Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

I: Mo, 14-16 Uhr, SR 414	II: Di, 11-13 Uhr, SR 218
Nicolas Ketterer, Math. Inst.	Katja Reiser, Math. Inst.
III: Di, 16-18 Uhr, SR 01-009/13	IV: Di, 16-18 Uhr, SR 00-014
Julia Riegger, Gebäude 101	Jonas Unger, Gebäude 078
V: Mi, 14-16 Uhr, SR 00-010/14	Fragestunde: Do, 16-18 Uhr
Elisabeth Wursthorn, Geb. 101	Simon Feiler, SR 00-014 (078)

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nummer 18

27. Mai 2008

Abgabe am Dienstag, den 02.06.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 52

Seien

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z)^T & \mapsto & f(x,y,z) := \dfrac{\sin(x \cdot e^y)}{z^2+2} \end{array} \right\},$$

$$\vec{g} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \vec{g}(x) := \begin{pmatrix} \sqrt{2+\cos(x)\cdot e^{x^2}} \\ \dfrac{x}{x^2+1} \end{pmatrix} \end{array} \right\},$$

$$\vec{h} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v,x,y)^T & \mapsto & \vec{h}(u,v,x,y) := \begin{pmatrix} u^2 \cdot \sqrt{x^2+1} \\ e^v \cdot (2 \cdot v^2 \cdot u + y^3 \cdot x) \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ und}$$

$$\vec{\jmath} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,s,t)^T & \mapsto & \vec{\jmath}(r,s,t) := \begin{pmatrix} r^2 \cdot \sin(t) + s \\ \cos(s) \cdot \ln(r^2+3) + t^2 \\ s \cdot e^{-t^2+r} \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Geben Sie an, zu welchen der Funktionen Gradienten bildbar sind! Geben Sie diese an!
Geben Sie an, zu welchen der Funktionen Divergenzen bildbar sind! Geben Sie diese an!
Geben Sie an, zu welchen der Funktionen Rotationen bildbar sind! Geben Sie diese an!
Geben Sie an, zu welchen der Funktionen Hesse-matritzen bildbar sind! Geben Sie diese an!
Geben Sie an, zu welchen der Funktionen Jacobi-matritzen bildbar sind! Geben Sie diese an!

bitte wenden

Aufgabe 53

Sei $\mathbb{R}^+ := \{w \in \mathbb{R} \mid w > 0\}$.

a) Max will aus vier identischen Stangen der Länge $L \in \mathbb{R}^+$ das Gerüst für einen quaderförmigen Wäschekorb herstellen. Der Wäschekorb soll möglichst viel Wäsche fassen können. An welchen Stellen muss Max die Stangen durchsägen?

Bemerkung: Sie dürfen davon ausgehen, dass jede der vier Stangen auf die gleiche Art gesägt werden muss.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y)^T & \mapsto & \varphi(x,y) := \ln\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left(e^{y^2} - e\right) \end{array} \right\}!$$

Aufgabe 54

a) Sei $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y)^T & \mapsto & \psi(x,y) := x^2 \cdot \sinh(y+1) - y \cdot \cosh(x-2) + x \end{array} \right\}$.

Sei $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \alpha & \mapsto & s(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$.

Bestimmen Sie $\partial_{s(\alpha)}\psi(x,y)$ für alle $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$!

Für welche $\alpha \in [0; 2 \cdot \pi)$ ist $\partial_{s(\alpha)}\psi(2,-1)$ maximal bzw. minimal?

Bemerkung: Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $\cos(z) \neq 0$ gelten

$$(\cos(z))^2 = \frac{1}{(\tan(z))^2 + 1} \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = \tan(z) \cdot \cos(z).$$

Denken Sie an die Nullstellen des cos und die Periodizität des tan!

b) Seien $\mathbb{R}_{\geq -1} := \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq -1\}$ und $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq -1} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y)^T & \mapsto & \chi(x,y) := 2 \cdot y \cdot \sqrt{1+x}^3 \end{array} \right\}$.

Geben Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Ableitung $D_\chi(t)$ von χ im Punkt $\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq -1} \times \mathbb{R}$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ an!