Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Nadja Hempel

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2020/2021

Logik für Studierende der Informatik

Probeklausur

Die Probeklausur besteht aus 8 Aufgaben (insgesamt 36 Punkte).

Geben Sie am Ende der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab.

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Viel Erfolg!

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

Note

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte erreicht									

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**
Definiere, wann eine Theorie T in einer Sprache $\mathcal{L}$ konsistent ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**
Wie lautet der Kompaktheitssatz?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Entscheide mit Hilfe der Tableau Methode, ob folgende Aussagen Tautologien sind.

(a) $\Big((A_1 \longrightarrow \neg\neg A_2) \longrightarrow (A_1 \longrightarrow A_2)\Big)$.

(b) $\Bigg(\Big(((\bigwedge_{i=1}^k A_i) \wedge P) \longrightarrow Q\Big) \longrightarrow \Big((\bigwedge_{i=1}^k A_i) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)\Big)\Bigg)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L}$ sei T eine Theorie und χ, θ_1, θ_2 Aussagen derart, dass $(\theta_1 \to \theta_2)$ aus $T \cup \{\chi\}$ folgt. Zeige, dass

$$T \cup \{(\neg\theta_2 \wedge \chi)\} \models \neg\theta_1.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{0, f\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f und einem Konstantenzeichen 0 besteht. Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$0^{\mathcal{N}} = 0 \text{ und } f^{\mathcal{N}}(x) := x + 1.$$

(a) Zeige, dass es für jedes $n \neq 0$ in $\mathbb{N}$ ein k gibt, so dass $n = \underbrace{f^{\mathcal{N}} \circ f^{\mathcal{N}} \cdots \circ f^{\mathcal{N}}}_{k}(0)$.

(b) Schreibe eine $\mathcal{L}$-Aussage, welche in $\mathcal{N}$ gilt und besagt, dass jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ im Bild von $f^{\mathcal{N}}$ liegt.

(c) Zeige, dass es eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{N}$ mit einem nichtstandard Element x in M gibt, das heißt $x \neq n$ für jedes n in $\mathbb{N}$.

(d) Beschreibe drei paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle des vollständigen Diagramms $\mathrm{Diag}(\mathcal{N})$ von $\mathcal{N}$.

(e) Wie sehen abzählbare Modelle im Allgemeinen aus (eine informelle Beschreibung genügt)? Wieviele gibt es, bis auf Isomorphie?

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**
Sei T eine vollständige rekursiv axiomatisierbare $\mathcal{L}$-Theorie. Zeige, dass T entscheidbar ist.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive monoton steigende Funktion. Zeige, dass $f(\mathbb{N})$ rekursiv ist.

(b) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit unendlichem Bildbereich. Zeige, dass es eine rekursive monoton steigende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart gibt, dass $h(\mathbb{N}) \subset g(\mathbb{N})$.

(Bitte wenden!)

(c) Schließe daraus, dass jede rekursiv aufzählbare unendliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine rekursive unendliche Teilmenge $B \subset A$ besitzt.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.**
Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$g(x_1, \dots, x_k, y) = \sum_{z<y} f(x_1, \dots, x_k, z)$$

auch primitiv rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.