Funktionentheorie SS 2004

D. Wolke

Literatur

J.B. Conway, Functions of one complex variable, Springer, 1978
W. Fischer, I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg, 1980
E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie, Springer, 1991
K. Jänich, Funktionentheorie, Springer, 1991
R. Remmert, Funktionentheorie I, II, Springer, 1989/90

Bezeichnungen

$a, b, c, d, t, x, y, \varepsilon, \delta, r, \varphi, \in \mathbb{R}$,
$s, w, z \in \mathbb{C}$,
$k, \ell, m, n, \in \mathbb{N}; \quad \nu, \mu \in \mathbb{Z}$.

1. Kapitel. Grundbegriffe
1.1. Der Körper der komplexen Zahlen
1.1.1. Def.

(1) $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, definiert durch
$(a, b) + (c, d) := (a + c,\ b + d)$,
$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd,\ bc + ad)$.
bildet einen Körper, den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. $(0, 0)$ und $(1, 0)$ sind die neutralen Elemente bzgl. $+$ bzw. $\cdot$.
Für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist $\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}, \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}\right) \cdot (a, b) = (1, 0)$.
$i := (0, 1),\ i \cdot i = (-1, 0)$.

(2) Die Paare $(a, 0)$ bilden einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper von $\mathbb{C}$. Die Elemente $(a, 0)$ werden mit den reellen Zahlen a identifiziert. $a + ib := (a, b) = (a, 0) + ((0, 1) \cdot (b, 0))$.

(3) $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{R}$. $\{1, i\}$ ist eine Basis.

(4) $z = a + ib$, Re $z := a$ (**Realteil** von z), Im $z := b$ (**Imaginärteil** von z).
$\bar{z} := a - ib$, (**konjugiert Komplexes** zu z).

(5) $|z| := (z\bar{z})^{1/2} = (a^2 + b^2)^{1/2} \in \mathbb{R}_0^+$ (**Absolutbetrag** von z).
$|zw| = |z|\ |w|,\ |\bar{z}| = |z|$.

(6) **Folg.** $\mathbb{C}$ mit der Abstandsfunktion $d(z,w) := |z-w|$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

(7) **Folg.** $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden, insbesondere kann die $\leq$–Relation auf $\mathbb{R}$ nicht zu einer Anordnung des Körpers $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

1.1.2. Def. (Polarkoordinaten)

(1) $z = a + ib \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Beh. Es existiert genau ein $r > 0$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi,\ z = re^{i\varphi}$. $r = |z|,\ \varphi$ heißt das **Argument** von z $(\varphi = \arg z)$.

(**Hinweis:** Die Festlegung arg $z \in [0, 2\pi)$ ist willkürlich. Es kann ebensogut arg $z \in [a, a+2\pi)$ bzw. $\in (a, a+2\pi]$ für irgendein $a \in \mathbb{R}$ gefordert werden).

Folg. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$
(de Moivre'sche Formel. Abraham d.M., 1667-1754).

1.1.3. Def. und Folg. $n \geq 1$.

(1) Eine Zahl z mit $z^n = 1$ heißt n–te **Einheitswurzel**.

(2) Es existieren genau n n–te Einheitswurzeln. Diese haben die Gestalt

$$e^{i\varphi_\nu} \quad (\varphi_\nu = \frac{2\pi\nu}{n},\ \ 0 \leq \nu \leq n-1).$$

(3) Zu jedem $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gibt es genau n Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.

$$z = r\ e^{i\varphi} \Rightarrow w = r^{1/n}e^{i\varphi_\nu} \ \text{ mit } \ \varphi_\nu = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi\nu}{n}\ (0 \leq \nu \leq n-1).$$

1.1.4. Def. und Folg.

(1) $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Auf $\mathbb{C}^*$ werde wie folgt eine Metrik d definiert. Sei K die Kugel vom Radius $1/2$ mit $(0,0,1/2)$ als Mittelpunkt. $z = a + ib$ werde identifiziert mit $(a,b,0) \in \mathbb{R}^3$. $z' \in \mathbb{R}^3$ sei der von (0,0,1) verschiedene Schnittpunkt der Geraden durch (0,0,1) und z mit der Kugeloberfläche. Bezeichne ρ den euklidischen Abstand zweier Punkte $\in \mathbb{R}^3$.
$d(z,w) := \rho(z',w')$, $d(z,\infty) := \rho(z',(0,0,1))$.

Folg. (2) $d(z,w) = \dfrac{|z-w|}{((1+|z|^2)(1+|w|^2))^{1/2}}, \quad d(z,\infty) = \dfrac{1}{(1+|z|^2)^{1/2}}.$

(3) $(\mathbb{C}^*, d)$ ist ein kompakter, vollständiger, metrischer Raum. (s. § 1.2).

1.2. Topologische Grundbegriffe

$(M,\rho), (M_\nu, \rho_\nu)$ metrische Räume; $A, B \subseteq M$. $\mathbb{C}$ wird stets mit der $|\ |$-Metrik versehen. $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

1.2.1. Def.

(1) $r > 0,\ \alpha \in M,\ U_r(\alpha) := \{\beta \in M \mid \rho(\alpha,\beta) < r\}$
(**offene Kugel** bzw. Kreis vom Radius r um den Punkt α).

(2) A heißt **offen** $:\Leftrightarrow \forall\ \alpha \in A\ \exists\ r > 0:\ U_r(\alpha) \subseteq A$,

(3) A heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow CA := M\backslash A$ offen ($\Leftrightarrow$ A enthält alle seine Häufungspunkte)

(4) $\underline{A} := \cup\ (B \subseteq A,\ B$ offen) (offenes **Inneres** bzw. **Kern** von A).

(5) $\bar{A} := \cap\ (B \supseteq A,\ B$ abgeschlossen) (**abgeschlossene Hülle** von A),

(6) $\partial A := \bar{A}\backslash\underline{A}$ (**Rand** von A, auch **Rand A**).

(7) A heißt **dicht** in M $:\Leftrightarrow \bar{A} = M$.

Folg. $\partial A = \{x \mid \forall\ r > 0 : U_r(x) \cap A \neq \emptyset\ \wedge\ U_r(x) \cap CA \neq \emptyset\}$.

1.2.2. Def. M offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(1) M heißt **zusammenhängend**, wenn M nicht Vereinigung zweier nichtleerer, offener, disjunkter Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist.

(2) Eine offene, zusammenhängende, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$ heißt **Gebiet**.

1.2.3. Satz. $M \subseteq \mathbb{C}$, offen.

Beh. M zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Zu je zwei Punkten $z, w \in M$ existiert ein Polygonzug von z nach w, der ganz in M verläuft.

1.2.4. Satz (von Cantor; Georg C., 1845–1918).

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(a) M ist vollständig (d.h. jede Cauchy–Folge aus M konvergiert in M),

(b) $A_n (n \in \mathbb{N})$ nichtleere, abgeschlossene Mengen $\subseteq M \wedge$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \wedge \lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha,\beta \in A_n} \rho(\alpha,\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ besteht aus genau einem Punkt.}$$

1.2.5. Def.

(1) $A \subseteq M$ heißt **kompakt** $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von A besitzt eine endliche Teilüberdeckung (d.h. $I \neq \emptyset, A \subseteq \bigcup_{j\in I} B_j \wedge \forall j \in I : B_j$ offen $\Rightarrow \exists\ k\ \exists\ j_1, \ldots, j_k \in I : A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{k} B_{j_\nu}$).

(2) A heißt **folgenkompakt** : $\Rightarrow$ Jede Folge aus A besitzt eine (in A) konvergente Teilfolge.

1.2.6. Satz. In einem metrischen Raum M sind folgende Bedingungen gleichwertig:

(a) M ist kompakt,

(b) Jede unendliche Teilmenge von M besitzt mindestens einen Häufungspunkt,

(c) M ist folgenkompakt.

1.2.7. Satz (von Heine–Borel; Eduard H., 1821–1881; Emile B., 1871–1956).

In $M = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ gilt: $A \subseteq M$ kompakt $\Leftrightarrow$ A abgeschlossen und beschränkt.

1.2.8. Def. $f : M_1 \to M_2$. $\alpha \in M_1$, $\beta = f(\alpha) \in M_2$.

(1) f heißt **stetig in** α : $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \gamma \in U_\delta(\alpha) : f(\gamma) \in U_\varepsilon(\beta)$,

(2) f heißt **stetig auf** M_1 : $\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in M_1 : f$ stetig in α.

1.2.9. Satz. f wie in 1.2.8. Folgende Bedingungen sind gleichwertig:

(a) f stetig auf M_1,

(b) $\forall\, B \subseteq M_2 : B$ offen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ offen (inM_1),

(c) $\forall\, B \subseteq M_2 : B$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen (in M_1).

1.2.10. Satz. f wie in 1.2.8. stetig auf M_1; $A \subseteq M_1$.

A kompakt $\Rightarrow f(A)$ kompakt (in M_2).

1.2.11. Def. $A, B \subseteq M, \neq \emptyset$; $\gamma \in M$.

$$d(\gamma, A) := \inf_{\alpha \in A} \rho(\gamma, \alpha),$$
$$d(A, B) := \inf_{\alpha \in A, \beta \in b} \rho(\gamma, \beta)$$

(**Abstand** des Punktes γ und der Menge A bzw. der Mengen A und B).

1.2.12. Satz γ, A, B wie in 1.2.11.

(1) $d(\gamma, A) = d(\gamma, \bar{A})$,

(2) $d(\gamma, A) = 0 \Leftrightarrow \gamma \in \bar{A}$,

(3) $A \cap B = \emptyset$, A kompakt, B abgeschlossen $\Rightarrow d(A, B) > 0$.

2. Kapitel. Holomorphe Funktionen

G Gebiet in $\mathbb{C}, f : G \to \mathbb{C}$

2.1. Holomorphie, Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen

2.1.1. Def.

(1) $z_0 \in G$,

f heißt in z_0 **differenzierbar** $:\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert. Im Fall der Existenz wird er $f'(z_0)$ oder $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ genannt.

(2) f heißt **holomorph** (oder analytisch oder regulär) **auf** $\boldsymbol{G}$ $:\Leftrightarrow f$ ist auf G differenzierbar. $H(G) := \{f : G \to \mathbb{C} |\ f \text{ holomorph auf } G\}$.

(3) f heißt **holomorph in** z_0 $:\Leftrightarrow \exists\, r > 0 : U_r(z_0) \subseteq G \wedge f$ differenzierbar auf $U_r(z_0)$.

Folg. Bzgl. f' gelten die gleichen Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$ (Addition, Multiplikation, Kettenregel).

2.1.2. Satz. G_1, G_2 Gebiete. $f : G_1 \to G_2,\ g : G_2 \to \mathbb{C};\ f, g$ stetig.

$\forall\, z \in G_1 : g(f(z)) = z.\ w_0 \in G_2,\ z_0 = g(w_0).\ g$ differenzierbar in $w_0 \wedge g'(w_0) \neq 0$.

f differenzierbar in $z_0 \wedge f'(z_0) = \dfrac{1}{g'(w_0)}$.

2.1.3. Satz. G werde durch $z = x + iy \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit dem Gebiet $G_2 \subseteq\ R^2$ identifiziert. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) :\ u, v : G_2 \to \mathbb{R}$ (Real- und Imaginärteil von f). f holomorph auf G.

Beh.

(1) u und v sind auf G_2 einmal partiell differenzierbar und es bestehen die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(Cauchy–Riemannsche Dgl.; Augustin Louis C., 1789–1857, Bernhard R., 1826–1866).

(2) Falls u und v auf G_2 zweimal stetig differenzierbar sind, gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

(d.h., u und v sind auf G_2 **harmonisch**).

2.1.4. Satz. $h_1, h_2 : G_2 \to \mathbb{R}$, stetig partiell differenzierbar.

Beh. $g(z) := h_1(x, y) + i\ h_2(x, y)$ holomorph auf $G \Leftrightarrow h_1$ und h_2 genügen den Cauchy–Riemannschen–Differentialgleichungen.

2.1.5. Satz. f differenzierbar auf $G \wedge\ \forall\, z \in G : f'(z) = 0 \Rightarrow f$ ist konstant.

2.2. Potenzreihen

$a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$.

2.2.1. Def. Eine Reihe der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ heißt **Potenzreihe** mit den Koeffizienten a_ν und der Entwicklungsmitte z_0 (bzw. Potenzreihe um z_0).

2.2.2. Satz (von Cauchy–Hadamard; Jaques H., 1866–1963).

$$R := \begin{cases} 0, & \text{falls } \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty, \\ \infty, & \text{falls } \quad -"- \quad = 0, \\ (\overline{\lim})^{-1}, & \text{falls } \quad -"- \quad \in (0,\infty). \end{cases}$$

(**Konvergenzradius** der Reihe)

Beh.

(1) Im Fall $R = 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ nur bei $z = z_0$.

(2) Im Fall $R \in (0,\infty)$ konvergiert die Reihe für $|z-z_0| < R$, gleichmäßig in jedem Kreis $|z-z_0| \le r,\ 0 < r < R$. Divergenz für $|z-z_0| > R$.

(3) Im Fall $R = \infty$ konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$, gleichmäßige Konvergenz in jedem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C}$.

(4) Die Reihe stellt für $|z-z_0| < R$ (bzw. $z \in \mathbb{C}$) eine holomorphe Funktion f dar. f ist dort beliebig oft differenzierbar

$$\wedge\ f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

(5) $\forall\ \nu \ge 0 : a_\nu = \dfrac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$, d.h. die vorgegebene Potenzreihe ist die Taylorreihe von f.

2.2.3. Satz und Def.

(1) Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{z^\nu}{\nu!}$ konvergiert auf $\mathbb{C}$. Die durch sie dargestellte Funktion heißt die **Exponentialfunktion** $f(z) = e^z = exp\ z$

$$\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} : e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

(2) $\cos z := 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - + \dots,\qquad \sin z := z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - + \dots$
(Konvergenz auf $\mathbb{C}$).

(3) $\cos z = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\qquad \sin z = \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),\qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$

2.2.4. Def. $f : G \to \mathbb{C}$, stetig. f heißt ein **Zweig des Logarithmus** (auf G)

$:\Leftrightarrow \forall\ z \in G : \exp(f(z)) = z$.

2.2.5. Satz.

(1) f_1, f_2 Zweige des Logarithmus auf $G \Rightarrow$

$$\exists\ \nu \in \mathbb{Z}\ \forall\ z \in G : f_2(z) - f_1(z) = 2\pi i\nu.$$

(2) f Zweig des Logarihmus $\Rightarrow$ f holomorph auf $G \wedge\ f'(z) = \frac{1}{z}$.

(3) Die Funktion $f : G_1 := \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \to \mathbb{C}, z \to \log|z| + i \arg z$. $(-\pi < \arg z < \pi)$ ist ein Zweig des Logarithmus, der sogenannte **Hauptzweig**.

2.2.6. Def. G_1 wie in 2.2.5. (3), $\log : G_1 \to \mathbb{C}$ Hauptzweig des Logarithmus. $z \in G_1$, $w \in \mathbb{C}$. $z^w := \exp(w \log z)$

(Verallgemeinerte Potenzfunktion).

2.3. Konforme Abbildungen G Gebiet in $\mathbb{C}, G_2$ wie in 2.1.3. das G zugeordnete Gebiet in $\mathbb{R}^2$.

2.3.1. Def. (1) $h = (h_1, h_2) : G_2 \to \mathbb{R}^2$, (reell) differenzierbar.

$$J_h(x,y) := \begin{pmatrix} D_1h_1 & D_2h_1 \\ D_1h_2 & D_2h_2 \end{pmatrix} \ (x,y)$$

ist das Differential oder die Jacobi–Matrix von h bei $(x,y) \in G_2$.

h heißt **konform** in $G_2 \Leftrightarrow\ \forall\ (x,y) \in G_2$: Die durch $J_h(x,y)$ beschriebene lineare Abbildung ist eine Drehstreckung, d.h. winkel– und orientierungstreu.

Folg. h ist konform in $G_2 \Leftrightarrow$ auf G_2 gilt
$D_2h_2 = D_1h_1\ \wedge\ D_1h_2 = -D_2h_1\ \wedge\ (D_1h_1, D_2h_1) \neq \underline{0}$.

(2) $g : G \to \mathbb{C},\ g(z) = h_1(x,y) + i\ h_2(x,y)$. g heißt **konform** in $G :\Leftrightarrow h = (h_1, h_2)$ ist konform in G_2.

2.3.2. Satz. $g : G \to \mathbb{C}$.

Beh. g ist konform auf $G \Leftrightarrow g \in H(G)\ \wedge\ \forall\ z \in G : g'(z) \neq 0$.

2.3.3. Def. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\ \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

(1) Die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{\frac{-\delta}{\gamma}\} \to \mathbb{C},\ z \to \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\ \text{ falls }\ \gamma \neq 0\ ;\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \to \frac{\alpha z + \beta}{\delta},\ \text{ falls } \gamma = 0$$

heißt **Möbius–Transformation** (August Ferdinand M., 1790–1868).

(2) Durch $f(\frac{-\delta}{\gamma}) := \infty,\ \ f(\infty) := \frac{\alpha}{\gamma}$, falls $\gamma \neq 0$; $f(\infty) = \infty$, falls $\gamma = 0$ wird f eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{C}^*$.

(3) Spezialfälle:

$$f(z) = z + \beta \quad \text{(Translation)}, \qquad = \alpha z,\ \alpha \neq 0 \quad \text{(Drehstreckung)}, \qquad = \tfrac{1}{z} \quad \text{(Inversion)}.$$

2.3.4. Folgerungen

(1) Die Möbius–Transformationen (MT) bilden mit der Verkettung als Verknüpfung eine Gruppe. Diese wird erzeugt von den Translationen, Drehstreckungen und der Inversion.

(2) Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ heißen Kreise in $\mathbb{C}^*$. Kreise in $\mathbb{C}^*$ sind genau diejenigen komplexen Punktmengen, deren Elemente z einer Gleichung

$$(^*) \qquad A\ z\ \bar{z} + B\ z + \bar{B}\ \bar{z} + C = 0$$

genügen mit

$$(^{**}) \qquad A, C \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{C},\ AC < |B|^2.$$

Bei $A = 0$ handelt es sich um eine Gerade.

(3) Eine MT führt Kreise (in $\mathbb{C}^*$) in Kreise über.

3. Kapitel. Integration

G Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$.

3.1. Wegintegrale

3.1.1. Def.

(1) $a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad I = [a, b]$. $\gamma : I \to G$, stetig. Das Paar $W := (I, \gamma)$ heißt **Weg** in G.

(2) $W = (I, \gamma)$ heißt **glatt**:$\Leftrightarrow$ $\forall\ t \in I : \gamma'(t) = \lim\limits_{h \to 0, t+h \in I} \dfrac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$ existiert $\wedge\ \gamma' : I \to \mathbb{C}$ stetig.
W heißt **stückweise glatt**, wenn es eine Partition von I gibt, so daß γ auf jedem Teilintervall stetig differenzierbar ist.

(3) $W = (I, \gamma)$ heißt **geschlossen**:$\Leftrightarrow$ $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3.1.2. Def. $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ Partition von I.

$L(P) := \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma(x_\nu) - \gamma(x_{\nu-1})|$ ist die Länge des Polygonzugs durch $\gamma(x_0), \ldots, \gamma(x_n)$.

W heißt **rektifizierbar** :$\Leftrightarrow$ $\sup\limits_P L(P) < \infty$.

Im Fall $\sup < \infty$ heißt $L(W) := \sup\ L(P)$ die **Länge** des Weges W.

3.1.3. Satz. W stückweise glatt.

Beh. W ist rektifizierbar $\wedge\ L(W) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$.

3.1.4. Def. W Weg in G.

(1) $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ Partition von $[a,b]$, $\quad t_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.
$S(f,P,t) := \sum\limits_{\nu=1}^{n} f(\gamma(t_\nu))(\gamma(x_\nu) - \gamma(x_{\nu-1}))$ heißt **Riemann–Summe** zur Partition P.

(2) f heißt **integrierbar längs** $W \wedge \int\limits_W f(z)\,dz = s :\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ P = \{x_0, \ldots, x_n\}\ \forall\ t_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu] : \max\limits_{1 \le \nu \le n} (x_\nu - x_{\nu-1}) < \delta \Rightarrow |S(f,P,t) - s| < \varepsilon$.

3.1.5. Satz. W rektifizierbarer Weg in G, f stetig auf G.

Beh. f längs W integrierbar.

3.1.6. Satz. f, g beschränkt und integrierbar auf $W, \alpha \in \mathbb{C}, W$ rektifizierbar in G.

Beh.

(1) $\Big|\int\limits_W f(z)\,dz\Big| \le L(W) \sup\limits_W |f(z)|$ (Standard–Abschätzung).

(2) $\alpha f, f+g, fg, |f|$ längs W integrierbar $\wedge \int\limits_W \alpha\ f(z)\,dz = \alpha \int\limits_W f(z)\,dz$,
$\int\limits_W (f+g)(z)\,dz = \int\limits_W f(z)\,dz + \int\limits_W g(z)\,dz$.

(3) $a \le c \le b,\ I_1 = [a,c],\ I_2 = [c,b],\ W_\nu = (I_\nu, \gamma) \Rightarrow f$ integrierbar auf W_1 und $W_2 \wedge$

$$\int\limits_W f(z)\,dz = \int\limits_{W_1} f(z)\,dz + \int\limits_{W_2} f(z)\,dz.$$

(4) $W = ([a,b], \gamma), \quad -W := ([a,b], \vartheta)$ mit $\vartheta(t) = \gamma(b - (t-a))$
(W im entgegengesetzten Sinn durchlaufen).

Beh. $\int\limits_{-W} f(z)\,dz$ existiert und ist $= -\int\limits_W f(z)\,dz$.

3.1.7. Satz. W stückweise glatt in G, f stetig auf $G \Rightarrow \int\limits_W f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

3.1.8. Def. (1) $I_\nu = [a_\nu, b_\nu],\ W_\nu = (I_\nu, \gamma_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$. Die Wege W_1 und W_2 heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow \exists\ \varphi : I_1 \to I_2 :$

(a) φ stetig differenzierbar $\wedge\ \varphi' > 0$ auf I_1.

(b) $\varphi(a_1) = a_2,\ \varphi(b_1) = b_2$,

(c) $\forall\ t \in I_1 : \gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$.

Folg.

a) Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege.

b) Rektifizierbarkeit, Weglänge, Integrierbarkeit einer Funktion f und der Wert des Integrals sind invariant innerhalb einer Äquivalenzklasse.

(2) Eine **Kurve** in $\mathbb{C}$ ist eine Äquivalenzklasse von Wegen.

(3) $(I, \gamma) = W \in K$,

$Sp(K) := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists\ t \in I : z = \gamma(t)\}$ (**Spur** der Kurve).

Folg. $Sp(K)$ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten W.

3.2. Stammfunktionen.

3.2.1. Def. $F : G \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von $f :\Leftrightarrow F$ differenzierbar $\wedge\ F' = f$. Im Fall der Existenz einer Stammfunktion heißt f **integrabel** (auf G).

3.2.2. Satz. $W = ([a, b], \gamma)$ rektifizierbarer Weg in G.

$f : G \to \mathbb{C}$, stetig; F Stammfunktion von f.

Beh.

(1) $\displaystyle\int_W f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

(2) W geschlossen $\Rightarrow \displaystyle\int_W f(z)\,dz = 0$.

3.2.3. Satz. $f : G \to \mathbb{C}$, stetig. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) f ist integrabel.

(2) Für jeden geschlossenen, rektifizierbaren Weg W in G gilt $\displaystyle\int_W f(z)\,dz = 0$.

3.2.4. Def. G heißt **sternförmig** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein $z_0 \in G$ (Zentrum), so daß für jedes $z \in G$ die Strecke $\overline{z_0 z}$ zu G gehört.

3.2.5. Satz. G sternförmig mit Zentrum z_0. $f : G \to \mathbb{C}$, stetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(1) f ist integrabel.

(2) $\displaystyle\int_D f(z)\,dz = 0$ für jeden in G verlaufenden Dreiecksweg D, dessen eine Ecke in z_0 liegt.

4. Kapitel. Hauptsätze über holomorphe Funktionen

G Gebiet, $f \in H(G)$, W rektifizierbarer Weg in G.

4.1. Der Satz von Cauchy–Goursat (Edward G., 1858–1936).

4.1.1. Satz (Goursat). Δ abgeschlossenes Dreieck in G, $W = \partial\Delta$.

Beh. $\displaystyle\int_W f(z)\,dz = 0.$

4.1.2. Satz. (Spezialfall des Cauchyschen Integralsatzes).

G sternförmig, W geschlossen.

Beh. $\displaystyle\int_W f(z)\,dz = 0.$

4.1.3. Satz (Spezialfall der Cauchyschen Integralformel).

$z_0 \in G,\ r > 0.\ \bar{U}_r(z_0) \subseteq G,\ W = ([0, 2\pi], \gamma(t) = z_0 + r\ e^{it})$

(Rand des Kreises, im positiven Sinn durchlaufen), $\mid z - z_0 \mid < r$.

Beh. $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_W \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$

4.2. Taylor–Entwicklung holomorpher Funktionen.

4.2.1. Satz. $f_n : G \to \mathbb{C}$, stetig ($n \in \mathbb{N}$). (f_n) konvergiere auf $Sp(W)$ gleichmäßig gegen f.

Beh. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_W f_n(z)\,dz = \int_W f(z)\,dz.$

4.2.2. Satz. $z_0 \in G$, $R := \sup\limits_r \big\{U_r(z_0) \subseteq G\big\}$, $f \in H(G)$.

Beh.

(1) f ist in z_0 beliebig oft differenzierbar.

(2) In $U_R(z_0)$ gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}\,(z - z_0)^{\nu},$$

d.h. f kann in jedem offenen Kreis um z_0, der ganz zu G gehört, Taylor–entwickelt werden.

(3) $\nu \in \mathbb{N}_0,\ W = \partial U_r(z_0)\quad (0 < r < R$, positiv orientiert). Dann gilt

$$f^{(\nu)}(z_0) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int\limits_W \frac{f(w)}{(w - z_0)^{\nu+1}}\, dw.$$

(4) $\left|f^{(\nu)}(z_0)\right| \leq \frac{\nu!}{r^\nu} \max\limits_{|w-z_0|=r} \left|f(w)\right| \quad (0 < r < R,$ Cauchysche Ungleichung)

4.2.3. Def. G_1 Gebiet mit $G \subseteq G_1$. f heißt **holomorph** (analytisch) **fortsetzbar** auf $G_1 :\Leftrightarrow$ Es existiert ein auf G_1 holomorphes g mit $g = f$ auf G.

4.2.4. Satz. Der Konvergenzradius der Reihe 4.2.2. (2) ist das Supremum der Zahlen R mit der Eigenschaft: f ist in $G \cup U_R(z_0)$ holomorph fortsetzbar.
Oder: Im Fall $R < \infty$ liegt auf dem Rand des Konvergenzkreises mindestens ein **singulärer Punkt** z_1 von f, d.h. es existiert kein $\delta > 0$, so daß f in $G \cup U_\delta(z_1)$ holomorph fortsetzbar ist.

4.3. Identitätssätze $f, g \in H(G)$.
4.3.1. Satz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) $f = g$ auf G.

(2) Die "Identitätsmenge" $\{w \in G \mid f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G.

(3) Es gibt ein $z_0 \in G$, so daß $\forall\ \nu \in \mathbb{N}_0 : f^{(\nu)}(z_0) = g^{(\nu)}(z_0)$.

4.3.2. Satz (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung).

G_1 Gebiet mit $G \subseteq G_1$.

Beh. Falls f holomorph von G auf G_1 fortgesetzt werden kann, dann ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt.

4.3.3. Satz. $w \in \mathbb{C}$. $z \in G$ heißt w-Stelle von f, wenn $f(z) = w$. K Kompaktum in G. f nicht konstant.

Beh.

(1) K enthält höchstens endlich viele w–Stellen von f.

(2) Die Menge der w–Stellen von f ist höchstens abzählbar und besitzt in G keinen Häufungspunkt.

4.4. Ganze Funktionen

4.4.1. Def. Eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt **ganz.**

4.4.2. Satz $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ganz. $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beh. $\forall\ z : f(z) = \sum\limits_{\nu=0} \frac{f^{(\nu)} z_0}{\nu!}\ (z - z_0)^\nu.$

4.4.3. Satz von Liouville (Joseph L., 1809–1882).

Eine beschränkte, ganze Funktion ist konstant.

4.4.4. Fundamentalsatz der Algebra (Carl Friedrich Gauß, 1777–1855).

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom vom Grad $n \geq 1$.

Beh.

(1) $\exists\ \alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0$.

(2) $p(z) = \beta_n z^n + \ldots + \beta_0 \Rightarrow \exists\ k \leq n$
$\exists\ m_1, \ldots, m_k\ \in \mathbb{N}\ \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C} : \quad m_1 + \ldots + m_k = n \wedge \alpha_\nu$
paarweise verschieden $\quad \wedge \forall\ z \in \mathbb{C} : p(z) = \beta_n (z - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_k)^{m_k}$
(m_ν ist die **Vielfachheit** der Nullstelle α_ν).

4.4.5. Satz $f \in H(G)$, nicht identisch $= 0$. $z_0 \in G$, $f(z_0) = 0$.

(1) Es existiert genau ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. m heißt die Ordnung der Nullstelle z_0 von f bzw. z_0 heißt m–fache Nullstelle.

(2) Sei z_0 m–fache Nullstelle von f. Dann gibt es ein $g \in H(G)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$\forall\, z \in G : \ f(z) = (z - z_0)^m\, g(z).$$

4.4.6. Satz (Einzigkeit von $\mathbb{C}$).

Für $n > 1$ sei auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ eine Multiplikation eingeführt, so daß

1) $K = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ Körper ist, und

2) $\mathbb{R}$ sei Unterkörper von K in der Weise, daß die Vektorraummultiplikation (d.h. Multiplikation von reellen Zahlen mit Vektoren $\in \mathbb{R}^n$) mit der Multiplikation in K übereinstimmt.

Dann ist $n = 2$ und K isomorph $\mathbb{C}$.

4.5. Gebietstreue und Maximumprinzip

4.5.1. Satz von der Gebietstreue.

f holomorph und nicht konstant auf dem Gebiet G.

Beh. $f(G)$ ist ein Gebiet.

4.5.2. Satz (Maximumprinzip).

f holomorph und nicht konstant auf G.

Beh.

(1) $|f|$ besitzt in G kein lokales Maximum.

(2) Sei G beschränkt und f stetig auf $\bar{G}$ fortsetzbar. Dann besitzt $|f|$ auf ∂G ein Maximum.

(3) $f \neq 0$ in G. Dann besitzt $|f|$ in G kein lokales Minimum.

4.5.3. Satz. $\mathrm{Re} f$ oder $\mathrm{Im} f$ oder $|f|$ oder $\arg f$ konstant auf G.

Beh. f konstant auf G.

4.5.4. Schwarzsches Lemma (Hermann Amandus Sch., 1843–1921)

$E := \{|z| < 1\}$. $f : E \to E$, holomorph. $f(0) = 0$.

Beh.

(1) $\forall\ z \in E : |f(z)| \leq |z| \wedge |f'(0)| \leq 1$.

(2) Falls ein $z \in E \backslash \{0\}$ existiert mit $|f(z)| = |z|$ oder falls $|f'(0)| = 1$, dann existiert ein α mit $|\alpha| = 1$, so daß $\forall\ z \in E : f(z) = \alpha z$.

4.6. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

W geschlossener, rektifizierbarer Weg in G.

4.6.1. Satz und Def.

$z \notin Sp(W)$.

Beh.

(1) $ind_w(z) := \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_W \frac{d\xi}{\xi - z}$ ist eine ganze Zahl.

$ind_w(z)$ heiß der **Index** oder die **Umlaufzahl** von W bezüglich z.

(2) $ind_w : \mathbb{C} \setminus Sp(W) \to \mathbb{Z}$ ist lokal-konstant (d.h. zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus Sp(W)$ existiert eine Umgebung von z, auf der ind_w gleich $ind_w(z)$ ist).

(3) $Int\ W := \{z \in \mathbb{C} \setminus Sp(W) \mid ind_w(z) \neq 0\}$, **Inneres** von W.

$Ext\ W := \{z \in \mathbb{C} \setminus Sp(W) \mid ind_w(z) = 0\}$, **Äußeres** von W.

$\mathbb{C}$ ist disjunkte Vereinigung von $Int\ W, Ext\ W$ und $Sp(W)$.

(4) $Int\ W$ ist beschränkt, $Ext\ W$ ist unbeschränkt.

4.6.2 Cauchyscher Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(1) $Int\ W \subseteq G$.

(2) Für alle $f \in H(G)$ gilt $\int\limits_W f(z)\,dz = 0$.

(3) Für alle $f \in H(G)$ gilt: $\forall\ z \in G \setminus Sp(W) : ind_w(z)\ f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_W \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$.

Falls eine dieser Bedingungen an W erfüllt ist, gilt für alle $f \in H(G)$

(3*) $\forall\ z \in G \setminus Sp(W)\,\forall\ \nu \in \mathbb{N}_0$:

$$ind_w(z)f^{(\nu)}(z) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int\limits_W \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}\,d\xi.$$

4.6.3. Def.

(1) W heißt **nullhomolog** in G (kurz: $W \approx 0$) falls $Int\ W \subseteq G$.

(2) G heißt **homologisch einfach zusammenhängend**, wenn jeder rektifizierbare geschlossene Weg W in G nullhomolog ist.

4.6.4. Satz. Folgende Aussagen über ein Gebiet G sind äquivalent.

(1) G ist homologisch einfach zusammenhängend.

(2) Jede in G holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion.

(3) Für jedes $f \in H(G)$ und jeden geschlossenen rektifizierbaren Weg W in G gilt $\int\limits_W f(z)\,dz = 0$.

(4) Zu jedem $f \in H(G)$ mit $f \neq 0$ in G existiert ein $g \in H(G)$ mit $f = \exp\ g$ (bzw. $g = \log f$).

(5) Zu jedem $f \in H(G)$ mit $f \neq 0$ in G und jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $g \in H(G)$ mit $f = g^n$ (bzw. $g =$ n-te Wurzel aus f).

4.6.5. Def. W_0, W_1 rektifizierbare, geschlossene Wege in G. $W_\nu = ([0,1], \gamma_\nu)$.

(1) W_0 heißt (in G) **homotop** zu W_1 (kurz: $W_0 \sim W_1$) :⇔
Es existiert eine stetige Funktion $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ mit

a) $\forall\ t \in [0,1] : \Gamma(t,0) = \gamma_0(t) \quad \wedge\ \Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$,

b) $\forall\ u \in [0,1] : \Gamma(0,u) = \Gamma(1,u)$ (Γ definiert eine Familie geschlossener, nicht notwendig rektifizierbarer Wege $W_u = ([0,1], \Gamma(t,u))$, die W_0 innerhalb von G stetig in W_1 überführt).

(2) W heißt (in G) **nullhomotop** ($W \sim 0$): ⇔ W ist (in G) homotop zu einem einpunktigen Weg.

Folg. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geschlossenen, rektifizierbaren Wege in G.

4.6.6. Satz (Homotopie–Version des Cauchyschen Satzes).

$f \in H(G)$

Beh.

(1) $W \sim 0 \Rightarrow \int\limits_W f(z)\,dz = 0$

(2) $W_0 \sim W_1 \Rightarrow \int\limits_{W_0} f(z)\,dz = \int\limits_{W_1} f(z)\,dz.$

4.6.7. Def. G heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene, rektifizierbare Weg W in G nullhomotop ist.

4.6.8. Satz G einfach zusammenhängend.

Beh.

(1) G homologisch einfach zusammenhängend.

(2) Auf G gelten (2) bis (5) aus 4.6.4.
Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung: (1) $\Rightarrow$ G einfach zusammenhängend.

4.7. Der Weierstraßsche Konvergenzsatz

4.7.1. Satz von Morera (Giacinto M., 1856–1909).

$f : G \to \mathbb{C}$, stetig. Für jeden Dreiecksweg D in G gelte $\int\limits_D f(z)\,dz = 0.$

Beh. f ist holomorph auf G.

4.7.2. Def. $f_n, f : G \to \mathbb{C}$.

Die Folge (f_n) **konvergiert** auf G **kompakt** gegen $f :\Leftrightarrow (f_n)$

konvergiert auf jedem kompakten Teil von G gleichmäßig gegen f.

Folg. Falls es zu jedem $z \in G$ eine Umgebung gibt, auf der (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert (f_n) kompakt gegen f.

4.7.3. Satz von Weierstraß (Karl W., 1815–1897).

$f_n \in H(G)$ $(n \in \mathbb{N})$, (f_n) kompakt konvergent gegen $f : G \to \mathbb{C}$.

Beh.

(1) $f \in H(G)$.

(2) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen $f^{(k)}$.

4.7.4. Satz von Hurwitz (Adolf H., 1859–1919).

$f_n \in H(G)$ $(n \in \mathbb{N})$, alle f_n auf G ohne Nullstellen.

(f_n) kompakt konvergent gegen f.

Beh. f ist auf G ohne Nullstellen oder identisch gleich Null.

5. Kapitel. Isolierte Singularitäten

G Gebiet in $\mathbb{C}$.

5.1. Klassifikation der isolierten Singularitäten

5.1.1. Def. $r > 0, z_0 \in G, G' := U_r(z_0)\backslash\{z_0\} \subseteq G$.

f holomorph auf G'.

z_0 heißt **isolierte Singularität** von f (d.h. f ist holomorph auf einem punktierten Kreis um z_0).

5.1.2. Def. z_0 isolierte Singularität von f, G' wie in 5.1.1.

(1) z_0 heißt **hebbare Singularität** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein holomorphes $g : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $f = g$ auf G'.

(2) z_0 heißt Pol $:\Leftrightarrow$ z_0 nicht hebbar $\wedge$ $\exists\ m \in \mathbb{N}$: z_0 hebbare Singularität von $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Das kleinste solche m heißt die **Ordnung des Pols**.

(3) z_0 heißt **wesentliche Singularität** $:\Leftrightarrow$ z_0 ist weder hebbar noch Pol.

5.1.3. Satz. z_0 isolierte Singularität von f. Folgende Aussagen sind gleichwertig.

(a) z_0 hebbar,

(b) f beschränkt in $U_{r'}(z_0)\backslash\{z_0\}$ für ein $r' > 0$.

(c) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

("(a) $\Leftrightarrow$ (b)" wird **Riemannscher Hebbarkeitssatz** genannt).

5.1.4. Satz. z_0 isolierte Singularität von f.

(1) z_0 Pol von $f \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

(2) z_0 Pol m-ter Ordnung von $f \Rightarrow$ Es existiert ein $r > 0$, es existiert ein holomorphes $h : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $h(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} h(z) \text{ in } U_r(z_0)\backslash\{z_0\}.$$

5.1.5. Satz (von **Casorati–Weierstraß**, Filice C., 1834–1890).

z_0 wesentliche Singularität von f.

Beh. $\forall\, r > 0\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, a \in \mathbb{C} : \exists\, z \in U_r(z_0)\backslash\{z_0\} : |f(z) - a| < \varepsilon.$

(in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität kommt f jedem Wert beliebig nahe. Oder: Das Bild von $U_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$).

5.1.6. Def. f holomorph für $|z| > r \geq 0$. ($\Rightarrow g(z) := f(z^{-1})$ holomorph für $0 < |z| < r^{-1}$).

f hat eine **isolierte Singularität** (hebbare Singularität, Pol, wesentliche Singularität) **bei** ∞ $:\Leftrightarrow$ g hat eine isolierte Singularität (hebbare Singularität, Pol, wesentliche Singularität) bei 0.

Folg. f ganze Funktion.

(1) f hat bei ∞ eine hebbare Singularität $\Leftrightarrow$ f ist konstant.

(2) f hat bei ∞ einen Pol m-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ f ist Polynom vom Grad m.

5.2. Laurent–Reihen (Hermann L., 1865–1908).

$a_\nu \in \mathbb{C} \quad (\nu \in \mathbb{Z})$.

5.2.1. Def. Eine Reihe der Gestalt

$$(*) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

heißt **Laurent–Reihe**.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{-1}$ $\left(\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\right)$ heißt **Hauptteil (Nebenteil)** der Laurent–Reihe. Die **Laurent–Reihe heißt konvergent**, wenn Haupt– und Nebenteil konvergieren (ebenso absolute und gleichmäßige Konvergenz).

Folg. Sei R_2 der Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$, R_1^{-1} der Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}\, z^\nu$.

Dann konvergiert die Laurent–Reihe (*) im (evtl. leeren) Kreisring

$$U_{R_1,R_2}(z_0) := \{z \mid R_1 < |\ z - z_0\ | < R_2\}.$$

Gleichmäßige Konvergenz in jedem kompakten Teil.

5.2.2. Satz. $0 \leq R_2 < R_2 \leq \infty$. f holomorph in $U_{R_1,R_2}(z_0)$.

Beh.

(1) f läßt sich in $U_{R_1,R_2}(z_0)$ in eine eindeutig bestimmte Laurent–Reihe (*) entwickeln.

(2) $R_1 < r < R_2$. $W_r = ([0, 2\pi],\ z_0 + r\ e^{it})$.

Beh. $\forall\ \nu \in \mathbb{Z} : a_\nu = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{W_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\nu+1}}\ dz.$

5.2.3. Satz. z_0 isolierte Singularität von f. In $U_R(z_0)\backslash\{z_0\} = U_{0,R}(z_0)$ habe f die Laurent–Entwicklung (*).

Beh.

(1) z_0 hebbare Singularität $\Leftrightarrow \forall\ \nu \leq -1 : a_\nu = 0$

(2) z_0 ist Pol m–ter Ordnung $\Leftrightarrow a_{-m} \neq 0 \wedge\ \forall\ \nu < -m : a_\nu = 0$.

(3) z_0 wesentliche Singularität $\Leftrightarrow a_\nu \neq 0$ für ∞ viele $\nu \leq -1$.

5.3. Der Residuenkalkül

5.3.1. Def. z_0 isolierte Singularität von f. In $U_{0,R}(z_0)$ habe f die Laurent–Entwicklung $\displaystyle\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu(z - z_0)^\nu$. a_{-1} heißt **das Residuum von** f **bei** z_0 ($\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1}$).

Folg.

(1) z_0 Pol m–ter Ordnung von $f, g(z) = (z - z_0)^m\ f(z) \Rightarrow$

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\ g^{(m-1)}(z_0).$$

(2) z_0 einfache Nullstelle von $h, f = \dfrac{g}{h} \ \Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

5.3.2. Residuensatz

f holomorph in G außer an den isolierten Singularitäten $z_1, \ldots, z_k \in G$.
W geschlossener rektifizierbarer Weg in $G\backslash\{z_1, \ldots, z_k\}$. $W \approx 0$ in G.

Beh. $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_W f(z)\ dz = \sum_{\nu=1} ind_w(z_\nu)\ \mathrm{Res}(f, z_\nu).$

5.3.3. Def. Eine durch $W = (I, \gamma)$ repräsentierte, geschlossene Kurve K heißt **geschlossene Jordan–Kurve** : $\Leftrightarrow$

$$\forall\ t_1, t_2 : a \leq t_1 < t_2 \leq b \wedge (t_1, t_2) \neq (a, b) \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_1)$$

(d.h. K ist doppelpunktfrei). (Camille J., 1838-1922).

5.3.4. Jordanscher Kurvensatz (ohne Beweis)

K geschlossene Jordan–Kurve.

Beh. $\mathbb{C} \backslash Sp(K)$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten, einer beschränkten (Inneres von K) und einer unbeschränkten (Äußeres).

5.3.5 2. Version des Residuensatzes

K geschlossene rektifizierbare Jordan–Kurve in G. f holomorph auf K und im Innern von K außer an isolierten Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$ im Innern von $K, K \approx 0$.

Beh. $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)\, dz = \sum_{\nu=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_\nu)$ (K entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen).

5.3.6. p, q Polynome, $q \neq 0$ auf $\mathbb{R}$. $z_1, \ldots, z_m$ die Nullstellen von q in $H^+ := \{z \mid Im\ z > 0\}$, Grad $q \geq$ Grad $p + 2$.

Beh. $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{m} \mathrm{Res}\left(\tfrac{p}{q}, z_\nu\right).$

5.3.7. Satz. $\alpha > 0, f$ holomorph für $Im\ z \geq 0$ außer an den isolierten Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$ $(Im\ z_\nu > 0)$. $\lim\limits_{|z| \to \infty} f(z) = 0$, f reellwertig auf $\mathbb{R}$.

Beh. Die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{Bmatrix} dx \text{ existieren und haben den Wert}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{Re} \\ \mathrm{Im} \end{Bmatrix} \quad 2\pi i \sum_{\nu=1}^{m} \mathrm{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_\nu).$$

5.3.8. Satz. Sei $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, ohne Singularitäten auf $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$$\widetilde{R}(z) := \frac{1}{z}\, R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

$z_1, \ldots, z_k$ seien die Pole von $\widetilde{R}$ in $U_1(0)$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi = 2\pi \sum_{\nu=1}^{k} \mathrm{Res}(\widetilde{R}, z_\nu).$$

5.3.9. Def. f heißt **meromorph auf** $G :\Leftrightarrow f$ holomorph auf G außer Polen.

Folg. f meromorph auf $G \Rightarrow$ Die Pole von f häufen sich nicht in G.

5.3.10. Satz (Argumentprinzip)

f meromorph auf G. $z_\nu (\nu = 1, \ldots, m)$ seien die Nullstellen von f mit den Vielfachheiten u_ν. $w_\nu (\nu = 1, \ldots, k)$ seien die Pole von f mit den Ordnungen v_ν. W geschlossener rektifizierbarer Weg in $G \backslash \{z_\nu, w_\nu\}$, $W \approx 0$.

Beh. $$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_W \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu\ ind_w(z_\nu) - \sum_{\nu=1}^{k} v_\nu\ ind_w(w_\nu).$$

5.3.11. Satz von Rouché (Eugéne R., 1832–1910)

f, g holomorph auf G. K geschlossene rektifizierbare Jordan–Kurve in G. $K \approx 0$. Auf K gelte $|\ g - f\ | < |f|$.

Beh. Im Innern von K haben f und g gleich viele Nullstellen (jede gemäß ihrer Vielfachheit gezählt).

5.3.12. Satz. f holomorph und nicht konstant in $U_R(z_0)$, $w_0 = f(z_0)$. $g(z) = f(z) - w_0$ habe bei z_0 eine k–fache Nullstelle (oder: z_0 ist k–fache w_0–Stelle von f).

Beh. $\exists\ \delta \in (0, R)\ \exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ w \in U_\varepsilon(w_0) \backslash \{w_0\}$:

Es existieren genau k verschiedene $z_1, \ldots, z_k \in U_\delta(z_0)$ mit $f(z_\nu) = w$.

5.3.13. Def. $z_0 \in G,\ f : G \to \mathbb{C}$. f heißt **in z_0 lokal umkehrbar**: $\Leftrightarrow \exists\ \delta > 0\ \exists\ G_1 \subseteq G$ mit $z_0 \in G_1$ und : f bildet G_1 bijektiv auf $U_\delta(f(z_0))$ ab.

5.3.14. Satz. $z_0 \in G, f$ holomorph in G.

Beh. f in z_0 lokal umkehrbar $\Leftrightarrow f'(z_0) \neq 0$. Im Fall $f'(z_0) \neq 0$ ist $f^{-1} : U_\delta(f(z_0)) \to G_1$ bei $f(z_0)$ holomorph.