Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

I: Mo 14-16 Uhr SR 414	II: Di 11-13 Uhr SR 218
Nicolas Ketterer, Math. Inst.	Katja Reiser, Math. Inst.
III: Di 16-18 Uhr SR 01-009/13	IV: Di 16-18 Uhr SR 00-014
Julia Riegger, Gebäude 101	Jonas Unger, Gebäude 078
V: Mi 14-16 Uhr SR 00-010/14	Fragestunde: Do 16-18 Uhr
Elisabeth Wursthorn, Geb. 101	Simon Feiler, SR 00-014 (078)

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

Probeklausur

22. Juli 2008

Aufgabe 1

Sei $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \cos(x) \cdot \sin(x) \end{array} \right\}$.

Geben Sie die Fourier–Koeffizienten von f an!

Bemerkung: Sie dürfen $\sin^2(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x - \sin(x)\cdot\cos(x)}{2} + C\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $C \in \mathbb{R}$ und die Additionstheoreme verwenden.

Aufgabe 2

Finden Sie alle $(u, v, x, y)^T \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} 3\cdot u - 5\cdot v - 3\cdot x - 9\cdot y &= 3, \\ -2\cdot u + 2\cdot v + x + 3\cdot y &= -3, \\ 2\cdot u + 2\cdot v - 2\cdot x + 2\cdot y &= \frac{2}{3} \quad \text{und} \\ 7\cdot u + 3\cdot v - 8\cdot x &= 2! \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{D} := \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 3 & 8 & -3 \\ 6 & 12 & -4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $\mathcal{D}$!

Aufgabe 4

Seien $h \in \mathbb{R}$ mit $h > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$.

Sei $Z \subseteq \mathbb{R}^3$ ein schiefer Kreiskegel vom Radius r, dessen Spitze im Ursprung steht und dessen Grundfläche parallel zur xy–Ebene ist, die z–Achse im Punkt $(0; 0; h)^T$ berührt und einen Durchmesser in der xz–Ebene hat, derart, dass $x \geq 0$ für alle $(x, y, z)^T \in Z$ ist.

Sei $\pi_{xz}(Z) \subseteq \mathbb{R}^2$ die Projektion von Z in die xz–Ebene. $\pi_{xz}(Z)$ ist ein Dreieck.

a) Zeichnen Sie Z und $\pi_{xz}(Z)$!

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt von $\pi_{xz}(Z)$!

Bemerkung: Die Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks dürfen Sie geometrisch begründen. Den Flächeninhalt hingegen sollen Sie berechnen (und insbesondere nicht geometrisch begründen).

bitte wenden

Aufgabe 5

Sei $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y)^T & \mapsto & g(x, y) := \dfrac{x^2 \cdot y^3 + x + y^2}{y} \end{array} \right\}$.

Bestimmen Sie die Extremwerte von g auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$!

Aufgabe 6

Sei $\vec{V} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \vec{V}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \cdot \cos(x+y) + \sin(x+y) \\ x \cdot \cos(x+y) - \sin(y) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$.

Sei $\vec{\gamma} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \pi \cdot \sin^2(t) \\ \pi \cdot \cos^2(t) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$. Sei $I := \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{(\vec{\gamma};I)} \vec{V}(\vec{z}) \cdot \mathrm{d}\vec{z}$ auf direktem Weg!

b) Stellen Sie fest, ob $\vec{V}$ ein Potentialfeld ist, geben Sie gegebenenfalls ein Potential von $\vec{V}$ an und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Potential von $\vec{V}$ handelt!

Aufgabe 7

Seien $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$.
Sei $K := \left\{ (x \cdot \cos(y), x \cdot \sin(y), x \cdot y)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x, y)^T \in [0; R] \times [0; 2 \cdot \pi) \right\}$. Trennt man ein Kreissegment von einer Kreisscheibe ab und hält eine der entstehenden äußeren Ecken senkrecht über die andere, so erhält man eine Figur, die in etwa so aussieht wie K.

Sei $s_c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & s_c\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \dfrac{z}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + c} \end{array} \right\}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_K s_c \, \mathrm{d}\sigma$!

Aufgabe 8

Seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$, $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $\varrho > 0$ und $H \in \mathbb{R}$ mit $H > 0$.
Sei $E := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \text{ und } -\frac{H}{2} \le z \le \frac{H}{2} \right\}$.
Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Körpers, der dieselbe Form wie E und eine homogene Dichte von ϱ hat, bei Rotation um die z–Achse!
Dieses beträgt $\displaystyle\int_E \varrho \cdot \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}(x, y, z)$.

Bemerkung: Am einfachsten berechnet sich das Integral durch eine Transformation in elliptische Zylinderkoordinaten. Die Transformationsfunktion ist

$$\vec{\Phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \vec{\Phi}(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos(\varphi) \\ b \cdot r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Sie dürfen $\sin^2(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x - \sin(x) \cdot \cos(x)}{2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwenden.