3.6. **Exponentialabbildung.** Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $p \in S$ ein Punkt. Zu eimen Tangtialvektor $v \in T_pS$ betrachten wir die (eindeutige) Geodätische $c : I \to S$ mit $c(0) = p$, $c'(0) = v$ und maximalem Definitionsintervall I. Falls c noch zur Zeit $t = 1$ definiert ist, d.h. falls $1 \in I$, setzen wir

$$\exp_p(v) := c(1). \tag{14}$$

Ist $\exp_p$ für $v \in T_pS$ definiert und $\delta \in (0, 1]$, so ist $4 \exp_p$ für $\delta v \in T_pS$ definiert. Diese Überlegung zeigt, dass der Definitionsbereich $\mathcal{D}_p \subset T_pS$ von $\exp_p$ eine bzgl. sternförmige Teilmenge von T_pS ist und zwar

$$c_v(t) = \exp_p(tv).$$

Nach dem Satz über die Abhängigkeit der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangswerten ist $\mathcal{D}_p$ eine offene Teilmenge von T_pS und ist

$$\exp_p : \mathcal{D}_p \to S$$

eine glatte Abbildung.

Definition 3.55 (Exponentialabbildung)**.** Die Abbildung $\exp_p : \mathcal{D}_p \to S$ heißt *Exponentialabbildung.*

Beispiel 3.56. Sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die $x - y-$Ebene mit der ersten Fundamentalform als riemannsche Metrik. Sei $p \in S$ und $v \in T_pS = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Die geodätische c in S mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ ist die Gerade $c(t) = p + tv$. Also gilt $\mathcal{D}_p = T_p\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und

$$\exp_p v = p + v.$$

Beispiel 3.57. Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre, wiederum mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik. Sei $p \in S$ und $v \in T_pS = p^\perp$. Schreibe $v = \delta w$, wobei $w \in T_pS$ ein Einheitsvektor ist, $\|w\| = 1$ und $\delta = \|v\| \geq 0$. Die Geodätische c ist in S mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ ist gegeben durch den Großenkreis

$$c(t) = \cos(\delta t)p + \sin(\delta t)w.$$

Also gilt $\mathcal{D}_p = T_pS$ und

$$\exp_p(v) = \begin{cases} \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}, & v \neq 0 \\ p, & v = 0. \end{cases}$$

Lemma 3.58. *Das Differential der Exponentialabbildung an der Stelle* 0 *ist die Identität,*

$$d_0 \exp_p = id : T_pS \to T_pS.$$

Beweis: Sei $v \in T_pS$. Gemäß (14) ist die Geodätische c mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ gegeben durch

$$c(t) = \exp_p(tv).$$

Setze $\tau = tv$. τ ist eine Kurve in T_pS mit $\tau(0) = 0$ und $\tau'(0) = 0$. Nach der Definition des Differentials haben wir

$$\begin{aligned} d_0 \exp_p(v) &= \frac{d}{dt} \exp_p(\tilde{c}(t))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp_p(tv)\bigg|_t = 0 \\ &= \frac{d}{dt} c(t)\bigg|_{t=0} = c'(0) = v \end{aligned}$$

□

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung W von $0 \in \mathcal{D}_p$, so dass $\exp_{p|W} : W \to \exp_p(W) \subset S$ ein Diffeomorphismus ist.

Für eine lokale Parametrisierung (U_1, F_1, V_1) der Tangentialebene T_pS erhalten wir durch die Wahlen $U := F_1^{-1}(W)$, $F := \exp_p \circ F_{1|U}$ und $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $V \cap S = \exp_p(W)$ eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S.

Beispiel 3.59. Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $p \in S$, und sei X_1, X_2 eine Orthonormalbasis der Tangentialebene T_pS. Wir nehmen die Parametrisierung durch kartesische Koordinaten für T_pS, nämlich $U_1 = \mathbb{R}^2$ und $F_1(u^1, u^2) = \sum u^i X_i$. Die entsprechende lokale Parametrisierung von S,

$$F(u^1, u^2) = \exp_p(\sum u^i X_i),$$

heißt *Parametrisierung durch riemannsche Normalkoordinaten* (um Punkt p).

Satz 3.60. *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $p \in S$, sei F eine lokale Parametrisierung durch riemannsche Normalkoordinaten um den Punkt p. Dann gilt für die zugehörige Komponentenfunktionen der Metrik und die Christoffel-Symbole*

i) $F(0,0) = p$
ii) $g_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2$
iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0,0) = 0$ *und* $\Gamma_{ij}^k(0,0) = 0$, $i,j,k = 1,2$.

Beweis: Aussage i) ist klar und Aussage ii) besagt gerade, dass $d_0 \exp_p$ eine Identität ist. Nun brauchen wir nur noch iii) zu zeigen. Nach der Definition der Exponentialabbildung wissen wir, dass für beliebiges $x \in \mathbb{R}^2$, $t \to tx$ eine Geodätische in riemannschen Normalkoordinaten ist, d.h.

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(tx) x^i x^j = 0 \quad k = 1,2.$$

Speziell für $t = 0$ gilt somit

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(0) x^i x^j = 0, \quad k = 1,2$$

für alle x. Wegen der Symmetrie $\Gamma_{ij}^k(0) = \Gamma_{ji}^k(0)$, folgt

$$\Gamma_{ij}^k(0,0) = 0 \quad \text{für alle } i,j,k.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jm} = \sum_k \left(\Gamma_{ij}^k g_{km} + \Gamma_{im}^k g_{kj} \right)$$

folgt

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k(0,0)} = 0 \quad \text{für alle } i,j,k.$$

□

Beispiel 3.61. Sei wie oben S eine beliebige reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik, sei $p \in S$, und sei X_1, X_2 eine Orthonormalbasis von T_pS. Wir nehmen diesmal Polarkoordinaten für T_pS, $F_1(r,\varphi) = r \cdot (\cos(\varphi)X_1, \sin(\varphi)X_2)$. Die zugehörige lokale Parametrisierung von S

$$F(r,\varphi) = \exp_p(r \cdot (\cos(\varphi)X_1, \sin(\varphi)X_2))$$

ist die *Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten* (um den Punkt p).

Satz 3.62 (Gauß-Lemma). *Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik. Sei $p \in S$, und sei F eine lokale Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten (r,φ). Dann hat bzgl. dieser lokalen Parametrisierung die riemannsche Metrik die Form*

$$(g_{ij}(r,\varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

mit einer positiven Funktion f, die

$$\lim_{r\to\infty} f(r,\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 1$$

erfüllt.

Beweis: Für festes φ_0 ist die Kurve $c(r) = F(r,\varphi_0)$ nach Definition der Exponentialabbildung die Geodätische mit $c'(0) = \cos\varphi_0 X_1 + \sin\varphi_0 X_2$. Wir haben schon bewiesen, dass Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Da $c'(0)$ ein Einheitsvektor ist, so ist

$$g_{11}(r,\varphi_0) = g(c'(r), c'(r)) = 1.$$

Da die riemannsche Metrik positiv definit ist, ist $g_{22} > 0$ und kann in der Form $g_{22} = f^2$ geschrieben werden. Ähnlich wie früher berechnen wir

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} f^2 &= \lim_{r\to 0} g_{22}(r,\varphi_0)\\
&= \lim_{r\to 0} g\left(d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi_0}(r,\varphi_0)\right), d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi_0}(r,\varphi_0)\right)\right)\\
&= \lim_{r\to 0} g\left(d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p(rY_1), d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p(rY_2)\right)\\
&= g\left(d_0\exp_p(0), d_0\exp_p(0)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi_0) &= \lim_{r\to 0}\frac{f(r,\varphi_0)}{r} = \lim_{r\to 0}\sqrt{\frac{g_{22}(r,\varphi_0)}{r^2}}\\
&= \sqrt{\lim_{r\to 0} g\left(d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p(Y_2), d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p(Y_2)\right)}\\
&= \sqrt{g\left(d_0\exp_p(Y_2), d_0\exp_p(Y_2)\right)} = \sqrt{g(Y_2,Y_2)}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.63. *Seien die Bezeichnungen wie in Satz 3.62. Dann gilt für die Gauß-Kümmung*

$$K(F(r,\varphi)) = -\frac{1}{f(r,\varphi)}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r,\varphi).$$

Beweis: Gemäß Satz 3.62 hat die riemannsche Metrik in geodätischen Polarkoordinaten die Form

$$(g_{ij}(r,\varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & f^2(r,\varphi)\end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist

$$(g_{ij}(r,\varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & f^{-2}(r,\varphi)\end{pmatrix}.$$

Man berechnet durch die Formel $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^2\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) g$

$$\Gamma_{22}^1 = -f\frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{und} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

die Christoffel-Symbole, die nicht verschwinden. Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{12}}{\partial r}(r,\varphi_0) &= \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{(r,\varphi)} g\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \\
&= g\left(\frac{\nabla}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi_0), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi_0)\right) + g\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi_0), \frac{\nabla}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi_0)\right) \\
&= g\left(\underbrace{\frac{\nabla}{r}c'(r)}_{=0}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi_0)\right) + g\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi_0), \frac{\nabla}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi_0)\right) \\
&= g\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi_0), \frac{\nabla}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\underbrace{g\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r}\right)}_{=1}\Big|_{(r,\varphi_0)} = 0.
\end{aligned}
$$

Somit ist für festes $\varphi = \varphi_0$ die Funktion g_{12} konstant in r. Setze $Y_1 := \cos\varphi_0 X_1 + \sin\varphi_0 X_2$ und $Y_2 := -\sin\varphi_0 X_1 + \cos\varphi_0 X_2$. Dies ist auch die Orthonormalbasis von T_pS. Setze $\tilde{F}(r,\varphi) = r\,(\cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2)$. Klar ist

$$
\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi_0) = Y_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r,\varphi_0) = rY_2.
$$

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} g_{12}(r,\varphi_0) &= \lim_{r\to 0} g\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi_0), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi_0)\right) \\
&= \lim_{r\to 0} g\left(d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi_0)\right), d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r,\varphi_0)\right)\right) \\
&= \lim_{r\to 0} g\left(d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p(Y_1), d_{\tilde{F}(r,\varphi_0)}\exp_p(rY_2)\right) \\
&= g\left(d_0\exp_p(Y_1), d_0\exp_p(0)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Da g_{12} konstant ist, ist $g_{12} = g_{21} = 0$. Also

$$
(g_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.
$$

Die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial r}$ und $\frac{1}{f}\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ bilden eine Orthonormalbasis der Tangentialebene. Nach dem Theorema Egregium ist die Gauß-Krümmung gegeben durch

$$\begin{aligned}
\kappa &= g\left(R\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{f}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{1}{f}\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial r}\right)\right) \\
&= \frac{1}{f^2} R^1_{122} \\
&= \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial \varphi} + \Gamma^1_{1k}\Gamma^k_{22} - \Gamma^1_{2k}\Gamma^k_{22}\right) \\
&= \frac{1}{f^2}\left(-\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 - f\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 0 + 0 + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{22}\right) \\
&= \frac{1}{f^2}\left(-\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 - f\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r^2}\right)^2\right) \\
&= -\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. In geodätischen Polarkoordinaten ist die gesamte Information über die riemannsche Metrik in der Funktion f enthalten. Falls die Gauß-Krümmung $k = \kappa$ konstant ist, d.h.,

$$\kappa = -\frac{1}{f(r,\varphi)}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r,\varphi),$$

(mit den Anfangsbedingungen $f(0,\varphi) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial r}(0,\varphi) = 1$) erhalten wir

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa} r), & \kappa > 0 \\ r, & \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa} r), & \kappa < 0. \end{cases}$$

Korollar 3.64. *Sind S_1 und S_2 zwei reguläre Flächen mit derselben konstanten Gauß-Krümmung κ, so sind S_1 und S_2 lokal isometrisch.*

Es gibt noch Koordinaten, die besonders an eine vorgegebene Kurve auf der Fläche angepasst sind.

Lemma 3.65. *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $c : I \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei $n : I \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld längs c mit $\|n(t)\| = 1$ und $\langle c', n\rangle \equiv 0$. Dann gibt es zu jedem $t_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, \quad F(t,s) := \exp_{c(t)}(sn(t)),$$

eine lokale Parametrisierung von S ist. Längs c hat die riemannsche Metrik bezüglich dieser Parametrisierung die Gestalt

$$(g_{ij}(t,0))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,0) = \frac{d}{dt}\exp_{c(t)}(0) = c'(t)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial s}(t,0) = d_{c(t)}\exp_{c(t)}(n(t)) = n(t).$$

Die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial t}(t,0)$ und $\frac{\partial F}{\partial s}(t,0)$ bilden eine Orthonormalbasis von $T_{c(t)}S$. Nach dem Umkehrsatz ist F nach geeigneter Einschränkung eine lokale Parametrisierung. Wegen der Orthogonalität ist die Behauptung über $g_{ij}(t,0)$ klar. $\square$