Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 318	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 3

05. November 2007

Abgabe am Montag, den 12.11.2007 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 7

Anfang des dreizehnten Jahrhunderts überlegte sich Leonardo von Pisa (besser bekannt unter dem Namen „Fibonacci"), wie das Verhalten einer Kaninchenpopulation mathematisch zu beschreiben sei. Dazu ging er von folgenden Annahmen aus:

1. Zu Beginn der Betrachtung gibt es genau ein Kaninchenpaar. Dieses ist geschlechtsreif.
2. Jedes geschlechtsreife Kaninchenpaar wirft in einem Monat genau ein neues Kaninchenpaar.
3. Neugeborene Kaninchen werden nach einem Monat geschlechtsreif.
4. Kaninchen sind unsterblich.

Fibonacci interessierte sich nun für die in jedem Monat vorhandene Anzahl an Kaninchenpaaren. Als er die sich ergebende Zahlenfolge $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots)$ genauer betrachtete, stellte er fest, dass sich ab der dritten Zahl jede Zahl als Summe der beiden vorhergehenden Zahlen schreiben lässt. Mathematisch lässt sich diese Folge also (induktiv) definieren als:

$$b_1 := 1, \qquad b_2 := 2 \qquad \text{und} \qquad b_{n+2} := b_{n+1} + b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Im Laufe der Zeit stellte es sich als sinnvoll heraus, das erste Kaninchenpaar als neugeboren und noch nicht geschlechtsreif anzunehmen.
Dies führt zu der folgenden Definition der sogenannten „Fibonacci-Folge":

$$a_1 := 1, \qquad a_2 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Manchmal ist es hilfreich, wenn man zusätzlich $a_0 := 0$ definiert.

Zeigen Sie nun folgende Formeln mit Hilfe von Vollständiger Induktion!

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \in \mathbb{N}_0$).

Bemerkung: Diese Formel wurde erstmals 1843 von dem französischen Mathematiker Jaques Philippe Marie Binet veröffentlicht. Überraschend ist der Zusammenhang zwischen der Fibonacci-Folge und dem „Goldenen Schnitt" $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$.

b) $a_{n+m} = a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$.

bitte wenden

Aufgabe 8
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ wird der Binomialkoeffizient $\binom{n}{\ell}$ („n über ℓ“) definiert als
$\binom{n}{\ell} := \prod_{j=1}^{\ell} \frac{n-j+1}{j}$. Ist $n \geq \ell$, so folgt daraus $\binom{n}{\ell} = \frac{n!}{\ell! \cdot (n-\ell)!}$.
Schreibt man nun die Binomialkoeffizienten in eine Tabelle, in der für alle $n \in \mathbb{N}_0$ in der n-ten Zeile nacheinander alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\ell}$ für $j = 0, \ldots, n$ in der natürlichen Reihenfolge stehen, so ergibt sich das sogenannte PASCAL'sche Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Es fällt auf, dass die Zahlen zur Mitte hin immer zunehmen. Dieses sollen Sie nun beweisen.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $0 < j \leq \frac{n}{2}$ ist $\binom{n}{j} > \binom{n}{j-1}$.

b) Für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{2} \leq j < n$ ist $\binom{n}{j} > \binom{n}{j+1}$.

Bemerkung: Eventuell ist es hilfreich, gerade und ungerade Zahlen (n) getrennt zu betrachten.

Aufgabe 9
Seien $\vec{a} := \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie einen Vektor an, der mit der x-Achse einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ und mit $\vec{a}$ ebenfalls einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ bildet!

b) Geben Sie die orthogonale Zerlegung von $\vec{b}$ längs $\vec{c}$ an!

c) Geben Sie einen Einheitsvektor an, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{c}$ steht!

Bemerkung: Alle Vektoren der Länge 1 heißen Einheitsvektoren, nicht nur $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$.