10. Kapitel. Der Satz von Siegel–Walfisz

Bei der Herleitung des Primzahlsatzes in Progressionen

$$\pi(x,k,a) = \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)}\big(1+\mathrm{o}(1)\big) \qquad (x\to\infty)$$

wurde bislang nicht auf die Abhängigkeit des Fehler–Terms von k geachtet. In Anwendungen, so zum Beispiel beim im nächsten Kapitel behandelten Goldbachschen Problem, kommt es vielfach auf Gleichmäßigkeit der Fehler–Abschätzung in einem weiten k–Bereich an.

Wie steht es damit, wenn die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung vorausgesetzt wird? In diesem Fall läßt sich

$$\pi(x,k,a) = \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)} + \mathrm{O}(x^{1/2}\ln x)$$

mit universeller O–Konstante zeigen. Wegen $\operatorname{Li} x = x/\ln x\cdot\big(1+\mathrm{o}(1)\big)$ ist

$$\begin{aligned} x^{1/2}\ln x &= \mathrm{O}\Big(\frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)}\ \varphi(k)\ \frac{\ln^2 x}{x^{1/2}}\Big) \\ &= \mathrm{O}\Big(\frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)}\ \frac{1}{\ln x}\Big) \quad \text{für} \quad k\le x^{1/2}\ln^{-3}x. \end{aligned}$$

Dies bewirkt

$$\pi(x,k,a) = \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(k)}\Big(1+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big)$$

„gleichmäßig“ für $k\le x^{1/2}\ln^{-3}x,\ (a,k)=1$.

Ziel des Abschnitts ist eine solche Gleichmäßigkeitsaussage ohne Annahme unbewiesener Hypothesen. Der k–Bereich wird wesentlich kleiner ausfallen.

Zur Einführung des nächsten Begriffes einige Beispiele:

1. Der Hauptcharakter $\chi_0 \bmod k\ (k>1)$ entsteht durch Einschränkung des Hauptcharakters mod 1 auf die Menge $\big\{g,(g,k)=1\big\}$. Umgekehrt liefert $\chi_0 \bmod 1$ durch Einschränken (und Einführen von Null–Werten) alle Charaktere $\chi_0 \bmod k$.

2. Der durch das Legendre–Symbol $\bmod p\ (p>2)$ definierte Charakter $\chi\ne\chi_0 \bmod p$ kann für jedes k mit $p|k$ durch

$$\chi(g) = (g/p), \quad \text{falls} \quad (g,k)=1;\ =0 \quad \text{sonst}$$

zu einem Charakter mod k verändert werden.

10.1. Satz und Definition.
(1) Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Charakter mod k. Dann gibt es eindeutig ein k_1 mit

(1.1) $k_1 | k$ und

(1.2) k_1 ist die kürzeste Periode von χ, eingeschränkt auf $\{g, (g,k) = 1\}$

(2) Falls in (1) $k_1 = k$ gilt, heißt χ **primitiver Charakter.**

(3) Zu jedem Charakter $\chi \neq \chi_0$ mod k gibt es eindeutig ein $k_1 | k$ und einen primitiven Charakter χ_1 mod k_1, so daß

$$\chi(g) = \chi_1(g) \quad \text{für} \quad (g,k) = 1.$$

Man sagt: χ wird **erzeugt** vom primitiven Charakter χ_1 mod k_1. k_1 heißt der **Erklärungsmodul** zum Charakter χ mod k.

Bemerkungen:
(1) Der Charakter χ_0 mod 1 wird nicht zu den primitiven Charakteren gezählt, obwohl er im Sinn von (3) alle χ_0 mod k erzeugt.

(2) Werde χ mod k von χ_1 mod k_1 $(k_1 | k)$ erzeugt. Dann gilt für $\sigma > 0$

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1) \prod_{p|k,\, p \nmid k_1} \Big(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\Big).$$

Beweis zu 10.1.
1. Sei $k_1 \leq k$ die kleinste natürliche Zahl, für die χ auf $\{g, (g,k) = 1\}$ k_1–periodisch ist $\big($d.h. $\chi(g + ak_1) = 0$, falls $(g + ak_1, k) > 1; = \chi(g)$, falls $(g + ak_1, k) = 1\big)$.
Es wird $k_1 | k$ gezeigt. Mit passenden $a, b \in \mathbb{Z}$ läßt sich $(k, k_1) = ak + bk_1$ schreiben. Im Fall $\big(g + (k,k_1), k\big) = 1$ folgt mit der k– und k_1–Periodizität

$$\chi\big(g + (k,k_1)\big) = \chi(g + ak + bk_1) = \chi(g + bk_1) = \chi(g).$$

(k,k_1) ist somit auch Periode, d.h. $k_1 \leq (k,k_1)$, also $k_1 = (k,k_1)$, $k_1 | k$. Damit ist (1) gezeigt.

2. Beweis zu (3).
2.1. Sei wie in (1) k_1 $(k_1 | k)$ die kleinste Periode von χ auf $\{g, (g,k) = 1\}$. Es muß ein primitiver Charakter χ_1 mod k_1 gefunden werden, der χ erzeugt. Dazu muß

$$\chi_1(g) = \chi(g) \quad \text{für} \quad (g,k) = 1 \quad \text{und}$$
$$\chi_1(g) = 0 \quad \text{für} \quad (g,k_1) > 1 \quad \text{sein.}$$

2.2. Es fehlen noch die Werte von χ_1 für die g mit $(g,k) > 1$ und $(g,k_1) = 1$. Diese Menge ist nichtleer, wenn k einen Primteiler enthält, der in k_1 nicht vorkommt. Falls es $t \in \mathbb{Z}$ gibt mit $(g + tk_1, k) = 1$, kann $\chi_1(g) = \chi(g + tk_1)$ gesetzt werden. Auf die Wahl des t kommt es nicht an, da χ auf $\{h, (h,k) = 1\}$ k_1–periodisch ist.

2.3. In 2.2. kann

$$t = \prod_{p|k,\, p\nmid k_1 g} p$$

genommen werden. Es reicht $q \nmid g + tk_1$ für alle q mit $q|k$ einzusehen.

1. Fall: $q|k_1$. Aus $q|g + tk_1$ folgt $q|g$, was wegen $(g, k_1) = 1$ nicht sein kann.

2. Fall: $q \nmid k_1$, $q|k$, $q|g$. Aus $q|g + tk_1$ folgt $q|tk_1$, $q|t$. Dies ist nach der Definition von t ausgeschlossen.

3. Fall: $q \nmid k_1$, $q|k$, $q \nmid g$. Dann ist $q|t$ und aus $q|g + tk_1$ folgte $q|g$.

2.4. Nach 2.2. ist χ_1 k_1–periodisch definiert. Auch die vollständige Multiplikativität ist gegeben. χ_1 ist somit ein Charakter mod k_1. Da k_1 minimale Periode war, ist – außer im Fall $k_1 = 1$ und $\chi_1 = \underline{1}$ – χ_1 primitiver Charakter mod k_1. Aus $\chi_1 = \underline{1}$ folgt $\chi = \chi_1 \bmod k$, was ausgeschlossen war.

So wie beim Beweis der Nullstellenfreiheit der $L(s, \chi)$ auf der 1–Vertikalen der Fall

$$\chi \neq \chi_0, \quad \chi^2 = \chi_0, \quad t = 0$$

gesondert betrachtet werden mußte, ist auch beim Herleiten Nullstellenfreier Gebiete links von $\sigma = 1$ dieser Fall problematisch. Bis heute können reelle Nullstellen (Siegel–Nullstellen), die mit wachsendem Modul rasch an die Eins heranrücken, nicht ausgeschlossen werden. Das folgende Ergebnis stellt seit über 60 Jahren die beste Aussage zu diesem Problem dar.

10.2. Satz von Siegel (1935, Carl–Ludwig S., 1896–1981).
Sei $\chi \neq \chi_0$ ein reellwertiger Charakter mod k, $\varepsilon > 0$.
Beh. (1) Es existiert ein $\tilde{C}_1(\varepsilon)$ so daß

$$L(1, \chi) > \tilde{C}_1 k^{-\varepsilon}.$$

(2) Es existieren $\tilde{C}_2(\varepsilon)$ und $\tilde{C}_3(\varepsilon)$, so daß

$$\left|\frac{L'}{L}(s, \chi)\right| \leq \tilde{C}_2\, k^{\varepsilon}\, \ln^2 k \quad \text{für} \quad 1 - \frac{\tilde{C}_3}{k^{\varepsilon} \ln^2 k} \leq \sigma \leq 2, \quad |\tau| \leq 1.$$

Insbesondere ist dort $L(s, \chi) \neq 0$.

Bemerkungen. 1. Aus dem folgenden Beweis kann keine effektive Abhängigkeit der $\tilde{C}$ von ε entnommen werden (z.B. $\tilde{C}_1 \leq 100\, \varepsilon^{-5}$). Genauso ist es mit allen anderen bis heute bekannten Zugängen.
Will man mit numerisch angebbaren Konstanten rechnen, muß man sich mit der schwächeren Ungleichung

$$L(1, \chi) \geq C\, k^{-1/2}$$

(und entsprechend $\sigma \geq 1 - C\, k^{-1/2} \ln^{-2} k$) zufrieden geben.

2. Es reicht in (1), primitive χ zu betrachten.
Es werde χ vom primitiven $\chi^* \bmod k^* \quad (1 < k^*,\ k^* | k)$ erzeugt und dementsprechend gelte

$$L(s,\chi) = L(s,\chi^*) \prod_{p|k\, p\nmid k^*} \Big(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\Big).$$

Es sei (1) schon für χ^* gezeigt und werde mit $\varepsilon/2$ benutzt. Mit der Formel
$\sum\limits_{p\le x} \dfrac{1}{p} = \ln\ln x + \mathrm{O}(1)$ sieht man

$$\begin{aligned}\prod_{p|k,\, p\nmid k^*} \Big(1 - \frac{\chi^*(p)}{p}\Big) &\ge \prod_{p|k} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \\ &\ge \prod_{p\le k} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = \exp\Big(\sum_{p\le k} \ln\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(-\sum_{p\le k}\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} + \ldots\Big)\Big) \ge \exp\big(-\ln\ln k - D_1\big) = \frac{D_2}{\ln k}\end{aligned}$$

mit positivem, numerisch angebbarem D_2. Es folgt

$$\begin{aligned}L(1,\chi) &\ge L(1,\chi^*)\ \frac{D_2}{\ln k} \ge \tilde{C}_1\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) k_1^{-\varepsilon/2}\ \frac{D_2}{\ln k} \\ &\ge \tilde{C}_1\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\, k^{-\varepsilon/2}\ \frac{D_2}{\ln k} \ge \tilde{\tilde{C}}_1(\varepsilon) k^{-\varepsilon},\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\tilde{C}}_1$ eventuell etwas kleiner ist als $\tilde{C}_1$.

Bei der Herleitung von (2) wird die Primitivität nicht benutzt werden.

Beweis zu (1) für primitive χ nach Theodor Estermann (1902–1991). Die Argumentation ist eine höchst raffinierte Verschärfung des Beweises zu $L(1,\chi) \ne 0$ aus Kapitel 7.

1. Seien $\chi_1 \bmod k_1$ und $\chi_2 \bmod k_2$ verschiedene, primitive (also $\ne \chi_0 \bmod k_j$), reellwertige Charaktere. Dann ist $\chi_1\chi_2 \ne \chi_0 \bmod k_1k_2$. Denn $\chi_1\chi_2 = \chi_0$ bewirkt $\chi_1 = \chi_2 \bmod k_1k_2$. Dann folgt wie im Beweis zu 10.1(1), daß $k_1k_2,\ k_1, k_2$ und (k_1,k_2) Perioden auf $\big\{g, (g, k_1k_2) = 1\big\}$ sind. Die Primitivität bewirkt $k_1 = k_2,\quad \chi_1 = \chi_2,$ was ausgeschlossen war. Somit ist

$$F(s) = F(s,\chi_1,\chi_2) \underset{\mathrm{Df}}{=} \zeta(s)\, L(s,\chi_1)\, L(s,\chi_2)\, L(s,\chi_1\chi_2) \tag{1.1}$$

holomorph in $\{s,\ \sigma > 0,\ s \ne 1\}$ und hat bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum

$$\lambda = L(1,\chi_1)\, L(1,\chi_2)\, L(1,\chi_1\chi_2) \quad \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

2. Es gilt

$$F(\sigma) \geq \frac{1}{2} - \frac{C_1\lambda}{1-\sigma}\,(k_1k_2)^{8(1-\sigma)} \quad \text{für} \quad 7/8 \leq \sigma < 1. \tag{2.1}$$

Beweis. 2.1. Der Multiplikationssatz liefert für $\operatorname{Re} s > 1$

$$F(s) = \sum_n f(n)\, n^{-s} \tag{2.1.1}$$

mit multiplikativem $f = \underline{1} * \chi_1 * \chi_2 * \chi_1\chi_2$, wobei

$$f(p^\ell) = \sum_{\substack{0\leq \nu_1,\dots,\nu_4\leq \ell \\ \nu_1+\cdots+\nu_4=\ell}} \chi_1(p^{\nu_2+\nu_4})\,\chi_2(p^{\nu_3+\nu_4}).$$

f hat die wichtige Eigenschaft

$$\forall\, n\colon f(n) \geq 0. \tag{2.1.2}$$

Dazu reicht es, $f(p^\ell)$ zu betrachten. Im Fall $\chi(p_1) = \chi(p_2) = -1$ hat man

$$\begin{aligned} f(p^\ell) &= \sum_{\substack{0\leq \nu_1,\dots,\nu_4\leq \ell \\ \nu_1+\cdots+\nu_4=\ell}} (-1)^{\nu_2+\nu_3} \\ &= \sum_{0\leq g\leq \ell} (-1)^g\,(g+1)\,(\ell-g+1) \underset{\text{Df}}{=} S(\ell). \end{aligned}$$

Für ungerade ℓ ist

$$2\,S(\ell) = \sum_{0\leq g\leq \ell} (g+1)\,(\ell-g+1)\left((-1)^g + (-1)^{\ell-g}\right) = 0,$$

für $0 < \ell = 2\ell' + 2$ folgt

$$S(\ell) = S(\ell-1) + \sum_{0\leq g\leq \ell-1} (-1)^g\,(g+1) + (-1)^\ell\,(\ell+1) \geq 0.$$

In den übrigen Fällen geht man ähnlich bzw. wesentlich einfacher vor.

2.2. F kann um $s_0 = 2$ in eine Potenzreihe vom Konvergenzradius 1 (wegen des Pols bei $s = 1$) entwickelt werden.

$$F(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu (2-s)^\nu, \quad |2-s| < 1 \tag{2.2.1}$$

mit

$$\forall\, \nu\colon \alpha_\nu \geq 0, \quad \alpha_0 = F(2) \geq f(1) = 1. \tag{2.2.2}$$

Denn

$$\alpha_\nu = (-1)^\nu\,\frac{F^{(\nu)}(2)}{\nu!} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\,\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^\nu\,\frac{f(n)\ln^\nu n}{n^2} \geq 0$$

(wegen (2.1.2))
Die Ungleichung für α_0 sieht man ebenfalls mit (2.1.2).

$F(s) - \frac{\lambda}{s-1}$ ist holomorph im Kreis $\{s,\ |s-2|<2\}$, daher ergibt (2.2.1) (zunächst für $|s-2|<1$, dann mit dem Identitätssatz)

$$F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_\nu - \lambda)(2-s)^\nu \quad \big(|s-2|<2\big). \tag{2.2.3}$$

2.3. Mit der Ungleichung

$$\Big|\sum_{A<n\le B} \chi(n)\Big| \le \varphi(k) \quad (\chi = \chi \bmod k)$$

sieht man durch partielle Summation, wie schon mehrfach,

$$\big|L(s,\chi_j)\big| \le C_2\, k_j \quad (j=1,2), \quad \big|L(s,\chi_1\chi_2)\big| \le C_2 k_1 k_2$$

für $|s-2| \le 3/2$, also

$$|\lambda| \le C_3\, k_1^2 k_2^2.$$

Mit $\big|\zeta(s)\big| \le C_4$ für $|s-2| = 3/2$ ergibt dies

$$\Big|F(s) - \frac{\lambda}{s-1}\Big| \le C_5\, k_1^2 k_2^2 \quad \text{für} \quad |s-2| = 3/2. \tag{2.3.1}$$

Für die Koeffizienten $\alpha_\nu - \lambda$ der Potenzreihe (2.2.3) liefert die Cauchysche Formel daher die Ungleichungen

$$|\alpha_\nu - \lambda| \le C_6\, k_1^2 k_2^2\, (2/3)^\nu. \tag{2.3.2}$$

2.4. Sei nun $7/8 \le \sigma < 1$. Mit noch zu wählendem $N = N(k_1,k_2)$ folgt aus (2.3.2)

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\ge N} |\alpha_\nu - \lambda|\,(2-\sigma)^\nu &\le C_6\, k_1^2 k_2^2 \sum_{\nu\ge N} \Big(\frac{2}{3}\Big)^\nu \Big(\frac{9}{8}\Big)^\nu \\ &\le C_7\, k_1^2 k_2^2 \Big(\frac{3}{4}\Big)^N \le C_7\, k_1^2 k_2^2\, e^{-N/4}.\end{aligned}$$

Wegen (2.2.2) ergibt dies mit (2.2.3)

$$\begin{aligned}F(\sigma) - \frac{\lambda}{\sigma-1} &\ge \sum_{0\le\nu\le N-1} (\alpha_\nu - \lambda)\,(2-\sigma)^\nu - C_7\, k_1^2 k_2^2\, e^{-N/4} \\ &\ge 1 - \lambda\,\frac{(2-\sigma)^N - 1}{1-\sigma} - C_7\, k_1^2 k_2^2\, e^{-N/4}. \qquad (2.4.1)\end{aligned}$$

Es werde – OBdA – $C_7 > 1$ angenommen. Dann kann N so bestimmt werden, daß

$$\frac{1}{2}\, e^{-1/4} < C_7\ k_1^2 k_2^2\ e^{-N/4} < \frac{1}{2} \tag{2.4.2}$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt $N \le 8\ln(k_1k_2) + C_8$ und

$$(2-\sigma)^N = \exp\big(N\ln(1+(1-\sigma))\big) < \exp\big(N(1-\sigma)\big) \le C_9 (k_1k_2)^{8(1-\sigma)}. \tag{2.4.3}$$

(2.4.1) bis (2.4.3) führen zu

$$F(\sigma) > 1 - C_9 \frac{\lambda}{1-\sigma} (k_1 k_2)^{8(1-\sigma)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - C_9 \frac{\lambda}{1-\sigma} (k_1 k_2)^{8(1-\sigma)},$$

wie in (2.1) behauptet.

3. Es soll nun aus (2.1) die Ungleichung (1) hergeleitet werden. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

3.1. 1. Fall: Es existiert ein k_1 und ein primitives $\chi_1 \bmod k_1$ mit $\chi_1 \neq \chi_0, \quad \chi_1^2 = \chi_0$ und

(3.1.1) $$L(\sigma_1, \chi_1) = 0 \quad \text{für ein} \quad \sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) \in (1 - \varepsilon/16, 1).$$

Dann werde F mit diesem χ_1 definiert. Es gilt

(3.1.2) $$F(\sigma_1) = F(\sigma_1, \chi_1, \chi_2) = 0 \quad \text{für jedes zulässige} \quad \chi_2.$$

3.2. 2. Fall: Es existiere kein χ_1 der obigen Art. Man halte ein k_1, ein $\chi_1 \bmod k_1$ mit $\chi_1 \neq \chi_0, \quad \chi_1^2 = \chi_0$ fest.
Wegen

$$L(\sigma, \chi_1),\ L(\sigma, \chi_2),\ L(\sigma, \chi_1\chi_2) \to 1 \quad \text{für} \quad \sigma \to \infty,$$

der Reellwertigkeit und dem Nicht–Verschwinden bei $\sigma > 1 - \varepsilon/16$ ist

$$L(\sigma, \chi_1)\, L(\sigma, \chi_2)\, L(\sigma, \chi_1\chi_2) > 0 \quad \text{für} \quad \sigma \in (1 - \varepsilon/16, 1).$$

Da $\zeta(\sigma)$ beim Durchqueren des Pols das Vorzeichen wechselt, läßt sich ein $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) \in (1 - \varepsilon/16, 1)$ finden mit

(3.2.1) $$F(\sigma_1) < 0 \quad \text{für alle zulässigen} \quad \chi_2.$$

3.3 Aus (2.1) ergibt sich in allen Fällen – bei festem $\sigma_1(\varepsilon)$, $\chi_1 \bmod k_1$ und beliebigem $\chi_2 \bmod k_2$ mit $k_2 > k_1$ –

$$\frac{C_1 \lambda}{1-\sigma_1} (k_1 k_2)^{8(1-\sigma_1)} > \frac{1}{2} - F(\sigma_1) \geq \frac{1}{2}.$$

bzw.

(3.3.1) $$\lambda > C_{10} (1 - \sigma_1) (k_1 k_2)^{-8(1-\sigma_1)}.$$

Wegen

$$L(1, \chi_1)\, L(1, \chi_1\chi_2) \leq C_{11} \ln k_1 \cdot \ln(k_1 k_2) \leq \tilde{C}_4(\varepsilon) \ln k_2$$

sieht man mit (3.3.1) und (1.2)

$$\begin{aligned} L(1, \chi_2) &\geq \tilde{C}_5(\varepsilon)\, k_2^{-8(1-\sigma_1)} (\ln k_2)^{-1} \\ &\geq \tilde{C}_5\, k_2^{-\varepsilon/2} (\ln k_2)^{-1} \geq \tilde{C}_6\, k_2^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dies ist richtig für alle zulässigen χ_2 mit $k_2 > k_1(\varepsilon)$. Durch eventuelle Verkleinerung des $\tilde{C}_6$ kann die Ungleichung für alle k_2 erreicht werden. Damit ist (1), der entscheidende

Teil des Siegelschen Satzes, für primitive $\chi(=\chi_2)$ gezeigt.

4. Die Herleitung von (2) aus (1) nahe bei $\sigma = 0$ ist relativ einfach.
Es existieren $\tilde{C}_7(\varepsilon)$ und $\tilde{C}_8(\varepsilon)$, so daß

$$\Big|\frac{L'}{L}(s,\chi)\Big| \le \tilde{C}_7\, k^{\varepsilon} \ln^2 k \quad \text{für} \quad |\tau|, \quad |\sigma-1| \le \tilde{C}_8\, k^{-\varepsilon} \ln^{-2} k. \tag{4.1}$$

Man hat

$$\big|L'(s,\chi)\big| \le C_{12} \ln^2 k, \tag{4.2}$$

also mit genügend kleinem $\tilde{C}_8$,

$$\begin{aligned}\big|L(s,\chi)\big| &\ge L(1,\chi) - \Big|\int_1^s L'(z,\chi)\,dz\Big| \\ &\ge L(1,\chi) - |s-1|\, C_{12}\, \ln^2 k \\ &\ge \tilde{C}_1 k^{-\varepsilon} - \tilde{C}_8\, C_{12}\, k^{-\varepsilon} \ge \frac{1}{2}\,\tilde{C}_1\, k^{-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Mit (4.2) folgt daraus (4.1).

Im restlichen Bereich kann wieder die de la Vallée–Poussin–Idee benutzt werden. Ein paar Hinweise mögen ausreichen.
Für $\sigma > 1,\ |\tau| \le 1$ ist

$$1 \le L^3(\sigma,\chi_0)\,\big|L^4(\sigma+i\tau,\chi)\big|\,\big|L(\sigma+2i\tau,\chi_0)\big| \le \big|L^4(\sigma+i\tau,\chi)\big|\; L^4(\sigma,\chi_0),$$

also

$$\big|L(\sigma+i\tau,\chi)\big| \ge C_{13}(\sigma-1)\prod_{p|k}\Big(1-\frac{1}{p^{\sigma}}\Big)^{-1} \ge C_{13}(\sigma-1).$$

Für $2 \ge \sigma \ge 1+\tilde{C}_8\, k^{-\varepsilon}\, \ln^{-2} k$ ist (2) hieraus direkt ablesbar, für $|\sigma-1| \ge \tilde{C}_8\, k^{-\varepsilon} \ln^{-2} k$, $\tilde{C}_8\, k^{-\varepsilon}\, \ln^{-2} k \le |\tau| \le 1$ kann wieder mit Hilfe von $L'(s,\chi)$ argumentiert werden.

Damit ist Satz 10.2. vollständig bewiesen.

Für den Beweis des Primzahlsatzes in Progressionen mit Hilfe der Perron–Formel ist wieder ein Nullstellenfreies Gebiet links von $\sigma = 1$ erforderlich. Da die Argumentation wie bei Satz 4.2 verläuft, kann hier auf die Herleitung verzichtet werden. Wichtig ist, daß die auftretenden Konstanten nicht von k abhängen.

10.3. Satz. Es existieren universelle, positive Konstanten $C_{14},\ldots,C_{17}$ mit folgenden Eigenschaften
(1) Für $2 \ge \sigma \ge 1 - C_{14}\ \big(\ge \frac{1}{2}\big)$ und $|\tau| \le 1$ gilt

$$\Big|\frac{L'}{L}(s,\chi_0) + \frac{1}{s-1}\Big| \le C_{15} \ln k \quad (\chi_0 = \chi_0 \bmod k).$$

(2) Für $\chi \bmod k,\ \chi \neq \chi_0,\ \chi^2 \neq \chi_0$ und

$$2 \geq \sigma \geq 1 - C_{16}\big(\ln(k(|\tau|+2))\big)^{-9}$$

gilt

$$\Big|\frac{L'}{L}(\sigma + i\tau, \chi)\Big| \leq C_{17}\big(\ln(k(|\tau|+2))\big)^{9}.$$

(3) Für $\chi \bmod k,\ (\chi \neq \chi_0,\ \chi^2 = \chi_0)$ oder $\chi = \chi_0$ gilt die Ungleichung (2) im Bereich

$$2 \geq \sigma \geq 1 - C_{16}\big(\ln(k(|\tau|+2))\big)^{-9},\ |\tau| \geq 1.$$

Der einzige Bereich, in dem aufgepaßt werden muß, ist also der für $\chi \neq \chi_0,\ \chi^2 = \chi_0$ in Satz 10.2. angegebene. Hier wird das Nullstellenfreie Rechteck nahe bei $s = 1$ mit wachsendem k möglicherweise sehr rasch schmäler als das für die anderen χ ($\tilde{C}_3(\varepsilon)\, k^{-\varepsilon}\, \ln^{-2} k$ ist für große k wesentlich kleiner als $C_{16}\, \ln^{-9} k$).

Es stehen nun die analytischen Hilfsmittel zur Verfügung, mit denen ohne neue Schwierigkeiten das Hauptergebnis gezeigt werden kann.

10.4. Satz von Siegel–Walfisz (Arnold W., 1892–1962).
Zu jedem $A > 0$ existieren von A abhängige Konstanten D_1 und D_2, so daß für $x \geq 2,\ k \leq (\ln x)^A$ und $(k, a) = 1$ gilt

$$(1) \qquad \big|\psi(x, k, a) - \frac{x}{\varphi(k)}\big| \leq D_2\, x \exp\big(-D_1(\ln x)^{1/10}\big)$$

$$(2) \qquad \big|\pi(x, k, a) - \frac{x}{\varphi(k)}\big| \leq D_2\, x \exp\big(-D_1(\ln x)^{1/10}\big).$$

Bemerkung. Während unter Annahme der verallgemeinerten RV der Fehler in $\psi(x, k, a)$ gleichmäßig in k und a mit k bis kurz vor $x^{1/2}$ abgeschätzt werden kann, wird hier nur Gleichmäßigkeit bis $k \leq (\ln x)^A$ erreicht. A kann zwar beliebig groß gewählt werden, aber die O–Konstante D_2 hängt in bislang nicht effektiv angebbarer Weise von A ab.

Man kann zeigen, daß es zu jedem Modul k höchstens einen reellen Charakter $\tilde{\chi}$ und dazu höchstens eine reelle Nullstelle β mit $1 - \frac{c}{\ln k} < \beta < 1$ ($c > 0$, angebbar) existiert. Diese „**Siegelsche Ausnahme–Nullstelle**“ hat außerdem die Eigenschaft, daß im Fall ihrer Existenz keine weiteren Nullstellen zu Charakteren χ mod k „nahe bei $\sigma = 1$“ liegen. Aus der expliziten Formel für $\psi(x, k, a)$ kann man schließen

$$\psi(x, k, a) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{\chi}(a)}{\varphi(q)}\,\frac{x^\beta}{\beta} + \quad \text{Rest.}$$

Im Fall $\tilde{\chi}(a) = 1$ kann der x^β–Term den Hauptterm nahezu auslöschen, während bei $\tilde{\chi}(a) = -1$ der Hauptterm nahezu verdoppelt wird. Dazu darf x im Vergleich zu k nicht zu groß sein.

Zum Beweis von Satz 10.4. Hierzu wird an die Herleitung von Satz 5.3 erinnert. Wie dort soll mit $T = \exp\big(D_3(\ln x)^{1/10}\big)$ gearbeitet werden. Damit für alle Charaktere zu einem Modul $k \le (\ln x)^A$ im Bereich

(*) $$1 - C_{17}(\ln T)^{-9} \le \sigma \le 2, \quad |\tau| \le T$$

keine Nullstelle von $L(s,\chi)$ auftritt muß

(a) $$1 - C_{16}\,\ln^{-9}\big(k(T+2)\big) \le 1 - C_{17}(\ln T)^{-9} \quad \text{gemäß 10.3(2)}$$

und

(b) $$1 - \tilde{C}_3\,k^{-\varepsilon}\,\ln^{-2} k \le 1 - C_{17}(\ln T)^{q} \quad \text{gemäß 10.2(2)}$$

abgesichert werden.

Zu (b) Mit einem $\tilde{C}_3'$ gilt $\tilde{C}_3'\,k^{-\varepsilon}\,\ln^{-2} k \ge \tilde{C}_3'\,k^{-2\varepsilon}$. (b) ist gewährleistet, wenn $\tilde{C}_3'\,k^{-2\varepsilon} \ge C_{17}\,\ln^{-9} T$ stimmt, was

$$k \le (\ln T)^{9/2\varepsilon}\big(\tilde{C}_3'\,C_{17}^{-1}\big)^{1/2\varepsilon} = D_3^{9/2\varepsilon}\,\big(\tilde{C}_3'\,C_{17}^{-1}\big)^{1/2\varepsilon}(\ln x)^{9/20\varepsilon}$$

entspricht. Wenn A vorgegeben ist, wählt man somit $\varepsilon = 9/(29A)$, sowie $D_3 = D_3(A)$ gemäß $D_3^{9/2\varepsilon}\big(\tilde{C}_3'\,C_{17}^{-1}\big)^{1/2\varepsilon} = 1$.

(a) ist für $k \le (\ln x)^A$ und das obige T bei richtiger Wahl des C_{17} offenbar erfüllt.

Damit ist (*) gesichert. Dort gilt

$$\Big|\frac{L'}{L}\,(s,\chi)\Big| \le C_{18}(\ln T)^9 \le D_4(\ln x)^{9/10}$$

(mit der naheliegenden Modifikation für $\chi = \chi_0$). Wieder muß bedacht werden, daß D_4 in nicht effektiv angebbarer Weise von A abhängt.

Der Rest des Beweises verläuft so wie der zu Satz 5.3 mit der Perronschen Formel, angewandt auf

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \bar{\chi}(a)\,\frac{L'}{L}\,(s,\chi).$$

Man überzeugt sich, daß auch bei bescheidenerem Fehlerterm für $\psi(x,k,a)$, zum Beispiel $\mathrm{O}\Big(\dfrac{x}{\varphi(k)\ln x}\Big)$, der Gleichmäßigeitsbereich $k \le (\ln x)^A$ nicht erweitert werden kann.

11. Kapitel. Das Goldbachsche Problem

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ wird $e(\alpha)$ als $\exp(2\pi i\alpha)$ definiert. Alle O–Konstanten sind universell, aber nicht immer explixit berechenbar.

Aus einem Briefwechsel 1742 zwischen Euler und Goldbach (Christian G., 1690–1764) kann man folgende Fragen entnehmen.

a) Ist jede gerade Zahl ≥ 4 Summe zweier Primzahlen (**binäres Problem**)?

b) Ist jede ungerade Zahl ≥ 7 Summe dreier Primzahlen (**ternäres Problem**)?

Allein nach der Anzahl der möglichen Summanden – jedes N kann auf $N-1$ Arten als n_1+n_2 geschrieben werden – ist eine positive Antwort sehr wahrscheinlich. Da die Primzahlen bis N mit einer relativen Häufigkeit $\approx (\ln N)^{-1}$ auftreten, spricht einiges dafür, daß ein gerades N $\approx N(\ln N)^{-2}$ Darstellungen $N=p_1+p_2$ besitzt. Trotz überzeugender numerischer Untersuchungen haben sich die Probleme als sehr schwierig erwiesen. 1937 (I.M. Vinogradov) wurde das ternäre Problem für alle hinreichend großen N gelöst. Seit 1997 weiß man (J.–M. Deshouillers, G. Effinger, H. te Riele, D. Zinoviev), daß unter Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung die ternäre Frage für alle $N \geq 7$ mit ja beantwortet werden kann. Das binäre Problem ist bis heute offen.

Um 1920 entwickelten Hardy und Littlewood (Godefrey Harold H., 1877–1947; John Edensor L., 1885–1977) eine Methode, die sog. **Kreismethode**, durch die es möglich wurde, zumindest unter einleuchtenden Hypothesen über die Nullstellen der L–Reihen (genauer: $L(s,\chi)\neq 0$ für $\sigma > 3/4$) das ternäre Goldbach–Problem für hinreichend große N zu lösen. Das Verfahren verläuft wie folgt: Sei

$$P(z)=\sum_p z^p \quad (|z|<1)$$

die erzeugende Potenzreihe zur Folge der Primzahlen, und für $\ell \in \mathbb{N}$

$$r_\ell(N)=\#\big\{(p_1,\ldots,p_\ell), p_1+\cdots+p_\ell=N\big\}.$$

Dann ergibt die Cauchysche Formel

$$r_\ell(N)=\frac{1}{2\pi i}+\int\limits_{|z|=\alpha} P^\ell(z)\, z^{-N-1}\, dz$$

(Integration über den Kreis vom Radius $\alpha<1$). Durch Auswertung des Integrals, insbesondere das Studium von $P(z)$ auf Kreisbögen nahe den Punkten $e(a/k)$ $\big((a,k)=1,\ k$ „klein“ gegenüber $N\big)$ wurde es möglich, für $r_\ell(N)$ $(\ell \geq 3)$ asymptotische Formeln herzuleiten. Das Wort „Methode“ ist hier angebracht, da dieser Grundgedanke bei zahlreichen additiven Problemen angewandt werden konnte (s. R.C. Vaughan. The Hardy–Littlewood Method. Cambridge University Press, 1981).

Es hat sich inzwischen, vor allem dank der Untersuchungen I.M. Vinogradovs, herausgestellt, daß es einfacher ist, mit endlichen Exponentialsummen statt mit Potenzreihen zu arbeiten. Wieder ist es günstiger, mit der von Mangoldt–Funktion zu bewichten.

11.1. Hilfssatz. Für $N \geq 7$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$S(\alpha)=S(N,\alpha)=\sum_{n\leq N}\Lambda(n)\, e(n\alpha).$$

Dann gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

$$R_3(N) \underset{\text{Df}}{=} \sum_{n_1,n_2,n_3,\, n_1+n_2+n_3=N} \Lambda(n_1)\,\Lambda(n_2)\,\Lambda(n_3)$$
$$= \int_{\lambda}^{1+\lambda} S^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha.$$

Der Beweis beruht auf der Orthogonalitätsrelation für $e(\beta)$

$$\int_{\lambda}^{1+\lambda} e(b\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad b = 0, \\ 0 & \text{für} \quad b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Das Integral im Hilfssatz ist daher

$$= \sum_{n_1,n_2,n_3 \le N} \Lambda(n_1)\,\Lambda(n_2)\,\Lambda(n_3) \int_{\lambda}^{1+\lambda} e\big(\lambda(n_1+n_2+n_3-N)\, d\alpha,$$

woraus sofort die Aussage folgt.

Zur Auswertung des Integrals spaltet man das Intervall $[\lambda, 1+\lambda]$ auf in Intervalle $I_{k,a}$ um rationale Zahlen a/k mit „kleinem“ Nenner k (**major arcs**). Hier wertet man $S(\alpha)$ und damit das Integral mit Hilfe des Satzes von Siegel–Walfisz aus. Auf den restlichen Teilen (**minor arcs**) benutzt man eine nichttriviale obere Abschätzung für $\big|S(\alpha)\big|$. Während die Grundidee des Verfahrens relativ klar ist, erfordert die genaue Ausführung einiges Durchhaltevermögen.

Wieder erscheint es plausibel, daß ein großes ungerade N ungefähr $N^2 \ln^{-3} N$ Darstellungen $N = p_1 + p_2 + p_3$ besitzt. Berücksichtigt man das Λ–Gewicht, darf $R_3(N) \approx N^2$ vermutet werden. Dies wird sich im wesentlichen als richtig erweisen. Im Folgenden werden daher bei der Auswertung von $R_3(N)$ Terme, die an Größenordnung wesentlich weniger als N^2 einbringen, zum Fehler gezählt werden.

Für die Aufspaltung in major– und minor arcs benutzt man den

11.2. Approximationssatz von Dirichlet.
Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedem $Q > 1,\ Q \in \mathbb{R}$, existieren $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $1 \le k \le Q$ und $(a,k) = 1$, so daß $\big|\alpha - \frac{a}{k}\big| \le \frac{1}{kQ}$ gilt.

Beweis für $Q \in \mathbb{N}$. Die $Q+1$ Zahlen $\{j\alpha\} = j\alpha - [j\alpha]$ $(0 \le j \le Q)$ liegen im Einheitsintervall. Also haben mindestens zwei davon einen Abstand $\le 1/Q$ (Schubfachschluß!). Es existieren somit $0 \le j_1 < j_2 \le Q$ und ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $\big|(j_2 - j_1)\,\alpha - b\big| \le Q^{-1}$ bzw. $\big|\alpha - \frac{b}{j_2 - j_1}\big| \le \frac{1}{(j_2-j_1)Q}$. Wird $b(j_2-j_1)^{-1}$ gekürzt zu $a/k,\ 1 \le k \le Q$, so gilt die Behauptung hiermit.

Durch geringfügige Modifikation kann auch der Fall $Q \notin \mathbb{N}$ erfaßt werden.

11.3. Intervall–Einteilung für das Goldbach–Problem.
Sei $N > 4$ so groß, daß $2(\ln N)^{96} < N$. Sei $Q = N \ln^{-16} N$, $Q_1 = \ln^{16} N$ (also $1 < Q_1 < Q < N$), $\lambda = Q_1^3 N^{-1}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\underset{\text{Df}}{=} \bigcup_{1\le k\le Q_1} \bigcup_{\substack{a=1\\(a,k)=1}}^{k} \left[\frac{a}{k} - \lambda,\ \frac{a}{k} + \lambda\right] \\ &= \bigcup_k \bigcup_a I_{k,a} \subseteq [\lambda, 1+\lambda] \quad (\text{„major arcs“}), \\ \boldsymbol{m} &= [\lambda, 1+\lambda]\backslash\mathcal{M} \quad (\text{„minor arcs“}).\end{aligned}$$

Folgerungen.
(1) Für $k, k' \le Q_1$, $(a,k) = (a',k') = 1$, $\dfrac{a}{k} \ne \dfrac{a'}{k'}$ ist $I_{k,a} \cap I_{k,a'} = \emptyset$.

(2) Zu jedem $\alpha \in \boldsymbol{m}$ existieren ein $k \in (Q_1, Q]$ und ein a mit $(a,k) = 1$, so daß $\left|\alpha - \dfrac{a}{k}\right| \le k^{-2}$.

Beweis zu (1). Aus $I_{a,k} \cap I_{k',a'} \ne \emptyset$ folgt $0 < \left|\dfrac{a}{k} - \dfrac{a'}{k'}\right| \le 2Q_1^3 N^{-1}$. Erweitern mit kk' und, da $ak' - a'k$ eine ganze Zahl ist, ergibt

$$1 \le |ak' - a'k| \le 2Q_1^3 N^{-1} kk' \le 2Q_1^5 N^{-1} < 1$$

nach der Wahl von N und Q_1.

Zu (2). Der Approximationssatz sichert die Existenz eines Bruches ak^{-1} mit $k \le Q$ und $|\alpha - ak^{-1}| \le (kQ)^{-1}$. Im Fall $k \le Q_1$ wäre $\left|\alpha - \dfrac{a}{k}\right| \le \dfrac{1}{Q} = \dfrac{Q_1}{N} < \lambda$, also $\alpha \in \mathcal{M}$. Es bleibt daher nur $Q_1 \le k \le Q$ und $\left|\alpha - \dfrac{a}{k}\right| \le \dfrac{1}{kQ} \le k^{-2}$.

Bemerkung. Obwohl die Menge $\mathcal{M}$ nur das Maß

$$2 \sum_{k\le Q} \sum_{\substack{a=1\\(a,k)=1}}^{k} Q_1^3 N^{-1} = \mathrm{O}(N^{-1} \ln^{80} N) = \mathrm{o}(1)$$

hat, werden diese Intervalle im Integral in 11.1. den entscheidenden Beitrag liefern.

Eine der Schwierigkeiten, die Vinogradov zu überwinden hatte, war eine nichttriviale Abschätzung für $\sum\limits_{p\le N} e(\alpha p)$ $(\alpha \in \boldsymbol{m})$. 1977 gab R.C. Vaughan eine leichter zu handhabende Methode zur Abschätzung von $S(\alpha)$ an. In beiden Verfahren gelingt es, die Primzahlsummen auf lineare Summen $\sum\limits_{N_1 < n \le N_2} e(\beta n)$ zurückzuführen. Diese lassen sich

relativ leicht auswerten.

11.4. Hilfssatz. Sei

$$\|\alpha\| = \min_{a\in\mathbb{Z}} |a-\alpha|$$

(Abstand von der nächsten ganzen Zahl).

Beh. **(1)** Für $N_1 < N_2;\ N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Big|\sum_{N_1<n\le N_2} e(\alpha n)\Big| \le \min\Big(N_2-N_1, \frac{1}{2\|\alpha\|}\Big).$$

(2) Für $x, y \ge 1,\ \alpha = \frac{a}{k}+\beta,\ (a,k)=1,\ |\beta| \le k^{-2}$ ist

$$\sum_{n\le x} \min\Big(\frac{y}{n}+1,\ \frac{1}{\|n\alpha\|}\Big) = \mathrm{O}\Big(\big(\frac{y}{k}+x+k\big)\ln(2kx)\Big).$$

Beweis zu (1). Trivialerweise ist der Betrag der Summe stets $\le N_2 - N_1$.

Nach der Summenformel für geometrische Reihen ist er im Fall $\alpha \notin \mathbb{Z}$

$$\le \Big|\frac{1-e(\alpha(N_2-N_1))}{1-e(\alpha)}\Big| \le \frac{2}{|1-\cos(2\pi\alpha)|^{1/2}}$$
$$\le \frac{2}{2|\sin\pi\alpha|} \le \frac{1}{2\|\alpha\|}.$$

Zu (2). Die n–Summe wird – nach eventueller Verlängerung – aufgespalten in $\Big[\frac{x}{k}\Big]+1$ Summen der Länge k.

Die Summe ist somit

$$\le \sum_{0\le b\le xk^{-1}} \sum_{m=1}^{k} \min\Big(\frac{y}{bk+m}, \frac{1}{\|(bk+m)\alpha\|}\Big) + x. \tag{2.1}$$

Für $1 \le b \le xk^{-1},\quad 1 \le m \le k$ hat man

$$\|(bk+m)\alpha\| = \Big\|\frac{ma}{k} + bk\beta + m\beta\Big\|.$$

Bei festem b durchläuft mak^{-1} die Zahlen $\mathrm{O}\cdot k^{-1},\ 1\cdot k^{-1}, \dots, (k-1)k^{-1}$ modulo 1 genau einmal. Durch $bk\beta$ werden diese modulo 1 um eine feste Zahl verschoben. Der Summand $m\beta$ schließlich verschiebt wegen $|m\beta| \le k\cdot k^{-2} = k^{-1}$ jeweils um höchstens k^{-1}. Für höchstens vier der $m \in [1,k]$ ist daher $\|\ \ \| \le k^{-1}$. Hier nimmt man $y(bk+m)^{-1}$ im min in (2.1). Für höchstens vier weitere m ist $k^{-1} < \|\ \ \| \le 2k^{-1}$, für höchstens vier

weitere $2k^{-1} < \| \quad \| \le 3k^{-1}$, usw. bis $\frac{1}{2}k \cdot k^{-1}$ bzw. $\frac{1}{2}(k-1)\,k^{-1}$. Für festes $b \ge 1$ folgt daher

$$\sum_{m=1}^{k} \min(\ ) \le \frac{4y}{bk+1} + 4 \sum_{1 \le j \le k} (j/k)^{-1}$$

$$= \mathrm{O}\Big(\frac{y}{(b+1)k}\Big) + \mathrm{O}\big(k\,\ln(2k)\big). \tag{2.2}$$

Im Fall $b = 0$ kann dank der Bedingungen an α die Ungleichung $\| \quad \| \le (2k)^{-1}$ nur für $m \ge k/2$ eintreten. Die erste Alternative im min ist also nur für ein solches m nötig. Ähnlich wie oben erhält man (2.2) auch in diesem Fall.

Summation über b führt zur Behauptung

11.5. Hilfssatz. Bezeichne d die Teilerfunktion. Dann gilt für $x \ge 1$

$$\sum_{n \le x} d^2(n) = \mathrm{O}\big(x \ln^3(2x)\big).$$

Beweis. Sei $g = d^2 * \mu$. g ist multiplikativ mit

$$g(p^a) = (d^2 * \mu)(p^a) = \mu(1)\,d^2(p^a) - d^2\big(p^{a-1}\big)$$
$$= (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Insbesondere ist stets $g(m) \ge 0$. Die Möbiussche Umkehrformel ergibt $d^2 = g * \underline{1}$, also

$$\sum_{n \le x} d^2(n) = \sum_{n \le x} \sum_{m \mid n} g(m) = \sum_{m \le x} g(m) \Big[\frac{x}{m}\Big] \le x \sum_{m \le x} \frac{g(m)}{m}$$

$$\le x \sum_{\substack{m \\ p \mid m \Rightarrow p \le x}} \frac{g(m)}{m} = x \prod_{p \le x} \Big(1 + \frac{g(p)}{p} + \frac{g(p^2)}{p^2} + \dots\Big)$$

$$\le x \prod_{p \le x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-3} = \mathrm{O}\big(x \ln^3(2x)\big).$$

11.6. Satz (Vinogradov, Vaughan).
Für $1 \le k \le N$, $(a,k) = 1$, $\Big|\frac{a}{k} - \alpha\Big| \le k^{-2}$ gilt

$$S(N,\alpha) = \sum_{n \le N} \Lambda(n)\,e(n\alpha) = \mathrm{O}\big((\ln N)^4 (Nk^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}k^{1/2})\big).$$

Bemerkung. Die triviale Abschätzung besagt $= \mathrm{O}(N)$. Der Satz beinhaltet Nicht–Trivialität, wenn

a) k genügend groß ist, aber
b) k nicht zu nahe bei N liegt.

Dies ist für die $\alpha \in \boldsymbol{m}$ erfüllt.

11.7. Folgerung aus 11.6.
Abschätzung der Exponentialsumme auf den minor arcs. Für $\alpha \in \boldsymbol{m}$ gilt

$$S(N, \alpha) = \mathrm{O}(N \ \ln^{-4} N).$$

Denn nach Folgerung (2) zu 11.3. kann 11.6. mit $k \in (Q_1, Q]$ benutzt werden. Dann ist

$$Nk^{-1/2} \leq N \ \ln^{-8} N \quad \text{und}$$
$$N^{1/2}k^{1/2} \leq N \ \ln^{-8} N, \quad \text{also die Behauptung.}$$

Die O–Konstanten in 11.6. und 11.7. könnten numerisch bestimmt werden.

Der Beweis zu 11.6. ist trotz der Vaughanschen Vereinfachung noch sehr anspruchsvoll.

1. Die Grundidee ist eine raffinierte additive Zerlegung von Λ.
Sei

$$U = N^{2/5}, \tag{1.1}$$

und

$$F(s) = \sum_{m \leq U} \Lambda(m)\, m^{-s}, \quad G(s) = \sum_{m \leq U} \mu(m)\, m^{-s}. \tag{1.2.}$$

Dann gilt für $\sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{1.3}$$
$$= F(s) - \zeta(s)\, F(s)\, G(s) - \zeta'(s)\, G(s) + \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\Big)\big(1 - \zeta(s)\, G(s)\big).$$

Zur Motivation: F ist ein Anfangsstück der Λ–Reihe, G eins der μ–Reihe. $-\zeta'/\zeta - F$ somit ein Enstück der Λ–Reihe und $1 - \zeta G$ ebenfalls ein Endstück. Die Koeffizienten der vier Reihen in (1.3) können nach dem Multiplikationssatz 1.3. durch Faltung dargestellt werden.

$$f_1(n) = \Lambda(n), \quad \text{falls} \quad n \leq U; \quad = \mathrm{O}, \quad \text{falls} \quad n > U, \tag{1.4}$$

$$f_2(n) = -\sum_{\substack{m,d,\ell,md\ell = n \\ m,d \leq U}} \Lambda(m)\, \mu(d), \tag{1.5}$$

$$f_3(n) = \sum_{\substack{h,d,hd=n \\ d \leq U}} \mu(d)\ \ln h, \tag{1.6}$$

$$f_4(n) = -\sum_{\substack{m,h,mh=n \\ m>U, h>1}} \Lambda(m) \sum_{\substack{d|h \\ d \leq U}} \mu(d) \tag{1.7}$$

(in f_4 erhalten nur $h > U$ ein Gewicht $\neq 0$). (1.3) besagt für $\sigma > 1$

$$\sum_n \Lambda(n)\, n^{-s} = \sum_n \big(f_1(n) + \cdots + f_4(n)\big)\, n^{-s}.$$

Der Identitätssatz 1.4 läßt daher auf

$$\Lambda(n) = f_1(n) + \cdots + f_4(n) \tag{1.8}$$

(Vaughansche Identität) schließen.
Daraus entsteht eine Zerlegung von $S(\alpha) = S(N, \alpha)$

$$S(\alpha) = S_1(\alpha) + \cdots + S_4(\alpha), \tag{1.9}$$

wobei $S_j(\alpha) = \sum_{n \le N} f_j(n)\, e(n\alpha)$.

2. S_1 kann trivial bzw. mit Tschebytschev abgeschätzt werden.

$$S_1(\alpha) = \mathrm{O}(N^{2/5}). \tag{2.1}$$

3. In S_2 tritt die Variable ℓ linear auf.

$$S_2 = -\sum_{m,d \le U} \Lambda(m)\, \mu(d) \sum_{\ell \le N/md} e(\alpha dm\ell),$$

$$|S_2| \le \sum_{h \le U^2} \sum_{\substack{m,d \\ md=h}} \Lambda(m) \Big| \sum_{\ell \le N/h} e(\alpha h \ell) \Big|.$$

Hier kann $\Lambda * \underline{1} = \ln$ sowie Hilfssatz 11.4 benutzt werden.

$$\begin{aligned} |S_2| &\le \ln N \cdot \sum_{h \le U^2} \min\Big(\frac{N}{h} + 1, \frac{1}{\|\alpha h\|}\Big) \\ &= \mathrm{O}\Big(\ln N \cdot \Big(\frac{N}{k} + N^{4/5} + k\Big) \ln N\Big), \\ S_2 &= \mathrm{O}\Big(\ln^2 N \cdot N\Big(\frac{1}{k} + N^{-2/5} + k\, N^{-1}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{3.1}$$

4. In S_3 tritt die Variable h mit dem Gewicht ln auf. Dies kann leicht auf den linearen Fall zurückgeführt werden.

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{d \le U} \mu(d) \sum_{h \le Nd^{-1}} e(\alpha dh)\, \ln h \\ &= \sum_{d \le U} \mu(d) \sum_{h \le Nd^{-1}} e(\alpha dh) \int_1^h dt\, t^{-1} \\ &= \int_1^N \frac{dt}{t} \sum_{d \le U} \mu(d) \sum_{t \le h \le Nd^{-1}} e(\alpha hd), \end{aligned}$$

wobei für $t > N\,d^{-1}$ die innere Summe als leer angesehen wird. Es folgt wieder mit Hilfssatz 11.4.

$$S_3 = \mathrm{O}\Big(\int\limits_1^N \frac{dt}{t} \sum_{d\le U} \Big| \sum_{t<h\le Nd^{-1}} e(\alpha h d)\Big|$$

$$= \mathrm{O}\Big(\ln N \sum_{d\le U} \min\Big(\frac{N}{d}+1, \frac{1}{\|\alpha d\|}\Big)\Big)$$

$$S_3 = \mathrm{O}\big(\ln^2 N \cdot (N\,k^{-1} + N^{4/5} + k)\big). \tag{4.1}$$

5. In S_4 sind beide Variablen m und h zahlentheoretisch bewichtet. Linearität wird durch Anwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung erzeugt. Wegen $\sum\limits_{d|h,d\le U} \mu(d) = 0$ für $1 < h \le U$ kann $h > U$ vorausgesetzt werden. m wird dadurch auf das Intervall $(U, NU^{-1}]$ eingeschränkt.

$$S_4 = -\sum_{U<m\le NU^{-1}} \Lambda(m) \sum_{U<h\le Nm^{-1}} \Big(\sum_{d|h,d\le U} \mu(d)\Big)\, e(\alpha m h). \tag{5.1}$$

Das Intervall $(U, N\,U^{-1}]$ werde aufgeteilt in $\nu_0 \le \ln N$ Teile $I_\nu = (U_\nu, U_{\nu+1}]$ mit $U_1 = U,\ U_{\nu_0+1} = N\,U^{-1},\ U_\nu < U_{\nu+1} \le e\,U_\nu$. Der zugehörige Teil von S_4 heiße $S_{4,\nu}$. Mit

$$f(h) = \sum_{d|h,d\le U} \mu(d), \quad \big|f(h)\big| \le d(h)$$

ergibt sich durch Anwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\big|S_{4,\nu}\big|^2 = \Big|\sum_{m\in I_\nu} \Lambda(m) \sum_{U<h\le Nm^{-1}} f(h)\, e(\alpha m h)\Big|^2$$

$$\le \sum_{m\in I_\nu} \Lambda^2(m) \cdot \sum_{m\in I_\nu} \Big|\sum_{U<h\le Nm^{-1}} f(h)\, e(\alpha m h)\Big|^2$$

$$= \mathrm{O}\Big(U_\nu \ln N \cdot \sum_{U<h_1,h_2\le N\,U_\nu^{-1}} \big|f(h_1)\,f(h_2)\big| \cdot \Big| \sum_{\substack{m\in I_\nu \\ m\le \min(Nh_1^{-1}, Nh_2^{-1}}} e\big(\alpha m(h_1-h_2)\big)\Big|\Big).$$

Für $h_1 = h_2$ ist die innere Summe $= \mathrm{O}(U_\nu)$, für $h_1 \ne h_2$ ist $|h_1 - h_2| \in [1, N\,U_\nu^{-1}]$. Wegen $\|\beta\| = \|-\beta\|$ kann man sich auf $n \underset{\mathrm{Df}}{=} h_1 - h_2 > 0$ beschränken. Bedenkt man noch

$$\big|f(h_1)\,f(h_2)\big| \le \frac{1}{2}\,\big(f^2(h_1) + f^2(h_2)\big) = \mathrm{O}\big(d^2(h_1) + d^2(h_2)\big),$$

sowie

$$\min\big(N\,h_1^{-1}, N\,h_2^{-1}\big) \le N\,n^{-1},$$

dann folgt mit den Hilfssätzen 11.4. und 11.5.

$$\begin{aligned}\big|S_{4,\nu}\big|^2 &= \mathrm{O}\Big(U_\nu \ln N \cdot U_\nu \sum_{h\le N\,U_\nu^{-1}} d^2(h)\\ &\qquad + U_\nu \ln N \cdot \sum_{n\le N\,U_\nu^{-1}} \min\Big(\frac{N}{n}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\Big) \sum_{h\le N\,U_\nu^{-1}} d^2(h)\Big)\\ &= \mathrm{O}\Big(N\,U_\nu \ln^4 N + N \ln^4 N \cdot \Big(\frac{N}{k} + \frac{N}{U_\nu} + k\Big)\ln N\Big)\\ &= \mathrm{O}\big(\ln^5 N \cdot (N^2\,k^{-1} + N^2\,U_\nu^{-1} + Nk + N\,U_\nu)\big).\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen und Aufsummieren der Teile $S_{4,\nu}$ sieht man schließlich

$$S_4 = \mathrm{O}\big(\ln^4 N \cdot (N\,k^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}k^{1/2})\big). \tag{5.2}$$

Man überzeugt sich, daß die Beiträge von $S_1, \dots, S_3$ auch dieser O–Abschätzung genügen.
Damit ist der Beweis geführt.

11.8. Satz. Verhalten der Exponentialsumme auf den major arcs.
Für $\alpha \in \mathcal{M},\ \alpha = \dfrac{a}{k} + \beta,\ k \le Q_1,\ (a,k) = 1,\ |\beta| \le \lambda = Q_1^3\,N^{-1}$ gilt mit einem universellen $C > 0$

$$S(N,\alpha) = \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} \sum_{n\le N} e(\beta n) + \mathrm{O}\big(N \exp(-C \ln^{1/10} N)\big).$$

Hier sind O–Konstante und C wegen der Verwendung des Siegelschen Satzes nicht numerisch angebbar.

Beweis. Es ist

$$S(\alpha) = \sum_{n\le N,(n,k)=1} \Lambda(n)\, e(\alpha n) + \mathrm{O}(\ln^2 N),$$

da

$$\sum_{n\le N,(n,k)>1} \Lambda(n) = \sum_{p^\ell \le N, p\mid k} \ln p \le \sum_{p\mid k} \ln p \sum_{\ell \le \ln n/\ln p} 1 = \mathrm{O}(\ln^2 N).$$

Im Folgenden stehe $\sum\limits_{b=1}^{k}{}^{*}$ für $\sum\limits_{b=1,(b,k)=1}^{k}$. Mit partieller Summation sieht man

$$\begin{aligned}S(\alpha) &= \sum_{b=1}^{k}{}^{*} \sum_{n\le N, n\equiv b(k)} \Lambda(n)\, e\Big(\frac{ab}{k}\Big)\, e(\beta n) + \mathrm{O}(\ln^2 N)\\ &= \sum_{b=1}^{k}{}^{*}\, e\Big(\frac{ab}{k}\Big)\Big\{\psi(N,k,b)\, e(\beta N) - \int_1^N \psi(x,k,b)\frac{d}{dx}\, e(\beta x)\, dx\Big\} + \mathrm{O}(\ln^2 N).\end{aligned}$$

Für $N^{1/2} \le x \le N$ und hinreichend großes N ist $k \le Q_1 \le \ln^{17} x$. In diesem Bereich kann $\psi(x,k,b)$ mit dem Satz von Siegel–Walfisz (10.4) durch

$$\frac{x}{\varphi(k)} + \mathrm{O}\big(x \exp(-C_1 \ln^{1/10} x)\big) = \frac{x}{\varphi(k)} + \mathrm{O}\big(x \exp(-C_2 \ln^{1/10} N)\big)$$

beschrieben werden. Für $1 \le x \le N^{1/2}$ reicht die triviale Abschätzung $\psi(x,k,b) = \mathrm{O}(x)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sideset{}{^*}\sum_{b=1}^{k} e\Big(\frac{ab}{k}\Big)\Big\{\frac{N}{\varphi(k)} e(\beta N) - \int_1^N \frac{x}{\varphi(k)}\,\frac{d}{dx} e(\beta x)\,dx \\ &\quad + \mathrm{O}\Big(N \exp(-C_2 \ln^{1/10} N) + \int_{N^{1/2}}^N x \exp(-C_2 \ln^{1/10} N)|\beta|\,dx \\ &\quad + \int_1^{N^{1/2}} \frac{x}{\varphi(k)}\,|\beta|\,dx + \int_1^{N^{1/2}} x\,|\beta|\,dx\Big)\Big\} + \mathrm{O}(\ln^2 N) \\ &= \sideset{}{^*}\sum_{b=1}^{k} e\Big(\frac{ab}{k}\Big)\,\frac{1}{\varphi(k)} \int_1^N e(\beta x)\,dx + \mathrm{O}\big(\varphi(k)\,Q_1^3\,N \exp(-C_2(\ln N)^{1/10})\big), \end{aligned} \tag{1}$$

da $|\beta| \le N^{-1} Q_1^3$. Wegen $\varphi(k)\,Q_1^3 \le Q_1^4 = \mathrm{O}\Big(\exp\Big(\frac{1}{2}\,C_2(\ln N)^{1/10}\Big)\Big)$ paßt der Fehler in den behaupteten O–Term. Aus der elementaren Zahlentheorie weiß man, bzw. zeigt mit Hilfe der Multiplikativität beider Seiten

$$\sideset{}{^*}\sum_{b=1}^{k} e\Big(\frac{ab}{k}\Big) = \mu(k).$$

Schließlich ist noch $\int_1^N e(\beta x)\,dx$ in $\sum_{n \le N} e(\beta n)$ umzuwandeln. Dies geschieht mit partieller Summation.

$$\begin{aligned} \sum_{n \le N} 1 \cdot e(\beta n) &= N\,e(\beta N) - \int_1^N [x]\,\frac{d}{dx}\,e(\beta x)\,dx \\ &= N\,e(\beta N) - \int_1^N x \frac{d}{dx}\,e(\beta x)\,dx + \mathrm{O}\Big(\int_1^N |\beta|\,dx\Big) \\ &= \int_1^N e(\beta x)\,dx + \mathrm{O}\big(N\,Q_1^3\,N^{-1}\big). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1) ein, dann ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Es stehen nun die Hilfsmittel zur Verfügung, um das Integral $\int\limits_{\lambda}^{1+\lambda} S^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha$ asymptotisch auszuwerten.

1. Auf $\boldsymbol{m}$ wird eine $S(\alpha)$–Potenz nichttrivial nach 11.7. abgeschätzt, die anderen zwei werden mit der Orthogonalitätsrelation behandelt.

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\boldsymbol{m}} S^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha\Big| &\le \max_{\alpha\in\boldsymbol{m}} \big|S(\alpha)\big| \cdot \int\limits_{\boldsymbol{m}} \big|S(\alpha)\big|^2 d\alpha \\ &= \mathrm{O}\Big(N \ln^{-4} N \cdot \int\limits_0^1 \big|S(\alpha)\big|^2 d\alpha\Big) \\ &= \mathrm{O}\Big(N \ln^{-4} N \cdot \sum_{n_1,n_2\le N} \Lambda(n_1)\,\Lambda(n_2) \int\limits_0^1 e\big((n_1-n_2)\alpha\big) d\alpha\Big) \cdot \\ &= \mathrm{O}\Big(N \ln^{-4} N \cdot \sum_{n\le N} \Lambda^2(n)\Big).\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\boldsymbol{m}} S^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha = \mathrm{O}\big(N^2 \ln^{-3} N\big). \tag{1}$$

Hier konnte der oszillierende Faktor $e(-N\alpha)$ trivial durch 1 abgeschätzt werden.

2. Für ein Intervall $I_{k,a}$ aus $\mathcal{M}$ erhält man mit 11.8., dem bionomischen Satz, der trivialen Schranke $\big|\sum\limits_{n\le N} e(n\beta)\big| \le N$, und mit $\mu^3 = \mu$

$$S^3(\alpha) = \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} \Big(\sum_{n\le N} e(n\beta)\Big)^3 + \mathrm{O}\big(N^3 \exp(-C \ln^{1/10} N)\big),$$

also

$$\begin{aligned}&\int\limits_{I_{k,a}} S^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \\ &\quad= \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\, e\Big(-N\frac{a}{k}\Big) \int\limits_{|\beta|\le\lambda} \Big(\sum_{n\le N} e(n\beta)\Big)^3 e(-N\beta)\, d\beta \\ &\qquad + \mathrm{O}\big(N^3\lambda \exp(-C \ln^{1/10} N)\big).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Das β–Integral soll zu $\int_{-1/2}^{1/2}$ aufgefüllt werden. Nach Voraussetzung in 11.3. ist $\lambda = Q_1^3 N^{-1} \le 1/2$. für $\lambda \le |\beta| \le 1/2$ folgt aus Hilfssatz 11.4 (1)

$$\Big(\sum_{n\le N} e(n\beta)\Big)^3 = \mathrm{O}(\|\beta\|^{-3}) = \mathrm{O}(|\beta|^{-3}),$$

also

$$\int_{\lambda\le|\beta|\le 1/2} \Big|\sum_{n\le N} e(n\beta)\Big|^3 d\beta = \mathrm{O}\Big(\int_{\lambda\le\beta\le 1/2} \beta^{-3}\, d\beta\Big) = \mathrm{O}(N^2\, Q_1^{-6}).$$

Zusammen mit (2.1) ergibt dies

$$\int_{I_{k,a}} L^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha = \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\, e\Big(-N\frac{a}{k}\Big) \int_{-1/2}^{1/2} \Big(\sum_{n\le N} e(n\beta)\Big)^3 e(-N\beta)\, d\beta + \mathrm{O}(N^2\, Q_1^{-6}).$$

3. Wie in Hilfssatz 11.1. sieht man

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \Big(\sum_{n\le N} e(n\beta)\Big)^3 e(-N\beta)\, d\beta &= \sum_{\substack{n_1,n_2,n_3\le N\\ n_1+n_2+n_3=N}} 1 \;=\; \sum_{\substack{n_1,n_2\le N-2\\ n_1+n_2\le N-1}} 1 \\ &= \sum_{n\le N-2} (N-1-n) = \frac{1}{2}\, N^2 + \mathrm{O}(N). \qquad (3)\end{aligned}$$

4. Wegen der Disjunktheit der Intervalle $I_{k,a}$ nach Folgerung (1) zu 11.3. können zur Berechnung des Integrals über $\mathcal{M}$ die Beiträge der $\le Q_1^2$ Intervalle $I_{k,a}$ aufsummiert werden

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{M}} S^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \\ &= \sum_{k\le Q_1} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} \sum_{a=1}^{k}{}^{*} e\Big(-N\frac{a}{k}\Big)\Big(\frac{N^2}{2} + \mathrm{O}(N)\Big) + \mathrm{O}(N^2\, Q_1^{-4}). \qquad (4)\end{aligned}$$

5. Für $k \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ wird

$$c_k(b) = \sum_{a=1}^{k}{}^{*} e\Big(\frac{ab}{k}\Big) \qquad (5.1)$$

geschrieben (**Ramanujan–Summe**, Srinivasa R., 1887–1920). Man prüft leicht nach, daß $c_k(b)$ bezüglich der Variablen k multiplikativ ist und

$$c_p(b) = \begin{cases} -1, & \text{falls} \quad p \nmid b \\ p-1, & \text{falls} \quad p|b \end{cases} \tag{5.2}$$

gilt. Wegen $\big|c_k(b)\big| \le \varphi(k)$ ist die Summe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\,\varphi^{-3}(k)\,c_k(-N)$ absolut konvergent und

$$\begin{aligned} \sum_{k>Q_1} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\, c_k(-N) &= \mathrm{O}\Big(\sum_{k>Q_1} \frac{\mu^2(k)}{\varphi^2(k)} \Big) \\ &= \mathrm{O}\Big(\sum_{k>Q_1} k^{-3/2} \Big) = \mathrm{O}(Q_1^{-1/2}), \end{aligned}$$

da $\varphi(p) = p-1 \ge p^{3/4}$ für $p \ge 5$, also $\varphi^2(k) \ge C'\,k^{3/2}$ für k mit $\mu^2(k) = 1$. Die volle Summe kann als Euler–Produkt geschrieben werden.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}\, c_k(-N) &= \prod_p \Big(1 - \frac{c_p(-N)}{(p-1)^3} \Big) \\ &= \prod_{p|N} \big(1 - (p-1)^{-2} \big) \prod_{p\nmid N} \big(1 + (p-1)^{-3} \big). \end{aligned}$$

Zusammenfassung ergibt

$$\begin{aligned} &\sum_{k\le Q_1} \frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)} \sum_{a=1}^{k}{}^{*} e\Big(-N\frac{a}{k} \Big) \\ &\qquad = \prod_{p|N} \big(1 - (p-1)^{-2} \big) \prod_{p\nmid N} \big(1 + (p-1)^{-3} \big) + \mathrm{O}\big(Q_1^{-1/2} \big). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Im Fall $N \equiv 0(2)$ wird das Produkt zu Null. Hier fällt also der mühsam herausgearbeitete Hauptterm weg. Dies überrascht nicht, denn für gerade N ist das ternäre Problem in Wirklichkeit binär, da eines der p_j in $N = p_1 + p_2 + p_3$ die Zwei sein muß.

Für ungerades N ist

$$\prod_{p|N}(\ ) \prod_{p\nmid N}(\ ) \ge \prod_{p>2} \big(1 - (p-1)^2 \big) > 1/2. \tag{5.4}$$

6. Zusammenfassung von 1., 4. und 5. ergibt schließlich

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda}^{1+\lambda} S^3(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \prod_{p|N} \Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \Big) \prod_{p\nmid N} \Big(1 + \frac{1}{(p+1)^3} \Big) \cdot N^2 + \mathrm{O}(N^2 \ln^{-1} N). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Wegen (5.4) bekommt man mit Hilfssatz 11.1. für alle ungeraden $N \geq N_0$ (mit einem nach der vorliegenden Methode nicht effektiv berechenbaren N_0)

$$\sum_{\substack{n_1,n_2,n_3\\ n_1+n_2+n_3=N}} \Lambda(n_1)\,\Lambda(n_2)\,\Lambda(n_3) \geq \frac{1}{8}\,N^2. \tag{6.2}$$

Die in (6.2) auftretenden Terme $\Lambda(n_1)\ldots\Lambda(n_3)$ mit $n_j = p^\ell$ $(\ell \geq 2)$ für ein $j \leq 3$ ergeben einen Beitrag

$$\begin{aligned}
&\mathrm{O}\Big(\sum_{p^\ell \leq N,\,\ell\geq 2} \ln p \sum_{n_2,n_3,\,p^\ell+n_2+n_3=N} \Lambda(n_2)\,\Lambda(n_3)\Big)\\
&= \mathrm{O}\Big(\ln^2 N \cdot \sum_{p^\ell\leq N,\,\ell\geq 2} \ln p \sum_{n_2,n_3,\,p^\ell+n_2+n_3=N} 1\Big)\\
&= \mathrm{O}\Big(N\ln^2 N \cdot \sum_{p^\ell\leq N,\,\ell\geq 2} \ln p = \mathrm{O}\big(N^{3/2}\ln^2 N\big).
\end{aligned}$$

Dieser paßt also bequem in den O–Term in (6.1). Damit ist das Ziel dieses Abschnittes erreicht.

11.9. Satz von I.M. Vinogradov (1937).
Es gilt die asymptotische Formel

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_1,n_2,n_3,n_1+n_2+n_3=N} \Lambda(n_1)\,\Lambda(n_2)\,\Lambda(n_3)\\
&= \frac{1}{2}\prod_{p\mid N}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)\prod_{p\nmid N}\Big(1+\frac{1}{(p+1)^3}\Big)\cdot N^2 + \mathrm{O}(N^2\ln^{-1}N).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist jedes hinreichend große ungerade N als Summe dreier Primzahlen darstellbar.

Verwendet man statt des Satzes von Siegel–Walfisz effektive Versionen, dann läßt sich zeigen, daß für alle ungeraden $N \geq N_0 = 3^{3^{15}}$ das ternäre Problem lösbar ist.

Zum Abschluß einige Bemerkungen zum binären Problem.

1. So wie oben kann

$$\int_{\mathcal{M}} S^2(\alpha)\,e(-N\alpha) = \sum_{k\leq Q_1} \mu^2(k)\,\varphi^{-2}(k)\,c_k(-N)\cdot N + \mathrm{O}(N\,Q_1^{-2})$$

gezeigt werden.
Die k–Summe konvergiert, wenn auch langsamer als die beim ternären Problem, gegen

$$\prod_{p\mid N}\Big(1+\frac{1}{p-1}\Big)\prod_{p\nmid N}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big),$$

was für gerade N ein sinnvoller Wert ist.

2. Die Probleme liegen hier beim Integral über $\boldsymbol{m}$. Geht man vor wie oben,

$$\Big| \int\limits_{\boldsymbol{m}} S^2(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \Big| \le \max_{\alpha\in\boldsymbol{m}} \big|S(\alpha)\big| \cdot \int\limits_{\boldsymbol{m}} \big|S(\alpha)\big|\, d\alpha,$$

dann kommt man niemals auf eine Abschätzung besser als N. Man kann sich überzeugen, daß eine nichttriviale Abschätzung von $\int\limits_{\boldsymbol{m}}$ das Oszillieren von $e(-N\alpha)$ berücksichtigen muß. Hierfür ist bislang, auch unter Annahme der verallgemeinerten RV, kein Weg in Sicht.

Aufgaben

1. Es werde folgende „fast alle"–Aussage zum binären Goldbach–Problem vorausgesetzt.

$$\begin{aligned}\#\{n \le x, n \text{ gerade},\ n \text{ nicht als } p_1+p_2 \text{ mit } p_1<p_2 \text{ darstellbar}\}\\ = \mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-2}\big).\end{aligned}$$

Dann gibt es unendlich viele Tripel (p_1,p_2,p_3) mit $p_1<p_2<p_3$ und $p_3-p_2=p_2-p_1$ (d.h. (p_1,p_2,p_3) bildet eine dreigliedrige Progression).

2. Seien $\lambda, S(\alpha), \mathcal{M}$ und $\boldsymbol{m}$ wie im Beweis zum Vinogradovschen Satz definiert.

1) $\displaystyle\int\limits_{\lambda}^{1+\lambda} \big|S(\alpha)\big|^2 d\alpha = \sum_{n\le N} \Lambda^2(n) = \big(1+\mathrm{o}(1)\big)\, N\ln N.$

2) Werten Sie $\displaystyle\int\limits_{\mathcal{M}} \big|S(\alpha)\big|^2 d\alpha$ asymptotisch aus. Zeigen Sie insbesondere, daß der Beitrag wesentlich kleiner als $\big(1+\mathrm{o}(1)\big)N\ln N$ ist.

3. Für $0 \underset{\mathrm{Df}}{=} b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ und $x \ge 2$ sei

$$\pi(x, b_1, b_2, \ldots, b_k) = \#\{p \le x; p+b_2, \ldots, p+b_k \text{ prim}\}.$$

Die Bedingung A) and das k–Tupel $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ besage
A) Zu jeder Primzahl q existiert ein a, so daß

$$\forall\, 1 \le j \le k:\ a \not\equiv b_j \bmod q.$$

Zeigen Sie

1) Falls A) nicht erfüllt ist, kann **nicht**

$$\pi(x, b_1, \ldots, b_k) \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

gelten. (Die sogenannte $\boldsymbol{k}$**–Tupel–Hypothese** besagt $\pi(x,\ldots) \to \infty$, falls $(b_1,\ldots,b_k)$ A) erfüllt).

2) Sei $T(x,\alpha) = \sum\limits_{p\le x} e(p\alpha)$. Dann gilt

$$\pi(x,b_1,\dots,b_k) = \int\limits_0^1 d\alpha_2 \dots \int\limits_0^1 d\alpha_k \; T(x,\alpha_2+\dots+\alpha_k) \prod_{j=2}^{k} \bar{T}(x+b_j,\alpha_j)\, e(\alpha_j b_j).$$