Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

I: Mo, 14-16 Uhr, SR 414	II: Di, 11-13 Uhr, SR 218
Nicolas Ketterer, Math. Inst.	Katja Reiser, Math. Inst.
III: Di, 16-18 Uhr, SR 01-009/13	IV: Di, 16-18 Uhr, SR 00-014
Julia Riegger, Gebäude 101	Jonas Unger, Gebäude 078
V: Mi, 14-16 Uhr, SR 00-010/14	Fragestunde: Do, 16-18 Uhr
Elisabeth Wursthorn, Geb. 101	Simon Feiler, SR 00-014 (078)

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nummer 19

02. Juni 2008

Abgabe am Dienstag, den 09.06.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Der Schwerpunkt von Massepunkten

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\vec{z}_j \in \mathbb{R}^n$ und $m_j \in \mathbb{R}$ mit $m_j > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq m$ gegeben.
Stellt man sich nun vor, dass sich für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq m$ in dem Punkt $\vec{z}_j$ ein Massepunkt der Masse m_j befindet, so lässt sich der Schwerpunkt dieser Massepunkte berechnen, indem man dasjenige $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ berechnet, welches

$$\sum_{j=1}^{m} m_j \cdot \|\vec{z} - \vec{z}_j\|^2$$

minimiert.

Aufgabe 55

a) Im Punkt $(3,0)^T \in \mathbb{R}^2$ befinde sich ein Massepunkt, der 3 kg wiegt.
Im Punkt $(1,2)^T \in \mathbb{R}^2$ befinde sich ein Massepunkt, der 1 kg wiegt.
Im Punkt $(-2,5)^T \in \mathbb{R}^2$ befinde sich ein Massepunkt, der 5 kg wiegt.
Bestimmen Sie den Schwerpunkt der drei Massepunkte!

b) Eine Firma stellt verschieden große Glas-Schüsseln her. Alle sind quaderförmig, haben eine offene Seite und sind ansonsten geschlossen. Die Firma will den Glas-Verbrauch minimieren. Mit welchen Abmessungen muss sie dafür eine Schüssel, die ein Volumen von $V \in \mathbb{R}$ mit $V > 0$ hat, fertigen?

Bemerkung: Die Dicke des Glases dürfen Sie vernachlässigen.

bitte wenden

Aufgabe 56

a) Sei $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (y,z)^T & \mapsto & f(y,z) := e^{z+y} \end{array} \right\}.$

Bestimmen Sie das TAYLOR–Polynom $T_{f,2}\left(\,\cdot\,,\vec{0}\right)$ in Richtung von $\operatorname{grad}(f)(0;0)$!

b) Sei $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z)^T & \mapsto & g(x,y,z) := e^{z+y} \cdot \cos\left(x^2 \cdot y\right) \end{array} \right\}.$

Bestimmen Sie das TAYLOR–Polynom $T_{g,2}\left(\,\cdot\,,\vec{0}\right)$ in Richtung von $\operatorname{grad}(g)(0;0;0)$, indem Sie die dafür nötigen Ableitungen bestimmen!

Bemerkung: Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Aufgabenteile!
Können Sie die Auffälligkeit erklären?

Aufgabe 57

Sei $\vec{p} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \vec{p}(t) := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \ln\left(t^4+4\right) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$

Sei $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z)^T & \mapsto & q\left((x,y,z)^T\right) := 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot z^3 \end{array} \right\}.$

Sei $r : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & r(t) := q(\vec{p}(t)) \end{array} \right\}.$

Sei $\vec{\Phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;\infty) \times [0; 2\cdot\pi) & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} & \mapsto & \vec{\Phi}(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$

Sei $\vec{K} : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \vec{K}(u,v) := \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ u^2 \cdot v^2 + v^4 \\ \frac{v}{u} \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$

Sei $D := (0;\infty) \times \left((0; 2\cdot\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\cdot\pi}{2}\right\}\right)$.

a) Berechnen Sie $\dfrac{d}{dt}(q(\vec{p}(t)))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit der mehrdimensionalen Kettenregel!

b) Geben Sie $r(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ an und berechnen Sie $r'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ohne die mehrdimensionale Kettenregel!

c) Berechnen Sie die JACOBI-matrix $\mathcal{J}_{\vec{K}\circ\vec{\Phi}}(r,\varphi)$ für alle $(r,\varphi)^T \in D$ mit der mehrdimensionalen Kettenregel!

d) Geben Sie $\vec{K}\left(\left(\vec{\Phi}(r,\varphi)\right)^T\right)$ für alle $(r,\varphi)^T \in D$ an!