Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 414	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 4

12. November 2007

Abgabe am Montag, den 19.11.2007 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 10

Seien $O\,(0 \mid 0 \mid 0)$, $A\,(-1 \mid 2 \mid 2)$, $B\,(2 \mid -1 \mid 2)$ und $C\,(1 \mid 1 \mid 4)$.
Die Punkte O, A, B und C spannen ein Quadrat Q auf.
Sei nun $d \in \mathbb{R}$ derart, dass der Punkt $D\,(d \mid d \mid d)$ sich genau über (bzw. unter) der Mitte des Quadrates Q befindet.
Dann bilden O, A, B, C und D eine gleichschenklige Pyramide P.

a) Zeigen Sie, dass Q tatsächlich ein Quadrat ist.

b) Bestimmen Sie d!

c) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt von P, ohne die Höhe eines Dreiecks zu bestimmen!

Bemerkung: Rufen Sie sich die Eigenschaften der Produkte von Vektoren in Erinnerung!

Aufgabe 11

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt, wenn ihr Realteil ($\Re(z)$ bzw. $\mathrm{Re}\,(z)$) und ihr Imaginärteil ($\Im(z)$ bzw. $\mathrm{Im}\,(z)$) bekannt sind.
Ist zum Beispiel $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $\mathrm{Re}\,(z) = x$ und $\mathrm{Im}\,(z) = y$.

Bemerkung: ACHTUNG!!! Es ist für $x, y \in \mathbb{R}$ <u>nicht</u> $\mathrm{Im}\,(x + i \cdot y) = i \cdot y$!!!

Kennt man Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$, so kann man ihren Betrag berechenen durch $\quad |z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2}$.

Berechnen Sie nun Real- und Imanginärteil der folgenden komplexen Zahlen!

a) $a := \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$

b) $b := \left(\dfrac{3}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

c) $c := \left(\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot i\right) \cdot \left|\dfrac{(6 - 8 \cdot i) \cdot (4 + i \cdot 3)}{(24 + i \cdot 7) \cdot (1 - 2 \cdot i)}\right|$

d) $d := \dfrac{(3 - i \cdot 4) \cdot (3 + i \cdot 4)}{(1 + 2 \cdot i)^2}$

bitte wenden

Aufgabe 12

Sei $e := 2,718281828459\ldots$ die EULER'sche Zahl.

Im Reellen wird die Exponentialfunktion exp definiert durch $\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) := e^x \end{array} \right\}$.

Diese Funktion kann auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden durch

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \exp(z) := e^{\mathrm{Re}(z)} \cdot (\cos(\mathrm{Im}(z)) + i \cdot \sin(\mathrm{Im}(z))) \end{array} \right\}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man selbstverständlich $e^z := \exp(z)$.

Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ergibt sich:

$$e^{x+i\cdot y} = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)).$$

Die „Funktionalgleichung“ $\quad e^{w+z} = e^w \cdot e^z \quad$ bleibt auch für alle $w, z \in \mathbb{C}$ erhalten.
Insbesondere folgt $e^{i\cdot(\alpha+\beta)} = e^{i\cdot\alpha} \cdot e^{i\cdot\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Beachtet man nun, dass Real- und Imanginärteil einer komplexen Zahl eindeutig bestimmt sind, so kann man hieraus die Additionstheoreme für die Sinus- und die Cosinusfunktion ableiten. Dies sollen Sie nun tun. Zeigen Sie

a) $\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$,

$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$,

$\sin(x-y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$ und

$\cos(x-y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$!

Bemerkung: Aus diesen Formeln kann man für alle $x \in \mathbb{R}$ auch Terme in $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für die Berechnung von $\sin(2 \cdot x)$, $\sin(3 \cdot x)$, ... bzw. $\cos(2 \cdot x)$, $\cos(3 \cdot x)$, ... gewinnen.

b) $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$ und $\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$!