Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 414	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Probeklausur

17. Dezember 2007

Abgabe - falls gewünscht - am Montag, den 07.01.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$

$$(n+4)^2 < 2^n \qquad \text{ist!}$$

Geben Sie ein solches n_0 an!

Aufgabe 2

Sei $p : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & p(z) := 2 \cdot z^3 + 13 \cdot z^2 + 26 \cdot z - 75 \end{array} \right\}$.

Berechnen Sie alle Nullstellen von p!

Geben Sie die Faktorisierung von p über $\mathbb{R}$ und die Faktorisierung von p über $\mathbb{C}$ an!

Aufgabe 3

Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$!

a) $\mathcal{A} := \{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} + 3 \cdot z + 3 \cdot \bar{z} = 0 \}$

Tipp: Suchen Sie $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + i \cdot y \in \mathcal{A}$!

b) $\mathcal{B} := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\} : \frac{1}{2} \cdot z + \frac{7 - \sqrt{3} \cdot i}{z+2} = 3 \right\}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen!

a) $a : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} \end{array} \right\}$

b) $b : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & b_n := \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{n}+3) \cdot (3 - \sqrt{n})}{8 \cdot n - 4}} \end{array} \right\}$

bitte wenden

Aufgabe 5

Seien $f_a : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_a(x) := a \cdot x^2 \end{array} \right\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $x_0 := 0$, $y_0 := 3$ und $P := (x_0 \mid y_0)$.

Berechnen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ den Abstand von P zum Graphen von f_a!

Tipp 1: Bestimmen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ den Abstand von P zu einem beliebigen Punkt des Graphen von f_a! Der Abstand von p zum Graphen von f_a ist für alle $a \in \mathbb{R}$ gerade das Minimum dieser Abstände.

Tipp 2: Nutzen Sie die Monotonie der Wurzelfunktion aus!
(Nutzen Sie also, dass für alle $p, q \in [0; \infty)$ aus $p \leq q$ sofort $\sqrt{p} \leq \sqrt{q}$ folgt.)

Aufgabe 6

Sei $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \dfrac{x \cdot \sin(x)}{x^2 + x - \sin(x)} \end{array} \right\}$.

Ist f stetig fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}$?

Bemerkung: Gibt es also ein $y_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tilde{f}(x) := \left\{ \begin{array}{ll} f(x), & \text{falls } x \neq 0 \text{ ist} \\ y_0, & \text{falls } x = 0 \text{ ist} \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{ stetig auf } \mathbb{R} \text{ ist?}$$

Aufgabe 7

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $F \subseteq \mathbb{R}$ der unten definierten Funktion f an und berechnen Sie die erste Ableitung von f!

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} F & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \sqrt{\dfrac{1 - \ln(|x|)}{x}} \end{array} \right\}$$

Aufgabe 8

Sei $O := (0 \mid 0 \mid 0)$. Sei $g := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{es gibt ein } k \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Sei $P := (6 \mid 5 \mid -2)$. Sei $h := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{es gibt ein } \ell \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Menge $g \cap h$ ist einelementig. Sei $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ mit $g \cap h = \{\vec{s}\}$.
Sei S der Punkt, der entsteht, wenn man O längs $\vec{s}$ verschiebt.
Bemerkung: Das heißt, die Einträge von S und $\vec{s}$ stimmen überein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken O, P und S!