Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 414	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 6

26. November 2007

Abgabe am Montag, den 03.12.2007 vor der Vorlesung

Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 16

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz! Divergiert eine Folge, so untersuchen Sie, ob die Folge der Beträge der Ursprungsfolgenglieder konvergiert! Berechnen Sie für alle konvergenten Folgen den Grenzwert! Beweisen Sie für alle divergenten Folgen die Divergenz.

Seien für alle $n \in \mathbb{N}$

a) $a_n := (-1)^n \cdot \dfrac{3 \cdot n^3 + n^2 - 17 \cdot n}{2 \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}$

b) $b_n := \dfrac{n \cdot \sin(n)}{n^2 + 1}$

c) $c_n := \dfrac{n!}{10^n}$

d) $d_n := \sqrt{4 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 3} - 2 \cdot n$

Aufgabe 17

Seien $\ell, m \in \mathbb{N}_0$, $a_j, b_k \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \{n \in \mathbb{N}_0 : n < \ell\}$ und alle $k \in \{n \in \mathbb{N}_0 : n < m\}$,

$a_\ell, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p(x) := \sum\limits_{j=0}^{\ell} a_j \cdot x^j \end{array} \right\}$ und $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & q(x) := \sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k \end{array} \right\}$.

Bemerkung: Das heißt, p ist ein Polynom vom Grad ℓ und q ist ein Polynom vom Grad m.

Seien $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & c_n := e^{\frac{1}{n^4}} \end{array} \right\}$, $d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & d_n := \frac{-n+5}{2 \cdot n+1} \end{array} \right\}$, $\delta := \frac{1}{10}$ und $\varepsilon := \frac{1}{1.000.000}$.

a) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \ell < m \text{ ist} \\ \frac{a_\ell}{b_m}, & \text{falls } \ell = m \text{ ist} \\ \infty, & \text{falls } \ell > m \text{ und } a_\ell \cdot b_m > 0 \text{ sind} \\ -\infty, & \text{falls } \ell > m \text{ und } a_\ell \cdot b_m < 0 \text{ sind} \end{cases}$!

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bestimmen Sie die minimalen $n_{c,\delta}, n_{c,\varepsilon}, n_{d,\delta}, n_{d,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $\alpha \in \{\delta, \varepsilon\}$

$$\left| c_n - \lim_{\nu\to\infty} c_\nu \right| < \alpha \quad \text{für alle } n \in \{t \in \mathbb{N} : t \geq n_{c,\alpha}\} \text{ und}$$

$$\left| d_n - \lim_{\nu\to\infty} d_\nu \right| < \alpha \quad \text{für alle } n \in \{t \in \mathbb{N} : t \geq n_{d,\alpha}\} \text{ gilt.}$$

bitte wenden

Aufgabe 18

Interpolation verwendet man, wenn man keine Funktionsvorschrift sondern nur einige Funktionswerte gegeben hat. Man versucht dabei, ein Polynom zu finden, das die Funktion, zu der die Funktionswerte gehören, möglichst genau annähert. Mit diesem Polynom kann man dann Näherungswerte an Zwischenstellen bestimmen.
Nun gibt es nur ein Polynom, dessen Grad höchstens $\ell \in \mathbb{N}_0$ beträgt, und das $\ell + 1$ vorgelegte Funktionswerte annimmt. Es bietet sich also bei $k \in \mathbb{N}$ gegebenen Funktionswerten an, das durch diese eindeutig bestimmte Polynom vom Grad kleiner oder gleich $k-1$ als „Interpolationspolynom" zu verwenden. Für dieses Polynom gibt es verschiedene Bildungsweisen.

Geben wir uns verschiedene Funktionswerte vor.
Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n\}$ mit $x_u \neq x_v$ für alle $u, v \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n\}$ mit $u \neq v$. (Das heißt, die „xe" sind paarweise verschieden.)
Die „xe" heißen „Stützstellen", die „ys" „Stützwerte" und die „$(x \mid y)$s" „Stützpaare" der Interpolation.

In der Vorlesung haben Sie die Newton-Form des Interpolationspolynoms kennengelernt.
Um diese aufzustellen, bildet man zunächst die „Newton'schen Basispolynome"

$$N_r : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & N_r(x) := \prod\limits_{\nu=0}^{r-1} (x - x_\nu) \end{array} \right\} \qquad \text{für alle } r \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n\}.$$

und danach die „dividierten Differenzen". Diese sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{rcll} y_{j,j+1} & := & \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} & \text{für alle } j \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n-1\}, \\ y_{j,j+1,j+2} & := & \frac{y_{j+1,j+2} - y_{j,j+1}}{x_{j+2} - x_j} & \text{für alle } j \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n-2\}, \\ y_{j,j+1,j+2,j+3} & := & \frac{y_{j+1,j+2,j+3} - y_{j,j+1,j+2}}{x_{j+3} - x_j} & \text{für alle } j \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n-3\}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{0,\ldots,n} & := & \frac{y_{1,\ldots,n} - y_{0,\ldots,n-1}}{x_n - x_0} & \end{array}$$

Die Newton-Form des Interpolationspolynoms ist $p : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p(x) := \sum\limits_{r=0}^{n} y_{0,\ldots,r} \cdot N_r(x) \end{array} \right\}$.

Eine zweite Möglichkeit der Darstellung offenbart sich in der Langrange-Form des Interpolationspolynoms. Die „Lagrange'schen Basispolynome" werden definiert durch

$$L_s : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & L_s(x) := \prod\limits_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq s}}^{n} \dfrac{x - x_\nu}{x_s - x_\nu} \end{array} \right\} \qquad \text{für alle } s \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n\}.$$

Dann ist $q : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & q(x) := \sum\limits_{s=0}^{n} y_s \cdot L_s(x) \end{array} \right\}$ die Lagrange-Form des Interpolationspolynoms.

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützpaaren

$(0 \mid 3)$, $(3 \mid 3)$, $(2 \mid 1)$, $(4 \mid 3)$ und $(-1 \mid -7)$!

Nutzen Sie hierfür die Newton-Form und formen Sie diese in Normalform um!

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützpaaren

$(0 \mid 3)$, $(3 \mid 3)$, $(2 \mid 1)$, $(4 \mid 3)$ und $(-1 \mid -7)$!

Nutzen Sie hierfür die Lagrange-Form und formen Sie diese in Normalform um!

c) Nun sollen Sie zeigen, dass die Lagrange-Form stets (also nicht nur zu den oben genannten Stützpunkten, sondern im allgemeinen Fall) tatsächlich das Interpolationspolynom zu den gegebenen Stützstellen und Stützwerten repräsentiert. Zeigen Sie also

$$q(x_j) = y_j \qquad \text{für alle } j \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n\}!$$

Warum folgt daraus $p = q$?

Bemerkung: Wie Sie hoffentlich gesehen haben, ist die Lagrange-Form die in der Theorie einfacher zu handhabende Form, während die Newton-Form ihre Vorteile in der Anwendung hat.