

Abgabe der Lösungen bis zum **22. Juni 2009 um 14.¹⁵ Uhr**

Aufgabe 29 (GAUSSsumme zum LEGENDRE–Symbol)

Sei $\zeta : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C} \\ p \mapsto \zeta_p \end{array} \right\}$ mit $\zeta_p^\ell \neq 1$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell < p$ und $\zeta_p^p = 1$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

Sei $S : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C} \\ p \mapsto S_p := \sum_{k=1}^{p-1} \binom{k}{p} \cdot \zeta_p^k \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{p-1} \zeta_p^{jk} = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \nmid j \\ p, & \text{falls } p \mid j \end{cases}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ und alle $p \in \mathbb{P}$! (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $S_p^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot p$ für alle $p \in \mathbb{P}$! (3 Punkte)

(Tipp: Verwenden Sie in einem Faktor Folgerung 2.6 mit einem geeigneten Multiplikator.)

Aufgabe 30 (Quadratische Kongruenz)

5 Punkte

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $3x^2 - 13x + 15 \equiv 0 \pmod{1325}$!

(Bemerkung: Für Berechnungen, die mit dem chinesischen Restsatz in Verbindung stehen, dürfen Sie Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen mit einem Taschenrechner durchführen.)

Aufgabe 31 (JACOBI–Symbol)

3 Punkte

a) Berechnen Sie $\left(\frac{15694}{12547}\right)$! (1 Punkt)

Geben Sie bei jedem Rechenschritt an, welches Gesetz Sie verwenden!

b) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{3}{3^n - 2}\right) = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt! (2 Punkte)

Aufgabe 32 (Primzahlkriterien)

a) Zeigen Sie, dass $n \in \mathbb{N}$ prim ist, wenn es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, n) = 1$ und $\text{ord}_n(a) = n - 1$ gibt! (1,5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $2 \nmid n$ genau dann prim ist, wenn es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, n) = 1$, $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ und $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid (n - 1)$ gibt!

(2,5 Punkte)