Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke

19.12.2006

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen für Mikrosystemtechniker

WS 2006/07

Blatt 9

Abgabe: Dienstag, 9.1.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 17. (Picard-Iteration für Systeme)
Betrachten Sie das folgende AWP für $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Picard-Iterierten y_k für $k = 0, \ldots, 3$.
(b) Berechnen Sie die allgemeine Picard-Iterierte y_k. (Tip: Finden Sie jeweils eine Formel für geradzahlige y_{2k} und ungeradzahlige y_{2k+1}.)
(c) Gehen Sie zur Grenze $k \longrightarrow \infty$ über und rechnen Sie nach, daß der Grenzwert eine Lösung des AWP ist. (Tip: Es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} = \cos(x)$, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sin(x)$.)
(d) Begründen Sie, warum diese Lösung die einzige des AWP sein muß.

Aufgabe 18. (Entkoppelte Systeme)
Betrachten Sie für $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ das System

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & \sin(x) \\ 0 & 3 \end{pmatrix} y.$$

(a) Lösen Sie das System, indem Sie erst die Gleichung für die zweite Komponente y_2 lösen und dann mit dem gefundenen y_2 die Gleichung für y_1 lösen.
(Bemerkung: Ein lineares System von Differentialgleichungen der obigen Gestalt, bei dem also die Matrix Dreiecksgestalt hat, nennt man ein *entkoppeltes System*. In diesem Fall ist es möglich, eine Lösung durch sukzessives Lösen der einzelnen Komponenten zu finden.)
(b) Finden Sie eine Basis des Lösungsraumes.
(c) Zeigen Sie, daß die Funktion $\begin{pmatrix} \exp(2x) \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig von den Basisvektoren ist (und damit keine Lösung sein kann).