Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 414	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 9

7. Januar 2008

Abgabe am Montag, den 14.01.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

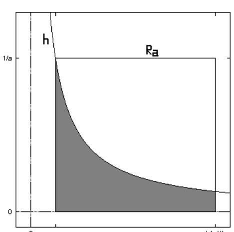
Aufgabe 25

Sei $U \in \mathbb{R}$ mit $U > 0$ gegeben. Betrachten Sie die Hyperbel $h : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) := \dfrac{1}{x} \end{array} \right\}$!

Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > \frac{2}{U}$ sei

$$R_a := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b(a,U) \qquad \text{und} \qquad 0 \leq y \leq h(a) \right\},$$

wobei $b(a,U) \in \mathbb{R}$ so gewählt wird, dass $b(a,U) > a$ ist und der Umfang des Rechtecks R_a gerade U beträgt.



Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > \frac{2}{U}$ ist R_a das Rechteck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(a \mid 0)$, $(b(a,U) \mid 0)$, $(b(a,U) \mid h(a))$ und $(a \mid h(a))$.

Sei $H := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ und } y \leq h(x) \right\}$ die Fläche unterhalb des Graphen von h.

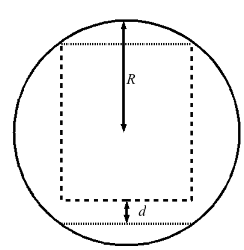
Wie muss man $a \in \mathbb{R}$ mit $a > \frac{2}{U}$ wählen, damit der Flächeninhalt $|H \cap R_a|$ maximal wird?

Bemerkung: h ist die Ableitung der Funktion $\ln(|\cdot|) : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|x|) \end{array} \right\}$.

Aufgabe 26

Seien $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $0 < d < 2 \cdot R$.

Ein Kegelfan hat die Idee, aus einer alten Kegelkugel einen Trinkbecher herzustellen. Das Innere des Trinkbechers soll zylinderförmig werden und möglichst viel Flüssigkeit fassen können.



Wo muss der Kegelfan die Säge ansetzen, wenn man davon ausgeht, dass die Kegelkugel eine perfekte Kugel vom Radius R ist und der Boden des Trinkbechers die Dicke d haben soll?

bitte wenden

Aufgabe 27

Sei $\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \exp(z) := e^z \end{array} \right\}$ die Exponentialfunktion.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion kann man zum Beispiel Sinus und Kosinus definieren:

$$\sin : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) := \operatorname{Im}\left(e^{i\cdot x}\right) \end{array} \right\} \qquad \text{und} \qquad \cos : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) := \operatorname{Re}\left(e^{i\cdot x}\right) \end{array} \right\}$$

Diese beiden Funktionen haben einige schöne Eigenschaften. Es gilt nämlich für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 & = & 1 \\ \sin(x+y) & = & \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y) \\ \cos(x+y) & = & \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y) \\ \sin(-x) = -\sin(x) & \text{und} & \cos(-x) = \cos(x) \\ \dfrac{d\sin}{dx}(x) = \cos(x) & \text{und} & \dfrac{d\cos}{dx}(x) = -\sin(x). \end{array}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ sind $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\cdot(z+\bar{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}\cdot(z-\bar{z})$. Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = \frac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2}.$$

Diese Formeln waren ein Anlass, sich auch die folgenden Funktionen anzusehen. Seien

$$\sinh : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sinh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \cosh : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right\}.$$

Diese Funktionen haben ähnliche, aber in vielerlei Hinsicht noch schönere Eigenschaften als Sinus und Kosinus. Es ist nämlich für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} (\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 & = & 1 \\ \sinh(x+y) & = & \sinh(x)\cdot\cosh(y) + \cosh(x)\cdot\sinh(y) \\ \cosh(x+y) & = & \cosh(x)\cdot\cosh(y) + \sinh(x)\cdot\sinh(y) \\ \sinh(-x) = -\sinh(x) & \text{und} & \cosh(-x) = \cosh(x) \\ \dfrac{d\sinh}{dx}(x) = \cosh(x) & \text{und} & \dfrac{d\cosh}{dx}(x) = \sinh(x). \end{array}$$

Auch aus diesem Grund nennt man sie „Sinus hyperbolicus“ und „Kosinus hyperbolicus“.
Bemerkung: „ὑπερβάλλειν“ [hüperballeyn] ist altgriechisch für „übertreffen“.
Sie sollen nun die erste und die letzte dieser Eigenschaften zeigen.

a) Zeigen Sie $\dfrac{d\sinh}{dx}(x) = \cosh(x)$ und $\dfrac{d\cosh}{dx}(x) = \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$!

b) Zeigen Sie $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$!

Wegen $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$ ist $\cosh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Also steigt sinh streng monoton auf $\mathbb{R}$.
Mit $\sinh(0) = 0$ folgt, dass cosh auf $\{y \in \mathbb{R} : y < 0\}$ streng monoton fällt und auf $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ streng monoton steigt. Ferner ist $\cosh(0) = 1$.
Seien $\mathbb{R}_0^+ := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ und $\mathbb{R}_{\geq 1} := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$.

Es können also $\operatorname{ar\,sinh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{ar\,sinh}(x) \end{array} \right\}$ und $\operatorname{ar\,cosh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 1} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{ar\,cosh}(x) \end{array} \right\}$ mit

$$\begin{array}{lrcl} & \operatorname{ar\,sinh}(\sinh(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} & \text{und} & \sinh(\operatorname{ar\,sinh}(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \text{bzw.} & \operatorname{ar\,cosh}(\cosh(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_0^+ & \text{und} & \cosh(\operatorname{ar\,cosh}(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \end{array}$$

definiert werden.
Bemerkung: Das heißt, ar sinh ist die Umkehrfunktion von sinh und ar cosh ist die Umkehrfunktion von cosh.
Diese Funktionen heißen „Area Sinus hyperbolicus“ und „Area Kosinus hyperbolicus“.

c) Zeigen Sie $\dfrac{d\operatorname{ar\,sinh}}{dx}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\dfrac{d\operatorname{ar\,cosh}}{dx}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$!