Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

I: Mo, 14-16 Uhr, SR 414	II: Di, 11-13 Uhr, SR 218
Nicolas Ketterer, Math. Inst.	Katja Reiser, Math. Inst.
III: Di, 16-18 Uhr, SR 01-009/13	IV: Di, 16-18 Uhr, SR 00-014
Julia Riegger, Gebäude 101	Jonas Unger, Gebäude 078
V: Mi, 14-16 Uhr, SR 00-010/14	Fragestunde: Do, 16-18 Uhr
Elisabeth Wursthorn, Geb. 101	Simon Feiler, SR 00-014 (078)

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nummer 23

01. Juli 2008

Abgabe am Dienstag, den 08.07.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 67

Seien $\mathbb{R}^+ := \{w \in \mathbb{R} \mid w > 0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $R \in \mathbb{R}^+$ mit $R \geq \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \cdot r$, $h \in \mathbb{R}^+$ und $H \in \mathbb{R}^+$.
Es soll das Volumen eines Schlitzschraubendrehereinsatzes berechnet werden.
Der so genannte Bit bestehe aus einem sechseckigen Zylinder (auch „Prisma“) der Höhe H und der Kantenlänge R als „Aufnahme“, auf den die Schraubendreherklinge gesetzt ist. Die Klinge selbst entstehe dadurch, dass man von einem Kreiszylinder der Höhe h und des Radius' r zwei Keile abtrennt.
Dazu setze man auf einem Durchmesser der einen Kreisfläche eine Säge an und säge zweimal auf dem kürzesten Weg diagonal an den Rand der anderen Kreisfläche.
Berechnen Sie das Volumen des Bits unter Verwendung des Prinzips von Cavalieri!

Bemerkung: Sie dürfen die Formel $\mathfrak{V} = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{h}$ für das Volumen $\mathfrak{V}$ eines Zylinders der Grundfläche $\mathfrak{G} \in \mathbb{R}^+$ und der Höhe $\mathfrak{h} \in \mathbb{R}^+$ verwenden.

Aufgabe 68

Seien $\mathbb{R}^+ := \{w \in \mathbb{R} \mid w > 0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $R \in \mathbb{R}^+$ mit $R > r$.
Sei $\mathcal{R} := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \middle| r^2 \leq x^2 + y^2 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$.
$\mathcal{R}$ heißt sphärischer Ring um $(0; 0; 0)^T$ mit Innendurchmesser r und Außendurchmesser R.

a) Zeichnen Sie eine Skizze von $\mathcal{R}$!

b) Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{R}$ mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri!

c) Zeigen Sie, dass zwei gleich hohe sphärische Ringe stets gleiche Volumina haben!

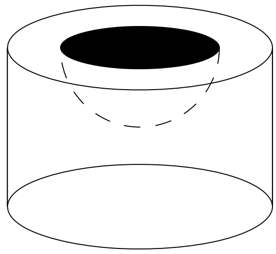
Aufgabenteil **d)** finden Sie auf der nächsten Seite.

bitte wenden

d) Sei $H \in \mathbb{R}^+$ mit $H > r$.

Bei der Herstellung von Bleikugeln werden Gießformen verwendet, die die rechts dargestellte Form haben. Berechnen Sie mit Hilfe des Prinzips von CAVALIERI das Volumen einer solchen Gießform mit Höhe H, äußerem Radius R und innerem Radius r!

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Volumen, das Sie geometrisch erwarten würden!



DAS „BEGLEITENDE ZWEIBEIN“

Analog zu dem begleitenden Dreibein von vektorwertigen Funktionen mit drei Komponenten von einer Veränderlichen kann man vektorwertigen Funktionen mit zwei Komponenenten von einer Veränderlichen ein „begleitendes Zweibein“ zuordnen.

Zu einer Funktion $\vec{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \vec{f}(x) \end{array} \right\}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ und $\vec{f}'(x) \neq \vec{0} \neq \vec{f}''(x)$ für alle $x \in \mathring{I}$ bildet man den Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}_{\vec{f}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathring{I} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \vec{T}_{\vec{f}}(x) := \dfrac{\vec{f}'(x)}{\left\| \vec{f}'(x) \right\|} \end{array} \right\}$ und den Normaleneinheitsvektor $\vec{N}_{\vec{f}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathring{I} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \vec{N}_{\vec{f}}(x) := \dfrac{\vec{T}'_{\vec{f}}(x)}{\left\| \vec{T}'_{\vec{f}}(x) \right\|} \end{array} \right\}$.

Aufgabe 69

Sei $\mathbb{R}^+ := \{ w \in \mathbb{R} |\, w > 0 \}$. Seien $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ mit $a < b$ und $c \in \mathbb{R}^+$.

Seien $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := c \cdot \ln(x) \end{array} \right\}$ und $\vec{\gamma} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$.

Sei $G := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y^2 = 16 \cdot (x+5)^3 \text{ und } x \leq 3 \right\}$.

a) Geben Sie das „begleitende Zweibein“ von $\vec{\gamma}$ an!

b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks $\vec{\gamma}|_{[a;b]}$!

Bemerkung: Beginnen Sie mit einer partiellen Integration und substituieren Sie in dem verbleibenden Integral $s = \frac{c}{\tau}$!
Aufgabe 27c) ist erneut hilfreich.

c) Berechnen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks G!