Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

Nachklausur

10. September 2009

Datum: Donnerstag, der 10. September 2009
Ort: Hörsaal Rundbau, Albertstraße 21
Zeit: 14.$\underline{00}$ Uhr bis 16.$\underline{00}$ Uhr

Bitte füllen Sie die folgende Tabelle leserlich und in Druckbuchstaben aus!
Schreiben Sie außerdem auf jedes Blatt, das Sie abgeben, Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer!

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Geburtsort: ______________________________

Studienfach: ______________________________

Abschlussart: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Nachklausurnummer: ______________________________

Ihre Nachklausurnummer bekommen Sie ausgeteilt. Es handelt sich um eine zufällige Zahl.
Das Nachklausurergebnis wird unter dieser Nachklausurnummer veröffentlicht.
Wenn Sie keine Veröffentlichung wünschen, dann lassen Sie das entsprechende Feld bitte frei!

Die nun folgende Tabelle wird bei der Korrektur ausgefüllt.
Bitte lassen Sie diese Tabelle frei!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	**Summe**	**Note**
Punkte										

Nachklausuraufgabe 1
Bestimmen Sie zwei modulo 210 inkongruente Lösungen des folgenden Kongruenzensystems:

$$2x \equiv 3 \bmod 5 \qquad 4x \equiv 2 \bmod 6 \qquad 3x \equiv 2 \bmod 7$$

Nachklausuraufgabe 2
Zeigen Sie, dass $\tau(n)$ genau dann ungerade ist, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl ist.

Nachklausuraufgabe 3
Bestimmen Sie alle Lösungen der Kongruenz $\quad 16x^2 - 2x - 10 \equiv 0 \bmod 245.$

Nachklausuraufgabe 4
Seien $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, p) = 1$ und $\operatorname{ord}_p(a) = 3$. Zeigen Sie $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$.
Hinweis: Es gilt $a^3 - 1 = (a-1) \cdot (a^2 + a + 1)$. Betrachten Sie den Rest von $(a+1)^2 \bmod p$.

Nachklausuraufgabe 5
Seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a := 2^k + 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $(n, m) = 1$, $n \equiv 1 \bmod 2$ und $m \equiv a \bmod (4n)$. Zeigen Sie $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)$.

Nachklausuraufgabe 6
Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zwei zahlentheoretische Funktionen.
Beweisen Sie die Identität $\quad \ln \cdot (f * g) = (\ln \cdot f) * g + f * (\ln \cdot g)$.

Nachklausuraufgabe 7
Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt mehrfach multiplikativ vollkommen, falls $\prod\limits_{d|n} d$ eine Potenz von n darstellt. Zeigen Sie, dass jede gerade vollkommene Zahl mehrfach multiplikativ vollkommen ist.

Nachklausuraufgabe 8
Geben Sie alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(k) = 44$ an.