Funktionentheorie II im WS 2004/05

D. Wolke

Literatur

J.B. Conway, Functions of one complex variable, Springer, 1978
W. Fischer, I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg, 1980
E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie, Springer, 1991
K. Jänich, Funktionentheorie, Springer, 1991
R. Remmert, Funktionentheorie I, II, Springer, 1989/90

Bezeichnungen

$a, b, c, d, t, x, y, \varepsilon, \delta, r, \varphi, \in \mathbb{R}$,
$s, w, z \in \mathbb{C}$,
$k, \ell, m, n, \in \mathbb{N}; \quad \nu, \mu \in \mathbb{Z}$.

6. Kapitel. Produkt–Entwicklungen
6.1. Unendliche Produkte.
6.1.1. Def. $z_1, z_2, \dots \in \mathbb{C}$ (bzw. allgemeiner $z_k, z_{k+1}, \dots$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$).

(1) Die Zahlen $p_n := \prod_{\nu=1}^{n} z_\nu$ bzw. für $1 \le m \le n$ $p_{m,n} := \prod_{\nu=m}^{n} z_\nu$ heißen **Partialprodukte**.

(2) Das unendliche Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ heißt **konvergent**, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Folge $(p_{m,n})_{n \ge m}$ einen Limes ungleich Null besitzt. Andernfalls heißt das Produkt **divergent**. Im Fall der Konvergenz wird

$$p := z_1 \dots z_{m-1} \lim_{n \to \infty} p_{m,n}$$

als **Limes** oder **Wert des unendlichen Produkts** bezeichnet.

Folgerungen.

(1) $\prod_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ ist genau dann konvergent, wenn

a) nur endlich viele z_ν den Wert Null haben und

b) die Folge $\tilde{p}_n := \prod_{\substack{\nu=1 \\ z_\nu \ne 0}}^{n} z_\nu$ gegen einen Wert $\ne 0$ konvergiert.

(2) Ein konvergentes Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}$ hat den Wert Null genau dann, wenn mindestens ein z_ν gleich Null ist.

(3) Falls $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ konvergiert, dann konvergiert $\prod\limits_{\nu=m}^{\infty} z_\nu$ für jedes $m \geq 1$. Bei Konvergenz gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} z_\nu = \lim_{m\to\infty} \prod_{\nu=m}^{\infty} z_\nu = 1.$$

(4) Es sei $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu - 1|$ konvergent. Dann konvergiert das Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$.

6.1.2. Def. G Gebiet in $\mathbb{C}$. f_n $(n \in \mathbb{N}) : G \to \mathbb{C}$, holomorph. Das Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ heißt auf G **kompakt konvergent**, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein $m = m(K)$ gibt, so dass die Folge $g_{m,n} := \prod\limits_{\nu=m}^{n} f_\nu$ auf K gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion g_m mit $g_m \neq 0$ auf K konvergiert.

Folg.

(1) Die Grenzfunktion g eines auf G kompakt konvergenten Produktes $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ ist auf G holomorph. $g(z) = 0$ genau dann, wenn es ein ν gibt mit $f_\nu(z) = 0$.

(2) $f_\nu \in H(G)$. (f_ν) konvergiere auf G kompakt gegen 1. Dann gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein m, so dass für alle $\nu \geq m = m(k)$ $\log f_\nu$ im Sinn des Hauptwertes des Log definiert ist. Falls für jedes K $\sum\limits_{\nu \geq m(K)} \log f_\nu$ kompakt konvergiert, ist $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ auf G kompakt konvergent. Für $z \in K$ hat die Grenzfunktion die Gestalt

$$g(z) = \prod_{\nu=1}^{m(k)-1} f_\nu(z) \cdot \exp\Big(\prod_{\nu=m}^{\infty} \log f_\nu(z) \Big).$$

6.1.3. Satz. f_ν $(\nu \in \mathbb{N})$ $\in H(G)$. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu - 1|$ konvergiere auf G kompakt.

(1) $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ konvergiert auf G kompakt gegen $g \in H(G)$.

(2) $G_0 := G \backslash \{z \in G,\ g(z) = 0\}$. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu'}{f}$ konvergiert auf G_0 kompakt gegen g'/g.

6.2. Produktentwicklung der trigonometrischen Funktionen.

6.2.1. Eulersche Formel (1734).

$$\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\Big), \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos \pi z = \prod_{\nu=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{4z^2}{(2\nu-1)^2}\Big).$$

6.2.2. Partialbruchentwicklung des cot.

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\Big), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}.$$

6.2.3. Eulersche Formel für $\boldsymbol{\zeta(2n)}$.

$\big(\zeta(s)$ = Riemannsche Zeta–Funktion, s. Kap. 9$\big)$.

(1) $$\zeta(2n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2) $$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} 2\zeta(2n)\, z^{2n-1}, \quad 0 < |z| < 1.$$

(3) $$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!}\, z^\nu, \quad |z| < 2\pi$$

B_ν :**Bernoullische Zahlen** (Daniel B., 1700–1782).

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_{2n+1} = 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(4) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\, \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\, B_{2n},$$

insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad \text{(Euler, 1734).}$$

6.3. Der Weierstraßsche Produktsatz.

6.3.1. Def. und Satz.

(1) $$E_0(z) := 1 - z, \quad E_n(z) := (1-z)\exp\Big(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\Big) \quad (n \in \mathbb{N})$$

(Weierstraß–Faktoren)

(2) Folg.

a) E_n ganz, $E_n(z)$ hat $z=1$ als einzige Nullstelle (von erster Ordnung).

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $|z| \le 1$ gilt $|1 - E_n(z)| \le |z|^{n+1}$.

6.3.2. Weierstraßscher Produktsatz in der Ebene.

(1) (a_n) Folge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $a_n \to \infty$. (p_n) Folge in $\mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$ konvergent für alle $r > 0$ (z.B. $p_n = n-1$). Dann ist das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$ kompakt konvergent auf $\mathbb{C}$ und definiert eine ganze Funktion, die nur an den Stellen a_n verschwindet (Vielfachheit der Nullstelle z_0 gleich der Häufigkeit, mit der z_0 in der Folge (a_n) auftritt).

(2) f ganze Funktion, nicht identisch $= 0$. f verschwinde bei 0 von der Ordnung $m_0 \in \mathbb{N}_0$. (a_n) sei der Folge der Nullstellen von f in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (eventuell abbrechend). Jede Nullstelle trete in (a_n) so oft auf wie ihre Vielfachheit beträgt. Dann existiert eine ganze Funktion h und eine Folge (p_n) aus $\mathbb{N}_0$, so dass auf $\mathbb{C}$

$$f(z) = z^{m_0} \exp\big(h(z)\big) \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

gilt. (Im Fall nur endlich vieler Nullstellen kann das endliche Produkt $\prod\limits_{n=1}^{n_0} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ genommen werden).

6.3.3. Weierstraßscher Produktsatz für beliebige Gebiete.

G Gebiet. (a_n) Folge in G ohne Häufungspunkt in G. (m_n) Folge in $\mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in H(G)$, das in jedem a_n von der Ordnung m_n verschwindet, und keine weiteren Nullstellen in G besitzt.

6.3.4. Satz. f meromorph auf G. Dann existieren g und $h \in H(G)$, so dass $f = g/h$. Kurz: Der Körper der auf G meromorphen Funktionen ist der Quotientenkörper von $H(G)$.

7. Kapitel. Partialbruchentwicklungen

7.1. Satz von Mittag–Leffler (Magnus Gustav M.–L., 1846–1927; 1884).
G Gebiet, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ abzählbare Teilmenge von G ohne Häufungspunkt in G. (P_n) Folge von Polynomen mit verschwindendem konstanten Term.

Beh.

(1) Es existiert eine auf G meromorphe Funktion f mit den Eigenschaften

a) f hat in G nur Pole an den Stellen a_n,

b) der Hauptteil der Laurent–Entwicklung von f um a_n hat die Gestalt $P_n\big((z - a_n)^{-1}\big)$.

(2) Sei g eine auf G meromorphe Funktion mit Polen an den a_n und holomorph auf $G\backslash A$. Dann gibt es meromorphe Funktionen h_n mit

a) h_n holomorph auf $G\backslash\{a_n\}$,

b) $g = \sum h_n$ mit kompakter Konvergenz auf $G\backslash A$.

7.2. Interpolationssatz.

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ abzählbare Teilmenge von G ohne Häufungspunkt in G. (P_n) Folge von Polynomen.

Beh. Es gibt ein $f \in H(G)$, so dass für alle n die Taylorreihe von f um a_n mit $P_n(z - a_n)$ beginnt.

8. Kapitel. Der Riemannsche Abbildungssatz

8.1. Def. Eine Familie (= Teilmenge) $\mathcal{F}$ von $H(G)$ heißt **normal**, wenn jede Folge aus $\mathcal{F}$ eine kompakt konvergente Teilfolge enthält.

8.2. Satz von Montel (Paul M., 1876–1975; 1907).

Für eine Familie $\mathcal{F} \subset H(G)$ sind äquivalent

a) $\mathcal{F}$ ist lokalbeschränkt, d.h.

$$\forall\, z_0 \in G \,\exists\, r > 0 \,\exists\, c : \; U_r(z_0) \subseteq G \wedge \forall\, f \in \mathcal{F} \;\forall\, z \in U_r(z_0) : \; \big|f(z)\big| \le c.$$

b) $\mathcal{F}$ ist normale Familie.

8.3. Satz von Hurwitz.

(f_n) Folge aus $H(G)$. (f_n) konvergiere auf G kompakt gegen ein nicht konstantes $f \in H(G)$. $A \subset \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) Aus $\forall\, n : f_n(G) \subseteq A$ folgt $f(G) \subseteq A$.

(2) Falls alle f_n injektiv sind, ist es auch f.

8.4. Hilfssatz. Sei $|a| < 1$,

$$M_a(z) := \frac{z - a}{1 - \overline{a} z} \quad \big(z \ne (\overline{a})^{-1}\big).$$

Beh.

(1) M_a bildet $E := U_1(0)$ bijektiv auf sich ab, $M_a(a) = 0$.

(2) Jedes $f \in H(E)$ mit $f(a) = 0$, das E bijektiv auf sich abbildet, hat die Gestalt $f = \alpha\, M_a$ mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

8.5. Riemannscher Abbildungssatz (1851).

Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\ne \mathbb{C}$, $z_0 \in G$. Dann gibt es genau ein $f \in H(G)$ mit

a) $f : G \to E = U_1(0)$, bijektiv,

b) $f^{-1} \in H(E)$,

c) $f(z_0) = 0, \qquad f'(z_0) > 0.$

9. Kapitel. Riemannsche Zeta–Funktion und Primzahlsatz

9.1. Def. $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $s \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s}$ heißt **Dirichlet–Reihe**.

9.2. Satz. Eine Dirichlet–Reihe $\sum a_n\, n^{-s}$ konvergiert entweder

a) auf ganz $\mathbb{C}$ oder

b) nirgends oder

c) es gibt ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe in der offenen Halbebene $\{s = \sigma + i\tau,\ \sigma > \sigma_0\}$ kompakt konvergiert (und dort eine holomorphe Funktion $A(s)$ definiert), und für alle s mit $\sigma = \mathrm{Re} s < \sigma_0$ divergiert.

Die Zahl σ_0 $(\sigma_0 := -\infty$ im Fall a), $\sigma_0 := +\infty$ im Fall b)) heißt **Konvergenzabszisse** der Reihe.

Folg. Sei $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ oder $= -\infty$ die Konvergensabszisse die Dirichlet–Reihe $\sum a_n\, n^{-s}$. Dann konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in jeder Halbebene $\{s,\ \sigma \geq \sigma_0 + 1 + \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0,$ beliebig).

9.3. Def. Die Dirichlet–Reihe $\sum\limits_n n^{-s}$ hat $\sigma_0 = 1$ als Konvergenzabszisse. Die durch sie dargestellte Funktion wird als **Riemannsche Zeta–Funktion** $\zeta(s)$ bezeichnet (Riemann, 1859).

9.4. Hilfssatz. Partielle oder abelsche Summation (Niels Henrik A., 1802–1829). Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (f wird als **zahlentheoretische Funktion** bezeichnet).

$$F(x) := \sum_{n \leq x} f(n) \qquad (x \in \mathbb{R},\ \geq 1),$$

$$g : [1, \infty) \to \mathbb{C}, \quad \text{stetig differenzierbar.}$$

Dann gilt für $x \geq 1$

$$\sum_{n \leq x} f(n)\, g(n) = F(x)\, g(x) - \int_1^x F(t)\, g'(t)\, dt.$$

9.5. Satz. Die Funktion $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ ist holomorph in die Halbebene $\{s,\ \sigma = \mathrm{Re}\, s > 0\}$ fortsetzbar. Oder: $\zeta(s)$ ist meromorph in $\{s,\ \sigma > 0\}$ fortsetzbar. Die einzige isolierte Singularität ist ein Pol erster Ordnung bei $s = 1$ mit dem Residuum 1.

Hinweis: Die Funktionswerte von $\zeta(s)$ in $\{s,\ 0 < \sigma \leq 1\}$ können nicht mit Hilfe der Reihe $\sum\limits_n n^{-s}$ berechnet werden, da diese dort divergiert.

9.6. Satz. Riemannsche Funktionalgleichung der Zeta–Funktion.
$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ ist holomorph in die ganze Ebene fortsetzbar. $\zeta(s)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$$

(Γ = Eulersche Gamma–Funktion).

9.7. Def. und Satz.

(1) $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zahlentheoretische Funktionen. $h(n) := \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$ (Die Summe ist über alle natürlichen Teiler d von n erstreckt).
Kurz: $h = f * g$ (**Faltprodukt** der zahlentheoretischen Funktionen f und g.

(2) Die Dirichlet–Reihen $F(s) = \sum_n f(n)\, n^{-s}$ und $G(s) = \sum_n g(n)\, n^{-s}$ seien absolut konvergent für $\sigma = \operatorname{Re} s > \alpha$. Dann gilt für $\sigma > \alpha$

$$F(s) \cdot G(s) = \sum_n h(n)\, n^{-s}.$$

Die rechte Summe konvergiert absolut (**Produktsatz für Dirichlet–Reihen**).

9.8. Def. und Folgerungen. Nach dem Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung hat jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ genau eine Darstellung

(*) $\quad n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $p_1 < \cdots < p_k$ Primzahlen, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$.

(1) Die **Möbius–Funktion** μ ist definiert durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & \text{falls in}(*) \quad a_1 = \cdots = a_k = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folgerung: $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(August Ferdinand Möbius, 1790–1863).

(2) Die **von–Mangoldt–Funktion** Λ ist definiert durch

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{falls} \quad n = p^k \ (p \text{ prim}, \quad k \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folgerung: $\displaystyle\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$

(Hans Karl Friedrich von Mangoldt, 1854–1925).

9.10. Satz. Für $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ gilt

(1) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\mu(n)}{n^s},$$

(2) $$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

(3) $$\zeta(s) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}$$

(**Euler–Produkt** der Zeta–Funktion. Das Produkt ist über alle Primzahlen erstreckt).

(4) $$\zeta(s) \neq 0.$$

9.11. Satz von Jaques Hadamard (1866-1963) und Charles de la Vallée–Poussin (1866–1962).

$$\zeta(1 + it) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

9.12. Riemannsche Vermutung (1859, bis heute offen).
Alle Nullstellen der Zeta–Funktion im Streifen $\{s,\ 0 < \sigma = \operatorname{Re} s < 1\}$ liegen auf der Geraden $\{s,\ \sigma = \frac{1}{2}\}$.

9.13. Newmanscher Taubersatz (Alfred Tauber, 1866-1942, Donald Newman, 1980).
Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ beschränkt und auf jedem Intervall $[0, a]$ Riemann–integrierbar. Dann stellt

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)\ e^{-zt} \quad \text{(Laplace–Transformierte von} \quad f)$$

eine für $\operatorname{Re} z > 0$ holomorphe Funktion dar.

Es sei F analytisch fortsetzbar in ein Gebiet, das die imaginäre Achse umfasst. Dann gilt

$$\int_0^\infty f(t)\ dt \quad \text{konvergiert (und hat den Wert} \quad F(0)).$$

9.14. Primzahlsatz (erstmals bewiesen 1896 durch Hadamard und de la Vallée–Poussin).
Sei

$$\pi(x) = \#\ \{p,\ p \leq x\},$$
$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad (x \geq 1).$$

Dann gilt

$$\pi(x)/(x/\ln x) \to 1,$$
$$\psi(x)/x \to 1 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

10. Kapitel. Die Picardschen Sätze (Emile P., 1856–1941).

10.1. Satz von Bloch (André B., 1893–1948).
Es existiert eine positive Konstante B (z.B. $B = 0,43$) mit:
Sei G ein Gebiet, das $\overline{E} = \{z,\ |z| \le 1\}$ enthält. $f \in H(G),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1$. Dann enthält $f(G)$ einen Kreis vom Radius B.

Folg. Sei $f \in H(E)$, $f(E)$ enthalte keinen Kreis vom Radius $\ge A$ (> 0). Dann gilt für $|z| < 1$

$$\left|f(z)\right| \le \left|f(0)\right| + \frac{2A}{B}\,\left|\ln(1 - |z|)\right|.$$

10.2. Satz von Schottky (Friedrich Hermann S., 1851–1935).
Zu je zwei Zahlen α, β mit $0 < \alpha,\ 0 \le \beta < 1$ existiert ein $C(\alpha, \beta) > 0$ mit: Falls

(1) G einfach zusammenhängend, $E \subset G$,

(2) $f \in H(G),\ f \neq 0$ und $\neq 1$ auf G,

(3) $\left|f(0)\right| \le \alpha,\ \left|f'(0)\right| = 1$.

Dann gilt $\left|f(z)\right| \le C(\alpha, \beta)$ für alle z mit $|z| \le \beta$.

10.3. Großer Satz von Picard (1879/80).
$f \in H\big(G \backslash \{z_0\}\big)$ habe bei z_0 eine wesentliche isolierte Singularität. Dann wird, bei höchstens einem Ausnahme–Wert, jedes $c \in \mathbb{C}$ in jeder Umgebung von z_0 als Wert von f angenommen.

10.4. Kleiner Satz von Picard.
Für jede nicht konstante ganze Funktion f gilt:
$f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ oder es gibt genau ein $c \in \mathbb{C}$, so daß $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \backslash \{c\}$.