Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 16.01.2007
Prof. Dr. D. Wolke

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen für Mikrosystemtechniker

WS 2006/07

Blatt 11

Abgabe: Dienstag, 23.1.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 21. (Inhomogene lineare Systeme)
Betrachten Sie das lineare System:

$$y' = \begin{pmatrix} (3x-1) & (x-1) \\ (-x-2) & (x-2) \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \exp(x^2).$$

(a) Finden Sie eine Lösung y_h^1 des homogenen Systems, indem Sie den Ansatz $y_h^1(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ -\phi(x) \end{pmatrix}$ benutzen.
(b) Berechnen Sie mit d'Alembert-Reduktion eine zweite Lösung y_h^2.
(Zur Kontrolle: Sie müßten auf $y_h^2 = \frac{1}{3}\exp(x^2-3x)\begin{pmatrix} -x+2/3 \\ x+7/3 \end{pmatrix}$ kommen.)
(c) Berechnen Sie nun mittels Variation der Konstanten alle Lösungen des inhomogenen Systems.
(Hinweis: Für die Fundamentalmatrix $Y = (y_h^1, y_h^2)$ gilt $\det(Y) = \exp(2x^2 - 3x)$ und $Y^{-1} = \frac{1}{3}\exp(-x^2)\begin{pmatrix} (x+7/3) & (x-2/3) \\ 3\exp(3x) & 3\exp(3x) \end{pmatrix}$.)

Aufgabe 22. (Wiederholung: Diagonalisierung von Matrizen)
(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie zu jedem der beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix A den zugehörigen Eigenraum.
(c) Wählen Sie eine Basis aus Eigenvektoren $\{v_1, v_2\}$ von A und rechnen Sie nach, daß dann tatsächlich mit der Basiswechselmatrix $G := (v_1, v_2)$ gilt: $A = G\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} G^{-1}$.