Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Nadja Hempel
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2020/2021

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 11

Abgabe: 10.02.2021, 14 Uhr

Begründe alle Antworten!

Dieses Blatt wird nicht benotet.

Aufgabe 1 (20 Punkte)**.**

Betrachte die endliche Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Sei nun $\mathcal{K}$ die Klasse aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A so definiert, dass jede Äquivalenzklasse unendlich ist.

Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ sei T_k die $\mathcal{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{K}$ mit genau k vielen Äquivalenzklassen sind.

(a) Zeige, dass T_k rekursiv axiomatisierbar ist.

(b) Zeige mit einem Back-&-Forth-Argument, dass für k fest je zwei Modelle der Theorie T_k elementar äquivalent sind.

(c) Ist T_k entscheidbar?

(d) Zeige, dass es für jedes Modell $\mathcal{M}$ von T_k und jedes Element m aus M ein Element n in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{N}$ derart gibt, dass n in der Äquivalenzklasse von m jedoch nicht in M liegt.

Sei nun T die $\mathcal{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{K}$ mit höchstens 2 Äquivalenzklassen sind.

(e) Ist T rekursiv axiomatisierbar?

(f) Gilt die Äquivalenz

$$T \vdash \chi \iff T_1 \vdash \chi \text{ und } T_2 \vdash \chi$$

für jede $\mathcal{L}$-Aussage χ?

(g) Ist T entscheidbar?

(h) Ist T vollständig?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.