Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

I: Mo, 14-16 Uhr, SR 414	II: Di, 11-13 Uhr, SR 218
Nicolas Ketterer, Math. Inst.	Katja Reiser, Math. Inst.
III: Di, 16-18 Uhr, SR 01-009/13	IV: Di, 16-18 Uhr, SR 00-014
Julia Riegger, Gebäude 101	Jonas Unger, Gebäude 078
V: Mi, 14-16 Uhr, SR 00-010/14	Fragestunde: Do, 16-18 Uhr
Elisabeth Wursthorn, Geb. 101	Simon Feiler, SR 00-014 (078)

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nummer 20

10. Juni 2008

Abgabe am Dienstag, den 17.06.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 58

Sei $D := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \middle| \, y \cdot z > 0 \right\}$.

Sei $F : \left\{ \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z)^T & \mapsto & F(x,y,z) := x \cdot z + \ln(y \cdot z) - 1 \end{array} \right\}$.

Für alle $(x_0,y_0,z_0)^T \in D$ mit $x_0 \neq -\frac{1}{z_0}$ ist $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Es ist $F(1;1;1) = 0$.

Also gibt es ein $R \subseteq \mathbb{R}^2$, ein $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $(1;1)^T \in \mathring{R}$, $1 \in \mathring{I}$, $R \times I \subseteq D$ und $\frac{dF}{dz} \neq 0$ auf $\mathring{R} \times \mathring{I}$ und eine Funktion $g : \left\{ \begin{array}{rcl} R & \to & I \\ (x,y)^T & \mapsto & g(x,y) \end{array} \right\}$ derart, dass $g(1;1) = 1$ ist und für alle $(x,y,z)^T \in R \times I$ gilt

$$F(x,y,z) = 0 \quad \iff \quad z = g(x,y).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der für alle $(x,y)^T \in R$ gültigen Gleichung $F(x,y,g(x,y)) = 0$ und ihren Ableitungen die Hesse-matrix $\mathcal{H}_g(1;1)$ von g im Punkt $(1;1)^T \in R$!

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathcal{H}_g(1;1)$!

c) Begründen Sie, dass g keine Extremstellen in $\mathring{R}$ hat!

bitte wenden

Aufgabe 59

a) Seien $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right\}$ eine C^1–Funktion und

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) := \int\limits_0^x f(z) \cdot \mathrm{e}^{-x+z}\, dz \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass g eine Lösung y der folgenden Differentialgleichung ist!

$$y''(x) + 2 \cdot y'(x) + y(x) = f(x) + f'(x) \;\text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

b) Sei $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) := \int\limits_x^{x^2} \mathrm{e}^{(x+y)^2}\, dy \end{array} \right\}.$

Berechnen Sie die Ableitung von F!

Aufgabe 60

a) Seien $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \end{array} \right\}$ zweimal partiell differenzierbar auf $\mathring{A}$,

$B := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in [0;\infty) \times \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \in A \right\}$ und

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} B & \to & \mathbb{R} \\ (r,\varphi)^T & \mapsto & F(r,\varphi) := f\left(\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}\right) \end{array} \right\}.$$

Dann ist F zweimal partiell differenzierbar auf $\mathring{B}$.

Bemerkung: Die zweiten partiellen Ableitungen von f und F müssen nicht stetig sein.

In der Vorlesung haben Sie die für alle $(r,\varphi)^T \in \mathring{B}$ gültige Formel

$$\begin{aligned} \Delta f\left(\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}\right) &= f_{xx}\left(\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}\right) + f_{yy}\left(\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}\right) \\ &= F_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r} \cdot F_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2} \cdot F_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \end{aligned}$$

kennengelernt. Diese sollen Sie nun beweisen.

b) Sei $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y)^T & \mapsto & g(x,y) := \sin(x+y) \cdot \cos(x-y) \end{array} \right\}.$

Prüfen Sie, ob $g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) = 0$ für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist!

c) Sei $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0;0)^T\right\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y)^T & \mapsto & h(x,y) := \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{array} \right\}.$

Prüfen Sie, ob $h_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0$ für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0;0)^T\right\}$ ist!