Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Nadja Hempel

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2020/2021

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 10

Abgabe: 03.02.2021, 14 Uhr

Begründe alle Antworten!

Aufgabe 1 (5 Punkte).

Betrachte die Funktion
$$f: \begin{array}{ccll} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} & \\ (n,k) & \mapsto & \langle([n]_0, \ldots, [n]_k)\rangle, & \text{mit } [n]_i \in \{0,1\} \text{ und} \\ & & & n = \left(\sum_{i=0}^{k} [n]_i \cdot 2^i\right) + r \cdot 2^{k+1} \\ & & & \text{für ein } r \text{ aus } \mathbb{N}. \end{array}$$

(a) Zeige, dass die Funktion f wohldefiniert und primitiv rekursiv ist.

(b) Schließe daraus, dass die binäre Darstellungsfunktion

$$f: \begin{array}{ccll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} & \\ n & \mapsto & \langle([n]_0, \ldots, [n]_m)\rangle, & \text{mit } [n]_i \in \{0,1\} \text{ und } n = \sum_{i=0}^{m} [n]_i \cdot 2^i \\ & & & \text{für ein } m \text{ aus } \mathbb{N}. \end{array}$$

primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2 (9 Punkte).

(a) Zeige, dass die Funktion
$$\begin{array}{ccll} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} & \\ (k,n) & \mapsto & \langle(k, x_0, \ldots, x_m)\rangle, & \text{wobei } n = \langle(x_0, \ldots, x_m)\rangle \end{array}$$
primitiv rekursiv ist.

Wir nehmen nun an, dass die endliche Sprache $\mathcal{L}$ eine Gödelisierung besitzt. Insbesondere besitzt jeder $\mathcal{L}$-Terme, bzw. jede $\mathcal{L}$-Formel, eine Gödelnummer.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N}^3 & \to & \mathbb{N} \\ (m,n,k) & \mapsto & \begin{cases} \ulcorner t_{s/x_1} \urcorner, & \text{falls } m = \ulcorner s \urcorner \text{ und } \ulcorner k = t \urcorner \text{ mit } s \text{ und } t\ \mathcal{L}\text{-Terme sowie } n = \ulcorner x_1 \urcorner, \text{ wobei } t_{s/x_1} \\ & \text{durch Ersetzen der Variable } x_1 \text{ durch } s \text{ aus dem Term } t \text{ entsteht.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

primitiv rekursiv ist.

(c) Zeige, dass die Funktion

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \ulcorner \neg\varphi \urcorner, & \text{falls } n = \ulcorner \varphi \urcorner \text{ mit } \varphi \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

primitiv rekursiv ist.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

In der Sprache $\mathcal{L} = \{0, 1, +, P\}$, wobei P ein einstelliges Relationszeichen ist, betrachte die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, P^{\mathcal{N}})$ mit $P^{\mathcal{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = m^2 \text{ für ein } m \text{ aus } \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige, dass sowohl die Ordnung $<$ als auch der Graph der Nachfolgerfunktion durch $\mathcal{L}$-Formeln in der Struktur $\mathcal{N}$ definierbar sind.

(b) Welche Teilmenge aus $\mathbb{N}^2$ wird durch die Formel

$$\Big(P(y) \wedge P(y + x + x + 1) \wedge \neg\exists z \Big(P(z) \wedge (y < z < y + x + x + 1)\Big)\Big)$$

in $\mathcal{N}$ definiert? Schließe daraus, dass die Abbildung $x \mapsto x^2$ (das heißt, ihr Graph) in $\mathcal{N}$ definierbar ist.

(c) Zeige, dass die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z = x \cdot y\}$ in der Struktur $\mathcal{N}$ definierbar ist.

Insbesondere werden wir sehen, dass die Theorie $Th(\mathcal{N})$ auch unentscheidbar ist, aus dem Satz 3.34 im Skript.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.