**Albert-Ludwigs-Universität Freiburg**
**Mathematisches Institut**
**Abteilung für Reine Mathematik**
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

| | |
|---|---|
| I: Mo, 14-16 Uhr, SR 414 | II: Di, 11-13 Uhr, SR 218 |
| Nicolas Ketterer, Math. Inst. | Katja Reiser, Math. Inst. |
| III: Di, 16-18 Uhr, SR 01-009/13 | IV: Di, 16-18 Uhr, SR 00-014 |
| Julia Riegger, Gebäude 101 | Jonas Unger, Gebäude 078 |
| V: Mi, 14-16 Uhr, SR 00-010/14 | Fragestunde: Do, 16-18 Uhr |
| Elisabeth Wursthorn, Geb. 101 | Simon Feiler, SR 00-014 (078) |

Übungen zur Vorlesung

# Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

## Übungsblatt Nummer 21

17. Juni 2008

**Abgabe am Dienstag, den 24.06.2008 vor der Vorlesung**
**Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.**

### Aufgabe 61

**a)** Berechnen Sie $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left( \int\limits_{\frac{\sqrt{3\cdot\pi}}{3}}^{\sqrt{\pi}} x^3 \cdot \cos\left(x^2 \cdot y\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$!

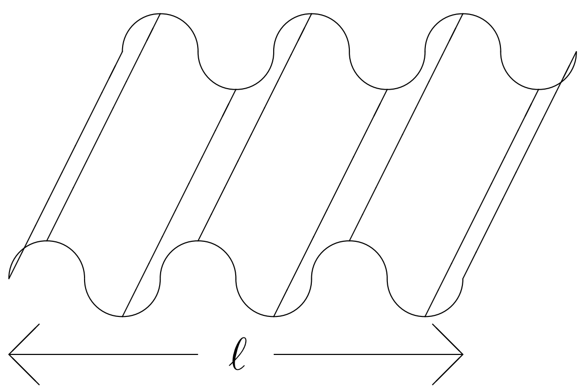
**b)** Seien $D := \left(0; \frac{1}{4}\right] \times [-1; 1]$ und $q : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y)^T & \mapsto & q\,(x,y) := \dfrac{1}{\sqrt{x \cdot y^2 + 2 \cdot x}} \end{array} \right\}$.

Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_D q\,(x,y)\,\mathrm{d}\,(x,y)$!

*Bemerkung:* Erinneren Sie sich an Aufgabe 27 (insbesondere Aufgabenteil c))?

**c)** Sei $\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} |\, a > 0\}$.

Hermann befestigt über seiner Eingangstür ein Vordach. Er montiert das Dach in einer Höhe von $h_1 \in \mathbb{R}^+$ am Haus und neigt es so, dass sich das Ende des Daches $h_2 \in (0; h_1)$ über dem Boden befindet, damit Regen, der auf das Dach fällt, ablaufen kann. Das Dach besteht aus Wellblech der Länge $\ell \in \mathbb{R}^+$ und der Breite $\tilde{b} \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{b} > h_1 - h_2$, das als Sinusförmig mit Periode $2 \cdot \pi$ angenommen werden kann. Wie groß ist das Volumen der Luft, die sich unter dem Vordach befindet?




*Bemerkung:* Definieren Sie $b := \sqrt{\tilde{b}^2 - (h_1 - h_2)^2}$!
$\ell$ ist nicht notwendig ein Vielfaches von $2 \cdot \pi$.

bitte wenden

**Aufgabe 62**

**a)** Seien $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$, $\mathcal{A} \supseteq \{w \in \mathbb{R} | \, w \geq 0\}$ derart, dass $x + p \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \mathcal{A}$ ist, und $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$ mit $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathcal{A}$.

*Bemerkung:* Das heißt, $f$ ist eine $p$–periodische Funktion von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{R}$.
Ferner gilt dann $f(x + n \cdot p) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie, dass für die LAPLACE–Transformierte $\mathfrak{L}(f)$ gilt

$$(\mathfrak{L}(f))(s) \;=\; \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-p \cdot s}} \cdot \int_0^p f(x) \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > 0!$$

*Bemerkung:* Gehen Sie von der Darstellung $(\mathfrak{L}(f))(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot t} \, \mathrm{d}t$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ aus! Zerlegen Sie das Integral dann in eine Summe von Integralen der Integrationslänge $p$! Substituieren Sie in jedem Summanden derart, dass die untere Grenze des jeweiligen Integrationsbereichs 0 ist!
Beachten Sie, dass $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist!

**b)** Sei $g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) := x^2 - 5 \cdot x + 3 \end{array} \right\}$.

Bestimmen Sie die LAPLACE–Transformierte $\mathfrak{L}(g)$ von $g$ auf $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$!

**c)** Seien $\omega \in \mathbb{R}$ und $h : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) := \sinh(\omega \cdot x) \end{array} \right\}$.

Bestimmen Sie die LAPLACE–Transformierte $\mathfrak{L}(h)$ von $h$!

Finden Sie ein $\sigma \in \mathbb{R}$, so dass $\mathfrak{L}(h)$ auf $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > \sigma\}$ konvergiert!

**Aufgabe 63**

Finden Sie mit Hilfe der LAPLACE–Transformation eine Funktion $y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x) \end{array} \right\}$ mit

$$\begin{aligned} y''(x) + 2 \cdot y'(x) - 3 \cdot y(x) &= -4 \cdot \mathrm{e}^{-5 \cdot x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = -1 \quad &\text{und} \quad y'(0) = 4. \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\left\{ \begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > a\} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \dfrac{1}{s-a} \end{array} \right\}$ die LAPLACE–Transformierte von $(\exp)^a$.
Verwenden Sie Partialbruchzerlegung und die Linearität der LAPLACE–Transformation!