Logik für Studierende der Informatik
Blatt 3
Abgabe: 02.12.2020, 14 Uhr
Begründe alle Antworten!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus drei einstelligen Relationszeichen P_1, P_2 und P_3 besteht.

(a) Schreibe eine Theorie T, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, so dass die drei Mengen $P_i^{\mathcal{A}}$, $1 \leq i \leq 3$ paarweise disjunkt und unendlich sind und das Universum A überdecken.

(b) Ist die Theorie konsistent?

(c) Sind je zwei Modelle der Theorie mit Kardinalität Kontinuum (die Kardinalität von $|\mathbb{R}|$) isomorph?

(d) Zeige mit einem Back-&-Forth-System, dass je zwei Modelle der Theorie elementar äquivalent sind.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Die Sprache $\mathcal{L}$ besteht aus einem einstelligen Funktionszeichen f. Sei nun $\mathcal{M}$ die $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{R}^2$ und $f^{\mathcal{M}}(x, y) = (x, y + 1)$.

(a) Gegeben n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus M, beschreibe die davon erzeugte Unterstruktur.

(b) Zeige, dass $\mathbb{Z}^2$ das Universum einer Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist. Ist $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ das Universum einer Unterstruktur von $\mathcal{M}$?

(c) Sind $\mathcal{M}$ und die von $\mathbb{Z}^2$ erzeugte Unterstruktur elementar äquivalent?

(d) Sind $\mathcal{M}$ und die von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur elementar äquivalent?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Jede Struktur $\mathcal{A}$ in der Sprache $\mathcal{L}$ lässt sich als Struktur in der Teilsprache $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ betrachten. Wir nennen die von $\mathcal{A}$ induzierte $\mathcal{L}_0$-Struktur das *Redukt* $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}_0$ von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{L}_0$.

(a) Zeige, dass die von einem $\mathcal{L}_0$-Term induzierten Funktionen in $\mathcal{A}$ und im Redukt $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}_0$ gleich sind.

(b) Schließe daraus, dass für jede $\mathcal{L}_0$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A gilt

$$\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}_0 \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Hinweis: Induktion.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.