Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 414	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 5

19. November 2007

Abgabe am Montag, den 26.11.2007 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Bitte beachten Sie die gültigen Übungszeiten und Übungsräume:

Nr.	Zeit	Ort	Tutor/in	Gebäude
1	Mo, 16 - 18 Uhr	SR 318	Christian Marquardt	Eckerstraße 1
2	Di, 11 - 13 Uhr	SR 119	Jonas Unger	Eckerstraße 1
3	Di, 11 - 13 Uhr	SR 125	Michael Gutmann	Eckerstraße 1
4	Di, 11 - 13 Uhr	SR 112	Stefan Fischer	**H.-Herder-Str. 10**
5	Di, 16 - 18 Uhr	SR 119	Kai Siebold	Eckerstraße 1
6	Di, 16 - 18 Uhr	SR 125	Arno Pauly	Eckerstraße 1
7	Do, 11 - 13 Uhr	**SR 127**	Sarah Marzi	Eckerstraße 1
8	Do, 16 - 18 Uhr	**SR 414**	Bianca Straub	Eckerstraße 1
9	Fr, 11 - 13 Uhr	**Hörsaal II**	Elisabeth Wursthorn	**Albertstraße 23b**
10	Fr, 11 - 13 Uhr	SR 414	Nicolas Ketterer	Eckerstraße 1
11	Fr, **12 - 14 Uhr**	SR 218	Christian Marquardt	Eckerstraße 1

Ihre Übungsgruppe ist durch einen Eintrag „Üb. Math. f. Ingenieure und Informatiker I“ oder „Üb. Math. f. Ingenieure und Physiker I“ in dem jeweiligen Raumplan gekennzeichnet.

Aufgabe 13
Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome!
Geben Sie je eine Faktorisierung der Polynome über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$ an.

a) $f_K : \left\{ \begin{array}{ccl} K & \to & K \\ x & \mapsto & f_K(x) := 4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 3 \end{array} \right\}$ für alle $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

b) $g_K : \left\{ \begin{array}{ccl} K & \to & K \\ x & \mapsto & g_K(x) := 6 \cdot x^4 - 25 \cdot x^3 + 32 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 10 \end{array} \right\}$ für alle $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

bitte wenden

Aufgabe 14

Der ursprüngliche Gedanke, der zur Einführung der Wurzel $\sqrt{\cdot}$ führte, war die Frage nach den Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 = a$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$. Für $a > 0$ hat diese Gleichung genau 2 Lösungen ($\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$). Auf dieselbe Art wurde für ein $q \in \mathbb{N}$ die q-te Wurzel $\sqrt[q]{\cdot}$ eingeführt. $\sqrt[q]{b}$ ist eine (falls q gerade und $b \geq 0$ ist) bzw. die (falls q ungerade ist) Lösung $y \in \mathbb{R}$ der Gleichung $y^q = b$.
Aus technischen Gründen wurde für ein gerades $p \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ stets $\sqrt[p]{c} \geq 0$ gesetzt. Durch diese Festlegung wurde die q-te Wurzel eindeutig.
In $\mathbb{C}$ wird nun die Wurzel nach diesem Gedanken fortgesetzt. Man sucht für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $z \in \mathbb{C}$ wieder die Lösungen $\xi \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\xi^n = z$. Nun gibt es in $\mathbb{C}$ keine Relation, die der Ordnung von $\mathbb{R}$ (also dem $\geq$) entspricht, so dass eine Definition „$\sqrt[n]{z} \geq 0$" keinen Sinn machen würde. Auch gibt es nicht für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein $w \in \mathbb{R}$ mit $w^n = z$. Es ist also keine der Lösungen von $\xi^n = z$ in irgendeiner Weise ausgezeichnet.
Deshalb meint man mit „$\sqrt[n]{z}$" für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $z \in \mathbb{C}$ stets alle Lösungen $\xi \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\xi^n = z$. Insbesondere ist $\sqrt[n]{z}$ nicht eindeutig definiert.
$\sqrt[n]{z}$ ist also keine Zahl, sondern eine Schreibweise.

$$\sqrt[n]{z} \text{ meint stets eine Zahl aus der Menge } \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^n = z\}.$$

In $\mathbb{C}$ gibt es immer genau n verschiedene Lösungen $\xi \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\xi^n = z$.

VORSICHT!!! Ist $\operatorname{Im}(z) = 0$, so gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $z = s$. Bei reellen Zahlen muss man sich sich stets sicher sein, ob man mit $\sqrt[n]{s}$ die (unter den oben genannten Bedingungen und Konventionen) eindeutige Lösung $\sigma \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\sigma^n = s$ (in $\mathbb{R}$) oder eine der n Lösungen $\zeta \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\zeta^n = z$ (in $\mathbb{C}$) meint.

Berechnen Sie nun den Realteil und den Imaginärteil aller angegebenen komplexen Wurzeln!
(Mit $\sqrt{\cdot}$ sind reelle, mit $\sqrt[2]{\cdot}$, $\sqrt[3]{\cdot}$, $\sqrt[4]{\cdot}$ und $\sqrt[6]{\cdot}$ komplexe Wurzeln gemeint.)
Skizzieren Sie die Lösungen der Aufgabenteile a) und b) in der komplexen Zahlenebene!

a) $\sqrt[2]{i}$ **b)** $\sqrt[6]{1}$ **c)** $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{2} + i \cdot 4 \cdot \sqrt{2}}$ **d)** $\sqrt[4]{-2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i}$

Aufgabe 15

Will man den Graphen einer Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zeichnen, so fehlt im dreidimensionalen Raum stets eine „Dimension".
Man behilft sich, indem man die Bilder der achsenparallelen Geraden, die Betragsfunktion und die Höhenlinien der Funktion zeichnet. Dann hat man eine ungefähre Vorstellung davon, wie der Graph von g aussieht.
Dieses sollen Sie nun für die Quadratfunktion tun.
Sei $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) := z^2 \end{array} \right\}$.

a) Zeichnen Sie die Bilder der zur Imaginärachse parallelen Geraden unter f und die Bilder der zur Realachse parallelen Geraden unter f.

Bemerkung: Eine zur Imaginärachse parallele Gerade ist $\{z \in \mathbb{C} : z = \alpha + i \cdot \operatorname{Im}(z)\}$ mit einem festen $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $|f| : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ z & \mapsto & |f|(z) := |z^2| \end{array} \right\}$.

c) Zeichnen Sie die Höhenlinien von f.

Bemerkung: Die Höhenlinien einer komplexwertigen Funktion bezeichnen diejenigen Mengen, deren Elemente alle auf komplexe Zahlen mit demselben Imaginärteil oder mit demselben Realteil abgebildet werden.
Die Höhenlinie zum Imaginärteil $\beta \in \mathbb{R}$ von f wäre also

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(f(z)) = \beta\}.$$

Die Höhenlinie zum Realteil $\alpha \in \mathbb{R}$ von f wäre dementsprechend

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = \alpha\}.$$