Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

2. Übungsblatt

27. April 2009

Abgabe der Lösungen bis zum **04. Mai 2009 um 14.$\underline{^{15}}$ Uhr**

Aufgabe 5 (Wurzeln aus ganzen Zahlen sind nie echt rational) 3 Punkte

a) Seien $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Folgt aus $a^n | b^n$ stets $a|b$?

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, in deren Primfaktorzerlegung ein Primfaktor in ungerader Potenz auftritt, irrational ist.

(Tipp: Betrachten Sie $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot \max\{\, k^2 \in \mathbb{N}_0 \,;\, k \in \mathbb{Z} \text{ und } k^2|n \} = n$.)

Aufgabe 6 (Lösungen der linearen Diophantischen Gleichung in zwei Variablen)
Seien $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$. Sei

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \,;\, ax + by = c \right\}$$

die Menge der Lösungen der zu a, b und c gehörenden linearen Diophantischen Gleichung in zwei Variablen.

a) Zeigen Sie $\quad \#\mathcal{L} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \nmid c \quad$!

b) Es gelte $(a, b)\,|c$ und es sei $(u, v)^T \in \mathbb{Z}^2$ mit $au + bv = c$.

Geben Sie sämtliche Elemente von $\mathcal{L}$ an!

c) Das „Hundert–Vögel–Problem“ (Chang Ch'in Chien, 5. Jahrhundert nach Christus)

Ein Hahn kostet fünf Ch'ien, eine Henne kostet drei Ch'ien und drei Küken kosten einen Ch'ien.

Für einhundert Ch'ien erhält man einhundet Vögel.

Wieviele Hähne, wieviele Hennen und wieviele Küken sind das?

bitte wenden

Aufgabe 7 (Unendlichkeit der Primzahlmenge — Teil 1 und Teil 2) 5 Punkte

a) Seien $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$ mit $0 < \#\mathcal{P} < \infty$ und $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Zeigen Sie die Existenz eines $q \in \mathbb{P} \setminus \mathcal{P}$ mit

$$q \left| \left(\prod_{p \in \mathcal{Q}} p + \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}} p \right) \right.$$

und schließen Sie $\#\mathbb{P} = \infty$!

b) Seien $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$ mit $0 < \#\mathcal{P} < \infty$, $k := \#\mathcal{P}$ und

$$N_{\mathcal{P}} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & N_{\mathcal{P}}(x) := \#\{n \in \mathbb{N}\,; n \leq x \text{ und } \{p \in \mathbb{P}\,; p|n\} \subseteq \mathcal{P}\} \end{array} \right\} .$$

Zeigen Sie, dass es ein nur von k abhängiges $C(k) \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass

$$N_{\mathcal{P}}(x) \leq C(k) \cdot \ln^k(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq 2$$

ist und schließen Sie $\#\mathbb{P} = \infty$!

Aufgabe 8 (Ein Kongruenzensystem)
Zeigen Sie

$$\mathbb{Z} = (1 + 2\mathbb{Z}) \cup (1 + 3\mathbb{Z}) \cup (2 + 4\mathbb{Z}) \cup (0 + 6\mathbb{Z}) \cup (4 + 8\mathbb{Z}) \cup (8 + 12\mathbb{Z}) \qquad !$$