ mit Spiegel $E^s = H$ schreiben wir die zugehörige Spiegelung auch

$$s = s_H : E \rightarrow E$$

Für beliebiges $w \in W$ gilt dann $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$, denn beide Seiten sind Spiegelungen aus W mit demselben Spiegel.

1.5.10. Gegeben ein affiner euklidischer Raum E und eine affine Hyperebene $H \subset E$ schreiben wir die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene H , wenn es sie denn gibt, auch $s_H : E \rightarrow E$. Für eine beliebige orthogonale Abbildung $w : E \rightarrow E$ gilt dann $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$, denn beide Seiten sind orthogonale Spiegelungen mit demselben Spiegel.

Ergänzung 1.5.11. Es kann nur im Fall unendlicher Dimension Vorsicht passieren, daß das orthogonale Komplement einer linearen Hyperebene nur aus dem

Nullvektor besteht und es somit dazu keine orthogonale Spiegelung gibt. Sogar das orthogonale Komplement des Raums aller differenzierbaren Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ im Raum aller stetigen Funktionen bezüglich des üblichen Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int fg$ ist ja schon der Nullraum.

Beispiel 1.5.12. Wir betrachten die Menge $\mathcal{H}$ aller derjenigen Geraden in $\mathbb{R}^2$, die parallel sind zu einer der Koordinatenachsen und durch einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen. Offensichtlich ist $\mathcal{H}$ die Menge aller Spiegel einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe und die Alkoven sind gerade die „Felder dieses Rechenpapiers“. Allgemeiner können wir natürlich auch die Menge $\mathcal{H}$ aller derjenigen Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$ betrachten, die parallel sind zu einer der Koordinaten-Hyperebenen und die einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthalten. Im Fall $n = 1$ sind die Alkoven die offenen Segmente $(i, i + 1)$, im Fall $n = 3$ haben sie die Gestalt von Würfeln.

1.5.13. Eine endliche Gruppe von Bewegungen eines affinen Raums über einem Körper der Charakteristik Null hat stets einen Fixpunkt, genauer ist der Schwerpunkt jeder Bahn ein Fixpunkt.

Übungen

Übung 1.5.14. Jede von Spiegelungen erzeugte Untergruppe einer affinen Spiegelungsgruppe ist auch selbst eine affine Spiegelungsgruppe.

1.6 Transitivität auf der Menge der Alkoven

Satz 1.6.1 (Geometrie affiner Spiegelungsgruppen). *Sei $\mathcal{H}$ ein lokal endliches System von Hyperebenen in einem euklidischen affinen Raum E endlicher Dimension über einem angeordneten Körper, das unter allen orthogonalen Spiegelungen an seinen Hyperebenen stabil ist. So gilt:*

1. *Unser System $\mathcal{H}$ ist das System aller Spiegel einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe;*
2. *Für jeden festen Alkoven in Bezug auf $\mathcal{H}$ erzeugen die Spiegelungen an seinen Wänden bereits die gesamte Spiegelungsgruppe;*
3. *Ist A ein fester Alkoven und $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements w unserer Spiegelungsgruppe als Produkt von Spiegelungen s_i an den Wänden von A , so ist die Länge r dieser Darstellung genau die Zahl der Spiegel $H \in \mathcal{H}$, die wA von A trennen;*
4. *Unsere Spiegelungsgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge ihrer Alkoven.*

Beweis. Bezeichne $\mathcal{A}$ die Menge aller Alkoven zu $\mathcal{H}$ und W die von den orthogonalen Spiegelungen s_H mit $H \in \mathcal{H}$ erzeugte Gruppe von affinen Selbstabbildungen von E . Daß $\mathcal{H}$ in der Tat die Menge aller Spiegel zu Spiegelungen aus W ist, wird sich erst am Ende des Beweises herausstellen. Wir wählen einen festen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ und bezeichnen mit

$$W' := \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A \rangle$$

die von den Spiegelungen an seinen Wänden erzeugte Untergruppe $W' \subset W$. Wir zeigen als erstes, daß W' transitiv auf $\mathcal{A}$ operiert. Dazu benutzen wir:

Lemma 1.6.2. *Ist $A \in \mathcal{A}$ ein Alkoven und H eine Wand von A , so ist H die einzige Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt.*

Beweis des Lemmas. Ist H eine Wand von A , so gibt es nach 1.3.29 einen Punkt $p \in \bar{A} \cap H$, der auf keiner anderen Hyperebene liegt, die A vermeidet. Eine Hyperebene, die die zwei Facetten trennt, muß jedoch nach 1.3.35 den Schnitt ihrer Abschlüsse umfassen. Jede Hyperebene, die A von $s_H A$ trennt, muß also p enthalten und A vermeiden und fällt folglich mit H zusammen. $\square$

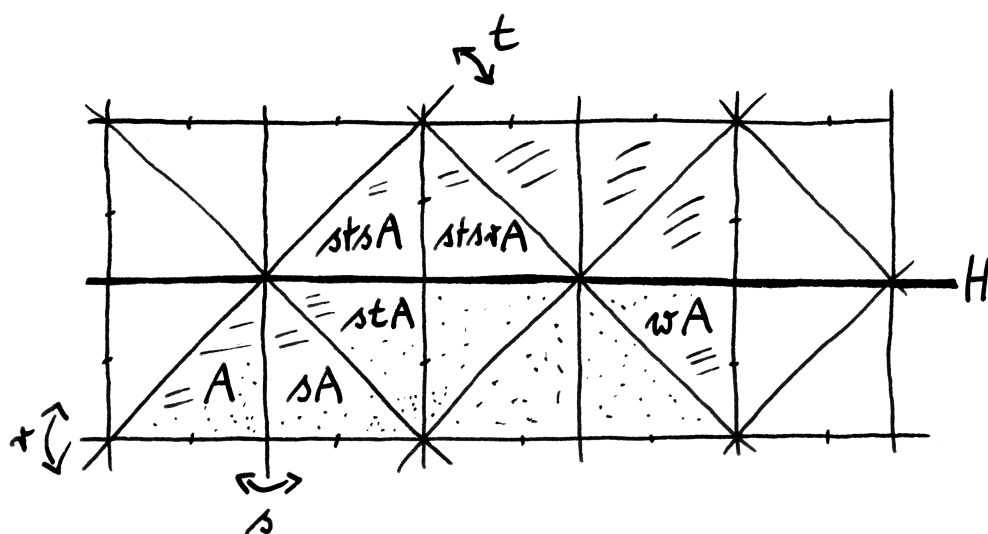
Sei nun $C \in \mathcal{A}$ ein Alkoven. Wir wählen $w \in W'$ derart, daß die Zahl der Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$, die A von wC trennen, so klein wie möglich wird. Gälte nicht $A = wC$, so gäbe es nach 1.3.31 eine Wand $H \in \mathcal{H}_A$ von A , die A von wC trennt. Dann würden aber $s_H A$ und wC und ebenso A und $s_H wC$ von noch weniger Hyperebenen aus $\mathcal{H}$ getrennt als A und wC , im Widerspruch zur Wahl von w . Es gilt also $A = wC$ und W' operiert transitiv auf $\mathcal{A}$. Nach dieser Vorbemerkung zeigen wir die Behauptungen des Satzes in der Reihenfolge 2–3–4–1.

2. Jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ ist nach 1.3.32 Wand eines geeigneten Alkoven $C \in \mathcal{A}$, in Formeln $H \in \mathcal{H}_C$. Nach dem Vorhergehenden finden wir $w \in W'$ mit $wC = A$. Offensichtlich gilt weiter $w\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A$ und wir folgern $s_H = w^{-1}s_{wH}w \in W'$ und damit $W = W'$.

3. Sei $w = s_1 \dots s_r$ eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements $w \in W$ als Produkt von Spiegelungen an Wänden $H_1, \dots, H_r$ von A . Für zwei Alkoven $B, C \in \mathcal{A}$ bezeichne $d(B, C)$ die Zahl der Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die B und C trennen. Es gilt zu zeigen $r = d(A, wA)$. Wir betrachten dazu die Folge von Alkoven $A, s_1 A, s_1 s_2 A, \dots, wA$ und notieren sie der Einfachheit halber

$$A_{[i]} := s_1 \dots s_i A$$

Zwei aufeinanderfolgende Alkoven $A_{[i-1]}$ und $A_{[i]}$ unserer Folge werden nach 1.6.2 nur durch die Hyperebene $H_{[i]} := s_1 \dots s_{i-1} H_i$ getrennt, die dann auch die einzige gemeinsame Wand dieser beiden Alkoven ist. Es folgt schon $r \geq$



Wir hätten hier die Darstellung $w = stsrtsts$ aber nur sechs Hyperebenen trennen A von wA . Die Hyperebene H wird auch von unserer Folge von Alkoven zweimal gekreuzt, und das führt zur kürzeren Darstellung $w = st\hat{s}rtst\hat{s} = strtst$, die nun bereits aus der kleinstmöglichen Zahl von sechs Spiegelungen an Wänden von A besteht, und die ich durch Pünktchen angedeutet habe.

$d(A, wA)$. Wäre $r > d(A, wA)$, so müßte unsere Folge von Alkoven eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ zweimal kreuzen, wir hätten also $H_{[i]} = H_{[j]}$ mit $r \geq j > i \geq 1$. Daraus folgte aber $H_i = s_i \dots s_{j-1} H_j$, mithin $s_i = s_i \dots s_{j-1} s_j s_{j-1} \dots s_i$ oder $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_j$ und unsere Darstellung wäre nicht kürzestmöglich.

4. Wir haben bereits gezeigt, daß W transitiv auf $\mathcal{A}$ operiert. Nach 3 folgt aber aus $wA = A$ schon $w = \text{id}$, also operiert W auch frei.

1. Für eine Spiegelung aus W , deren Spiegel nicht zu $\mathcal{H}$ gehörte, könnte ihr Spiegel nach 1.3.4 nicht enthalten sein in der Vereinigung der Hyperebenen aus $\mathcal{H}$ und müßte deshalb einen Alkoven aus $\mathcal{A}$ treffen. Dann müßte unsere Spiegelung diesen Alkoven auf sich selbst abbilden. Nach 4 ist aber die Identität das einzige Element von W , das einen Alkoven festhält. Also besteht $\mathcal{H}$ bereits aus allen Spiegeln zu Spiegelungen von W . $\square$

Korollar 1.6.3. *Erzeugt eine Menge von affinen Spiegelungen eine affine Spiegelungsgruppe, so ist jede Spiegelung dieser Spiegelungsgruppe konjugiert zu einer Spiegelung aus besagter Menge.*

Beweis. Sei S unsere Menge von Spiegelungen, W die davon erzeugte affine Spiegelungsgruppe, und $T \subset W$ die Menge aller Konjugierten zu Elementen von S . Wir müssen nur ein unter den linearen Anteilen der Elemente von W invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum wählen und 1.6.1 auf das System $\mathcal{H}$ der Spiegel zu Spiegelungen aus T anwenden, um zu sehen, daß T bereits die Menge aller Spiegelungen aus der von T erzeugten Untergruppe von W sein muß. $\square$

Definition 1.6.4. Seien W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $S \subset W$ die Menge aller Spiegelungen an Wänden von A . Eine kürzestmögliche Darstellung von $w \in W$ als Produkt von Elementen von S nennt man **reduzierte Darstellung** von w durch Spiegelungen aus S , und die Länge einer reduzierten Darstellung heißt die **Länge** $l(w) = l_S(w) = l_A(w)$ von w .

1.6.5. In diesen Notationen haben wir in 1.6.1 also unter anderem gezeigt, daß gilt $l_A(w) = d(A, wA)$. Weiter haben wir beim Beweis von 1.6.1 gezeigt, daß gegeben $s_1, \dots, s_r \in S$ Spiegelungen an Wänden H_i von A mit Produkt $w = s_1 \dots s_r$ und L ein Spiegel von W , der A und wA trennt, es notwendig ein i gibt mit $L = s_1 \dots s_{i-1} H_i$ und folglich $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Ist unsere Darstellung von w reduziert, in Formeln $r = l(w)$, so sind immer nach dem Beweis von 1.6.1 die $s_1 \dots s_{i-1} H_i$ sogar genau die r Spiegel, die A und wA trennen.

1.6.6. Nach dem Vorhergehenden ist $d(A, wA)$ genau dann gerade, wenn w ein orientierungserhaltender Automorphismus unseres endlichdimensionalen affinen Raums ist. Insbesondere gilt stets $d(A, s_L B) \neq d(A, B)$, ja beide Seiten können noch nicht einmal dieselbe Parität haben. Statt mit der Orientierung kann man hier auch mit der Schwarz-Weiß-Färbung der Alkoven nach 1.4.8 argumentieren.

Proposition* 1.6.7. Seien A, B Alkoven und L ein Spiegel zu einer affinen Spiegelungsgruppe. Genau dann trennt L unsere beiden Alkoven, wenn A und $s_L B$ durch weniger Spiegel getrennt werden als A und B . In Formeln gilt also

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \Leftrightarrow d(A, s_L B) < d(A, B)$$

Beweis. Es reicht $\Rightarrow$ zu zeigen, die andere Implikation folgt dann durch Anwenden der einen Implikation auf $s_L B$ statt auf B , da wir $d(A, s_L B) \neq d(A, B)$ aus 1.6.6 wissen. Wir finden nun Spiegelungen $s_1, \dots, s_r$ an Wänden von A mit $r = d(A, B)$ und $B = s_1 \dots s_r A$. Da L unsere beiden Alkoven trennt, gibt es nach der vorhergehenden Bemerkung 1.6.5 einen Index i mit $s_L s_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Damit folgt wie gewünscht $d(A, s_L B) < r$. $\square$

Satz* 1.6.8 (Austauschlemma). Seien W eine affine Spiegelungsgruppe, A ein Alkoven, S die Menge der Spiegelungen an Wänden von A und $l = l_A$ die zugehörige Länge. Seien weiter $s_1, \dots, s_r \in S$. Ist t eine Spiegelung aus W mit $l(ts_1 \dots s_r) < l(s_1 \dots s_r)$, so gibt es einen Index $i \in [1, r]$ mit

$$ts_1 \dots s_i \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

Gilt hier $r = l(s_1 \dots s_r)$, so ist dieser Index i sogar eindeutig bestimmt.

1.6.9. Die letzte Gleichung kann auch zu $s_1 \dots s_i \dots s_r = ts_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$ umgeschrieben werden. Wir können also in Worten eine einfache Spiegelung s_i in der Mitte austauschen gegen die Spiegelung t ganz vorne ohne das Produkt zu ändern, wenn (und im Fall einer reduzierten Darstellung genau dann, wenn) die Multiplikation mit t die Länge verkleinert.

Beweis. Sei $t = s_L$ und $B = s_1 s_2 \dots s_r A$. Aus der Annahme folgt mit 1.6.7, daß der Spiegel L die Alkoven A und $s_1 s_2 \dots s_r A$ trennt. Daraus folgt dann mit 1.6.5 sofort $ts_1 \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Der Beweis der letzten Aussage bleibe dem Leser zur Übung überlassen. $\square$

Übungen

Übung 1.6.10. Seien W eine endliche Spiegelungsgruppe, A ein fester Alkoven und $l = l_A$ die zugehörige Länge. So gibt es in W genau ein Element w_A maximaler Länge, und diese Länge ist die Zahl der Spiegelungen in W .

Übung 1.6.11. Jede nichtreduzierte Darstellung eines Elements einer affinen Spiegelungsgruppe in Bezug auf einen festen Alkoven kann durch Streichen von Faktoren zu einer reduzierten Darstellung desselben Elements gemacht werden.

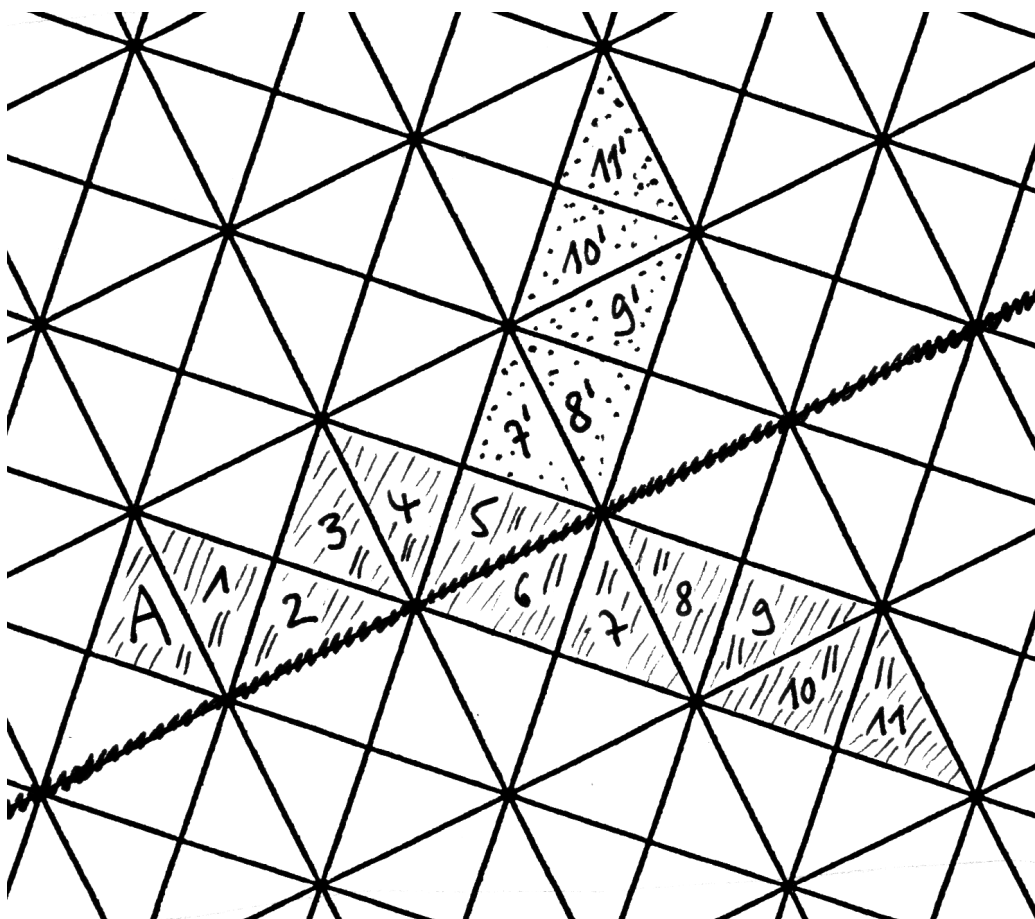


Illustration zum Austauschlemma. Die Spiegelung an der gezackelten Spiegelhyperebene stellt t dar, $s_1 \dots s_i A$ ist der Alkoven mit der Nummer i und $s_1 \dots \hat{s}_6 \dots s_i A$ der Alkoven mit der Nummer i' . Im vorliegenden Fall hätten wir

$$ts_1 \dots s_{11} = s_1 \dots \hat{s}_6 \dots s_{11}.$$

Übung 1.6.12. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und $Q \subset V$ ein Gitter alias der $\mathbb{Z}$ -Spann einer Basis und $(\ , \)$ ein Skalarprodukt auf V mit und $(\ , \) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$. Man zeige, daß die orthogonalen Spiegelungen an den orthogonalen Komplementen aller Vektoren $v \in Q$ mit $(v, v) = 2$ die Spiegelungen einer endlichen Spiegelungsgruppe sind.

1.7 Fundamentalbereiche

Notation 1.7.1. Seien für diesen Abschnitts E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper, $W \subset \text{Aut } E$ eine affine Spiegelungsgruppe, $\mathcal{H}$ die Menge ihrer Spiegel und $\mathcal{A}$ die Menge der zugehörigen Alkoven.

Definition 1.7.2. Es operiere eine Gruppe G auf einer Menge X . Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt ein **Fundamentalbereich** oder genauer **mengentheoretischer Fundamentalbereich**, wenn Y die Bahn Gp jedes Punktes $p \in X$ in genau einem Punkt trifft, in Formeln $|Gp \cap Y| = 1 \ \forall p \in X$.

Vorschau 1.7.3. Operiert eine Gruppe G auf einem topologischen Raum X , so mag man unter einem **topologischen Fundamentalbereich** eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ verstehen derart, daß die gY° für $g \in G$ paarweise disjunkt sind und daß die gY unser X überdecken. Operiert eine Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit oder allgemeiner Eckfältigkeit X , so mag man einen topologischen Fundamentalbereich, der mit der von X induzierten Struktur eines $\mathbb{R}$ -geringten Raums eine Eckfältigkeit ist, einen **eckfaltigen Fundamentalbereich** nennen. Im Fall einer affinen Spiegelungsgruppe in einem endlichdimensionalen reellen Raum sind unsere Alkovenabschlüsse auch eckfaltige Fundamentalbereiche.

Satz 1.7.4 (Alkovenabschlüsse als Fundamentalbereiche). *Für die natürliche Operation einer affinen Spiegelungsgruppe auf ihrem affinen Raum ist der Abschluß eines jeden Alkoven ein Fundamentalbereich.*

Beweis. Wir beginnen den Beweis des Satzes mit einer Proposition.

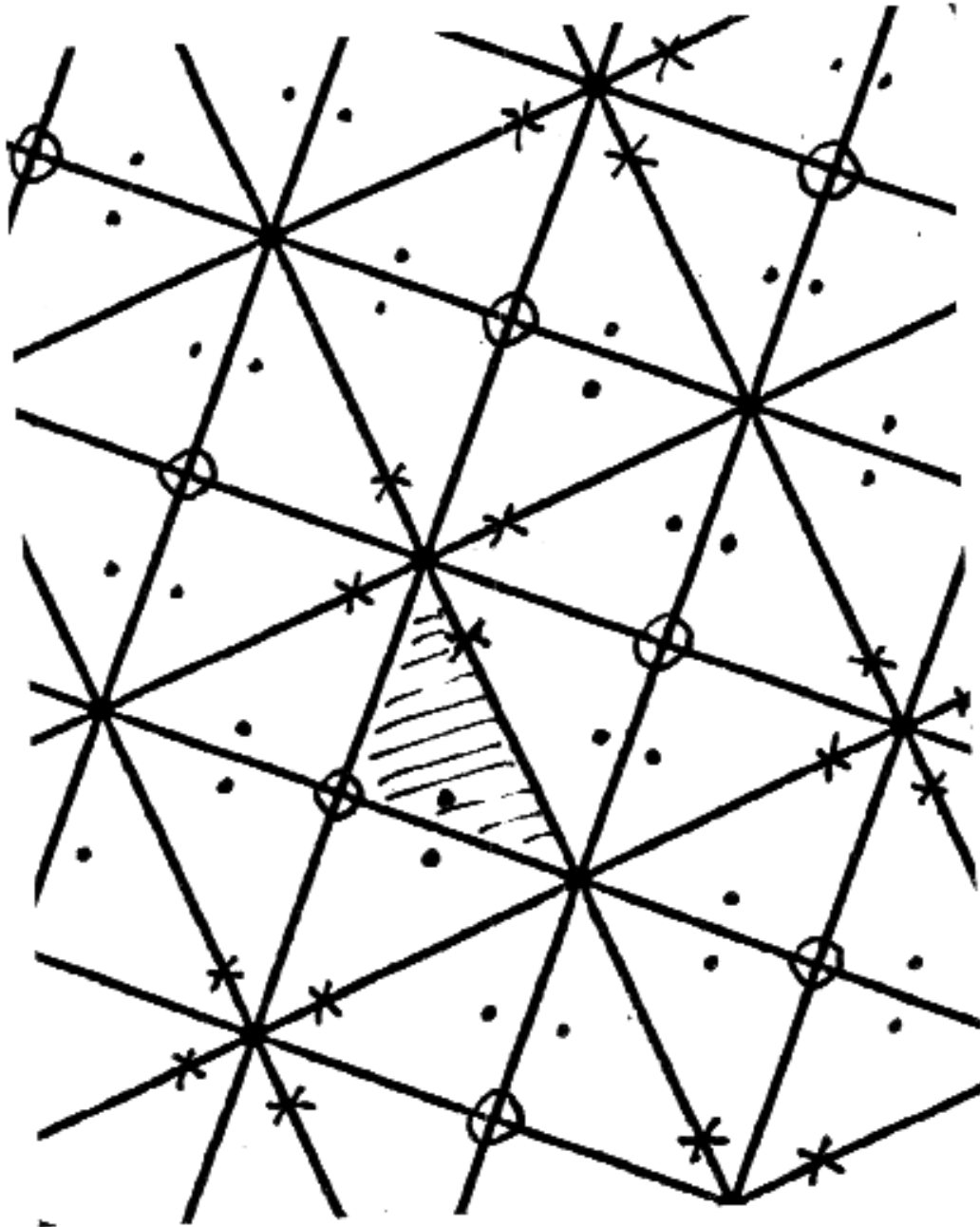
Proposition 1.7.5 (Standgruppen in affinen Spiegelungsgruppen). *Sei $A \subset E$ ein fester Alkoven und $p \in \bar{A}$ ein Punkt aus dem Abschluß von A . So gilt:*

1. *Die Standgruppe W_p von p wird erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden von A , die p enthalten. In Formeln gilt also*

$$W_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$$

2. *Die Standgruppe W_p von p operiert frei und transitiv auf der Menge $\mathcal{A}_p$ aller Alkoven, deren Abschluß p enthält. In Formeln liefert also $w \mapsto wA$ eine Bijektion*

$$W_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_p := \{B \in \mathcal{A} \mid p \in \bar{B}\}$$



Drei Bahnen unter einer affinen Spiegelungsgruppe. Jede hat, wie Satz 1.7.4 ganz allgemein behauptet, genau einen Vertreter in dem schraffiert eingezeichneten Alkoven.

1.7.6. Insbesondere wird also bei einer affinen Spiegelungsgruppe auch die Standgruppe jedes Punktes von Spiegelungen erzeugt.

Beweis der Proposition. Wir setzen $W'_p = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H}_A, p \in H \rangle$ und zeigen zunächst, daß W'_p transitiv auf $\mathcal{A}_p$ operiert, in Formeln $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Für $C \in \mathcal{A}_p$ müssen wir dazu $w \in W'_p$ finden derart, daß gilt $C = wA$. Wieder machen wir eine Induktion über die Zahl $d(A, C)$ der Spiegel, die A und C trennen. Ist $A \neq C$, so gibt es nach Satz 1.3.31 eine Wand H von A , die A von C trennt. Aus $p \in \bar{A} \cap \bar{C}$ folgt $p \in H$. Jetzt ist wieder $d(A, s_H C) = d(s_H A, C) = d(A, C) - 1$ und mit Induktion finden wir $w \in W'_p$ so daß gilt $wA = s_H C$, also $s_H wA = C$. Es folgt wie behauptet $W'_p A = \mathcal{A}_p$. Nun ist unsere Abbildung $W_p \rightarrow \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$ injektiv nach Satz 1.6.1 und offensichtlich liegt ihr Bild in $\mathcal{A}_p$. Wir haben aber eben bewiesen, daß die Verknüpfung der beiden Injektionen $W'_p \hookrightarrow W_p \hookrightarrow \mathcal{A}_p$ eine Surjektion ist. Also sind diese Injektionen beide Bijektionen und die Proposition folgt. $\square$

Jetzt können wir den Beweis des Satzes zu Ende führen. Sei $A \subset E$ ein Alkoven und $p \in E$ ein Punkt unseres affinen Raums. Es gilt zu zeigen, daß die Bahn Wp von p den Abschluß $\bar{A}$ von A in genau einem Punkt trifft, in Formeln

$$|Wp \cap \bar{A}| = 1$$

Jeder Punkt p liegt nach 1.3.25 im Abschluß mindestens eines Alkoven, und nach 1.6.1 trifft die Bahn von p den Abschluß $\bar{A}$ jedes Alkoven A , in Formeln $Wp \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Wir müssen nur noch zeigen, daß für $A \in \mathcal{A}$, $p \in \bar{A}$ und $x \in W$ aus $xp \in \bar{A}$ folgt $xp = p$. Sicher folgt schon mal $xp \in \overline{x\bar{A}}$, also $A, xA \in \mathcal{A}_{xp}$, und nach der vorhergehenden Proposition gilt dann $x \in W_{xp}$, also $x xp = xp$, also $xp = p$. $\square$

1.7.7. Gegeben eine affine euklidische Spiegelungsgruppe W auf einem affinen euklidischen Raum E wird für beliebige $v, w \in E$ der Abstand $\|v - zw\|$ minimal genau für die $z \in W$, für die v und zw im Abschluß desselben Alkoven liegen: Werden v und zw nämlich durch eine Wand getrennt, so gilt für die Spiegelung s an dieser Wand notwendig $\|v - zw\| > \|v - szw\|$.

Ergänzung 1.7.8. Hier scheint es sinnvoll zu zeigen, daß für die durch A definierte Länge l und S_p die Menge der Spiegelungen an Wänden von A durch den Punkt p und W^p die Menge aller $w \in W$ mit $l(sw) > l(w)$ für alle $s \in S_p$ die Multiplikation eine Bijektion $W_p \times W^p \xrightarrow{\sim} W$ definiert und $l(uv) = l(u) + l(v)$ gilt für $u \in W_p, v \in W^p$. Man sollte sogar zeigen, daß wir stets genau einen Doppelnebenklassenrepräsentanten kleinster Länge und bei zwei endlichen „parabolischen“ Untergruppen auch genau einen Doppelnebenklassenrepräsentanten größter Länge haben.

Übungen

Übung 1.7.9. Diejenigen Elemente einer affinen Spiegelungsgruppe, die eine vorgegebene Teilmenge des zugrundeliegenden affinen Raums punktweise festhalten, bilden selber eine Spiegelungsgruppe.

1.8 Alkoven einer endlichen Spiegelungsgruppe

1.8.1. Gegeben zwei von Null verschiedene Vektoren eines euklidischen Vektorraums sagen wir, sie schließen einen **schwach stumpfen Winkel** beziehungsweise einen **schwach spitzen Winkel** ein, wenn ihr Skalarprodukt für jedes Skalarprodukt der euklidischen Struktur nichtpositiv beziehungsweise nichtnegativ ist.

Ergänzung 1.8.2. Sind v, w unsere Vektoren, so bedeutet in unserer Terminologie aus [LA2] 1.8.3 schwach stumpfer Winkel gerade $\pi/2 \leq \text{Rad}(\angle(v, w)) \leq \pi$ und schwach spitzer Winkel $0 \leq \text{Rad}(\angle(v, w)) \leq \pi/2$. Die Terminologie „schwach stumpf“ und „schwach spitz“ ist nicht gebräuchlich. Ich habe sie gewählt, um nicht in Widerspruch zur Terminologie aus der Elementargeometrie zu geraten, in der man einen rechten Winkel weder spitz noch stumpf nennen würde. Wenn ich betonen will, daß das Konzept aus der Elementargeometrie gemeint ist, rede ich von **echt stumpfen** beziehungsweise **echt spitzen Winkeln**. Das bedeutet dann in Formeln, daß das Skalarprodukt negativ beziehungsweise positiv ist alias $\pi/2 < \text{Rad}(\angle(v, w)) \leq \pi$ beziehungsweise $0 \leq \text{Rad}(\angle(v, w)) < \pi/2$.

Lemma 1.8.3 (Winkel zwischen Wänden eines Alkoven). *Gegeben verschiedene Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe schließen auf diesen Wänden jeweils senkrecht stehende Vektoren, die in Richtung unseres Alkoven zeigen, stets schwach stumpfe Winkel ein.*

1.8.4. Anschaulich gesprochen schließen also je zwei Wände eines Alkoven einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besagten Alkoven „in einem schwach spitzen Winkel ein“.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Spiegelungsgruppe erzeugt von den orthogonalen Spiegelungen an besagten Wänden H und L und seien α und β von Null verschiedene Vektoren, die auf diesen Wänden senkrecht stehen und in Richtung unseres Alkoven zeigen. In Formeln behauptet unser Lemma dann $(\alpha, \beta) \leq 0$. Sind unsere Wände parallel, so ist die Behauptung eh klar. Sonst können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unser affiner euklidischer Raum ein euklidischer Vektorraum ist und beide Spiegelungen linear. Sicher finden wir nun $v \in H$ mit $(\beta, v) < 0$, also $(\beta, s_L v) > 0$. Aus $(\alpha, \beta) > 0$ folgte

$$(\alpha, s_L v) = (s_L \alpha, v) = \left(\alpha - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, v \right) > 0$$

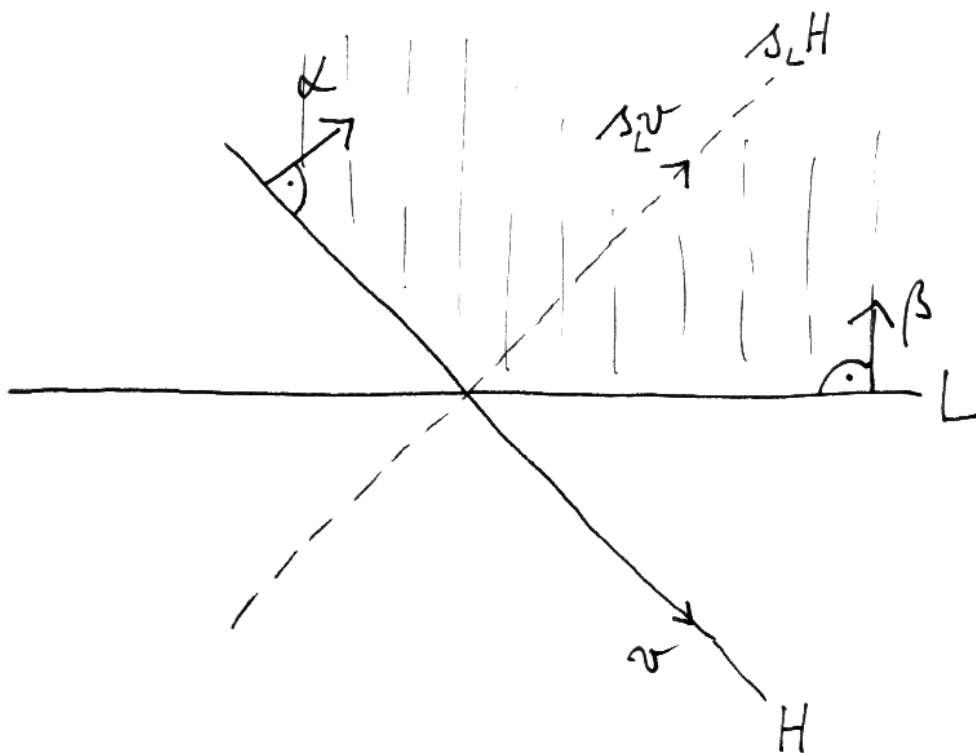


Illustration zum Beweis von Lemma 1.8.3. Schraffiert eingezeichnet ein Alkoven mit zwei ihn nicht in einem schwach spitzen Winkel einschließenden Wänden H und L . Gestrichelt eingezeichnet die Gerade $s_L H$, die zeigt, daß es sich nicht um den Alkoven eines Systems von Hyperebenen handeln kann, das aus allen Spiegeln einer affinen euklidischen Spiegelungsgruppe besteht.

und damit läge $s_L v$ gleichzeitig auf dem Spiegel $s_L H$ und in unserem Alkoven. Das kann aber nicht sein, also gilt $(\alpha, \beta) \leq 0$. $\square$

1.8.5. Dieses Lemma wäre auch ein natürlicher erster Schritt zur Klassifikation derjenigen Spiegelungsgruppen, die von zwei Spiegelungen erzeugt werden.

Proposition 1.8.6. *Wählen wir für jede Wand eines festen Alkoven einer endlichen linearen Spiegelungsgruppe eine lineare Gleichung, so sind diese Gleichungen linear unabhängig als Elemente des Dualraums.*

Beweis. Wir wählen zunächst einmal ein invariantes Skalarprodukt. Seien nun $H_1, \dots, H_n$ die Wände unseres Alkoven und seien $\alpha_i \in V$ auf H_i senkrechte Vektoren, die jeweils auf derselben Seite der Hyperebene H_i liegen wie unser Alkoven. Es reicht zu zeigen, daß die α_i linear unabhängig sind. Nach 1.8.3 schließen diese Vektoren jedoch paarweise schwach stumpfe Winkel ein, in Formeln $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ falls $i \neq j$, und wählen wir $\gamma \in A$, so gilt $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i . Die lineare Unabhängigkeit der α_i folgt damit aus dem anschließenden Lemma 1.8.7. $\square$

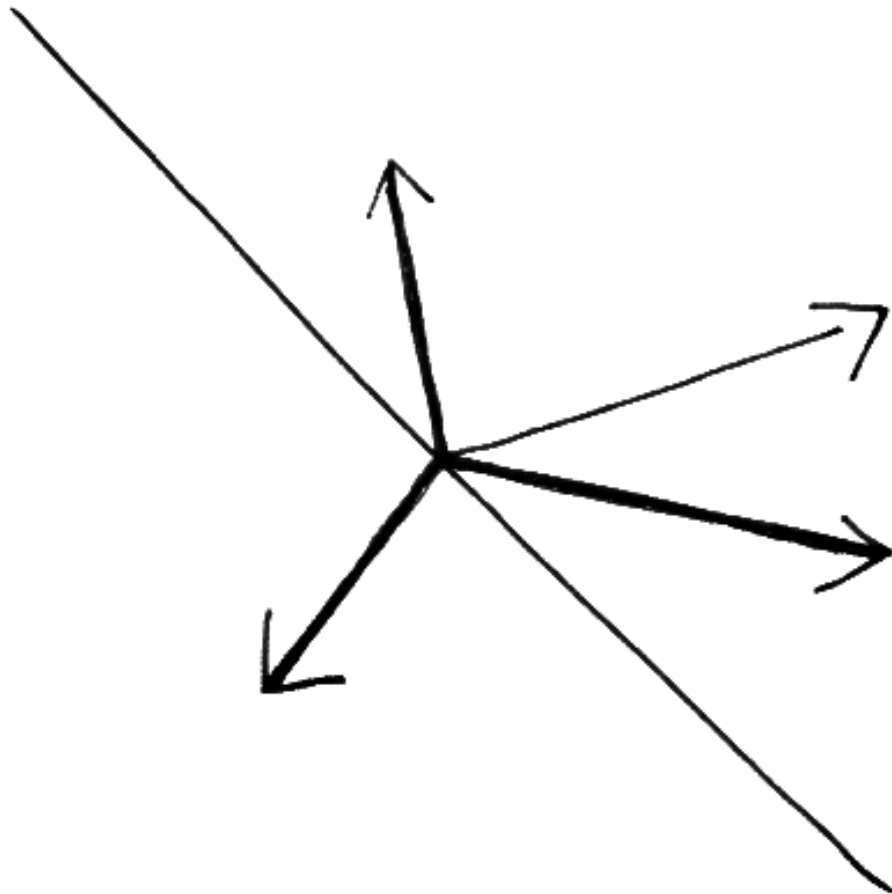
Lemma 1.8.7 (Lineare Unabhängigkeit bei schwach stumpfen Winkeln). *Liegen Vektoren eines Skalarproduktraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so sind sie linear unabhängig.*

1.8.8. Schließen insbesondere $(n + 1)$ Vektoren eines n -dimensionalen euklidischen Vektorraums paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so können sie nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt liegen. Eine etwas stärkere Aussage zeigen wir in 1.10.1.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer endlichen Familie von Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ausgehen. Unsere Forderungen sagen in Formeln, daß es einen Vektor γ gibt mit $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i und daß gilt $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ für $i \neq j$. Sei nun $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = 0$ eine verschwindende Linearkombination der α_i . Es folgt

$$\sum_{i \in I} c_i \alpha_i = \sum_{i \in J} -c_i \alpha_i$$

mit $I = \{i \mid c_i \geq 0\}$ und $J = \{i \mid c_i < 0\}$. Das Skalarprodukt der linken mit der rechten Seite der Gleichung ist nichtpositiv, da unsere Vektoren paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen. Also steht auf beiden Seiten der Gleichung der Nullvektor. Wir bilden nun unabhängig das Skalarprodukt beider Seiten mit γ und folgern, daß alle c_i verschwinden. $\square$



Liegen Vektoren eines euklidischen Vektorraums alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt und schließen sie nicht paarweise schwach stumpfe Winkel ein, so brauchen sie keineswegs linear unabhängig zu sein. Schließen Vektoren eines euklidischen Vektorraums paarweise schwach stumpfe Winkel ein, liegen aber nicht alle in demselben offenen Halbraum zu einer Hyperebene durch den Nullpunkt, so brauchen sie ebensowenig linear unabhängig zu sein.

1.9 Coxetergraphen und Klassifikation

Definition 1.9.1. Seien E ein affiner Raum über einem angeordneten Körper k und $W \subset \text{Aut} E$ eine affine Spiegelungsgruppe. Seien A ein Alkoven und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden von A . Wir definieren zu diesen Daten eine symmetrische $S \times S$ -Matrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die sogenannte **Coxetermatrix unserer Spiegelungsgruppe**, durch die Vorschrift, daß der Matrixeintrag in Zeile s und Spalte t die Ordnung von st sein soll, in Formeln

$$m_{s,t} = m(s, t) := \text{ord}(st)$$

Ergänzung 1.9.2. Auf der Diagonalen unserer Matrix stehen natürlich nur Einsen und außerhalb sind alle Einträge ≥ 2 . Unsere Matrix ist unabhängig von der Wahl des Alkoven A . Etwas formaler könnten wir in $\mathcal{A} \times \mathcal{H}$ die Teilmenge $\mathcal{S}$ aller Paare (A, H) betrachten, bei denen der Spiegel H eine Wand des Alkoven A ist, für S den Bahnenraum $S := \mathcal{S}/W$ nehmen, und in offensichtlicher Weise eine Matrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ erklären, die dann in der Tat von keinerlei Wahlen mehr abhängt. Gegeben eine endliche Menge S verstehen wir ganz allgemein unter einer **Coxetermatrix mit durch S indizierten Zeilen und Spalten** eine Abbildung $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $m(s, t) = m(t, s) \forall s, t \in S$ und $m(s, s) = 1 \forall s \in S$ und $m(s, t) \geq 2$ falls $s \neq t$.

1.9.3. Die Coxetermatrizen der affinen Spiegelungsgruppen haben üblicherweise nur sehr wenige von Zwei verschiedene Einträge und fast keine Einträge > 3 . Weiter sind die Einträge auf der Diagonalen eh bekannt. Besonders übersichtlich kann man die in diesen Coxetermatrizen enthaltene Information deshalb in der Form des sogenannten **Coxetergraphen** darstellen: Man malt einen dicken Punkt, genannt **Knoten**, für jedes Element von S , sowie einen Strich, genannt **Kante**, zwischen je zwei Knoten $s, t \in S$ mit $m(s, t) \geq 3$, und schreibt an diese Kante zusätzlich noch die Zahl $m(s, t)$ im Fall $m(s, t) > 3$.

Beispiel 1.9.4. Die affine Spiegelungsgruppe, deren Alkoven ein Schachbrettmuster bilden, hat den Coxetergraphen



Nehmen wir für jedes Schachfeld noch seine beiden Diagonalen als Spiegel hinzu, so hat der Coxetergraph dieser größeren Spiegelungsgruppe die Gestalt



Proposition 1.9.5 (Charakterisierung durch Coxetergraphen). Seien V_1, V_2 reelle euklidische Vektorräume und seien $W_1 \subset \text{GL}(V_1)$, $W_2 \subset \text{GL}(V_2)$ endliche orthogonale Spiegelungsgruppen ohne Fixpunkte außerhalb des Nullpunkts. Genau dann haben W_1 und W_2 denselben Coxetergraphen, wenn es eine lineare Isometrie $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ gibt mit $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$.

1.9.6. Noch präziser formuliert zeigen wir: Ist $A_i \subset V_i$ jeweils ein Alkoven und $S_i \subset W_i$ jeweils die Menge von Spiegelungen an den Wänden des Alkoven A_i und ist eine Bijektion $\xi : S_1 \xrightarrow{\sim} S_2$ gegeben mit $\text{ord}(st) = \text{ord}(\xi(s)\xi(t))$ für alle $s, t \in S_1$, so gibt es eine lineare Isometrie $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ mit $\varphi(A_1) = A_2$ und $\xi(s) = \varphi s \varphi^{-1}$ für alle $s \in S_1$.

Beweis. Wir wählen in $V = V_i$ jeweils einen festen Alkoven $A = A_i$ und betrachten zu jeder Wand von A den Normalenvektor, der in Richtung von A zeigt. Wir erhalten so eine Familie $(e_s)_{s \in S}$ von Einheitsvektoren in V . Offensichtlich schließen e_s und e_t gerade den Winkel $\pi - \pi/\text{ord}(st)$ ein, folglich haben wir

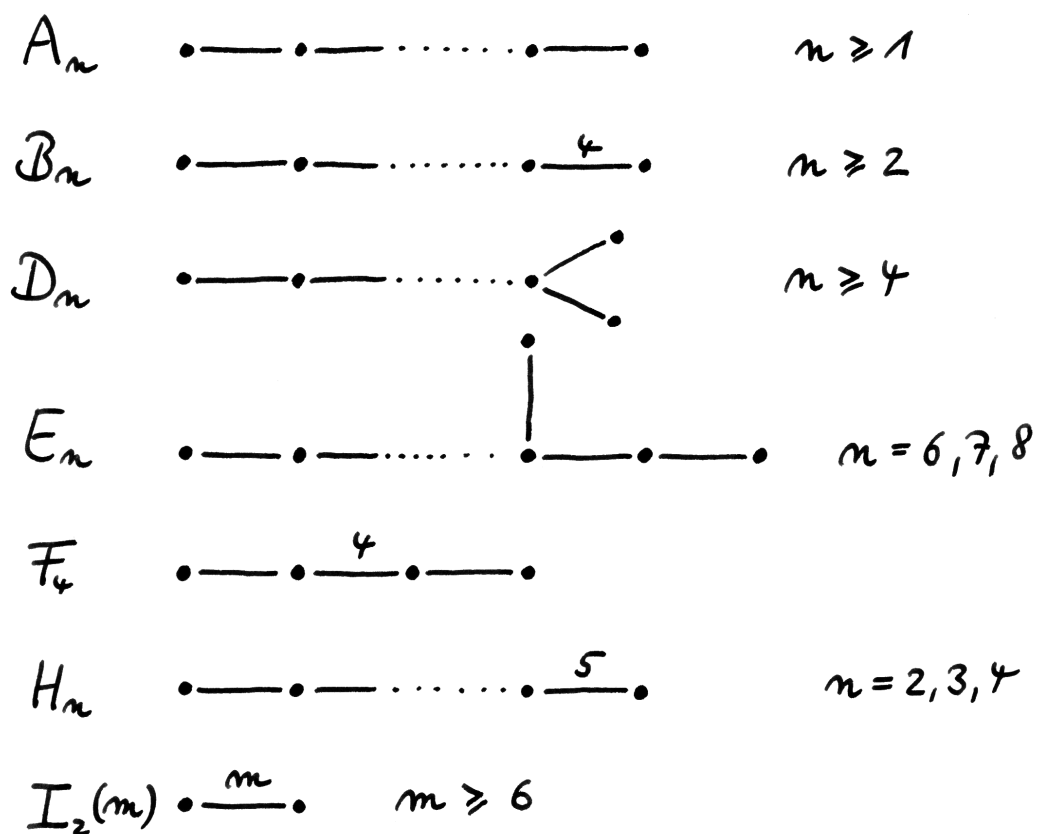
$$(e_s, e_t) = -\cos(\pi/\text{ord}(st))$$

Nach 1.8.6 sind unsere e_s linear unabhängig, und da die Spiegelungen an ihren orthogonalen Komplementen nach 1.6.1 die fraglichen Gruppen erzeugen und diese fixpunktfrei operieren, besteht der Schnitt der fraglichen orthogonalen Komplemente nur aus dem Nullvektor und unsere e_s bilden sogar eine Basis. Jede Identifikation unserer beiden Coxetergraphen zusammen mit der Wahl eines Alkoven in beiden Räumen liefert folglich eine Isometrie φ zwischen unseren Vektorräumen, unter der die Wände des in V_1 gewählten Alkoven in die Wände des in V_2 gewählten Alkoven übergehen. Da die orthogonalen Spiegelungen an diesen Wänden aber nach 1.6.1 bereits die fraglichen Gruppen erzeugen, folgt $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$. $\square$

Satz 1.9.7 (Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen). *Genau dann gehört ein vorgegebener Coxetergraph zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn alle seine Zusammenhangskomponenten in der nebenstehenden Liste zu finden sind.*

Beweis. Das folgt sofort aus den beiden anschließenden Propositionen, die wir in diesem und dem darauffolgenden Abschnitt beweisen. $\square$

Ergänzung 1.9.8 (Bezug zur Klassifikation kompakter Liegruppen). Weylgruppen kompakter Liegruppen operieren nach [ML] 5.6.4 als endliche reelle Spiegelungsgruppen auf der Liealgebra eines maximalen Torus. Der zugehörige Coxetergraph entsteht nach 2.1.21 aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten durch Kanten der Wertigkeit 4 und Dreifachkanten durch Kanten der Wertigkeit 6 ersetzt. Unser Satz 1.9.7 zeigt somit unter anderem auch, daß sämtliche Zusammenhangskomponenten des Dynkindiagramms einer kompakten Liegruppe bereits unter den dort aufgelisteten Diagrammen zu finden sein müssen. Daß sich allerdings alle diese Diagramme auch tatsächlich als Dynkindiagramme kompakter Liegruppen realisieren lassen, haben wir damit noch nicht gezeigt, und inwieweit eine kompakte Liegruppe durch ihr Dynkindiagramm charakterisiert wird, werden wir noch ausführlich diskutieren müssen.



Dieses Bild zeigt alle zusammenhängenden Coxetergraphen, die zu endlichen reellen Spiegelungsgruppen gehören, als da heißt, für die die Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist. Hier meint n jeweils die Zahl der Knoten, und die unteren Schranken an n dienen nur dazu, Verdopplungen zu vermeiden.

So wäre etwa $I_2(3) = A_2$, $I_2(4) = B_2$, und $I_2(5) = H_2$. Die Auslassungen im Alphabet rühren daher, daß die in 2.3.7 gegebene Klassifikation der Wurzelsysteme alias der einfachen komplexen Liealgebren zuerst gefunden wurde und manche dieser Wurzelsysteme dieselbe endliche Spiegelungsgruppe als Weylgruppe haben. Es ist eine nette Übung, sich zu überlegen, daß H_3 realisiert werden kann als die Gruppe aller 120 nicht notwendig orientierungserhaltenden Isometrien des $\mathbb{R}^3$, die einen Ikosaeder in sich überführen.

1.9.9. Gegeben eine Coxetermatrix $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ erklären wir ihre **Cosinusmatrix** als die reelle Matrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$. Für den Fall $m_{s,t} = \infty$ vereinbaren wir dabei die Interpretation $\pi/\infty = 0$.

Proposition 1.9.10 (Coxetermatrizen endlicher Spiegelungsgruppen). *Genau dann gehört eine Coxetermatrix $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe, wenn ihre Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist.*

1.9.11. Wir verwenden im folgenden eine abkürzende Terminologie und nennen einen Coxetergraphen **positiv definit**, wenn er endlich ist und seine Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist. Nach der vorhergehenden Proposition 1.9.10 sind das genau die Coxetergraphen zu endlichen Spiegelungsgruppen.

Proposition 1.9.12 (Positiv definite Coxetergraphen). *Die zusammenhängenden Coxetergraphen, deren Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist, sind genau die Graphen der nebenstehenden Liste.*

1.9.13. Diese Aussage wird erst später als Proposition 1.11.1 bewiesen.

Beweis von 1.9.10. Wir zeigen zunächst, daß der Coxetergraph einer endlichen Spiegelungsgruppe stets positiv definit ist. Wir wählen dazu einen Alkoven A und ein invariantes Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und betrachten zu jeder Wand von A den Normalenvektor, der in Richtung von A zeigt. Wir erhalten so eine Familie $(e_s)_{s \in S}$ von Einheitsvektoren. Offensichtlich schließen e_s und e_t gerade den Winkel $\pi - \pi/m_{s,t}$ ein, folglich haben wir

$$(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$$

Mithin kann ein Coxetergraph nur dann zu einer endlichen reellen Spiegelungsgruppe gehören, wenn seine Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist. Wir zeigen nun umgekehrt, daß jeder Coxetergraph mit positiver Cosinusmatrix auch in der Tat zu einer endlichen Spiegelungsgruppe gehört. Über unserer Menge S von Knoten bilden wir dazu den freien Vektorraum $E := \mathbb{R}S$ mit seiner kanonischen Basis $(e_s)_{s \in S}$ und erklären darauf eine symmetrische Bilinearform $(\cdot, \cdot)$ durch die Vorschrift $(e_s, e_t) = -\cos(\pi/m_{s,t})$. Nach Annahme ist sie positiv definit alias ein Skalarprodukt. Nun betrachten wir die Untergruppe $W \subset \text{GL}(E)$, die erzeugt wird von den orthogonalen Spiegelungen an den auf unseren Basisvektoren senkrechten Hyperebenen $H_s := e_s^\perp$. Wir bezeichnen diese Spiegelungen kurzerhand mit demselben Buchstaben s wie den entsprechenden Knoten unseres Coxetergraphen und erklären die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt solcher Spiegelungen s . Dann gilt sicher $\det w = (-1)^{l(w)}$ und folglich $l(w) \neq l(ws)$

für jede Spiegelung s . Weiter setzen wir $H_s^+ := \{p \in E \mid (p, e_s) > 0\}$ und $A^+ := \bigcap_{s \in S} H_s^+$ und behaupten

$$l(ws) > l(w) \Leftrightarrow wH_s^+ \supset A^+$$

Kennen wir die Implikation $\Rightarrow$, so erhalten wir automatisch $l(ws) < l(w) \Rightarrow wH_s^+ \cap A^+ = \emptyset$ und damit die Äquivalenz. Die Implikation $\Leftarrow$ zeigen wir durch Induktion über $l(w)$ gleichzeitig für alle s . Der Fall $l(w) = 0$ ist offensichtlich. Gilt $l(w) > 0$, so finden wir natürlich $t \in S$ mit $l(wt) < l(w)$ und haben notwendig $t \neq s$. Indem wir so lange s oder t von rechts an w dranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung $w = vu$ mit $u \in \langle s, t \rangle$, $l(vs) > l(v)$, $l(vt) > l(v)$ und $l(w) = l(v) + l(u)$. Mit Induktionsannahme erhalten wir $vH_s^+ \supset A^+$ und $vH_t^+ \supset A^+$ alias $H_s^+ \cap H_t^+ \supset v^{-1}A^+$. Andererseits folgt aus unseren Annahmen auch $l(us) > l(u)$. Falls nun gilt $u \neq w$, so können wir die Induktionsannahme auf u anwenden und erhalten $uH_s^+ \supset A^+$. Wegen $H_s^+ \cap H_t^+ = (H_s \cap H_t) + A^+$ und $(H_s \cap H_t) \subset uH_s$ folgt dann

$$uH_s^+ \supset H_s^+ \cap H_t^+$$

und zusammen in der Tat $uH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset v^{-1}A^+$ alias $wH_s^+ \supset A^+$. Es bleibt nur noch, den Fall $u = w$ zu behandeln, so daß wir haben $w = tsts \dots t$ oder $w = sts \dots t$ mit jeweils $l(w)$ Faktoren und $l(w) < l(ws)$ und folglich $l(w) < \text{ord}(st)$. In dem Fall aber zeigt explizite Inspektion bereits $wH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset A^+$. Damit ist unsere Behauptung $l(ws) > l(w) \Leftrightarrow wH_s^+ \supset A^+$ gezeigt. Wir folgern nun die Proposition. Die Ebenen wH_s für $w \in W$ und $s \in S$ bilden ein W -stabiles System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in E , und unsere Behauptung zeigt insbesondere, daß keine dieser Hyperebenen unser A^+ trifft. Insbesondere A^+ eine maximale konvexe Teilmenge im Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Je zwei verschiedene derartige maximale konvexe Teilmengen sind disjunkt nach 1.3.39 und mit A^+ ist auch wA^+ solch eine maximale konvexe Teilmenge für alle $w \in W$. Schließlich folgt aus $wA^+ = A^+$ mit unserer Behauptung sofort $l(ws) > l(w)$ für alle $s \in S$ alias $w = \text{id}$. Folglich sind die wA^+ mit $w \in W$ paarweise disjunkt. Nun können wir aber in unserem endlichdimensionalen reellen euklidischen Vektorraum E jeder offenen Teilmenge $U \subseteq E$ ein Volumen $\text{vol } U \in [0, \infty]$ zuordnen, und jede nichtleere offene Teilmenge hat positives Volumen. Ist $K \subset E$ die offene Einheitskugel, so ist sicher $K \cap A^+$ offen und nicht leer. Insbesondere ist $\text{vol}(K) / \text{vol}(K \cap A^+)$ eine obere Schranke für die Kardinalität von W und wir folgern $|W| < \infty$. Damit ist wiederum $\mathcal{H}$ endlich und wir folgern mit 1.6.1, daß A^+ ein Alkoven ist für die endliche Spiegelungsgruppe $W \subset \text{GL}(E)$. Aus den Definitionen folgt dann schließlich, daß der Coxetergraph von W genau der Coxetergraph ist, von dem wir ausgegangen waren. $\square$

Ergänzung 1.9.14 (Allgemeinere angeordnete Grundkörper). Im vorhergehenden Beweis könnten wir auch über einem beliebigen angeordneten Körper arbeiten, solange wir darüber einen euklidischen Vektorraum der Dimension $|S|$ und ein System von Hyperebenen $(H_s)_{s \in S}$ mit ausgezeichneten Halbräumen H_s^+ finden können derart, daß für $s \neq t$ die orthogonalen Spiegelungen an H_s und H_t jeweils eine Diedergruppe der Ordnung $2m_{s,t}$ erzeugen, für die $H_s^+ \cap H_t^+$ ein Alkoven ist. Ganz am Schluß des Beweises können wir dann natürlich nicht mehr mit dem Volumen argumentieren, aber der Einsatz von Lebesguemaß und Transformationsformel ist an dieser Stelle eh ein Stilbruch und man kann auch einfacher mit der Erkenntnis argumentieren, daß in einem euklidischen Vektorraum über einem angeordneten Körper in einen Ball mit ganzzahligem Radius höchstens endlich viele Bälle vom Radius Eins in paarweise disjunkter Weise hineingepackt werden können.

Ergänzung 1.9.15 (Existenz der Ikosaedergruppe). Betrachten wir für die dreielementige Menge $S = \{r, s, t\}$ die Coxetermatrix mit $m_{r,s} = 3$, $m_{s,t} = 5$ und $m_{r,t} = 2$, so erhalten wir nach 1.9.10 eine endliche orthogonale Spiegelungsgruppe im dreidimensionalen Raum. Die Untergruppe der darin enthaltenen Drehungen enthält Elemente der Ordnungen 5 und 3 und wir folgern damit auf andere Weise die in [LA2] 5.4.2 besprochene Existenz einer endlichen Drehgruppe mit Elementen dieser Ordnungen.

Übungen

Ergänzende Übung 1.9.16 (Die Symmetrien des Ikosaeders). Wir erhalten eine Surjektion der nichtorientierten Ikosaedergruppe alias Coxetergruppe vom Typ H_3 mit Erzeugern r, s, t und Relationen $r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^2 = (st)^3 = (rt)^5 = 1$ auf die alternierende Gruppe $A_5 \subset \mathcal{S}_5$ mittels der Vorschrift $r \mapsto (13)(24)$, $s \mapsto (12)(34)$ und $t \mapsto (12)(45)$. Diese Surjektion induziert einen Isomorphismus $I \xrightarrow{\sim} A_5$ zwischen der Ikosaedergruppe und der fünften alternierenden Gruppe.

1.10 Ergänzungen zu Skalarprodukten

Satz 1.10.1 (über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln). Sei in einem Skalarproduktraum eine Familie von Vektoren gegeben, von denen je Zwei mit verschiedenem Index nichtpositives Skalarprodukt haben. Es gebe keine Zerlegung unserer Familie in zwei echte Teilfamilien, die zwei zueinander orthogonale Teilräume erzeugen. So gilt:

1. Jede echte Teilfamilie unserer Familie von Vektoren ist linear unabhängig;

2. Bei jeder nichttrivialen linearen Relation unserer Vektoren sind die Koeffizienten entweder alle positiv oder alle negativ.

1.10.2. Das verallgemeinert Lemma 1.8.7 über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln, die alle in demselben offenen Halbraum zu einer linearen Hyperebene liegen. Genauer können wir unser Lemma 1.8.7 ableiten, indem wir zu unseren Vektoren noch einen von Null verschiedenen Vektor mit hinzunehmen, der auf der fraglichen Hyperebene senkrecht steht und nicht im fraglichen offenen Halbraum liegt. Die Familie mit nur einem Index, die nur aus dem Nullvektor besteht, erfüllt unsere Bedingungen und ist in unserem Satz erlaubt. Familien mit mehr als einem Index, die unsere Bedingungen erfüllen, können jedoch nie den Nullvektor enthalten.

Beweis. Jede lineare Relation $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ unserer Vektoren können wir umschreiben zu einer Identität der Gestalt

$$\sum_{a_i > 0} a_i v_i = \sum_{a_j < 0} (-a_j) v_j$$

Da das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst nichtpositiv ist, muß es Null sein. Auf beiden Seiten unserer Gleichung steht also der Nullvektor. Nun setzen wir $I_{>0} = \{i \in I \mid a_i > 0\}$. Gibt es $j \in I \setminus I_{>0}$ mit $\langle v_j, v_i \rangle \neq 0$ für ein $i \in I_{>0}$, so folgt aus

$$0 = \left\langle v_j, \sum_{a_i > 0} a_i v_i \right\rangle = \sum_{a_i > 0} a_i \langle v_j, v_i \rangle$$

sofort ein Widerspruch. Also gilt entweder $I_{>0} = I$ oder $I_{>0} = \emptyset$. Bei jeder nichttrivialen Relation $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ sind mithin entweder alle a_i positiv oder alle a_i nichtpositiv und dann folgt durch Multiplikation mit (-1) , daß sie sogar alle negativ sein müssen. Insbesondere ist dabei kein Koeffizient Null, und das zeigt die lineare Unabhängigkeit jeder echten Teilfamilie. $\square$

Definition 1.10.3. Eine Matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt **unzerlegbar**, wenn gilt $n \geq 1$ und es keine Zerlegung $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$ gibt mit $I \neq \emptyset \neq J$ und $a_{ij} = a_{ji} = 0 \forall i \in I, j \in J$.

Proposition 1.10.4 (Definitheitskriterium für Bilinearformen). Sei V ein Vektorraum über einem angeordneten Körper mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und seien Erzeuger $v_1, \dots, v_n$ von V gegeben mit $v_1 + \dots + v_n = 0$. So gilt:

1. Hat die Matrix der $\langle v_i, v_j \rangle$ nichtpositive Einträge außerhalb der Diagonalen, in Formeln $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle \leq 0$, so ist unsere Bilinearform positiv semidefinit;

2. Ist die Matrix der $\langle v_i, v_j \rangle$ zusätzlich unzerlegbar, so ist unsere Bilinearform positiv definit.

Beweis. Wir finden unter der Annahme der Symmetrie und der Annahme, daß unsere Erzeuger sich zu Null summieren, ohne weitere Schwierigkeiten

$$\begin{aligned} \langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_j v_j \rangle &= \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle + \sum_i \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle \\ &= \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j - \alpha_i^2) \langle v_i, v_j \rangle \\ &= - \sum_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

Die Proposition folgt unmittelbar. $\square$

Korollar* 1.10.5 (Vektoren mit vorgegebenen Skalarprodukten). Gegeben eine reelle symmetrische *unzerlegbare* $(n \times n)$ -Matrix (a_{ij}) mit nichtpositiven Einträgen außerhalb der Diagonalen gibt es stets einen Skalarproduktraum V und ein Erzeugendensystem aus Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $v_1 + \dots + v_n = 0$ und mit den Skalarprodukten

$$\langle v_i, v_j \rangle = a_{ij} \text{ für } i \neq j.$$

Ergänzung 1.10.6. Die Aussage und ihr Beweis gelten ebenso über jedem angeordneten Körper. Ist $v'_1, \dots, v'_n \in V'$ eine zweite Lösung, so gibt es im übrigen genau einen orthogonalen Isomorphismus $B : V \xrightarrow{\sim} V'$ mit $Bv_i = v'_i$. Das folgt, da nach dem Satz über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln 1.10.1 in unseren beiden Familien jede echte Teilfamilie linear unabhängig ist.

Beweis. Wir dürfen, indem wir die Diagonaleinträge anpassen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in unserer Matrix alle Spaltensummen Null sind. Dann liefert unsere Matrix eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und, da der Vektor $(1, \dots, 1)$ in deren Radikal liegt, auch eine symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{R}^n / \mathbb{R}(1, \dots, 1)$. Bezeichnet $v_i \in V$ das Bild des i -ten Vektors der Standardbasis, so zeigt das Definitheitskriterium 1.10.4, daß diese symmetrische Bilinearform auf V ein Skalarprodukt sein muß. $\square$

Korollar 1.10.7 (Definitheit durch Ausartung). Sei A eine reelle symmetrische unzerlegbare $(n \times n)$ -Matrix mit nichtpositiven Einträgen außerhalb der Diagonalen. So sind gleichbedeutend:

1. Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $x \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ mit $Ax = 0$;
2. Der Kern von A wird von einem Vektor $x \in (\mathbb{R}_{> 0})^n$ aufgespannt;
3. Die Matrix A ist positiv semidefinit aber ausgeartet;

4. Es gibt einen Vektor $x \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ mit $Ax = 0$.

Für Matrizen A mit diesen äquivalenten Eigenschaften ist weiter jede Untermatrix, die durch das Streichen je einer Zeile und Spalte zum selben Index entsteht, positiv definit. Dasselbe gilt über jedem angeordneten Grundkörper.

Beweis. ($3 \Rightarrow 2$) Wir fassen A auf als eine Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$, bilden ihr Radikal $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ und betrachten den Quotientenraum $V := \mathbb{R}^n/K$ mit dem darauf induzierten Skalarprodukt. Die Bilder $\bar{e}_i \in V$ der Vektoren der Standardbasis schließen nach Annahme paarweise schwach stumpfe Winkel ein und wir folgern aus dem Satz über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln 1.10.1, daß je $(n-1)$ dieser Vektoren linear unabhängig sein müssen. Es folgt $\dim K = 1$, und ist $\sum x_i e_i$ ein Erzeuger von K , so folgt aus demselben Satz, daß die Koeffizienten x_i entweder alle positiv oder alle negativ sein müssen.

($2 \Rightarrow 3$) In $V := \mathbb{R}^n/\mathbb{R}x$ betrachten wir die Vektoren $v_i := x_i e_i + \mathbb{R}x$. Die symmetrische Bilinearform $\langle v, w \rangle = v^\top Aw$ auf $\mathbb{R}^n$ induziert dann eine symmetrische Bilinearform auf V , die nach dem Definitheitskriterium 1.10.4 positiv definit sein muß.

($1 \Rightarrow 2$) Haben wir $a_{ij} \neq 0$, so folgt mit $\sum a_{i\nu} x_\nu = 0$ und allen $x_\nu \geq 0$ bereits ($x_j \neq 0 \Rightarrow x_i \neq 0$). In der Tat kann im einzig relevanten Fall $i \neq j$ ein negativer Beitrag $a_{ij}x_j$ zur Summe nur durch einen positiven Beitrag $a_{ii}x_i$ ausgeglichen werden.

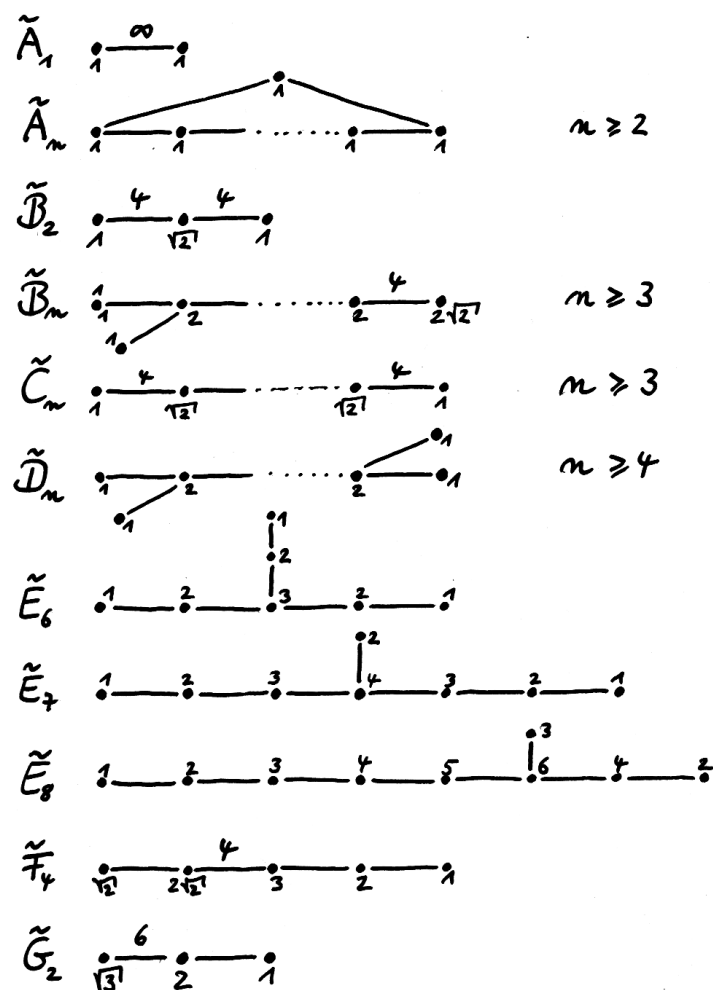
($2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$) Das ist klar.

Die letzte Aussage schließlich folgt wieder aus Satz 1.10.1 über Familien von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln: Lassen wir aus der Familie unserer $\bar{e}_i \in V$ einen Vektor weg, so wird sie eine Basis, und die entsprechende Streichmatrix ist die Matrix unseres Skalarprodukts auf V , ausgedrückt in dieser Basis. $\square$

1.11 Positiv definite Coxetergraphen

Proposition 1.11.1 (Positiv definite Coxetergraphen). *Die zusammenhängenden Coxetergraphen, deren Cosinusmatrix $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t \in S}$ positiv definit ist, sind genau die Graphen der Liste nach 1.9.7.*

Beweis. Zunächst gilt es zu zeigen, daß alle Coxetergraphen der Liste nach 1.9.7 in der Tat positiv definit sind. In den meisten Fällen folgt das aus unseren Erkenntnissen zur Definitheit durch Ausartung 1.10.7 und der gleich folgenden Liste: Diese Liste von Coxetergraphen mit Zahlen an ihren Punkten besteht nämlich aus



Eine Liste zusammenhängender Coxetergraphen mit jeweils einem Vektor im Kern der Cosinusmatrix des entsprechenden Coxetergraphen, dargestellt durch die Zahlen an den Punkten. Das zu prüfen, ist jeweils eine leichte Rechnung: Für den Graphen $\tilde{E}_6$ etwa läuft es hinaus auf die Identität

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3^2 - 3 \cdot (1 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 3) = 0$$

Nach unserem Korollar 1.10.7 über Definitheit durch Ausartung erhalten wir stets positiv definite Diagramme, wenn wir in einem Diagramm dieser Liste einen Knoten mit allen zu ihm führenden Kanten streichen.

In ?? wird erklärt, warum das auch genau die Liste aller zusammenhängenden Coxetergraphen zu essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen im Sinne von 1.12.1 ist. Die Notation kommt daher, daß der Graph der „dualen affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ Z “ stets $\tilde{Z}$ notiert wird. Der Index ist insbesondere jeweils um eins kleiner als die Knotenzahl.

zusammenhängenden Coxetergraphen nebst einem von Null verschiedenen Element des Kerns der zugehörigen Cosinusmatrix, dargestellt durch besagte Zahlen an den Punkten, wie der Leser leicht nachprüfen kann. Wie man auf diese Zahlen kommt, wird in 2.5.14 erklärt, man kann sie aber auch einfach vom Himmel fallen lassen. Da unsere Cosinusmatrizen stets nichtpositive Einträge außerhalb der Diagonalen haben und im Fall eines zusammenhängenden Coxetergraphen auch unzerlegbar sind, muß nach unseren Erkenntnissen zur Definitheit durch Ausartung 1.10.7 jeder echte Teilgraph eine positiv definite Cosinusmatrix haben. Das erledigt alle Fälle mit Ausnahme der Fälle H_n und $I_2(m)$. Dort hilft das Hauptminoren-Kriterium [LA2] 2.3.25 und Induktion: So sehen wir, daß wir in diesen Fällen nur zu zeigen brauchen, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen positive Determinante haben, was wieder leicht nachzurechnen ist. Also sind in der Tat alle Coxetergraphen der Liste nach 1.9.7 positiv definit. Anschließend gilt es zu zeigen, daß es keine anderen positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen gibt. Für die Coxetergraphen in der Liste nach 1.11.1 wissen wir bereits nach dem Vorhergehenden, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen Determinante Null haben. Für die Coxetergraphen der Liste nach 1.11.3 kann der Leser leicht prüfen, daß die zugehörigen Cosinusmatrizen negative Determinante haben. Nun unterbrechen wir den Beweis durch zwei Lemmata.

Lemma 1.11.2. *Lassen wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen einen Knoten mit allen dahin führenden Kanten weg, so bleibt er positiv definit.*

Beweis. Das ist klar, da die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Teilraum stets auch ein Skalarprodukt ist. $\square$

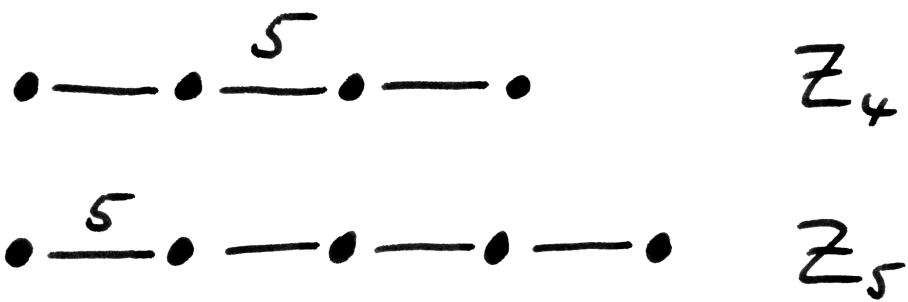
Lemma 1.11.3. *Verringern wir bei einem positiv definiten Coxetergraphen den Koeffizienten einer Kante, so bleibt er positiv definit.*

Beweis. Die Cosinusmatrix A der $(-\cos(\pi/m_{s,t}))_{s,t}$ hat Einsen auf der Diagonale, aber sonst nur Einträge ≤ 0 . Verringern wir den Koeffizienten einer Kante, so erhalten wir eine Matrix A' mit Einträgen $a_{ii} = a'_{ii} = 1$ und $a_{ij} \leq a'_{ij} \leq 0$ falls $i \neq j$. Wäre sie nicht positiv definit, so fänden wir einen Vektor $x \neq 0$ mit $0 \geq x^\top A' x$. Ausgeschrieben führt das zu $0 \geq \sum a'_{ij} x_i x_j$. Ersetzen wir die Einträge von x durch ihre Beträge, so gilt das erst recht und wir folgern

$$0 \geq \sum a'_{ij} |x_i| |x_j| \geq \sum a_{ij} |x_i| |x_j|$$

im Widerspruch zu unserer Annahme, A sei positiv definit. $\square$

Wir erhalten sofort, daß ein positiv definiter Coxetergraph keinen Zykel enthalten darf, weil wir ja sonst von ihm aus durch das Weglassen von Knoten und Verringern von Koeffizienten zu einem Graph der Gestalt $\tilde{A}_n$ mit $n \geq 2$ gelangen



Zwei indefinite Graphen, die in der Diskussion auch eine Rolle spielen.

könnten, der nun einmal nicht positiv definit ist. Weiter verbieten $\tilde{C}_n$ beziehungsweise $\tilde{B}_2$ den Fall von zwei oder mehr Kanten „höherer Wertigkeit“, womit hier und im Folgenden eine Wertigkeit ≥ 4 gemeint sei. Wir gehen nun erst einmal die Möglichkeiten für zusammenhängende positiv definite Coxetergraphen ohne Verzweigungspunkt durch. Im Fall von einem Knoten ist eh nur A_1 möglich. Im Fall von zwei Knoten verbietet $\tilde{A}_1$ den Koeffizienten ∞ und alle anderen Fälle sind bereits in unserer Liste positiv definiter Graphen zu finden. Weiter sagt uns $\tilde{F}_4$, daß bei fünf oder mehr Knoten eine Kante höherer Wertigkeit nur am Ende vorkommen kann. Wegen Z_5 kommen deshalb als unverzweigte zusammenhängende Graphen mit fünf oder mehr Knoten nur A_n und B_n in Betracht. Im Fall von drei oder vier Knoten kommen bei einer höheren Wertigkeit einer Randkante wegen $\tilde{G}_2$ zusätzlich nur H_3 und H_4 in Betracht, und bei einer höheren Wertigkeit einer Mittelkante wegen Z_4 nur F_4 . Damit ist gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen keine unverzweigten Graphen vergessen haben. Was die verzweigten Graphen angeht, zeigt $\tilde{D}_n$ mit $n \geq 5$, daß ein positiv definiter Coxetergraph höchstens einen Verzweigungspunkt haben kann. Dann zeigt $\tilde{D}_4$, daß er sich daselbst nicht in mehr als drei Äste verzweigen kann. Dann zeigt $\tilde{B}_n$, daß darin überhaupt keine Kante höherer Wertigkeit vorkommen kann. Dann zeigt $\tilde{E}_6$, daß notwendig einer der drei Äste nur aus einer Kante besteht, und $\tilde{E}_7$, daß ein zweiter der drei Äste aus höchstens zwei Kanten besteht, und $\tilde{E}_8$, daß im Fall eines Astes mit einer und eines Astes mit zwei Kanten der dritte Ast höchstens aus vier Kanten bestehen darf. Damit kommen im verzweigten Fall in der Tat nur D_n und E_6, E_7, E_8 in Frage, und wir haben gezeigt, daß wir in unserer Liste der positiv definiten zusammenhängenden Coxetergraphen auch keine verzweigten Graphen vergessen haben. $\square$

1.11.4. Ich finde an diesem Beweis äußerst bemerkenswert, in welchem Maße er durch die Verwendung unmathematischer Sprache an Klarheit gewinnt, ja recht eigentlich erst verständlich wird. Stellen Sie sich bloß einmal vor, die Coxetergraphen wären noch nicht erfunden und Sie sollten denselben Beweis in der äquivalenten und a priori deutlich präziseren Sprache der Coxetermatrizen führen, ja noch schlimmer, verstehen!

Ergänzung 1.11.5. Unter einer **komplexen Spiegelung** versteht man einen Automorphismus eines komplexen Vektorraums, dessen Fixpunktmenge eine Hyperebene ist. Eine **komplexe Spiegelungsgruppe** ist eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe eines komplexen Vektorraums, die von komplexen Spiegelungen erzeugt wird. Typische Beispiele sind die Gruppen $G(a, b, n) \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ für $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $b|a$ aller Matrizen mit genau einem von Null verschiedenen Eintrag in jeder Zeile und Spalte und der Eigenschaft, daß alle Einträge a -te Einheitswurzeln sind und ihr Produkt eine b -te Einheitswurzel. In allen diesen Beispielen mit den einzigen Ausnahmen $G(1, 1, n)$ für $n \geq 2$ ist $\mathbb{C}^n$

eine irreduzible Darstellung von $G(a, b, n)$, und in besagten Ausnahmefällen ist $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ eine irreduzible treue Unterdarstellung von $G(1, 1, n) \cong \mathcal{S}_n$. Bis auf Isomorphismus und die 34 exzeptionellen komplexen Spiegelungsgruppen $G_4, \dots, G_{37}$ erhalten wir so alle komplexen Spiegelungsgruppen mit irreduzibler definierender Darstellung.

Ergänzung 1.11.6. Natürlich ist es terminologisch unglücklich, daß nun der Begriff einer komplexen Spiegelung auf zwei Arten verstanden werden kann: Einerseits im Sinne von 1.11.5, und andererseits im Sinne von 1.2.2 für den Spezialfall des Grundkörpers $\mathbb{C}$. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

1.12 Struktur affiner Spiegelungsgruppen*

Definition 1.12.1. Eine affine Spiegelungsgruppe heißt **essentiell**, wenn ihre Translationen den Raum aller Richtungsvektoren aufspannen.

Definition 1.12.2. Zwei affine Spiegelungsgruppen (W, E) und (W', E') heißen **isomorph**, wenn es einen affinen Isomorphismus $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, unter dem sich W und W' entsprechen, in Formeln $W' = \varphi \circ W \circ \varphi^{-1}$.

1.12.3. Gegeben affine Spiegelungsgruppen (W_1, E_1) und (W_2, E_2) ist auch ihr Produkt $(W_1, E_1) \times (W_2, E_2) := (W_1 \times W_2, E_1 \times E_2)$ eine affine Spiegelungsgruppe in offensichtlicher Weise.

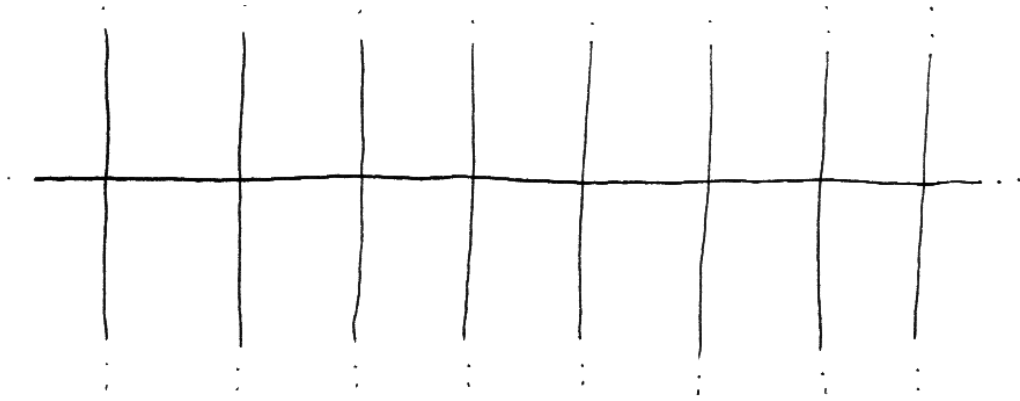
Satz 1.12.4 (Abspalten eines maximalen endlichen Faktors). *Jede affine Spiegelungsgruppe (W, E) ist isomorph zu einem Produkt*

$$(W, E) \cong (W_a, E_a) \times (W_f, E_f)$$

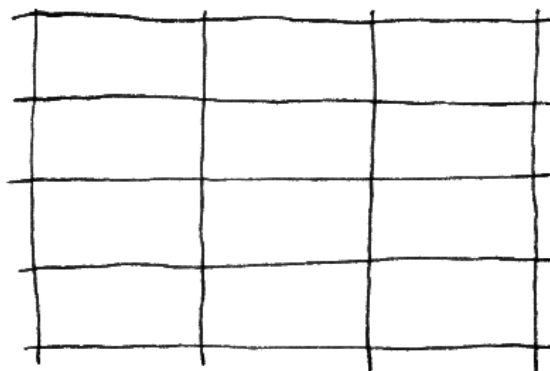
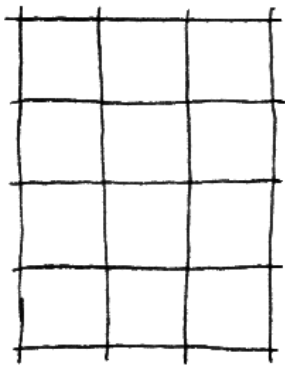
einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe (W_a, E_a) mit einer endlichen Spiegelungsgruppe (W_f, E_f) . Darüber hinaus sind die Isomorphieklassen derartiger Faktoren durch (W, E) bereits eindeutig bestimmt.

Vorschau 1.12.5. In 1.9.7 haben wir bereits die endlichen Spiegelungsgruppen in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen klassifiziert. Um eine Klassifikation aller affinen Spiegelungsgruppen in endlichdimensionalen reellen Räumen zu erreichen, dürfen wir uns nach dem Satz also auf die Klassifikation der essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen beschränken. Diese Klassifikation wird im nächste Abschnitt besprochen. Mehr dazu findet man in seiner Vorrede 2.1.1.

Beweis. Wir dürfen nach 1.2.6 annehmen, daß unsere affine Spiegelungsgruppe orthogonal ist für ein geeignetes Skalarprodukt. Bezeichnet $T \subset W$ die Untergruppe aller Translationen aus W , so bildet der lineare Anteil jeder Spiegelung



Die Spiegel einer nicht essentiellen affinen Spiegelungsgruppe



Die Spiegel von zwei isomorphen affinen Spiegelungsgruppen

das Vektorraumzeugnis $L := \langle T \rangle$ von T auf sich selbst ab. Folglich liegt der (-1) -Eigenraum jeder linearisierten Spiegelung entweder in L oder in $L^\perp$. Nennen wir W_a das Erzeugnis der ersteren Spiegelungen und W_f das Erzeugnis der letzteren, so liefert die Multiplikation offensichtlich einen Isomorphismus

$$W_a \times W_f \xrightarrow{\sim} W$$

Wählen wir $e \in E$ beliebig und setzen $E_a = e + L$ und $E_f = e + L^\perp$, so operiert W_f als translationsfreie affine Spiegelungsgruppe auf E_f und ist mithin endlich. Der Satz ist bewiesen. $\square$

Lemma 1.12.6 (Mengen von Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln). *In einem endlichdimensionalen Skalarproduktraum ist eine Menge von Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen, stets endlich.*

Beweis. Induktion über die Dimension. Ist unser Raum n -dimensional und v ein von Null verschiedener Vektor unserer Teilmenge, so schließen nach 1.8.7 höchstens n unserer Vektoren einen echt stumpfen Winkel mit v ein. Nach der Induktionsvoraussetzung stehen weiter höchstens endlich viele Vektoren unserer Teilmenge auf v senkrecht. $\square$

Ergänzung 1.12.7. Aus 1.10.1 folgt genauer, daß in einem n -dimensionalen euklidischen Raum eine Menge von Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen, höchstens aus $2n + 1$ Vektoren bestehen kann. Diese Schranke wird auch wirklich erreicht, zum Beispiel wenn man die Vektoren einer Orthonormalbasis sowie ihre Negativen betrachtet und dann noch den Nullvektor hinzunimmt.

Lemma 1.12.8. *Jeder Alkoven einer affinen Spiegelungsgruppe hat nur endlich viele Wände.*

Beweis. Zunächst einmal finden wir nach 1.2.6 ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Gegeben ein Alkoven wählen wir dann zu jeder seiner Wände einen darauf senkrechten Richtungsvektor, der in Richtung des Alkovens zeigt. Nach 1.8.3 schließen diese Vektoren paarweise schwach stumpfe Winkel ein. Nach 1.12.4 dürfen wir auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der fragliche Raum endlichdimensional ist. Nach 1.12.6 bilden unsere Richtungsvektoren folglich eine endliche Menge. $\square$

2 Wurzelsysteme

2.1 Wurzelsysteme und ihre Weylgruppen

2.1.1 (**Vorrede**). Wurzelsysteme spielen in der Lietheorie eine wichtige Rolle. In diesem Skript erkläre ich nur, wie sie zu einer vollständigen Klassifikation der affinen reellen Spiegelungsgruppen führen. Das geschieht in den folgenden Abschnitten und ich will es hier als Vorschau kurz zusammenfassen. In 1.9.7 hatten wir bereits die endlichen reellen Spiegelungsgruppen klassifiziert. Nach 1.12.4 dürfen wir uns damit auf die Klassifikation der essentiellen affinen reellen Spiegelungsgruppen beschränken. In 2.4.3 konstruieren wir über jedem angeordneten Körper eine Bijektion zwischen der Menge aller Isomorphieklassen essentieller affiner Spiegelungsgruppen und der Menge aller Isomorphieklassen von sogenannten „Wurzelsystemen“, wie sie im kommenden Abschnitt eingeführt werden. Nach einigen weiteren Vorarbeiten gelingt dann schließlich in 2.3.7 die vollständige Klassifikation der Wurzelsysteme und wird zeigen, daß diese Klassifikation vom Grundkörper im wesentlichen unabhängig ist.

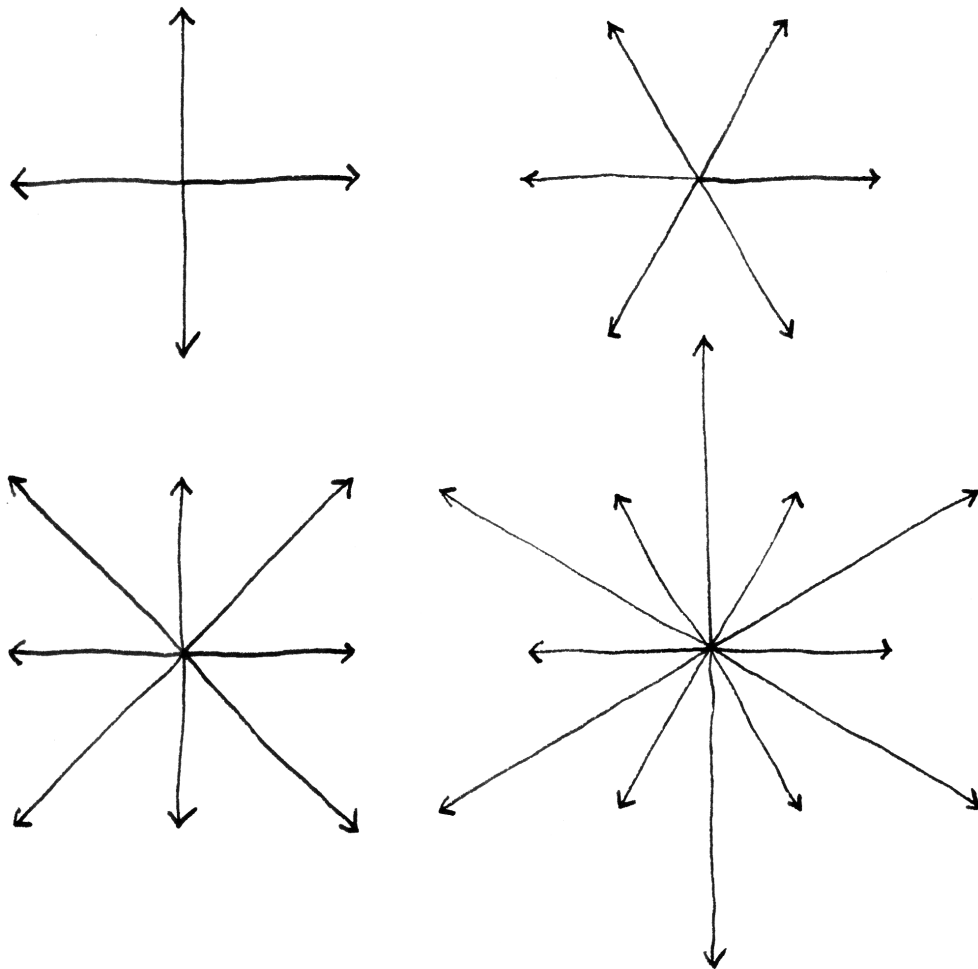
Definition 2.1.2. Ein **Wurzelsystem** oder genauer **reduziertes Wurzelsystem** ist ein Paar (R, V) bestehend aus einem Vektorraum V über einem Körper der Charakteristik Null und einer Teilmenge $R \subset V$, deren Elemente wir in diesem Kontext als **Wurzeln** ansprechen, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Unsere Menge R von Wurzeln ist endlich, erzeugt V und enthält nicht den Nullvektor;
2. Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine lineare Abbildung $s : V \rightarrow V$ mit $s(\alpha) = -\alpha$, $s(R) \subset R$ und $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \quad \forall \beta \in R$;
3. Außer dem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel.

Lassen wir die letzte Bedingung fallen, so sprechen wir von einem **nicht notwendig reduzierten Wurzelsystem**.

Definition 2.1.3. Ein **Morphismus von Wurzelsystemen** über ein- und demselben Körper ist eine lineare Abbildung zwischen den jeweiligen Vektorräumen, die jede Wurzel auf eine Wurzel oder auf Null abbildet.

2.1.4. Die Dimension des von einem Wurzelsystem aufgespannten Vektorraums heißt der **Rang** des Wurzelsystems. Die leere Menge ist ein Wurzelsystem im Nullvektorraum.



Das Bild zeigt eine Liste von Wurzelsystemen im Raum der Richtungsvektoren der Papierebene derart, daß jedes Wurzelsystem in einem reellen zweidimensionalen Raum zu genau einem der vier Systeme dieser Liste isomorph ist. Die Bilder sind darüber hinaus so gewählt, daß die Spiegelung zu jeder Wurzel in der Sprache der Schulgeometrie gerade die orthogonale Spiegelung an der auf besagter Wurzel senkrechten Geraden durch den Ursprung ist. Wir werden die Vollständigkeit dieser Liste zum Schluß dieses Abschnitts rechtfertigen. Im oben links dargestellten Fall dürften die beiden horizontalen Wurzeln auch eine andere Länge haben als die beiden vertikalen Wurzeln.

2.1.5 (Diskussion der Terminologie). In der Lie-Theorie konstruiert man zu den verschiedensten Ausgangsdaten von kompakten Liegruppen bis zu halbeinfachen Liealgebren das zugehörige „Wurzelsystem“, das oft ein Wurzelsystem im Sinne der obigen Definition ist. In solchen Zusammenhängen nennen wir ein Wurzelsystem im Sinne der obigen Definition auch ein **abstraktes Wurzelsystem**. Ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ nennen wir ein **rationales, reelles beziehungsweise komplexes Wurzelsystem**. Wir werden in 2.1.16 zeigen, daß die Erweiterung der Skalare $k \otimes_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenz von Kategorien induziert zwischen der Kategorie der rationalen Wurzelsysteme und der Kategorie der Wurzelsysteme über einem beliebigen fest vorgegebenen Körper k der Charakteristik Null.

2.1.6 (Diskussion von verwandter Begrifflichkeiten). Ich habe mich in der vorhergehenden Definition an die Terminologie von Bourbaki [Bou81] gehalten. In anderen Quellen fordert man von einem Wurzelsystem schwächer als in 2.1.2 formuliert nicht $s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$ und bezeichnet diejenigen Wurzelsysteme, die diese Bedingung doch erfüllen, als **kristallographisch**. Oft bezeichnet man in der Literatur, insbesondere der angelsächsischen, als „Wurzelsysteme“ auch Teilmengen von reellen Skalarprodukträumen, die Teile unserer Bedingungen aus 2.1.2 erfüllen und die Eigenschaft haben, daß die orthogonale Spiegelung an der auf einer Wurzel senkrechten Hyperebene stets unser System in sich selber überführt. Wir werden derartige Systeme, jedenfalls wenn sie zusätzlich im eben erwähnten Sinne kristallographisch sind, **euklidische Wurzelsysteme** nennen.

Vorschau 2.1.7 (Beziehung zu Liegruppen). In [ML] 5.7.8 konstruieren wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen

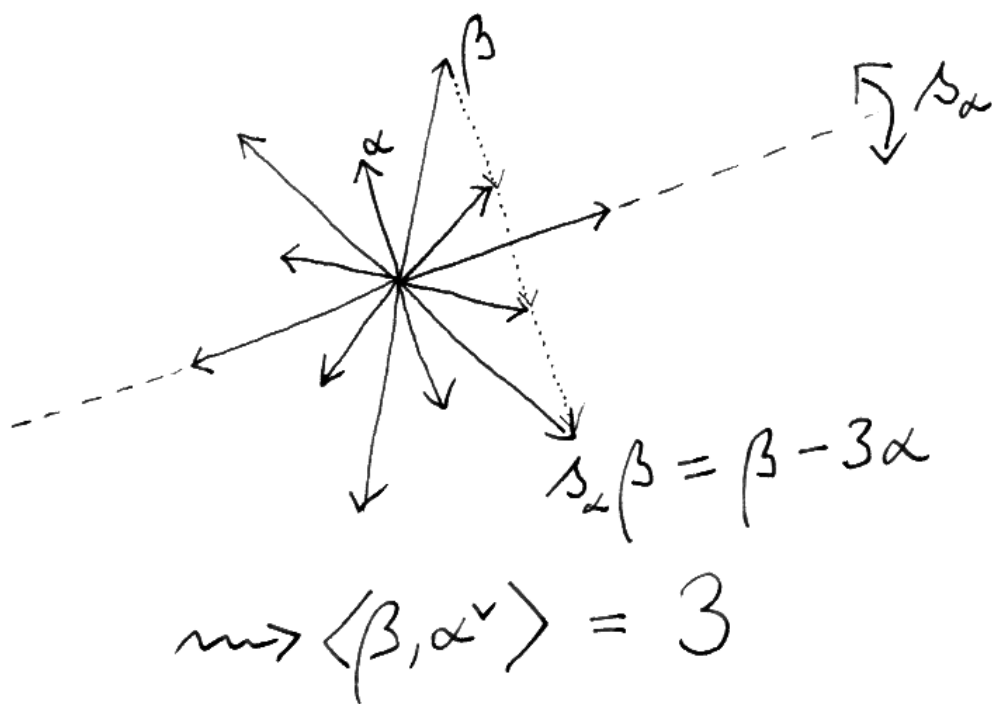
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zusammenhängende kompakte} \\ \text{Liegruppen mit trivialem Zentrum} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{rationale} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

Unter einer kompakten Liegruppe dürfen wir dabei eine mit einer Topologie versehene kompakte Gruppe verstehen, die als abgeschlossene Untergruppe in eine $GL(n; \mathbb{R})$ eingebettet werden kann, und unter einem Isomorphismus von kompakten Liegruppen einen Gruppenisomorphismus, der stetig ist mit stetiger Umkehrabbildung.

Vorschau 2.1.8 (Beziehung zu Liealgebren). In [HL] 2.3.21 konstruieren wir eine Bijektion auf Isomorphieklassen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{halbeinfache komplexe} \\ \text{Liealgebren} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{komplexe} \\ \text{Wurzelsysteme} \end{array} \right\}$$

Die vier sogenannten „klassischen“ Beispiele für Wurzelsysteme werden etwa in [HL] 2.3.11, [HL] 2.3.31, [HL] 2.3.32 und [HL] 2.3.33 beschrieben. Sehr viel



Beispiel für das Auswerten einer Kowurzel auf einer Wurzel

ausführlichere Informationen und übersichtliche Tafeln findet man bei Bourbaki [Bou81].

2.1.9 (Wurzelspiegelungen und Kowurzeln). Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Für die lineare Abbildung s aus dem zweiten Teil der Definition 2.1.2 hat $(s - \text{id})$ als Bild die Gerade $\langle \alpha \rangle$. Mithin ist der Kern von $(s - \text{id})$ alias die Fixpunktmenge von s eine Hyperebene. Zusammen mit der Bedingung $s(\alpha) = -\alpha$ zeigt das, daß unser s stets eine Spiegelung im Sinne von 1.2.2 sein muß. Weiter ist unser s durch die Wurzel α eindeutig bestimmt, denn wäre t eine zweite Abbildung mit den im zweiten Teil geforderten Eigenschaften, so müßte st sowohl auf $\langle \alpha \rangle$ als auch auf $V/\langle \alpha \rangle$ die Identität induzieren und wäre folglich unipotent. Wäre nun st nicht die Identität, so hätte es nach [LA2] 3.3.18 unendliche Ordnung im Widerspruch zur Tatsache, daß es das endliche Erzeugendensystem R von V stabilisiert. Also ist s durch α eindeutig bestimmt. Wir schreiben von nun an $s = s_\alpha$ und nennen diese lineare Abbildung eine **Wurzelspiegelung** und genauer die **Spiegelung zur Wurzel** α . Dann erklären wir zu jeder Wurzel α die Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ durch die Eigenschaft

$$s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \text{für alle } v \in V.$$

Diese Linearform heißt die **Kowurzel zur Wurzel** α . Das Symbol $\alpha^\vee$ wird „alfa tscheck“ gesprochen. Per definitionem nehmen Kowurzeln auf Wurzeln stets ganzzahlige Werte an, in Formeln $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in R$.

2.1.10 (Rationale Form eines Wurzelsystems). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ in einem Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null setzen wir

$$V_{\mathbb{Q}} := \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$$

Offensichtlich ist dann auch $R \subset V_{\mathbb{Q}}$ ein Wurzelsystem, die Spiegelung $s_\alpha : V \rightarrow V$ stabilisiert $V_{\mathbb{Q}}$ und induziert die Spiegelung $s_\alpha : V_{\mathbb{Q}} \rightarrow V_{\mathbb{Q}}$ des Wurzelsystems $R \subset V_{\mathbb{Q}}$ und die Kowurzeln $\alpha^\vee$ von $R \subset V$ nehmen auf $V_{\mathbb{Q}}$ nur Werte aus $\mathbb{Q}$ an und restringieren so zu den Kowurzeln $\alpha_{\mathbb{Q}}^\vee \in V_{\mathbb{Q}}^*$ des Wurzelsystems $R \subset V_{\mathbb{Q}}$. Wir nennen $R \subset V_{\mathbb{Q}}$ die **rationale Form** unseres Wurzelsystems $R \subset V$.

Lemma 2.1.11. *Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ über einem Körper k spannen die Kowurzeln den Dualraum auf und die rationale Form hat denselben Rang wie das ursprüngliche Wurzelsystem, in Formeln $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_k V$.*

Beweis. Auf $V_{\mathbb{Q}}$ finden wir mithilfe von 1.2.6 ein unter der endlichen Gruppe $\{g \in \text{GL}(V_{\mathbb{Q}}) \mid g(R) \subset R\}$ invariantes Skalarprodukt $(\ , \)$. In Bezug auf so ein Skalarprodukt muß s_α auf $V_{\mathbb{Q}}$ die orthogonale Spiegelung an der zu α orthogonalen Hyperebene sein und wird damit nach 1.1.4 gegeben durch die Abbildungsvorschrift $s_\alpha(v) = v - 2((v, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha$. Das hinwiederum zeigt $\alpha^\vee(v) = (v, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ für alle $v \in V_{\mathbb{Q}}$ und insbesondere $\langle \alpha_{\mathbb{Q}}^\vee \mid \alpha \in R \rangle = V_{\mathbb{Q}}^*$. Wählen wir

eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $V_{\mathbb{Q}}$ aus Wurzeln und eine Basis $\beta_{1,\mathbb{Q}}^{\vee}, \dots, \beta_{n,\mathbb{Q}}^{\vee}$ von $V_{\mathbb{Q}}^*$ aus restringierten Kowurzeln, so ist folglich die Matrix der

$$\langle \alpha_i, \beta_{j,\mathbb{Q}}^{\vee} \rangle$$

invertierbar. Das ist aber auch die Matrix der $\langle \alpha_i, \beta_j^{\vee} \rangle$ und damit sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ beziehungsweise $\beta_1^{\vee}, \dots, \beta_n^{\vee}$ auch k -linear unabhängig in V beziehungsweise V^* . Der offensichtliche Dimensionsvergleich $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} \geq \dim_k V$ zeigt so, daß jede $\mathbb{Q}$ -Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $V_{\mathbb{Q}}$ aus Wurzeln auch eine k -Basis von V sein muß. Das hinwiederum zeigt $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_k V$ und $\langle R^{\vee} \rangle = V^*$. $\square$

2.1.12 (Kowurzeln als Vielfache von Wurzeln). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ gibt es Isomorphismen $V \xrightarrow{\sim} V^*$ des zugrundeliegenden Vektorraums mit seinem Dualraum, unter denen alle Wurzeln positiven Vielfachen ihrer Kowurzeln entsprechen. Um das zu sehen, dürfen wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf rationale Wurzelsysteme beschränken. Für diese hatten wir das jedoch bereits beim Beweis von Lemma 2.1.11 gesehen.

Definition 2.1.13. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ heißt die von den Wurzelspiegelungen erzeugte Untergruppe $W = W(R \subset V) \subset \text{GL}(V)$ seine **Weylgruppe**.

2.1.14. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ ist der Nullvektor der einzige Vektor von V , der von der Weylgruppe festgehalten wird. In der Tat erzeugen die Kowurzeln den Dualraum, folglich ist der Schnitt ihrer Kerne Null.

2.1.15. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ liefert Einschränkung von Elementen der Weylgruppe auf den $\mathbb{Q}$ -Spann der Wurzeln $V_{\mathbb{Q}}$ eine natürliche Einbettung $W \subset \text{Aut } V_{\mathbb{Q}}$. Diese Einbettung identifiziert die Weylgruppe mit der Weylgruppe der rationalen Form $R \subset V_{\mathbb{Q}}$, einer endlichen Spiegelungsgruppe im Sinne von 1.2.5. Die Alkoven in $V_{\mathbb{Q}}$ heißen in diesem Zusammenhang meist **Weylkammern**.

2.1.16 (Wurzelsysteme über verschiedenen Körpern). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ über einem Körper k ist die offensichtliche Abbildung nach 2.1.11 ein Isomorphismus $V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} k \xrightarrow{\sim} V$ und das k -lineare Fortsetzen $\mathbb{Q}$ -linearer Abbildungen induziert eine Bijektion auf den Kowurzeln sowie einen Isomorphismus $W(R \subset V_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} W(R \subset V)$ auf den Weylgruppen. Im weiteren Verlauf werden wir jedem Wurzelsystem $R \subset V$ das „Gitter der ganzen Gewichte“

$$\mathfrak{X}(R \subset V) := \{v \in V \mid \langle v, \alpha^{\vee} \rangle \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in R\}$$

zuordnen und eben gezeigten Verträglichkeiten zeigen, daß dann die Einbettung $V_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow V$ auch eine Bijektion $\mathfrak{X}(R \subset V_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(R \subset V)$ induziert. Das Gitter der ganzen Gewichte spielt in der Liethorie eine wichtige Rolle, vergleiche

[?] ?? Der Funktor, der jedem Wurzelsystem über einem festen Körper k seine rationale Form zuordnet, ist auch offensichtlich eine Äquivalenz von Kategorien zwischen Wurzelsystemen über k und rationalen Wurzelsystemen. Beim Studium von Wurzelsystemen dürfen wir uns deshalb weitestgehend auf den Fall rationaler Wurzelsysteme beschränken.

Satz 2.1.17 (Duales Wurzelsystem). *Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ ist die Menge $R^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ aller Kowurzeln ein Wurzelsystem im Dualraum V^* und für die Auswertungsabbildung $V \rightarrow (V^*)^*$ gilt $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$. Ist unser Wurzelsystem reduziert, so ist auch das duale Wurzelsystem reduziert.*

Beweis. Nach 2.1.11 ist $R^\vee$ ein endliches Erzeugendensystem von V^* . Haben wir nun irgendeinen Isomorphismus von Vektorräumen $\varphi : V \xrightarrow{\sim} U$ und ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem, so ist natürlich auch $\varphi(R) \subset U$ ein Wurzelsystem und gegeben $\beta \in R$ gilt $\varphi(\beta)^\vee = (\varphi^\top)^{-1}(\beta^\vee)$ für $\varphi^\top : U^* \rightarrow V^*$ die zu φ transponierte Abbildung. Gegeben $\alpha \in R$ ist schließlich die transponierte Abbildung zur Spiegelung $s_\alpha = s_{\alpha, \alpha^\vee} : V \rightarrow V$ nach Übung 1.2.9 stets die Spiegelung $s_\alpha^\top = s_{\alpha^\vee, \alpha} : V^* \rightarrow V^*$. Für $\varphi = s_\alpha$ erhalten wir insbesondere

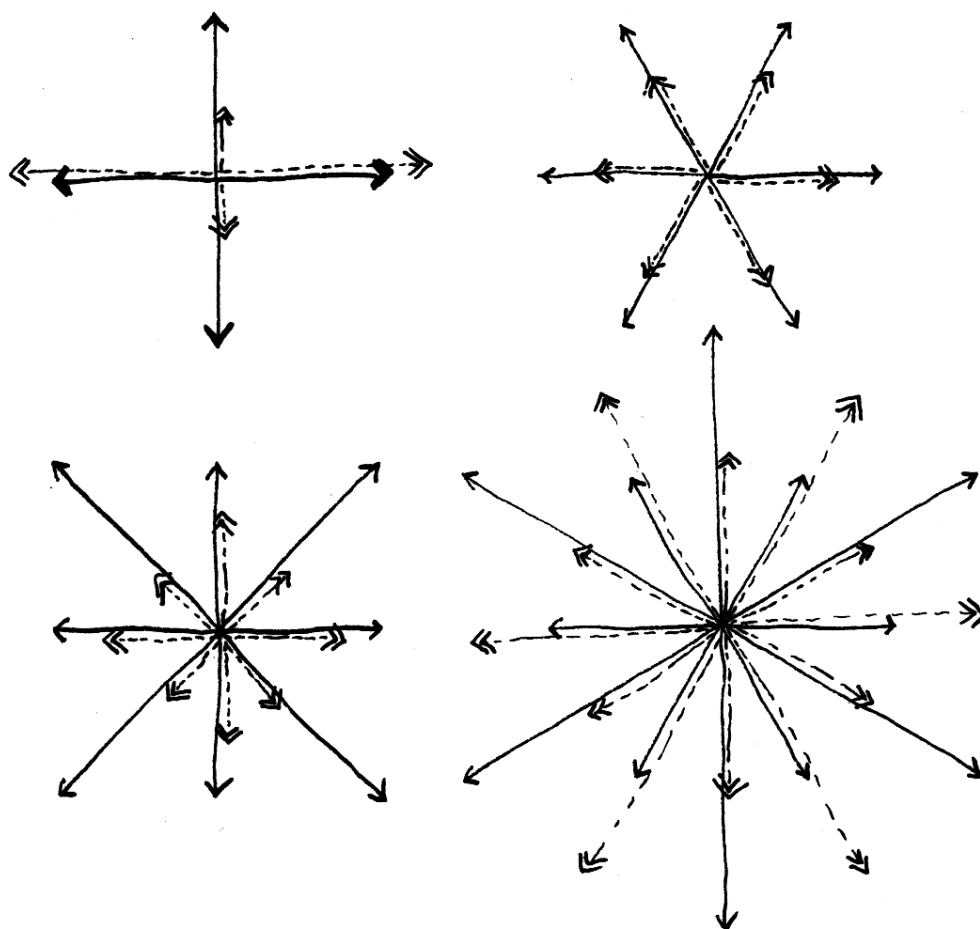
$$(s_\alpha \beta)^\vee = s_\alpha^\top(\beta^\vee) = \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee$$

Wir erkennen so, daß $s_\alpha^\top$ die Bedingungen erfüllt, die von einer Spiegelung zu $\alpha^\vee$ als Element des Wurzelsystems in $\text{spe } R^\vee$ gefordert werden, und das zeigt auch gleich noch $\alpha \mapsto (\alpha^\vee)^\vee$. Liegen schließlich zwei Wurzeln auf derselben Gerade, so haben sie offensichtlich dieselbe Wurzelspiegelung und damit liegen auch ihre Kowurzeln auf derselben Gerade. Da jede Wurzel mit ihrer Kowurzel zu Zwei paart, folgt die letzte Aussage. $\square$

Beispiel 2.1.18 (Wurzelsysteme vom Typ A). Die Menge aller Differenzen $R := \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{Q}^n$ ist ein Wurzelsystem in $V := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$. Wegen $\dim V = n - 1$ heißt dies Wurzelsystem A_{n-1} . Wir bezeichnen mit $\varepsilon_i \in V^*$ die durch $\varepsilon_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ gegebene Linearform. Für $\alpha = e_i - e_j$ ist dann die Kowurzel $\alpha^\vee = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ und die Spiegelung s_α vertauscht die i -te mit der j -ten Koordinate. Insbesondere besteht $W(R) \cong S_n$ aus den Permutationen der Koordinaten.

Lemma 2.1.19. *Jede Spiegelung in der Weylgruppe eines Wurzelsystems ist eine Spiegelung zu einer Wurzel.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit R ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Nach 1.6.3 ist jede Spiegelung einer endlichen von Spiegelungen erzeugten Untergruppe der Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem angeordneten Körper bereits konjugiert zu einer



In diesem Bild habe ich für verschiedene Wurzelsysteme des Richtungsraums $\vec{P}$ der Papierebene auch noch die Bilder der dualen Wurzeln unter dem durch ein jeweils willkürlich gewähltes weylgruppeninvariantes Skalarprodukt vermittelten Isomorphismus $\vec{P}^* \xrightarrow{\sim} \vec{P}$ eingezeichnet. Wie in 2.1.12 diskutiert sind diese Bilder positive Vielfache der entsprechenden Wurzeln. Ich Fall oben links habe ich dabei ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gewählt, das nicht unter allen anschaulichen Bewegungen der Papierebene invariant ist.

der erzeugenden Spiegelungen. Insbesondere ist jede Spiegelung s aus der Weylgruppe schon mal konjugiert zu einer Spiegelung zu einer Wurzel $\beta \in R$. Wir folgern $s = ws_\beta w^{-1} = s_{w\beta} = s_\alpha$ mit $\alpha = w\beta \in R$. $\square$

Lemma 2.1.20 (Paare von Wurzeln). Für je zwei nichtproportionale Wurzeln α, β eines Wurzelsystems gilt $0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$ und je zwei nichtorthogonale Wurzeln haben das Längenverhältnis

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$$

2.1.21. Im Fall eines reellen Wurzelsystems wird genauer der Winkel zwischen je zwei Wurzeln α und β bezüglich jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)$ auf $\langle R \rangle_{\mathbb{R}}$ gegeben durch $4 \cos^2(\angle(\alpha, \beta)) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Beweis. Beides folgt sofort aus unserer Formel $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$. $\square$

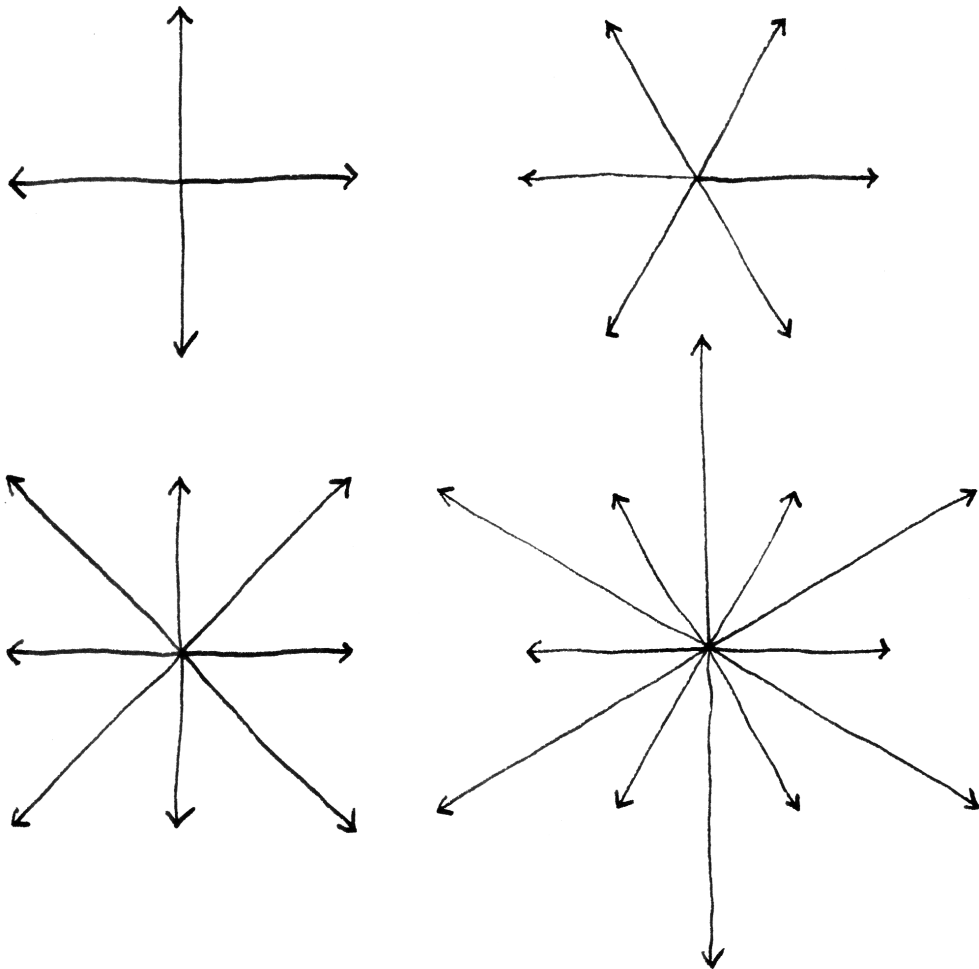
Übungen

Übung 2.1.22. Wie in 1.6.12 sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und $Q \subset V$ ein Gitter alias der $\mathbb{Z}$ -Spann einer Basis und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$. Man zeige, daß die Vektoren $v \in Q$ mit $\langle v, v \rangle = 2$ ein Wurzelsystem in dem von ihnen erzeugten Untervektorraum von V bilden.

Übung 2.1.23 (Das Wurzelsystem E_8). Im Vektorraum $\mathbb{Q}^8$ ist die Menge Q aller Vektoren $a = (a_1, \dots, a_8) \in \mathbb{Z}^8 \sqcup ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^8)$ mit Koordinatensumme $a_1 + a_2 + \dots + a_8 \in 2\mathbb{Z}$ eine Untergruppe, die den Vektorraum $\mathbb{Q}^8$ erzeugt. Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{Q}^8$ induziert eine bilineare Abbildung $Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$. Mit dieser bilinearen Abbildung heißt Q das E_8 -Gitter. Es gilt $\langle q, q \rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $q \in Q$ und die 240 Elemente $q \in Q$ mit $\langle q, q \rangle = 2$ bilden ein Wurzelsystem, das unser Gitter Q aufspannt und auch den Namen E_8 trägt. Sein Schnitt mit $\mathbb{Z}^8$ ist auch ein Wurzelsystem, das den Namen D_8 trägt und zur kompakten Liegruppe $SO(16)$ gehört.

Übung 2.1.24. Gegeben ein Wurzelsystem R und darin nichtproportionale Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0 \Rightarrow \beta - \alpha \in R$ und dann natürlich auch $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 0 \Rightarrow \beta + \alpha \in R$. Hinweis: Aus $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$ folgt mit Lemma 2.1.20, daß gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 1$ oder $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 1$.

2.1.25 (**Wurzelketten**). Gegeben ein Wurzelsystem R und darin nichtproportionale Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ ist $I := \{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$ ein Intervall in $\mathbb{Z}$. Das erkennt man unschwer durch Inspektion der Fälle vom Rang Zwei. Alternativ kann man durch Widerspruch argumentieren: Wären $s < r$ Zahlen aus I mit Abstand Zwei oder mehr, zwischen denen kein Element von I läge, so folgte aus 2.1.24 leicht $\langle \beta + s\alpha, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ und $\langle \beta + r\alpha, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ und zusammen $\langle (r-s)\alpha, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ im Widerspruch zu $r < s$.



Dies Bild illustriert alle möglichen Lagen für Paare von Wurzeln in einem Wurzelsystem.

2.2 Basen von Wurzelsystemen

Definition 2.2.1. Eine Teilmenge $\Pi \subset R$ eines Wurzelsystems $R \subset V$ heißt eine **Basis des Wurzelsystems**, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Π ist eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraums V ;
2. Schreiben wir eine Wurzel $\beta \in R$ als Linearkombination $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ der Elemente von Π , so liegen die Koeffizienten n_α entweder alle in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ oder alle in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Definition 2.2.2. Eine Teilmenge $R^+ \subset R$ eines Wurzelsystems heißt ein **System positiver Wurzeln**, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Das Wurzelsystem läßt sich schreiben als die disjunkte Vereinigung $R = R^+ \sqcup (-R^+)$, für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt also $\alpha \in R^+ \Leftrightarrow (-\alpha) \notin R^+$;
2. Aus $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^+$ und $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R$ folgt $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in R^+$.

2.2.3. Jedes Wurzelsystem R besitzt ein System positiver Wurzeln. In der Tat, wählen wir einen Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^n$ von $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen, so bilden offensichtlich alle Wurzeln, deren Bild in $\mathbb{Q}^n$ in der lexikographischen Ordnung größer ist als Null, ein System positiver Wurzeln.

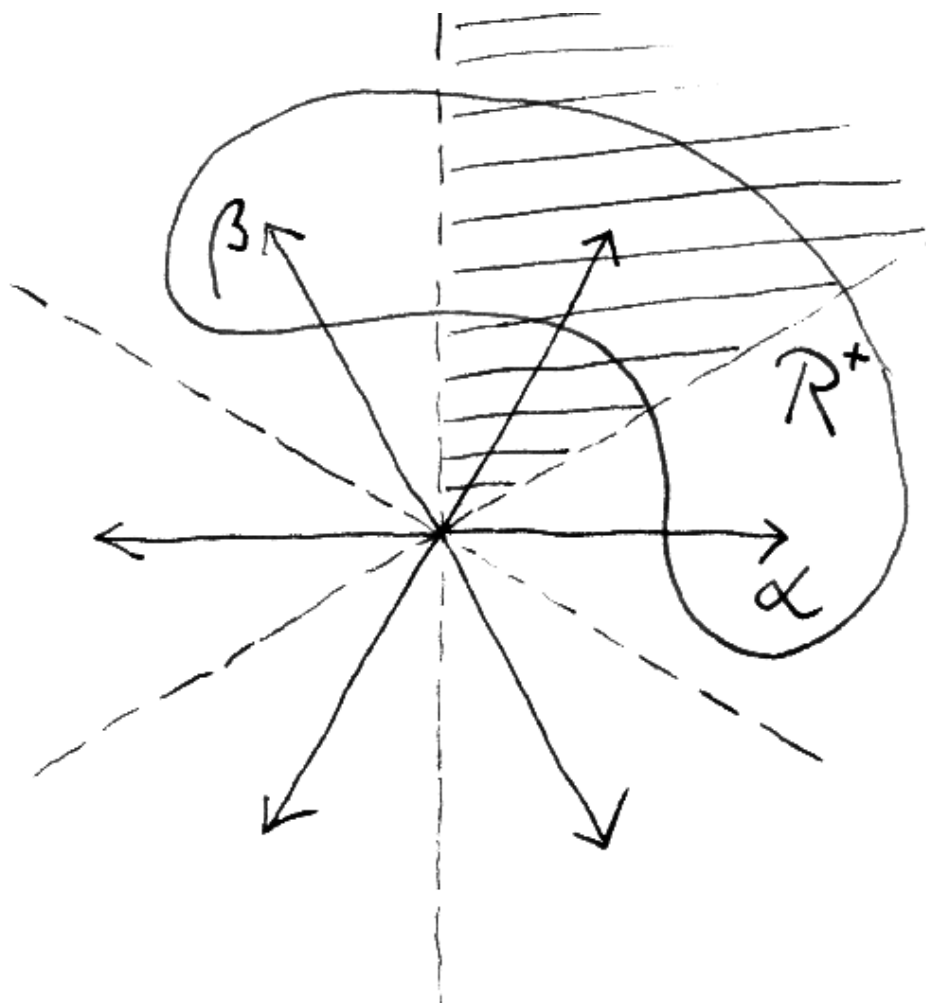
2.2.4. Gegeben ein Wurzelsystem R gehört jede Wurzel α zu mindestens einer Basis des Wurzelsystems. In der Tat, wählen wir einen Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^n$ von $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen mit $\alpha \mapsto (0, \dots, 0, 1)$ und betrachten das positive System aller Wurzeln, deren Bild in $\mathbb{Q}^n$ in der lexikographischen Ordnung größer ist als Null, so gehört α offensichtlich zur zugehörigen Basis.

Beispiel 2.2.5 (Das Wurzelsystem A_n). Wir erinnern aus 2.1.18 das Wurzelsystem $R := \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ aller Differenzen zwischen zwei verschiedenen Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{Q}^n$ im Vektorraum $V := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$. Ein System positiver Wurzeln wäre $R^+ := \{e_i - e_j \mid i < j\}$ und die zugehörige Basis $\Pi(R^+) = \{e_i - e_{i+1}\}$.

Satz 2.2.6 (Weylkammern, Basen, Systeme positiver Wurzeln). Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Bijektionen

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*\} & \xrightarrow{6} & \{\text{Weylkammern in } \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}\} \\
 4^\vee \uparrow \downarrow 3^\vee & & 4 \uparrow \downarrow 3 \\
 \{\text{Basen von } R\} & \xrightarrow{5} & \{\text{Basen von } R^\vee\} \\
 2 \uparrow \downarrow 1 & & 2^\vee \uparrow \downarrow 1^\vee \\
 \{\text{Systeme positiver Wurzeln in } R\} & \xrightarrow{5} & \{\text{Systeme positiver Wurzeln in } R^\vee\}
 \end{array}$$

vermittels der Abbildungen, die wir im folgenden genauer beschreiben:



Ein Wurzelsystem mit einer Weylkammer, dem zugehörigen System positiver Wurzeln, bestehend aus den drei Wurzeln „in der Niere“ und der zugehörigen Basis, bestehend aus den beiden Wurzeln α und β .

1. Jeder Basis $\Pi \subset R$ ordnet man als positives System die Menge $R^+(\Pi)$ aller Wurzeln zu, die sich schreiben lassen als nichtnegative Linearkombination der Basiselemente;
2. Jedem System positiver Wurzeln $R^+ \subset R$ ordnet man als Basis $\Pi(R^+)$ die Menge aller derjenigen Elemente des Systems zu, die sich nicht als Summe über eine Multimenge von zwei oder mehr Elementen des besagten Systems schreiben lassen;
3. Jeder Weylkammer im rationalen Spann der Wurzeln ordnet man als Basis des dualen Wurzelsystems die Menge derjenigen Kowurzeln zu, die Gleichungen von Wänden unserer Kammer sind und die auf der Kammer positive Werte annehmen;
4. Jeder Basis des dualen Wurzelsystems ordnet man als Kammer den Schnitt derjenigen Halbräume zu, auf denen alle Elemente besagter Basis positive Werte annehmen;
5. Jeder Menge von Wurzeln ordnen die beiden unteren horizontalen Pfeile die Menge der zugehörigen Kowurzeln zu;
6. Jeder Kammer in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ ordnet die obere Horizontale ihr Bild unter einem und jedem Isomorphismus $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\sim} \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ zu, der von einem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt induziert wird.

Beweis. Nur bei den Abbildungen 1 und 6 scheint mir a priori klar, daß sie überhaupt im behaupteten Wertebereich landen. Als nächstes überlegen wir uns das für die in 3 gegebene Abbildung und zeigen dabei insbesondere, daß jedes Wurzelsystem überhaupt Basen besitzt. Wir geben unserer Abbildung den Namen Φ , in Formeln gilt für jede Weylkammer $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ also

$$\Phi(A) = \{ \alpha^\vee \in R^\vee \mid (\ker \alpha^\vee) \in \mathcal{H}_A, \langle A, \alpha^\vee \rangle \subset \mathbb{Q}_{>0} \}$$

Nach 1.8.6 ist $\Phi(A)$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$ und dann nach 2.1.17.2.1.11 auch von V^* . Nach 1.6.1 erzeugen weiter die Spiegelungen s_α an den Wänden einer Kammer die gesamte Weylgruppe, nach 2.1.14 ist demnach der Schnitt dieser Wände alias der Schnitt der Kerne der zugehörigen Kowurzeln der Nullraum, folglich bilden die fraglichen Kowurzeln sogar eine Basis von V^* und $\Phi(A)$ erfüllt die erste Bedingung an eine Basis eines Wurzelsystems. Stellen wir nun $\beta^\vee \in R^\vee$ dar als Linearkombination

$$\beta^\vee = \sum_{\alpha \in \Phi(A)} n_{\alpha\beta} \alpha^\vee$$

so liegen sicher alle $n_{\alpha\beta}$ in $\mathbb{Q}$ und haben sogar alle dasselbe Vorzeichen, da unsere Kowurzel $\beta^\vee$ auf dem Abschluß der Kammer $\bar{A}$ und insbesondere auf den Vektoren der zu $\Phi(A)$ dualen Basis des Vektorraums $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ keine Werte mit verschiedenen Vorzeichen annehmen darf. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß hier alle $n_{\alpha\beta}$ in $\mathbb{Z}$ liegen. Da aber alle Alkoven in $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ konjugiert sind zu A unter W , ist auch jeder Spiegel konjugiert zu einer Wand von A und damit jede Kowurzel zu einer Kowurzel aus $\Phi(A)$, in Formeln $R^\vee = W\Phi(A)$. Die von $\Phi(A)$ in $\langle R^\vee \rangle_{\mathbb{Q}}$ erzeugte Untergruppe $\langle \Phi(A) \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist aber offensichtlich stabil unter W und wir folgern $R^\vee \subset \langle \Phi(A) \rangle_{\mathbb{Z}}$. Unser $\Phi(A)$ ist also tatsächlich eine Basis von $R^\vee$. Wir geben nun der Abbildung 4 in die andere Richtung den Namen C , in Formeln gilt für eine Basis $\Pi^\vee$ von $R^\vee$ also

$$C(\Pi^\vee) = \{\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \quad \forall \alpha^\vee \in \Pi^\vee\}$$

Hier ist $C(\Pi^\vee)$ eine Weylkammer als ein Schnitt von Halbräumen zu Spiegeln, der von keinem Spiegel getroffen wird, und das hinwiederum folgt, da $\Pi^\vee$ eine Basis von $R^\vee$ ist. Wir zeigen schließlich, daß unsere beiden Abbildungen C und Φ zueinander invers sind. Für jede Kammer A folgt aus Satz 1.3.31 über die Begrenzung eines Alkoven durch sein Wände sofort $C(\Phi(A)) = A$. Ist umgekehrt $\Pi^\vee \subset R^\vee$ eine Basis, so sind die bezüglich $\Pi^\vee$ positiven Kowurzeln genau die Kowurzeln, die auf der Kammer $C(\Pi^\vee)$ positive Werte annehmen, und alle Wurzeln aus $\Phi(C(\Pi^\vee))$ sind insbesondere positive Wurzeln für $\Pi^\vee$. Nun ist aber $\Pi^\vee$ offensichtlich die einzige Basis von $R^\vee$, die aus bezüglich $\Pi^\vee$ positiven Kowurzeln besteht. Also haben wir auch $\Phi(C(\Pi^\vee)) = \Pi^\vee$. Damit ist gezeigt, daß die in 3 und 4 angegebenen Abbildungen in der Tat zueinander inverse Bijektionen liefern. Weiter ist offensichtlich, daß wir eine Basis aus ihrem System von positiven Wurzeln zurückgewinnen können durch die in 2 beschriebene Konstruktion. Es ist also klar, daß 1 und 2 zueinander inverse Isomorphismen sind, sobald wir zeigen, daß 1 surjektiv ist, daß also jedes System positiver Wurzeln von einer Basis herkommt. Um das zu zeigen beachten wir:

Lemma 2.2.7. *Ist R ein Wurzelsystem, $\Pi \subset R$ eine Basis von R und $R^+ = R^+(\Pi)$ das zugehörige System positiver Wurzeln, so gilt für alle Wurzeln aus unserer Basis $\alpha \in \Pi$ die Formel*

$$s_\alpha R^+ = (R^+ \setminus \alpha) \cup \{-\alpha\}$$

Beweis. Formal sieht man dies Lemma leicht ein, denn aus der Definition folgt für α eine Wurzel von Π schon $(R^+ + \mathbb{Z}\alpha) \cap R = R^+ \cup \{-\alpha\}$. Anschaulich bedeutet das Lemma, daß das Bild einer Weylkammer unter der Spiegelung an einer ihrer Wände nur durch diesen Spiegel von der ursprünglichen Weylkammer getrennt wird. $\square$

Sei nun P^+ ein System positiver Wurzeln und Π eine Basis von R derart, daß $P^+ \cap R^+(\Pi)$ soviel Elemente hat wie möglich. Wäre $P^+ \neq R^+(\Pi)$, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha \notin P^+$. Aber dann hätte $P^+ \cap R^+(s_\alpha \Pi)$ noch mehr Elemente als $P^+ \cap R^+(\Pi)$, im Widerspruch zur Wahl von Π . Also kommt jedes System positiver Wurzeln in der Tat von einer Basis her und die in 1 und 2 angegebenen Abbildungen liefern zueinander inverse Bijektionen. Wir wählen schließlich ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt auf $\langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$ und betrachten den zugehörigen Isomorphismus $\text{can} : \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^* \rightarrow \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Gehört eine Basis Π von R zum Alkoven $A \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}^*$, so gehört offensichtlich $\Pi^\vee$ zum Alkoven $\text{can}(A) \subset \langle R \rangle_{\mathbb{Q}}$. Damit ist der Satz bewiesen bis auf die Kommutativität des Diagramms, deren Nachweis wir dem Leser überlassen. $\square$

2.2.8. Unsere in 2.2.4 gezeigte Aussage, daß jede Wurzel eines Wurzelsystems zu mindestens einer Basis gehört folgt nun auch mit 2.2.6 aus der Erkenntnis 1.3.32, daß jeder Spiegel Wand von mindestens einer Weylkammer ist.

Korollar 2.2.9. 1. *Gegeben zwei Basen eines Wurzelsystems gibt es genau ein Element der Weylgruppe, das die eine Basis in die andere Basis überführt;*
 2. *Gegeben zwei Systeme positiver Wurzeln eines Wurzelsystems gibt es genau ein Element der Weylgruppe, das das eine System in das andere überführt.*

Beweis. Das folgt aus der eindeutigen Entsprechung zwischen Basen, Systemen positiver Wurzeln und Weylkammern nach 2.2.6, da jede endliche Spiegelungsgruppe nach 1.6.1 frei und transitiv auf der Menge ihrer Weylkammern operiert. $\square$

Definition 2.2.10. Ein Wurzelsystem mit einer ausgezeichneten Basis nennen wir ein **basiertes Wurzelsystem**. In einem basierten Wurzelsystem nennt man die Elemente der Basis **einfache Wurzeln**, die zugehörigen Kowurzeln **einfache Kowurzeln**, die zugehörigen Spiegelungen **einfache Spiegelungen** und die zugehörige Weylkammer die **dominante Weylkammer**.

Ergänzung 2.2.11. Jedes basierte Wurzelsystem besitzt eine kanonische Involution, die gegeben wird durch die Vorschrift $v \mapsto -w_\circ v$ für $w_\circ$ das in Bezug auf die ausgezeichnete Basis längste Element der Weylgruppe nach 1.6.10. Diese Involution macht einfache Wurzeln zu einfachen Wurzeln. Wir nennen sie den **prinzipalen Automorphismus** unseres basierten Wurzelsystems.

2.2.12. Gegeben ein basiertes Wurzelsystem erzeugen die einfachen Spiegelungen die Weylgruppe, jede Spiegelung ist in der Weylgruppe konjugiert zu einer einfachen Spiegelung, und jede Wurzel ist konjugiert unter der Weylgruppe zu einer einfachen Wurzel. Das alles sind Spezialisierungen von Aussagen aus der

allgemeinen Theorie von Spiegelungsgruppen 1.6.1: Jede endliche Spiegelungsgruppe wird von den Spiegelungen an einem festen Alkoven erzeugt und jede ihrer Spiegelungen ist konjugiert zu einer Spiegelung an unserem festen Alkoven.

Definition 2.2.13. Gegeben $R_1 \subset V_1$ und $R_2 \subset V_2$ Wurzelsysteme über demselben Körper erklären wir ihre **Summe** $R_1 \oplus R_2 \subset V_1 \oplus V_2$ als

$$R_1 \oplus R_2 := (R_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times R_2)$$

Die Summe zweier Wurzelsysteme ist natürlich wieder ein Wurzelsystem. Ein Wurzelsystem heißt **unzerlegbar**, falls es weder leer ist noch isomorph zu einer Summe von zwei nichtleeren Wurzelsystemen.

Proposition 2.2.14. Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$ gibt es genau eine Partition $R = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_n$ derart, daß R_i jeweils ein unzerlegbares Wurzelsystem in dem von ihm erzeugten Untervektorraum $V_i \subset V$ ist und daß die Addition einen Isomorphismus $V_1 \oplus \dots \oplus V_n \xrightarrow{\sim} V$ liefert mit

$$R_1 \oplus \dots \oplus R_n \xrightarrow{\sim} R$$

Beweis. Sei $\simeq$ die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge R mit der Eigenschaft $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0 \Rightarrow \alpha \simeq \beta$. Unter dieser Äquivalenzrelation zerlegt man nun R in Äquivalenzklassen $R = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_n$. Der Rest des Beweises bleibt dem Leser überlassen. $\square$

Übungen

Übung 2.2.15. Ist R^+ ein System positiver Wurzeln eines Wurzelsystems und $l : W \rightarrow \mathbb{N}$ die zu den zugehörigen einfachen Spiegelungen gebildete Länge, so stimmt die Länge eines Elements $w \in W$ überein mit der Zahl der positiven Wurzeln, die es zu negativen Wurzeln macht. In Formeln gilt also $l(w) = |w(R^+) \setminus R^+|$. Hinweis: 1.6.1.3.

Übung 2.2.16. Sei $\Pi \subset R \subset V$ ein basiertes Wurzelsystem. Bezeichne $\rho \in V$ die Halbsumme der positiven Wurzeln, in Formeln

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$$

Man zeige mit 2.2.7 für alle einfachen Wurzeln α die Formel $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ und folgere $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ für alle einfachen Wurzeln α . Man zeige weiter, daß $x\rho - \rho$ für alle x aus der Weylgruppe im Wurzelgitter liegt, in Formeln gilt also $x\rho - \rho \in \langle R \rangle \forall x \in W$.

Übung 2.2.17 (Wurzelsysteme der Typen B_n, C_n, D_n). Bezeichne $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{Q}^n$, die in anderen Zusammenhängen meist e_i notiert werden. Man zeige:

Typ C_n : Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\} \setminus \{0\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe.

Typ D_n : Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$ für $n \geq 2$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe. Man bestimme das längste Element der Weylgruppe und zeige, daß der prinzipale Automorphismus 2.2.11 trivial ist für gerades n und nichttrivial für ungerades n . Auflösung in [?] ??.

Typ B_n : Die Menge $R := \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{Q}^n$. Man bestimme eine Basis sowie die Weylgruppe. Auflösung in [?] ??.

Duale Systeme: Man zeige, daß die Wurzelsysteme B_n und C_n zueinander dual sind, wohingegen die Wurzelsysteme A_n und D_n jeweils zu ihren dualen Systemen isomorph sind.

Als Systeme positiver Wurzeln wähle man stets alle Wurzeln, bei denen der erste von Null verschiedene Koeffizient bei der Darstellung durch die angeordnete Basis der ε_i positiv ist. Das Standardskalarprodukt ist in diesen Fällen jeweils invariant unter der Weylgruppe.

2.3 Klassifikation von Wurzelsystemen

2.3.1. Will man diesen Abschnitt vom vorhergehenden unabhängig machen, so reicht es, eine andere unserer äquivalenten Bedingungen zur Definition der Basis eines Wurzelsystems zu machen. Genauer heiße dazu im folgenden eine Teilmenge $\Pi \subset R$ eines Wurzelsystems $R \subset V$ in einem Vektorraum über einem angeordneten Körper eine **Basis**, wenn sie linear unabhängig ist und die Menge $\{v \in V \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Pi\}$ eine Weylkammer von R ist.

Definition 2.3.2. Gegeben ein Wurzelsystem R mit Basis Π definiert man seine **Cartan-Matrix** als die $(\Pi \times \Pi)$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen alias die Abbildung $(\Pi \times \Pi) \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$C(R) = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha, \beta \in \Pi}$$

Diese Matrix hängt, da nach 2.2.8 oder 2.3.1, 1.1.13 je zwei Basen durch genau ein Element der Weylgruppe ineinander überführt werden, im wesentlichen nicht von der Wahl unserer Basis ab.

Ergänzung 2.3.3. Genauer kann man die Menge $\mathcal{B}$ aller Basen des Wurzelsystems R betrachten, dann im Produkt $\mathcal{B} \times R$ die Teilmenge $\mathcal{T}$ aller Paare (Π, α) bestehend aus einer Basis Π und einer Wurzel $\alpha \in \Pi$, und schließlich die Menge

$$\Pi(R) := W \setminus \mathcal{T}$$

der Bahnen der Weylgruppe auf $\mathcal{T}$. Diese Menge $\Pi(R)$ hängt dann von keinerlei Wahlen mehr ab, man mag sie die **universelle Basis** des Wurzelsystems R nennen, und wir können damit die Cartan-Matrix $C(R)$ auffassen als eine von keinerlei Wahlen mehr abhängige $(\Pi(R) \times \Pi(R))$ -Matrix.

2.3.4. Die Cartan-Matrizen zu Wurzelsystemen haben typischerweise nur sehr wenige von Null verschiedene Einträge. Darüber hinaus stehen auf der Diagonalen nur Zweier, außerhalb der Diagonalen sind alle Einträge nichtpositiv, und es gilt

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4$$

sowie $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$. Es ist deshalb möglich, die in der Cartan-Matrix eines Wurzelsystems enthaltene Information sehr übersichtlich graphisch darzustellen durch das sogenannte **Dynkin-Diagramm**, das wie folgt gebildet wird: Man malt zunächst für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ einen dicken Punkt; dann verbindet man je zwei Punkte $\alpha \neq \beta$ durch einen $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)$ -fachen Strich beziehungsweise gar nicht, falls gilt $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = 0$; und schließlich versieht man die 2-fachen und 3-fachen Striche mit einem Pfeil in Richtung der Wurzel α mit $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$, als da heißt in Richtung der kürzeren Wurzel bezüglich eines und damit jedes weylgruppeninvarianten Skalarprodukts.

Lemma 2.3.5. *Ein Wurzelsystem über einem gegebenen Körper wird durch sein Dynkindiagramm eindeutig festgelegt bis auf Isomorphismus.*

Beweis. Man kann ein Wurzelsystem bis auf Isomorphismus aus seinem Dynkindiagramm rekonstruieren wie folgt: Man bildet den freien Vektorraum V über den Knoten des Diagramms, nennt die zu den Knoten gehörigen Vektoren „einfache Wurzeln“, erklärt dann zu jeder einfachen Wurzel α eine „einfache Spiegelung“ mithilfe der in unserem Diagramm enthaltenen Information gewisser ganzer Zahlen $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ auf den einfachen Wurzeln durch

$$s_\alpha : \beta \mapsto \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

und durch lineare Fortsetzung auf ganz V , und erhält das Wurzelsystem zurück als die Vereinigung der Bahnen der einfachen Wurzeln unter der von den einfachen Spiegelungen erzeugten „Weylgruppe“. $\square$

Lemma 2.3.6. *Ein Wurzelsystem ist unzerlegbar genau dann, wenn sein Dynkindiagramm zusammenhängend ist.*

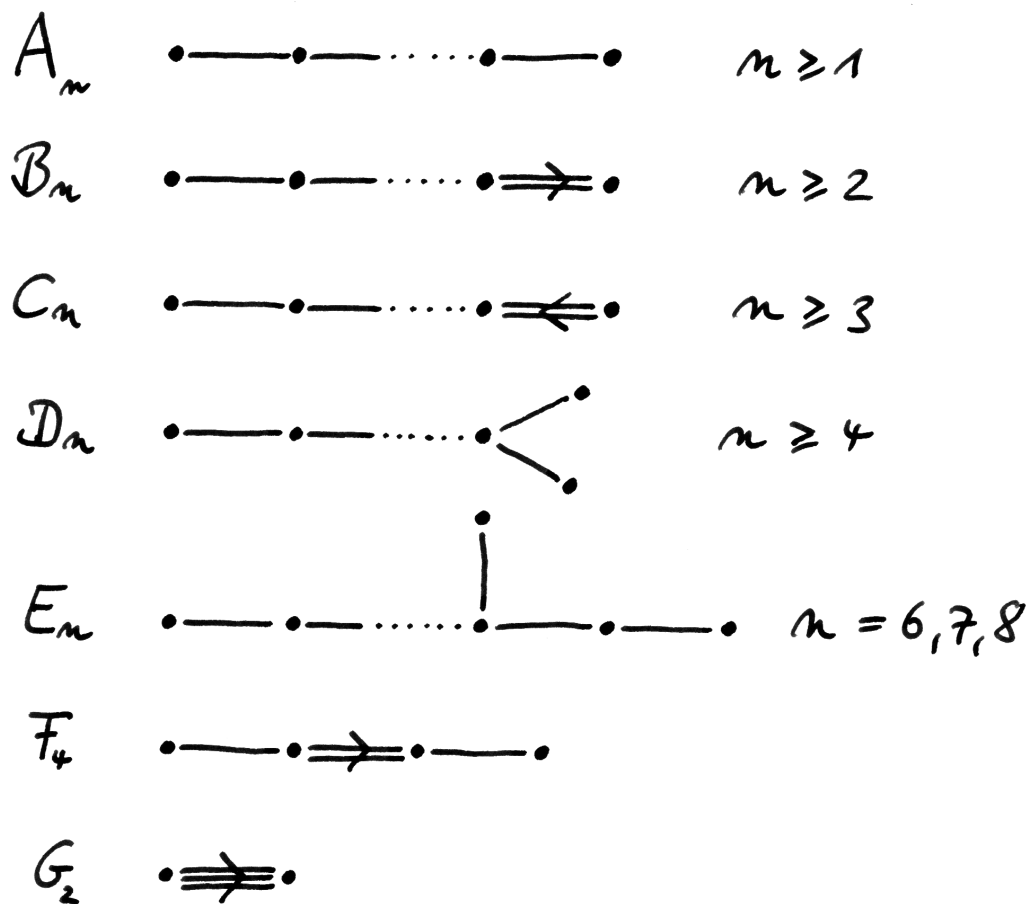
Beweis. Daß jede Zerlegung eines Wurzelsystems eine Zerlegung seines Dynkindiagramms induziert, scheint mir offensichtlich. Zerfällt umgekehrt das Dynkindiagramm eines Wurzelsystems in zwei untereinander unverbundene Teile, so kommutieren alle einfachen Spiegelungen zum einen Teil mit allen einfachen Spiegelungen zum anderen Teil, und wir erhalten erst eine Zerlegung der Weylgruppe in ein Produkt zweier miteinander kommutierender Untergruppen und daraus dann auch eine Zerlegung unseres Wurzelsystems. $\square$

Proposition 2.3.7 (Klassifikation unzerlegbarer Wurzelsysteme). *Das Bilden des Dynkindiagramms liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Unzerlegbare abstrakte} \\ \text{Wurzelsysteme,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Diagramme,} \\ \text{die in nebenstehender Liste} \\ \text{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

2.3.8. Ich verzichte darauf, genauer zu präzisieren, was unter so einem Diagramm genau zu verstehen sein soll, und wann zwei Diagramme als gleich anzusehen sind.

Beweis. Das Dynkin-Diagramm jedes unzerlegbaren Wurzelsystems muß nach 2.3.6 zusammenhängend sein. Weiter muß die Weylgruppe eines Wurzelsystems auf dem $\mathbb{Q}$ -Spann der Wurzeln als endliche Spiegelungsgruppe operieren. Damit landet die Abbildung aus unserer Proposition zumindest in zusammenhängenden Diagrammen. Der zu einem Dynkindiagramm gehörige Coxetergraph entsteht nach 2.1.20 aus dem Dynkindiagramm, indem man Doppelkanten als Kanten der Wertigkeit 4 interpretiert und Dreifachkanten als Kanten der Wertigkeit 6. Ein kurzer Blick auf die Liste nach 1.9.7 zeigt dann, daß nur die Diagramme unserer nebenstehenden Liste als Dynkin-Diagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme in Frage kommen, so daß die Abbildung aus der Proposition wirklich in der angegebenen Menge landet. Ihre Injektivität haben wir bereits als Lemma 2.3.5 gezeigt. Es bleibt, ihre Surjektivität nachzuweisen. Das kann man zeigen, indem man das Argument aus dem Beweis von diesem Lemma umkehrt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir als Grundkörper $\mathbb{R}$ annehmen. Gehen wir von einem der Diagramme unserer Liste aus und bilden dazu den zugehörigen Coxetergraphen, so gehört dazu nach der Klassifikation endlicher Spiegelungsgruppen eine endliche Spiegelungsgruppe W mit einem ausgezeichneten Alkoven, dessen Wände in natürlicher Bijektion zu den Knoten unseres Diagramms stehen. Nun wählen wir zu jeder Wand einen von Null verschiedenen Vektor, der darauf senkrecht steht und in Richtung unseres Alkovens zeigt, und können diese Wahlen so treffen, daß die Längenverhältnisse zwischen unseren Vektoren 1 oder $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ sind je nachdem, wie es unser Dynkindiagramm im Lichte von 2.1.20 vorschreibt. Für die



Dieses Bild zeigt alle Dynkindiagramme unzerlegbarer Wurzelsysteme. Die Zahl n meint wie dort jeweils die Zahl der Knoten.

Gesamtheit Π dieser Vektoren und jede Spiegelung s an einer der Wände unseres Alkoven gilt dann $s\Pi \subset \langle \Pi \rangle_{\mathbb{Z}}$ und es folgt $W\Pi \subset \langle \Pi \rangle_{\mathbb{Z}}$. Damit ist klar, daß $W\Pi$ alle Eigenschaften eines Wurzelsystems erfüllt mit Ausnahme der Letzten: Unklar bleibt, warum auf jeder Ursprungsgerade nicht mehr als zwei Elemente dieser Vereinigung liegen können sollten. Wegen unserer Ganzheitseigenschaften müßte dann jedoch in dieser Vereinigung ein Vektor und sein Doppeltes liegen. Unter unserem invarianten Skalarprodukt ist aber das Längenverhältnis zwischen zwei Elementen von Π , das man ja am Dynkindiagramm ablesen kann, nie Eins zu Zwei, und dieser Widerspruch beendet den Beweis. $\square$

Korollar 2.3.9 (Klassifikation beliebiger Wurzelsysteme). *Das Bilden des Dynkindiagramms liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abstrakte Wurzelsysteme,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Diagramme, deren} \\ \text{Zusammenhangskomponenten} \\ \text{alle in nebenstehender Liste} \\ \text{aufgeführt sind} \end{array} \right\}$$

Beweis. Das folgt leicht aus dem Vorhergehenden. Ich verzichte darauf, genauer zu präzisieren, was auf der rechten Seite mit einer Zusammenhangskomponente eines Diagramms gemeint sein soll und wann zwei Diagramme als gleich anzusehen sind. $\square$

Proposition 2.3.10 (Wurzelwege zu einer positiven Wurzel). *Sei $R \supset R^+ \supset \Pi$ ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und der zugehörigen Basis. Gegeben eine positive Wurzel $\beta \in R^+$ gibt es eine Folge von einfachen Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ derart, daß jede Teilsumme $\alpha_1 + \dots + \alpha_i$ auch eine Wurzel ist.*

2.3.11. Eine feinere Aussage macht die anschließende Proposition 2.3.12. Wir nennen eine Folge von Teilsummen wie in der Proposition, die in jedem Schritt nur um eine einfache Wurzel weitergeht, einen **Wurzelweg** zu unserer positiven Wurzel.

Beweis. Gibt es eine einfache Wurzel $\alpha \neq \beta$ mit $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0$, so ist auch $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ eine positive Wurzel und wir haben gewonnen mit Induktion und unseren Erkenntnissen zu Wurzelketten 2.1.25. Ist β einfach, so ist nichts zu zeigen. Ist sonst β nicht einfach und gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ für alle einfachen Wurzeln, so müßten die einfachen Wurzeln zusammen mit β linear unabhängig sein nach unserem Lemma 1.8.7 über Vektoren mit schwach stumpfen Winkeln. Das aber ist unmöglich. $\square$

Proposition* 2.3.12 (Wurzelwege zwischen positiven Wurzeln). *Gegeben ein Wurzelsystem mit einem System positiver Wurzeln und der zugehörigen Basis $\Pi \subset R^+ \subset R$ und positive Wurzeln $\alpha, \beta \in R^+$ mit $\beta \in \alpha + |R^+ \rangle$ gibt es eine Folge von einfachen Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\beta = \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ derart, daß jede Teilsumme $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_i$ auch eine Wurzel ist.*

Beweis. In der Tat, seien die s_i die Spiegelungen zu den einfachen Wurzeln α_i , die man benötigt, um $\beta - \alpha$ als Summe einfacher Wurzeln zu schreiben. Sie erzeugen eine Untergruppe der Weylgruppe, und da die Kerne der $\alpha_i^\vee$ bereits Wände zu einer Kammer der ganzen Weylgruppe sind, müssen sie erst recht Wände zu einer Kammer dieser von Spiegelungen erzeugten Untergruppe sein. Gibt es ein s_i mit $s_i\beta \in \beta + \mathbb{Z}_{<0}\alpha_i$, so können wir mit unseren Erkenntnissen 2.1.25 zu Wurzelketten und Induktion über n argumentieren. Sonst liegt β im „Abschluß der antidominanten Kammer zu den s_i “, ausgeschrieben also in der Menge $\{\lambda \in \langle R \rangle_{\mathbb{Q}} \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0\}$. Ähnlich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch annehmen, daß α im „Abschluß der dominanten Kammer zu den s_i “ liegt. Dann aber müßten beide Wurzeln im Schnitt dieser Kammerabschlüsse liegen, also von allen s_i festgehalten werden, und das kann nur sein, wenn sie gleich sind. $\square$

Übungen

Übung 2.3.13. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem $R \subset V$ ist V eine irreduzible Darstellung der Weylgruppe, besitzt also außer 0 und V keine unter der Weylgruppe stabilen Teilräume. Hinweis: Gegeben ein invarianter Teilraum gibt es einen invarianten komplementären Teilraum und jede Spiegelung der Weylgruppe hält einen von beiden punktweise fest.

Übung 2.3.14 (Lange und kurze Wurzeln). Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem gibt es unter der Weylgruppe höchstens zwei Bahnen von Wurzeln, und diese sind auch jeweils selbst Wurzelsysteme. Genauer sind in einem unzerlegbaren Wurzelsystem über einem angeordneten Körper je zwei Wurzeln, die unter einem und gleichbedeutend jedem weylgruppeninvarianten Skalarprodukt dieselbe Länge haben, konjugiert unter der Weylgruppe. Des weiteren hängt das Längenverhältnis nicht von der Wahl eines weylgruppeninvarianten Skalarprodukts ab. Hinweis: Man beachte die Irreduzibilität der Standarddarstellung 2.3.13 und unsere Erkenntnisse zu nichtorthogonalen Wurzeln gleicher Länge 2.1.20.

Übung 2.3.15. Ein Wurzelsystem, in dessen Dynkindiagramm keine mehrfachen Striche auftauchen, heißt **einfach geschnürt** oder englisch **simply laced**. Man zeige: Gleichbedeutend ist, daß es ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt gibt, unter dem alle Wurzeln dieselbe Länge haben, und gleichbedeutend ist weiter, daß gilt $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| \leq 1$ für alle Wurzeln α, β mit $\alpha \neq \pm\beta$.

2.4 Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*

2.4.1. Gegeben ein Wurzelsystem in einem Vektorraum über einem Körper der Charakteristik Null nennen wir die von seiner Weylgruppe und den Verschiebungen um Wurzeln erzeugte Gruppe von Affinitäten unseres Vektorraums die **affine Weylgruppe** unseres Wurzelsystems und sprechen von der **endlichen Weylgruppe**, wenn wir besonders betonen wollen, daß nicht diese affine Weylgruppe gemeint ist. Ist $R \subset V$ unser Wurzelsystem, so bezeichnen wir seine affine Weylgruppe mit $\mathcal{W} = \mathcal{W}(R)$. Bezeichnet W die endliche Weylgruppe und $\langle R \rangle \subset V$ das Wurzelgitter, so haben wir demnach eine kurze exakte Sequenz $\langle R \rangle \hookrightarrow \mathcal{W} \twoheadrightarrow W$, wobei die Surjektion jeder affinen Bewegung aus $\mathcal{W}$ ihren linearen Anteil zuordnet.

2.4.2 (**Terminologie bei affinen Weylgruppen**). Diese Terminologie weicht von der in der Literatur üblichen Terminologie ab. Bourbaki etwa definiert die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems $R \subset V$ als diejenige affine Spiegelungsgruppe $W_a(R) \subset \text{Aff}^\times(V^*)$, die wir die affine Spiegelungsgruppe des dualen Wurzelsystems nennen und $\mathcal{W}(R^\vee)$ notieren. Ich will Bourbaki's Konventionen nicht folgen, weil im folgenden bei der Darstellung einer halbeinfachen Gruppe oder Liealgebra mit Wurzelsystem R die Gruppe $\mathcal{W}(R)$ die größere Rolle spielen wird. Ich nenne $\mathcal{W}(R^\vee)$ die **duale affine Weylgruppe von R** .

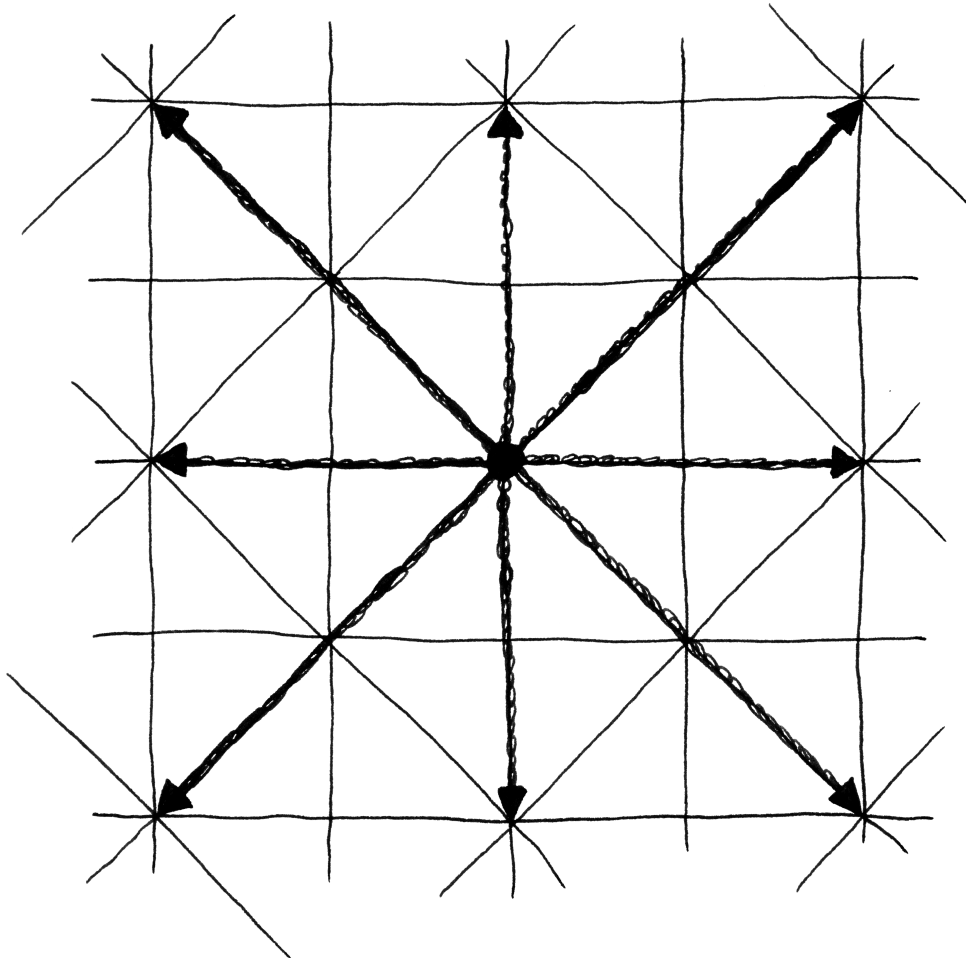
Satz 2.4.3 (Affine Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme). *Das Bilden der affinen Weylgruppe liefert über jedem angeordneten Körper eine Bijektion auf Isomorphieklassen*

$$\{\text{Wurzelsysteme}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{essentielle affine Spiegelungsgruppen}\}$$

2.4.4. Ich breche den Beweis in eine Reihe von Lemmata auf. Genauer zeigen wir in 2.4.5, daß die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems in der Tat eine essentielle affine Spiegelungsgruppe ist, und konstruieren in 2.4.9 und seinem Beweis eine inverse Abbildung. Die Wurzelsysteme selbst wurden bereits in 2.3.7 klassifiziert.

Lemma 2.4.5 (Affine Weylgruppen als affine Spiegelungsgruppen). *Die affine Weylgruppe eines Wurzelsystems R über einem angeordneten Körper ist eine affine Spiegelungsgruppe mit den affinen Ebenen $H_{\alpha,n} := \{v \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle = n\}$ für $\alpha \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$ als Spiegel.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathcal{H} := \{H_{\alpha,n} \mid \alpha \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ von Hyperebenen. Die Spiegelungen $s_{\alpha,n}$ mit Fixpunktmenge $H_{\alpha,n}$ und linearem Anteil s_α stabilisieren $\mathcal{H}$, und da $\mathcal{H}$ auch lokal endlich ist, muß $\mathcal{H}$ nach 1.6.1 gerade die Menge aller Spiegel der von den $s_{\alpha,n}$ erzeugten affinen Spiegelungsgruppe $\mathcal{W}'$ sein. Offensichtlich gilt $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, aber da $s_{\alpha,1}s_{\alpha,0}$ gerade die Verschiebung



Die acht Vektoren eines Wurzelsystems vom Typ B_2 in der Papierebene und die Spiegel seiner affinen Weylgruppe.

$\lambda \mapsto \lambda + \alpha$ um die Wurzel $\alpha \in R$ ist, gilt auch umgekehrt $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ und mithin $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$. $\square$

Definition 2.4.6. Gegeben eine affine Spiegelungsgruppe heißt ein Punkt des zugrundeliegenden affinen Raums ein **spezieller Punkt**, wenn es für jeden Spiegel unserer Gruppe einen parallelen Spiegel unserer Gruppe gibt, die durch besagten Punkt geht.

Beispiel 2.4.7. Die speziellen Punkte der affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems $R \subset V$ über einem angeordneten Körper sind genau die Punkte, an denen alle Kowurzeln ganzzahlige Werte annehmen. Sie heißen die **ganzen Gewichte** unseres Wurzelsystems. Die Menge aller ganzen Gewichte von R notieren wir

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(R \subset V) := \{v \in V \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in R\}$$

Lemma 2.4.8 (Existenz spezieller Punkte). *Für jede affine Spiegelungsgruppe gibt es mindestens einen speziellen Punkt.*

Beweis. Betrachten wir einen Alkoven der Spiegelungsgruppe aller linearen Anteile unserer affinen Spiegelungsgruppe und wählen für jede Wand dieses Alkoven einen darauf senkrechten Vektor, so sind besagte Vektoren linear unabhängig nach 1.8.6. Wählen wir zu jeder Spiegelung an einer dieser Wände ein Urbild in der affinen Spiegelungsgruppe, so haben die zugehörigen Spiegel folglich nichtleeren Schnitt. Wir behaupten, daß jeder Punkt aus diesem Schnitt ein spezieller Punkt ist. In der Tat erzeugen ja unsere Urbilder eine Untergruppe unserer affinen Spiegelungsgruppe, die besagten Punkt festhält und die surjektiv auf die Gruppe aller linearen Anteile unserer affinen Gruppe geht. $\square$

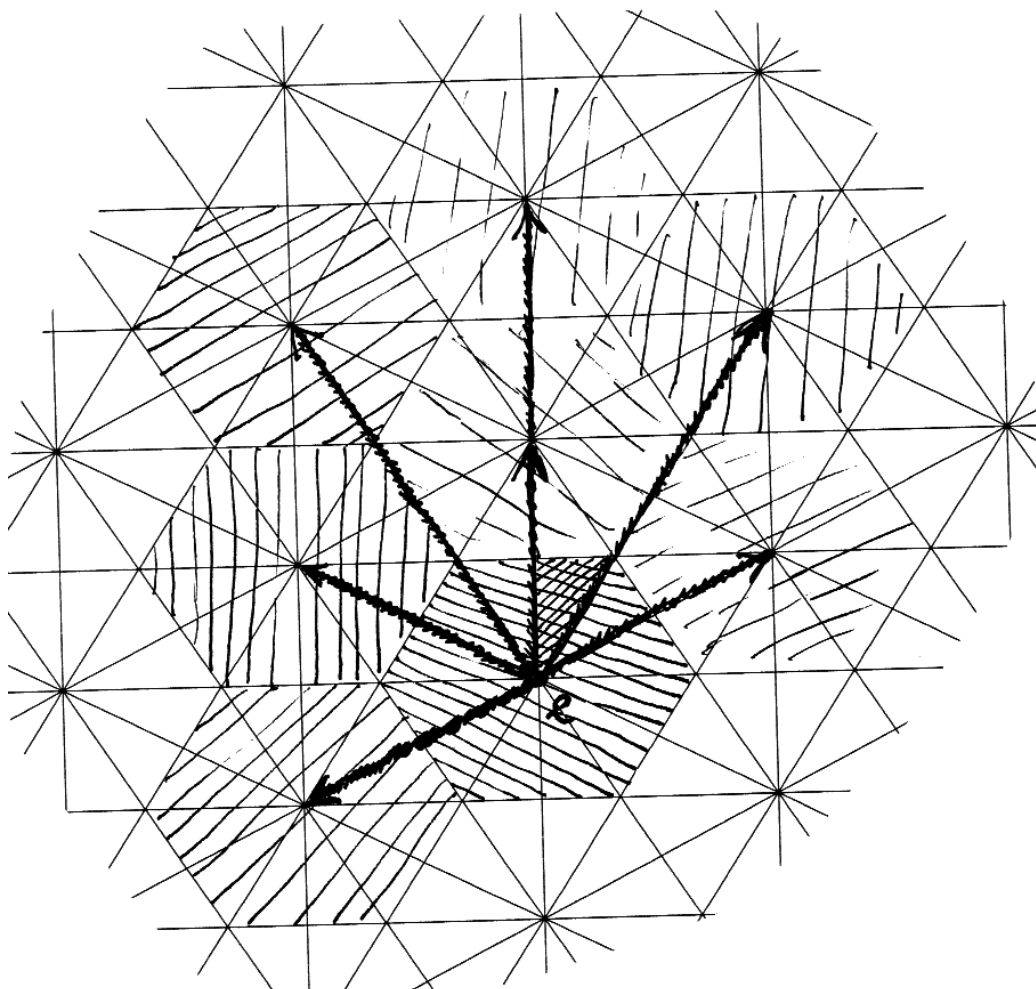
Lemma 2.4.9 (Essentielle affine Spiegelungsgruppen). *Jede essentielle affine Spiegelungsgruppe ist isomorph zur affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems.*

Beweis. Sei (W, E) unsere Spiegelungsgruppe. Wir wählen ein invariantes Skalarprodukt auf dem Richtungsraum. Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller ihrer Spiegel, und jede Parallelenklasse von Spiegeln ist offensichtlich von der Gestalt

$$\{H + nv\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

für einen Spiegel H und einen darauf senkrechten Richtungsvektor v . Die Verschiebung um $\alpha = 2v$ gehört notwendig zu W als die Verknüpfung $s_{H+v} \circ s_H$. Bezeichnet nun R die Menge aller so konstruierten Vektoren α und ist $e \in E$ ein spezieller Punkt und W_e seine Standgruppe, so schränkt die Verknüpfung in unserer Gruppe ein zu einer Bijektion

$$W_e \times \langle R \rangle \xrightarrow{\sim} W$$



Eine affine Spiegelungsgruppe, die genau genommen nicht orthogonal ist für die Standardmetrik der Papierebene. Eingezeichnet ein spezieller Punkt e , doppelt schraffiert ein Alkoven mit e im Abschluß. Das Sechseck darum besteht aus zwölf Alkoven, die die Bahn des doppelt schraffierten Alkoven unter der Standgruppe W_e bilden. Durch Verschieben dieses Sechsecks mit den Vektoren des Wurzelgitters erhalten wir „eine überlappungsfreie Überdeckung der Ebene“. Das illustriert unsere Erkenntnis

$$W_e \times \langle R \rangle \xrightarrow{\sim} W$$

aus dem Beweis von Lemma 2.4.9.

In der Tat liegen nämlich alle Spiegelungen bereits im Bild dieser Abbildung und die Injektivität ist eh klar. Ist W essentiell, so spannt folglich R den Raum der Richtungsvektoren auf. Weiter ist mit e auch $\alpha + e$ ein spezieller Punkt für alle $\alpha \in R$, und das zeigt umgehend, daß R ein Wurzelsystem ist und W seine affine Weylgruppe. $\square$

2.4.10 (Kristallographische endliche Spiegelungsgruppen). Ist eine endliche lineare reelle Spiegelungsgruppe kristallographisch und ist der Ursprung ihr einziger Fixpunkt, so ist sie die Standgruppe des Ursprungs in einer essentiellen affinen Spiegelungsgruppe. In der Tat besitzt jeder Spiegel dann eine Gleichung, die auf dem Gitter nur ganzzahlige Werte annimmt. Alle Parallelen durch Gitterpunkte zu Spiegeln bilden deshalb ein lokal endliches System von Hyperebenen und nach 1.6.1 ist dieses System das System aller Spiegel einer affinen Spiegelungsgruppe, von der man leicht sieht, daß sie essentiell sein muß.

2.4.11 (Klassifikation der affinen reellen Spiegelungsgruppen). Wir haben damit die affinen reellen Spiegelungsgruppen vollständig klassifiziert: Nach 1.12.4 zerfällt jede affine reelle Spiegelungsgruppe in einen endlichen und einen essentiellen Faktor, deren Isomorphieklassen eindeutig bestimmt sind. Nun gibt 1.9.7 im Verbund mit 1.9.5 eine Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen durch ihre Coxeter-Graphen zusammen mit der Dimension ihrer Fixpunktmenge, und 2.4.3 gibt eine Klassifikation der essentiellen affinen Spiegelungsgruppen durch Wurzelsysteme, die hinwiederum nach 2.2.14 eindeutig in unzerlegbare Wurzelsysteme zerfallen. Diese unzerlegbaren Wurzelsysteme schließlich haben wir in 2.3.7 durch ihre Dynkin-Diagramme klassifiziert.

Übungen

Übung 2.4.12. Gegeben ein Wurzelsystem R mit einem System positiver Wurzeln R^+ gibt es für seine affine Weylgruppe genau einen Alkoven, der in der dominanten Kammer enthalten ist und in dessen Abschluß der Ursprung liegt. Er heißt der **fundamentale dominante Alkoven**. Alle Wände der dominanten Weylkammer sind auch Wände des fundamentalen dominanten Alkoven.

2.5 Höchste Wurzel und fundamentaler Alkoven*

Lemma 2.5.1. Seien (V, s) ein Skalarproduktraum und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V aus Vektoren, die paarweise schwach stumpfe Winkel einschließen. Sei A der von den v_ν erzeugte Kegel. So gilt

$$\{w \in V \mid s(v, w) \geq 0 \ \forall v \in A\} \subset A$$

2.5.2 (Geometrie von Wurzeln und Weylkammern). Gegeben $V \supset R \supset R^+$ ein Vektorraum über einem angeordneten Körper mit einem Wurzelsystem und einem System positiver Wurzeln können wir ein weylgruppeninvariantes Skalarprodukt s wählen und die einfachen Wurzeln $\alpha_\nu \in V$ betrachten sowie die Urbilder $v_\nu := 2\alpha_\nu / s(\alpha_\nu, \alpha_\nu)$ ihrer Kowurzeln unter dem zugehörigen Paarmorphismus $\text{paar}_s : V \xrightarrow{\sim} V^*$. In dieser Situation besagt unser Lemma, daß der von den positiven Wurzeln erzeugte Kegel die dominante Weylkammer umfaßt.

Beweis. Wir erklären $w_\nu \in V$ durch $s(w_\nu, v_\mu) = \delta_{\nu\mu}$ und zeigen $w_\nu \in A \ \forall \nu$. Wir beschränken uns auf $\nu = 1$ und schreiben $w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ und müssen zeigen $a_\nu \geq 0$ für alle ν . Als Erstes bemerken wir $a_1 = s(w_1, w_1) > 0$. Bringen wir nun alle Summanden mit $a_i \geq 0$ auf die andere Seite, so ergibt sich

$$w_1 - \sum_{a_i \geq 0} a_i v_i = \sum_{a_j < 0} a_j v_j$$

Das Skalarprodukt der rechten Seite mit der linken Seite ist ≤ 0 , da wie bereits gezeigt gilt $a_1 \geq 0$. Also sind beide Seiten Null. $\square$

2.5.3 (Alkovenabschlüsse endlicher Spiegelungsgruppen). Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über einem angeordneten Körper und eine **endliche Spiegelungsgruppe** $W \subset \text{GL}(V)$ und ein Alkoven $C \subset V$ hat nach 1.7.4 die Bahn Wv jedes Vektors $v \in V$ genau einen Repräsentanten $\hat{v}$ im Abschluß $\bar{C}$ unseres Alkoven. Wählen wir ein W -invariantes Skalarprodukt auf V und Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, die senkrecht auf den Wänden $H_1, \dots, H_r$ von C stehen und jeweils auf derselben Seite von H_i liegen wie C , und bezeichnen mit $K := k_{\geq 0}\alpha_1 + \dots + k_{\geq 0}\alpha_r$ den von den α_i erzeugten Kegel, so kann $\hat{v}$ charakterisiert werden als das einzige Element der Bahn Wv mit

$$(\hat{v} + K) \cap Wv = \{\hat{v}\}$$

In der Tat ist quasi per definitionem das Skalarprodukt von einem Vektor aus $\bar{C}$ mit einem Vektor aus dem Kegel K nie negativ, so daß die Addition eines von Null verschiedenen Vektors w aus diesem Kegel unser $\hat{v}$ länger machen muß und die Summe $\hat{v} + w$ nicht in derselben Bahn liegen kann wie $\hat{v}$. Liegt andererseits v nicht in $\bar{C}$, so wird es durch einen der Spiegel H_i von C getrennt und dann gilt $s_i v \in v + k_{>0}\alpha_i$ und folglich $v \neq s_i v \in v + K$. so erkennen wir zusätzlich, daß $\hat{v}$ auch charakterisiert werden kann als das einzige Element der Bahn Wv mit

$$(\hat{v} + k_{>0}\alpha_i) \cap Wv = \{\hat{v}\} \quad \forall i$$

Definition 2.5.4. Gegeben $V \supset R \supset \Pi$ ein Vektorraum mit einem basierten Wurzelsystem erklären wir eine Teilordnung $\geq$ auf V durch die Vorschrift $\mu \geq \lambda$

wenn gilt $\mu \in \lambda + |\Pi\rangle$ für $|\Pi\rangle$ das von Π erzeugte Untermonoid von V . Es ist üblich, größte Elemente von Teilmengen von V in Bezug auf diese Ordnung als deren **höchste Elemente** zu bezeichnen.

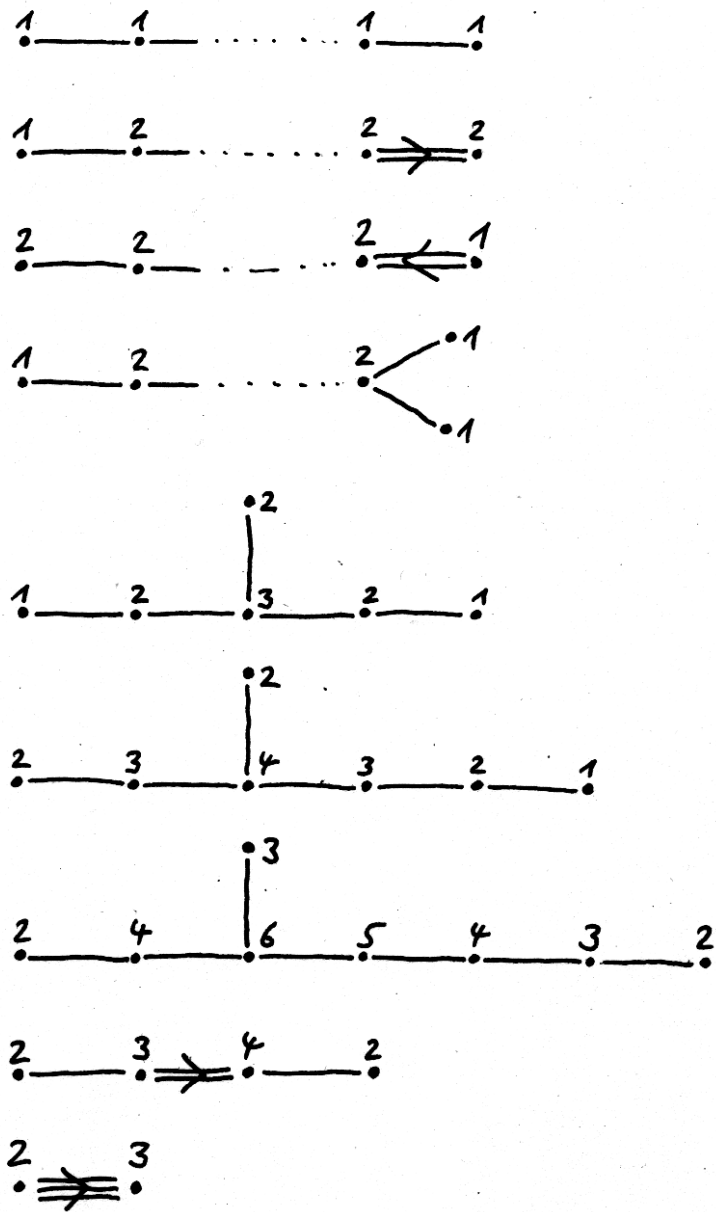
Proposition 2.5.5 (Höchste Elemente ganzer Weylbahnen). *Gegeben $R \supset \Pi$ ein unzerlegbares basiertes Wurzelsystem und $W\lambda \subset \mathfrak{X}$ eine ganze Weylgruppenbahn ist ihr Repräsentant $\hat{\lambda} \in W\lambda \cap \bar{C}$ im Abschluß der dominanten Weylkammer stets das höchste Element von $W\lambda$.*

Beweis. Der eindeutig bestimmte Repräsentant $\hat{\lambda} \in W\lambda \cap \bar{C}$ unserer Bahn im Abschluß der dominanten Weylkammer muß nach unseren Erkenntnissen 2.5.3 über Alkovenabschlüsse endlicher Spiegelungsgruppen maximal sein in Bezug auf die in 2.5.4 erklärte Teilordnung. Für jeden anderen Repräsentanten $\mu \in W\lambda$ gibt es dahingegen einen Spiegel und sogar eine Wand von C , die ihn von C trennt, und damit eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ mit $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle < 0$. Dieser Wert ist dann eine ganze Zahl n mit $s_\alpha(\mu) = \mu + n\alpha$ und zeigt, daß μ nicht maximal sein kann in seiner W -Bahn in Bezug auf die in 2.5.4 erklärte Teilordnung. $\square$

Proposition 2.5.6. *In jedem unzerlegbaren basierten Wurzelsystem $R \supset \Pi$ gibt es eine **höchste Wurzel**. Sie ist die einzige positive Wurzel $\gamma \in R^+$ mit $\gamma + \alpha \notin R$ für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$. Gibt es in unserem System Wurzeln verschiedener Länge, so ist die höchste Wurzel eine lange Wurzel.*

2.5.7 (Kowurzel der höchsten Wurzel). Nach 2.5.5 und dem anschließenden Beweis sind im Fall eines unzerlegbaren basierten Wurzelsystems die höchste Wurzel beziehungsweise die höchste Wurzel und die höchste kurze Wurzel die einzigen Wurzeln im Abschluß der dominanten Weylkammer. Mit 2.1.12 folgt, daß die Kowurzel der höchsten Wurzel im Fall eines einfach geschnürten Systems die höchste Kowurzel ist und sonst die höchste kurze Kowurzel. Die Kowurzel der höchsten kurzen Wurzel dahingegen ist dann die höchste Kowurzel.

Beweis. In jedem basierten Wurzelsystem besitzt nach 2.5.5 jede Weylgruppenbahn von Wurzeln $W\beta \subset R$ ein höchstes Element $\hat{\beta}$. Ist unser Wurzelsystem R unzerlegbar, so gibt es nach 2.3.14 in R entweder nur eine Weylgruppenbahn oder Wurzeln von verschiedener Länge und zwei Weylgruppenbahnen, die Bahn der langen Wurzeln und die Bahn der kurzen Wurzeln. Im letzteren Fall gibt es wieder nach 2.3.14 in R eine **höchste kurze Wurzel** sowie eine höchste lange Wurzel. Ein kurzer Blick auf die möglichen Lagen von Wurzelpaaren 2.1.20 zeigt dann, daß eine kurze Wurzel nie in R maximal sein kann in Bezug auf unsere Teilordnung 2.5.4, so daß die höchste lange Wurzel stets auch die höchste Wurzel überhaupt sein muß. Die alternative Charakterisierung der höchsten Wurzel folgt damit unmittelbar aus unseren Erkenntnissen zu Wurzelketten 2.1.25. $\square$



Die Koeffizienten an jedem Knoten in diesem Bild sind die Koeffizienten der entsprechenden einfachen Wurzel bei einer Darstellung der höchsten Wurzel als Linearkombination der einfachen Wurzeln. Es mag eine gute Übung sein, diese Tafel zu überprüfen.

2.5.8 (**Weiteres zur höchsten kurzen Wurzel**). Sprechen wir im Fall eines einfach geschnürten unzerlegbaren basierten Wurzelsystems von der **höchsten kurzen Wurzel**, so meinen wir schlicht die höchste Wurzel. Diese Konvention erlaubt im folgenden einfachere Formulierungen. Schreiben wir die höchste Wurzel eines unzerlegbaren basierten Wurzelsystems als Summe einfacher Wurzeln, so muß dabei jede einfache Wurzel mit positivem Koeffizienten auftauchen. In der Tat können wir ja nach 2.5.6 sogar von jeder positiven Wurzel durch Addition einfacher Wurzeln zur höchsten Wurzel kommen. Schreiben wir die höchste kurze Wurzel eines unzerlegbaren basierten Wurzelsystems als Summe einfacher Wurzeln, so muß immer noch jede einfache Wurzel mit positivem Koeffizienten auftauchen. Das folgt durch Übergang zum dualen System.

Satz 2.5.9 (Wände des fundamentalen dominanten Alkoven). *Gegeben ein unzerlegbares basiertes Wurzelsystem hat der fundamentale dominante Alkoven seiner affinen Weylgruppe außer den Wänden der dominanten Weylkammer nur noch eine weitere Wand. Sie besteht aus den Punkten, auf denen die höchste Kowurzel den Wert Eins annimmt.*

Beweis. Die Spiegel der affinen Weylgruppe sind ja gerade die Hyperebenen, auf denen eine Kowurzel einen ganzzahligen Wert annimmt. Nehmen an einer Stelle alle einfachen Kowurzeln positive Werte an und die höchste Kowurzel einen Wert kleiner als Eins, so nehmen dort alle Kowurzeln einen Wert zwischen Null und Eins an. Diese Bedingung beschreibt mithin einen Alkoven in der dominanten Weylkammer, und es ist klar, daß der Ursprung in ihrem Abschluß liegt und es sich folglich um den fundamentalen dominanten Alkoven handeln muß. $\square$

2.5.10. Die Bilder auf der Liste nach 1.11.1 zeigen die Coxetergraphen der affinen Weylgruppen aller unzerlegbaren Wurzelsysteme.

Ergänzung 2.5.11. Gegeben eine nichttriviale endliche Spiegelungsgruppe bezeichnet man den Quotienten

$$2(\text{Zahl der Spiegelungen})/(\text{Zahl der Wände eines Alkoven})$$

als die **Coxeterzahl** unserer endlichen Spiegelungsgruppe. Sie ist eine natürliche Zahl, genauer kann sie auch beschrieben als die Ordnung des Produkts aller Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven: Alle derartigen Produkte, in beliebiger Reihenfolge und für beliebige Alkoven, bilden eine Konjugationsklasse, so daß es hier auf Wahlen nicht ankommt.

Ergänzung 2.5.12. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem R erklärt man seine **duale Coxeterzahl** als $\langle \rho, \gamma^\vee \rangle + 1$ für ρ die Halbsumme der Wurzeln aus einem System positiver Wurzeln und γ die höchste Wurzel dieses Systems.

2.5.13 (Klassifikation von Wurzelsystemen nach Vogan). Sei R ein unzerlegbares Wurzelsystem und $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ eine Basis und $\alpha_0 := -\kappa$ das Negative der höchsten kurzen Wurzel κ . So gilt eine Relation der Gestalt

$$\alpha_0 + n_1\alpha_1 + \dots + n_r\alpha_r = 0$$

und alle n_i sind darin nach 2.5.8 positive natürliche Zahlen $n_i \geq 1$ und es gilt $\langle \alpha_0, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ für $1 \leq i \leq r$. Sicher gilt für $0 \leq j \leq r$ die Identität

$$\langle \alpha_0, \alpha_j^\vee \rangle + n_1 \langle \alpha_1, \alpha_j^\vee \rangle + \dots + n_r \langle \alpha_r, \alpha_j^\vee \rangle = 0$$

Nun nehmen wir erst einmal zusätzlich an, unser Wurzelsystem sei einfach geschnürt, also $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| \leq 1$ für alle $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \neq \pm\beta$, und es habe mehr als zwei Wurzeln, also $\alpha_0 \neq -\alpha_i$ für $1 \leq i \leq r$. Es folgt $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \in \{0, -1\}$ falls $i \neq j$. Malen wir dann das sogenannte „erweiterte Dynkindiagramm“, also je einen fetten Punkt alias Knoten für das Negative der höchsten kurzen Wurzel und jede der einfachen Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ und dazwischen jeweils einen Verbindungsstrich falls $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$, und schreiben den Wert n_i an den Knoten α_i und den Wert 1 an den Knoten α_0 , so bedeutet obige Relation in Worten: An jedem Knoten ist die Summe der Werte der Nachbarknoten das Doppelte des Wertes unseres Knotens selber. Malen wir im folgenden der besseren Übersichtlichkeit halber für α_0 einen Stern statt einem fetten Punkt, so können wir leicht sehen, welche Möglichkeiten das läßt. Der geneigte Leser sollte die Argumentation anhand des nebenstehenden Bildes unschwer nachvollziehen können. Als Endresultate bleiben nur die Diagramme $\tilde{A}_n$ für $n \geq 2$ und $\tilde{D}_n$ für $n \geq 4$ sowie $\tilde{E}_n$ für $n = 6, 7, 8$ aus nebenstehendem Diagramm mit jeweils $n + 1$ Knoten und n einfachen Wurzeln. Nun gehen wir noch die Klassifikation der nicht einfach geschnürten unzerlegbaren Systeme an. Wir wissen bereits aus 2.3.14, daß es darin genau zwei Wurzellängen gibt. Mithin gibt es außer Kanten höchstens eine Sorte von mehrfachen Pfeilen. Es ist klar, daß wir bei einem einfach geschnürten Diagramm mit einem Automorphismus der Ordnung Zwei oder Drei landen, wenn wir der Teil unseres Diagramms aus langen Wurzeln je nach dem Längenverhältnis der langen und kurzen Wurzeln durch zwei oder drei disjunkte Kopien ersetzen und unsere mehrfachen bepfeilten Kanten von langen zu kurzen Wurzeln durch je eine einfache Kante von jeder der Kopien. So erhalten wir eine eindeutige Entsprechung zwischen bewerteten erweiterten Dynkindiagrammen mit mehrfachen Pfeilen und einfach geschnürten bewerteten erweiterten Dynkindiagrammen mit einem Automorphismus der Ordnung Zwei oder Drei, bei dem es keine Kanten zwischen verschiedenen Punkten ein- und derselben Bahn gibt und unter dem der ausgezeichnete Punkt fest bleibt. So erhalten wir die zusätzlichen Möglichkeiten, die in nebenstehendem Bild dargestellt sind. Ich habe mir nicht überlegt, ob man

beim Nachweis der Existenz von Wurzelsystemen mit diesen erweiterten Dynkindiagrammen noch Teile der Argumentation weiter vereinfachen kann. Die ihrerseits leicht zu zeigende Proposition 1.10.4 zeigt sofort, daß unsere erweiterten Dynkindiagramme alle durch Vektoren in Skalarprodukträumen realisiert werden können. Dann muß man nur verwenden, daß das Gruppenerzeugnis der einfachen Wurzeln weylgruppenstabil ist und jeweils nur endlich viele Vektoren gegebener Länge enthält, so daß die Weylgruppe selber endlich sein muß.

2.5.14 (Coxetergraphen affiner Spiegelungsgruppen). Wir bestimmen nun die Coxetergraphen der affinen Weylgruppen unserer Wurzelsysteme. Es reicht, das für unzerlegbare Wurzelsysteme zu leisten. Der Weg ist durch 2.5.9 vorgezeichnet. Gegeben ein unzerlegbares Wurzelsystem R mit Basis $\Pi \subset R$ bestimmen wir zunächst die höchste kurze Wurzel $\kappa \in R$. Dann bilden wir die Matrix der $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ mit $\alpha, \beta \in \Pi \sqcup \{-\kappa\}$ und stellen diese Information wie in 2.3.4 in Form eines Diagramms dar, das wir in diesem Fall das **erweiterte Dynkindiagramm** unseres Wurzelsystems nennen. Wir notieren dabei den einzigen zusätzlich möglichen Fall $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -2 = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ durch einen Doppelstrich mit Pfeilen in beide Richtungen. Außerdem schreiben wir an jeden Knoten $\alpha \in \Pi$ seinen Koeffizienten n_α in der Darstellung

$$\kappa = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$$

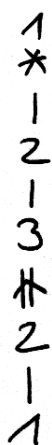
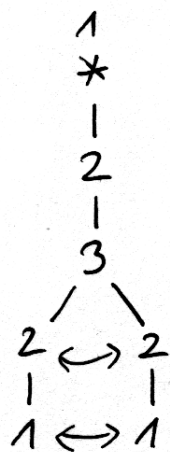
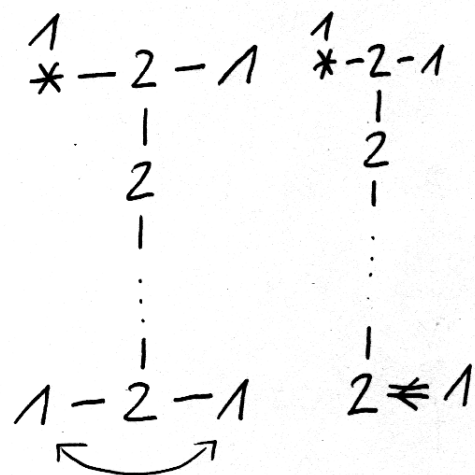
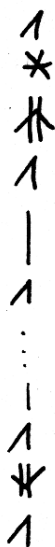
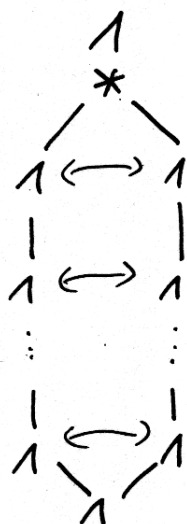
unserer Wurzel κ , so daß nur der zusätzliche Knoten keinen Koeffizienten hat. Die so entstehenden erweiterten Dynkindiagramme sind in nebenstehendem Bild aufgelistet. Die Coxeterdiagramme der affinen Weylgruppen liest man daraus ab, indem man wie bei den normalen Dynkindiagrammen vorgeht und zusätzlich etwaige doppelt bepfeilte Doppelkanten in mit ∞ bezeichnete Kanten umwandelt. Die zugehörigen Cosinusmatrizen haben nach 2.1.20 die Einträge

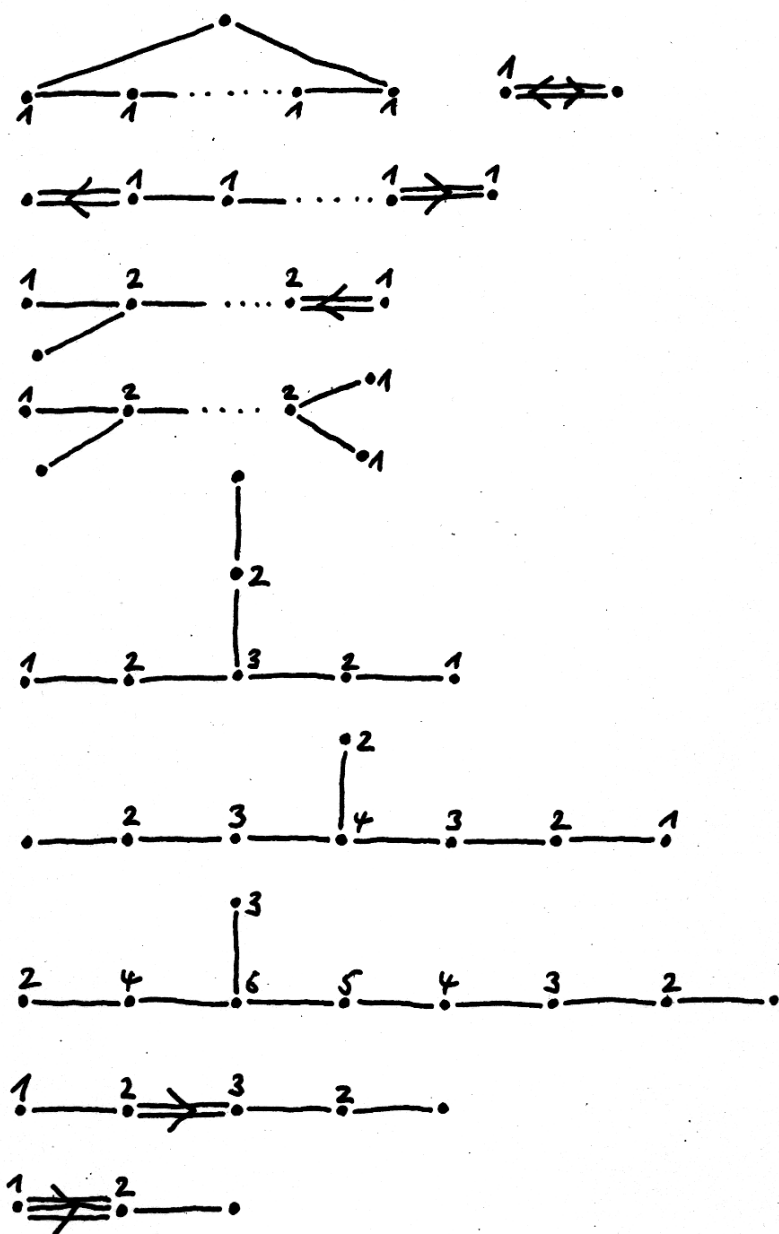
$$\|\alpha\|^{-1} \|\beta\| \langle \alpha, \beta^\vee \rangle / 2$$

und entstehen also aus der „erweiterten Cartanmatrix“ der $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ bis auf den Faktor 2 durch Konjugation mit der Diagonalmatrix der Längen unserer Wurzeln. Natürlich gilt

$$0 = \langle -\kappa, \beta^\vee \rangle + \sum n_\alpha \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$$

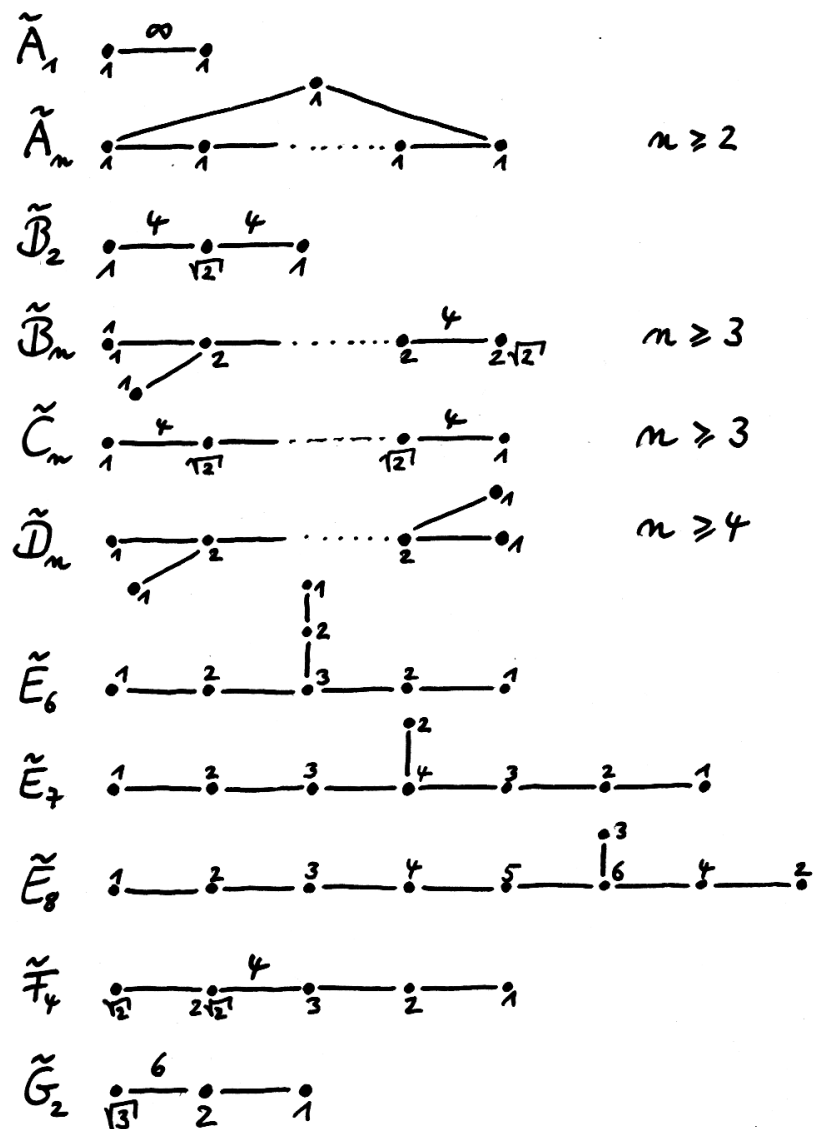
für alle β und wir erhalten so einen von Null verschiedenen Vektor mit nichtnegativen Einträgen im Kern der „erweiterten Cartanmatrix“ und dann durch Multiplikation mit unserer Diagonalmatrix auch einen von Null verschiedenen Vektor mit nichtnegativen Einträgen im Kern der Cosinusmatrix der affinen Weylgruppe. Das ist genau der Vektor, den wir beim Beweis von 1.11.1 haben vom Himmel fallen lassen.





Die erweiterten Dynkindiagramme. Die Koeffizienten an jedem Knoten in diesem Bild sind die Koeffizienten der entsprechenden einfachen Wurzel bei einer Darstellung der Wurzel mit der höchsten Kowurzel als Linearkombination der einfachen Wurzeln. Es mag eine gute Übung sein, diese Tafel zu überprüfen.

Ich schlage die Notation $\hat{Z}$ für das erweiterte Dynkindiagramm zu einem Dynkindiagramm Z vor, da die Notation $\tilde{Z}$ bereits für das dual erweiterte Diagramm vergeben ist.



Eine Liste aller zusammenhängenden Coxetergraphen zu essentiellen reellen affinen Spiegelungsgruppen. Die Notation kommt daher, daß der Graph der dualen affinen Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ Z stets $\tilde{Z}$ notiert wird.

Der Index ist insbesondere jeweils um eins kleiner als die Knotenzahl. Die Zahlen an den Punkten bilden jeweils einen Vektor im Kern der Cosinusmatrix des entsprechenden Coxetergraphen.

Ergänzung 2.5.15 (Terminologisches zu erweiterten Dynkindiagrammen). Der **graphe de Dynkin complété** alias das „vervollständigte Dynkindiagramm“ im Sinne von Bourbaki ist zu unserem erweiterten Dynkindiagramm dual in dem Sinne, daß die Konstruktion unseres erweiterten Dynkindiagramms beschrieben werden kann als die Verkettung „drehe alle Pfeile um, bilde dann das vervollständigte Dynkindiagramm und drehe wieder alle Pfeile um“. Man erhält in anderen Worten das vervollständigte Diagramm, indem man dieselbe Konstruktion mit $\Pi \sqcup \{-\gamma\}$ für γ die höchste Wurzel durchführt, die mit $\Pi \sqcup \{-\kappa\}$ für κ die höchste kurze Wurzel unser erweitertes Dynkindiagramm geliefert hat. Ich nenne es das „vervollständigte Dynkindiagramm“ auch das **dual erweiterte Dynkindiagramm**.

2.5.16. Ein ganzes Gewicht λ eines Wurzelsystems heißt **minuscule**, wenn gilt $0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \leq 1 \ \forall \alpha \in R^+$. Manche Autoren nennen abweichend nur die von Null verschiedenen derartigen Gewichte minuscule. Geometrisch bedeutet unsere Bedingung, daß das Gewicht λ im Abschluß des fundamentalen dominanten Alkoven zur affinen Weylgruppe liegt. Offensichtlich ist jedes minuscule Gewicht λ das kleinste Element seiner Nebenklasse $\lambda + \langle R \rangle$ im Abschluß der dominanten Weylkammer, für die übliche Teilordnung der Gewichte.

2.5.17 (**Irreduzible Darstellungen mit minusculem höchstem Gewicht**). Die Vereinigung der Bilder des Abschlusses des fundamentalen dominanten Alkoven unter der Weylgruppe kann aufgrund der Transitivität der Weylgruppe auf den Weylkammern beschrieben werden als

$$WCl(A^+) = \{\lambda \mid -1 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \leq 1 \ \forall \alpha \in R\}$$

Insbesondere ist diese Menge konvex. Das bedeutet, daß für λ minuscule die konvexe Hülle seiner Weylgruppenbahn $W\lambda$ seine Nebenklasse $\lambda + \langle R \rangle$ genau in $W\lambda$ schneidet, in Formeln $W\lambda = \text{konv}(W\lambda) \cap (\lambda + \langle R \rangle)$. Insbesondere folgt damit für jede einfache Darstellung mit minusculem höchstem Gewicht λ die Beschreibung

$$P(L(\lambda)) = W\lambda$$

der Menge seiner Gewichte. Diese Eigenschaft charakterisiert auch die minuscule Gewichte, denn gibt es eine positive Wurzel $\alpha \in R^+$ mit $r = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 2$, so zeigt die Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2)$, daß auch alle $\lambda, \lambda - \alpha, \dots, \lambda - r\alpha$ Gewichte von $L(\lambda)$ sein müssen, und von diesen gehören nur λ und $\lambda - r\alpha = s_\alpha \lambda$ zu $W\lambda$.

Ergänzung 2.5.18. Eine irreduzible Darstellung einer halbeinfachen Liealgebra heißt **quasiminuscule**, wenn sie nicht minuscule ist, aber alle Gewichte außer dem Nullgewicht eine Bahn unter der Weylgruppe bilden. Offensichtlich ist für jede einfache Liealgebra die einfache Darstellung mit der höchsten kurzen Wurzel als

höchstem Gewicht quasiminuscul. Weiter ist das im Fall einer einfachen Liealgebra auch die einzige quasiminuscul Darstellung. In der Tat müs auf dem höchsten Gewicht jede Kowurzel einen Wert in $\{0, 1\}$ annehmen, es sei denn, unser Gewicht ist selbst eine Wurzel und die fragliche Kowurzel seine Kowurzel.

Übungen

Übung 2.5.19 (Höchste Wurzeln und Kowurzeln). Wir übernehmen die Notationen aus 2.2.17. Man zeige:

Typ B_n : Die höchste Wurzel ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, die höchste Kowurzel die Kowurzel zur Wurzel ε_1 ;

Typ D_n : Die höchste Wurzel ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$;

Typ C_n : Die höchste Wurzel ist $2\varepsilon_1$, die höchste Kowurzel die Kowurzel zur Wurzel $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

3 Coxetergruppen als Spiegelungsgruppen

3.1 Spiegelungsgruppen zu Coxetermatrizen

3.1.1. Gegeben eine endliche Menge S verstehen wir wie in 1.9.2 unter einer **Coxetermatrix mit durch S indizierten Zeilen und Spalten** eine Abbildung $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ mit $m(s, t) = m(t, s) \forall s, t \in S$ und $m(s, s) = 1 \forall s \in S$ und $m(s, t) \geq 2$ falls $s \neq t$.

3.1.2. Für eine endliche Menge S und eine symmetrische $(S \times S)$ -Matrix $m : S \times S \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$ bilden wir den freien Vektorraum $V := \mathbb{R}S$ über S mit seiner kanonischen Basis $(e_s)_{s \in S}$ und erklären darauf eine symmetrische Bilinearform $(\ , \)$ durch die Vorschrift $(e_s, e_t) := -\cos(\pi/m(s, t))$ mit der Konvention $\pi/\infty = 0$. Die Fundamentalmatrix unserer Bilinearform in Bezug auf die kanonische Basis ist also die Cosinusmatrix zu unserer Coxetermatrix. Wegen $m(s, s) = 1 \neq 2$ können wir weiter in $GL(V)$ die lineare Abbildung mit Fixpunktmenge $\{v \in V \mid (e_s, v) = 0\}$ und (-1) -Eigenraum $\mathbb{R}e_s$ betrachten. Diese lineare Abbildung notieren wir $\hat{s}$ oder s und nennen sie die **einfache Spiegelung zum Index $s \in S$** oder kürzer die **einfache Spiegelung $s \in S$** . Die von den einfachen Spiegelungen erzeugte Untergruppe

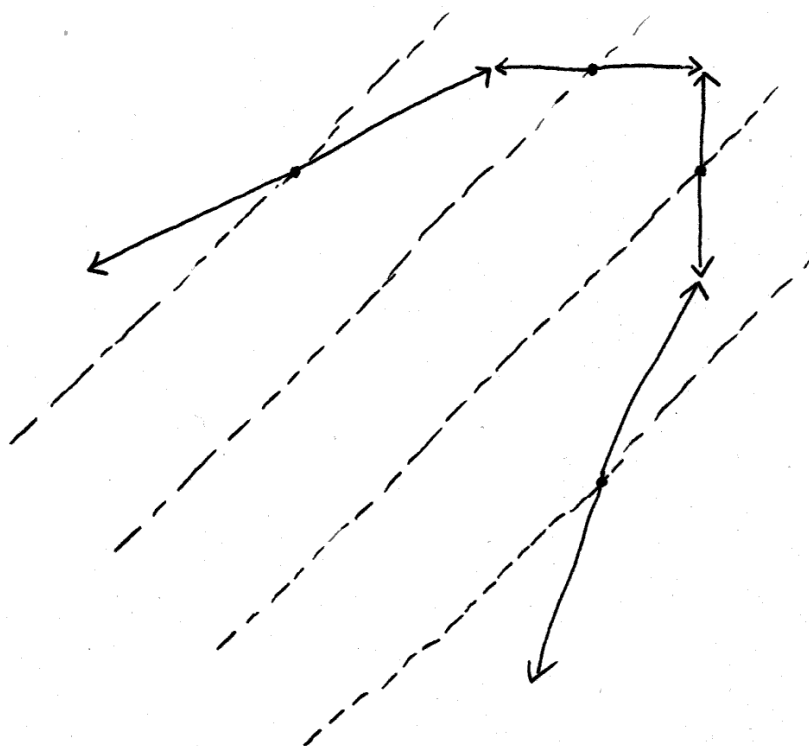
$$W \subset GL(V)$$

nenne ich die **Spiegelungsgruppe zur Coxetermatrix m** . Die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W erklären wir als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt einfacher Spiegelungen. Dann gilt sicher $\det w = (-1)^{l(w)}$ und folglich $l(w) \neq l(ws)$ für jede einfache Spiegelung s . Eine kürzestmögliche Darstellung eines Elements $w \in W$ als Produkt einfacher Spiegelungen heißt eine **reduzierte Darstellung** von w .

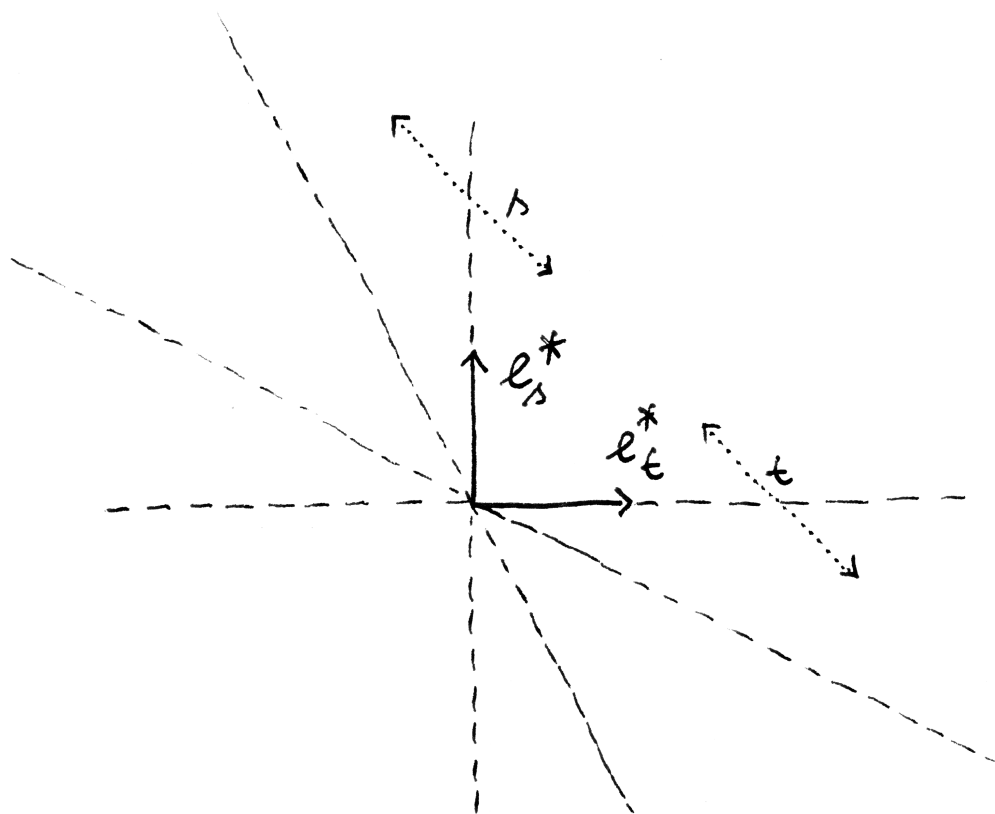
3.1.3. Ich schlage für die so entstehende Darstellung unserer Spiegelungsgruppe W die Bezeichnung als **wurzlige Darstellung** vor, da in ihr alle einfachen Spiegelungen verschiedene (-1) -Eigenräume haben und da diese (-1) -Eigenräume im Fall der Weylgruppe eines Wurzelsystems gerade die durch die Wurzeln erzeugten Geraden sind.

3.1.4. Gegeben eine Coxetermatrix betrachten wir zu ihrer Spiegelungsgruppe $W \subset GL(V)$ auch die kontragrediente Operation von W auf dem Dualraum V^* , für die ich die Bezeichnung als **alkovische Darstellung** vorschlage. In V^* ist die Fixpunktmenge einer erzeugenden Spiegelung s die Hyperebene H_s aller Linearformen, die auf e_s verschwinden, und s vertauscht beide Halbräume zu dieser Hyperebene. Negativ gemacht wird jede lineare Gleichung der Fixpunktmenge von s in der wurzligen Darstellung. Gemeinsame Verallgemeinerungen dieser beiden

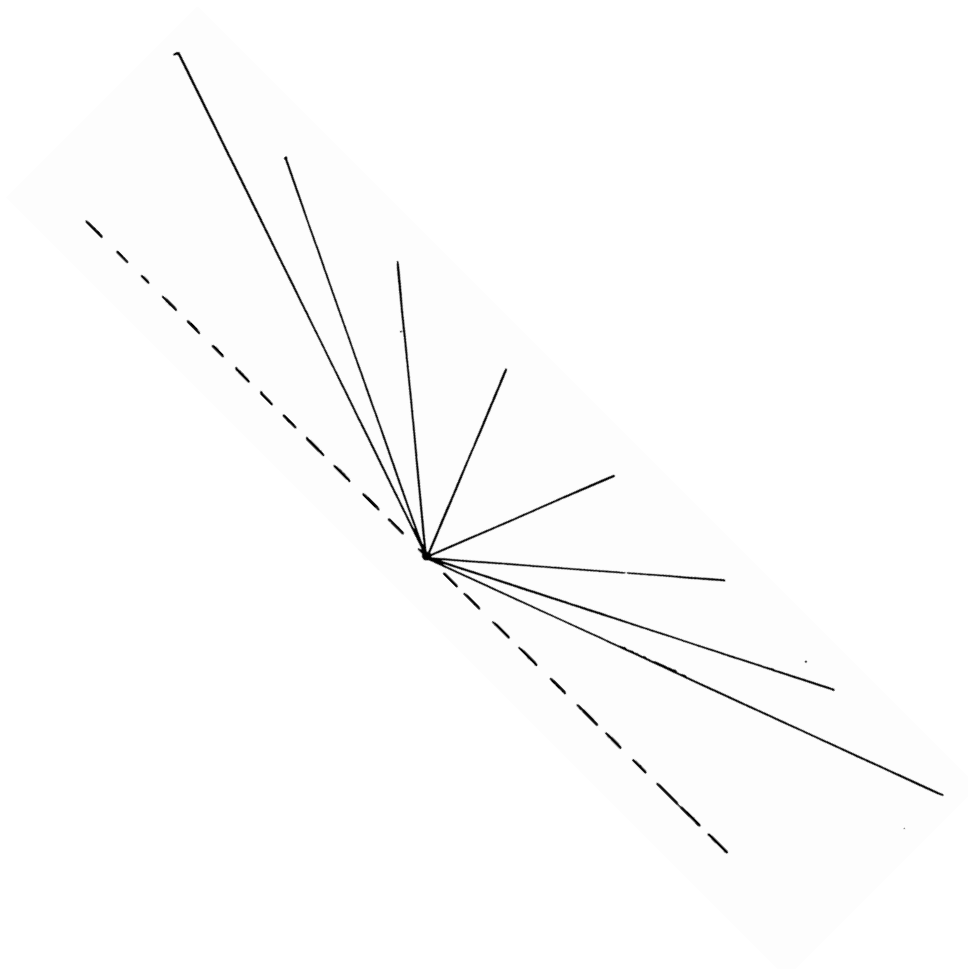
96



Die wurzliche Darstellung der Diedergruppe im Sinne von 3.2.9 anzureichert. Wir denken uns dazu dort einen zusätzlichen Basisvektor δ , der senkrecht auch der Papierebene kommt, indem wir in der dortigen Notation zum Beispiel $\langle \delta, e_t^\vee \rangle = \langle \delta, e_t^\vee \rangle = 1$ setzen. Auf der affinen Ebene $\delta + \mathbb{R} e_s + \mathbb{R} e_t$ operiert unsere Coxetergruppe in der Weise, daß die Spiegel paarweise parallele Geraden sind, ihre Eigenvektoren aber „nach außen zu immer steiler werden“, wie in obigem Bild angedeutet.



Die alkovische Darstellung im Fall der unendlichen Diedergruppe. Eingezeichnet sind die Vektoren der dualen Basis und die Fixpunkt Mengen der „Spiegelungen“ s, t, sts und tst als gestrichelte Geraden. Die Wirkung von s und t ist durch gepunktete Doppelpfeile angedeutet, die jeweils Paare von Punkten verbinden, die vertauscht werden. Vereinigen wir den abgeschlossenen positiven Quadranten mit allen seinen Bildern unter der W -Operation, so erhalten wir die offene Halbebene $\{a e_s^* + b e_t^* \mid a + b > 0\}$ vereinigt mit dem Ursprung. Zeichnen wir alle Spiegel ein, so entsteht in dieser offenen Halbebene eine Art „geöffnetes Buch von der Seite betrachtet“, aber natürlich mit unendlich vielen Blättern.



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit zwei Indizes s, t und Einträgen $m(s, t) = \infty$ in einer anderen Basis, in der der fundamentale Alkoven etwas spitzer aussieht und dafür mehr Alkoven einigermaßen übersichtlich eingezeichnet werden können als im vorhergehenden Bild. Die Vereinigung aller Alkoven alias der Titskegel ist eine offene Halbebene vereinigt mit dem Ursprung. Es entsteht so eine Art „geöffnetes Buch mit unendlich vielen Blättern“. Jede Parallele zur gestrichelt eingezeichneten Achse ist stabil unter unserer Spiegelungsgruppe, und mit Ausnahme der gestrichelt eingezeichneten Achse selber operiert unsere Spiegelungsgruppe dort als eine affine Spiegelungsgruppe im Sinne von 1.5.2.

Typen von Darstellungen, die insbesondere in der Darstellungstheorie der sogenannten „Kac-Moody-Algebren“ von Bedeutung sind, diskutieren wir in 3.2.9.

Beispiel 3.1.5. Im Fall $S := \{s, t\}$ zwei erzeugender einfacher Spiegelungen mit $m(s, t) := \infty$ nennen wir die zugehörige Spiegelungsgruppe die **unendliche Diedergruppe**. Ihre alkovische Darstellung heißt das „geöffnete Buch“.

Beispiel 3.1.6. Im Fall der affinen Spiegelungsgruppe (W, E) zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem ist die alkovische Darstellung der Spiegelungsgruppe zu ihrer Coxetermatrix isomorph zur Linearisierung $V := \text{Lin}(E)$ des affinen Raums E im Sinne von [EL] 1.4.23 mit der offensichtlichen Fortsetzung der Operation von W durch Affinitäten von E zu einer Operation durch Vektorraumautomorphismen von V .

Beispiel 3.1.7. Eine allgemeine affine Spiegelungsgruppe können wir aus der alkovischen Darstellung der Spiegelungsgruppe ihrer Coxetermatrix zurückgewinnen, indem wir darin den affinen Teilraum betrachten, der nur aus Linearformen besteht, die auf dem Radikal unserer Bilinearform $(\ , \)$ zu einer geeignet vorgegebenen festen Linearform einschränken. Im Fall einer affinen Spiegelungsgruppe (W, E) zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem reicht es zu fordern, daß diese feste Linearform nicht Null sein soll. Im allgemeinen muß das „für jeden unzerlegbaren essentiellen affinen Summanden“ gefordert werden.

Beispiel 3.1.8 (Modulare Gruppe in hyperbolischer Spiegelungsgruppe). Hat unsere Bilinearform alias Cosinusmatrix im Sinne von [LA2] 2.3.24 den Typ $(n, 1, 0)$, so gilt dasselbe für die auf der alkovischen Darstellung induzierte Bilinearform. Die Vektoren, die darunter mit sich selbst zu (-1) paaren, bilden dann in der in [?] ?? erklärten Weise eine riemannsche Mannigfaltigkeit, den n -dimensionalen hyperbolischen Raum, und unsere Spiegelungen operieren dort als „hyperbolische Spiegelungen“. Im Spezialfall der hyperbolischen Ebene alias oberen Halbebene $\mathbb{H}$ aus [EL] 2.3.7 operiert die von der „modularen Gruppe“ und der Spiegelung $\tau\gamma$ an der imaginären Achse erzeugt Gruppe $\text{SL}(2; \mathbb{Z})\langle\tau\gamma\rangle$ als hyperbolische Spiegelungsgruppe auf der hyperbolischen Ebene. Der zugehörige Coxetergraph hat drei Punkte in einer Reihe, der erste verbunden mit dem zweiten durch eine ∞ -Kante, der zweite mit dem dritten durch eine 3-Kante alias eine Kante ohne Zahl.

Satz 3.1.9 (Geometrie der alkovischen Darstellung). *In der alkovischen Darstellung V^* der Spiegelungsgruppe W zu einer Coxetermatrix mit Indexmenge S betrachten wir die Halbräume $H_s^+ := \{p \in V^* \mid \langle p, e_s \rangle > 0\}$ und den Alkoven $A^+ := \bigcap_{s \in S} H_s^+$. So gilt:*

1. *Die Bilder wA^+ des Alkoven A^+ unter Elementen unserer Spiegelungsgruppe $w \in W$ sind paarweise disjunkt. Wir nennen sie die **Alkoven** unserer alkovischen Darstellung;*

2. Die Vereinigung $C := \bigcup_{w \in W} w\bar{A}^+$ der Bilder des Abschlusses von A^+ ist eine konvexe und unter der Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren stabile Teilmenge von V^* , der sogenannte **Tits-Kegel**;
3. Die Elemente unserer Spiegelungsgruppe W , die auf der alkovischen Darstellung als Spiegelungen operieren, haben paarweise verschiedene Spiegel, und die Menge aller dieser Spiegel ist die Menge von Hyperebenen $\mathcal{H} := \{wH_s \mid w \in W, s \in S\}$;
4. Die Alkoven wA^+ sind die maximalen konvexen Teilmengen des Komplements $C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ der Vereinigung aller Spiegel im Titskegel;
5. Für alle einfachen Spiegelungen $s \in S$ und alle $w \in W$ gilt die Äquivalenz $l(ws) > l(w) \Leftrightarrow wH_s^+ \supset A^+$.

Beispiel 3.1.10. Im Fall 3.1.5 der unendlichen Diedergruppe ist der Titskegel eine offene Halbebene vereinigt mit dem Ursprung. Im Fall 3.1.6 der Linearisierung einer affinen Spiegelungsgruppe zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem ist der Titskegel ein offener Halbraum vereinigt mit dem Ursprung.

Beweis. 5. Wir argumentieren wie beim Beweis von 1.9.10. Kennen wir die Implikation $\Rightarrow$, so erhalten wir automatisch $l(ws) < l(w) \Rightarrow wH_s^+ \cap A^+ = \emptyset$ und damit die Äquivalenz. Die Implikation $\Rightarrow$ zeigen wir durch Induktion über $l(w)$ gleichzeitig für alle s . Der Fall $l(w) = 0$ ist offensichtlich. Gilt $l(w) > 0$, so finden wir natürlich $t \in S$ mit $l(wt) < l(w)$ und haben notwendig $t \neq s$. Indem wir so lange s oder t von rechts an w dranmultiplizieren, wie wir die Länge damit kleiner kriegen, finden wir eine Darstellung $w = vu$ mit $u \in \langle s, t \rangle$, $l(vs) > l(v)$, $l(vt) > l(v)$ und $l(w) = l(v) + l(u)$. Mit Induktionsannahme erhalten wir $vH_s^+ \supset A^+$ und $vH_t^+ \supset A^+$ alias $H_s^+ \cap H_t^+ \supset v^{-1}A^+$. Andererseits folgt aus unseren Annahmen auch $l(us) > l(u)$. Falls nun gilt $u \neq w$, so können wir die Induktionsannahme auf u anwenden und erhalten $uH_s^+ \supset A^+$. Wegen $H_s^+ \cap H_t^+ = (H_s \cap H_t) + A^+$ und $(H_s \cap H_t) \subset uH_s$ folgt dann

$$uH_s^+ \supset H_s^+ \cap H_t^+$$

und zusammen in der Tat $uH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset v^{-1}A^+$ alias $wH_s^+ \supset A^+$. Es bleibt nur noch, den Fall $u = w$ zu behandeln, so daß wir haben $w = tsts \dots t$ oder $w = sts \dots t$ mit jeweils $l(w)$ Faktoren und $l(w) < l(ws)$ und folglich $l(w) < \text{ord}(st)$. In dem Fall aber zeigt explizite Inspektion bereits $wH_s^+ \supset (H_s^+ \cap H_t^+) \supset A^+$. Damit ist unsere Behauptung $l(ws) > l(w) \Leftrightarrow wH_s^+ \supset A^+$ gezeigt. Anschaulich gesprochen wissen wir per Induktion, daß alle Spiegel xH_r mit $l(x) < l(w)$ und r einer einfachen Spiegelung unser A^+ nicht treffen. Es muß aber im Fall $w \neq 1$ notwendig eine von s verschiedene einfache Spiegelung t

geben mit $wt < w$. Die beiden Spiegelungen s, t erzeugen eine Diedergruppe und die zugehörigen Spiegel schneiden unseren Raum auf in eine Art Kuchenstücke. Per Induktion wissen wir, daß A^+ sogar ganz in so einem mit w verschobenen Kuchenstück liegen muß, und dann liefern die Annahmen und etwas Sorgfalt weiter, daß dieses Kuchenstück selbst hinwiederum in der Halbebene wH_s^+ enthalten sein muß.

1. Die Ebenen wH_s für $w \in W$ und $s \in S$ bilden ein W -stabiles System von Hyperebenen $\mathcal{H}$ in V^* , und Teil 5 zeigt insbesondere, daß keine dieser Hyperebenen unser A^+ trifft. Insbesondere ist A^+ eine maximale konvexe Teilmenge im Komplement der Vereinigung aller Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Je zwei verschiedene derartige maximale konvexe Teilmengen sind disjunkt nach 1.3.39 und mit A^+ ist auch wA^+ solch eine maximale konvexe Teilmenge für alle $w \in W$. Schließlich folgt aus $wA^+ = A^+$ mit unserer Behauptung sofort $l(ws) > l(w)$ für alle $s \in S$ alias $w = \text{id}$. Mithin sind die wA^+ mit $w \in W$ paarweise disjunkt.

2. Induktion über die Länge von $w \in W$ zeigt unmittelbar, daß für $p \in A^+$ und $q \in wA^+$ das Segment $[p, q]$ genau $l(w)$ Hyperebenen aus $\mathcal{H}$ trifft und ganz in C verläuft und nur Alkovenabschlüsse $x\bar{A}^+$ mit $l(x) \leq l(w)$ trifft. Wenn wir nun $\bar{p} \in \bar{A}^+$ und $\bar{q} \in w\bar{A}^+$ nehmen, so muß folglich das Segment $[\bar{p}, \bar{q}]$ in der Vereinigung der $x\bar{A}^+$ mit $l(x) \leq l(w)$ enthalten sein.

3. Der Titskegel C kann nie ganz in einem abgeschlossenen Halbraum zu einem Spiegel H einer Spiegelung aus W liegen. Dann aber finden wir auch Punkte aus dem Inneren von Alkoven auf beiden Seiten unseres Spiegels H , sagen wir Punkte aus den Alkoven A und B . Wir können sie verbinden durch eine endliche Folge von Alkoven $A = A_0, A_1, \dots, A_r = B$, die sich jeweils längs einer Wand berühren. Ist H keine dieser Wände, so muß H einen dieser Alkoven treffen, der dann unter der entsprechenden Spiegelung auf sich selber ginge: Widerspruch!

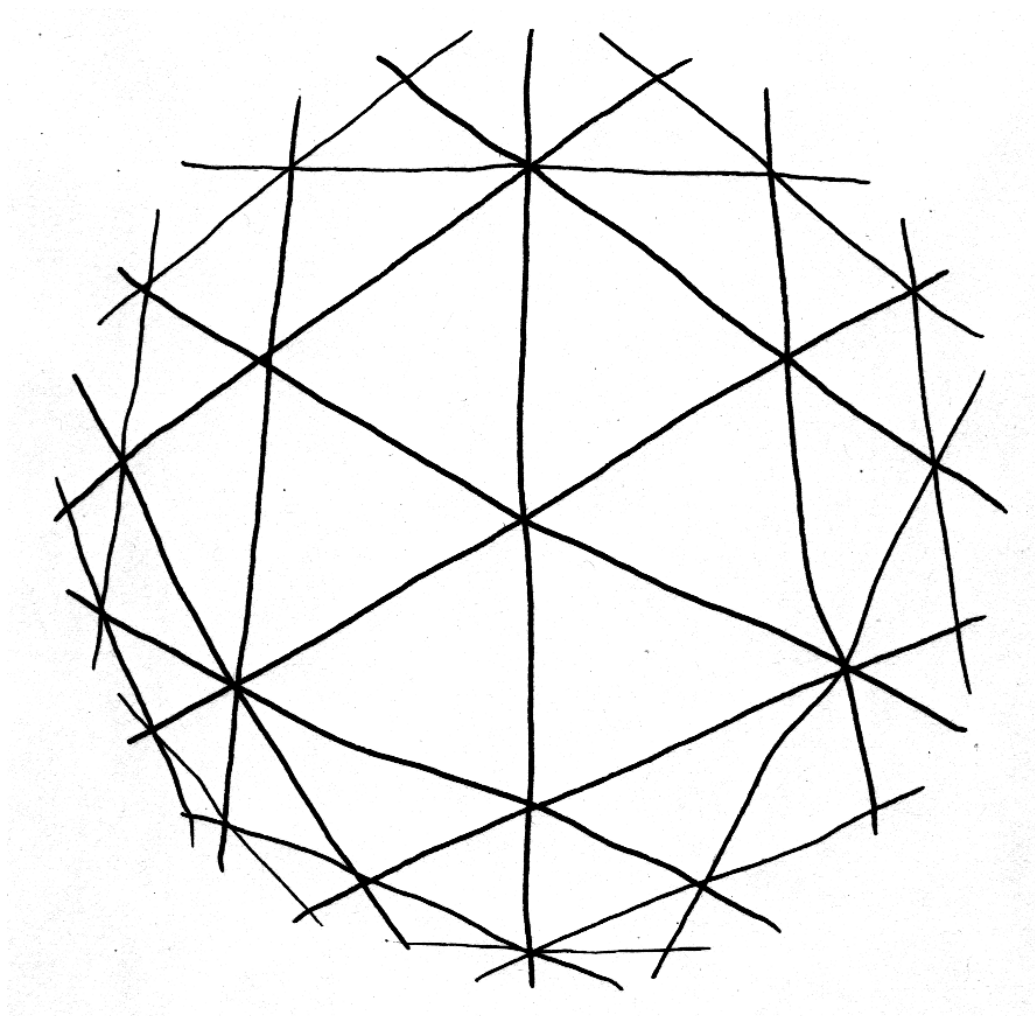
4. Beim Beweis von Teil 1 wurde bereits gezeigt, daß die wA^+ maximale konvexe Teilmengen im Komplement $V^* \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ der Vereinigung aller Spiegel sind. Daß sie genau die maximalen konvexen Teilmengen von $C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ sind, ist damit auch klar. $\square$

3.1.11 (Trennende Spiegel und Austauschlemma). Auch für die Spiegelungsgruppe einer beliebigen Coxetermatrix gilt

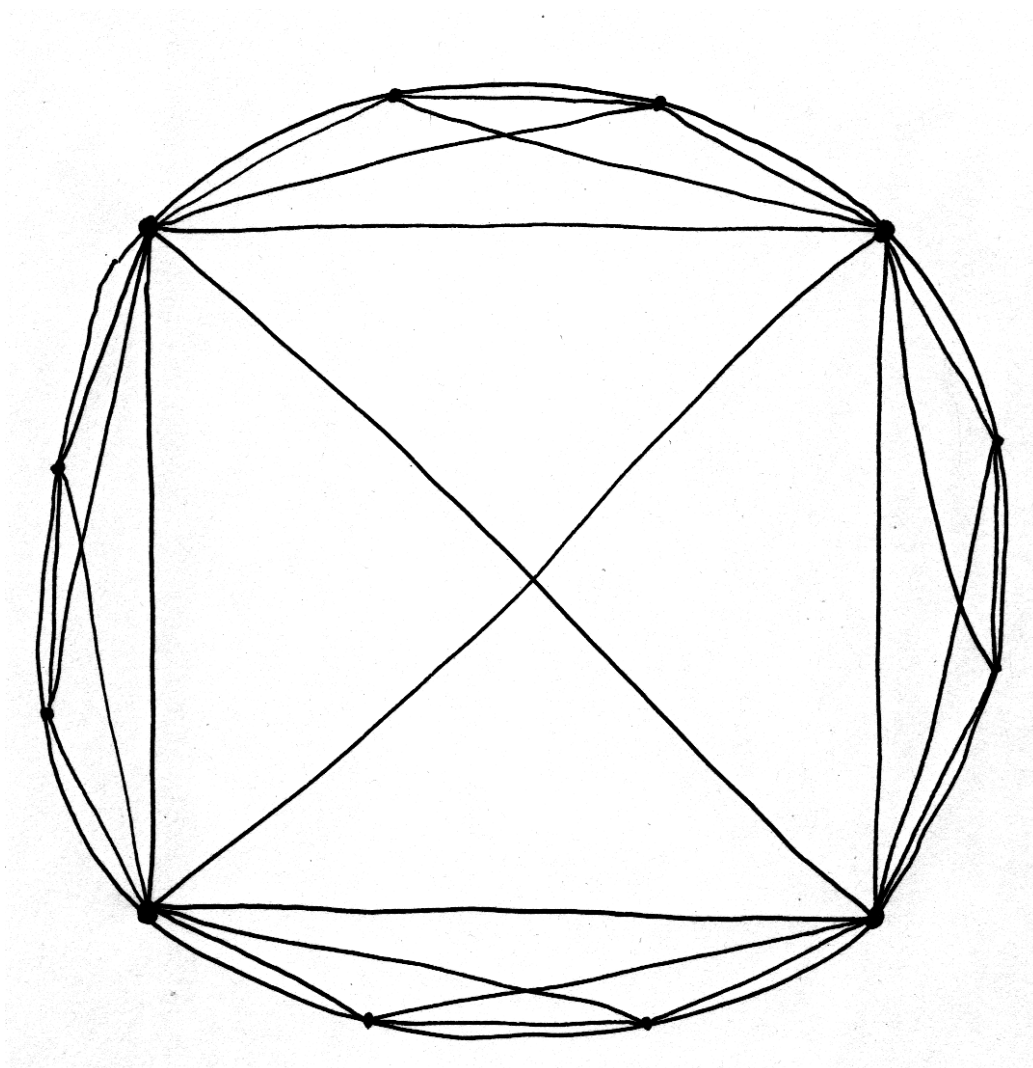
$$d(A^+, wA^+) = l(w)$$

für $d(A, B)$ die Zahl der Hyperebenen aus $\mathcal{H}$, die gegebene Alkoven A und B trennen, wie wir bereits beim Beweis von Teil 2 aus 3.1.9 bemerkt hatten. Auch in dieser Allgemeinheit gilt für Alkoven A, B und einen Spiegel $L \in \mathcal{H}$ die Äquivalenz

$$(L \text{ trennt } A \text{ und } B) \Leftrightarrow d(A, s_L B) < d(A, B)$$



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit drei Indizes r, s, t und Einträgen $m(r, s) = m(s, t) = 3$ und $m(r, t) = 4$. Genauer haben wir hier den Schnitt des Titskegels mit einer affinen Ebene H im dreidimensionalen Raum mit der Basis e_r^*, e_s^*, e_t^* eingezeichnet. Die Schnitte der Koordinatenebenen mit unserer affinen Ebene sind die drei Wände eines festen Dreiecks. Die Alkoven schneiden unsere Ebene H in den offenen Dreiecksflächen, von denen es unendlich viele gibt, die ich nicht alle einzeichnen konnte. Der Titskegel selbst schneidet in diesem Fall unsere affine Ebene H in einer offenen Kreisscheibe.



Die alkovische Darstellung zur Coxetermatrix mit drei Indizes r, s, t und Einträgen $m(r, s) = m(s, t) = \infty$ und $m(r, t) = 2$. Genauer haben wir hier den Schnitt des Titskegels mit einer affinen Ebene H im dreidimensionalen Raum mit der Basis e_r^*, e_s^*, e_t^* eingezeichnet. Die Schnitte der Koordinatenebenen mit unserer affinen Ebene sind die drei Wände eines festen Dreiecks. Die Alkoven schneiden unsere Ebene H in den offenen Dreiecksflächen, von denen es unendlich viele gibt, die ich nicht alle einzeichnen konnte. Der Titskegel selbst schneidet in diesem Fall unsere affine Ebene H in einer Kreisscheibe mit zusätzlichen Punkten auf dem Rand. In unserem Fall handelt es sich dabei genau um die Punkte $\exp(2\pi i(\frac{1}{8} + \frac{1}{4 \cdot 3^n}))$ mit $n \in \mathbb{N}$. Um jeden dieser Punkte „sieht unser Bild aus wie ein geöffnetes Buch mit unendlich vielen Seiten“.

mit demselben Beweis wie 1.6.7. Auch in dieser Allgemeinheit folgt wie in 1.6.8 das **Austauschlemma**: Gegeben $s_1, \dots, s_r \in S$ und eine Spiegelung $t \in W$ mit $l(ts_1 \dots s_r) < l(s_1 \dots s_r)$ gibt es einen Index $i \in [1, r]$ mit

$$ts_1 \dots s_i \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$$

3.1.12 (Fundamentaltbereiche und Standgruppen). Auch für die Spiegelungsgruppe einer beliebigen Coxetermatrix ist die Standgruppe jedes Punktes aus dem Titskegel erzeugt von den Spiegelungen an allen Wänden eines festen Alkoven, der unseren Punkt in seinem Abschluß hat; die fragliche Standgruppe operiert frei und transitiv auf der Menge aller Alkoven, die unseren Punkt in ihrem Abschluß haben; und jeder Alkovenabschluß ein Fundamentaltbereich für die Operation unserer Spiegelungsgruppe auf dem Titskegel. Die Beweise sind identisch zu den Beweisen im affinen Fall 1.7.4 und 1.7.5.

3.1.13. Auch für die Spiegelungsgruppe W einer beliebigen Coxetermatrix operieren genau diejenigen Elemente als Spiegelungen in der wurzligen oder gleichbedeutend in der alkovischen Darstellung, die in W konjugiert sind zu einfachen Spiegelungen. Das ist im wesentlichen die Aussage des dritten Teils unseres Satzes 3.1.9 über die Geometrie der alkovischen Darstellung.

3.2 Erzeuger und Relationen für Spiegelungsgruppen

Definition 3.2.1. Ein **Coxetersystem** ist ein Paar (W, S) bestehend aus einer Gruppe W und einer Teilmenge $S \subset W$ von W derart, daß W erzeugt wird von S mit den Relationen $s^2 = e \ \forall s \in S$ und $(st)^{\text{ord}(st)} = e$ für alle $s, t \in S$ mit st von endlicher Ordnung $\text{ord}(st) < \infty$. Die Elemente von S heißen die **einfachen Spiegelungen von W** . Wir erklären die **Länge** $l(w)$ eines Elements von W als die Länge einer kürzestmöglichen Darstellung von w als Produkt einfacher Spiegelungen $s \in S$.

3.2.2. Die Relation $(st)^{\text{ord}(st)} = e$ kann unter der Bedingung $s^2 = t^2 = e$ auch geschrieben werden in einer der Formen

$$sts \dots t = tst \dots s \quad \text{beziehungsweise} \quad st \dots s = ts \dots t$$

für $\text{ord}(st)$ gerade beziehungsweise ungerade, mit jeweils $\text{ord}(st)$ sich abwechselnden Faktoren auf beiden Seiten. Diese Relationen hinwiederum heißen, auch wenn die Bedingung $s^2 = t^2 = e$ nicht erfüllt ist, die **Zopfrelationen** nach der Darstellung der sogenannten „Zopfgruppe“ durch Erzeuger und Relationen in [TF] 5.1.4.

Satz 3.2.3 (Spiegelungsgruppen und Coxetersysteme). *Ist W die Spiegelungsgruppe zu einer Coxetermatrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ und $S \subset W$ die Menge ihrer einfachen Spiegelungen, so ist (W, S) ein Coxetersystem mit den Relationen $\text{ord}(st) = m(s, t) \forall s, t \in S$.*

Beweis. Das folgt sofort aus der präziseren Proposition 3.2.5, die wir im Anschluß beweisen. $\square$

Korollar 3.2.4 (Affine Spiegelungsgruppen und Coxetersysteme). *Ist W eine affine Spiegelungsgruppe und $S \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkoven, so ist (W, S) ein Coxetersystem.*

Beweis. Das kann man als Korollar des vorhergehenden Satzes zeigen mithilfe von 3.1.7. Alternativ kann man auch den Beweis der anschließenden Proposition 3.2.5 unschwer auf diesen Fall übertragen. $\square$

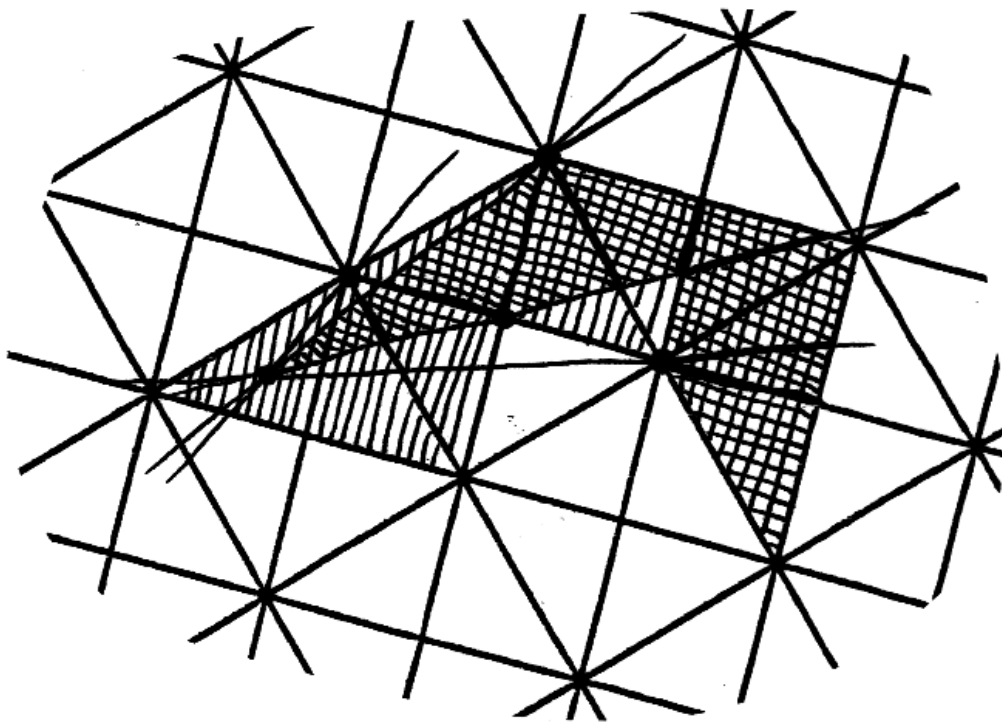
Proposition 3.2.5 (Übergang zu reduzierter Darstellung). *Sei W die Spiegelungsgruppe zu einer Coxetermatrix $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ und seien zwei Darstellungen desselben Elements $w \in W$ als Produkt von einfachen Spiegelungen*

$$s_1 s_2 \dots s_n = w = t_1 t_2 \dots t_l$$

gegeben. Ist die zweite Darstellung reduziert, in Formeln $l(w) = l$, so können wir von der ersten Darstellung zur zweiten gelangen in endlich vielen Schritten, von denen jeder einzelne entweder im Anwenden einer Zopfrelation zu unserer Coxetermatrix besteht oder im Weglassen zweier gleicher aufeinanderfolgender Faktoren.

3.2.6. Beim ersten unserer Schritte bleibt die Zahl der Faktoren gleich, beim zweiten nimmt sie um Zwei ab. Insbesondere kann man also zwischen je zwei reduzierten Darstellungen ein- und desselben Elements „mit Zopfrelationen hin- und hergehen“.

3.2.7 (Veranschaulichung des folgenden Beweises). Eine graphische Darstellung gelingt besonders gut im Fall von drei einfachen Spiegelungen und eindimensionalem Radikal unserer Bilinearform, indem wir von der alkovischen Darstellung nur den zweidimensionalen W -stabilen affinen Teilraum derjenigen Linearformen zeichnen, die auf dem Radikal zu einer fest vorgegebenen von Null verschiedenen Linearform einschränken. Auf diesem affinen Teilraum operiert W dann durch Affinitäten und man muß zur Linearisierung übergehen, um in der Situation des anschließenden Beweises zu landen. Dafür kann man aussagekräftige Bilder zeichnen.



Alkoven und Subalkoven bei einem Übergang zu einer reduzierten Darstellung

Beweis. Gegeben $x \in W$ und $p \in A^+$ und $q \in xA^+$ derart, daß das Segment $[p, q]$ keine zwei Spiegel in ein- und demselben Punkt trifft, erhalten wir offensichtlich eine reduzierte Darstellung $\text{red}(p, q)$ von x durch die Vorschrift $x = r_1 r_2 \dots r_{l(x)}$ mit

$$A^+, r_1 A^+, r_1 r_2 A^+, \dots, xA^+$$

der Folge von Alkoven im Titskegel, die unser Segment $[p, q]$ der Reihe nach trifft. Wir sagen dann, $\text{red}(p, q)$ sei **sinnvoll definiert**. So einen Punkt q können wir zu vorgegebenem p stets finden, denn gegeben zwei verschiedene Spiegel, die A^+ von xA^+ trennen, ist ihr Schnitt ein Untervektorraum der Kodimension Zwei und zusammen mit p erzeugt er eine lineare Hyperebene und endlich viele lineare Hyperebenen können nicht ganz xA^+ überdecken. Nun können wir $p \in A^+$ sogar so wählen, daß die von p und einem Schnitt trennender Spiegel erzeugten linearen Hyperebenen für paarweise verschiedene Spiegelschnitte paarweise verschieden sind. In der Tat umfaßt so eine lineare Hyperebene einen anderen Spiegelschnitt nur dann, wenn das Vektorraumzeugnis unserer beiden Spiegelschnitte Kodimension Eins hat und p enthält und um das zu vermeiden, müssen wir mit p nur endlich viele Hyperebenen vermeiden. Wir nennen ein $p \in A^+$ außerhalb dieser endlich vielen Hyperebenen **gut für** xA^+ . Für das weitere wählen wir ein $p \in A^+$, das gut ist für alle $s_1 A^+, s_1 s_2 A^+, \dots, wA^+, t_1 A^+, \dots, t_1 t_2 A^+, \dots, wA^+$. Dann betrachten wir alle Hyperebenen, die Wände von einem dieser Alkoven sind, sowie alle Hyperebenen, die von p und einem Schnitt von zwei verschiedenen Spiegeln erzeugt werden, die A^+ von einer dieser Alkoven trennen. Die Alkoven zum Komplement der Vereinigung all dieser Hyperebenen, die in einer der Alkoven unserer Liste enthalten sind, nennen wir **verfeinerte Alkoven**. Gegeben ein verfeinerter Alkoven B und $q \in B$ ist $\text{red}(p, q)$ sinnvoll definiert und unabhängig von $q \in B$. Wir vereinbaren die Notation $\text{red}(p, B)$ für dieses Wort. Es ist eine reduzierte Darstellung für das $x \in W$ mit $B \subset xA^+$. Nun finden wir sicher eine Folge verfeinerter Alkoven $B_1, \dots, B_m$ mit $B_1 \subset s_1 A^+$ und $B_m \subset wA^+$ derart, daß je zwei benachbarte verallgemeinerte Alkoven genau eine gemeinsame Wand haben und daß es eine monoton wachsende Funktion h gibt mit $B_i \subset s_1 \dots s_{h(i)} A^+$. Dann ist $\text{red}(p, B_i)$ eine reduzierte Darstellung von $s_1 \dots s_{h(i)}$ und $\text{red}(p, B_{i+1})$ unterscheidet sich im Fall $h(i) = h(i+1)$ höchstens um eine Zopfrelation von $\text{red}(p, B_i)$. Im Fall $h(i) < h(i+1)$ schließlich haben wir

$$\begin{aligned} \text{red}(p, B_{i+1}) &= \text{red}(p, B_i) s_{h(i)+1} && \text{falls } l(s_1 \dots s_{h(i)}) < l(s_1 \dots s_{h(i)+1}); \\ \text{red}(p, B_{i+1}) s_{h(i)+1} &= \text{red}(p, B_i) && \text{andernfalls.} \end{aligned}$$

Alle Worte $\text{red}(p, B_i) s_{h(i)+1} \dots s_{n-1} s_n$ sind dann Darstellungen von w , je zwei benachbarte Worte dieser Folge unterscheiden sich höchstens um eine Zopfrelation oder um das Anwenden einer Relation $s^2 = 1$ für eine einfache Spiegelung s und unsere Folge beginnt mit dem Wort $s_1 s_2 \dots s_n$ und endet mit der

reduzierten Darstellung $\text{red}(p, B_m)$ von w . Konstruieren wir in derselben Weise eine Folge verfeinerter Alkoven $C_1, \dots, C_r$ für $t_1 \dots t_l$ mit $C_r = B_m$, so sind die entsprechenden Worte der analog gebildeten Folge $\text{red}(p, C_j)t_{k(j)+1} \dots t_{l-1}t_l$ sämtlich reduzierte Darstellungen von w , je zwei benachbarte Worte dieser Folge unterscheiden sich höchstens um eine Zopfrelation und unsere Folge beginnt mit $t_1 \dots t_l$ und endet mit derselben reduzierten Darstellung $\text{red}(p, C_r) = \text{red}(p, B_m)$ von w wie die zuvor konstruierte Folge. Das zeigt die Behauptung. $\square$

3.2.8 (Längen in Teilsystemen). Genau wie für affine Spiegelungsgruppen in 1.6.11 folgt für jede nichtreduzierte Darstellung eines Elements der Coxetergruppe eines beliebigen Coxetersystems (W, S) mit dem Austauschlemma 3.1.11, daß sie durch Streichen von Faktoren zu einer reduzierten Darstellung desselben Elements gemacht werden kann. Ist insbesondere $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis und $l_p : W_p \rightarrow \mathbb{N}$ die Längenfunktion des Coxetersystems (W_p, S_p) , so gilt $l_p(w) = l(w) \ \forall w \in W_p$ und jede reduzierte Darstellung von $w \in W_p$ in Bezug auf (W, S) besteht bereits aus Spiegelungen aus S_p .

Übungen

Übung 3.2.9 (Weitere natürliche Darstellungen von Coxetergruppen). Gegeben sei eine endliche Menge S und eine Coxetermatrix mit Indexmenge S der Gestalt $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ und ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V . Gegeben seien weiter Vektoren $(e_s)_{s \in S}$ in V und Linearformen $(e_s^\vee)_{s \in S}$ auf V derart, daß gilt

$$\langle e_t, e_s^\vee \rangle = -2 \cos(\pi/m_{s,t}) \quad \forall s, t \in S$$

So liefert die Vorschrift $\rho(s)(v) := v - \langle v, e_s^\vee \rangle e_s$ eine Darstellung $\rho : W \rightarrow \text{GL}(V)$ unserer Coxetergruppe. Sind die $(e_s)_{s \in S}$ eine Basis von V , so ist das unsere wurzlige Darstellung. Sind die $(e_s^\vee)_{s \in S}$ eine Basis des Dualraums V^* , so ist das unsere alkovische Darstellung. Sind die Vektoren $(e_s)_{s \in S}$ linear unabhängig, so erzeugen sie eine zur wurzligen Darstellung isomorphe Unterdarstellung. Sind die Linearformen $(e_s^\vee)_{s \in S}$ linear unabhängig, so ist der Schnitt ihrer Kerne eine Unterdarstellung und der Quotient danach ist isomorph zur alkovischen Darstellung.

3.3 Bruhat-Teilordnung

3.3.1. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Die zu einfachen Spiegelungen konjugierten Elemente von W heißen die **Spiegelungen** von W . Die Menge aller Spiegelungen notieren wir T . Nach 3.1.9 sind das genau die Elemente, die in der Spiegelungsgruppe der zugehörigen Coxetermatrix zu Spiegelungen werden.

Definition 3.3.2. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Die **Bruhat-Teilordnung** ist die kleinste reflexive transitive Relation $\leq$ auf W derart, daß gilt

$$x \leq xt \text{ für alle } x \in W \text{ und alle Spiegelungen } t \in W \text{ mit } l(x) < l(xt).$$

3.3.3. Wir fordern, das sei hier nocheinmal besonders betont, in der Definition der Bruhat-Teilordnung 3.3.2 nicht $t \in S$. In der Tat würde diese Forderung im allgemeinen zu einer echt stärkeren Teilordnung führen.

3.3.4. Sei (W, S) ein Coxetersystem. Offensichtlich gilt $x < y \Rightarrow l(x) < l(y)$. Insbesondere ist $\leq$ tatsächlich eine Teilordnung auf W . Offensichtlich ist das neutrale Element $e \in W$ das kleinste Element. Unschwer erkennt man weiter $x \leq y \Leftrightarrow x^{-1} \leq y^{-1}$. Eine explizitere Beschreibung der Bruhat-Teilordnung gibt uns 3.3.6.

3.3.5 (**Bruhat-Teilordnung im affinen Fall**). Seien W eine affine Spiegelungsgruppe und A ein ausgezeichnete Alkoven. Nach 3.2.4 ist dann für $S = S_A \subset W$ die Menge der Spiegelungen an den Wänden von A das Paar (W, S) ein Coxetersystem. Betrachten wir dann die Bijektion $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, $w \mapsto wA$, so induziert die durch A gegebene Bruhat-Teilordnung auf W eine Ordnung auf $\mathcal{A}$. Diese Teilordnung ist nach 1.6.7 die kleinste reflexive transitive Relation auf $\mathcal{A}$ derart, daß gilt $B \leq s_L B$ wann immer $B \in \mathcal{A}$ ein Alkoven ist und L ein Spiegel, der B nicht von A trennt. Ist insbesondere W endlich und operiert zur Vereinfachung der Notation durch lineare Automorphismen auf einem Vektorraum über einem angeordneten Körper, so induziert die Multiplikation mit (-1) eine W -äquivalente Bijektion $\text{neg} : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$. Da $-A$ und A durch alle Spiegel getrennt werden, kehrt die davon auf W induzierte Operation $\text{neg} : W \xrightarrow{\sim} W$ die Bruhatordnung um. Gegeben ein Coxetersystem (W, S) mit $|W| < \infty$ gibt es also genau ein bruhatmaximales Element $w_o \in W$ und für beliebige $x, y \in W$ gilt dann

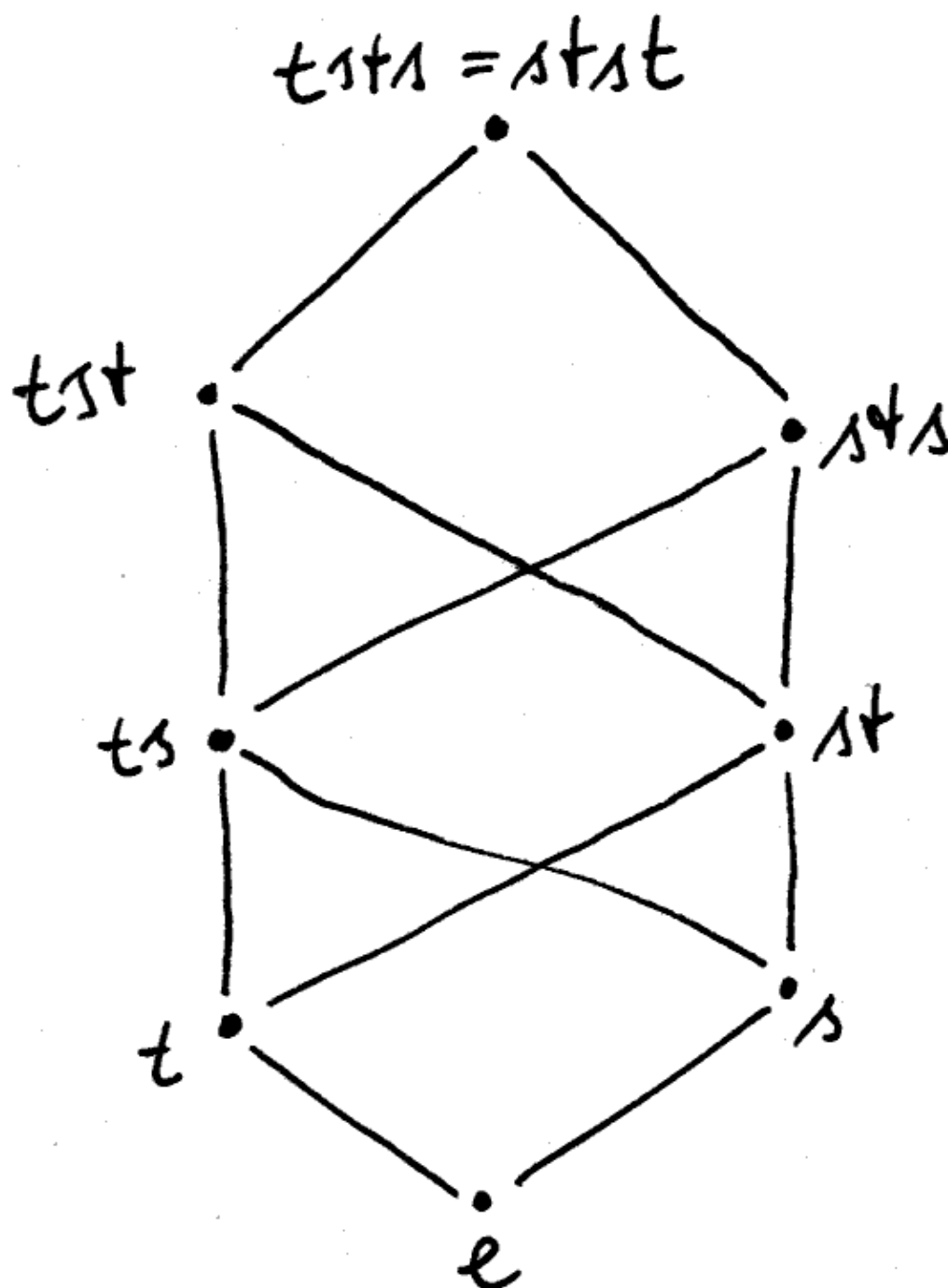
$$x \leq y \Leftrightarrow xw_o \geq yw_o$$

Satz 3.3.6 (Bruhat-Teilordnung über Teilausdrücke). Sei (W, S) ein Coxetersystem. Ist $w = s_1 \dots s_{l(w)}$ eine reduzierte Darstellung von $w \in W$, so gilt

$$\{x \in W \mid x \leq w\} = \{s_{i_1} \dots s_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l(w)\}$$

Insbesondere hängt die rechte Seite nicht von der Wahl der reduzierten Darstellung von w ab.

Beweis. Wir erinnern daran, daß wir W nach 3.2.3 stets als Spiegelungsgruppe seiner Coxetermatrix treu darstellen können. Die Inklusion $\subset$ folgt mühelos aus dem Austauschlemma 3.1.11. Für die andere Inklusion $\supset$ müssen wir wieder nach



Die Bruhat-Teilordnung auf einer Diedergruppe

dem Austauschlemma 3.1.11 nur für reduzierte Teilausdrücke zeigen, daß sie Elemente $\leq w$ liefern. Mit Induktion über die Länge von w brauchen wir sogar nur Teilausdrücke zu untersuchen mit $i_1 = 1$. Dann folgt die Behauptung jedoch mit Induktion aus dem anschließenden Lemma. $\square$

Lemma 3.3.7 (Eigenschaft Z von Deodhar). *Sei (W, S) ein Coxetersystem. Gegeben $x, y \in W$ und $s \in S$ eine erzeugende Spiegelung gelten entweder mindestens drei oder keine der vier Ungleichungen*

$$\begin{array}{ll} x \leq y & x \leq sy \\ sx \leq y & sx \leq sy \end{array}$$

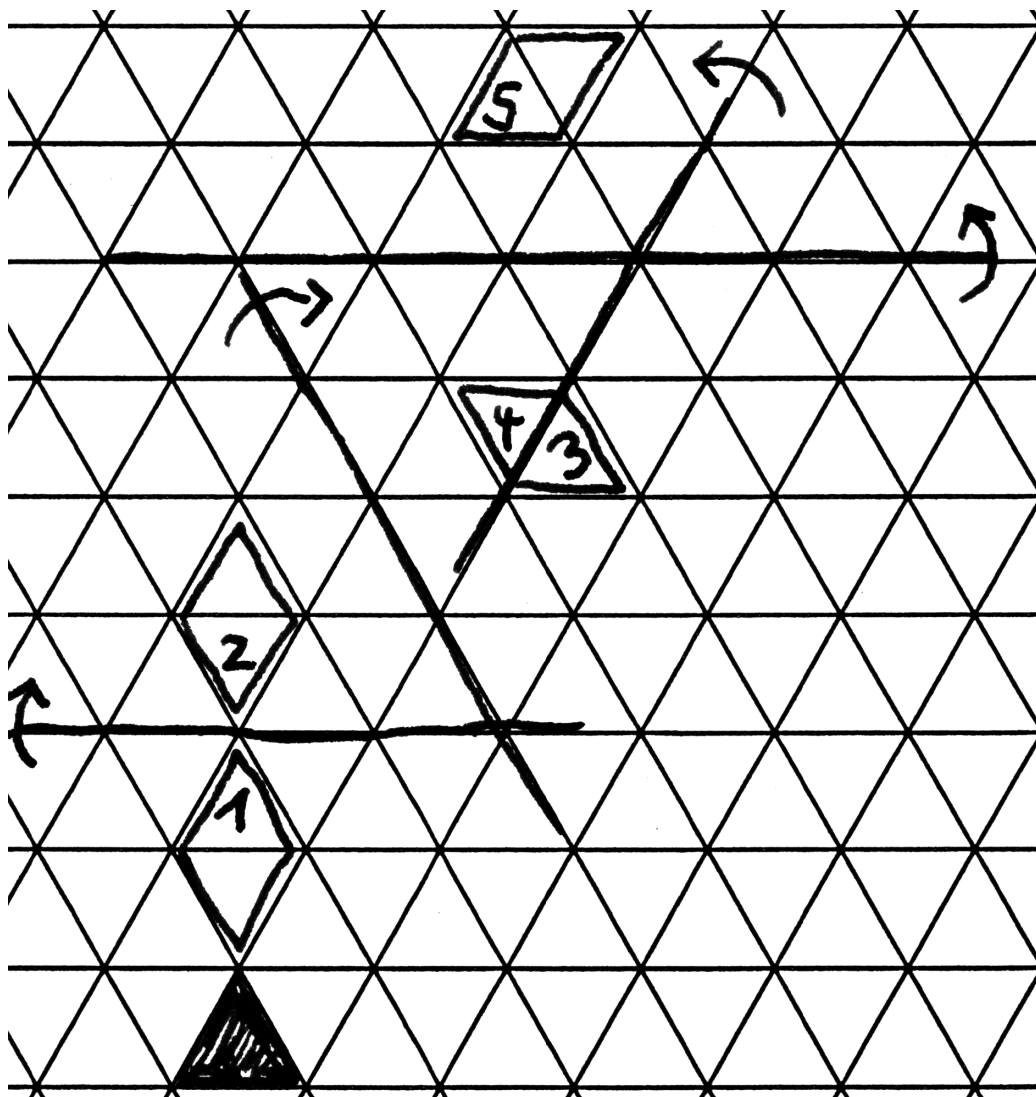
3.3.8. Stellen wir Ungleichungen durch Pfeile zum größeren Element dar, so impliziert also unter der Annahme der beiden horizontalen Ungleichungen $y < sy$ und $x < sx$ jede der drei weiteren Ungleichungen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} y & \rightarrow & sy \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ x & \rightarrow & sx \end{array}$$

die beiden anderen. Wegen dieser graphischen Interpretation, und weil der Schluß von der Diagonale auf die beiden Vertikalen die eigentliche Aussage darstellt, wird die Aussage unseres Lemmas als die „Eigenschaft Z von Deodhar“ zitiert. Man kann diese Eigenschaft ohne Schwierigkeiten aus Satz 3.3.6 zur Bruhat-Ordnung durch Teilausdrücke folgern, sie geht jedoch bei uns in den Beweis dieses Satzes bereits ein.

3.3.9. Ich gebe noch eine andere Formulierung der Eigenschaft Z, die für induktive Argumente besonders geschickt ist. Seien (W, S) ein Coxetersystem und $x, y \in W$ sowie $s \in S$ gegeben. Wir setzen $\{x_1, x_2\} := \{x, sx\}$ und $\{y_1, y_2\} := \{y, sy\}$. Gibt es in dieser Situation i, j mit $x_i \leq y_j$, so gilt entweder $x_1 \leq y_1$ und $x_2 \leq y_2$ oder $x_1 \leq y_2$ und $x_2 \leq y_1$.

3.3.10 (**Anschauliche Bedeutung der Eigenschaft Z**). Sei eine affine Spiegelungsgruppe mit einem ausgezeichneten Alkoven gegeben, der der fundamentale Alkoven heißen möge. Steigt ein Alkoven B durch eine Folge von Spiegelungen zu einem anderen Alkoven C auf in dem Sinne, daß die zugehörigen Elemente der Spiegelungsgruppe dabei immer länger werden, so steigt mit derselben Folge auch das ungeordnete Paar von benachbarten Alkoven $\{B, Bs\}$ zum ungeordneten Paar von benachbarten Alkoven $\{C, Cs\}$ auf. Das tut es sogar mit der Folge von Spiegelungen, die wir erhalten, wenn wir aus unserer ursprünglichen Folge von Spiegelungen alle diejenigen weglassen, die nur die Bilder des Paares (B, Bs) untereinander vertauschen. Mit dieser Folge von Spiegelungen steigt dann entweder B zu C auf und Bs zu Cs oder B zu Cs und Bs zu C . Die „Eigenschaft Z“ formalisiert diese Anschauung.



Graphische Darstellung der Eigenschaft Z von Deodhar im Sinne von 3.3.10.
 Der geschwärzte Alkoven stellt das neutrale Element dar, die nummerierten Alkoven gehen jeweils durch eine verlängernde Spiegelung auseinander hervor.
 Die „Dominos“ bestehen jeweils aus einem Paar (B, Bs) mit s einer festen einfachen Spiegelung.

Ergänzung 3.3.11 (Bedeutung der Eigenschaft Z für Weylgruppen). Haben wir die Weylgruppe einer algebraischen Gruppe vor uns, so folgt das Lemma leicht aus der Tatsache, daß der Abschluß der Bahn einer parabolischen Untergruppe auf der Fahnenmannigfaltigkeit eine Vereinigung von Bahnen besagter parabolischer Untergruppe ist.

Beweis. Wenn wir mal von der Formulierung 3.3.9 ausgehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y = xt$ annehmen für eine Spiegelung t . Dann sind wir in einem von vier Fällen, die wir jetzt gleich der Reihe nach abhandeln.

- $sx < x, sy > y$: Dann gelten sogar alle vier Ungleichungen;
- $sx < x, sy < y$: Dann haben wir $l(sx) < l(sy)$ und $sxt = sy$ und damit notwendig $sx < sy$ und a fortiori $sx < y$;
- $sx > x, sy > y$: Dann können wir dasselbe Argument anwenden wie beim vorhergehenden Fall;
- $sx > x, sy < y$: Dann haben wir $sxt < xt$ und argumentieren so:

Wir sind fertig, wenn wir $sx \leq sy$ alias $l(sx) \leq l(sy)$ zeigen können. Gilt aber sonst $l(sx) > l(sy)$ alias $l(sx) > l(sxt)$ und ist $s_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung von x , so ist $ss_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung von sx und nach dem Austauschlemma 3.1.11 können wir in sxt den Faktor t kürzen gegen eine einfache Spiegelung in der reduzierten Darstellung von sx , ohne das Produkt zu ändern. Wegen $x < xt$ muß diese einfache Spiegelung die Erste sein und wir haben $x = sxt = sy$. In diesem Fall gilt zwar nicht $sx \leq sy$, aber eben $x \leq sy$ sowie $sx \leq y$ und das tut es auch. In der Anschauung entspricht dieser Fall im übrigen der Spiegelung eines „Dominos an einem Spiegel, die unser Domino halbiert“. $\square$

Proposition 3.3.12 (Obere Schranken endlicher Teilmengen). *Gegeben ein Coxetersystem (W, S) und Elemente $x, y \in W$ gibt es $w \in W$ mit $w \geq x$ und $w \geq y$.*

Beweis. Seien $x = t_1 \dots t_a$ und $y = s_1 \dots s_b$ reduzierte Darstellungen. Wir setzen $x = x_0$ und konstruieren induktiv eine Folge $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_b$ durch die Vorschrift $x_j = x_{j-1}s_j$ falls $x_{j-1} \leq x_{j-1}s_j$ und $x_j = x_{j-1}$ sonst. Wir zeigen induktiv, daß x_j eine reduzierte Darstellung

$$x_j = t_{(j)}s_1 \dots s_j$$

besitzt mit $t_{(j)}$ einem Teilausdruck von $t_{(j-1)}$ und $t_{(0)}$ der ursprünglichen reduzierten Darstellung von x_0 . Für x_0 ist das klar. Für x_1 ist es klar im Fall $x_0 \leq x_0s_1$. Im Fall $x_0 \geq x_0s_1$ sagt uns das Austauschlemma, daß es einen Index i gibt mit $x_0s_1 = t_1 \dots \hat{t}_i \dots t_a$ und das ist dann sogar ein reduzierter Teilausdruck mit

$x_0 s_1 = t_{(1)}$ und dann ist $x_0 = t_{(1)} s_1$ die gesuchte reduzierte Darstellung. Allgemeiner gehen wir von

$$x_{j-1} = t_{(j-1)} s_1 \dots s_{j-1}$$

aus. Wird das länger unter $(\cdot s_j)$, nehmen wir $t_{(j)} = t_{(j-1)}$. Wird das kürzer unter $(\cdot s_j)$, so können wir eine Spiegelung unseres reduzierten Ausdrucks $x_{j-1} = t_{(j-1)} s_1 \dots s_{j-1}$ finden, deren Weglassen denselben Effekt hat wie $(\cdot s_j)$. Diese kann keine der s -Spiegelungen sein, da wir unsere Darstellung von y reduziert angenommen hatten. Sie muß also eine der t -Spiegelungen sein und unsere Induktion läuft. $\square$

Proposition 3.3.13 (Kleinste Nebenklassenrepräsentanten). *Seien (W, S) ein Coxtersystem und $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis. Ist $x \in W$ minimal in seiner Nebenklasse $W_p x$, so gilt für alle $w \in W_p$ die Formel*

$$l(wx) = l(w) + l(x)$$

3.3.14. In einer spezielleren Situation hatten wir das bereits in [?] ?? gezeigt. Daß es im Fall $|W_p| < \infty$ dann auch in jeder Nebenklasse genau ein maximales Element gibt, folgt unmittelbar aus 3.3.6.

Beweis. Wir argumentieren mit Induktion über die Länge von w und erinnern aus 3.2.8, daß es unerheblich ist, ob wir diese Länge in Bezug auf (W, S) oder in Bezug auf (W_p, S_p) betrachten. Sei nun $w \in W_p$ ein Gegenbeispiel kleinster Länge für die behauptete Identität. Da w nicht trivial sein kann, können wir $w = sv$ schreiben mit $v < w$ und $s \in W_p$. Per Induktionsannahme gilt $l(vx) = l(v) + l(x)$ und nach Annahme gilt $l(svx) = l(wx) < l(vx)$. Wir erhalten nach dem Austauschlemma also svx , indem wir aus einer beliebigen reduzierten Darstellung von vx einen Faktor weglassen. So eine Darstellung erhalten wir nach Induktionsannahme, indem wir eine reduzierte Darstellung von v und eine reduzierte Darstellung von x hintereinanderschreiben. Wird der fragliche Faktor in v weggelassen, so haben wir $sv = w < v$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Wird der fragliche Faktor in x weggelassen, so war x nicht minimal in seiner Nebenklasse im Widerspruch zu unseren Annahmen. $\square$

Proposition 3.3.15 (Bruhatordnung und Nebenklassen). *Seien (W, S) ein Coxtersystem und $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis. Gegeben $x, y \in W$ und $\bar{x}, \bar{y}$ die kleinsten Repräsentanten ihrer W_p -Nebenklassen nach 3.3.13 gilt*

$$x \geq y \Rightarrow \bar{x} \geq \bar{y}$$

und für alle $v, w \in W_p$ haben wir $v\bar{x} \geq w\bar{x} \Leftrightarrow v \geq w$.

3.3.16. In einer spezielleren Situation hatten wir das bereits in [?] ?? gezeigt. Sind $\bar{x}, \bar{y}$ die kleinsten Repräsentanten ihrer W_p -Nebenklassen und gilt $\bar{x} \geq \bar{y}$, so folgt für beliebige $v, w \in W_p$ mit $v \geq w$ aus der Beschreibung 3.3.6 der Bruhatteilordnung durch Teilausdrücke auch umgekehrt $v\bar{x} \geq w\bar{y}$. Ist insbesondere W_p endlich und $w_p \in W_p$ das größte Element, so folgt aus $\bar{x} \geq \bar{y}$ auch $w_p\bar{x} \geq w_p\bar{y}$ für die größten Nebenklassenrepräsentanten $w_p\bar{x}$ beziehungsweise $w_p\bar{y}$.

Beweis. Wir schreiben $x = w\bar{x}$ mit $w \in W_p$. Aus $x \geq y$ folgt $x = w\bar{x} \geq \bar{y}$. Wählen wir reduzierte Darstellungen von w und von $\bar{x}$ und schreiben sie hintereinander, so erhalten wir nach 3.3.13 eine reduzierte Darstellung von $w\bar{x}$. Davon muß $\bar{y}$ ein Teilausdruck sein. Da aber gilt $s\bar{y} > \bar{y}$ für alle $s \in S_p$, dürfen bei diesem Teilausdruck keine Faktoren von w stehengeblieben sein und es folgt $\bar{x} \geq \bar{y}$. In dieser Situation gilt $v \geq w \Rightarrow v\bar{x} \geq w\bar{x}$ aufgrund der Erkenntnis $l(v\bar{x}) = l(v) + l(\bar{x})$ nach 3.3.13. Wählen wir umgekehrt reduzierte Darstellungen von v und von $\bar{x}$ und betrachten die durch Verkettung daraus entstehende reduzierte Darstellung von $v\bar{x}$ und davon einen Teilausdruck, so wird er entweder zu einer Nebenklasse $W_p\bar{y}$ mit minimalem Repräsentanten $\bar{y} < \bar{x}$ gehören, wenn wir nämlich auch von den Faktoren von $\bar{x}$ welche weglassen, oder aber die Gestalt $w\bar{x}$ haben mit $v \geq w$. Das zeigt die zweite Aussage. $\square$

Proposition 3.3.17 (Bruhatordnung und Doppelnebenklassen). *Seien (W, S) ein Coxetersystem und $S_p \subset S \supset S_q$ zwei Teilmengen mit Erzeugnissen W_p und W_q . Betrachten wir zu $x \in W$ das kleinste Element $\bar{x}$ seiner Linksnebenklasse $W_p x$ und dann das kleinste Element $\bar{\bar{x}}$ von dessen Rechtsnebenklasse $\bar{x}W_q$, so erhalten wir das kleinste Element $\bar{\bar{x}}$ der Doppelnebenklasse $W_p x W_q$.*

3.3.18. Insbesondere folgt $x \geq y \Rightarrow \bar{x} \geq \bar{y} \Rightarrow \bar{\bar{x}} \geq \bar{\bar{y}}$. Gegeben zwei Elemente aus derselben Doppelnebenklasse liegt also auch jedes Element zwischen den beiden in dieser Doppelnebenklasse. Weiter folgt, daß ein Element x , das sowohl minimal in $W_p x$ als auch minimal in xW_q ist, bereits minimal in $W_p x W_q$ sein muß.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $\bar{\bar{x}}$ zumindest das kleinste Element von $W_p \bar{\bar{x}}$ ist. Dazu reicht es, $s\bar{\bar{x}} > \bar{\bar{x}}$ zu zeigen für alle $s \in S_p$. Ist aber $v \in W_q$ gegeben durch $\bar{x} = \bar{\bar{x}}v$, so gilt nach 3.3.15 notwendig $l(\bar{x}) = l(\bar{\bar{x}}) + l(v)$ und dann impliziert $s\bar{\bar{x}} < \bar{\bar{x}}$ bereits $s\bar{x} = s\bar{\bar{x}}v < \bar{\bar{x}}v = \bar{x}$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Ein beliebiges Element $y \in W_p x W_q$ schreiben wir nun als $y = w\bar{y}$ mit $w \in W_p$ und finden $u \in W_q$ mit $\bar{\bar{x}}u \in W_p \bar{y}$ alias $\bar{\bar{x}}u = v\bar{y}$ für $v \in W_p$. Es folgt $\bar{\bar{x}} \leq v\bar{y}$ und reduzierte Darstellungen von v und $\bar{y}$ verketteten nach 3.3.15 zu einer reduzierten Darstellung von $v\bar{y}$. Von dieser muß $\bar{\bar{x}}$ nach 3.3.6 ein Teilausdruck sein. Nach unseren Erkenntnissen vom Beginn des Beweises muß dann aber $\bar{\bar{x}}$ sogar ein Teilausdruck von $\bar{y}$ sein und es folgt $\bar{\bar{x}} \leq \bar{y} \leq y$. $\square$

3.3.19 (Struktur der Doppelnebenklassen zu parabolischen Untergruppen).

Ist $x \in W_p x W_q$ das kleinste Element seiner Doppelnebenklasse, so gilt für $t \in S_q$ notwendig $l(xt) = l(x) + 1 = l(xtx^{-1}x)$. Wir folgern $xS_q x^{-1} \cap W_p \subset S_p$. Nennen wir diesen Schnitt $S_{p,x}$, so ist für $w \in W_p$ das Element wx minimal in wxW_q genau dann, wenn w minimal ist in $w\langle S_{p,x} \rangle$. Jedes Element von $W_p x W_q$ besitzt also eine eindeutige Darstellung wxv mit $w \in W_p$ minimal in $w\langle S_{p,x} \rangle$ und $v \in W_q$ beliebig und dann gilt $l(wxv) = l(w) + l(x) + l(v)$. Sind insbesondere W_p und W_q endlich, so besitzt jede Doppelnebenklasse $W_p x W_q$ auch genau ein größtes Element. Diese Aussage scheint auf Masato Kobayashi zurückzugehen. Im Fall von Weylgruppen ist sie ziemlich offensichtlich, da ja jede Doppelnebenklasse unter zwei parabolischen Untergruppen in einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper offensichtlich irreduzibel ist. Ich habe gelesen, daß es im Fall der symmetrischen Gruppe S_5 Doppelnebenklassen gibt, die als teilgeordnete Menge nicht zu ihrer eigenen opponierten teilgeordneten Menge isomorph sind.

Übungen

Übung 3.3.20. Seien (W, S) ein Coxetersystem und $S_p \subset S$ eine Teilmenge und $W_p \subset W$ ihr Gruppenerzeugnis. Gegeben eine Spiegelung $t \in W \setminus W_p$ und $x \in W_p$ gilt $tx > x$. Hinweis: Bruhat-Ordnung über Teilausdrücke 3.3.6.

Übung 3.3.21. Gegeben $x < y$ in der Bruhatteilordnung gibt es z mit $x < z \leq y$ in der Bruhat-Teilordnung und $l(z) = l(x) + 1$.

Übung 3.3.22. Sei (W, S) ein Coxetersystem und $x \in W$ ein Element und $x = s_1 \dots s_r$ eine reduzierte Darstellung. So liefern die um eins kürzeren Teilausdrücke paarweise verschiedene Elemente von W . Hinweis: Man mag im Alkovenbild argumentieren.

Übung 3.3.23. Gegeben $x < y$ in der Bruhatteilordnung mit $l(y) = l(x) + 2$ gibt es genau zwei Elemente z mit $x < z < y$. Hinweis: 3.3.22.

4 Danksagung

Bei der Vorbereitung besonders hilfreich waren die Bücher von Bourbaki [Bou81] und Humphreys [Hum90]. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Pavle Pandzic, Giovanni Zaccanelli, . . .

Literatur

- [AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.
- [Bou81] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4–6*. Masson, 1981.
- [EL] Skriptum Elementargeometrie. Wolfgang Soergel.
- [HL] Skriptum halbeinfache Lie-Algebren. Wolfgang Soergel.
- [Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1990.
- [KS10] E. D. Kim and F. Santos. An update on the hirsch conjecture. *Jahresbericht der DMV*, 112(2):73–98, 2010.
- [LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.
- [LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.
- [ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.
- [TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- abgeschlossen
 - Halbraum, 13
- Abschluß
 - von Facette, 15
- affin
 - Weylgruppe, 78
 - Weylgruppe, duale, 78
- Alkoven
 - fundamentaler dominanter, 82
 - in alkovischer Darstellung, 100
 - zu endlicher Spiegelungsgruppe, 6
 - zu System von Hyperebenen, 17
- alkovische Darstellung, 95
- Austauschlemma, 105
- basiertes Wurzelsystem, 70
- Basis
 - eines Wurzelsystems, 66, 72
 - universelle, 73
- Bruhat-Teilordnung, 110
- Cartan-Matrix, 72
- Cosinusmatrix, 43
- Coxetergraph, 40
- Coxetermatrix, 40
- Coxetersystem, 105
- Coxeterzahl, 86
 - duale, 86
- Deodhar
 - Eigenschaft Z von, 112
- Diedergruppe, 6
- Dimension
 - einer Facette, 17
- Dynkin-Diagramm, 73
- Dynkindiagramm
 - dual erweitertes, 93
 - erweitertes, 89
- E_8 Wurzelsystem, 64
- E_8 -Gitter, 64
- einfach
 - geschnürt, 77
- essentiell
 - affine Spiegelungsgruppe, 53
- euklidisch
 - affiner Raum
 - über angeordnetem Körper, 25
 - Raum
 - über angeordnetem Körper, 4
 - Wurzelsystem, 58
- Facette
 - Teilmenge von affinem Raum, 13
 - zu System von Hyperebenen, 13
- Fundamentalebereich
 - eckfaltiger, 33
 - mengentheoretischer, 33
 - topologischer, 33
- Geradensegment, 11
- Halbraum, 13
- Hirsch
 - Vermutung von, 22
- höchste kurze Wurzel, 84
 - einfach geschnürter Fall, 86
- höchste Wurzel, 84
- höchstes Element, 84
- Hyperebene
 - affine, 4
- Hyperebenenpartition, 13
- isomorph
 - affine Spiegelungsgruppen, 53
- Kammer, 17
- Kante

- von Coxetergraph, 40
- Knoten
 - von Coxetergraph, 40
- Kodimension
 - einer Facette, 17
- komplex
 - Spiegelung, 52
 - Spiegelungsgruppe, 52
- Kowurzel, 60
 - einfache, 70
- kristallographisch
 - Wurzelsystem, 58
- Länge
 - in Spiegelungsgruppe, 30
- minuscule
 - Gewicht, 93
- orthogonal
 - affine Abbildung, 25
- Polytop, 22
- positiv definit
 - Coxetergraph, 43
- prinzipalen Automorphismus, 70
- quasiminuscule, 93
- Randfacette, 16
 - echte, 16
- Rang
 - eines Wurzelsystems, 56
- Raum
 - euklidischer
 - über angeordnetem Körper, 25
- reduzierte Darstellung, 95
 - in Spiegelungsgruppe, 30
- schwach spitzer Winkel, 36
- schwach stumpfer Winkel, 36
- simply laced, 77
- spezieller Punkt, 80
- Spiegel, 4, 8, 23
- Spiegelhyperebene, 4, 8, 23
- Spiegelung
 - affine, 23
 - affine orthogonale, 25
 - einfache, 70
 - in Coxetersystem, 105
 - in Coxetersystem, 109
 - komplexe, 52
 - lineare, 8
 - orthogonale, 4
- Spiegelungsgruppe
 - affine, 23
 - affine euklidische, 25
 - endliche lineare, 10
 - euklidische endliche, 4
 - komplexe, 52
 - zu Coxetermatrix, 95
- spitz
 - echt, Winkel, 36
- stumpf
 - echt, Winkel, 36
- Summe
 - von Wurzelsystemen, 71
- System positiver Wurzeln, 66
- System von Hyperebenen, 11
- Titskegel, 101
- Träger
 - einer Facette, 17
- unzerlegbar
 - Matrix, 46
 - Wurzelsystem, 71
- $W(R)$ Weylgruppe
 - von abstraktem Wurzelsystem, 61
- Wand
 - eines Alkoven, 17
- Wandfacette, 17
- Weylgruppe
 - affine, 78

- duale affine, 78
 - von abstraktem Wurzelsystem, 61
- Weylkammer
 - dominante, 70
 - einer Spiegelungsgruppe, 6
 - eines Wurzelsystems, 61
- Winkel
 - echt spitzer, 36
 - echt stumpfer, 36
 - schwach spitzer, 36
 - schwach stumpfer, 36
- Wurzel
 - einfache, 70
 - kurze, 77
 - lange, 77
 - von Wurzelsystem, 56
- Wurzelspiegelung, 60
- Wurzelsystem
 - abstraktes, 56, 58
 - abstraktes reduziertes, 56
 - euklidisches, 58
 - komplexes, 58
 - nicht notwendig reduziertes, 56
 - rationales, 58
 - reelles, 58
- Wurzelweg, 76
- wurzlige Darstellung, 95
- Z, Eigenschaft von Deodhar, 112
- Zopfrelationen, 105