Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

6. Übungsblatt

25. Mai 2009

Abgabe der Lösungen bis zum **08. Juni 2009 um 14.$^{\underline{15}}$ Uhr**

Aufgabe 21 (Verletzung der paarweisen Teilerfremdheit im Chinesischen Restsatz 3.3)
Seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $m_j \in \mathbb{N}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k$ derart, dass es ein $j_1 \in \mathbb{N}$ und ein $j_2 \in \mathbb{N} \setminus \{j_1\}$ mit $\max\{j_1, j_2\} \leq k$ und $(m_{j_1}, m_{j_2}) > 1$ gibt.
Seien $x_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge (2,5 Punkte)

$$\{x \in \mathbb{Z}\,;\, x \equiv x_j \bmod m_j \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } j \leq k\}$$

entweder leer oder eine Vereinigung von mehr als einer Restklasse modulo $\prod_{j=1}^{k} m_j$ ist!

b) Zeigen Sie, dass (0,5 Punkte)

$$(m_j, m_\ell) \mid (x_j - x_\ell)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $j < \ell \leq k$ gilt, wenn es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv x_j \bmod m_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k$ gibt!

c) Zeigen Sie, dass aus $(m_1, m_2) \mid (x_1 - x_2)$ die Existenz eines $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv x_1 \bmod m_1$ und $x \equiv x_2 \bmod m_2$ folgt! (1 Punkt)

Aufgabe 22 (Lösungzahlen)

a) Seien $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{Z}[x]$, $m \in \mathbb{N}$ und (2 Punkte)

$$\varrho_{.}(m, f) : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N}_0 \\ a & \mapsto & \varrho_a(m, f) := \#\{x \in \mathbb{N}_0\,;\, x < m \text{ und } f(x) + a \equiv 0 \bmod m\} \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie

$$\sum_{a=0}^{m-1} \varrho_a(m, f) = m \qquad !$$

b) Sei $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) := x^2 + 5x - 7 \end{array} \right\}.$ (2 Punkte)

Geben Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $g(x) \equiv 0 \bmod 143$ an!

bitte wenden

Aufgabe 23 (Unendlichkeit der Primzahlmenge — Teil 3)
Für eine Menge $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{O} \subseteq \{\mathcal{D}\,;\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}\}$ heißt $\mathfrak{O}$ **Topologie auf $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**, falls

(1) $\{\emptyset, \mathcal{M}\} \subseteq \mathfrak{O}$,

(2) $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{O}_j \in \mathfrak{O}$ für alle Mengen $\mathcal{J}$ und alle Mengen $\{\mathcal{O}_j \in \mathfrak{O}\,; j \in \mathcal{J}\}$ und

(3) $\bigcap\limits_{\ell=1}^{n} \mathcal{O}_\ell \in \mathfrak{O}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Mengen $\{\mathcal{O}_\ell \in \mathfrak{O}\,; \ell \in \mathbb{N}$ und $\ell \leq n\}$ sind.

(Bemerkung: Eine Vereinigung über die leere Menge $\left(\bigcup\limits_{j \in \emptyset} \ldots\right)$ ist als leere Menge definiert.)

Ist $\mathfrak{O}$ eine Topologie auf einer nichtleeren Menge $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \neq \emptyset$, so heißt $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ ein **topologischer Raum**, alle $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$ heißen **offen in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ bezüglich $\boldsymbol{\mathfrak{O}}$** und alle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, für die ein $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{O}$ existiert, heißen **abgeschlossen in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ bezüglich $\boldsymbol{\mathfrak{O}}$**.
Sei

$$\mathfrak{Z} := \left\{ \bigcup_{j \in \mathcal{J}} (a_j + m_j\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}\;;\; \begin{array}{l} \mathcal{J} \text{ ist eine beliebige Menge und es sind} \\ a_j \in \mathbb{Z} \text{ und } m_j \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ für alle } j \in \mathcal{J} \end{array} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass in jedem topologischen Raum jede endliche Vereinigung von in der Grundmenge bezüglich der Topologie abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen in der Grundmenge bezüglich der Topologie ist! (0,5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{Z}$ eine Topologie auf $\mathbb{Z}$ ist. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $a + m\mathbb{Z}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ offen in $\mathbb{Z}$ bezüglich $\mathfrak{Z}$ und abgeschlossen in $\mathbb{Z}$ bezüglich $\mathfrak{Z}$ ist! (0,5 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} (0 + p\mathbb{Z})$ offen in $\mathbb{Z}$ bezüglich $\mathfrak{Z}$ ist und zeigen Sie, dass $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} (0 + p\mathbb{Z})$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{Z}$ bezüglich $\mathfrak{Z}$ ist!

Schließen Sie, dass es unendliche viele Primzahlen gibt! (1 Punkt)

Aufgabe 24 (Fußballstadien)
Die Plätze der Frankfurter Commerzbank–Arena sind in 43 Blöcke eingeteilt. Im Freiburger badenova–Stadion gibt es 22 Blöcke und in der Münchner Allianz–Arena finden sich 131 Blöcke. Eine Reinigungsfirma geht davon aus, dass für die Reinigung eines jeden Blocks in einem Stadion gleich viele Reinigungskräfte vonnöten sind und rechnet aus:
„Wir haben genau 3 Mitarbeiter zu wenig, um die Commerzbank–Arena zu reinigen. 4 Mitarbeiter mehr als die Hälfte unserer Mitarbeiter würden für die Reinigung des badenova–Stadions ausreichen. Hätten wir die dreifache Anzahl der Mitarbeiter, die wir haben, so fehlten uns zur Reinigung der Allianz–Arena gerade 19 Leute.“
Wie viele Mitarbeiter hat die Firma?

(Bemerkung: Sie dürfen einen Taschenrechner benutzen, sollen aber alle Ihre Überlegungen und die dazu benötigten Zahlen zu Papier bringen.)

Zusatzfrage ohne Bewertung:
Wieviele Mitarbeiter hat die Firma, wenn die Anzahl der nötigen Reinigungskräfte für einen Block unabhängig von dem Stadion, in dem der Block sich befindet, konstant ist?