Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Nadja Hempel

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2020/2021

Logik für Studierende der Informatik
Blatt 5
Abgabe: 16.12.2020, 14 Uhr
Begründe alle Antworten!

Aufgabe 1 (8 Punkte).

Zeige, dass die folgenden Formeln beweisbar sind und leite sie aus dem Hilbertkalkül für die Sprache $\mathcal{L}$ ab, welche das einstellige Funktionszeichen f enthält.

(a) $\forall x \exists y (f(x) \doteq y)$

(b) $\Big(\forall x \forall y \big(f(x) \doteq f(y)\big) \rightarrow \exists z \forall u \big(z \doteq f(u)\big)\Big)$.

(c) $\forall x \exists y \Big(\big(f(x) \doteq f(f(y)\big) \rightarrow (x \doteq y)\Big)$.

(d) $\Big(\exists x \exists y \neg \big(f(x) \doteq f(y)\big) \rightarrow \exists u \exists z \neg \big(u \doteq f(z)\big)\Big)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Die Sprache $\mathcal{L}$ besteht aus einem einstelligen Funktionszeichen f.

(a) Gib eine $\mathcal{L}$-Theorie T an, deren Modelle genau all $\mathcal{L}$-Strukturen derart sind, dass die Interpretation von f eine Bijektion ohne Zyklen ist, das heißt, für $n \neq m$ aus $\mathbb{N}$ sind die Bilder jedes Element x durch die (Interpretationen der) Abbildungen f^n und f^m verschieden, wobei $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ mit $f^0 = \mathrm{Id}$.

(b) Ist die Theorie konsistent?

Aufgabe 3 (9 Punkte).

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und c ein neues Konstantenzeichen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich zu einer Struktur in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ erweitern läßt.

(b) Sind alle solche Erweiterungen der Struktur $(\mathbb{N}, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{+\}$ isomorph (als $\mathcal{L}'$-Strukturen)? Sind sie elementar äquivalent?

(c) Zeige, dass die $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die $\mathcal{L}'$-Aussage $\varphi[c]$ allgemeingültig ist. (Vergleich dies mit dem Lemma 2.46 aus dem Skript).

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter erfolgt auf der Lernplattform ILIAS.